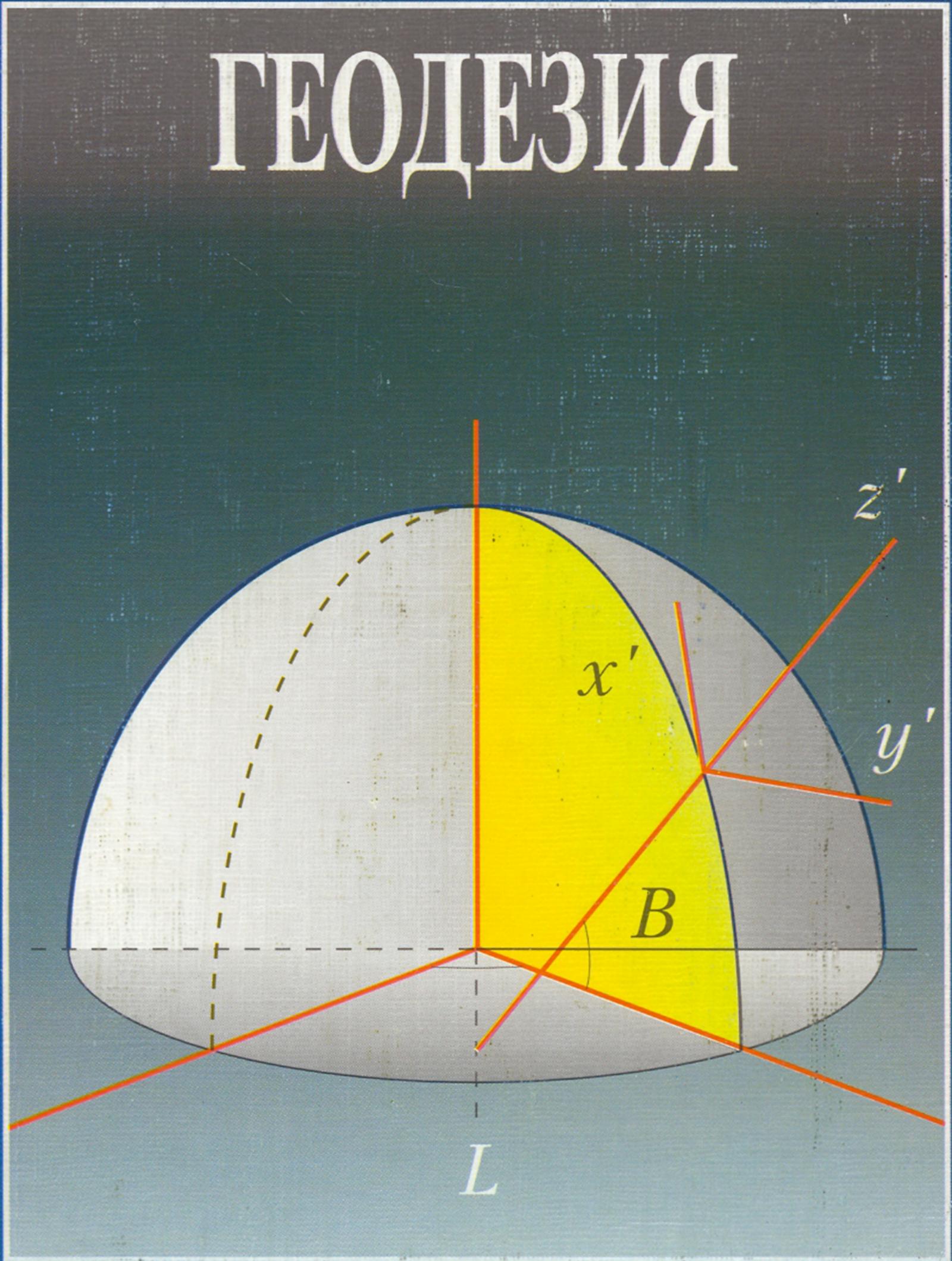




Е. Г. Бойко

# СФЕРОИДИЧЕСКАЯ

# ГЕОДЕЗИЯ



**Е.Г. Бойко**

**Высшая геодезия  
Часть II  
Сфероидическая геодезия**

*Рекомендовано УМО по геодезии в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 650300 – геодезия, специальности 300200 – астрономогеодезия*

**Москва  
Картгеоцентр - Геодезиздат  
2003**

УДК 528.23

ББК 26.1

Б 72

Рецензенты: докт. техн. наук, проф. А.С.Масленников,  
докт. техн. наук, проф. М.С.Урмаев

**Бойко Е.Г.**

Б 72      Высшая геодезия. Часть II. Сфероидическая геодезия:  
Учебник для вузов. — М.: Картгеоцентр — Геодезиздат, 2003.  
— 144 с.: ил.

ISBN 5-86066-054-5

Изложены следующие темы: земной эллипсоид и свойства кривых на его поверхности; решение малых сфероидических треугольников; методы решения главных геодезических задач и засечек на поверхности эллипсоида и в трехмерном пространстве; теория и практика применения плоских координат в проекции Гаусса — Крюгера; краткие сведения о других конформных проекциях. Решение всех задач иллюстрируется примерами.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности астрономогеодезия. Может использоваться инженерами и научными работниками, занимающимися математической обработкой геодезических построений и обеспечением специальных инженерно-технических работ.

ISBN 5-86066-054-5

© Е.Г. Бойко, 2003

© Оформление.

Картгеоцентр — Геодезиздат, 2003

Предисловие.....	6
Введение .....	7

## **Глава 1**

### **ЗЕМНОЙ ЭЛЛИпсоИД И КРИВЫЕ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ**

1.1. Основные определения для кривых на поверхности эллипсоида.....	9
1.2. Элементы земного эллипсоида и криволинейные координаты на его поверхности .....	11
1.3. Главные радиусы кривизны. Средний радиус кривизны .....	16
1.4. Длины дуг координатных линий.....	19
1.5. Взаимные нормальные сечения.....	24
1.6. Геодезическая линия.....	26

## **Глава 2**

### **РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ**

2.1. Поправка за переход от прямого нормального сечения к геодезической линии.....	32
2.2. Условия замены сфероидических треугольников сферическими.....	35
2.3. Решение сферического треугольника по способу аддитантов.....	41
2.4. Решение сферического треугольника по теореме Лежандра.....	43

## Глава 3

### РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА И В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Сущность геодезических задач на поверхности эллипсоида и принцип их решения.....	46
3.2. Общие методы решения главных геодезических задач.....	49
3.3. Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге - Кутта – Ингланда.....	53
3.4. Решение геодезических задач по формулам со средними аргументами.....	57
3.5. Решение геодезических задач по способу Бесселя.....	63
3.6. Геодезические задачи в дифференциальной форме (дифференциальные формулы первого рода).....	74
3.7. Решение геодезических задач в пространстве.....	79
3.8. Редукция хорды космической сети к геодезической системе координат.....	83

## Глава 4

### РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА И В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Виды геодезических засечек.....	87
4.2. Выбор поверхности относимости.....	89
4.3. Решение геодезических засечек на шаре.....	92
4.4. Решение геодезических засечек на эллипсоиде.....	93
4.5. Решение геодезических засечек в пространстве.....	100

### ПЛОСКИЕ КООРДИНАТЫ

5.1. Значение плоских координат.....	109
5.2. Дифференциальные уравнения симметричных конформных проекций.....	111
5.3. Проекция Гаусса.....	113
5.4. Перенос геодезической линии с поверхности эллипсоида на плоскость проекции Гаусса.....	120
5.5. Масштаб проекции Гаусса.....	122
5.6. Сближение меридианов в проекции Гаусса.....	124
5.7. Поправка за кривизну изображения геодезической линии на плоскости проекции Гаусса.....	125
5.8. Поправка в длину геодезической линии за масштаб ее изображения на плоскости.....	129
5.9. Переход от одного осевого меридиана к другому в проекции Гаусса.....	130
5.10. Практика применения проекции Гаусса в СНГ.....	134
5.11. Краткие сведения о других геодезических проекциях.....	139
Список рекомендуемой литературы.....	143

## Предисловие

В основу учебника положены лекции для студентов астрономо-геодезической специальности МИИГАиК, которые автор, профессор кафедры высшей геодезии, читал с 1985 г. Последний учебник по этой дисциплине профессора В.П. Морозова «Курс сфероидической геодезии» был издан в 1979 г. По сравнению с ним объем данного учебника существенно сокращен. Это стало возможным после тщательного отбора наиболее актуальных тем, которые, во-первых, необходимы для решения задач самой сфероидической геодезии, во-вторых, используются в других разделах высшей геодезии.

Для обеспечения новых задач, возникающих на практике, особенно в связи с появлением спутниковых технологий, ряд разделов книги изложен по-новому в методическом плане или представлен впервые. Такие как решение прямых и обратных задач на эллипсоиде в дифференциальной форме и в пространстве на основе координатных преобразований; решение геодезических засечек на поверхности эллипсоида и в околоземном пространстве.

В целях сохранения преемственности автор стремился темы, не устаревшие в теоретическом и методическом плане, излагать как можно ближе к их описанию в учебнике В.П. Морозова.

Для решения всех основных задач даны алгоритмы, удобные для программирования и счета на ЭВМ, и приведены числовые примеры.

Содержание учебника полностью соответствует действующим учебным программам для астрономо-геодезической специальности.

Автор выражает признательность руководству МИИГАиК за помощь, оказанную при подготовке данного учебника, а также благодарит аспиранта С.А. Ванина за участие в оформлении книги.

Геодезические измерения выполняются в местных полярных системах координат на различных уровнях поверхностях, т.е. на различных высотах. В связи с этим возникает проблема представления измеренных величин в единой системе координат. Вследствие непараллельности уровней поверхностей, а также из-за того факта, что уровенную поверхность невозможно описать точным математическим выражением, эта проблема приобретает очень сложный характер. В настоящее время внешний вид земной поверхности изучается в такой последовательности:

1. Предварительно устанавливается некоторая математическая поверхность, достаточно близкая по форме и расположению к поверхности геоида.

2. На эту поверхность проецируются по нормальям к ней все точки, в которых выполняются измерения, а также сами измеренные величины.

3. Устанавливается взаимное положение точек на математической поверхности, положение любой точки земной поверхности однозначно определяется высотой точки над математической поверхностью и координатами ее проекции на этой поверхности.

Таким образом, вспомогательная математическая поверхность позволяет перейти от множества местных систем полярных координат к единой системе координат.

В качестве такой поверхности в настоящее время принята поверхность эллипсоида вращения с небольшим сжатием вдоль оси вращения.

Поверхность эллипсоида вращения определяется простым математическим уравнением, поэтому на ней принципиально строго устанавливается связь между спроецированными линиями и углами, по которым вычисляются координаты точек. Поверхность эллипсоида с определенными параметрами, принятая для определения координат точек земной поверхности, называется координатной поверхностью или поверхностью относимости, а сам эллипсоид называется земным.

Изучением математической поверхности эллипсоида и решением на ней различного рода задач, связанных как с определением взаимного положения точек на этой поверхности, так и с ее изображением на плоскости по некоторому закону, занимается раздел высшей геодезии, называемый сфероидической геодезией.

В сфероидической геодезии изучаются методы определения взаимного положения точек на поверхности земного эллипсоида и в околоземном пространстве в системе геодезических координат  $B, L, H$ .

Важное прикладное значение (в геодезии, морской, воздушной, спутниковой навигации) имеет проблема установления взаимного положения двух точек на поверхности эллипсоида, которая получила название «Решение главных (прямых и обратных) геодезических задач». Большой вклад в решение этой проблемы внесли Гаусс и Бессель, каждый из них дал вариант своего решения. Работа Бесселя замечательна тем, что в ней высказана идея, которая осталась руководящей до наших дней: при решении главных геодезических задач использовать в качестве промежуточной поверхность некоторого шара. Дальнейшее развитие эта идея получила в трудах проф. В.П. Морозова, теории которого мы будем придерживаться в данном учебнике.

Наряду с системой геодезических координат в сфероидической геодезии рассматривается система плоских координат, для установления которой применяют то или иное математическое изображение поверхности эллипсоида на плоскости, называемое проекцией. Проф. Ф.Н. Красовский обосновал «геодезический» подход к проблеме выбора проекции, сущность которого заключается в следующем.

1. Система опорных пунктов переносится с поверхности эллипсоида на плоскость по строго определенному закону.

2. Материалы топографических съемок должны укладываться в опорную сеть без редуций (либо с помощью простейших редуций).

3. Проекция должна быть конформной, что облегчает выполнение второго условия.

Этим требованиям наиболее полно отвечала проекция Гаусса, которая и применяется в России и странах СНГ.

Отметим еще одну важную особенность сфероидической геодезии: во всех ее методах предполагается, что измеренные величины свободны от влияния уклонений отвесных линий и на исходную координатную поверхность переносятся по нормальям к ней.

## ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД И КРИВЫЕ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

### 1.1. Основные определения для кривых на поверхности эллипсоида

Кривые, расположенные на поверхности эллипсоида, будут иметь свойства, тесно связанные со свойствами этой поверхности. Напомним некоторые геометрические понятия и соотношения для кривых на поверхности.

Если через некоторую точку поверхности провести всевозможные кривые, то касательные к ним образуют *касательную плоскость*. Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания, называется *нормалью к поверхности*. Касательная плоскость и нормаль к поверхности будут общими для всех кривых, расположенных на поверхности и проходящих через точку касания.

Через нормаль к поверхности можно провести множество плоскостей в различных направлениях. Они называются *нормальными плоскостями*.

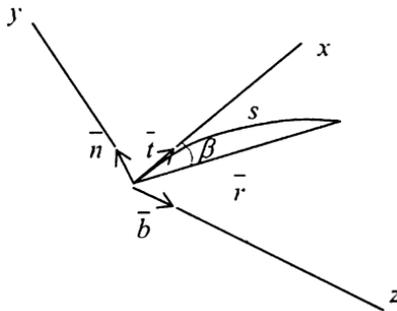


Рис. 1.1. Сопровождающий трехгранник

Все кривые на поверхности делятся на два вида: плоские кривые (имеют только кривизну) и кривые двойной кривизны (имеют кривизну и кручение). Поведение пространственных кривых характеризуется так называемым сопровождающим трехгранником (рис. 1.1), ребрами которого являются взаимно ортогональные единичные векторы – касательной  $\bar{t}$ , главной нормали  $\bar{n}$  и бинормали  $\bar{b}$ . При поступательном движении вдоль кривой  $S$  векторы будут изменять свое положение в пространстве в соответствии с формулами Серре-Френе

$$\frac{d\bar{t}}{dS} = \eta \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{dS} = -\eta \bar{t} + \sigma \bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{dS} = -\sigma \bar{n}, \quad (1.1)$$

где  $\eta$  – кривизна кривой;  $\sigma$  – ее кручение. Кривизна проекции кривой на нормальную плоскость называется *нормальной кривизной*  $\eta_n$ , а кривизна проекции кривой на касательную плоскость называется *геодезической кривизной*  $\eta_g$ .

Если ввести систему прямоугольных координат с началом в вершине сопровождающего трехгранника (см. рис. 1.1), ось  $x$  направить по касательной  $\vec{t}$ , ось  $y$  – по главной нормали  $\vec{n}$ , ось  $z$  – по бинормали  $\vec{b}$ , то выражение для радиуса-вектора текущей точки можно записать в виде

$$\vec{r} = x \vec{t} + y \vec{n} + z \vec{b} \quad (1.2)$$

или в параметрической форме в функции длины кривой

$$\vec{r} = \left( \frac{d\vec{r}}{dS} \right)_0 S + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \right)_0 S^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} \right)_0 S^3 + \dots, \quad (1.3)$$

где производные определяются с учетом формул Серре-Френе

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{t}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = \eta \vec{n}, \quad \frac{d^3\vec{r}}{dS^3} = \frac{d\eta}{dS} \vec{n} - \eta^2 \vec{t} + \eta \sigma \vec{b}. \quad (1.4)$$

Проектируя векторные выражения (1.3) на оси координат, получим

$$\begin{aligned} x &= S - \eta^2 \frac{S^3}{6} + \dots, \\ y &= \eta \frac{S^2}{2} + \frac{d\eta}{dS} \frac{S^3}{6} + \dots, \\ z &= \eta \sigma \frac{S^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя (1.5), легко получить выражения для хорды кривой

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и угла между касательной и хордой

$$\beta = \arctg \frac{y}{x} = \eta \frac{S}{2} + \frac{d\eta}{dS} \frac{S^2}{6} + \dots \quad (1.6)$$

При изучении кривых на поверхности эллипсоида наибольшее внимание будет уделено нормальному сечению и геодезической линии. След пересечения нормальной плоскости с поверхностью эллипсоида называется *нормальным сечением*.

*Геодезическая линия* соединяет две точки поверхности по кратчайшему расстоянию. В каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю и, следовательно, главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности.

## 1.2. Элементы земного эллипсоида и криволинейные координаты на его поверхности

Эллипсоид вращения вполне определяется размерами его большой и малой полуосей ( $a$  и  $b$ ). Кроме них могут использоваться вспомогательные линейные величины

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \quad (1.7)$$

Форму эллипсоида принято характеризовать относительными элементами:

сжатием

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \quad (1.8)$$

эксцентриситетом

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (1.9)$$

вторым эксцентриситетом

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad (1.10)$$

и величинами без названий

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \quad m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (1.11)$$

С помощью формул (1.7) – (1.10) легко установить связь между элементами эллипсоида

$$b = a (1 - \alpha) = a \sqrt{1 - e^2} = c (1 - e^2), \quad (1.12)$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{b}{1 - e^2}, \quad (1.13)$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad (1.14)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2, \quad (1.15)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}. \quad (1.16)$$

В России и ряде других стран при выполнении геодезических работ используют эллипсоид Красовского с исходными элементами

$$a = 6\,378\,245 \text{ м}, \quad \alpha = 1:298,3.$$

Значения других элементов, вычисленные по исходным, таковы:

$$b = 6\,356\,863,0188 \text{ м};$$

$$c = 6\,399\,698,9018 \text{ м};$$

$$\alpha = 0,0033523299;$$

$$e^2 = 0,0066934216;$$

$$e'^2 = 0,0067385254;$$

$$\sqrt{1-e^2} = 0,9966476701;$$

$$\sqrt{1-e'^2} = 1,0035636058.$$

Приведем для сравнения численные значения основных параметров Международного эллипсоида WGS-84:

$$a = 6\,378\,137 \text{ м}, \quad e^2 = 0,0066943799$$

и российского ПЗ-90:  $a = 6\,378\,136 \text{ м}, \quad e^2 = 0,0066946619$

Для приближенных расчетов можно использовать следующие значения элементов:

$$a = 6\,400 \text{ км}, \quad a - b = 21 \text{ км}, \quad \alpha = 1:300,$$

$$e^2 = 1:150, \quad n = 1:600, \quad m = 1:300.$$

В сфероидической геодезии довольно часто используется разложение функций в ряды по степени эксцентриситета. Приведем порядки этих величин, что будет полезно при оценке необходимого числа членов соответствующих рядов:

$$a e^2 = 43 \text{ км}, \quad a e^4 = 290 \text{ м}, \quad a e^6 = 2 \text{ м}, \quad a e^8 = 12 \text{ мм}.$$

Запись многих формул сфероидической геодезии существенно упростится, если ввести обозначения:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (1.17)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}, \quad (1.18)$$

$$\eta = e' \cos B. \quad (1.19)$$

Установим связь между  $W$  и  $V$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} (1 - \sin^2 B) = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2}.$$

Отсюда

$$W = \sqrt{1 - e^2} V. \quad (1.20)$$

Используя (1.12), (1.13), (1.20), легко получить соотношения

$$a W = b V = \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}, \quad (1.21)$$

$$c W = a V. \quad (1.22)$$

## Криволинейные координаты на поверхности эллипсоида

Криволинейными координатами точки на поверхности эллипсоида называются числовые характеристики двух координатных линий, в пересечении которых находится данная точка. Построение системы криволинейных координат заключается в выборе двух семейств линий на поверхности эллипсоида и установлении способа их нумерации.

В геодезии используется система геодезических координат  $B$  и  $L$  (семейства параллелей и меридианов), где  $B$  – геодезическая широта,  $L$  – геодезическая долгота, а также система  $U, L$  с приведенной широтой  $U$ . Кроме них иногда используется система  $\Phi, L$  с геоцентрической широтой  $\Phi$ , которая определяется как острый угол между радиусом-вектором точки и плоскостью экватора.

Система геодезических координат является основной системой криволинейных координат на поверхности земного эллипсоида. Ее практическое значение заключается в том, что геодезические координаты  $B$  и  $L$  незначительно (на величину уклонения отвесной линии) отличаются от астрономических координат, получаемых из астрономических наблюдений. Приведенная и геоцентрическая широты имеют вспомогательное значение, с их помощью упрощается описание некоторых теоретических вопросов (рис. 1.2. и рис. 1.3.).

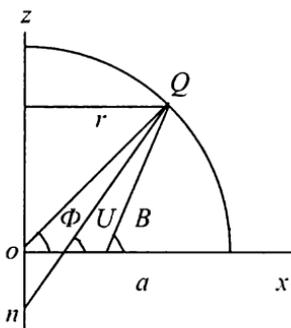


Рис.1.2. Геоцентрическая, приведенная, геодезическая широты

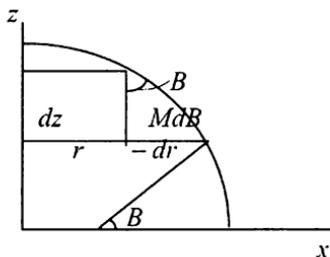


Рис.1.3. Связь между геодезической и приведенной широтой

Установим связь между геодезической широтой и широтами  $U$  и  $\Phi$ . На рис. 1.2 изображен участок меридианного эллипса с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (1.23)$$

Отрезком  $Qn$ , равным большой полуоси  $a$ , засечем на оси вращения эллипсоида точку  $n$ . Острый угол, составленный прямой  $Qn$  с плоскостью экватора, есть приведенная широта. По рис. 1.2 получим ( $r$  – радиус параллели)

$$r = x = a \cos U. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.23), найдем

$$z = b \sin U. \quad (1.25)$$

Выражения (1.24) и (1.25) являются параметрическими уравнениями эллипса. Из рис. 1.3 запишем

$$\operatorname{tg} B = \frac{-dr}{dz}. \quad (1.26)$$

Дифференциалы  $dr$  и  $dz$  найдем из выражений (1.24) и (1.25)

$$\begin{aligned} dr &= -a \sin U dU, \\ dz &= b \cos U dU. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Отсюда (1.26) запишется

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} U. \quad (1.28)$$

Это основная формула, устанавливающая зависимость между геодезической и приведенной широтами, из которой с учетом (1.12) можно найти другие полезные выражения:

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} U, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B = (1 - \alpha) \operatorname{tg} B, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} U = \alpha \operatorname{tg} B = n (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} U). \quad (1.31)$$

Далее запишем (1.28) в виде

$$\frac{b}{a} \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} U = \frac{b \sin B}{a \cos B} = \frac{k \sin U}{k \cos U}, \quad (1.32)$$

где  $k$  — неизвестный множитель, который будем искать под условием

$$\begin{aligned} b \sin B &= k \sin U, \\ a \cos B &= k \cos U. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Возводя (1.33) в квадрат и складывая, получим с учетом (1.21)

$$k = \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} = a W = b V. \quad (1.34)$$

Подставляя (1.34) в (1.33), найдем

$$\sin B = V \sin U, \quad (1.35)$$

$$\cos B = W \cos U. \quad (1.36)$$

Используя эти соотношения и формулу (1.20), легко выразить  $W$  и  $V$  через приведенную широту

$$W^2 = V^2(1 - e^2) = 1 - e^2 \sin^2 B = 1 - e^2 V^2 \sin^2 U .$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{V^2} = 1 - e^2 (1 - \sin^2 U) = 1 - e^2 \cos^2 U . \quad (1.37)$$

Наконец, дифференцируя (1.28) и привлекая (1.21) и (1.36), найдем

$$dB = \frac{a \cos^2 B}{b \cos^2 U} dU = W V dU . \quad (1.38)$$

Для того чтобы оценить разность между геодезической и приведенной широтами, воспользуемся формулой (1.31), из которой следует

$$\frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} U}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} U} = \frac{\sin(B - U)}{\sin(B + U)} = n , \quad (1.39)$$

где величина  $n$  определяется формулой (1.11). Отсюда, учитывая малое различие между  $B$  и  $U$ , получаем приближенную оценку  $B - U \approx n \sin 2B$ . Максимальное значение разности  $B - U$  на широте  $45^\circ$  составит:

$$B - U = 5'46'' \text{ (} 346'' \text{)} .$$

Связь геоцентрической широты  $\Phi$  с геодезической  $B$  установим с помощью рис. 1.2 и формул (1.24), (1.25) и (1.28)

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{r} = \frac{b \sin U}{a \cos U} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} U = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} B$$

или

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B . \quad (1.40)$$

### Уравнения поверхности эллипсоида

Введем прямоугольную систему координат с началом в центре эллипсоида (рис. 1.4.)

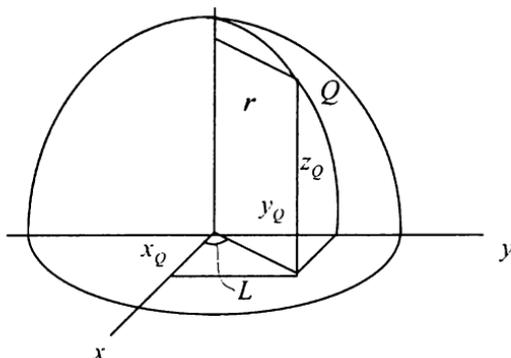


Рис. 1.4. Прямоугольные координаты точек поверхности эллипсоида

Ось  $x$  лежит в пересечении плоскостей начального меридиана и экватора, ось  $z$  направлена по малой полуоси к северу, ось  $y$  – дополняет систему до правой. Из рис. 1.4 для точки  $Q$  можно записать

$$\begin{aligned}x &= r \cos L, \\y &= r \sin L.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Если теперь радиус параллели заменить его выражением по равенству (1.24) и учесть (1.25), то получим

$$\begin{aligned}x &= a \cos U \cos L, \\y &= a \cos U \sin L, \\z &= b \sin U.\end{aligned}\tag{1.42}$$

Выражения (1.42) представляют собой *параметрические уравнения поверхности эллипсоида*. Выразим их через геодезические координаты. Введем обозначение (геометрический смысл величины будет объяснен ниже), тогда, используя ранее полученные формулы (1.12), (1.20), (1.35), (1.36):  $b = a \sqrt{1 - e^2}$ ,  $W = V \sqrt{1 - e^2}$ ,  $\sin U = \frac{\sin B}{V}$ ,  $\cos U = \frac{\cos B}{W}$ , найдем

$$\begin{aligned}x &= N \cos B \cos L, \\y &= N \cos B \sin L, \\z &= N(1 - e^2) \sin B.\end{aligned}\tag{1.43}$$

### 1.3. Главные радиусы кривизны. Средний радиус кривизны

Проведем через некоторую точку  $Q$  на поверхности эллипсоида множество нормальных сечений. Каждое из них будет иметь свою кривизну. Из всего пучка нормальных сечений выделим два с наибольшей и наименьшей кривизной. Эти два сечения называются *главными нормальными сечениями*, а их радиусы кривизны — *главными радиусами кривизны*.

Главные нормальные сечения всегда взаимно ортогональны. На эллипсоиде главными нормальными сечениями являются – меридиан (на рис. 1.5 показан отрезок меридиана  $PP'$ ) и первый вертикал (от-

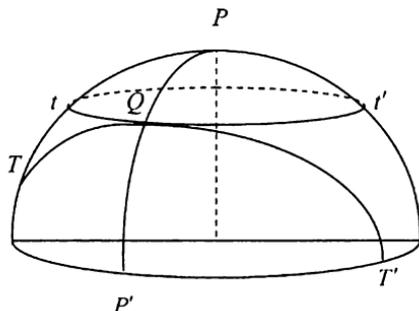


Рис. 1.5. Главные нормальные сечения и параллель

резок  $TT'$ ). Отметим, что первый вертикал и параллель (отрезок  $tt'$ ) в точке  $Q$  имеют общую касательную, поскольку обе линии перпендикулярны к меридиану. Радиус кривизны меридиана обозначается символом  $M$ , радиус кривизны первого вертикала —  $N$ . Главные радиусы кривизны часто встречаются при решении многих задач сферической геодезии. Найдем формулы для их вычисления.

Меридиан есть эллипс с параметрическими уравнениями (см. формулы (1.24) и (1.25))

$$\begin{aligned}x &= a \cos U, \\z &= b \sin U.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Известно, что для кривых, уравнения которых заданы в параметрической форме, радиус кривизны вычисляется по формуле

$$M = \frac{(x'^2 + z'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}.\tag{1.45}$$

Для производных, входящих в (1.45), согласно (1.44) найдем

$$\begin{aligned}x' &= -a \sin U, & z' &= b \cos U, \\x'' &= -a \cos U, & z'' &= -b \sin U.\end{aligned}\tag{1.46}$$

Подставим (1.46) в (1.45) и учтем (1.12), тогда

$$M = \frac{(a^2(1 - e^2 \cos^2 U))^{3/2}}{ab}.\tag{1.47}$$

Поскольку

$$1 - e^2 \cos^2 U = \frac{1}{V^2}, \quad \frac{a^2}{b} = c, \quad \frac{b^2}{a} = p,$$

то получим окончательно

$$M = \frac{c}{V^3} = \frac{p}{W^3}.\tag{1.48}$$

Заметим, что на полюсе ( $B = 90^\circ$ )  $M = c$ , на экваторе ( $B = 0^\circ$ )  $M = p$ , таким образом, линейные величины  $c$  и  $p$ , введенные в (1.2), являются граничными значениями радиуса кривизны меридиана.

Для радиуса параллели согласно (1.24) и (1.36) будем иметь

$$r = a \cos U = \frac{a \cos B}{W}.\tag{1.49}$$

Радиус первого вертикала найдем по теореме Менье, которая утверждает: если наклонное и нормальное сечения имеют общую касательную, то радиус кривизны наклонного сечения равен радиусу нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих сечений. Параллель и первый вертикал удовлетворяют условиям

теоремы, угол между плоскостями этих сечений равен геодезической широте  $B$  (рис. 1.6), поэтому

$$r = N \cos B = a \frac{\cos B}{W}.$$

Отсюда, с учетом (1.49), получим

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}. \quad (1.50)$$

Таким образом, величина  $N$ , введенная при выводе формул связи прямоугольных и геодезических координат (1.43), есть радиус кривизны первого вертикала.

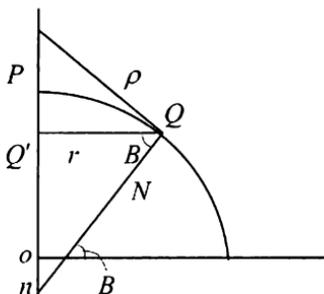


Рис. 1.6. Радиус кривизны первого вертикала

Составим отношение главных радиусов кривизны в соответствии с (1.48) и (1.50)

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + \eta^2. \quad (1.51)$$

Очевидно, что  $N > M$  во всех точках поверхности эллипсоида, кроме полюсов.

### Средний радиус кривизны

Радиус кривизны любого нормального сечения  $R_i$  выражается через главные радиусы кривизны по формуле Эйлера:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\cos^2 A_i}{M} + \frac{\sin^2 A_i}{N} \quad (1.52)$$

или

$$R_i = \frac{M N}{N \cos^2 A_i + M \sin^2 A_i}, \quad (1.53)$$

где  $A_i$  — геодезический азимут данного нормального сечения.

Средний радиус кривизны  $R$  не относится ни к одной линии на эллипсоиде. Он характеризует форму поверхности в данной точке и определяется как предел среднего арифметического из радиусов кривизны возможных нормальных сечений, проведенных через данную точку поверхности в разных направлениях, т.е.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum R_i}{n} . \quad (1.54)$$

Представим  $A$  как сумму элементарных приращений азимута  $A_i = \Sigma \Delta A_i = i \Delta A$ , в соответствии с этим для полного цикла изменений азимута будем иметь  $2\pi = n \Delta A$ . Тогда (1.54) с учетом (1.53) примет вид

$$R = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_1^n \frac{M N}{N \cos^2 A_i + M \sin^2 A_i} \cdot \frac{\Delta A}{2\pi} . \quad (1.55)$$

Заменяя предел суммы определенным интегралом, получим

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_i dA = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_i dA . \quad (1.56)$$

Последний интеграл запишем так:

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{M N} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{M N}}{N \cos^2 A \left(1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 A\right)} dA = \frac{2}{\pi} \sqrt{M N} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A \left(1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 A\right)} . \quad (1.57)$$

Введем замену переменных

$$t = \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A , \quad dt = \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A} .$$

Теперь (1.57) примет вид

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{M N} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{M N} \operatorname{arctg} \Big|_0^{\infty} .$$

Отсюда

$$R = \sqrt{M N} = \frac{N}{V} = \frac{c}{V^2} . \quad (1.58)$$

Таким образом, средний радиус кривизны вычисляется как среднее геометрическое из главных радиусов кривизны. Этот результат был впервые получен Гауссом, поэтому в его честь величина

$$K = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{M N} \quad (1.59)$$

называется *гауссовой кривизной* поверхности.

#### 1.4. Длины дуг координатных линий

Длина элементарной дуги  $dS$  произвольной плоской кривой вычисляется по известной формуле

$$dS = \rho d\alpha , \quad (1.60)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны кривой в начальной точке;  $d\alpha$  – угол между нормальными в начальной и конечной точках дуги (угол смежности). Применим эту формулу для вычисления длин дуг меридиана и параллели.

## Длина дуги меридиана

В соответствии с формулой (1.60) и рис. 1.7 для дифференциала длины дуги меридиана будем иметь

$$dX = MdB. \quad (1.61)$$

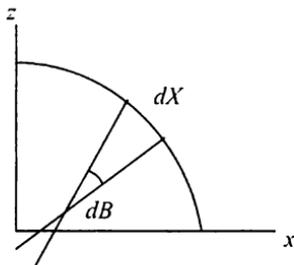


Рис. 1.7. Дифференциал длины дуги меридиана

Для вычисления длины дуги меридиана конечных размеров, например, в пределах широт от 0 до  $B$  с учетом формулы (1.48) необходимо найти интеграл

$$X = \int_0^B MdB = \int_0^B \frac{P}{W^3} dB = a (1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB. \quad (1.62)$$

Полученный интеграл относится к классу эллиптических интегралов и в элементарных функциях не выражается. Существует несколько способов приближенного вычисления интеграла вида (1.62).

Если точки меридиана с широтами  $B_1$  и  $B_2$  расположены достаточно близко друг к другу, например, как это бывает при вычислении длин восточной и западной сторон сфероидической трапеции, изображаемой на плоскости в виде рамки листа карты того или иного масштаба (вплоть до 1:1 000 000), то (1.62) примет вид

$$\Delta X = \int_{B_1}^{B_2} MdB.$$

Данный интеграл можно вычислить по формуле Симпсона

$$\Delta X = \frac{B_2 - B_1}{6} (M_1 + 4M_m + M_2), \quad (1.63)$$

где  $M_1$ ,  $M_m$ ,  $M_2$  вычисляются по формулам (1.48) соответственно для широт  $B_1$ ,  $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$  и  $B_2$ .

Другой способ заключается в разложении подынтегральной функции (1.62) в ряд и последующем почленном его интегрировании, т.е.

$$X = P \int_0^B \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 B + \dots \right) dB = P \int_0^B dB + \frac{3}{2} e^2 P \int_0^B \sin^2 B dB + \frac{15}{8} e^4 P \int_0^B \sin^4 B dB + \dots$$

В последнем выражении все интегралы являются табличными и вычисляются точно.

Приведем без вывода окончательный результат интегрирования (подробно эти вопросы изложены в [10]).

$$X = a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \dots, \quad (1.64)$$

где

$$a_0 = m_0 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8} m_4, \quad m_0 = a (1 - e^2),$$

$$a_2 = \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32} m_6, \quad m_2 = \frac{3}{2} e^2 m_0,$$

$$a_4 = \frac{m_4}{8} + \frac{3}{16} m_6, \quad m_4 = \frac{5}{4} e^2 m_2,$$

$$a_6 = \frac{m_6}{32}, \quad m_6 = \frac{7}{6} e^2 m_4.$$

Приведем численные значения коэффициентов ряда (1.64) для эллипсоидов Красовского (левая колонка) и WGS-84 (правая колонка):

$a_0 = 6\,367\,558,497$	$a_0 = 6\,367\,449,146$
$a_2 = 32\,072,960$	$a_2 = 32\,077,017$
$a_4 = 67,312$	$a_4 = 67,330$
$a_6 = 0,132$	$a_6 = 0,132$

С коэффициентами, вычисленными по элементам эллипсоида Красовского, этот ряд (1.64) можно привести к виду более удобному для вычислений

$$X = 6367558,497 B - \sin B \cos B [32005,780 + (133,921 + 0,703 \sin^2 B) \sin^2 B].$$

Точность вычислений по этой формуле составляет 0,0001 м.

### *Вычисление широты по длине дуги меридиана*

Для решения этой задачи необходимо либо вычислить интеграл,

$$B = \int_0^x \frac{dX}{M},$$

либо обратить ряд (1.64) относительно геодезической широты  $B$  по известным формулам обращения тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} y &= x + p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + \dots \\ x &= y + q_2 \sin 2y + q_4 \sin 4y + \dots \end{aligned}, \quad (1.65)$$

где  $q_2 = -p_2 - p_2 p_4 + \dots$ ,  $q_4 = -p_4 + p_2^2 + \dots$

Применяя (1.65) к (1.64) и вводя обозначение  $\beta = \frac{x}{a_0}$ , получим следующее выражение:

$$B = \beta + b_2 \sin 2\beta + b_4 \sin 4\beta + b_6 \sin 6\beta + \dots \quad (1.66)$$

Приведем численные значения коэффициентов, входящих в ряд (1.66), для эллипсоидов Красовского (левая колонка) и WGS-84 (правая колонка).

