622.83
Г85

Г. И. ГРИЦКО, Б. В. ВЛАСЕНКО

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

1Г 2005
622.83
Г 85

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА

Г. И. Грицко, Б. В. Власенко

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Ответственный редактор докт. техн. наук,
проф. Е. И. Шемякин

ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА
33301

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1976

УДК 622.831 : 539.3

В монографии излагаются основы экспериментально-аналитического метода расчета напряженно-деформированного состояния массива горных пород вокруг очистных выработок при отработке угольных пластов. Отличительной особенностью метода является использование при аналитическом решении задач о механическом состоянии массива в качестве граничных условий натурных замеров проявлений горного давления. Предлагается способ определения смещений пород по шахтным наблюдениям приращений смещений при подвигании забоя.

Задачи экспериментально-аналитического метода сформулированы для распространенных расчетных схем и типичных способов определения натурных проявлений горного давления. Выполнены расчеты и анализ полей смещений, напряжений и деформаций в больших областях массива горных пород. Обобщаются результаты развития метода и его практического применения.

Монография предназначена для специалистов горного и механико-математического профиля, работающих в области механики горных пород и горного давления, а также горных инженеров и студентов горных вузов.

Г $\frac{30701-820}{055(02)-76}$ 671—76

© Издательство «Наука», 1976.

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние механики горных пород, как составной части горной науки, изучающей механические процессы толщи земной коры, вызванные естественными или искусственными причинами, в частности, в результате добычи полезных ископаемых и строительства подземных сооружений, характеризуется все более широким применением методов механики сплошной среды. Это обстоятельство объясняется, с одной стороны, все возрастающими запросами практики горного дела (рост добычи полезных ископаемых, углубление горных работ и т. п.), а с другой — развитием механики, задачей которой «...является изучение движения реальных тел методами механики сплошной среды... путем создания моделей, воспроизводящих основные, наиболее важные свойства реальных объектов» [78].

При изучении напряженно-деформированного состояния горного массива, возникающего под действием гравитационного поля и развивающегося под влиянием горных работ, ставится цель управления деформациями и напряжениями горных пород, обеспечивающего наиболее безопасную и производительную выемку полезных ископаемых.

Сложность задач механики горных пород объясняется множеством объектов исследований, бесчисленным разнообразием горногеологических условий, свойств горных пород и горнотехнических факторов.

Основные подходы к исследованию напряженно-деформированного состояния горного массива — натурный, лабораторный и аналитический.

Обращаясь к методам исследования проявлений напряженно-деформированного состояния (проявлений горного давления) в натурных условиях, следует отметить, что они в основном ограничиваются лишь измерением смещений массива и нагрузок на крепь.

В последние годы активно развиваются методы измерения напряжений в массиве горных пород, но, как правило, эти методы пока трудоемки и дают информацию лишь о состоянии отдельных точек массива.

Огромное количество проведенных экспериментальных исследований имеет, однако, очень узкую область применения — лишь в тех конкретных условиях, где они осуществлялись. Этому способствует множество методов и особенно методик исследований, которые не позволяют сравнить результаты разных исследований.

Лабораторный и аналитический подход к решению некоторых задач механики горных пород позволяет найти общие закономерности распределения напряжений и деформаций в горном массиве вокруг выработок. Правильность отражения реальных условий в задачах механики горных пород, решаемых этими методами, определяется как наиболее полным учетом свойств пород, т. е. выбираемой моделью среды, так и граничными условиями, удачно сформулированными в приближении к реальным. Однако аналитические решения предназначаются в основном для качественных описаний механического состояния горного массива.

В последнее время решение некоторых задач механики горных пород выполняется путем комплексного подхода к исследуемой задаче. Наиболее распространено сочетание натурных исследований и лабораторного моделирования, когда на моделях изучаются явления, недоступные натурным наблюдениям, или исследуется влияние изменения каких-либо факторов. Результаты исследования одним методом могут существенно дополняться исследованиями другим методом.

Сочетание аналитических решений, позволяющих выявить общие закономерности, с экспериментальными исследованиями, несущими информацию о конкретных процессах проявления механического состояния массива, открывает новые возможности в механике горных пород. Эти возможности прежде всего связаны с расчетами напряженно-деформированного состояния массива по наблюдаемым проявлениям горного давления. Методы, основанные на экспериментально-теоретическом подходе к исследованию вопросов механики горных пород, могут быть названы экспериментально-аналитическими.

Целью данной работы является изложение метода исследования напряженного состояния горного массива вокруг очистных выработок, основанного на результатах экспериментальных наблюдений проявлений горного давления при отработке угольных пластов и использующего аналитические методы механики сплошных сред.

Применение математического аппарата к результатам экспериментальных исследований позволит расширить область применения этих результатов при рассмотрении механических процессов в горном массиве, найти пути сопоставления и систематизации большого экспериментального материала. В то же время использование натурных наблюдений в качестве входных данных при исследованиях аналитическими методами позволит упростить аналитические решения, доведя их до расчетных ре-

зультатов, применить общие закономерности, определяемые аналитическими методами, к конкретным геологическим условиям и горнотехнической обстановке.

Современные методы механики сплошной среды, из которых в первую очередь отметим метод применения теории функций комплексного переменного к решению плоских задач теории упругости Н. И. Мусхелишвили [67], операторные методы теории линейной наследственности, разработанные академиком Ю. Н. Работновым [78] и развитые для горных пород М. И. Розовским и Ж. С. Ержановым [31], а также экспериментальные методы исследований механики горных пород (замеры смещений и напряжений в горных породах, реакции крепи) вполне достаточны для разработки экспериментально-аналитического метода исследования напряженно-деформированного состояния массива горных пород.

Экспериментально-аналитический метод дает возможность использовать современную вычислительную технику, масштабы применения которой для исследования вопросов механики горных пород в настоящее время совершенно незначительны.

Идея экспериментально-аналитического метода исследования механического состояния массива горных пород и горного давления впервые была выдвинута авторами в 1963 г. на конференции по математическим методам в механике горных пород (г. Новосибирск).

Разработка метода осуществлялась в Лаборатории горного давления Института горного дела Сибирского отделения АН СССР под руководством авторов монографии при участии канд. техн. наук В. С. Акимова и В. В. Цыцаркина (метод определения напряженного состояния массива горных пород вокруг подготовительных выработок и при взаимодействии подготовительных и очистных выработок), канд. техн. наук Д. П. Сенук и сотрудников Лаборатории В. Е. Миренкова, В. С. Носкова (формулировка и решение задач экспериментально-аналитического метода определения механического состояния массива пород вокруг очистных выработок), канд. физ-мат. наук Ф. М. Эрлихмана (метод определения напряженного состояния угольного пласта при его отработке и массива пород по сдвижениям земной поверхности), канд. техн. наук Г. Е. Посохова, А. Г. Шадрина и сотрудников Лаборатории В. В. Севостьянова, А. Ф. Терешкина (натурные наблюдения проявлений горного давления и метод определения смещений вмещающих пород при отработке угольных пластов Прокопьевско-Киселевского района Кузбасса, послужившие экспериментальной основой метода) и Е. Т. Ендроповой (программирование задач и расчеты механического состояния).

Авторы благодарны за постоянные консультации доктору технических наук, профессору Е. И. Шемякину.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ОТРАБОТКЕ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

§ 1. Обзор аналитических и экспериментальных методов изучения напряженно-деформированного состояния массива

При введении горных работ вокруг выработок происходит перераспределение напряжений, существовавших в нетронутом массиве. Напряженное состояние горных пород может быть исследовано различными методами.

К шахтным (натурным) методам исследования напряженно-деформированного состояния массива (проявлений горного давления) относятся экспериментальные методы измерений напряжений и деформаций массива пород и методы измерений смещений стенок выработок и толщи массива.

В настоящее время для определения напряженного состояния массива горных пород существуют следующие основные методы [68]: метод разгрузки, метод буровых скважин, метод разности давлений, метод датчиков напряжений и различные геофизические методы.

Метод разгрузки [43] основан на изучении деформаций элемента массива при искусственном отделении его от основного массива горных пород. Этот метод предназначен для измерения с помощью тензометров абсолютных деформаций керна, выбуриваемого на поверхности массива или в глубине его на торце измерительной скважины. Другая разновидность метода разгрузки — разгрузка путем обуривания керна с центральной скважиной, в которую вставляется измеритель деформации на торце измерительной скважины. Вычисление напряжений по измеренным деформациям керна выполняется и по закону Гука и по более точным связям напряжений и деформаций — с учетом наследственных свойств пород.

Широко применяется метод буровых скважин, позволяющий, как и метод разности давления, получать информацию об относительном изменении деформированного состояния измерительной скважины. Многочисленные виды деформометров различных конструкций отличаются как принципом действия, так и способом заделки приборов в скважинах и способами тарировки. Переход к напряжениям от измеренных деформаций производится либо лабораторной тарировкой, либо пересчетом по формулам теории упругости.

Метод разности давления основан на измерении изменения давления в гидродатчике, введенном в измерительную скважину при изменении деформированного состояния ее. При помощи этого метода получается информация об относительном изменении напряженного состояния.

Метод датчиков напряжений позволяет сразу получать информацию об изменении напряженного состояния окружающего массива. К приборам, называемым датчиками напряжений, относятся «жесткие» оптические датчики и датчики Вильсона. Предварительная тарировка датчиков напряжений в лабораторных условиях позволяет получить зависимость между напряжениями в датчике и напряжениями в массиве. Датчик работает в массиве подобно жесткому включению («жестким» считается тело, имеющее модуль упругости, хотя бы вдвое больший, чем окружающая среда), в котором изменение абсолютной величины напряжений зависит главным образом от соотношений главных напряжений окружающего материала, а не от его модуля упругости. Метод оптических датчиков в последнее время получает распространение в Советском Союзе.

Недостатками экспериментальных методов исследования напряжений являются необходимость проведения измерительных скважин, нарушающих напряженное состояние и создающих сложное напряженное состояние в измеряемой точке; трудность получения кернов, особенно в слабых породах; недостаточная разработка теории расчета напряжений по замеряемым деформациям; сложность измерения, применяемой аппаратуры и оборудования.

К геофизическим методам исследования напряжений относятся сейсмический, акустический, радиометрический, электрометрический и другие методы [42]. Этими методами изучаются различные физические характеристики горных пород, зависящие от напряженного состояния исследуемого массива. Геофизические методы получили широкое распространение при исследованиях напряженного состояния больших массивов пород.

Измерение смещений горных пород имеет своей целью получение информации об изменении деформированного состояния массива. Методы измерения смещений стенок выработок и толщи массива наиболее широко применяются при изучении проявлений горного давления вокруг очистных выработок. При исследовании сдвижений горных пород в выработках и в промежуточной толще результаты наблюдений могут быть представлены в виде вертикальных и горизонтальных абсолютных и относительных смещений в зависимости от развития горных работ, времени и других факторов. Наблюдения за сдвижениями кровли и почвы производятся в действующих или специально проходимых выработках. Сдвижения толщи изучают с помощью скважин, пробуренных в кровлю пласта из выработок вышележащего пласта или с поверхности. Относительные смещения контуров выработки, а также кровли с почвой замеряются между контур-

ными и глубинными реперами при помощи измерительных стоек различных конструкций. Для разделения смещений применяется абсолютная привязка сдвижений, осуществляемая нивелированием и плановой съемкой подвижных реперов с неподвижными.

Результаты измерения смещений горных пород представимы в виде векторов сдвижений точек массива и земной поверхности, перемещений точек границы кровли при разработке угольных пластов, деформаций контуров подготовительных выработок.

Однако изучение сдвижений не предполагает исследования напряженного состояния массива — в этом ограниченность приложимости наблюдаемых сдвижений к описанию механического состояния горных пород.

Вместе с тем простота шахтных замеров смещений, несложность аппаратуры и установки наблюдательных станций — все это позволяет считать метод измерения смещений наиболее эффективным экспериментальным методом исследования проявлений горного давления.

Экспериментальные методы исследования напряженно-деформированного состояния в горных породах позволяют получать информацию о механическом состоянии отдельных точек или ряда точек горного массива в конкретных геологических условиях и горнотехнической обстановке.

Наиболее общие закономерности напряженно-деформированного состояния вокруг горных выработок могут быть получены аналитическими методами. В настоящее время при исследованиях напряженного состояния горного массива широко используются методы механики сплошных сред (теории упругости и пластичности, теории предельного равновесия сыпучих сред и т. д.).

Аналитические решения задач о напряженном состоянии горных пород вокруг очистных выработок основывались на предположении, что горный массив есть сплошная однородная, упругая, изотропная среда. Относительно расчетных схем задач, свойств угольного пласта, залегающего в массиве, и характера взаимодействия боковых пород с пластом делались различные предположения.

Одной из первых была работа С. Г. Михлина [63, 64] о напряженном состоянии горных пород вокруг заглубленной горизонтальной очистной выработки, пройденной по абсолютно жесткому угольному пласту, на контактах которого с кровлей осуществляется проскальзывание без трения. В результате решения определялось напряженное состояние пород кровли, однако гипотеза несжимаемости пласта привела к бесконечным напряжениям над забоем.

Г. И. Баренблатт и С. А. Христианович [8] также рассмотрели задачу для заглубленной горизонтальной очистной выработки в угольном пласте в предположении о смыкании кровли и почвы в выработанном пространстве. Бесконечные напряжения над пластом устранялись введением гипотезы пластического

раздавливания призабойного участка пласта. Однако из-за принятых идеализаций (в основном по расчетной схеме) полученные в результате решения протяженности пролетов зависающей кровли (600—700 м) оказываются нереально большими.

Подход к задачам о механическом состоянии массива вокруг очистных выработок, разработанный Г. И. Баренблаттом и С. А. Христиановичем, получил широкое распространение, а аналитическое решение, основанное на таком подходе, уточняет закономерности напряженного состояния в зависимости от реальных механических и технологических факторов.

С. В. Кузнецов [47—52] развил решение С. А. Христиановича, дополнив задачу учетом разрыхления обрушающихся пород, уменьшения опускания кровли и введения крепи в выработанное пространство. Помимо получения решения, автор дает анализ влияния рассматриваемых факторов на механическое состояние горного массива. Так, в работе [50] им рассмотрена роль величины бокового распора, в [50—51] анализируется распределение напряжений, в [49] рассматривается практически важный вопрос о параметрах первичной посадки лавы.

Ряд аналитических решений задач о напряженном состоянии горных пород вокруг очистных выработок был выполнен в ИГД СО АН СССР под руководством И. А. Кунина [12—14]. На основе подхода в постановке задач, заложенного в работе [8], авторы рассмотрели вопросы о механическом состоянии горного массива вокруг заглубленной горизонтальной и наклонной очистной выработки. При формулировке граничных условий принималось, что угольный пласт обладает упругими свойствами, а вертикальные перемещения кровли прямо пропорциональны действующим на пласт нормальным напряжениям, мощности пласта и обратно пропорциональны модулю упругости угля. Задача для одиночной горизонтальной очистной выработки [12, 14] решалась последовательными приближениями, причем нулевым приближением служило решение задачи для абсолютно жесткого пласта, как и в [63, 64]. Возникающие в результате нулевого приближения бесконечные напряжения над забоем устранялись первым и последующими приближениями, учитывающими упругую податливость пласта. При изучении напряженного состояния массива вокруг крутопадающего пласта [13] принималась гипотеза пластического раздавливания призабойной зоны и определялась ее величина.

В рамках предложенной постановки и метода решения [12] была рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии массива вокруг двух симметрично расположенных выработок в двух параллельных пластах [16].

Для некоторых задач авторы провели числовые расчеты [12, 16]. Результаты расчетов позволяют оценить влияние отношения разности мощности пласта и закладки к длине очистной выработки на величину и зону распространения нормальных к пласту напряжений (опорного давления), влияние крепи в вы-

работанном пространстве и расстояния междупластия на напряженное состояние.

Существенным предположением, лежащим в основе расчетных схем этих задач, являлось предположение о загубленности очистных выработок. Трудности, возникающие при решении задачи с очистной выработкой вблизи дневной поверхности, имеют математический характер. Эти трудности принципиально были разрешены Д. И. Шерманом, который приложил разработанный им метод решения задач для многосвязных областей к задаче о напряженном состоянии упругой весомой полуплоскости, ослабленной отверстием эллиптической формы, близко расположенным от ее границы [91].

Метод Д. И. Шермана был использован рядом авторов для определения напряженного состояния массива вокруг очистных выработок вблизи поверхности.

Так, Л. Н. Карпенко рассматривал близко расположенные от границы (поверхности) эллиптическую [37] и очистную выработки в вертикальном пласте [38].

В задаче для вертикального пласта предполагалось пластическое раздавливание его в призабойной зоне. Численные расчеты показали зависимость максимального нормального напряжения на пласт (максимума опорного давления) и протяженности зоны пластического состояния угля в верхней и нижней частях очистной выработки от глубины выработки и ее протяженности, мощности пласта и пластических свойств угля [38].

В рамках постановки [14] и метода решения Д. И. Шермана [91] была рассмотрена [16] задача о напряженно-деформированном состоянии вокруг одиночной горизонтальной незаглубленной очистной выработки. Решение задачи проведено в нулевом приближении, т. е. в предположении абсолютной жесткости пласта, что привело к неограниченным напряжениям в породах призабойной зоны.

Одна из двух больших трудностей математической постановки задач при аналитическом решении заключается в формулировке граничного условия по контакту пласта с породами, особенно в призабойных зонах. Гипотезы жесткого, упругого, пластического поведения угольного пласта являются приближенными, не позволяющими охарактеризовать все многообразие свойств и состояния пласта вблизи забоя. Естественны поэтому попытки сформулировать граничные условия, исходя из гипотез, основанных на наблюдениях за поведением пласта в натурных условиях.

Так, Ю. М. Либерман [59] развил постановку [8], приняв в призабойной зоне гипотезу не пластического состояния угля, а такого его состояния, когда деформирование контура кровли над пластом (сжатие пласта) происходит по кривой вида гиперболы. Два произвольных параметра, входящих в принимаемое по гиперболическому закону граничное условие для смещений, нормальных к пласту, определяются в процессе решения.

Полученное автором решение отразило реальный факт конечности напряжений в породах над забоем, но идеализация расчетной схемы (смыкание почвы и кровли) и среды (упругая) приводит к большим концентрациям напряжений и смещениям вблизи забоя.

Развитие аналитических методов решений задач о напряженном состоянии горного массива на основе упругой модели в настоящее время идет по двум путям: с одной стороны, уточняются расчетные схемы задач, с другой — более близко к реальным описываются условия на границах пласта. Так, от рассмотрения заглубленных очистных выработок с плавно смыкающейся кровлей и почвой [8] перешли к рассмотрению очистных выработок вблизи поверхности в предположении как смыкания кровли с почвой, так и зависания кровли в выработанном пространстве [14, 38, 48], а также к учету в расчетной схеме факта обрушения пород в выработанном пространстве [52].

С другой стороны, если первоначально граничные условия принимались из предположений абсолютной жесткости пласта [63], то в более поздних постановках задач учитываются пластические призабойные зоны [8], упругая податливость пласта [14], наличие крепи [50] и отпора закладки [70]. Попытки [59] привлечения в качестве граничных условий гипотез, основанных на экспериментальных данных о смещениях в призабойной зоне, можно рассматривать двояко — как несомненно положительные, вносящие предположения о проявлениях горного давления из практики шахтных исследований, однако предполагаемые виды профильных смещений (гипербола [59] и дуга окружности) не могут исчерпать всего многообразия видов перемещений границы кровли, встречающихся в практике.

В решениях задач о напряженном состоянии массива вокруг очистной выработки исходят из идеализации свойств горных пород — полагают их однородной изотропной упругой средой.

Механика горных пород как раздел механики сплошных сред развивалась от рассмотрения горных пород как идеально упругих сред к учету физически нелинейных зависимостей напряжений и деформаций.

В аналитических решениях задач о напряженном состоянии вокруг подготовительных выработок горные породы рассматривались уже анизотропными [56, 57], упруго-пластическими [44] и пластическими [28].

Процессы оседания земной поверхности, сдвижения толщи горных пород при разработке полезных ископаемых, проявления горного давления в выработках указывают на изменения механического состояния горных пород во времени, связанные с проявлением их реологических свойств. Свойства ползучести проявляются в экспериментальных исследованиях образцов пород также при длительном действии нагрузки.

Для описания закономерностей деформирования горных пород во времени выдвигались различные теории, на основании

которых были сделаны аналитические решения ряда задач механики горных пород.

Так, Т. А. Крыжановская [46], описывая свойства горных пород моделью вязкой жидкости, изучала влияние времени на сдвижение налегающего массива при разработке угольного пласта. Предлагалось использовать ряд реологических моделей для изучения развития сдвижений массива горных пород во времени.

Многие исследователи рассматривали изменение напряженного состояния горных пород вокруг подготовительных выработок в условиях ползучести. Систематическое построение теории ползучести горных пород и ее приложения к изучению напряженно-деформированного состояния различных подземных сооружений даны Ж. С. Ержановым [31]. Экспериментальные исследования образцов различных горных пород и аналитическое изучение ползучести в условиях естественного залегания горных пород позволили автору принять для описания зависимости напряжений и деформаций от времени закон линейного деформирования материалов, обладающих свойством наследственности, в форме, предложенной Л. Больцманом и математически развитой В. Вольтерра.

Использование для описания ползучести горных пород общего закона линейного деформирования материалов, определяемого уравнением состояния теории наследственности В. Вольтерра, позволило применить при решении задач механики горных пород принцип Вольтерра, разработанный Ю. Н. Работновым [78]. Ж. С. Ержановым получено в замкнутом виде решение ряда задач: о напряженно-деформированном состоянии горных пород вокруг незакрепленного и закрепленного шахтного ствола и горизонтальной выработки круглого сечения, в потолочинах камерообразных выработок, вокруг тоннельных выработок различного поперечного очертания. Результаты решения используются для количественной оценки влияния свойств ползучести пород на механическое состояние массива.

Теория наследственной упругости получает широкое применение при решении задач о механическом состоянии горных пород вокруг подготовительных [15, 31] и тоннельных выработок [31].

А. М. Вайсманом и В. Е. Вдовиным в рамках теории линейной наследственности была поставлена задача о напряженном состоянии пород вокруг движущейся горизонтальной выработки. При произвольных скоростях движения забоя решение этой задачи представляет значительные трудности из-за того, что граничные условия имеют интегральную формулировку и не подходят ни под один тип обычных граничных условий теории упругости. Авторам удалось оценить влияние ползучести пород на нормальные к пласту напряжения (опорное давление) и на расположение максимума опорного давления только в случае неподвижного забоя.

Л. К. Либерман [58] рассмотрел задачу о напряженном состоянии в упруго-наследственной среде с прямоугольным наклонным, подкрепленным вырезом, имитирующим выработанное пространство лавы до первой посадки.

Процесс разрушения угольного пласта под действием горного давления в подавляющем большинстве случаев (исключая динамические и газодинамические явления) носит спокойный характер, т. е. область предельного состояния постепенно увеличивается с ростом нагрузок на пласт. Таким характером разрушения и определяется выбор математических методов, применяемых для определения предельных нагрузок, отвечающих переходу материала угольного пласта в область неупругих деформаций, то есть задачи ставятся как статические.

При решении задачи о распределении напряжений в массиве горных пород [8, 62, 63] предполагается, что уголь, обладающий существенно иными характеристиками прочности по сравнению с боковыми породами, находится вблизи забоя в пластическом состоянии и не может выдержать нагрузки, превосходящей его несущую способность. Наличие выработки вызывает дополнительные напряжения как в породах, так и в угольном пласте, но так как уголь вблизи забоя находится в пластическом состоянии и не способен воспринимать нагрузки большие, чем определяемые его пластическими свойствами, то основная часть дополнительных нагрузок воспринимается удаленными участками пласта, находящимися в упругом состоянии.

Напряженное состояние в пластической зоне считается соответствующим напряжениям пластической полосы, зажатой между двумя жесткими плитами. Условием текучести является условие постоянства максимальных касательных напряжений.

Исследуя схему Г. И. Баренблатта — С. А. Христиановича, С. В. Кузнецов изучает влияние крепи, бутовой закладки, консольного зависания кровли на опорное давление и протяженность призабойной пластической зоны [47—52].

Для очистной выработки в вертикальном пласте, отработка которой начинается почти от земной поверхности, исследовалась [38] протяженность зоны пластического состояния угля, образующейся вверху и внизу выработки.

В рассмотренных работах длина пластической зоны определена из условий.

1. В граничном сечении пластической зоны нагрузка, определяемая из закона распределения Прандтля,

$$\sigma_y = -k\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x - x_0}{h}\right),$$

где k — интенсивность касательных напряжений; h — половина мощности угольного пласта; x_0 — граница забоя (равна нагрузке, получаемой из решения задачи без учета пластической зоны).

2. Полная нагрузка на кровлю в пластической зоне равна нагрузке, действующей на участке от забоя фиктивной выработки до границы пластической области, и нагрузке, которая находится из решения задачи без учета призабойной области пластического состояния. Длина фиктивной выработки определяется также без учета пластической зоны. Таким образом, предложенные в работах [38, 48] уточнения распределения напряжений вокруг очистной выработки относятся лишь к поведению вмещающих угольный пласт пород. Влияние физико-механических свойств углей, зависимость напряженного состояния угольного пласта от очистных работ не рассматривались, изучалось только формирование эпюры опорного давления.

Несколько другой метод расчета напряжений впереди очистной выработки основывается (решение В. Г. Гмошинского [21] на условии предельного равновесия и в предположении постоянства напряжений по мощности пласта и о том, что переход угля в предельное состояние зависит только от коэффициента сцепления. Нагрузки на пласт в упругой зоне найдены аппроксимацией эпюры опорного давления, полученной А. Н. Динником, А. Б. Моргаевским, Г. Н. Савиным [29] при определении напряженного состояния выработки в упругом массиве. Точка максимума опорного давления (протяженность разрушенной зоны) определена из условия непрерывности напряжений. Величину отжима автор оценивает размером горизонтального перемещения угля в области разрушения.

Используя подход В. Г. Гмошинского к определению напряжений впереди забоя очистной выработки, В. В. Ходот [87] вводит понятие фиктивного увеличения длины выработки, связывая его с наличием в угольном пласте зоны пониженных, по сравнению с первоначальными, напряжений. Упругие напряжения распределяются в этом случае вокруг фиктивной выработки. Рассчитывая напряжения в разрушенной зоне, автор также допускает неизменность напряженного состояния по мощности пласта. Условием разрушения является прямолинейная огибающая кругов Мора.

Расчеты эпюры опорного давления, выполненные В. Г. Гмошинским и В. В. Ходотом, не удовлетворяют условию баланса сил, заключающемуся в равенстве получаемых величин весу зависающей толщи пород над выработанным пространством, которым и создается опорное давление на угольный пласт. Кроме того, В. В. Ходотом принята величина максимальной концентрации напряжений в упругом массиве, равная $2\gamma H$, что соответствует решению о выработке круговой формы при гидростатическом распределении напряжений в нетронутых породах.

Уточнение решения [21], основанное на балансе веса толщи пород над выработкой и суммарной реакции угольного пласта в зоне опорного давления, содержится в работе К. А. Ардашева [7]. В ней принят также иной, чем в [21], характер нисходящей ветви эпюры опорного давления, а именно, обратная

пропорциональность напряжений квадрату расстояния, аналогично [87], и прямая пропорциональность весу пригружающего блока пород. В. В. Дрожжиным [30] проведено исследование напряженного состояния угольного пласта при отработке короткими забоями. В работе [30] широко пспользовались результаты [7].

Определению напряжений впереди очистной выработки, полученному в работах [7, 21, 87], основывающихся на схеме В. Г. Гмошинского, свойствен тот же недостаток, что и в работах [8, 38, 48, 58], исследование напряженно-деформированного состояния угольного пласта сводится только к построению эпюры опорного давления и определению размеров зоны предельного состояния угля.

В работе [53], являющейся приложением идей и метода, разработанного в ИГД СО АН СССР и КузНИУИ [27, 66], исследовано влияние способов выемки угля, управления горным давлением и расположения забоя на величины и характер распределения напряжений в призабойной части угольного пласта. Рассматривается задача о равновесии упругой полуполосы с заданными на ее кромках внешними усилиями и свободным от нагрузок торцом. Граничные условия по напряжениям для полуполосы получены экспериментально-аналитическим методом [17, 26] определения напряжений в породах кровли по известным смещениям границы кровли с пластом. Решение задачи получено методом Н. И. Мусхелишвили при конформном отображении полуполосы на верхнюю полуплоскость. С. Я. Кушнир [53] определяет область влияния способов выемки на напряженно-деформированное состояние пласта, устанавливает точку максимума опорного давления, исследует при постоянном способе выемки угля влияние способа управления кровлей. Из полученных результатов делается вывод о благоприятном характере распределения напряжений при работе механизированной крепи и выемке угля полосами по падению.

Наиболее полное описание зависимости напряженного состояния массива в зоне опорного давления от свойств пласта содержится в работах И. М. Петухова, А. М. Линькова [33].

В качестве основной схемы рассматривается задача плоской деформации о распределении напряжений в окрестности очистной выработки, пройденной в горизонтальном пласте, прочностные характеристики которого ниже, чем у вмещающих пород. Принимается, что материал пласта не выдерживает касательных напряжений, больших некоторого критического значения.

Решение в упругой части пласта строится приближенно, в предположении о малой мощности пласта. В области предельного состояния напряжения определяются решением задачи о сжатии пластического слоя между шероховатыми плитами. Граница пластической области определена из условия непрерывности напряжений σ_y.

Анализ решения [33] показывает, что вне зоны предельного состояния граница между породой и пластом может считаться плоской, а касательные напряжения на ней равны нулю, т. е. упругие свойства пласта мало сказываются на опорном давлении и в первом приближении их можно не учитывать.

Первые попытки построения и исследования слоистых моделей, приближающихся по своей конфигурации к интересующей нас расчетной схеме, были предприняты В. Ф. Трумбачевым и Е. А. Мельниковым [62]. Были рассмотрены слоистые модели, имитирующие призабойные участки угольных пластов с очистными выработками и закладкой или обрушением выработанного пространства. Все модели изготавливались из игдантина, причем разномодульность слоев обеспечивалась различным весовым соотношением входящих в игдантин компонентов [62]. Результаты этих исследований нельзя признать достаточными по следующим причинам:

1) в моделях из материалов типа игдантинов, деформирующихся в условиях плоского напряженного состояния, не выполняется основной закон физического подобия Ньютона по деформациям и вследствие этого не выполняется подобие граничных условий: формы контуров выработок до деформации и после отличаются на 35—40%;

2) все материалы типа игдантинов деформируются как упруго-пластические, а не упругие тела, поэтому для них неприменим закон независимости действия сил.

Обе причины приводят к искажению полей напряжений, на что указывали В. Ф. Трумбачев и Е. А. Мельников [62].

Если в модели имеются два слоя с разными модулями упругости и менее жестким верхним слоем, то при нагружении оба слоя стремятся расшириться в направлении, перпендикулярном плоскости модели. При этом «верхний слой, склонный к большей деформации, будет вызывать в нижнем растягивающие напряжения... Эти искажения наблюдаются прежде всего на контактах слоев и распространяются в глубь слоя. Если мощность слоя невелика..., то искажения охватывают весь слой, исключая тем самым возможность получения достоверных данных для всех его точек» [62]. Поэтому для анализа поля напряжений по всей мощности призабойной толщи пласта результаты В. Ф. Трумбачева и Е. А. Мельникова неприменимы.

В работе А. Д. Игнатьева [34] материал типа игдантина, вопреки указанным выше обстоятельствам, использован в моделях для анализа напряженного состояния призабойной части массива в зависимости от конфигурации очистного забоя, создаваемой исполнительным органом угледобывающих комплексов. При этом приводятся графики τ_{max} не только по середине мощности пласта, но и вблизи контактов пласта с кровлей. Эти результаты также нельзя признать достоверными.

В этой же работе исследуется характер разрушения призабойной части угольного массива моделированием на агарине —

хрупком материале, сохраняющем пропорциональность между напряжениями и деформациями вплоть до разрушения. Разрушение материала в области, отвечающей угольному пласту, начинается вблизи углов выработки, а затем на расстоянии 0,3—0,4 вынимаемой мощности в массиве. Разрушение возникает в местах наибольших значений максимальных касательных напряжений. Явления, наблюдаемые в процессе моделирования, могут служить лишь для качественного описания разрушения пласта, так как в методике моделирования не учитывались различия прочностных характеристик пласта и вмещающих пород.

Обзор исследований напряженного состояния горных пород вокруг очистных выработок аналитическими методами механики сплошных сред позволяет сделать вывод, что развитие аналитических решений задач механики горных пород требует уточнения математических моделей среды и уточнений формулировок граничных условий на поверхности контакта пород с пластом.

Аналитические исследования напряженного состояния угольного пласта в призабойной зоне ограничивались определением эпюры опорного давления на угольный пласт, размеров зоны предельного, пластического состояния. Вопросы распределения напряжений и деформаций в призабойной части угольного пласта остаются неисследованными.

§ 2. Задачи разработки экспериментально-аналитического метода определения механического состояния массива горных пород

Обеспечение эффективности и безаварийного технологического процесса добычи угля на всех стадиях требует выбора рациональных порядков и очередности отработки пластов, схем вскрытия и подготовки размеров выемочных полей и направления их выемки; целесообразного места расположения и времени проведения подготовительных и нарезных выработок, выбора технологии их проведения и крепления, необходимых параметров крепи; способов выемки, крепления и управления кровлей в очистных забоях. Основой для решения этих вопросов должны являться исследования процессов формирования напряженно-деформированного состояния массива вокруг очистных и подготовительных выработок в зонах опорного давления, а именно: границ распространения опорного давления, механизма его формирования как следствия поведения кровли при движении очистного забоя, воздействия опорного давления на подготовительные выработки.

Исследования механики горных пород, в частности напряженно-деформированного состояния массива горных пород, относятся к числу весьма сложных. Этим вопросам посвящено

БИБЛИОТЕКА

значительное количество шахтных наблюдений, лабораторных экспериментов и аналитических исследований в СССР и за рубежом. Установлены некоторые закономерности смещений боковых пород угольных пластов, проявлений опорного давления, работы крепей подготовительных выработок в конкретных условиях различных угольных бассейнов. Однако напряженно-деформированное состояние массива и процессы его формирования при очистных работах изучены недостаточно полно.

Подготовка научных основ для эффективной и безопасной разработки пластов на глубоких горизонтах требует глубокого изучения закономерностей тех механических процессов, которые происходят в массиве горных пород при разработке угольных пластов и являются причиной усиливающихся с глубиной проявлений горного давления. Поэтому проблема формирования напряженно-деформированного состояния массива вокруг очистных и подготовительных выработок приобрела важное значение и является актуальной. Недостаточная изученность ее объясняется многообразием закономерностей проявлений горного давления в сложных условиях залегания угольных пластов, слабым развитием специальных экспериментально-теоретических исследований в области механики горных пород. Условия разработки пластов требуют для исследования указанных вопросов создания специальных расчетных схем и методов расчета проявлений горного давления.

Преобладающим методом экспериментальных исследований проявлений горного давления при разработке угольных пластов являются замеры смещений горных пород. Однако используемые в настоящее время результаты этих экспериментов не исчерпывают той информации, которая в них заключена и которая может быть раскрыта синтезированием экспериментальных и аналитических методов. Постановка проблемы включает вопрос о широком использовании аналитических методов для анализа формирования и расчета напряженно-деформированного состояния массива по экспериментальным данным, в частности замерам смещений боковых пород — профильных линий смещений кровли, и развития поверхностей смещений отдельных точек кровли во времени.

Для этого необходимо исследовать кинематику поведения боковых пород в зонах опорного давления при движении забоя, установить закономерности развития смещений пород; разработать способы использования получаемой при натурных наблюдениях информации о смещениях боковых пород для расчета напряженно-деформированного состояния массива по типовым программам с применением ЭВМ; провести расчеты и анализ процесса формирования напряженно-деформированного состояния массива для типовых случаев профильных линий смещений кровли, условий на контакте пласта с породами, проявлений реологических свойств среды и развития горных работ.

ГЛАВА II

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

§ 1. Основные уразнения

При движении очистного забоя происходит пространственно-временное перераспределение напряженно-деформированного состояния горного массива.

Пространственная картина распределения напряжений вокруг выработок весьма сложна и известными аналитическими решениями не описывается. Обычно при достаточной длине выработок пользуются задачами о плоскодеформированном или плоско-напряженном состоянии массива в сечениях, перпендикулярных длине выработки и достаточно удаленных от ее концевых частей.

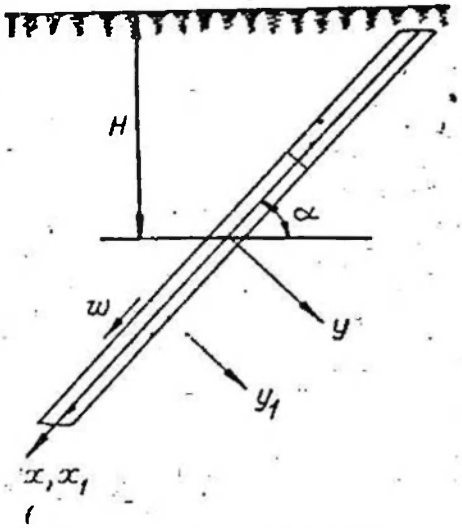


Рис. II.1. Расчетная схема к формулировке основных уравнений.

Для качественной оценки изменения напряженно-деформированного состояния массива в зависимости от развития горных работ будем рассматривать пространственную картину по сечениям, принимаемым как плоские, при условии, что каждое сечение, в котором исследуются изменения напряжений и деформаций, сохраняет свою пространственную ориентировку относительно очистного забоя в течение всего времени наблюдений. Тогда рассчитанное напряженное состояние массива будет в большинстве случаев завышенным по сравнению с реальным пространственным перераспределением напряжений, что идет в запас прочности. Перераспределение напряженно-деформированного состояния массива имеет также временной характер, связанный как с движением забоя во времени, так и с проявлением реологических свойств горных пород.

Будем рассматривать горный массив как сплошную однородную изотропную среду, занимающую полуплоскость. В угольном пласте, наклонном к земной поверхности под углом α (рис. II. 1), проводится очистная выработка.

Уравнения движения горного массива вокруг движущейся выработки в системе координат $x0y$ для плоской задачи записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} - \gamma \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} - \gamma \cos \alpha; \qquad \text{(II.1)}$$

где σ_x, σ_y — нормальные, τ_{xy} — касательные напряжения; U_x, U_y — компоненты вектора перемещений по осям системы координат (смещения нормальные к пласту и вдоль напластования); ρ, γ — плотность и объемный вес горных пород; t — время.

Уравнения, связывающие деформации и перемещения,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}. \qquad \text{(II.2)}$$

Уравнения, выражающие неразрывность деформаций, имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad \text{(II.3)}$$

Переходя к формулировке физических уравнений, связывающих напряжения и деформации, отметим, что сравнение результатов теоретических исследований, основанных на применении классической теории упругости в задачах механики горных пород, и соответствующих экспериментальных данных указывает на отклонение от основных положений теории упругости. Последняя может отразить только упруго-мгновенное изменение механического состояния массива.

Можно указать два основных предположения, отклонения от которых чаще всего характеризуют поведение реальных горных пород в отличие от идеально упругих сред. Во-первых, это отклонение физического характера, т. е. отличие связей напряжений и деформаций от закона Гука. В свою очередь, эти отклонения могут быть слабыми, т. е. основа процесса описывается законом Гука, а поправки к нему носят характер малых. Могут быть отличия существенные, когда вместо закона Гука следует применять законы пластического деформирования твердых тел.

Во-вторых, непригодность идеально упругой модели для описания процессов в твердых телах часто связана с предположением о малости деформации, с линеаризацией основных уравнений состояния и краевых условий, т. е. геометрической или кинематической нелинейностью.

Необходимо заметить, что эти пути уточнения классической модели идеально упругой среды, вообще говоря, не связаны. Можно указать примеры, когда среда с удовлетворительной точностью следует закону Гука, но требует уточнений за счет кинематической нелинейности (теория трещин в упругом теле,

склонном к хрупкому разрушению). И, наоборот, иногда для описания динамических и квазистатических процессов оказываются вполне пригодными линейные уравнения состояния и линейные краевые условия (снесенные на поверхность до деформаций), а необходимые уточнения вносятся в описание связей напряжений и деформаций в виде слабых отклонений от закона Гука.

Как показывают результаты исследований физико-механических свойств горных пород, а также многочисленные экспериментальные данные о проявлениях горного давления, именно такой путь возможных уточнений может быть применен в описании поведения горных пород.

Среди многочисленных возможных предложений, уточняющих закон Гука, рассмотрим модель среды с упругим последствием Больцмана [31] как наиболее полно описывающую слабую физическую нелинейность в задачах для неидеально упругих горных пород.

В одноосном напряженно-деформированном состоянии модель Больцмана связывает напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ в момент t следующим соотношением:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E' \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau, \qquad \text{(II.4)}$$

где E — мгновенный модуль упругости;

E' — константа размерности $[E/T]$, а интегральное слагаемое включает функцию «памяти», «наследственности» $\varphi(\xi)$, описывающую влияние всех деформаций в предыдущие моменты времени на напряжение в момент времени t. Иногда пользуются разрешенной относительно ε формой связи

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma(t) - \int_{-\infty}^{t} L(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau\right] \qquad \text{(II.5)}$$

и говорят, что (II.5) описывает закон ползучести материала, а (II. 4) — закон релаксации; соответственно $\varphi(\xi)$ называют ядром релаксации, а $L(\xi)$ — ядром ползучести.

В работе [80] были указаны свойства функции $\varphi(\xi)$, с помощью которых описываются слабые отклонения от закона Гука в соответствии с (II.4):

1) $\varphi(t, \tau)$ зависит только от разности аргументов $\varphi(t, \tau) = \varphi(t-\tau)$. Это условие Вольтерра было указано как следствие инвариантности (II.4) относительно начала отсчета процесса деформирования;

2) $\varphi(\xi)$ — положительная и монотонно убывающая функция при $\xi \to \infty$. Это требование физически очевидно, так как в более ранние моменты τ деформации должны иметь более слабое влияние на то, что происходит в данный момент $t > \tau$;

3) $E'\int_0^\infty \varphi(\xi)\,d\xi < E$. Последнее условие указывает на то, что интегральное слагаемое в (II.4) играет роль поправочного члена к первому слагаемому, определенному в соответствии с законом Гука.

На функции $\sigma=\sigma(t)$, $\varepsilon=\varepsilon(t)$ из (II.4) или (II.5) можно смотреть как на параметрическое описание зависимости $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ с физической нелинейностью связи напряжений и деформаций. Необходимо подчеркнуть, что в модели Больцмана описание отклонений от закона Гука достигается линейной математической моделью. Это чрезвычайно важно, так как позволяет целиком использовать математический аппарат теории упругости.

Изложенное дает возможность принять общее название описываемых с помощью (II.4) сред как неидеально упругих. К настоящему времени предложено большое количество различных описаний слабых отклонений от закона Гука, при этом используются не только интегральные операторы типа (II.4), типа Вольтерра

$$\sigma = \hat{J}[\varepsilon(t)], \quad \hat{J} = E - E'\int_0^t \varphi(t-\tau)\,d\tau, \tag{II.6}$$

но и дифференциальные операторы

$$\sigma = E\varepsilon + E'\dot{\varepsilon} \quad \text{(среда Фойгта)}; \tag{II.7}$$

$$\sigma = E\dot{\varepsilon} + E''\varepsilon \quad \text{(среда Максвелла)}$$

и тому подобные.

Общим для них является то, что упругие константы в связях закона Гука заменяются временными (интегральными или дифференциальными) операторами.

Покажем некоторое преимущественное положение модели Больцмана среди других, а именно, при надлежащем выборе функции наследственности из (II.4) можно получать различные конкретные модели. Так, если выбрать функцию наследственности в виде

$$\varphi(\xi) = \exp(-\gamma\xi), \quad (\gamma>0,\ \xi\geqslant 0), \tag{II.8}$$

то изменение напряжений во времени определяется в соответствии с (II.4)

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \frac{E'}{E}\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\,d\tau\right]. \tag{II.9}$$

Из (II.9) дифференцированием по t можно получить модель Максвелла (II.7); если выбрать ядро в виде $\delta(\xi)$, где $\delta(\xi)$ — обобщенная функция (функция Дирака; здесь допущено от-

клонение от условий монотонности $\varphi(\xi)$), то из (II.4) следует модель Фойгта. Нетрудно заметить, что выбор в качестве ядер в (II.4) обобщенных функций и их производных приводит к дифференциальным операторам в связях напряжений и деформаций для идеально упругих сред; в других случаях оператор остается интегральным. Так что в широком классе задач можно применять модель Больцмана, а основное внимание следует уделить выбору ядер, позволяющих наиболее точно описать физические отклонения от закона Гука.

Обобщение на пространственный случай требует введения предположения, что в общем случае и закон изменения объема, и связь вторых инвариантов тензоров напряжений и деформаций имеют вид, аналогичный (II.4); при этом также принимается, что тензоры напряжений и деформаций соосны. Тогда вместо закона Гука для однородной изотропной среды Больцмана следуют связи напряжений и деформаций в случае плоской задачи в виде

$$\sigma_x = \tilde{\lambda}\theta(t) + 2\tilde{\mu}\frac{\partial U_x(t)}{\partial x};$$

$$\sigma_y = \tilde{\lambda}\theta(t) + 2\tilde{\mu}\frac{\partial U_y(t)}{\partial y}; \qquad \text{(II.10)}$$

$$\tau_{xy} = \tilde{\mu}\left[\frac{\partial U_y(t)}{\partial x} + \frac{\partial U_x(t)}{\partial y}\right].$$

Здесь

$$\theta = \frac{\partial U_x(t)}{\partial x} + \frac{\partial U_y(t)}{\partial y};$$

t — время, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ — интегральные операторы вида

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1 - \overset{*}{\lambda}),\ \overset{*}{\lambda} \cdot f = \int_0^t N(t-\tau) f(\tau)\, d\tau;$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(1 - \overset{*}{\mu}),\ \overset{*}{\mu} \cdot f = \int_0^t P(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad \text{(II.11)}$$

λ, μ — упругие константы Ламе; $N(t-\tau)$, $P(t-\tau)$ — две функции последействия, входящие в описание изотропной упруго-наследственной среды подобно двум упругим константам и удовлетворяющие, вообще говоря, условиям для $\varphi(\xi)$ из (II.4).

Физические уравнения (II.4), разрешенные относительно деформаций, имеют вид:

$$\tilde{E}\varepsilon_x(t) = (1 - \tilde{\nu}^{(2)})\sigma_x(t) - \tilde{\nu}(1 + \tilde{\nu})\sigma_y(t); \qquad \text{(II.12)}$$

$$\tilde{E}\varepsilon_y(t) = (1 - \tilde{\nu}^{(2)})\sigma_y(t) - \tilde{\nu}(1 + \tilde{\nu})\sigma_x(t);$$

$$\tilde{\mu}\gamma_{xy}(t) = \tau_{xy}(t).$$

Здесь $\tilde{E}$, $\tilde{\nu}$ — интегральные операторы следующего вида:

$$\tilde{E} = E(1 - \dot{E}), \quad \dot{E}f = \int_0^t M(t-\tau) f(\tau)\, d\tau;$$

$$\tilde{\nu} = \nu(1 + \dot{\nu}), \quad \dot{\nu}f = \int_0^t L(t-\tau) f(\tau)\, d\tau; \qquad \text{(II.13)}$$

E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $M(t-\tau)$; $L(t-\tau)$ — функции наследственности.

Интегральные операторы $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ выражаются через интегральные операторы $\tilde{E}$, $\tilde{\nu}$ следующим образом:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{E}\tilde{\nu}}{(1+\tilde{\nu})(1-2\tilde{\nu})}; \quad \tilde{\mu} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})} \qquad \text{(II.14)}$$

Модель Больцмана, описываемая физическими уравнениями (II.10) или (II.12), позволяет интерпретировать характер изменения деформированного состояния горного массива следующим образом. Подвигание забоя вызывает мгновенное перераспределение напряженного состояния массива и выражается в мгновенных деформациях его, рассматриваемых с точки зрения модели Больцмана как упруго-мгновенные деформации. Эти упруго-мгновенные деформации подчиняются зависимости $E\varepsilon(0) = \sigma(0)$, получаемой из (II.12) при $t=0$ (момент подвигания забоя, т. е. закону Гука. С течением времени ($t>0$) в среде проявляется последействие, выражающееся во временном деформировании массива, рассматриваемом как деформации ползучести.

Введение двух функций наследственности незначительно усложняет анализ физических особенностей в задачах, в связи с чем обычно принимаются некоторые упрощения. Наиболее часто используются два. Первое связано с предположением, что в неидеально упругих средах наиболее существенную роль играет сдвиговое последействие, а объемное последействие можно считать незначительным, т. е.

$$\frac{1-2\tilde{\nu}}{\tilde{E}} = \frac{1-2\nu}{E} = \text{const}.$$

Отсюда сразу же следует возможность введения одной, а не двух функций наследственности, так как в этом случае

$$\tilde{\nu} = \nu\left(1 + \frac{1+2\nu}{E}\dot{E}\right). \qquad \text{(II.15)}$$

Второе предположение основано на том, что коэффициент Пуассона не следует заменять оператором (интегральным или дифференциальным) при описании неидеально упругих сред. Вследствие этого предположения также можно ввести одну функ-

цию наследственности. Константы ν, ν связаны соотношением пропорциональности

$$\frac{\tilde{\nu}}{\nu} = \text{const}. \qquad \text{(II.16)}$$

Ниже воспользуемся упрощением (II.15), имея в виду, что его можно снять и перейти к изучению поведения горных пород, описываемого с помощью общих связей (II.10) или (II.12). В предположении (II.15) опытные данные о влиянии времени на деформирование материала, получаемые обычно испытаниями на ползучесть, позволяют определить вид одного ядра наследственности, например $M(t-\tau)$.

Для получения уравнений движения горных пород, рассматриваемых как неидеально упругих, в результате очистных работ следует, как и в теории упругости, подставить (II.10) в уравнения состояния (II.1). При этом для случая плоской задачи получится система двух интегродифференциальных уравнений для двух компонент вектора перемещений

$$(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial\theta}{\partial x}+\tilde{\mu}\Delta U_x=\rho\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}-\gamma\sin\alpha;$$
$$(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial\theta}{\partial y}+\tilde{\mu}\Delta U_y=\rho\frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}-\gamma\cos\alpha, \qquad \text{(II.17)}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Для этих уравнений можно сформулировать те же основные краевые задачи, что и в классической теории упругости. Доказательство теорем единственности решения основных краевых задач буквально следует таковым в теории упругости с тем отличием, что кроме потенциальной энергии деформации необходимо ввести еще функцию рассеяния (диссипации) энергии, связанную с интегральными слагаемыми в операторах (II.11) и воспользоваться условиями для $N(t-\tau)$ и $P(t-\tau)$ того же типа, что и условия для $\varphi(\zeta)$ из (II.4).

Подвигание забоя при буровзрывном способе отбойки угля представляет дискретный процесс. При этом проявления динамических факторов возможны как вследствие однократного подвигания забоя в момент отбойки угля, так и вследствие движения забоя с некоторой средней скоростью. Величина подвигания забоя за одно взрывание обычно стабильна — $1 \div 1{,}5$ м, что при 3—4 рабочих сменах составляет 3—5 м в сутки.

Взрывная отбойка угля освобождает от контакта участок граничной поверхности между угольным пластом и кровлей. Обычно это происходит на площади 40—50 м². Освобождение этого участка граничной поверхности происходит со скоростью, приблизительно равной среднему значению массовой скорости частиц по радиусу зоны дробления. Если принять радиус зоны дробления по углю 10—15 $R_з$, где $R_з$ — радиус сферического за-

ряда того же веса, что и цилиндрический заряд, применяемый для отбойки угля, а закон распределения массовой скорости по расстоянию от точки взрыва в виде [90]

$$u_м = 680 (R_з/R)^{0,8}, \qquad (II.18)$$

то среднее значение скорости выброса частиц угля (м/с) при взрыве будет

$$u_{ср} = \frac{1}{10} \int_1^{10} u_м dr = 100, \qquad (II.19)$$

где $r = R_з/R$, R — координата точки.

Переходя в подвижную систему координат, связанную с движущимся забоем

$$x_1 = x + u_{ср} t, \quad y_1 = y,$$

получим уравнения движения (II.17) вида

$$\frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\mu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \Delta U_{x_1} = \frac{u_{ср}^2}{c^2} \frac{\partial^2 U_{x_1}}{\partial x_1^2} - \frac{g}{c^2} \sin \alpha \qquad (II.20)$$

$$\frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\mu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \Delta U_{y_1} = \frac{u_{ср}^2}{c^2} \frac{\partial^2 U_{y_1}}{\partial x_1^2} - \frac{g}{c^2} \cos \alpha$$

где $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорость распространения упругих волн в среде, g — ускорение силы тяжести.

Для пород типа песчаников с упругими характеристиками $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu = 0{,}25$ и $\rho = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/см², $c = 1{,}8 \cdot 10^3$ м/с коэффициент $\frac{u_{ср}^2}{c^2} \approx \frac{1}{300}$ значительно меньше коэффициентов $(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})/\mu$ и $\tilde{\mu}/\mu$, имеющих порядок единицы в силу свойств функции наследственности. Вторые производные от компонент вектора смещений имеют одинаковый порядок малости. Поэтому инерционными членами в уравнениях (II.20) можно с достаточной степенью точности описания состояния массива пренебречь.

Оценим влияние динамики при движении забоя. Пусть забой очистной выработки движется равномерно со скоростью w. В подвижной системе координат $x_1 0 y_1$ (см. рис. II.1), связанной с забоем, имеем

$$x_1 = x + wt, \quad y_1 = y.$$

Тогда $dx_1 = w dt$, а скорость и ускорение точки в направлении x_1 будут соответственно

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = w \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 U_{x_1}}{\partial x_1^2};$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = w \frac{\partial U_{y_1}}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 U_{y_1}}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 U_{y_1}}{\partial x_1^2}.$$

Тогда деформации можно рассматривать уже как функции координат $x_1(t)$, y_1, а зависимость их от времени определяется тем, что

$$x_1(t)=x+wt,\quad x_1(\tau)=\zeta=x+w\tau.$$

Временные операторы (II.11) примут вид

$$\tilde{\lambda}\cdot f=\lambda\left[f-\frac{1}{w}\int_x^{x_1}N\left(\frac{x-\zeta}{w}\right)f(\zeta,y_1)\,d\zeta\right]=\lambda(1-\overset{\cdot\cdot}{\lambda})f; \quad \text{(II.21)}$$

$$\tilde{\mu}\cdot f=\mu\left[f-\frac{1}{w}\int_x^{x_1}P\left(\frac{x-\zeta}{w}\right)f(\zeta,y_1)\,d\zeta\right]=\mu(1-\overset{\cdot\cdot}{\mu})f.$$

Уравнения движения (II.17) в подвижной системе координат запишутся в виде:

$$\frac{\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\frac{\tilde{\mu}}{\mu}\Delta U_{x_1}=\frac{w^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2U_{x_1}}{\partial x_1^2}-\frac{g}{c^2}\sin\alpha; \quad \text{(II.22)}$$

$$\frac{\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}}{\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y_1}+\frac{\tilde{\mu}}{\mu}\Delta U_{y_1}=\frac{w^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2U_{y_1}}{\partial x_1}-\frac{g}{c^2}\cos\alpha,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$, а временные операторы $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ определяются из (II.21).

При скорости движения забоя 3—4 м/сут, т. е. $w=0{,}3\div0{,}6\cdot10^{-4}$ м/с коэффициент w^2/c^2 много меньше единицы. Как и в предыдущем случае, в уравнениях (II.22) членами с этим коэффициентом можно пренебречь.

Таким образом, задачу о напряженно-деформированном состоянии массива вокруг очистной выработки можно рассматривать как квазистатическую задачу для реологической среды.

Сведение задачи к квазистатической для реологической среды предполагает рассмотрение напряженно-деформированного состояния массива в процессе последовательной смены статических положений забоя. В этом случае изменение граничных условий зависит от времени как от параметра, определяющего положение забоя, и не препятствует применению принципа Вольтерра для расчета напряжений с учетом реологических свойств массива.

С учетом произведенных оценок динамики подвигания забоя уравнения равновесия в компонентах вектора перемещений запишутся в виде

$$(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial\theta}{\partial x}+\tilde{\mu}\Delta U_x=-\gamma\sin\alpha;$$

$$(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial\theta}{\partial y}+\tilde{\mu}\Delta U_y=-\gamma\cos\alpha. \quad \text{(II.23)}$$

Возвращаясь от уравнений равновесия в перемещениях (II.23) к уравнениям равновесия в напряжениях, получаем

вместо уравнений (II.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\gamma \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\gamma \cos \alpha. \qquad \text{(II.24)}$$

Уравнения равновесия (II.24), уравнение совместности в напряжениях

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \qquad \text{(II.25)}$$

кинематические уравнения (II.2) и физические уравнения упруго-наследственной среды (II.10) или (II.12) являются полной системой уравнений, описывающей механическое состояние массива.

§ 2. Типовые расчетные схемы и граничные условия

Рассмотрим основные пространственные сечения, при отработке единичного пласта, например, на схеме отработки крутопадающего пласта лавами и щитами (рис. II.2). В горизонтальных и вертикальных сечениях очистных выработок и сечениях, испытывающих влияния этих выработок, можно выделить три типа: сечения, включающие очистную выработку конечных размеров и угольный пласт по обе стороны от нее (сечения $А-А$, $а-а$, $а'-а'$); сечения, проходящие только по угольному пласту (сечения $Б-Б$, $б-б$, $б'-б'$); сечения, включаю-

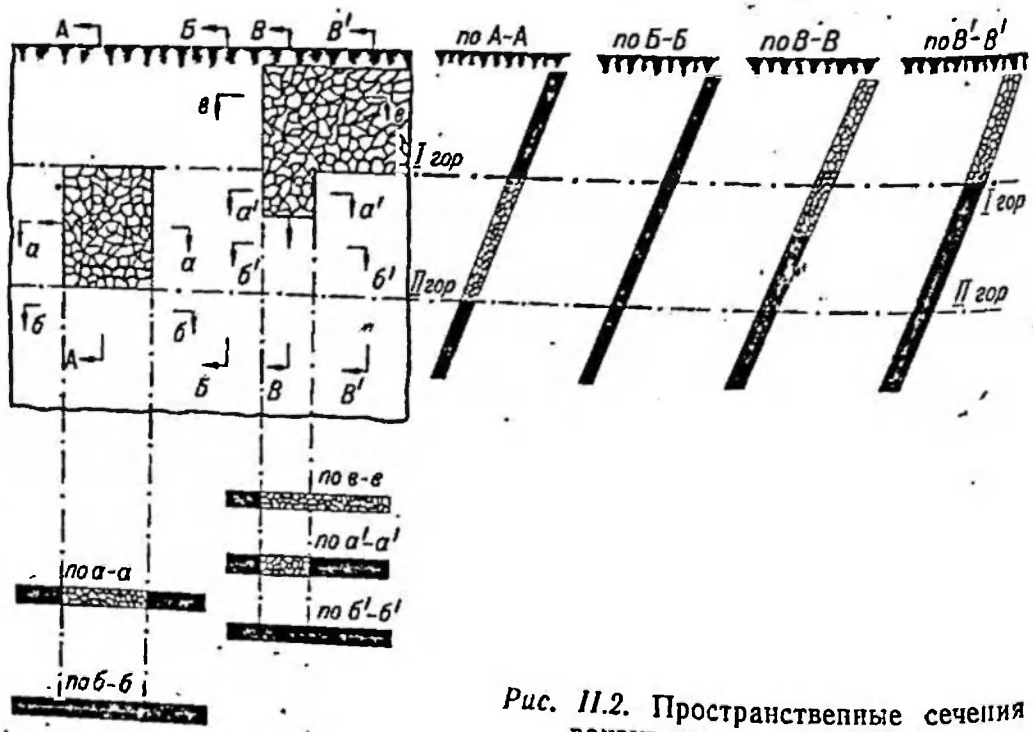


Рис. II.2. Пространственные сечения вокруг очистных выработок.

щие угольный пласт и выработанное пространство значительных размеров (сечения $В—В$, $В'—В'$, $в—в$).

В зависимости от того, насколько близко сечение проходит от концевых частей очистных выработок, в этих сечениях возможно выполнение условий плоской задачи. В рассматриваемых сечениях условия плоской задачи могут выполняться в сечениях $А—А$, $Б—Б$, $Б'—Б'$, $а—а$, $в—в$ при достаточно больших размерах очистных выработок. Однако для качественных оценок влияния очистных выработок на напряженное состояние массива в сечениях, прилегающих к концевым частям выработок (сечения $Б—Б$, $а'—а'$, $б—б$, $б—б$), можно использовать расчетную схему плоской задачи. В этом случае рассчитанное напряженное состояние будет завышенным.

При ведении очистных работ механическое состояние горного массива формируется как результат взаимодействия механической системы горные породы — угольный пласт — выработанное пространство. В соответствии с основными пространственными сечениями можно определить типовые расчетные схемы горного массива (рис. II.3).

Первый тип расчетной схемы включает породы кровли и почвы, выработку конечных размеров ($а$, $в$) и полубесконечный угольный пласт по обе стороны от нее (рис. II.3, $а$). Второй тип расчетной схемы включает породы кровли и почвы, угольный пласт между ними и рассматривает сечение, находящееся в зоне влияния очистных работ (рис. II.3, $б$). Третий тип расчетной схемы включает горные породы, полубесконечный угольный пласт и выработанное пространство (рис. II, 3, $в$)*.

При наличии выработки полные напряжения в массиве удовлетворяют неоднородной системе уравнений равновесия

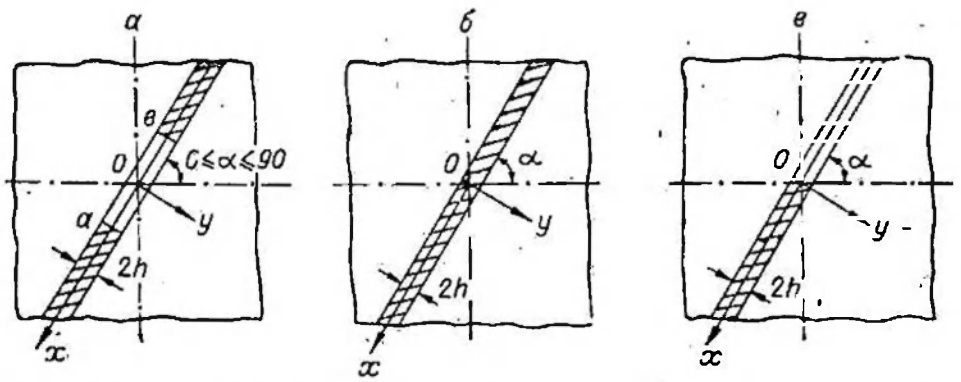


Рис. II.3. Расчетные схемы первого ($а$), второго ($б$) и третьего ($в$) типа.

* Следует отметить, что третий тип расчетной схемы (рис. II.3, в) является предельным случаем расчетной схемы первого типа (рис. II.3, а), когда выработка в пласте достигает таких больших размеров, что влияние одной опоры (пласта) на другую не сказывается и происходит либо смыкание почвы с кровлей, либо кровля получает опору в выработанном пространстве на обрушенные породы или закладку.

(II.24), условию совместности (II.25) и могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_{xx}; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_{yy}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \sigma_{xy}, \qquad (II.26)$$

где σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0 — первоначальное напряженное состояние массива; σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} — дополнительные напряжения, вызванные проведением очистной выработки.

Аналитические решения задачи о напряженном состоянии полубесконечных областей с вырезом (двухсвязной области) представляют определенную трудность. Трудности возрастают, если рассматривать такие области еще с включениями в виде слоя конечной толщины (пластом). Поэтому целесообразно ввести допущение об отсутствии влияния границы полубесконечной области (земной поверхности) на напряженное состояние области (массива) в окрестности выреза (выработки). Это допущение приводит к неточному выполнению граничных условий по напряжениям на земной поверхности, однако, ошибка при этом будет тем меньше, чем больше глубина проведения очистной выработки.

Исследуя напряженно-деформированное состояние вокруг очистной выработки, предполагаем, что вне зоны аномалии от выреза (выработки) плоскость находится под действием напряженного состояния, равного первоначальному напряженному состоянию в районе очистной выработки:

$$\sigma_x^0 = -\gamma H(\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha);$$
$$\sigma_y^0 = -\gamma H(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha); \qquad (II.27)$$
$$\tau_{xy}^0 = \frac{1}{2}\gamma H(1-\lambda)\sin 2\alpha,$$

где H — глубина очистных работ от поверхности; λ — коэффициент бокового отпора в массиве.

При таком допущении система уравнений равновесия (II.24) становится однородной, т. е.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0. \qquad (II.28)$$

Задача для механической системы массива горных пород (см. рис. II.3) может быть сведена к задаче о напряженном состоянии в полуплоскости для пород кровли или почвы и в полуполосе (или бесконечной (рис. II.3, б) полосе) для угольного пласта с напряжениями на бесконечности (II.27).

Дополнительные напряжения, вызванные выработкой, удовлетворяют однородной системе уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \qquad (II.29)$$

и уравнению совместности

$$\Delta(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0, \qquad (II.30)$$

а на достаточном удалении от выработки исчезают, т. е.

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0 \text{ на } \infty. \qquad (II.31)$$

Дополнительным напряжениям σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} соответствуют дополнительные деформации ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}, связанные с напряжениями физическими соотношениями, аналогичными (II.10) или (II.12), и дополнительные смещения U, V, связанные с деформациями кинематическими соотношениями, аналогичными (II.2).

Переходя к формулировке граничных условий задачи определения напряженно-деформированного состояния горного массива вокруг очистной выработки в угольном пласте, отметим, что при аналитических постановках задач граничные условия выбираются согласно принятым идеализациям расчетной схемы горного массива и модели угольного пласта, а также гипотезе о характере взаимодействия системы «вмещающие породы — угольный пласт». В некоторых схемах принимались предположения о смыкании пород кровли и почвы [8], изгибе пород кровли по дуге окружности или гиперболе [59], представления горного массива с выработкой в пласте в виде плоскости с разрезом [91] и др. Модели угольного пласта, в свою очередь, выбирались весьма разнообразными: угольный пласт принимался абсолютно жестким [63, 64], упругим [12—14] и с пластической призабойной зоной [8, 47—52].

Решения, полученные при аналитических постановках задач, дают наиболее общие закономерности напряженно-деформированного состояния массива, но не могут использоваться для оценки механического состояния в конкретных горнотехнических условиях и обстановке.

Информацию о конкретных процессах проявления механического состояния массива дают экспериментальные исследования проявлений горного давления в натурных условиях.

Сочетания аналитических решений с результатами экспериментальных исследований открывают возможность расчета напряженно-деформированного состояния массива. Исследования, основанные на таком сочетании, могут быть названы экспериментально-теоретическими.

