

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
МЕТОДЫ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

НОВОСИБИРСК 1982

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

18

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
МЕТОДЫ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

НОВОСИБИРСК 1982

Электромагнитные методы геофизических исследований: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб.отд-ние, Ин-т геологии и геофизики. Новосибирск, 1982. 97 с.

В сборнике рассмотрены теоретико-методические вопросы ряда методов электротометрии. В работах, посвященных математическому моделированию в задачах электротометрии, исследованы вопросы реализации конечно-разностных алгоритмов в трехмерных моделях, рассмотрены возможности преобразования Эйлера при расчете электромагнитных полей на больших расстояниях от источника, а также описана программа расчета нестационарных полей точечных источников в многослойных средах. Проведен анализ ряда интерпретационных параметров в задачах глубинного исследования земных недр.

Электромагнитные исследования для нефтепромышленной геофизики связаны с разработками изопараметрического зондирования и диэлектрического каротажа.

Сборник рассчитан на геофизиков и геологов, а также на специалистов по электромагнитным исследованиям в геофизике.

Р е д к о л л е г и я:

канд. геол.-мин. наук Ю.Н. Антонов (отв. редактор),
канд. техн. наук Ю.А. Дашевский, канд. геол.-мин.
Г.М. Морозова, канд. физ.-мат. наук В.П. Соколов

Р е п е н з е н т ы:

канд. физ.-мат. наук В.Т. Левадный (ИГиГ СО АН СССР),
д-р геол.-мин. наук Б.И. Рабинович (СНИИГиМС Мингео СССР)

Ю.Н. Антонов, С.С. Емаев

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЗОНДИРОВАНИЯ
ПРИ КАРОТАЖЕ НЕФТЯНЫХ СКВАЖИН

Применение комплекса зондов низкочастотного индукционного каротажа (ИК) для бокового каротажного зондирования встречает известные непреодолимые трудности, из которых главной является существенная потеря чувствительности к электропроводности пласта зондами малой глубинности исследования [1-4].

Комплекс зондов ИК различной длины с применением высоких частот является более предпочтительным для задач зондирования. Это особенно ясно показано на примере волнового каротажа проводимости (ВКП) при регистрации относительных характеристик электромагнитного поля [1]. Однако использование зондов ВКП различной длины с единичными для всех зондов величинами измерительной базы и частоты возбуждаемого поля не является оптимальным при зондировании сложных электрических неоднородностей в задачах каротажа.

Рассматриваемое ниже высокочастотное индукционное каротажное изопараметрическое зондирование (ВИКИЗ) является естественным развитием волнового каротажа проводимости горных пород.

Разработкой ВИКИЗ предусматривалось создание методики и средств измерения для решения задач электрокаротажа с более высокими геологической эффективностью и производительностью работ.

При этом ставились следующие главные задачи.

1. Выделение пластов-коллекторов по результатам прямого зондирования изменений удельного электрического сопротивления (УЭС) пластов (ρ_n) при проникновении фильтрата промывочной жидкости (ПЖ), минерализация которого отличается от пластового флюида.

2. Определение истинного УЭС пластов конечной мощности с проникновением фильтрата ПЖ, в том числе в пластах малой мощности ($h \geq 1,5+2$ м).

3. Определение глубины и интенсивности изменений УЭС в пластах-коллекторах при проникновении ПЖ. В частности, обнаруже-

ние кольцевых "окаймляющих" зон пониженного сопротивления, наличие которых существенно влияет на точность определения ρ_n методами ИК.

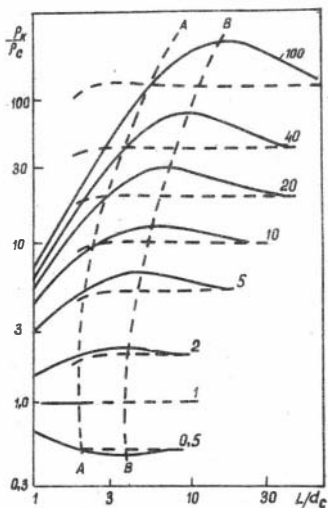


Рис.1.

Достоинства электромагнитного каротажного зондирования выразительно проявились в методе ВИКИЗ.

Во-первых, относительные характеристики электромагнитного поля, например разность фаз, обеспечивают фокусировку (ослабление) параметров скважины. Более того, благодаря изопараметричности зондов, каждый из которых обладает различной глубиной исследования, достигнуто равенство величины измеряемой характеристики поля в среде с однородным распределением удельного сопротивления.

На рис.1 показаны характеристики зондов ВИКИЗ в двухслойной среде (скважина-пласт) на примере палетки

бокового каротажного зондирования. В частности, из рисунка видно, что показания любого изопараметрического зонда длиной от 0,5 м и более практически зависят только от удельного сопротивления пласта (влияние скважины исключено).

Во-вторых, зонды ВИКИЗ, обладая фокусировкой относительно определенных областей исследуемой среды, позволяют восстановить пространственное распределение электрических неоднородностей в зоне проникновения непосредственно по результатам измерений (беспалеточно).

На рис.2 демонстрируются радиальные характеристики различных зондов электрического и электромагнитного каротажа. В частности, в условиях понижающего проникновения фокусирующие свойства зондов ВИКИЗ позволяют определить сопротивления зоны проникновения и пласта при относительном размере зоны проникновения $D/d_c \approx 4$ (нижние кривые). При увеличении диаметра зоны проникновения $D/d_c \leq 6$ ошибка в определении удельного сопротивления не превышает 20 %. Для решения этой за-

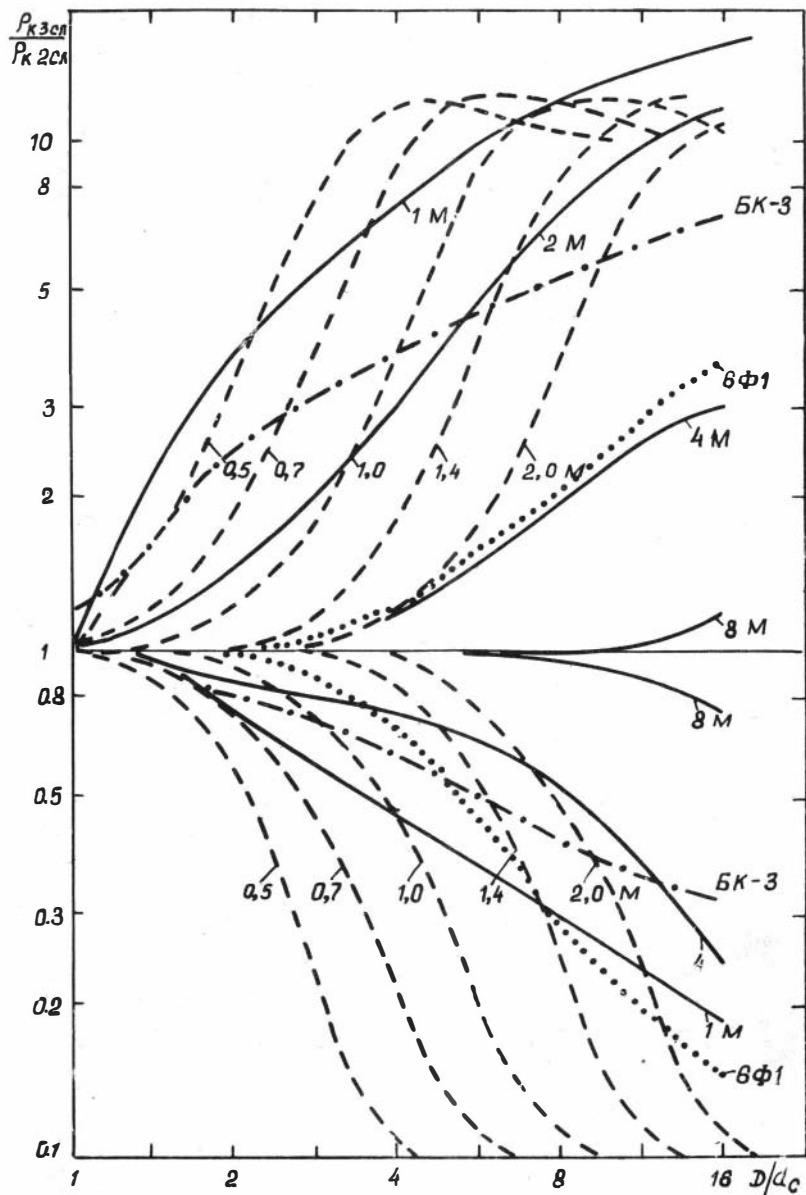


Рис. 2

дачи методом бокового каротажного зондирования (БКЗ) потребуется весь комплекс зондов, включая зонд длиной 8 м. Следовательно, эффективность БКЗ будет определяться мощностью пластов. Фокусирующие зонды БК-ИК в условиях понижающего проникновения, как видно из рисунка, неэффективны, из-за снижения глубинности исследования зонда ИК, поскольку токи индуцируются в более проводящей зоне проникновения. При повышающем проникновении зонды ВИКИЗ решают задачу путем зондирования неоднородностей пласта при $3 < D/a_c < 6$ с ошибкой $\sim 20\%$. Метод БКЗ в этих же условиях решает задачу зондами длиной до 4 м. Двухзондовый метод БК-ИК в условиях повышающего проникновения становится эффективным: зонд БК отражает среднее значение удельного сопротивления зоны проникновения, а зонд ИК (6ФИ) позволяет определить сопротивление пласта с погрешностью, близкой зонду ВИКИЗ большой длины.

Таким образом, важно отметить, что ВИКИЗ одинаково удовлетворительно работает как при понижающем, так и при повышающем проникновении.

В-третьих, достаточно высокие частоты, используемые в зондах ВИКИЗ, позволяют локализовать возбуждаемые токи в исследуемой среде и тем самым обеспечить слабое влияние вмещающих пород при зондировании пластов малой мощности. На рис.3 приведены вертикальные характеристики зондов БКЗ, БК, ИК и ВИКИЗ для случая, когда УЭС вмещающих пород в десять раз меньше, чем УЭС пласта. Такое соотношение параметров модели менее благоприятно для электромагнитных методов (ИК, ВИКИЗ). Вместе с тем, влияние вмещающих пород становится пренебрежимо малым, если мощность пласта немногим более чем в два раза превышает длину любого зонда ВИКИЗ. Зонд 6ФИ, имея общую длину с внешними фокусирующими катушками 2 м, обладает худшей вертикальной характеристикой, чем самый длинный зонд ВИКИЗ, длина которого равна 2 м.

Зонды БКЗ имеют неудовлетворительные вертикальные характеристики. Зонд БК-3 имеет стабильную погрешность не более 20 % при $4 < H/a_c < 16$, уменьшающуюся до минимума при $H/a_c > 16$.

Проведенный сопоставительный анализ различных зондовых систем электрического каротажа показывает, что зонды ВИКИЗ отличаются необыкновенными характеристиками. Ниже остановимся на основных деталях электромагнитного зондирования, аппаратуре и вопросах интерпретации измерений, полученных макетом аппаратуры ВИКИЗ в скважинах, бурящихся на нефть.

Основы метода. Зон-

дирование методом ВИКИЗ основано на возбуждении электромагнитных полей различных частот и измерении их относительных характеристик в скважине. Возбуждение и измерение полей осуществляется пятью трехэлементными зондами, из которых каждый содержит одну генераторную и две измерительные катушки, расположенные по одну сторону от генераторных.

Длина зонда (L) – расстояние между генераторной и соответствующей наиболее удаленной измерительной катушкой.*

Расстояние между двумя измерительными катушками (база зонда) значительно меньше длины зонда. Измеряемой характеристикой электромагнитного поля является разность фаз между э.д.с., наведенными в измерительных катушках. Зависимость разности фаз ($\Delta\varphi$) от удельного сопротивления однородной среды определяется формулой:

$$\Delta\varphi = \Delta\rho - \alpha z \operatorname{ctg} \frac{\Delta\rho}{1 + \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_1\rho_2}; \quad (I)$$

здесь $\rho_1 = L/\delta$, $\rho_2 = (L - \Delta L)/\delta$, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, L – длина зонда, ρ – удельное сопротивление, ΔL – размер базы, $\delta = \sqrt{2\rho/\mu\omega}$ – толщина скин-слоя, μ – магнитная проницаемость среды, ω – круговая частота электромагнитного поля. Анализ выражения (I) показывает следующее. Если зондирование выполнять путем изменения какого-либо одного из параметров зонда (L , ΔL или ω), то величина разности фаз будет изменяться. Обеспечить постоянство измеряемой характеристики поля (для каждого зонда различной глубиной исследования), пропорциональной УЭС однородной среды, возможно путем введения определенных компенсационных условий. Из выражения для разности фаз (I) эти условия обеспечиваются конструктив-

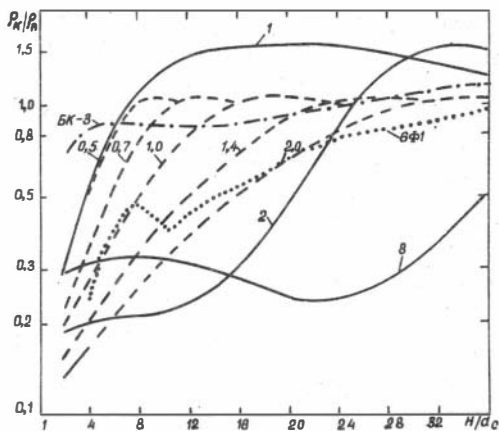


Рис.3.