$b_2 = 0,002518465$	$b_2 = 0,002518827$
$b_4 = 0,000003700$	$b_4 = 0,000003701$
$b_6 = 0,000000007$	$b_6 = 0,000000007$

Ряду (1.66) можно придать вид более удобный для вычислений

$$B = \beta + \sin \beta \cos \beta \left[ 50517738 - (298373 - 2382 \sin^2 \beta) \sin^2 \beta \right] 10^{-10}, \quad (1.67)$$

где  $\beta = \frac{x}{6367558,497}$ .

Численные значения коэффициентов, входящих в (1.67), рассчитаны по элементам эллипсоида Красовского. Точность вычислений по формуле (1.66) соответствует точности формулы (1.64).

Для коротких дуг (в пределах длин рамок съёмочной трапеции) обращение ряда вида (1.64) приводит к выражению

$$\Delta B = \Delta \beta - \frac{3}{2} e^2 \left[ (1 + e^2 \sin^2 B_1) \sin 2B_1 \frac{\Delta \beta}{2} + \cos 2B_1 \frac{\Delta \beta^2}{3} \right], \quad (1.68)$$

где  $\Delta \beta = \frac{\Delta x}{M_1}$ .

### *Длина дуги параллели*

Параллель есть окружность радиуса  $r = N \cos B$ . Обозначим длину дуги параллели между точками с долготами  $L_1$  и  $L_2$  через  $\Delta Y$ , тогда, применяя (1.60), получим

$$\Delta Y = N \cos B (L_1 - L_2). \quad (1.69)$$

### *Площадь сфероидической трапеции*

Сфероидической трапецией называется часть поверхности эллипсоида, ограниченная меридианами и параллелями (рис. 1.8).

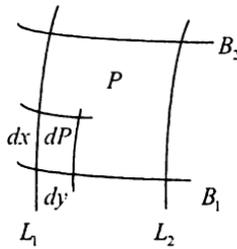


Рис. 1.8. Площадь сфероидической трапеции

Площадь элементарной трапеции  $dP$  вычисляется по формуле

$$dP = dx \, dy = M N \cos B \, dB \, dL .$$

Учитывая, что

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3}, \quad N = \frac{a}{W}, \quad a^2 (1 - e^2) = b^2, \quad W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B ,$$

для площади сфероидической трапеции конечных размеров получим

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B \, dB \, dL$$

или

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B \, dB . \quad (1.70)$$

Подынтегральную функцию в (1.70) разложим в ряд

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (\cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + \dots) \, dB .$$

Почленным интегрированием этого ряда получим

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \left[ \sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \dots \right]_{B_1}^{B_2} . \quad (1.71)$$

В приближенных расчетах часто используется радиус эквивалентного шара  $R$ , площадь которого равна площади эллипсоида, т.е.  $4\pi R^2 = P_E$ . Для вычисления  $P_E$  в формуле (1.71) положим

$$L_2 - L_1 = 2\pi, \quad B_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad B_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{тогда}$$

$$P_E = 4\pi b^2 \left( 1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \dots \right) .$$

Отсюда найдем

$$R = b \sqrt{1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \dots} \approx 6371,1 \text{ км} .$$

### 1.5. Взаимные нормальные сечения

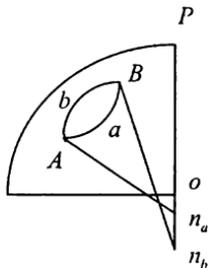


Рис.1.9. Взаимные нормальные сечения

Рассмотрим на поверхности эллипсоида две точки  $A$  и  $B$  с широтами  $B_1$  и  $B_2$ , причем для общности примем, что  $B_1 \neq B_2$ . Проведем нормали к поверхности в этих точках. Обе эти нормали лежат в плоскостях меридианных эллипсов и пересекаются с осью вращения в точках  $n_a, n_b$  (рис. 1.9). Проведем нормальную плоскость в точке  $A$  так, чтобы она прошла через точку  $B$ . В пересечении с поверхностью эллипсоида эта плоскость даст кривую  $AaB$ , которая называется *прямым нормальным сечением* в точке  $A$  на точку  $B$ . Проведем нормальную плоскость в точке  $B$  так, чтобы она прошла через точку  $A$ , получим прямое нормальное сечение в точке  $B$  на точку  $A$  (кривая  $BbA$  на рис 1.9). Эти две кривые  $AaB$  и  $BbA$  называются взаимно обратными или просто *взаимными нормальными сечениями*. Из рис. 1.9 видно, что взаимные нормальные сечения могут совпасть только в том случае, если совпадут точки  $n_a$  и  $n_b$ , т.е. если будут равны отрезки  $on_a = on_b$ .

Рассмотрим этот вопрос в общем виде для произвольной точки  $Q$  (рис.1.10).

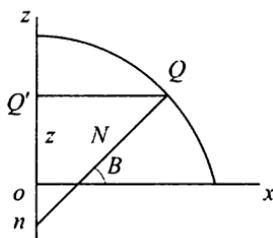


Рис. 1.10. Точка пересечения нормали с осью вращения эллипсоида

Из рис 1.10 имеем

$$on = Q'n - z, \quad (1.72)$$

$$Q'n = N \sin B. \quad (1.73)$$

Выражение для  $z$  согласно (1.43) запишется

$$z = N \sin B - e^2 N \sin B. \quad (1.74)$$

Подставляя (1.73) и (1.74) в (1.72), получим

$$on = e^2 N \sin B. \quad (1.75)$$

Из формулы (1.75) следует вывод, что чем больше широта точки, тем ниже пройдет ее нормаль. По условию  $B_1 \neq B_2$ , следовательно,  $on_a \neq on_b$  и в общем случае кривые  $AaB$  и  $BbA$  не совпадут (см. рис. 1.9).

Итак, взаимные нормальные сечения для двух точек поверхности эллипсоида не совпадают между собой при условии, что широты этих точек не равны (исключение составят точки, расположенные на одном меридиане).

Рассмотрим прикладное значение этого геометрического факта. Представим себе, что на поверхности эллипсоида выполняются угловые измерения в трех вершинах некоторого треугольника.

Теодолиты устанавливаются так, чтобы их вертикальные оси совпадали с нормальными в данных точках. На пункте  $A$  выполнялись наблюдения на пункты  $B$  и  $C$  (рис. 1.11): При наведении на точку  $B$  визирная плоскость совпадает с плоскостью прямого нормального сечения из  $A$  на  $B$ , а ее пересечение с плоскостью эллипсоида даст кривую  $AaB$ . При наведении на точку  $C$  визирная плоскость пересечет поверхность эллипсоида по кривой  $AaC$ . Визирные плоскости при наблюдениях на пунктах  $B$  и  $C$  пересекут поверхность эллипсоида по взаимно обратным сечениям  $BbA$  и  $CcA$ , которые, как было доказано, не совпадут с прямыми нормальными сечениями.

Отсюда следуют важные практические выводы.

1. Измеряемые в геодезических сетях горизонтальные углы на поверхности эллипсоида являются *углами между прямыми нормальными сечениями в данной точке*.

2. Несовпадение прямых и обратных нормальных сечений, или, как говорят, *двойственность* взаимных нормальных сечений, приводит к тому, что измеренные горизонтальные углы на трех пунктах не образуют на поверхности эллипсоида замкнутого треугольника. В нем появляется *невязка геометрического происхождения*. Поэтому вершины треугольников на эллипсоиде соединяют геодезическими линиями.

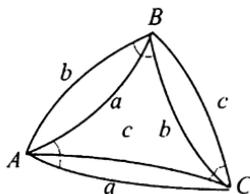


Рис. 1.11. Схема измерения углов сфероидического треугольника

## 1.6. Геодезическая линия

Через данную точку поверхности можно провести бесчисленное множество различных линий. Направление каждой линии в данной точке устанавливается направляющим углом, составленным одной из координатных линий и данной линией. Дадим более строгое определение этому понятию.

На поверхности земного эллипсоида в качестве направляющего угла принимается угол между касательными, проведенными к меридиану в северном направлении и к данной линии. Он отсчитывается от меридиана по направлению движения часовой стрелки.

Этот угол называется *геодезическим азимутом* и обозначается буквой  $A$ .

Геодезический азимут можно так же определить, как двугранный угол между плоскостью меридиана и нормальной плоскостью, проходящей через касательную к данной линии. Один и тот же азимут могут иметь и несколько разных линий, если они имеют общую касательную в данной точке. Например, параллель и первый вертикал в заданной точке имеют одинаковый азимут, равный  $90^\circ$  (или  $270^\circ$ ), хотя расположены они в разных плоскостях.

Выше было выяснено, что из-за двойственности взаимных нормальных сечений геодезические фигуры, образованные этими сечениями, оказываются «разорванными». В них появляются невязки геометрического происхождения. Поэтому, несмотря на достоинства нормальных сечений, которые непосредственно связаны с измеренными горизонтальными углами, возникает необходимость соединять точки эллипсоида линией, которая не обладает свойством двойственности. Такой кривой является *геодезическая линия*.

По определению геодезической линии (см. параграф 1.1) ее геодезическая кривизна (кривизна проекции кривой на касательную плоскость) равна нулю. Отсюда также следует, что главная нормаль геодезической линии совпадает с нормалью к поверхности в каждой ее точке. Любопытно, что если в окрестности произвольной точки геодезическую линию спроектировать на касательную плоскость, то эта проекция в той же дифференциальной окрестности будет прямой линией. Эти геометрические факты будут использованы при выводе уравнений геодезической линии.

### *Дифференциальные уравнения геодезической линии*

Из рис. 1.12 и формул (1.61) и (1.69) можно получить

$$dX = dS \cos A = M dB, \quad (1.76)$$

$$dY = dS \sin A = N \cos B dL. \quad (1.77)$$

Полученные выражения справедливы для любой произвольной кривой. Для того чтобы получить уравнение геодезической линии, необходимо к равенствам (1.76) и (1.77) присоединить еще одно, которое отражало бы свойства, присущие только геодезической линии.

Рассмотрим произвольную кривую на плоскости эллипсоида. Если передвигаться вдоль этой линии, то в каждой ее точке азимут будет изменяться, во-первых, вследствие изменения геодезической кривизны, во-вторых, из-за непараллельности меридианов (явление сближения меридианов). На рис. 1.13 изображен элементарный полярный сферический прямоугольный треугольник  $Q_3Q_2P$ . Применяя к нему правило Непера ( $Q_2P = 90^\circ - B$ ,  $\angle Q_2 = 90^\circ - dA$ ,  $dA$  – угол между меридианами  $Q_1P$  и  $Q_2P$ ), получим

$$\operatorname{tg} dA = \operatorname{tg} dL \sin B$$

или, заменяя тангенсы малых углов самими углами,

$$dA = \sin B dL. \quad (1.78)$$

Поскольку для геодезической линии геодезическая кривизна всюду равна нулю и, следовательно, изменений азимута из-за нее не возникает, то выражение (1.78) и будет дифференциальным уравнением, свойственным только геодезической линии. Присоединив к нему выражения (1.76) и (1.77), получим систему дифференциальных уравнений геодезической линии

$$\begin{aligned} dS \cos A &= M dB, \\ dS \sin A &= N \cos B dL, \\ dA &= \sin B dL. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Вывод дифференциального уравнения (1.78) основан на простейших геометрических представлениях и, на первый взгляд, может

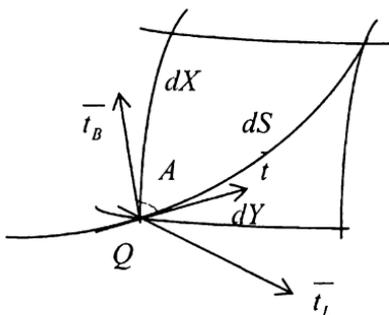


Рис. 1.12. Дифференциальные элементы кривой на поверхности эллипсоида

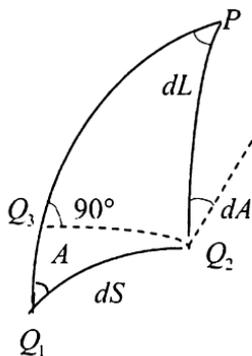


Рис. 1.13. Изменение азимута геодезической линии

показаться не вполне корректным. Поэтому приведем традиционный вывод этого уравнения с использованием строгих формул Серре-Френе.

Предварительно установим некоторые соотношения для координатных линий на поверхности эллипсоида. Кроме того, напомним, что по одному из определений для геодезической линии, ее главная нормаль  $\bar{n}$  в каждой точке совпадает с нормалью к поверхности  $\bar{m}$ .

Запишем уравнение Серре-Френе (1.1) для меридиана и параллели. Кривизна меридиана равна  $\frac{1}{M}$ , параллели  $\frac{1}{r} = \frac{1}{N \cos B}$ . Обе кривые плоские, поэтому их кручение равно нулю.

Для меридиана будем иметь ( $\bar{t} = \bar{t}_B$ ,  $\bar{n} = \bar{m}$ ,  $dS = dX$ ):

$$\frac{d\bar{t}_B}{dX} = \frac{\bar{m}}{M}, \quad \frac{d\bar{m}}{dX} = -\frac{\bar{t}_B}{M}. \quad (1.80)$$

Для параллели ( $\bar{t} = \bar{t}_L$ ,  $dS = dY$ ) получим

$$\frac{d\bar{t}_L}{dY} = \frac{\bar{n}}{r}, \quad \frac{d\bar{n}}{dY} = -\frac{\bar{t}_L}{r}. \quad (1.81)$$

Спроецируем параллель на касательную плоскость, в результате получим кривую, которую обозначим через  $S_k$ . Кривизна этой кривой будет (см. рис. 1.6)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin B}{r}. \quad (1.82)$$

Формулы Серре-Френе для линии  $S_k$  запишутся ( $\bar{t} = \bar{t}_L$ ,  $\bar{n} = \bar{t}_B$ ,  $dS = dS_k = dY$ ):

$$\frac{d\bar{t}_L}{dS_k} = \frac{\bar{t}_B}{\rho}, \quad \frac{d\bar{t}_B}{dS_k} = -\frac{\bar{t}_L}{\rho}. \quad (1.83)$$

Составим скалярное произведение (см. рис. 1.12)  $(\bar{t} \cdot \bar{t}_B) = \cos A$  и продифференцируем его по  $S$ :

$$\left( \frac{d\bar{t}}{dS} \bar{t}_B \right) + \left( \bar{t} \frac{d\bar{t}_B}{dS} \right) = -\sin A \frac{dA}{dS}. \quad (1.84)$$

Найдем производные, входящие в выражение (1.84). Для геодезической линии  $\bar{n} = \bar{m}$ , поэтому, согласно первому уравнению (1.1), получим

$$\frac{d\bar{t}_B}{dS} = \eta_g \bar{m}. \quad (1.85)$$

Производную единичного вектора  $\frac{d\bar{t}_B}{dS}$  разложим на две составляющие: в плоскости меридиана и в касательной плоскости

$$\frac{d\bar{t}_B}{dS} = \frac{\partial \bar{t}_B}{\partial X} \frac{dX}{dS} + \frac{\partial \bar{t}_B}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dS} . \quad (1.86)$$

Первые множители в формуле (1.86) определим из выражений (1.80) и (1.83), вторые, согласно (1.76) и (1.77), имеют вид

$$\frac{dX}{dS} = \cos A, \quad \frac{dS_k}{dS} = \frac{dY}{dS} = \sin A .$$

Выполнив эти замены, для выражения (1.86) получим

$$\frac{d\bar{t}_B}{dS} = \frac{\cos A}{M} \bar{m} - \frac{\sin A}{\rho} \bar{t}_L . \quad (1.87)$$

Подставим (1.87) в (1.84) и учтем, что

$$(\bar{m} \bar{t}_B) = 0, \quad (\bar{t} \bar{m}) = 0, \quad (\bar{t} \bar{t}_L) = \cos(90^\circ - A) = \sin A ,$$

тогда, после сокращения левой и правой частей равенства (1.84) на  $\sin A$ , будем иметь

$$\frac{dA}{dS} = \frac{\sin A}{\rho} \quad (1.88)$$

или с учетом (1.82)

$$\frac{dA}{dS} = \frac{\sin B}{r} \sin A . \quad (1.89)$$

Из выражения (1.77) найдем

$$dS = \frac{r}{\sin A} dL .$$

Подставляя этот результат в формулу (1.89), окончательно получим

$$dA = \sin B dL .$$

Таким образом, мы вновь пришли к уравнению (1.78), что и подтверждает корректность первого, безусловно более простого, вывода.

### *Первые интегралы системы дифференциальных уравнений геодезической линии*

Уравнение геодезической линии есть решение системы дифференциальных уравнений (1.79). Разделим первое уравнение этой системы на второе

$$\operatorname{ctg} A = \frac{M dB}{N \cos B dL} . \quad (1.90)$$

Из третьего уравнения получим  $dL = \frac{dA}{\sin B}$ , поэтому

$$\operatorname{ctg} A dA = \frac{M \sin B dB}{N \cos B} . \quad (1.91)$$

Из рис. 1.3 будем иметь

$$-dr = M dB \sin B . \quad (1.92)$$

Кроме того, учтем, что  $N \cos B = r$ , тогда

$$\operatorname{ctg} A dA = -\frac{dr}{r} . \quad (1.93)$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$\ln \sin A + \ln r = \ln c_1$$

или

$$r \sin A = c_1 . \quad (1.94)$$

Решение системы дифференциальных уравнений, разрешенное относительно произвольных постоянных, называется первым интегралом. Для геодезической линии первые интегралы были получены французским ученым Клеро в 1733 г. Равенство (1.94) представляет собой *первое уравнение Клеро* для геодезической линии. Оно читается так: *для геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса параллели на синус азимута в каждой точке есть величина постоянная.*

Второе уравнение Клеро легко получить из (1.94), положив в нем  $r = a \cos U$ , тогда

$$\cos U \sin A = \frac{c_1}{a} = c_2 . \quad (1.95)$$

Очевидно, что каждая геодезическая линия имеет свои значения постоянных  $c_1$  и  $c_2$ .

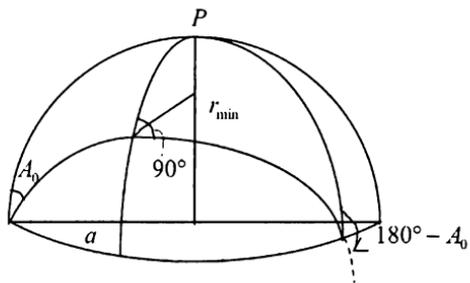
Пользуясь уравнениями Клеро, можно проследить ход геодезической линии на поверхности эллипсоида. Пусть геодезическая линия выходит из точки, расположенной на экваторе, под азимутом  $A_0$  (рис. 1.14). Применяя для этой точки (1.94) и (1.95), получим

$$r \sin A = c_1 = a \sin A_0 ,$$

$$\cos U \sin A = c_2 = \sin A_0 .$$

Таким образом, заодно мы выяснили геометрический смысл постоянных Клеро.

Будем двигаться по геодезической линии к северу. Согласно (1.94) радиус параллели будет уменьшаться, а азимут – увеличиваться пока не достигнет величины  $A = 90^\circ$ . В этой точке радиус параллели достигает наименьшего значения. В последующих точках радиус параллели начнет увеличиваться, азимут перейдет во вторую четверть, т.е. геодезическая линия повернет на юг, приближаясь к экватору, который она пересечет под азимутом, равным  $180^\circ - A_0$ .



*Рис. 1.14. Ход геодезической линии на поверхности эллипсоида*

При последующем движении геодезическая линия вступит в южный полусфероид и вся картина повторится. С юга геодезическая линия пересечет экватор под тем же азимутом  $A_0$ , но начальная и конечная точки в общем случае не совпадут. Геодезическая линия подобно спирали будет описывать бесконечные витки на поверхности эллипсоида.

## РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Триангуляционные геодезические сети состоят из треугольников разных размеров, вершинами которых являются геодезические пункты. Измеренные на этих пунктах угловые и линейные величины исправляются различными поправками и редуцируются на поверхность эллипсоида по нормали к этой поверхности. Проекция геодезических пунктов соединяются геодезическими линиями. Поскольку, как это было выяснено в *параграфе 1.5*, углы в геодезических сетях измеряются между прямыми нормальными сечениями, то возникает задача перехода от нормального сечения к геодезической линии.

Треугольники на поверхности эллипсоида, образованные геодезическими линиями, называются *сфероидическими треугольниками*. Здесь необходимо отметить, что для решения сфероидических треугольников не существует такого аппарата, каким, например, является сферическая тригонометрия для решения треугольников на поверхности шара. Однако в пределах некоторой области сфероидические треугольники можно заменить сферическими. Ниже рассматриваются условия такой замены и методы решения сферических треугольников.

### *2.1. Поправка за переход от прямого нормального сечения к геодезической линии*

Если на поверхности эллипсоида между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  провести геодезическую линию и прямое нормальное сечение, то эти кривые в общем случае не совпадут (нормальное сечение – плоская кривая, геодезическая линия – кривая двойной кривизны). В начальной точке  $Q_1$  азимут  $A_n$  нормального сечения и азимут  $A_g$  геодезической линии отличаются друг от друга. Обозначим разность этих азимутов через

$$\Delta A_g = A_n - A_g. \quad (2.1)$$

Учитывая, что в точке  $Q_1$  главные нормали геодезической линии, прямого нормального сечения и нормали к поверхности  $\bar{m}$  совпадают (это следует из определений для данных кривых, приведенных в параграфе 1.1), введем систему координат, как это показано на *рис.2.1*.

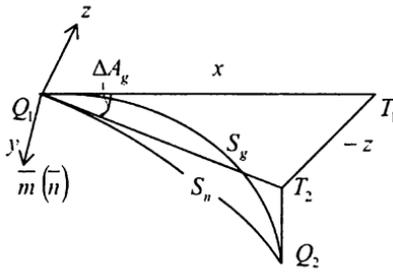


Рис.2.1. Угол между прямым нормальным сечением и геодезической линией

На рис.2.1 обозначено:  $Q_1 T_1$  – касательная к геодезической линии  $S_g$ ;  $Q_1 T_2$  – касательная к нормальному сечению  $S_n$ .

Из рис.2.1 видно, что

$$\Delta A_g \approx \text{tg} \Delta A_g = \frac{-z}{x} . \quad (2.2)$$

В соответствии с формулами (1.5) будем иметь

$$x = S - \eta^2 \frac{S^3}{6} + \dots ,$$

$$z = \eta \sigma \frac{S^3}{6} + \dots$$

Подставляя эти выражения в (2.2) и отбрасывая члены порядка  $S^3$ , получим

$$\Delta A_g = -\eta \sigma \frac{S^2}{6} + \dots . \quad (2.3)$$

Для определения кривизны и кручения геодезической линии используем второе уравнение Серре-Френе из выражений (1.1)

$$\frac{d\bar{m}}{dS} = -\eta_g \bar{i} + \sigma_g \bar{b} ,$$

которое умножим скалярно сначала на вектор  $\bar{i}$ , затем на вектор  $\bar{b}$ . Тогда

$$\left( \frac{d\bar{m}}{dS} \bar{i} \right) = -\eta_g , \quad \left( \frac{d\bar{m}}{dS} \bar{b} \right) = \sigma_g . \quad (2.4)$$

Вектор  $\frac{d\bar{m}}{dS}$  разложим на два составляющих вектора: в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала

$$\frac{d\bar{m}}{dS} = \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} \frac{dX}{dS} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial S_n} \frac{dS_n}{dS} . \quad (2.5)$$

Ранее мы имели (см. формулы (1.80) и (1.76))

$$\frac{d\bar{m}}{dX} = -\frac{\bar{i}_B}{M} , \quad \frac{dX}{dS} = \cos A .$$

Для определения остальных производных спроецируем геодезическую линию на плоскость первого вертикала. В результате будет получена некоторая кривая  $S_n$ . Кривизна этой линии в дифференциальной окрестности данной точки геодезической линии равна  $\frac{1}{N}$ , а уравнения Серре-Френе запишутся ( $\bar{i} = \bar{i}_L$ ,  $\bar{n} = \bar{m}$ ,  $dS = dS_n = dY$ ):

$$\frac{d\bar{i}_L}{dS_n} = \frac{\bar{m}}{N}, \quad \frac{d\bar{m}}{dS_n} = -\frac{\bar{i}_L}{N}.$$

Кроме того, учтем, что согласно (1.77)

$$dS \sin A = dY = dS_n,$$

откуда

$$\frac{dS_n}{dS} = \frac{dY}{dS} = \sin A.$$

Подставляя полученные значения производных в равенство (2.5), будем иметь

$$\frac{d\bar{m}}{dS} = -\frac{\cos A}{M} \bar{i}_B - \frac{\sin A}{N} \bar{i}_L. \quad (2.6)$$

Составим следующие комбинации скалярных произведений:

$$\begin{aligned} (\bar{i} \bar{i}_B) &= \cos A, & (\bar{i} \bar{i}_L) &= \sin A, \\ (\bar{i}_B \bar{b}) &= \cos(90^\circ - A) = \sin A, & (\bar{i}_L \bar{b}) &= \cos(180^\circ - A) = -\cos A. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Теперь выражения (2.4) с учетом (2.6) и (2.7) примут вид

$$\eta_g = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_g = \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right) \sin A \cos A.$$

Если в равенствах (2.8) вынести  $\frac{1}{N}$  за скобки и учесть, что

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B,$$

то окончательно получим

$$\begin{aligned} \eta_g &= \frac{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A}{N}, \\ \sigma_g &= -\frac{e'^2 \cos^2 B}{2N} \sin 2A. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.3), найдем

$$\Delta A_g = \frac{e'^2 \cos^2 B_1}{12N_1^2} \sin 2A_1 \left( 1 + e'^2 \cos^2 B_1 \cos^2 A_1 \right) S^2. \quad (2.10)$$

Учитывая, что

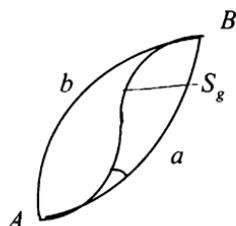
$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}, \quad N^2 = \frac{a^2}{W'^2} \approx \frac{a^2}{1-e^2}$$

и, отбрасывая члены порядка  $e^4$ , получим

$$\Delta A_g'' = \rho'' \frac{e^2}{12a^2} S^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_1. \quad (2.11)$$

Оценим величину  $\Delta A_g$ . При  $B_1 = 45^\circ$ ,  $A_1 = 45^\circ$  и  $S = 50$  км будем иметь  $\Delta A_g = 0,004''$ . Таким образом, поправка за переход от прямого нормального сечения к геодезической линии по величине мала. Она вводится в измеренные направления только при обработке триангуляции I класса.

Детальные исследования\* показывают, что в общем случае геодезическая линия располагается между взаимными нормальными сечениями так, как это показано на *рис. 2.2*. В точке  $A$  геодезическая линия лежит ближе к прямому нормальному сечению  $AaB$ , деля угол между взаимными нормальными сечениями примерно в соотношении 1:2. На половине расстояния она располагается примерно посередине, далее начинает приближаться к обратному нормальному сечению  $BbA$ .



*Рис. 2.2. Расположение взаимных нормальных сечений и геодезической линии*

## 2.2. Условия замены сфероидических треугольников сферическими

### *Полярные координаты на поверхности эллипсоида*

Система полярных координат устанавливается следующим образом (*рис. 2.3*). Произвольная точка  $Q_0$  на поверхности принимается за полюс. В качестве полярной оси берется меридиан точки  $Q_0$ . Полярными координатами любой точки  $Q$  являются длина геодезической линии  $S$  от точки  $Q_0$  до точки  $Q$  и азимут  $A$  геодезической линии в полюсе  $Q_0$ .

\* См. например: Красовский Ф.Н. *Руководство по высшей геодезии, ч. II.* — М.: Геодезиздат, 1942.

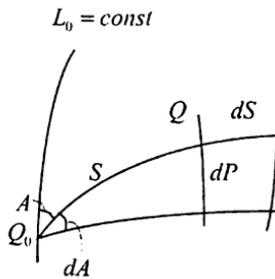


Рис.2.3. Полярные координаты на поверхности эллипсоида

Первое семейство координатных линий ( $A - \text{const}$ ) представляет собой пучок геодезических линий, исходящих из полюса  $Q_0$ . Второе семейство координатных линий ( $S - \text{const}$ ) состоит из кривых, называемых геодезическими окружностями. Линии обоих семейств ортогональны друг другу.

### Приведенная длина геодезической линии

Зависимость между дифференциалами полярных координат на плоскости выразилась бы, как это видно из рис. 2.3, простой формулой:  $dP = S dA$ . Однако для поверхностей шара и эллипсоида придется вводить выражение по своему геометрическому смыслу более сложное

$$dP = m dA, \quad (2.12)$$

где  $m$  – в общем случае функция обеих координат  $S$  и  $A$ . Величина  $m$  представляет собой радиус кривизны геодезической окружности в данной точке  $Q$  и носит название *приведенной длины геодезической линии* (рис.2.4).

Для сферы величина  $m_c$  устанавливается относительно просто. Непосредственно из рис. 2.4 имеем

$$dP_c = r dA, \quad (2.13)$$

где  $r$  – радиус параллели. Сравнивая (2.13) и (2.12), получим

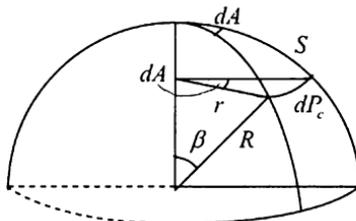


Рис.2.4. Приведенная длина геодезической линии на поверхности шара

$$m_c = r = R \sin \beta = R \sin \frac{S}{R}. \quad (2.14)$$

Отсюда выражение (2.12) для шара запишется

$$dP_c = R \sin \frac{S}{R} dA.$$

В отличие от шара кривизна поверхности эллипсоида изменяется от точки к точке, поэтому уравнение связи с кривизной поверхности естественно искать в дифференциальной форме.

Для вывода дифференциального уравнения совместим полюс полярных координат  $Q_0$  с земным полюсом  $P$  (рис. 2.5). При таком выборе системы координат геодезические линии совпадут с меридианами, геодезические окружности – с параллелями. Для этого случая можно записать

$$S = PQ' - QQ' = X_3 - X, \quad m = r,$$

с учетом этих выражений найдем первую производную

$$\frac{dm}{dS} = \frac{dr}{d(X_3 - X)} = \frac{dr}{-dX}. \quad (2.15)$$

Учитывая, что согласно (1.92) и (1.61)

$$\begin{aligned} dr &= -M \sin B dB, \\ dX &= M dB, \end{aligned}$$

для (2.15) получим

$$\frac{dm}{dS} = \sin B.$$

Для второй производной будем иметь

$$\frac{d^2 m}{dS^2} = \frac{d\left(\frac{dm}{dS}\right)}{dS} = \frac{d(\sin B)}{-dX} = \frac{\cos B dB}{-M dB} = -\frac{\cos B}{M}$$

или

$$\frac{d^2 m}{dS^2} = -\frac{N \cos B}{M N} = -\frac{r}{R^2}. \quad (2.16)$$

Учитывая, что  $r = m$ ,  $\frac{1}{R^2} = K$ , где  $K$  – полная (гауссова) кривизна на поверхности, получим

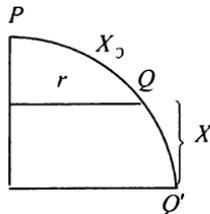


Рис. 2.5. К выводу формулы для приведенной длины геодезической линии на эллипсоиде

$$\frac{d^2 m}{dS^2} = -m \text{ К} . \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, которое устанавливает связь между приведенной длиной геодезической линии на эллипсоиде и кривизной его поверхности.

Интеграл уравнения (2.17) в элементарных функциях не выражается. Поэтому будем искать его приближенно в виде степенного ряда по переменной  $S$ , т.е.

$$m = m_0 + \left(\frac{dm}{dS}\right)_0 S + \left(\frac{d^2 m}{dS^2}\right)_0 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{d^3 m}{dS^3}\right)_0 \frac{S^3}{6} + \dots \quad (2.18)$$

Для вычисления интеграла (2.17) или ряда (2.18) необходимо определить начальные условия интегрирования. Для этого совместим текущую точку  $Q$  с полюсом  $Q_0$  с помощью предельного перехода при  $S \rightarrow 0$ . В дифференциальной окрестности точки  $Q_0$  будем иметь:  $m = m_0 = r_0 = S_0 = 0$ ,  $dm_0 = dS_0$ . Отсюда получим начальные условия интегрирования

$$m_0 = 0, \quad \left(\frac{dm}{dS}\right)_0 = 1 . \quad (2.19)$$

С учетом (2.19) найдем производные, входящие в ряд (2.18)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 m}{dS^2}\right)_0 &= -m_0 \text{ К}_0 = 0, \\ \left(\frac{d^3 m}{dS^3}\right)_0 &= \frac{d(-m_0 \text{ К}_0)}{dS_0} = -\left(\frac{dm}{dS}\right)_0 \text{ К}_0 - \left(\frac{d\text{К}}{dS}\right)_0 m_0 = -\text{К}_0, \\ \left(\frac{d^4 m}{dS^4}\right)_0 &= -\left(\frac{d\text{К}}{dS}\right)_0 . \end{aligned}$$

Теперь ряд (2.18) примет вид

$$m = S - \text{К}_0 \frac{S^3}{6} - \frac{d\text{К}_0}{dS} \frac{S^4}{12} . \quad (2.20)$$

Разложим синус малого угла  $\frac{S}{R_0}$  в ряд

$$\sin \frac{S}{R_0} = \frac{S}{R_0} - \frac{S^3}{6R_0^3} + \dots ,$$

тогда

$$R_0 \sin \frac{S}{R_0} = S - \frac{S^3}{6R_0^2} .$$

Таким образом, для первых двух членов ряда (2.20) получим

$$S - \text{К}_0 \frac{S^3}{6} = R_0 \sin \frac{S}{R_0} .$$

Производную в третьем члене выражения (2.20) представим как производную сложной функции

$$\frac{dK_0}{dS} = \frac{dK_0}{dV} \frac{dV}{dB} \frac{dB}{dS}.$$

Учитывая, что

$$K = \frac{1}{R^2} = \frac{V^4}{c^2}, \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B},$$

$$MdB = dS \cos A, \quad M = \frac{c}{V^3},$$

выражения для производных получим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dK_0}{dV} &= \frac{d\left(\frac{V^4}{c^2}\right)}{dV} = \frac{4V^3}{c^2}, \\ \frac{dV}{dB} &= -\frac{e'^2 \sin 2B_0}{2V}, \\ \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{\cos A}{c} V^3. \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в (2.20) и ограничиваясь членами порядка  $e^2$ , после несложных преобразований найдем

$$m = R_0 \sin \frac{S}{R_0} + \frac{a}{6} \frac{e^2}{6} \sin 2B_0 \cos A_0 \left(\frac{S}{a}\right)^4. \quad (2.21)$$

### *Условия замены сфероидических треугольников сферическими*

Форма земного эллипсоида незначительно отличается от шара, поэтому следует ожидать, что углы и стороны сфероидического треугольника будут мало отличаться от соответствующих углов и сторон сферического треугольника с надлежаще подобранным радиусом шара.

Очевидно, что при замене сфероидического треугольника сферическим, с увеличением сторон будет соответственно увеличиваться и ошибка. Таким образом, возникает следующая задача: найти наибольшие размеры сфероидического треугольника, при которых замена его сферическим вызовет ошибки в углах и сторонах в пределах заданной точности вычислений. Заметим, что для этого достаточно исследовать искажения длин сторон, поскольку искажения углов будут следствием ошибок сторон.

Для решения поставленной задачи изобразим часть поверхности эллипсоида на шаре радиуса  $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$  таким образом, чтобы полярные координаты  $S$  и  $A$  некоторой точки эллипсоида были точно равны полярным координатам ее изображения на шаре.

При этом способе изображения линейное искажение в направлении геодезической линии будет равно нулю, а в перпендикулярном направлении вдоль геодезической окружности (см. рис.2.3) будет максимальным. Относительное линейное искажение вдоль геодезической окружности выразится формулой

$$v = \frac{dP - dP_c}{dP_c}, \quad (2.22)$$

где  $dP$  – дифференциал дуги геодезической окружности на эллипсоиде;  $dP_c$  – дифференциал дуги ее изображения на шаре. С учетом (2.12) выражение (2.22) запишется

$$v = \frac{m dA - m_c dA}{m_c dA} = \frac{m - m_c}{m_c}. \quad (2.23)$$

Выразим  $m$  по формуле (2.21), а  $m_c$  – по формуле (2.14), кроме того в знаменателе формулы (2.23) примем

$$m_c = R \sin \frac{S}{R} \approx R \frac{S}{R} = S,$$

тогда

$$v = \frac{e^2}{6} \sin 2B_0 \cos A \left( \frac{S}{a} \right)^3. \quad (2.24)$$

Наибольшей величины искажение достигнет при  $B = 45^\circ$ ,  $A = 0^\circ$  или  $A = 180^\circ$ .

Для этого случая

$$v_{\max} = \frac{e^2}{6a^3} S^3. \quad (2.25)$$

Задаваясь величиной  $v_{\max}$ , легко установить размеры участка поверхности эллипсоида, в пределах которого можно пренебречь искажениями, возникающими при замене сфероидического треугольника на сферический. Примем, например,  $v_{\max} = 10^{-8}$ , что соответствует точности вычислений длин и углов треугольников при обработке триангуляции I класса. Тогда, решая уравнение (2.25) относительно  $S$  с приближенными значениями  $e^2 = 0,0067$ ,  $a = 6400$  км, получим  $S = 133$  км.

Если в окружность с радиусом, равным 133 км, вписать равно-сторонний треугольник, то его стороны составят 240 км.

Таким образом, если стороны сфероидического треугольника не превышают 240 км, то с относительной ошибкой  $10^{-8}$  этот треугольник можно решать как сферический на шаре с радиусом  $R = \sqrt{M N}$ , вычисленным для средней точки треугольника.