Исходным пунктом таких исследований должны служить наблюдения за характером поведения пород при движении очистного забоя, а именно, за распределением смещений в отдельных точках, их изменением во времени, образованием профильных линий прогиба кровли и изменением их в зависимости от различных факторов.

Профильная линия прогиба кровли по сечениям, различно ориентированным относительно забоя, отражает в каждый момент времени, суммарный результат взаимодействия боковых

пород и угольного пласта. В этом смысле она является суммарной характеристикой конкретного сочетания свойств массива и условий разработки и изменение ее отражает ход процессов в массиве.

Полученная экспериментально профильная линия смещений кровли представляя собой перемещения некоторой границы массива, несет в себе информацию о его напряженно-деформированном состоянии, которое может быть рассчитано по этим перемещениям. Для этой цели могут быть применены существующие аналитические способы расчета напряжений, в которых профильная линия смещений кровли используется в качестве граничного условия. Так как в процессе экспериментальных наблюдений можно получить не только общий вид профильной линии смещений кровли, но и характер изменения смещений в отдельных ее точках во времени, то в расчетах напряженно-деформированного состояния массива может быть отражено изменение его во времени.

Таким образом, профильная линия смещений кровли пласта, полученная непосредственными замерами в шахте или построенная на основе натурных замеров, является таким экспериментальным материалом, который, будучи введен в аналитическое решение в качестве граничного условия, позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние массива в той области, где профильная линия известна или может быть экстраполирована. Будем называть такой подход экспериментально-аналитическим методом исследования напряженно-деформированного состояния горного массива.

Задача определения механического состояния массива в математической постановке формулируется как определение напряженного состояния в полуплоскости для вмещающих пород ($y \leqslant -h$ — для пород кровли или $y \geqslant h$ — для пород почвы) или в полуполосе (или бесконечной полосе) ($a \leqslant x \leqslant b$, $y \leqslant |h|$ — для выработки конечных размеров; $x \geqslant 0$, $y \leqslant |h|$ — для выработанного пространства значительных размеров; $\infty > x > -\infty$, $y \leqslant |h|$ — для сечения по угольному пласту, испытывающему воздействие очистных работ (см. рис. II.3) с условиями (II.31) на бесконечности и граничными условиями, задаваемыми на $y = \pm h$ (по контакту пород с угольным пластом и выработанным пространством) из наблюдений за смещениями линии контакта при движении очистного забоя.

Замеряемые в эксперименте смещения пород на контакте с пластом, выработанным пространством, закладной или обрушенными породами представимы как некоторые функции координаты x, положения забоя l и времени t. Так как положение забоя изменяется во времени, то $l = l(t)$ и смещения можно рассматривать как функцию x и t.

Если замеры смещений начинаются в еще неотработанной части пласта, не подверженной влиянию соседних разработок

(смещения от подготовительных выработок не принимаются во внимание), то в этом случае можно определить дополнительное напряженное состояние от ведения очистных работ. Зная начальное напряженное состояние нетронутого массива (определив экспериментально в отдельных точках или задав), можно будет определить полное напряженно-деформированное состояние пород (II.26). Если же натурные наблюдения начинаются в условиях, когда над пластом уже имеются смещения от ранее проводимых или ведущихся очистных работ и измеряются приращения смещений, то определение приращения напряженного состояния (X_x, Y_y, X_y) возможно только за период от начала наблюдений.

Приращению напряженного состояния X_x, Y_y, X_y соответствует приращение деформаций e_x, e_y, e_{xy}, связанное с напряжениями физическими соотношениями, аналогичными (II.10) или (II.12), и приращения смещений u, v, связанные с деформациями кинематическими соотношениями, аналогичными (II.2).

Приращение дополнительного напряженного состояния, наблюдаемое по приращениям смещений, удовлетворяет уравнениям равновесия и условию совместности:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0;\\ &\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0;\\ &\Delta(X_x+Y_y)=0. \end{aligned} \qquad \text{(II.32)}$$

На достаточном удалении от выработки приращение аномалии напряженного состояния, вызванное ее проведением, исчезает, т. е.

$$X_x=Y_y=X_y=0 \text{ на } \infty. \qquad \text{(II.33)}$$

Из натурных наблюдений за проявлениями горного давления в настоящее время наиболее достоверны наблюдения за смещениями вмещающих пород по нормали к пласту.

Различаются два вида возможных замеров смещений. Первый, когда замеряются относительные сближения (конвергенция) кровли и почвы, т. е. V^+-V^-, где знак (+) относится к породам почвы на контакте с пластом и выработанным пространством, знак (—) относится к породам кровли. Второй вид измерений, когда замеряются абсолютные смещения кровли (V^-) или почвы (V^+). В зависимости от размеров очистной выработки и мощности угольного пласта для определения напряженно-деформированного состояния массива достаточны либо замеры относительных, либо требуются замеры абсолютных смещений.

В качестве первого граничного условия в задачах определения напряжений выбираем замеренные за определенный период

наблюдений нормальные к пласту смещения пород кровли по контакту, т. е.

$$V=F(x,\ t),$$

где $V=V^+-V^-$ при относительных замерах; $V=V^+$ (или $V=V^-$) при абсолютных замерах.

По участкам, на которых заданы нормальные смещения, может быть рассмотрено два вида замеров.

Для расчетной схемы I или III типа (см. рис. II, 3, *а*, *в*) смещения могут быть замерены на конечных участках в выработанном пространстве и в подготовительных выработках в неотработанной части пласта.

Для расчетной схемы II типа (см. рис. II, 3, *б*) смещения замеряют в подготовительных выработках, пройденных по пласту, испытывающему воздействие очистных работ, на конечных участках.

Будем предполагать, что натурные замеры в неотработанной части пласта для расчетных схем I (или III) и II типов могут быть экстраполированы в сторону нетронутой части пласта, т. е. в первом случае

$$V=F_1(x,\ t),\ b>x>a; \qquad (II.34)$$

во втором случае

$$V=F_2(x_2,\ t),\ -\infty<x<\infty. \qquad (II.35)$$

Существенным дополнением граничных условий при формулировке задач экспериментально-аналитического метода определения напряженного состояния горного массива могут быть экспериментальные данные о дополнительных нормальных смещениях по напластованию (U), вызванных очистными работами. При наличии таких данных

$$U=Q(x,\ t) \qquad (II.36)$$

они могут быть использованы в качестве второго граничного условия.

Отсутствие замеров касательных смещений приводит к необходимости принятия в качестве граничного условия одной из гипотез взаимодействия угольного пласта с породами кровли.

Тонкие и средней мощности пласты, не имеющие по контакту ярко выраженного перехода от пород к пласту, можно рассматривать как слой жестко специальный с породами. В этом случае больших сдвигов в нем не происходит, и поэтому разность касательных смещений пород кровли и почвы по контакту величина малая, т. е.

$$U^+-U^-=0. \qquad (II.37)$$

Для мощных пластов натурные наблюдения могут показать, что касательные смещения по контакту пород с пластом малы по

величине и по сравнению с нормальными к пласту смещениями, т. е.

$$U^+=0 \text{ (или } U^-=0), \qquad \text{(II.37')}$$

что также будет соответствовать гипотезе жесткого сцепления пород с угольным пластом.

В общем случае смещения боковых пород и угольного пласта по напластованию происходят с участием сил трения. Можно предположить, что дополнительные касательные напряжения на контакте кровли с пластом, вызванные выработкой, пропорциональны действующим дополнительным нормальным напряжениям σ_{yy}, т. е.

$$\sigma_{xy}=\pm k\sigma_{yy}, \qquad \text{(II.38)}$$

где k — коэффициент трения. Частный вид этой гипотезы представляет случай отсутствия трения на контакте, т. е.

$$\sigma_{xy}=0. \qquad \text{(II.39)}$$

На участках пласта, прилежащих к забою, происходит раздавливание угля, переход его в пластическое состояние, которое можно характеризовать постоянством касательных напряжений

$$\tau_{xy}=\pm\tau_s, \qquad \text{(II.40)}$$

где τ_s — константа пластичности угля. В дополнительных напряжениях это условие запишется

$$\sigma_{xy}=\pm\tau_s-\tau^0_{xy}.$$

За пределами пластической зоны ($|x|>x_*$) касательные напряжения по контакту пласта с породами должны затухать и отличны от нуля на конечном расстоянии ($c>|x|>x_*$). Поэтому иногда возможно аппроксимировать их линейным распределением вдоль контакта

$$\tau_{xy}=\pm\tau_s\frac{c\mp x}{c-x_*} \qquad \text{(II.41)}$$

или в дополнительных напряжениях

$$\sigma_{xy}=\pm\tau_s\frac{c\mp x}{c-x_*}-\tau^0_{xy}. \qquad \text{(II.41')}$$

Рассмотренные гипотезы (II.37)—(II.41) имеют достаточно общий характер, так как учитывают как крайние случаи возможного взаимодействия пород с пластом (проскальзывание без трения, жесткое сцепление), так и промежуточный случай (проскальзывание с трением).

При наличии в расчетной схеме выработанного пространства (см. рис. II, 3, *а*) в качестве граничного условия могут быть использованы данные по нормальным напряжениям на границе выработанного пространства в виде

$$\sigma_y=N(x, t) \text{ на } a<x<b, \qquad \text{(II.42)}$$

или в дополнительных напряжениях

$$\sigma_{yy} = N(x, t) - \sigma_y^0 \text{ на } a < x < b, \tag{II.43}$$

где $N(x, t)$ — замеряемая за период наблюдений реакция крепи или закладки. В случае неподкрепленного выработанного пространства $N(x, t) \equiv 0$, т. е. полные напряжения в выработанном пространстве будут

$$\sigma_y = 0 \text{ на } a < x < b, \tag{II.44}$$

а дополнительные напряжения

$$\sigma_{yy} = -\sigma_y^0 \text{ на } a < x < b. \tag{II.45}$$

Отсутствие касательных напряжений на свободной поверхности выработанного пространства дает условие $\tau_{xy} = 0$, или в дополнительных напряжениях

$$\sigma_{xy} = -\tau_{xy}^0, \tag{II.46}$$

где τ_{xy}^0 — первоначальные напряжения (II.27).

Формулировка задач при натурных наблюдениях приращений дополнительных нормальных к пласту смещений

$$v = F(x, t), \tag{II.47}$$

принимаемых в качестве граничного условия, отличается от задачи определения напряжений в массиве по полным дополнительным смещениям V. В этом случае можно говорить о восстановлении картины напряженно-деформированного состояния массива, соответствующего тому изменению механического состояния, которое наблюдается по приращениям смещений.

Гипотезы о характере взаимодействия кровли с пластом для приращения напряженно-деформированного состояния могут быть сформулированы аналогично рассмотренным (II.37)—(II.41).

При проскальзывании с трением

$$X_y = kY_y; \tag{II.48}$$

без трения

$$X_y = 0; \tag{II.49}$$

в призабойных пластических зонах

$$X_y = \tau_s - \tau_{xy}^0; \tag{II.50}$$

при жестком сцеплении пород с угольным пластом

$$u = 0. \tag{II.51}$$

Зная приращение механического состояния из решения задачи с использованием натурных наблюдений смещений, полное дополнительное (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}), а значит, и полное напряженное состояние (σ_x, σ_y, τ_{xy}), можно найти, только определив напря-

женно-деформированное состояние от момента начала очистных работ до начала наблюдений. Приращения смещений от очистных работ, предшествовавшие наблюдаемым, можно например, рассчитать аналитически, используя эмпирические закономерности, выявленные при наблюдениях.

Предшествующее наблюдаемому изменение напряженно-деформированного состояния $(X_x^0, Y_y^0, X_y^0, e_x^0, e_y^0, e_{xy}^0)$ может быть определено по рассчитанным приращениям нормальных смещений

$$v^0 = F_0(x, t) \tag{II.52}$$

и гипотезам взаимодействия кровли с пластом: при проскальзывании с трением

$$X_y^0 = kY_y^0, \tag{II.53}$$

без трения и в призабойных пластических зонах

$$X_y^0 = 0. \tag{II.54}$$

Сумма механических состояний, рассчитанных по наблюдаемым приращениям $v = F(x, t)$ и гипотезам (II.48)—(II.51) и по определенным смещениям $v^0 = F_0(x, t)$ и гипотезам (II.53), (II.54), будет полным дополнительным напряженно-деформированным состоянием, т. е.

$$\begin{gathered} \sigma_{xx} = X_x^0 + X_x; \\ \sigma_{yy} = Y_y^0 + Y_y; \\ \sigma_{xy} = X_y^0 + X_y; \\ U = u^0 + u; \quad V = v^0 + v. \end{gathered} \tag{II.55}$$

Зная напряженное состояние, вызванное очистной выработкой, можно рассчитать полное напряженное состояние массива по формулам (II.26), (II.27).

В зависимости от имеющихся данных о смещениях по различным участкам в конкретных сечениях (см. рис. II.3, *а*, *б*, *в*) при принимаемых гипотезах о взаимодействии пород с угольным пластом в каждом конкретном случае может быть поставлена и решена задача определения напряженно-деформированного состояния массива по известным смещениям пород при очистных работах.

§ 3. Метод расчета смещений боковых пород при отработке угольного пласта

Поведение горных пород в окрестности очистного забоя может быть охарактеризовано величиной смещений и характером развития смещений во времени в процессе отработки уголь-

ного пласта. Многочисленные исследования свидетельствуют, что смещения боковых пород на пластах как пологого, так наклонного и крутого падения происходят в основном по нормали к напластованию. Поэтому при наблюдениях за конвергенцией кровли и почвы в направлении, нормальном к напластованию, можно получить достаточно полную характеристику поведения боковых пород.

Наблюдения показывают также, что в сближении кровли и почвы при очистных работах на пластах с углом падения до 60—70° большая доля (85—95% [22]) приходится на смещения кровли, если породы лежащего бока не склонны к пучению. Поэтому вместо конвергенции будем говорить о смещениях кровли угольного пласта.

Процесс сдвижения пород кровли при отработке угольного пласта может быть описан следующим образом.

Схема развития очистных работ

В подавляющем большинстве случаев угольный пласт отрабатывается длинными очистными забоями, непосредственно выемка в которых ведется различными (механизированным, буровзрывным или с помощью отбойных молотков) способами вдоль этого забоя. Рабочим органом комбайна, например, создается уступ, передвигающийся вдоль очистного забоя, а подвигание забоя по фронту осуществляется отработкой полос (или лент). Направления подвиганий забоя и фронта, как правило, не совпадают и в основном взаимно перпендикулярны. Так, например, фронт лавы движется по простиранию лентами, а уступ, образуемый комбайном или стругом, движется по восстановлению или падению. При отработке мощных крутых пластов полосами по простиранию забой полосы движется по простиранию, а отработка полос (подвигание фронта) ведется по восстановлению или по падению.

В дальнейшем рассмотрении будем разделять в указанном выше смысле движение забоя и движение фронта очистных работ.

Подвигание фронта очистных работ чаще всего осуществляется путем выемки отдельных полос (или лент). Расстояние, на которое перемещается очистной забой при однократном подвигании фронта, равно ширине вынимаемой полосы (ленты). Подвигание забоя в полосе происходит по всей ширине ее на глубину захвата рабочего органа.

Таким образом, схема отработки выемочного поля представляется как фронтальное подвигание очистного забоя полосами при взрывном или механизированном подвигании забоя в полосе заходками вдоль фронта.

Поместим начало координат в выемочном поле (рис. II.4) в начало очистных работ и направим координату x в сторону подвигания забоя вдоль фронта, а координату y — в сторону

подвигания фронта очистных работ. Обозначим время в процессе отработки через t, а фиксированный момент его — t_{ij}.

Введем τ — время в процессе подвигания забоя в направлении x, τ_i — фиксированный момент времени, а τ_n — время полного движения забоя вдоль фронта очистных работ.

Пусть скорость подвигания забоя взрывным или механизированным способом есть u. Тогда $l=u\tau$ — координата движущегося вдоль фронта очистных работ забоя, $l_i=u\tau_i$ — фиксированная координата, $l_n=u\tau_n$ — протяженность фронта очистных работ.

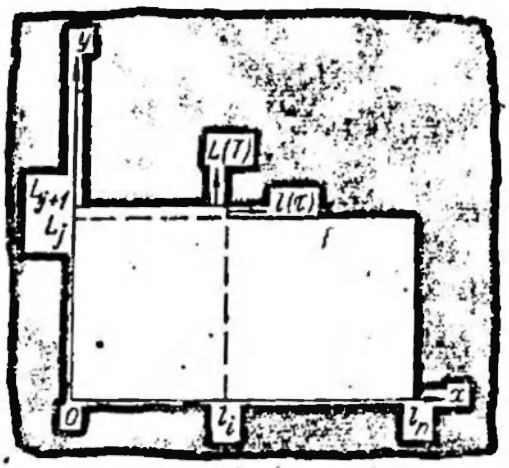


Рис. II.4. Схема формирования выработанного пространства при отработке угольного пласта.

Аналогично, для подвигания фронта очистных работ в направлении y обозначим T — время подвигания, T_j — время полной отработки j-полос.

Пусть w — скорость подвигания фронта в направлении y, тогда $L=w\bar{t}$ — координата движущегося фронта очистных работ, $L_j=wT_j$ — положение фронта при отработке j-полос.

Поверхность смещений пород

Смещения пород кровли при отработке выемочного поля представляют собой некоторую поверхность, зависящую от координат (x, y) и развивающуюся во времени t, т. е.

$$V=V(x, y, t). \qquad (II.56)$$

В фиксированный момент времени t_{ij}, определяемый временем отработки j-полос подвигания фронта и временем τ_i подвигания забоя вдоль фронта в $(j+1)$-полосе, так что

$$t_{ij}=T_j+\tau_i, \qquad (II.57)$$

поверхность смещений будет функцией координат и фиксированного момента времени и выражается через скорости смещений в виде

$$V(x, y, t_{ij})=\int_0^{t_{ij}} V'(x, y, t)\,dt=$$

$$=\int_0^{T_j} V'(x, y, t)\,dt+\int_{T_j}^{T_j+\tau_i} V'(x, y, t)\,dt. \qquad (II.58)$$

Обозначим в первом интеграле выражения (II.58) $t=T$ и произведем подстановку $L=wT$ такую, что при $T=0$ $L=0$, при $T=T_j$ $L=wT_j=L_j$, тогда получим

$$\int_0^{T_j} V'(x, y, t)\,dt = \int_0^{T_j} V'(x, y, t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{w} \int_0^{L_j} V'(x, y, L)\,dL. \qquad (II.59)$$

Здесь последняя подынтегральная функция есть скорость смещения пород при подвигании фронта очистных работ, которую можно рассматривать как приращения смещений за единичные подвигания фронта в направлении y. Единичное подвигание фронта работ осуществляется прохождением забоя вдоль фронта на расстояние l_n, а формирование приращений смещений за единичное подвигание фронта происходит за счет приращений смещений от единичных подвиганий забоя. Предполагая идентичность приращений смещений единичного подвигания забоя, которые обозначим $V''=V''(x, y, l, L)$, при подвигании фронта работ учитывая, что $l=u\tau$, получаем

$$V'(x, y, L) = V'(x, y, L, l_n) = \frac{1}{u} \int_0^{l_n} V''(x, y, l, L)\,dl. \qquad (II.60)$$

Тогда (II.59) будет

$$\int_0^{T_j} V'(x, y, t)\,dt = \frac{1}{wu} \int_0^{L_j} \int_0^{l_n} V''(x, y, l, L)\,dl\,dL. \qquad (II.61)$$

Аналогичным образом, обозначим во втором интеграле выражения (II.58) $t=T_j+\tau$ и произведем подстановку $l=u\tau$ такую, что при $\tau=0$ $l=0$, при $\tau=\tau_i$ $i=u\tau_i=i_i$, получим

$$\int_{T_j}^{T_j+\tau_i} V'(x, y, t)\,dt = \int_0^{\tau_i} V'(x, y, T_j+\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{u} \int_0^{l_i} V'(x, y, T_j, l)\,dl. \qquad (II.62)$$

Последняя подынтегральная функция есть скорость смещений при подвигании забоя вдоль фронта очистных работ в $(j+1)$-полосе, т. е. приращения смещений при единичных подвиганиях забоя в $(j+1)$-полосе. Учитывая введенные обозначения для приращений смещений за единичное подвигание забоя $(V''=V''(x, y, l, L))$, подынтегральная функция выражения (II.62) будет

$$V'(x, y, T_j, l) = V''(x, y, L_{j+1}, l).$$

Таким образом, окончательное выражение для смещений (II.58) с учетом (II.61), (II.62) будет

$$V(x, y, t_{ij}) = \frac{1}{wu} \int_0^{L_j} \int_0^{l_n} V''(x, y, l, L)\, dl dL + \frac{1}{u} \int_0^{l_i} V''(x, y, l, L_{j+1})\, dl. \tag{II.63}$$

Поверхность смещений $V(x, y, t_{ij})$ в фиксированный момент времени отработки определена через приращения смещений $V''(x, y, l, L)$ при единичном подвигании забоя вдоль фронта очистных работ.

Формирование приращений смещений от единичного подвигания забоя

Поверхность приращений смещений ($V''(x, y, t)$) формируется за время технологического цикла единичного подвигания забоя (от подвигания до подвигания, включая одно из них), включающего взрывную или механизированную выемку угля и крепление выработанного пространства.

При взрывной отбойке угля основной прирост смещений происходит в первые несколько минут после отбойки. Назовем эти смещения мгновенными приращениями смещений в отличие от временных приращений смещений, развивающихся за время крепления выработанного пространства и подготовки к следующему подвиганию при неподвижном забое. Доля мгновенных смещений составляет 50—60% и более от полной величины приращений смещений при единичном подвигании забоя. Значительное уменьшение интенсивности временных приращений происходит в течение первых 2—4 ч, 90—95% полных смещений приходится на первые сутки после подвигания забоя [22].

Величина временных приращений смещений зависит от промежутка времени между последовательными подвиганиями забоя. При быстрых подвиганиях забоя временные смещения не успевают развиваться, в то время как при неподвижном забое они развиваются полностью.

При прерывистой механизированной выемке угля процесс формирования приращений смещений от единичного подвигания забоя подобен процессу при взрывной отбойке. Особенность при прерывной механизированной выемке та, что мгновенные приращения смещений развиваются во время движения забоя, а не в начальный момент после взрывного подвигания. Процесс активизации приращений смещений в момент отбойки угля при механизированной выемке более плавный по сравнению с этим процессом при взрывной отбойке. Временные приращения развиваются в основном после остановки забоя.

Непрерывная механизированная выемка угля сопровождается непрерывным приростом смещений пород, в котором трудно

выделить: мгновенные и временные смещения. Поэтому за приращения смещений от единичного подвигания забоя необходимо выбирать приращения смещений в единицу времени (сутки, смены, часы).

При взрывном или прерывисто механизированном способе отработки в качестве единицы времени принимается промежуток между двумя последовательными подвиганиями забоя, включая одно из них (предыдущее). При нормальном технологическом процессе эти промежутки достаточно равномерны и составляют 6—8 ч. В течение этого времени в основном протекают все фазы смещений кровли, а прирост смещений в этом промежутке принимается за приращение смещений от единичного подвигания забоя.

Поверхность приращений смещений от единичных подвиганий забоя

Приращения смещений при единичном подвигании забоя представляют собой поверхность, развивающуюся во времени.

$$V''=V''(x, y, t).$$

В фиксированный момент времени она определяется положением забоя и положением фронта очистных работ, т. е.

$$V''(x, y, t_0)=V''(x, y, l_i, L_j), \qquad (II.64)$$

и может быть получена натурными замерами смещений при единичных подвиганиях забоя.

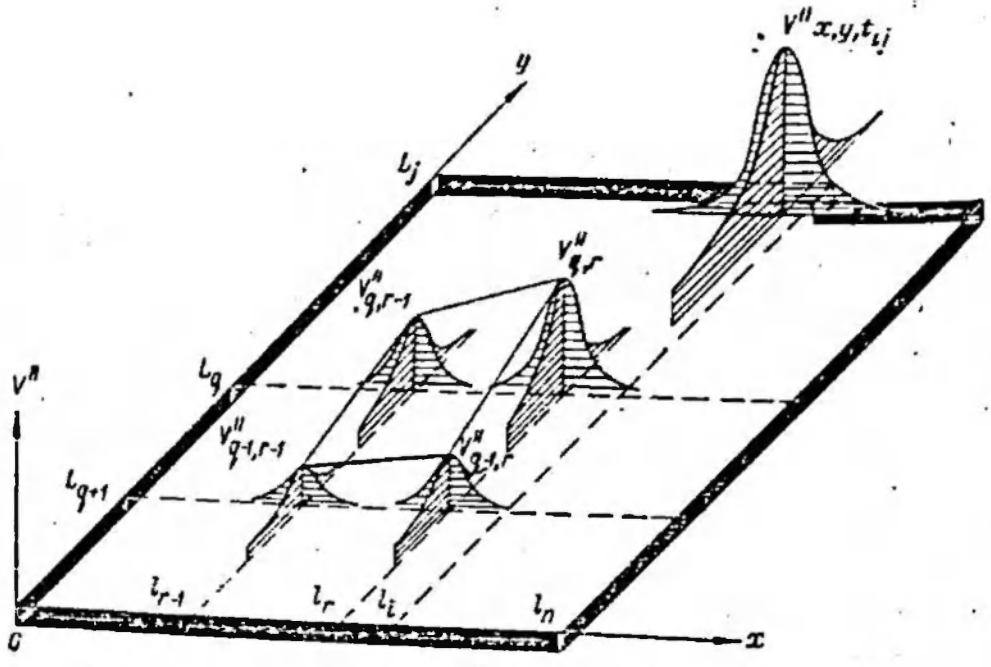


Рис. II.5. Поверхности приращений смещений от единичных подвиганий забоя.

Экспериментальное изучение проявлений горного давления натурными заменами приращений смещений при единичных подвиганиях забоя проводится измерениями сближений реперов, заложенных в породах кровли и почвы отрабатываемого пласта. Измерения сближений реперов осуществляются с помощью стоек СУИ, СР-2 и др. Наблюдения в основном проводятся по реперам, расположенным на одной линии, и позволяют получать информацию только по некоторому сечению поверхности приращений смещений. Имея замеры по нескольким сечениям, можно построить эту поверхность и определить параметры интерполирующей функции.

При единичном подвигании забоя приращения смещений ($V''(x, y, l_i)$) представляют собой выпуклую поверхность (рис. II.5), имеющую максимум в выработанном пространстве вблизи очистного забоя. Смещения точек, расположенных над неотработанной частью пласта и в выработанном пространстве, с удалением от максимума уменьшаются.

Для аналитического описания координатной зависимости подобной поверхности при фиксированном положении очистных работ может быть использовано выражение вида

$$V''(x, y, l_i, L_j) = \frac{F(x, y, l_i, L_j)}{\left[1+\left(\frac{x+al_i+b}{d}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{y+AL_j+B}{D}\right)^2\right]}. \quad \text{(II.65)}$$

Здесь функция $\left\{\left[1+\left(\frac{x+al_i+b}{d}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{y+AL_j+B}{D}\right)^2\right]\right\}^{-1}$ представляет собой единичную безразмерную выпуклую поверхность (с максимальным значением единица) и отражает факт уменьшения смещений в точках, удаленных от координаты точки максимума $x=-(al_i+b)$, $y=-(AL_j+B)$, связанной с положением забоя (l_i) и положением фронта очистных работ (L_j). Безразмерные коэффициенты a, A определяют знак, зависящий от направления подвиганий забоя и фронта относительно направления координат. Размерные параметры b, B учитывают расстояния, на которые смещена точка максимума относительно забоя и фронта. Единичная поверхность по сечениям $x=x_k$, $y=y_k$ симметрична относительно своего максимума, а параметры d, D являются своеобразными характеристиками кривизны сечений поверхности смещений и определяются расстоянием от точки максимума до точки со значением в половину от максимального.

Функция $F(x, y, l_i, L_j)$, имеющая размерность приращений смещений, должна определять количественное значение смещений, а в точке максимума единичной поверхности — максимум приращений смещений от подвигания забоя, и отражать возможную несимметрию распределения смещений относительно максимума. Форма поверхности приращения смещений несомненно отражает геометрию очистного забоя (см. рис. II.4). Однако

сечения поверхности по $y=y_k$ можно считать симметричными в том смысле, что по обе стороны от максимума смещений находится либо выработанное пространство, либо неотработанная часть пласта, причем эта симметрия будет более четко выражена в сечениях по $y=y_k$, расположенных дальше от уступа забоя или для забоев узкого захвата. Сечения поверхности по $x=x_k$ тогда уже должны быть несимметричными, так как одни смещения происходят в точках над неотработанным пластом, другие — в точках над выработанным пространством.

Приняв предложение о несимметрии поверхности приращений смещений от единичного подвигания забоя только по координате y, учтем это обстоятельство выбором функции F в виде

$$F(x, y, l_i, L_j)=\varphi(l_i, L_j)f(y, L_j), \qquad (II.66)$$

где $\varphi(l_i, L_j)$ — размерная величина, определяющая максимум приращений смещений на L_j положение фронта и l_i положение забоя; $f(y, L_j)$ — безразмерная функция, характеризующая искажение симметричных сечений поверхности по $x=x_k$. Для функции $f(y, L_j)$ можно воспользоваться видом

$$f(y, L_j)=\gamma+\beta\,\mathrm{arcctg}\frac{y+AL_j+B}{c}, \qquad (II.67)$$

дающим возможность получать как симметричную форму сечений поверхности по $x=x_k$ (при $\gamma=1$, $\beta=0$), так и рассматривать несимметричные формы сечений (при $\gamma=0$ и $\beta\neq0$). Выражение (II.67), связанное с положением (L_j) фронта очистных работ, подбором размерных B, c и безразмерного β параметров позволяет отразить несимметрию сечений поверхности по $x=x_k$. Метод определения параметров рассмотрен ниже.

Для интерполяции зависимости максимума приращений смещений от подвижных координат l, L можно использовать линейную (относительно каждой из переменных) форму функции

$$\varphi(l, L)=\alpha^{(0)}+\alpha^{(1)}l+\alpha^{(2)}L+\alpha^{(3)}lL, \qquad (II.68)$$

где $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ — параметры с размерностью, приводящей к размерности приращений смещений.

Таким образом, для описания поверхности приращений в фиксированном положении забоя и фронта работ окончательное аналитическое выражение имеет вид

$$V''(x, y, l_i, L_j)=\frac{(\alpha^{(0)}+\alpha^{(1)}l_i+\alpha^{(2)}L_j+\alpha^{(3)}l_iL_j)\left(\gamma+\beta\,\mathrm{arcctg}\frac{y+AL_j+B}{c}\right)}{\left[1+\left(\frac{x+al_i+b}{d}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{y+AL_j+B}{D}\right)^2\right]}. \qquad (II.69)$$

Функциональную зависимость приращений смещений для переменных положений фронта работ (L) и забоя (l) можно рассматривать в виде

$$V''(x, y, l, L) = \frac{(\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}l + \alpha^{(2)}L + \alpha^{(3)}lL)\left(\gamma + \beta \operatorname{arcctg} \frac{y + AL + B}{c}\right)}{\left[1 + \left(\frac{x + al + b}{d}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{y + AL + B}{D}\right)^2\right]}. \quad \text{(II.70)}$$

Метод определения параметров интерполирующей функции поверхности приращений смещений при единичном подвигании забоя

Определение параметров интерполирующей функции (II.70) замеренной поверхности приращений смещений при единичном подвигании забоя осуществляется следующим образом.

Натурные значения приращений смещений (V'') делятся на имеющееся максимальное значение ($V''_{\max}$), тем самым получается единичная безразмерная поверхность смещений ($\tilde{V}''$), которую следует интерполировать выражением

$$\tilde{V}''(x, y, l_i, L_j) = \frac{V''(x, y, l_i, L_j)}{V''_{\max}(x_m, y_m, l_i, L_j)} = \frac{\gamma + \beta \operatorname{arcctg} \frac{y + AL_j + B}{c}}{\left[1 + \left(\frac{x + al_i + b}{d}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{y + AL_j + B}{D}\right)^2\right]}. \quad \text{(II.71)}$$

Построенная поверхность рассматривается по сечениям $x = x_k$. Определяется сечение $x_m = -(al_i + b)$, в котором выражение (II.71) принимает вид

$$\tilde{V}''[-(al_i + b), y, l_i, L_j] = \frac{\gamma + \beta \operatorname{arcctg} \frac{y + AL_j + B}{c}}{1 + \left(\frac{y + AL_j + B}{D}\right)^2}, \quad \text{(II.72)}$$

зависящий только от координаты y.

Если профильная линия в этом сечении симметрична (рис. II.6, *а*) то $\gamma = 1$, $\beta = 0$, а выражение (II.72) будет

$$\tilde{V}''[-(al_i + b), y, l_i, L_j] = \frac{1}{1 + \left(\frac{y + AL_j + B}{D}\right)}. \quad \text{(II.73)}$$

Параметры в выражении (II.73) находятся в следующей последовательности: безразмерный параметр $A = \pm 1$ определяется согласованием направления движения фронта очистных работ

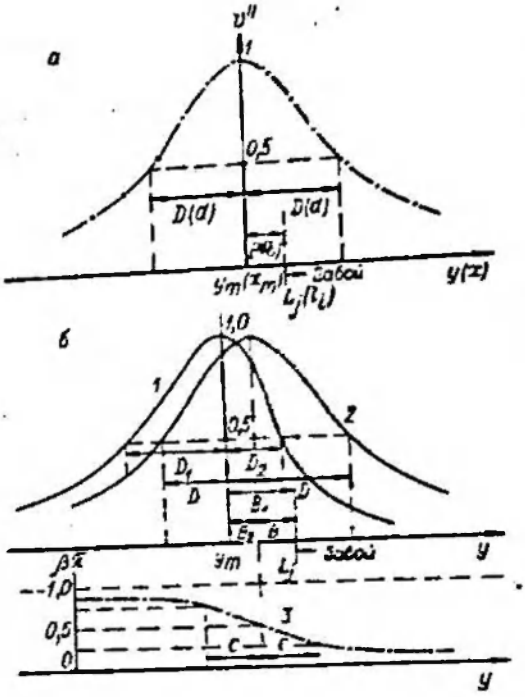


Рис. II.6. Профильные линии сечений поверхности приращений смещений от единичного подвигания забоя (*а* — симметричная, *б* — несимметричная кривая).

с направлением оси y; расположение максимума приращений на оси y дает координату $y_m=-(AL_j+B)$, из которой $B=-(y_m+AL_j)$; расположение значений приращений, равных половине максимальных, дает координату $y_{m/2}=\pm c-(AL_j+B)$, из которой $c=|y_{m/2}+(AL_j+B)|$. Значит, параметры безразмерной симметричной формы определены.

Если профильная линия в сечении $x_m=-(al_i+b)$ несимметрична (см. рис. II.6. *б*), то $\gamma=0$, $\beta\neq 0$, а выражение (II.72) будет

$$\tilde{V}''[-(al_i+b),\ y,\ l_i,\ L_j]=\frac{\beta\ \mathrm{arcctg}\dfrac{y+AL_j+B}{c}}{1+\left(\dfrac{y+AL_j+B}{D}\right)^2}. \qquad (II.74)$$

Значит, несимметричная профильная кривая *1* (см. рис. II.6. *б*) определяется симметричным выражением $\left[1+\left(\dfrac{y+AL_j+B}{D}\right)^2\right]^{-1}$ (кривая 2), трансформированным при помощи функции $\beta\,\mathrm{arcctg}\dfrac{y+AL_j+B}{c}$ (кривая 3). Параметр $A=\pm 1$ определяется подобно описанному для симметричной формы — согласованием направлений движения фронта и координаты y. Параметр $B=B_1-B_2$ определяется из известного расстояния от координаты максимума приращений смещений до положения забоя ($B_1=y_m-AL_j$) и расстояния B_2 между координатами максимумов несимметричной и симметричной кривых. Значения параметров β, B_1, c, D определяются с помощью номограмм рис. II.7 в следующей последовательности: измеряются (см. рис. II.6, *б*) расстояния D_1, D_2 от координаты (y_m) точки максимума приращений ($\tilde{V}''=1$) до координат точек со значениями в половину от максимального ($\tilde{V}''=0{,}5$); пересечение перпендикуляров, опущенных из D_1, D_2 в область изолиний c, D (верхняя номограмма рис. II.7), дает соответствующие кривизны c, D; пересечение перпендикуляров, опущенных из полученных значений c, D на нижних номограммах рис. II.7, дают значения параметров β и B_2. Таким образом, параметры несимметричной формы (II.74) определены.

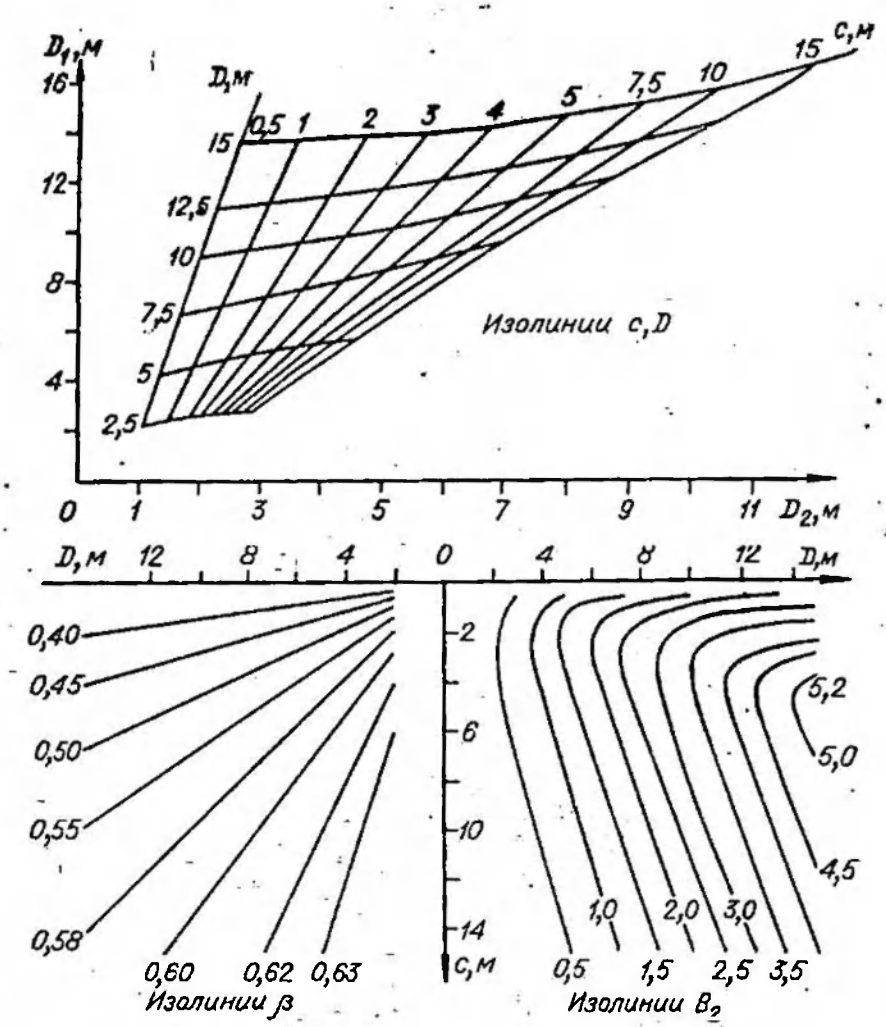


Рис. II.7. Номограмма для определения параметров интерполирующей функции несимметричной профильной кривой.

Рассматривая единичную поверхность приращений (II.71) по сечению $y=y_m$, проведем интерполяцию натурных значений в этом сечении видом

$$\tilde{V}''(x;\, y_m, l_i, L_j)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+al_i+b}{d}\right)^2}. \qquad \text{(II.75)}$$

Как следует из совпадения вида (II.73) и (II.75), способ нахождения параметров a, b, d аналогичен описанному для выражения (II.73).

Таким образом, параметры единичной поверхности приращений (II.71) определены полностью.

Имея натурную поверхность приращений смещений от единичного подвигания забоя, можно определить координату точки ($x=x_m$, $y=y_m$), где расположено максимальное значение, которое в силу принятой интерполяционной формы (II.69) является функцией уже только положений забоя (l_i) и положений фронта очистных работ (L_j).

Для определения параметров функции $\varphi(l, L)$ (II.68), характеризующей изменение максимальных значений поверхностей приращений, требуются замеры максимальных значений в четырех положениях очистного забоя (см. рис. II.5). Запишем уравнения для определения параметров:

в координатах ($x=x_m$, $y=y_m$) точек с максимальными значениями приращений смещений при положении фронта $L=L_{q-1}$ и положении забоя $l=l_{r-1}$ имеем:

$$V_m^{\prime\prime} = V_{q-1,r-1}^{\prime\prime} = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} l_{r-1} + \alpha^{(2)} L_{q-1} + \alpha^{(3)} l_{r-1} L_{q-1};$$

при $L=L_{q-1}$, $l=l_r$

$$V_m^{\prime\prime} = V_{q-1,r}^{\prime\prime} = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} l_r + \alpha^{(2)} L_{q-1} + \alpha^{(3)} l_r L_{q-1};$$

при $L=L_q$, $l=l_{r-1}$

$$V_m^{\prime\prime} = V_{q,r-1}^{\prime\prime} = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} l_{r-1} + \alpha^{(2)} L_q + \alpha^{(3)} l_{r-1} L_q;$$

при $L=L_q$, $l=l_r$

$$V_m^{\prime\prime} = V_{q,r}^{\prime\prime} = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} l_r + \alpha^{(2)} L_q + \alpha^{(3)} l_r L_q.$$

Полученная система четырех уравнений достаточна для определения искомых параметров, которые найдутся в виде:

$$\alpha^{(0)} = \frac{\left(V_{q-1,r-1}^{\prime\prime} l_r - V_{q-1,r}^{\prime\prime} l_{r-1}\right) L_q + \left(V_{q,r}^{\prime\prime} l_{r-1} + V_{q,r-1}^{\prime\prime} l_r\right) L_{q-1}}{(l_{r-1} - l_r)(L_{q-1} - L_q)};$$

(II.76)

$$\alpha^{(1)} = \frac{\left(V_{q,r-1}^{\prime\prime} - V_{q,r}^{\prime\prime}\right) L_{q-1} + \left(V_{q-1,r}^{\prime\prime} - V_{q-1,r-1}^{\prime\prime}\right) L_q}{(l_{r-1} - l_r)(L_{q-1} - L_q)};$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{\left(V_{q-1,r}^{\prime\prime} - V_{q,r}^{\prime\prime}\right) l_{r-1} + \left(V_{q,r-1}^{\prime\prime} - V_{q-1,r-1}^{\prime\prime}\right) l_r}{(l_{r-1} - l_r)(L_{q-1} - L_q)};$$

$$\alpha^{(3)} = \frac{\left(V_{q-1,r-1}^{\prime\prime} - V_{q-1,r}^{\prime\prime}\right) + \left(V_{q,r}^{\prime\prime} - V_{q,r-1}^{\prime\prime}\right)}{(l_{r-1} - l_r)(L_{q-1} - L_q)}.$$

Расчетные формулы и обобщения

Приведем расчетные формулы смещений пород при отработке пласта одним забоем.

Если по натурным замерам поверхности приращений смещений при единичных подвиганиях забоя интерполируются выражением

$$V''(x, y, l, L) = \frac{\left(\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} l + \alpha^{(2)} L + \alpha^{(3)} lL\right)\left(\gamma + \beta \operatorname{arcctg} \dfrac{y + AL + B}{c}\right)}{\left[1 + \left(\dfrac{x + \alpha l + b}{d}\right)^2\right]\left[1 + \left(\dfrac{y + AL + B}{D}\right)^2\right]},$$

(II.77)

то приращения смещений (II.60) при единичном подвигании фронта очистных работ будут

$$V'(x, y, l, L) = \frac{1}{u}\int_0^{l_n} V''(x, y, l, L)\, dl =$$

$$= \frac{d}{ua}\left\{\left[\alpha^{(0)} + \alpha^{(2)}L - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}L)\,\frac{x+b}{a}\right]\times\right.$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{x+al_n+b}{d_j} - \operatorname{arctg}\frac{x+b}{d}\right) + \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}L)\,d}{2a}\times$$

$$\left.\times \ln\frac{(x+al_n+b)^2+d^2}{(x+b)^2+d^2}\right\}\frac{\left(\gamma + \beta\operatorname{arcctg}\dfrac{y+AL+B}{c}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{y+AL+B}{D}\right)^2\right]}. \qquad \text{(II.78)}$$

Конечные смещения пород (II.63) на фиксированный момент развития очистных работ будут:

$$V(x, y, t_{lj}) = \frac{1}{w}\int_0^{L_j} V'(x, y, l, L)\, dL + \frac{1}{u}\int_0^{l_i} V''(x, u, l, L_{j+1})\, dl =$$

$$= \frac{d}{wua}\int_0^{L_j}\left\{\left[\alpha^{(0)} + \alpha^{(2)}L - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}L)\,\frac{x+b}{a}\right]\times\right.$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{x+al_n+b}{d} - \operatorname{arctg}\frac{x+b}{d}\right) + \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}L)\,d}{2a}\times$$

$$\left.\times \ln\frac{(x+al_n+b)^2+d^2}{(x+b)^2+d^2}\right\}\frac{\left(\gamma + \beta\operatorname{arcctg}\dfrac{y+AL+B}{c}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{y+AL+B}{D}\right)^2\right]}\,dL +$$

$$+ \frac{d}{ua}\left\{\left[\alpha^{(0)} + \alpha^{(2)}L - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}L_{j+1})\,\frac{x+b}{a}\right]\times\right.$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{x+al_i+b}{d} - \operatorname{arctg}\frac{x+b}{d}\right) +$$

$$\left.+ \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}L_{j+1})\,d}{2a}\ln\frac{(x+al_i+b)^2+d^2}{(x+b)^2+d^2}\right\}\times$$

$$\times\frac{\left(\gamma + \beta\operatorname{arcctg}\dfrac{y+AL_{j+1}+B}{c}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{y+AL_{j+1}+B}{D}\right)^2\right]}. \qquad \text{(II.79)}$$

Обобщим расчетные формулы на случай отработки пласта несколькими забоями и переменности приращений смещений как при движении фронта очистных работ, так и при движении очистного забоя вдоль фронта.

Пусть имеется N очистных забоев. тогда смещения, вызванные отработкой пласта этими забоями, будут

$$V = \sum_{p=1}^{N} V_p,$$

где V_p — смещения, вызванные отработкой каждого забоя, p — индекс суммирования.

Для каждого забоя смещения определяются через скорости смещений

$$V_p = \frac{1}{w^{(p)}} \int_{L_0^{(p)}}^{L_j^{(p)}} V_p(x, y, l_n, L)\, dL + \tag{II.80}$$

$$+ \frac{1}{u^{(p,j+1)}} \int_0^{l_j^{(p,j+1)}} V_{p,j+1}(x, y, l, L_{j+1}^{(p)})\, dl,$$

где $w^{(p)}$, $L_0^{(p)}$, $L_j^{(p)}$ — скорость и интервал движения фронта очистных работ на участке p-го забоя; $u^{(p,j+1)}$, $l_j^{(p,j+1)}$ — соответственно скорость и конечное положение забоя при движении в $(j+1)$-полосе на рассматриваемом участке p.

Если фронт очистных работ подвигается в интервале $[L_0^{(p)}, L_j^{(p)}]$ с переменной скоростью и переменным характером скоростей смещений, то интервал можно разбить на j_p-участков, где скорость движения фронта или характер скоростей смещений будут постоянны, т. е.

$$\frac{1}{w^{(p)}} \int_{L_0^{(p)}}^{L_j^{(p)}} V_p(x, y, l_n, L)\, dL = \sum_{q=1}^{j_p} \frac{1}{w_q^{(p)}} \int_{L_{q-1}^{(p)}}^{L_q^{(p)}} V_{p,q}(x, y, l_n, L)\, dL, \tag{II.81}$$

где q — индекс суммирования участков, на которые разбит интервал $[L_0^{(p)}, L_j^{(p)}]$.

Далее, если на участке $(q-1, q)$ движения фронта движение забоя вдоль фронта происходит с переменной скоростью или с изменяющимся характером приращений смещений от единичных подвиганий забоя, то интервал движения забоя вдоль фронта также можно разбить на n-участков. Тогда

$$V_{p,q} = \frac{1}{u^{(p,q)}} \int_{l_0^{(p,q)}}^{l_n^{(p,q)}} V_{p,q}(x, y, l, L)\, dl =$$

$$= \sum_{r=1}^{n_{p,q}} \frac{1}{u_r^{(p,q)}} \int_{l_{r-1}^{(p,q)}}^{l_r^{(p,q)}} V_{p,q,r}(x, y, l, L)\, dl, \tag{II.82}$$

где r — индекс суммирования участков, на которые разбит интервал $[0, l_n]$ движения забоя вдоль фронта.

Учитывая во втором интеграле (II.80), что $V'_{p,j+1}(x, y, l, L^{(p)}_{j+1}) = V''_{p,j+1}(x, y, i, L^{(p)}_{j+1})$, а также введенные участки разбиения интервалов при движении фронта очистных работ и очистного забоя, окончательное выражение смещений будет:

$$V = \sum_{p=1}^{N} \left\{ \sum_{q=1}^{j_p} \frac{1}{\omega_q^{(p)}} \int_{L_{q-1}^{(p)}}^{L_q^{(p)}} \left[\sum_{r=1}^{n_{p,q}} \frac{1}{u_r^{(p,q)}} \int_{l_{r-1}^{(p,q)}}^{l_r^{(p,q)}} V''_{p,q,r}(x, y, l, L)\, dl \right] dL + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{i_{p,j+1}} \frac{1}{u_r^{(p,j+1)}} \int_{l_{r-1}^{(p,j+1)}}^{l_r^{(p,j+1)}} V''_{p,j+1,r}(x, y, l, L_{j+1}^{(p)})\, dl \right\}. \quad \text{(II.83)}$$

Согласно принятой форме приращений смещений от единичного подвигания забоя (II.70), поверхности приращений можно выразить следующим образом:

$$V''_{p,q,r}(x, y, l, L) = \frac{\varphi_{p,q,r}(l, L)\, f_{p,q,r}(y, L)}{(1 + X^2_{p,q,r})(1 + Y^2_{p,q,r})}, \quad \text{(II.84)}$$

где $\varphi_{p,q,r}(l, L) = \alpha^{(0)}_{p,q,r} + \alpha^{(1)}_{p,q,r} l + \alpha^{(2)}_{p,q,r} L + \alpha^{(3)}_{p,q,r} lL$

$$f_{p,q,r}(l, L) = \gamma_{p,q,r} + \beta_{p,q,r} \operatorname{arcctg} \frac{y + A_p L + B_{p,q,r}}{c_{p,q,r}}$$

$$X_{p,q,r} = \frac{x + a_p l + b_{p,q,r}}{d_{p,q,r}}; \quad Y_{p,q,r} = \frac{y + A_p L + B_{p,q,r}}{D_{p,q,r}}.$$

Расчет смещений (II.83) по известным приращениям смещений от единичных подвиганий забоя (II.84) осуществляется на ЭВМ методами численного интегрирования.

Рассмотренный процесс формирования смещений боковых пород при обработке угольного пласта и его аналитического описания представляет собой метод расчета поверхности смещений кровли пласта, основанный на экспериментальных измерениях приращений смещений от единичных подвиганий забоя. Установление закономерностей кинематики смещений кровли дает возможность прогнозировать смещения массива горных пород при отработке угольных пластов. Такие прогнозы необходимы при внедрении новых технологических схем и систем разработки угольных пластов, при переходе горных работ в сложные горно-геологические условия. Применение ЭВМ позволяет автоматизировать расчеты для оперативного использования.

ГЛАВА III

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВМЕЩАЮЩИХ ПОРОД

§ 1. Постановка задач определения напряженного состояния вмещающих пород экспериментально-аналитическим методом

Напряженно-деформированное состояние вмещающих пород при отработке угольного пласта экспериментально-аналитическим методом определяется на основе экспериментальных данных о смещениях кровли.

Согласно экспериментально-теоретическому подходу к изучению механического состояния горного массива (глава II), можно сформулировать задачу определения напряженного состояния пород для конкретной расчетной схемы и граничных условий из имеющихся экспериментальных данных и гипотез взаимодействия угольного пласта с породами.

Рассмотрим возможные формулировки задач определения напряженного состояния горного массива по натурным замерам перемещений вмещающих пород.

Задачи I формулируются для расчетной схемы первого типа (гл. II, § 2), т. е. вмещающие породы (рис. III.1) рассматриваются как бесконечные полуплоскости ($|y| \geqslant h$), между которыми расположен слой (пласт) (на L_1', L_2') и выработанное пространство (L''). Всю границу $y = \pm h$, $-\infty < x < \infty$ обозначим через $L = L_1' + L'' + L_2'$.

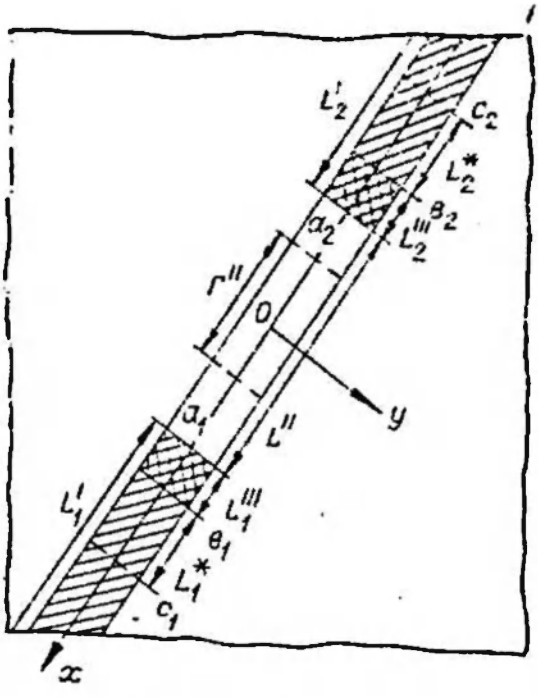


Рис. III.1. Расчетная схема к формулировке задач.

Для тонких и средних пластов, при которых выполняется условие $L'' \gg h$, где h — полумощность пласта, рассмотрение статического равновесия элемента слоя приводит к соотношению

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-. \quad \text{(III.1)}$$

Здесь $\sigma_y^{\pm}, \tau_{xy}^{\pm}$ — граничные значения нормальных

и касательных напряжений в почве (+) и кровле (—) по контакту с пластом и выработанным пространством.

Таким образом, для тонкого пласта напряженное состояние кровли и почвы симметрично относительно среднего сечения пласта, поэтому при формулировке граничного условия из натурных наблюдений можно использовать замеры относительных сближений кровли с почвой. Относительные сближения боковых пород, замеряемые на конечном участке в подготовительных выработках отрабатываемого пласта и экстраполированные в нетронутый пласт (на участках L_1, L_2) и на конечном участке в выработанном пространстве (Γ''), принимаем основным граничным условием задачи определения напряженного состояния массива:

$$V^+ - V^- = S(x, t) \text{ на } \Gamma = L' + \Gamma''. \qquad \text{(III.2)}$$

Вне участка замера смещений в выработанном пространстве граничное условие формулируем по нормальным напряжениям

$$\sigma_y = N(x, t) \text{ на } L'' - \Gamma'', \qquad \text{(III.3)}$$

где $N(x, t)$ — замеряемая реакция крепи или закладки (в случае неподкрепленного выработанного пространства $N(x, t) \equiv 0$).

В выработанном пространстве касательные напряжения отсутствуют

$$\tau_{xy} = \overset{+}{\tau}_{xy} = \tau_{xy}^- = 0 \text{ на } L''. \qquad \text{(III.4)}$$

Призабойные пластические зоны угольного пласта будем характеризовать постоянными касательными напряжениями

$$\tau_{xy} = \pm \tau_i^s \text{ на } L_i^*. \qquad \text{(III.5)}$$

Здесь τ_i^s — максимум интенсивности касательных напряжений в угле; знак определяет направление касательных напряжений в нижней ($i=1$) и верхней ($i=2$) частях угольного пласта. За пределами пластической зоны касательные напряжения аппроксимируем линейным распределением

$$\tau_{xy} = \pm \tau_i^s \frac{c_i \pm x}{c_i - b_i} \text{ на } L_i^*. \qquad \text{(III.6)}$$

Вне участков заданного распределения касательных напряжений используем гипотезу жесткого сцепления пласта с породами (II.37), характеризующую малость касательных смещений среды на контактах

$$U^+ - U^- = 0 \text{ на } L' - (L''' + L^*). \qquad \text{(III.7)}$$

Граничные условия (III.2)—(III.7) формируют задачу определения напряженного состояния массива по натурным замерам смещений при отработке тонких и средней мощности пластов.

Напряженное состояние плоскости с разрезом (L), на котором сформулированы граничные условия, на бесконечности описывается тензором напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{pmatrix}, \tag{III.8}$$

где компоненты его — первоначальные напряжения нетронутого массива (II.27). Назовем задачу с граничными условиями (III.2) — (III.7) и условием на бесконечности (III.8) — задачей I. А.

Сформулированная задача аналогична задаче, рассмотренной в работе [12], и отличается использованием в качестве граничного условия натурных наблюдений сближений боковых пород. Согласно [12, 14] схема решения задачи следующая. Основываясь на принципе суперпозиции, задача I.А разбивается на две части, условно называемые симметричной (задача I.А.1) и антисимметричной (задача I.А.2).

В задаче I.А.1 определим условия на L в виде

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \; \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \tag{III.9}$$

а тензор на бесконечности

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^0 \end{pmatrix}. \tag{III.10}$$

Граничные условия в задаче I.А.1 будут

$$\begin{gathered} \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \; \tau_{xy} = \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0 \text{ на } L, \\ V^+ - V^- = S(x, t) \text{ на } \Gamma, \\ \sigma_y = N(x, t) \text{ на } L'' - \Gamma''. \end{gathered} \tag{III.11}$$

Симметрия напряженного состояния в задаче I.А.1 (III.10, 11) позволяет рассматривать напряженное состояние полуплоскости (например, кровли) с напряжениями на бесконечности (III.10), а на границе условиями, вытекающими из (III.11),

$$\begin{gathered} \tau = 0 \text{ на } L, \\ V = \frac{1}{2} S(x, t) \text{ на } \Gamma, \\ \sigma_y = N(x, t) \text{ на } L'' - \Gamma''. \end{gathered} \tag{III.12}$$

Для задачи I. А. 2 условия на L формулируем в виде

$$\sigma_y^+ = -\sigma_y^-, \; \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \tag{III.13}$$

а тензор на бесконечности

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{III.14}$$

граничные условия задачи в этом случае запишутся

$$\sigma_y = \sigma_y^+ = \sigma_y^- = 0,\ \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- \text{ на } L,$$
$$U^+ = U^-,\ V^+ = V^- \text{ на } L' - (L''' + L^*),$$

(III.15)

$$\tau_{xy} = \begin{cases} \pm \tau_i^s \dfrac{c_i \mp x}{c_i - b_i} & \text{на } L^*, \\ \pm \tau_i^s & \text{на } L''', \\ 0 & \text{на } L''. \end{cases}$$

Граничную задачу I.А.2 можно рассматривать как задачу о напряженном состоянии плоскости с разрезом по $\Lambda = L^* + L''' + L''$, на берегах которого заданы нормальные и касательные напряжения (III.15), а на бесконечности сдвиг (III.14).

Переходя к формулировке задач определения напряженного состояния вмещающих пород по натурным замерам смещений для мощных пластов, отметим, что постановка задачи совпадает с постановкой для тонких и средней мощности пластов в случае, когда на продольных кромках мощного пласта выполняется условие (III.1). Это условие для мощных пластов выполняется в частных случаях расчетной схемы и первоначального напряженного состояния массива: пологого или вертикального залегания пласта $\left(\alpha = 0, \frac{\pi}{2}\right)$, гидростатического напряженного состояния ($\lambda = 1$). В этих случаях в поле первоначального напряженного состояния (II.27) отсутствует сдвиг $(\tau_{xy}^0 = 0)$, а для напряжений σ_y, τ_{xy} выполняется условие (III.1).

Формулировку задачи I.А (III.10), (III.11) или (III.12) можно использовать для определения напряженного массива при отработке мощных пластов, если предположить, что изменения касательных напряжений в упругой части (на $L' - (L^* + L''')$) пласта незначительны по сравнению со средним сечением, на котором сдвиги в силу симметрии напряженного состояния отсутствуют. Граничные условия задачи в этом случае будут

$$V^+ - V^- = S(x, t) \text{ на } \Gamma,$$
$$\sigma_y = N(x, t) \text{ на } L'' - \Gamma'',$$
$$\tau_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{на } L'', \\ \pm \tau_i^s & \text{на } L''', \\ \pm \tau_i^s \dfrac{c_i \mp x}{c_i - b_i} & \text{на } L^*, \\ 0 & \text{на } L' - (L^* + L'''), \end{cases} \qquad \text{(III.16)}$$

а на бесконечности тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(III.17)}$$

где для пологих пластов ($\alpha = 0$) $\sigma_x^0 = -\lambda\gamma H$, $\sigma_y^0 = -\gamma H$, для гидростатического распределения напряжений в массиве ($\lambda = 1$) $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = -\gamma H$. Обозначим граничную задачу (III.16)–(III.17) как задачу I.А.3. Она аналогична задаче, рассмотренной С. В. Кузнецовым в [47], и вследствие симметрии может быть переформулирована в задачу определения напряженного состояния в полуплоскости (например, нижней), нагруженной на бесконечности напряжениями (III.17), с условиями по границе кровля — пласт и в выработанном пространстве

$$
\begin{aligned}
V^- &= \frac{1}{2} S(x, t) \text{ на } \Gamma,\\
\sigma_y &= N(x, t) \text{ на } L^* - \Gamma'',\\
\tau_{xy} &= \begin{cases} 0 & \text{на } L'',\\ \pm \tau_1^* & \text{на } L''',\\ \pm \tau_1^* \dfrac{c_1 \pm x}{c_1 - b} & \text{на } L^*,\\ 0 & \text{на } L' - (L''' + L^*). \end{cases}
\end{aligned}
\qquad \text{(III.16)}
$$

Частный случай задачи I.А.3, когда предполагается, что весь угольный пласт находится только в упругом состоянии (пластических призабойных зон не образуется), а изменений касательных напряжений по мощности пласта не происходит, приводит к задаче I.А.1 [(III.10), (III.11) или (III.12)], которую можно использовать для определения напряженного состояния пород при отработке мощных пластов, залегающих полого, или при действии гидростатического напряженного состояния в нетронутом массиве.

В общем случае произвольного не гидростатического распределения первоначального напряженного состояния в массиве и произвольного угла падения мощного угольного пласта по контакту пород с пластом условие (III.1) не выполняется. Поэтому, при определении напряженного состояния пород кровли (или почвы) по натурным смещениям требуются абсолютные замеры смещений кровли (или почвы), а задача формулируется только для пород кровли — нижней полуплоскости (рис. III.2, предполагается, что ось x совпадает с границей L полуплоскости) или для пород почвы — верхней полуплоскости.

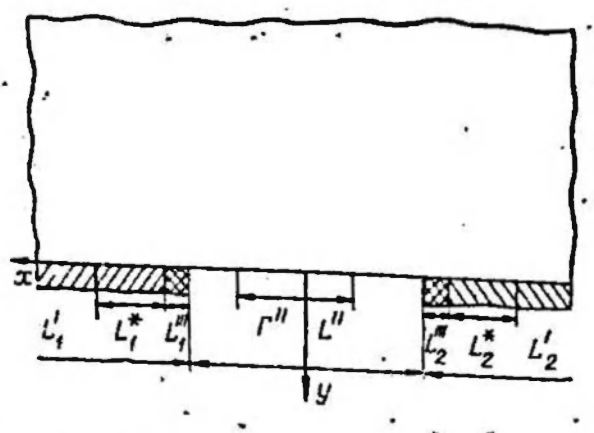


Рис. III.2. Расчетная схема задачи для полуплоскости.

Наиболее полная задача определения напряжен-

ного состояния пород, например кровли, формулируется при измерениях вектора смещений границы на конечном участке (Γ'') в выработанном пространстве и в подготовительных выработках, пройденных в угольном пласте на (L_i'), т. е.

$$\begin{matrix} V^- = F(x, t) \\ U^- = Q(x, t) \end{matrix} \quad \text{на } \Gamma = L' + \Gamma''. \quad \text{(III.18)}$$

За участками наблюдения в выработанном пространстве граничные условия задаются по нормальным и касательным напряжениям:

$$\begin{matrix} U^- = Q(x, t) \\ \tau_{xy} = 0 \end{matrix} \quad \text{на } \Gamma' = L' + \Gamma''. \quad \text{(III.19)}$$

где $N(x, t)$ — замеряемая реакция крепи или закладка в выработанном пространстве (при неподкрепленном очистном пространстве $N(x, t) = 0$).

Напряженное состояние массива кровли на бесконечности характеризуется тензором напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y \end{pmatrix}. \quad \text{(III.20)}$$

Граничная задача (III.18)—(III.20) для полуплоскости (обозначим ее задачей **I.B.1**) аналогична третьей основной задаче теории упругости, когда на части границы сформулированы условия по смещениям, а на остальной части — по напряжениям.

Отметим один частный случай задачи I.B.1, когда в выработанном пространстве не проводятся натурные наблюдения ($\Gamma'' = 0$), а в неотработанных частях пласта измеряются только нормальные к пласту смещения кровли

$$V^- = F(x, t) \text{ на } L'. \quad \text{(III.18')}$$

В этом случае граничные условия в выработанном пространстве формулируются по напряжениям

$$\begin{matrix} \sigma_y = N(x, t) \text{ на } L'', \\ \tau_{xy} = 0, \end{matrix} \quad \text{(III.19')}$$

а касательные смещения пород кровли над пластом принимаются малыми из гипотезы жесткого сцепления (II.37), т. е.

$$U^- = \text{ на } L'. \quad \text{(III.18'')}$$

Задачей I.B.2 назовем задачу определения напряженного состояния пород кровли (или почвы) при отработке мощных пластов, когда проводятся натурные замеры нормальных смещений границы

$$V^- = F(x, t) \text{ на } \Gamma, \quad \text{(III.21)}$$

а остальные граничные условия формулируются по напряжениям. Вне участка замера смещений в выработанном пространстве по-прежнему задаются нормальные напряжения

$$\sigma_y = N(x, t) \text{ на } L''-\Gamma'', \tag{III.22}$$

а на всей границе кровли с выработкой — касательные напряжения

$$\tau_{xy}=0 \text{ на } L''. \tag{III.23}$$

Если предположить, что взаимодействие пород с пластом происходит с участием сил трения, то в призабойных пластических зонах угольного пласта будем иметь

$$\tau_{xy} = \pm \tau_i^* \text{ на } L_1^*, \tag{III.24}$$

а затухание касательных напряжений в неотработанных частях пласта можно аппроксимировать линейным распределением

$$\tau_{xy} = \pm \tau_i^* \frac{c_i \mp x}{c_i - b_i} \text{ на } L^*. \tag{III.25}$$

Вне зоны аномалии ($|x| > |c_i|$) дополнительные касательные напряжения отсутствуют, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 \text{ на } L' - (L^* - L'''). \tag{III.26}$$

Таким образом, задача I.B.2 для определения напряженного состояния пород при отработке мощного пласта по натурным замерам нормальных смещений формулируется граничными условиями (III.21)—(III.26) и условием на бесконечности (III.20).