* Фактическая длина зондов ВИКИЗ определяется так же, как и для градиент-зондов метода кажущегося сопротивления.

ными параметрами зондов ($L_i, \omega_i, \Delta L_i$), а именно: при изменении длин зондов произведение $L_i \sqrt{\omega_i}$ и отношение $\Delta L_i / L_i$ должны быть неизменными (после выбора этих величин) для данного зондирующего комплекса.

Таким образом, условие $\Delta L_i / L_i = \text{const}$ определяет геометрическое подобие зондов ВИКИЗ и, следовательно, последовательность отношений их основных размеров равна коэффициенту подобия

$$\alpha = [(L_{i1} - L_{i2}) / L_{i1}]_{i=1}^n = (\Delta L_i / L_{i1})_{i=1}^n, \quad (2)$$

где L_{i1}, L_{i2} — длины двухкатушечных зондов, образующих i -й трехкатушечный зонд; цифровые индексы (1,2) соответствуют длинному и короткому двухкатушечным зондам. В формуле (2) предусматривается равенство всех членов последовательностей.

Длины зондов ВИКИЗ выполнены в соответствии с геометрической прогрессией, а их коэффициент подобия из (1) определяется также отношением расстояний между одноименными катушками первого зонда ко второму, второго к третьему и т.д.

Из условий $L_i \sqrt{\omega_i} = \text{const}$ вытекает, что частоты токов питания генераторных катушек зондов связаны с коэффициентом подобия следующим соотношением:

$$(f_i / f_{i-1})_{i=2}^n = \alpha^2. \quad (3)$$

Зонды, подчиняющиеся условиям (2), (3), будем называть изопараметрическими.

Здесь отметим, что техника измерений разности фаз предусматривает ограничение э.д.с. сигналов до определенного порогового уровня, и тем не менее, целесообразно конструкцией зондов предусматривать равенство э.д.с. от прямых полей генераторных катушек как внутри каждого зонда (за счет числа витков измерительных катушек), так и между зондами различной длины (магнитными моментами генераторных катушек M). Следовательно,

$$(M_{i+1} N_{i-1} / M_i N_i)_{i=1}^n = \alpha^5.$$

Набор изопараметрических зондов является очень удобным инструментом для проведения зондирования прискважинной части пластов.

Во-первых, измерение разности фаз позволяет исключать электрические неоднородности среды в непосредственной близости от зондов (см. рис.1).

Во-вторых, применение высоких частот сужает пространственную область исследования в зоне действий скин-эффекта. Эта зона размещается за областью максимальной плотности индуцированных в среде токов, положение которой определяется главным образом длиной зондов ИК.

В-третьих, расхождение в показаниях изопараметрических зондов указывает на наличие электрических неоднородностей и позволяет безпалеточно определять характер проникновения фильтра ПЖ: повышающее или понижающее, а также решать задачи по определению более сложного характера распределения УЭС в зоне проникновения.

Кроме того, изопараметрические зонды отличает идентичность динамического диапазона измеряемой величины и, соответственно, удельного сопротивления, а также единая метрология и методика интерпретации.

С целью определения границ применимости метода ВИКИЗ и оптимизации конструктивных параметров аппаратуры в ИГиГ СО АН СССР проведены исследования характеристик изопараметрических зондов путем численных расчетов измеряемой величины в различных моделях неоднородных сред [5]. Анализ результатов расчетов полей в двухслойной цилиндрически-слоистой модели (скважина-пласт неограниченной мощности) позволил обосновать выбор длины самого короткого зонда и установить пределы изменения удельного сопротивления скважины и пласта, при которых влияние скважины на результаты измерений не превышает допустимых пределов. Так, влияние скважины с удельным сопротивлением $\rho_c = 0,5 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ на результаты измерений зондом длиной 0,5 м составляет 20 %, если УЭС пласта равно 100 Ом·м. Это влияние резко уменьшается с увеличением длины зонда, при повышении ρ_c и уменьшении УЭС пласта.

Расчеты полей в трехслойной модели (скважина-зона проникновения-пласт) позволяли определить глубинность исследования изопараметрическими зондами. В наиболее благоприятном случае, когда удельные сопротивления зоны проникновения и пласта достаточно велики, а перепад между ними небольшой, показание зонда с точностью 10 % определяется УЭС пласта, если радиус зоны проникновения не превышает половины длины зонда. Для определения удельного сопротивления пласта с такой же точностью в низкоом-

ном разрезе при значительном перепаде УЭС между зоной проникновения и пластом необходимо, чтобы длина зонда в четыре раза превышала радиус зоны проникновения. Здесь необходимо отметить, что с помощью соответствующих палеток удельное сопротивление пласта можно определить и при более глубоком проникновении фильтрата промывочной жидкости в пласт, если измерения выполнены несколькими изопараметрическими зондами различной длины.

Кроме того, расчеты трехслойной и четырехслойной цилиндрически-слоистой моделей доказали возможность детального исследования распределения удельного сопротивления в прискважинной части пласта с помощью набора изопараметрических зондов. В частности, удастся выделить кольцевую зону повышенной электропроводности, расположенную между зоной проникновения и пластом.

Численное исследование моделей с горизонтальными границами раздела позволило определить влияние вмещающих пород на результаты измерений и положение точки записи изопараметрических зондов. Показано, что результаты измерения удельного сопротивления пласта конечной мощности в 1,5-2 раза превышают длину зонда. В качестве точки записи зондов ВИКИЗ определена точка, равноудаленная от измерительных катушек (центра базы). Также установлено, что кривые профилирования одиночного пласта зондами различной длины пересекаются в точках, лежащих на границах пласта. Наличие в комплексе зондов ВИКИЗ коротких зондов с превосходными вертикальными характеристиками (см. рис.2) позволяет успешно решать задачу расчленения разреза и выделения пластов и оценки их вертикальной неоднородности.

Применение высоких частот в изопараметрических зондах ограничено влиянием токов смещения на измеряемую разность фаз. Численные расчеты позволили уточнить максимально допустимое значение величины $\omega R E$, при котором вклад токов смещения в величину $\Delta \varphi$ не превышает 10 %. В низкоомной части разреза необходимо выполнение условия $\omega R E \leq 0,2$. При удельном сопротивлении более 50 Ом·м величина $\omega R E$ может достигать значения 0,3. Эти результаты позволяют использовать частоты вплоть до 10-15 МГц при изучении большинства терригенных пород.

Аппаратура. Основные параметры аппаратуры, изготовленной в виде действующего макета, определены по результатам математического моделирования различных компонент электромагнитного поля.

Измеряемая характеристика поля (разность фаз) была выбрана после совместного анализа данных расчета полей в сложных моделях каротажа и возможностей измерения ее радиотехническими средствами с достаточно высокой точностью.

В состав аппаратуры входят скважинный прибор и наземная панель управления. Скважинный прибор содержит зондовую систему, генераторный блок и приемно-измерительное устройство.

Зондовая система ВИКИЗ представляет собой конструкцию, состоящую из пяти трехкатушечных зондов различной длины, расположенных на одном стержне. Длины зондов и их рабочие частоты установлены в соответствии с условиями изопараметричности (2) и (3). Рабочая частота самого длинного зонда ($L = 2$ м) равна $0,875 \text{ кГц}$, а самого короткого ($0,5$ м) — $14,0 \text{ МГц}$. Размер измерительной базы для любого зонда составляет $0,3$ от его максимальной длины ($\Delta L_i = 0,3 L_i$).

Генераторный блок предназначен для создания токов высокой частоты в генераторных катушках зондов. Он состоит из кварцевого генератора, формирователя рабочих частот и усилителей мощности. Кварцевый генератор вырабатывает сигнал с частотой 14 МГц . Формирователь рабочих частот представляет собой набор делителей частоты на два. С выходов формирователя сигналы через ключи поступают на двухкаскадные усилители мощности, каждый из которых нагружен на генераторную катушку соответствующего зонда.

В функции приемно-измерительного устройства входит: усиление и преобразование сигналов, поступающих из измерительных катушек зондов, измерение и передача на поверхность величины разности фаз $\Delta \varphi$, питание и управление работой скважинного прибора. Устройство содержит пять пар усилителей высокой частоты и преобразователей в низкую частоту, гетеродинный блок, низкочастотные усилители-ограничители, цифровой фазометр, блок управления, приемопередатчик и блок питания.

Измерительный процесс скважинного прибора происходит следующим образом. По команде с поверхности в блоке управления вырабатывается сигнал, разрешающий работу одного из пяти каналов. В генераторном блоке открывается ключ, через который высокочастотный сигнал проходит на вход соответствующего усилителя мощности. Усиленный сигнал преобразуется в ток высокой частоты, циркулирующий в генераторной катушке зонда и создающий электромаг-

нитное поле в окружающих горных породах. В измерительных катушках зонда наводятся э.д.с., которые после усиления преобразуются в низкочастотные сигналы. Необходимые для работы преобразователей частоты получают в гетеродинном блоке из одной и той же частоты 14 МГц, вырабатываемой кварцевым генератором в генераторном блоке. Все пять гетеродинных частот отличаются от соответствующих генераторных на одну и ту же величину (15 кГц). С помощью аналогового коммутатора преобразователи подключаются к низкочастотным усилителям-ограничителям, которые являются общими для всех каналов. Ограниченные по амплитуде низкочастотные сигналы поступают на вход цифрового фазометра, в котором осуществляется измерение разности фаз между входными сигналами. Полученная информация о величине $\Delta \varphi$ в цифровом виде передается на поверхность с помощью приемопередатчика. После того, как в наземной панели управления информация будет обработана и зарегистрирована, в скважинный прибор поступает новая команда на включение следующего канала и весь процесс измерения повторяется. Время работы каждого канала составляет 20 мс, а полный цикл измерения занимает около 100 мс, что позволяет при скорости каротажа 2 км/ч получать отсчеты измеряемой величины $\Delta \varphi$ через каждые 5-6 см разреза скважины.

В функции наземной панели входят передача команд управления в скважинный прибор, прием и обработка цифровой информации, её преобразование в аналоговую форму с целью использования для записи каротажных диаграмм стандартных фоторегистраторов, а также питание скважинного прибора. Наземная панель содержит приемопередатчик, цифроаналоговый преобразователь, блок управления и источник питания. Наземная панель имеет не только аналоговый, но и цифровой выход, что дает возможность использовать для регистрации диаграмм магнитофон или перфоратор. Связь наземной панели со скважинным прибором осуществляется с помощью любого трех- или семижильного каротажного бронированного кабеля.

Результаты измерений в скважинах и их интерпретация

По аналогии с электрическими методами каротажа данные измерений ВИКИЗ представляются в виде кажущегося удельного сопро-

тивления (ρ_k). Переход от измеряемой величины ΔU к ρ_k можно осуществить с помощью графика, построенного для однородной среды по формуле (I). Этой зависимостью определяется неравномерная шкала кажущегося удельного сопротивления, общая для всех зондов ВИКИЗ. Масштаб записи каротажных кривых устанавливается в соответствии со шкалой ρ_k по эталонным сигналам, величина которых соответствует определенным значениям измеряемой характеристики поля, т.е. двум известным значениям шкалы ρ_k . Эти сигналы подаются на каротажные регистраторы от пульта управления. Измеряемая характеристика поля (ΔU) может быть преобразована программным устройством в пульте управления так, чтобы шкала ρ_k была линейной.

Обработку каротажных материалов ВИКИЗ можно проводить по следующей схеме.