### 2.3. Решение сферического треугольника по способу аддитанентов

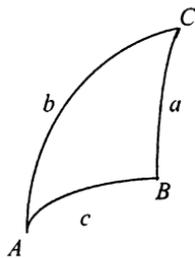


Рис.2.6. Сферический треугольник

Решение сферического треугольника в массовых геодезических работах состоит в том, что по известным углам  $A, B, C$  (рис.2.6) и по одной заданной стороне вычисляют остальные две стороны. Стороны сферического треугольника, представляющие дуги больших кругов, должны быть выражены в частях радиуса сферы, что создает определенные неудобства при вычислениях. Однако этой трудности можно избежать, если использовать специальные приемы, один из которых состоит в том, что стороны сферического треугольника исправляются небольшими поправками.

Для сферического треугольника справедлива теорема синусов в следующей форме

$$\sin \frac{b}{R} = \sin \frac{a}{R} \frac{\sin B}{\sin A}, \quad (2.26)$$

$$\sin \frac{c}{R} = \sin \frac{a}{R} \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Поскольку стороны сферического треугольника, выраженные в линейной мере, невелики по сравнению с радиусом земного шара, то синусы сферических сторон можно разложить в ряд, ограничившись первыми двумя членами, т.е. (2.26) можно записать (далее будем оперировать только с первой формулой, для других сторон все выводы выполняются аналогично)

$$\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3} = \left( \frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3} \right) \frac{\sin B}{\sin A}$$

или

$$b - \frac{b^3}{6R^2} = \left( a - \frac{a^3}{6R^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A}. \quad (2.27)$$

Введем обозначения:

$$a - \frac{a^3}{6R^2} = a - k \quad a^3 = a', \quad (2.28)$$

$$b - \frac{b^3}{6R^2} = b - k \quad b^3 = b'.$$

Тогда выражение (2.27) примет вид формулы синусов для плоского треугольника

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A} . \quad (2.29)$$

Формулу (2.27) можно представить и в другом виде

$$b \left( 1 - \frac{b^2}{6R^2} \right) = a \left( 1 - \frac{a^2}{6R^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A}$$

или, удерживая члены только второго порядка,

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A} \left( 1 - \frac{a^2}{6R^2} \right) \left( 1 - \frac{b^2}{6R^2} \right)^{-1} \approx a \frac{\sin B}{\sin A} \left( 1 - \frac{a^2}{6R^2} + \frac{b^2}{6R^2} \right). \quad (2.30)$$

Малые величины  $k a^3, k b^3$  и т.д. называются *аддитаментами* (добавками). Из формул (2.29) и (2.30) видно, что с помощью аддитаментов сферический треугольник можно решать как плоский с сохранением значений сферических углов.

Решение треугольников данным способом ведут в следующем порядке.

Вычисляют сферический избыток треугольника. На этом вопросе остановимся более подробно. Сферический избыток треугольника представляет собой разность

$$\varepsilon - A+B+C-180^\circ,$$

где  $A, B, C$  – точные (безошибочные) значения углов сферического треугольника.

Согласно известной теореме Гаусса (Theorema Egregium) сферический избыток пропорционален площади фигуры  $P$

$$\varepsilon = K P, \quad (2.31)$$

где  $K = \frac{1}{R^2}$  – гауссова кривизна (для шара  $K = \text{const}$ ).

Используя ту или иную формулу для площади треугольника, будем иметь (сферический избыток выражен в угловых секундах)

$$\varepsilon'' = f a b \sin C = f a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}, \quad (2.32)$$

где

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}. \quad (2.33)$$

Величина  $f$  является слабопеременной функцией широты  $B$ . Представление о ее значениях дает табл. 2.1 (при их вычислении по формуле (2.33)  $R$  выражен в км).

$B$	$f$	$B$	$f$
30°	$25,44 \cdot 10^{-4}$	60°	$25,27 \cdot 10^{-4}$
40	$25,38 \cdot 10^{-4}$	70	$25,22 \cdot 10^{-4}$
50	$25,32 \cdot 10^{-4}$	80	$25,19 \cdot 10^{-4}$

Сферический избыток лучше вычислять по второй формуле (2.32), поскольку в нее входит исходная сторона (ее также необходимо выразить в км).

Порядок решения сферического треугольника.

1. Вычисляют невязку треугольника

$$W = A + B + C - (180^\circ + \varepsilon)$$

и распределяют ее по измеренным углам.

2. Вычисляют аддитамент исходной стороны  $k a^3$  и получают ее значение  $a'$  на плоскости по формуле (2.28).

3. Решают треугольник как плоский, вычисляя значения сторон  $b'$  и  $c'$ .

4. Вычисляют аддитаменты  $k b'^3$  и  $k c'^3$  и находят стороны сферического треугольника по формулам, которые следуют из (2.23)

$$b = b' + k b'^3, \quad c = c' + k c'^3.$$

#### 2.4. Решение сферического треугольника по теореме Лезандра

Теорема Лезандра утверждает: малый сферический треугольник можно решать как плоский, если каждый его угол уменьшить на одну треть сферического избытка, т.е. использовать следующие значения углов:

$$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon, \quad B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon, \quad C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Приведем доказательство теоремы. В соответствии с ее утверждением запишем формулу синусов в виде

$$b = a \frac{\sin B'}{\sin A'} = a \frac{\sin\left(B - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left(A - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}. \quad (2.34)$$

Используя выражение для синуса разности углов и принимая

$\sin \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\cos \frac{\varepsilon}{3} = 1$ , получим

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A} \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{\cos B}{\sin B}\right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{\cos A}{\sin A}\right)} = a \frac{\sin B}{\sin A} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{\cos B}{\sin B}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{\cos A}{\sin A}\right)^{-1} \approx (2.35)$$

$$\approx a \frac{\sin B}{\sin A} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\cos A}{\sin A} \right).$$

Выразим  $\varepsilon$  по первой формуле (2.32)

$$\varepsilon = \frac{a b}{2R^2} \sin C = \frac{a b}{2R^2} \sin(A+B) = \frac{a b}{2R^2} (\sin A \cos B + \cos A \sin B). \quad (2.36)$$

Здесь  $\varepsilon$  задается в радианной мере.

Подставляя (2.36) в (2.35) и приводя подобные члены, получим

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A} \left( 1 - \frac{a}{6R^2} b \frac{\sin A}{\sin B} + \frac{b}{6R^2} a \frac{\sin B}{\sin A} \right), \quad (2.37)$$

но

$$b \frac{\sin A}{\sin B} = a, \quad a \frac{\sin B}{\sin A} = b,$$

поэтому (2.37) запишется

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A} \left( 1 - \frac{a^2}{6R^2} + \frac{b^2}{6R^2} \right). \quad (2.38)$$

Выражение (2.38) полностью совпадает с формулой (2.30), что и доказывает теорему. Из совпадения этих выражений также следует, что решение сферических треугольников по теореме Лежандра и способу аддитантов по точности эквивалентно.

Порядок решения сферического треугольника по теореме Лежандра.

1. Вычисляют сферический избыток  $\varepsilon$ .
2. Вычисляют и распределяют невязку треугольника

$$W = A + B + C - (180^\circ + \varepsilon).$$

3. Уменьшают уравненные сферические углы на  $\frac{1}{3}\varepsilon$ .

4. С исправленными углами решают треугольник как плоский.

На практике способ Лежандра является основным, способ аддитантов используется как контрольный.

*Пример решения сферического треугольника по способу Лежандра.*

Формулы:

$$\varepsilon^* = f \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}, \quad f = \frac{\rho^*}{2R^2}, \quad R^2 = M N, \quad b - \text{в км}$$

$$A' = A - \frac{\varepsilon}{3}, \quad B' = B - \frac{\varepsilon}{3}, \quad C' = C - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$W = A + B - C - (180^\circ + \varepsilon),$$

$$\frac{b}{\sin B'} = D, \quad a = D \sin A', \quad c = D \sin C'.$$

Вычисление сферического избытка ( $B_m = 48,2^\circ$ ):

$$\begin{aligned} f &= 0,002533 & \sin C &= 0,9235 \\ b^2 &= 2007 & \sin B &= 0,8847 \\ \sin A &= 0,7698 & \epsilon &= 4,09'' \end{aligned}$$

Решение треугольника (табл.2.2).

Таблица 2.2

Вершины	Измеренные углы	$-\frac{W}{3}$	Сферические углы	$-\frac{\epsilon}{3}$	Плоские углы	Стороны (м)
<i>B</i>	62° 12' 44,54"	0,57"	62° 12' 45,11"	-1,36"	62° 12' 43,75"	44 797,282
<i>A</i>	50 20 19,41	0,57	50 20 19,98	-1,36	50 20 18,62	38 981,594
<i>C</i>	67 26 58,43	0,57	67 26 59,00	-1,37	67 26 57,63	46 765,073
$\Sigma$	180 00 02,38	1,71	180 00 04,09	-4,09	180 00 00,00	
$\epsilon$	4,09					
<i>W</i>	-1,71					

## РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА И В ПРОСТРАНСТВЕ

### 3.1. Сущность геодезических задач на поверхности эллипсоида и принцип их решения

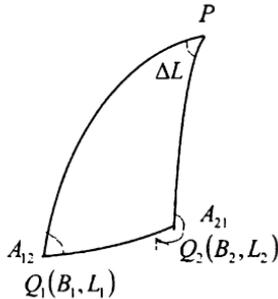


Рис. 3.1. Полярный сфероидический треугольник

Соединим точки  $Q_1$  и  $Q_2$  на поверхности эллипсоида геодезической линией  $S$  (рис.3.1).

Условимся называть точку  $Q_1$  – начальной точкой,  $Q_2$  – конечной точкой. Условимся также, что геодезическая линия от точки  $Q_1$  к точке  $Q_2$  имеет прямое направление, а от точки  $Q_2$  к точке  $Q_1$  – обратное направление. Соответственно азимут  $A_{12}$  называется прямым (начальным) азимутом,  $A_{21}$  – обратным азимутом. Заметим, что прямой и обратный азимут в одной и той же точке отличаются друг от друга ровно на  $180^\circ$ .

После этих замечаний сформулируем сущность решения геодезических задач.

#### *Прямая геодезическая задача*

Даны геодезические координаты точки  $Q_1 - B_1, L_1$ , длина геодезической линии и ее начальный азимут  $A_{12}$ . По этим данным требуется найти координаты точки  $Q_2 - B_2, L_2$ , а также обратный азимут  $A_{21}$ .

#### *Обратная геодезическая задача*

Даны геодезические координаты  $B_1, L_1$  и  $B_2, L_2$  точек  $Q_1$  и  $Q_2$ . Требуется найти длину геодезической линии между этими точками, а также прямой  $A_{12}$  и обратный  $A_{21}$  азимуты этой линии в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Прямую и обратную задачи называют *главными геодезическими задачами*. В общем случае – эти задачи на преобразование координат. В прямой задаче полярные координаты  $S$  и  $A_{12}$  с полюсом в точке  $Q_1$  преобразуют в геодезические координаты точки  $Q_2$ . В обратной задаче геодезические координаты двух точек преобразуют в полярные.

### *Область применения геодезических задач и точность их решения*

Этот раздел геодезии обслуживает нужды как самой геодезии, так и других отраслей науки и практики.

Прямая геодезическая задача применяется при вычислении геодезических координат пунктов триангуляции I класса.

Обратная задача используется при уравнивании геодезических сетей и особенно широко для специальных целей – при запусках ракет, ИСЗ, прокладке курса самолета или корабля и т.д.

Если для целей геодезии прямая и обратная задачи применяются для расстояний  $S$  до 200 км (длина замыкающей звена триангуляции I класса) или до 600 км (радиогеодезических сетях), то в специальных целях главные геодезические задачи приходится решать для любых расстояний вплоть до 20 000 км.

Наибольшие требования к точности решения геодезических задач предъявляет триангуляция I класса. Как известно, уравниваемые на станциях измеренные направления выводят до  $0,01''$ . Чтобы избежать накопления ошибок при передаче азимута от стороны к стороне, их принято вычислять с точностью до  $0,001''$ . Для того, чтобы обеспечить точность плановых координат до 1 см (как они записываются в каталог), вычисления необходимо вести с точностью до 1 мм. Поэтому геодезические координаты  $B$  и  $L$  вычисляют до  $0,0001''$ .

При решении специальных задач требования к точности будут различными. Они должны соответствовать цели, в интересах которой решается прямая или обратная геодезическая задача.

При исследовании новых формул и способов решения геодезических задач, с целью выявления их математических ошибок, координаты вычисляются до  $0,0001''$ .

### *Принципы решения геодезических задач*

Легко показать, что решение главных геодезических задач на шаре сводится к решению полярного сферического треугольника (рис.3.2.).

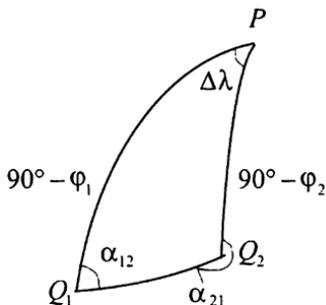


Рис.3.2. Полярный сферический треугольник

Введем обозначения:  $\varphi$  – географическая широта,  $\lambda$  – географическая долгота,  $\alpha$  – азимут дуги большого круга,  $\sigma$  – сферическое расстояние (длина дуги большого круга).

Рассмотрим наше утверждение на примере прямой задачи, по условиям которой будут заданы координаты  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\sigma$  и  $\alpha_{12}$ , а найти требуется  $\varphi_2$ ,  $\lambda_2$  и  $\alpha_{21}$ . В треугольнике  $PQ_1Q_2$  будут известны элементы:  $Q_1P = 90^\circ - \varphi_1$ ,  $\angle Q_1 = \alpha_{12}$ ,  $Q_1Q_2 = \sigma$ .

Решив треугольник по тем или иным формулам сферической тригонометрии, получим остальные три его элемента ( $\angle Q_2$ ,  $Q_2P$ ,  $\angle P$ ), по которым найдем искомые неизвестные прямой задачи (см. рис. 3.2.):  $\alpha_{21} = 360^\circ - \angle P$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ - Q_2P$ ,  $\Delta\lambda = \angle P$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ . Это и доказывает справедливость высказанного утверждения.

Для эллипсоида аппарат сферической тригонометрии неприменим, поэтому приходится использовать более сложные приемы. Покажем, что решение главных геодезических задач на поверхности эллипсоида сводится к интегрированию дифференциальных уравнений геодезической линии. Для краткости рассмотрим только одну прямую задачу, в которой исходными являются  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $S$ ,  $A_{12}$ , а определяемыми  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_{21}$  или разности  $\Delta B = B_2 - B_1$ ,  $\Delta L = L_2 - L_1$ ,  $\Delta A = A_2 - A_1$ .

Запишем дифференциальные уравнения геодезической линии (1.79) в виде

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\cos A}{M} dS, \\ dL &= \frac{\sin A}{N \cos B} dS, \\ dA &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B dS. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интегрируя уравнения (3.1) по дуге  $S$  (между точками  $Q_1$  и  $Q_2$ )

$$\Delta B = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\cos A}{M} dS,$$

$$\Delta L = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\sin A}{N \cos B} dS, \quad (3.2)$$

$$\Delta A = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B dS,$$

получим определяемые величины прямой задачи на эллипсоиде, что и доказывает наше утверждение.

### 3.2. Общие методы решения главных геодезических задач

#### *Решение главных геодезических задач на шаре*

Решение прямой и обратной геодезических задач на шаре представляет собой решение полярного сферического треугольника  $Q_1 Q_2 P$  (см. рис. 3.2), когда заданы две любые стороны и угол между ними, а необходимо найти третью сторону и прилежащие к ней углы.

Для решения полярного треугольника можно применять различные формулы сферической тригонометрии. Приведем сводку необходимых соотношений:

$$\sin \sigma \sin \alpha_1 = \sin \Delta \lambda \cos \varphi_2, \quad (3.3)$$

$$\sin \sigma \sin \alpha_2 = -\sin \Delta \lambda \cos \varphi_1, \quad (3.4)$$

$$\sin \sigma \cos \alpha_1 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda, \quad (3.5)$$

$$\sin \sigma \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \Delta \lambda, \quad (3.6)$$

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda, \quad (3.7)$$

$$\cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda = \cos \varphi_1 \cos \sigma - \sin \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1, \quad (3.8)$$

$$\cos \varphi_2 \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \sin \sigma - \cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1, \quad (3.9)$$

$$\cos \varphi_2 \sin \alpha_2 = -\cos \varphi_1 \sin \alpha_1, \quad (3.10)$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1. \quad (3.11)$$

Применим эти формулы для решения геодезических задач.

#### *Прямая геодезическая задача*

Исходные данные:  $\varphi_1, \lambda_1, \alpha_1, \sigma$ .

Определяемые величины:  $\varphi_2, \Delta \lambda, \alpha_2$ .

Широта определяется по формуле (3.11). Формулу для определения разности долгот  $\Delta \lambda$  найдем делением равенства (3.3) на (3.8):

$$\operatorname{tg} \Delta \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma - \sin \varphi_2 \sin \sigma \cos \alpha_1}. \quad (3.12)$$

Формулу для определения обратного азимута найдем делением равенства (3.10) на (3.9):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_2 - \sin \varphi_1 \sin \sigma} \quad (3.13)$$

### *Обратная геодезическая задача на шаре*

Исходные данные:  $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2, \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ .

Определяемые величины:  $\sigma, \alpha_1, \alpha_2$ .

Выражение для прямого азимута найдем делением равенства (3.3) на (3.5):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \Delta\lambda \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda} = \frac{p}{q} \quad (3.14)$$

Выражение для определения обратного азимута найдем делением (3.4) на (3.6):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \Delta\lambda \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \Delta\lambda - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2} \quad (3.15)$$

Сферическое расстояние вычисляется по формуле (3.7) или через

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{p \sin \alpha_1 + q \cos \alpha_1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda}, \quad (3.16)$$

где  $p$  и  $q$  - числитель и знаменатель в формуле (3.14).

Все полученные формулы являются строгими и пригодны для решения треугольников любых размеров.

### *Общие приемы решения геодезических задач на эллипсоиде*

Решение главных геодезических задач на эллипсоиде, как было выяснено, сводится к интегрированию дифференциальных уравнений геодезической линии. Для прямой задачи оно описывается довольно сложной структурой: подынтегральная функция зависит от азимута  $A$  и широты  $B$ , а переменной интегрирования является  $S$ . В элементарных функциях эти интегралы не выражаются, поэтому приходится использовать приближенные способы их вычисления или прибегать к специальным приемам.

Первый способ заключается в том, что интегралы (3.2) раскладывают в ряды по степеням  $S$

$$\begin{aligned} \Delta B &= \left( \frac{dB}{dS} \right)_1 S + \left( \frac{d^2 B}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2} + \left( \frac{d^3 B}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{6} + \dots, \\ \Delta L &= \left( \frac{dL}{dS} \right)_1 S + \left( \frac{d^2 L}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2} + \left( \frac{d^3 L}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{6} + \dots, \\ \Delta A &= \left( \frac{dA}{dS} \right)_1 S + \left( \frac{d^2 A}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2} + \left( \frac{d^3 A}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если первые коэффициенты рядов (3.17) находятся достаточно просто по равенствам (3.1), то остальные имеют весьма сложный вид. Например, поскольку подынтегральное выражение в (3.2) есть функция двух переменных  $B$  и  $A$ , то

$$\frac{d^2 B}{dS^2} = \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{dB}{dS} \right) \frac{dB}{dS} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{dB}{dS} \right) \left( \frac{dA}{dS} \right).$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{dB}{dS} \right) &= \cos A \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right), \\ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{dB}{dS} \right) &= -\frac{\sin A}{M}. \end{aligned}$$

Вспомним, что  $\frac{1}{M} = \frac{V^3}{c}$ ,

тогда 
$$\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right) = \frac{3V^2}{c} \frac{dV}{dB} = -\frac{3V}{c} e'^2 \sin 2B.$$

Учитывая, что  $\frac{V^3}{c} = \frac{1}{M}$  и используя выражение (3.1), после несложных преобразований получим

$$\left( \frac{d^2 B}{dS^2} \right) = -\frac{tgB}{M N} (3\eta^2 \cos^2 A + \sin^2 A).$$

Таким же образом можно найти остальные коэффициенты в рядах (3.17). Отметим здесь, что чем выше порядок производной, тем более сложным становится ее аналитическое представление, и, чем длиннее  $S$ , тем больше членов придется удерживать в рядах (3.17). Поэтому следует признать, что данный способ не является ни строгим, ни эффективным.

Второй путь заключается в использовании численных методов интегрирования, в частности способа Рунге-Кутты и его модификаций. Исследования показали практическую эффективность этого метода при решении на ЭВМ прямой геодезической задачи для расстояний до 600 км.

Третий метод является наиболее универсальным. Он применим для решения геодезических задач на любые расстояния вплоть до 20 000 км. Сущность его заключается в следующем.

Форма земного эллипсоида незначительно отличается от шара. Решение же геодезических задач на шаре, как было показано выше, выполняется совершенно строго по простым формулам сферической тригонометрии. Поэтому представляется целесообразным геодезическую линию эллипсоида изобразить на шаре в виде дуги большого

круга так, что каждой точке геодезической линии будет соответствовать точка дуги большого круга в качестве ее изображения.

Это соответствие считается установленным, если найдены математические зависимости между величинами  $B, L, S, A$  в каждой точке геодезической линии на эллипсоиде и величинами  $\varphi, \lambda, \sigma, \alpha$  в соответствующей точке дуги большого круга на шаре.

Эти зависимости можно записать в виде следующих четырех дифференциальных уравнений:

$$\frac{dS}{d\sigma} = f_1, \quad \frac{dB}{d\varphi} = f_2, \quad \frac{dL}{d\lambda} = f_3, \quad \frac{dA}{d\alpha} = f_4. \quad (3.18)$$

Если правые части выражений (3.18) будут известны, то, проинтегрировав дифференциальные уравнения (3.18), получим все необходимые формулы для перехода с эллипсоида на шар и обратно.

Отсюда вытекает последовательность решения геодезических задач данным способом.

1. По заданным величинам на эллипсоиде вычисляют соответствующие величины на шаре (переход с эллипсоида на шар)

2. Решают геодезическую задачу на шаре.

3. По величинам, полученным на шаре, находят соответствующие величины на эллипсоиде (переход с шара на эллипсоид).

Теперь остается наметить общий подход к установлению величин  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$ .

Запишем дифференциальные уравнения геодезической линии на эллипсоиде и шаре:

$$\begin{aligned} dS \cos A &= M dB, & d\sigma \cos A &= R d\varphi, \\ dS \sin A &= N \cos B dL, & d\sigma \sin A &= R \cos \varphi d\lambda, \\ dA &= \sin B dL, & d\alpha &= \sin \varphi d\lambda. \end{aligned} \quad (3.19) \quad (3.20)$$

Составим отношения соответствующих уравнений (3.19) и (3.20), тогда, с учетом (3.18), получим систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{aligned} f_1 \frac{\cos A}{\cos \alpha} &= f_2 \frac{M}{R}, \\ f_1 \frac{\cos A}{\sin \alpha} &= f_3 \frac{N \cos B}{R \cos \varphi}, \\ f_4 &= f_3 \frac{\sin B}{\sin \varphi}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Система (3.21) – неопределенная, она имеет множество решений.

Поскольку каждое решение, согласно (3.18), приводит к какому-то конкретному способу перехода с эллипсоида на шар, то, следовательно, и способов изображения эллипсоида на шаре также будет бесконечное множество.

Таким образом, достаточно одну из функций  $f_1$  задать произвольно, чтобы остальные найти из соотношений (3.21). Однако при интегрировании дифференциальных уравнений необходимо ввести дополнительное условие для определения постоянной интегрирования. Поэтому обычно для установления способа перехода с эллипсоида на шар задают произвольно два условия, остальные находят из выражений (3.21).

Если задать не два, а больше условий перехода с эллипсоида на шар, то естественные связи в (3.21) нарушатся и будет получен некоторый приближенный способ перехода. Например, полагая  $f_1=f_2=f_3=f_3=f_4=1$ , получим способ, в котором эллипсоид принимают за шар определенного радиуса. В главе 2 было показано, что такой прием применим в весьма ограниченной области, за пределами которой его точность быстро понижается.

Ниже рассматриваются несколько методов решения геодезических задач на эллипсоиде. При их выборе мы руководствовались следующими соображениями: во-первых, они должны иллюстрировать общие подходы к решению проблемы, изложенные в настоящем параграфе; во-вторых – часто использоваться на практике.

### 3.3. Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге-Кутта–Ингленда

Данный метод является одной из многочисленных модификаций известного способа Рунге-Кутта.

Кратко изложим его сущность.

Пусть функция определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.22)$$

с начальными условиями  $x = x_1, y = y_1$  (рис.3.3).

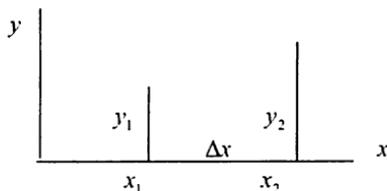


Рис. 3.3. Интегрирование по методу Рунге-Кутта

Необходимо найти численное значение функции  $y_n$  для заданного значения аргумента  $x_n$ . Для этого весь участок интегрирования разбивается на отрезки  $h = \frac{x_n - x_1}{n}$ , величина  $h$  называется шагом интегри-

рования. Для определения  $y_n$  последовательно вычисляют значение функций  $y_i$ , причем каждая последующая ордината вычисляется по предыдущей

$$y_{i-1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4).$$

Если весь участок не велик, то применяется одношаговый процесс ( $h=\Delta x$ ), который описывается следующими выражениями:

$$\Delta y_{12} = y_2 - y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4), \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x_1, y_1), \\ k_2 &= \Delta x f\left(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= \Delta x f\left(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\right), \\ k_4 &= \Delta x f(x_1 + \Delta x, y_1 - k_2 + 2k_3). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Поставив (3.24) в (3.23), получим значение искомой функции:  $y_2 = y_1 + \Delta y_{12}$ . Методическую ошибку данного способа можно оценить по формуле

$$M = \frac{1}{336}(-42k_1 - 224k_3 - 21k_4 + 162k_5 + 125k_6), \quad (3.25)$$

в которой

$$\begin{aligned} k_5 &= \Delta x f\left[x_1 + \frac{18}{27}\Delta x, y_1 + \frac{1}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_3)\right], \\ k_6 &= \Delta x f\left[x_1 + \frac{1}{5}\Delta x, y_1 + \frac{1}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3)\right]. \end{aligned}$$

Полученное значение  $M$  сравнивают с заданной точностью вычислений  $\varepsilon$ . Если  $M \leq \varepsilon$ , то решение заканчивают, если  $M > \varepsilon$ , то участок интегрирования делят на два и процесс продолжают, пока не будет достигнута заданная точность.

Применим метод Рунге-Кутты—Ингланда для численного интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии (3.1), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} = f_B(A, B), \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N \cos B} = f_L(A, B), \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A \sin B}{N \cos B} = f_A(A, B) = f_L(A, B) \sin B. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Согласно (3.23), для искоемых функций  $B$ ,  $L$  и  $A$  будем иметь

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{1}{6}(\Delta B_1 + 4\Delta B_3 + \Delta B_4), \\ L_2 &= L_1 + \frac{1}{6}(\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4), \\ A_2 &= A_1 + \frac{1}{6}(\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В формулах (3.27) обозначения из общего выражения (3.23) заменены на  $\Delta B_i$ ,  $\Delta L_i$ ,  $\Delta A_i$  в соответствии с видом определяемых функций. Из выражений (3.26) и (3.24) для них можно получить

$$\begin{aligned} \Delta B_i'' &= S_0 V_i^3 \cos A_i, \\ \Delta L_i'' &= S_0 V_i \frac{\sin A_i}{\cos B_i}, \\ \Delta A_i'' &= \Delta L_i'' \sin B_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Покажем, например, как получена первая формула (3.28). Первое уравнение (3.26) запишем в виде приближенного равенства

$$\Delta B_i'' = \rho'' \frac{\cos A_i}{M_i} S,$$

но  $M = \frac{c}{V^3}$ , тогда, вводя обозначение  $\frac{S}{c} \rho'' = S_0$ , получим

$$\Delta B_i'' = S_0 V_i^3 \cos A_i.$$

Остальные формулы найдены аналогично.

Рассмотрим последовательность вычислений при решении прямой геодезической задачи данным методом.

Исходные данные:  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $A_1$  и  $S$ .

В соответствии с общими формулами (3.24) составим табл. 3.1 для  $B_i$  и  $A_i$ .

Таблица 3.1

Номер коэффициента	$B_i$	$A_i$
1	$B_1$	$A_1$
2	$B_1 + \frac{1}{2}\Delta B_1$	$A_1 + \frac{1}{2}\Delta A_1$
3	$B_1 + \frac{1}{4}(\Delta B_1 + \Delta B_2)$	$A_1 + \frac{1}{4}(\Delta A_1 + \Delta A_2)$
4	$B_1 - \Delta B_2 + 2\Delta B_3$	$A_1 - \Delta A_2 + 2\Delta A_3$

1. Используя исходные данные прямой задачи, заполняем первую строчку табл. 3.1.

2. Подставляя это значение в формулы (3.28), находим первые коэффициенты  $\Delta B_1$ ,  $\Delta L_1$ ,  $\Delta A_1$ .

3. С этими значениями вычисляем вторую строчку *табл.3.1*, т.е. получаем значения  $B_2$  и  $A_2$ , с которыми вновь входим в формулы (3.28) и находим  $\Delta B_2$ ,  $\Delta L_2$  и  $\Delta A_2$ .

Далее процесс повторяется. В результате многократного обращения к формулам (3.28) будут получены все коэффициенты  $\Delta B_i$ ,  $\Delta L_i$ ,  $\Delta A_i$ . Подставляя их в выражение (3.25), оценим методическую ошибку, возникающую для конкретных условий применения способа Рунге-Кутта. Если эта ошибка лежит в пределах заданной точности, то, подставляя полученные коэффициенты в формулы (3.27), получим определяемые величины прямой геодезической задачи –  $B_2$ ,  $L_2$ ,  $A_2$ .

*Пример решения прямой геодезической задачи по методу Рунге-Кутта–Ингланда (табл.3.2).*

Исходные данные:  $B_1 = 50^{\circ}07'40,97''$ ,  $L_1 = 23^{\circ}45'13,43''$ ,  
 $A_1 = 3^{\circ}29'45,83''$ ,  $S = 281060,08$  м,  $S_0 = 9065,125''$ .

*Таблица 3.2*

Обозначения	<i>i</i>			
	1	2	3	4
$A_i$	$3^{\circ}29'45,83''$	$3^{\circ}35'17,28''$	$3^{\circ}35'29,24''$	$3^{\circ}41'38,52''$
$B_i$	50 07 40,97	51 23 23,91	51 23 23,18	52 39 03,89
$V_i$	1,001384	1,001311	1,001311	1,001239
$V_i^2$	1,004157	1,003938	1,003938	1,003721
$\Delta B''$	9085''	9082,98''	9082,95''	9079,96''
$\Delta L''$	863,48	910,34	911,19	963,91
$\Delta A''$	662,70	711,35	712,02	766,27

$$\Delta B = \frac{1}{6}(9085,87'' + 4 \cdot 9082,95'' + 9079,96'') = 2^{\circ}31'22,94'' ,$$

$$\Delta L = \frac{1}{6}(863,48'' + 4 \cdot 911,19'' + 963,91'') = 0^{\circ}15'12,02'' ,$$

$$\Delta A = \frac{1}{6}(662,70'' + 4 \cdot 712,02'' + 766,27'') = 0^{\circ}11'58,54'' ,$$

$$B_2 = B_1 + \Delta B = 52^{\circ}39'03,91'' ,$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L = 24^{\circ}00'25,45'' ,$$

$$A_{2,1} = A_1 + \Delta A \pm 180^{\circ} = 183^{\circ}41'38,67'' .$$

По формулам (3.25) можно оценить ошибки полученных результатов, в частности для данного примера будем иметь

$$M_{\Delta B} = 0,013'' , \quad M_{\Delta L} = 0,063'' , \quad M_{\Delta A} = 0,054'' .$$

В заключение отметим, что если будут использованы другие модификации метода Рунге-Кутта, то это коснется только коррекций в формулах (3.24). Сама же вычислительная схема, изложенная в данном параграфе, остается без изменений.

### 3.4. Решение геодезических задач по формулам со средними аргументами

#### Переход с эллипсоида на шар

В данном способе используется перспективное изображение эллипсоида на шаре (рис.3.4).

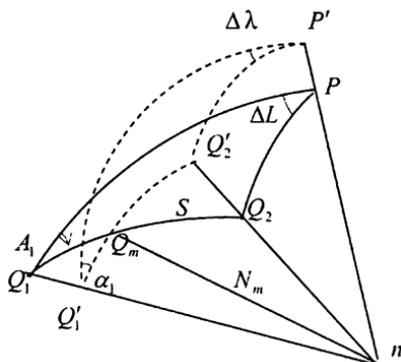


Рис. 3.4. Перспективное изображение эллипсоида на шаре

Примерно посередине между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  на геодезической линии эллипсоида выберем точку  $Q_m$  с широтой  $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ . Проведем нормаль в точке  $Q_m$  до пересечения с осью вращения в точке  $n$ . Эту точку примем за центр шара, радиус которого равен радиусу кривизны первого вертикала в точке  $Q_m$ , т.е.  $R = N_m$ . Вершины сфероидического треугольника  $Q_1Q_2P$  спроецируем на шар направлениями, проведенными из центра шара. В результате будет получен сферический треугольник  $Q'_1Q'_2P'$ .

При таком изображении двугранные углы сохраняются, поэтому разность долгот на эллипсоиде  $\Delta L = L_2 - L_1$  будет точно равна разности долгот на шаре  $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ . Длина геодезической линии на эллипсоиде  $S$  весьма незначительно будет отличаться от соответствующей длины дуги большого круга  $S_m = R \cdot \sigma = N_m \cdot \sigma$ , где  $\sigma$  длина сферической дуги в радианной мере. Точно так же, вследствие близости поверхности, геодезические азимуты  $A_1$  и  $A_2$  практически не будут отличаться от азимутов на шаре  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Тогда, в соответствии с выражениями (3.18), можно записать

$$f_1 = \frac{dS_2}{dS_m} \approx 1, \quad f_3 = \frac{dL}{d\lambda} = 1, \quad f_4 = \frac{dA}{d\alpha} \approx 1. \quad (3.29)$$

Остается найти последнее из дифференциальных соотношений (3.18), т.е.  $f_2 = \frac{dB}{d\varphi}$ .

Для этого применим формулу (3.29) для длин дуг меридианов на эллипсоиде и на шаре соответственно

$$dS_{\text{э}} = dX_{\text{э}} = M dB, \\ dS_{\text{ш}} = dX_{\text{ш}} = R d\varphi = N_m d\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{dX_{\text{э}}}{dX_{\text{ш}}} = \frac{M dB}{N_m d\varphi} \approx 1$$

и

$$f_2 = \frac{dB}{d\varphi} = \frac{N_m}{M} = V_m^2 = 1 + \eta_m^2. \quad (3.30)$$

Таким образом, установлены все необходимые соотношения для перехода с эллипсоида на шар и обратно. Из формул (3.29) и (3.30) получим

$$\Delta\lambda = \Delta L = L_2 - L_1, \\ \Delta\varphi = \frac{\Delta B}{V_m^2}, \quad \Delta B = V_m^2 \Delta\varphi, \\ A = \alpha, \quad \Delta A = \Delta\alpha, \\ S = N_m \sigma. \quad (3.31)$$

Здесь следует отметить, что формулами (3.29) по существу задаются три правые части дифференциальных уравнений (3.18). Это является нарушением общей теории изображения эллипсоида на шаре (см. параграф 3.2) и, следовательно, данный способ является приближенным с ограниченной областью применения.

### Решение сферического треугольника по формулам Гаусса – Деламбра

Для решения сферического треугольника  $ABC$  (на рис. 3.5 углы и стороны этого треугольника показаны в скобках) в данном способе используются формулы Гаусса – Деламбра.

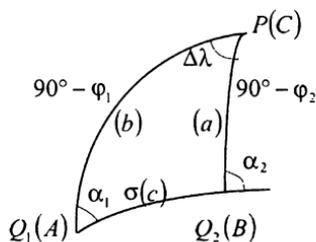


Рис. 3. 5. Сферический треугольник

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} &= \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2}, \\
 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2}, \\
 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} &= \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2}, \\
 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Применим эти формулы для решения треугольника  $Q_1Q_2P$ :  
для сторон

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 90^\circ - \varphi_2, \quad b = 90^\circ - \varphi_1, \quad c = \sigma, \\
 \frac{a+b}{2} &= 90^\circ - \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 90^\circ - \varphi_m, \quad \frac{a-b}{2} = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = -\frac{\Delta\varphi}{2},
 \end{aligned}$$

для углов

$$\begin{aligned}
 A &= \alpha_1, \quad B = 180^\circ - \alpha_2, \quad C = \Delta\lambda, \\
 \frac{A+B}{2} &= 90^\circ - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 90^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2}, \quad \frac{A-B}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - 90^\circ = -(90^\circ - \alpha_m).
 \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений формулы (3.32) запишутся

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\Delta\lambda}{2} &= \cos \alpha_m \sin \frac{\sigma}{2}, \\
 \cos \frac{\Delta\varphi_m}{2} \sin \frac{\Delta\lambda}{2} &= \sin \alpha_m \sin \frac{\sigma}{2}, \\
 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\Delta\lambda}{2} &= \cos \frac{\Delta\alpha}{2} \cos \frac{\sigma}{2}, \\
 \sin \varphi_m \sin \frac{\Delta\lambda}{2} &= \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \cos \frac{\sigma}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

В выражения (3.33) входят средняя широта  $\varphi_m$  и средний азимут  $\alpha_m$ . Поэтому они получили название (довольно условное) *формул со средними аргументами*.