Специфика сформулированных задач определения напряженного состояния вмещающих пород, по сравнению с аналитическими постановками, заключается в введении натурных замеров смещений в качестве граничных условий задачи. Тем самым определяемое напряженное состояние должно отразить горно-геологические условия и горнотехническую обстановку конкретного отрабатываемого пласта.

Рассмотренные постановки переходят в аналитические задачи при формулировках граничных условий по смещениям из гипотез деформирования угольного пласта. Так, при предположении, что угольный пласт деформируется как упругий податливый слой, т. е.

$$V^+ - V^- = 2h_i \left(1 - \frac{\sigma_n}{E_i}\right), \tag{III.27}$$

где $2h_i$ — мощность пласта или закладки; E_i — модуль упругости слоя; σ_n — нормальные напряжения (опорное давление), задача I.A переходит в задачу, рассмотренную И. А. Куниным, А. М. Вайсманом, В. Е. Вдовиным [12, 14]. При нулевом приближении задачи [12], обычно используемом в аналитических решениях [8], рассматривается угольный пласт как жесткий

слой, а деформация его в окрестности забоя принимается постоянной

$$V^+ - V^- = 2h_i; \qquad \text{(III.28)}$$

в работах С. В. Кузнецова [49, 52] вертикальные смещения над пластом так же считаются постоянными, но равными

$$V^+ - V^- = 2h_i - h_c, \qquad \text{(III.28′)}$$

где h_c — мощность обрушенных слоев непосредственной кровли.

Гипотезы (III.27), (III.28), (III.28′) могут использоваться при определении напряжений экспериментально-аналитическим методом, когда натурные замеры производятся только в одной части отрабатываемого пласта (например, на L_1', см. рис. III. I) или, более того, производятся на конечном участке выработанного пространства (Г″), а над угольным пластом отсутствуют. В этом случае граничные условия по смещениям, там, где замеры не проводятся, формулируются из гипотез (III.27), (III.28), (III.28′).

Третий тип расчетной схемы (см. рис. II.3, *в*) получается из первого (см. рис. III.I) при больших размерах выработанного пространства (L''). В этом случае породы получают опору не на целик угольного пласта (L_2'), а на обрушенные породы или закладку в выработанном пространстве. Поэтому постановка задач определения напряженного состояния для третьей расчетной схемы вытекает из задач I, в которых участок L_2' отсутствует, а участок L'' — полубесконечный. Граничные условия на участках замера и вне этих участков в призабойном выработанном пространстве и над угольным пластом остаются, как и в задачах I, а на участках выработанного пространства, удаленных от отрабатываемого пласта и участков замеров, задаются нормальные $(\sigma_y \to \sigma_y^0)$ и касательные $(\tau_{xy}=0)$ напряжения или используется гипотеза по смещениям (III.27), (III.28), (III.28′). Заметим, что задание граничного условия в выработанном пространстве вне участков замеров смещения вдали от призабойной зоны в том или ином виде не окажет существенного влияния на определяемое по натурным наблюдениям смещений напряженное состояние в окрестности призабойной зоны выработанного пространства и угольного пласта.

Второй тип расчетной схемы (см. рис. II, 3, *б*) рассматривает сечения по угольному пласту, испытывающие воздействие очистных работ. Для тонких и средней мощности пластов, когда можно предположить условие симметрии напряжений и малость касательных напряжений в пласте, в том числе по контакту с породами, граничная задача формулируется по замеренным сближениям почвы и кровли

$$V^+ - V^- = S(x, t) \text{ на } L \qquad \text{(III.29)}$$

и гипотезе проскальзывания — отсутствия дополнительных ка-

сательных напряжений по контакту пласта и породы

$$\sigma_{xy}=0 \text{ на } L, \qquad \text{(III.30)}$$

на бесконечности дополнительные напряжения отсутствуют, т. е.

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xy}=\sigma_{yy}=0 \text{ на } \infty. \qquad \text{(III.31)}$$

Из решения сформулированной задачи (III.29)—(III.31), которую назовем задачей II.A, определяют дополнительное напряженное состояние, полное напряженное состояние находят по формулам (II.26), (II.27). Задача II.A может быть использована для определения напряженного состояния при отработке мощных пластов в случае пологого или вертикального залегания их $\left(\alpha=0, \frac{\pi}{2}\right)$ или при гидростатическом первоначальном напряженном состоянии ($\lambda=1$).

Для мощных пластов произвольного угла падения и при произвольном поле первоначальных направлений определять напряженное состояние по замеряемым смещениям можно только при известном векторе смещений кровли (или почвы), т. е.

$$\begin{matrix} V^-=F(x, l) \\ U^-=Q(x, l) \end{matrix} \text{ на } L. \qquad \text{(III.32)}$$

Эту задачу обозначим задачей II.B. Поскольку при натурных наблюдениях замеряются дополнительные смещения, то в задаче II.B предполагается, что на бесконечности дополнительные напряжения отсутствуют (III.31).

Задачи II по формулировке представляют собой частные случаи задач I, когда натурные замеры смещений на конечном участке экстраполируются по всей границе L, а граничные условия по нормальным (σ_n) и касательным (τ_{xy}) полным напряжениям не формулируются.

Таким образом, для расчетной схемы I типа (см. рис. II. 3, *а*, III.1) определение напряженного состояния массива пород по натурным замерам смещений может осуществляться с использованием наблюдений относительных сближений почвы и кровли при отработке тонких и средней мощности пластов (задача I.A) и мощных пластов пологого или вертикального залегания или при действии гидростатического поля первоначального напряженного состояния (задача I.A.3). Определение напряжений пород кровли (или почвы) при отработке мощного пласта произвольного угла падения и негидростатического первоначального состояния массива возможно по натурным наблюдениям абсолютных нормальных к пласту смещений (задача I.B.2) или вектора сдвижений точек границы (задача I.B.1).

Задача определения напряженного состояния вмещающих пород в окрестности забоя отрабатываемого пласта по натурным замерам смещений при больших размерах выработанного пространства формулируется как частный случай задач I, когда влияние одного из участков не рассматривается.

Для расчетной схемы II типа (см. рис. II.3, *б*) при отработке тонких, средней мощности и мощных пластов (при условии $\alpha=0, \frac{\pi}{2}$ или $\lambda=1$) определение напряженного состояния пород возможно по натурным замерам сближений кровли и почвы (задача II.А), при отработке мощных пластов — по натурным замерам вектора сдвижений на границе (задача II.В).

§ 2. Методы решения задач о напряженно-деформированном состоянии горного массива с учетом реологических свойств горных пород

Сформулированные задачи определения напряженного состояния вмещающих пород по натурным замерам смещений в общем случае являются задачами с подвижной границей (происходит движение забоя) и граничными условиями по смещениям, зависящим от времени.

Уравнения движения горного массива вокруг очистной выработки после упрощений, сформулированных в § 1, 2 гл. II, принимают вид

$$(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial\theta}{\partial x}+\tilde{\mu}\Delta U_x=0,$$
$$(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial\theta}{\partial y}+\tilde{\mu}\Delta U_y=0, \qquad \text{(III.33)}$$

где $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ — интегральные операторы (II.11), $\theta=\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}$.

Исследуем качественный характер задач определения напряженного состояния массива, для чего, приняв упрощающее предположение (II.16), зададимся одним из простейших представлений функции наследственности — экспоненциальным видом (II.8). Интегральные операторы $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ в этом случае могут быть записаны как

$$\tilde{\lambda}f(t)=\lambda\left\{f(t)-\lambda_1\int_0^t\exp[-\alpha(t-\tau)]f(\tau)\,d\tau\right\}, \qquad \text{(III.34)}$$
$$\tilde{\mu}f(t)=\mu\left\{f(t)-\mu_1\int_0^t\exp[-\alpha(t-\tau)]f(\tau)\,d\tau\right\},$$

где $\lambda>0$, а ядро интегральных операторов удовлетворяет свойствам функции наследственности.

Пусть $m=\max\left[\left|\frac{\partial^2U_x}{\partial x^2}\right|;\left|\frac{\partial^2U_x}{\partial x\partial y}\right|;\left|\frac{\partial^2U_x}{\partial y^2}\right|;\left|\frac{\partial^2U_y}{\partial x^2}\right|;\left|\frac{\partial^2U_y}{\partial x\partial y}\right|;\left|\frac{\partial^2U_y}{\partial y^2}\right|\right]$ из уравнений (III.34), тогда:

$$\tilde{\lambda}m=\lambda m[1-\lambda_1\alpha^{-1}(1-e^{-\alpha t})]; \qquad \text{(III.35)}$$
$$\tilde{\mu}m=\mu m[1-\mu_1\alpha^{-1}(1-e^{-\alpha t})];$$

или в подвижной системе координат

$$x_1 = x + \omega t,\ y_1 = y,$$

связанной с движущимся забоем (см. рис. II.1):

$$\tilde{\lambda} m = \lambda m\left[1 - \lambda_1 \alpha^{-1}\left(1 - \exp \alpha \frac{x_1 - x}{\omega}\right)\right],$$

$$\tilde{\mu} m = \mu m\left[1 - \mu_1 \alpha^{-1}\left(1 - \exp \alpha \frac{x_1 - x}{\omega}\right)\right]. \qquad \text{(III.36)}$$

Коэффициент α^{-1} характеризует время релаксации ($T_р$), т. е. время, в течение которого все процессы ползучести стабилизируются. Так, по данным Ж. С. Ержанова [31], продолжительность ползучести песчаника — 860, аргиллита — 600, известняка — 40—50 ч.

При рассмотрении временных процессов изменения напряженно-деформированного состояния горного массива могут представиться следующие случаи.

Первый случай. При взрывной отбойке угля рассматриваются процессы непосредственно после подвигания забоя ($\alpha t = tT_р^{-1} = 0(\varepsilon)$) или время движения забоя $T_з$ мало по сравнению с временем релаксации $\left(\alpha \frac{x_1 - x}{\omega} = T_з T_р^{-1} = 0(\varepsilon)\right)$, что может осуществляться либо при малых расстояниях, пройденных забоем, либо при больших скоростях его движения. В этом случае экспоненты, входящие в (II.35), (II.36), достаточно близки к единице, временные операторы $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ в основном определяются упругими постоянными Ламе (λ, μ), а задача о напряженно-деформированном состоянии может быть рассмотрена как задача упругости горных пород, характеризующихся упругими постоянными λ, μ.

Второй случай характеризуется тем, что при взрывной отбойке угля рассматриваются процессы, протекающие через значительные промежутки времени после подвигания забоя ($\alpha t = tT_р^{-1} \to \infty$), или тем, что время движения забоя велико по сравнению с временем релаксации $\left(\alpha \frac{x_1 - x}{\omega} = T_з T_р^{-1} \to \infty\right)$, что может осуществляться либо при значительных расстояниях, пройденных забоем, либо при малых скоростях его движения. В этом случае значение экспонент в (II.35), (II.36) близко к нулю, а временные операторы имеют вид:

$$\tilde{\lambda} m = \lambda(1 - \lambda_1 \alpha^{-1}) m,\ \tilde{\mu} m = \mu(1 - \mu_1 \alpha^{-1}) m.$$

Для оценки напряженно-деформированного состояния пород при таких соотношениях времени подвигания забоя и времени релаксации пород также может быть поставлена задача теории упругости, но упругие постоянные должны быть взяты в виде:

$$\lambda_\infty = \lambda(1 - \lambda_1 \alpha^{-1}),\ \mu_\infty = \mu(1 - \mu_1 \alpha^{-1}), \qquad \text{(III.37)}$$

т. е. «предельные», отрелаксированные значения характеристик среды.

Наконец, в третьем случае рассматриваются временные процессы, соизмеримые по времени с продолжительностью полвучести $\left(\alpha i = i\overline{T}_p^{-1} \approx 1,\ \alpha\frac{x_1 - x}{\omega} = \overline{T}_2\overline{T}_p^{-1} \approx 1\right)$. Это процесс изменения напряженно-деформированного состояния пород при взрывной отбойке угля в пределах технологического цикла $t_i \leqslant \tau < t_{i+1}$ продолжительностью от нескольких часов до нескольких суток или при непрерывном подвигании забоя с реально достигнутыми скоростями. В этом случае временной характер интегральных операторов $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{\mu}$ играет существенную роль, и задача определения напряжений должна рассматриваться как задача теории линейной наследственности.

Отметим одно обстоятельство, существенно упрощающее решение получаемых задач теории линейной наследственности. Реальная отработка угольных пластов, которая проводится буровзрывным или комбайновым способом, характеризуется тем, что процесс изменения механического состояния пород во времени происходит фактически при неподвижном забое. Движение забоя можно рассматривать как процесс статических изменений положений забоя, что позволяет применить для решения упруго-наследственных задач принцип Вольтерра, разработанный Ю. Н. Работновым [78] и развитый в задачах механики горных пород М. И. Розовским и Ж. С. Ержановым [31].

Этот принцип позволяет при решении статических задач для неидеально упругих сред переставлять операторы дифференцирования по координатам и временные операторы в модели среды Больцмана (II.4). Согласно принципа Вольтерра, решение статической задачи для неидеально упругой среды получается из решения соответствующей упругой краевой задачи, в которой упругие константы заменены временными операторами типа (II.11), (II.13).

§ 3. Определение напряжений вмещающих пород с учетом упругих свойств среды

Первоначальным этапом решения задачи определения напряжений в горном массиве по заданным смещениям как задачи теории наследственной упругости является решение сформулированных в § 1 задач как плоских задач теории упругости. Время (t), входящее в граничные условия по смещениям, рассматривается как параметр.

Решение задач проводится методом Н. И. Мусхелишвили [67].

Граничные условия поставленных плоских задач позволяют сформулировать краевые задачи для аналитических функций

$\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, определяющих напряженное состояние в рассматриваемой области по формулам Г. В. Колосова:

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)];$$
$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}; \qquad \text{(III.38)}$$

и перемещения

$$2\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\varkappa\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)},$$

где $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$, $\varkappa=3-4\nu$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона пород; $z=x+iy$ — комплексная переменная.

Граничная задача I.А ((III.2) — (III.8)) для определения напряженного состояния вмещающих пород по натурным замерам сближений кровли и почвы разбивается на две части: симметричную (задача I.А.1) и антисимметричную (задача I.А.2).

Симметричная задача I.А.1 является задачей определения напряженного состояния в полуплоскости по граничным условиям (III. 12) и условию на бесконечности (III. 10).

Граничное условие по касательным напряжениям ($\tau_{xy}=0$) позволяет выразить из второго соотношения (III.38) аналитическую функцию $\Psi(z)$ связью

$$\Psi(z)=-z\Phi'(z). \qquad \text{(III.39)}$$

Граничные условия по замеряемым нормальным смещениям и заданным нормальным напряжениям, с учетом (III.39), формулируют краевую задачу для аналитической функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \text{ на } L, \qquad \text{(III.40)}$$

где

$$G(t)=\left\{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.; \; g(t)=\begin{cases}\frac{4\mu i}{1+\varkappa}S'(t) \text{ на } \Gamma\\ N(t) \ldots \text{ на } L''-\Gamma'',\end{cases}$$

$t=z=\bar{z}$ — точка действительной оси; $\Phi^-(t)$, $\Phi^+(t)$ — граничные значения функции $\Phi(z)$ при подходе с нижней и верхней полуплоскости.

Таким образом, задача I.А.1 свелась к задаче Римана определения аналитической функции $\Phi(z)$, предельные значения которой на контуре L удовлетворяют условию (III.40). Эта задача с разрывным коэффициентом ($G(t)$) и свободным членом ($g(t)$) в точках $x=a$, b и на концах участка замера Γ''.

Граничная задача I.А.2 (III.13)—(III.15) интерпретируется [13] как задача для плоскости с разрезом $\Lambda=L^*+L'''+L''$, на берегах которого заданы нормальные и касательные напряжения; плоскость на бесконечности находится под действием сдвига τ^0_{xy}. Решение ее проводится в работе [14] методом

Н. И. Мусхелишвили. Напряженное состояние выражается формулами:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(z) + (z-\bar{z})\Phi'(z);$$
$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\Phi(z), \qquad \text{(III.41)}$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — функции напряжений. В рассматриваемой задаче они имеют вид:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \frac{i}{2}\frac{\tau_{xy}^0 z + c}{\chi(z)} + \frac{i}{2}\tau_{xy}^0,$$
$$\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) - i\tau_{xy}^0; \qquad \text{(III.42)}$$
$$\Phi(z) = \frac{i}{2\pi i\chi(z)}\int_{c_2}^{c_1}\frac{\chi^+(t)\,p(t)}{t-z}\,dt,$$

где $\chi(z)$ — ветвь корня $\sqrt{z^2-c_1^2}$, которая при больших $|z|$ ведет себя как $\chi(z)=z+\frac{a_1}{z}+\ldots$, $\chi^+(z)$ — значение $\chi(z)$ на верхнем берегу разреза.

Функция $p(x)$ представима в виде

$$p(x) = -i\left[\pm\tau_1^0\frac{c_i \mp x}{c_i - b_i}\eta(x\mp c_i)\eta(x\pm b_i) \pm \tau_1^0\eta(x\pm a_i)\eta(x+b_i)\right],$$

где $\eta(x)$ — функция единичного скачка, равная

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Константа c определяется из условий однозначности смещений, а условия ограниченности и неразрывности τ_{xy} в точках a_i, b_i, c_i должны приводить к условиям для определения размеров пластических зон.

Задача I.А.3, сформулированная для определения напряженного состояния вмещающих пород при отработке мощных пластов пологого или вертикального залегания или при действии гидростатического первоначального напряженного состояния, приводится к задаче (III.16, 17) для полуплоскости. Последняя аналогична задаче I.В.2 ((III.21) — (III.26)) для определения напряженного состояния при отработке мощного пласта произвольного падения и негидростатического первоначального напряженного состояния с разницей в касательных напряжениях на контакте пород и упругой частью пласта (на $L'-(L^*+L'')$. Поэтому проведем решение для задачи I.В.2, частным случаем которой будет решение задачи I.А.3.

Задача I.В.2 по постановке подобна задаче, рассмотренной в [47], которая решается методом Н. И. Мусхелишвили.

Решение задачи I.В.2 сведется к нахождению функций напряжений $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, определяющих напряженно-деформиро-

ванное состояние пород соотношениями:

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \Omega(z) - (z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$
$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) + (z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \qquad \text{(III.43)}$$
$$2\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \overline{\Omega(z)} - (z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$
$$\Omega(z) = z\Phi'(z) + \Psi(z).$$

Граничные условия (III.21) — (III. 26) для $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ будут

$$\operatorname{Im}[(\varkappa+1)\Phi(t) + \Omega(t)] = 2\mu i f(t) \quad \text{на} \quad \Gamma,$$
$$\operatorname{Re}[2\Phi(t) + \Omega(t)] = N(t) \quad \ldots \quad \text{на} \quad L'' - \Gamma'',$$
$$\operatorname{Im}\Omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{на } L'', \\ \pm\tau_i' & \text{на } L''', \\ \pm\tau_i'' \dfrac{c_i \mp t}{c_i - b_i} & \text{на } L^{\mp}, \\ \tau_{xy}^0 & \text{на } L' - (L^* + L'''), \end{cases} \qquad \text{(III.44)}$$

где $f(t) = F'(t)$.

Используя значения $\operatorname{Im}\Omega(t)$, определенные на L, первое и второе соотношения (III.44) могут быть записаны

$$\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\operatorname{Im}F(t) = \frac{4\mu i}{1-\varkappa} f(t) + \begin{cases} 0 & \text{на } \Gamma'', \\ \pm\tau_i'' & \text{на } L''', \\ \pm\tau_i'' \dfrac{c_i \mp t}{c_i - b_i} & \text{на } L^*, \\ \tau_{xy}^0 & \text{на } L' - (L^* + L'''), \end{cases} \qquad \text{(III.45)}$$
$$\operatorname{Re}F(t) = N(t) \quad \text{на} \quad L'' - \Gamma'',$$

где $F(z) = 2\Phi(z) + \Omega(z)$ — голоморфная функция в нижней полуплоскости.

Таким образом, задача I.B.2 свелась к задачам Гильберта для функций $\Omega(z)$, мнимая часть которой на границе L задана третьим выражением (III.44), и функции $F(z)$, мнимая и действительная части которой определены (III.45). Задачи решаются разработанными методами [20] и эти решения подобны полученным в [47].

Задача I.B.1 ((III.18) — (III.20)) определения напряжений в породах по замерам вектора смещений — есть третья основная задача теории упругости. Она сводится, по методу Н. И. Мусхелишвили, к краевой задаче для аналитической функции $\Phi(z)$, распространенной на верхнюю полуплоскость [67]. Функция $\Psi(z)$ в этом случае определяется выражением

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\Phi'(z),$$

а напряжения и перемещения выражаются через $\Phi(z)$:

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}];$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[(\bar{z}-z)\Phi'(z)-\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}]; \quad \text{(III.46)}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\varkappa\Phi(z)+\Phi(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}.$$

Краевая задача для функции $\Phi(z)$ будет

$$\Phi^+(t)-k\Phi^-(t)=f(t) \text{ на } L, \quad \text{(III.47)}$$

где $k=-\varkappa$ на Γ, $k=1$ на $L''-\Gamma''$, $f(t)$ — заданная функция:

$$f(t)=2\mu[Q'(t)+iF'(t)] \text{ на } \Gamma, \; f(t)=N(t) \text{ на } L''-\Gamma'.$$

Аналогично рассмотренным задачи II для определения напряженного состояния пород сводятся к краевым задачам.

Так, задача II.А ((III.29) — (III.31)) является частным случаем задачи I. А. 1 ((III.12) (III. 10)), когда граничные условия формулируются на всей границе L по замеряемым относительным смещениям и дополнительным напряжениям. Краевая задача для аналитической функции $\Phi(z)$ — функции напряжений, определяющей в задаче II.А дополнительное напряженное состояние, будет

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)+\frac{4\mu i}{1+\varkappa}S'(t) \text{ на } L. \quad \text{(III.48)}$$

Это вариант задачи Римана — задача о заданном скачке.

Решение задачи II.В, представляющей собой вторую основную задачу теории упругости, сводится к решению задачи

$$\Phi^+(t)=k\Phi^-(t)+f(t) \text{ на } L, \quad \text{(III.49)}$$

где $k=-\varkappa$, $f(t)$ — заданная функция:

$$f(t)=2\mu[Q'(t)+iF'(t)].$$

Задачи I.А, I.В.1, II.А и II.В определения напряженно-деформированного состояния пород по замеренным смещениям свелись к краевым задачам аналитических функций, а именно, к типу краевых неоднородных задач Римана для полуплоскости

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \quad \text{(III.50)}$$

где $G(t)$ — коэффициент задачи; $g(t)$ — свободный член.

Виды краевых задач Римана следующие: а) задача с непрерывным коэффициентом и непрерывным свободным членом — задача II.А (III.48), II.В (III.49); б) задача с разрывным коэффициентом и разрывным свободным членом, причем точки разрывов совпадают — задача I.А.1 (III.40), I.В.1 (III.47).

Методы решения встречающихся видов краевых неоднородных задач Римана разработаны достаточно хорошо [20]. Приведем окончательные выражения решений.

Неоднородная краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом (в задачах II.А, II.В коэффициент $G(t)$ постоянен и не равен нулю) имеет общее решение (при условии $\Phi^-(\infty)=0$, эквивалентному условию (II.31)):

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}, \qquad \text{(III.51)}$$

где

$$\chi^{\pm}(z)=\exp\left[\Gamma^{\pm}(z)\right],$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln G\frac{dt}{t-z}.$$

Общее решение неоднородной задачи Римана с разрывным коэффициентом $G(t)$ имеет вид

$$\Phi(z)=\chi(z)\left[\Phi^*(z)+P_{n-1}(z)\right], \qquad \text{(III.52)}$$

где

$$\Phi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{\chi^+(t)}\cdot\frac{dt}{t-z};$$

$$\chi(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-t_k)^{-\varkappa_k}\exp\left[\Gamma(z)\right];$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(t)}{t-z}dt,$$

t_k — точки разрыва коэффициента $G(t)$; m — количество точек разрыва; $\varkappa=\sum_{k=1}^{m}\varkappa_k$ — индекс задачи Римана; P_{n-1} — полином степени не выше $(n-1)$.

Решение неоднородной задачи Римана с разрывными коэффициентами может быть найдено в одном из трех классов:

1) решение, допускающее бесконечность интегрируемого порядка во всех точках разрыва;

2) решение, ограниченное в некоторых точках разрыва и допускающее интегрируемую бесконечность в остальных точках разрыва;

3) решение, ограниченное во всех точках разрыва.

§ 4. Определение напряжений по известным смещениям пород с учетом реологических свойств среды

Рассмотренные в предыдущем параграфе задачи о напряженно-деформированном состоянии вмещающих пород вокруг очистной выработки, определяемом по известным (из натурных

наблюдений) смещениям кровли, решались в предположении, что массив является упругой средой. Используем полученные результаты для решения упруго-наследственной задачи.

Согласно принципу В. Вольтерра, решение упруго-наследственной задачи получается из решения задачи теории упругости заменой упругих постоянных временными операторами.

Закон упруго-наследственного деформирования Больцмана — Вольтерра можно записать в виде, разрешенном относительно деформаций,

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma(t)+\int_0^t L(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau\right], \qquad \text{(III.53)}$$

где $L(t-\tau)$ — ядро наследственности.

Среди применявшихся ядер наследственности наиболее удобны в расчетах ядра экспоненциального вида.

П. Г. Соколов и В. И. Скрябин [80] определили параметры наследственности для некоторых горных пород, исходя из опытов на ползучесть и принимая ядра в виде

$$M(t-\tau)=\alpha_1 e^{-\beta_1(t-\tau)},\quad Q(t-\tau)=\alpha_2 e^{-\beta_2(t-\tau)},$$

т. е. рассматривали две функции наследственности, что, как указывалось в гл. II, § 1, осложняет анализ физических особенностей задачи.

Ж. С. Ержанов [31] принимал упрощения (II.15) относительно постоянства объемного последействия, применяя для обработки опытных данных деформирования образцов пород ядра вида

$$L(t-\tau)=Qe^{-\lambda(t-\tau)}.$$

Однако начальная стадия процесса ползучести таким ядром описывалась неудовлетворительно. Поэтому А. М. Вайсман, И. А. Кунин, К. К. Тупицын [15] для обработки экспериментальных данных Ж. С. Ержанова использовали ядра, представляющие агрегат ядер экспоненциального вида

$$L(t-\tau)=L(\lambda_i, t-\tau)=\theta_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}+\theta_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \qquad \text{(III.54)}$$

где λ_1, λ_2 положительны и не равны друг другу.

Останавливаясь на ядрах наследственности (III.54), как наиболее удобных для расчетов и хорошо описывающих опытные данные испытаний на ползучесть, укажем некоторые свойства [31, 78] интегральных операторов типа Вольтерра

$$\overset{*}{L}f=\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

с экспоненциальным ядром $L(t-\tau)$, зависящим от разности аргументов.

Произведением операторов $\dot{L}^*$ и $\dot{M}^*$ называется новый оператор $\dot{N}$, ядро которого

$$\dot{N}(t-\tau)=\int_0^t L(t-\xi)\,M(\xi-\tau)\,d\tau.$$

Перемножение операторов коммутативно, т. е.

$$\dot{N}=\dot{L}\dot{M}=\dot{M}\dot{L}.$$

Для $\dot{L}(\lambda_i,\ t-\tau)$ — операторов справедлива теорема умножения

$$\prod_{i=1}^{n}\dot{L}(\lambda_i)=\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)\right]^{-1}\dot{L}(\lambda_i), \qquad \text{(III.55)}$$

если $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\ldots\neq\lambda_n$.

Правило обращения операторов из теоремы умножения (III.55) определяется следующим образом:

$$\left[1-\sum_{i=1}^{n}0_i\prod_{k=1}^{n}\dot{L}(\lambda_k)\right]^{-1}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i\dot{L}(r_i), \qquad \text{(III.56)}$$

где $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\ldots\neq\lambda_n$; r_i — корни уравнения

$$1+\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{\lambda_i-r}=0 \quad \left(B_i=\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)\right]^{-1}\sum_{p=1}^{m}0_p\right),$$

коэффициенты a_i являются решением системы m — линейных уравнений

$$1+\sum_{i=1}^{m}(B_k-r_i)^{-1}a_i=0, \quad B_k\neq r_i.$$

М. И. Розовским (см. [31]) получена также формула

$$\dot{L}^{(n)}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{\partial^{n-1}\dot{L}(x)}{\partial x^{n-1}}. \qquad \text{(III.57)}$$

Пользуясь свойствами интегральных операторов типа Вольтерра с ядрами вида (III.54), можно связать временные операторы $\tilde{E}$, $\tilde{\nu}$ и $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, входящие в физические уравнения наследственной среды (II.10), (II.11) или (II.12), (II.13).

Пусть интегральный оператор

$$\tilde{E}=E(1-\dot{E}), \qquad \text{(III.58)}$$

где

$$\dot{E}f=\int_0^t M(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \qquad \text{(III.59)}$$

а ядро оператора представляется суммой двух экспонент

$$M(t-\tau)=\alpha_1 \exp[-\beta_1(t-\tau)]+\alpha_2 \exp[-\beta_2(t-\tau)]. \quad \text{(III.60)}$$

Согласно допущению, что коэффициент объемного сжатия для упруго-наследственных сред (в частности горных пород) можно принимать постоянным, оператор $\tilde{\nu}$ может быть выражен через оператор $\tilde{E}$ в виде

$$\tilde{\nu}=\nu\left(1+\frac{1-2\nu}{2\nu}\overset{*}{E}\right). \quad \text{(III.61)}$$

Из (II.14) с учетом (III.59), (III.61) имеем

$$\tilde{\mu}=\frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})}=\mu\frac{1-\overset{*}{E}}{1-\frac{2\nu-1}{2(1-\nu)}\overset{*}{E}}=\mu(1-\overset{*}{\mu}), \quad \text{(III.62)}$$

где $\overset{*}{\mu}=\overset{*}{E}-\overset{*}{R}_1+\overset{*}{E}\overset{*}{R}_1$, оператор $\overset{*}{R}_1$ имеет своим ядром резольвенту ядра оператора $\frac{2\nu-1}{2(1-\nu)}\overset{*}{E}$.

Аналогично получим выражения для временного оператора

$$\tilde{\lambda}=\frac{\tilde{E}\tilde{\nu}}{(1+\tilde{\nu})(1-2\tilde{\nu})}=\lambda\frac{(1-\overset{*}{E})\left(1+\frac{1-2\nu}{2\nu}\overset{*}{E}\right)}{\left[1-\frac{2\nu-1}{2(1+\nu)}\overset{*}{E}\right](1+\overset{*}{E})}=\lambda(1-\overset{*}{\lambda}), \quad \text{(III.63)}$$

где

$$\overset{*}{\lambda}=\overset{*}{D}+\overset{*}{R}_2+\overset{*}{D}\overset{*}{R}_2, \quad D=\frac{1-4\nu}{2\nu}\overset{*}{E}-\frac{1-2\nu}{2\nu}\overset{*}{E}^{(2)},$$

оператор $\overset{*}{R}_2$ имеет своим ядром резольвенту ядра оператора

$$\left[\frac{4\nu-3}{2(1+\nu)}\overset{*}{E}+\frac{2\nu-1}{2(1-\nu)}\overset{*}{E}^{(2)}\right].$$

Обработка экспериментальных данных ползучести образцов горных пород в зависимости от времени, проведенная И. А. Кунииным, А. М. Вайсманом, К. К. Тупициным, показала, что деформирование пород во времени хорошо описывается ядром наследственности

$$L(t-\tau)=0_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}+0_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}$$

интегрального оператора

$$\frac{1}{\tilde{E}}f(t)=\frac{1}{E}\left\{f(t)+\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right\}. \quad \text{(III.64)}$$

Параметры ядра наследственности для ряда пород [15] приведены в табл. III.1.

Таблица III. 1

Порода	Параметры			
	$\theta_1 \cdot 10^5\ c^{-1}$	$\theta_2 \cdot 10^5\ c^{-1}$	$\lambda_1 \cdot 10^5\ c^{-1}$	$\lambda_2 \cdot 10^5\ c^{-1}$
Песчанистый сланец	0,17	3,45	0,14	5,23
Глинистый »	0,06	1,69	0,09	1,58
Песчаник	0,03	0,95	0,05	2,38

Интегральный оператор $\tilde{E}$ получается обращением оператора (III.64)

$$\tilde{E} = \frac{E}{1 + \sum_{i=1}^{2} \theta_i \overset{*}{L}(-\lambda_i)} = E\left[1 - \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \overset{*}{M}(-\beta_k)\right], \quad \text{(III.65)}$$

где величины β_k — вещественные и не равные между собой корни уравнения

$$1 - \sum_{i=1}^{2} \theta_i (\lambda_i - \beta)^{-1} = 0,$$

а коэффициенты α_k находятся после отыскания величин β_k из решения системы линейных уравнений

$$1 - \sum_{k=1}^{2} \alpha_k (\alpha_i + \beta_k)^{-1} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Значения параметров ползучести ядра оператора

$$\tilde{E}f = E\left\{f(t) - \int_0^t [\alpha_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} + \alpha_2 e^{-\beta_2(t-\tau)}] f(\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$= E\left[f(t) - \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \overset{*}{M}(-\beta_k) f(\tau)\right], \quad \text{(III.66)}$$

где

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p_1 \mp \sqrt{p_1^2 - 4q_1}\right),$$

$p_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta_1 + \theta_2)$, $q_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_1$, $\alpha_1 = (\beta_1 - \lambda_1)(\beta_1 - \lambda_2)(\beta_1 - \beta_2)^{-1}$, $\alpha_2 = (\beta_2 - \lambda_1)(\beta_2 - \lambda_2)(\beta_1 - \beta_2)^{-1}$ приводятся в табл. III.2.

Упруго-наследственное решение сформулированных задач определения напряженного состояния массива по замеряемым в процессе отработки пласта смещениям пород может быть получено из решений соответствующих задач теории упругости (гл. III, § 3), в которых упругие константы заменяются интегральными операторами.

Таблица III. 2

Порода	Параметры			
	$\alpha_1 \cdot 10^5\ c^{-1}$	$\alpha_2 \cdot 10^5\ c^{-1}$	$\beta_1 \cdot 10^5\ c^{-1}$	$\beta_2 \cdot 10^5\ c^{-1}$
Песчаный сланец	0,0589	3,5611	0,2405	8,7495
Глинистый »	0,0128	1,7372	0,1178	3,3022
Песчаник	0,0150	0,9650	0,0713	3,3387

Комбинации упругих постоянных, наиболее часто встречающиеся в рассмотренных задачах, имеют вид

$$\frac{E}{1-(a\nu+b\nu^2)}, \quad \frac{1-c\nu}{1-d\nu},$$

где a; b, c, d — действительные числа.

Соответствующие интегральные операторы определяются следующим образом:

$$\frac{\widetilde{E}}{1-(a\widetilde{\nu}+b\widetilde{\nu^{(2)}})}=\frac{E}{1-(a\nu+b\nu^2)}(1-\overset{*}{F}_1), \qquad \text{(III.67)}$$

где $\overset{*}{F}_1=\overset{*}{E}-\overset{*}{R}_3-\overset{*}{E}\overset{*}{R}_3$, оператор $\overset{*}{R}_3$ имеет своим ядром резольвенту ядра оператора $\frac{(1-2\nu)\left[2(a+b\nu)\overset{*}{E}+b\overset{*}{E}^{(2)}\right]}{4(1-a\nu-b\nu^2)}$;

$$\frac{1-c\widetilde{\nu}}{1-d\widetilde{\nu}}=\frac{1-c\nu}{1-d\nu}(1-\overset{*}{F}_2), \qquad \text{(III.68)}$$

где

$$\overset{*}{F}_2=\frac{c(1-2\nu)}{2(1-c\nu)}\overset{*}{E}-\overset{*}{R}_4-\frac{c(1-2\nu)}{2(1-c\nu)}\overset{*}{E}\overset{*}{R}_4,$$

оператор $\overset{*}{R}_4$ имеет своим ядром резольвенту ядра оператора

$$\frac{d(1-2\nu)}{2(1-d\nu)}\overset{*}{E}.$$

При решении задачи о напряженном состоянии массива с учетом наследственных свойств пород интегральные операторы вида (III.67), (III.68) действуют на функции, зависящие от времени и получаемые из натурных наблюдений за смещениями.

ГЛАВА IV

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА ПРИ ЕГО ОТРАБОТКЕ

§ 1. Постановка задач, расчетные схемы и исходный материал при формулировке граничных условий

В отличие от имеющихся аналитических исследований механического состояния массива горных пород (глава I), рассматривающих напряженное состояние вмещающих пород и ограничивающихся расчетами напряжений только на контакте с угольным пластом, в данной главе исследуется напряженное состояние самого угольного пласта.

Задачу о напряженно-деформированном состоянии угольного пласта можно решать двумя способами. Первый — рассмотрение системы «вмещающие породы — угольный пласт» во взаимодействии. Второй — рассмотрение только угольного пласта, находящегося под действием вмещающих пород. Это действие задается граничными условиями.

Расчетной схемой, моделирующей механическую систему «вмещающие породы — угольный пласт», может служить плоскость, имеющая включение в виде слоя конечной толщины (из другого по механическим свойствам материала) и выреза в этом слое (см. рис. II.3, *а*, *в*), Плоскость на бесконечности находится под действием напряженного состояния, равного первоначальному напряженному состоянию в районе очистной выработки (II.27).

При формулировке граничных условий в задаче о механическом состоянии системы «вмещающие породы — угольный пласт» могут использоваться условия взаимодействия пород с угольным пластом по контакту. Такими условиями служат гипотезы:

а) сцепления пород с угольным пластом, т. е. непрерывность вектора смещений по контакту

$$U^+ = U^-, \quad V^+ = V^- \quad \text{на} \quad y = \pm h, \tag{IV.4}$$

где U, V — компоненты вектора смещений, индексы «+», «—» относятся к пласту и породе соответственно;

б) проскальзывания без трения пород по угольному пласту и непрерывность нормальной к пласту компоненты смещений

$$\tau_{xy}^{\pm} = 0, \quad V^+ = V^- \quad \text{на} \quad y = \pm h. \tag{IV.2}$$

Гипотезы (IV.1), (IV.2) рассматривают крайние случаи возможного характера взаимодействия пород кровли с пластом.

На контуре выреза (выработки) формулируются граничные условия свободной поверхности:

$$\sigma_y^{\pm} = \tau_{xy}^{\pm} = 0 \quad \text{на} \quad a \geqslant x \geqslant b, \; y = \pm h;$$
$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \text{на} \quad x = a, b, \; -h \leqslant y \leqslant h. \tag{IV.3}$$

Однако аналитическое исследование напряженного состояния угольного пласта не может отразить всей специфики конкретного отрабатываемого пласта в определенной горнотехнической обстановке. В связи с этим возникает необходимость разработки экспериментально-аналитического метода исследования механического состояния угольного пласта, т. е. использования натурных наблюдений проявлений горного давления при определении напряженно-деформированного состояния.

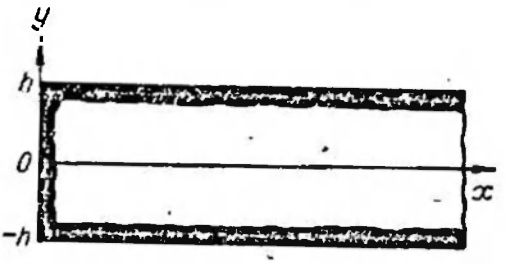


Рис. I. V.I. Расчетная схема задачи 1 определения напряжений в угольном пласте.

Расчетной схемой задачи о напряженном состоянии упругого угольного пласта служит бесконечная полуполоса (рис. IV.1), напряженное состояние которой удовлетворяет однородной системе уравнений равновесия (II.28), а на бесконечности равно первоначальному напряженному состоянию массива (II.27). Напряженное состояние пласта (σ_x, σ_y, τ_{xy}) представляется (II.26) суммой первоначального напряженного состояния (σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0) и дополнительных напряжений (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}).

Дополнительные напряжения, вызванные проведением выработки, удовлетворяют также однородной системе уравнений (II.29) и уравнению совместности (II.30), а на достаточном удалении от забоя (торца полуполосы) исчезают.

Натурные наблюдения горного давления проводятся замерами изменений напряженного или деформированного состояния угольного пласта. Совершенствующиеся методы измерения напряжений (метод разгрузки, гидродатчиков, фотоупругих датчиков и т. п.) могут позволить получить значения нормальных к пласту напряжений опорного давления и касательных напряжений по продольным кромкам угольного пласта, т. е.

$$\sigma_y = N(x), \; \tau_{xy} = T(x) \quad \text{на} \quad x \geqslant 0, \; y = \pm h. \tag{IV.4}$$

Дополняя граничные условия на продольных кромках пласта условием свободного незагруженного забоя

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \text{на} \quad x = 0, \; |y| \leqslant h, \tag{IV.5}$$

получим первую основную задачу теории упругости для полуполосы (рис. VI.2, *а*).

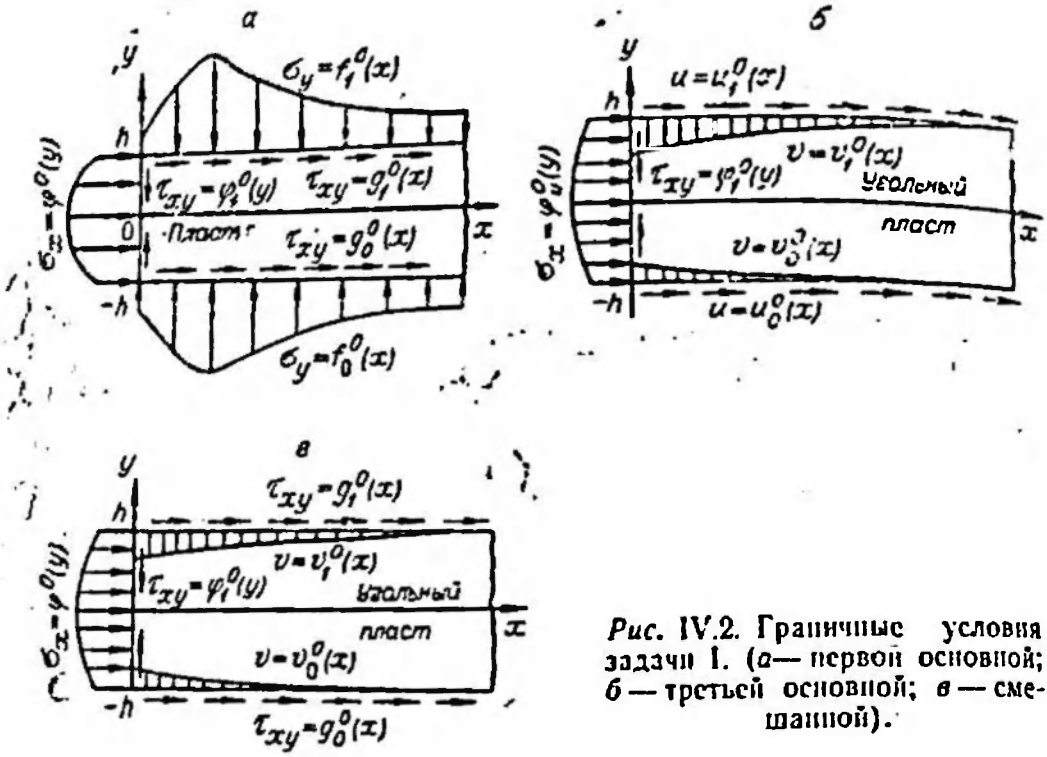


Рис. IV.2. Граничные условия задачи I. (*а* — первой основной; *б* — третьей основной; *в* — смешанной).

Если производятся замеры только дополнительных напряжений, вызванных отработкой пласта, то граничные условия будут:

$$\sigma_{yy}=N(x);\ \sigma_{xy}=T(x)\ \text{ на }\ x\geqslant 0,\ y=\pm h; \qquad \text{(IV.4')}$$

$$\sigma_{xx}=-\sigma_x^0,\ \sigma_{xy}=-\tau_{xy}^0\ \text{ на }\ x=0,\ |y|\leqslant h \qquad \text{(IV.5')}$$

Следует отметить, что граничные условия по напряжениям на продольных кромках пласта могут быть получены из решения задачи о напряженном состоянии вмещающих пород экспериментально-аналитическим методом (глава II).

Из натурных методов изучения проявлений горного давления наиболее распространенным и в достаточной мере надежным является метод измерения смещений. Натурные замеры смещений по контакту пород с пластом могут дать информацию либо о векторе смещений, либо о компоненте вектора смещений, перпендикулярной пласту (V).

В первом случае, используя вектор смещений в качестве граничного условия, можно сформулировать третью основную задачу определения напряженного состояния угольного пласта, рассматриваемого как полуполоса (см. рис. VI, 2, *б*):

$$U=Q(x),\ V=F(x)\ \text{ на }\ x\geqslant 0,\ y=\pm h;$$
$$\sigma_x=\tau_{xy}=0\ \text{ на }\ x=0,\ |y|\leqslant h, \qquad \text{(IV.6)}$$

где $Q(x)$, $F(x)$ — известные из натурных наблюдений функции.

Во втором случае из натурных наблюдений по контакту с пластом известна только нормальная компонента

$$V=F(x)\ \text{ на }\ x\geqslant 0,\ y=\pm h, \qquad \text{(IV.7)}$$

которую можно использовать в качестве первого граничного условия на продольных кромках пласта (полуполосы). Вторым граничным условием могут быть использованы гипотезы взаимодействия пласта с породами:

а) жесткого сцепления

$$U=0; \tag{IV.8}$$

б) проскальзывания без трения

$$\tau_{xy}=0. \tag{IV.9}$$

При использовании гипотезы (IV.8) получаем частный случай ($Q(x)=0$) третьей основной задачи (IV.6), при гипотезе (IV.9) — смешанную задачу (IV.5), (IV.7), (IV.9).

Угольный пласт, находящийся под действием близлежащей очистной выработки, в расчетной схеме II типа (см. рис. II.3, *б*) представляет собой слой, заключенный между двумя полуплоскостями (породами кровли и почвы). Расчетной схемой для определения напряженного состояния в таком пласте служит бесконечная полоса (рис. IV.3), на границах которой формулируются условия, определенные из замеров проявлений горного давления от проводимой очистной выработки или из экспериментально-аналитического или аналитического решения задач о напряженном состоянии вмещающих пород, при котором определяются напряжения по контакту пород с пластом.

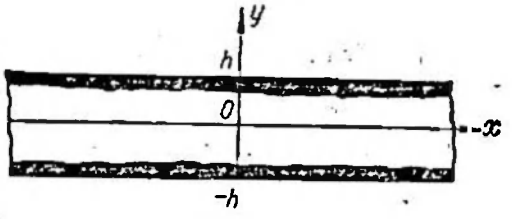


Рис. IV.3. Расчетная схема задачи II определения напряжений в угольном пласте.

Если по контакту с породами (на кромках полосы) известны нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_y=N(x),\ \tau_{xy}=T(x) \text{ на } -\infty<x<\infty,\ y=\pm h, \tag{IV.10}$$

то получаем первую основную задачу о напряженном состоянии полосы.

Если известны абсолютные смещения по контакту или относительные сближения кромок

$$U=Q(x),\ V=F(x) \text{ на } -\infty<x<\infty,\ y=\pm h, \tag{IV.11}$$

то формулируется вторая основная задача для полосы. Частным случаем задания условия по касательным к пласту смещениям (U) является гипотеза жесткого сцепления пород с пластом, когда предполагается малость касательных смещений ($U=0$), или какая-нибудь гипотеза связи касательной и нормальной компоненты вектора смещений, т. е. $U=f(V)$.

При известных нормальных смещениях кромок пласта и касательных напряжениях по контакту (например, гипотеза проскальзывания пород по пласту) получаем смешанную задачу

$$V=F(x),\ \tau_{xy}=T(x) \text{ на } -\infty<x<\infty,\ y=\pm h. \tag{IV.12}$$

Таким образом, в зависимости от натурных наблюдений проявлений горного давления на контакте пласта с вмещающими породами может быть сформулирована экспериментально-аналитическая задача определения напряженного состояния угольного пласта при его отработке.

§ 2. Решение задач о напряженном состоянии упругого угольного пласта

Задачи, позволяющие исследовать напряженное состояние упругого угольного пласта, являются основными задачами теории упругости для полуполосы. В работах, посвященных задаче определения напряженного состояния упругой полуполосы, использовались различные методы решения.

Класс точных решений задачи для полуполосы ограничивается функциями П. Ф. Папковича [76], описывающими напряженное состояние в полуполосе со свободными продольными кромками и торцом, нагруженным самоуравновешенной системой нормальных и касательных сил. Аналогичная задача рассмотрена [94—96], где функция напряжений выбиралась в виде комбинации сумм и произведений.

В работах [60, 61] при решении задачи был использован аппарат теории функций комплексного переменного. Метод функций Грина был применен в работе [35], причем при решении задачи аналитическое продолжение решения было осуществлено не через торец, а через продольные кромки полуполосы.

Задачу для полуполосы, сжатой двумя сосредоточенными силами, Л. Н. Трапезников [83] рассматривал, используя вариационный метод. В работе [97] при решении задачи применялся энергетический метод.

И. И. Ворович и В. В. Копасенко [18] в задаче о полуполосе учли особенности решения в форме, отличной от той, в которой искал решение Benthem [93], что положительно сказалось на точности решения. В работе [75] рассматриваются некоторые задачи о деформации полубесконечной двухслойной полосы. Решение находится в классе ограниченных функций, а краевые условия на торце выполняются приближенно (в рассматриваемом примере они удовлетворяются в смысле Сен — Венана).

Методы решения задач о напряженном состоянии упругой полосы, разработанные Уфляндом Я. С. [84], основываются на использовании интегральных преобразований в задачах теории упругости.

Рассмотрим первую основную задачу плоской теории упругости для полуполосы (см. рис. IV. 2, *а*).

Пусть полуполоса ($x \geqslant 0$, $|y| \leqslant h$) находится в упругом равновесии под действием заданных усилий на ее границе:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y = f_1^0(x),\ \tau_{xy} = g_1^0(x) \quad \text{на} \quad y = h;\\
&\sigma_x = \varphi^0(y),\ \tau_{xy} = \varphi_1^0(y) \quad \text{на} \quad x = 0;\\
&\sigma_y = f_0^0(x),\ \tau_{xy} = g_0^0(x) \quad \text{на} \quad y = -h,
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжений; $\varphi^0(y)$, $\varphi_1^0(y)$, $f_0^0(x)$, $f_1^0(x)$, $g_0^0(x)$, $g_1^0(x)$ — заданные функции.

Задачу с произвольными краевыми условиями можно разбить на две части:

а) для полуполосы с граничными условиями, симметричными по координате y для напряжений σ_y и антисимметричными для τ_{xy}:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y = f_2^0(x),\ \tau_{xy} = g_2^0(x) \quad \text{на} \quad y = h;\\
&\sigma_x = \varphi^0(y),\ \tau_{xy} = \varphi_1^0(x) \quad \text{на} \quad x = 0;\\
&\sigma_y = f_2^0(x),\ \tau_{xy} = -g_2^0(x) \quad \text{на} \quad y = -h;
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

б) для полуполосы с граничными условиями антисимметричными по координате y для напряжений σ_y и симметричными для τ_{xy}:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y = f_3^0(x),\ \tau_{xy} = g_3^0(x) \quad \text{на} \quad y = h;\\
&\sigma_x = 0,\ \tau_{xy} = 0 \quad \text{на} \quad x = 0;\\
&\sigma_y = -f_3^0(x),\ \tau_{xy} = g_3^0(x) \quad \text{на} \quad y = -h;
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

где $f_2^0(x)$, $f_3^0(x)$, $g_2^0(x)$, $g_3^0(x)$ однозначно определяются соотношениями:

$$f_1^0(x) = f_2^0(x) + f_3^0(x);\quad g_1^0(x) = g_2^0(x) + g_3^0(x);$$
$$f_0^0(x) = f_2^0(x) - f_3^0(x);\quad g_0^0(x) = -g_2^0(x) + g_3^0(x).$$

Чтобы получить решение задачи (IV.13), необходимо решить задачи (IV.14), (IV.15) и, более того, так как решение задач аналогично, достаточно изучить одну из них.

Рассмотрим задачу (IV.14) для бесконечной полуполосы ($x \geqslant 0$, $-h \leqslant y \leqslant h$) и получим ее решение, используя решение первой основной задачи теории упругости для бесконечной полосы ($-\infty < x < \infty$, $-h \leqslant y \leqslant h$) [84].

Пусть краевые условия в задаче для бесконечной полосы будут

$$\begin{aligned}
&\sigma_y = f(x),\ \tau_{xy} = g(x) \text{ на } y = h;\\
&\sigma_y = f(x),\ \tau_{xy} = -g(x) \text{ на } y = -h,
\end{aligned} \tag{IV.16}$$

где $f(x) = f_2(x)$, $g(x) = g_2(x)$ при $x \geqslant 0$, а при $x < 0$ функции $f(x)$, $g(x)$ неизвестны и определяются из условий задачи (IV.14).

Для бесконечной полосы интегрирование системы

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0; \tag{IV.17}$$

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

при краевых условиях (IV.16) проведем согласно [84].

Используя преобразование Фурье от напряжений:

$$\bar{\sigma}_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_x e^{i\lambda x}dx;\quad \bar{\tau}_{xy}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau_{xy}e^{i\lambda x}dx; \tag{IV.18}$$

$$\bar{\sigma}_y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_y e^{i\lambda x}dx,$$

систему уравнений (IV.17) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$, рассматриваемых как функции y. Эту систему нужно решить при граничных условиях

$$\bar{\sigma}_y|_{y=\pm h}=\bar{f}(\lambda),\quad \bar{\tau}_{xy}|_{y=\pm h}=\pm\bar{g}(\lambda), \tag{IV.19}$$

где $\bar{f}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ — образы граничных условий (IV.16). Согласно [84], система обыкновенных дифференциальных уравнений приводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка для $\bar{\sigma}_y$:

$$\bar{\sigma}_y^{IV}-2\lambda^2\bar{\sigma}_y^{II}+\lambda^4\bar{\sigma}_y=0. \tag{IV.20}$$

Общий интеграл уравнения (IV.20) может быть выбран в форме функции, четной по координате y:

$$\bar{\sigma}_y=A(\lambda)\operatorname{ch}\lambda y+B(\lambda)\lambda y\operatorname{sh}\lambda y. \tag{IV.21}$$

Решение первой основной задачи для бесконечной полосы с краевыми условиями (IV.16) запишется в виде [84]:

$$\bar{\sigma}_x=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\operatorname{ch}\lambda y+B(\lambda y\operatorname{sh}\lambda y+2\operatorname{ch}\lambda y)]e^{-i\lambda x}d\lambda;$$

$$\bar{\tau}_{xy}=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\operatorname{sh}\lambda y+B(\lambda y\operatorname{ch}\lambda y+\operatorname{sh}\lambda y)]e^{-i\lambda x}d\lambda; \tag{IV.22}$$

$$\bar{\sigma}_y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\operatorname{ch}\lambda y+B\lambda y\operatorname{sh}\lambda y]e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

Выражение (IV.22) будет решением первой основной задачи для бесконечной полуполосы, если неизвестные функции $A(\lambda)=A_1(x)+iA_2(\lambda)$, $B(\lambda)=B_1(\lambda)+iB_2(\lambda)$ определить так, чтобы (IV.22) удовлетворяло краевым условиям (IV.14) (достаточно

удовлетворить их на $x=0$, $y=h$). В этом случае получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{ch}\,\lambda y+B(\lambda y\,\mathrm{sh}\,\lambda y+2\,\mathrm{ch}\,\lambda y)]\,d\lambda\right\}=\varphi^0(y); \quad \text{(а)}$$

$$\mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{ch}\,\lambda y+B(\lambda y\,\mathrm{sh}\,\lambda y+2\mathrm{ch}\,\lambda y)]\,d\lambda\right\}=0; \quad \text{(б)}$$

$$Re\left\{\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{sh}\,\lambda y+B(\lambda y\,\mathrm{ch}\,\lambda y+\mathrm{sh}\,\lambda y)]\,d\lambda\right\}=\varphi_1^0(y). \quad \text{(в)}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{sh}\,\lambda y+B(\lambda y\,\mathrm{ch}\,\lambda y+\mathrm{sh}\,\lambda y)]\,d\lambda\right\}=0; \quad \text{(г)}$$

(IV.23)

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{ch}\,\lambda h+B\ \lambda h\,\mathrm{sh}\,\lambda h]\,e^{-i\lambda x}d\lambda\right\}=f_2(x),\quad x\geqslant 0; \quad \text{(д)}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{ch}\,\lambda h+B\lambda h\,\mathrm{sh}\,\lambda h]\,e^{-i\lambda x}d\lambda\right\}=0,\quad x\geqslant 0; \quad \text{(е)}$$

$$Re\left\{\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{sh}\,\lambda h+B(\lambda h\,\mathrm{ch}\,\lambda h+\mathrm{sh}\,\lambda h)]\,e^{-i\lambda x}d\lambda\right\}=$$
$$=g_2(x),\quad x\geqslant 0; \quad \text{(ж)}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\,\mathrm{sh}\,\lambda h+B(\lambda h\,\mathrm{ch}\,\lambda h+\mathrm{sh}\,\lambda h)]\,e^{-i\lambda x}d\lambda\right\}=0,\quad x\geqslant 0.$$

(з)

Полученная система уравнений записывается в компактной форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}k_{ij}(\overset{*}{x},\lambda)\,\varphi_j(\lambda)\,d\lambda=F_i(\overset{*}{x}),\quad i=1,\ldots,8, \quad \text{(IV.24)}$$

где $\overset{*}{x}=y$ для $i=1, 2, 3, 4$; $\overset{*}{x}=x$ для $i=5, 6, 7, 8$; $k_{ij}(\overset{*}{x},\lambda)$ — известная матрица коэффициентов; $\varphi_1(\lambda)=A_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)=B_1(\lambda)$, $\varphi_3(\lambda)=A_2(\lambda)$, $\varphi_4(\lambda)=B_2(\lambda)$, $F_i(\overset{*}{x})$ — заданные части уравнений.

Решение системы (IV.24) проведем численным методом. Применим к системе (IV.24) метод локализации, т. е. потребуем выполнения системы в конечном числе точек (n):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}k_{ij}(\overset{*}{x}_\beta,\lambda)\,\varphi_j(\lambda)\,d\lambda=F_i(\overset{*}{x}_\beta), \quad \text{(IV.25)}$$

$$i=1, 2, \ldots, 8;\ \beta=1, 2, \ldots, n.$$

Изменяя бесконечные пределы интегрирования на конечные $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ путем подстановки $\lambda = \operatorname{tg} S$ и заменяя интегрирование приближенной конечной суммой в интервале, разбитом на $2n$ частей, получим систему $8n$ линейных алгебраических уравнений для определения $8n$ неизвестных $\varphi_j(S_\alpha)$:

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{j=1}^{L} k_{ij}(x_\beta, S_\alpha)\, \varphi_j(S_\alpha) = F_i(x_\beta), \qquad \text{(IV.26)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 8; \ \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

Решением этой системы находятся $\varphi_j(S_\alpha)$, подставляя которые в формулы (IV.22), где интегралы также заменены на конечные суммы, определим напряженное состояние $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ в полуполосе с заданными по границе условиями (IV.14).

Решение первой основной задачи для полуполосы с граничными условиями (IV.15) строится аналогично рассмотренному выше решению, только общий интеграл уравнения (IV.20) в этом случае выбирается [84] в виде

$$\bar{\sigma}_y = C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + D(\lambda) \lambda y \operatorname{ch} \lambda y, \qquad \text{(IV.27)}$$

а соответствующее решение задачи для бесконечной полосы будет следующим:

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C \operatorname{sh} \lambda y + D(\lambda y \operatorname{ch} \lambda y + 2 \operatorname{sh} \lambda y)]\, e^{-i\lambda x} d\lambda; \qquad \text{(IV.28)}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C \operatorname{ch} xy + D(\lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \operatorname{ch} \lambda y)]\, e^{-i\lambda x} d\lambda;$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C \operatorname{sh} \lambda y + D \lambda y \operatorname{ch} \lambda y)\, e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Используя решение первой основной задачи теории упругости для бесконечной полосы, можно получить приближенное решение третьей основной ((IV.6) или (IV.5), (IV.7), (IV.8)) и смешанной ((IV.5), (IV.7), (IV.9)) задачи для полуполосы.

Рассмотрим упругое равновесие полуполосы $(x \geqslant 0, \ -h \leqslant y \leqslant h)$ при заданных условиях на границе (см. рис. IV.2, *б*):

$$\begin{aligned} &U = u_2^0(x), \quad V = v_2^0(x) \quad \text{на} \quad y = h; \\ &\sigma_x = \varphi^0(y), \ \tau_{xy} = \varphi_1^0(y) \quad \text{на} \quad x = 0; \\ &U = u_2^0(y), \ V = -v_2^0(x) \quad \text{на} \quad y = -h, \end{aligned} \qquad \text{(IV.29)}$$

где U, V — компоненты вектора смещений; $u_2^0(x)$, $v_2^0(x)$ — заданные функции.

Для построения решения задачи (IV.29) воспользуемся решением первой основной задачи для бесконечной полосы (IV.22).

Неизвестные функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ будем определять, удовлетворяя краевым условиям (IV.29).

Определим перемещения через напряжения из закона Гука:

$$2\mu U(x, y)=\int_a^x [\sigma_x-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]\,dx+F_1^0(y);$$
$$2\mu V(x, y)=\int_b^y [\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]\,dy+F_2^0(x), \qquad \text{(IV.30)}$$

где ν, μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига угля; $F_1^0(y)$, $F_2^0(x)$ — функция координат от интегрирования.

Подставим в (IV.30) напряжения (IV.22) и, полагая для простоты $a=0$, $b=-h$, проинтегрируем по координатам. Получим:

$$2\mu U(x, y)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{A\operatorname{ch}\lambda y+B[\lambda y\operatorname{sh}\lambda y+$$
$$+2(1-\nu)\operatorname{ch}\lambda y]\}(1-e^{-i\lambda x})\frac{d\lambda}{\lambda}+F_1^0(y);$$
$$2\mu V(x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{A\operatorname{sh}\lambda y+B[\lambda y\operatorname{ch}\lambda y- \qquad \text{(IV.31)}$$
$$-(1-2\nu)\operatorname{sh}\lambda y]\}_h^y e^{-i\lambda x}\frac{d\lambda}{\lambda}+F_2^0(x).$$

Система уравнений для определения комплексных неизвестных $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ получается, если напряжения и перемещения рассмотреть на границе полуполосы (IV. 29).

На торце полуполосы имеем

$$\operatorname{Re}[\sigma_x(0, y)]=\varphi^0(y); \qquad \text{(а)}$$
$$\operatorname{Im}[\sigma_x(0, y)]=0; \qquad \text{(б)}$$
$$\operatorname{Re}[\tau_{xy}(0, y)]=\varphi_1^0(y); \qquad \text{(в)} \qquad \text{(IV.32)}$$
$$\operatorname{Im}[\tau_{xy}(0, y)]=0, \qquad \text{(г)}$$

т. е. уравнения, полностью совпадающие с уравнениями (IV.23 а—г) первой основной задачи для полуполосы (IV.14). Граничные условия на кромках $x\geqslant 0$, $y=\pm h$ полуполосы удобно рассматривать в виде:

$$\operatorname{Re}[U(x, h)+U(x, -h)]=2u_2^0(x); \qquad \text{(д)}$$
$$\operatorname{Im}[U(x, h)+U(x, h)]=0; \qquad \text{(е)} \qquad \text{(IV.32)}$$
$$\operatorname{Re}[V(x, h)-V(x, -h)]=2v_2^0(x); \qquad \text{(ж)}$$
$$\operatorname{Im}[V(x, h)-V(x, -h)]=0. \qquad \text{(з)}$$

Следует отметить, что $\mathrm{Re}[V(x,-h)]=-v_2^0(x)$ дает $F_2^0(x)=-2\mu v_2^0(x)$, в то время как $\mathrm{Im}[V(x,-h)]\equiv 0$, что дает возможность положить $F_1^0(y)\equiv 0$.

Система восьми уравнений (IV.32), аналогичная системе (IV.23), служит для определения комплексных неизвестных $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ методом, примененным при решении первой основной задачи для полуполосы (IV.16).

Из решения задачи (IV.15) получается решение третьей основной задачи для полуполосы с граничными условиями, антисимметричными по координате y для касательных компонент смещений U и симметричными для нормальной компоненты смещений V:

$$\begin{aligned} &U=u_3^0(x),\ V=v_3^0(x) && \text{на } y=h;\\ &\sigma_x=0,\ \tau_{xy}=0 && \text{на } x=0;\\ &U=-u_3^0(x),\ V=v_3^0(x) && \text{на } y=-h. \end{aligned} \tag{IV.33}$$

Выражения для смещений, аналогичных (IV.31), в этом случае при напряжениях (IV.28) будут:

$$\begin{aligned} 2\mu U(x,y)&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{C\,\mathrm{sh}\,\lambda y+D[\lambda y\,\mathrm{ch}\,\lambda y+\\ &+2(1-\nu)\,\mathrm{sh}\,\lambda y]\}(1-e^{-i\lambda x})\frac{d\lambda}{\lambda}+F_1^0(y);\\ 2\mu V(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{C\,\mathrm{ch}\,\lambda y+D[\lambda y\,\mathrm{sh}\,\lambda y-\\ &-(1-2\nu)\,\mathrm{ch}\,\lambda y]\}e^{-i\lambda x}\frac{d\lambda}{\lambda}+F_2^0(x). \end{aligned} \tag{IV.34}$$

а система уравнений для определения неизвестных $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ строится подобно системе (IV.32).