Каротажные диаграммы всех зондов совмещают так, чтобы совпали отметки глубин и вертикальные линии, соответствующие значению $\rho_k = \infty$ ($\Delta U = 0$). Так как диаграммы различных зондов ВИКИЗ имеют одинаковый масштаб и единую шкалу ρ_k , то по расхождению каротажных кривых можно выделить участки с неоднородным распределением удельного сопротивления, т.е. пласты-коллекторы. Для количественной оценки УЭС зоны проникновения и пласта конечной мощности следует уточнить необходимость внесения поправок за влияние УЭС вмещающих пород и параметров скважины. Как правило, поправки за ограниченную мощность пласта необходимы в случае одиночного пропластка, мощность которого соизмерима с длиной наибольшего зонда ВИКИЗ и значительной контрастности УЭС пласта и вмещающих пород. Для внесения поправок снимаются показания по каротажной кривой по экстремальным значениям ρ_k пласта и вмещающих пород. Границы пластов отбиваются по точкам, в которых пересекаются совмещенные каротажные кривые зондов ВИКИЗ. Так, для отбивки границ малой мощности ($h \approx 1$ м) достаточно двух кривых, полученных зондами малой длины — 0,5 и 0,7. При больших мощностях пластов для отбивки границ могут использоваться данные более длинных зондов.

Для учета влияния УЭС вмещающих пластов, при оценке УЭС пласта конечной мощности разработаны палетки, на основе математического моделирования одиночных пластов без проникновения. Ординатой палеток является ρ_k , а абсциссой — ρ_n . Шифр кривых —

$\rho_{\text{вн}}$. Модулем является мощность пласта — H , что и определяет общее их количество. Следует заметить, что поправки существенны лишь в пластах, мощность которых меньше $1,5 \pm 2,5$ длин зонда. Для более мощных пластов поправки не превышают несколько процентов. Поскольку показания коротких зондов (0,5 и 0,7) в большей мере подвержены влиянию параметров скважины против пластов высокого сопротивления, то вносят поправки, учитывающие влияние скважины и отклонение прибора от ее оси.

По исправленным значениям ρ_K строят кривую зондирования. При этом по оси ординат откладывают ρ_K , а по оси абсцисс — длины зондов. По виду кривой зондирования можно установить распределение удельного сопротивления по направлению в глубь пласта, характер зоны проникновения относительно УЭС пласта, а по асимптотикам кривой зондирования УЭС пласта или зоны проникновения.

В случае, когда кривые зондирования соответствуют теоретическим кривым для трехслойной цилиндрически-слоистой среды, представляется возможным определить ее эквивалентный диаметр, а также размер и УЭС зоны проникновения и пласта.

Трехслойные палетки представляют собой семейства кривых, заключенных в координатные оси: ордината — ρ_K , абсцисса — отношение длины зонда к радиусу зоны проникновения. Правые асимптоты кривых соответствуют ρ_n , левые, сходящиеся в узлы — ρ_{3n} . На одном бланке можно без осложнений разместить два семейства кривых с различными значениями ρ_{3n} . Модулем таких палеток являются параметры скважины. Поскольку параметры скважины в широком диапазоне значений ρ_c и d_c не оказывают влияния на измерение

ρ_K , то указывается минимальное предельное значение ρ_c и максимальное значение d_c . Весь комплекс таких палеток представлен на четырех бланках.

Параметры пласта и зоны проникновения определяют путем совмещения фактической кривой зондирования, построенной на бланке с теми же модулями координатных осей: ордината = ρ_K , абсцисса — L_i , с одной из палеточных кривых. В точке пересечения фактической кривой зондирования с вертикальной линией палетки единичного значения снимают значение длины зонда L_i , размер которого соответствует радиусу зоны проникновения, так как $L_i/d_{3n} = 1$.

В ряде случаев кривые зондирования по своей форме могут существенно отличаться от палеточных, что указывает на более слож-

ный характер распределения УЭС, чем это представляется трехслойной цилиндрически-слоистой моделью. Следует отметить, что для зондов ВИКИЗ отсутствует эквивалентность двухслойных цилиндрически-слоистых сред с трехслойными, а последних с четырехслойными, как это имеет место для зондов метода БКЗ.

Макет аппаратуры ВИКИЗ опробован в ряде нефтяных скважин Удмуртии и Татарии. На рис.4 представлены каротажные диаграммы, полученные в скважине 71 Чутырской площади в Удмуртии. Рассматриваемый участок находится в башкирском ярусе, сложенном карбонатными породами. Кроме зондов ВИКИЗ, исследования в этой скважине проведены с помощью стандартного каротажного комплекса, некоторые диаграммы которого также представлены на рис.4. По данным этого комплекса, в Ижевской промыслово-геофизической конторе проведена интерпретация, выделены пласты-коллекторы и установлен характер их насыщения. В приведенном интервале глубин выделено четыре пласта, из которых три верхних - нефтенасыщены, а нижний - водоносный. В табл. I приведены удельные сопротивления этих пластов, определенные с помощью методов ИК, БК, БКЗ и ВИКИЗ. Здесь же даны величины сопротивлений, измеренных против этих пластов различными зондами ВИКИЗ.

Таблица I

№ пласта	Мощность пласта, м	Удельное сопротивление, измеренное зондами ВИКИЗ, Ом·м				Удельное сопротивление пласта, Ом·м			
		0,5 м	0,7 м	1 м	2 м	ВИКИЗ	ИК	БК	БКЗ
1	3,0	10,0	9,0	9,0	13,0	17,0	50,0	20,0	20,0
2	2,8	13,0	14,0	17,0	31,0	40,0	50,0	30,0	30,0
3	3,6	8,5	6,5	8,5	15,0	20,0	50,0	20,0	20,0
4	5,6	17,0	11,5	8,0	5,0	4,5	10,0	-	6,0

В правой части рис.4 приведены кривые зондирования, построенные по данным четырех зондов ВИКИЗ. На рисунке и табл. I из-за сбоев в работе аппаратуры отсутствуют данные зонда 1,4 м, что снижает точность восстановления кривых зондирования, но не изменяет их характер. В первых трех пластах отмечено понижающее проникновение фильтрата ПЖ в пласт, поскольку длинные зонды регистрируют

УЭС больших значений, чем короткие зонды. Водоносный пласт характеризуется повышающим проникновением, что отмечено отрицательным наклоном кривой зондирования. Как видно из табл.1, удельные сопротивления нефтеносных пластов, определенные с помощью зондов ВИКИЗ, близки к соответствующим значениям, полученным с помощью методов постоянного тока. Показания индукционного каротажа в этих пластах носят качественный характер. В водоносном пласте показания зондов ВИКИЗ ниже, чем у стандартных методов.

На рис.5 приведены каротажные диаграммы, полученные в скважине 1830^а - Южно-Ромашкинской площади в Татарии с помощью зондов ВИКИЗ и ряда стандартных методов. Представленные диаграммами участок сложен карбонатными породами и охватывает Кизеловский и Черепетский горизонты. В лениногорской промыслово-геофизической конторе проведена интерпретация диаграмм стандартных методов. На рассматриваемом интервале глубин выделено пять пластов-коллекторов и определено их удельное сопротивление и характер насыщения. В соответствии с заключением ПТК все пласты являются водоносными. Значения УЭС пластов, определенные с помощью разных методов, сведены в табл.2.

Таблица 2

№ пласта	Мощность пласта, м.	Удельное сопротивление, измеренное зондами ВИКИЗ, Ом·м					Удельное сопротивление пласта, Ом·м	
		0,5 м	0,7 м	1 м	1,4 м	2 м	ВИКИЗ	ИК+БК
1	4,2	5,3	5,9	5,2	3,2	3,6	3,6	4,5
2	3,8	9,7	9,7	6,4	5,3	4,7	4,7	6,5
3	4,8	13,5	13,0	8,3	7,2	6,6	6,6	9,5
4	1,2	15,7	15,7	9,7	8,1	8,0	8,0	10,5
5	1,2	14,5	15,3	10,0	7,2	6,0	5,5	11,0

В правой части рис.5 приведены кривые зондирования, полученные против указанных пластов. Все кривые в своей правой части имеют отрицательный наклон, что указывает на повышающий характер проникновения флльтрата ПЖ в пласт. Как видно из табл.2, удельные сопротивления пластов, определенные с помощью методов ИК и БК

превышают соответствующие значения, полученные с помощью зондов ВИКИЗ, и примерно соответствуют их показаниям в интервале длины зондов немногим более 1 м. Эти результаты указывают (см. сопоставление радиальных характеристик различных зондов на рис.2) на большую глубинность исследования длинного зонда ВИКИЗ по сравнению с зондами ИК (зонда 4Ф 0,75) и БК. Отметим, что вся толща рассматриваемого интервала карбонатных отложений ($H = 40$ м) имеет такой же характер радиального распределения удельного сопротивления, как и на приведенных кривых зондирования. Прямое подтверждение этому дают совмещенные каротажные кривые зондов ВИКИЗ на рис.5. Как видно, расхождение каротажных кривых имеет одинаковый характер во всем интервале. Это обстоятельство указывает на то, что данные геологические образования являются водонасыщенными коллекторами, поскольку минерализация пластовых вод в этом районе значительно превышает минерализацию фильтрата промысловой жидкости. В других интервалах по глубине скважины в пластах без проникновения кривые ВИКИЗ сходятся.

Терригенный разрез девонских отложений исследован в скважине I9038 Карамалинской площади в Татарии. Верхняя часть - глины кыновского горизонта. Ниже - в пашийском горизонте - располагаются глинистые слабо нефтенасыщенные алевроиты и песчаники (пласты 1 и 2) и водоносные песчаники (пласт 3). На рис.6 приведены диаграммы стандартных методов и зондов ВИКИЗ, полученные в этой скважине, а также кривые зондирования против трех пластов-коллекторов. При этом для неоднородного пласта 1 приведены две кривые "а" и "б" соответственно для верхней и нижней части пласта. Сложная форма кривых зондирования в пластах 1 и 2 указывает на то, что радиальное распределение удельного сопротивления существенно отличается от трехслойной модели. По виду кривых можно определить наличие в этих пластах кольцевой зоны пониженного сопротивления, расположенной между зоной проникновения и незатронутой частью пласта. В водоносном пласте кривая зондирования имеет вид, характерный для повышающего проникновения. Обратим внимание на особенность диаграмм ВИКИЗ в кыновском горизонте. Как видно из рисунка, диаграммы зондов разной длины существенно разошлись практически по всей мощности глин. Расхождение диаграмм значительно превышает ошибки измерения. Радиальное распределение удельного сопротивления имеет такой же характер, как и

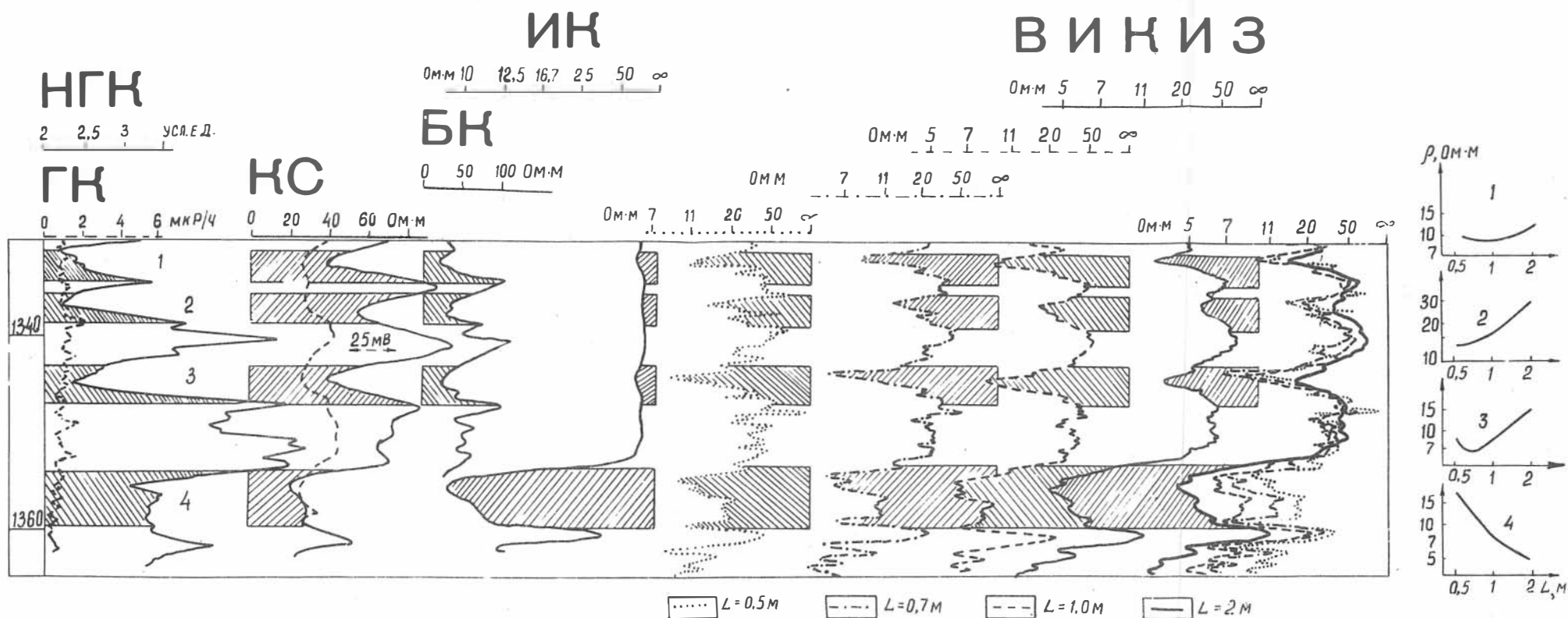


Рис. 4.