Для упрощения дальнейших вычислений синусы и косинусы малых аргументов  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\sigma$  и  $\Delta\lambda$  в формулах (3.33) разложим в ряды, ограничившись двумя членами, т.е.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

Тогда формулы (3.33) примут вид

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\Delta\varphi^3}{48} \right) \left( 1 - \frac{\Delta\lambda^2}{8} \right) = \left( \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} \right) \cos \alpha_m, \\
& \cos \varphi_m \left( \frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{\Delta\lambda^3}{48} \right) = \left( \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} \right) \sin \alpha_m, \\
& \left( 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{48} \right) \left( 1 - \frac{\Delta\lambda^2}{8} \right) = \left( 1 - \frac{\Delta\alpha^2}{8} \right) \left( 1 - \frac{\sigma^2}{8} \right), \\
& \sin \varphi_m \left( \frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{\Delta\lambda^3}{48} \right) = \left( \frac{\Delta\alpha}{2} - \frac{\Delta\alpha^3}{48} \right) \left( 1 - \frac{\sigma^2}{8} \right).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Величины в круглых скобках называют сферическими аддитивентами. В дальнейшем будем отбрасывать малые члены в четвертой степени и выше, кроме того, используем разложение  $(1+x^2)^{-1} \approx 1-x^2$ .

После этих замечаний применим формулы (3.34) для решения геодезических задач.

### *Обратная геодезическая задача*

По условиям этой задачи необходимо найти  $S$ ,  $A_{12}$  и  $A_{21}$ . Для этого несколько преобразуем формулы (3.34), например, для первой из них получим

$$\sigma \cos \alpha_m = \Delta\varphi \left( 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{24} \right) \left( 1 - \frac{\Delta\lambda^2}{8} \right) \left( 1 - \frac{\sigma^2}{24} \right)^{-1} \approx \Delta\varphi \left( 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{24} - \frac{\Delta\lambda^2}{8} + \frac{\sigma^2}{24} \right). \tag{3.35}$$

Из третьей формулы (3.34) будем иметь

$$1 - \frac{\sigma^2}{8} = 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{8} - \frac{\Delta\lambda^2}{8} + \frac{\Delta\alpha^2}{8}$$

или

$$\sigma^2 = \Delta\varphi^2 + \Delta\lambda^2 - \Delta\alpha^2.$$

Подставим полученное значение для  $\sigma^2$  в (3.35), тогда

$$\sigma \cos \alpha_m = \Delta\varphi \cdot \left( 1 - \frac{\Delta\lambda^2}{24} - \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right). \tag{3.36}$$

Аналогично получим

$$\sigma \sin \alpha_m = \Delta\lambda \cos \varphi_m \left( 1 + \frac{\Delta\varphi^2}{24} - \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right), \tag{3.37}$$

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \sin \varphi_m \left( 1 + \frac{\Delta\varphi^2}{8} - \frac{\Delta\lambda^2}{12} - \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right). \tag{3.38}$$

Если теперь от элементов на шаре перейти к соответствующим элементам на эллипсоиде по формулам (3.30) и (3.31) и, кроме того,

учесть, что при вычислении аддитамента  $\Delta\alpha^2$  можно использовать первый член выражения (3.38), т.е.  $\Delta\alpha \approx \Delta l \sin\varphi_m = \Delta L B_m$ , то получим

$$\begin{aligned} S \cos A_m &= \Delta B M_m \left[ 1 - \frac{2(\Delta L)^2 + (\Delta L \sin B_m)^2}{24} \right], \\ S \sin A_m &= \Delta L \cos B_m N_m \left[ 1 + \frac{\Delta B^2 - (\Delta L \sin B_m)^2}{24} \right], \\ \Delta A &= \Delta L \left[ 1 + \frac{3(\Delta B)^2 + 2(\Delta L)^2 - 2(\Delta L \sin B_m)^2}{24} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Введем обозначения:  $S \cos A_m = Q$ ,  $S \sin A_m = P$ .

Отсюда

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \operatorname{tg} A_m = \frac{P}{Q}. \quad (3.40)$$

Далее вспомним, что  $A_m = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ ,  $\Delta A = A_2 - A_1$ , тогда

$$A_{12} = A_m - \frac{\Delta A}{2}, \quad A_2 = A_m + \frac{\Delta A}{2}, \quad A_{21} = A_2 \pm 180^\circ. \quad (3.41)$$

Формулы (3.39) – (3.41) решают поставленную задачу. Точность определения длины линии и азимутов по этим формулам зависит от величины самой линии и характеризуется предельными ошибками, представление о которых дает табл. 3.3.

Таблица 3.3

$S$ , км	$\delta S$ , м	$\delta A''$
80	0,01	0,02
200	0,1	0,1
400	1	0,5
600	5	1
800	10	2

Пример решения обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами (табл.3.4).

1. По заданным координатам  $B_1, L_1, B_2, L_2$  вычисляются

$$\begin{aligned} b &= \frac{B_2 - B_1}{\rho''}, \quad l = \frac{L_2 - L_1}{\rho''}, \quad B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2), \quad V_m = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}, \\ N_m &= \frac{c}{V_m}, \quad M_m = \frac{N_m}{V_m^2}. \end{aligned}$$

2. Вычисляют величины  $Q = S \cos A_m$ ,  $P = S \sin A_m$ ,  $A_m$ ,  $\Delta A$ .

3. Находят  $S, A_1, A_{21}$ .

Обозначения	Значения	Обозначения	Значения
$B_1$	$60^\circ$	$l \cdot \sin B_m$	0,011647553
$B_2$	$60^\circ 22' 42,886''$	$Q$	42178,607
$L_1$	$10^\circ$	$P$	42672,768
$L_2$	$10^\circ 46' 08,8792''$	$\Delta A$	2402,502
$b$	0,006607325	$A_m$	$45^\circ 20' 01,241''$
$l$	0,013423905	$A_1$	445959,991
$N_m$	6394376,55	$A_{21}$	2254002,492
$M_m$	6383745,14	$S$	60000,000 м

### Прямая геодезическая задача

В этой задаче необходимо найти  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_2$  или  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  и  $\Delta A$ . Решая уравнения (3.34) относительно  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  и  $\Delta\alpha$ , получим

$$\Delta\varphi = \sigma \cos\alpha_m \left( 1 + \frac{\Delta\lambda^2}{12} + \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right),$$

$$\Delta\lambda = \frac{\sigma \sin\alpha_m}{\cos\varphi_m} \left( 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{24} + \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right), \quad (3.42)$$

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \sin\varphi_m \left( 1 + \frac{\Delta\varphi^2}{8} + \frac{\Delta\lambda^2}{12} - \frac{\Delta\alpha^2}{12} \right).$$

Переходя на эллипсоид по формулам (3.31), будем иметь

$$\Delta B = \frac{S \cos A_m}{M_m} \left[ 1 + \frac{2\Delta L^2 + (\Delta L \sin B_m)^2}{24} \right],$$

$$\Delta L = \frac{S \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left[ 1 - \frac{\Delta B^2 - (\Delta L \sin B_m)^2}{24} \right], \quad (3.43)$$

$$\Delta A = \Delta L \sin B_m \left[ 1 + \frac{3\Delta B^2 + 2\Delta L^2 - 2(\Delta L \sin B_m)^2}{24} \right].$$

Заметим, что формулы (3.43) можно получить непосредственно по выражениям (3.39), если последние решить относительно величин  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  и учесть, что  $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ . Естественно, что для вычисления  $\Delta A$  формула не изменится.

Исходными величинами в прямой задаче являются  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $A_1$  и  $S$ , поскольку средняя широта  $B_m$  и средний азимут  $A_m$  в число заданных величин не входят, то решение задачи приходится выполнять последовательными приближениями.

В первом приближении полагают  $B_m = B_1$ ,  $A_m = A_1$ , далее, используя первые члены формул (3.43), находят разности  $\Delta B'$ ,  $\Delta L'$  и  $\Delta A'$ . Во втором приближении принимают

$$B_m = B_1 + \frac{\Delta B}{2}, \quad A_m = A_1 + \frac{\Delta A}{2} \quad (3.44)$$

и т.д. Обычно достаточно ограничиться тремя приближениями. Точность решения прямой задачи по формулам (3.43) соответствует точности, приведенной в табл.3.2 ( $dB'' \approx dL'' = \frac{\sigma S}{R} \rho''$ ).

*Пример решения прямой геодезической задачи по формулам со средними аддитаменентами (табл.3.5).*

Исходные данные:  $B_1 = 60^\circ$ ,  $L_1 = 10^\circ$ ,  $S = 60\,000,000$  м,  $A_1 = 45^\circ$ .

1. Первое приближение

$$\Delta B' = \frac{S \cos A_1}{M_1} = \frac{S}{c} V_1^3 \cos A_1, \quad \Delta L' = \frac{S \sin A_1}{N_1 \cos B_1} = \frac{S}{c} \frac{V_1}{\cos B_1} \cos A_1,$$

$$\Delta A' = \Delta L' \sin B_1, \quad V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}, \quad c = \frac{a}{\sqrt{1 - e'^2}},$$

$$B_m = B_1 + \frac{\Delta B'}{2}, \quad A_m = A_1 + \frac{\Delta A'}{2}.$$

2. Все последующие приближения выполняют по формулам (3.43).

Таблица 3.5

I приближение		II приближение		III приближение	
$\Delta B'$	0.006646006	$\Delta B''$	0.006607185	$\Delta B'''$	0.006607188
$\Delta L'$	0.013269912	$\Delta L''$	0.013423863	$\Delta L'''$	0.013423853
$\Delta A'$	0.011492080	$\Delta A''$	0.011647517	$\Delta A'''$	0.011647509
$B'_m$	60°11'25.40"	$B''_m$	60°11'21.429	$B'''_m$	60°22'42.859"
$A'_m$	45 19 45.21	$A''_m$	45 20 01.252	$L_2$	10 46 08.879
				$A_{21}$	225 40 02.50

### 3.5. Решение геодезических задач по способу Бесселя

#### Переход с эллипсоида на шар

В основе способа Бесселя лежат следующие условия.

1. Геодезическая линия изображается на шаре дугой большого круга.
2. В соответствующих точках геодезической линии и дуги большого круга азимуты равны.
3. Широта любой точки на шаре равна приведенной широте соответствующей точки на эллипсоиде.

Первое условие означает, что используется геодезическое изображение на шаре. При этом Бесселем принято, что центр шара совпадает с центром эллипсоида, а его радиус равен единице.

Второе условие задает одно из дифференциальных уравнений (3.18), а именно из  $A = a$  следует, что  $f_3 = \frac{dA}{da} = 1$ .

С помощью третьего условия определяется постоянная интегрирования, но формально его можно использовать для определения еще одного из уравнений (3.18), как это будет показано ниже.

Таким образом, условия перехода с эллипсоида на шар по Бесселю полностью согласуются с общей теорией изображения эллипсоида на шаре. Следовательно, по самой своей постановке данный способ относится к строгим методам.

Теперь установим конкретный вид дифференциальных уравнений (3.18). С учетом условий Бесселя ( $A = a$ ,  $U = \varphi$ ,  $R = 1$ ) система (3.21) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\sigma} &= M \frac{dB}{dU}, \\ \frac{dS}{d\sigma} &= N \frac{\cos B}{\cos U} \frac{dL}{d\lambda}, \\ \frac{dA}{d\alpha} &= \frac{\sin B}{\sin U} \frac{dL}{d\lambda} = 1. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Учитывая далее, что

$$\cos B = W \cos U, \quad \sin B = V \sin U, \quad dB = W V dU, \quad M = \frac{P}{W^3} = \frac{a}{W V^2},$$

найдем

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{dB}{dU} = W V.$$

Из первого уравнения (3.45) получим

$$\frac{dS}{d\sigma} = M W V = \frac{a}{V},$$

из третьего уравнения будем иметь

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{V}.$$

Таким образом, получены все дифференциальные соотношения между элементами эллипсоида и шара в способе Бесселя

$$f_1 = \frac{dS}{d\sigma} = \frac{a}{V}, \quad f_2 = \frac{dB}{d\varphi} = W V, \quad f_3 = \frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{V}, \quad f_4 = \frac{dA}{d\alpha} = 1.$$

Интегрируя эти выражения вдоль дуги большого круга между ее точками  $Q_1$  и  $Q_2$  и учитывая, что  $\frac{1}{V} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U}$ , получим

$$A = \alpha, \quad (3.46)$$

$$U = \varphi, \quad \operatorname{tg} B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} U, \quad (3.47)$$

$$S = a \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\sigma, \quad (3.48)$$

$$l = L_2 - L_1 = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\lambda. \quad (3.49)$$

Выражениями (3.46) – (3.49) устанавливаются связи между элементами эллипсоида и шара при любых величинах этих элементов.

### Интегрирование уравнений Бесселя

Интегралы (3.48) и (3.49) являются эллиптическими и в элементарных функциях не выражаются. Поэтому будем искать их приближенные выражения, но такие, которые были бы пригодны для вычислений с любой необходимой для практики точностью.

Вначале займемся интегралом (3.48). Прежде всего, преобразуем его подынтегральную функцию, выразив ее аргумент – приведенную широту – через переменную интегрирования  $\sigma$ .

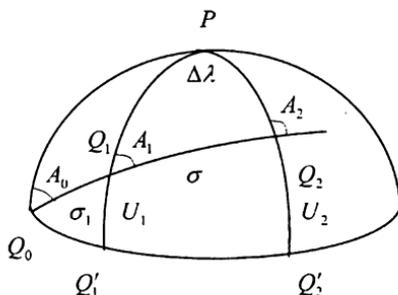


Рис.3.6. Решение прямой геодезической задачи по способу Бесселя

На рис.3.6 показан треугольник  $Q_1Q_2P$ , изображенный на шаре по способу Бесселя.  $Q_0$  – точка пересечения геодезической линии с экватором,  $A_0$  – прямой азимут геодезической линии в точке  $Q_0$ . Остальные обозначения ясны из рис.3.6. Для треугольника  $Q_0Q_1Q_1'$  по теореме синусов будем иметь

$$\sin U_1 = \cos A_0 \sin \sigma_1$$

или для текущей точки с координатами  $U, \sigma$

$$\sin U = \cos A_0 \sin \sigma, \quad (3.50)$$

$$\cos^2 U = 1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma. \quad (3.51)$$

Далее

$$1 - e^2 \cos^2 U = 1 - e^2 + e^2 \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma = (1 - e^2) \left( 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma \right) = (1 - e^2) (1 + e'^2 \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma). \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.48) и учитывая, что  $a \sqrt{1 - e^2} = b$ , получим

$$S = b \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma} d\sigma. \quad (3.53)$$

Для данной геодезической линии  $\cos^2 A_0$  величина постоянная, поэтому обозначим  $k^2 = e'^2 \cos^2 A_0$ , тогда

$$S = b \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} (1 + k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2} d\sigma. \quad (3.54)$$

Разложим подынтегральную функцию в (3.54) в ряд

$$(1 + k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2} = 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \sigma - \frac{k^4}{8} \sin^4 \sigma + \frac{k^6}{16} \sin^6 \sigma + \dots,$$

который быстро сходится, поскольку  $e'^2 \approx 0.007$ . Подставляя полученный ряд в (3.54) и интегрируя его почленно, получим

$$S = b \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\sigma + \frac{1}{2} b k^2 \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sin^2 \sigma d\sigma - \frac{1}{8} b k^4 \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sin^4 \sigma d\sigma + \dots \quad (3.55)$$

В правой части выражения (3.55) все интегралы табличные. Для облегчения последующего интегрирования степенные функции заменим функциями кратного аргумента, например,

$$\begin{aligned} \sin^2 \sigma &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma, \\ \sin^4 \sigma &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma + \frac{1}{8} \cos 4\sigma \text{ и т.д.,} \end{aligned}$$

интегралы для которых имеют вид

$$\begin{aligned} \int \cos 2\sigma d\sigma &= \frac{1}{2} \sin 2\sigma, \\ \int \cos 4\sigma d\sigma &= \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos 2\sigma. \end{aligned}$$

Выполнив все эти операции и сгруппировав коэффициенты при каждой функции с одинаковым аргументом, получим

$$S = A \sigma - 2B \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) - C \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma), \quad (3.56)$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= b \left( 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \dots \right), \\
 B &= b \left( \frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15}{1024}k^6 - \dots \right), \\
 C &= b \left( \frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6 + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

Если взять численные значения  $b$  и  $e^2$  для эллипсоида Красовского, то получим

$$\begin{aligned}
 A &= 6356863,020 + (10708,949 - 13,474 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0, \\
 B &= (5354,469 - 8,978 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0, \\
 C &= 0,006 + (2,238 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0.
 \end{aligned}
 \tag{3.58}$$

При использовании формул (3.56) – (3.58) ошибка в определении  $S$  не превышает 0,005 м, что удовлетворяет самым высоким практическим требованиям.

Формула (3.36) решает задачу перехода от длины дуги большого круга  $\sigma$  на шаре к длине геодезической линии  $S$  на эллипсоиде.

Рассмотрим теперь обратную задачу.

Для перехода с эллипсоида на шар уравнение (3.56) нужно решить относительно  $\sigma$ , т.е.

$$\sigma = P S + Q \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) + T \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma), \tag{3.59}$$

где

$$P = \frac{1}{A}, \quad Q = \frac{2B}{A}, \quad T = \frac{C}{A}. \tag{3.60}$$

Ясно, что по этой формуле сферическое расстояние  $\sigma$  определяется последовательными приближениями:

$$\sigma' = P S, \tag{3.61}$$

$$\sigma^{i-1} = P S + Q \sin \sigma^i \cos(2\sigma_1 + \sigma^i) + T \sin 2\sigma^i \cos(4\sigma_1 + 2\sigma^i). \tag{3.62}$$

Эта же задача в учебнике В.П. Морозова «Курс сфероидической геодезии» (М., Недра, 1979) решена методом обращения тригонометрического ряда (3.56). В результате была получена формула, при использовании которой нет необходимости прибегать к последовательным приближениям

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{A} [B + 5C \cos 2(\sigma_1 + \sigma_0)] \sin 2(\sigma_1 + \sigma_0), \tag{3.63}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{A} [S - (B + C \cos 2\sigma_1) \sin 2\sigma_1]. \tag{3.64}$$

Точность этой формулы соответствует точности выражения (3.56).

Теперь займемся интегралом (3.49),  $l = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\lambda$ .

Перед интегрированием необходимо преобразовать подинтегральное выражение таким образом, чтобы аргумент подинтегральной функции и переменная интегрирования зависели бы от одной и той же величины.

Разложим подинтегральную функцию в ряд

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \cos^2 U)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 U - \frac{e^4}{8} \cos^4 U - \frac{e^6}{16} \cos^6 U - \dots = \\ &= 1 - \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} \cos^2 U + \frac{e^6}{16} \cos^4 U + \dots \right) \cos^2 U. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ранее мы имели формулу (3.51)  $\cos^2 U = 1 - \cos A_0 \sin^2 \sigma$ . Кроме того, используя уравнение Клеро для геодезической линии в форме (1.95)  $\cos^2 U \sin A = \sin A_0$  и уравнение  $d\sigma \sin A = \cos U d\lambda$ , получим

$$\sin A_0 d\sigma = \cos^2 U d\lambda. \quad (3.66)$$

Подставляя (3.66), (3.51) и (3.65) в интеграл (3.49), найдем

$$l = \Delta\lambda - \sin A_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} \right) - \left( \frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} \right) \cos^2 A_0 + \left[ \left( \frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} \right) \cos^2 A_0 - \frac{e^6}{32} \cos^4 A_0 \right] \cos 2\sigma \right\} d\sigma. \quad (3.67)$$

Проинтегрировав (3.67), найдем следующие выражения для определения разности долгот:

$$\begin{aligned} l &= \Delta\lambda - \sin A_0 \left[ \alpha \sigma + \beta (\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) \right], \\ \Delta\lambda &= l + \sin A_0 \left[ \alpha \sigma + \beta (\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} \right) - \left( \frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} \right) \cos^2 A_0 + \frac{3}{128} e^6 \cos^4 A_0, \quad (3.69)$$

$$\beta = \left( \frac{e^4}{32} + \frac{e^6}{32} \right) \cos^2 A_0 - \frac{e^6}{64} \cos^4 A_0. \quad (3.70)$$

Если взять численные значения эксцентриситета для эллипсоида Красовского, то для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  получим

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[ 33523299 - (28189 - 70 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0 \right] 10^{-10}, \\ \alpha &= 691,46768 - (0,58143 - 0,00144 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0, \\ \beta &= (0,2907 - 0,0010 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Первая формула для  $\alpha$  используется тогда, когда величина  $\sigma$  в равенствах (3.68) выражается в секундах дуги, вторая – если  $\sigma$  выражается в радианах. В обоих случаях разность долгот, вычисленная по формулам (3.68), получается в градусной мере.

Погрешность определения долготы с данными коэффициентами не превосходит  $0,0002''$ .

Подведем итог. Нами получены в замкнутом виде все необходимые формулы для перехода с эллипсоида на шар и обратно в способе Бесселя. Применим их для решения главных геодезических задач.

### *Алгоритм решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя*

Исходные данные: широта  $B_1$ , долгота  $L_1$ , длина геодезической линии  $S$  и азимут  $A_1$  в ее начальной точке.

Определяемые величины:  $B_2$ , долгота  $L_2$  и обратный азимут  $A_2$ .

Первый этап решения – переход с эллипсоида на шар.

1. Вычисление приведенной широты начальной точки

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B, \quad \sin U_1 = \frac{\operatorname{tg} U_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 U_1}}, \quad \cos U_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 U_1}}.$$

2. Вычисление вспомогательных величин

$$\sin A_0 = \cos U_1 \sin A_1, \quad \operatorname{ctg} \sigma_1 = \frac{\cos A_1}{\operatorname{tg} U_1},$$

$$\sin 2\sigma_1 = \frac{2 \operatorname{ctg} \sigma_1}{\operatorname{ctg}^2 \sigma_1 + 1}, \quad \cos 2\sigma_1 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \sigma_1 - 1}{\operatorname{ctg}^2 \sigma_1 + 1}.$$

3. Вычисление коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  по формулам (3.58) и (3.71) по аргументу  $\cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0$ .

4. Вычисление сферического расстояния

$$\sigma_0 = [S - (B + C \cos \sigma_1) \sin 2\sigma_1] \frac{1}{A},$$

$$\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0) = \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 + \cos 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0,$$

$$\cos 2(\sigma_1 + \sigma_0) = \cos 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 - \sin 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0,$$

$$\sigma = \sigma_0 [B + 5 C \cos 2(\sigma_1 + \sigma_2)] \frac{\sin 2(\sigma_1 + \sigma_2)}{A}.$$

5. Вычисление поправок в разность долгот

$$\Delta \lambda - l = \delta = \{ \alpha \sigma + \beta [\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0) - \sin 2\sigma_1] \} \sin A_0.$$

Второй этап – решение прямой задачи на шаре.

1. Вычисление приведенной широты конечной точки по формуле (3.11)

$$\sin U_2 = \sin U_1 \cos \sigma + \cos U_1 \cos A_1 \sin \sigma.$$

2. Вычисление разности долгот конечной и начальной точек на шаре по формуле (3.12)

$$\operatorname{tg} \Delta \lambda = \frac{\sin A_1 \sin \sigma}{\cos U_1 \cos \sigma - \sin U_1 \sin \sigma \cos A_1}.$$

При вычислении величины  $\Delta \lambda = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \Delta \lambda)$  следует руководствоваться *табл.3.6.*

Таблица 3.6

Знак $\sin A_1$	+	+	-	-
Знак $\operatorname{tg} \Delta \lambda$	+	-	-	+
$\Delta \lambda =$	$ \Delta \lambda $	$180^\circ -  \Delta \lambda $	$- \Delta \lambda $	$ \Delta \lambda  - 180^\circ$

3. Вычисление азимута  $A_2 = \alpha_2$  по формуле (3.13)

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\cos U_1 \sin A_1}{\cos U_1 \cos \sigma \cos A_1 - \sin U_1 \sin \sigma}.$$

При выборе квадранта для величины  $A_2$  можно использовать *табл.3.7.*

Таблица 3.7

Знак $\sin A_1$	-	-	+	-
Знак $\operatorname{tg} A_2$	-	-	+	-
$A_2 =$	$ A_2 $	$180^\circ -  A_2 $	$180^\circ +  A_2 $	$360^\circ -  A_2 $

Третий этап – переход с шара на эллипсоид.

1. Вычисление широты конечной точки

$$\operatorname{tg} B_2 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} U_2, \quad B_2 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} B_2).$$

2. Вычисление долгот конечной точки

$$L_2 = L_1 + \Delta \lambda - \delta.$$

3. Вычисление обратного азимута

$$A_{21} = A_2 + 180^\circ.$$

*Пример решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя (табл.3.8).*

Исходные данные:  $B_1 = 45^\circ$ ,  $L_1 = 0^\circ$ ,  $S = 19\,500\,000,000$ ,  $A_1 = 265^\circ$ .

Обозначения	Значения	Обозначения	Значения
$\sin U_1$	0,705918568	$\beta$	0,1457
$\cos U_1$	0,708293000	$\sigma_0$	3,065033007
$\sin A_1$	-0,996194698	$\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0)$	-0,021333
$\cos A_1$	-0,087155743	$\cos 2(\sigma_1 + \sigma_0)$	-0,999772
$\cos^2 A_0$	0,5021318	$\sigma$	3,065024008
$\operatorname{ctg} \sigma$	-0,087448901	$\delta$	-1494,8042"
$\sin 2\sigma_1$	-0,173570454	$\sin \sigma$	0,076493850
$\cos 2\sigma_1$	-0,984821455	$\cos \sigma$	-0,997070053
$A$	6362236,927	$\lambda$	-173°48'01,6753"
$B$	2686,386	$B_2$	-45°12'54,2680"
$C$	0,570	$L_2$	-173°23'06,8711"
$\alpha$	691,1761	$A_2$	90°36'47,711"

*Алгоритм обратной геодезической  
задачи по способу Бесселя*

Исходные данные: широты  $B_1, B_2$  и долготы  $L_1, L_2$  начальной и конечной точек геодезической линии.

Определяемые величины: длина геодезической линии  $S$  и азимуты  $A_1, A_2$  в ее начальной и конечной точках.

Особенность решения обратной задачи по способу Бесселя состоит в том, что по исходным данным  $B_1, B_2, l = L_2 - L_1$  можно вычислить непосредственно приведенные широты. Для определения разности долгот на шаре  $\Delta\lambda$ , как это видно из формул (3.69), необходимо найти  $A_0, \sigma$  и  $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma$ , которые зависят от определяемых величин  $S$  и  $A_1$ . Поэтому приходится прибегать к последовательным приближениям.

Первый этап – переход с эллипсоида на шар:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} U_1 &= \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B_1, & \operatorname{tg} U_2 &= \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B_2, \\ \sin U_1 &= \frac{\operatorname{tg} U_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 U_1}}, & \sin U_2 &= \frac{\operatorname{tg} U_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 U_2}}, \\ \cos U_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 U_1}}, & \cos U_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 U_2}}. \end{aligned}$$

Второй этап – совместное вычисление величин  $A, \sigma, \Delta\lambda = l + \delta$  на шаре методом приближений.

Первое приближение выполняют, полагая  $\delta = 0, \Delta\lambda' = l$ .

1. Вычисляют начальный азимут  $A_1'$  по формуле (3.14)

$$\operatorname{tg} A_1' = \frac{\sin \Delta\lambda' \cos U_2}{\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \Delta\lambda'} = \frac{p'}{q'}.$$

Выбор квадранта  $A_1'$  выполняется в соответствии с *табл. 3.9*.

Таблица 3.9

Знак $p'$	-	-	-	-
Знак $q'$	-	-	-	+
$A_1 =$	$ A_1 $	$180^\circ -  A_1 $	$180^\circ +  A_1 $	$360^\circ -  A_1 $

2. Вычисляют сферическое расстояние по формуле (3.7)

$$\cos \sigma' = \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \Delta \lambda',$$

в которой  $\sigma' = |\sigma'|$ , если правая часть имеет знак «плюс», и  $\sigma' = 180^\circ - |\sigma'|$ , если правая часть имеет знак «минус».

3. Вычисляют вспомогательные величины

$$\operatorname{ctg} \sigma'_1 = \frac{\cos A'_1}{\operatorname{tg} U'_1}, \quad \sin A'_0 = \cos U_1 \sin A'_1, \quad \cos^2 A'_0 = 1 - \sin^2 A'_0.$$

4. По формулам (3.71) вычисляют коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  по аргументу  $\cos^2 A'_0$ . Находят поправку в разность долгот в первом приближении

$$\delta' = \{\alpha' \sigma' + \beta' [\sin 2(\sigma'_1 + \sigma') - \sin 2\sigma'_1]\} \sin A'_0$$

и саму разность долгот на шаре для второго приближения  $\Delta \lambda'' = 1 + \delta'$ .

С полученным значением  $\Delta \lambda''$  все вычисления данного этапа повторяют до тех пор, пока не будет выполняться неравенство  $|\delta^{i+1} - \delta^i| \leq \varepsilon$ , где  $i$  – номер приближения,  $\varepsilon$  – заданная точность определения геодезических координат.

Значения  $\Delta \lambda$ ,  $A_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma$  и  $\sin A_0$ , полученные в последнем приближении, принимают за окончательные. Исследования показали, что для выполнения всего этого цикла вычислений достаточно четырех приближений.

Третий этап – переход с шара на эллипсоид.

1. Вычисляют коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  по формулам (3.58) по аргументу  $\cos^2 A_0$ .

2. Находят длину геодезической линии на эллипсоиде по формуле (3.56)

$$S = A \sigma - 2B \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) - C \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma).$$

3. Вычисляют обратный азимут  $A_{21}$  (напомним, что прямой азимут  $A_1$  уже получен на предыдущем этапе) по формуле (3.15)

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\cos U_1 \sin \Delta \lambda}{\cos U_1 \sin U_2 \cos \Delta \lambda - \sin U_1 \cos U_2} = \frac{p^1}{q^1},$$

$$A_2 = \operatorname{arctg} \frac{p^1}{q^1}, \quad A_{21} = A_2 \pm 180^\circ.$$

Квадрант для  $A_2$  определяется по тем же правилам, что и для  $A_1$  (см. *табл. 3.9*).

В.П.Морозовым предложено несколько упростить формулы для вычисления  $\delta$  и  $S$ .

Введем обозначения:

$$x = 2 \sin U_1 \sin U_2 - \cos^2 A_0 \cos \sigma,$$

$$y = (\cos^4 A_0 - 2x^2) \cos \sigma,$$

тогда выражение для  $\delta$  примет вид

$$\delta = (\alpha \sigma - \beta' x \sin \sigma) \sin A_0,$$

где  $\beta' = (28189 - 94\cos^2 A_0) \cdot 10^{-10}$ ,  $\alpha$  – вычисляется по формулам (3.71).

Для расстояния  $S$  получим

$$S = A \sigma + (B' x + C' y) \sin \sigma,$$

где  $A$  – вычисляется по формуле (3.58),  $B' = 10708,938 - 17,956\cos^2 A_0$ ,  $C' = 4,487$ .

*Пример решения обратной геодезической задачи по способу Бесселя (табл.3.10).*

Исходные данные:  $B_1 = 45^\circ$ ,  $B_2 = -45^\circ 12' 54,2680''$ ,  $L_2 - L_1 = l = 173^\circ 23' 06,8711''$ .

Таблица 3.10

Обозначения	Приближения		
	I	II	III
$\sin \Delta\lambda$	-0,115193016	-0,108002976	-0,107991300
$\cos \Delta\lambda$	-0,998343128	-0,994150571	-0,994151839
$p$	-0,081284586	-0,076211020	-0,076202781
$q$	-0,007069717	-0,006667510	-0,006666879
$A_1$	265°01'45,175"	265 00 00,242	265 00 00,002
$\sin A_1$	-0,996239010	-0,996194800	-0,996194699
$\cos A_1$	-0,086647767	-0,087154578	-0,087155735
$\sin \sigma$	0,081591451	0,076502126	0,076493863
$\cos \sigma$	-0,996665859	-0,997069418	0,997070052
$\sigma$	3,059910402	3,065015707	3,065023995
$\sin A_0$	-0,705629171	-0,705597803	-0,705597732
$x$	-0,4999753	-0,4997286	-0,4997282
$\delta$	-1492,3777"	-1494,8002	-1494,8041
$A$	6362236,926	$\beta'$	0,000002814
$B'$	10699,922	$y'$	0,247
$C'$	4,487	$S$	19500000,00 м
$\alpha$	0,003350916	$A_2$	90°36'47,710"

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta'$  выражены в радианной мере.

На основе общей теории изображения эллипсоида на шаре можно предложить иные способы решения главных геодезических задач, задавая тем или иным образом условия перехода (3.18). Например, если положить, что длины меридианов изображаются без искажений, а разности долгот на шаре пропорциональны разности долгот на эллипсоиде, т.е. принять

$$\frac{dX_z}{dX_{ш}} = \frac{M dB}{R d\varphi} = 1, \quad f_2 = \frac{dB}{d\varphi} = \frac{R}{M}, \quad \frac{dL}{d\lambda} = \beta,$$

то будет получено равнопромежуточное по меридианам изображение эллипсоида на шаре по Бауману. Если условия перехода задать в виде  $\varphi = B, \lambda = L$ , то придем к сферическому изображению эллипсоида на шаре по В.П. Морозову. Однако ни эти, ни другие предложенные способы решения геодезических задач не имеют каких-либо преимуществ перед способом Бесселя. Более того, как правило, решение с их помощью получается либо менее точным, либо в них усложняется вид используемых формул. Поэтому мы ограничились подробным рассмотрением только способа Бесселя как классического представителя строгих и универсальных методов решения главных геодезических задач.

### *3.6. Геодезические задачи в дифференциальной форме (дифференциальные формулы первого рода)*

#### *Прямая геодезическая задача в дифференциальной форме*

Пусть по заданным величинам  $B_1, L_1, S$  и  $A$  были получены широта  $B_2$ , долгота  $L_2$  и обратный азимут  $A_{21}$ . Пусть далее исходные величины получили малые изменения  $dB_1, dL_1, dS, dA$ . По этим данным требуется найти дифференциальные поправки к определяемым величинам прямой геодезической задачи —  $dB_2, dL_2, dA_{21}$ .

Общее выражение для решения этой задачи имеет вид

$$\begin{bmatrix} dB_2 \\ dL_2 \\ dA_{21} \end{bmatrix} = \frac{\partial(B_2, L_2, A_{21})}{\partial(B_1, L_1, B_2, L_2)} \cdot \begin{bmatrix} dB_1 \\ dL_1 \\ dB_2 \\ dL_2 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

#### *Обратная геодезическая задача в дифференциальной форме*

По исходным данным  $B_1, L_1$  и  $B_2, L_2$  были вычислены значения  $S, A_1$  и  $A_{21}$ . По малым изменениям исходных величин  $dB_1, dL_1, dB_2, dL_2$  требуется найти дифференциальные поправки к определяемым величинам обратной геодезической задачи  $dS, dA_1, dA_{21}$ .

Общее выражение для решения этой задачи запишется

$$\begin{bmatrix} dS \\ dA_1 \\ dA_{21} \end{bmatrix} = \frac{\partial(S, A_1, A_{21})}{\partial(B_1, L_1, B_2, L_2)} \cdot \begin{bmatrix} dB_1 \\ dL_1 \\ dB_2 \\ dL_2 \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
 dS &= \frac{\partial S}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial S}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial S}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial S}{\partial L_2} dL_2, \\
 dA_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_1}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_1}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_1}{\partial L_2} dL_2, \\
 dA_{21} &= \frac{\partial A_{21}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{21}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_{21}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_{21}}{\partial L_2} dL_2.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

В геодезической практике решение прямой задачи в дифференциальной форме встречается крайне редко. Поэтому подробно рассмотрим только решение обратной задачи, которая в описанной выше постановке сводится к определению частных производных в выражениях (3.74). Эти производные можно найти, дифференцируя по соответствующим переменным весьма сложные уравнения, полученные для решения главных геодезических задач. Поэтому при выводе формул проще использовать более наглядные геометрические представления для частных дифференциалов, входящих в правые части выражений (3.74).

Прежде всего установим связи между дифференциальными изменениями геодезических и полярных координат точки  $Q_2$  (т.е. на данном этапе положим  $dB_1 = dL_1 = 0$ ).

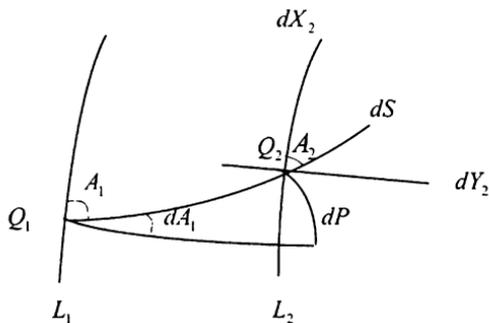


Рис.3.7. Изменения геодезических и полярных координат точки

Из рис.3.7 видно, что мы имеем дело с двумя системами прямоугольных координат  $dX_2Q_2dY_2$  и  $dSQ_2dP$  с общим началом в точке  $Q_2$  и углом поворота осей, равным  $A_2$ . Таким образом, это типичная задача на преобразование прямоугольных координат из одной системы в другую. Связь двух систем координат устанавливается известной формулой

$$\begin{bmatrix} dX_2 \\ dY_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A_2 & -\sin A_2 \\ \sin A_2 & \cos A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dS \\ dP \end{bmatrix}. \tag{3.75}$$

Учитывая, что

$$dX_2 = M_2 dB_2, \quad dY_2 = N_2 \cos B_2 dL_2, \quad dP = m dA, \quad A_2 = A_{21} - 180^\circ,$$

для (3.75) получим

$$\begin{bmatrix} M_2 dB_2 \\ N_2 \cos B_2 dL_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos A_{21} & \sin A_{21} \\ -\sin A_{21} & -\cos A_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dS \\ m dA_1 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Обратный переход задается выражением (матрица преобразования в (3.76) — ортогональна, поэтому ее обращение сводится к транспонированию):

$$\begin{bmatrix} dS \\ m dA_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos A_{21} & -\sin A_{21} \\ \sin A_{21} & -\cos A_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M dB_2 \\ N_2 \cos B_2 dL_2 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dB_2} &= -M_2 \cos A_{21}, & \frac{dS}{dL_2} &= -N_2 \cos B_2 \sin A_{21}, \\ \frac{dA_1}{dB_2} &= \frac{M_2}{m} \sin A_{21}, & \frac{dA_1}{dL_2} &= -\frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Осталось найти изменения обратного азимута  $A_{21}$ , возникающие вследствие изменений  $B_2$  и  $L_2$ , т.е. найти производные  $\frac{dA_{21}}{dB_2}$  и  $\frac{dA_{21}}{dL_2}$ .