Решение третьей основной задачи для полуполосы с произвольными смещениями на кромках

$$\begin{aligned} &U=u_1^0(x), && V=v_1^0(x) && \text{на } y=h;\\ &\sigma_x=\varphi^0(y), && \tau_{xy}=\varphi_1^0(y) && \text{на } x=0;\\ &U=u_0^0(x), && V=v_0^0(x) && \text{на } y=-h \end{aligned} \tag{IV.35}$$

получается как сумма решений задач (IV.29) и (IV.33), граничные условия которых определяются из соотношений

$$u_1^0(x)=u_2^0(x)+u_3^0(x);\quad v_1^0(x)=v_2^0(x)+v_3^0(x);$$
$$u_0^0(x)=u_2^0(x)-u_3^0(x);\quad v_0^0(x)=-v_2^0(x)+v_3^0(x).$$

Рассмотренные решения первой основной (IV.13) и третьей основной (IV.35) задач теории упругости позволяют получить решение смешанной задачи для полуполосы (см. рис. IV.2, *в*):

$$\begin{gathered} V=v_1^0(x),\ \tau_{xy}=g_1^0(x),\ x\geqslant 0,\ y=h; \\ \sigma_x=\varphi^0(y),\ \tau_{xy}=\varphi_1^0(y),\ x=0,\ -h\leqslant y\leqslant h; \\ V=v_0^0(x),\ \tau_{xy}=g_0^0(x),\ x\geqslant 0,\ y=-h. \end{gathered} \tag{IV.36}$$

Смешанная задача (IV.36) может рассматриваться как сумма задач

$$\begin{gathered} V=v_2^0(x),\quad \tau_{xy}=g_2^0(x),\quad x\geqslant 0,\ y=h; \\ \sigma_x=\varphi^0(y),\quad \tau_{xy}=\varphi_1^0(y),\quad x=0,\ -h\leqslant y\leqslant h; \\ V=-v_2^0(x),\ \tau_{xy}=-g_2^0(x),\ x\geqslant 0,\ y=-h \end{gathered} \tag{IV.37}$$

и

$$\begin{gathered} V=v_3^0(x),\quad \tau_{xy}=g_3^0(x),\ x\geqslant 0,\ y=h; \\ \sigma_x=\tau_{xy}=0,\quad x=0,\qquad -h\leqslant y\leqslant h; \\ V=v_3^0(x),\quad \tau_{xy}=g_3^0(x),\ x\geqslant 0,\ y=-h, \end{gathered} \tag{IV.38}$$

граничные условия которых определяются из соотношений:

$$v_1^0(x)=v_2^0(x)+v_3^0(x);\quad g_1^0(x)=g_2^c(x)+g_3^c(x);$$

$$v_0^0(x)=-v_2^0(x)+v_3^0(x);\quad g_0^0(x)=-g_2^0(x)+g_3^0(x).$$

Система восьми уравнений для нахождения комплексных неизвестных $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, определяющих решение задачи (IV.37), состоит из шести уравнений (IV.23, а — г, ж, з) и из уравнений (IV.32, ж, з).

В задаче (IV.38) система уравнений для определения неизвестных $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ строится с использованием решения (IV.28) и (IV.34), удовлетворяющего граничным условиям на продольных кромках и торце полуполосы.

Решения получаемых систем, аналогичных (IV.25), проводятся приближенным методом путем сведения к системам линейных алгебраических уравнений, аналогичных (IV.26).

Задача определения напряженно-деформированного состояния угольного пласта, находящегося под действием очистных работ (расчетная схема второго типа, см. рис. II, 3. *б*) по натурным замерам проявлений горного давления сводится к первой (IV.10) или второй (IV.11) основной задаче теории упругости для бесконечной полосы.

Решение первой основной задачи для полосы, на кромках которой заданы напряжения (IV.10), сразу следует из решения

задачи (IV.13), если не рассматривать граничные условия на торце. Удовлетворяя граничным условиям нормальные к полосе (σ_y) и касательные (τ_{xy}) напряжения из (IV.22), приходим к системе четырех интегральных уравнений (IV.23, д—з), определенных по всей границе полосы ($-\infty<x<\infty$). Метод приближенного решения системы — сведение к системе линейных алгебраических уравнений, подобных (IV.26). Аналогичным образом, используя выражения σ_y, τ_{xy} (IV.28), выполняем решение первой основной задачи для полосы с симметричными по y граничными условиями для τ_{xy} и антисимметричными по y для σ_y.

Решение второй основной задачи для полосы (IV.11) также следует из решений рассмотренных задач (IV.29) и (IV.33), если не формулировать граничные условия на торце.

Таким образом, экспериментально-аналитическое определение напряженно-деформированного состояния упругого угольного пласта по натурным замерам проявлений горного давления проводится решением основных и смешанных задач о равновесии упругой полуполосы, основанным на решении первой задачи теории упругости для бесконечной полосы.

ГЛАВА V

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

§ 1. Алгоритм расчетов напряженно-деформированного состояния вмещающих пород

В главе III рассмотрены задачи определения механического состояния массива пород по натурным замерам проявлений горного давления. Решения задач и численные расчеты напряженного состояния массива для конкретных горнотехнических условий возможны при известных механических свойствах пород и смещениях массива по контакту с угольным пластом и над выработанным пространством.

Покажем на одном частном примере, как проводятся численные расчеты напряженного состояния вмещающих пород.

Пусть натурные замеры смещений кровли, проводимые на конечном участке, экстраполированы по всей границе. Такая экстраполяция возможна, если смещения измеряются в выработанном пространстве и в призабойной части угольного пласта, а построенная по результатам наблюдений профильная кривая смещений характеризует деформирование пород над неотработанной частью пласта и в выработанном пространстве.

В качестве первого граничного условия задачи определения напряженного состояния вмещающих пород (полуплоскости $y \leqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, рис. V.1) используем нормальные к пласту смещения кровли, определенные по всей границе из натурных наблюдений и экстраполяцией, т. е.

$$v = F(x) \text{ на } -\infty < x < \infty. \qquad (V.1)$$

Вторым граничным условием задачи примем один из возможных случаев взаимодействия вмещающих пород по контакту с угольным пластом:

полное проскальзывание без трения

$$X_v = 0 \qquad (V.2)$$

или полное сцепление пород с упругим угольным пластом

$$u = 0. \qquad (V.3)$$

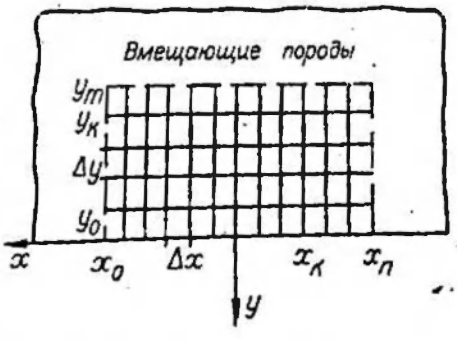


Рис. V. 1. Расчетная схема задачи определения напряжений вмещающих пород и область расчета.

Граничная задача (V.1), (V.2), обозначим ее задачей C, является частным случаем (гл. III, § 1) задачи I.А.1, когда профильная линия смещений кровли известна по всей границе, и совпадает с задачей II.А. Задача C может быть использована для определения напряженного состояния вмещающих пород при отработке тонких и мощных пластов пологого залегания или в поле гидростатического первоначального напряженного состояния.

Граничная задача (V.1), (V.3), обозначим ее задачей D, представляет собой частный случай задачи II.В, используемой для определения напряженного состояния пород в расчетных схемах II типа (см. рис. II.3, *б*) при отработке тонких и мощных пластов.

Решение задач теории упругости для полуплоскости методом Н. И. Мусхелишвили [67] сводится к нахождению аналитических функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, комплексной переменной $z=x+iy$, определяющих напряжения и перемещения соотношениями:

$$X_x+Y_y=2[\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}]; \tag{V.4}$$

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\Psi(z); \tag{V.5}$$

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}+\psi(z), \tag{V.6}$$

где $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$; $\varkappa=3-4\nu$; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона пород; $\Phi(z)=\varphi'(z)$ и $\Psi(z)=\psi'(z)$.

Граничное условие по нормальным к пласту смещениям (V.1), общее для задач C и D, позволяет выразить из (V.6) функцию $\psi(z)$ через $\varphi(z)$ в виде

$$\psi(z)=-\varkappa\varphi(z)-z\varphi'(z)-\frac{2\mu}{\pi}\overset{*}{\varphi}(z) \tag{V.7}$$

или

$$\Psi(z)=-(1+\varkappa)\Phi(z)-z\Phi'(z)-\frac{2\mu}{\pi}\overset{*}{\Phi}(z),$$

где

$$\overset{*}{\varphi}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{dt}{t-z},\quad \overset{*}{\Phi}(z)=\overset{*}{\varphi}'(z), \tag{V.8}$$

t — координата точки границы области в плоскости z.

Соотношения (V.4)—(V.6) с учетом (V.7) будут:

$$X_x+Y_y=2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}];$$

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)-\varkappa\overline{\Phi(z)}+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}-\frac{2\mu}{\pi}\overline{\overset{*}{\Phi}(z)};$$

$$2\mu(u+iv)=\varkappa[\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}]-(z-\bar{z})\overline{\varphi'(z)}+\frac{2\mu}{\pi}\overline{\overset{*}{\varphi}(z)}. \tag{V.9}$$

Второе граничное условие (V.2) в задаче C, (V.3) в задаче D позволяет сформулировать краевую задачу для аналитической функции $\Phi(z)$, используя соотношения (V.9). Решение краевых задач для $\Phi(z)$ в рассматриваемой полуплоскости $y\leqslant 0$ может быть выписано в виде:

для задачи C
$$\Phi(z)=\frac{2\mu\overset{*}{\Phi}(z)}{\pi(1+\varkappa)}; \qquad (V.10)$$

для задачи D
$$\Phi(z)=-\frac{\mu}{\pi\varkappa}\overset{*}{\Phi}(z). \qquad (V.11)$$

Выражения (V.9), (V.10) совпадают с точностью до множителя, зависящего от упругих постоянных, поэтому $\Phi(z)$ может быть записано в общем виде с целью получения компактных расчетных формул

$$\Phi(z)=-\frac{\mu}{\pi\varkappa_0}\overset{*}{\Phi}(z)=-\frac{E}{\pi(1+\nu)\varkappa_0}\overset{*}{\Phi}(z), \qquad (V.12)$$

где $\varkappa_0=(2-p)\varkappa+p$, причем $p=1$ для задачи C, $p=0$ для задачи D. Введем обозначения:

$$\overset{*}{\varphi}(z)=A(x,y)+iB(x,y);\ \overset{*}{\varphi}'(z)=\overset{*}{\Phi}(z)=$$
$$=C(x,y)+iD(x,y);\ \overset{*}{\varphi}''(z)=\overset{*}{\Phi}'(z)= \qquad (V.13)$$
$$=M(x,y)+iN(x,y).$$

Тогда выражения перемещений и напряжений из (V.9) с учетом решений (V.12) будут:

$$u=\frac{1}{\pi}[(1-2\varkappa\varkappa_1)A(x,y)+2\varkappa_1 yD(x,y)];$$

$$v=\frac{1}{\pi}[B(x,y)-2\varkappa_1 yC(x,y)];$$

$$X_x=\frac{E}{\pi(1+\nu)}\{[1-(3+\varkappa)\varkappa_1]C(x,y)+2\varkappa_1 yN(x,y)\};$$

$$Y_y=\frac{E}{\pi(1+\nu)}\{[-1+(\varkappa-1)\varkappa_1]C(x,y)-2\varkappa_1 yN(x,y)\}; \qquad (V.14)$$

$$X_y=\frac{E}{\pi(1+\nu)}\{[-1+(\varkappa+1)\varkappa_1]D(x,y)+2\varkappa_1 yM(x,y)\},$$

где $\varkappa_1=\varkappa_0^{-1}$.

Главные нормальные и максимальные касательные напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_1=\sigma_{max}=\frac{1}{2}(X_x+Y_y)+\sqrt{\frac{1}{4}(X_x-Y_y)^2+X_y^2};$$

$$\sigma_2=\sigma_{min}=\frac{1}{2}(Y_x+Y_y)-\sqrt{\frac{1}{4}(X_x-Y_y)^2+X_y^2}; \qquad (V.15)$$

$$\tau_{max}=\sqrt{\frac{1}{4}(X_x-Y_y)^2+X_y^2}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2),$$

а углы наклона главных площадок из выражения

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2X_y}{X_x - Y_y}.$$

Деформации, соответствующие приращению напряженного состояния (X_x, Y_y, X_y), определяются соотношениями

$$e_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(X_x - \frac{\nu}{1-\nu}Y_y\right); \quad e_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(Y_y - \frac{\nu}{1-\nu}X_x\right);$$

$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}X_y. \tag{V.16}$$

Главные деформации и максимальные сдвиги есть

$$e_1 = \frac{1}{2}(e_x + e_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(e_x - e_y)^2 + e_{xy}^2};$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(e_x + e_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(e_x - e_y)^2 + e_{xy}^2}; \tag{V.17}$$

$$\gamma_{max} = \sqrt{\frac{1}{4}(e_x - e_y)^2 + e_{xy}^2} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2).$$

Если замеряемые смещения являются полными дополнительными смещениями, то определяется дополнительное напряженно-деформированное состояние (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}, ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}), вызванное проведением выработки. Тогда при известном первоначальном напряженном состоянии массива можно определить полные напряжения в породах.

Первоначальное напряженное состояние массива в системе координат, ориентированной вдоль и перпендикулярно пласту, будет:

$$\sigma_x^0 = -\gamma(\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha)(H + x\sin\alpha + y\cos\alpha);$$

$$\sigma_y^0 = -\gamma(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha)(H + x\sin\alpha + y\cos\alpha); \tag{V.18}$$

$$\tau_{xy}^0 = -\gamma(1-\lambda)\sin\alpha\cos\alpha(H + x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

где γ — объемный вес пород; α — угол падения; λ — коэффициент бокового распора; H — глубина начала координат от поверхности.

В рассматриваемых задачах влияние земной поверхности не учитывается, в этом случае первоначальное напряженное состояние принимается в виде:

$$\sigma_x^0 = -\gamma H(\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha);$$

$$\sigma_y^0 = -\gamma H(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha); \tag{V.19}$$

$$\tau_{xy}^0 = -\frac{1}{2}\gamma H(1-\lambda)\sin 2\alpha.$$

При определенном дополнительном напряженном состоянии и заданном первоначальном напряженном состоянии мас-

сива напряжения в породах определяются как:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_{xx}; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_{yy}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \sigma_{xy}; \qquad (V.20)$$

Расчетные формулы (V.14) напряжений и перемещений в массиве получены для произвольного вида профильной кривой смещений (V.1)*. Одним из способов описания натурных точечных замеров смещений является интерполяция их аналитическими выражениями. Натурные наблюдения за нормальными смещениями кровли при отработке мощных крутых пластов Кузбасса показали (гл. II, § 3), что профильные кривые смещений достаточно хорошо интерполируются двумя типовыми выражениями: 1) при однократном подвигании забоя

$$v = F(x) = \frac{a}{1 + \left(\frac{x+L}{m}\right)}; \qquad (V.21)$$

2) при многократном подвигании забоя

$$v = F(x) = k \operatorname{arcctg} \frac{x+l}{b}, \qquad (V.22)$$

где a, L, m, k, l, b — параметры интерполяции.

Для этих типовых выражений вычислим $\overset{*}{\varphi}(z)$ (V.8) и ее производные, через которые находятся напряжения и перемещения (V.14).

Для смещений, интерполируемых выражением (V.21),

$$\overset{*}{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)\,dt}{t-z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{am^2}{[m^2+(t+L)^2]} \frac{dt}{t-z} = -\frac{\pi am}{z+L-im}, \qquad (V.23)$$

или для обозначений (V.13) $\overset{*}{\varphi}(z) = A(x, y) + iB(x, y)$ имеем:

$$A(x, y) = -\frac{\pi am\alpha}{\alpha^2+\beta^2}; \quad B(x, y) = \frac{\pi am\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad (V.24)$$

где $\alpha = x+L$ $(-\infty < x < \infty)$, $\beta = y-m$ $(y \leqslant 0)$. Производные $\overset{*}{\varphi}(z)$ будут $\overset{*}{\varphi}'(z) = C(x, y) + iD(x, y)$, где

$$C(x, y) = \frac{\pi am(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}; \quad D(x, y) = -\frac{2\pi am\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}; \qquad (V.24)$$

$$\overset{*}{\varphi}''(z) = \overset{*}{\Phi}'(z) = M(x, y) + iN(x, y),$$

где

$$M(x, y) = -\frac{2\pi am\alpha(\alpha^2-3\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}; \qquad (V.24)$$

$$N(x, y) = \frac{2\pi am\beta(3\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}.$$

* При решении задачи C и D предполагается, что функция $v = F(x)$ имеет производную, удовлетворяющую условию Гельдера [67].

Для смещений, интерполируемых выражениями (V.22), значения $\overset{*}{\varphi}'(z)$ и ее производных вычисляются аналогично и имеют вид:

$$\overset{*}{\varphi}(z) = \pi k \ln \frac{z+l-ib}{l}; \quad \overset{*}{\varphi}'(z) = \overset{*}{\Phi}(z) = \frac{\pi}{z+l-ib};$$

$$\overset{*}{\varphi}''(z) = \overset{*}{\Phi}'(z) = -\frac{\pi k}{(z+l-ib)^2}, \qquad \text{(V.25)}$$

а в обозначениях (V.13) получим:

$$A(x,y) = \frac{\pi k}{2} \ln(\overset{*}{\alpha}^2 + \overset{*}{\beta}^2); \quad B(x,y) = -\pi k \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\overset{*}{\alpha}}{\overset{*}{\beta}}\right);$$

$$C(x,y) = \frac{\pi k \overset{*}{\alpha}}{\overset{*}{\alpha}^2 + \overset{*}{\beta}^2}; \quad D(x,y) = -\frac{\pi k \overset{*}{\beta}}{\overset{*}{\alpha}^2 + \overset{*}{\beta}^2}; \qquad \text{(V.26)}$$

$$M(x,y) = -\frac{\pi k (\overset{*}{\alpha}^2 - \overset{*}{\beta}^2)}{(\overset{*}{\alpha}^2 + \overset{*}{\beta}^2)^2}; \quad N(x,y) = \frac{2\pi k \overset{*}{\alpha}\overset{*}{\beta}}{(\overset{*}{\alpha}^2 + \overset{*}{\beta}^2)^2},$$

где $\overset{*}{\alpha} = x + l (-\infty < x < \infty)$, $\overset{*}{\beta} = y - b (y \leqslant 0)$.

Таким образом, расчет упругого напряженно-деформированного состояния вмещающих пород по натурным смещениям интерполируемым типовыми выражениями (V.21), (V.22), при заданном характере взаимодействия пород с угольным пластом (проскальзывание — задача C или сцепление — задача D) производится по формулам (V.14), (V.24)—(V.26).

Расчет напряженно-деформированного состояния горного массива с учетом реологических свойств пород проводится методом, описанным в § 4 главы II.

Решение упруго-наследственной задачи, согласно принципу Вольтерра, можно получить, из решения (V.14) задачи теории упругости, заменив упругие постоянные временными операторами, которые будут действовать на функции, зависящие от координат и времени.

Коэффициенты в решении (V.14) зависят от упругих постоянных E, ν и $\varkappa = 3 - 4\nu$, $\varkappa_1 = [(2-p)\varkappa + p]^{-1}$ и являются некоторыми комбинациями их. Заменяя упругие постоянные E, ν временными операторами $\widetilde{E}$ (III.58), $\widetilde{\nu}$ (III.61), получим решение упруго-наследственной задачи, по которому можно проводить расчеты после расшифровки комбинаций интегральных операторов. Так, например, при решении задачи C с учетом наследственных свойств пород необходимо расшифровать операторы $\frac{1}{1-\widetilde{\nu}}$, $\frac{\widetilde{\nu}}{1-\widetilde{\nu}}$, $\frac{\widetilde{E}}{1-\widetilde{\nu}^{(2)}}$, используя правила умножения и обращения операторов (гл. II, § 4).

Ограничимся приведением окончательных интегральных выражений комбинаций операторов, получаемых при решении задачи C с учетом реологических свойств пород:

$$\frac{1}{1-\widetilde{\nu}} = \frac{1}{1-\nu}\left[1 + \sum_{s=1}^{2} a_{0,s} \overset{*}{\vartheta}(\rho_s)\right];$$

$$\frac{\widetilde{\nu}}{1-\widetilde{\nu}} = \frac{\widetilde{\nu}}{1-\nu}\left[1 + \sum_{k=1}^{2} a_{1,k} \overset{*}{\vartheta}(-\beta_k) + \sum_{s=1}^{2} a_{2,s} \overset{*}{\vartheta}(\rho_s)\right] \qquad \text{(V.27)}$$

$$\frac{\widetilde{E}}{1-\widetilde{\nu}^{(2)}} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[1 + \sum_{k=1}^{2} a_{3,k} \overset{*}{\vartheta}(-\beta_k) + \sum_{s=1}^{2} a_{4,s} \overset{*}{\vartheta}(\rho_s) + \sum_{n=1}^{2} a_{5,n} \overset{*}{\vartheta}(\gamma_n)\right],$$

$$a_{0,1} = \frac{(\beta_1+\rho_1)(\beta_2+\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}; \quad a_{0,2} = \frac{(\beta_1+\rho_2)(\beta_2+\rho_2)}{\rho_2-\rho_1};$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4q_2}\right); \quad p_2 = \delta_1(\alpha_1+\alpha_2) - (\beta_1+\beta_2);$$

$$q_2 = \beta_1\beta_2 - \delta_2(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1); \quad \delta_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};$$

$$= \frac{1-2\nu}{2\nu}\left(1 + \sum_{s=1}^{2} \frac{a_{0,s}}{\beta_k+\rho_s}\right)\alpha_k; \quad \delta_2 = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)};$$

$$a_{2,s} = a_{0,s}\left(1 + \frac{1-2\nu}{2\nu} \sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k}{\beta_k+\rho_s}\right);$$

$$a_{3,k} = a_{0,k}\left(1 - \sum_{s=1}^{2} \frac{a_{0,s}}{\beta_k+\rho_s}\right);$$

$$a_{4,s} = a_{0,s}\left(1 + \sum_{k=1}^{2} \frac{a_{0,k}}{\beta_k+\rho_s} - \sum_{n=1}^{2} \frac{a_{7,n}}{\gamma_n+\rho_s}\right);$$

$$a_{5,n} = a_{7,n}\left(1 + \sum_{s=1}^{2} \frac{a_{0,s}}{\gamma_n+\rho_s}\right); \quad a_{0,k} = \alpha_k\left(-1 + \sum_{n=1}^{2} \frac{a_{8,n}}{\beta_k+\gamma_n}\right);$$

$$a_{7,n} = a_{8,n}\left(1 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k}{\beta_k+\gamma_n}\right); \quad a_{8,1} = \frac{(\beta_1+\gamma_1)(\beta_2+\gamma_1)}{\gamma_1-\gamma_2};$$

$$a_{8,2} = -\frac{(\beta_1+\gamma_2)(\beta_2+\gamma_2)}{\gamma_1-\gamma_2}; \quad \gamma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p_3 \pm \sqrt{p_3^2 - 4q_3}\right);$$

$$p_3 = -[\delta_2(\alpha_1+\alpha_2) + \beta_1 + \beta_2]; \quad q_3 = \beta_1\beta_2 + \delta_2(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1).$$

Здесь α_1, α_2, β_1, β_2 — параметры ядра интегрального оператора (III.60), представляющего агрегат ядер экспоненциального вида.

При решении задачи D с учетом наследственных свойств пород необходимо расшифровать $\frac{\widetilde{E}}{(1+\widetilde{\nu})(3-4\widetilde{\nu})}$, $\frac{\widetilde{E}\widetilde{\nu}}{(1+\widetilde{\nu})(3-4\widetilde{\nu})}$ аналогично (V.27). Окончательное выражение комбинаций ин-

тегральных операторов будет:

$$\frac{\widetilde{E}}{(1+\widetilde{\nu})(3-4\widetilde{\nu})}=\frac{E}{(1+\nu)(3-4\nu)}\left[1+\sum_{k=1}^{2}\dot{\vartheta}(-\beta_k)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{2}b_{1,n}\dot{\vartheta}(\gamma_n)+\sum_{j=1}^{2}b_{2,j}\dot{\vartheta}(\sigma_j)\right]; \qquad (V.28)$$

$$\frac{\widetilde{E}\widetilde{\nu}}{(1+\widetilde{\nu})(3-4\widetilde{\nu})}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(3-4\nu)}\left[1+\sum_{k=1}^{2}b_{3,k}\dot{\vartheta}(-\beta_k)+\right.$$

$$\left.\sum_{n=1}^{2}b_{4,n}\dot{\vartheta}(\gamma_n)+\sum_{j=1}^{2}b_{5,j}\dot{\vartheta}(\sigma_j)+\frac{1-2\nu}{\nu}\sum_{k=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}b_{6,k}\dot{\vartheta}^{(2)}(-\beta_k)\right],$$

где $\sigma_{1,2}=\frac{1}{2}\left(p_1\pm\sqrt{p_1^2-4q_1}\right)$; $\delta_3=\frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu}$;

$$p_1=\delta_2(\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2); \quad q_1=\beta_1\beta_2-\delta_3(\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1);$$

$$\alpha_1=\frac{(\beta_1+\sigma_1)(\beta_1+\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2}; \quad \alpha_2=-\frac{(\beta_1+\sigma_2)(\beta_2+\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2};$$

$$b_{1,n}=a_{7,n}\left(1+\sum_{j=1}^{2}\frac{\alpha_j}{\gamma_n-\sigma_j}\right);$$

$$b_{2,j}=\alpha_j\left(1-\sum_{k=1}^{2}\frac{a_{6,k}}{\beta_k+\sigma_j}-\sum_{n=1}^{2}\frac{a_{7,n}}{\gamma_n-\sigma_j}\right);$$

$$b_{3,k}=-b_{6,k}+\frac{1-2\nu}{2\nu}\alpha_k\left(1-\sum_{n=1}^{2}\frac{b_{1,n}}{\gamma_n+\beta_k}-\sum_{j=1}^{2}\frac{b_{2,j}}{\sigma_j+\beta_k}\right);$$

$$b_{4,n}=b_{1,n}\left(1+\frac{1-2\nu}{2\nu}\sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k}{\gamma_n+\beta_k}\right);$$

$$b_{5,j}=b_{2,j}\left(1+\frac{1-2\nu}{2\nu}\sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k}{\sigma_j+\beta_k}\right);$$

$$b_{6,k}=a_{6,k}\left(1-\sum_{j=1}^{2}\frac{\alpha_j}{\beta_k+\sigma_j}\right).$$

Выражения коэффициентов $a_{6,k}$, $a_{7,n}$ приводятся в (V.27).

Временные операторы (V.27) действуют в решении (V.14) на параметры, зависящие от времени. В частности, при интерполяции натурных наблюдений выражениями типа (V.21), (V.22), временную зависимость смещений можно отразить, рассматривая коэффициенты как функции времени, т. е. $a=a(t)$, $L=L(t)$, $m=m(t)$, $k=k(t)$, $l=l(t)$, $b=b(t)$. Например, натурные наблюдения за смещениями кровли при щитовой системе разработки угольных пластов в Кузбассе показали [22], что приращения смещений при однократном подвигании забоя интерполируются выражением

$$v = v(x, t) = \frac{a(t)}{1 + \left(\frac{x + L}{m}\right)^2}; \qquad \text{(V.29)}$$

при многократных подвиганиях забоя

$$v = v(x, t) = k(t) \ \text{arcctg} \ \frac{x + L(t)}{v}. \qquad \text{(V.30)}$$

При определении напряженно-деформированного состояния вмещающих пород с учетом реологических свойств временные операторы в решении (V.14) ((V.27) или (V.28)) будут действовать на функции (V.24), (V.26), зависящие от времени.

§ 2. Алгоритм расчетов напряженного состояния угольного пласта

Согласно § 2 главы IV, приближенное решение задачи о напряженном состоянии угольного пласта строится следующим образом.

Угольный пласт, рассматриваемый как упругая полуполоса ($x \geqslant 0$, $-h \leqslant y \leqslant h$) (рис. V.2), нагружен на продольных кромках $y = \pm h$ симметричной по y эпюрой нормальных напряжений $\sigma_y = f(x)$ и антисимметричной по y эпюрой касательных напряжений $\tau_{xy} = \pm g(x)$. Торец полуполосы находится под действием приложенных нормальных напряжений $\sigma_x = \varphi^0(y)$ и касательных напряжений $\tau_{xy} = \varphi_1^0(y)$ (задача (IV.16)).

Для симметричной (относительно напряжений σ_y) нагрузки достаточно рассматривать напряженное состояние в одной из частей полуполосы, например верхней части ($0 \leqslant y \leqslant h$, $x \geqslant 0$).

На торце и продольной кромке полуполосы (см. рис. V.2) выбирается $\beta = 1, 2, \ldots, n$ точек, в которых требуется удовлетворение граничных условий по напряжениям:

$$\text{на} \quad x = 0 \quad \sigma_x(0, y_\beta) = \varphi^0(y_\beta), \quad \tau_{xy}(0, y_\beta) = \varphi_1^0(y_\beta) \qquad \text{(V.31)}$$
$$\beta = 1, 2, \ldots, k;$$

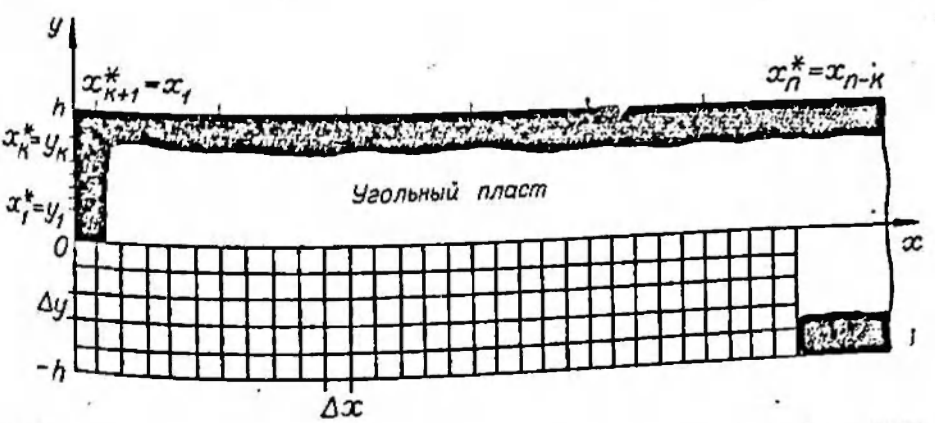


Рис. V.2. Расчетная схема задачи определения напряжений в угольном пласте

$$\text{на } y=h\ \ \sigma_y(x_\beta, h)=f(x_\beta),\ \ \tau_{xy}(x_\beta, h)=g(x_\beta), \qquad (V.32)$$
$$\beta=k+1, k+2, \ldots, n.$$

Граничные условия можно записать в компактном виде

$$F_{(2i_1-1)}(\overset{*}{x}_\beta), \qquad (V.33)$$

где $\overset{*}{x}_\beta=y_\beta$ для (V.31), $\overset{*}{x}_\beta=x_\beta$ для (V.32);

$$i_1=1,2,3,4,\ F_1(\overset{*}{x}_\beta)=q^0(y_\beta),\ F_3(x_\beta)=\varphi_1^0(y_\beta),$$
$$F_5(\overset{*}{x}_\beta)=f(x_\beta);\ F_7(\overset{*}{x}_\beta)=g(x_\beta).$$

Решение в напряжениях для бесконечной полосы (IV.22) выражается через комплексные функции $A(\lambda)=\varphi_1(\lambda)+i\varphi_3(\lambda)$, $B(\lambda)=\varphi_2(\lambda)+i\varphi_4(\lambda)$.

Удовлетворяя в выбранных точках $\overset{*}{x}_\beta$ напряжения (IV.22) граничным условиям на торце и продольной кромке, а также приравнивая мнимые части рассматриваемых напряжений нулям, получаем систему интегральных уравнений (IV.23) относительно неизвестных функций $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, 3, 4)$, правые части которых есть

$$Fi(\overset{*}{x}_\beta),\ i=1, 2, \ldots, 8, \qquad (V.34)$$

где $F_{(2i_1-1)}(\overset{*}{x}_\beta)$ из (V.33), $F_{2i_1}(x_\beta)=0$.

Интегральная система (IV.23) заменой бесконечных пределов интегрирования на конечные $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ путем подстановки $\lambda=\operatorname{tg} S$, а интегрирования — приближенной конечной суммой в интервале $-\frac{\pi}{2}\leqslant S_\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, разбитом на $2n$ частей с шагом ΔS_α $(\alpha=1, 2, \ldots, 2n)$, приводится к системе линейных алгебраических уравнений $\alpha_{ij}=2n\cdot 4=8n$ — порядка относительно $8n$ неизвестных $\varphi_j(S_\alpha)$ вида

$$\sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_{j=1}^{4} k_{ij}(\overset{*}{x}_\beta, S_\alpha)\varphi_j(S_\alpha)=F_i(\overset{*}{x}_\beta), \qquad (V.35)$$

$$i=1, 2, \ldots, 8;\ \beta=1, 2, \ldots, n,$$

где

$$k_{ij}(\overset{*}{x}_\beta, S_\alpha)=a_{ij}(\overset{*}{x}_\beta, S_\alpha)m_\alpha;$$
$$m_\alpha=\Delta S_\alpha(\sqrt{2\pi}\cos^2 S_\alpha)^{-1};\ z_\alpha=\operatorname{tg} S_\alpha;$$

коэффициенты $a_{ij}(\overset{*}{x}_\beta, S_\alpha)$ приведены в табл. V.1 вместе со значениями правых частей системы (V.35).

Из решения системы (V.35) находятся значения $\varphi_j(S_\alpha)$.

Компоненты напряжений по найденным корням $\varphi_j(S_\alpha)$ вычисляются из выражений (IV.22), в которых также делается

Таблица V.1

Индекс i \ j	$a_{ij}(\overset{*}{x}_\beta S_\alpha)$ 1	2	3	4	$F_i(\overset{*}{x}_\beta)$
1	$-\mathrm{ch}(z_\alpha, y_\beta)$	$2a_{11}-z_\alpha y_\beta a_{33}$	0	0	$F_1(\overset{*}{x}_\beta)=\sigma_x(0, y_\beta)$
2	0	0	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$F_2(\overset{*}{x}_\beta)=0$
3	0	0	$\mathrm{sh}(z_\alpha y_\beta)$	$a_{33}-z_\alpha y_\beta a_{11}$	$F_3(\overset{*}{x}_\beta)=\tau_{xy}(0, y_\beta)$
4	a_{33}	a_{34}	0	0	$F_4(\overset{*}{x}_\beta)=0$
5	$\mathrm{ch}(z_\alpha h)\cos(z_\alpha x_\beta)$	$z_\alpha h a_{73}$	$\mathrm{ch}(z_\alpha h)\sin(z_\alpha x_\beta)$	$-z_\alpha h a_{71}$	$F_5(\overset{*}{x}_\beta)=\sigma_y(x_\beta, h)$
6	$-a_{53}$	$z_\alpha h a_{71}$	a_{51}	$z_\alpha h a_{73}$	$F_6(\overset{*}{x}_\beta)=0$
7	$-\mathrm{sh}(z_\alpha h)\sin(z_\alpha x_\beta)$	$a_{71}-z_\alpha h a_{53}$	$\mathrm{sh}(z_\alpha h)\cos(z_\alpha x_\beta)$	$a_{72}+z_\alpha h a_{51}$	$F_7(\overset{*}{x}_\beta)=\tau_{xy}(x_\beta, h)$
8	$-a_{73}$	$z_\alpha h a_{51}-a_{73}$	a_{71}	$a_{71}-z_\alpha h a_{53}$	$F_8(\overset{*}{x}_\beta)=0$

замена переменной интегрирования подстановкой $\lambda = \operatorname{tg} S$ и интегрирования — приближенной конечной суммой. Расчетные формулы для компонент напряжений следующие:

$$\sigma_x(x_k, y_k) = -\sum_{j=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{2n} b_{1,j}(x_k, y_k, S_\alpha)\, m_\alpha \varphi_j(S_\alpha);$$

$$\tau_{xy}(x_k, y_k) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{2n} b_{2,j}(x_k, y_k, S_\alpha)\, m_\alpha \varphi_j(S_\alpha), \qquad (V.36)$$

$$\sigma_y(x_k, y_k) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{2n} b_{3,j}(x_k, y_k, S_\alpha)\, m_\alpha \varphi_j(S_\alpha),$$

где (x_k, y_k) — точка, в которой вычисляются напряжения;

$$x_k \geqslant 0, \quad -h \leqslant y_k \leqslant h;$$

$b_{11} = \operatorname{ch}(z_\alpha y_k)\cos(z_\alpha x_k)$; $b_{12} = [z_\alpha y_k \operatorname{sh}(z_\alpha y_k) + 2\operatorname{ch}(z_\alpha y_k)]\cos(z_\alpha x_k)$;

$b_{13} = \operatorname{ch}(z_\alpha y_k)\sin(z_\alpha x_k)$; $b_{14} = [z_\alpha y_k \operatorname{sh}(z_\alpha y_k) + 2\operatorname{ch}(z_\alpha y_k)]\sin(z_\alpha x_k)$;

$$b_{21} = -\operatorname{sh}(z_\alpha y_k)\sin(z_\alpha x_k);$$

$$b_{22} = [-z_\alpha y_k \operatorname{ch}(z_\alpha y_k) + \operatorname{sh}(z_\alpha y_k)]\sin(z_\alpha x_k);$$

$b_{23} = \operatorname{sh}(z_\alpha y_k)\cos(z_\alpha x_k)$; $b_{24} = [z_\alpha y_k \operatorname{ch}(z_\alpha y_k) + \operatorname{sh}(z_\alpha y_k)]\cos(z_\alpha y_k)$;

$b_{31} = \operatorname{ch}(z_\alpha y_k)\cos(z_\alpha x_k)$; $b_{32} = [z_\alpha y_k \operatorname{sh}(z_\alpha y_k)\cos(z_\alpha x_k)]$;

$b_{33} = \operatorname{ch}(z_\alpha y_k)\sin(z_\alpha x_k)$; $b_{34} = [z_\alpha y_k \operatorname{sh}(z_\alpha y_k)\sin(z_\alpha x_k)]$.

Отметим некоторые особенности решения системы (V.35). Параметр S_α не может принимать значения $\pm\frac{\pi}{2}$, так как при вычислении m_α получаем деление на ноль; S_α не может принимать значения 0, так как некоторые уравнения системы, например третье, четвертое, исчезают. Нельзя требовать удовлетворения граничных условий по оси симметрии на торце (точка $x = y = 0$), так как третье и четвертое уравнения системы обращаются в нуль. Нельзя одновременно задавать граничные значения по касательным напряжениям τ_{xy} в точке $(0, h)$, так как третье и седьмое уравнения системы становятся равными, поэтому при расчетах необходимо предусмотреть отступление от этой точки, хотя бы по одному из граничных условий для τ_{xy}.

Программа расчета напряжений в полуполосе на ЭВМ БЭСМ-4 выполнена для граничных условий в напряжениях, заданных в 14 точках (7 точек на половине торца и 7 — на продольных кромках). В этом случае получается система уравнений 56-го порядка, решение которой осуществляется по стандартной программе (максимальный порядок системы, решаемой по стандартной программе на БЭСМ-4 — 60 уравнений).

При расчете напряженного состояния угольного пласта по заданным смещениям (задача IV.29) предполагается, что из

продольных кромках известен вектор смещений, а на торце полуполосы известны напряжения:

$$U=U_{\pm h}(x)=u^0(x),\quad V=V_{\pm h}(x)=\pm v^0(x)\ \text{на}\ y=\pm h,$$
$$\sigma_x=\varphi^0(y),\quad \tau_{xy}=\varphi_1^0(y)\ \text{на}\ x=0. \qquad \text{(V.37)}$$

Решение задачи в этом случае строится из решения первой основной задачи для полуполосы (расчетные формулы выведены выше), в которых условия по напряжениям (V.32) заменяются условиями по смещениям, заданным на продольных кромках полуполосы в $(n-k)$-точках:

$$U(x_\beta,\ h)+U(x_\beta,\ -h)=2u^0(x);$$
$$V(x_\beta,\ h)-V(x_\beta,\ -h)=2v^0(x), \qquad \text{(V.38)}$$

где $\beta=k+1, \ldots, n$.

Система уравнений для определения неизвестных $\varphi_j(S_\alpha)$ сохраняет вид (V.35) с той лишь разницей, что коэффициенты $a_{ij}(x_\beta, S_\alpha)$ и правые части $F_i(x_\beta)$ с индексами $i=5, 6, 7, 8$ заменяются коэффициентами $\tilde{a}_{ij}$ и правыми частями $F_i (i=5, 6, 7, 8)$, приведенными в табл. V.2 и полученными путем удовлетворения граничным условиям по смещениям (IV.37) на продольных кромках полуполосы.

Расчетные формулы для компонент напряжений сохраняют вид (V.36), причем $\varphi_j(S_\alpha)$ — корни системы (V.35) с коэффициентами a_{ij} $(i=1, 2, 3, 4)$ из табл. V.1 и $\tilde{a}_{ij}$ $(i=5, 6, 7, 8)$ из табл. V.2.

Особенности системы уравнений в задаче с заданными смещениями те же, что и в задаче с заданными напряжениями. Отметим только, что нельзя задавать граничные условия по смещениям (V.38) в точке $x_\beta=0$, так как коэффициенты $\tilde{a}_{ij}$ для $i=5, 6$ обращаются в нуль.

Программа расчета напряжений для задачи с заданными смещениями получается из программы для задачи с заданными напряжениями заменой граничных условий на продольных кромках в напряжениях условиями по смещениям.

Алгоритм и программа расчета напряженного состояния в бесконечной полосе, по кромкам которой заданы напряжения, непосредственно следуют из первой основной задачи для полуполосы, если в последней не требовать удовлетворения граничных условий на торце (V.31), а условия по напряжениям на кромках (V.32) удовлетворять в n-точках. Аналогично проводится расчет напряженного состояния во второй основной задаче для бесконечной полосы с использованием граничных условий (V.38).

Для оценки точности приближенного решения задачи о напряженном состоянии бесконечной полуполосы под действием напряжений, приложенных на ее границах, произведем расчеты напряженного состояния для нагрузок, при которых известно

Таблица V.2

Индекс i \ j	$\widetilde{a}_{ij}(x_\beta, S_\alpha)$ 1	2	3	4	$\widetilde{F}_i(x_\beta)$
5	$\frac{-\mathrm{ch}(z_\alpha h)\sin(z_\alpha x_\beta)}{z_\alpha}$	$\frac{-\mathrm{ch}(z_\alpha h)[1-\cos(z_\alpha x_\beta)]}{z_\alpha}$	$2(1-\nu)\bar{a}_{51}-z_\alpha h\bar{a}_{72}$	$2(1-\nu)\bar{a}_{52}-z_\alpha h\bar{a}^{(1)}$	$F_5(x_\beta)=\mu[U_\lambda(x_\beta)+U_{-\lambda}(x_\beta)]=2\mu u_0(x_\beta)$
6	$-\bar{a}_{52}$	$\bar{a}_{51}$	$-\bar{a}_{54}$	$\bar{a}_{53}$	$F_6(x_\beta)=0$
7	$\frac{\mathrm{sh}(z_\alpha h)\cos(z_\alpha x_\beta)}{z_\alpha}$	$\frac{\mathrm{sh}(z_\alpha h)\sin(z_\alpha x_\beta)}{z_\alpha}$	$(2\nu-1)\bar{a}_{71}-z_\alpha h\bar{a}^{(2)}$	$(2\nu-1)\bar{a}_{73}-z_\alpha h\bar{a}_{51}$	$F_7(x_\beta)=\mu[V_\lambda(x_\beta)+V_{-\lambda}(x_\beta)]=2\mu v_0(x_\beta)$
8	$-\bar{a}_{72}$	$\bar{a}_{71}$	$-\bar{a}_{74}$	$\bar{a}_{73}$	$F_8(x_\beta)=0$

Примечание. $a^{(1)}=\mathrm{sh}(z_\alpha h)[1-\cos(z_\alpha x_\beta)]$; $a^{(2)}=\mathrm{ch}(z_\alpha h)\cos(z_\alpha x_\beta)$.

точное аналитическое решение внутри области. Такими нагрузками могут служить равномерные нагрузки на продольных кромках полуполосы и равномерное торцевое загружение. Точным решением первой основной задачи для полуполосы с заданными напряжениями

$$\sigma_y = \text{const}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{на } y = \pm h = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\sigma_x = \text{const}, \ \tau_{xy} = 0 \text{ на } x = 0$$

является решение $\sigma_x = \text{const}$, $\sigma_y(x, y) = \text{const}$, $\tau_{xy}(x, y) = 0$.

Расчеты проведены при следующих значениях параметров. Граничные условия задавались в 14 точках (7 точек на половине торца, 7 точек на продольной кромке). Система (V.35) выбиралась 56-го порядка, т. е. $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, 14$. Для параметра S_α выбираем $S_0 = -\frac{37}{80}\pi$, $\Delta S_\alpha = \frac{\pi}{16}$, тогда $S_1 = -0{,}4\pi, \ldots,$ $S_7 = -\frac{1}{40}\pi$, $S_8 = \frac{3}{80}\pi, \ldots, S_{14} = \frac{33}{80}\pi$. Граничные условия на торце задаются в точках y_β: $y_1 = 0{,}2\pi$, $\Delta y_2 = \ldots = \Delta y_7 = \frac{1}{30}\pi$, тогда $y_7 = 0{,}4\pi$; на продольной кромке в точках x_β; $x_1 = 0{,}2\pi$, $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_7 = \frac{1}{2}\pi$, тогда $x_7 = 3{,}2\pi$. Счет напряжений проводится после нахождения корней системы (V.35) по формулам (V.36) в области $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 0{,}5\pi$ с шагом $\Delta x = \frac{\pi}{25}$, $\Delta y = \frac{1}{20}\pi$, т. е. в 836 точках.

При нагрузках на продольных кромках

$$\sigma_y = \left(x_\beta, \ \pm \frac{\pi}{2}\right) = 100 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_{xy}\left(x_\beta, \ \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

и свободном торце

$$\sigma_x(0, y_\beta) = \tau_{xy}(0, y_\beta) = 0$$

напряженное состояние в рассчитываемой области получено достаточно близко совпадающим с точным решением

$$\sigma_y(x, y) = 100 \text{ кг/см}^2, \ \sigma_x(x, y) = \tau_{xy}(x, y) = 0.$$

Результаты расчета, представленные эпюрами напряжений (σ_y—100), τ_{xy}, σ_x по сечениям $y = 0$ (ось симметрии), $0{,}25\pi$, $0{,}5\pi$ и напряжениямп (σ_y—100), τ_{xy} на торце $x = 0$, приведены на рис. V.3. Они показывают, что отклонение напряжений σ_y на продольной кромке 0,48 кг/см^2,— 0,2 кг/см^2, на оси симметрии 0,6 кг/см^2,— 0,13 кг/см^2. Таким образом, максимальные отклонения не превышают ± 1 кг/см^2, т. е. 1% от заданной нагрузки 100 кг/см^2.

Граничные условия на продольной кромке по касательным напряжениям τ_{xy} выполняются с большой степенью точности и лишь в конце интервала дают малые (0,6 кг/см^2) значения τ_{xy}.

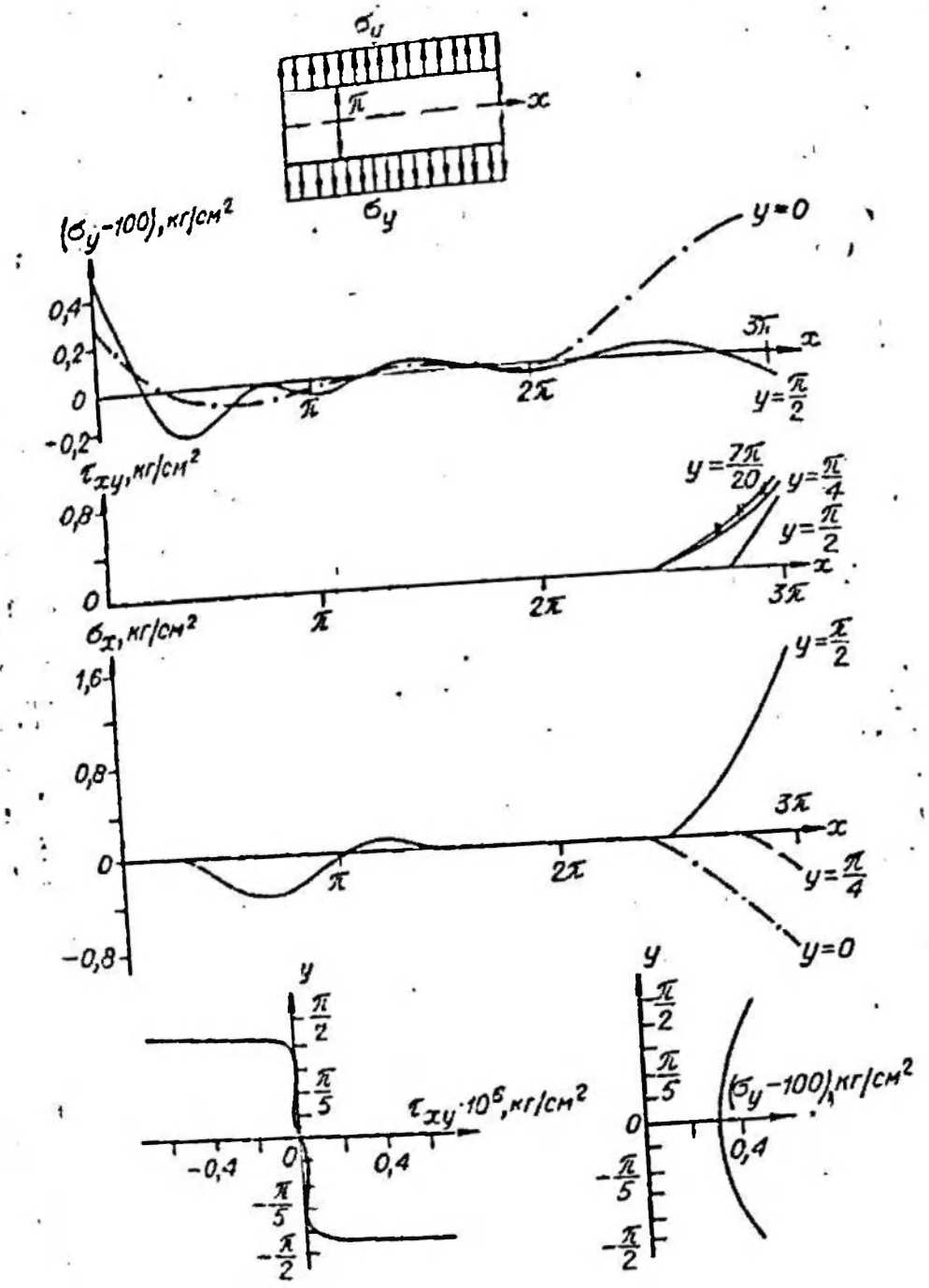


Рис. V.3. Напряженное состояние в полуполосе, нагруженной равномерно по кромкам.

В области по сечению $y=0{,}35\pi$ максимальные значения τ_{xy} не превосходят 0,67 кг/см². Напряжения σ_x дают значительные отклонения в интервале $0{,}5\pi\leqslant x\leqslant 1{,}4\pi$ на $y=\frac{\pi}{2}$ в $-0{,}1$ кг/см² $\div$ $\div 0{,}1$ кг/см², а в интервале $2{,}4\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$ максимальные отклонения 1,5 кг/см² на $y=\frac{\pi}{2}$ и минимальные — 1 кг/см² на $y=0$. На торце полуполосы граничные условия σ_x, τ_{xy} выполняются с большой степенью точности (10^{-6} кг/см²). Напряжения σ_y на торце больше 100 кг/см² на 0,25$\div$0,5 кг/см².

При нагрузках на продольных кромках

$$\sigma_y\left(x_\beta,\ \pm\frac{\pi}{2}\right)=100\ \text{кг/см}^2,\quad \tau_{xy}\left(x_\beta,\ \pm\frac{\pi}{2}\right)=0$$

и торце полуполосы, загруженном

$$\sigma_x(0,\ y_\beta)=10\ \text{кг/см}^2,\ \tau_{xy}(0,\ y_\beta)=0,$$

колебания оказываются бо́льшими по сравнению с рассмотренными выше. Результаты расчета представлены на рис. V.4.

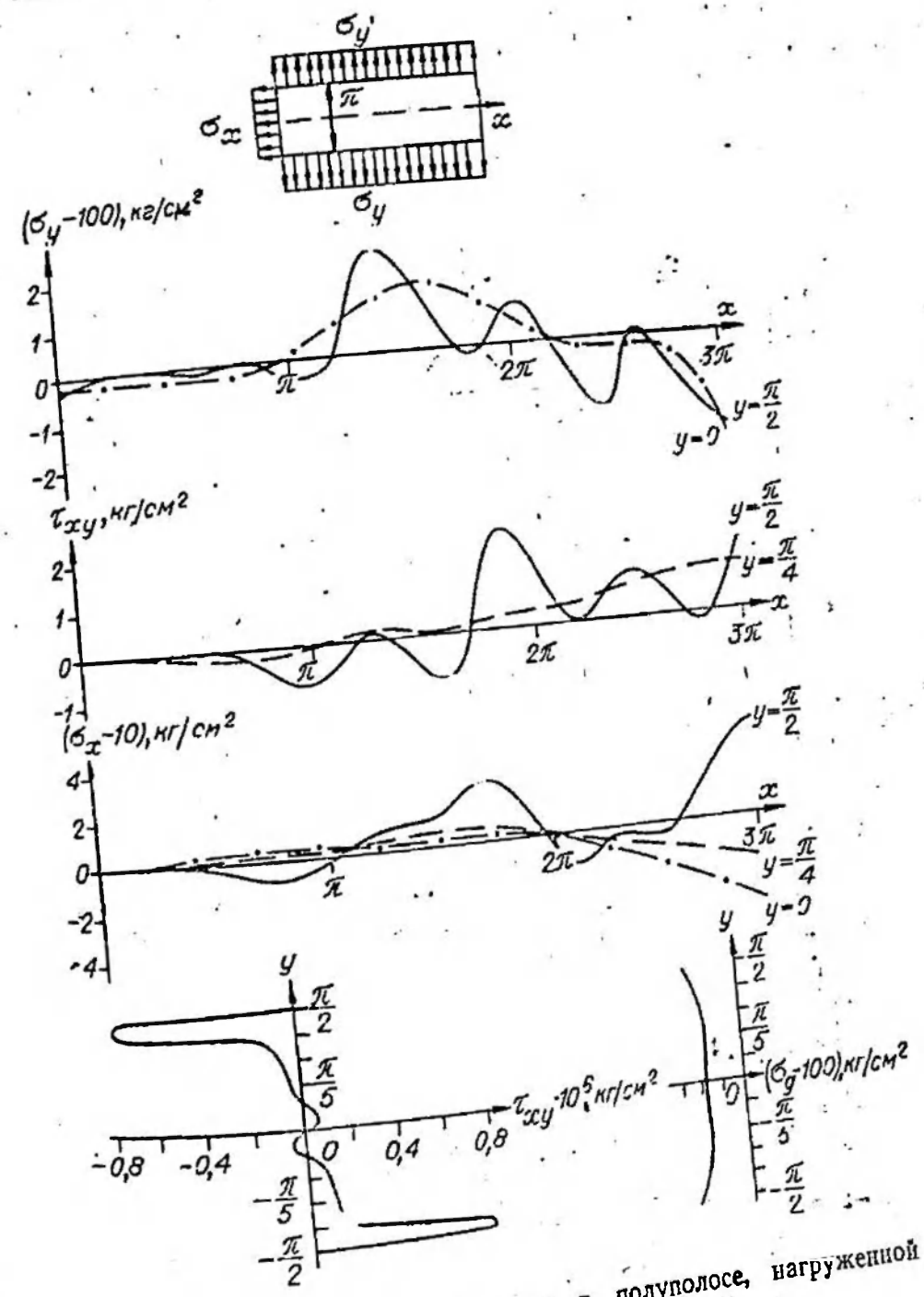


Рис. V.4. Напряженное состояние в полуполосе, нагруженной равномерно по кромкам и торцу.

Отклонения σ_y от 100 кг/см^2 прослеживаются в интервале $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ и достигают максимальных значений $\pm 2{,}5$ кг/см^2. В заданных точках x_i на $y = \frac{\pi}{2}$ граничные условия выполняются точно. Отклонения касательных напряжений τ_{xy} начинаются с $x = 0{,}5\pi$ и достигают величины $-1 \div 2$ кг/см^2, причем эти максимальные значения получаются на продольной кромке, затухая к оси симметрии ($y = 0$). Напряжения σ_x по всей области расчета показывают отклонения $\pm 3{,}5$ кг/см^2 от $\sigma_x = 10$ кг/см^2, заданных на торце. Однако отклонения $|\sigma_x| > \pm 1$ кг/см^2 наблюдаются лишь с $x > 1{,}5\pi$, так же как и отклонения $|\tau_{xy}| > \pm 1$ кг/см^2. Напряжения σ_x, τ_{xy} не превосходят ± 1 кг/см^2 в области $0 \leqslant x \leqslant 2{,}5\pi$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$. Точность выполнения гранич-

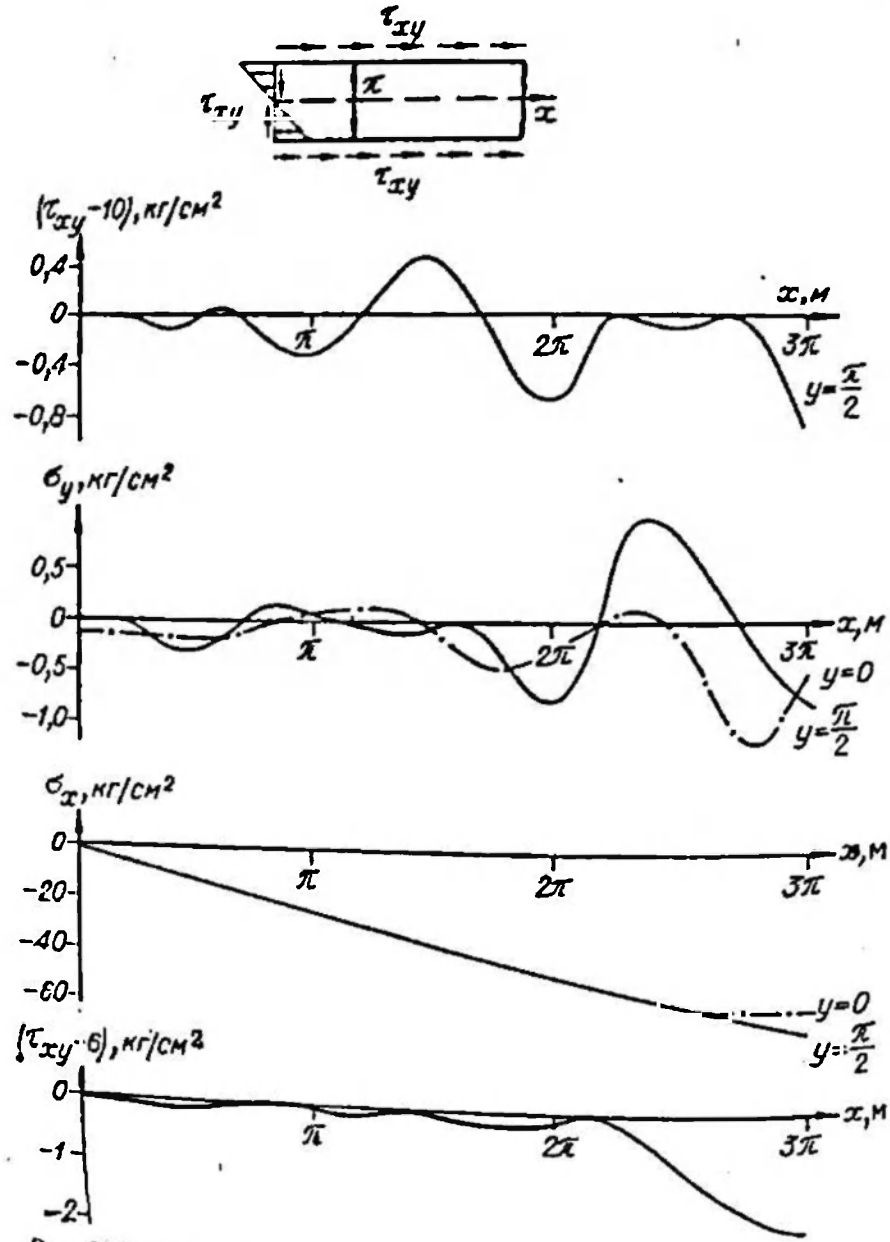


Рис. V.5. Напряженное состояние в полуполосе под действием сдвига по кромкам и торцу.

ных условий на торце ($x=0$) по заданным напряжениям $\sigma_x=$ $=10$ кг/см^2 равна $\pm 10^{-9}$ кг/см^2, по τ_{xy} — $\pm 10^{-7}$ кг/см^2. Отклонения нормальных напряжений σ_y от 100 кг/см^2 на торце составляют $-0{,}25$ кг/см^2.

Проверка полученного приближенного решения проводится путем сравнения его с точным решением для полуполосы с заданными на продольных кромках постоянными касательными напряжениями, а на торце — нагруженной линейной эпюрой касательных напряжений. Пусть

$$\tau\left(x_\beta,\ \pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm k,\quad \tau(0,\ y_\beta)=\frac{2k}{\pi}y,$$

тогда точное решение в области будет

$$\sigma_x(x,\ y)=-kx,\ \tau_{xy}(x,\ y)=ky,\ \sigma_y(x,\ y)=0.$$

Проведенные расчеты при $k=10$ кг/см^2, представлены эпюрами напряжений на рис. V.5. Точность выполнения граничного условия $\tau_{xy}=10$ кг/см^2 на продольной кромке не превышает $\pm 0{,}7$ кг/см^2 и лишь вблизи $x=3\pi$ достигает — 1 кг/см^2. Отклонения напряжений σ_y во всей области не превышают ± 1 кг/см^2. Решение $\sigma_x=-\frac{2k}{\pi}x=-\frac{20}{\pi}x$ выполняется в полуполосе хорошо; максимальные отклонения $-4\div 6$ кг/см^2 по сравнению с точным значением $\sigma_x=-60$ кг/см^2 наблюдаются лишь при $x=3\pi$.

ГЛАВА VI

РАСЧЕТЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ОТРАБОТКЕ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

§ 1. Типовые случаи напряженно-деформированного состояния вмещающих пород

Натурные наблюдения за смещениями пород кровли при отработке мощных крутых пластов Кузбасса показали [22], что типовыми профильными кривыми смещений являются смещения, подобные изгибу балки на двух опорах или консольно-закрепленной. Для подобных типовых профильных смещений проведем расчеты напряженно-деформированного состояния массива пород экспериментально-аналитическим методом.

При единичном подвигании забоя приращения смещений пород кровли, вызванные взрывной или механизированной отработкой угольного пласта, имеют вид смещений при изгибе балки на двух опорах (рис. VI.1) и интерполируются аналитическим выражением

$$v = \frac{a}{1+\left(\frac{x+L}{m}\right)^2}, \qquad \text{(VI.1)}$$

где v — приращения смещений; x — координата расстояний; a, L, m — параметры.

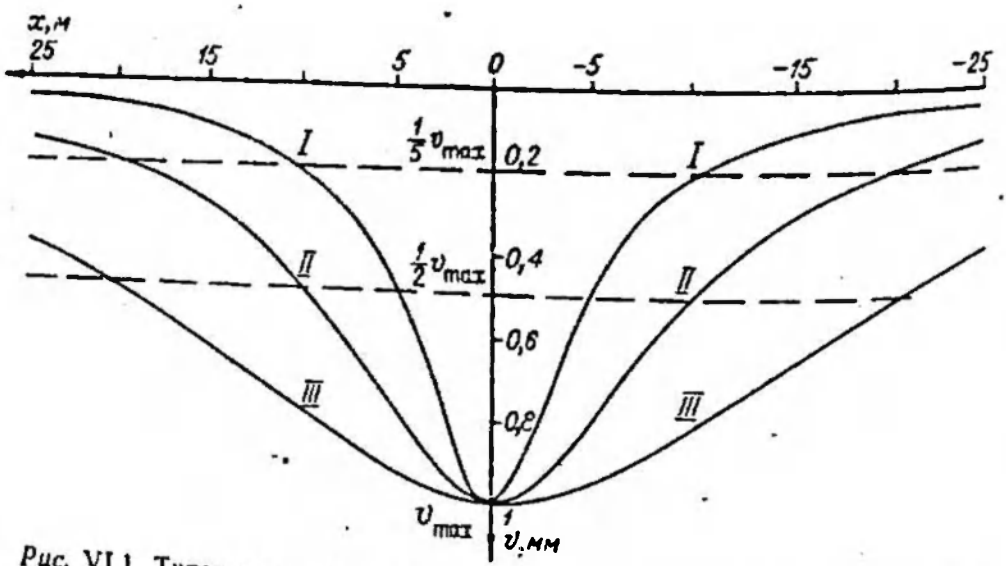


Рис. VI.1. Типовые профильные кривые нормальных к границе смещений от однократного подвигания забоя (I — $m=5$ м; II — $m=10$ м; III — $m=20$ м).

При $x \to \pm\infty$ $v \to 0$, т. е. смещения на бесконечности убывают. При $x=-L$ $v=v_{max}=a$, таким образом L есть расстояние координаты максимальных смещений (v_{max}) от начала координат. Максимальная величина смещений $v_{max}=a$ на рис. VI.1 принята равной 1 мм и является характерной величиной приращения смещений при взрывном подвигании щитового забоя в Кузбассе [22]. Степень убывания смещений по расстоянию зависит от параметра m. На рис. VI.1 приведены профильные линии смещений для значений $m=5$, 10, 20 м. При отработке щитовых столбов в Прокопьевско-Киселевском районе Кузбасса параметр $m=7\div13$ м [22]. Аналитическое выражение (VI.1) симметрично относительно координаты $x=-L$ (см. рис. VI.1, $L=0$) и в точках $x=-L\pm m$ имеет значение $v=0{,}5a$.

Таким образом, метод интерполяции натурных наблюдений подобных смещениям кровли при единичном подвигании забоя прост. Параметр a полагается равным максимальной величине смещений (на рис. VI.1 $a=0{,}1\cdot10^{-2}$ м), расстояние координаты максимальных смещений от начала координат определяет значение L, знак параметра определяется расположением максимума смещений в положительных (тогда $L<0$) или отрицательных ($L>0$) значениях координаты x. Расстояние от оси симметрии ($x=-L$), где достигается половина максимума смещений, определяет параметр m, который принимается положительным. Так, на рис. VI.1 для смещений, половина максимума которых достигается на расстоянии ±5 м от $x=0$, где помещен максимум смещений, параметр $m=5$ м (кривая I); соответственно для кривых II и III значения $m=10$ и 20 м.

Описание напряженно-деформированного состояния пород, соответствующее нормальным смещениям вида VI.1, проведем на основе задач C(V.1,2) и D(V.1,3), рассмотренных в главе V, § 1. Расчетные формулы перемещений и напряжений представлены выражениями (V.14), (V.24). При расчетах механического состояния вмещающих пород с использованием гипотезы проскальзывания по контакту с пластом ($\bar{X}_y=0$, задача C) параметр $p=1$, с использованием гипотезы сцепления ($u=0$, задача D) — $p=0$. Упругие характеристики пород принимаются $E=10^5$ кг/см^2, $\nu=0{,}25$.