Рис. 5.

ВИКИЗ

ГК

0 2 4 6 8 МКР/ч

БК

0 5 10 15 0М·М

0М·М 1,5 5 ∞

0М·М 1,5 5 ∞

0М·М 1,5 5 ∞

НГК

0,8 1,2 4 2,0 2,4 2,8 УСЛ. ЕД.

КС

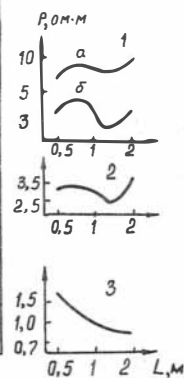
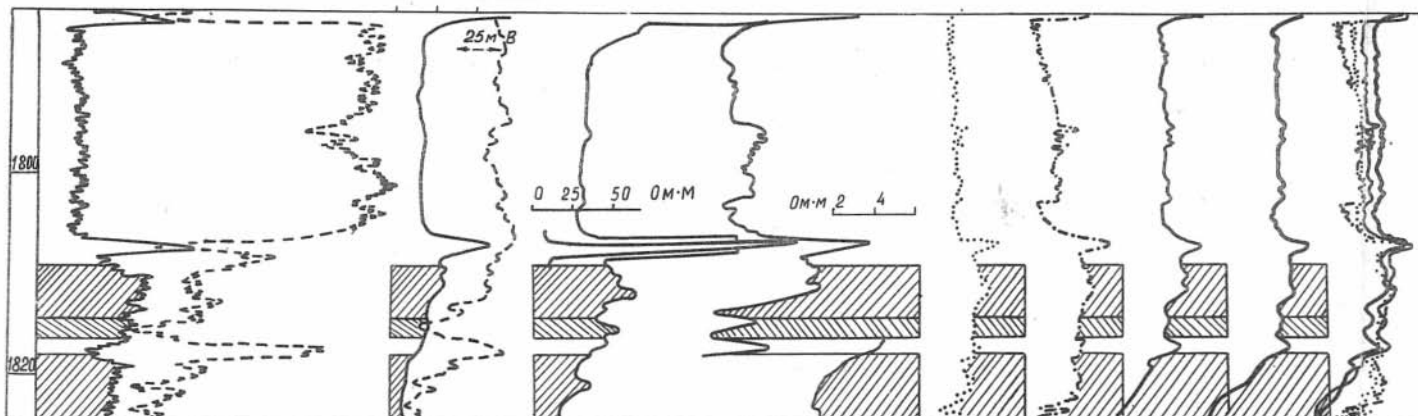
0 5 10 0М·М

ИК

0М·М 1,5 5 ∞

0М·М 4 5 6,67 10 20 ∞

0М·М 1,5 5 ∞



..... 0,5М - - - - 0,7М — 1,4М — 2М

Рис.6.

ВИКИЗ

0М·М 2,8 3,6 5 7 11 20 50 ∞

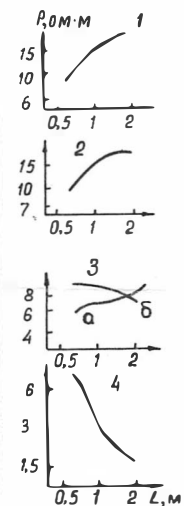
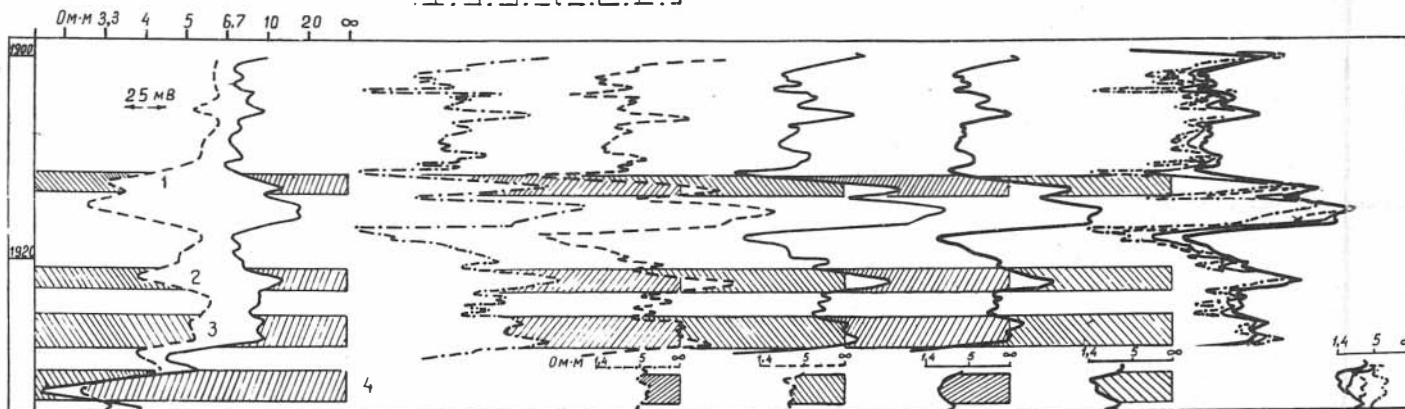
0М·М 3,6 5 7 11 20 50 ∞

0М·М 2,8 3,6 5 7 11 20 50 ∞

ИК

0М·М 2,8 3,6 5 7 11 20 50 ∞

0М·М 3,6 5 7 11 20 50 ∞



..... 0,7М - - - - 1,0М — 1,4М — 2М

Рис.7.

в случае понижающего проникновения фильтрата ПЖ в пласт. Однако, если и существует проникновение фильтрата ПЖ в глины, то оно должно быть неглубоким и повышающего характера, так как вскрытие горизонта выполнено в пресной жидкости. В данном случае, видимо, проявляется частотная дисперсия удельного сопротивления глин.

Опытами по сжатию образцов глин с различной концентрацией солей в растворах показано, что сжатие одинаковым давлением образцы имеют равные коэффициенты пористости, но различаются проницаемостью. Очевидно, что сжатие глины обладают агрегатной структурой. Поровое пространство такой глинистой структуры состоит из внутреннего порового объема, находящегося внутри агрегатов и внешнего порового объема в промежутках между агрегатами [6]. Такие агрегатированные системы должны иметь более высокую пористость, чем структуры, образованные однородной упаковкой первичных частиц. Вероятно, что поры внутри агрегатов электрически изолированы от сквозного протекания по ним токов относительно "низких" частот. С ростом частоты "изолированные" поры, заполненные раствором, вовлекаются в процесс диссипации энергии электромагнитного поля. Следовательно, рост коэффициента затухания поля эквивалентен увеличению электропроводимости среды. Такова вероятная гипотеза причин дисперсии, обнаруженная зондами ВИКИЗ в кыновских отложениях глин девона Татарии. Дальнейшие исследования в этой области представляют несомненный интерес.

Еще одно исследование девонских отложений проведено в скважине 26402 Зай-Каратайской площади в Татарии.

В скважине 26402 Зай-Каратайской площади проведено измерение зондами ВИКИЗ в интервале девонских отложений. В пашийском горизонте этого интервала по диаграммам ИК, ПС и зондов ВИКИЗ выделено четыре пласта-коллектора и дана оценка характера их насыщения. На рис.7 приведены каротажные диаграммы и кривые зондирования против выделенных пластов. В пластах I и 2 отмечен понижающий характер проникновения фильтрата ПЖ (положительный наклон кривых зондирования), что позволяет сделать предположение об их нефтенасыщенности. Пласт 3 интересен тем, что в его пределах произошла смена характера радиального распределения УЭС. Указанное обстоятельство иллюстрируется двумя кривыми зондирования: "а" - для верхней части и "б" - для нижней. Диаграммы всех зондов ВИКИЗ пересекаются в одной точке, имея противоположный ха-

рактер расхождения выше и ниже этой точки. Такой характер диаграмм дает основание предполагать существование водонефтяного контакта в пласте 3 и смену флюидонасыщения с воды в нижней части пласта на нефть – в верхней. Пласт 4 характеризуется кривой зондирования с отрицательным наклоном, типичным для повышающего проникновения, и является, видимо, водоносным.

Кыновские глины в этой скважине отмечаются расхождением показаний зондов ВИКИЗ так же, как и в скважине 19038.

Выводы

1. Зонды ВИКИЗ обладают лучшими вертикальными и радиальными характеристиками по сравнению с электрическими методами каротажа, что позволяет более оптимально решать геолого-геофизические задачи в разрезе скважин, бурящихся на нефть и газ, особенно в пластах малой и средней мощности с удельным сопротивлением до 200 Ом·м

2. ВИКИЗ позволяет за одну спускоподъемную операцию записать пять каротажных кривых профилирования, каждая из которых соответствует различной глубинности исследования по направлению латерали пластов.

3. Принципы изопараметричности зондов ВИКИЗ позволяют получать информацию для беспалеточного определения электрических свойств пластов с проникновением фильтрата промывочной жидкости, минерализация которой отличается от пластовой воды, с возможностью определения истинного сопротивления пласта.

Литература

1. Даев Д.С. Высокочастотные электромагнитные методы исследования в скважинах. М.: Недра, 1974. 140 с.
2. Антонов Ю.Н., Приворотский Б.И. Высокочастотный индукционный каротаж. Новосибирск: Наука, 1975. 260 с.
3. Кауфман А.А. Теория индукционного каротажа. Новосибирск: Наука, 1970. 235 с.
4. Плеснин М.И. Индукционный каротаж. М.: Недра, 1968. 142 с.

5. Высоочастотное индукционное каротажное изопараметрическое зондирование / Методические рекомендации. Состав.: Ю.Н.Антонов, С.С.Емаев. Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1979. 104 с.

6. Энгельгард В., Гайда К. Измерение концентрации растворов в порах глинистых отложений при их уплотнении. М., 1965. 50 с. (Бюро переводов ВИНТИ № 47149/4).

УДК 550.837

Г.М.Морозова

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ГЛУБИННЫХ ЗОНДИРОВАНИЯХ

Одно из основных условий применения активных электромагнитных методов для изучения глубинного строения земной коры состоит в создании мощных источников электроэнергии. Однако значительное наращивание мощности источника связано с серьезными трудностями как технического, так и энергетического характера. Поэтому наряду с разработкой и применением источников повышенной мощности необходимо совершенствовать сами методы; это касается схем наблюдения и привлечения новых параметров электромагнитного поля, обладающих максимальной глубиной исследования среды. Одной из таких характеристик является пространственный градиент нестационарного поля. Мощные источники электроэнергии (МГД, газотурбинные [1]) позволяют создавать импульсные нестационарные поля, охватывающие значительные площади. Чтобы обеспечить эффективное, экономически целесообразное применение этих источников, необходимы площадные системы наблюдений, что автоматически позволит регистрировать не только временные, но и пространственные градиенты поля.

На первом этапе рассмотрим нестационарное электромагнитное поле для модели трехслойной среды типа К, когда $k_2/h_1 \gg 1$,

$\rho_2/\rho_1 \gg 1$, $\rho_3/\rho_1 < 1$. Эта модель описывает основной характер геоэлектрического строения земной коры по вертикали в тектонически активных регионах типа Байкальской рифтовой зоны. Мощность проводящего слоя примем неограниченной, поскольку его суммарная продольная проводимость, по данным МТЗ, в сотни раз превосходит проводимость верхней толщи, а практическая задача на первых порах состоит в определении глубины его залегания.