Вначале определим влияние изменения широты  $B_2$ . Пусть точка  $Q_2$  переместится по меридиану в точку  $Q'_2$  (рис. 3.8).

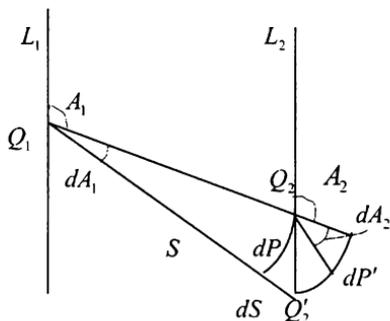


Рис. 3.8. Влияние изменения широты точки  $Q_2$  на азимут

Это перемещение вызовет изменения длины геодезической линии на  $dS$ , начального азимута на  $dA_1$  и обратного азимута на  $dA_{21}$  (на рис. 3.8 показана величина  $dA_2$ , но поскольку  $A_2 = A_{21} - 180^\circ$ , то  $dA_2 = dA_{21}$ ). Изменится также дифференциал дуги геодезической окружности. Для величин  $dP$  и  $dP'$  можно записать

$$dP = m dA_1, \quad dP' = (m + dm) dA_1, \quad (3.79)$$

где  $m$  — приведенная длина геодезической линии.

Учитывая, что  $m$  есть функция длины геодезической линии  $S$ , последнюю формулу представим в виде

$$dP' = m dA_1 + \left(\frac{dm}{dS}\right) dS dA_1. \quad (3.80)$$

Теперь найдем величину  $dA_1$ . Из рис.3.8 имеем

$$dA_2 = \frac{dP' - dP}{dS}.$$

Отсюда, с учетом (3.79) и (3.80), найдем

$$dA_2 = \left(\frac{dm}{dS}\right) dA_1. \quad (3.81)$$

Используя далее третью формулу из (3.78), окончательно получим

$$\frac{dA_{21}}{dB_2} = \left(\frac{dm}{dS}\right) \frac{dA_1}{dB_2} = \frac{M_2}{m} \left(\frac{dm}{dS}\right) \sin A_{21}. \quad (3.82)$$

Перейдем теперь к определению влияния изменения долготы  $L_2$ .

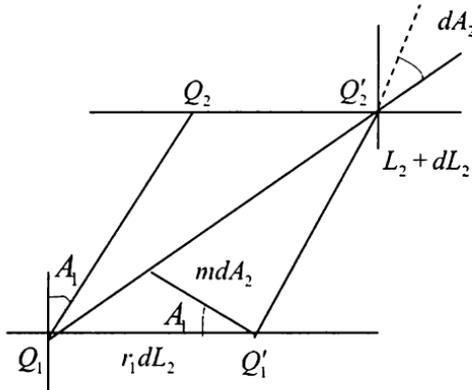


Рис. 3.9. Влияние изменения долготы точки  $Q_2$  на азимут

Переместим точку  $Q_2$  вдоль параллели  $B_2 = const$  в точку  $Q'_2$  на расстояние  $r_2 dL_2 = N_2 \cos B_2 dL_2$ , а точку  $Q_1$  вдоль параллели  $B_1 = const$  в точку  $Q'_1$  расстояние  $r_1 dL_2 = N_1 \cos B_1 dL_2$  (напомним, что смещается только  $Q_2$  по долготе на величину  $dL_2$ ).

Непосредственно из рис.3.9 получим

$$m dA_2 = r_1 dL_2 \cos A_1 = N_1 \cos B_1 \cos A_1 dL_2,$$

отсюда

$$\frac{dA_2}{dL_2} = \frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_1. \quad (3.83)$$

Таким образом получены все частные производные, связанные с перемещением точки  $Q_2$ .

Приведенные выше рассуждения можно повторить для точки  $Q_1$ . Однако в этом нет необходимости, поскольку в полученных формулах достаточно поменять местами индексы 1 и 2. В результате такой замены найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{S}}{dB_1} &= -M_1 \cos A_1, & \frac{dS}{dL_1} &= -N_1 \cos B_1 \sin A_1, \\ \frac{dA_2}{dB_1} &= \frac{M_1}{m} \sin A_1, & \frac{dA_2}{dL_1} &= -\frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_1, \\ \frac{dA_1}{dB_1} &= \frac{M_1}{m} \left( \frac{dm}{dS} \right)_2 \sin A_1, & \frac{dA_1}{dL_1} &= \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Подставим теперь в (3.74) значения всех частных производных, представленных равенствами (3.78), (3.82) - (3.84). В результате получим формулы для решения обратной геодезической задачи в дифференциальной форме

$$dS = -M_1 \cos A_1 dB_1 - M_2 \cos A_{21} dB_2 - N_1 \cos B_1 \sin A_1 dL_1 - N_2 \cos B_2 \cos A_{21} dL_2, \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} dA_1 &= \frac{M_1}{m} \left( \frac{dm}{dS} \right)_2 \sin A_1 dB_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 + \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_2 - \\ &- \frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_{21} dL_1, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$dA_2 = \frac{M_1}{m} \sin A_1 dB_1 + \frac{M_2}{m} \left( \frac{dm}{dS} \right)_1 \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_1 dL_1 + \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_1 dL_2. \quad (3.87)$$

Для решения прямой задачи в дифференциальной форме нужно найти частные производные, составляющие матрицу Якоби в выражении (3.72). Однако проще для этих целей решить уравнения (3.85) — (3.87) относительно неизвестных дифференциальной прямой задачи —  $dB_2, dL_2, dA_{21}$ .

В результате будут получены следующие формулы:

$$dB_2 = \frac{M_1}{m} \left[ \cos A_1 \cos A_{21} + \left( \frac{dm}{dS} \right)_2 \sin A_1 \sin A_{21} \right] dB_1 - \frac{\cos A_{21}}{M_2} dS + \frac{m}{M_2} \sin A_{21} dA_1, \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} dL_2 &= dL_1 - \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \left[ \cos A_1 \sin A_{21} - \left( \frac{dm}{dS} \right)_2 \sin A_1 \cos A_{21} \right] dB_1 - \frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} dS - \\ &- \frac{m \cos A_{21}}{N_2 \cos B_2} dA_1, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$dA_2 = -M_1 \operatorname{tg} A_{21} \left\{ \frac{\operatorname{tg} B_1}{N_1} + \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \left[ \cos A_1 \cos A_{21} + \left( \frac{dm}{dS} \right)_1 \sin A_1 \sin A_{21} \right] \right\} dB_1 - \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \sin A_{21} dS + \left[ \left( \frac{dm}{dS} \right)_1 - \frac{m \operatorname{tg} B_2}{N_2} \cos A_{21} \right] dA_1.$$

Все полученные формулы можно применять при любой длине геодезической линии и при любом расположении начальной и конечной точек на поверхности земного эллипсоида.

Для вычисления приведенной длины геодезической линии и ее производной в большинстве случаев достаточно применять следующие простые выражения:

$$m = R \sin \frac{S}{R}, \quad \frac{dm}{dS} = \cos \frac{S}{R},$$

где  $R = \sqrt{M N}$  вычисляется по широте  $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ .

### 3.7. Решение геодезических задач в пространстве

Сформулируем сущность решения главных геодезических задач в пространстве трех измерений.

#### *Прямая геодезическая задача*

Даны геодезические координаты  $B_1, L_1$  некоторой точки  $Q_1$  и ее геодезическая высота  $H_1$  (отрезок нормали между данной точкой и ее проекцией на поверхность эллипсоида). Измерены полярные топоцентрические координаты второй точки — расстояние в пространстве  $D_{12}$ , азимут  $A_{12}$  и зенитное расстояние  $z_{12}$ . По этим данным требуется найти геодезические координаты точки  $Q_2$  —  $B_2, L_2$  и  $H_2$ .

#### *Обратная геодезическая задача*

Даны геодезические координаты  $B_1, B_2, L_1, L_2, H_1, H_2$  двух точек  $Q_1$  и  $Q_2$ . Требуется найти полярные топоцентрические координаты  $D_{12}, A_{12}, z_{12}$  точки  $Q_2$  относительно точки  $Q_1$ .

#### *Краткие сведения о системах координат*

Положение точки в пространстве задается координатами  $B, L, H$  или прямоугольными декартовыми координатами  $x, y, z$ . Связь между ними задается формулами:

$$\begin{aligned}x &= (N + H) \cos B \cos L, \\y &= (N + H) \cos B \sin L, \\z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B,\end{aligned}\tag{3.90}$$

которые легко получить из выражений (1.43) простой заменой величины  $N$  на  $N + H$ .

Установим теперь формулы обратного перехода от  $x, y, z$  к  $B, L, H$ . Разделим второе равенство из (3.90) на первое, тогда

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x}.\tag{3.91}$$

Возводя в квадрат первое и второе выражение из (3.90) и складывая их, найдем

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = x \cos L + y \sin L = (N + H) \cos B.\tag{3.92}$$

Разделив третье равенство (3.90) на (3.92), получим

$$\operatorname{tg} B = \frac{z}{R} + \frac{e^2 N \sin B}{R}.\tag{3.93}$$

Структура формулы (3.93) показывает, что широта  $B$  определяется по ней только методом приближений. В первом приближении принимают  $B = \operatorname{arctg} \frac{z}{R}$ , вычисляют  $\sin B'$  и  $N'$ . Затем с этими значениями вновь входят в формулу (3.93) и т.д.

Среди неитеративных методов определения широты наибольшее распространение получил способ Боуринга. Его сущность заключается в следующем. В равенстве (3.93) перейдем к приведенной широте, в результате получим

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1 - e^2} \left( \frac{z}{R} + \frac{e^2 c \sin U}{R} \right).\tag{3.94}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{R} \frac{a}{b} = \frac{z}{R \sqrt{1 - e^2}},\tag{3.95}$$

тогда (3.94) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} U = (1 - e^2) \operatorname{tg} \theta + \frac{e^2 a}{R} \sin U.\tag{3.96}$$

Разложим  $\sin U$  в ряд по разностям тангенсов ( $\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} \theta$ ):

$$\sin U = \sin \theta + \frac{d \sin \theta}{d \operatorname{tg} \theta} (\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} \theta) + \dots = \sin \theta + (\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} \theta) \cos^3 \theta + \dots.\tag{3.97}$$

Подставим (3.97) в (3.96), тогда после ряда преобразований, подробности которых мы опускаем, и, переходя к геодезической широте, окончательно получим

$$\operatorname{tg} B = \frac{z + e' e a \sin^3 \theta}{R - e^2 a \cos^3 \theta}, \quad (3.98)$$

$$H = (R - N \cos B) \sec B. \quad (3.99)$$

Максимальная погрешность, которая возникает при использовании формулы (3.98) взамен строгого равенства (3.93), составляет 0,0017" (на высоте  $H \approx 2a$ ), т.е. не является существенной при решении большинства практических задач.

Весьма частое применение находит так называемая горизонтная система координат (рис.3.10 и рис.3.11).

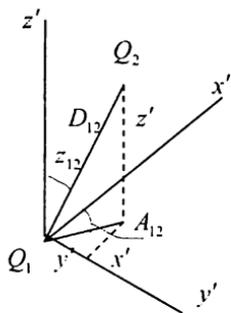


Рис.3.10. Горизонтная система координат

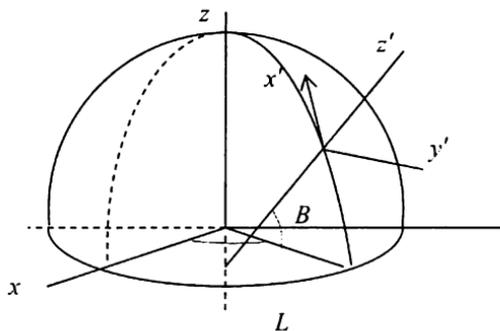


Рис.3.11. Связь горизонтной и геодезической систем координат

Начало системы находится в некоторой точке поверхности эллипсоида. Ось  $z'$  расположена на продолжении нормали к поверхности эллипсоида в данной точке и направлена в сторону увеличения высот. Ось  $x'$  совпадает с касательной к меридиану в данной точке и направлена в сторону оси вращения эллипсоида. Ось  $y'$  направлена в сторону увеличения долгот. Таким образом, тройка осей  $x' y' z'$  образуют левую систему координат.

Связь прямоугольных и полярных сферических координат (см.рис.3.10) устанавливается очевидными формулами

$$\begin{aligned} x' &= D \sin Z \cos A = D l', \\ y' &= D \sin Z \sin A = D m', \\ z' &= D \cos Z = D n'. \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{y'}{x'} = \frac{m'}{l'},$$

$$\operatorname{ctg} Z = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{n'}{\sqrt{l'^2 + m'^2}}, \quad (3.101)$$

$$D = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

в которых  $A$  — геодезический азимут;  $Z$  — зенитное расстояние;  $l, m', n'$  — направляющие косинусы прямой  $Q_1Q_2$  в горизонтной системе координат.

Связь между горизонтными и геодезическими координатами задается известными формулами

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L \cos B \sin L \\ \cos B & 0 \sin B \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

в которых  $x_0, y_0, z_0$  — координаты начала горизонтной системы в геодезической;  $A^T$  — транспонированная матрица  $A$ .

### *Последовательность решения прямой геодезической задачи в пространстве*

Исходные данные:  $B_1, L_1, H_1, D_{12}, A_{12}, z_{12}$ .

Требуется найти:  $B_2, L_2, H_2$ .

1. Вычисление горизонтных координат  $x', y', z'$  точки  $Q_2$  по формулам (3.100).
2. Вычисление разностей прямоугольных координат  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  в геодезической системе по формулам (3.102) и (3.103).
3. Вычисление прямоугольных координат точки:  $x_2 = x_1 + \Delta x, y_2 = y_1 + \Delta y, z_2 = z_1 + \Delta z$ .
4. Вычисление геодезических координат  $B_2, L_2, H_2$  по прямоугольным по формулам (3.91), (3.98), (3.99).

### *Последовательность решения обратной геодезической задачи в пространстве*

Исходные данные:  $B_1, L_1, H_1, B_2, L_2, H_2$ .

Требуется найти:  $D_{12}, A_{12}, z_{12}$ .

1. Переход от геодезических координат  $B, L, H$  к прямоугольным  $x, y, z$  для точек  $Q_1$  и  $Q_2$  по формулам (3.90).
2. Образование разностей координат  $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1$ ,

3. Переход к горизонтным координатам  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  по формулам (3.102) и (3.103).

4. Вычисление полярных топоцентрических координат  $D_{12}$ ,  $A_{12}$ ,  $z_1$  по формулам (3.101).

### 3.8. Редукция хорды космической сети к геодезической системе координат

При обработке пространственных сетей используют еще одну систему топоцентрических координат, которая определяется следующим образом. Начало системы находится в некоторой точке земной поверхности, ее оси параллельны осям геодезической системы координат. Полярными координатами в этой системе являются (рис. 3.12): угол  $\Lambda$  — аналог долготы,  $\Phi$  — аналог широты,  $D$  — расстояние между точками по прямой.

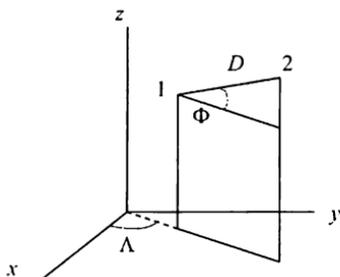


Рис. 3.12. Сферические координаты хорды

Связь между прямоугольными и полярными координатами осуществляется по формулам, аналогичным (3.100) и (3.101)

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta x = D \cos \Phi \cos \Lambda = D L, \\ y_2 - y_1 &= \Delta y = D \cos \Phi \sin \Lambda = D M, \\ z_2 - z_1 &= \Delta z = D \sin \Phi = D N, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\operatorname{tg} \Lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{M}{L},$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2}}, \quad (3.105)$$

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

где  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — направляющие косинусы отрезка прямой  $Q_1Q_2$ .

В этой системе обрабатываются сети, построенные способом хорд\*, базисы, полученные методом РСДБ, наконец, замыкающие, вычисленные по материалам обработки звеньев или участков существующей АГС.

\* Об этом подробнее см.: Бойко Е.Г., Клеицкий Б.М., Ландис И.М., Устинов Г.А. Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей. — М.: Недра, 1977.

Во всех случаях полярные топоцентрические координаты  $\Lambda$ ,  $\Phi$ ,  $D$  прямолинейного отрезка (хорды) рассматриваются как измеренные и в процессе уравнивания к ним отыскиваются поправки  $\Delta\Lambda$ ,  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta D$ . Однако при совместной обработке спутниковых и наземных сетей все уравнения должны быть записаны в одной системе. Как правило, это будет система геодезических координат. Установим дифференциальные связи между величинами  $\Lambda$ ,  $\Phi$ ,  $D$  и  $B$ ,  $L$ ,  $H$ .

Проще всего такие связи определяются через прямоугольные декартовые координаты.

Обозначим:  $X$  — вектор поправок к прямоугольным координатам,  $Q$  — вектор поправок к геодезическим координатам,  $K$  — вектор поправок к сферическим координатам хорды, т.е.

$$X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} d\Lambda \\ d\Phi \\ dD \end{bmatrix}.$$

Обозначим далее матрицы перехода из одной системы в другую:  $R_{KX}$ ,  $R_{XK}$ ,  $R_{QX}$ ,  $R_{XQ}$  и т.д., где индекс обозначает порядок перехода, например,  $R_{XK}$  является матрицей перехода от сферических координат к прямоугольным декартовым координатам.

В соответствии с введенными обозначениями можно записать:

$$\begin{aligned} X &= R_{KX} K, & K &= R_{XK} X = R_{KX}^{-1} X, \\ X &= R_{QX} Q, & Q &= R_{XQ} X = R_{QX}^{-1} X. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Из (3.106) видно, что для установления необходимых связей нужно найти всего две матрицы преобразования координат. Остальные будут получены операцией обращения матриц.

Найдем матрицу

$$R_{KX} = \frac{\partial(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\partial(\Lambda, \Phi, D)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \Delta x}{\partial \Phi} & \frac{\partial \Delta x}{\partial D} \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \Delta y}{\partial \Phi} & \frac{\partial \Delta y}{\partial D} \\ \frac{\partial \Delta z}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \Delta z}{\partial \Phi} & \frac{\partial \Delta z}{\partial D} \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

Для определения частных производных в (3.107) используем выражения (3.104). Покажем, например, как получается первый столбец матрицы  $R_{KX}$ :

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial \Lambda} = -D \cos \Phi \sin \Lambda = -D M,$$

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial \Lambda} = D \cos \Phi \cos \Lambda = D L,$$

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial \Lambda} = 0$$

и т.д.

Выполнив операцию дифференцирования, получим матрицу  $R_{KX}$  в следующем виде:

$$R_{KX} = \begin{bmatrix} -DM & DL' & L \\ DL & DM' & M \\ 0 & DN' & N \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

где  $L' = -\sin \Phi \cos \Lambda$ ,  $M' = -\sin \Phi \sin \Lambda$ ,  $N' = \cos \Phi$ .

Обращая (3.108), найдем

$$R_{KX}^{-1} = R_{XK} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{D \cos^2 \Phi} & \frac{L}{D \cos^2 \Phi} & 0 \\ \frac{L'}{D} & \frac{M'}{D} & \frac{N'}{D} \\ L & M & N \end{bmatrix}. \quad (3.109)$$

В справедливости полученного выражения (3.109) предоставляем читателю убедиться самому, используя известное соотношение, где  $R_{KX} R_{XK} = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

Теперь займемся матрицей  $R_{QX}$ :

$$R_{QX} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(B, L, H)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial B} & \frac{\partial x}{\partial L} & \frac{\partial x}{\partial H} \\ \frac{\partial y}{\partial B} & \frac{\partial y}{\partial L} & \frac{\partial y}{\partial H} \\ \frac{\partial z}{\partial B} & \frac{\partial z}{\partial L} & \frac{\partial z}{\partial H} \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

Формулы (3.90) запишем в несколько измененном виде (напомним, что  $r = N \cos B$ ):

$$\begin{aligned} x &= r \cos L + H \cos B \cos L, \\ y &= r \sin L + H \cos B \sin L, \\ z &= [N (1 - e^2) + H] \sin B. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Выполнив дифференцирование выражений (3.111) по переменным  $B, L, H$ , учтя, что, согласно рис. 1.3,

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B, \quad \frac{dz}{dB} = M \cos B,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -(M + H) \sin B \cos L, & \frac{\partial y}{\partial B} &= -(M + H) \sin B \sin L, \\ \frac{\partial x}{\partial H} &= \cos B \cos L, & \frac{\partial y}{\partial L} &= (N + H) \cos B \cos L, \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= -(N + H) \cos B \sin L, & \frac{\partial y}{\partial H} &= \cos B \sin L \end{aligned} \quad (3.112)$$

и т.д.

Таким образом, все элементы матрицы  $R_{QX}$  будут определены

$$R_{QX} = \begin{bmatrix} -(M+H) \sin B \cos L & -(N+H) \cos B \sin L & \cos B \cos L \\ -(M+H) \sin B \sin L & (N+H) \cos B \cos L & \cos B \sin L \\ (M+H) \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Для выражения из (3.106)  $x = R_{QX} Q$  более удобна следующая форма

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy' \\ dz \end{bmatrix} = A_{QX} \begin{bmatrix} (M+H)dB \\ (N+H) \cos B dL \\ dH \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

где матрица  $A_{QX}$ , как это следует из (3.113) имеет вид

$$A_{QX} = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

Нетрудно убедиться, что элементы матрицы  $A_{QX}$  точно совпадают с элементами матрицы преобразования геодезических координат в горизонтные, вычисляемыми по формулам (3.103). Но из принципиальных соображений так и должно быть, поскольку по определению горизонтных координат малые изменения координат их начала связаны с изменениями геодезических координат очевидными соотношениями

$$dx' = (M+H)dB, \quad dy' = (N+H) \cos B dL, \quad dz' = dH.$$

Поскольку матрица  $A_{QX}$  ортогональная (в этом и состоит выгода перехода от матрицы  $R_{QX}$  к матрице  $A_{QX}$ ), то ее обращение сводится к операции транспонирования. Тогда

$$A_{XQ} = A_{QX}^{-1} = A_{QX}^T. \quad (3.116)$$

Таким образом, все связи, необходимые для обработки хорды (или вообще прямолинейного отрезка в пространстве) в различных системах координат установлены. Последовательность применения формул (3.106) будет диктоваться конкретной постановкой задач на обработку.

Эти вопросы изучаются в других разделах геодезии.

## РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИпсоИДА И В ПРОСТРАНСТВЕ

### 4.1. Виды геодезических засечек

В настоящее время широкое распространение, особенно при геодезическом обеспечении морских работ, получили навигационные и радиогеодезические системы, с помощью которых определяют координаты любой точки земной поверхности. Все применяемые системы (подробно они описаны в других курсах геодезии) можно классифицировать по измеряемому навигационному параметру на азимутальные (угловые), дальномерные (линейные) и разностно-дальномерные (гиперболические). При использовании этих систем предполагают, что радиоволны распространяются по геодезическим линиям.

При построении пространственных наземных и спутниковых сетей могут измеряться полярные топоцентрические координаты в горизонтной системе и сферические координаты в Гринвичской системе. В этом случае будем полагать, что сигналы (после введения соответствующих поправок) распространяются прямолинейно.

После этих замечаний рассмотрим основные виды геодезических построений, используемых при определении координат объектов на поверхности эллипсоида и в пространстве.

#### Угловая засечка

Даны геодезические координаты двух точек  $Q_1$  и  $Q_2$ , измерены азимуты  $A_1$  и  $A_2$  на точку  $Q$  (рис. 4.1) или углы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . По этим данным необходимо найти геодезические координаты точки  $Q$ .

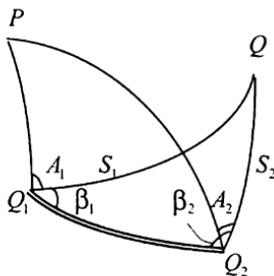


Рис. 4.1. Угловая и линейная засечки

#### Линейная засечка

Даны геодезические координаты точек  $Q_1$  и  $Q_2$ , измерены длины геодезических линий  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 4.1). Найти геодезические координаты точки  $Q$ .

## Гиперболическая засечка

Данное построение может быть реализовано в двух вариантах: гиперболическая засечка с совмещенными базами (рис. 4.2) и засечка с разнесенными базами (рис. 4.3).

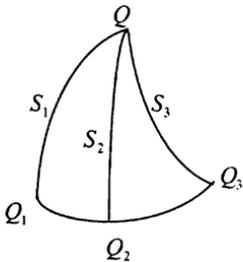


Рис. 4.2. Гиперболическая засечка с совмещенными базами

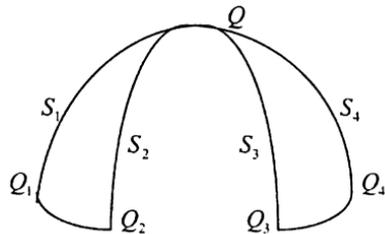


Рис. 4.3. Гиперболическая засечка с разнесенными базами

В первом случае исходными данными являются геодезические координаты трех точек и две измеренные разности длин геодезических линий  $\Delta S_1 = S_1 - S_2$ ,  $\Delta S_2 = S_2 - S_3$ .

Во втором — геодезические координаты четырех точек и две разности  $\Delta S_1 = S_1 - S_2$ ,  $\Delta S_2 = S_3 - S_4$ .

По этим данным необходимо найти геодезические координаты точки  $Q$ .

## Полярная засечка в пространстве

Даны геодезические координаты точки  $Q_1$ , измерены топоцентрические координаты  $\rho_1$ ,  $z_1$  и  $A_1$  (рис. 4.4). Найти геодезические координаты точки  $Q$ .

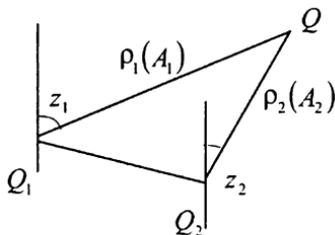


Рис. 4.4. Полярная и угловая засечки в пространстве

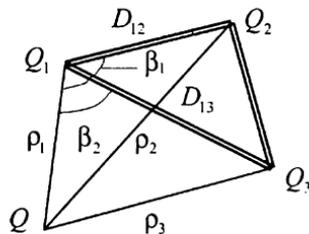


Рис. 4.5. Линейная засечка в пространстве

### *Угловая засечка в пространстве*

Даны геодезические координаты двух точек (см. рис.4.4), измерены полярные топоцентрические координаты  $z_1, A_1$  и  $z_2, A_2$ . Требуется найти геодезические координаты точки  $Q$ .

### *Линейная засечка в пространстве*

Даны геодезические координаты трех точек, измерены в пространстве расстояния  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$  от этих точек до точки  $Q$ (см. рис.4.5). Требуется найти геодезические координаты этой точки.

### **4.2. Выбор поверхности относимости**

В зависимости от точности и дальности действия навигационных и радиогеодезических систем, в качестве поверхности, на которой выполняется обработка измерений (поверхности относимости), можно использовать плоскость, сферу и, в строгой постановке, поверхность эллипсоида.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Методы сфероидической геодезии обеспечивают возможность вести вычисления с любой точностью. Однако, чем выше точность, тем сложнее применяемые алгоритмы, поэтому более правильно ставить вопрос о вычислениях с практически необходимой точностью и соответствующем выборе поверхности относимости.

На конечные результаты геодезических определений влияют следующие факторы: ошибки исходных данных, ошибки измерений, приближенность наших представлений о физических явлениях, влияющих на измеренные величины (неадекватность моделей физических явлений), методические ошибки (нестрогость формул, неверный выбор поверхности относимости и т.д.).

Определяющими являются ошибки измерений. Их величины диктуют требования к точности вычислений и нормам учета остальных факторов. Здесь будут рассмотрены только ошибки, зависящие от выбора поверхности относимости. При их оценке потребуем, чтобы величина не превышала 5% от ошибки измерений (в принципе можно поставить и другие ограничения, суть подхода от этого не изменится), тогда приходим к известному соотношению

$$m_0 \leq \frac{m}{3} .$$

Возникающие искажения будем изучать в следующей последовательности. В качестве исходной используем длину геодезической линии  $S$  на поверхности эллипсоида, далее перейдем к длине нормального сечения  $S_n$ , затем — к геоцентрическому сечению и дуге большого круга  $\sigma$ , наконец, к проекции на касательную плоскость —  $D$ .

Разность длин  $S_n$  и  $S$  очень мала и выражается известной формулой

$$S_n - S = \frac{e^4}{360} \left( \frac{S}{a} \right)^4 \cos B_1 \sin 2A_1 S. \quad (4.1)$$

Простые расчеты показывают, что даже при самых неблагоприятных условиях ( $B_1 = 0$ ,  $A_1 = 45^\circ$ ,  $S = a$ ), разность  $S_n - S$  составит менее 0,8 м. Следовательно, во всех случаях практики длину геодезической линии можно заменить длиной нормального сечения.

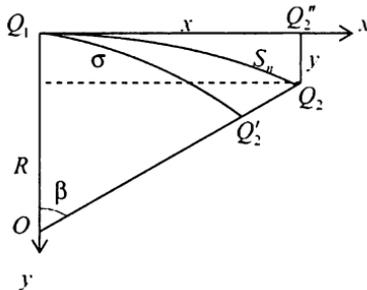


Рис. 4.6. Сравнение длин дуг нормального сечения и окружности

Для дальнейших исследований введем систему координат как показано на рис. 4.6. Начало координат располагается в точке  $Q_1$ , ось  $x$  лежит в пересечении касательной и нормальной плоскостей,  $R$  — радиус нормального сечения.

Из точки  $O$  опишем дугу окружности  $\sigma$  с радиусом  $R$ . Точка  $Q'_2$  на этой окружности является центральной проекцией точки  $Q_2$ . Из рис. 4.6. имеем

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{R} = \frac{x}{R - y} = \frac{x}{R \left( 1 - \frac{y}{R} \right)}, \quad (4.2)$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точки.

Используя формулы (1.5) и (2.9), для  $x$  и  $y$  в выбранной системе координат можно написать:

$$\begin{aligned} x &= S - \frac{S^3}{6R^2} + \frac{3e^2 \cos B_1 \sin B_1 \cos A_1}{8N_1^3} S^4 + \dots, \\ y &= \frac{S^2}{2R^2} - \frac{e^2 \cos B_1 \sin B_1 \cos A_1}{2N_1^3} S^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Разложим тангенс малого угла  $\beta$  в ряд  $\operatorname{tg} \beta = \beta + \frac{\beta^3}{3} + \dots$ , тогда, умножив (4.2) на  $R$ , получим

$$R \operatorname{tg} \frac{\sigma}{R} = \sigma + \frac{\sigma^3}{3R^2} + \dots = x \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^{-1} \approx x \left( 1 + \frac{y}{R} \right). \quad (4.4)$$

Подставляя в (4.4) выражения (4.3) для  $x$  и  $y$  и образуя разность  $\Delta_\sigma = S - \sigma$ , после некоторых преобразований (не удерживая члены порядка  $\left(\frac{S}{N_1}\right)^4$ ) получим:

$$\Delta_\sigma = S - \sigma = \frac{e^2 \sin 2B_1 \cos A_1}{16} \left(\frac{S}{N_1}\right)^3 S. \quad (4.5)$$

Максимальной величины  $\Delta_\sigma$  достигает при  $B_1 = 45^\circ$ ,  $A_1 = 0^\circ$  или  $A_1 = 180^\circ$ , эту оценку можно приближенно представить формулой

$$(\Delta_\sigma)_{\max} = 1,6 \cdot 10^{-12} S^4. \quad (4.6)$$

Расчеты, выполненные по формулам (4.5) и (4.6), показывают, что при  $S = 880$  км  $\Delta_\sigma = 1$  м, далее эта величина начнет быстро расти.

В любом случае, при заданном уровне ошибок измерений, по формулам (4.5) и (4.6) легко установить размеры области, в пределах которой эллипсоид можно аппроксимировать сферой с радиусом  $R = N$ .

При переходе на касательную плоскость из рис 4.6 и формул (4.3) легко найти

$$D = x, \quad S - D \approx \frac{S^3}{6 R^2}, \quad dH \approx y \approx \frac{S^2}{2 R}, \quad (4.7)$$

где  $S - D = \Delta_D$  — ошибка в плане;  $dH$  — ошибка по высоте.

Для приближенных оценок получим

$$\Delta_D = 4,1 \cdot 10^{-6} S^3, \quad (4.8)$$

$$dH = 7,8 \cdot 10^{-2} S^2, \quad (4.9)$$

где  $\Delta_D$  и  $dH$  выражены в метрах,  $S$  — в километрах. Величина  $\Delta_D$  достигает 1 м при 60 км, далее быстро растет,  $dH$  (по существу, поправка за кривизну Земли) уже при 10 км составляет 8 м, далее растет еще быстрее, чем  $\Delta_D$ .

Подведем итог. При замене всей поверхности эллипсоида поверхностью шара ( $R = a$ ) линейные искажения будут достигать нескольких километров. Если размеры области замены ограничить до  $S = 880$  км, то практически все задачи по местопределению с помощью радиогодезических систем можно решать на шаре с радиусом  $N_0$ , вычисляемым для центра области.

Таким образом, поверхность шара может быть использована: 1) для решения задач на самой поверхности, когда это позволяет точность измерений; 2) для вычисления предварительных координат с целью последующего их уточнения уже на поверхности эллипсоида; 3) для априорной оценки точности задач местопределения и оптимизации измерений на этапе их планирования.

Строгую обработку при современной точности измерений необходимо выполнять на поверхности эллипсоида.

### 4.3. Решение геодезических засечек на шаре

#### Азимутальная засечка

Исходными данными для решения азимутальной засечки являются координаты точек  $Q_1$  и  $Q_2$  ( $\varphi, \lambda$ ) и измеренные азимуты  $\alpha_1, \alpha_2$ . Решение выполняется в два этапа.

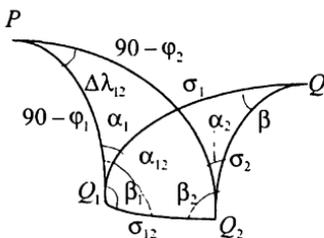


Рис. 4.7. Решение линейной и угловой засечек на шаре

Вначале в сферическом треугольнике  $Q_1Q_2Q$  (рис.4.7), в котором известны два угла  $\beta_1 = \alpha_{12} - \alpha_1$  и  $\beta_2 = 360^\circ - (\alpha_{21} - \alpha_2)$  определяют стороны  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . На втором этапе решают прямую геодезическую задачу по линии  $Q_1Q$ .

Приведем алгоритм решения азимутальной засечки.

1. Решают обратную геодезическую задачу между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  и получают  $\sigma_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{12}$ .
2. Вычисляют углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .
3. Находят угол  $\beta$  при вершине засечки (теорема косинусов для углов сферического треугольника)

$$\cos \beta = -\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \sigma_{12}.$$

4. Вычисляют стороны  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (теорема синусов для сферического треугольника)

$$\sin \sigma_1 = \sin \sigma_{12} \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta}, \quad \sin \sigma_2 = \sin \sigma_{12} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta}.$$

5. Используя заданное значение  $\alpha_1$  и вычисленное значение  $\sigma_1$ , решают прямую геодезическую задачу по линии  $Q_1Q$  по формулам (3.11), (3.12). Контрольные вычисления можно выполнить для линии  $Q_2Q$ .

В линейной засечке заданными величинами являются координаты точек  $Q_1$  и  $Q_2$  и сферические расстояния  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Здесь также вначале решается треугольник  $Q_1Q_2Q$  по трем известным сторонам  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_{12}$  (см. рис. 4.7), затем — прямая геодезическая задача.

Алгоритм решения линейной засечки приводится ниже.

1. Из решения обратной геодезической задачи между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  находят  $\sigma_{12}$ ,  $\alpha_{12}$ .
2. Вычисляют угол  $\beta_1$  (теорема косинусов для сторон сферического треугольника)

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos \sigma_2 - \cos \sigma_1 \cos \sigma_{12}}{\sin \sigma_1 \sin_{12}}.$$

3. Вычисляют азимут  $\alpha_1$  линии  $Q_1Q$ .
4. По заданному значению  $\sigma_1$  и вычисленному  $\alpha_1$  решают прямую геодезическую задачу по линии  $Q_1Q$ . В целях контроля вычисления можно повторить для линии  $Q_2Q$ .

#### 4.4. Решение геодезических засечек на эллипсоиде

Решение геодезических засечек на эллипсоиде по своей постановке (набор заданных и определяемых величин) остается точно таким же, как и на шаре. Изменяется только поверхность относимости. Поскольку поверхность эллипсоида является более сложной, то несколько усложняется и алгоритм вычислений.

На эллипсоиде все засечки, как правило, решают методом приближений. Здесь возможны два подхода. Профессор В.П. Морозов\* предлагает вести решение в такой последовательности. В первом приближении решают засечку на шаре методами, описанными в параграфе 4.3, принимая геодезические координаты и измеренные на эллипсоиде величины как сферические. Получив приближенные координаты определяемой точки, редуцируют измеренные величины на шар по способу сферического изображения эллипсоида на шаре (т.е. под условием  $B = \varphi$ ,  $L = \lambda$ ). Затем вновь решают засечку на шаре и вычисляют новые значения координат определяемой точки. Так как предыдущее редуцирование на шар было осуществлено пока с недостаточной точностью, то его необходимо выполнить еще раз, но уже с новыми, более точными значениями координат, после чего решить засечку на шаре в тре-

---

\* Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1979.

тий раз и вычислить окончательные значения координат определяемого пункта.