По границе вмещающих пород ($y=0$) расчет перемещений показывает, что компонента смещений, нормальных к границе, совпадает с граничным условием, используемым при решении т. е.

$$v=-\frac{1}{\pi}B(x,0)=\frac{am^2}{a^2+m^2}=\frac{a}{1+\left(\frac{x+L}{m}\right)^2}.$$

Компонента смещений вдоль пласта, появляющаяся при решении задачи $C(p=1)$, имеет вид

$$u=\frac{(1-2\nu\varkappa_1)}{\pi}A(x,0)=-\frac{am(x+L)}{4(1-\nu)[(x+L)^2+m^2]}. \qquad \text{(VI.2)}$$

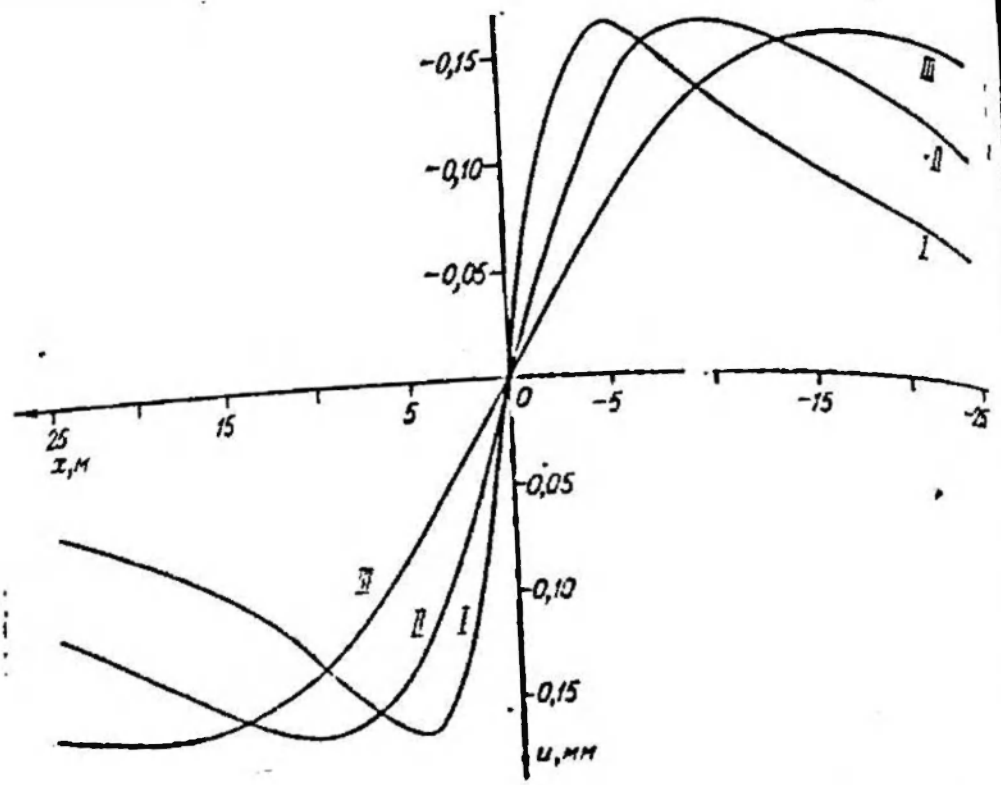


Рис. VI.2. Смещения пород вдоль границы при проскальзывании (I—m=5 м; II—m=10 м; III—m=20 м).

Эпюры смещений вдоль границы, рассчитанные по (VI.2), при ν=0,25 представлены на рис. VI.2 для значений параметра m=5, 10 и 20 м. Расчет показывает, что величины смещений вдоль границы почти что на порядок меньше, чем смещения, нормальные к границе. Смещения вдоль пласта антисимметричны относительно оси симметрии ($x=-L$) и достигают экстремальных значений max, min $u(x, 0)$=0,16 (6) мм в точках $x=\pm m-L$. На бесконечности смещения вдоль границы затухают. Отметим одно обстоятельство, полученное при расчетах. Смещения вдоль границы, а значит, и вектор смещений по границе при гипотезе проскальзывания (X_y=0) направлен от оси симметрии. Вектор смещений в точке максимума нормальной к границе компоненты ($x=-L$) ориентирован только перпендикулярно к границе.

Напряженное состояние границы вмещающих пород (y=0), соответствующее смещениям (VI.1) и определяемое выражениями (V.14), (V.24), представлено эпюрами на рис. VI.3, VI.4.

При гипотезе проскальзывания на границе касательные напряжения X_y=0, а нормальные напряжения

$$X_x = Y_y = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{am[(x+L)^2 - m^2]}{[(x+L)^2 + m^2]^2}. \qquad \text{(VI.3)}$$

Эпюры напряжений $\bar{X}_x = \bar{Y}_y$ по границе при гипотезе проскальзывания приведены на рис. VI.3 для смещений (VI.1) с максимальной величиной α=1 мм и для значений m=5, 10 и 20 м при

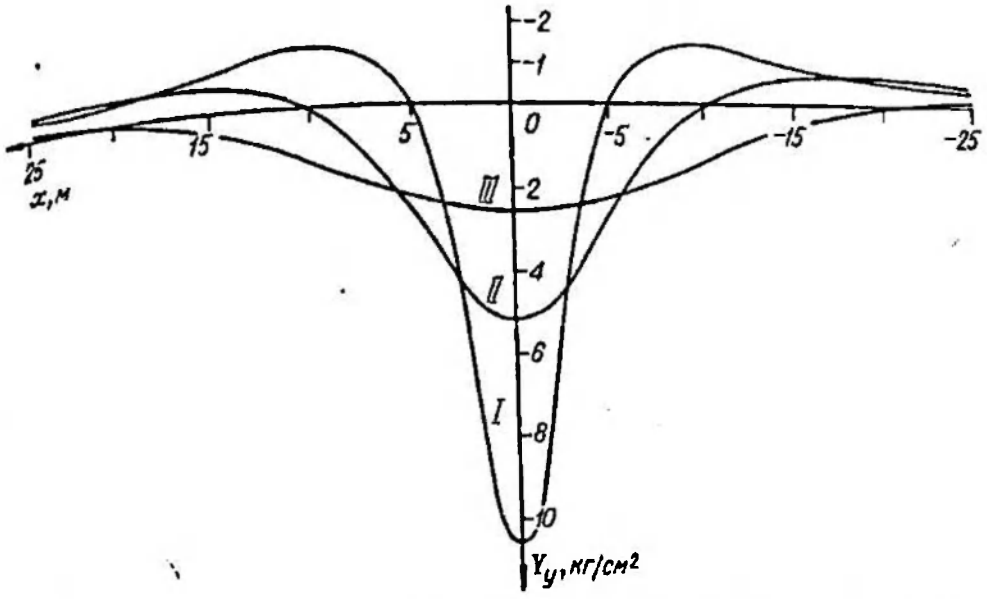


Рис. VI.3. Эпюры нормальных напряжений на границе при проскальзывании (I — $m=5$ м; II — $m=10$ м; III — $m=20$ м).

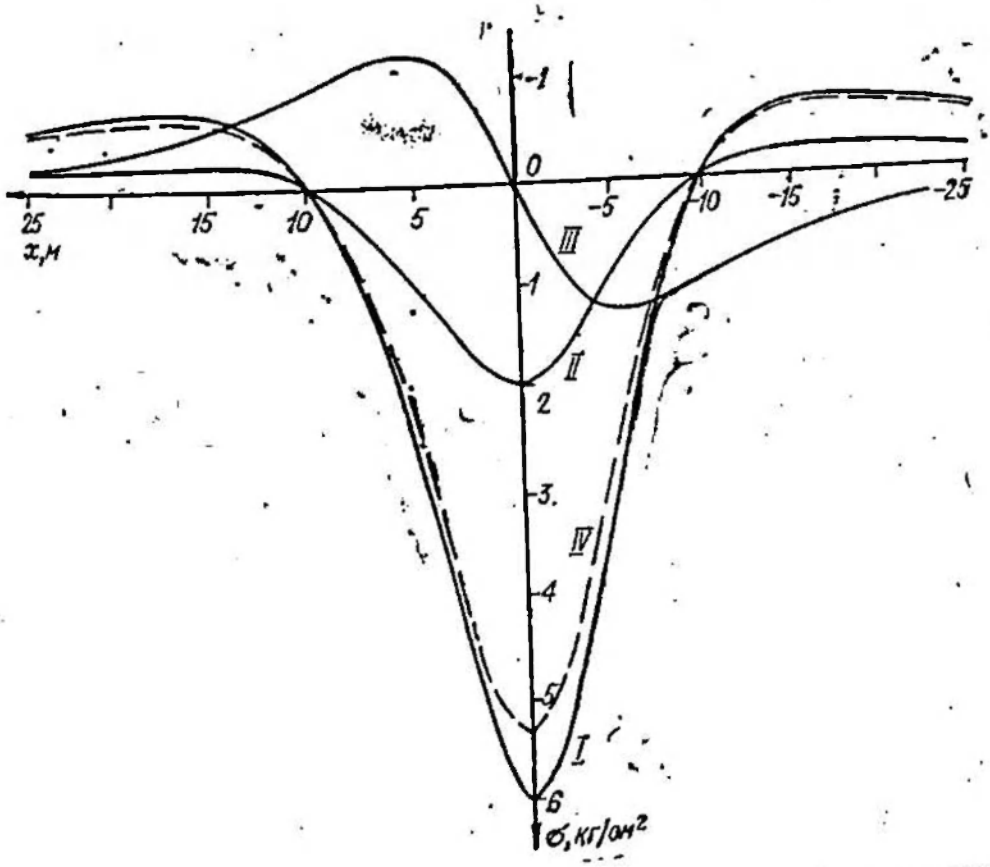


Рис. VI.4. Эпюры напряжений на границе для $m=10$ м при сцеплении X_x (I), Y_y (II), X_y (III); при проскальзывании $X_x = Y_y$ (IV).

упругих характеристиках $E=10^5$ кг/см^2, $\nu=0{,}25$. По границе вмещающих пород на интервале $m-L>x>-m-L$ происходит разгрузка массива *, вне этого интервала — пригрузка массива сжимающими нормальными напряжениями. Максимальное значение растягивающих напряжений достигается на оси симметрии $(x=-L)$, минимальные значения в точках с координатами $x=\pm\sqrt{3}m-L$, причем

$$X_x^{max}=Y_y^{max}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\cdot\frac{a}{m};$$

$$X_x^{max}/X_x^{min}=Y_y^{max}/Y_y^{min}=-8. \qquad (VI.4)$$

Нормальные напряжения (VI.3) равны нулю в точках $x=\pm m-L$ и на бесконечности.

При гипотезе сцепления на границе имеются отличные между собой и не равные нулю компоненты напряжений (при проскальзывании — нормальные компоненты равны, а касательное напряжение — нуль):

$$X_x=-\frac{2E\nu}{(1+\nu)(3-4\nu)}\cdot\frac{am[(x+L)^2-m^2]}{[(x+L)^2+m^2]^2};$$

$$Y_y=-\frac{2E(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)}\cdot\frac{am[(x+L)^2-m^2]}{[(x+L)^2+m^2]^2}; \qquad (VI.5)$$

$$X_y=-\frac{2E(1-2\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)}\cdot\frac{am^2(x+L)}{[(x+L)^2+m^2]^2}.$$

Различие компонент нормальных напряжений при сцеплении (VI.5) и проскальзывании (VI.3) количественное, зависящее от коэффициента Пуассона:

$$X_x^{сц}/X_x^{пр}=\frac{4(1-\nu)\nu}{3-4\nu};$$

$$Y_y^{сц}/Y_y^{пр}=\frac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu}. \qquad (VI.6)$$

На рис. VI.4 приведены эпюры напряжений на границе $(y=0)$ для смещений (VI.1) с параметрами $a=0{,}1\cdot10^{-2}$ м, $m=10$ м (см. рис. VI, кривая II) и $\nu=0{,}25$. В этом случае

$$2{,}6\,(6)\,X_x^{сц}=0{,}8\,(8)\,Y_y^{сц}=X_x^{пр}=Y_y^{пр},$$

т. е. при сцеплении нормальные напряжения вдоль границы $(X_x^{сц})$ в 2,7 раза меньше, а нормальные к границе напряжения $(Y_y^{сц})$ на 12% больше, чем нормальные напряжения при проскальзывании $(X_x^{пр}=Y_y^{сц})$.

Качественный характер распределения нормальных напряжений на границе, соответствующих смещениям (VI.1), одинаков при проскальзывании и сцеплении на границе.

* Растягивающие нормальные напряжения приняты положительными, сжимающие напряжения — отрицательными.

Касательные напряжения на границе при сцеплении антисимметричны относительно оси симметрии ($x=-L$); в точках $x=\pm\frac{m}{\sqrt{3}}-L$ достигают экстремальных значений

$$X_{xy}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)}\cdot\frac{a}{m}, \qquad \text{(VI.7)}$$

прямо пропорциональных максимальным приращениям смещений и обратно пропорциональных параметру m.

Выражения (VI.4), (VI.6), (VI.7) позволяют для заданных упругих характеристик пород (E, ν) при наблюдаемых максимальных приращениях смещений (a) от однократного подвигания забоя и известном расстоянии (m), где смещения достигают половины максимальных, определить экстремальные значения приращений нормальных и касательных напряжений.

Рассмотрение напряженно-деформированного состояния массива вмещающих пород, соответствующего приращению смещений на границе (VI.1) и гипотезам проскальзывания или сцепления, начнем с картин компонент смещений (рис. VI.5). Компоненты перемещений v (вдоль оси y) и u (вдоль оси x) рассчитывались по формулам (V.14), (V.24) при $\nu=0{,}25$ в области $25\text{ м}\geqslant x\geqslant -25$ м, $0\geqslant y\geqslant -25$ м на ЭВМ БЭСМ-4. По результатам расчетов строились изолинии равных перемещений. На рис. VI.5, *а* приведены изолинии v и u, соответствующие перемещениям (VI.1) и гипотезе проскальзывания по границе; на рис. VI.5, *б* — гипотезе сцепления.

Картины изолиний смещений v (вдоль оси y) в массиве при рассматриваемых гипотезах взаимодействия по границе качественно подобны и характеризуют затухание смещений от максимального значения ($v_{max}=a=1$ мм) в глубь массива. Однако расчеты по гипотезе проскальзывания показывают, что затухание смещений в глубине массива происходит медленнее, чем затухание смещений при гипотезе сцепления.

Существенное различие картин изолиний в массиве наблюдается для смещения u (вдоль оси x). Оставаясь антисимметричными относительно оси симметрии ($x=-L$, при расчетах $L=0$), в глубине массива смещения u направлены к оси $x=-L$, а расчеты по гипотезе проскальзывания указывают на появление зон, где смещения противоположно направлены относительно смещений в глубине массива, т. е. от оси симметрии. При гипотезе проскальзывания смещения u достигают абсолютных экстремальных значений на границе ($u=\pm 0{,}17$ мм) и относительных экстремальных значений ($u=\pm 0{,}05$ мм) в глубине массива. При гипотезе сцепления абсолютные экстремальные значения $u=\pm 0{,}08$ мм появляются в глубине массива $\left(x=\pm\frac{2m}{\sqrt{3}}-L,\right.$ $\left.y=-m\right)$, причем они меньше, чем абсолютные экстремумы,

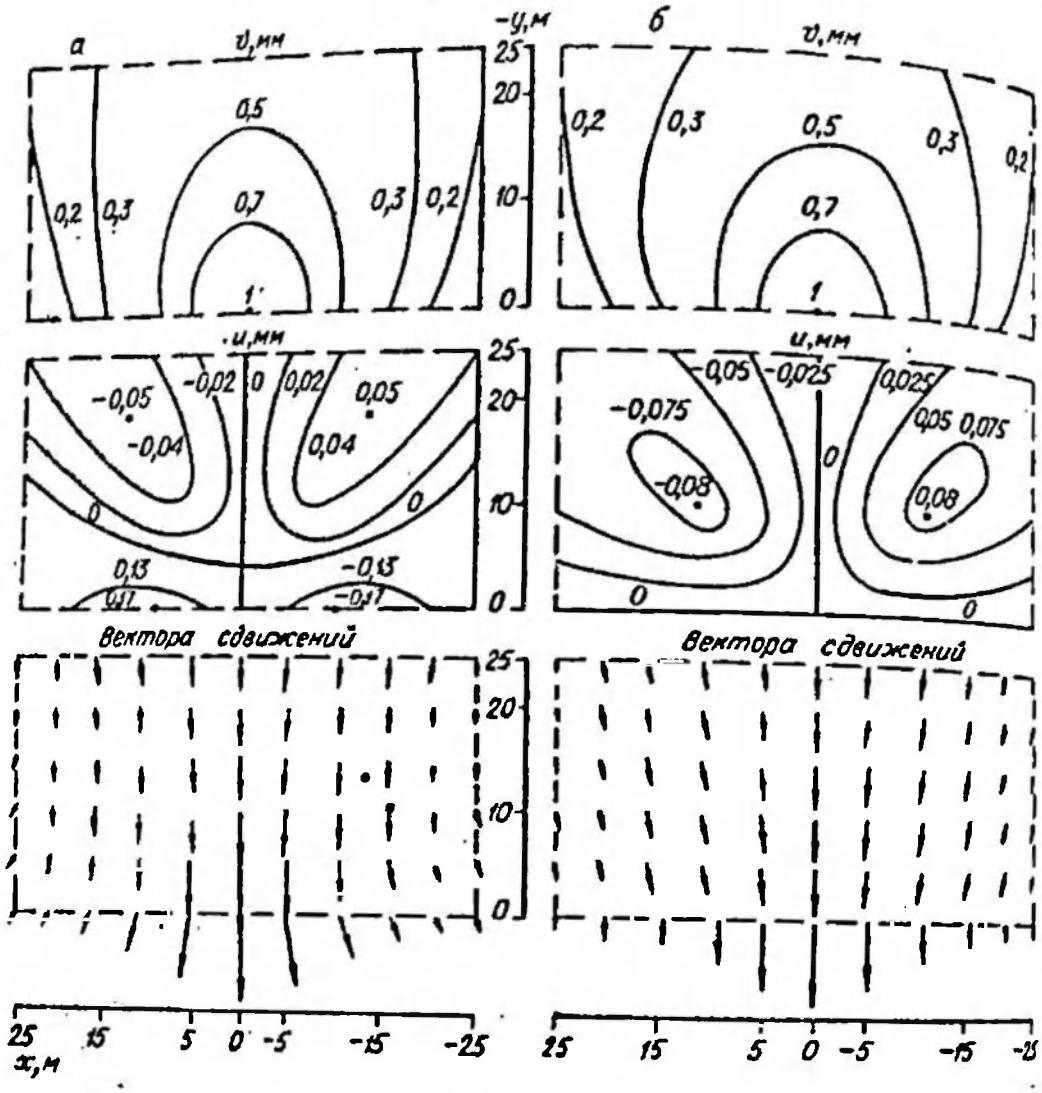


Рис. VI 5. Смещения в массиве пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

и расположены в массиве ближе к границе, чем относительные экстремумы при проскальзывании.

Таким образом, расчеты при использовании по границе гипотезы сцепления показывают, что вектора сдвижений в массиве направлены к оси симметрии, в то время как при гипотезе проскальзывания вектора сдвижений в пограничной зоне, направленные от оси симметрии, меняют направление в глубине массива. Направление векторов сдвижений на удалении от границы при использовании гипотезы проскальзывания и сцепления совпадают и ориентированы к оси симметрии.

Напряженное состояние массива вмещающих пород может быть рассмотрено либо в прямоугольных компонентах тензора напряжений (X_x, Y_y, X_y), либо в главных напряжениях (σ_1, σ_3, τ_{max}), связанных с прямоугольными соотношениями (VI.15).

Приращения прямоугольных напряжений, соответствующие приращению смещений (VI.1), приводятся на рис. VI.6, *а* и *б* соответственно для гипотезы проскальзывания и гипотезы сцеп-

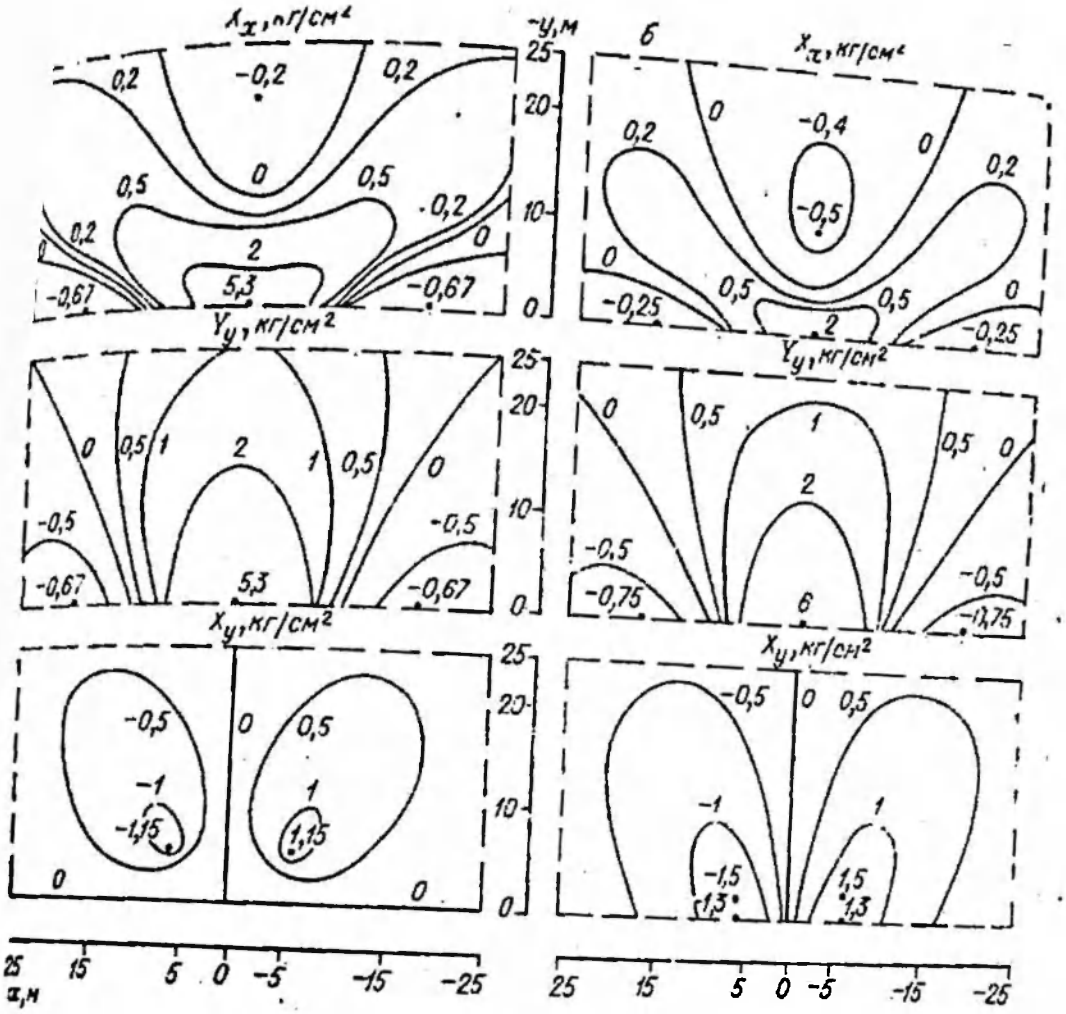


Рис. VI.6. Напряженное состояние вмещающих пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

ления при значениях параметров смещений $a=0{,}1\cdot10^{-2}$ м, $m=10$ м (см. рис. VI.1, кривая II).

Картины напряженного состояния при разных гипотезах взаимодействия пород с пластом качественно одинаковые.

Нормальные напряжения X_x, Y_y симметричны относительно оси симметрии ($x=-L$) и имеют области пригрузки и разгрузки; касательные напряжения (X_y) — антисимметричны. Нормальные напряжения (X_x) имеют две зоны пригрузки в пограничной области над убывающими ветвями кривой смещений (VI.1) (при $m-L>x>m-L$) и в глубине массива. Экстремальные значения достигаются по границе в случае проскальзывания и на оси симметрии в случае сцепления. Нормальные напряжения (Y_y) не имеют внутренней зоны пригрузки; экстремальные значения достигаются только на границе. Концентрация касательных напряжений (X_y) происходит в глубине массива, причем в случае проскальзывания концентратор по величине меньше и расположен от границы дальше, чем в случае сцепления.

Прочностное состояние массива оценивается по главным нормальным и максимальным касательным напряжениям, определяемым из прямоугольных напряжений соотношениями (V.15).

Картины главных напряжений σ_1, σ_2, τ_{max} для рассматриваемых смещений и гипотез взаимодействия приведены на рис. VI.7. Максимальные главные нормальные напряжения σ_1 распределены в массиве аналогично прямоугольным напряжениям Y_y. Однако зона сжимающих напряжений σ_1 меньше, чем зона пригрузки напряжений Y_y, и массив в основном разгружается. Минимальные главные напряжения σ_2 в массиве в основном сжимающие и значительно меньше по абсолютной величине напряжений σ_1. Зона разгрузки напряжений σ_2 расположена по оси симметрии ($x=-L$) и незначительно распространяется в глубь массива, причем при проскальзывании больше, чем при сцеплении. Максимальные касательные напряжения τ_{max}, в отличие от напряжений X_y, имеют концентратор на оси симметрии в глубине массива, больший в случае сцепления, чем при проскальзывании.

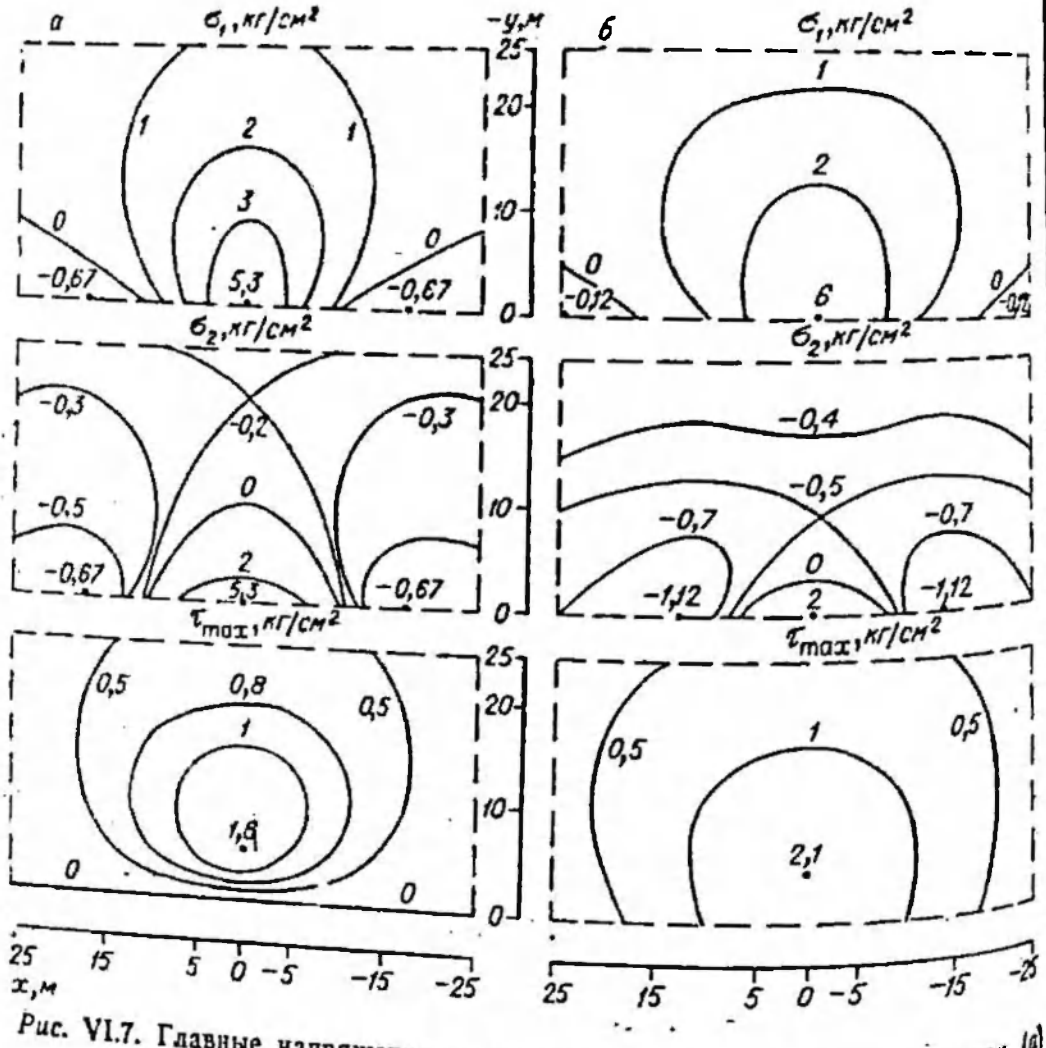


Рис. VI.7. Главные напряжения в массиве пород при проскальзывании (а) и сцеплении (б) на границе.

Деформированное состояние массива вмещающих пород представлено на рис. VI.8 по результатам расчетов с использованием гипотез проскальзывания и сцепления.

Картины деформаций в массиве, естественно, качественно подобны картинам прямоугольных напряжений (рис. VI.6) по зонам растягивающих и сжимающих нормальных деформаций e_x, e_y и сдвигов e_{xy}. Однако деформации e_x на границе отсутствуют при гипотезе сцепления, так как $u=0$, а экстремальные значения достигаются в массиве. Экстремальные значения деформаций e_y в случае проскальзывания также достигаются в массиве. Сдвиги e_{xy} полностью подобны картинам касательных напряжений X_y (см. рис. VI.6).

Формула (VI.1) пригодна для интерполяции приращений смещений при единичном подвигании забоя. Если приращение рассматривать как среднюю скорость смещений массива единичного подвигания забоя, то, на основании § 3 главы II, интегрируя (II.62) скорости, можно получить конечные смещения при многократных подвиганиях забоя. Аналитическое выраже-

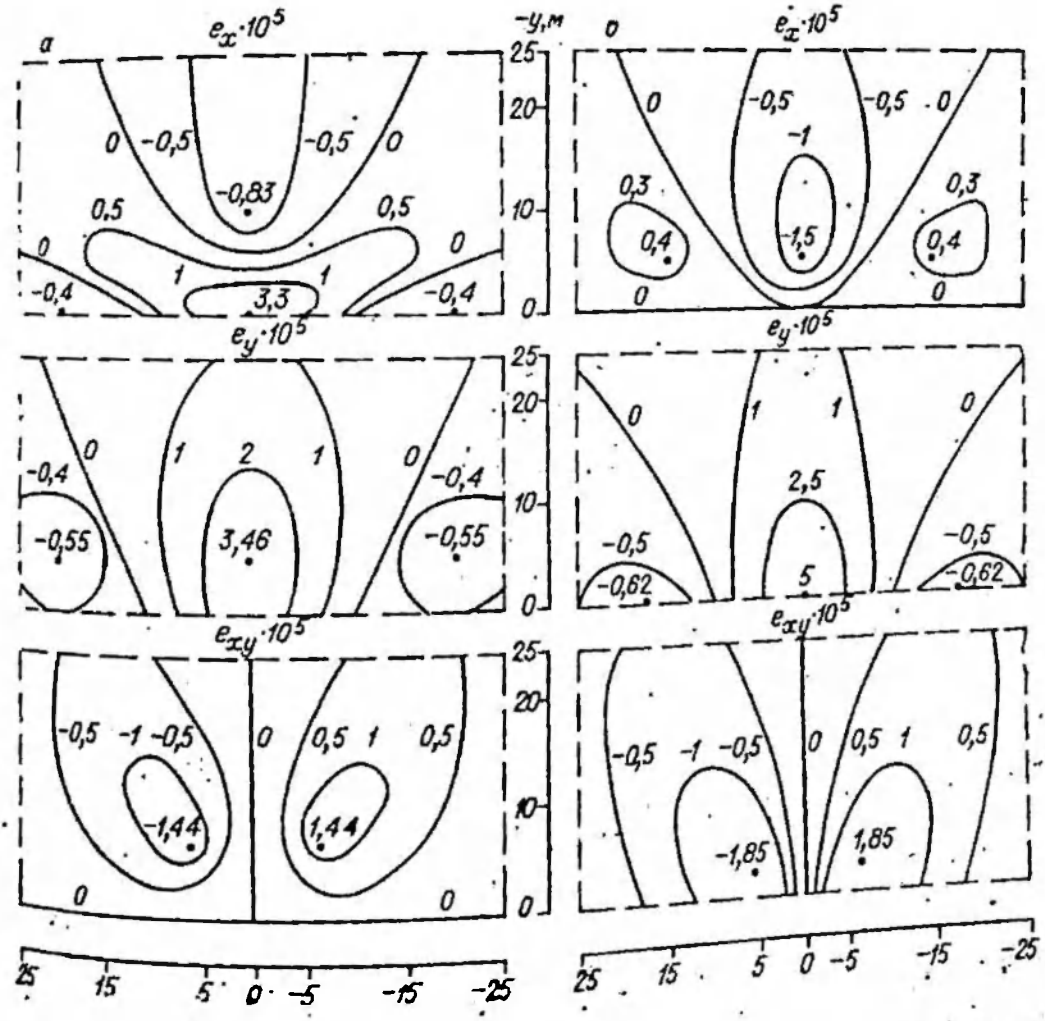


Рис. VI.8. Деформации массива пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

ние профильной линии смещений получается в виде, подобном (II.63)

$$V = k\left[\operatorname{arcctg}\frac{x+l_1}{b_1} - \operatorname{arcctg}\frac{x+l_2}{b_2}\right], \qquad \text{(VI.8)}$$

где k, l_i, b_i — параметры (k, $b_i > 0$, $l_1 > l_2$, $i = 1, 2$). Типовая профильная линия смещений (VI.8) подобна смещениям при изгибе балки на двух опорах, нагруженной распределенной нагрузкой, и представляет собой мульду опускания кровли в выработанном пространстве.

Профильная линия смещений, интерполируемая выражением (VI.8), обладает следующими свойствами. При $x \to \pm\infty$ смещения убывают и стремятся к нулю. Экстремальные значения смещений (VI.8) достигаются в точках

$$x = \frac{b_1 l_2 + b_2 l_1}{b_1 b_2} \pm \sqrt{b_1 b_2\left[1 + \left(\frac{l_1 - l_2}{b_2 - b_1}\right)^2\right]};$$

они разного знака, т. е. смещения помимо общего опускания в выработанном пространстве имеют участок над пластом, где происходит поддутие. Факт поднятия пород кровли в угольном пласте впереди забоя иногда наблюдается при шахтных замерах нормальных к пласту смещений вмещающих пород по контакту с пластом.

Рассмотрим симметричную мульду опускания пород, часто встречающуюся при натурных наблюдениях смещений кровли. Профильную линию смещений в этом случае можно интерполировать выражением

$$V = k\left(\operatorname{arcctg}\frac{x+l_1}{b} - \operatorname{arcctg}\frac{x+l_2}{b}\right). \qquad \text{(VI.9)}$$

Смещения (VI.9) при условии $l_1 > l_2$ будут положительными и симметричными относительно оси $x = \frac{1}{2}(l_2 - l_1)$, на которой достигается максимум. Профильные линии смещений мульдового вида с одинаковым максимумом (50 мм), но различной кривизной, характеризуемой параметром b, представлены на рис. VI.9.

Рассмотрим механическое состояние вмещающих пород, соответствующее смещениям вида (VI.9) и гипотезам взаимодействия массива с пластом на границе ($y=0$) — проскальзывание ($X_y=0$) или сцепление ($u=0$).

Расчеты напряженно-деформированного состояния проводятся по формулам (VI.14)—(VI.16), (VI.25), (VI.26) в области 50 м $\geqslant x \geqslant$ —50 м, $0 \geqslant y \geqslant$ —50 м для пород с упругими характеристиками $E = 10^5$ кг/см^2, $\nu = 0{,}25$.

По границе ($y=0$) компонента смещений нормальных к границе (v) совпадает с краевым условием (см. рис. VI.9), используемым при решении, т. е. (VI.9).

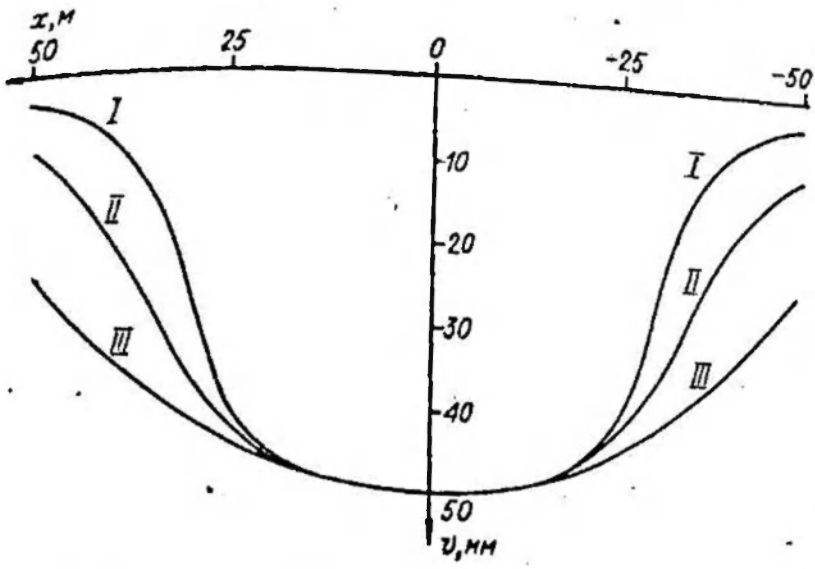


Рис. VI.9. Типовые профильные кривые нормальных к границе смещений при многократных подвиганиях забоя (I—$k=0{,}178\cdot10^{-1}$ м, $l_{1,2}=\mp30$ м, $b_{1,2}=5$ м; II—$k=0{,}193\cdot10^{-1}$ м, $l_{1,2}=\mp35$ м, $b_{1,2}=10$ м; III—$k=0{,}216\cdot10^{-1}$ м, $l_{1,2}=\mp45$ м, $b_{1,2}=20$ м).

Смещения (VI.9) качественно подобны рассмотренным приращениям смещений (VI.1) от единичного подвигания забоя, поэтому следует ожидать качественного совпадения картин напряженно-деформированного состояния. Смещение мульдового вида (VI.9) имеет ярко выраженное плоское дно (см. рис. VI.9) в отличие от приращений смещений единичного подвигания (см. рис. VI.1). Это различие скажется на состоянии массива.

Компонента смещений вдоль пласта, появляющаяся при решении задачи *C* (с гипотезой проскальзывания, $p=1$) представлена на рис. VI.10 в виде эпюр смещений u для различной кривизны ($b=5$, 10, 20 м) смещений v (VI.9).

Смещения u на границе одного порядка, но экстремальные значения в 3—4 раза меньше максимальных значений нормальных смещений v и достигаются в точках перегиба ветвей мульды. С возрастанием кривизны мульды (уменьшением параметра b) возрастают экстремальные значения u. На оси симметрии ($x=0$ для кривых рис. VI.9, параметры которых $l_1=|l_2|$) горизонтальная компонента отсутствует, т. е. вектор смещения направлен точно по нормали к границе. В остальных точках границы вектор смещений направлен от оси симметрии. Вектор смещений по границе при гипотезе сцепления ($u=0$) точно ориентирован нормально к границе ($y=0$).

Нормальные напряжения (X_x, Y_y) на границе для проскальзывания ($X_y=0$) равны. Эпюры нормальных напряжений ($X_x=Y_y$), представленные на рис. IV.11, соответствуют смещениям (VI.9) (см. рис. VI.9) различной кривизны при равном значении максимума ($v_{max}=50$ мм). Бо́льшая кривизна мульды (меньшее значение b) определяет бо́льшие напряжения на гра-

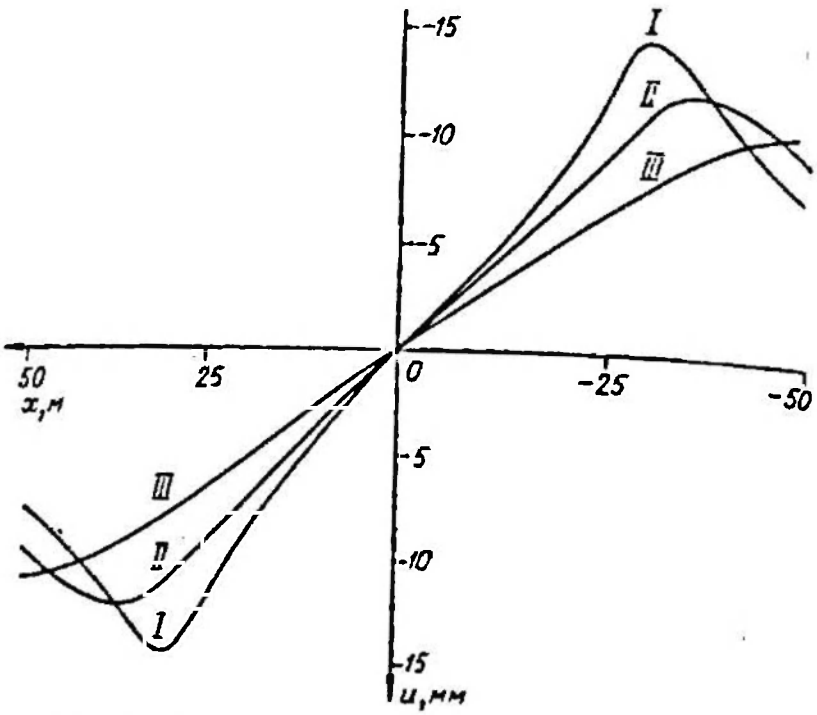


Рис. VI.10. Смещения пород вдоль границы при проскальзывании (I — $b_{1,2}$=5 м; II — $b_{1,2}$=10 м; III — $b_{1,2}$=20 м).

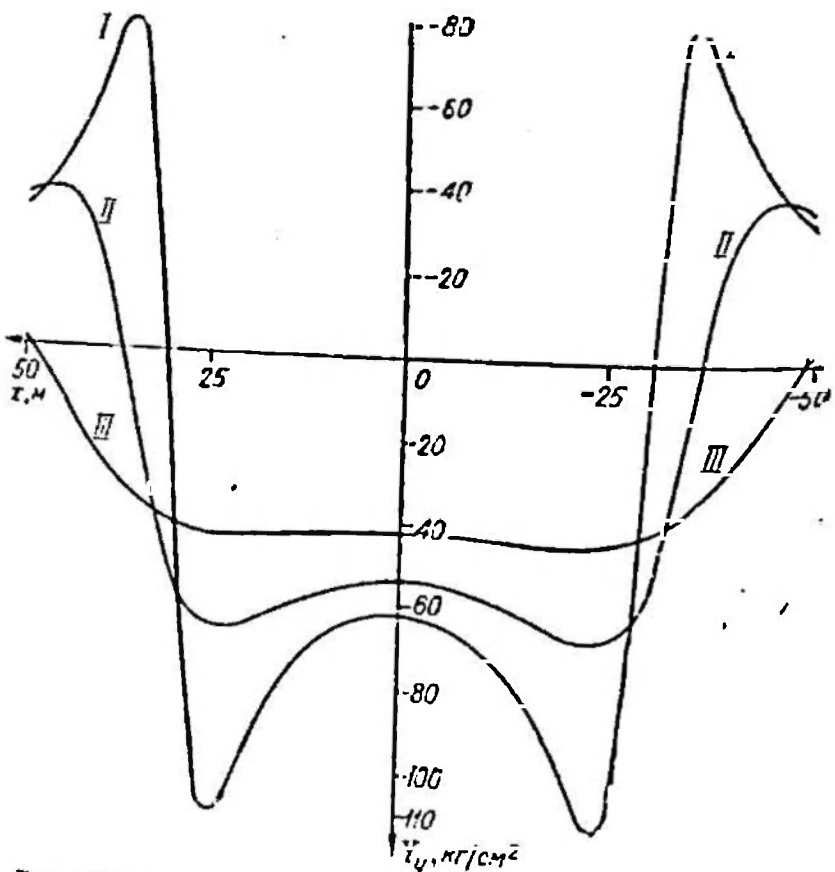


Рис. VI.11. Эпюры нормальных напряжений на границе при проскальзывании (I — $b_{1,2}$=5 м; II — $b_{1,2}$=10 м; III — $b_{1,2}$=20 м).

нице, экстремальные значения которых расположены в точках $x \approx l_i \pm b$. Так же, как для смещений (VI.1), нормальные напряжения в интервале $l_1 < x < l_2$ разгружаются, вне этого интервала происходит пригрузка напряжений. Отличие эпюр нормальных напряжений смещений мульдового вида от напряжений (см. рис. VI.3) для смещений единичного подвигания (см. рис. VI.1) в том, что на оси симметрии для мульды имеется не абсолютный, а относительный максимум растягивающих напряжений. Для бо́льшей кривизны (меньшего значения b) различие значений растягивающих напряжений бо́льшее.

Напряженное состояние пород на границе в случае проскальзывания и сцепления для мульды с параметром $b=10$ м представлено на рис. VI.12. Аналогично напряжениям (см. рис. VI.4) на границе для смещений единичного подвигания, нормальные напряжения участка восходящих ветвей и дна мульды разгружаются, участка нисходящих ветвей — пригружаются. При проскальзывании нормальные напряжения равны ($X_v = Y_v$); при сцеплении — различие их аналогично различиям напряжений при сцеплении для смещений единичного подвигания. Касательные напряжения (X_v) по границе в случае сцепления антисимметричны относительно оси симметрии $\left(x = \frac{1}{2}(l_1 - l_2)\right)$ и достигают экстремальных значений в точках перегиба мульды смещений ($x \approx l_i$).

Изолинии компонент вектора смещений в массиве пород представлены на рис. VI.13 при проскальзывании и сцеплении для симметричной мульды смещений (VI.9) с параметром кривизны $b=10$ м. Наблюдается полная качественная аналогия с картинами компонент смещений единичного подвигания (см. рис. VI.5). Горизонтальная компонента смещений u на границе

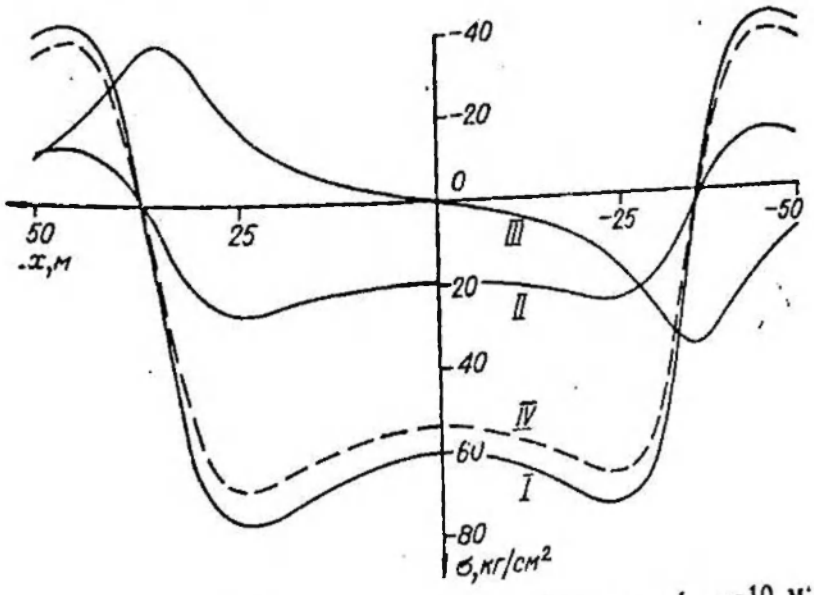


Рис. VI.12. Эпюры напряжений на границе для $b_{1,2}=10$ м; при сцеплении — X_x (I), Y_y (II), X_y (III); при проскальзывании — $X_x = Y_y$ (IV).

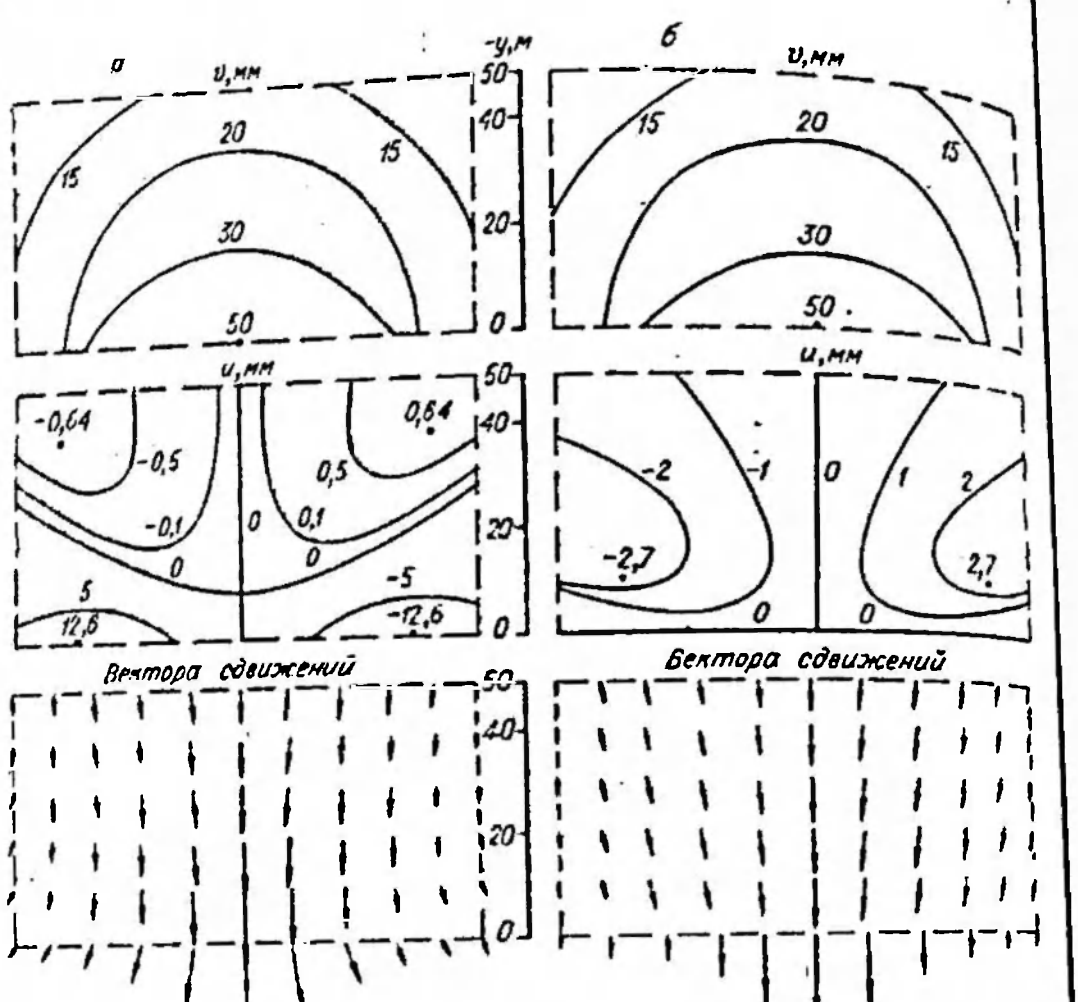


Рис. VI.13. Смещения в массиве пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

при проскальзывании того же порядка, что и компонента v, а вектор смещений в приграничной зоне направлен от оси симметрии. В глубине массива как при проскальзывании, так и при сцеплении, компонента u на порядок меньше смещений v и вектор смещений направлен к оси симметрии. Максимальное значение компоненты v находится на границе по оси симметрии, экстремальные значения компоненты u — на границе (при проскальзывании) и в глубине массива по осям, проходящим через точки перегиба мульды смещений (VI.9); с удалением от границы компоненты и вектор смещений затухают.

Напряженное состояние массива вмещающих пород, соответствующее мульде смещений (VI.9) при $b=10$ м, представлено картинами изолиний равных прямоугольных (X_x, Y_y, X_y) и главных напряжений (σ_1, σ_2, τ_{max}) на рис. VI.14, VI.15.

Прямоугольные нормальные напряжения X_x пригружаются в приграничных зонах над нисходящими ветвями мульды сме-

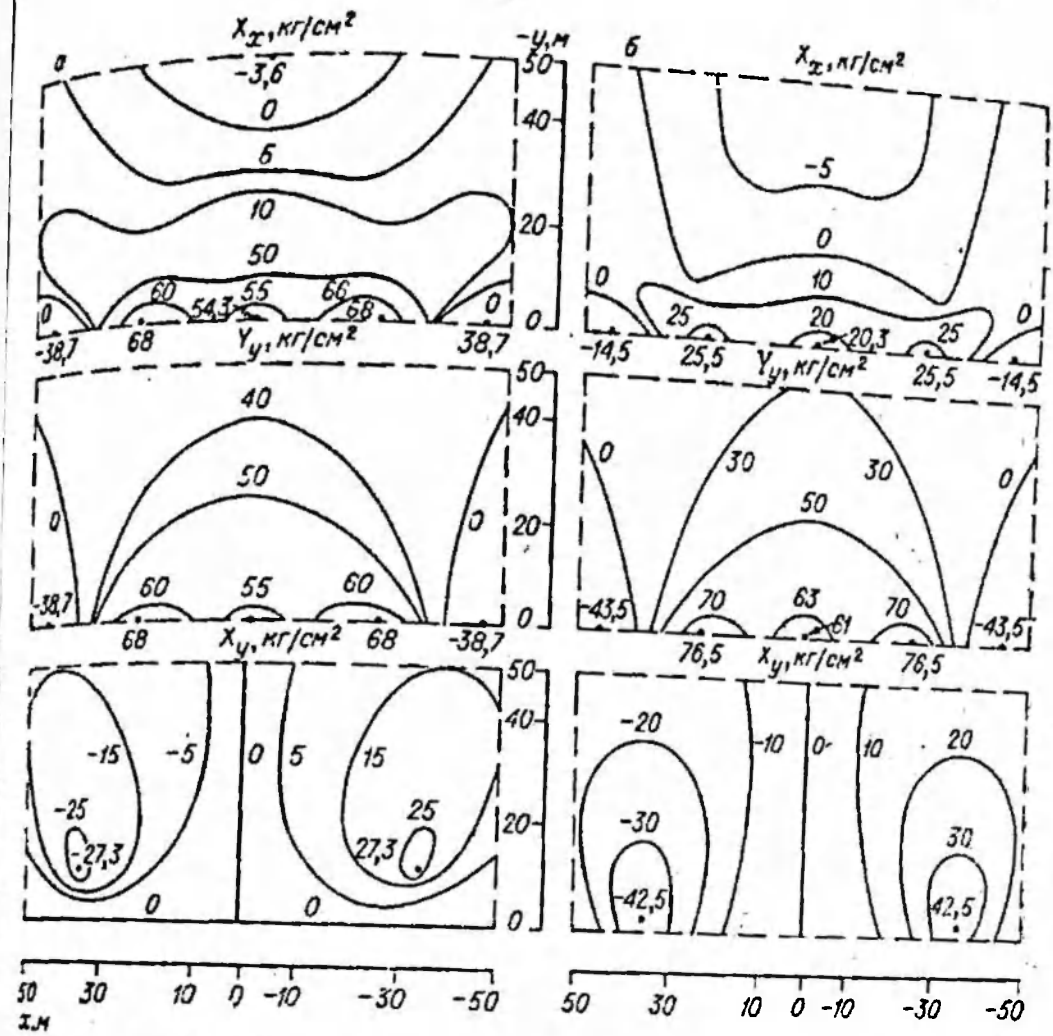


Рис. VI.14. Напряженное состояние вмещающих пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

щений и в глубине массива по оси симметрии. Восходящие ветви, дно мульды смещений и массив пород над ними разгружаются, причем интенсивнее при сцеплении, чем при проскальзывании. Картины нормальных напряжений Y_y для различных гипотез мало отличаются друг от друга и имеют ярко выраженные области пригрузки и разгрузки массива. Картины напряжений X_x, Y_y симметричны, а экстремальные значения напряжений достигаются по границе. Касательные напряжения X_y антисимметричны, концентрируются над точками перегиба мульды смещений в глубине массива, причем концентратор при сцеплении больше и расположен ближе к границе, чем при проскальзывании.

Картина изолиний максимальных главных нормальных напряжений σ_1 (рис. VI. 15) подобна картинам напряжений Y_y, однако в массиве над мульдой смещений в основном происходит разгрузка. Минимальные главные напряжения σ_2 наоборот растягивающие, а зона сжимающих напряжений над дном мульды смещений при сцеплении меньше, чем при проскальзывании. Максимальные касательные напряжения τ_{max}, как и глав-

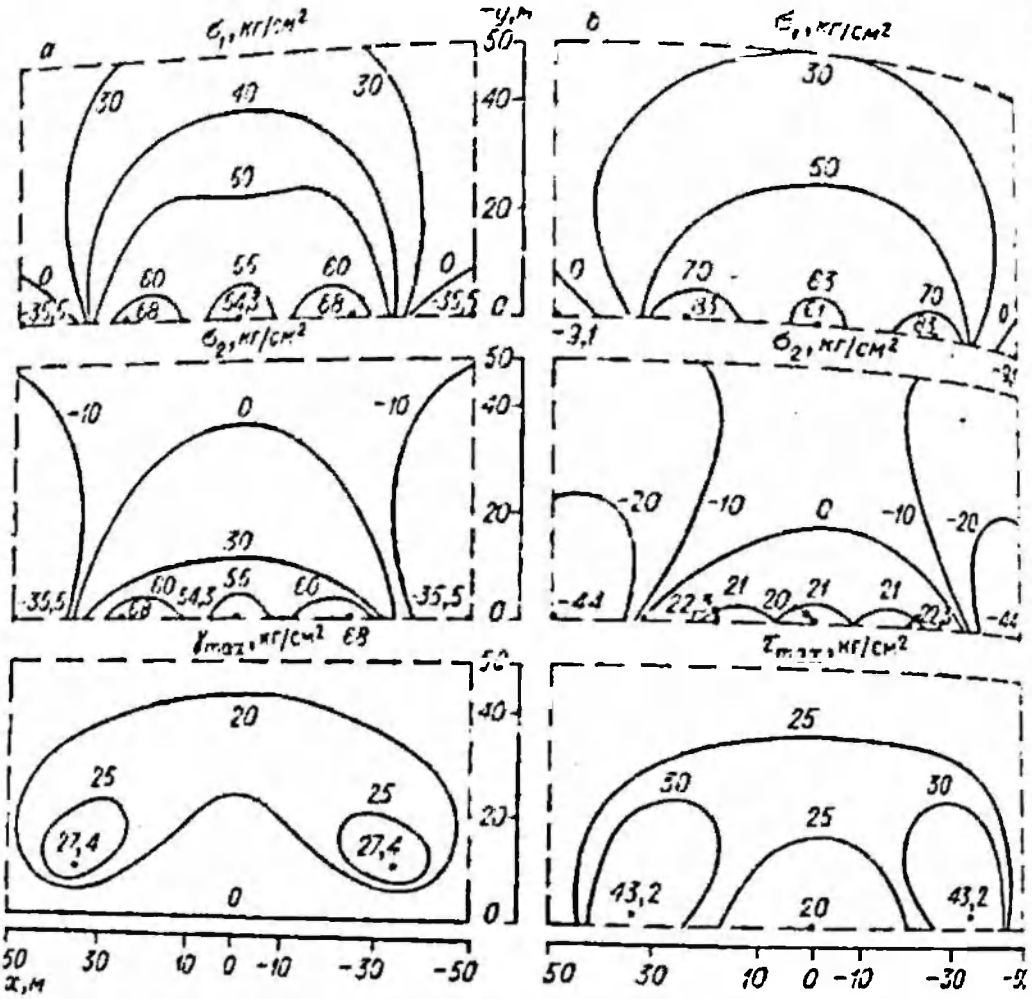


Рис. VI.15. Главные напряжения в массиве пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

ные напряжения σ_1, σ_2 симметричны и концентрируются над точками перегиба мульды смещений в глубине массива. Концентраторы τ_{max} при сцеплении больше и расположены ближе к границе, чем при проскальзывании, когда на границе $\tau_{max}=0$. Концентраторов τ_{max} для смещений мульдового вида два, в отличие от одного концентратора на оси симметрии для смещений единичного подвигания (см. рис. VI.7).

Деформированное состояние массива вмещающих пород при смещениях на границе мульдового вида показано на рис. VI.16. Картины нормальных деформаций e_x при проскальзывании, e_y при сцеплении и сдвигов e_{xy} подобны соответствующим картинам прямоугольных напряжений X_x, Y_y, X_y. Деформации e_y при проскальзывании достигают минимальных значений на границе и максимальных — в массиве, причем последних — два, в отличие от одного максимального значения деформаций e_y (см. рис. VI.8) при смещениях единичного подвигания. Деформации e_x при сцеплении характеризуются значительной зоной сжимающих деформаций, концентрирующихся в глубине массива.

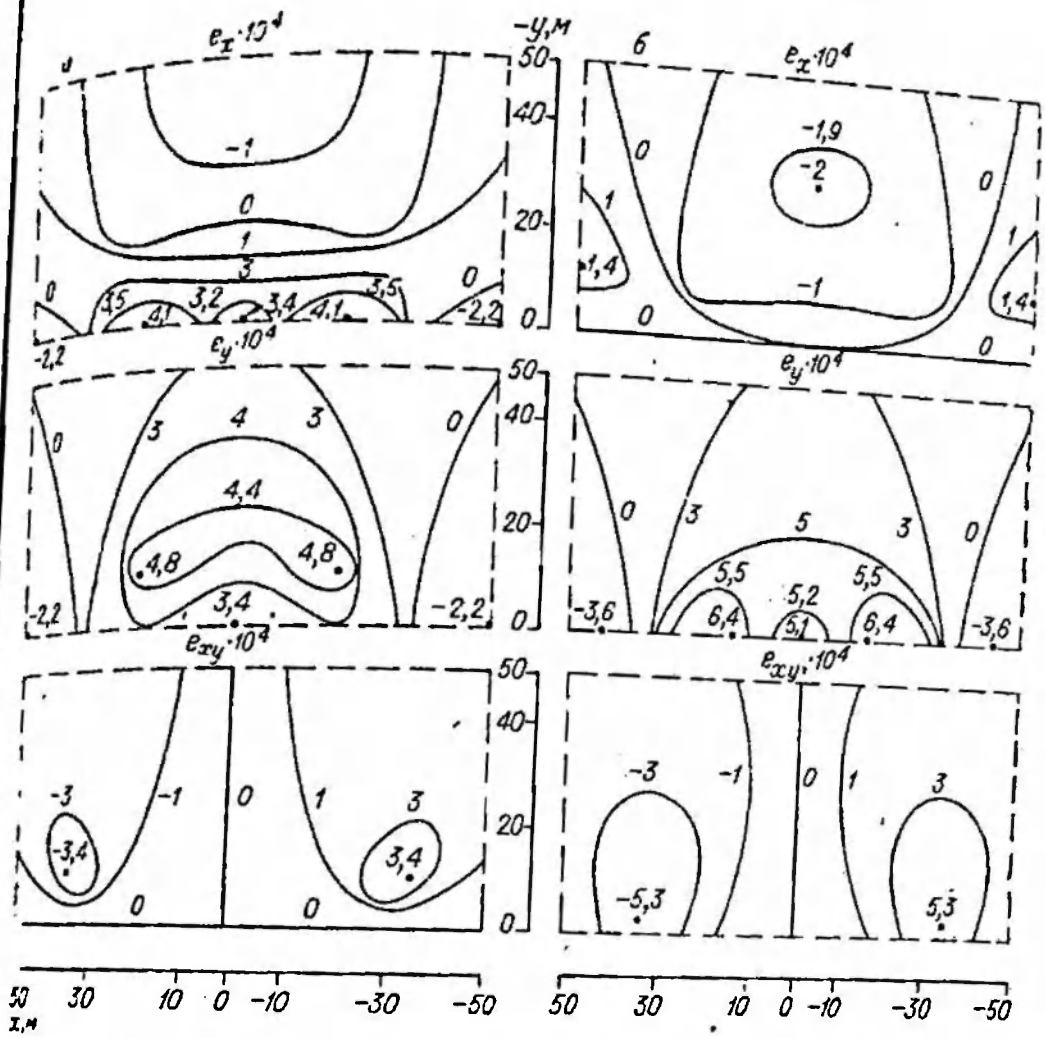


Рис. VI.16. Деформации массива пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

При больших пролетах выработанного пространства (протяженных участках плоского дна мульды смещений (VI.9)) смещения на одной из опор — неотработанной части угольного пласта — можно рассматривать как смещения консольно-закрепленной балки, под действием распределенной нагрузки (рис. VI.17). Натурные наблюдения смещений такого вида обычно интерполируются выражением

$$v = k \operatorname{arcctg} \frac{x+l}{b}, \qquad \text{(VI.10)}$$

где k, l, b — параметры, а метод интерполяции натурных наблюдений вытекает из поведения выражения (VI.10). При $x \to 0$ $v \to 0$; при $x \to -\infty$ $v \to k\pi$, т. е. к своему максимальному значению (v_{max}). При заданном значении v_{max} параметр k определяется как

$$k = v_{max}/\pi.$$

На рис. VI.17 максимальное значение смещений принято 50 мм, $k = 0{,}159 \cdot 10^{-1}$ м. При $x = -l$ $v = k\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} v_{max}$, а профильная линия

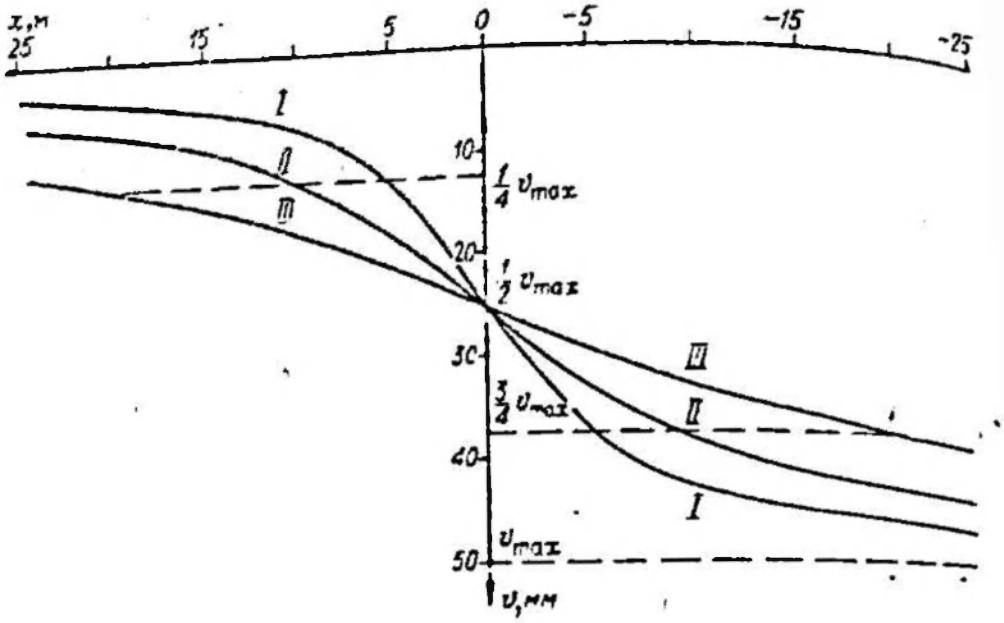


Рис. VI.17. Типовые профильные кривые нормальных к границе смещений консольного вида (I — $b=5$ м; II — $b=10$ м; III — $b=20$ м).