В качестве источника поля примем вертикальный магнитный диполь, момент которого меняется ступенеобразно. Тогда в поздней стадии становления электромагнитного поля справедливы соотношения:

$$E_y = \frac{M\mu}{4\pi} r \left\{ \frac{(\mu\sigma_1 s)^{3/2}}{10\sqrt{\pi} t^{5/2}} - \frac{(\mu\sigma_1 s)^2 H}{8t^3} + \dots \right\}, \quad (I)$$

$$B_z = \frac{M\mu}{4\pi} \left\{ \frac{2(\mu\sigma_1 s)^{3/2}}{15\sqrt{\pi} t^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{(\mu\sigma_1 s)^2 H}{t^2} - \frac{r^2 (\mu\sigma_1 s)^{5/2}}{35\sqrt{\pi} t^{5/2}} + \dots \right\}$$

$$B_r = \frac{M\mu}{4\pi} r \left\{ \frac{(\mu\sigma_1 s)^2}{32t^2} - \frac{4(\mu\sigma_1 s)^{5/2} H}{35\sqrt{\pi} t^{5/2}} - \dots \right\},$$

где

$$s = \sigma_3/\sigma_1, \quad \sigma_1 = 1/\rho_1, \quad H = h_1 + h_2, \quad \mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2H}{M}.$$

Отсюда следует, что максимальную чувствительность к электропроводности основания имеет пространственный градиент вертикальной составляющей магнитного поля; $\Delta_r E_y$, $\Delta_r H_r$ не меняют зависимости от σ_3 по сравнению с компонентами поля E_y и H_r .

Полный процесс становления поля изучался путем анализа результатов математического моделирования нестационарного поля в горизонтально-слоистой среде:

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} = \frac{M}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega}}{-i\omega} m^3 D_1 J_0(mr) dm, \quad (2)$$

где функция D_1 , выражается в рекуррентном виде, в частности для трехслойной среды имеем:

$$D_1 = \frac{m_{10} - \rho e^{-2m_1 h_1}}{1 - m_{10} \rho e^{-2m_1 h_1}}, \quad \text{где } \rho = \frac{m_{12} + m_{23} e^{-2m_2 h_2}}{1 + m_{12} m_{23} e^{-2m_2 h_2}},$$

$$m_{LK} = \frac{m_L + m_K}{m_L + m_K}, \quad m_L = \sqrt{m^2 + \kappa_L^2}, \quad \kappa_L^2 = -i\omega\mu r_L.$$

Как следует из (I), отношение временной и пространственной производных вертикальной составляющей магнитного поля пропорционально в поздней стадии удельному сопротивлению основания, эта же зависимость имеется и в ранней стадии [2], поэтому удобно ввести интерпретационный параметр

$$\rho_{\tau}^* = \frac{2r}{7} \frac{\partial B_z}{\partial t} / \frac{\partial H}{\partial r}$$

Тогда

$$\rho_{\tau}^* \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1,73 \rho_1, \quad \rho_{\tau}^* \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho_3 \quad (4)$$

и в ранней, и в поздней стадиях ρ_{τ}^* не зависит от разности теоретических кривых ρ_{τ}^*/ρ_1 и $\rho_{\tau}^*/\rho_1(H_2)$ приведены на рис. 1а, б, в.

Наиболее интересно поведение поля и кажущегося сопротивления ρ_{τ}^* в среднем временном интервале, поскольку чаще именно здесь производится регистрация поля на практике. В соответствии с поставленной задачей важно выяснить чувствительность поля к глубине до проводящего основания и его электропроводности.

Количественной характеристикой чувствительности поля к параметру τ_3 , наряду с введенной в работе [3] функцией $\eta_F^P = \frac{\Delta F/F}{\Delta P/P}$, где ΔF и ΔP — приращения функции поля и параметра среды, по-видимому, могут служить и отношения:

$$\xi_1 = \left| \frac{B_z^t(\tau_3^1)}{B_z^t(\tau_3^2)} \right|, \quad \xi_2 = \left| \frac{H_z^r(\tau_3^1)}{H_z^r(\tau_3^2)} \right|, \quad \xi_3 = \left| \frac{\rho_{\tau}^*/\rho_1(\tau_3^1)}{\rho_{\tau}^*/\rho_1(\tau_3^2)} \right|, \quad \xi_4 = \left| \frac{H_z(\tau_3^1)}{H_z(\tau_3^2)} \right|.$$

В качестве примера в табл. I приведены значения компонент поля

$$B_z^t = B_z^t \left| \frac{M \rho_1}{4\pi h_1^5} \right|, \quad H_z^r = H_z^r \left| \frac{M}{4\pi h_1^4} \right|, \quad H_z = H_z \left| \frac{M}{4\pi h_1^3} \right|, \text{ и функций: } \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4.$$

В значительном временном интервале, включая область ρ_{τ} так, функция B_z^t пропорциональна удельному сопротивлению основания, затем наступает момент времени $\tau_1/h_1 \sim 150$, когда ρ_{τ}/ρ_1 не зависит от электрических свойств основания, при дальнейшем увеличении времени B_z^t становится пропорциональной его электропроводности.

Магнитная компонента H_z и ее пространственная производная зависят от τ_3 иначе: начиная с малых времен функции H_z и $\frac{\partial H_z}{\partial r}$ пропорциональны τ_3 , и их разрешающая способность относительно τ_3 увеличивается с увеличением времени. Вследствие этих осо-

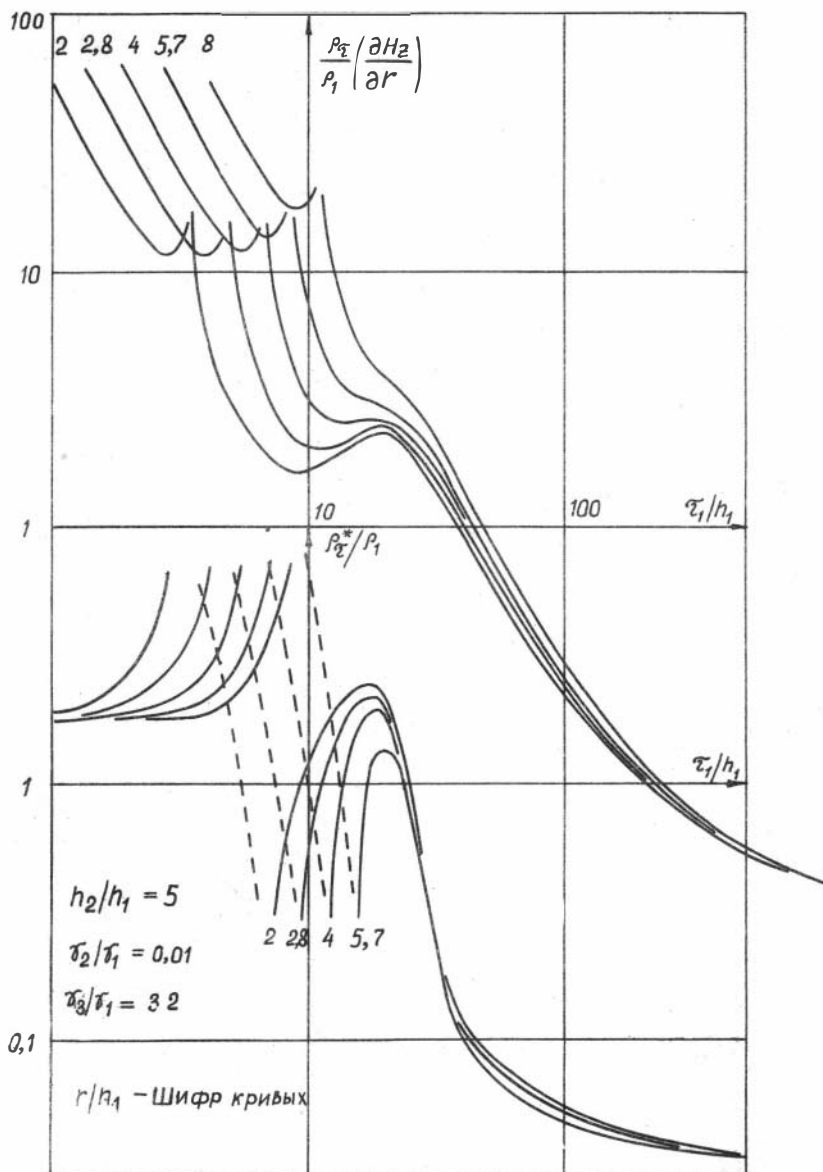


Рис. 1а

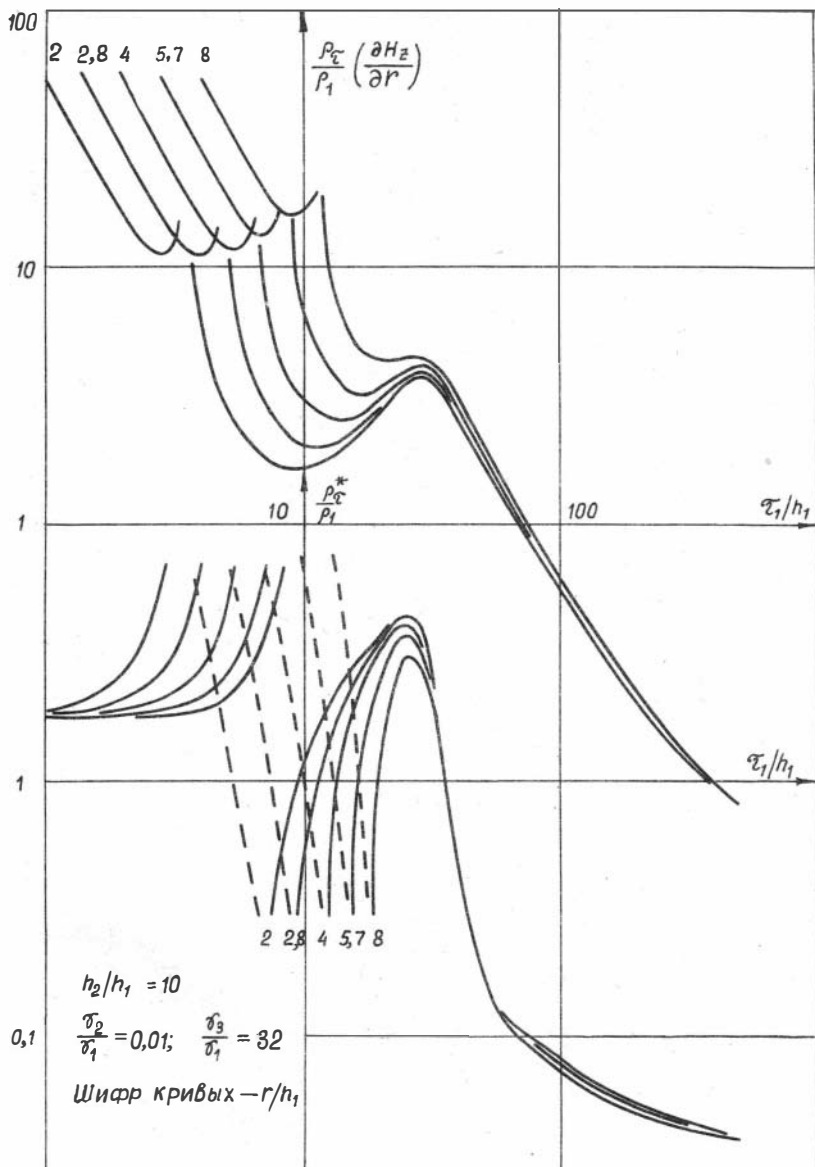


Рис. 16

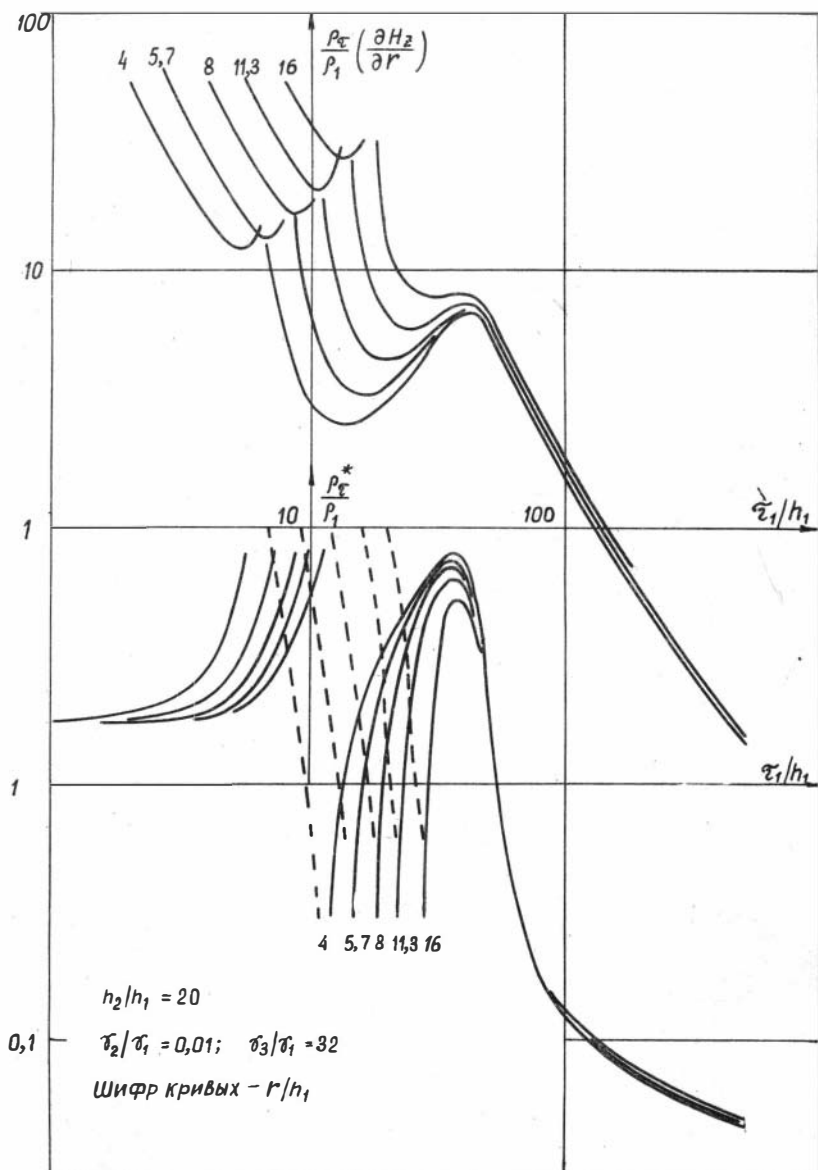


Рис. 1в

Таблица I.