Более простым в вычислительном плане представляется подход, в котором координаты определяемой точки, полученные после первого решения засечки на шаре, рассматриваются как предварительные координаты этой же точки на эллипсоиде. Далее устанавливают функции связи измеренных величин  $T_i$  с геодезическими координатами

$$T_i = f_i(B, L) \quad (4.10)$$

и по ним составляют параметрические уравнения поправок

$$\frac{\partial T}{\partial(B, L)} \left[ \frac{dB}{dL} \right] + l_T = v_T. \quad (4.11)$$

Первый член уравнения (4.11) полностью совпадает с выражением (3.75), описывающим дифференциальные связи полярных координат с геодезическими при решении обратной геодезической задачи (дифференциальные формулы первого рода);  $l_T = T^0 - T^{изм}$  — свободный член, в котором  $T^0_i = f_i(B^0, L^0)$  — значение функции, вычисленное по предварительным координатам;  $T^{изм}$  — значение измеренной величины;  $v_T$  — поправка к измеренной величине (если в засечке участвуют только необходимые измерения, то, естественно,  $v_T = 0$ ).

Далее система (4.11) решается по правилам МНК. Поскольку первое решение засечки на шаре может быть получено с недостаточной точностью, то вычисления приходится вести методом приближений, организовав итерационный процесс ньютоновского типа.

Установим теперь конкретный вид уравнений поправок для измеренных на эллипсоиде азимутов  $A$ , длин  $S$  геодезических линий и их разностей  $\Delta S$ .

Для прямого азимута с исходной точкой  $Q_i$  на определяемую точку  $Q$  согласно выражению (3.86), в котором нужно положить  $dB_i = dL_i = 0$ , получим

$$\frac{M_Q^0}{R \sin \frac{S}{R}} \sin A_{Q_i Q}^0 dB - \frac{N_Q^0}{R \sin \frac{S}{R}} \cos B_{Q_i Q}^0 \cos A_{Q_i Q}^0 dL + (A_{Q_i Q}^0 - A_{Q_i Q}^{изм}) = v_A, \quad (4.12)$$

где  $R = \sqrt{M_Q^0 N_Q^0}$ .

Для измеренной длины  $S$  геодезической линии из (3.85) найдем

$$-M_Q^0 \cos A_{Q_i Q}^0 dB - N_Q^0 \cos B_{Q_i Q}^0 \sin A_{Q_i Q}^0 dL + (S_i^0 - S_i^{изм}) = v_S. \quad (4.13)$$

Образовав разность двух уравнений вида (4.13), получим уравнение поправок для разности длин двух геодезических линий  $\Delta S$ , измеренной в точке  $Q$  относительно исходных пунктов  $Q_i$  и  $Q_2$ :

$$-M_Q^o (\cos A_{QQ}^o - \cos A_{QQ}^o) dB - N_Q^o \cos B_Q^o (\sin A_{QQ}^o, -\sin A_{QQ}^o) dL + (\Delta S'' - \Delta S''') = v_{\Delta_s}, \quad (4.14)$$

где  $\Delta S'' = S_{QQ}^o - S_{QQ}^o$ .

В формулах (4.12) — (4.14) индекс «о» обозначает, что соответствующие элементы вычисляются по предварительным координатам.

После этих замечаний приведем алгоритмы решения геодезических засечек на эллипсоиде, основанные на использовании уравнений (4.12) — (4.14).

### *Азимутальная засечка*

Исходными данными являются геодезические координаты двух или более базисных станций  $Q_i (B_i, L_i)$  и измеренные азимуты геодезических линий с этих станций на определяемую точку  $Q$ .

Вычисления выполняются в два этапа.

1. На первом этапе вычисляют сферические координаты точки  $Q$  на шаре по алгоритму, приведенному в параграфе 4.3, для угловой засечки на шаре. В дальнейшем эти координаты принимают за предварительные координаты этой же точки на эллипсоиде.

2. Второй этап начинают с составления уравнений поправок вида (4.12). Геодезические азимуты  $A^o$ , входящие в коэффициенты уравнений (4.12), получают из решения обратной геодезической задачи на эллипсоиде по способу Бесселя. В результате будет получена система из двух или более уравнений поправок

$$C Q + l = V, \quad (4.15)$$

где  $C$  — матрица коэффициентов уравнений поправок,  $Q = [dB, dL]^T$  — вектор поправок в координаты,  $l$  — вектор свободных членов.

Для придания общности алгоритму по уравнениям поправок (4.15) рекомендуется всегда составлять нормальные уравнения

$$C^T P C Q + C^T P l = 0. \quad (4.16)$$

В такой постановке алгоритм будет одинаков как для случая только необходимых, так и при наличии избыточных измерений.

3. Решают нормальные уравнения (4.16)

$$Q'' = \begin{bmatrix} dB'' \\ dL'' \end{bmatrix} = -(C^T P C)^{-1} C^T P l \quad (4.17)$$

и получают поправки к предварительным координатам определяемой точки, а затем и сами координаты в первом приближении

$$B' = B'' + dB'', \quad L' = L'' + dL'' \quad (4.18)$$

4. Полученные координаты  $B'$ ,  $L'$  определяемой точки принимают как предварительные для второго приближения и возвращаются ко второму пункту данного алгоритма.

5. Находят новые значения элементов  $S'$  и  $A'$ , соответствующие новым предварительным координатам  $B'$  и  $L'$  по дифференциальным формулам, вытекающим из (3.85) и (3.87)

$$dS' = -M_Q^o \cos A_{QQ}^o dB^o - N_Q^o \cos B_Q^o \sin A_{QQ}^o dL^o, \quad (4.19)$$

$$dA_{QQ}^o = \frac{M_Q^o}{m} \left( \frac{dm}{dS} \right) \sin A_{QQ}^o dB^o + \frac{N_Q^o}{m} \cos B_Q^o \cos A_{QQ}^o dL^o,$$

где  $S' = S^o + dS'$ ,  $A_{QQ}^o = A_{QQ}^o + dA_{QQ}^o$ ,

$$m = R \sin \frac{S}{R}, \quad \frac{dm}{dS} = \cos \frac{S}{R}. \quad (4.20)$$

6. Далее составляют уравнения поправок (4.12), по ним — нормальные уравнения (4.16), из решения которых находят новые значения поправок  $dB'$ ,  $dL'$  и координаты определяемой точки во втором приближении

$$B'' = B' + dB', \quad L'' = L' + dL'.$$

Затем процесс повторяют, начиная со второго пункта, до тех пор, пока не будет выполнена система неравенств

$$|B^{i+1} - B^i| \leq \varepsilon, \quad |L^{i+1} - L^i| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность вычислений, обусловленная целью конкретной задачи.

### *Линейная и гиперболическая засечки*

На первом этапе вычисляют координаты определяемой точки на шаре по алгоритмам, приведенным в 4.3. На втором — составляют уравнения поправок вида (4.13) — для линейной засечки и вида (4.14) — для гиперболической, далее весь ход решения полностью совпадает с алгоритмом вычисления координат вершины азимутальной засечки, описанным выше.

Таким образом, рассмотренный подход к решению геодезических засечек на эллипсоиде является достаточно универсальным.

В заключение приведем несколько замечаний.

Если имеется возможность получить предварительные координаты с помощью каких-либо других технических средств (например, на море так называемые счислимые координаты), то первый этап вычислений можно опустить. Правда, при этом может увеличиться число итераций на втором этапе вычислений.

Исследования, выполненные на кафедре высшей геодезии МИИГАиК, показали, что если использовать рассмотренные в дан-

ном параграфе алгоритмы, то для достижения точности вычисления геодезических координат  $0,1''$  (3 м) при расстояниях до 600 км в интервале широт  $-45^\circ \leq B \leq 45^\circ$  достаточно одного приближения, в интервале  $-85^\circ \leq B \leq 85^\circ$  – двух приближений и только в полярных областях потребуется большее количество приближений.

### Решения линейной засечки на поверхности эллипсоида

Эллипсоид Красовского:  $c = 6399698,9$ ;  $e^2 = 0,00673852$ .

Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Пункты	$B$	$L$	$S_{\text{уч.м}}$
$Q_1$	$60^\circ$	$30^\circ$	156 498,8
$Q_2$	61	34	148 649,2
$Q$	61	32	

Примечание: точные координаты точки  $Q$  приведены для контроля решения.

1 этап. Решение засечки на шаре

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) = 60,5^\circ, \quad R = \frac{c}{1 + \eta_m^2} = 6389260 \text{ м}, \quad \eta_m^2 = e^2 \cos^2 B_m.$$

1. Вычисление сферических расстояний

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{R} = 0,02449404, \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{R} = 0,02326548.$$

2. Решение обратной задачи между исходными пунктами для вычисления

$$\alpha_{12}(A_{12}), \quad \sigma_{12} = \frac{S_{12}}{R}.$$

Здесь возможны два варианта:

а) решение задачи на шаре

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{\sin \Delta \lambda \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda},$$

$$\cos \sigma_{12} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda.$$

В последних формулах принято  $\varphi = B$ ,  $\Delta \lambda = L_2 - L_1$ .

б) решение задачи на эллипсоиде (принципиально более точное) по формулам со средними аргументами ( $S \leq 1000$  км) или по способу Бесселя. В нашем примере (табл. 4.2) используются формулы со средними аргументами.

$$b_{ij} = \frac{B_j - B_i}{\rho^\circ}, \quad l_{ij} = \frac{L_j - L_i}{\rho^\circ}, \quad B_m = \frac{1}{2}(B_i + B_j),$$

$$\eta_m^2 = e^2 \cos^2 B_m, \quad N_m = \frac{c}{\sqrt{1 + \eta_m^2}}, \quad M_m = \frac{N_m}{1 + \eta_m^2},$$

$$Q = S \cos A_m = b M_m \left[ 1 - \frac{2l^2 + (l \sin B_m)^2}{24} \right] = b M_m (1 - t_1),$$

$$P = S \sin A_m = l \cos B_m N_m \left[ 1 + \frac{b^2 - (l \sin B_m)^2}{24} \right] = l \sin B_m N_m (1 + t_2),$$

$$\Delta A = l \sin B_m \left[ 1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2(l \sin B_m)^2}{24} \right] \rho'' = l \sin B_m (1 + t_3) \rho'',$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \operatorname{tg} A_m = \frac{P}{Q}, \quad A_1 = A_m - \frac{\Delta A}{2}, \quad A_{21} = A_m + \frac{\Delta A}{2} \pm 180^\circ.$$

Таблица 4.2

$b_{12}$	0.00174533	$l \sin B_m$	0.00365951
$b_{12} \cdot M_m$	11141,5	$(1 - t_1)$	1,00010157
$(1 - t_1)$	0,9994410	$\Delta A''$	12479''
$Q$	11135,3	$\frac{\Delta A_1}{2}$	1,733198°
$l$	0.00487388	$A''_m$	87,141447°
$l \cdot \cos B_m \cdot N_m$	223040,6	$A_1$	86,408249°
$(1 + t_2)$	0,99984764	$\sigma_{12} = \frac{S}{R}$	0,03494683
$P$	223006,6		
$S$	223284,4 м		

### 3. Вычисление угла $\beta_1$ (рис. 4.1)

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos \sigma_2 - \cos \sigma_1 \cos \sigma_{12}}{\sin \sigma_1 \sin \sigma_{12}},$$

$$\beta_1 = \arccos \beta_1 = 41,618481^\circ.$$

### 4. Вычисление азимута $\alpha_1$ (линия $Q_1Q$ )

$$\alpha_1 = A_{12} - \beta_1 = 43,789768^\circ.$$

$$\text{Контроль: } \cos \alpha_1 = \cos A_{12} \cos \beta_1 + \sin A_{12} \sin \beta_1$$

$$\alpha_1 = \arccos \alpha_1 = 43,789768^\circ.$$

### 5. Решение прямой задачи на шаре по линии $Q_1Q$

$$\sin \varphi = \sin \varphi_1 \cos \sigma_1 + \cos \varphi_1 \sin \sigma_1 \cos \alpha_1,$$

$$\varphi = \arcsin \varphi = 60,99833410^\circ = 60^\circ 59' 54,00'',$$

$$\operatorname{tg} \Delta \lambda = \frac{\sin \sigma_1 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma_1 - \sin \varphi_1 \sin \sigma_1 \cos_1},$$

$$\Delta \lambda = \operatorname{arctg} \Delta \lambda = 2,00333095^\circ,$$

$$\lambda = \lambda_1 + \Delta \lambda = 32,00333095^\circ = 32^\circ 00' 11,99''.$$

### II этап. Решение засечки на эллипсоиде

Предварительные координаты точки  $Q$  на эллипсоиде берут из решения засечки на шаре, т.е.  $B^0 = \varphi$ ,  $L^0 = \lambda$ .

1. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок

$$a_1 dB'' + b_1 dL'' + l_1 = V_1 ,$$

$$a_2 dB'' + b_2 dL'' + l_2 = V_2 ,$$

где  $a_i = -\frac{M''_Q}{\rho''} \cos A''_{QQ}$ ,  $b_i = -\frac{N''_Q}{\rho''} \cos B''_Q \sin A''_{QQ}$ ,  $l_i = S_i'' - S_i''^{изм}$ .

Для этого решают обратные задачи на эллипсоиде (табл.4.3) с использованием предварительных координат точки Q.

Таблица 4.3

	$Q_1Q$	$Q_2Q$
$b$	0.01742420	0.01567887
$b M_m$	111 236,6 м	100 095,3
$(1-t_1)$	0,99986	0,99986
$Q$	111 221,2	100 081,6
$l$	0.03496647	0.03484845
$l \cos B_m N_m$	110 096,6 м	100 561,5
$(1+t_2)$	0,99997423	0,999971778
$P$	110 093,8 м	-109 558,4
$S$	156 495,3 м	148 389,3
$l \sin B_m$	0.03043327	0.03034450
$(1+t_1)$	1.00006262	1,00005539
$\Delta A''$	6277,7''	-6260,0''
$\frac{\Delta A''}{2}$	0.871807°	-0.869385°
$A_m$	44.708236°	-47.588300°
$A_{QQ}$	225,580043°	131,542315°

2. Составление системы уравнений

$$A X + L = V$$

$$\begin{bmatrix} 21,664412 & 10,374921 \\ 20,527194 & -11,249522 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dB'' \\ dL'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3,5_{м} \\ -259,9_{м} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} .$$

Примечание: для придания общности алгоритму рекомендуется во всех случаях переходить от системы уравнений поправок к нормальной системе независимо от наличия избыточных измерений

$$A^T A X + A^T L = 0, \quad X = -(A^T A)^{-1} A^T L .$$

В результате получим вектор решения системы

$$dB'' = 6,09'' , \quad dL'' = -11,98''$$

и координаты точки Q в первом приближении

$$B = 61^{\circ}00'00,09'' , \quad L = 32^{\circ}00'00,01'' .$$

Сравнение с точными координатами точки  $Q$  (см. табл. 4.1) показывает, что переходить ко второму приближению нет необходимости. Однако на практике, когда точные координаты точки  $Q$  неизвестны, нужно выполнять последующие приближения до соблюдения условий

$$|dB^i| \leq \varepsilon, \quad |dL^i| \leq \varepsilon,$$

где  $i$  — номер приближения,  $\varepsilon$  — заданная точность. При выполнении последующих приближений в исходной системе можно перевычислять только свободные члены  $l = S^0 - S^{\text{изм}}$ .

#### 4.5. Решение геодезических засечек в пространстве

Состав исходных данных и определяемых величин в полярной засечке (см. табл. 4.1) полностью совпадает с составом прямой геодезической задачи в пространстве, решение которой было описано в параграфе 3.7.

##### Угловая засечка

Особенность угловой засечки в пространстве состоит в том, что измеренные на исходных пунктах  $Q_1$  и  $Q_2$  величины —  $z_i$  и  $A_i$  относятся к разным системам топоцентрических горизонтных координат. Для определения положения точки  $Q$  (см. рис. 4.4) они должны быть приведены к одной системе. Как правило, это будет референсная геодезическая система.

Для перехода к этой системе необходимо вначале вычислить направляющие косинусы линий  $Q_1Q$  и  $Q_2Q$  в горизонтной системе. Из формулы (3.100) получим

$$\begin{aligned} l'_i &= \sin z_i \cos A_i, \\ m'_i &= \sin z_i \sin A_i, \\ n'_i &= \cos z_i. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Далее с помощью матрицы перехода (3.103) от горизонтных координат к прямоугольным геодезическим координатам получим

$$\begin{bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} l'_i \\ m'_i \\ n'_i \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Теперь вернемся к угловой засечке. Пусть на пунктах  $Q_1$  и  $Q_2$  измерены направления на точку  $Q$  (рис. 4.8) и по формулам (4.21) и (4.22) получены их направляющие косинусы. Выражения для координат точки  $Q$  имеют вид

$$\begin{aligned} x &= X_1 + \rho_1 \quad l_1 = X_2 + \rho_2 \quad l_2, \\ y &= Y_1 + \rho_1 \quad m_1 = Y_2 + \rho_2 \quad m_2, \\ z &= Z_1 + \rho_1 \quad n_1 = Z_2 + \rho_2 \quad n_2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

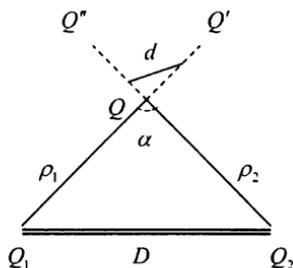


Рис. 4.8. Угловая засечка в пространстве

Система (4.23) имеет некоторые особенности. Для ее решения необходимо знать расстояния  $\rho_1$  и  $\rho_2$  от исходных пунктов до точки  $Q$ . Запись системы верна только в том случае, если прямые  $Q_1Q$  и  $Q_2Q$  в пространстве пересекаются. В общем случае, вследствие ошибок измерений, эти прямые будут скрещивающимися, поэтому система (4.23) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= X_1 + \rho_1 l_1, & x'' &= X_2 + \rho_2 l_2, \\ y' &= Y_1 + \rho_1 m_1, & y'' &= Y_2 + \rho_2 m_2, \\ z' &= Z_1 + \rho_1 n_1, & z'' &= Z_2 + \rho_2 n_2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где  $x', y', z'$  и  $x'', y'', z''$  — координаты точек встречи прямых  $Q_1Q'$  и  $Q_2Q''$ .

Для определения величин  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , которые входят в выражения (4.24), используем то обстоятельство, что расстояние  $d$  между точками встречи (см. рис. 4.8)

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 \quad (4.25)$$

является кратчайшим между прямыми  $Q_1Q'$  и  $Q_2Q''$ . Условие минимума запишется в виде системы уравнений

$$\frac{\partial d^2}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial d^2}{\partial \rho_2} = 0. \quad (4.26)$$

Для решения системы (4.26) величину  $d^2$  необходимо представить в функции расстояний  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Для этого найдем разности координат точек встречи из формул (4.24) и подставим их в (4.25). Тогда

$$\begin{aligned} d^2 &= [(X_2 - X_1) + \rho_2 l_2 - \rho_1 l_1]^2 + [(Y_2 - Y_1) + \rho_2 m_2 - \rho_1 m_1]^2 + \\ &+ [(Z_2 - Z_1) + \rho_2 n_2 - \rho_1 n_1]^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} F_1 &= (X_2 - X_1) l_1 + (Y_2 - Y_1) m_1 + (Z_2 - Z_1) n_1, \\ F_2 &= (X_2 - X_1) l_2 + (Y_2 - Y_1) m_2 + (Z_2 - Z_1) n_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= \cos \alpha, \\ (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 &= D^2. \end{aligned}$$

Теперь выражение (4.27) примет вид

$$d^2 = D^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2F_1 \rho_1 + 2F_2 \rho_2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \alpha. \quad (4.29)$$

С учетом (4.29) для системы (4.26) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial d^2}{\partial \rho_1} &= \rho_1 - \rho_2 \cos \alpha - F_1 = 0, \\ \frac{\partial d^2}{\partial \rho_2} &= \rho_2 - \rho_1 \cos \alpha + F_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Из решения системы (4.30) найдем искомые расстояния

$$\rho_1 = \frac{F_1 - F_2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \rho_2 = \frac{F_1 \cos \alpha - F_2}{\sin^2 \alpha},$$

подставив которые в формулы (4.24), получим координаты точек встречи, а затем и координаты вершины пространственной угловой засечки

$$x = \frac{1}{2}(x'' + x'), \quad y = \frac{1}{2}(y'' + y'), \quad z = \frac{1}{2}(z'' + z').$$

### Линейная засечка

Измеренные расстояния инвариантны по отношению к координатным преобразованиям, поэтому предлагаемый ниже алгоритм будет пригоден в любой системе пространственных прямоугольных координат.

Пусть с трех исходных пунктов, заданных пространственными координатами  $x_i, y_i, z_i$ , измерены расстояния  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  до точки  $Q$  (см. рис. 4.5). По этим данным требуется определить пространственные координаты  $x, y, z$  точки  $Q$ .

Искомые и определяемые величины связаны известными соотношениями:

$$l_i = \frac{x - X_i}{\rho_i}, \quad m_i = \frac{y - Y_i}{\rho_i}, \quad n_i = \frac{z - Z_i}{\rho_i}, \quad (4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}, \\ L_{ij} &= \frac{X_j - X_i}{D_{ij}}, \quad M_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{D_{ij}}, \quad N_{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{D_{ij}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

$$\rho_i = \sqrt{(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2 + (z - Z_i)^2}, \quad (4.33)$$

$$\cos \beta_{ij} = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j, \quad (4.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_1 &= \frac{D_{12}^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2}{2D_{12} \rho_1}, \\ \cos \beta_2 &= \frac{D_{13}^2 + \rho_1^2 - \rho_3^2}{2D_{13} \rho_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

$$x = X_i + \rho_i l_i, \quad y = Y_i + \rho_i m_i, \quad z = Z_i + \rho_i n_i. \quad (4.36)$$

Смысл всех обозначений должен быть понятен из рис. 4.5.

Из выражений (4.36) видно, что в данной постановке (в принципе возможны и другие подходы) задача сводится к определению направляющих косинусов по измеренным расстояниям (в угловой записке — наоборот).

Используя формулу (4.34) и известное условие для направляющих косинусов, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} L_{12} l + M_{12} m + N_{12} n &= \cos \beta_1, \\ L_{13} l + M_{13} m + N_{13} n &= \cos \beta_2, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где  $L, M, N$  — направляющие косинусы исходных направлений (сторон  $D_{12}$  и  $D_{13}$ );  $l, m, n$  — искомые направляющие косинусы линии  $Q_1Q$ .

Запишем первые два уравнения системы (4.37) в виде

$$\begin{aligned} L_{12} l + M_{12} m &= \cos \beta_1 - N_{12} n = P_1, \\ L_{13} l + M_{13} m &= \cos \beta_2 - N_{13} n = P_2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

или

$$\begin{bmatrix} L_{12} & M_{12} \\ L_{13} & M_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Отсюда найдем

$$\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{12} & M_{12} \\ L_{13} & M_{13} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Раскрывая (4.40), получим

$$\begin{aligned} l &= q_{11} \cos \beta_1 + q_{12} \cos \beta_2 - n (q_{11} N_{12} + q_{12} N_{13}) = A - n B_1, \\ m &= q_{21} \cos \beta_1 + q_{22} \cos \beta_2 - n (q_{21} N_{12} + q_{22} N_{13}) = C - n B_2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Смысл обозначений  $A, B_1, B_2, C$  в выражениях (4.41) ясен из сравнения их средних и правых частей, а элементы  $q_{ij}$  вычисляются по правилам обращения матриц

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{M_{13}}{\Delta}, & q_{12} &= -\frac{M_{12}}{\Delta}, \\ q_{22} &= \frac{L_{12}}{\Delta}, & q_{21} &= -\frac{L_{13}}{\Delta}, \\ \Delta &= L_{12} M_{13} - L_{13} M_{12}. \end{aligned}$$

Возводя (4.41) в квадрат, складывая и учитывая третье уравнение системы (4.37), получим квадратное уравнение относительно  $n$

$$P n^2 - 2 Q n + T = 0, \quad (4.42)$$

где  $P = 1 + B_1^2 + B_2^2$ ,  $Q = A B_1 + C B_2$ ,  $T = A^2 + C^2 - 1$ .

Значение  $n$  находят по известной формуле

$$n_{1,2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - P T}}{P}. \quad (4.43)$$

Для определения знака в выражении (4.43) необходимо располагать некоторой (весьма приближенной) информацией о взаимном расположении точек  $Q_1$  и  $Q$ .

Остальные направляющие косинусы прямой  $Q_1Q$  находят по формулам (4.41). Далее по равенствам (4.36) вычисляют координаты вершины линейной засечки в пространстве. Для контроля решение можно повторить для линии  $Q_2Q$  (или  $Q_3Q$ ) по рассмотренной выше схеме.

*Пример решения линейной засечки.*

Исходные данные приведены в табл.4.4.

Таблица 4.4

Номер пункта	x,м	y,м	z,м	$\rho_{иш}$
1	2 193 482,18	1 069 832,74	7 470 270,72	1 631 067
2	1 745 583,90	777 184,02	7 622 157,12	1 617 367
3	1 291 891,53	776 246,74	7 711 636,23	1 637 234

1. Вычисление длин исходных сторон  $D_{ij}$  и направляющих косинусов  $L, M, N$  по формулам (4.32).

2. Вычисление углов  $\beta_1, \beta_2$

$$\cos \beta_1 = \frac{D_{12}^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2}{2 D_{12} \rho_1} = 0,19502208,$$

$$\cos \beta_2 = \frac{D_{13}^2 + \rho_1^2 - \rho_3^2}{2 D_{13} \rho_1} = 0,29361913.$$

3. Вычисление коэффициентов  $q_{ij}$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{12} & M_{12} \\ L_{13} & M_{13} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\Delta = L_{12} M_{13} - L_{13} M_{12},$$

$$q_{11} = \frac{M_{13}}{\Delta} = 1,2336975, \quad q_{12} = -\frac{M_{12}}{\Delta} = -2,1631779,$$

$$q_{21} = -\frac{L_{13}}{\Delta} = -3,7886364, \quad q_{22} = \frac{L_{12}}{\Delta} = 3,31110134.$$

4. Вычисление коэффициентов  $A, B_1, B_2, C$

$$A = q_{11} \cos \beta_1 + q_{12} \cos \beta_2 = -0,39462258,$$

$$B_1 = q_{11} N_{12} + q_{12} N_{13} = -0,19677377,$$

$$B_2 = q_{21} N_{12} + q_{22} N_{13} = -0,21784260,$$

$$C = q_{21} \cos \beta_1 + q_{22} \cos \beta_2 = 0,23333493.$$

5. Вычисление коэффициентов квадратного уравнения

$$P = 1 + B_1^2 + B_2^2 = 1,0861753, \quad Q = A B_1 + C B_2 = 0,02682108, \\ T = A^2 + C^2 - 1 = -0,78982783.$$

6. Определение корней квадратного уравнения, анализ и выбор соответствующего значения  $n$  :

$$n_{1,2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - P T}}{P}, \\ n = -0,82840356.$$

7. Вычисление остальных направляющих косинусов

$$l = A - n B_1 = -0,55763067, \quad m = C - n B_2 = 0,05287334.$$

$$\text{Контроль: } l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

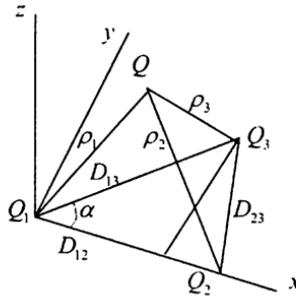
8. Вычисление приращений координат по линии  $Q_1Q$

$$\Delta x = l \rho_1 = -909532,87, \quad \Delta y = m \rho_1 = 86239,97, \quad \Delta z = n \rho_1 = -1351181,71.$$

9. Вычисление координат точки  $Q$

$$x_1 + \Delta x = 1283949,31, \quad y_1 + \Delta y = 1156072,71, \quad z_1 + \Delta z = 6119089,01.$$

### *Линейная засечка в местной системе координат*



*Рис. 4.9. Пространственная линейная засечка в местной системе координат*

Пусть в пространственной фигуре, изображенной на рис. 4.9, измерены шесть расстояний. Взаимное положение пунктов, образующих фигуру, можно определить следующим образом. Примем пункты  $Q_1Q_2Q_3$  за исходные, расстояния между ними обозначим  $D_{ij}$ . Введем далее местную систему координат: ее начало поместим в точку  $Q_1$ , ось  $x$  направим по линии  $Q_1Q_2$ , ось  $z$  — перпендикулярно к плоскости треугольника  $Q_1Q_2Q_3$ , ось  $y$  дополнит систему до правой. Координаты исходных пунктов в этой системе будут иметь следующие значения:

$$Q_1(0,0,0), \quad Q_2(D_{12},0,0), \quad Q_3(D_{13} \cos \alpha, D_{13} \sin \alpha, 0),$$

где  $\cos \alpha = \frac{D_{12}^2 + D_{13}^2 - D_{23}^2}{2 D_{12} D_{13}}$ . (4.44)

Тогда для направляющих косинусов линий  $Q_1Q_2$  и  $Q_1Q_3$  получим

$$L_{12} = 1, \quad M_{12} = 0, \quad N_{12} = 0,$$

$$L_{13} = \cos \alpha, \quad M_{13} = \sin \alpha, \quad N_{13} = 0.$$

С учетом этих значений система (4.37) примет вид

$$l = \cos \beta_1,$$

$$\cos \alpha l + \sin \alpha m = \cos \beta_2,$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{4.45}$$

Отсюда получим выражения для направляющих косинусов линии

$$l = \cos \beta_2,$$

$$m = \frac{\cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{4.46}$$

$$n = \sqrt{1 - (l^2 + m^2)}$$

и координат точки

$$x = l \rho_1, \quad y = m \rho_1, \quad z = n \rho_1 \tag{4.47}$$

### *Засечка псевдодальностей*

Если измеренное расстояние содержит систематическую ошибку (например, в спутниковых наблюдениях она возникает при рассогласовании временных шкал на спутниках и наземных пунктах), то уравнение связи измеренной величины с координатами примет вид

$$\rho_i + \delta_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}.$$

Обычно полагают, что в одном сеансе наблюдений значение  $\delta$  остается постоянным. Тогда для определения координат объекта потребуется измерить четыре псевдодальности (иногда их называют квазидальности) с четырех исходных пунктов. Для этого случая получим четыре уравнения следующего вида

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} - \delta = \rho_i, \tag{4.48}$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Можно предложить следующее решение засечки псевдодальностей. Для этого найдем предварительные координаты определяемой точки по любым трем дальностям, положив в первом приближении  $\delta = 0$  (желательно, конечно, использовать такие дальности, которые обеспечивают наилучшую геометрию засечки). Имея предваритель-

ные координаты, составим уравнение поправок для измеренной псевдодальности, для чего приведем (4.48) к линейному виду \*

$$-\delta + l_{ki} dx + m_{ki} dy + n_{ki} dz + l_{\rho} = V_{\rho} . \quad (4.49)$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} -1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ -1 & l_2 & m_2 & n_2 \\ -1 & l_3 & m_3 & n_3 \\ -1 & l_4 & m_4 & n_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{\rho_1} \\ l_{\rho_2} \\ l_{\rho_3} \\ l_{\rho_4} \end{bmatrix} = 0 , \quad (4.50)$$

из решения которой находят поправки к предварительным координатам, а затем и сами координаты.

### *Засечка с измеренными зенитными расстояниями и наклонными дальностями*

Пусть в пространственном треугольнике  $Q_1Q_2Q$  (см. рис.4.4) измерены зенитные расстояния  $z_1, z_2$  и наклонные дальности  $\rho_1, \rho_2$ .  $Q_1$  и  $Q_2$  — исходные пункты,  $Q$  — определяемый пункт.

Для измеренных величин на пункте  $Q_1$  можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} L_{12} l_1 + M_{12} m_1 + N_{12} n_1 &= \cos \beta_1, \\ l_{z_1} l_1 + m_{z_1} m_1 + n_{z_1} n_1 &= \cos z_1, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Для пункта  $Q_2$  система запишется в виде

$$\begin{aligned} -L_{12} l_2 - M_{12} m_2 - N_{12} n_2 &= \cos \beta_2, \\ l_{z_2} l_2 + m_{z_2} m_2 + n_{z_2} n_2 &= \cos z_2, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.52)$$

В выражениях (4.51) и (4.52)

$$L_{12} = \frac{x_2 - x_1}{D}, \quad M_{12} = \frac{y_2 - y_1}{D}, \quad N_{12} = \frac{z_2 - z_1}{D},$$

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$l_{z_i} = \cos B_i \cos L_i$ ,  $m_{z_i} = \cos B_i \sin L_i$ ,  $n_{z_i} = \sin B_i$  — направляющие косинусы в пунктах  $Q_1$  и  $Q_2$ .

$$\cos \beta_1 = \frac{D^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2}{D \rho_1}, \quad \cos \beta_2 = \frac{D^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2}{D \rho_2} .$$

---

\* См.: Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. *Геодезия*. — М.: Картогеоцентр — Геодезиздат, 1994.

Алгоритм решения (4.51) и (4.52) целиком повторяет алгоритм для решения системы (4.37).

Координаты определяемой точки  $Q$  вычисляют дважды

$$\begin{aligned}x' &= x_1 + \rho_1 l_1, & x'' &= x_2 + \rho_2 l_2, \\y' &= y_1 + \rho_1 m_1, & y'' &= y_2 + \rho_2 m_2, \\z' &= z_1 + \rho_1 n_1, & z'' &= z_2 + \rho_2 n_2.\end{aligned}$$

Окончательное значение координат определяют как среднее.

Поскольку в фигуре, изображенной на *рис. 4.4*, одно измерение является избыточным, то второе определение координат пункта  $Q$  имеет смысл не только вычислительного контроля, но и повышает точность его местоопределения.

Выскажем теперь несколько заключительных замечаний по способам решения геодезических засечек в пространстве. Общий подход состоит в следующем.

1. Тем или иным способом находят предварительные координаты определяемого пункта (в том числе и методами, описанными выше).

2. Измеренные величины  $T_i$  представляют в функции координат и приводят последние к линейному виду, тем самым получая уравнения поправок вида

$$a_i dx + b_i dy + c_i dz + l_{T_i} = v_{T_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.53)$$

где  $a, b, c$  — коэффициенты,  $[dx, dy, dz]^T = X$  — вектор поправок к предварительным координатам,  $l_T = T^0 - T_{uzm}$  — свободный член,  $T^0$  — предварительное значение измеренной величины.

Например, для измеренного расстояния уравнение поправок запишется

$$l_i dx + m_i dy + n_i dz + (\rho_i^o - \rho_i^{uzm}) = v_{\rho_i}.$$

Решение системы (4.53) ведется по общим правилам МНК независимо от числа измерений (даже если выполнены только необходимые измерения). Это предложение придает определенную универсальность предлагаемому подходу к решению засечек. В этом случае исходная система уравнений поправок (4.53)

$$A X + L = V, P$$

всегда заменяется нормальной системой

$$A^T P A X + A^T P L = 0.$$

Далее находят вектор поправок

$$X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = -(A^T P A)^{-1} A^T P L$$

и уравненные координаты

$$x = x_0 + dx, \quad y = y_0 + dy, \quad z = z_0 + dz.$$

## ПЛОСКИЕ КООРДИНАТЫ

### 5.1. Значение плоских координат

Система геодезических координат  $B, L$  имеет ряд достоинств:

- 1) она является наиболее подходящей для решения глобальных задач геодезии, поскольку эта система является единой для всей Земли;
- 2) в ней ведется обработка обширных сетей, навигационных измерений;
- 3) в ней решаются прямые и обратные геодезические задачи на большие расстояния.

Однако при решении целого ряда практических задач геодезии она неудобна, а при создании топографических карт просто неприемлема. Действительно, взаимное положение пунктов в этой системе определяется в угловых единицах, значение которых в линейной мере различно в зависимости от широты. Направления меридианов, от которых отсчитываются азимуты, непараллельны между собой. Вычисления — громоздки. Для сравнения приведем, например, формулы для решения прямой и обратной геодезических задач на плоскости. В прямой задаче будут заданы плоские координаты  $x_1, y_1$  первой точки, прямолинейное расстояние  $d$  и позиционный угол  $\alpha_{21}$  между осью  $x$  и данным направлением (так называемый *дирекционный угол*). Координаты второй точки и угол  $\alpha_{21}$  найдутся по очевидным формулам

$$x_2 = x_1 + d \cos \alpha_{12}, \quad y_2 = y_1 + d \sin \alpha_{12}, \quad \alpha_{21} = \alpha_{12} \pm 180^\circ.$$

В обратной задаче по заданным координатам двух точек находят  $d$  и  $\alpha$ :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ясно, что эти формулы несравненно проще тех, которые применяются при решении аналогичных задач на поверхности эллипсоида. Поэтому при решении многих задач геодезии поверхность эллипсоида заменяют плоскостью и вместо геодезических координат используют плоские координаты.

С этой целью поверхность эллипсоида изображают на плоскости по определенному закону, называемому проекцией, который в общем случае описывается выражениями

$$x = f_1(B, L), \quad y = f_2(B, L). \quad (5.1)$$

Формулы (5.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками на поверхности эллипсоида и их изображениями на плоскости.

Таких проекций может быть бесконечное множество. Любая из них определяется конкретным видом функций (5.1). В связи с этим кратко рассмотрим общие требования, которым должны удовлетворять проекции, используемые в геодезии. Прежде всего, выбранная проекция должна обеспечить единой системой координат территорию всей страны, создавая тем самым условия для единообразной обработки всех топографо-геодезических работ. Далее желательно, чтобы линейные и угловые величины на поверхности эллипсоида возможно меньше отличались от соответствующих величин на плоскости, т.е. величина линейных и угловых искажений должна быть сравнительно небольшой. Строго говоря, при использовании любой проекции можно вычислить все возникающие искажения. Однако при значительных размерах территорий был бы потерян практический смысл перехода на плоскость, так как вычисление больших искажений во многих случаях представляет не менее сложную проблему, чем решение геодезических задач непосредственно на эллипсоиде.

Изложенные требования в известной мере противоречивы. Поскольку поверхность эллипсоида относится к неразворачивающимся на плоскости, то системы плоских координат с единым началом, позволяющей отобразить точки всей поверхности эллипсоида на плоскости, практически быть не может. Отсюда вытекает неизбежность разделения земной поверхности на части или зоны, которые изображаются одна независимо от другой, каждая со своим началом координат. Ясно, что чем больше размер зоны, тем больше величины искажений, поэтому размер зоны будет определяться требованиями к допустимой величине искажений.