смещений имеет точку перегиба. Значит, параметр l характеризует расстояние от начала координат до точки координаты перегиба смещений (VI.10) (см. рис. VI.17 — точка перегиба помещается в начало координат, т. е. $l=0$). Кривизна профильной линии определяется параметром b таким, что при $x=-l+b$ $v=k\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}v_{max}$, а при $x=-l-b$ $v=k\frac{3\pi}{4}=\frac{3}{4}v_{max}$. Параметр b определяется как расстояние от координаты точки перегиба профильной (VI.10) до координаты, где смещения достигают 1/4 или 3/4 максимального значения. На рис. VI.17 приводятся профильные линии смещений, имеющие одинаковый максимум на бесконечности ($v_{max}=50$ мм), но различные кривизны.

Консольный вид смещений необходимо рассматривать как результат смещений мульдового вида (рис. VI.10) при увеличении пролетов выработанного пространства (расстояния $|l_1-l_2|=50$ м и параметре $b=10$ м. Напряженное состояние, сива пород при увеличении расстояния $|l_1-l_2|$ между точками перегиба смещений мульдового вида (VI.9). На рис. VI.14 показано напряженное состояние массива пород для мульдовых смещений (VI.9) с максимумом 50 мм при расстоянии $|l_1-l_2|=50$ м и параметре $b=10$ м. Напряженное состояние, соответствующее мульдовым смещениям (VI.9) с тем же максимумом и параметром b, но при расстоянии $|l_1-l_2|=500$ м представлено на рис. VI.18. На рис. VI.19 приводятся картины напряженного состояния для смещений консольного вида (VI.10) (с параметром $b=10$ м — профильная кривая II на рис. VI.17), как предельных мульдовых смещений (VI.9), которые не убывают для $x<0$, а стремятся к конечному значению ($v_{max}=50$ мм) при $x\to-\infty$.

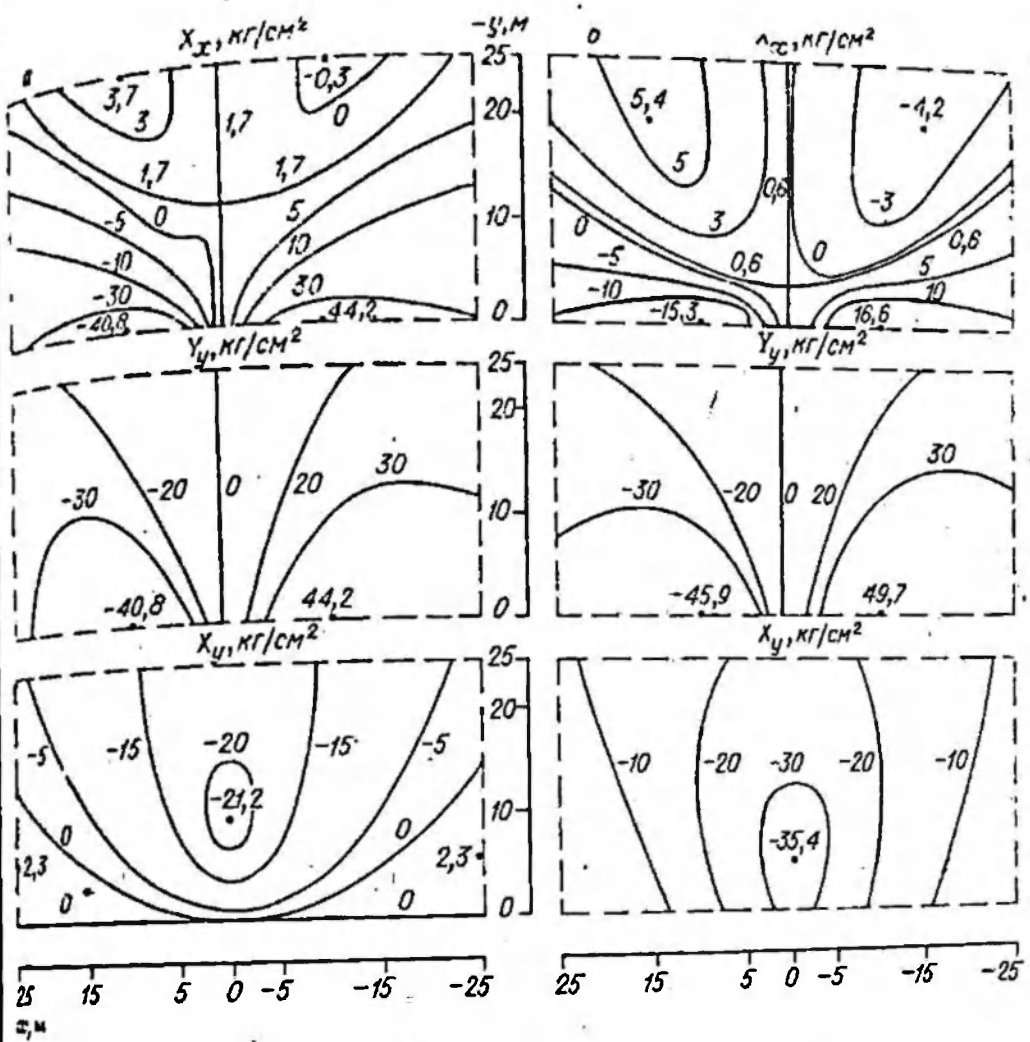


Рис. VI.18. Напряженное состояние пород при смещениях мульдового вида с пролетом $|l_1 - l_2| = 500$ м (*а* — при проскальзывании; *б* — при сцеплении на границе).

Изменения картин напряжений в области массива, расположенной над участком профильной линии, где происходит основной прирост смещений и находится точка перегиба, характеризуется переходом неравномерного состояния для мульдовых смещений на конечном пролете $|l_1 - l_2|$ в напряженное состояние, антисимметричное для нормальных напряжений X_x, Y_y и симметричное для касательных напряжений X_y относительно оси $(x = -l)$, проходящей через точку перегиба (точка перегиба мульдовой кривой с пролетом $|l_1 - l_2| = 50$ м (см. рис. VI.9) находится в $x = -37$ м, а профильной кривой с пролетом $|l_1 - l_2| = 500$ м и консольного вида (VI.10) (см. рис. VI.17) помещена в координату $x = 0$; поэтому сравниваются напряжения в области 50 м $\geqslant x \geqslant 0$, $0 \geqslant y \geqslant -25$ м на рис. VI.14 и области 25 м $\geqslant x \geqslant -25$ м, $0 \geqslant y \geqslant -25$ м на рис. VI.18, VI.19). Экстремальные значения нормальных напряжений X_x, Y_y на границе, различные по абсолютной величине для мульдовых кривых конечного пролета, стремятся к равным значениям при увеличении

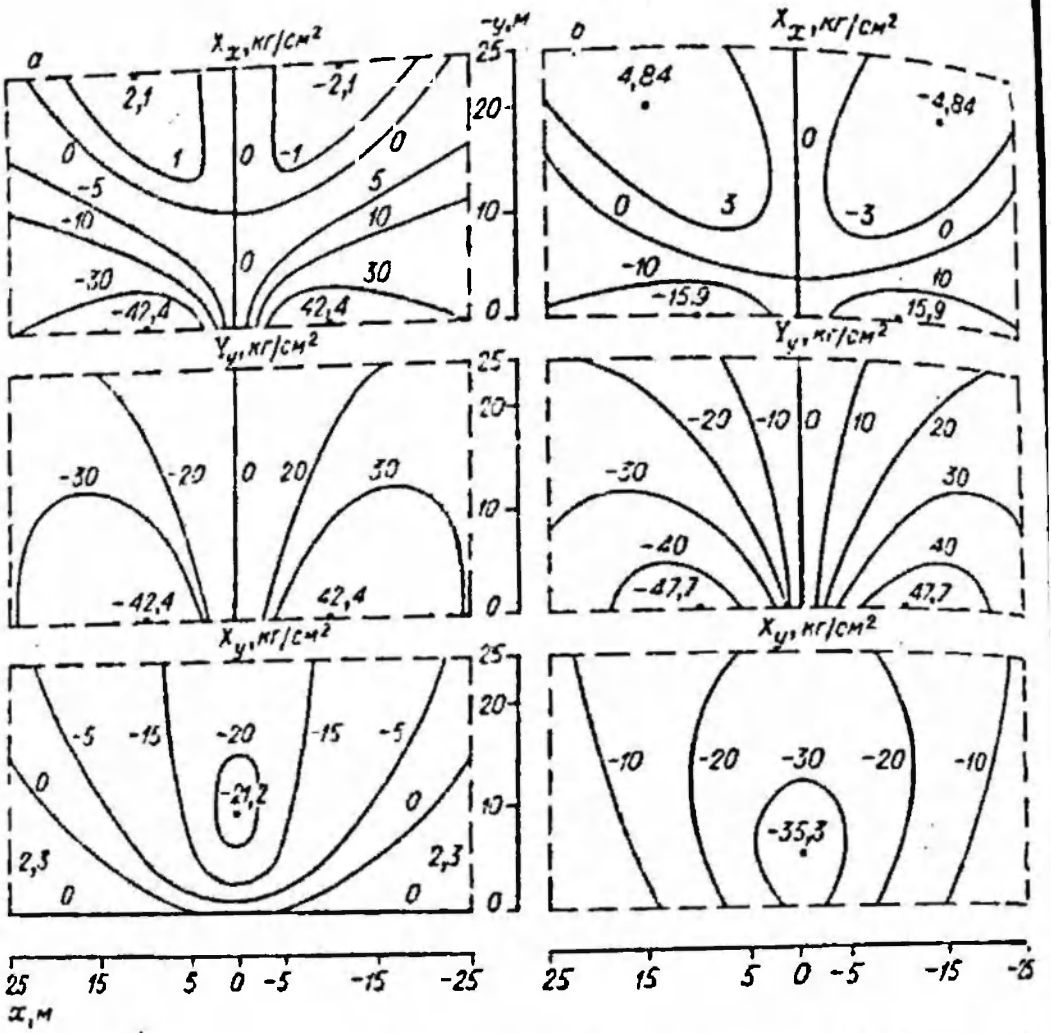


Рис. VI.19. Напряженное состояние пород при смещениях консольного вида (*а* — при проскальзывании, *б* — при сцеплении на границе).

пролета и для консольного вида смещений, а концентратор касательных напряжений X_y, расположенный над точкой перегиба в глубине массива, уменьшается по абсолютной величине.

Отметим следующее свойство состояний массива, полученное при расчетах. Напряженные состояния, соответствующие смещениям (VI.9) с одинаковыми значениями v_{max} и параметрами b_1, но при различных параметрах b_2 и для больших пролетов (расстояний $|l_1-l_2|$) практически одинаковы в областях массива, прилегающих к участкам профильной линии смещений в окрестности точки перегиба $x=-l_1$.

Таким образом, расчет напряженно-деформированного состояния массива пород экспериментально-аналитическим методом по натурным смещениям, подобным смещениям при изгибе консольной балки, можно производить, интерполируя смещения типовым выражением (VI.10) и используя решения (V.14), (V.25), (V.26).

Картины напряженного состояния массива пород, соответствующие профильной линии смещений консольного вида (VI.10) и гипотезам проскальзывания или сцепления по границе, пред-

ставлены на рис. VI.19. Параметры выражения (VI.10) приняты $k=0{,}159\cdot10^{-1}$ м, т. е. $v_{max}=50$ мм, $l=0$ (координата точки перегиба смещений — начало координат), $b=10$ м; а упругие характеристики пород $E=10^5$ кг/см^2, $\nu=0.25$.

Напряженное состояние массива характеризуется антисимметричными относительно оси $x=-l$, проходящей через точку перегиба, нормальными напряжениями X_y, Y_y и симметричными относительно той же оси касательными напряжениями X_y.

Нормальные напряжения X_x в массиве над нисходящей ветвью консоли ($x>0$) в пограничной зоне пригружаются, в глубине — разгружаются; над восходящей ветвью ($x<0$) наоборот.

Приграничные области пригрузки и разгрузки напряжений при сцеплении меньше, чем при проскальзывании. Нормальные напряжения Y_y в массиве над нисходящей ветвью сжимающие, над восходящей — растягивающие. Касательные напряжения X_y при проскальзывании имеют области противоположных направлений, при сцеплении — одного знака. Концентратор касательных напряжений X_y расположен над координатой перегиба в глубине массива.

Эпюры напряжений по границе представлены на рис. VI.20. Нормальные напряжения в точке перегиба профильной линии ($x=-l$) отсутствуют, экстремальные значения достигаются в точках $x=-l\pm b$ и равны [см. (V.14), (V.26)]

$$X_x=\pm\frac{E[1-(3+\varkappa)\varkappa_1]}{2(1+\nu)}\frac{k}{b};\quad Y_y=\frac{kE[-1+(\varkappa-1)\varkappa_1]}{2(1+\nu)b}. \qquad \text{(VI.11)}$$

Выражения (VI.11) аналогичны (VI.4) пропорциональностью экстремальных напряжений параметрам k и b. Влияние параметра b на напряженное состояние показано на рис. VI.21, где приводятся эпюры нормальных напряжений (X_x Y_y) на границе при проскальзывании для смещений консольного вида (VI.10), имеющих (см. рис. VI.17) равный максимум ($v_{max}=50$ мм), но различную кривизну. Большая кривизна профильной линии сме-

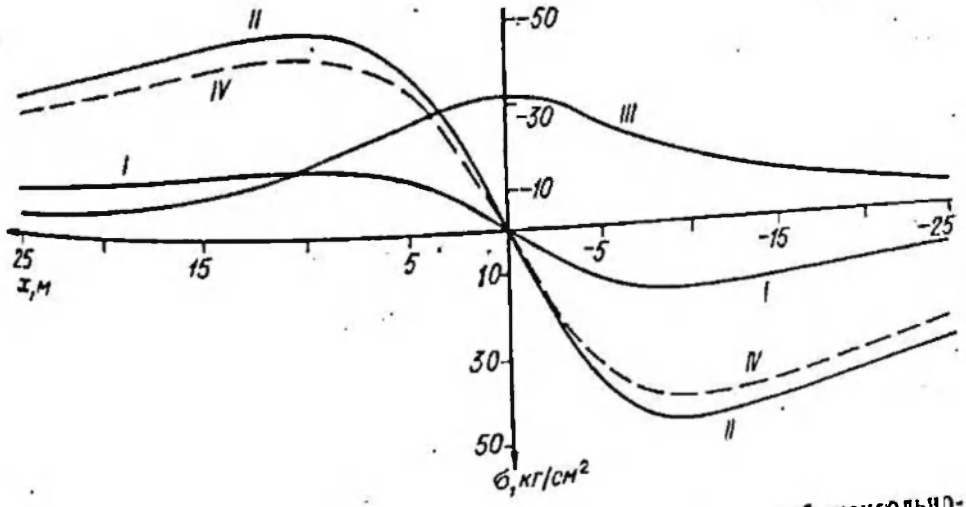


Рис. VI.20. Эпюры напряжений на границе для смещений консольного вида ($b=10$ м) при сцеплении — X_x(I), Y_y(II), X_y(III); при проскальзывании $X_x=Y_y$(IV).

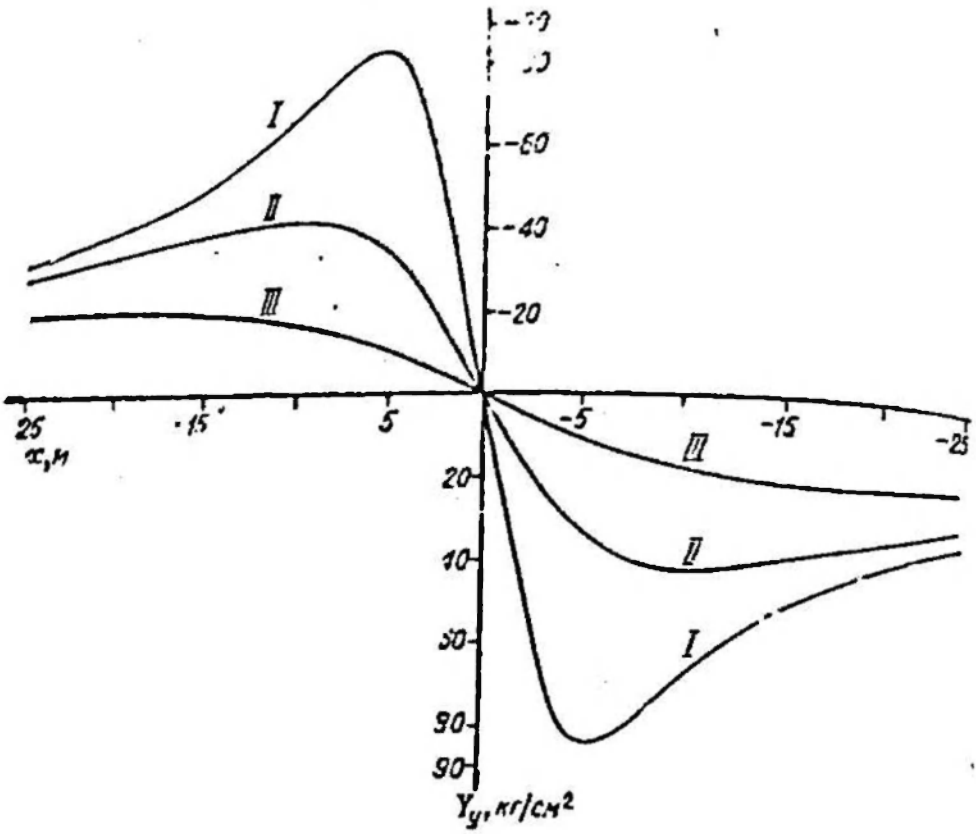


Рис. VI.21. Эпюры нормальных напряжений на границе при проскальзывании (I — $b=5$ м; II — $b=10$ м; III — $b=20$ м).

щений (меньшее значение параметра b) дает бо́льшие напряжения и вызывает более интенсивную аномалию напряжений в массиве.

Напряженное состояние массива пород для рассматриваемой профильной линии смещений консольного вида в главных нормальных (σ_1, σ_2) и максимальных касательных (τ_{max}) напряжениях показано на рис. VI.22. Экстремальные значения главных нормальных напряжений σ_1, σ_2 достигаются на границе ($y=0$); приграничные области массива над нисходящей ветвью консоли ($x>0$) пригружаются, над восходящей ветвью ($x<0$) разгружаются. Концентраторы главных нормальных напряжений при проскальзывании совпадают по величине и расположению ($x=-i\pm b$) с концентраторами прямоугольных нормальных напряжений; при сцеплении экстремальные значения максимальных главных напряжений σ_1 больше экстремальных значений нормальных напряжений Y_y, соответственно минимальные напряжения σ_2 меньше напряжений X_x и расположение концентраторов σ_1, σ_2 не совпадает с экстремумами X_x, Y_y (см. рис. VI.22 и VI.19). Картины максимальных касательных напряжений (τ_{max}) подобны напряжениям X_y и совпадают по значениям концентраторов и расположению в массиве над координатой точки перегиба.

Картины деформированного состояния массива (рис. VI.23) качественно подобны картинам прямоугольных напряжений.

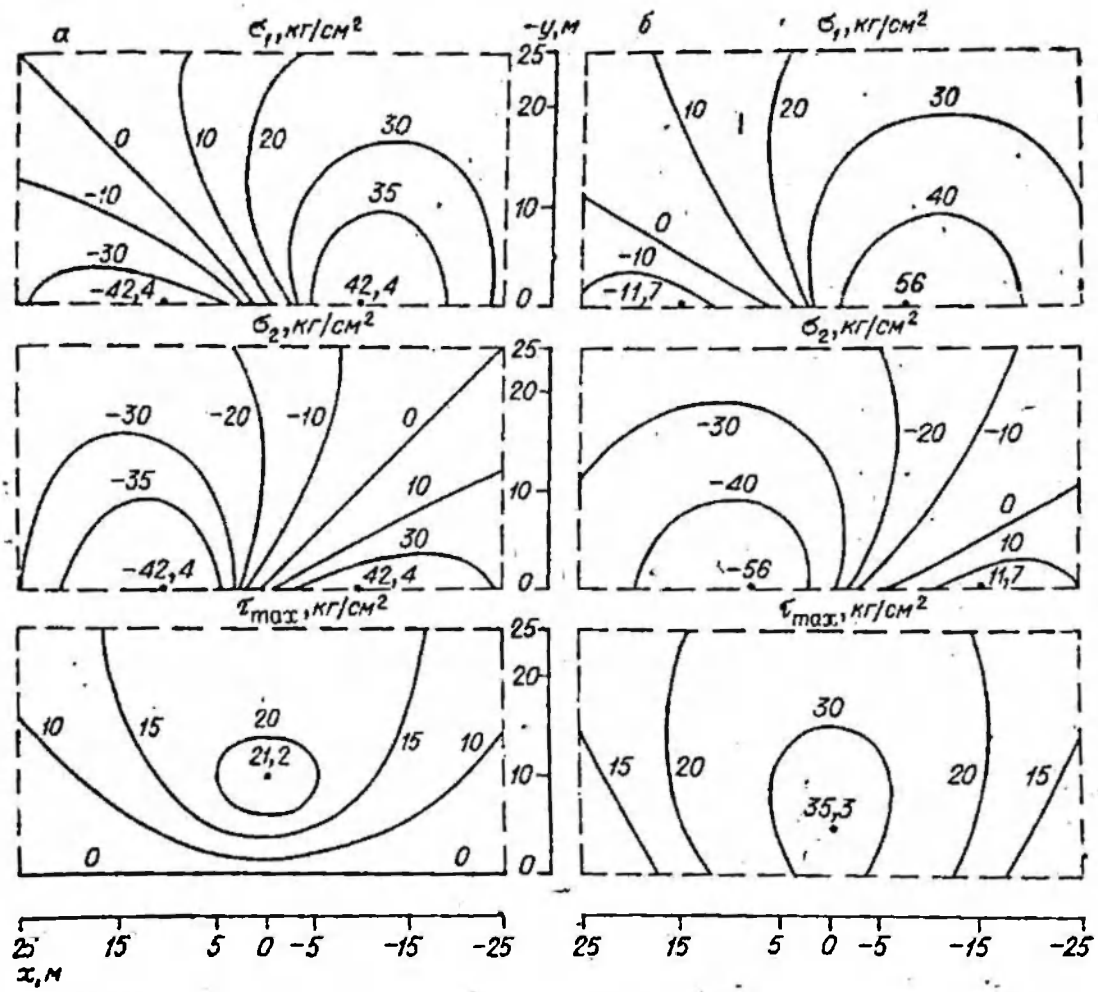


Рис. VI.22. Главные напряжения в массиве пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*).

Специфичность деформаций в массиве заключается в том, что концентрация нормальных деформаций e_y при проскальзывании происходит не на границе, а в глубине массива; при сцеплении деформации e_x на границе отсутствуют в силу граничного условия $u=0$.

Механическое состояние массива пород, соответствующее смещениям консольного вида (VI.10), характеризуется аномалией напряжений и деформаций в области, прилежащей к участкам, где смещения претерпевают наибольшие изменения; на бесконечности аномалия затухает.

Расчет сдвижений в массиве пород по смещениям на границе (VI.10) необходимо проводить, используя выражение (VI.8) или (VI.9) при больших расстояниях $|l_1-l_2|$. В этом случае перемещения массива в окрестности рассматриваемого участка смещений мульдового вида будут соответствовать смещениям консольного вида (VI.10) на этом участке. На рис. VI.24 приводятся картины смещений, полученные в окрестности точки перегиба $x=-l_1$ смещений мульдового вида (VI.9) с параметрами $k=0{,}159\cdot10^{-1}$ м, $l_1=0$, $l_2=500$ м, $b=10$ м. Наблюдается

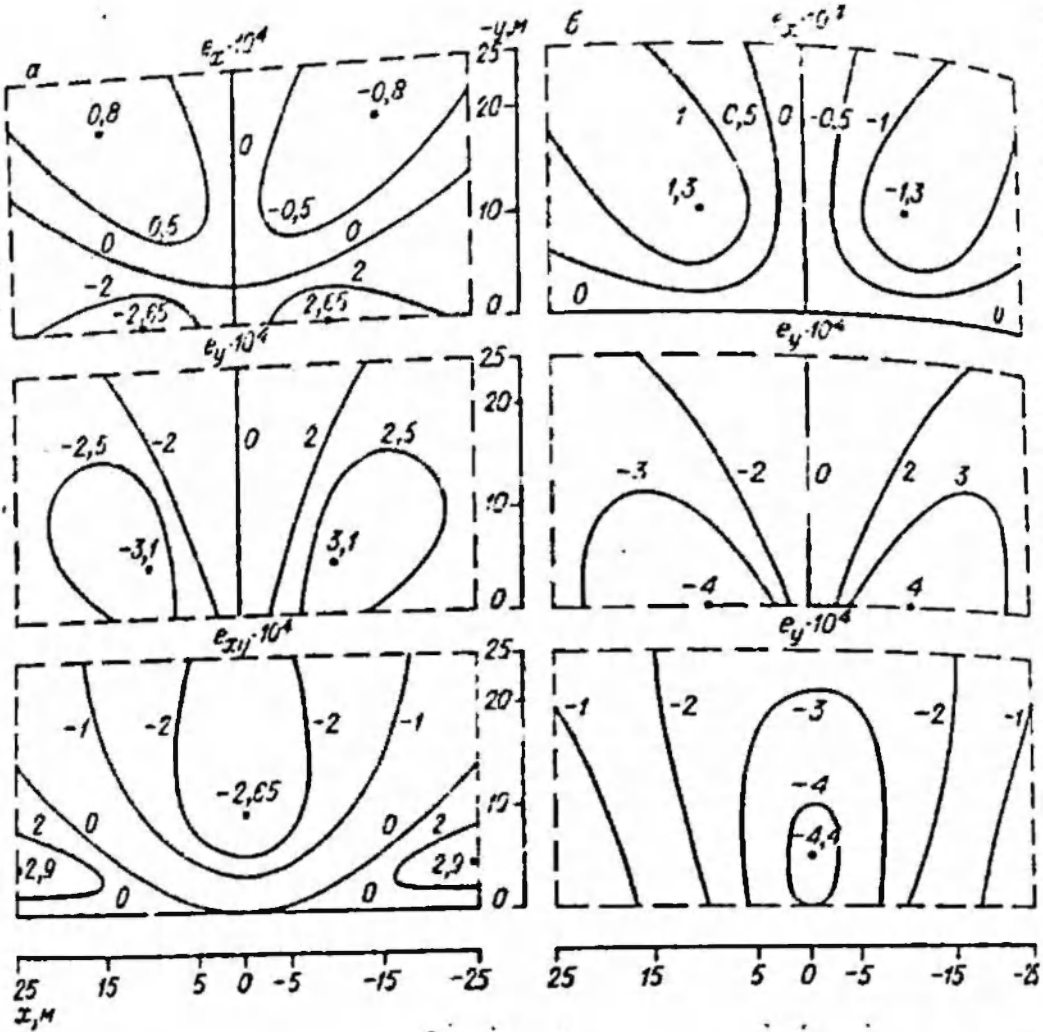


Рис. VI.23. Деформации массива пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

качественное различие картин компонент вектора сдвижений и для случая проскальзывания и сцепления по границе. При проскальзывании смещения u, а соответственно и вектора сдвижений в массиве, ориентированы в сторону положительного направления оси координат x, значения компонент u того же порядка, что и нормальных смещений v. При сцеплении смещения u на границе отсутствуют, а в глубине массива ориентированы, как и вектор сдвижений, в отрицательном направлении оси x; значения компонент u в этом случае на порядок меньше, чем смещения v в массиве. Факт подобного направления вектора сдвижений в приграничных зонах при проскальзывании прослеживается для всех рассмотренных типовых случаев смещений и отражает влияние гипотезы взаимодействия пород по границе.

Гипотезы взаимодействия, используемые в качестве второго граничного условия при экспериментально-аналитическом методе определения напряженно-деформированного состояния массива по натурным замерам смещений, мало влияют при расчетах смещений, деформаций и напряжений, нормальных к границе, а также максимальных главных нормальных напряжений. Зна-

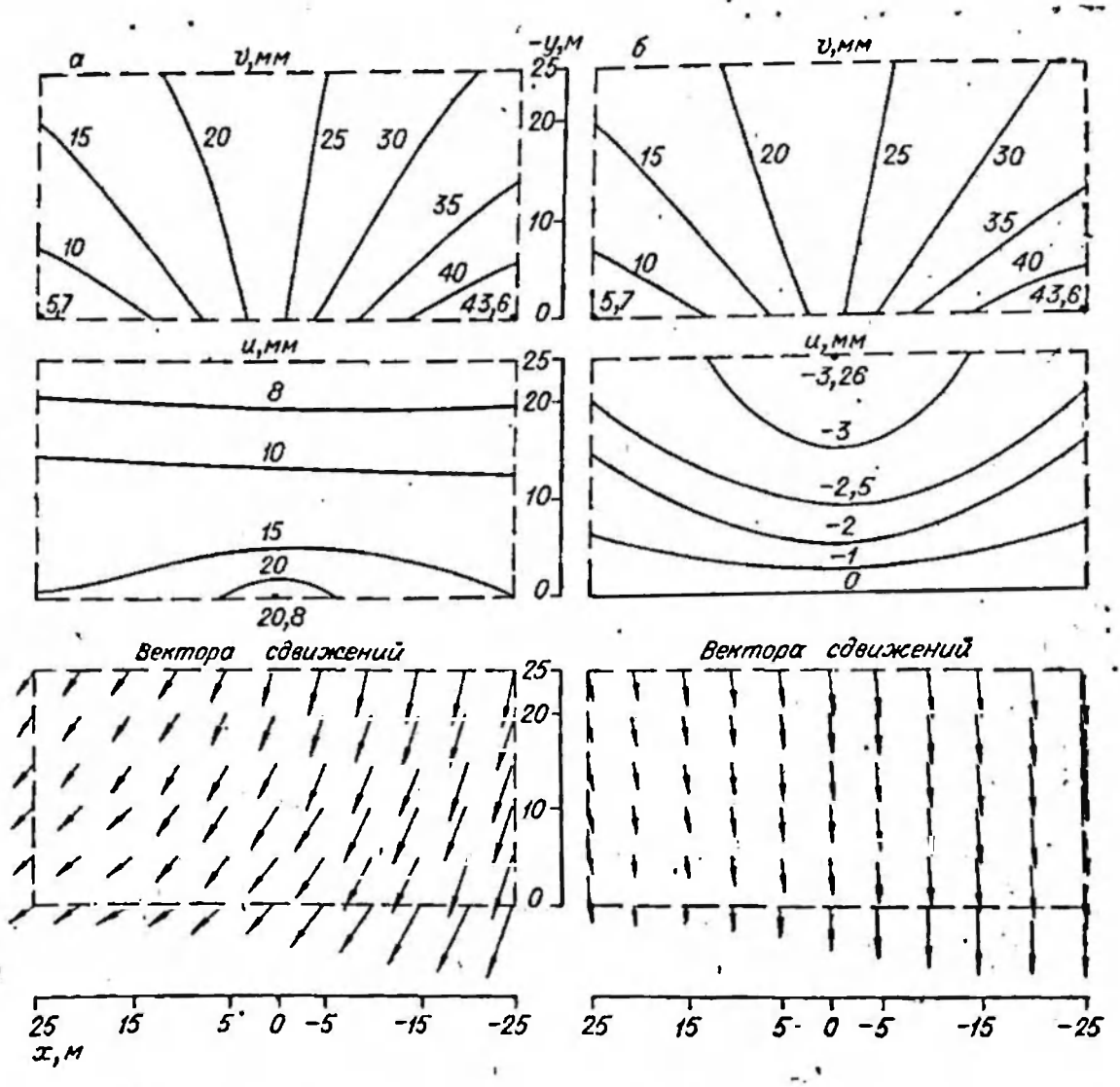


Рис. VI.24. Смещения в массиве пород при проскальзывании (*а*) и сцеплении (*б*) на границе.

чительные количественные изменения компонент нормальных напряжений и деформаций, параллельных границе, и минимальных главных напряжений, а, главное, качественные различия направлений касательных напряжений и компонент перемещений вдоль границы в приграничных зонах для рассматриваемых гипотез, указывают на необходимость экспериментальной проверки характера взаимодействия массива пород по границе.

Результаты натурных наблюдений смещений, представленные профильными линиями и используемые при экспериментально-аналитическом определении механического состояния массива пород, необходимо интерполировать аналитическими выражениями. Произвольную профильную линию смещений пород можно интерполировать с заданной степенью точности конечной суммой рассмотренных типовых выражений (VI.1), (VI.8), (VI.9), (VI.10), для которых получены простые формулы расчета напряженно-деформированного состояния.

62. Расчеты напряженного состояния пород кровли по натурным наблюдениям смещений

Проиллюстрируем применение экспериментально-аналитического метода исследования механического состояния вмещающих пород на конкретных примерах.

На шахте 5—6 в Прокопьевско-Киселевском районе Кузбасса при отработке пласта Горелый (мощность пласта 8 м, угол падения 64°, отработка второго этажа на глубине 160—240 м от земной поверхности) щитовым столбом проводились кратковременные наблюдения за нормальными к пласту смещениями кровли при взрывном подвигании забоя [22].

Наблюдательные станции, оборудованные измерительными стойками с индикаторами часового типа, располагались в ходовой печи в трех метрах от отрабатываемого щитового столба на уровне выработанного пространства в 16 м (станция 3), 2 м (станция 5) позади щита и 19 м (станция 7) впереди щитового забоя (рис. VI.25).

Нулевой отсчет смещений снимался перед взрыванием. Наблюдаемые непосредственно после взрывной отбойки угольного пласта ($t=0$) приращения смещений точек кровли распределились следующим образом (рис. VI.26): точка кровли вблизи забоя (станция 5) имела максимальные смещения, точки кровли на уровне выработанного пространства (станция 3) и нетронутого угольного пласта (станция 7) — меньшие смещения.

После мгновенных приращений, вызванных подвиганием забоя, в наблюдаемых точках кровли прослеживались временные приращения смещений (рис. VI.27).

Функция, интерполирующая смещения, принимается в виде (V.29):

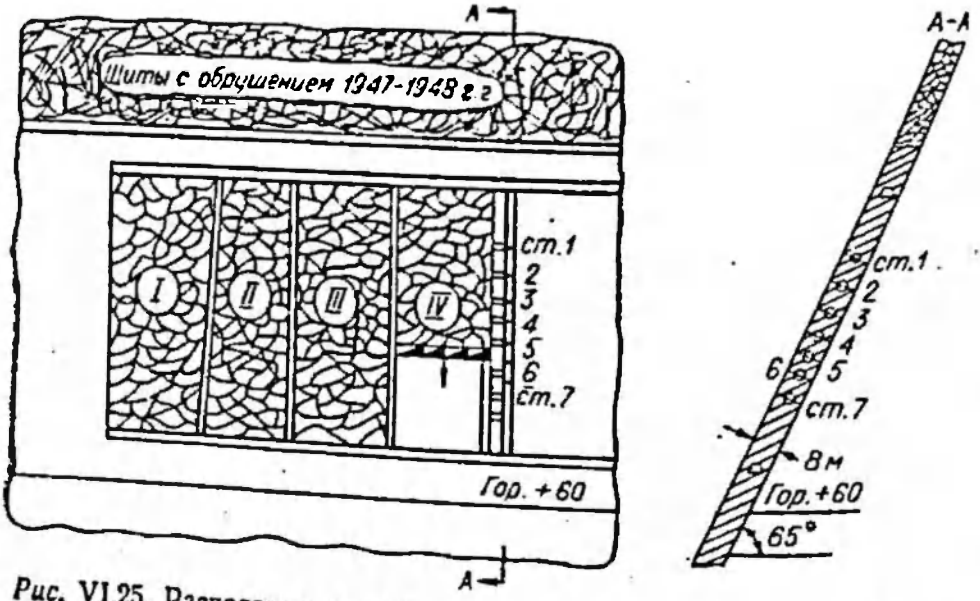


Рис. VI.25. Расположение наблюдательных станций при отработке пласта Горелого.

$$v = v(x, t) = \frac{a(t)}{1+\left(\frac{x+L}{m}\right)^2} =$$

$$= \frac{v_0\,[k_0-(k_0-1)\,e^{-bt}]}{1+\left(\frac{x+L}{m}\right)^2}, \qquad \text{(VI.12)}$$

где для рассматриваемых натурных смещений значения параметров следующие: максимальное мгновенное приращение смещений $v_0=0{,}115\times\times10^{-2}$ м; параметры, характеризующие временное изменение смещений, $k_0=1{,}143$, $b=0{,}804\cdot10^{-3}\cdot c^{-1}$; параметры, характеризующие расположение начала координат и кривизну профильной кривой, $L=0$ (начало координат расположено в точке с максимальными смещениями), $m=10{,}6$ м. Интерполирующие кривые нанесены на рис. VI.26, VI.27 штриховыми линиями.

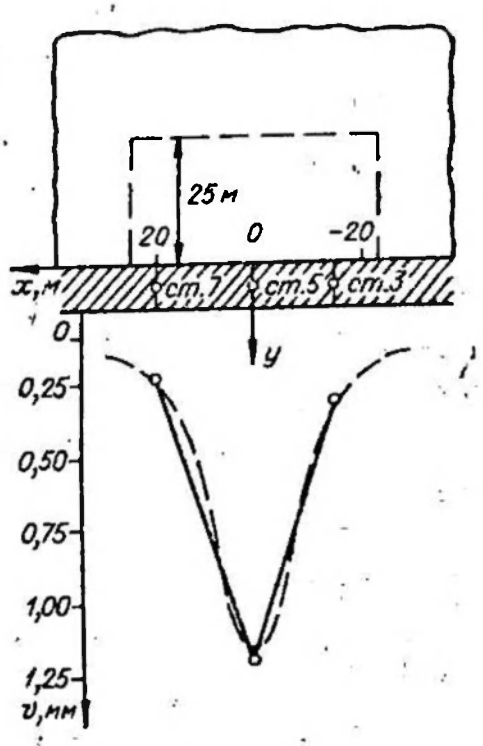


Рис. VI.26. Мгновенные приращения смещений кровли от взрывного подвигания забоя и область расчета напряжений.

Расчет приращений напряженно-деформированного состояния пород кровли по натурным смещениям проводится на основе задачи (V.I), (V.2) по формулам (V.14), (V.24) в предположении отсутствия трения между породами кровли и угольным пластом ($X_y=0$).

Для пород кровли пласта Горелого, представленных песчаником, принимались следующие значения механических характеристик: $E=1{,}625\cdot10^5$ кг/см^2, $\nu=0{,}25$; параметры ползучести песчаника α_1, α_2, β_1, β_2 из табл. III.2. Расчет приращений компонент вектора сдвижений и тензора напряжений приводится (см. рис. VI.26) в области пород кровли 25 м$\geqslant x\geqslant$—25 м, 0$\geqslant y\geqslant$—25 м и представлен на рис. VI.28, VI.29 в виде картин изолиний компонент смещений нормальных к пласту (v) и вдоль пласта (u), и прямоугольных компонент напряжений (X_x, Y_y, X_y).

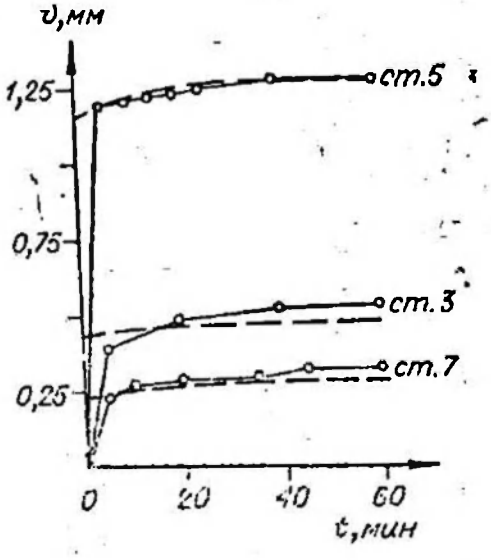


Рис. VI.27. Временные приращения смещений точек кровли после взрывного подвигания забоя.

Приращение напряженно-деформированного состояния (см. рис. VI.28, VI.29) соответствует упругому приращению смещений ((VI.12) при $t=0$)), вызванному однократным взрывным

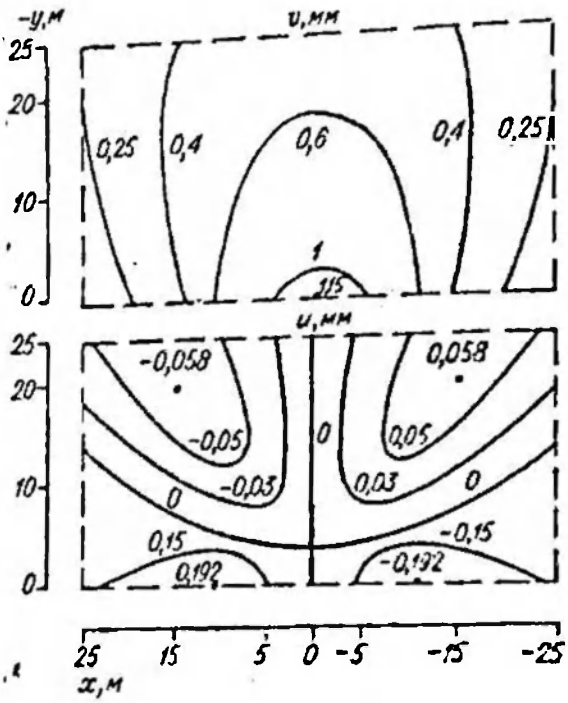
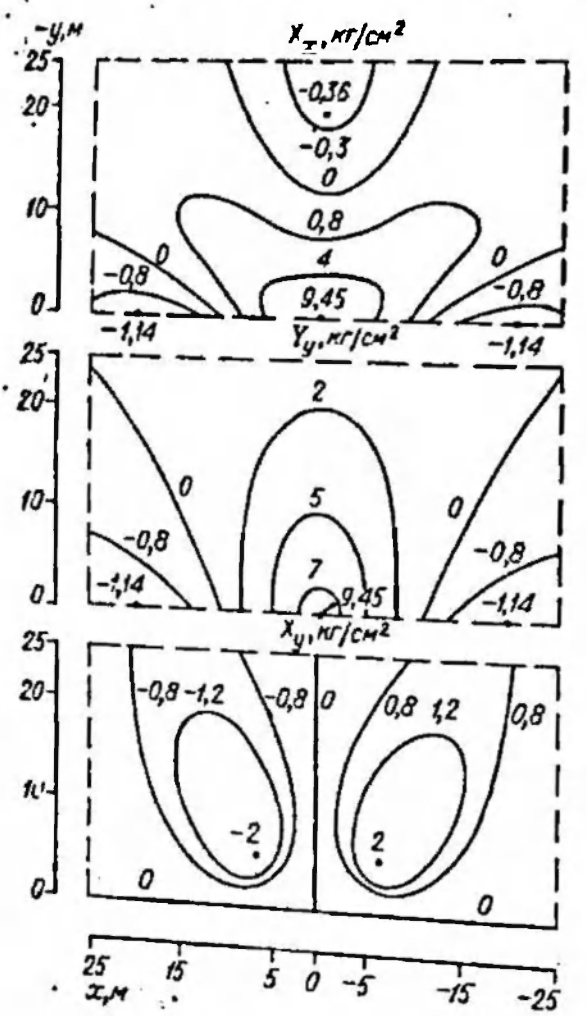


Рис. VI.28. Приращения компонент (u, v) вектора смещений в массиве после взрывного подвигания забоя.



подвиганием щитового забоя, т. е. может быть интерпретировано как упругое изменение механического состояния массива пород.

Экстремальные приращения компонент смещений v, u и нормальных напряжений X_x, Y_y происходят на границе с пластом ($y=0$), причем в точке, где нормальные к пласту смещения v максимальны (1,15 мкм), массив максимально разгружается ($X_x=Y_y=$ $=9{,}45$ кг/см²). Максимальная нагрузка ($X_xY_y=$ $=-1{,}14$ кг/см²) происходит в точках, расположенных от оси симметрии ($x=L=0$) в 18 м. Концентрация касательных напряжений ($X_y=$ $=\pm 2$ кг/см²) происходит в глубине массива.

Картины компонент вектора смещений и тензора напряжений подобны рассмотренным в предыдущем параграфе картинам смещений и напряжений (см. рис. VI5, *а*, VI.6, *а*) для типовой профильной кривой (VI.1).

Реологические свойства пород вызывают изменение упругого приращения напряженно-деформированного состояния, вызванного взрывным подвиганием забоя. Временное изменение состоя-

Рис. VI.29. Приращение напряженного состояния массива в результате подвигания забоя.

ния выражается в развитии деформаций ползучести (см. рис. VI.27) и релаксации напряжений в массиве.

Релаксация напряжений определяется из решения упруго-наследственной задачи (гл. II, § 4). Заменяя в решении (V.14) упругие постоянные временными операторами, получаем следующее выражение напряженного состояния ($\tilde{X}_x$, $\tilde{Y}_y$, $\tilde{X}_y$) кровли при однократном подвигании забоя с учетом упруго-наследственных свойств пород:

$$\tilde{X}_x=\overset{*}{R}_n\cdot X_x;\ \tilde{Y}_y=\overset{*}{R}_n\cdot Y_y;\ \tilde{X}_y=\overset{*}{R}_n\cdot X_y. \qquad \text{(VI.13)}$$

Здесь $\overset{*}{R}_n=\left(\frac{\overline{E}}{1-\nu^2}\right)^{-1}\frac{E}{1-\widetilde{\nu}^{(2)}}$ — символическая запись интегрального оператора, приведенного в (V.27) и действующего в решении (V.14, 24) на функции, зависящие от времени. Такой функцией является выражение $a(t)=v_0[k_0-(k_0-1)e^{-bt}]$ из граничного условия (VI.12). Интегральный оператор $\overset{*}{R}_n$ выражается (V.27) через операторы $\overset{*}{\Im}(-\beta_k)$, $\overset{*}{\Im}(\rho_s)$, $\overset{*}{\Im}(\gamma_n)$. Последние в рассматриваемом случае действуют на временную функцию следующим образом:

$$\overset{*}{\Im}(-\beta_k)\,a(\tau)=\int_0^t v_0[k_0-(k_0-1)\,e^{-b\tau}]\,e^{-\beta_k(t-\tau)}d\tau=$$

$$=v_0\left[\frac{k_0b-\beta_k}{r_s(b-\beta_k)}e^{-\beta_kt}+\frac{k_0-1}{b-\beta_k}e^{-bt}+\frac{k_0}{\beta_k}\right]; \qquad \text{(VI.14)}$$

операторы $\overset{*}{\Im}(\rho_s)$, $\overset{*}{\Im}(\gamma_n)$ действуют аналогично.

Так как в граничном условии (VI.12) время (t) и координата (x) разделены, а в решении (V.14), (V.24) не зависят друг от друга, действие интегрального оператора $\overset{*}{R}_n$ в упруго-наследственном решении (VI.13) выразится временным коэффициентом

$$\tilde{X}_x=R_n(t)X_x;\ \tilde{Y}_y=R_n(t)Y_y;$$

$$\tilde{X}_y=R_n(t)X_y,$$

где $R_n(t)=\overset{*}{R}_n\left[\frac{a(\tau)}{v_0}\right]=\left(\frac{Ev_0}{1-\nu^2}\right)^{-1}\frac{\widetilde{E}}{1-\widetilde{\nu}^{(2)}}[a(\tau)];$ (VI.15)

X_x, Y_y, X_y — решение упругой задачи (V.14), (V.24) для начального момента времени, когда в граничном условии (VI.12) $a(0)=v_0$.

Изменение напряжений во времени, характеризующееся коэффициентом релаксации $R_n(t)$, показано на рис. VI.30. Коэффициент $R_n(t)$ вычислен для песчаника с параметрами табл. III.2. Релаксация напряжений как следствие проявления упругонаследственных свойств пород приводит к падению напряжений по сравнению с начальными (упругими) на 10% за 12 ч,

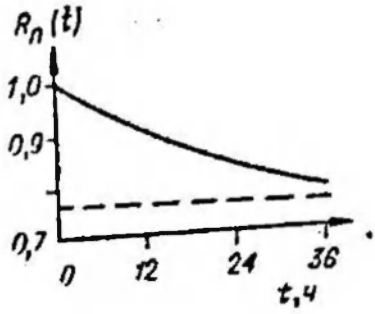


Рис. VI 30. Изменение коэффициента $R_n(t)$ во времени.

на 17% за 24 ч и на 24% после окончания упруго-наследственных процессов в массиве.

Таким образом, изменение напряженно-деформированного состояния пород при однократном подвигании забоя характеризуется мгновенными (упругими) приращениями смещений и напряжений, временными деформациями ползучести и релаксацией напряжений в массиве.

В процессе отработки пласта Горелого щитовым столбом (см. рис. VI.25) проводились долговременные наблюдения за смещениями пород кровли на семи наблюдательных станциях (рис. VI.31). Профильные линии смещений кровли оказались подобными смещениям при изгибе балки на двух опорах под действием распределенной нагрузки. Интерполяция профильных линий проводится выражением

$$v = v(x, t) = k(t)\operatorname{arcctg}\frac{(x + l_1)(x - l_2)}{m^2}, \qquad \text{(VI.16)}$$

где k, l_1, l_2, m — параметры интерполирующей функции.

Экстраполяция смещений функцией (VI.16) за участки наблюдения соответствует физической картине развития смещений, так, при $x \to \pm\infty$ $v \to 0$, т. е. смещения затухают вдали от очистного пространства.

Значения параметров интерполирующей функции (VI.16) смещений, полученных долговременными натурными наблюдениями при отработке пласта Горелого с кв. 42 четвертым щитовым столбом, оказались $k = k_0 t = 0{,}805 \cdot 10^{-3}$ м/сут·t, $l_1 = -l_2 = L_0 - l_0 t = 75$ м $- 0{,}665$ м/сут·t, $m = M_0 + m_0 t = 12$ м $+ 0{,}726$ м/сут·t. Интерполирующие профильные кривые на рис. VI.31 — штриховые линии для трех положений забоя (за 5 суток отработки $x_{заб} = -66$; за 15 суток — $x_{заб} = -45$; за 25 суток — $x_{заб} = 32$ м).

Задача определения изменения напряженно-деформированного состояния пород кровли по наблюдаемым смещениям (VI.16) принимается аналогичной по расчетной схеме и второму граничному условию (гипотеза проскальзывания без трения) задаче, рассмотренной в предыдущем примере.

Решения задачи для подобного вида смещений (VI.16) не проводилось, однако оно может быть построено подобно решениям (V.24), (V.25) для типовых профильных смещений

$$\Phi(z) = -\frac{2\mu k m^4}{\pi(1+\varkappa)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{[(t+l_1)^2(t-l_2)^2 + m^4](t-z)} =$$

$$= \frac{Ek}{4(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{z+\theta_1} - \frac{1}{z+\theta^2}\right), \qquad \text{(VI.17)}$$

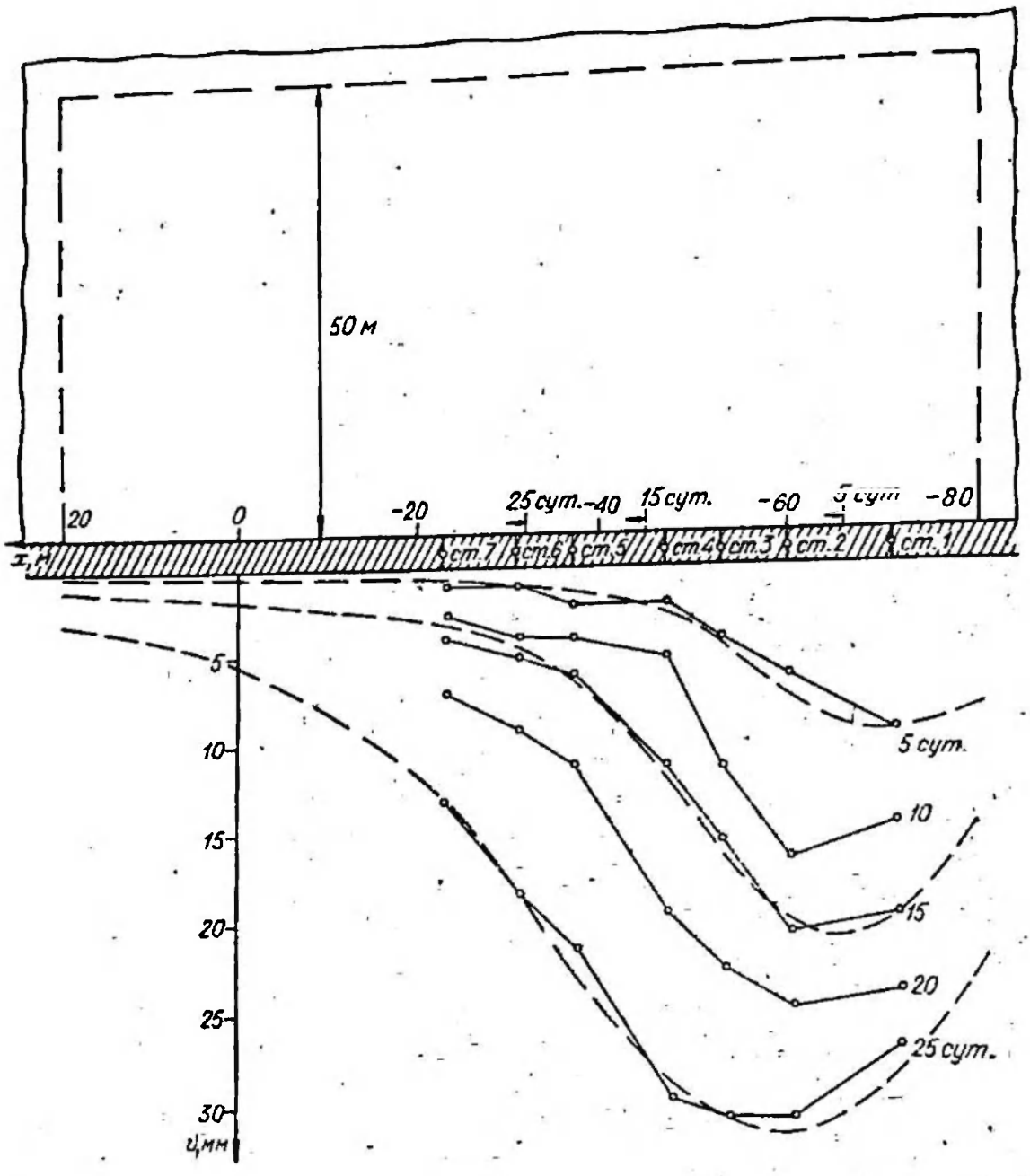


Рис. VI.31. Смещения точек кровли при отработке пласта Горелого и область расчета напряжений (начало координаты оси x помещено на уровне откаточного штрека).

где $$0_1 = L + \sqrt{a^2 - im};\ 0_2 = L + \sqrt{a^2 + im};$$
$$2L = l_1 - l_2;\quad 2a = l_1 + l_2.$$

Тогда выражения для напряжений в породах кровли из решения упругой задачи можно записать в виде:

$$X_x = \frac{Ek}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{A(A^2+C^2-2yC)}{(A^2+C^2)^2} - \frac{B(B^2+C^2-2yC)}{(B^2+C^2)^2}\right];$$
$$Y_y = \frac{Ek}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{A(A^2+C^2+2yC)}{(A^2+C^2)^2} - \frac{B(B^2+C^2+2yC)}{(B^2+C^2)^2}\right]; \quad \text{(VI.18)}$$

$$X_y = \frac{Ek}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{A^2-C^2}{(A^2+C^2)^2} - \frac{B^2-C^2}{(B^2+C^2)^2}\right]y,$$

где $A = x+L+\sqrt{R}\cos\varphi$; $B = x+L-\sqrt{R}\cos\varphi$;

$C = y-\sqrt{R}\sin\varphi$; $R = \sqrt{a^4+m^4}$; $2\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m^2}{a^2}$.

Картины напряжений, просчитанные по формулам (VI.18) на ЭВМ БЭСМ-4, для смещений (VI.16) за 5,15 и 25 суток наблюдений в области 20 м $\geqslant x \geqslant$ —80 м, $0 \geqslant y \geqslant$ —50 м, показанной схематично на рис. VI.31, приводятся на рис. VI.32, а, б, в. Упругие механические характеристики пород приняты прежние:

$$E = 1{,}625\cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu = 0{,}25.$$

Расчеты показали, что напряженное состояние подобно распределению напряжений (см. рис. VI.6, *а* и VI.14, *а*) при типовых смещениях мульдового вида (VI.9), т. е. нормальные напряжения (X_x, Y_y) симметричны, касательные напряжения (X_y) антисимметричны относительно оси симметрии $x = -L$. Отличие

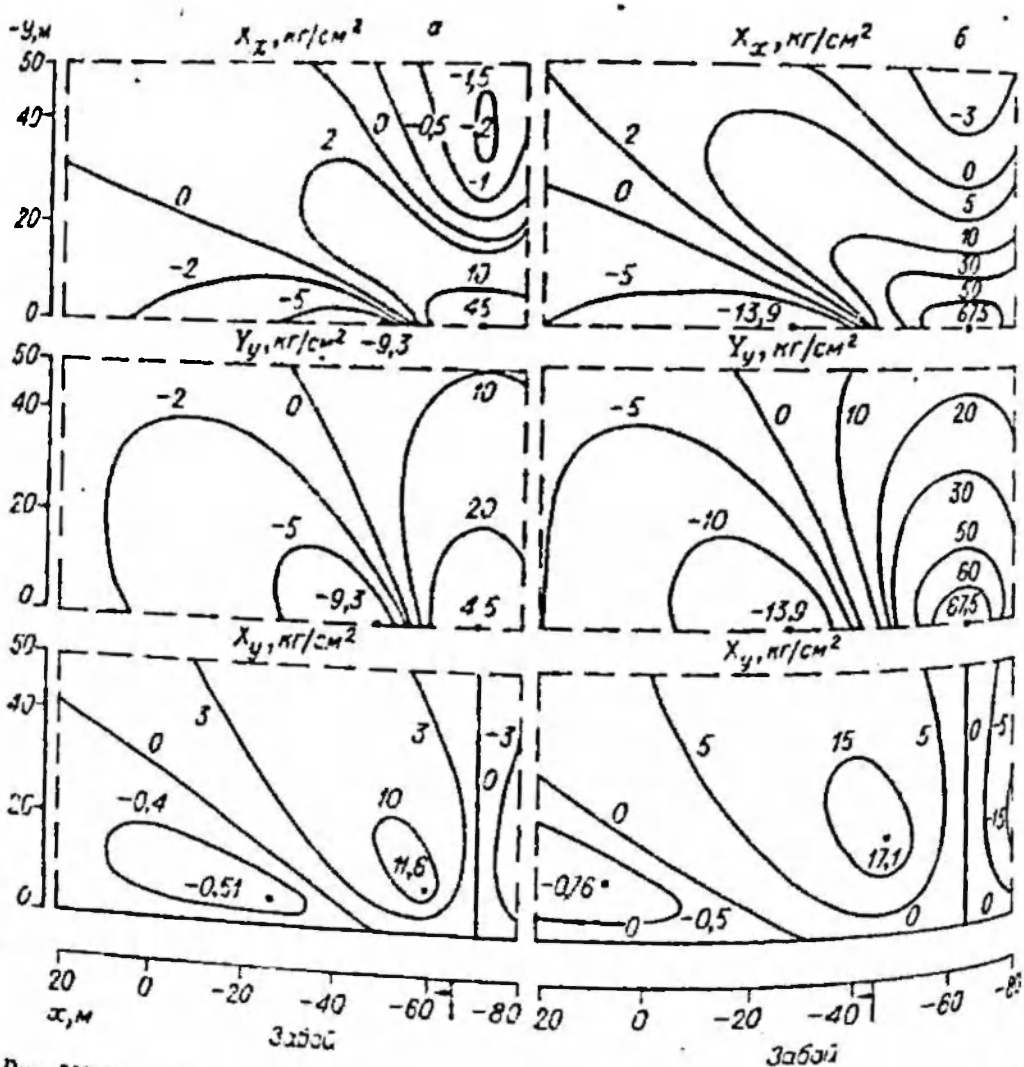
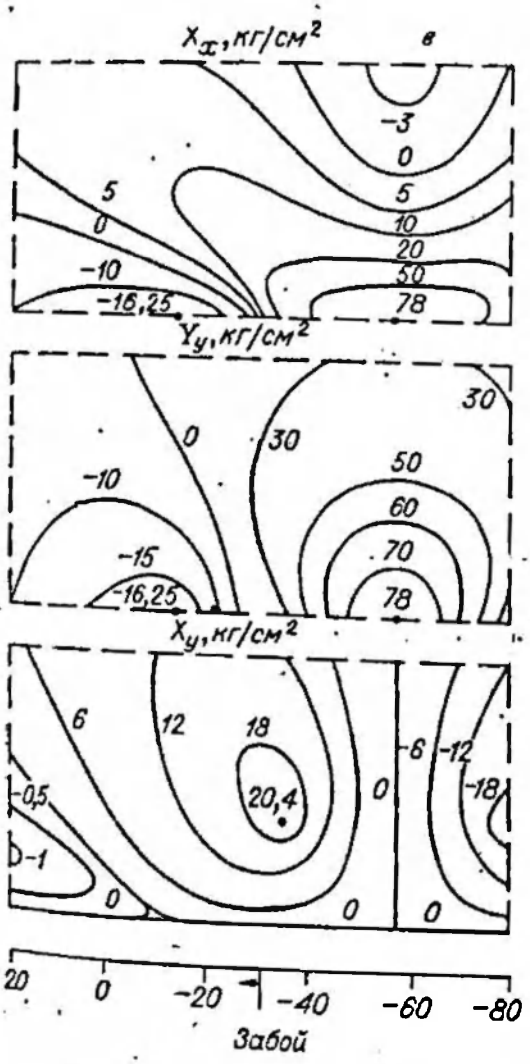


Рис. VI.32. Приращение напряженного состояния в массиве после 5(*а*), 15(*б*)

картины касательных напряжений от типовых-в наличии противоположно направленных напряжений X_y в массиве пород над неотработанным угольным пластом.

По мере отработки щитового столба массив пород по контакту с угольным пластом на уровне выработанного пространства по нормальным напряжениям разгружается, причем разгрузка с 45 за 5 суток отработки увеличивается до 67,5 за 15 суток и 78 кг/см² за 25 суток подвигания щита. На уровне неотработанной части пласта (впереди щитового забоя) происходит пригрузка напряженного состояния, меньшая по абсолютной величине, чем разгрузка, и изменяющаяся с —9,3 до — 13,9 и 16,25 кг/см² соответственно для 5,15 и 25 суток отработки. Положение точки с максимальным напряжением пригрузки по отношению к забою практически остается неизменным (16÷20 м); точка, где напряжения разгрузки максимальны, расположена на уровне выработанного пространства и незначительно перемещается вслед за забоем, существенно отставая от него.

Максимальная концентрация касательных напряжений X_y происходит в глубине массива на уровне забоя, возрастая по абсолютной величине (от 11,6 до 20,4 кг/см²) и удаляясь от границы при подвигании забоя. Аналогичное изменение напряжений X_y, противоположно направленных, происходит в глубине массива над вентиляционным штреком.



в 25 суток (*в*) отработки пласта.

Картины напряженного состояния (см. рис. VI.32, *а*, *б*, *в*) рассчитывались для профильных смещений при различном положении щитового забоя с учетом только упругих характеристик пород. Реологические свойства песчаника (см. табл. III.2) вызывают релаксацию напряжений, которую можно определить, решая упруго-наследственную задачу. Напряженное состояние с учетом упруго-наследственных свойств пород определяется (VI.13), однако интегральный оператор $\dot{R}_n$ действует в решении (VI.18) на функции, зависящие от времени. Это выражения, зависящие от параметров: $k=k_0t$, $l_1=-l_2=L_0-l_0t$, $m=M_0+m_0t$.

При действии интегрального оператора $\overset{*}{R}_n$ в рассматриваемом случае возникают трудности в вычислении интегралов вида

$$I = \int_0^t f(\tau)\, e^{p\tau} d\tau. \qquad \text{(VI.19)}$$

Этот интеграл решается приближенно, разложением $e^{p\tau}$ в ряд Тейлора с остаточным членом I_n в форме Лагранжа $I_n = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} \tau^{n+1}$, $0 \leqslant \xi \leqslant t$. При времени подвигания забоя $t = 10$ сут $\approx 10^6$ с и $p = 10^{-6} \cdot c^{-1}$, уже при $n = 4$ значение $I_n < 0{,}03$. Тогда

$$\int_0^t f(\tau) \sum_{j=0}^{L} \frac{p_j}{j!} \tau^j d\tau \leqslant \int_0^t f(\tau)\, e^{p\tau} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t f(\tau) \left[\sum_{j=0}^{4} \frac{p^j}{j!} \tau^j + I_4 \right] d\tau,$$

т. е. ошибка приближенного вычисления I не превысит 3% точного его значения.

Принимая первоначальное напряженное состояние массива гидростатическим ($\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = -\gamma H = -50$ кг/см^2) и накладывая его на поля дополнительных нормальных напряжений (см. рис. VI.32, *а*, *б*, *в*), получим напряженное состояние кровли ($\sigma_x = \sigma_x^0 + X_x$, $\sigma_y = \sigma_y^0 + Y_y$, $\tau_{xy} = X_y$) с учетом только упругих свойств пород. Оно характеризуется в частности опорным давлением

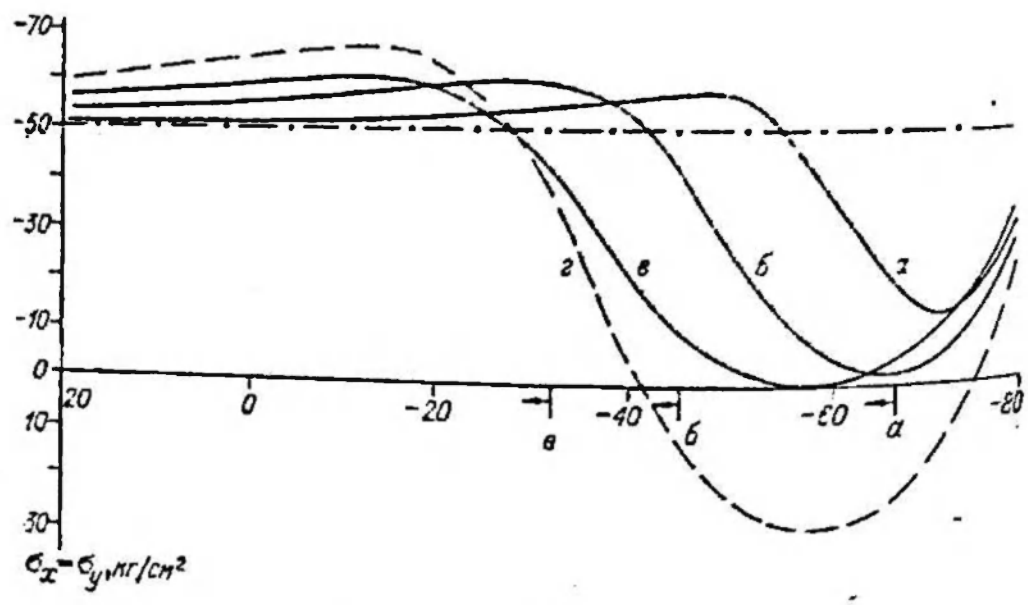


Рис. VI.33. Эпюры опорного давления с учетом упруго-наследственных свойств пород после 5(*а*), 15(*б*) и 25 суток (*в*) отработки пласта; *г* — эпюра с учетом упругих свойств после 25 суток отработки.