τ_1/h_1	$\hat{b}_2^L$		$\hat{h}_2^L$		ρ_{τ}^*		$\hat{h}_2$		ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
	$\tau_2/h_2=8$	I28	8	I28	8	I28	8	I28				
8 II,3	-147-01	-147-01	435-02	435-02	-387+01	-387+01	325-03	326-03	I	I	I	I
	-579-02	-579-02	478-02	478-02	-138+01	-138+01	-302-02	-302-02	I	I	I	I
	-352-04	-361-04	325-02	325-02	-123-01	-126-01	-413-02	-413-02	I	I	I	I
	+145-02	+145-02	158-02	158-02	+104+01	104 01	-435-02	-345-02	I	I	I	I
16 22,6	+106-02	+106-02	599-03	599-03	+203+01	+202 01	-221-02	-221-02	I	I	I	I
	+501-03	+498-03	189-03	189-03	+302 01	+300 01	-120-02	-120-02	I,005	I	I	I
	+186-03	+183-03	541-04	553-04	+392 01	+379 01	-605-03	-615-03	I,02	0,97	I,03	0,985
	+591-04	+569-04	167-04	183-04	+404 01	+354 01	-314-03	-330-03	I,04	0,91	I,08	0,95
32 45,3	+171-04	+153-04	725-05	938-05	+269 01	+186 01	-189-03	-213-03	I,12	0,77	I,45	0,89
	+506-04	+378-05	473-05	732-05	+122 01	+591 00	-138-03	-170-03	I,34	0,64	2,06	0,81
	+189-05	+102-05	378-05	676-05	+573 00	+173 00	-115-03	-155-03	I,85	0,55	3,3	0,77
	+995-06	425-06	314-05	646-05	+283 00	+752-01	-101-03	-148-03	2,34	0,48	3,8	0,68
64 90,5	+638-06	+271-06	257-05	614-05	+245 00	+505-01	-891-04	-143-03	2,35	0,42	4,9	0,62
	+436-06	+207-06	203-05	577-05	+222 00	+410-01	-776-04	-138-03	2,2	0,35	5,4	0,56
	+301-06	+166-06	154-05	536-05	+206 00	+355-01	-665-04	-132-03	I,81	0,28	5,8	0,5
	+204-06	+133-06	113-05	491-05	+192 00	+311-01	-558-04	-126-03	I,66	0,23	6,1	0,44
128 182	+134-06	+105-06	797-06	443-05	+180 00	+272-01	-458-04	-119-03	I,27	0,18	6,6	0,38
	+850-07	+817-07	538-06	393-05	+170 00	+237-01	-367-04	-111-03	I,04	0,14	7,15	0,33
	+518-07	+622-07	348-06	341-05	+161 00	+208-01	-287-04	-102-03	0,83	0,1	7,7	0,25
	+305-07	+466-07	216-06	289-05	+154 00	+184-01	-219-04	-936-04	0,66	0,072	8,3	0,23
256 362	+174-07	+344-07	128-06	238-06	+149 00	+165-01	-162-04	-838-04	0,52	0,054	9,0	0,19
	+963-08	+248-07	738-07	189-05	+144 00	+149-01	-118-04	-738-04	0,38	0,039	10	0,16
	+515-08	+174-07	409-07	145-05	+139 00	+136-01	-839-05	-637-04	0,30	0,028	10,2	0,13
	+267-08	+119-07	220-07	107-05	+133 00	+126-01	-583-05	-538-04	0,23	0,020	10,5	0,10
512	+135-08	+789-08	116-07	765-06	+125 00	+117-01	-389-05	-443-04	0,18	0,015	10,6	0,09

бенностей поведения нестационарного поля функция ρ_{τ}^* имеет повышенную разрешающую способность относительно τ_3 именно в среднем временном интервале. В поздней стадии чувствительность ρ_{τ}^* к τ_3 остается достаточно высокой, но меньше чувствительности к этому параметру $\partial H_2 / \partial r$, однако эти времена в глубинных зондированиях чаще всего невозможно реализовать из-за недостаточной мощности источников. Зависимости кривых, введенных по функциям поля $\frac{\partial B_z}{\partial t}$, $\frac{\partial H_2}{\partial r}$ и $\frac{\partial B_z}{\partial t} / \frac{\partial H_2}{\partial r}$, от электропроводности основания проиллюстрированы на рис.1.

Кривые ρ_{τ}^* / ρ_1 в десятки раз быстрее (рис.2а, 2б), чем кривые ρ_{τ} / ρ_1 стремятся к истинным значениям τ_3 , что влечет за собой значительное уменьшение энергетических затрат при исследовании τ_3 .

Как упоминалось выше, на ранних временах $\rho_{\tau}^* \rightarrow 1,73 \rho_1$ на поздних $-\rho_{\tau}^* \rightarrow \rho_3$. Интерпретация полной кривой ρ_{τ}^* может быть осуществлена подбором соответствующей палетки теоретических кривых, а приближенная — путем оценки параметров разреза по особым точкам кривой ρ_{τ}^* . К таким точкам относятся положения смены знаков, максимумов, минимумов кривых.

В рассматриваемой трехслойной модели абсцисса перехода $\xi = \beta_z^t / H_z^r$ через ноль (рис.1а,б,в) определяется тремя параметрами ρ_1, h_1, r и практически не зависит от изменения параметров

$\rho_2 / \rho_1, h_2 / h_1, \rho_3 / \rho_1$. На рис.3 приведены графики зависимости положения точек смены знака функции ξ на временной оси в зависимости от h_1 / r . Поскольку в значительной области h_1 / r производная $\partial \tau_1^* / \partial t = 0$, то графики с большей точностью позволяют определять сопротивление верхнего слоя ρ_1 , при известной мощности h_1 . При этом в интервале $0,176 \leq h_1 / \rho_1 < 1$, $\rho_1 = \frac{10\pi t^{\pm}}{r^2 \text{ км}}$, где $t^{\pm}$ — время первого перехода функции ξ через ноль. Контроль за точностью определения ρ_1 можно осуществлять путем сопоставления получаемых результатов по графикам 1 и 2 рис.3, соответствующим первой и второй смене знака функции ξ . Если возможна регистрация поля в ранней стадии, то $\rho_1 = 0,579 \rho_{\tau}^*$.

В работе [2], где был проведен детальный анализ поведения поля B_z для рассматриваемых моделей, показано, что наиболее характерный участок кривой ρ_{τ}^* / ρ_1 для беспалеточного определения глубины H — это максимум ρ_{τ}^* / ρ_1 . В кривых ρ_{τ}^* / ρ_1 координаты максимума также пропорциональны глубине H (рис.4), но и в отли-