На основе этих общих соображений профессор Ф.Н. Красовский разработал конкретный подход к выбору так называемых *геодезических проекций*, сущность которого заключается в следующем.

1. Система опорных пунктов переносится с поверхности эллипсоида на плоскость строго по определенному закону.

2. Материалы топографических съемок должны укладываться в опорную сеть вовсе без редукиций либо с помощью простейших формул.

3. Проекция должна быть конформной, поскольку при построении геодезических сетей основная роль принадлежит угловым измерениям.

В связи с этим напомним главное свойство конформных проекций: *бесконечно малый контур на поверхности эллипсоида изображается подобным ему бесконечно малым контуром на плоскости.*

Отсюда вытекают два важных следствия.

1. Угловые величины в конформных проекциях изображаются без искажений.

2. Искажения линейных величин не зависят от азимута. Иными словами, масштаб изображения является функцией только координат данной точки и не зависит от направления.

Это свойство конформных проекций позволяет гораздо проще, чем в других проекциях, учитывать линейные искажения при выполнении геодезических и топографических работ.

Из общего числа конформных проекций мы будем изучать только симметричные проекции, т.е. такие, в которых имеется центральная (осевая) линия, делящая весь изображаемый участок на две симметричные части. Главное внимание будет уделено проекции Гаусса, как наиболее широко применяющейся в практике геодезических и топографических работ раньше в СССР, теперь в РФ и большинстве других стран.

### 5.2. Дифференциальные уравнения симметричных конформных проекций

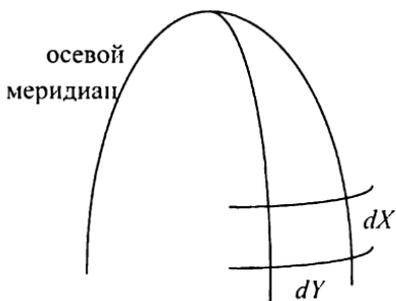


Рис.5.1. Элементарная трапеция на поверхности эллипсоида

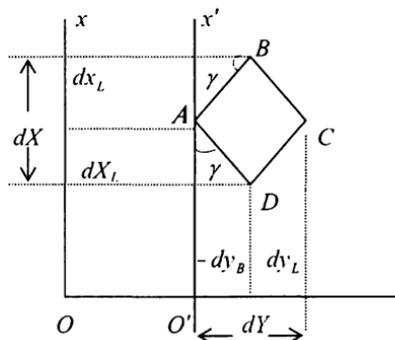


Рис.5.2. Элементарная трапеция на плоскости

Изобразим элементарную трапецию эллипсоида (рис.5.1) со сторонами  $dX = M dB$ ,  $dY = rdL$  на плоскости, на которой получим фигуру  $ABCD$ . На рис. 5.2 линия  $Ox$  — изображение осевого меридиана,  $O'x'$  параллельна  $Ox$ . Угол  $\gamma$  представляет собой один и тот же угол поворота конформного изображения как меридиана, так и параллели относительно координатных линий на плоскости. Этот угол носит название *сближение меридианов*.

Спроецируем стороны трапеции на оси координат. Из рис. 5.2 получим

$$\begin{aligned} dx &= dx_B + dx_L, \\ dy &= -dy_B + dy_L. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Перед частным дифференциалом  $dy_B$  знак «минус» поставлен потому, что при увеличении широты точки  $A$  ее ордината уменьшается.

С другой стороны, полные дифференциалы можно записать в виде

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Поскольку по условиям конформности масштаб не зависит от направления, то для сторон будем иметь следующие равенства:

$$A D = B C = m M dB, \quad A B = D C = m r dL. \quad (5.4)$$

Теперь, с учетом формул (5.2), (5.3) и (5.4), из рис. 5.2 легко найти

$$\begin{aligned} dx_B &= \frac{\partial x}{\partial B} dB = m M dB \cos \gamma, \\ dx_L &= \frac{\partial x}{\partial L} dL = m r dL \sin \gamma, \\ -dy_B &= \frac{\partial y}{\partial B} dB = -m M dB \sin \gamma, \\ dy_L &= \frac{\partial y}{\partial L} dL = m r dL \cos \gamma. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отсюда получим дифференциальные уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial L} = m \cos \gamma, \\ -\frac{1}{M} \frac{\partial y}{\partial B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial L} = m \sin \gamma \end{aligned} \quad (5.6)$$

или в другом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{M}{r} \frac{\partial y}{\partial L}, \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -\frac{M}{r} \frac{\partial x}{\partial L}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

При взаимно однозначном точечном соответствии между поверхностями эллипсоида и плоскостью должны существовать функции

$$B = F_1(x, y), \quad L = F_2(x, y), \quad (5.8)$$

которые позволяют осуществлять переход от плоских координат к геодезическим. Эти функции должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям, которые легко получить из (5.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{r}{M} \frac{\partial L}{\partial y}, \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= -\frac{r}{M} \frac{\partial L}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

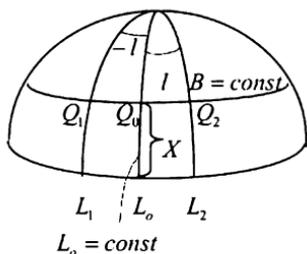
Дифференциальные уравнения (5.6), (5.7) и (5.9) описывают весь класс симметричных конформных проекций.

Для того чтобы получить какую-то конкретную проекцию, необходимо сформулировать характеризующие ее условия, в соответствии с которыми искать решение дифференциальных уравнений (5.7).

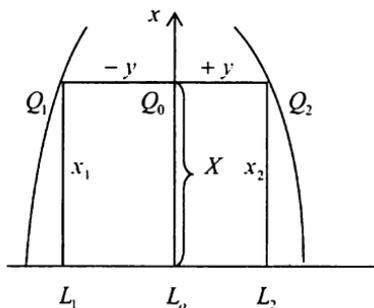
### 5.3. Проекция Гаусса

В СССР с 1930 г., а ныне в РФ и странах СНГ, применяется конформная проекция Гаусса, разработанная им в 1830 г. для обработки ганноверской съемки. Вычислительную сторону дела развил Крюгер в 1912 г. Поэтому часто данную проекцию называют проекцией Гаусса – Крюгера.

При использовании проекции Гаусса земной эллипсоид разделяется на зоны меридианами. Каждая зона представляет собой сфероидический двугольник, ограниченный меридианами с постоянной разностью долгот (*рис.5.3*).



*Рис 5.3. Координатная зона на эллипсоиде (северное полушарие)*



*Рис 5.4. Координатная зона на плоскости*

При стандартном расположении зон эта разность составляет  $6^\circ$ . Средний меридиан в каждой зоне называется осевым, его изображение принимается за ось абсцисс, изображение экватора — за ось ординат (*рис.5.4*). Эти кривые изображаются прямыми, их пересечение определяет начало плоских координат данной зоны.

Такая проекция является симметричной относительно оси абсцисс. Это означает, что две точки  $Q_1$  и  $Q_2$  на эллипсоиде (*см. рис.5.3*) с одинаковой широтой и с одинаковой по абсолютной величине разностью долгот  $l = |L - L_0|$  после их изображения на плоскости будут иметь одинаковую абсциссу  $x$  и одинаковую по абсолютной величине ординату  $y$  (*см. рис. 5.4*). Заметим, что на практике, чтобы не иметь дело с отрицательными ординатами, к ним прибавляют 500 000 м, а перед ординатой указывают номер зоны.

## Вычисление плоских координат по геодезическим

Перейдем теперь к выводу формул, позволяющих по заданным геодезическим координатам точки на эллипсоиде  $B, L (l = L - L_0)$  найти плоские координаты  $x, y$  ее изображения на плоскости.

Уравнения всех симметричных проекций при малой величине разности долгот можно представить в виде следующих степенных рядов

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_2 l^2 + a_4 l^4 + \dots \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Характерным признаком уравнений симметричных проекций является то, что уравнение абсциссы состоит из членов в четной степени разности долгот, а уравнение ординаты — из членов только нечетной степени этой разности.

Уравнения (5.10) охватывают целый ряд проекций, в том числе и проекцию Гаусса. Все эти проекции весьма похожи друг на друга по виду изображения меридианов и параллелей. Они различаются лишь значениями коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  в уравнениях (5.10).

Для определения коэффициентов в уравнениях проекции Гаусса используется следующее дополнительное условие: масштаб изображения осевого меридиана для всех его точек принимается равным единице, т.е. осевой меридиан изображается без искажений.

Запишем с учетом этого условия уравнения (5.10) для осевого меридиана ( $l = 0$ ).

$$x = a_0 = X, \quad y = 0.$$

Отсюда получаем выражение для коэффициента

$$a_0 = X = \int_0^B M dB. \quad (5.11)$$

Для определения остальных коэффициентов используем то обстоятельство, что проекция Гаусса относится к симметричным конформным проекциям и, следовательно, должна удовлетворять дифференциальным уравнениям (5.7)

Подставляя (5.10) в уравнения (5.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{\partial (X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + \dots)}{\partial B} = \frac{M}{r} \frac{\partial (b_1 l + b_3 l^3 + \dots)}{\partial l}, \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= \frac{\partial (b_1 l + b_3 l^3 + \dots)}{\partial B} = -\frac{M}{r} \frac{\partial (X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + \dots)}{\partial l} \end{aligned} \quad (5.12)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dB} + \frac{da_2}{dB} l^2 + \frac{da_4}{dB} l^4 + \dots &= \frac{M}{r} (b_1 + 3b_3 l^2 + \dots), \\ \frac{db_1}{dB} l + \frac{db_3}{dB} l^3 + \dots &= -\frac{M}{r} (2a_2 l + 4a_4 l^3 + \dots). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Сравнивая в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях  $l$ , находим

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{r}{M} \frac{dX}{dB}, & a_2 &= -\frac{r}{M} \frac{db_1}{dB}, \\ b_3 &= \frac{r}{3M} \frac{da_2}{dB}, & a_3 &= -\frac{r}{4M} \frac{db_3}{dB} \end{aligned} \quad (5.14)$$

и т.д. Покажем, например, как получаются первые два коэффициента. Сравнивая члены при  $l$  в нулевой степени, получаем

$$\frac{dX}{dB} = \frac{M}{r} b_1, \quad b_1 = \frac{r}{M} \frac{dX}{dB},$$

но  $\frac{dX}{dB} = M$ , тогда  $b_1 = r = N \cos B$ .

Сравнение коэффициентов при  $l$  в первой степени дает

$$\frac{db_1}{dB} = -\frac{2M}{r} a_2, \quad a_2 = -\frac{r}{2M} \frac{db_1}{dB}.$$

Учитывая, что  $\frac{db_1}{dB} = \frac{dr}{dB} = -M \sin B$  (эта производная уже встречалась: см. формулу (1.92)), получим  $a_2 = \frac{1}{2} N \cos B \sin B$ .

Таким образом, техника определения коэффициентов вполне проясняется: для получения каждого следующего коэффициента необходимо найти производную предыдущего коэффициента по широте.

Приведем коэффициенты рядов (5.10) для вычисления плоских координат Гаусса в окончательном виде

$$\begin{aligned} a_0 &= X = \int_0^B M dB, \\ a_2 &= \frac{1}{2} N \sin B \cos B, \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4), \\ a_6 &= \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 B), \\ b_1 &= N \cos B, \\ b_3 &= \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2), \\ b_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ряды (5.10) с коэффициентами (5.15) обеспечивают точность 0,001 м в координатах  $x$  и  $y$ , если разность долгот  $l$  не превышает  $4^\circ$ , что обычно достаточно в большинстве случаев практики.

Если численные значения коэффициентов вычислить по эле-

ментам эллипсоида Красовского, то можно получить формулы более удобные для счета на ЭВМ\*

$$x = 6\,367\,558,4969 \frac{B^n}{\rho^n} - \{a_0 - [0,5 + (a_4 + a_6 l^2) l^2] l^2 N\} \sin B \cos B, \\ y = [1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2] l N \cos B. \quad (5.16)$$

В формулах (5.16) приняты следующие обозначения:  $l = \frac{(L - L_0)^n}{\rho^n}$  — разность долгот данной точки и осевого меридиана зоны (в радианной мере),

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad \text{контроль } N = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}},$$

$$a_0 = 32\,140,404 - [135,3302 - (0,7092 - 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B,$$

$$a_4 = (0,25 + 0,00252 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,04166,$$

$$a_6 = (0,166 \cos^2 B - 0,084) \cos^2 B,$$

$$a_3 = (0,333\,3333 + 0,001\,123 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,166\,6667,$$

$$a_5 = 0,0083 - [0,1667 - (0,1968 + 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B.$$

При пониженных требованиях к точности формулы (5.16) можно значительно упростить:

$$x = [(a_4 l^2 + 0,5) l^2 N - a_0] \sin B \cos B + 6\,367\,558,5B,$$

$$y_{\text{вер}} = [(a_5 l^2 + a_3) l^2 + 1] l N \cos B + (10n + 5) 10^5,$$

где

$$a_0 = (0,7 \cos^2 B - 135,3) \cos^2 B + 32\,140,4,$$

$$a_3 = (0,0011 \cos^2 B + 0,3333) \cos^2 B - 0,1667,$$

$$a_4 = 0,25 \cos^2 B - 0,042,$$

$$a_5 = (0,2 \cos^2 B - 0,17) \cos^2 B.$$

Координаты  $B, l$  — заданы в радианной мере, плоские координаты получаются в метрах, погрешность их определения не превышает 0,1 м.

### *Вычисление геодезических координат по плоским координатам*

Займемся теперь выводом формул для обратного перехода от плоских координат к геодезическим. Для этого функции (5.8) представим в виде рядов по степеням ординаты, полагая ее малой величиной.

Для симметричных проекций эти ряды будут иметь вид

---

\* Об этом подробнее см.: *Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы)*. — М.: Недра, 1982.

$$\begin{aligned}
 B &= A_0 + A_2 y^2 + A_4 y^4 + \dots, \\
 l &= P_1 y + P_3 y^3 + P_5 y^5 + \dots.
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Все коэффициенты в этих рядах представляют собой функции только абсциссы  $x$ .

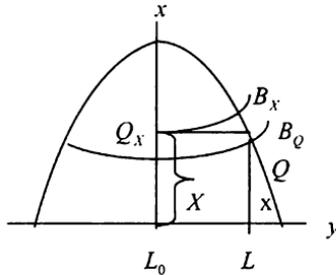


Рис. 5.5. Вычисление геодезических координат по плоским

Для точки, расположенной на осевом меридиане (рис. 5.5), получим

$$B_x = A_0, l = 0,$$

где  $B_x$  — широта точки  $Q_x$ , являющейся проекцией точки  $Q$  на осевой меридиан, ее плоские координаты  $x$  и  $y$  будут равны нулю. Для вычисления  $B_x$  используем условие Гаусса относительно осевого меридиана  $X = x$ . Тогда из формулы  $dX = MdB$ , используя это условие, получим

$$B_x = \int_0^x \frac{dX}{M} = \int_0^x \frac{dx}{M}. \tag{5.18}$$

Следовательно, широту  $B_x$  можно найти как функцию длины дуги меридиана  $x$  по известным нам формулам (1.66), (1.67), положив в них  $X = x$ , а все коэффициенты рядов (5.17) можно представить в виде функций широты  $B_x$ , что облегчает последующие выводы.

Перейдем к определению коэффициентов в рядах (5.17) для проекции Гаусса. По условиям конформности они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (5.9).

Подставляя ряды (5.17) в (5.9) и дифференцируя их почленно, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dB}{dX} + \frac{dA_2}{dX} y^2 + \frac{dA_4}{dX} y^4 + \dots &= \frac{r}{M} (P_1 + 3P_3 y^2 + \dots), \\
 2A_2 y + 4A_4 y^3 + \dots &= -\frac{r}{M} \left( \frac{dP_1}{dx} y + \frac{dP_3}{dx} y^3 + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

Сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , найдем

$$P_1 = \frac{M}{r} \frac{dB}{dx}, \quad A_2 = -\frac{r}{2M} \frac{dP_1}{dx},$$

$$P_3 = \frac{M}{3r} \frac{dA_2}{dX}, \quad A_4 = -\frac{r}{4M} \frac{dP_3}{dX}$$

и т.д. Покажем для примера, как получаются первые два коэффициента ( $P_1$  и  $A_2$ ). Сравнивая члены при  $u$  в нулевой степени, получим

$$\frac{dB}{dX} = \frac{r}{M} P_1, \quad P_1 = \frac{M}{r} \frac{dB}{dX},$$

но  $\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M}$ , тогда  $P_1 = \frac{1}{r} = \frac{1}{N_x \cos B_x}$ .

Сравнение коэффициентов при  $u$  в первой степени дает:

$$2A_2 = -\frac{r}{M} \frac{dP_1}{dX}, \quad A_2 = -\frac{r}{2M} \frac{dP_1}{dX},$$

$$\frac{dP_1}{dX} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dX} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dX}.$$

Учитывая, что  $dr = -M \sin B dB$ ,  $dX = M dB$ ,  $r = N \cos B$ ,  $M = \frac{N}{V^2}$ , получим

$$A_2 = -\frac{\operatorname{tg} B_x}{2N_x^2} V_x^2.$$

Из полученных формул видно, что правила определения коэффициентов в рядах (5.17) остаются такими же как и для рядов (5.10).

Приведем эти коэффициенты в окончательном виде:

$$B_x = \int_0^x \frac{dx}{M},$$

$$A_2 = -\frac{V_x^2 \operatorname{tg} B_x}{2N_x^2},$$

$$A_4 = -\frac{A_2}{12N_2} (5 + 3\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x - 4\eta_x^4), \quad (5.20)$$

$$A_6 = \frac{A_2}{360N_x^4} (61 + 90\operatorname{tg}^2 B_x + 45\operatorname{tg}^4 B_x + 46\eta_x^2 - 252\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x - 90\eta_x^2 \operatorname{tg}^4 B_x),$$

$$P_1 = \frac{1}{N_x \cos B_x},$$

$$P_3 = -\frac{P_1}{6N_x^2} (1 + 2\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2),$$

$$P_5 = \frac{P_1}{120N_x^4} (5 + 28\operatorname{tg}^2 B_x + 24\operatorname{tg}^4 B_x + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x).$$

Координаты  $B$  и  $l$  в формулах (5.17) получаются в радианах. Точность вычислений по ним соответствует точности выражений (5.15).

Для вычислений на ЭВМ формулы (5.17) и (5.20) (с коэффициентами, вычисленными по элементам эллипсоида Красовского) можно преобразовать в следующие:

$$\begin{aligned} B &= B_x - \left[ 1 - (b_4 - 0,125z^2) z^2 \right] z^2 b_2^x, \\ l &= \left[ 1 - (b_3 - b_3 z^2) z^2 \right] z, \\ L &= L_0 + l, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где

$$B_x = \beta + \{50\,221\,746 + [293\,622 + (2\,350 + 22 \cos^2 \beta) \cos^2 \beta] \cos^2 \beta\} 10^{-10} \sin \beta \cos \beta,$$

$$\beta = \frac{x}{6\,367\,558,4969},$$

$$z = \frac{y}{N_x \cos B_x},$$

$$N_x = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_x}}, \quad \text{контроль: } N_x = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_x}},$$

$$b_2 = (0,5 + 0,003369 \cos^2 B_x) \sin B_x \cos B_x,$$

$$b_3 = 0,333\,333 - (0,166\,667 - 0,001\,123 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x,$$

$$b_4 = 0,25 + (0,161\,61 + 0,00562 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x,$$

$$b_5 = 0,2 - (0,1667 - 0,0088 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x.$$

Величины  $B$  и  $l$  получаются в радианах. Точность этих формул соответствует точности выражений (5.16), т.е. геодезические координаты вычисляются до 0,0001". При пониженных требованиях к точности (не более 0,003") можно использовать следующий алгоритм

$$y_{\text{цел}} 10^{-6} = n + \alpha, \quad L_0 = \frac{n - 0,5}{9,5492966},$$

$$\beta = \frac{x}{6\,367\,558,5},$$

$$B_x = [502\,217 + (2936 + 24 \cos^2 \beta) \cos^2 \beta] \sin \beta \cos \beta 10^{-8} + \beta,$$

$$z = \frac{(\alpha - 0,5) \sqrt{1 + 0,00673853 \cos^2 B_x}}{6,3996989 \cos B_x},$$

$$b_2 = (0,00337 \cos^2 B_x + 0,5) \sin B_x \cos B_x,$$

$$b_4 = 0,162 \cos^2 B_x + 0,25,$$

$$b_3 = (0,0011 \cos^2 B_x - 0,1667) \cos^2 B_x + 0,3333,$$

$$b_5 = 0,17 \cos^2 B_x - 0,2,$$

$$B = (b_4 z^2 - 1) b_2 z^2 + B_x,$$

$$L = [1 - (b_5 z^2 + b_3) z^2] z + L_0.$$

Координаты  $B$  и  $l$  получаются в радианах.

Пример вычисления плоских прямоугольных координат по геодезическим (табл. 5.1).

Исходные данные:  $B = 51^{\circ}38'43,9023''$ ;  $L = 24^{\circ}02'13,1360''$ ;  $L_0 = 21^{\circ}$ .

Таблица 5.1

$B_{\text{рад}}$	0,901384542	$a_3$	-0,03814988
$\sin B$	0,7841868	$a_5$	-0,02648123
$\cos B$	0,6205248	$\sin B \cos B$	0,4866075
$\cos^2 B$	0,3850510	$l^2$	0,002809566
$l_{\text{рад}}$	0,053005341	$N l_2$	17957,096
$N$	6 391 412,451	$6367558,497 B$	5739618,7994
$a_0$	32 088,400	$x$	5728374,726
$a_4$	0,05497637	$1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2 \cos B$	0,03288760
$a_6$	-0,00773241	$y$	210198,193

Пример вычисления геодезических координат по плоским прямоугольным (табл. 5.2).

Исходные данные:  $x = 5728374,726$ ;  $y_{\text{цел}} = 4710198,193$ ;

$y_{\text{нат}} = 210198,193$ ;  $L_0 = 21^{\circ}$ .

Таблица 5.2

$\beta_{\text{рад}}$	0,899618704	$b_4$	0,31295066
$\beta^{\circ}$	$51^{\circ}32'39,6722''$	$b_5$	0,13722340
$\sin \beta$	0,7830898	$N_x \cos B_x$	30962602,1527
$\cos \beta$	0,6219086	$z$	0,05304550
$\cos^2 \beta$	0,3867703	$z^2$	0,00281382
$B_{x+\text{рад}}$	0,902070103	$[1 - (b_4 - 0,12z^2)] \cdot z^2 \cdot b_2$	0,00068556
$\sin B_x$	0,7846121	$B_{\text{рад}}$	0,901384542
$\cos B_x$	0,6199871	$B^{\circ}$	$51^{\circ}38'43,9024''$
$\cos^2 B_x$	0,3843840	$l_{\text{рад}}$	0,053005342
$N_x$	6391426,7776	$l^{\circ}$	$3^{\circ}02'13,1362''$
$b_2$	0,24385467	$L^{\circ} = L_0 + l^{\circ}$	$24^{\circ}02'13,1362''$
$b_3$	0,26943480		

#### 5.4. Перенос геодезической линии с поверхности эллипсоида на плоскость проекции Гаусса

Пусть на эллипсоиде задана геодезическая линия между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  своей длиной  $S$  и азимутом  $A$  (рис. 5.6).

На плоскости геодезическая линия и меридиан точки  $Q_1$  изображаются кривыми линиями (рис. 5.7). На практике это приводит к существенным неудобствам, поэтому кривую  $\sigma$  на плоскости заменяют прямолинейным отрезком — ее хордой  $d$ , направление которой зада-

ют позиционным углом  $\alpha$ . Этот угол отсчитывается от линии, параллельной осевому меридиану до заданного хордой направления на плоскости и называется *дирекционным углом*.

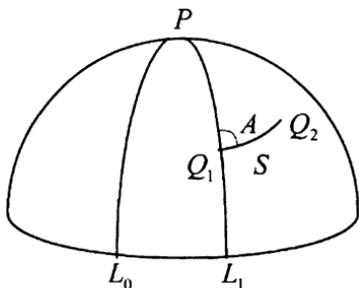


Рис. 5.6. Геодезическая линия на эллипсоиде

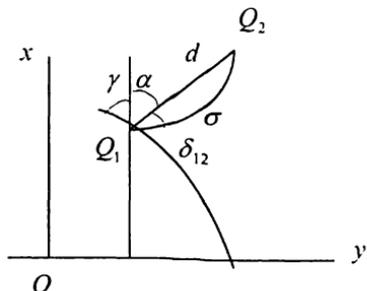


Рис. 5.7. Изображение геодезической линии на плоскости

Таким образом, перенести геодезическую линию на плоскость проекции Гаусса это значит: во-первых, от длины геодезической линии  $S$  перейти к хорде ее изображения  $d$ , во-вторых, от геодезического азимута  $A$  перейти к дирекционному углу  $\alpha$ .

Наметим подходы к решению этой задачи. Вначале займемся изображением длин. Используем для этого общее выражение для масштаба при изображении элементарных отрезков линий в любой проекции

$$m = \frac{dd}{dS},$$

где  $dS$  — элементарный изображаемый отрезок (в данном случае это дифференциал геодезической линии),  $dd$  — элементарный изображенный отрезок (дифференциал хорды). Отсюда длина хорды найдется из выражения

$$d = \int_{Q_1}^{Q_2} m dS. \quad (5.22)$$

Перейдем теперь к угловым величинам, которые в конформных проекциях изображаются без искажений, поэтому из рис. 5.7 будем иметь (с учетом знаков)

$$A = \gamma_1 + \alpha - \delta_{12}.$$

Отсюда

$$\alpha = A - \gamma_1 + \delta_{12}, \quad (5.23)$$

где  $\gamma_1$  — сближение меридианов в точке  $Q_1$ ;  $\delta_{12}$  — угол между кривой  $\sigma$  и стягивающей ее хордой  $d$ . Этот угол называется *поправкой за кривизну изображения геодезической линии*.

Условимся о знаках угловых величин, входящих в (5.23). Для угла  $\gamma$  направление считается положительным, если двигаться по часо-

вой стрелке от меридиана данной точки до линии  $x$ . Для угла  $\alpha$  — при движении по часовой стрелке от линии  $x$  до хорды  $d$ . Для угла  $\delta$  — при движении по часовой стрелке от кривой  $\sigma$  к хорде  $d$ .

Таким образом, для решения задачи переноса геодезической линии с поверхности эллипсоида на плоскость нужно знать три величины —  $m$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ . Вывод формул для их вычисления рассматривается ниже.

### 5.5. Масштаб проекции Гаусса

Масштаб изображения является важнейшей характеристикой любой проекции. Зная формулу масштаба, можно установить величины и распределение линейных искажений в пределах изображаемой области.

При выводе формулы масштаба в качестве исходных используем дифференциальные уравнения (5.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{dy}{dl} &= m \cos \gamma, \\ \frac{1}{r} \frac{dx}{dl} &= m \sin \gamma \end{aligned} \quad (5.24)$$

и формулы проекции Гаусса

$$\begin{aligned} x &= X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + \dots, \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

Возведем (5.24) в квадрат и сложим, тогда получим

$$m^2 = \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 \right]. \quad (5.26)$$

Дифференцируя (5.25) по аргументу  $l$ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= 2a_2 l + 4a_4 l^3 + \dots, \\ \frac{dy}{dl} &= b_1 + 3b_3 l^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.27)$$

Напомним, что в формулах (5.27)

$$\begin{aligned} b_1 &= r = N \cos B, \quad a_2 = \frac{1}{2} N \cos B \sin B, \\ b_3 &= \frac{1}{6} N \cos^3 B \left( -\operatorname{tg}^2 B + V^2 \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

В ходе дальнейших выкладок (в целях их упрощения) будем удерживать члены порядка  $l^2$ . Подставляя (5.27) в (5.26) с учетом (5.28), получим

$$\left( \frac{1}{r} \frac{dx^2}{dl} \right)^2 \approx \frac{1}{r^2} 4a_2^2 l^2 = \sin^2 B l^2, \quad (5.29)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{dy}{dl}\right)^2 \approx \frac{1}{r^2} (b_1 + 3b_3 l^2)^2 = \frac{1}{r^2} (b_1^2 + 6b_1 b_3 l^2 + \dots) =$$

$$= 1 + [\cos^2 B (V^2 - \operatorname{tg}^2 B)] l^2 = 1 + (\cos^2 B V^2 - \sin^2 B) l^2. \quad (5.30)$$

Складывая (5.29) и (5.30), найдем

$$m^2 = 1 + V^2 \cos^2 B l^2.$$

Для извлечения квадратного корня применим выражение  $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} - \dots$ , тогда будем иметь

$$m = 1 + \frac{1}{2} V^2 \cos^2 B l^2. \quad (5.31)$$

Выразим масштаб через плоские координаты, для этого воспользуемся приближенной формулой

$$y \approx b_1 l = N \cos B l,$$

откуда

$$l^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 B}. \quad (5.32)$$

Подставляя (5.32) в (5.31), получим

$$m = 1 + \frac{y^2 V^2}{2N^2}, \quad (5.33)$$

но поскольку  $N = \frac{c}{V}$ ,  $\frac{N^2}{V^2} = R^2$ ,

где  $R$  — средний радиус кривизны эллипсоида, то (5.33) запишется

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2}. \quad (5.34)$$

Если при выводе формулы для масштаба удерживать члены порядка  $l^4$ , то вместо (5.31) будем иметь выражение

$$m = 1 + \frac{1}{2} V^2 \cos^2 B l^2 + \frac{1}{24} \cos^2 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) l^4. \quad (5.35)$$

Заменим в этом выражении разность долгот  $l$  на ординату  $y$  по второй формуле (5.25)

$$y = N \cos B l + N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^3}{6},$$

из которой можно найти, удерживая члены только порядка  $y^4$ ,

$$l \cos B = \frac{y}{N} - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^3}{6N^3},$$

$$l^2 \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^4}{3N^4}, \quad (5.36)$$

$$l^4 \cos^4 B = \frac{y^4}{N^4} \approx \frac{y^4}{R^4}.$$

Подставляя (5.36) в (5.35), после некоторых преобразований получим

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (5.37)$$

Ниже для вывода формул редукций потребуется выражение натурального логарифма масштаба. Используем для этого разложение в ряд  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ , тогда из формулы (5.37) получим

$$\ln m = \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^4}{12R^4}. \quad (5.38)$$

Формулы (5.37) и (5.38) можно использовать для учета линейных искажений в пределах стандартной зоны при обработке геодезических сетей всех классов.

Анализируя выражения (5.37), легко заметить, что линейные искажения быстро возрастают пропорционально квадрату ординаты. Поскольку с изменением широты величина  $R = \frac{c}{V^2}$  изменяется незначительно, то постоянному значению ординаты  $y$  соответствует практически постоянная величина масштаба. Следовательно, можно утверждать, что изоколы (линии равных искажений длин) располагаются практически параллельно оси абсцисс по всей полосе проекции. На этом основании проекцию Гаусса наиболее целесообразно применять для изображения полосы, вытянутой на эллипсоиде с юга на север.

### 5.6. Сближение меридианов в проекции Гаусса

По определению сближение меридианов на плоскости  $\gamma$  (так называемое *гауссово* сближение меридианов) есть угол между касательной к изображению меридиана в данной точке и линией, параллельной осевому меридиану. При выводе формулы для  $\gamma$  в качестве исходных используем уравнения (5.24), из которых легко найти

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dl} + \frac{dy}{dl} \quad (5.39)$$

или с учетом (5.25)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{d(X + a_2 l^2 + \dots)}{dl} + \frac{d(b_1 l + b_3 l^3 + \dots)}{dl} = \frac{2a_2 l + 4a_4 l^3 + \dots}{b_1 + 3b_3 l^2 + \dots}. \quad (5.40)$$

Если теперь коэффициенты  $a_i, b_i$ , входящие в выражение (5.40), выразить через геодезические координаты по формулам (5.14), выполнить деление одного ряда на другой и перейти к  $\arctg(\operatorname{tg} \gamma)$ , то после преобразований, которые мы опускаем, получим следующее выражение:

$$\gamma = \sin B \ l + \sin B \ \cos^2 B \ (1 + 3\eta^2) \frac{l^3}{3} + \sin B \ \cos^4 B \ (2 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^5}{15} . \quad (5.41)$$

Угол  $\gamma$  можно также выразить в функции плоских координат, используя для этого формулы (5.36). Приведем окончательный вид такого представления

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} B_x}{N_x} \ y - \frac{\operatorname{tg} B_x}{3 N_x^3} \ (1 + \operatorname{tg}^2 B_x - \eta_x^2) \ y^3 + \frac{\operatorname{tg} B_x}{15 N_x^5} \ (2 + 5 \operatorname{tg}^2 B_x + 3 \operatorname{tg}^4 B_x) \ y^5 . \quad (5.42)$$

Для вычислений на ЭВМ формулы (5.41) и (5.42) преобразуют к виду (коэффициенты в формулах, которые приводятся ниже, получены с использованием элементов Красовского):

1) вычисление  $\gamma$  по геодезическим координатам

$$\gamma = \{1 + [(0,33333 + 0,00674 \cos^2 B) + (0,2 - 0,067 \cos^2 B) \cos^2 B \ l^2] l^2\} \sin B ; \quad (5.43)$$

2) вычисление  $\gamma$  по плоским координатам

$$\gamma = \{1 - [(0,33333 - 0,00225 \cos^4 B_x) + (0,2 - 0,067 \cos^2 B_x) z^2] z^2\} z \sin B_x . \quad (5.44)$$

В формуле (5.44) значения  $B_x$  и  $z$  те же, что и в выражении (5.21).

Сближение меридианов в формулах (5.41) – (5.44) получается в радианах. Погрешность формул составляет менее 0,001" в пределах стандартной зоны проекции Гаусса.

Для приближенного определения сближения меридианов с точностью до 1' достаточно ограничиться первым членом в формуле (5.41), т.е.

$$\gamma = l \ \sin B . \quad (5.45)$$

Знак сближения меридианов совпадает со знаком разности долгот  $l = L - L_0$ .

### 5.7. Поправка за кривизну изображения геодезической линии на плоскости проекции Гаусса

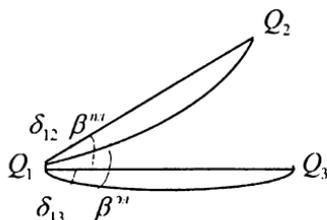


Рис.5.8. Переход к углу на плоскости в проекции Гаусса

В проекции Гаусса углы и направления переносятся без искажения, но это будут углы между кривыми линиями (рис. 5.8), для того чтобы перейти к углам между хордами, в них нужно внести соответ-

ствующие поправки. На *рис.5.8*  $\beta^{\text{эл}} = 13 - 12$  — угол на эллипсоиде,  $\beta^{\text{пл}} = (13 - \delta_{13}) - (12 - \delta_{12})$  — угол на плоскости. Сравнивая эти выражения, получаем  $\beta^{\text{пл}} = \beta^{\text{эл}} + \delta_{12} - \delta_{13}$ . Найдем формулы для вычисления  $\delta_{ij}$ .

В качестве исходного используем выражение (1.6) для угла между кривой и стягивающей ее хордой

$$\delta_{12} = \frac{1}{2} \Gamma S + \frac{1}{6} \left( \frac{d\Gamma}{dS} \right) S^2 + \dots, \quad (5.46)$$

где  $\Gamma$  — кривизна кривой.

По общему определению кривизны любой линии

$$\Gamma = \frac{d\alpha}{dS}, \quad (5.47)$$

где  $d\alpha$  — угол смежности,  $dS$  — дифференциал дуги кривой, стягивающей этот угол. Но в данном случае  $\Gamma$  — это кривизна конформного изображения геодезической линии. Для нее голландским ученым Схольсом было получено выражение

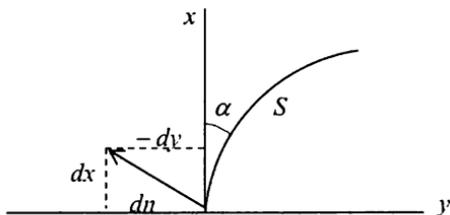
$$\Gamma = \frac{d \ln m}{dn}, \quad (5.48)$$

которое читается так: кривизна конформного изображения геодезической линии равна производной натурального логарифма масштаба по внешней нормали (т.е. нормали к кривой, направленной в сторону ее выпуклости).

После этих замечаний перейдем к выводу формул. Для этого прежде всего найдем выражения для кривизны  $\Gamma$  и ее производной  $\frac{d\Gamma}{dS}$ .