с максимумом в —59,3, —63,9, —66,25 кг/см² и максимальными разгрузками в —5, 17,5 и 28 кг/см² соответственно при 5,15 и 25 сутках отработки (рис. VI.33, *г*). С учетом релаксации напряжений за счет реологических свойств пород, приводящей к уменьшению абсолютных значений напряжений на 18, 29 и 36% соответственно для 5, 15 и 25 суток отработки, максимумы опорного давления (см. рис. VI.33, *а*, *б*, *в*) практически остаются неизменными в процессе отработки (—57,6, —59, —60,5 кг/см²), но происходит существенная разгрузка массива (минимальные напряжения —13, —2 и 0 кг/см²).

В рассматриваемом сечении массива пород кровли опорное давление на угольный пласт характеризуется пригрузкой первоначального давления, впереди щитового забоя в 11, 3 и 4 м соответственно за 5, 15 и 25 суток отработки, максимальная пригрузка в 16—18 м впереди щита остается практически неизменной (1, $\hat{2}\gamma\hat{H}$) в процессе отработки. Разгрузка происходит на уровне выработанного пространства, причем максимальные давления на пласт получены в 5, 20 и 26 м за щитом.

Использование при расчетах в качестве граничного условия гипотезы сцепления пород с пластом проиллюстрируем на примере определения напряженного состояния пород кровли при отработке пласта Проводник IV Внутреннего (II этаж,

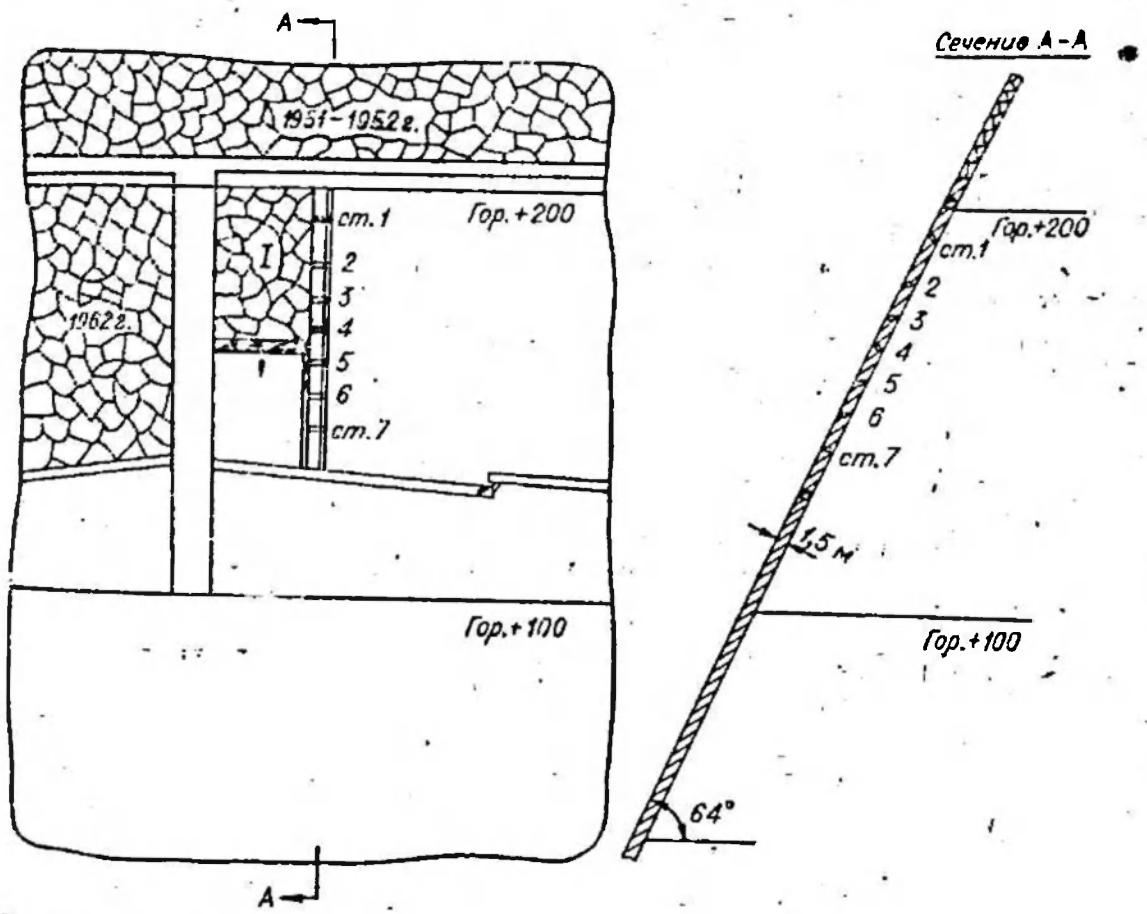


Рис. VI.34. Расположение наблюдательных станций при отработке пласта Проводник IV Внутреннего.

глубина от поверхности 200 м, мощность 1,5 м, угол падения 64°) (рис. VI.34).

Натурные наблюдения за смещениями кровли, проводимые в ходовой печи, расположенный в трех метрах от отрабатываемого щитового столба, показали, что характер смещений кровли подобен смещениям при изгибе балки, консольно-закрепленной над пластом (рис. VI.35) и могут быть интерполированы выражением

$$v = v(x, t) = k(t)\operatorname{arcctg}\frac{x + l(t)}{b}. \qquad \text{(VI.20)}$$

Значения параметров, определенные на основании 30 суток наблюдений (40 метров подвигания щита), оказались $k(t) =$

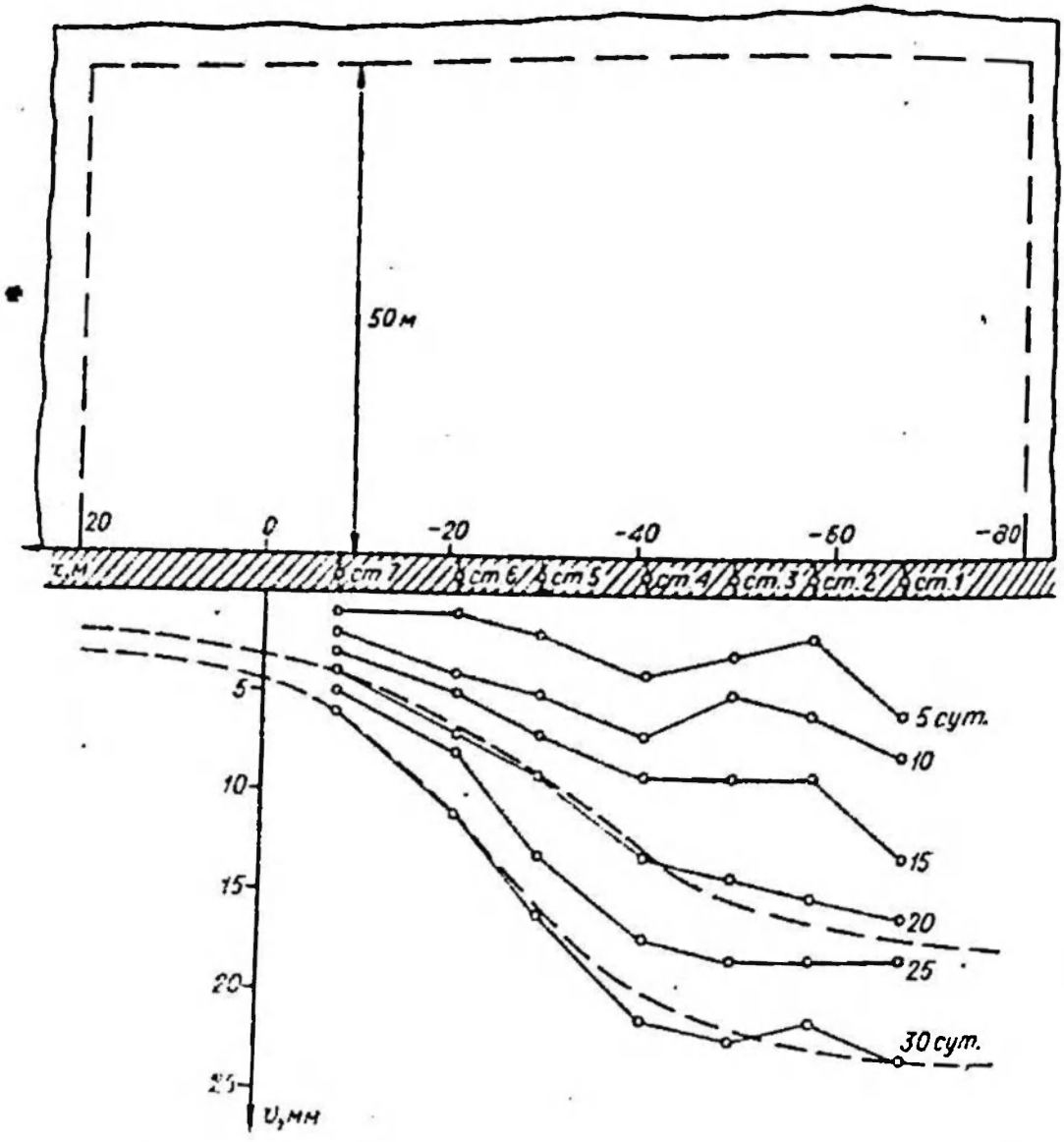


Рис. VI.35. Смещения точек кровли при отработке пласта Проводник IV Внутреннего и область расчета напряжений.

$=0.27\cdot10^{-3}$ м/сут$\cdot t$; $l=44-0.67$ м/сут$\cdot t$; $b=15$ м. Интерполирующие кривые для натурных наблюдений за 20 и 30 суток отработки представлены на рис. VI.37 штриховыми линиями.

Расчет напряжений для подобного вида смещений (VI.20) и гипотезы жесткого сцепления пород с пластом приводится по формулам (V.14), (V.25) в области 20 м$\geqslant x\geqslant-80$ м, $0\geqslant y\geqslant-50$ м (см. рис. VI.35) при упругих характеристиках $E=2\cdot10^5$ кг/см^2, $\nu=0{,}25$.

Приращение напряженного состояния в породах кровли (рис. VI.36) происходит подобно рассмотренному для типовых смещений (VI.10) консольного вида (см. рис. VI.19, *б*). Максимальная разгрузка и пригрузка нормальных напряжений в массиве достигает 10,8 кг/см^2 для X_x и 33 кг/см^2 для Y_y; максимальное изменение касательных напряжений (X_y) 24 кг/см^2. Картина напряжений (см. рис. VI.36) получена по смещениям за 30 суток отработки столба с учетом только упругих характеристик пород кровли.

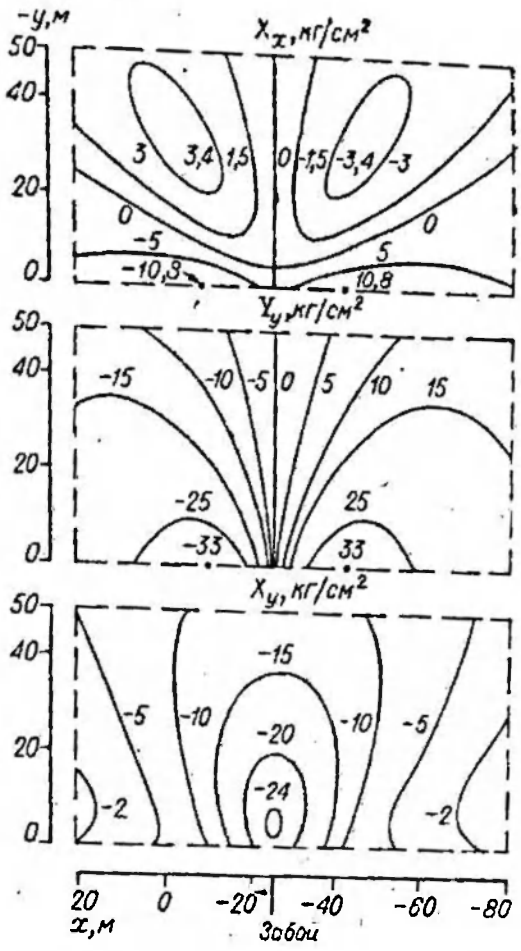


Рис. VI.36. Приращение напряженного состояния в массиве после 30 суток отработки пласта.

Реологические свойства пород, учитываемые решением упруго-наследственной задачи, вызывают релаксацию напряжений. Интегральные временные операторы этого решения (V.28) будут действовать на функции в упругом решении (V.14), (V.25), зависящие от времени, т. е. включающие временные параметры $k(t)$, $l(t)$ из (VI.20).

Выражения операторов (VI.28) имеют громоздкий вид, усложняющий расчеты, поэтому ориентировочно влияние наследственных свойств можно рассчитать, приняв (II.16), т. е. независимость коэффициента Пуассона от времени. В этом случае операторы (V.28) действуют на функции следующим образом:

$$\frac{\widetilde{E}}{(1+\nu)(3-4\nu)}f(t)=\frac{E}{(1+\nu)(3-4\nu)}\times$$

$$\times\left\{f(t)-\int_0^t\left[\alpha_1e^{-\beta_1(t-\tau)}+\alpha_2e^{-\beta_2(t-\tau)}\right]f(\tau)\,d\tau\right\},\qquad\text{(VI.21)}$$

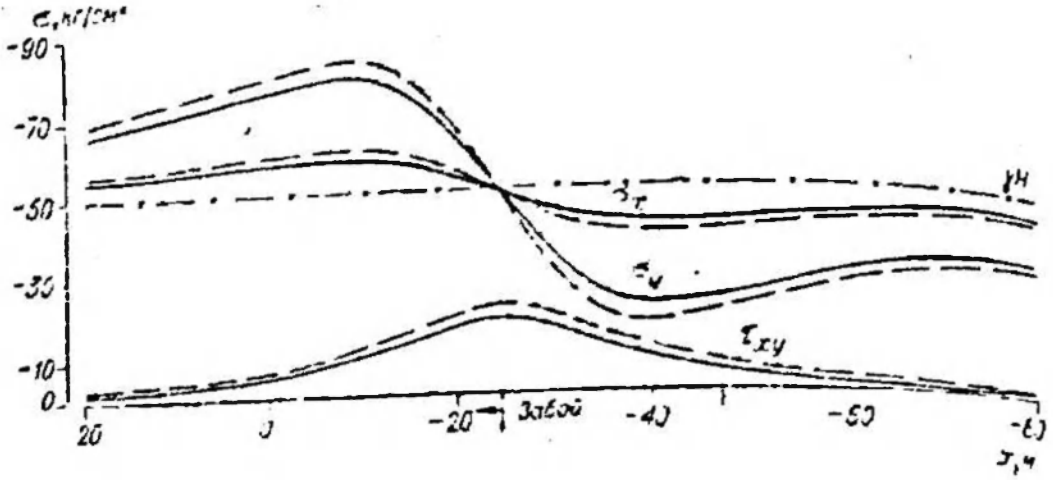


Рис. VI 37. Эпюры напряжений на границе с учетом упругих (штриховая) и упруго-наследственных (сплошная) свойств пород после 30 суток отработки.

где α_1, α_2, β_1, β_2 приводятся в табл. III.2; вычисление получаемых интегралов проводится приближенным методом, описанным для интеграла (VI.19).

Эпюры полных напряжений на контакте пород с пластом в предположении гидростатического первоначального напряженного состояния ($\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = -\gamma H = -50$ кг/см²) показаны на рис. VI.37. Расчеты с использованием только упругих свойств пород (показаны штриховыми линиями) дают при 30 сутках отработки столба завышенные на 13,6% нормальные и касательные напряжения по сравнению с напряжениями (сплошные линии), вычисленными с учетом реологических свойств. В породах кровли рассматриваемого случая происходит максимальная пригрузка опорного давления на пласт до 1,57 γH и разгрузка до 0,43 γH. Нормальные напряжения вдоль пласта изменяются незначительно (на 0,18 γH); возникающие по контакту с пластом касательные напряжения максимальны (18 кг/см²) на уровне щитового забоя. Максимум пригрузки нормальных напряжений расположен в 12 м впереди щитового забоя, максимум разгрузки — в 18 м за щитом на уровне выработанного пространства.

§ 3. Напряженное состояние угольного пласта при его отработке

Определение напряженного состояния угольного пласта проводится на основе решения первой основной задачи для полуполосы. Граничными нагрузками служат эпюры, полученные из аналитических решений задач о напряженном состоянии боковых пород в окрестности очистной выработки и эксперимен-

тальных исследований напряженного состояния массива на фотоупругих моделях.

Известны различные виды эпюр опорного давления, полученные с учетом и без учета упругих свойств угольного пласта [59, 63]. Эпюры опорного давления, определенные аналитическими решениями, натурными замерами и расчетами экспериментально-аналитическим методом, различаются двух видов: характеризуемые только ниспадающей ветвью (*а*); имеющие также восходящую ветвь (*б*).

Проведем расчеты напряженного состояния угольного пласта для эпюр этих видов.

В работах [63, 64], исходя из предположения однородного изотропного горного массива, была аналитически определена эпюра опорного давления на угольный пласт в виде

$$\sigma_y = f(x, x_0) + \gamma H, \qquad \text{(VI.22)}$$

где $f(x, x_0) = \dfrac{\gamma H x_0}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x + x_0})}$; $x_0 = \dfrac{Eh}{\pi \gamma H (1 - \nu^2)}$;

γ — объемный вес пород; H — глубина разработки; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона боковых пород; h — половина мощности пласта, x — координата вдоль пласта с началом на груди забоя.

Решения [63], несмотря на идеализацию среды и расчетной схемы, качественно верно моделируют аномалию напряжений вокруг очистной выработки и послужили основой математического описания механического состояния боковых пород.

Используя (VI.22), определим напряженное состояние угольного пласта разработанным методом расчета (гл. IV, гл. V, § 2). Пусть на верхней и нижней кромках угольного пласта действуют симметричные относительно координаты y нормальные напряжения σ_y (VI.22), вычисленные для параметров: $E = 1{,}5 \cdot 10^5$ кг/см^2, $\nu = 0{,}25$, $h = 1$ м, $\gamma H = 100$ кг/см^2, а касательные напряжения отсутствуют; на торце $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ (свободная поверхность).

Ниже приведены коэффициенты концентрации опорного давления по С. Г. Михлину [63]:

x/h	1	2	3	4	5	6
$\sigma_y/\gamma H$	32,5	22	18,5	16	14	13

Из уравнения (VI.22) следует, что в точке $x = 0$ напряжение σ_y обращается в бесконечность. Для расчетов в этой точке концентратор напряжений $\sigma_y/\gamma H$ принимается равным 100, т. е. в 3 раза большим, чем в следующей точке $x = h$. Качественно такая эпюра отражает решение (VI.22).

Напряженное состояние угольного пласта под действием эпюры опорного давления, определяемой решением (VI.22), рассчитывалось согласно § 2 гл. V по формулам (V.35), (V.36) в области $0 \leqslant x \leqslant 6h$, $|y| \leqslant h$ и приводится на рис. VI.38 в виде эпюры опорного давления $\sigma_y/\gamma H$ на верхней кромке пласта (по-

лученная из расчетов — сплошная, по формуле (VI.22) — штриховая) и изолиний коэффициентов концентрации напряжений $\sigma_y/\gamma H$, $\sigma_x/\gamma H$, $\tau_{max}/\gamma H$.

Напряжения σ_y, σ_x симметричны относительно оси $y=0$. Эпюра нормальных напряжений на кромках пласта достаточно хорошо совпадает с эпюрой (VI.22). Концентратор напряжений $\sigma_y=100$ наблюдается в угловых точках торца и понижается до 84 в точке $x=y=0$. Изолинии $\sigma_y/\gamma H$ в призабойной зоне выпуклы в пласт (до $x\sim1.5$) и в сторону забоя (для $x>1,5$). Поле изолиний $\sigma_y/\gamma H$ свидетельствует об однородности напряженного состояния относительно напряжений σ_y.

Распределение концентраций $\tau_{max}/\gamma H$ в пласте фактически повторяет картину напряжений $\sigma_y/\gamma H$, так как напряжения $\sigma_x/\gamma H$ и $\tau_{xy}/\gamma H$ на порядок ниже напряжений $\sigma_y/\gamma H$, поэтому значение $\tau_{max}/\gamma H$ во всем поле оказывается близким к $0,5\ \sigma_y/\gamma H$. Следует отметить, что τ_{max} достигает максимальных значений на

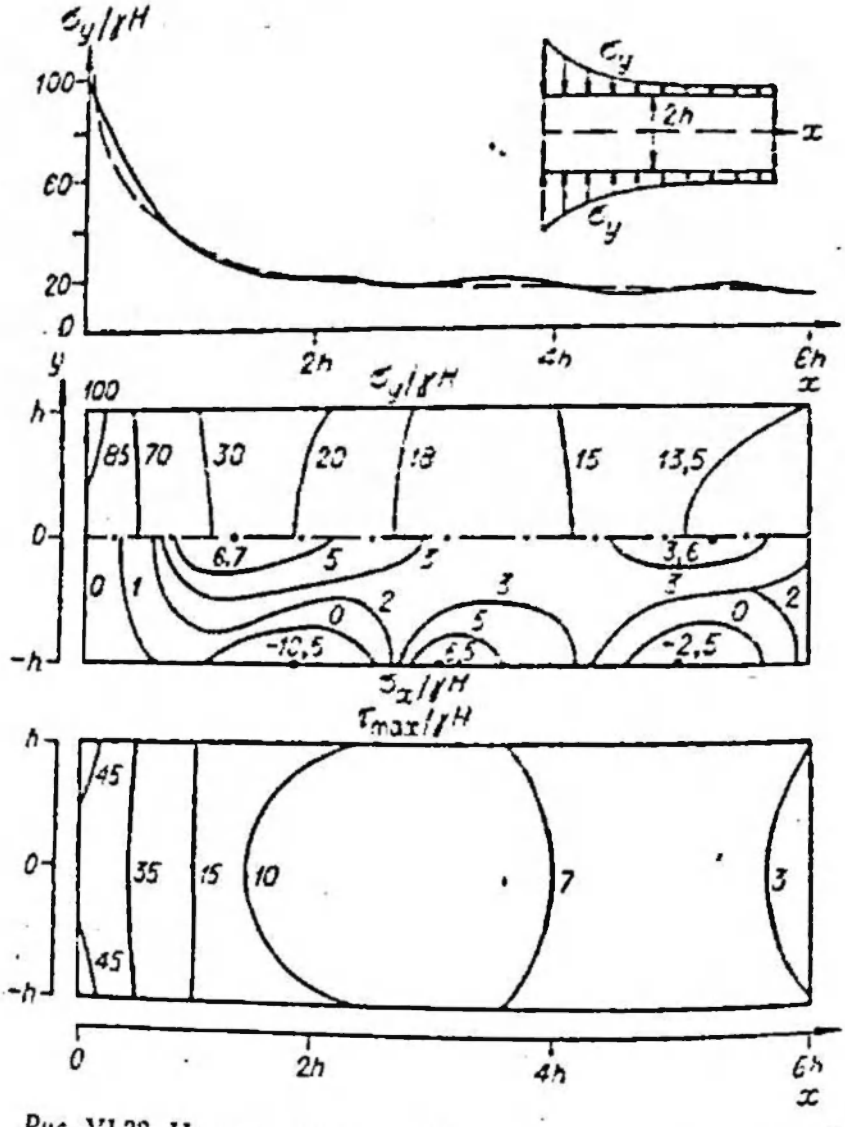


Рис. VI.38. Напряженное состояние угольного пласта под действием эпюры опорного давления по С. Г. Михлину.

груди забоя в углах и уменьшается с удалением от торца.

Нормальные напряжения вдоль пласта σ_x на груди забоя равны нулю (свободная поверхность), а в пласте в основном сжимающие. Максимальная концентрация $\sigma_x/\gamma H=6{,}7$ наблюдается на оси симметрии на расстоянии 1,4 h. На кромках пласта имеются зоны растягивающих напряжений ($\min \sigma_x/\gamma H=10{,}5$), разделенные зоной сжимающих напряжений с максимальной концентрацией до 6,5.

Касательные напряжения в пласте при расчете оказываются практически близкими к нулю. Экстремальные значения получены на кромках и равны $\max \tau_{xy}/\gamma H=1{,}2$, $\min \tau_{xy}/\gamma H=-3$.

Таким образом, напряженное состояние угольного пласта под действием опорного давления (VI.22) в основном определяется напряжениями σ_y, напряжения σ_x, τ_{xy} не превосходят 10% максимальных значений σ_y.

Качественно иной характер, по сравнению с полученными в работе [63], имеют эпюры опорного давления, учитывающие упругие свойства угольного пласта. В работе [59] была получена эпюра опорного давления, характеризующая восходящей ветвью с $\sigma_y=0$ на забое и нисходящей ветвью, отвечающей решению (VI.22). Максимальная концентрация $\sigma_y/\gamma H$ была равна 10. Проведем расчет напряженного состояния пласта при подобной эпюре опорного давления.

Зададим коэффициенты концентрации опорного давления по Ю. М. Либерману [59]:

x/h	0	1	2	3	4	5	6
$\sigma_y/\gamma H$	0	10	325	2,2	1,85	1,6	1,4

остальные граничные условия определим в виде:

$$\tau_{xy}(x, \pm h)=0,\ \sigma_x(0, y)=\tau_{xy}(0, y)=0.$$

Расчет напряженного состояния пласта под действием такой эпюры опорного давления показал (рис. VI.39), что напряжения σ_y концентрируются на кромках пласта, достигая максимальных значений $\sigma_y/\gamma H=10$ (на рис. VI.39 штриховой линией изображена задаваемая эпюра, сплошной — полученная в результате счета). На груди забоя напряжения изменяются от нуля в угловых точках до $4\gamma H$ на оси симметрии. Максимальные значения $\tau_{max}/\gamma H$ достигаются на кромках пласта в отличие от максимальных значений, полученных на груди забоя при расчете по эпюре (VI.22). Пласт находится под действием растягивающих напряжений σ_x и лишь в областях, примыкающих к кромкам, появляются зоны сжимающих ($\sigma_x>0$) напряжений. Экстремальные значения достигаются на кромке и не превосходят $\mp 3\gamma H$. Область пласта, отстоящая от груди забоя на две мощности, фактически подвержена действию только одноосного напряженного состояния.

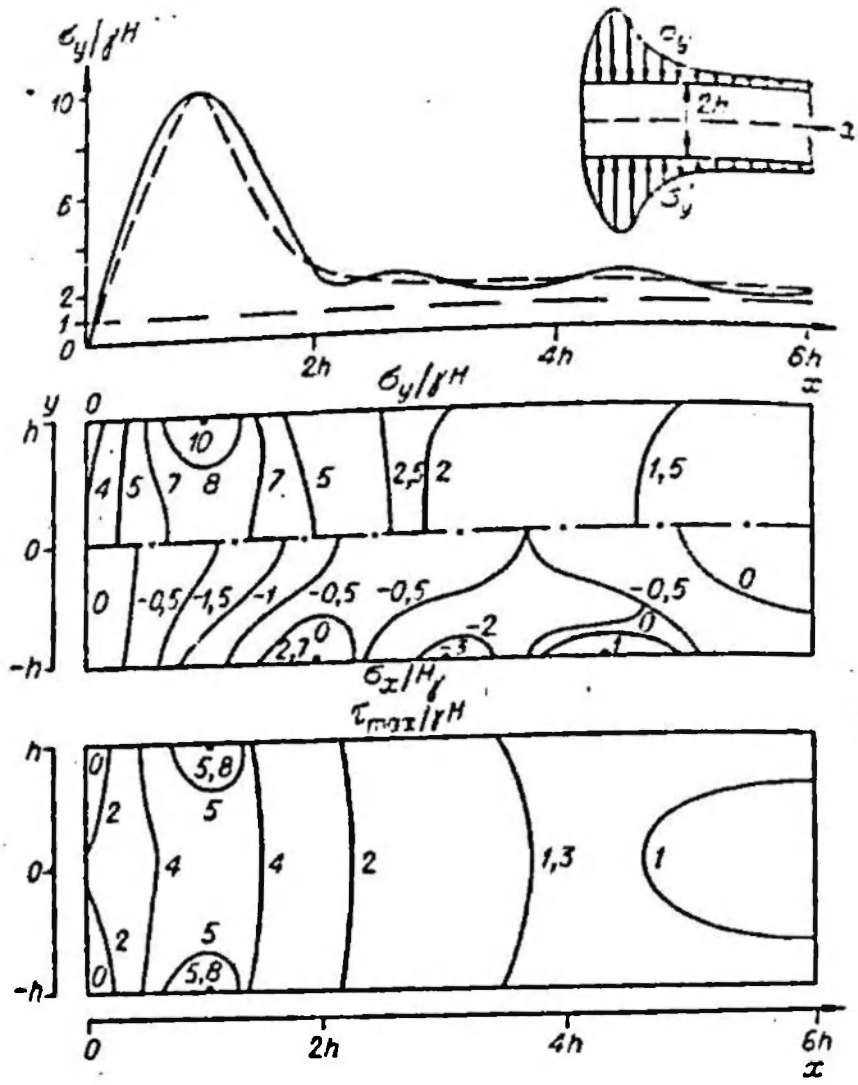


Рис. VI.39. Напряженное состояние угольного пласта под действием эпюры опорного давления по Ю. М. Либерману.

Проведем расчеты напряженного состояния угольного пласта разработанным методом с использованием граничных условий, полученных аналитическим решением [29].

Напряженное состояние вокруг выработки с соотношением сторон 3:1, полученное в [29] для двухосного нагружения на бесконечности (вертикальным давлением p и горизонтальным — $0{,}25p$), представлено на рис. VI.40 в виде изолиний напряжений σ_{max}, σ_{min} ($а$), τ_{max} ($б$) и траекторий главных напряжений ($в$).

Пусть полуполосы, примыкающие к торцевым сечениям выработки, являются угольным пластом с механическими характеристиками, совпадающими с окружающим массивом. Кромки выделенных полуполос, как видно из рис. VI.40, совпадают с траекториями главных напряжений, которые лишь незначительно искривляются, приближаясь к угловым точкам. Это означает, что на кромках касательные напряжения можно считать отсутствующими, а линии σ_{max}, пересекающие выделенные кромки,

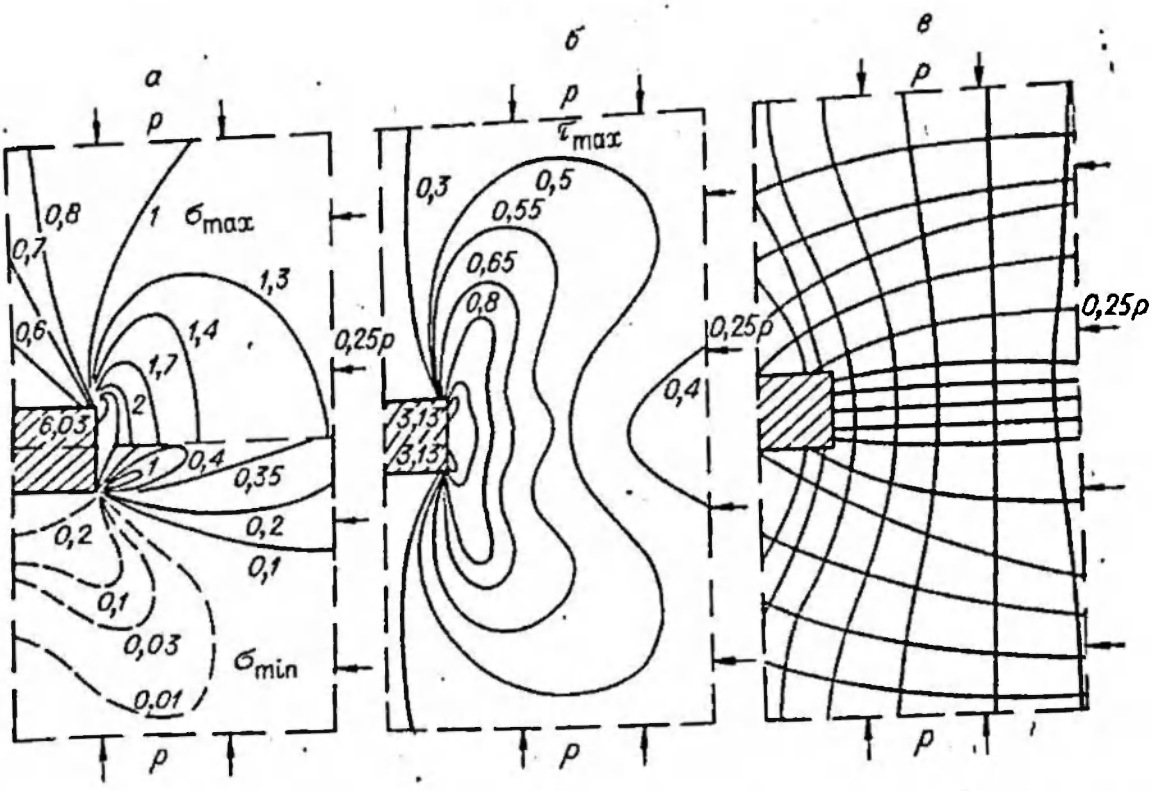


Рис. VI.40. Напряженное состояние вокруг прямоугольного отверстия по А. Н. Динник у, А. Б. Моргаевскому и Г. Н. Савину.

определяют значения напряжений σ_y. Тогда коэффициенты концентраций опорного давления по [29] будут следующие:

x/h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
σ_y/p	6,03	1,6	1,38	1,32	1,25	1,1	1

Так как массив находится в двухосном напряженном состоянии, то полные напряжения в пласте будут

$$\sigma_x=\sigma_{xx}+0{,}25p;\ \sigma_y=\sigma_{yy}+p;\ \tau_{xy}=\sigma_{xy},$$

где σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} — дополнительные напряжения. Формулируя граничные условия для угольного пласта (выделенной полуполосы), имеем:

$$\sigma_{yy}=\sigma_y-p;\ \sigma_{xy}=\tau_{xy}=0 \quad \text{на } y=\pm h$$

$$\sigma_{xx}=-0{,}25p;\ \sigma_{xy}=\tau_{xy}=0 \text{ на } x=0,$$

Расчеты напряженного состояния выделенной полуполосы по граничным значениям, приведенным выше, представлены на рис. VI.41.

Распределение напряжений σ_y на груди забоя характеризуется максимальной концентрацией в угловых точках ($\max \sigma_y/p=6$) и падением к оси симметрии до 4,9. На расстоянии полутора мощностей от торца концентрация снижается до 1,4 p, а в двух мощностях и более напряженное состояние практически стано-

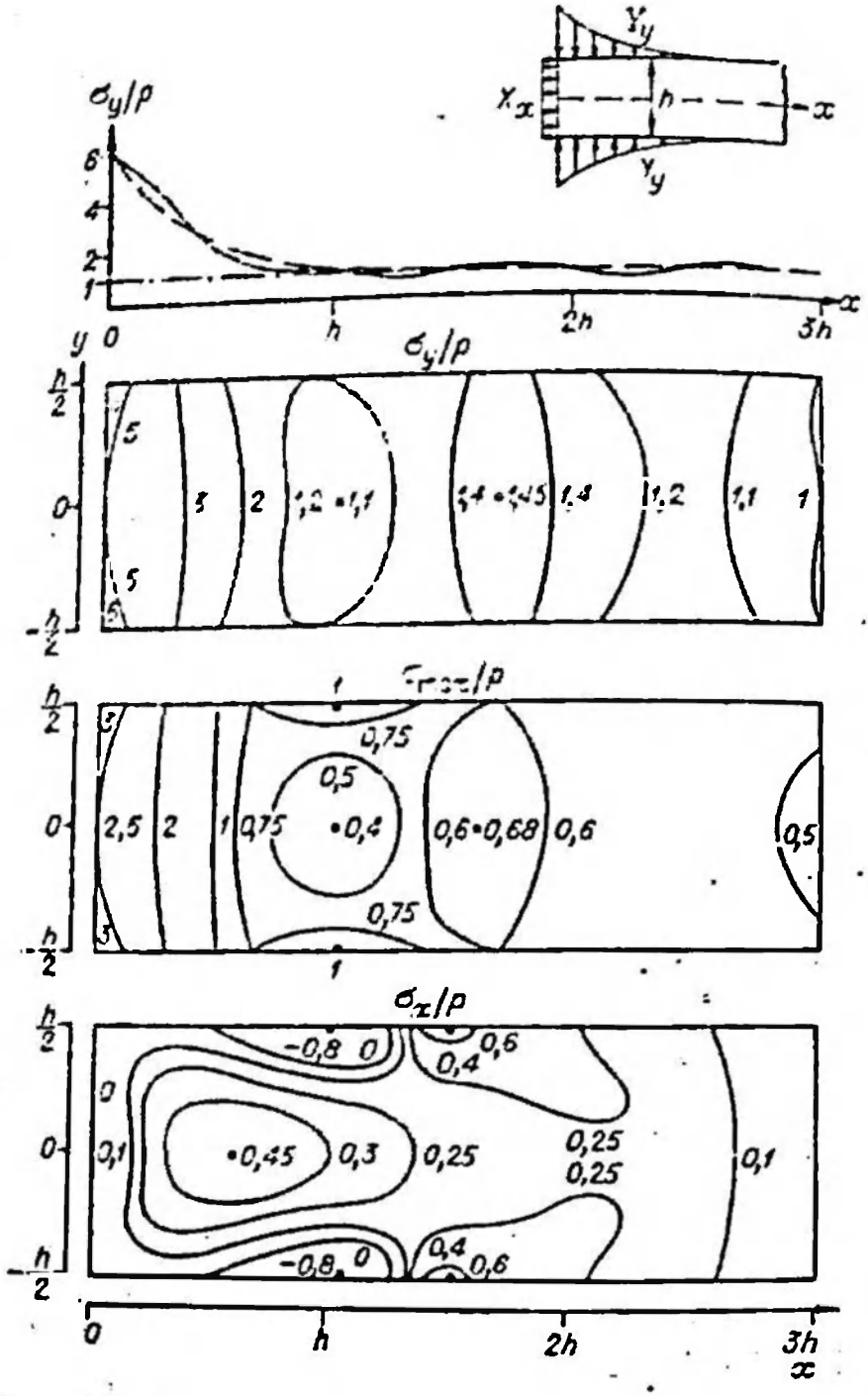


Рис. VI.41. Напряженное состояние угольного пласта под действием эпюры опорного давления по [29].

вится первоначальным. Характер замыкания изолиний высоких концентраций (5÷6p) на груди забоя и выпуклость в глубь пласта остальных изолиний (меньших 4p) отражены на рис. VI.40 и VI.41.

Картина концентраций τ_{max}/p подобна картине σ_y/p (с коэффициентом подобия 2). Максимальный концентратор 3p в угловых точках, замыкание изолиний до 2,5 p на груди забоя, выпуклость в пласт изолиний 1÷0,55 p и вогнутость изолиний,

меньших $0{,}5p$, наблюдаются как при расчетах (см. рис. VI.41), так и в [29] (см. рис. VI.40, *б*). Падение концентрации на расстоянии мощности от торца по оси симметрии до $0{,}4\ p$ следует объяснить отклонением получаемых граничных условий (сплошная эпюра σ_y на рис. VI.41) на кромке от задаваемой (штриховая) эпюры именно в этом участке.

Коэффициенты концентрации σ_x/p на оси симметрии соответствуют напряжениям σ_{min}/p, полученным в [29]. Отличие картин наблюдается на кромках пласта и кромках выделенной полуполосы и выражается в появлении зон растягивающих напряжений σ_x в области $0{,}5<x/h<1{,}1$, $0{,}3\leqslant|y/h|\leqslant 0{,}5$. Максимальный концентратор напряжений сжатия ($\max \sigma_x/p=0{,}6$) получается на кромках в полутора мощностях и расположен на бо́льшем удалении от забоя, чем при расчетах [29] (см. рис. VI.40, *а*). Подобное отклонение рассчитанных концентраций σ_x/p от полученных σ_{min}/p объясняется тем, что расчеты в [29] проводились не для прямоугольного отверстия, а для отверстия с закругленными углами. В связи с этим вблизи угловых точек выделенной полуполосы имеются касательные напряжения τ_{xy} как на кромках, так и на торце. При расчете разработанным методом в угловых точках предполагалось условие $\tau_{xy}=0$ как на груди забоя, так и на кромках пласта.

ГЛАВА VII

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ВОКРУГ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК

§ 1. Определение напряженного состояния пород вокруг полевых выработок в зоне влияния очистных работ

Изложенный в главе II подход, позволяющий применить натурные данные о смещениях бокозых пород пласта в качестве граничных условий в задачах определения напряженно-деформированного состояния пород вокруг очистной выработки, использован и при исследовании условий работы подготовительных выработок, находящихся в зонах опорного давления.

Рассматривается случай плоской деформации однородного и изотропного массива, в котором на расстоянии l от угольного пласта, наклоненного под углом α к горизонту, пройдена выработка приведенным радиусом R_0. Влияние очистных работ на породы почвы пласта учитывается величиной их смещений (рис. VII.1).

Таким образом, задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния однородной, изотропной полуплоскости $y \leqslant l$, ослабленной круговым отверстием. Первоначальное напряженно-деформированное состояние полуплоскости определяется главными напряжениями σ_1, σ_2, действующими в нетронутом массиве. Изменение первоначального состояния в связи с очистными работами учитывается величиной и распределением смещений границы полуплоскости $y=l$.

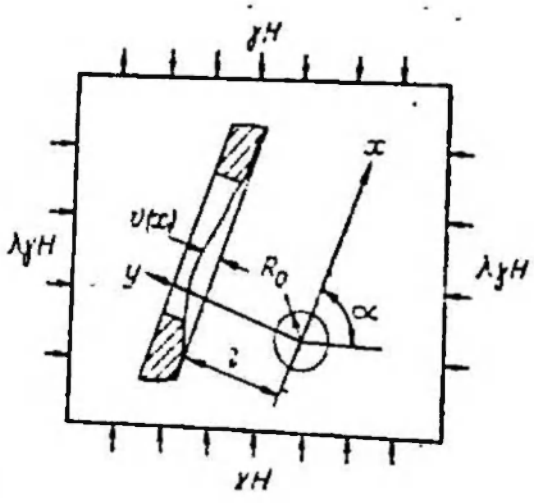


Рис. VII.1. Расчетная схема к определению напряженно-деформированного состояния пород вокруг полевой выработки.

При полевой подготовке выемочного участка подготовительная выработка проводится со стороны лежащего бока на расстоянии 10—15 м от угольного пласта. Поэтому полевой штрек практически не оказывает влияния на механическое состояние пород почвы вблизи границы с угольным пластом и, следовательно, наблюдаемые смещения гра-

ницы есть результат влияния лишь очистных работ [89].

В рамках теории упругости задача решается с помощью метода последовательных приближений Шварца, в предположении о незначительном влиянии полевой выработки на напряженно-деформированное состояние пород в окрестности угольного пласта, что позволяет ограничиться первым приближением [4, 24]. В применении к этой задаче оно состоит в том, что вначале отыскивается напряженно-деформированное состояние полуплоскости по заданным на ее границе дополнительным смещениям и известным первоначальным напряжениям. На контуре отверстия это решение дает не нулевые значения нормальных напряжений σ_n и τ_n. Далее отыскивается решение для бесконечной плоскости с отверстием, по контуру которого приложены внешние усилия $-\sigma_n$, $-\tau_n$. Наложение этих двух полей напряжений и дает решение задачи в первом приближении. При этом граничные условия на бесконечности и контуре отверстия будут удовлетворены точно. По степени же отклонения граничных условий на $y=l$, полученных в первом приближении, от заданных можно судить о степени точности найденного решения. В дальнейшем радиус выработки принят равным единице, а величины с размерностью напряжений отнесены к $2\tau_s$ — пределу текучести пород при одноосном сжатии.

Напряженно-деформированное состояние нетронутого горного массива описывается функциями $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ комплексного переменного z, связанными с напряжениями и смещениями формулами Г. В. Колосова — Н. И. Мусхелишвили:

$$\varphi_1(z) = \frac{\gamma H(1+\lambda)}{4} z,$$

$$\psi_1(z) = \frac{\gamma H(1-\lambda)}{4} z\bar{z} e^{-2i\alpha}. \qquad \text{(VII.1)}$$

При определении дополнительного напряженно-деформированного состояния пород, связанного с одними очистными работами, воспользуемся результатами, полученными в главах III, V, в которых на основе экспериментальных данных о смещениях пород при отработке угольных пластов сформулирована задача определения дополнительных напряжений и деформаций упругого горного массива вокруг очистной выработки. В зависимости от имеющихся замеров на границе угольный пласт — боковые породы, а также гипотез о взаимодействии массива с пластом, эта задача сведена к краевой задаче аналитических функций, а именно, к неоднородной задаче Римана для полуплоскости.

Функции $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$, описывающие дополнительное напряженно-деформированное состояние массива с очистной выработкой, находятся из (V.14) переносом начала координат в центр полевого штрека и в дальнейшем считаются известными.

Для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, описывающих поле дополнительных напряжений и смещений, вызванных проведением подготовительной выработки, имеем краевую задачу

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=-\left[\frac{\gamma H(1+\lambda)}{2}t+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2}\bar{t}e^{2i\alpha}+\varphi_2(t)+t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}\right], \qquad \text{(VII.2)}$$

где t — аффикс точки на контуре γ единичного круга.

Если по контуру отверстия приложено равномерно-распределенное давление (имитирующее реакцию крепи), то к правой части (VII.1) должен быть добавлен член pt.

Используя метод Н. И. Мусхелишвили, найдем:

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{A(t)}{t-z}\,dt;$$
$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{A(t)}}{t-z}\,dt-z^{-1}\varphi'(z); \qquad \text{(VII.3)}$$
$$A(t)=-\left[\frac{\gamma H(1+\lambda)}{2}t+\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2}\bar{t}e^{2i\alpha}+\right.$$
$$\left.+\varphi_2(t)+t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}\right].$$

Принимая во внимание свойства интегралов Коши и учитывая, что функции $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ голоморфны всюду в полуплоскости $|z|<1$, имеем:

$$\varphi(z)=-\left[-\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2z}e^{2i\alpha}+z\overline{\varphi_2'}(z^{-1})+\overline{\psi_2}(z^{-1})+G(z)\right]; \qquad \text{(VII.4)}$$
$$\psi(z)=-z^{-1}\varphi'(z)-\left[\frac{p}{z}+\frac{\gamma H(1+\lambda)}{2z}+\overline{\varphi}_2(z^{-1})+G_1(z)\right],$$

где $G(z)$, $G_1(z)$ — главные части разложений функций $z\overline{\varphi_2'}(z^{-1})$ и $z^{-1}\varphi'(z)$ в окрестности бесконечно удаленной и нулевой точек соответственно.

В том случае, если вид функций $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ очень сложен, при определении $\varphi(z)$, $\psi(z)$ применим следующий метод. Так как функции $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ голоморфны всюду в полуплоскости $|z|<1$, то они разложимы в ряды Тейлора, сходящиеся в единичном круге. Учитывая, что $l\gg1$, для получения эффективного решения достаточно ограничиться первыми членами рядов, т. е. считаем справедливым представление:

$$\varphi_2(z)=\sum_{k=0}^{n}A_kz^k, \qquad \text{(VII.5)}$$

$$\psi_2(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k z^k,$$

$$A_k = \frac{1}{k!}\varphi_2^{(k)}(z)\Big|_{z=0},\quad B_k = \frac{1}{k!}\psi^{(k)}(z)\Big|_{z=0}.$$

Тогда вместо (VII.4) имеем

$$\varphi(z) = -\left[-\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2z}e^{2i\alpha} + \sum_{k=0}^{n} k\overline{A}_k z^{2-k} + \sum_{k=0}^{n}\overline{B}_k z^{-k} - A_2 z\right], \tag{VII.6}$$

$$\psi(z) = -z^{-1}\varphi'(z) - \left[\frac{2p+\gamma H(1+\lambda)}{2z} + \sum_{k=0}^{n}\overline{A}_k z^{-k} - A_1 z^{-1}\right].$$

Напряженно-деформированное состояние массива вокруг полевого штрека будет описываться функциями:

$$\varphi_3(z) = \frac{\gamma H(1+\lambda)}{4}z + \varphi(z) + \varphi_2(z),$$

$$\psi_3(z) = \frac{\gamma H(1-\lambda)}{4}ze^{-2i\alpha} + \psi(z) + \psi_2(z). \tag{VII.7}$$

Найденное рассмотренным способом напряженно-деформированное состояние массива вокруг полевой выработки состоит из трех частей, из которых первая относится к нетронутым породам, а последние две соответственно описывают распределение дополнительных напряжений, являющихся следствием проведения очистной и подготовительной выработок.

Наибольший интерес, с точки зрения оценки условий работы выработки, представляют напряжения σ_θ, действующие по контуру выработки. Они могут быть рассчитаны по формуле:

$$\sigma_\theta = \gamma H[(1+\lambda) - 2(1-\lambda)\cos 2(\theta+\alpha)] +$$
$$+ 4\,\mathrm{Re}\left[\sigma^{-1}\overline{\varphi}_2'(\sigma^{-1}) + \sigma^{-2}\overline{\psi}_2'(\sigma^{-1}) + \varphi_2'(\sigma) + G'(\sigma) - \right.$$
$$\left. - \overline{\varphi}_2'(\sigma^{-1})\right] - p. \tag{VII.8}$$

Решение (VII.7), (VII.8) описывает поведение материала массива до тех пор, пока выполняется некоторое условие, обеспечивающее упругое деформирование

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) < k, \tag{VII.9}$$

где $F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ — некоторая функция от инвариантов тензора напряжений, k — постоянная.

Если неравенство (VII.9) не выполняется в некоторой точке массива, то в этой точке начинают развиваться неупругие деформации. Будем предполагать, что поведение пород следует модели идеального упруго-пластического тела С. А. Христиановича, Е. И. Шемякина [88].

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — соответственно главные напряжения и деформации ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), тогда основными положениями модели будут:

1) условие пластичности Треска — Сен-Венана

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s, \tag{VII.10}$$

где $2\tau_s$ — предел текучести при сжатии (растяжении);

2) объемная деформация пропорциональна среднему напряжению

$$\sigma = k\varepsilon; \tag{VII.11}$$

3) сохранение упругой связи между напряжением σ_2, не входящим в условие пластичности, и деформациями ε и ε_2

$$\sigma_2 = \frac{2k}{1+\nu}[\nu\varepsilon + (1-2\nu)\varepsilon_2]; \tag{VII.12}$$

4) совпадение главных осей тензоров напряжений и деформации

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \; k = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

где ν — коэффициент Пуассона, величина которого может быть переменной, в частности, может зависеть от величины главного сдвига.

Процесс нагружения массива предполагается «простым», т. е. площадки максимального касательного напряжения сохраняют постоянную ориентацию, разгрузки не происходит.

Экспериментальные исследования связи (VII.12) между средним главным напряжением и главными деформациями, выполненные на трубчатых образцах для класса нагружений, когда изменяется лишь отношение главных напряжений при неподвижных главных осях, показали [36], что с достаточной степенью точности (в пределах 6—8%) можно считать $\nu = \text{const} = \frac{1}{2}\left(\nu_a + \frac{1}{2}\right)$. В дальнейшем эта величина и принимается в качестве коэффициента Пуассона, входящего в (VII.11), (VII.12).

В рассматриваемом случае плоской деформации горного массива $\varepsilon_2 = 0$, $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$, т. е. предполагается, что имеет место лишь неполная пластичность.

На основе принятой модели идеального упруго-пластического тела [88] процесс формирования напряженно-деформированного состояния массива в окрестности подготовительной выработки может быть схематически представлен следующим образом.

На первом этапе работы выработки во всей рассматриваемой области выполняется неравенство (VII.9), т. е. распределение напряжений и смещений описывается решением (VII.7), (VII.8).

Напряженно-деформированное состояние пород определяется параметрами нагружения: первоначальными напряжениями нетронутого массива, дополнительными напряжениями, связанными с проведением подготовительной выработки и отработкой угольного пласта, отпором крепи.

При изменении всех или одной из этих величин неравенство (VII.9) перестает выполняться. Будем предполагать, что это случится в точке, принадлежащей контуру выработки. Тогда при дополнительном изменении параметров нагружения около этой точки возникнет пластическая область, ограниченная отрезком контура выработки и дугой Г, целиком лежащей в массиве. Во всей этой области будут выполняться (VII.10)—(VII.12), а в оставшейся части (VII.9).

Если параметры нагружения изменяются дальше, то возможен случай, когда зона пластических деформаций полностью охватит контур выработки, так что упругая область будет всюду граничить с пластической, что в дальнейшем и рассматривается. На границе раздела двух состояний массива напряжения непрерывны, т. е.

$$\sigma_x^p = \sigma_x^e,\ \sigma_y^p = \sigma_y^e,\ \tau_{xy}^p = \tau_{xy}^e, \qquad \text{(VII.13)}$$

где индекс e указывает на упругую, а p — на пластическую зону.

Решение (VII.8) с учетом (VII.10) позволяет найти условие появления пластического течения на контуре выработки

$$\gamma H\left[(1+\lambda)+2(1-\lambda)\cos 2(\alpha+0)\right]+4\,\mathrm{Re}\left[\varphi_2'(\sigma)-\right.$$
$$\left.-\overline{\varphi_2'}(\sigma^{-1})+\sigma^{-1}\varphi_2''(\sigma^{-1})+\sigma^{-2}\overline{\psi_2}(\sigma^{-1})+G'(\sigma)\right]-2p=1. \qquad \text{(VII.14)}$$

Распределение напряжений в области пластических деформаций дано формулами

$$\sigma_r = \ln r + p,\quad \sigma_\theta = \ln r + p + 1,\quad \tau_{r\theta} = 0. \qquad \text{(VII.15)}$$

Учитывая непрерывность напряжений на упруго-пластической границе Г и используя рассмотренный при решении упругой задачи алгоритм Шварца для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, описывающих дополнительное напряженно-деформированное состояние массива в упругой области, имеем

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,\Phi(z)=0, & \text{при } z\to\infty,\\ z\Phi'(z)+\Psi(z)=0\end{cases} \qquad \text{(VII.16)}$$

$$\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)}=\ln r+p+\frac{1}{2}-\frac{\gamma H(1+\lambda)}{2}-\left[\Phi_2(\sigma)+\overline{\Phi_2(\sigma)}\right], \qquad \text{(VII.17)}$$

$$\bar\sigma\Phi'(\sigma)+\Psi(\sigma)=\frac{1}{2}e^{-2i\theta}-\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2}e^{-2i\alpha}-\left[\bar\sigma\Phi_2'(\sigma)+\Psi_2(\sigma)\right],$$

σ — аффикс точки на контуре Г.

Учитывая, что $\frac{d}{t} \ll 1$, вводим в рассмотрение, аналогично (VII.5), представления:

$$\Phi_2(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k,$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k z^k. \tag{VII.18}$$

Ряды Тейлора, первые n членов которых даются в (VII.18), сходятся в круге радиуса R_1, целиком содержащего контур Г.

Пусть функция $z=\omega(\xi)$:

$$z = c_0\xi + \frac{c_1}{\xi} + \ldots \text{ при } \xi \to \infty \tag{VII.19}$$

осуществляет конформное отображение внешности единичного круга на внешность контура Г. Тогда для функций $\Phi(\xi)=\Phi(\omega(\xi))$ и $\Psi(\xi)=\Psi(\omega(\xi))$, аналитических вне единичного круга и исчезающих на бесконечности, из (VII.16)—(VII.19) имеем:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} = \frac{1}{2}\ln\omega(\tau)\overline{\omega(\tau)} + p + \frac{i}{2} - \frac{\gamma H(1+\lambda)}{2} - \sum_{k=0}^{n}\left(A_k\omega^k(\tau) + \overline{A_k\omega^k(\tau)}\right);$$

$$\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau) = \frac{1}{2}\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega(\tau)} - \frac{\gamma H(1-\lambda)}{2}e^{-2i\alpha} - \sum_{k=0}^{n} kA_k\omega^{k-1}(\tau)\overline{\omega(\tau)} - \sum_{k=0}^{n} B_k\omega^k(\tau). \tag{VII.20}$$

Первые условия (VII.16), (VII.17) будут удовлетворены, если

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\omega(\xi)}{c_0\xi} - \sum_{k=0}^{n} 2A_k\omega^k(\xi) + p + \frac{1}{2} - \frac{\gamma H(1+\lambda)}{2} + G_2(\xi) - G_2(\xi^{-1})\right], \tag{VII.21}$$

где $G_2(\xi)=g_0+g_1\xi+\ldots+g_n\xi^n$ — полином степени n, являющийся главной частью разложения функции $\sum_{k=0}^{n} 2A_k\omega^k(\xi)$ в окрестности бесконечно удаленной точки;

$$c_0 = \exp\left[2A_0 - p + \frac{1}{2} + \frac{\gamma H(1+\lambda)}{2}\right].$$

Из второго граничного условия (VII.16) и (VII.17) следует

$$-\frac{\omega(\sigma)}{2}\left[\frac{1}{\sigma}-G_1'(\sigma)+\sigma^{-2}\overline{G'}\left(\sigma^{-1}\right)\right]+\omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\gamma H(1-\lambda)\,e^{-2i\alpha}+\sum_{k=0}^{n}2B_k\omega^k(\sigma)\,\omega'(\sigma)\right]. \quad \text{(VII.22)}$$

Умножим (VII.22) на $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\xi)}$ (ξ — точка внутри γ) и проинтегрируем по γ. Тогда, принимая во внимание свойства интегралов типа Коши, а также голоморфность функции $\omega'(\xi)\Psi(\xi)$ вне γ, найдем:

$$\overline{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right)\left[\frac{1}{\xi}-G_2'(\xi)+\frac{1}{\xi^2}G_2'\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]-\frac{c_0}{\xi^2}+\frac{g_1c_0}{\xi}-G_3\left(\frac{1}{\xi}\right)=G_4(\xi), \quad \text{(VII.23)}$$

или

$$\omega(\xi)=\frac{\overline{G}_3(\xi^{-1})+c_0\xi^2-g_1c_0\xi+\overline{G}_3(\xi)}{\xi-\overline{G}_2'(\xi^{-1})+G_2'(\xi)\,\xi^2},$$

где

$$G_3(\xi^{-1})=\sum_{k=0}^{n}g_k\left[\frac{1}{\xi^{k+2}}+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_ig_i}{\xi^{k+1-i}}\right]$$

— главная часть разложения функции $\xi^{-2}\overline{\omega}(\xi^{-1})\,\overline{G}_1'(\xi^{-1})$ в окрестности точки $\xi=0$; $G_4(\xi)=Q_m(\xi)$ — главная часть разложения $\sum_{k=0}^{n}B_k\omega^k(\xi)\,\omega'(\xi)$ в окрестности бесконечно удаленной точки; $Q_m(\xi)$ — полином степени не выше n.

Постоянные c_i ($i=1, 2, 3,\ldots$) найдутся из сравнения разложения $\omega(\xi)$, определенного формулами (VII.19) и (VII.23). Функция $\Psi(\xi)$ найдется из (VII.20):

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\omega}(\xi^{-1})}{\omega(\xi)}-2\sum_{k=0}^{n}kA_k\omega^{k-1}(\xi)\,\overline{\omega}(\xi^{-1})-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{n}b_k\omega(\xi)^k\right]-\frac{\Phi'(\xi)}{\omega'(\xi)}\overline{\omega}(\xi^{-1}). \quad \text{(VII.24)}$$

Уравнение границы Γ имеет вид:

$$x=\mathrm{Re}[\omega(\tau)],\quad y=\mathrm{Im}[\omega(\tau)],\quad \tau=e^{i\theta}. \quad \text{(VII.25)}$$

Таким образом, напряженное состояние пород вокруг полевой выработки найдено из решения упруго-пластической задачи для полуплоскости с круговым отверстием по известным первоначальным напряжениям нетронутого массива и экспериментальным данным о смещениях почвы пласта. На контуре отверстия

заданы равномерно распределенные нагрузки, равные отпору крепи. Решение задачи получено первым приближением алгоритма Шварца, что позволило использовать результаты задачи о распределении напряжений в массиве вокруг одной очистной выработки.

§ 2. Напряженное состояние угольного пласта в окрестности подготовительной выработки

Натурные данные о смещениях горного массива могут быть использованы при изучении напряженно-деформированного состояния угольного пласта в окрестности пластовой подготовительной выработки [23, 25, 26].

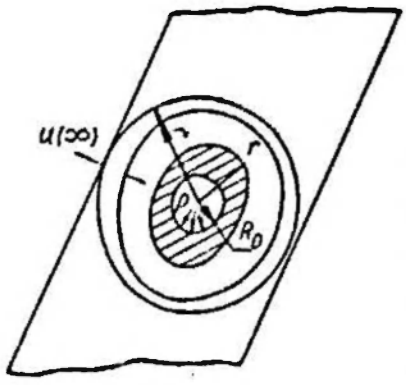


Рис. VII.2. Расчетная схема к определению напряженно-деформированного состояния угольного пласта вокруг подготовительной выработки.

В этом случае замеры смещений проводятся глубинными реперами по окружности, которая целиком лежит в угольном пласте и охватывает выработку. Центр окружности совпадает с осью выработки.

Задача плоской деформации о напряженно-деформированном состоянии угольного массива вокруг выработки формулируется следующим образом: определить поля напряжений и деформаций упруго-пластического кольца ($1 \leqslant r \leqslant R$) при граничных условиях (рис. VII.2):

$$u = u(\infty) \quad \text{при} \quad r = R,$$

$$\sigma_r = p, \; r_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1. \qquad \text{(VII.26)}$$

Здесь R, 1 — соответственно внешний и внутренний радиусы угольного кольца. Решение, как и в предыдущем параграфе, ищется в безразмерном виде.

Следуя Н. И. Мусхелишвили, введем две функции комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, связанные с напряжениями и деформациями формулами:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z); \qquad \text{(VII.27)}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau'_{r\theta} = 2e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)];$$

$$2\mu(u_r + iv_\theta)' = e^{-i\theta}[\varkappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}].$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ можно представить в виде:

$$\varphi(z) = A\ln z + \varphi_1(z); \; \psi(z) = B\ln z + \psi_1(z), \qquad \text{(VII.28)}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — функции, голоморфные в кольце $1 \leqslant r \leqslant R$ и, следовательно, разложимы в ряд Лорана:

$$\varphi_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k; \quad \psi_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k z^k. \tag{VII.29}$$

Граничными условиями для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут:

$$2\mu(u_r + iv_0) = e^{-i\theta}[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] \text{ при } r = R. \tag{VII.30}$$

$$p = \overline{\varphi'(t)} + \varphi'(t) - e^{2i\theta}[\bar{t}\varphi''(t) + \psi(t)] \text{ при } r = 1. \tag{VII.31}$$

Раскладывая (VII.30) в комплексный ряд Фурье

$$2\mu(u_r - iv_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}, \tag{VII.32}$$

т. е. предполагая, что $u(0)$ удовлетворяет условиям Дирихле, и подставляя (VII.28), (VII.29), в (VII.30) — (VII.32), найдем:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} = \varkappa \sum_{-\infty}^{\infty} a_k R^k e^{i(k-1)\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} k\bar{a}_k R^k e^{-i(k-1)\theta} -$$

$$- \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{v}_k R^k e^{-i(k+1)\theta} - Ae^{i\theta} + 2\varkappa A \ln R, \tag{VII.33}$$

$$p = 2Ae^{-i\theta} + \overline{A}e^{i\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} k\left(a_k e^{i(k-1)\theta} + \bar{a}_k e^{-i(k-1)\theta}\right) -$$

$$- \sum_{-\infty}^{\infty} k(k-1) a_k e^{i(k-1)\theta} - \overline{B}e^{-i\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} k b_k e^{i(k+1)\theta}. \tag{VII.34}$$

$$(\varkappa A + \overline{B}) = 0.$$

Сравнивая в (VII.33) и (VII.34) члены с одинаковыми степенями, находим

$$\begin{gathered} A_{k-1} = \varkappa a_k R^k + (k-2)\bar{a}_{-(k-2)} R^{-(k-2)} - b_{-k} R^{-k}; \\ A_{-(k-1)} = \varkappa a_{-(k-2)} R^{-(k-2)} - k\bar{a}_k R^k - b_{k-2} R^{k-2}; \\ 0 = k a_k + \bar{a}_{-(k-2)} - b_{k-2}; \\ 0 = -(k-2) a_{-(k-2)} + \bar{a}_k - b_{-k}; \quad k \neq 0,\ 1,\ 2. \end{gathered} \tag{VII.35}$$

Случай $k = 0,\ 1,\ 2$ будет рассмотрен ниже.

Система (VII.35) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= a_k(\varkappa R^k + R^{-k}) + (k-2)\bar{a}_{-(k-2)} R^{-k}(R^2 - 1) \\ A_{-(k-1)} &= -k a_k R^{k-2}(R^2 - 1) + \bar{a}_{-(k-2)}(\varkappa R^{-(k-2)} + R^{k-2}). \end{aligned} \tag{VII.36}$$

Определитель системы (VII.36)

$$\Delta_k = (\varkappa R^k + R^{-k})(\varkappa R^{-(k-2)} + R^{k-2}) + k(k-2) R^{-2}(R^2 - 1)^2$$

и, следовательно, решение (VII.36) существует и оно единственно:

$$a_k = \frac{A_{n-1}\left(\varkappa R^{-(k-2)} + R^{k-2}\right) - (k-2)\,R^{-k}\left(R^2-1\right)\bar{A}_{-(k-1)}}{\Delta_k}, \tag{VII.37}$$

$a_{-(k-2)}$ получается из (VII.37) заменой k на $-(k-2)$; b_k найдется из системы (VII.35).