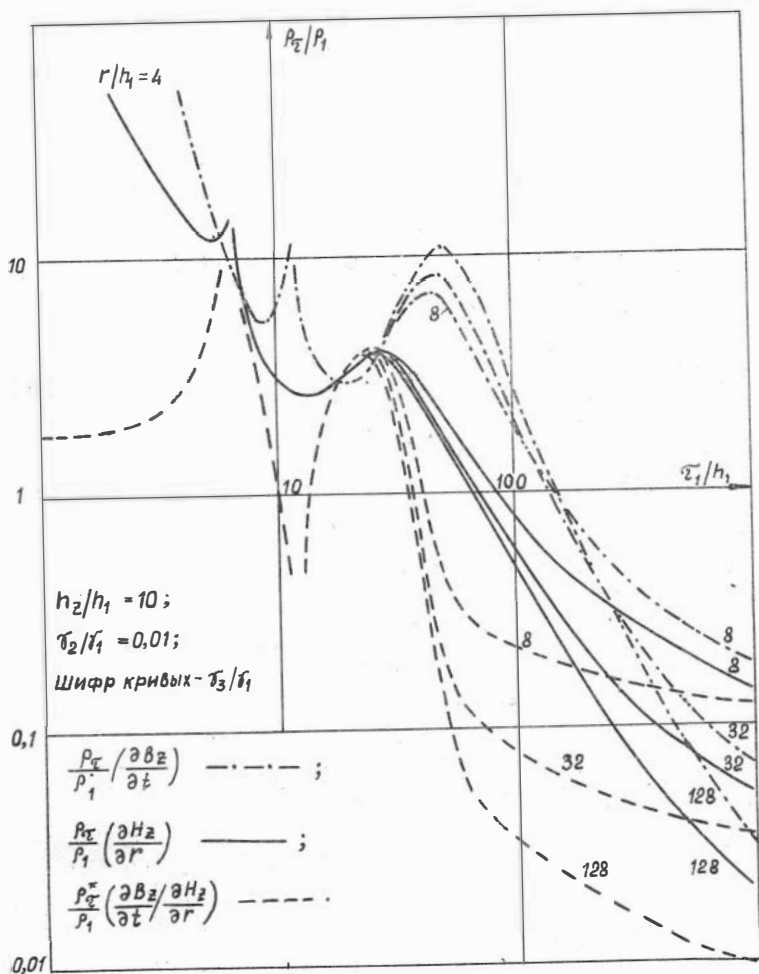


Рис. 2а

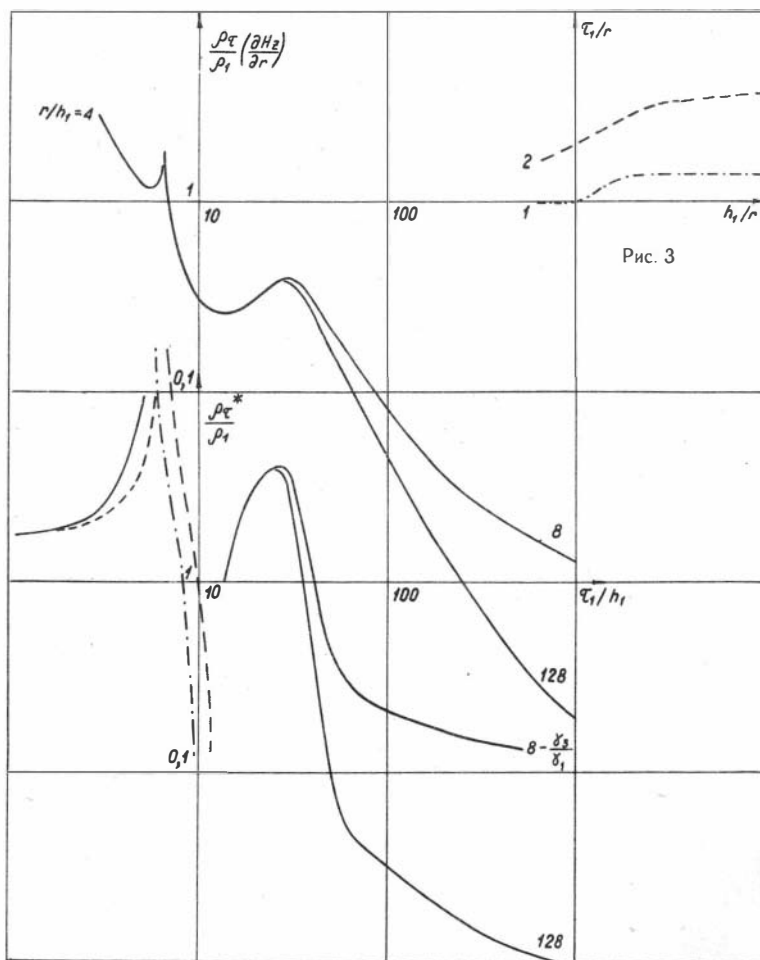


Рис. 3

Рис. 26

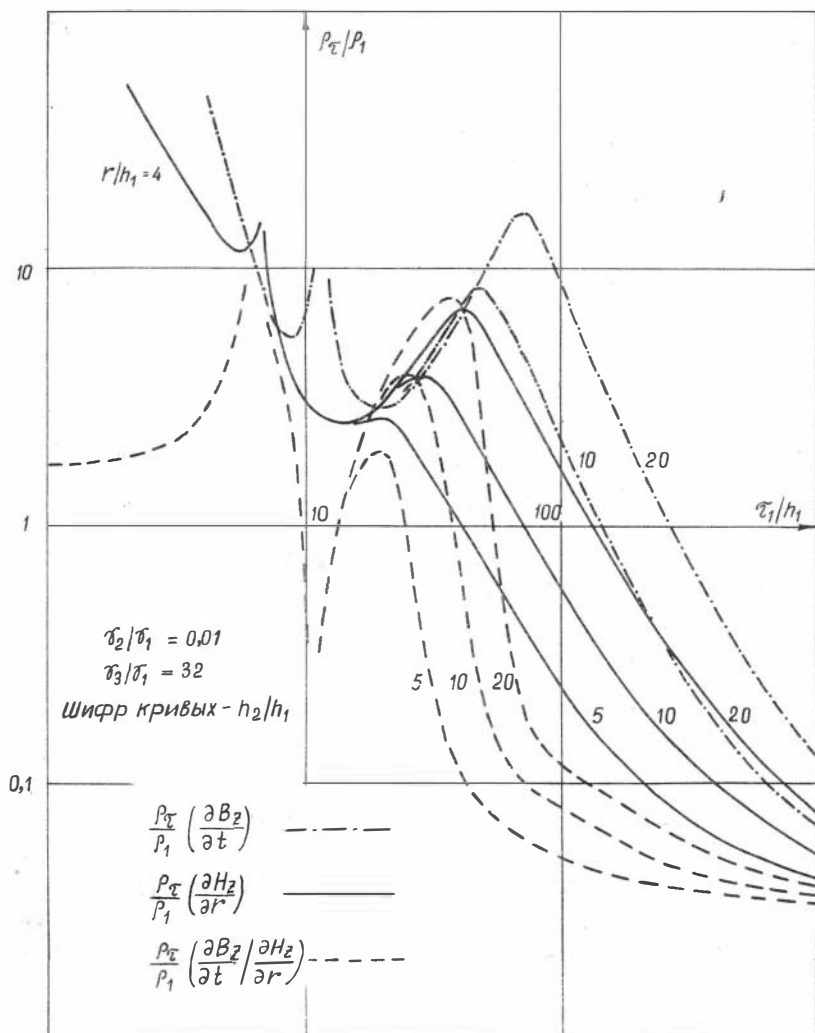


Рис. 4

чие от B_2^t формирование максимума происходит на более ранних временах, когда влияние ρ_3 незначительно (рис.4). Действительно, если обратиться к табл. I, то видно, что формирование максимума кривых ρ_{τ}^*/ρ_1 происходит при 5%-ном влиянии ρ_3/ρ_1 , а кривых ρ_{τ}/ρ_1 (B_2^t) — при 30%-ном.

Разделение во времени влияния геометрических и электрических параметров среды создает благоприятные возможности для беспалочечной интерпретации результатов полевых измерений.

При известных ρ_1 и h_1 с ошибкой не более 10 % имеем следующую связь параметра h_2 и абсциссы максимума ρ_{τ}^* :

$$h_{2\text{ км}} = 0,17 \frac{\sqrt{2\pi t^2 \max} \cdot \rho_1}{h_{1\text{ км}}}$$

Когда H лежит в пределах $0,2 \leq \frac{r}{H} \leq 1,5$, с той же погрешностью справедливо соотношение

$$H_{\text{ км}} = 2,31 \sqrt{2\pi t \max} \sqrt{\rho_{\tau \max}} (r/h_1)^{1/8}$$

Здесь отсутствует зависимость от удельного сопротивления первого слоя. Очевидно, что измерение градиентов поля связано с уменьшением полезного сигнала.

В табл.2 приведены величины э.д.с. в петле и значения магнитного поля при использовании генераторной установки "Полигон-I" для геоэлектрических условий Южно-Байкальского прогностического полигона. В таблице отмечены области максимума кривых ρ_{τ}/ρ_1 . Действительно, приращение ΔH_2 составляет примерно двадцатую часть H_2 в максимуме ρ_{τ} , однако использование только B_2 не дало бы возможности достоверно определить H , поскольку сигнал в области максимума ρ_{τ} составляет единицы и доли мкВ.

Определение H по координатам максимума $\rho_{\tau}(H_2)$ и ρ_{τ}^* происходит при уровне сигнала соответственно 20 мВ и 1 мВ. Надлежащие частотные и динамические характеристики имеют, по-видимому, лишь криогенные магнитометры, еще не получившие широкого применения в практике научных и производственных работ. Вместе с тем, из уравнения Максвелла, описывающего явления электромагнитной индукции, следует соотношение между компонентами нестационарного поля магнитного диполя:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \left(\frac{r \partial E_{\varphi}}{\partial r} + E_{\varphi} \right)$$

или для компоненты поля

$$B_z = -\frac{1}{r} \int_0^t \left(r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + E_\varphi \right) dt',$$

т.е. имеется возможность по измеряемой компоненте E_φ и ее пространственному приращению рассчитать магнитное поле. Для этого

Таблица 2

t_c	E_{mkB}	$H_z \mu\delta$	$\Delta H_z \mu\delta$	Примечание
0,025	I4000	3I00	I400	$M_T M_{изм} = IO^{I4} \text{ Ам}^4$ $M_{ген} = IO^9 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ $I = 40 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ $h_1 = I \text{ км}$ $h_2 = IO \text{ км}$
0,036	I2000	2200	.600	
0,05I	6500	I300	250	
0,07I	2900 τ	690	80 τ	
0,I02	IIO0	330	23	
0,I44	380	I50	6	
0,203	IIO	70	I	
0,288	34 R_T^*	35	R_T^* 0,5	
0,407	8	2I	0,3	
0,576	2 R_T	I7	0,2	
0,8I5	R_T I	I5	0,I	
I,I5	0,3	I4		
I,63		I2		

может быть предложена установка, состоящая из питающего электрического диполя и двух измерительных контуров, включенных навстречу друг другу. Возникает естественный вопрос, почему не воспользоваться для вычислений H_z измеряемой компонентой $\dot{B}_z$. Глубинные зондирования выполняются нами с генераторной установкой "Полигон-Г". Ее выходное напряжение - 6,3 кВ, это дает возможность создать высокий электрический момент $I \sim IO^6 \text{ Ам}$, предъявляя не слишком жесткие требования к сопротивлению заземления ($R = 30 \text{ Ом}$).

Чтобы использовать мощность установки при возбуждении поля магнитным диполем, необходимо выполнить генераторную петлю дос-

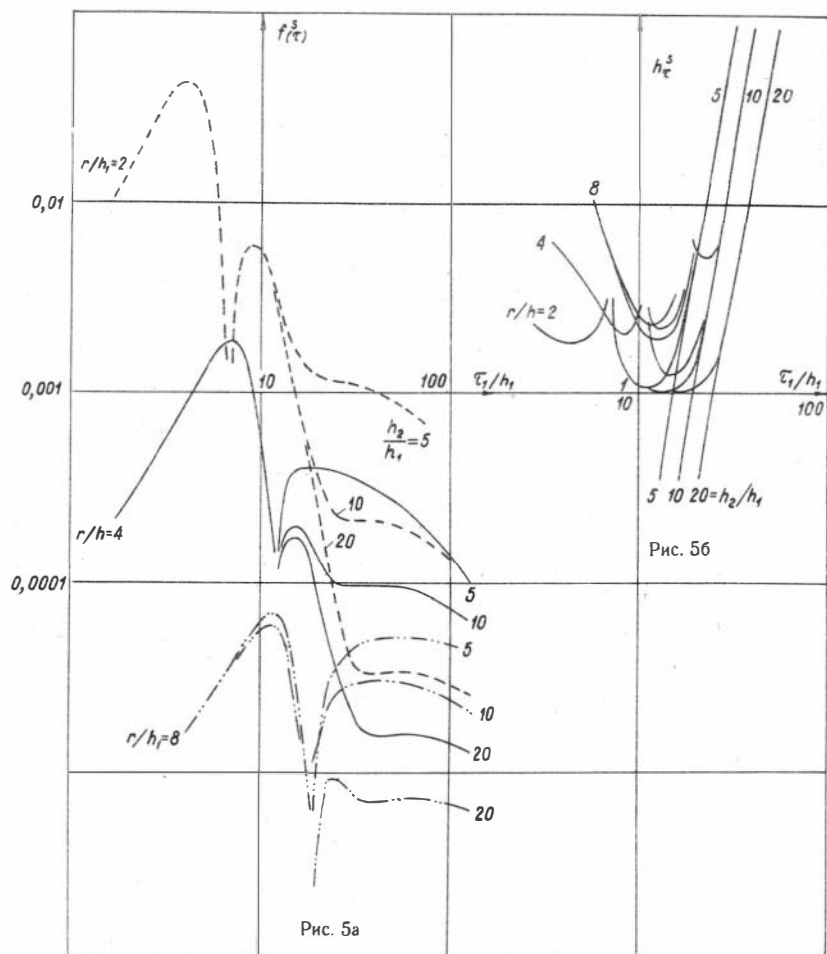
таточно больших размеров (1,5 x 1,5 км) и, возможно, в несколько витков. Такая петля будет обладать большой индуктивностью, что повлечет за собой длительный задний фронт прямоугольного импульса тока и следовательно, исказит поле на начальных временах. Использование электрического диполя позволит получить более точную информацию на малых и средних временах. Если рассмотреть подынтегральное выражение в (2), то, записывая производную по приращениям $\Delta E_{\varphi} \frac{r}{\Delta r} + E_{\varphi}$, видим, что в результате сложения двух величин не происходит потери точности; слагаемые имеют разные знаки на малых временах, когда поле велико, на средних и поздних временах знаки у слагаемых одинаковые, и их абсолютные величины имеют один и тот же порядок. Кроме того, измерение E_{φ} компоненты с генераторной установкой "Полигон-1" имеет и самостоятельное значение, поскольку формирование максимума кривой $\rho_{\tau}/\rho_1(E_{\varphi})$ происходит при сигналах 10-2 мкВ, что почти на порядок больше, чем для компоненты B_z , а в поздней стадии $E_{\phi 22} \cdot f(t_0 \rho_3)$.

Как было рассмотрено выше, значительное повышение разрешающей способности интерпретационных характеристик метода связано с использованием дифференциальных схем. В работе 4 предложен способ компенсации поля в однородной среде (функция $f^{0\partial H}(\tau)$) и плоскости (функция $f^S(\tau)$) на всем временном интервале. Рассмотрим эффективность этого способа в глубинных зондированиях. Следуя [4], для магнитного диполя имеем компенсирующие функции по компоненте H_z :

$$f^{0\partial H}(\tau) = \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{3}{r} H_z + \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{t}{r\mu} ,$$

$$f^S(\tau) = \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{3}{r} H_z + \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{2t}{r\mu}$$

Вид функции $f^S(\tau)$ проиллюстрирован на рис.5а. Видно, что имеем одну смену знака $f^S(\tau)$ и хорошую разрешающую способность относительно H , как и для параметра ρ_{τ} начиная со средних времен. График функции $f^{0\partial H}(\tau)$ имеет более изрезанный вид, функция $f^{0\partial H}(\tau)$ дважды переходит через ноль. Положение первого нуля на временной оси не зависит от параметров разреза и установки: r, h_2, ρ_2, ρ_3 и определяется значениями ρ_1 и h_1 ($\tau_n/h_1 = \text{Const} = 3,06$). Положение второго нуля также слабо зависит от h_2, ρ_2, ρ_3 , но связано с разномом, а также ρ_1 и h_1 , причем $\lg \frac{t}{h_1} \lg \alpha = \lg \frac{t_n}{h_1}$. Решая



два уравнения относительно h_1 и ρ_1 в нулях, найдем формулы определения h_1 и ρ_1 через абсциссы нулей:

$$h_{1\text{ км}} = 2,61 \sqrt{\rho_1 t_{11}}, \quad \rho_1 = 0,66 r^2 \text{ км} / (t_{11} (t_{12}/t_{11})^{1,4}).$$

Здесь t_{11} и t_{12} — время первого и второго нуля функции $f^{\text{одн}}(\tau)$. Как показал анализ результатов расчета, определение параметра h_2 предпочтительнее проводить по функции $f^s(\tau)$, поскольку высокая разрешающая способность $f^s(\tau)$ по параметру h_2 имеется на более ранних временах.