Масштаб обычно выражается в функции плоских координат. Поэтому формулу (5.48) преобразуем, представив ее правую часть как полную производную функции двух переменных  $x$  и  $y$ :

$$\Gamma = \frac{\partial \ln m}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \ln m}{\partial y} \frac{dy}{dn}. \quad (5.49)$$



*Рис.5.9. Нормаль к изображению геодезической линии*

Из *рис.5.9* имеем

отсюда

$$dx = dn \sin \alpha, \quad dy = -dn \cos \alpha,$$

$$\frac{dx}{dn} = \sin \alpha, \quad \frac{dy}{dn} = -\cos \alpha. \quad (5.50)$$

Далее, дифференцируя формулу логарифма масштаба (5.38),

$$\ln m = \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^4}{12R^4} \text{ по переменной } y, \text{ получим}$$

$$\frac{\partial \ln m}{\partial y} = \frac{y}{R^2} - \frac{y^3}{3R^4}. \quad (5.51)$$

При дифференцировании по  $x$  учтем только первый член, отбросив второй по малости, тогда, учитывая, что  $R^2 = \frac{c^2}{V^4}$ , получим

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{y^2}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R^2} \right) = \frac{y^2}{2c^2} \frac{dV^4}{dB} \frac{dB}{dx}. \quad (5.52)$$

Далее

$$\frac{dV^4}{dB} = \frac{d(V^2)^2}{dB} = 2V^2 \frac{dV^2}{dB} = -2V^2 e'^2 \sin 2B,$$

$$\frac{dB}{dx} \approx \frac{dB}{dX} = \frac{1}{M}.$$

С ошибкой не более порядка  $l^4$  можно положить  $c = M = R$ ,  $V^2 = 1$ ,  $e'^2 = e^2$ , тогда, подставляя значения производных в выражение (5.52), будем иметь

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = -\frac{e'^2 \sin^2 B}{R^3} y^2. \quad (5.53)$$

С учетом формул (5.50) - (5.53) выражение (5.49) примет вид

$$\Gamma = \left( -\frac{y}{R^2} + \frac{y^3}{3R^4} \right) \cos \alpha - \frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2 \sin \alpha. \quad (5.54)$$

Перейдем теперь к определению производных  $\frac{d\Gamma}{dS}$ . Из формулы (5.54) видно, что  $\Gamma$  зависит от переменных  $y$  и  $\alpha$  весьма в слабой степени от  $B$ , производной по которой можно пренебречь. Кроме того, при дифференцировании  $\Gamma$  можно отбросить третий член, величина которого существенно меньше по сравнению с двумя первыми. Тогда

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dS}. \quad (5.55)$$

Для производных, входящих в (5.55), будем иметь

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{\cos \alpha}{R^2} + \frac{y^2}{R^4} \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dS} = \sin \alpha,$$

$$\frac{d\Gamma}{d\alpha} = \frac{y}{R^2} \sin \alpha - \frac{y^3}{3R^4} \sin \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dS} = \Gamma \approx -\frac{y}{R^2} \cos \alpha, \quad (5.56)$$

Если ограничиться членами порядка  $\frac{1}{R^4}$ , то для (5.55) получим

$$\frac{d\Gamma}{dS} = -\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{R^2} + \frac{y^2}{R^4} \cos\alpha \sin\alpha - \frac{y^2}{R^4} \cos\alpha \sin\alpha = -\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{R^2}. \quad (5.57)$$

Полученные выражения для  $\Gamma$  и ее производной — (5.54) и (5.57) подставим в формулу (5.46), в которой все величины следует отнести к начальной точке  $Q_1$ . Кроме того, введем обозначения

$$\begin{aligned} S_{12} \cos\alpha_{12} &\approx d_{12} \cos\alpha_{12} = \Delta x = x_2 - x_1, \\ S_{12} \sin\alpha_{12} &\approx d_{12} \sin\alpha_{12} = \Delta y = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

После этих замечаний выражение (5.46) запишется

$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho''}{2R_1^2} (x_2 - x_1) \left( y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} - \frac{y_1^3}{3R_1^2} \right) - \frac{\rho''}{2R_1^2} e^2 \frac{y_1^2 \cdot \Delta y}{R_1} \sin 2B_1. \quad (5.58)$$

Если использовать среднюю ординату  $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ , то легко получить

$$\begin{aligned} y_1 &= y_m - \frac{\Delta y}{2}, & y_2 &= y_m + \frac{\Delta y}{2}, \\ y_1 + \frac{\Delta y}{3} &= y_m - \frac{\Delta y}{6}, & y_2 - \frac{\Delta y}{3} &= y_m + \frac{\Delta y}{6}. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений формулу (5.58) можно представить в виде, обычно используемом при обработке триангуляции 1 класса:

$$\delta_{12}'' = -f \Delta x \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + f e^2 \frac{\sin 2B_m}{R_m} y_m^2 \Delta y, \quad (5.59)$$

где  $f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$ .

Формулу для вычисления обратной поправки  $\delta_{21}$  можно найти из (5.59), поменяв в ней местами индексы в приращениях  $\Delta x = x_2 - x_1$  и  $\Delta y = y_2 - y_1$  или же изменив знаки перед этими приращениями на обратные. Отсюда

$$\delta_{21}'' = f \Delta x \left( y_m + \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + f e^2 \frac{y_m^2 \Delta y}{R_m} \sin 2B_m. \quad (5.60)$$

В триангуляции 2 класса используются два члена формул (5.59) и (5.60)

$$\begin{aligned} \delta_{12}'' &= -f \Delta x \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} \right) = -\frac{1}{3} f \Delta x (2y_1 + y_2), \\ \delta_{21}'' &= f \Delta x \left( y_m + \frac{\Delta y}{6} \right) = \frac{1}{3} f \Delta x (2y_2 + y_1). \end{aligned} \quad (5.61)$$

В геодезических сетях более низких классов учитывают только первый член, т.е.

$$\delta_{12}'' = -\delta_{21}'' = -f \Delta x y_m = -0,00253 \Delta x y_m, \quad (5.62)$$

где  $\Delta x$  и  $y_m$  выражены в километрах.

### 5.8. Поправка в длину геодезической линии за масштаб ее изображения на плоскости

Выше было выяснено, что для определения длины хорды нужно вычислить интеграл (5.22)

$$d = \int_0^S m dS, \quad (5.63)$$

где

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (5.64)$$

Интеграл (5.63) в элементарных функциях не выражается, поэтому для вычисления используют приближенные методы, в частности формулу Симпсона:

$$d = \frac{S}{6} (m_1 + 4m_m + m_2), \quad (5.65)$$

согласно которой нужно вычислить масштаб в трех точках: начальной, средней и конечной, т.е.

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{y_1^2}{2R_1^2} + \frac{y_1^4}{24R_1^4}, \\ m_m &= 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}, \\ m_2 &= 1 + \frac{y_2^2}{2R_2^2} + \frac{y_2^4}{24R_2^4}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

В формулах (5.66) перейдем к средней ординате

$$y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}, \quad y_2 = y_m + \frac{\Delta y}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} y_1^2 &= y_m^2 - y_m \Delta y + \frac{\Delta y^2}{4}, \\ y_2^2 &= y_m^2 + y_m \Delta y + \frac{\Delta y^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Кроме того, условимся радиус  $R$  вычислить только для средней точки, а в членах четвертого порядка примем  $y_1^4 = y_2^4 = y_m^4$ . Эти допущения вызовут пренебрегаемо малую ошибку в длине хорды, если ее величина не превышает 60 км.

После подстановки (5.67) и (5.66) в выражение (5.65), получим

$$d = S \left( 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right)$$

или

$$\Delta S = d - S = S \left( \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right). \quad (5.68)$$

Формула (5.68) применяется при обработке триангуляции I класса. В геодезических сетях 2 класса используют выражение

$$\Delta S = d - S = S \left( \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} \right). \quad (5.69)$$

Наконец, в сетях низших классов применяют формулу

$$\Delta S = d - S = \frac{y_m^2}{2R_m^2} S = 0,123 \left( \frac{y}{100} \right)^2 S, \quad (5.70)$$

в которой  $y_m$  и  $S$  выражаются в километрах, а поправка  $(d - S)$  — в метрах.

Выражение (5.70) весьма удобно для приближенной оценки линейных искажений, возникающих при редукции длины геодезической линии на плоскость проекции Гаусса. Например, на краю шестиградусной зоны ( $y_m = 300$  км) получим величину относительного искажения

$$\frac{d - S}{S} = 0,123 \cdot 3^2 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{900},$$

из которой в дальнейшем можно исходить при планировании картометрических работ.

### 5.9. Переход от одного осевого меридиана к другому в проекции Гаусса

При использовании проекции Гаусса поверхность эллипсоида делится на зоны. Изображение какой-либо зоны на плоскости представляет собой точную копию изображения любой другой зоны. Это означает, что для вычисления координат и редукций в любой зоне могут применяться одни и те же формулы, что составляет большое преимущество проекции Гаусса перед другими проекциями.

Таким образом, разделение на зоны стандартизует вычисления, но вместе с тем оно вызывает затруднения, когда необходимо установить связи между точками, расположенными в разных зонах. Ясно, что при этом возникает необходимость перевычисления одного из пунктов в другую систему плоских координат с новым осевым меридианом. По существу, это означает, что одна из зон должна быть расширена.

Рассмотрим сущность этой задачи. Некоторая точка эллипсоида с координатами  $B$  и  $L$  после изображения ее на плоскости в первой системе с осевым меридианом  $L_0$  будет иметь координаты  $x$  и  $y$ . Эта же точка в соседней зоне с осевым меридианом  $L'_0$  будет иметь координаты  $x'$  и  $y'$  (рис. 5.10).

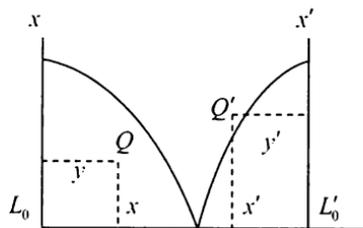


Рис.5.10. Переход от одного осевого меридиана к другому

Перевычисление плоских координат  $x$  и  $y$  в координаты  $x'$  и  $y'$  означает переход от одного осевого меридиана к другому, эту операцию кратко называют «переход из зоны в зону».

На практике применяются два способа перехода к другому осевому меридиану.

Первый и основной способ состоит в следующем.

1. Заданные плоские координаты в первой зоне  $x$  и  $y$  перевычисляют в геодезические по формулам (5.16)

$$B = B_x + A_2 y^2 + A_4 y^4 + \dots,$$

$$l = P_1 y + P_3 y^3 + \dots,$$

$$L = L_0 + l.$$

2. По вычисленным геодезическим координатам определяют разность долгот  $l'$  по отношению к новому осевому меридиану

$$l' = L - L'_0.$$

3. Вычисляют плоские координаты  $x'$  и  $y'$  в соседней зоне по формулам (5.9) с новой разностью долгот

$$x' = X + a_2 l'^2 + a_4 l'^4 + \dots,$$

$$y' = b_1 l' + b_3 l'^3 + \dots.$$

Как видно, этот способ целиком основан на использовании уже известных формул и удобен при счете на ЭВМ.

Второй способ состоит в непосредственном преобразовании плоских координат в плоские же без промежуточного перехода к геодезическим координатам.

Известно, что аналитическая функция комплексного переменного  $p + iq = f(u + iv)$  осуществляет конформное отображение одной поверхности на другую. Будем искать такую функцию

$$x' + iy' = f(x + iy), \quad (5.71)$$

которая отображала бы точки плоскости одной зоны проекции Гаусса в соседнюю зону. Разложим функцию (5.71) в ряд Тейлора в окрестности точки  $Q_0$  с координатами  $x_0$  и  $y_0$  (эту точку называют узловой)

$$x' + iy' = f(x_0 + iy_0) + f'(x_0 + iy_0) (\Delta x + i\Delta y) + \frac{1}{2} f''(x_0 + iy_0) (\Delta x + i\Delta y)^2 + \dots, \quad (5.72)$$

где  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ .

Введем обозначения

$$f(x_0 + iy_0) = x'_0 + iy'_0, \quad \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0 + iy_0) = D_{n1} + iD_{n2},$$

тогда (5.72) запишется

$$x' + iy' = x'_0 + iy'_0 + (D_{11} + iD_{12}) (\Delta x + i\Delta y) + (D_{21} + iD_{22}) (\Delta x + i\Delta y)^2 + \dots$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 + D_{11} \Delta x - D_{12} \Delta y + D_{21} (\Delta x^2 - \Delta y^2) - D_{22} (2\Delta x \Delta y) + \dots, \\ y' &= y'_0 + D_{11} \Delta y + D_{12} \Delta x + D_{21} (2\Delta x \Delta y) + D_{22} (\Delta x^2 - \Delta y^2) + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

Вычислительная схема ясна. Пусть известны координаты узловой точки  $Q_0$  в обеих зонах и значения коэффициентов  $D_{ni}$ . Тогда, образовав разности координат некоторой точки  $Q$  и узловой точки  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и подставив их в (5.73), получим координаты этой точки в соседней зоне.

Несмотря на внешнюю простоту, данный способ не лишен недостатков. Производные  $D_{ni}$ , входящие в формулы (5.73), определяют численными методами. Поскольку они являются функциями координат, то рассматривать их в качестве постоянных величин можно лишь в ограниченной области.

Укажем метод определения величин  $D_{ni}$ .

Пусть в некоторой области необходимо преобразовать координаты  $n$  пунктов в соседнюю зону. Выберем из массива четыре пункта, координаты которых определим в обеих зонах. Один из них примем за узловой  $Q_0$ . Далее вычислим разности координат узлового и остальных совмещенных пунктов  $\Delta x_i = x_i - x_0$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_0$  и свободные члены уравнений (5.73)  $l_{xi} = x'_i - x'_0$ ,  $l_{yi} = y'_i - y'_0$ . Теперь систему (5.73) можно записать

$$\Delta X D + L = V,$$

где  $\Delta X$  — матрица коэффициентов уравнений, образованная по разностям координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ;  $D = [D_{11}, D_{12}, \dots, D_{ni}]^T$  — переменный вектор неизвестных (размерность  $D$ , т.е. число  $D_{ni}$ , устанавливает вычислитель);  $L = [l_{x1}, l_{x2}, \dots, l_{yn}]^T$  — вектор свободных членов.

Далее составляют и решают нормальную систему

$$\Delta X^T \Delta X D + \Delta X^T L = 0, \quad D = -(\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T L.$$

Исследования, выполненные на кафедре высшей геодезии МИИГАиК, показали, что для достижения необходимой точности

(сравнимой с точностью первого способа) достаточно ограничиться четырьмя коэффициентами  $D_{ii}(D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22})$ . Заметим также, что приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  следует выражать в километрах (если их выражать в метрах или сантиметрах, то ряды (5.73) становятся расходящимися).

### *Решение обратной геодезической задачи в плоских координатах*

В практике геодезических работ иногда возникает необходимость вычислить длину и азимуты геодезической линии (т.е. решить обратную задачу) между двумя точками, для которых даны плоские координаты Гаусса.

Задача имеет несколько вариантов решения в зависимости от взаимного расположения точек  $Q_1$  и  $Q_2$ .

1. Точки  $Q_1$  и  $Q_2$  располагаются в пределах одной зоны проекции Гаусса,  $S_{12} \leq 600$  км. Для этого случая используют формулы

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

Далее находят поправку  $\Delta S$  в длину геодезической линии, используя выражение (5.68), в котором в правой части величину  $S$  заменяют на  $d$ . Вычисляют сближение меридианов в точках  $Q_1$  и  $Q_2$  по формулам (5.41) и поправки  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$  по формулам (5.59) и (5.60).

В заключение находят длину геодезической линии  $S_{12} = d_{12} - \Delta S$  и ее азимуты  $A_{12} = \alpha_{12} + \gamma_1 + \delta_{12}$ ,  $A_{21} = \alpha_{21} + \gamma_2 + \delta_{21}$ .

2. Точки  $Q_1$  и  $Q_2$  располагаются в смежных зонах проекции Гаусса,  $S_{12} \leq 600$  км. В этом случае необходимо предварительно привести координаты обоих пунктов к одному осевому меридиану, а затем решить обратную задачу по приведенным выше формулам.

3. Если расстояние между точками превышает 600 км, то необходимо от плоских координат перейти к геодезическим и решить обратную задачу одним из способов, описанных в главе 3.

*Пример преобразования плоских координат Гаусса из одной зоны в другую.*

Исходные данные:  $x_1 = 5728374,726$  м;  $y_1 = 210298,193$  м;  $L_{01} = 21^\circ$ .

Требуется найти координаты этой же точки в смежной зоне с  $L_{011} = 27^\circ$ .

На первом этапе переходят от  $x_1, y_1$  к  $B, L$  по формулам (5.21) (табл. 5.3).

На втором этапе вычисляют  $x_{11}, y_{11}$  по формулам (5.16), но с новой разностью долгот  $l' = L - L_{011} = L - 27^\circ$ .

Таблица 5.3

$B_{\text{плн}}$	0,901384542	$a_3$	- 0,03814988
$\sin B$	0,7841868	$a_5$	- 0,02648123
$\cos B$	0,6205248	$\sin B \cdot \cos B$	0,4866073
$\cos^2 B$	0,3850510	$l^2$	0,002674381
$l_{\text{плн}}$	- 0,051714418	$N \cdot l^2$	17093,072
$N$	6391412,451	$6367558,4969 \cdot B$	5739618,800
$a_0$	32088,400	$x_{II}$	5728164,728
$a_4$	0,05497637	$1 + (a_3 + a_5 \cdot l^2) l^2 \cdot l \cos B$	- 0,03208680
$a_6$	0,00773241	$y_{II}$	- 205079,963

### 5.10. Практика применения проекции Гаусса в СНГ

Область распространения системы плоских координат называют *координатной зоной*.

В основу построения единой общегосударственной системы плоских координат в СНГ положено разделение поверхности северной половины эллипсоида на ряд совершенно одинаковых сферических треугольников, ограниченных экватором и меридианами с разностью долгот  $6^\circ$ . Эти треугольники называют шестиградусными меридианными полосами.

Изображение на плоскости каждой шестиградусной полосы в поликонической проекции представляет собой колонку листов Международной карты мира в масштабе 1:1000 000.

Изображение этой же полосы на плоскости в проекции Гаусса представляет собой шестиградусную координатную зону.

В пределах каждой такой зоны размещается целое число трапещий топографических карт в масштабах от 1:500 000 до 1:10 000.

Счет координатных зон ведется с запада на восток. Номер координатной зоны отличается от номера соответствующей колонки листов миллионной карты на 30.

Номер зоны  $n$  и долгота осевого меридиана  $L_0^n$  этой же зоны связаны равенством  $L_0^n = 6n - 3$ . Всего на территории СНГ создано 29 шестиградусных зон с номерами от 4 до 32 и соответственно установлено 29 осевых меридианов со стандартными долготами  $21^\circ, 27^\circ \dots 183^\circ, 189^\circ$ .

Как уже отмечалось выше, для исключения из обращения отрицательных ординат принято добавлять к ним постоянную величину 500 000 м и приписывать слева номер зоны. В результате получается число, представляющее собой условную ординату.

Важным является вопрос о выборе ширины координатных зон.

При выполнении геодезических работ ширина зоны может быть произвольной, так как современные методы и средства вычислений

позволяют получать плоские координаты в проекции Гаусса при значительном удалении точек от осевого меридиана. Например, плоские координаты с точностью до 0,01 м можно вычислять по формулам (5.15) при ширине координатных зон до 18°, а по другим формулам\* и в более широких зонах.

По-иному дело обстоит в топографии. Основное требование к любой проекции, применяемой при создании топографических карт, состоит в том, чтобы расстояния, измеренные по карте определенного масштаба, были бы практически равны соответствующим расстояниям на местности.

Точность расстояния, измеренного между двумя точечными объектами на топографической карте, характеризуется средней квадратической ошибкой 0,7 мм, независимо от этого расстояния.

Для различных масштабов карты ошибке 0,7 мм соответствуют величины, показанные во второй колонке *табл. 5.4*.

*Таблица 5.4*

Масштаб карты	$\Delta d$ , м	$S$ , км	$\Delta S$ , м
1:10 000	7	7,5	7
1:25 000	18	15	14
1:50 000	35	30	28
1:100 000	70	60	56
1:200 000	140	120	112

Максимальные расстояния  $S$ , которые можно измерить между двумя наиболее удаленными друг от друга точками в пределах одного листа карты, приведены в третьей колонке *табл. 5.4*.

Максимальные линейные искажения  $\Delta S$ , вызванные масштабом проекции, подсчитанные по формуле (5.70) для широты 35°, приведены в четвертой колонке *табл. 5.4*.

Относительное искажение длин линий для карт всех масштабов составляет 1:1070.

Сравнивая между собой величины  $\Delta d$  и  $\Delta S$ , замечаем, что для карт всех масштабов эти величины примерно одного порядка (для территорий СНГ максимальные значения  $\Delta S$  даже несколько меньше). Следовательно, при выполнении картометрических работ на топографических картах всех масштабов в пределах одной шестиградусной зоны линейными искажениями, возникающими в проекции Гаусса, можно пренебречь.

Изображение поверхности эллипсоида отдельными меридианными полосами создает определенные трудности в тех случаях, когда необходимо установить геодезические связи между пунктами, координаты которых заданы в разных координатных зонах.

\* См.: Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1979.

Для таких случаев необходимо, чтобы шестиградусная зона была расширена. Поэтому соответствующими инструкциями предусмотрено для всех пунктов, расположенных на  $30'$  по долготе к востоку и западу от граничных меридианов шестиградусных полос, помещать в каталоги два значения плоских координат: вычисленные от осевого меридиана своей зоны и от осевого меридиана ближайшей соседней зоны. Это означает, что при геодезических работах фактически применяют координатные зоны шириной  $7^\circ$  по долготе, перекрывающие друг друга на  $1^\circ$ .

При выполнении крупномасштабных съемок (1:5000 и крупнее) требования к точности изображения положения объектов местности на картах повышаются. Поэтому для производства рекомендуется применять трехградусные зоны, осевые меридианы которых могут совпадать с осевыми и граничными меридианами стандартных зон или располагаться произвольно. Например, при съемках городов или крупных инженерных объектов в качестве осевого выбирают меридиан, проходящий поблизости от центра съемки.

Но во всех случаях применения местных систем координат, организации, использующие эти системы для решения своих ведомственных задач, обязаны плоские координаты своих пунктов перевычислить в общегосударственную систему плоских координат в шестиградусных зонах.

### *Вычисление плоских координат в триангуляции I класса*

Плоские координаты пунктов триангуляции I класса вычисляются после уравнивания триангуляции, если уравнивание ведется в геодезических координатах, или в процессе предварительных вычислений, если уравнивание ведется в плоских координатах.

Рассмотрим последовательность вычислений плоских координат на примере редуцирования треугольника триангуляции I класса с эллипсоида на плоскость проекции Гаусса.

Независимо от того, окончательно уравнены углы в треугольниках или только предварительно (например, введением одной трети невязки в каждый угол треугольника) в каждом сферическом треугольнике сумма его углов будет равна  $180^\circ$  плюс сферический избыток.

В треугольнике должны быть известны: геодезические координаты  $B, L$  исходного пункта, длина одной стороны на эллипсоиде и ее геодезический азимут.

Задачу редуцирования можно представить в виде алгоритма.

1. Вычисление прямоугольных координат  $x_1, y_1$  исходного пункта I по геодезическим координатам  $B_1, L_1$  с точностью до 0,001 м по формулам (5.15) или (5.16).

2. Вычисление сближения меридианов  $\gamma_1$  в исходном пункте 1 по формулам (5.43), (5.44).

3. Вычисление длин сторон треугольника в первом приближении

$$S_{23} = S_{12} \frac{\sin A}{\sin C}, \quad S_{13} = S_{12} \frac{\sin B}{\sin C}.$$

4. Построение схемы треугольника в масштабе, например, 1:100 000 по координатам исходного пункта  $x_1, y_1$ , исходной стороне  $S_{12}$  и измеренным углам  $A, B, C$ . Снятие со схемы приближенных координат точек 2 и 3 с точностью до 0,1 км.

5. Вычисление поправок  $\delta$  за кривизну изображения геодезической линии и  $\Delta S$  за переход к хорде ее изображения на плоскости в первом приближении

$$\delta_{ki}'' = -\delta_{ik}'' = -0,00253 y_m \Delta x_{ki}, \quad \Delta S = 0,12 \left( \frac{y_m}{100} \right)^2 S_{ki},$$

где  $y_m = \frac{1}{2}(y_k + y_i)$ ,  $\Delta x_{ki} = x_i - x_k$ .

Заметим, что здесь  $y_m, \Delta x, S$  выражены в километрах.

6. Вычисление дирекционного угла исходной стороны в первом приближении

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma + \delta_{12}.$$

7. Вычисление поправок  $\Delta_i$  в углы в первом приближении и самих углов на плоскости

$$\Delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13}, \quad \Delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21}, \quad \Delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32}, \\ A' = A + \Delta_1, \quad B' = B + \Delta_2, \quad C' = C + \Delta_3.$$

8. Вычисление координат вершин 2 и 3 треугольника в первом приближении

$$x_2 = x_1 + \Delta x_{12}, \quad x_3 = x_1 + \Delta x_{13}, \\ y_2 = y_1 + \Delta y_{12}, \quad y_3 = y_1 + \Delta y_{13},$$

где

$$\Delta x_{12} = d_{12} \cos \alpha_{12}, \quad \Delta x_{13} = d_{13} \cos \alpha_{13}, \\ \Delta y_{12} = d_{12} \sin \alpha_{12}, \quad \Delta y_{13} = d_{13} \sin \alpha_{13}, \\ d_{12} = S_{12} + \Delta S_{12}, \quad d_{13} = S_{13} + \Delta S_{13}, \\ \alpha_{13} = \alpha_{12} - A'.$$

Здесь координаты вычисляются с точностью до 1 м, угловые величины — до 1".

9. Вычисление поправок  $\delta_{ki}$  в направления по строгим формулам (5.59) и поправки  $\Delta S$  в исходную сторону  $S_{12}$  по формуле (5.68).

10. Вычисление поправки  $\Delta_i$  в углы и самих углов на плоскости во втором приближении с точностью до 0,001". В результате введения поправок в сферические углы сумма углов в каждом треугольнике

должна равняться точно  $180^\circ$ , поскольку сумма поправок в сферические углы равняется сферическому избытку с обратным знаком ( $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = -\varepsilon$ ).

11. Вычисление длины исходной стороны на плоскости и ее дирекционного угла во втором приближении. Вычисления ведут с точностью до 0,001 м и 0,001".

12. Заключительные вычисления длин сторон треугольника и координат его вершин 2 и 3 на основании значений  $\alpha_{ki}$  и  $\alpha_{ik}$ , полученных во втором приближении.

*Пример редуцирования стороны триангуляции I класса на плоскость.*

Исходные данные:  $B_1 = 51^\circ 38' 43,9023''$ ;  $L_1 = 24^\circ 02' 13,1360''$ ;  $B_2 = 51^\circ 32'$ ;  
 $S_{12} = 25938,210$  м;  $A_{12} = 118^\circ 49' 32,702''$ .

1. Вычисление плоских координат по геодезическим (см. пример в табл. 5.1)

$$x_1 = 5728374,726 \text{ м}, \quad y_{\text{ном}} = 210198,193 \text{ м}, \quad y_{\text{ист}} = 4710198,193 \text{ м}.$$

2. Контрольные вычисления геодезических координат по плоским (см. пример в табл. 5.2).

3. Вычисление сближения меридианов по формуле (5.43)

$$\gamma_1 = 2^\circ 22' 56,737''.$$

4. Вычисление приращений плоских координат с точностью до 0,1 км

$$\Delta x_{12} = S_{12} \cos(A_{12} - \gamma_1) = -11,6 \text{ км},$$

$$\Delta y_{12} = S_{12} \sin(A_{12} - \gamma_1) = 23,2 \text{ км},$$

$$y_m = y_1 + \frac{\Delta y_{12}}{2} = 221,8 \text{ км}.$$

5. Вычисление приближенных редукиций

$$\delta_{12}'' = 0,00253 y_m \Delta x_{12} = 6'',$$

$$\Delta S_{12} = 0,123 (y_m \cdot 0,01)^2 S_{12} = 16 \text{ м}.$$

6. Вычисление приращений плоских координат с точностью до 1 м

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12} = 116^\circ 26' 42'',$$

$$d_{12} = S_{12} + \Delta S_{12} = 25954 \text{ м},$$

$$\Delta x_{12} = d_{12} \cos \alpha_{12} = -11558 \text{ м},$$

$$\Delta y_{12} = d_{12} \sin \alpha_{12} = 23238 \text{ м},$$

$$y_m = 221817 \text{ м}.$$

7. Вычисление точных редукиций по формулам (5.59) и (5.68)

$$\delta_{12} = 6,371'', \quad \delta_{21} = -6,597'', \quad \Delta S_{12} = 15,677 \text{ м}.$$

8. Окончательное вычисление плоских координат второго пункта

$$\alpha = 116^\circ 26' 42,336'', \quad d_{12} = 25953,887 \text{ м},$$

$$x_2 = x_1 + d_{12} \cos \alpha_{12} = 5716816,42 \text{ м},$$

$$y_2 = y_1 + d_{12} \sin \alpha_{12} = 4733436,305 \text{ м}.$$

## 5.11. Краткие сведения о других геодезических проекциях

В большинстве стран мира в настоящее время используется проекция Гаусса, иногда под другим названием. В некоторых регионах, например, на Кубе, ряде штатов США применяется конформная коническая проекция Ламберта, в части африканских стран и отдельных департаментах Франции встречаются проекции Ламберта и Руссилья. В связи с этим приведем краткие сведения об этих проекциях и наметим общий подход к перевычислению координат точек из одной проекции в другую.

### *Поперечная проекция Меркатора*

Это другое название проекции Гаусса, распространенное главным образом в зарубежной литературе. В США ее называют The universal transverse Mercator projection или сокращенно проекция UTM.

Единственное отличие данной проекции от проекции Гаусса, используемой в России, состоит в том, что в ней масштаб изображения осевого меридиана принимается равным 0,9996. При таком выборе масштабного коэффициента появятся две изоколы с нулевыми линейными искажениями, которые будут располагаться к западу и к востоку от осевого меридиана (в проекции Гаусса такая изокола одна, она совпадает с осевым меридианом). Это естественно приводит к уменьшению линейных искажений на краю зоны в проекции UTM.

Переход от проекции Гаусса к проекции UTM (при одном и том же эллипсоиде) осуществляется следующим образом\*. В нашей стране в геодезии применяется левая система плоских прямоугольных координат, в которой ось  $x$  направлена на север, ось  $y$  на восток. В США и некоторых других странах применяется правая система плоских координат, в которой ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  — на север.

С учетом этого формулы связи проекций Гаусса и UTM имеют вид.

1. При определении проекции UTM в левой системе

$$x_{UTM} = k x_G, \quad y_{UTM} = k y_G, \quad m_{UTM} = k m_G, \quad \gamma_{UTM} = \gamma_G.$$

2. При определении проекции UTM в правой системе

$$x_{UTM} = k y_G, \quad y_{UTM} = k x_G, \quad m_{UTM} = k m_G, \quad \gamma_{UTM} = \gamma_G,$$

где  $k = 0,9996$ .

### *Конформная коническая проекция Ламберта*

Коническими проекциями называются проекции, у которых параллели изображаются концентрическими окружностями, а меридианы — прямыми линиями-радиусами этих окружностей. «Параллель касания» с широтой  $B_0$  называют нормальной параллелью.

---

\* Об этом подробнее см.: Бугаевский Л.М. Математическая картография. — М.: Златоуст, 1998.

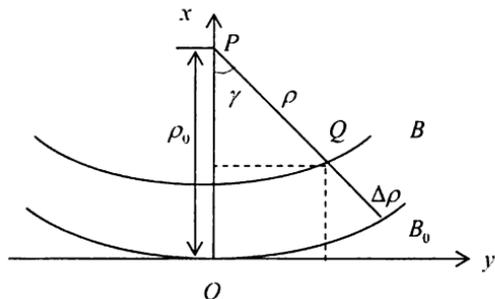


Рис.5.11. Коническая проекция Ламберта

Положение произвольной точки  $Q$  (рис.5.11) на плоскости определяется декартовыми координатами  $x$  и  $y$  или полярными координатами  $\rho$  и  $\gamma$ . Связь между ними легко устанавливается по рис. 5.11

$$\begin{aligned} x &= \rho_0 - \rho \cos \gamma, \\ y &= \rho \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Уравнения всех конических проекций в общем виде можно записать

$$\rho = f(B), \quad \gamma = \beta l,$$

где  $\beta$  — постоянная величина, определяемая дополнительными условиями. Угол  $\gamma$  есть сближение меридианов в конических проекциях. Величина  $\rho$  вычисляется по формуле

$$\rho = k e^{\beta \Delta q}, \quad (5.75)$$

в которой  $k$  — постоянная интегрирования,  $e$  — основание натуральных логарифмов,  $\Delta q = q - q_0$  — разность так называемых *изометрических широт*.

Изометрическая широта вводится по определению

$$dq = \frac{M}{r} dB, \quad q = \int_0^B \frac{M}{r} dB. \quad (5.76)$$

После выполнения операции интегрирования (5.76) примет вид

$$q = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B}. \quad (5.77)$$

Для перехода от заданной разности геодезических широт  $\Delta B$  к разности изометрических широт  $\Delta q$  вместо использования довольно сложной для вычислений формулы (5.77) применяют следующий ряд:

$$\Delta q = \left( \frac{dq}{dB} \right)_0 \Delta B + \left( \frac{d^2 q}{dB^2} \right)_0 \frac{\Delta B^2}{2} + \dots$$

или

$$\Delta q = t_1 \Delta B + t_2 \Delta B^2 + \dots, \quad (5.78)$$

где

$$t_1 = \frac{1}{V_0^2 \cos B_0}, \quad t_2 = \frac{\text{tg} B_0}{2V_0^4 \cos B_0} (1 + 3\eta_0^2).$$

В проекции Ламберта постоянные параметры имеют значения:  $\beta = \sin B_0$ ,  $k = \rho_0 = N \text{ ctg} B_0$ .



$$x_n = \Delta x + k_3 \Delta x^3 + k_5 \Delta x^5, \\ \Delta x = x - x_0, \quad k_3 = \frac{1}{12} R_0^2, \quad k_5 = \frac{1}{120} R_0^4, \quad R_0 = \sqrt{M_0 N_0}, \quad (5.80)$$

где  $x_0$  — длина дуги меридиана от экватора до начальной точки проекции с широтой  $B_0$ .

Используя (5.80), выражения для плоских координат можно получить в виде следующих рядов:

$$x = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + \dots \\ y = C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_3 + \dots \quad (5.81)$$

где

$$C_1 = N_0 \cos B_0, \quad C_2 = -\frac{l}{2} N_0 \sin B_0 \cos B_0,$$

$$C_3 = -\frac{l}{12} N_0 \cos^3 B_0 (1 + \eta_0^2 - 2 \operatorname{tg}^2 B_0),$$

$$P_1 = \Delta q, \quad Q_1 = l,$$

$$P_2 = P_1^2 - Q_1^2, \quad Q_2 = 2P_1 Q_1,$$

$$P_3 = P_1 P_2 - Q_1 Q_2, \quad Q_3 = P_1 Q_2 + Q_1 P_2.$$

Здесь  $l = L - L_0$ ,  $\Delta q = q - q_0$  — разность изометрических широт, вычисляемая по разности заданных геодезических широт  $\Delta B = B - B_0$  по формуле (5.78).

Формула для масштаба в проекции Руссиля имеет вид

$$m = l + \frac{x^2 + y^2}{4R_0^2}. \quad (5.82)$$

Анализ выражения (5.82) приводит к выводу, что линейные искажения в этой проекции возрастают равномерно по всем направлениям от начала координат. Изоколы представляют собой концентрические окружности. Следовательно, проекцию Руссиля выгодно применять для территорий с округлыми очертаниями.

В заключение рассмотрим способы перевычисления координат точек из одной проекции в другую.

Существует много способов такого перевычисления, основанных на теории отображений с помощью аналитических функций комплексного переменного. Однако при этом все вычислительные процедуры предполагают, что изображается один и тот же эллипсоид в разных проекциях, что, конечно, ограничивает общность такого подхода. Поэтому более естественным и удобным будет следующий путь.

1. По плоским координатам в исходной проекции вычисляют геодезические координаты на некотором эллипсоиде.

2. Геодезические координаты исправляют поправками, если это необходимо, за переход на новый эллипсоид.

3. По найденным таким образом геодезическим координатам находят плоские координаты в нужной проекции.

## Список рекомендуемой литературы

1. *Бессель Ф.В.* Избранные геодезические сочинения. – М.: Геодезиздат, 1961.
2. *Бойко Е.Г., Клеицкий Б.М., Ландис И.М., Устинов Г.А.* Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей. – М.: Недра, 1977.
3. *Бугаевский Л.М.* Математическая картография. – М.: Златоуст, 1998.
4. *Гаусс К.Ф.* Избранные геодезические сочинения. т. II. Высшая геодезия. – М.: Геодезиздат, 1958.
5. *Еремеев В.Ф., Юркина М.И.* Некоторые вопросы обработки пространственных сетей // Труды ЦНИИГАиК. – 1966. – Вып. 171.
6. *Красовский Ф.Н.* Руководство по высшей геодезии, ч. II. – М.: Геодезиздат, 1942.
7. *Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В.* Геодезия. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994.
8. *Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля Земли // Труды ЦНИИГАиК. – 1960. – Вып. 131.
9. *Морозов В.П.* Сфероидическая геодезия // Итоги науки и техники. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – М.: ВИНТИ, 1978.
10. *Морозов В.П.* Курс сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1979.
11. *Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы).* – М.: Недра, 1982.
12. *Урмаев Н.А.* Сфероидическая геодезия. – М.: РИО ВТС, 1955.
13. *Яковлев Н.В.* Высшая геодезия. – М.: Недра, 1989.

Учебное издание

*Бойко Евгений Григорьевич*

**Высшая геодезия**  
**Часть II**  
**Сфероидическая геодезия**

Главный редактор издательства Л.Г. Иванова

Редактор Е.А. Евтеева

Обложка художника В.А. Смирнова

Корректор Е.И. Микрякова

---

Изд.лиц. ЛР № 021299 от 24.06.99.

Подписано в печать 09.01.03

Формат 60x90/16. Гарнитура Times.

Печать офсетная. Усл. печ.л. 9,0

Тираж 500. Заказ №

---

Картгеоцентр — Геодезиздат  
125413, Москва, Онежская ул.,26



**Евгений Григорьевич Бойко –  
доктор технических наук, профессор.  
Автор четырех учебников, двух монографий  
и более 65 журнальных статей.  
Имеет восемь правительственных наград,  
звание «Почетный геодезист».**

---

**Е.Г. Бойко родился 23 марта 1930 г. в г. Артемовске. В 1950 г. окончил Ленинградское Военно-топографическое училище. В 1954 г. поступил в Военно-инженерную академию им. В. В. Куйбышева. После окончания академии в 1959 г. был распределен на Северный флот. В 1961 г. был приглашен на кафедру геодезии и астрономии академии в адъюнктуру. В 1964 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию, а в 1970 г. – докторскую. Уволен в запас в 1984 г. в звании полковника и в том же году поступил на работу в МИИГАиК на кафедру высшей геодезии на должность профессора. С 1989 по 1995 г. – заведующий кафедрой высшей геодезии МИИГАиК.**