Рассматривая члены при степенях $k=0, 1, 2$, находим

$$A = B = 0;\ a_1 = \frac{R^2(\varkappa A_0 + \bar{A}_0) + R(A_0 - \bar{A}_0) + pR^2(\varkappa - 1)}{R^4(\varkappa - 1) + 2R^2(\varkappa + 1)};$$

$$b_{-1} = p - \frac{R(A_0 + \bar{A}_0) + 2p}{R^2(\varkappa - 1) + 2};\ b_{-2} = \frac{A_1 \varkappa R^4 + \bar{A}_{-1}}{\varkappa R^6 + 1} R^2;$$

$$a_2 = \frac{A_1 \varkappa R^4 - \bar{A}_{-1}}{\varkappa R^6 + 1} R^2; \tag{VII.38}$$

$$b_0 = 2R^4 \frac{\bar{A}_1 \varkappa R^4 - A_{-1}}{\varkappa R^6 + 1} - \bar{A}_1.$$

Таким образом, все коэффициенты разложений (VII.28), (VII.29) определены. Если $u'(0)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ряды (VII.29) сходятся абсолютно и равномерно, т. е. найденное решение регулярно. По известным из шахтного эксперимента смещениям внешнего контура угольного кольца найдено напряженно-деформированное состояние упругого угольного кольца вокруг подготовительной выработки.

Полученные величины коэффициентов a_k; b_k (VII.37), (VII.38) и (VII.10) позволяют определить условия и место возникновения первой пластической зоны.

Рассмотрим случай, когда пластическая зона полностью охватила контур выработки и не вышла на внешнюю границу угольного пласта.

Для пластических напряжений имеем (VII.15). В силу непрерывности напряжений на границе Γ пластической зоны для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} -4Re\,\varphi'(t) = 2(\ln r + p) + 1, \\ 2e^{2i\theta}\left[\bar{t}\varphi''(t) + \psi'(t)\right] = i, \quad \text{на} \quad \Gamma \\ e^{i\theta}\left[\varkappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right] = 2\mu(\mu_r + i v_\theta) \end{gathered} \tag{VII.39}$$

при $r=R$.

Положим $u(0) = u_0(1 + \varepsilon u_1(0))$, $(\varepsilon \leqslant 1)$. Тогда функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, дающие решение упругой задачи, можно искать в виде:

$$\varphi(z) = u_0\left[\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_k z^k + a_1 z\right], \tag{VII.40}$$

$$\psi(z) = u_0\left[\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{**} \bar{b}_k z^k + b_{-1} z^{-1}\right],$$

где знаки (*), (**) означают отсутствие в суммах членов с номерами 1 и —1 соответственно.

Сохраняя вид (VII.40) функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для упругой области кольца, найдем коэффициенты a_k, b_k из условий (VII.39).

Границу Г пластической области будем искать в виде

$$r_* = r_0 + \varepsilon r_1(\theta). \qquad \text{(VII.41)}$$

Из условий на внешнем контуре имеем:

$$\begin{gathered} 2\mu = \varkappa a_1 R - \bar{a}_1 R - \bar{b}_{-1} R^{-1}, \\ 2\mu A_{k-1} = \varkappa a_k R^k + (k-2) R^{-(k-2)} \bar{a}_{-(k-2)} - \bar{b}_{-k} R^{-k}, \\ 2\mu A_{-(k-1)} = \varkappa a_{-(k-2)} R^{-(k-2)} - k \bar{a}_k R^k - \bar{b}_{k-2} R^{k-2}, \\ u(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}. \end{gathered} \qquad \text{(VII.42)}$$

Условия на границе Г с точностью до членов, содержащих ε^2, запишутся:

$$\begin{gathered} 2u_0\left[a_1 + \bar{a}_1 + \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} k r_0^{k-1}\left(a_k e^{i(k-1)\theta} + \bar{a}_k e^{-i(k-1)\theta}\right)\right] = \\ = 2(\ln r_0 + p) + 1 + 2\varepsilon r_0^{-1} r_1(\theta); \\ 2u_0\left[\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} k(k-1) r_0^{k-1} e^{i(k-1)\theta} + \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{**} k b_k r_0^{k-1} e^{i(k+1)\theta} - \right. \\ \left. - b_{-1} r_0^{-2}\left(1 - 2\varepsilon r_0^{-1} r_1(\theta)\right)\right] = 1. \end{gathered} \qquad \text{(VII.43)}$$

Сравнивая в (VII.43) члены с одинаковыми ε, находим:

$$2u_0(a_1 + \bar{a}_1) = 2(\ln r_0 + p) + 1; \qquad \text{(VII.44)}$$

$$u_0\left[\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} k r_0^{k-1}\left(a_k e^{i(k-1)\theta} + \bar{a}_k e^{-i(k-1)\theta}\right)\right] = r_0^{-1} r_1(\theta); \qquad \text{(VII.45)}$$

$$2u_0 b_{-1} r_0^{-2} = 1; \qquad \text{(VII.46)}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} k(k-1) a_k r_0^{k-1} e^{i(k-1)\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{**} k b_k r_0^{k-1} e^{i(k+1)\theta} + 2 r_0^{-3} r_1(\theta) = 0. \qquad \text{(VII.47)}$$

Из (VII.44) — (VII.46) и первого уравнения (VII.42) получаем уравнения для отыскания r_0:

$$a_1 = \frac{4\mu R u_0 - r_0^2}{2R^2 u_0 (\varkappa - 1)};$$

$$b_{-1} = \frac{r_0^2}{2u_0}; \qquad \text{(VII.48)}$$

$$\frac{4\mu R u_0 - r_0^2}{R^2(\varkappa - 1)} = \ln r_0 + p + \frac{1}{2}.$$

Уравнение (VII.47) с учетом (VII.45) и (VII.46) запишется

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \dot{k}\left(a_k r_0^{k-1} e^{i(k-1)\theta} + \bar{a}_k r_0^{k-1} e^{-i(k-1)\theta}\right) -$$

$$- \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(k-1) a_k r_0^{k-1} e^{i(k-1)\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} \ddot{k} b_k r_0^{k-1} e^{i(k+1)\theta} = 0. \qquad \text{(VII.49)}$$

Равенство (VII.49) аналогично (VII.33), (VII.34) и, следовательно, для отыскания a_k, b_k применим метод, рассмотренный при решении упругой задачи.

Окончательно:

$$a_k = \frac{2\mu}{\Delta_k}\left[A_{k-1} r_0^{-(k+1)}\left(\varkappa R^{-(k+2)} r_0^{k-3} + R^{k-2} r_0^{-(k-1)}\right) -\right.$$

$$\left. - (k-2) R^{-k} r_0^{-k}\left(R^2 - r_0^2\right)\bar{A}_{-(k-1)}\right];$$

$$b_k = -\left[\bar{a}_k r_0^{2k} + (k-2) a_{-(k-2)} r_0^2\right]; \qquad \text{(VII.50)}$$

$$a_2 = 2\mu \frac{A_1 \varkappa R^4 - \bar{A}_{-1}}{\varkappa R^8 + r_0^8}; \qquad b_0 = 4\mu R^4 \frac{\bar{A}_1 \varkappa R^4 - A_{-1} r_0^4}{\varkappa R^8 + r_0^8} - \bar{A}_{-1};$$

$$b_2 = 2\mu \frac{A_1 \varkappa R^4 + \bar{A}_{-1} r_0^4}{\varkappa R^8 + r_0^8} R^2 r_0^4.$$

Для определения $r_1(0)$ служит (VII.45)

$$r_1(\theta) = u_0 \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{k} r_0^k \left(a_k e^{i(k-1)\theta} + \bar{a}_k e^{-i(k-1)\theta}\right). \qquad \text{(VII.51)}$$

Таким образом, поле напряжений в угольном пласте в окрестности подготовительной выработки определяется из рассмотрения равновесия упруго-пластического кольца, находящегося под действием давления, приложенного к его внутреннему контуру и заданных смещений внешнего контура. Решение упруго-пластической задачи найдено методом малого параметра, за величину которого принято отклонение смещений внешнего контура от их среднего значения. Найденные напряжения на границе раздела пластической и упругой зон непрерывны с точностью до членов, содержащих квадрат малого параметра.

§ 3. Расчеты напряженно-деформированного состояния массива вокруг подготовительных выработок экспериментально-аналитическим методом

Проиллюстрируем экспериментально-аналитический метод определения напряженно-деформированного состояния пород вокруг полевого штрека примером расчета напряжений в массиве при отработке пласта Горелого щитовым столбом.

Натурные наблюдения за 10 суток отработки показали (рис. VII.3), что профильная линия смещений пород почвы пласта может быть представлена в виде

$$v(x) = k \operatorname{arcctg} \frac{x+c}{b} \qquad \text{(VII.52)}$$

при выборе начала координат на границе угольного пласта с почвой на уровне откаточного горизонта.

Дополнительное, вызванное проведением очистной выработки, напряженное состояние пород почвы описывается формулами (V.14), (V.24), (V.26).

Принимая это состояние в качестве первого этапа определения механического состояния пород вокруг полевого штрека методом, изложенным в § 1, для окружных напряжений, действующих по контуру выработки, имеем

$$\sigma_\theta = \gamma H [(1+\lambda) + 2(1-\lambda)\cos 2(\alpha+\theta)] + \frac{Ek}{1-\nu^2} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sigma + il + c - ib} - \frac{1}{\sigma^{-1} - il + c + ib} - \frac{1}{(\sigma^{-1} - il + c + ib)^2} + \frac{1}{\sigma(\sigma - il + c + ib)^2} + \frac{1}{c - il + ib}\right], \qquad \text{(VII.53)}$$

где l — расстояние от оси штрека до пласта.

Формула (VII.53) получена из (VII.8) при выборе начала координат, совпадающего с осью выработки.

При расчетах окружных напряжений σ_θ приведенный радиус штрека принят равным 1,5 м, расстояние от оси штрека до пласта $l=20$ м, угол падения пласта $\alpha=70°$, отпор крепи $p=0{,}5$ кг/см^2, глубина горных работ $H=200$ м, удельный вес пород $\gamma=2{,}5$ т/м^3, модуль упругости песчаника $E=1\cdot10_5$ кг/см^2, коэффициент бокового распора $\lambda=0{,}8$ и 1, параметры интерполирующей функции $k=6{,}7\cdot10^{-3}$ м, $c=48$ м, $b=22$ м. Очистной забой находился в 44 м от откаточного горизонта. Аналогичный расчет выполнен для

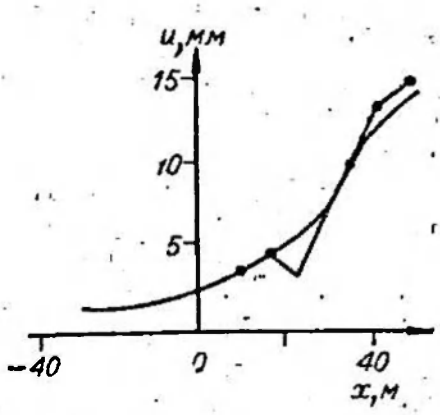


Рис. VII.3. Профильная линия смещений пород почвы при отработке пласта Горелого.

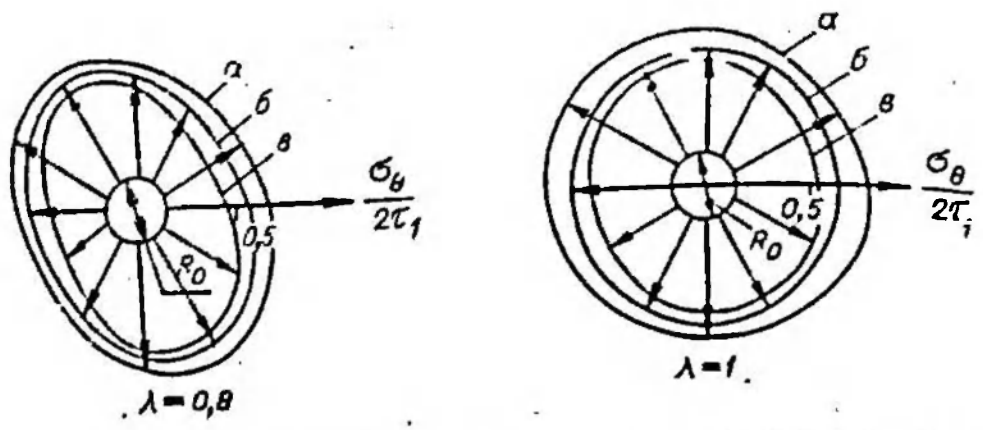


Рис. VII.4. Эпюры напряжений σ_θ на контуре полевой выработки: *а* — в зоне опорного давления: *б* — вне зоны влияния очистных работ; *в* — в зоне разгрузки.

выработки, расположенной в зоне разгрузки, в 44 м позади забоя. Результаты вычислений приведены на рис. VII.4 в виде эпюр безразмерных напряжений $\sigma_\theta/2\tau_*$ при $2\tau_* = 150$ кг/см^2.

Эпюра напряжений $\sigma_\theta/2\tau_*$ для выработок вне зон опорного давления при $\lambda=0{,}8$ имеет форму эллипса, вытянутого в горизонтальном направлении, наибольший размер эллипса (максимальная величина напряжений σ_θ составляет 0,74), наименьший размер (минимальное значение σ_θ) — 0,37. При $\lambda=1$ эпюра есть окружность радиуса 0,65 (напряжения σ_θ распределены по контуру выработки равномерно).

Эксплуатация полевого штрека в зонах опорного давления и разгрузки приводит к деформированию эллипсоидальной и круговой эпюр напряжений σ_θ, причем в зоне опорного давления наибольшие значения напряжений σ_θ равны 0,84 τ_* и 0,82 τ_* при $\lambda=0{,}8$, 1; наименьшие 0,53 τ_* и 0,68 τ_*, а в зоне разгрузки соответственно 0,72 τ_*, 0,63 τ_* и 0,31 τ_*, 0,52 τ_*. В зоне опорного давления наибольшие значения окружных напряжений на контуре превышают соответствующие им значения для выработки вне зоны влияния очистных работ на величине 0,10 τ_* и 0,17 τ_* при $\lambda=0{,}8$; 1 и для выработки в зоне разгрузки на 0,12 τ_*, 0,19 τ_*. Максимальная, вносимая учетом влияния очистных работ, поправка к напряжениям σ_θ в рассмотренном случае 0,17 τ_*.

Действующие в рассмотренных условиях работы штрека напряжения на контуре выработки σ_r и σ_θ таковы, что породы деформируются упруго. Однако с увеличением глубины горных работ или с усилением влияния очистных работ вокруг выработки возможно появление областей пластических деформаций. Так, при глубине горных работ $H=500$ м и неизменных остальных условиях вокруг выработки вне зон влияния очистных работ возникает область пластического состояния массива, границей которой при $\lambda=1$ является окружность радиуса 1,38 R_0 при $\lambda=0{,}8$ — эллипс.

Наибольший размер эллипса равен 1,48 R_0 и направлен горизонтально, наименьший — 1,06 R_0 (рис. VII.5).

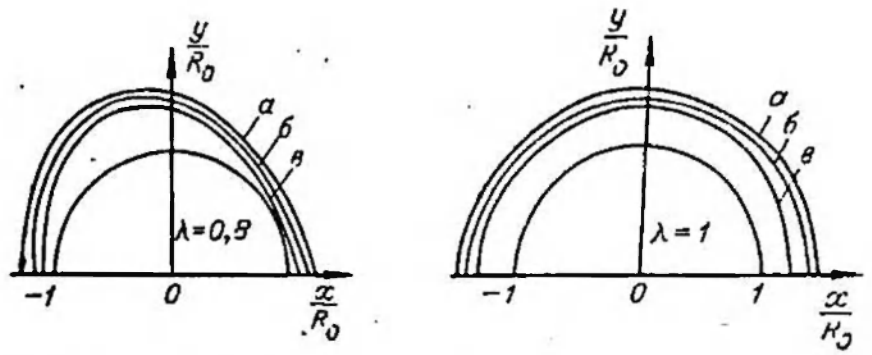


Рис. VII.5. Граница области пластических деформаций пород вокруг полевой выработки: *а* — в зоне опорного давления; *б* — вне зоны влияния очистных работ; *в* — в зоне разгрузки.

Определение зоны пластических деформаций вокруг выработки, находящейся в зоне влияния очистных работ, проведем, ограничиваясь первыми членами A_0 и B_0 разложений (VII.18). Отображающая функция $\omega(\xi)$ имеет вид:

$$\omega(\xi) = c_0\xi + \frac{c_1}{\xi}.$$

Границей пластической зоны будет также эллипс. При эксплуатации выработки в зоне опорного давления наибольший размер пластической зоны равен 1,53 R_0 и 1,46 R_0, наименьший 1,12 R_0 и 1,42 R_0 при $\lambda=0{,}8$ и 1, а для выработки в зоне разгрузки соответственно 1,44 R_0, 1,34 R_0 и 1,03 R_0, 1,32 R_0.

Таким образом, учет влияния очистных выработок приводит к изменению формы упруго-пластической границы и ее размеров. Для полевого штрека в зоне опорного давления наибольший размер области пластического состояния пород превышает соответствующие значения для выработки вне зон влияния работ на величину 0,05 R_0 и 0,08 R_0 при $\lambda=0{,}8$, 1, а для выработки в зоне разгрузки 0,09 R_0; 0,12 R_0. Наибольшая поправка к размерам пластических зон составила величину, равную 0,12 R_0.

При расчетах напряженно-деформированного состояния упруго-пластического угольного пласта вокруг выработки экспериментальный материал о смещениях боковых пород взят из наблюдений при отработке пластов Горелого, Мощного, IV Внутреннего Прокопьевско-Киселевского района Кузбасса и соответствует условиям работы выработок радиусом $R_0=0{,}5$; 1,5 м на пластах мощностью 4—16 м вне зон опорного давления, в зонах остаточного и эксплуатационного опорного давления. Реакция деревянной крепи по замерам принята 0,5 кг/см^2, а металлической из спецпрофиля — 2 кг/см^2. Физико-механические свойства углей приняты по данным лаборатории физико-механических свойств горных пород ИГД СО АН СССР и работ [23—25]. Модуль упругости принимался в пределах от $0{,}40\cdot10^4$ до $0{,}79\cdot10^4$ кг/см^2, предел пластичности τ_* соответственно от 20 до 60 кг/см^2.

При исследовании влияния очистных работ на напряженно-деформированное состояние пласта вокруг выработки радиальные смещения внешнего контура угольного кольца по результатам экспериментов приняты в виде

$$u_r = u_0(1+0{,}1\cos 2\theta), \qquad \text{(VII.54)}$$

где u_0 — осредненная величина смещений внешнего контура кольца; а относительно тангенциальных смещений считается, что

$$v_\theta = 0 \text{ при } r = R. \qquad \text{(VII.55)}$$

Условие (VII.55) соответствует полному сцеплению угольного кольца с жестким в тангенциальном направлении массивом. Уравнение упруго-пластической границы при заданных (VII.54), (VII.55) смещениях внешнего контура угольного кольца будет

$$r_* = r_0 + 0{,}2u_0 r_0\left(3a_3 r_0^{2} - a_{-1} r_0^{-2}\right)\cos 2\theta, \qquad \text{(VII.56)}$$

где коэффициенты a_3, a_{-1} определяются формулой (VII.50), а осредненный радиус — (VII.48).

Рассчитанные по формулам (VII.48), (VII.51), (VII.56) величины безразмерных радиусов пластических зон: осредненного r_0, наибольшего r_{max}, наименьшего r_{min} и угла θ, указывающего направление r_{max}, приведены в таблице.

Осредненный радиус r_0 можно рассматривать как радиус пластической зоны вокруг выработки при равномерно распределенных перемещениях u_0 внешнего контура угольного кольца, т. е. считать решение осесимметричной задачи для выработок вне зон опорного давления, первым приближением при исследовании напряженно-деформированного состояния угольного массива в окрестности выработки, подверженной влиянию очистных работ.

Зависимость осредненного радиуса r_0 области пластических деформаций угля от относительной мощности пласта, предела текучести, смещений боковых пород иллюстрируется графиками (рис. VII.6), прослеживающими рост r_0 от момента возникновения пластической зоны до ее выхода на границу угольного пласта с боковыми породами. Из данных таблицы и графиков следует, что с увеличением мощности пласта при неизменных остальных параметрах размеры области пластического состояния угля вокруг выработки уменьшаются, с увеличением же величин смещений боковых пород радиус пластической зоны растет. Увеличение предела текучести (повышение прочности углей) приводит во всех случаях к уменьшению размеров пластических зон.

Переходя к размерным значениям радиусов пластических зон по данным таблицы, отметим, что приведенные в ней результаты соответствуют условиям работы выработок радиусом $R_0 = 1{,}5$ на пластах мощностью $2m = 12$, 18, 24 м и радиусом $R_0 = 0{,}5$ при $2m = 4$, 6, 8 м.

Вокруг откаточных и вентиляционных штреков ($R_0 = 1{,}5$ м) в пластах мощностью до 16 м во всех случаях образуются обла-

Размеры пластических зон вокруг пластовых подготовительных выработок

Смещения боковых пород u_0 в долях, R_0	Безразмерный модуль всестороннего сжатия, k	$2m/R_0=4$				$2m/R_0=6$				$2m/R_0=8$			
		r_0	r_{max}	r_{min}	θ	r_0	r_{max}	r_{min}	θ	r_0	r_{max}	r_{min}	θ
0,07	67	3,20	3,21	3,15	0	2,10	2,40	1,81	$\pi/2$	1,44	1,66	1,22	$\pi/2$
	50	2,21	2,39	2,03	$\pi/2$	1,41	1,61	1,22	$\pi/2$	—	—	—	—
	44	1,87	2,05	1,68	$\pi/2$	1,21	1,36	1,05	$\pi/2$	—	—	—	—
0,10	67	4,00	—	—	—	3,65	3,93	3,37	$\pi/2$	2,47	2,89	2,06	$\pi/2$
	50	3,47	3,65	3,30	0	2,34	2,65	2,02	$\pi/2$	1,59	1,83	1,34	$\pi/2$
	44	2,96	3,00	2,92	$\pi/2$	1,92	2,20	1,65	$\pi/2$	1,33	1,53	1,14	$\pi/2$
0,20	67	4	—	—	—	6	—	—	—	8	—	—	—
	50	4	—	—	—	6	—	—	—	5,00	5,38	4,62	$\pi/2$
	44	4	—	—	—	5,43	5,85	5,01	0	3,99	4,49	3,49	$\pi/2$

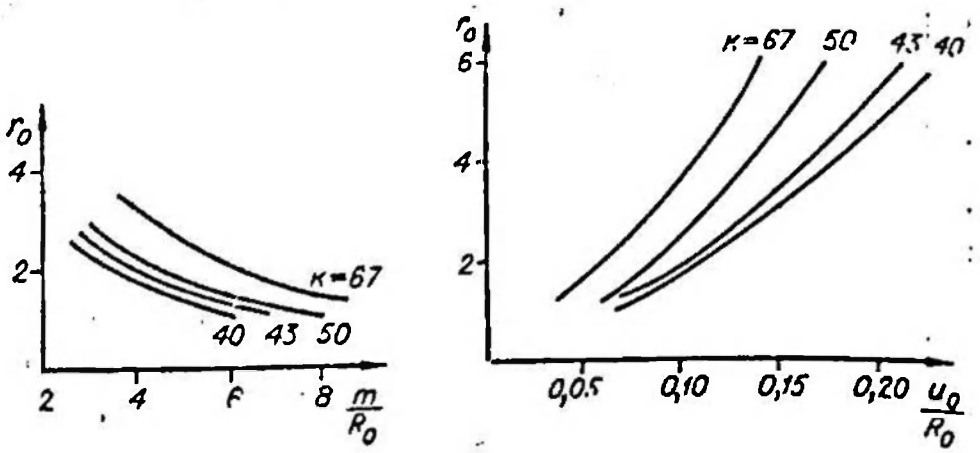


Рис. VII.6. Зависимость осредненного радиуса пластической зоны: *а* — от мощности пласта; *б* — от смещений боковых пород.

сти пластического состояния угля, причем в пластах мощностью меньше 12 м размеры этой зоны почти всегда достигают мощности пласта, т. е. в пластическое состояние переходит весь пласт вокруг выработки. Вокруг сбоек ходовых и углеспускных печей (R_0=0,5 м) пластические зоны при тех же мощностях пласта значительно меньше. При таких размерах областей пластических деформаций перекрытие пластических зон вокруг печей при щитовой системе разработки может происходить только в зонах эксплуатационного опорного давления (u_0=0,2 R_0), причем в ближайшей к выработанному пространству части щитового забоя. Следовательно, здесь возможно разрушение межщитовых целиков и целиков между печами.

При смещениях (VII.54) внешнего контура угольного кольца упруго-пластической границей является овал (рис. VII.7), уравнение которого дается (VII.56). Из (VII.56) следует, что при $3a_3r_0^2 - a_{-1}r_0^{-2} > 0$ овал вытянут перпендикулярно пласту, а при $3a_3r_0^2 - a_{-1}r_0^{-2} < 0$ — по падению. В случае $3a_3r_0^2 - a_{-1}r_0^{-2} = 0$, упругопластическая граница есть окружность радиуса r_0. Величины a_3, a_{-1} рассчитываются по формулам (VII.50) и однозначно определяются совокупностью факторов, обусловливающих работу пластовой подготовительной выработки.

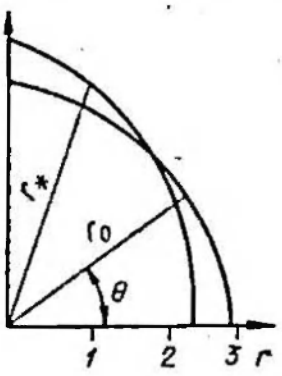


Рис. VII.7. Граница области пластического состояния угля вокруг выработки.

В рассмотренных условиях предельное значение r_0, при котором происходит изменение направления r_{max}, составляет величину m=(1,2÷1,3) R_0. Причина изменения направления r_{max} от значений $\theta = \frac{\pi}{2}$ до θ=0 при увеличении пластической зоны заключается в касательных напряжениях $\tau_{r\theta}$, действующих по внешнему контуру угольного кольца, обусловленных полным

сцеплением массива с кольцом. При толщине упругой части кольца $m—r_0 \leqslant (1{,}2 \div 1{,}3)\ R_0$ напряжения τ_{r_0} являются определяющим фактором ориентации r_{max}, с увеличением размеров упругой зоны их влияние уменьшается.

Максимальная разность $r_{max}—r_{min}$ между наибольшим и наименьшим размерами областей пластического состояния пласта в рассмотренном примере (см. таблицу) определения напряженно-деформированного состояния угольного массива вокруг выработки составила R_0 — величину, равную радиусу выработки, а максимальное отношение r_{max}/r_{min} равно 1,4. Следовательно, отклонение смещений внешнего контура угольного кольца от осесимметричных (не более, чем на 10%) приводит к превышению наибольшего радиуса пластической области, по сравнению с осреднением, на величину, достигающую половины радиуса выработки, кроме того, наибольший размер пластической области превышает наименьший в 1,4 раза.

Таким образом, введение в задачу определения напряженного состояния горного массива в окрестности подготовительных выработок натурных данных о смещениях боковых пород позволяет рассчитать напряжения, действующие в породах, окружающих выработку, размеры и форму областей пластических деформаций. Полученные результаты могут быть использованы при выборе места заложения выработки, определении параметров ее крепи.

ГЛАВА VIII

РАЗВИТИЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

§ 1. Варианты и разработки экспериментально-аналитического метода определения напряженно-деформированного состояния массива

Экспериментально-теоретический подход в исследованиях механического состояния горного массива, разработанный в лаборатории горного давления ИГД СО АН СССР в 1965 г. и основанный на синтезировании экспериментальных и аналитических методов изучения горного давления, был использован научно-исследовательскими организациями страны при решении практических вопросов горного дела.

Вариант экспериментально-аналитического метода исследования защитного действия, созданный в отделе горных ударов ВНИМИ, основан на измерении упругих перемещений надрабатываемого слоя пород с последующей экстраполяцией их в смещения почвы отрабатываемого пласта, расчете по этим смещениям напряжений в надработанном массиве пород и определении размеров защищенных зон [33, 85].

При расчете напряженного состояния массива используется решение плоской задачи теории упругости об определении напряжений в полуплоскости по найденным экспериментально граничным значениям вертикальных смещений и гипотезе взаимодействия по границе надрабатываемого массива с отрабатываемым пластом — проскальзывание без трения (см. задачу С, § 1 гл. V).

Дополнительные напряжения в надработанном массиве находятся по формулам:

$$X_x,\ Y_y(x, y) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} A_4 \mp A_3\right) \frac{dv(t)}{dt}\, dt;$$

$$X_y(x,\ y) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} A_1 \frac{dv(t)}{dt}\, dt, \qquad \text{(VIII.1)}$$

где

$$A_1 = -\frac{y}{\pi} \frac{(t-x)^2 - y^2}{[(t-x)^2 + y^2]^2};\quad A_3 = \frac{2y^2}{\pi} \frac{t-x}{[(t-x)^2 + y^2]^2};$$

$$A_4 = \frac{2}{\pi} \frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2}.$$

Здесь E, ν — средневзвешенные значения упругих констант надрабатываемого массива; $v(l)$ — смещения точек границы полуплоскости. Форма решения в виде (VIII.1) удобна при вычислении интегралов приближенными методами в случае задания граничной функции $\frac{dv(l)}{dl}$ (производные от перемещений по горизонтальной координате) численными значениями и не требует интерполяции профильных линий смещений.

Определение смещений надрабатываемого массива проводится шахтными экспериментами по специально разработанной методике инструментальных наблюдений, опирающейся в основном на учащенные краткосрочные наблюдения скоростей смещений [85]. Подобный способ наблюдений позволяет фактически измерять производную от смещений по координате, совпадающей с направлением подвигания забоя,

$$\frac{dv}{dx} \approx \frac{\omega}{u_*}, \qquad \text{(VIII.2)}$$

где $\omega = dv/d\tau$ — скорость изменения перемещений в точке (смещения, вызванные единичным подвиганием забоя), u_* — скорость подвигания забоя.

Измерение скоростей, пересчет по ним конечных смещений обоснован и просто реализуется для небольших очистных выработок в горнотехнических обстановках, близких к расчетной схеме плоской задачи. Для условий, отклоняющихся от идеализированной схемы, в случаях сложной горнотехнической обстановки при расчетах экспериментально-аналитическим методом необходима информация о конечных профильных линиях смещений, а сам метод является наиболее возможным для определения напряженного состояния массива.

Методика натурных наблюдений и экспериментально-аналитического расчета, разработанная ВНИМИ, предполагает эмпирический учет пространственного характера задачи, переход к пространственной картине смещений надработанных пород и расчеты по смещениям пространственной границы защищенной зоны.

Параллельно с экспериментально-аналитическим методом расчета защищенных зон в отделе горных ударов ВНИМИ разрабатывался теоретический метод, основанный на задании эпюры нагрузок на почву отрабатываемого (защитного) пласта и почву выработки и расчета напряженного состояния надработанного массива, рассматриваемого как однородная упругая полуплоскость [33].

Используя принцип неизменности безразмерных напряжений, осуществляли сравнение результатов расчетов теоретическим и экспериментально-аналитическим методом, причем натурные наблюдения за смещениями проводили в условиях, максимально приближенных к схеме, лежащей в основе аналитического расчета. Расхождение результатов расчетов напряжений для усло-

вий Воркуты не превысило 25%, а максимальное отклонение границ защищенных зон друг от друга не превышало 3,6%. Весьма удовлетворительная степень сходимости позволяет сделать вывод о справедливости допущений об упругости надрабатываемого массива, положенных в основу аналитического и экспериментально-аналитического метода.

Сибирским филиалом ВНИМИ экспериментально-аналитический метод использовался для определения напряженного состояния надработанного массива в следующем варианте [5, 6].

Натурные наблюдения за деформациями массива проводились в подготовительных выработках надрабатываемых пластов. Они позволили определить нормальные относительные деформации пород, вызванные отработкой вышележащего пласта. Приняв за основу задачу С (§ I, гл. V) при интерполирующих типовых функциях (VI.1) и (VI.10), замеренные деформации сравнивали с рассчитанными, что позволяло определять параметры интерполирующих функций в почве отрабатываемого пласта и рассчитывать напряженное состояние надрабатываемого массива.

Существенные усовершенствования экспериментально-аналитического метода были проведены в Кузбасском политехническом институте. Основным качественным усовершенствованием является учет анизотропии свойств пород при экспериментально-аналитическом определении напряженного состояния упругого горного массива.

При использовании метода С. Г. Лехницкого [55, 57], являющегося обобщением метода Н. И. Мусхелишвили для изотропной среды, получено решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного массива пород (полуплоскости) по известному на границе вектору сдвижений [73] или замеренным на границе компонентам деформации.

Основные предложения по усовершенствованию метода определения напряженного состояния пород по замеренным смещениям точек некоторой границы заключаются в следующем.

Горный массив рассматривается как трансверсально-изотропная среда, характеризующаяся одним параметром анизотропии p. Понятие степени анизотропии, определяемое параметром

$$p = \frac{E_1}{E_2}, \qquad \text{(VIII.3)}$$

где E_1, E_2 — модули Юнга для растяжения — сжатия в плоскости напластования и в направлении, нормальном к ней, введено в силу установленной связи между упругими константами горных пород

$$G_{1,2} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2\mu_{1,2} E_2}. \qquad \text{(VIII.4)}$$

Здесь $G_{1,2}$ — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости напластования; $\mu_{1,2}$ — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном плоскости напластования при сжатии в ней. Введение параметра анизотропии (VIII.3) существенно облегчило задачу исследования напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного массива, так как требует лишь относительно простых экспериментов по определению модулей упругости E_1 и E_2.

В качестве первого граничного условия используются замеренные на границе нормальные смещения пород $(v=F(x))$.

Вторым граничным условием принимается связь между смещениями

$$u = c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + c_2 v, \qquad \text{(VIII.5)}$$

ранее предложенная для подрабатываемого массива С. Г. Авершиным [1—3].

Решение сформулированной второй основной задачи для анизотропной среды сводится к определению двух аналитических функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, усложненных комплексных переменных $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=\mu_2 y$, где μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения [57]. Получены расчетные формулы напряженно-деформированного состояния анизотропного горного массива для типовых профильных смещений (VI.1), (VI.10) [73].

Расчеты напряженного состояния с использованием в качестве второго граничного условия связи $u = cv_x$ показали, что при определенном подборе коэффициентов связи могут быть получены картины напряжений, рассчитанные с использованием гипотез проскальзывания или сцепления. Следует отметить, что практическое использование в качестве граничного условия связи (VIII.5) в настоящее время затруднено, так как не имеется достаточного объема данных о величинах коэффициентов C_1, C_2.

Другим усовершенствованием экспериментально-аналитического метода, разработанным в Кузбасском политехническом институте, является метод определения напряжений по замеренным в массиве на некоторой границе трем независимым компонентам деформации e_x, e_y, $e_{45°}$ (деформации в направлениях, параллельном и перпендикулярном напластованию и под углом 45° к нему) [72]. Замеренные компоненты деформации позволяют по формулам теории упругости или анизотропного тела рассчитать значения нормального (Y_y) и касательного (X_y) напряжений в точке границы и тем самым сформулировать граничные условия первой основной задачи для полуплоскости. Решение ее проводится методом Н. И. Мусхелишвили [67] для изотропного массива и методом С. Г. Лехницкого [57] для анизотропного массива). Чтобы избежать интерполяции экспериментальных точечных значений напряжений, рассчитанных по замеренным деформациям, предлагается заменять напряжения рядом сосредоточенных сил, приложенных в тех точках границы, где произ-

водились измерения. В этом случае, согласно принципу Сен-Венана, напряженное состояние в массиве на расстоянии не менее полутора расстояний между точками замера мало зависит от способа приложения нагрузки на границе. Подобный подход позволил получить простые алгебраические выражения для расчета напряжений в массиве пород по замеренным на границе деформациям [72].

Расчеты напряженного состояния массива по деформациям, естественно, наиболее надежны, так как приводят к первой основной задаче и не требуют введения в качестве граничных условий гипотез взаимодействия. Однако сложности измерения трех независимых компонент деформации в ряде точек и определения упругих характеристик в двух направлениях затрудняют применение метода определения напряженного состояния по деформациям.

В ряде работ были предприняты попытки исследования напряженного состояния угольного пласта на основе экспериментально-теоретического подхода.

В ИГД СО АН СССР и КузНИУИ разрабатывался [27, 66] экспериментально-аналитический метод определения напряженного состояния угольного пласта для задач, сформулированных в главе IV, но при решении плоских задач теории упругости применялся метод Н. И. Мусхелишвили [67] с использованием конформного отображения.

В качестве отображающей функции выбиралось выражение

$$z = \omega(\xi) = -\frac{h}{\pi} \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \qquad \text{(VIII.6)}$$

реализующее отображение нижней полуплоскости $\eta < 0$ комплексной переменной $\xi = \zeta + i\eta$ на полуполосу $x \geqslant 0$, $0 \geqslant y \geqslant -h$ плоскости $z = x + iy$. При отображении участки действительной оси $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ плоскости ξ являются образами продольных кромок полуполосы, а участок $(-1, 1)$ — образом торца полуполосы.

Рассматривались следующие краевые задачи теории упругости для полуполосы.

Торец полуполосы во всех вариантах предлагался незагруженным. На продольных кромках пласта (полуполосы) известны нормальные к границе и касательные напряжения (первая основная задача). На продольных кромках полуполосы известны компоненты вектора перемещений (третья основная задача).

На продольных кромках известны нормальная к границе компонента вектора перемещений и касательные напряжения или нормальные напряжения и нормальная компонента вектора перемещений вдоль кромки (смешанная задача).

Нормальные и касательные напряжения на кромках могут быть определены из аналитических исследований напряженного состояния или экспериментально-аналитических расчетов по на-

блюдаемым смещениям вмещающих пород или замерены натурными методами. Касательные напряжения, например, могут задаваться исходя из гипотез взаимодействия вмещающих пород и пласта. Натурные методы исследования проявлений горного давления могут дать информацию о векторе перемещений на кромках или смещениях, нормальных к кромкам, а компонента смещений вдоль пласта принята, исходя из гипотезы жесткого сцепления.

Напряженно-деформированное состояние в полуполосе, а также напряженное состояние в отображенной полуплоскости, выражается [27, 66] через аналитические функции $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ в отображенной полуплоскости. Используя возможность аналитического продолжения функции $\Phi(\xi)$ в верхнюю полуплоскость через участок границы $(-1,1)$, являющийся образом незагруженного торца полуполосы, функцию $\Psi(\xi)$ и напряженное состояние можно выразить через одну функцию $\Phi(\xi)$, определенную как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Граничные условия позволяют сформулировать краевые задачи для определения функции $\Phi(\xi)$, методы решения которых разработаны [20].

Для упрощения аналитического решения предлагается аппроксимировать граничные условия по напряжениям или смещениям, отображенным в плоскость ξ, дробно-рациональной функцией или суперпозицией таких функций. Схема расчета напряженного состояния угольного пласта в этом случае предполагает получение информации из экспериментальных или аналитических исследований о напряжениях или смещениях, преобразование исходной информации для работы в плоскости ξ, аппроксимацию преобразованной информации дробно-рациональными функциями и расчет напряженного состояния.

В случае известной эпюры опорного давления предлагается способ ориентировочной оценки упруго-пластического напряженного состояния угольного пласта.

Для пластической прямоугольной призабойной зоны, отделенной от упругой зоны прямолинейной границей, напряженное состояние можно описывать решением Прандтля [86] для нагруженного пластического слоя. Грудь забоя (торец полуполосы) в этом случае считается свободной от напряжений в смысле Сен-Венана. Известные на границе напряжения позволяют определить параметры пластичности и из условия непрерывности компонент напряжений на упруго-пластической границе граничные условия торца упругой зоны (полуполосы). Решение задачи теории упругости для полуполосы с заданными на торце и продольных кромках напряжениями может быть получено методом Н. И. Мусхелишвили с использованием конформных отображений, описанным выше, в виде суммы решений задачи для полуполосы с загруженными кромками и свободным торцом и решаемой аналогично задачи для полуполосы с загруженным торцом и свободными продольными кромками.

Трудность применения описанного метода исследования напряженного состояния угольного пласта заключается в сложности аппроксимации граничных условий, отображенных в плоскости ζ дробно-рациональными функциями, и произвольности выбора упруго-пластической границы в пласте. Рассмотренный в главе IV метод определения напряженного состояния упругого угольного пласта с использованием интегральных преобразований Фурье представляется более эффективным с точки зрения реализации расчетов.

В отделе горных ударов ВНИМИ для определения напряженного состояния упругого угольного пласта по известным на границе напряжениям был использован метод конечных элементов [77].

Угольный пласт моделировался прямоугольной невесомой пластиной, на продольных кромках которой приложены симметричные нормальные к границе и кососимметричные касательные напряжения, полученные аналитически, один торец (забой) не нагружен, другой (в нетронутом угольном пласте) загружен первоначальным боковым распором.

При численном решении пластина аппроксимировалась 1250 треугольными элементами конечных размеров с 715 узлами, что обеспечивало точность расчетов по программе решения плоской задачи теории упругости методом конечных элементов на ЭВМ М-220 [32]. Были проведены расчеты напряжений для различных мощностей пласта и ширины выработки, пластических и упругих характеристик пород, определяющих эпюры напряжений на пласт, и расстояний до максимума опорного давления. Расчеты показали, что в пластах мощностью 1—3 м нормальные напряжения и деформации мало меняются по мощности, а касательные напряжения и сдвиги распределяются линейно по мощности. Однако в зоне максимума опорного давления продольные нормальные напряжения и деформации несколько изменяются по мощности, а максимум перемещается в сторону забоя.

Таким образом, разработки экспериментально-аналитического метода определения напряженно-деформированного состояния массива пород велись путем уточнений в постановках, разработках решений задач и приложений разработанных решений к специфическим условиям исследуемого массива и натурным замерам проявлений горного давления.

§ 2. Практическое применение экспериментально-аналитического метода исследований горного давления

При разработке теории и обобщении практики использования защитных пластов ВНИМИ и его филиалы проводили комплексные исследования, включающие, в частности, расчеты границ

защищенных зон в надработанном массиве пород экспериментально-аналитическим методом.

Отделом горных ударов ВНИМИ в Воркуте осуществлен комплекс шахтных наблюдений перемещений пород на уровне пласта Четвертого (шахта № 25 комбината «Воркутауголь») при отработке целого бремсбергового поля на вышележащем пласте Тройном и произведены экспериментально-аналитические расчеты напряженного состояния надработанного массива [33, 85]. Расчеты на ЭВМ позволили определить границы и размеры защищенных зон при различной ширине очистной выработки, выяснить участки, угрожаемые и неопасные по горным ударам.

Опыт экспериментально-аналитических исследований надработанного массива в Воркуте был использован при исследованиях защитного действия пластов в условиях Карагандинского бассейна. Наблюдения за перемещениями пород в Карагандинском бассейне показали качественное совпадение с результатами наблюдений в Воркуте при некоторых количественных особенностях. В области опорного давления была отмечена также особенность развития деформаций при неподвижном забое, которая условно принималась за проявления ползучести пород; в Воркуте эти проявления были весьма незначительными.

Сравнение аналитического и экспериментально-аналитического расчетов напряжений в Воркуте дало отклонения в 25%, в Караганде — 40—60%. Если отклонения расчетов в Воркуте приемлемы, то объяснение отклонений расчетов в Караганде можно искать как в неучете реологических свойств пород, так и в эмпирических приемах интерпретации исходных данных [33].

При разработке пласта *В* на шахте № 8 Шурабского месторождения была проведена оценка напряжений в зоне опорного давления и разгрузки экспериментально-аналитическим методом [33]. На основе наблюдений за перемещениями реперов, расположенных в пласте ниже почвы отрабатываемого первого (защитного) слоя, расчетами установлена концентрация опорного давления, распределение пригрузки и разгрузки в надрабатываемых слоях пласта.

Разработанный Сибирским филиалом ВНИМИ вариант применен для количественных оценок параметров защитного действия в сложных условиях Кузбасса. Были проведены натурные наблюдения, рассчитано напряженное состояние и определены параметры защитной выемки при разработке с обрушением кровли пластов Кемеровского, Надмощного, Горелого, IV и VI Внутреннего, верхнего слоя пласта Мощного и пласта 11 на шахте им. Орджоникидзе [5, 6]. Расчеты позволили определить границы зоны разгрузки надработанного массива на разрезах вкрест простирания и по простиранию, закон изменения коэффициента концентраций в зоне разгрузки и разработать практические схемы защиты удароопасных пластов.

Варианты экспериментально-аналитического метода, разработанные в ИГД СО АН СССР, использовались для исследова-

ния горного давления при разработке одиночных пластов угольных бассейнов страны.

В Кузбасском научно-исследовательском угольном институте метод применялся при оценке напряженно-деформированного состояния кровли и работы индивидуальных крепей в лавах пологих пластов Кузбасса. По натурным наблюдениям за смещениями кровли при отработке пласта Инского III (шахта Полысаевская-2), пласта IV (шахта Чертинская—Южная), пласта XXVII (шахта Березовская-1) и при работе комплексом ОМКТ в условиях Томусинского месторождения экспериментально-аналитическим методом определялось перераспределение напряжений, позволившее выявить влияние технологических процессов горно-геологических и горнотехнических факторов на напряженное состояние массива пород [65, 81, 92].

В Кизеловском угольном бассейне сотрудниками Пермского научно-исследовательского института проводились инструментальные измерения смещений вмещающих пород при отработке пластов угрожаемых и опасных по горным ударам с целью выбора способов и средств управления кровлей [41]. Экспериментально-аналитическим методом оценивались изменения напряженного состояния при минимальных и максимальных опусканиях кровли за посадочный цикл при механизированной выемке пласта на шахте Широковской. Расчеты показали, что увеличение приращений смещений кровли за посадочный цикл в 2 раза приводит к возрастанию приращений напряженного состояния в 4 раза, что, естественно, способствует повышению удароопасности.

При изучении проявлений горного давления в лавах тонких крутых пластов Донбасса, оборудованных механизированными крепями, сотрудники Днепропетровского горного института использовали экспериментально-аналитический метод для установления влияния схемы передвижения крепей на напряженное состояние боковых пород [39, 40]. Сравнение напряженного состояния, определенного расчетами по замеренным смещениям пород кровли очистной выработки при креплении ее индивидуальной деревянной и механизированными крепями, показало, что при механизированных крепях с фронтальной и фланговой схемами передвижения возникающие приращения напряжений практически одинаковы и в 2—4 раза меньше, чем при деревянной крепи. Таким образом с точки зрения проявлений горного давления применение механизированных крепей улучшает состояние кровли и способствует безопасной и высокопроизводительной работе очистного забоя.

Исследования влияния основных производственных процессов и расположения забоя на напряженное состояние горного массива при отработке крутых выбросоопасных пластов Центрального района Донбасса проводились в Днепропетровском горном институте [53, 82] экспериментально-аналитическим методом, разработанным ИГД СО АН СССР и КузНИУИ [27, 66].

Методика исследований предполагала экспериментальное определение смещений кровли, экспериментально-аналитическое определение напряженного состояния кровли и угольного пласта в сопоставимых горно-геологических условиях при неизменном способе выемки угля — комбайном УКР-1 для случаев удержания пород кровли на кострах, обрушения их на механизированную крепь, при полной гидравлической закладке выработанного пространства и при обрушении кровли на щитовую крепь [39, 40].

Обобщение результатов натурных и экспериментально-аналитических исследований напряженного состояния призабойной части пластов позволило сделать ряд практических выводов и рекомендаций по совершенствованию технологии очистных работ на крутых выбросоопасных пластах Донбасса. Так, наиболее благоприятная величина и характер напряженного состояния для забоев, подвигающихся по простиранию, имеет место при обрушении пород кровли на механизированную крепь· разработка выбросоопасных пластов наиболее благоприятна по фактору горного давления при расположении забоя по простиранию с подвиганием его по падению. Анализ результатов исследований напряженного состояния горного массива позволил обоснованно разработать технические требования на механизированные комплексы, более полно отвечающие условиям разработки выбросоопасных крутых пластов с неустойчивыми и трудноуправляемыми боковыми породами.

Таким образом, экспериментально-аналитический метод определения напряженно-деформированного состояния массива горных пород применялся для решения практических вопросов горного давления при отработке пластов основных каменноугольных бассейнов страны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авершин С. Г. Горные удары. М., Углетехиздат, 1955. 236 с.
2. Авершин С. Г. Расчет деформаций массива горных пород под влиянием подземных разработок. Л., ВНИМИ, 1960, 87 с.
3. Авершин С. Г. Сдвижение горных пород при подземных разработках. М., Углетехиздат, 1947, 245 с.
4. Акимов В. С., Цыпаркин В. Н., Остросаблин Н. И. Упругое равновесие пород вокруг полевого штрека, находящегося в зонах влияния очистных работ.— В кн.: Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. Новосибирск, 1971, с. 36—42.
5. Аман И. П. Исследование параметров защитной выемки при разработке с обрушением кровли свит мощных крутопадающих пластов Кузбасса, включающих пласты, опасные по горным ударам. Автореф. канд. дис. Кемерово, 1960, 16 с.
6. Аман И. П., Фикс И. И., Егоров П. В. Напряженно-деформированное состояние массива, надработанного с закладкой.— В кн.: Аналитические методы и вычислительная техника в механизме горных пород. Новосибирск. 1971, с. 53—59.
7. Ардашев К. А. и др. Совершенствование управления горным давлением. М., «Недра», 1967, 289 с.
8. Баренблатт Г. П., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках.— «Изв. АН СССР». ОТН, 1955, № 11, с. 73—86.
9. Беленький М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы.— «Прикл. матем. и механика», 1952, т. XVI, в. 3, с. 283—292.
10. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двухсвязных областей. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962, 231 с.
11. Бирман С. Е. К задаче об упругом равновесии бесконечной полосы. «Докл. АН СССР», 1948, т. XII, № 2.
12. Вайсман А. М., Вдовин В. Е., Кунин И. А. О горном давлении в окрестности выработок в горизонтальных пластах.— В кн.: Математические методы в горном деле. Ч. II. Новосибирск, 1963, с. 73—86.
13. Вайсман А. М., Вдовин В. Е., Кунин И. А. О горном давлении в окрестности выработок в крутопадающих пластах.— В кн.: Математические методы в горном деле. Ч. II. Новосибирск, 1963, с. 87—96.

14. Вайсман А. М., Вдовин В. Е., Кунин И. А. О постановке и методах решения некоторых задач горного давления.— В кн.: Математические методы в горном деле. Ч. II. Новосибирск, 1963, с. 60—72.

15. Вайсман А. М., Кунин И. А., Тупицын К. К. Воздействие горного давления на вертикальную выработку в условиях ползучести горных пород.— В кн.: «Вопросы горного давления», 1962, вып. 13, с. 3—23.

16. Вайсман А. М., Соснина Э. Г., Змеева А. А. О горном давлении при совместной разработке двух сближенных горизонтальных пластов.— В кн.: Проблемы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1966, с. 61—76.

17. Власенко Б. В. Экспериментально-аналитическое определение напряженного состояния горного массива при отработке угольных пластов. Автореф. канд. дис. Алма-Ата, 1968, 11 с.

18. Ворович И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы.— «Прикл. матем. и механика», 1966, т. 30, вып. 1, с. 109—115.

19. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953, 264 с.

20. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Гос. изд. физ.-мат. л-ры, 1963, 639 с.

21. Гмошинский В. Г. Горное давление на пологий пласт в окрестности выработки.— «Уголь», 1957, № 6, с. 16—23.

22. Горное давление на мощных крутых пластах. Новосибирск, «Наука», 1967, 214 с.

23. Грицко Г. И., Акимов В. С. Определение напряженно-деформированного состояния упруго-пластического угольного массива вокруг подготовительной выработки по смещениям боковых пород пласта.— В кн.: Горное давление в капитальных и подготовительных выработках Кузбасса. Новосибирск, «Наука», 1969, с. 3—13.

24. Грицко Г. И., Акимов В. С., Цыцаркин В. Н., Охотников Ю. С. Экспериментально-аналитическое определение напряженно-деформированного состояния массива вокруг полевого штрека, подверженного влиянию очистных работ.— В кн.: Аналитические методы и вычислительная техника в механике горных пород. Новосибирск, 1971, с. 99—107.

25. Грицко Г. И., Акимов В. С. Экспериментально-аналитический метод расчета напряжений в упруго-пластическом угольном пласте вокруг выработки.— В кн.: Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. Новосибирск, 1971, с. 3—12.

26. Грицко Г. И. Анализ формирования и расчет напряженно-деформированного состояния горного массива при разработке мощных крутых пластов Кузбасса. Автореф. докт. дис., Новосибирск, 1968, 39 с.

27. Грицко Г. И., Власенко Б. В., Мусалимов В. М. Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в угольном пласте.— ФТПРПИ, 1971, № 1, с. 3—10.

28. Джанлелидзе Г. Ю. Концентрация напряжений на краю кругового отверстия в равномерно напряженном поле при пластической деформации.— «Труды ЛПИ», № 3, Л., 1947, с. 111—117.

29. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок.— В кн.: Труды совещания по управлению горным давлением. М.—Л., Изд. АН СССР, 1938, с. 7—55.

30. Дрожжин В. В. Исследование напряженного состояния угольного массива при отработке пологих пластов короткими забоями. Автореф. канд. дис. Кемерово, 1970, 20 с.

31. Ержанов Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. Алма-Ата, «Наука», 1964, 175 с.

32. Ефимов Ю. И., Сапожников Л. Б., Троицкий А. П. Реализация метода конечных элементов на ЭВМ для решения плоской задачи теории упругости.— «Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева». М.— Л., 1970, т. 93, с. 81—101.

33. Защитные пласты. Л., «Недра», 1972, 424 с.

34. Игнатьева А. Д. Исследования устойчивости очистного забоя. М., «Наука», 1967, 91 с.

35. Инденбом В. Л., Даниловская В. П. Новый класс точных решений бигармонической задачи для полуполосы.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 6, с. 1319—1322.

36. Исмагилов Р. Х. О связи между средним главным напряжением и главными деформациями.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1970, вып. IV, с. 135—139.

37. Карпенко Л. Н. Напряжения в плоскости с эллиптическим отверстием, близким к границе.— В кн.: Математические методы в горном деле. Ч. II. Новосибирск, 1963, с. 96—112.

38. Карпенко Л. Н. О методе расчета напряженного состояния в окрестности неглубокой выработки, пройденной по вертикальному угольному пласту.— ФТПРПИ, 1965, № 4, с. 3—7.

39. Кияшко И. А., Зильберман А. И., Бабец Ю. Н., Темченко Г. Д., Кушнир С. Я., Чумак И. Ф. Исследования влияния схемы передвижения механизированной крепи на напряженное состояние пород кровли.— В кн.: Аналитические методы и вычислительная техника в механике горных пород. Новосибирск, 1971, с. 60—70.

40. Кияшко И. А., Зильберман А. И., Бабец Ю. Н. и др. О влиянии схемы передвижения механизированных крепей на напряженное состояние боковых пород крутых пластов.— «Уголь Украины», 1963, № 3, с. 8—10.

41. Ковтун В. Я., Берестнев С. В., Лапин Г. Л., Карандашов В. П. К выбору способов и средств управления кровлей на угрожаемых и опасных по горным ударам пластах Кизеловского угольного бассейна.— В кн.: Технология и безопасность горных работ. Пермь, Изд. РИОППИ, 1972, вып. 115, с. 42—49.

42. Кораблев А. А. Исследование горного давления геофизическими методами. М., «Наука», 1967.

43. Кораблев А. А. Современные методы и приборы для изучения напряженного состояния в глубине массива горных пород.— В кн.: Методы и приборы для изучения горного давления. М., «Недра», 1969, 128 с.

44. Космодамианский А. С. Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых выработок.— «Изв. АН СССР. ОТН, Механ. и машиностр.», 1961, № 4, с. 187—188.

45. Космодамианский А. С. О напряженном состоянии упругого изотропного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения.— В кн.: Исслед.

горн. давления и сдвижения горных пород. Л., 1961, с. 20—31 («Труды ВНИМИ», вып. 42).

46. Крыжановская Т. А. Взаимосвязь сдвижения и давления горных пород при проведении горизонтальных горных выработок.— «Изв. Киев. политехн. ин-та», 1956, т. XVII, с. 277—308.

47. Кузнецов С. В. Влияние касательных напряжений на контактной поверхности пласта и породы на напряженное состояние горного массива.— ФТПРПИ, 1970, № 4. с. 10—20.

48. Кузнецов С. В. Напряженное состояние горного массива и его влияние на движение газа в угольных пластах. Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1968, 35 с.

49. Кузнецов С. В. Некоторые закономерности и соотношения, определяющие посадку лавы.— ФТПРПИ, 1966, № 5.

50. Кузнецов С. В. Об управлении кровлей горной выработки.— В кн.: Математические методы в горном деле. Ч. II. Новосибирск, 1963, с. 33—59.

51. Кузнецов С. В. Об управлении кровлей горной выработки с учетом крепи и целиков угля в выработанном пространстве.— ПМТФ, 1964, № 4.

52. Кузнецов С. В., Хапилова Н. С. Об определении момента обрушения кровли.— ФТПРПИ, 1969, № 5, с. 19—23.

53. Кушнир С. Я. Исследование влияния производственных процессов и расположения забоя на напряженно-деформированное состояние горного массива вокруг очистной выработки (условия Центрального района Донбасса). Автореф. канд. дис. Днепропетровск, 1971, 24 с.

54. Лапидус Л. С. Об учете фактора времени при исследовании деформации горных пород.— В кн.: Вопросы геотехники. М., Трансжелдориздат, 1960.

55. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат. 1957, с. 463.

56. Лехницкий С. Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения.— В кн.: Труды по вопр. горного давления, сдвижения горных пород и методике маркшейдерских работ. Л., 1962, с. 155—179 («Труды ВНИМИ», т. 45).

57. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950, 300 с.

58. Либерман Л. К. Исследование напряженно-деформированного состояния массива горных пород вокруг очистной выработки до первой посадки. Автореф. канд. дис. М., 1967, 13 с.

59. Либерман Ю. М. К вопросу об опорном давлении впереди очистного забоя.— В кн.: Физико-механические свойства, давление и разрушение горных пород. Вып. 1. М., Изд. АН СССР., 1962, с. 86—95.

60. Лыткин В. А., Фатиева Н. И. Напряженное состояние основания под фундаментами глубокого заложения.— «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1970, № 4, с. 8—11.

61. Мек Г. Расчет полубесконечной полосы, подкрепленной полками с постоянным напряжением при сосредоточенном нагружении.— «Прикладная механика». 1966, № 3, с. 107—111.

62. Мельников Е. А., Трумбачев В. Ф. Распределение напряжений в междукамерных целиках и потолочинах. М., Госгортехиздат, 1961, 104 с.

63. Михлин С. Г. О напряжениях в породе над угольным пластом.— «Изв. АН СССР. ОТН», 1942, № 7—8, с. 13—28.

64. Михлин С. Г. Об основной задаче в теории горного давления.— «Докл. АН СССР», 1954, т. XIX. № 9.

65. Мусалимов В. М., Павлов Н. И., Волков А. Е. Перераспределение напряжений в кровле угольного пласта при работе комплекса ОМКТ.— В кн.: Аналитические методы и вычислительная техника в механике горных пород. Новосибирск, ИГД СО АН СССР, 1971, с. 46—52.

66. Мусалимов В. М. Экспериментально-аналитическое определение напряженного состояния угольного пласта. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1971, 13 с.

67. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, 707 с.

69. Измерение напряжений в массиве горных пород. Ч. I. Новосибирск, ИГД СО АН СССР. 1974, 150 с.

69. Либерман Ю. М., Хаимова-Малькова Р. И. Давление горных пород на закладочный массив с нелинейной характеристикой усадки.— ФТПРПИ, 1973, № 2, с. 3—7.

70. Немировский Ю. В., Миренков В. Е. Напряженное состояние массива горной породы с горизонтальной выработкой при наличии закладки.— ФТПРПИ, 1973, № 3, с. 3—11.

71. Ниренбург Р. К., Батугин С. А. К методу определения напряженного состояния горного массива по известным смещениям некоторой границы.— В кн.: Аналитические методы и вычислительная техника в механике горных пород. Новосибирск, 1971, с. 34—45.

72. Ниренбург Р. К. Исследование напряженно-деформированного состояния надработанного массива горных пород. Автореф. канд. дис. Кемерово, 1971, 17 с.

73. Ниренбург Р. К. Об учете анизотропии при определении напряжений вокруг горных выработок по известным смещениям некоторой границы.— В кн.: Математические методы в механике горных пород. Вып. 28, Кемерово, 1970, с. 38—50.

74. Новикова О. В., Розанов И. С. Исследование напряженного состояния некоторых горнотехнических туннелей.— В кн.: Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1960.

75. Новиков Л. А., Уфлянд Я. С. Некоторые задачи о деформации полубесконечной двухслойной полосы.— «Инженерный журнал». МТТ. 1966, № 2, с. 143—145.

76. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы.— «Докл. АН СССР», 1940, т. 27, № 4, с. 395—399.

77. Работа Э. Н., Рыбак О. В. К расчету напряжений и деформаций в упругом пласте.— В кн.: Горное давление и горные удары. Л., ВНИМИ, 1972, с. 199—294. («Труды ВНИМИ», вып. 85).

78. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

79. Расчет границ защищенных зон. (Методическое указание). Л., 1969, 181 с.

80. Соколов П. Г., Сербин Е. И. Опыт обобщения уравнений теории упругости.— «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, вып. 9. с. 1571—1588.

81. Сударев В. А. Исследование напряженно-деформированного состояния кровли и работы индивидуальных крепей в лавах пологих пластов Кузбасса. Автореф. канд. дис. Кемерово, 1968, 27 с.

82. Темченко Г. Д. Исследование проявлений горного давления с целью выбора рациональной схемы передвижения механизированной крепи лав тонких крутых пластов Донбасса. Автореф. канд. дис. Днепропетровск, 1970, 22 с.

83. Трапезников Л. Н. Линии влияния для нормальных напряжений в полуполосе.— «Изв. Всесоюзн. научн.-исследов. ин-та гидротехники», 1963, т. 73, с. 271—278.

84. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967, 402 с.

85. Фельдман И. А. Экспериментально-аналитический метод расчета зон, защищенных от проявления горных ударов в надработанном массиве горных пород (на примерах Воркутинского месторождения). Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1969, 22 с.

86. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956, 407 с.

87. Ходот В. В. Внезапные выбросы угля и газа. М., Гортехиздат. 1961, 363 с.

88. Христианович С. А., Шемякин Е. И. К теории идеальной пластичности.— «Инженерный журнал. МТТ», 1967, № 4.

89. Цыцаркин В. Н. Обеспечение устойчивости подготовительных выработок на глубоких горизонтах в условиях мощных крутых пластов.— В кн.: Горное давление в капитальных выработках. Новосибирск, 1971, с. 13—18.

90. Шемякин Е. И. К изучению ближней зоны подземного взрыва.— «Народнохозяйственное использование взрыва», Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1959, вып. 2, с. 40—49.

91. Шерман Д. И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд. АН СССР, 1961, с. 527—563.

92. Яковлев Н. И. Установление параметров защитных зон, обеспечивающих безопасность и концентрацию горных работ при выемке сближенных крутых пластов с закладкой (применительно к условиям Прокопьевско-Киселевского месторождения Кузбасса). Автореф. канд. дис. М., 1973, 14 с.

93. Benthem J. Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite problems in strees analysis.— "Quar. J. Mech. and Appl. Math.", 1963, v. 16, No. 4, p. 413—431.

91. Horvay G. Biharmonic eigenvalue problem of the semi-infinite strip.— "Quart. of Appl. Math.", 1957, v. 15, No. 1, p. 65—82.

95. Horvay G., Mirabal J. The end problem of cylinders.— "J. Appl. Mech.", 1958, v. 25, No 4, p. 561—570.

96. Horvay G. The end problem of rectangular strips.— "J. Appl. Mech.", 1953, v. 20, No. 1, p. 87—94.

97. Theocaris P. S. The strees distribution in a semi-infinite strip subjected to a concentrated load.— "Trans. J. Appl. Mech.", 1959, v. 26, No. 3, p. 401—406.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
Глава I. Методы исследования механического состояния массива горных пород при отработке угольных пластов 6
§ 1. Обзор аналитических и экспериментальных методов изучения напряженно-деформированного состояния массива — горных пород 17
§ 2. Задачи разработки экспериментально-аналитического метода определения механического состояния массива горных пород 19
Глава II. Экспериментально-теоретический подход к изучению механического состояния массива горных пород . . . . . —
§ 1. Основные уравнения 28
§ 2. Типовые расчетные схемы и граничные условия . . . 37
§ 3. Метод расчета смещений боковых пород при отработке угольного пласта 52
Глава III. Определение напряженно-деформированного состояния вмещающих пород . . . . . —
§ 1. Постановка задач определения напряженного состояния вмещающих пород экспериментально-аналитическим методом 61
§ 2. Методы решения задач о напряженно-деформированном состоянии горного массива с учетом реологических свойств горных пород 63
§ 3. Определение напряжений вмещающих пород с учетом упругих свойств среды 68
§ 4. Определение напряжений по известным смещениям пород с учетом реологических свойств среды 74
Глава IV. Определение напряженно-деформированного состояния угольного пласта при его отработке . . . . . —
§ 1. Постановка задач, расчетные схемы и исходный материал при формулировке граничных условий 78
§ 2. Решение задач о напряженном состоянии упругого угольного пласта 87
Глава V. Алгоритмы расчета механического состояния массива горных пород . . . . . —
§ 1. Алгоритм расчетов напряженно-деформированного состояния вмещающих пород 95
§ 2. Алгоритм расчетов напряженного состояния угольного пласта 106
Глава VI. Расчеты напряженно-деформированного состояния массива горных пород при отработке угольных пластов . . . —
§ 1. Типовые случаи напряженно-деформированного состояния вмещающих пород . . . . . —

§ 2. Расчеты напряженного состояния пород кровли по натурным наблюдениям смещений 132
§ 3. Напряженное состояние угольного пласта при его отработке 144

Глава VII. Экспериментально-аналитический метод определения механического состояния массива вокруг подготовительных выработок 152
§ 1. Определение напряженного состояния пород вокруг полевых выработок в зоне влияния очистных работ . . —
§ 2. Напряженное состояние угольного пласта в окрестности подготовительной выработки 160
§ 3. Расчеты напряженно-деформированного состояния массива вокруг подготовительных выработок экспериментально-аналитическим методом 165

Глава VIII. Развитие и практическое использование экспериментально-аналитического метода исследования механического состояния массива горных пород 172
§ 1. Варианты и разработки экспериментально-аналитического метода определения напряженно-деформированного состояния массива . . . . . —
§ 2. Практическое применение экспериментально-аналитического метода исследований горного давления 178

Литература 182

Геннадий Игнатьевич Грицко
Борис Васильевич Власенко

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Ответственный редактор
Евгений Иванович Шемякин

Редактор *Л. В. Шалина*
Художественный редактор *Т. Ф. Каминина*
Художник *А. А. Заплавный*
Технический редактор *Г. Я. Герасимчук*
Корректоры *Н. Г. Примогенова, А. А. Надточий*

Сдано в набор 11 ноября 1975 г. Подписано в печать 6 июля 1975 г. МН. 01653. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2. 12 печ. л., 13,2 уч.-изд. л. Тираж 1100 экз. Заказ № 701. Цена 1 р. 32 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

Цена 1 р. 32 к.