Подставив в функцию $f^s(\tau)$ выражения (I) для неоднородной среды, найдем, что функция $f^s(\tau)$ для рассматриваемой модели пропорциональна мощности второго слоя. Отсюда можно ввести геометрический интерпретационный параметр:

$$H_\tau = f^s(\tau) \cdot \pi \cdot 64 \frac{t_2}{\mu^2} \rho_\tau^2 \frac{r}{M},$$

стремящихся в поздней стадии к суммарной мощности $H \pm h_1 + h_2$. Функция H_τ приведена на рис. 56. Конфигурация H_τ на малых и средних временах зависит от параметров верхней части разреза и разноса, положение правой ветви от разноса практически не зависит, на временной оси эта область совпадает с максимумом кривой ρ_τ/ρ_1 . Наличие восходящей правой ветви связано, кроме влияния параметра H , с заменой в формуле H_τ неизвестного значения параметра ρ_3 на ρ_τ .

Как следует из анализа интерпретационного параметра ρ_τ^* и компенсирующих функций $f^s(\tau)$, $f^{\text{одн}}(\tau)$, определение геометрических и электрических параметров проводящего слоя возможно на значительно более ранних временах, чем при измерении $\dot{B}_\tau$, что позволяет увеличить глубинность исследования среды. Однако применение дифференциальных схем наблюдений и обработки необходимо проводить в комплексе с традиционными схемами, чтобы оценить и избежать влияния латеральных геоэлектрических неоднородностей разреза.

Литература

1. Астраханцев Г.Д. и др. Исследование электропроводности земной коры на Урале. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № I, с. 78–89.

2. Методика интерпретации и альбом теоретических кривых

Глубинных зондирований становлением электромагнитного поля в ближней зоне / Состав.: Г.М.Морозова, Н.Н.Неведрова. Методические рекомендации. Новосибирск, 1982. 92 с.

3. Табаровский Л.А., Ицкович Г.Б. Метод переходных процессов при исследовании кимберлитовых трубок. Новосибирск, 1981. 48 с. (Препринт ИГиГ СО АН СССР).

4. Табаровский Л.А. Электродинамическое подобие в дифференциальных методах нестационарного поля. - Геол. и геофиз., 1981, № 6, с.103-114.

УДК 550.837

Л.А.Табаровский

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ПРОВОДНИКОМ И ИЗОЛЯТОРОМ

При математическом моделировании нестационарных электромагнитных полей конечно-разностными методами часто возникает необходимость сопрягать решения уравнений параболического и эллиптического типа на поверхностях, разделяющих проводники и изоляторы. В любой электроразведочной модели присутствует, по меньшей мере, одна такая граница — дневная поверхность. В моделях рудной электроразведки вмещающие породы, как правило, можно считать изоляторами и, следовательно, поверхность рудного тела также является границей рассматриваемого типа. Проблема, возникающая при сопряжении решений, заключается в том, что на каждом временном шаге конечно-разностной схемы Лисмена-Рекфорда, описывающей эволюцию поля в проводящей среде, необходимо проводить итерационный процесс для расчета поля в изолирующей области, причем каждый шаг итерационного процесса по числу операций и необходимым ресурсам памяти ЭВМ сопоставим с шагом продольно-поперечной прогонки. Таким образом, наличие непроводящих областей во много раз увеличивает объем вычислений в конечно-разностных алгоритмах мо-

делирования нестационарного электромагнитного поля. В [1,2] для скалярных краевых задач был предложен метод исключения непроводящей области из разностной схемы. Идея метода заключается в том, что решение в изоляторе представляется по формуле Грина в виде интеграла от граничных значений нормальной производной поля. Предельная форма этого соотношения на границе используется в качестве краевого условия для параболического уравнения. В настоящей статье метод обобщается на случай векторных краевых задач. В § 1 рассматривается общая постановка краевой задачи для векторно-скалярного потенциала в неоднородной проводящей среде, содержащей изолирующие области. В § 2 исследуется формула Грина для векторного уравнения Лапласа. В § 3 рассматривается построение тензоров Грина для векторных краевых задач Неймана и Дирихле. В § 4 получены краевые условия для векторного потенциала в трехмерном случае и отдельно исследована модель с плоской границей (квазитрехмерная задача).

§ 1. Краевая задача для векторного потенциала в проводящей среде, содержащей изолирующие включения

Пусть имеется среда проводимости σ_a . В ней содержатся однородные включения, ограниченные поверхностями D_k и имеющие проводимости σ_k ($k = 1, 2, \dots$). Магнитная проницаемость μ вмещающей среды и включений одинакова. Источниками, сосредоточенными в области V_0 , возбуждается нестационарное электромагнитное поле. В любой точке пространства оно подчиняется уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) и (2) тождественно удовлетворяются введением векторно-скалярного потенциала $(\vec{A}, \varphi)$:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}; \quad (5)$$

$$\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \quad (6)$$

Если потенциал $(\vec{A}, \varphi)$ подвергнуть градиентному преобразованию

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \psi, \quad (7)$$

$$\varphi' = \varphi - \mu \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (8)$$

то поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ будут выражаться через потенциал $(\vec{A}', \varphi')$ так же, как и через потенциал $(\vec{A}, \varphi)$.

Из (I), (3) и (5) (6) получаются уравнения на потенциал $(\vec{A}, \varphi)$:

$$\text{rot rot } \vec{A} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} \varphi; \quad (9)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) + \text{div grad} \varphi = 0. \quad (10)$$

Для упрощения уравнений (9), (10) специальным образом подбирают градиентное преобразование (7), (8). В частности, наиболее употребительной является калибровка Лоренца:

$$\text{div} \vec{A} + \sigma \varphi = 0. \quad (II)$$

Используя (II), получаем отдельные уравнения на векторный и скалярный потенциалы:

$$\text{rot rot } \vec{A} - \text{grad div} \vec{A} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (I2)$$

$$\Delta \varphi = \mu \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (I3)$$

Если взять дивергенцию от правой и левой частей (I2) и использовать калибровку (II), то легко увидеть, что уравнение (I3) в этой калибровке является следствием уравнения (I2). Таким образом, имеется три независимых уравнения (I2) на компоненты векторного потенциала $\vec{A}$, а скалярный потенциал получается из векторного с помощью калибровочного соотношения (II):

$$\varphi = - \frac{\text{div} \vec{A}}{\sigma} \quad (I4)$$

Подставляя (I4) в (6), окончательно исключаем скалярный потенциал как из уравнений, так и из выражений для компонент поля:

$$\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \text{grad div} \vec{A}. \quad (I5)$$

Итак, векторный потенциал должен подчиняться уравнению (12). Граничные условия для этого уравнения на поверхностях D_K получаются из требования непрерывности касательных компонент поля. Введем на границе D_K ортогональную координатную сеть ξ_1, ξ_2 . Нормальную координату обозначим через ξ_n , коэффициенты Ламе — через h_1, h_2, h_n . Касательные компоненты поля следующим образом выражаются через потенциал $\vec{A}$:

$$H_1 = \frac{1}{h_2 h_n} \left(\frac{\partial(h_n A_n)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial \xi_n} \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{h_1 h_n} \left(-\frac{\partial(h_n A_n)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial \xi_n} \right);$$

$$E_1 = -\mu \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\operatorname{div} \vec{A}}{\sigma} \right);$$

$$E_2 = -\mu \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\operatorname{div} \vec{A}}{\sigma} \right).$$

Из приведенных соотношений видно, что шесть нижеследующих граничных условий обеспечивают непрерывность тангенциальных компонент полей $\vec{E}, \vec{H}$

$$[A_1] = 0; \quad (16)$$

$$[A_2] = 0; \quad (17)$$

$$[A_n] = 0; \quad (18)$$

$$[\partial A_1 / \partial \xi_n] = 0; \quad (19)$$

$$[\partial A_2 / \partial \xi_n] = 0; \quad (20)$$

$$\left[\frac{\operatorname{div} \vec{A}}{\sigma} \right] = 0; \quad (21)$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок.

Пусть теперь включение V_K является изолятором ($\epsilon_K = 0$). В этом случае калибровка Лоренца вырождается:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (22)$$

а отдельные уравнения на скалярный и векторный потенциалы приобретают, как это следует из (9), (10), следующий вид:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = 0, \quad (23)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad (24)$$

Граничные условия (16)–(20), обеспечивающие непрерывность касательных компонент магнитного и вихревой части электрического поля, останутся в силе. Условие (21), означающее непрерывность скалярного потенциала, в случае $\sigma = 0$ теряет смысл, и его следует видоизменить. При этом новое граничное условие на $\vec{A}$ не может быть выбрано исходя из требования непрерывности φ . Действительно, граничное условие на φ заменяется граничным условием на $\vec{A}$ только тогда, когда с обеих сторон границы существует и известна функциональная зависимость $\varphi(\vec{A})$. Если $\varphi^{\pm}$, $\vec{A}^{\pm}$ – значения потенциалов соответственно с положительной и отрицательной стороны поверхности D_K , то полагая

$$\varphi^+(\vec{A}^+) = \varphi^-(\vec{A}^-),$$

мы получаем граничное условие типа (21) на вектор-потенциал. Если вдоль поверхности D_K границат проводящий и изолятор, то этого сделать не удастся, поскольку в изоляторе при калибровке (22) скалярный потенциал не выражается через векторный – они функционально независимы. Непрерывность φ в этом случае обеспечивается следующим образом:

1) формулируется и решается краевая задача на векторный потенциал $\vec{A}$ с условиями (16)–(20) и некоторым дополнительным граничным условием;

2) на границе D_K со стороны проводящей среды рассчитывается по формуле (14) скалярный потенциал. Полученные значения используются как краевые условия задачи Дирихле для уравнения (24). Решение этой задачи и является скалярным потенциалом в области V_K . По построению, он удовлетворяет условию непрерывности на границе D_K .

Рассмотрим вопрос о дополнительном граничном условии для потенциала $\vec{A}$ на поверхности D_K . В отличие от проводящей среды, компоненты вектора $\vec{A}$ в изоляторе не являются независимыми, а связаны соотношением (22). Одновременное выполнение (22), (23) можно обеспечить, подчинив потенциал видоизмененному уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (25)$$

с граничным.условием

$$(\operatorname{div} \vec{A})_{INS} = 0. \quad (26)$$

Индекс „INS“ в (26) показывает, что значение величины $\operatorname{div} \vec{A}$ нужно брать со стороны изолятора. Для доказательства эквивалентности (25), (26) и (22), (23) возьмем дивергенцию от левой и правой частей (25). В результате получаем:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) = 0,$$

т.е. $\operatorname{div} \vec{A}$ — гармоническая функция. Если у нее нет особенностей внутри области V_K , то из равенства нулю $\operatorname{div} \vec{A}$ на D_K следует, что $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ и внутри V_K , а отсюда, в свою очередь, вытекает эквивалентность (25) и (23).

Сформулируем окончательно краевую задачу на вектор-потенциал в неоднородной проводящей среде, содержащей изолирующие включения.

I. Уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \sigma \neq 0 \quad (27)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \sigma = 0. \quad (28)$$

II. Граничные условия:

$$[A_1] = 0, \quad (29)$$

$$[A_2] = 0, \quad (30)$$

$$[A_n] = 0. \quad (31)$$

$$[\partial A_1 / \partial \xi_n] = 0, \quad (32)$$

$$[\partial A_2 / \partial \xi_n] = 0. \quad (33)$$

$$\left[\frac{\operatorname{div} \vec{A}}{\sigma} \right] = 0, \text{ если граничат два проводника,} \quad (34)$$

$$(\operatorname{div} \vec{A})_{INS} = 0, \text{ если граничат проводник и изолятор.} \quad (35)$$

Кроме того, необходимо обычным образом поставить условия в источнике и на бесконечности, а также в начальный момент времени. Относительно начальных значений заметим, что их следует задавать только в проводящих участках среды.

§ 2. Формула Грина для векторного уравнения Лапласа

Пусть $\vec{G}^m(Q_0, Q)$ — фундаментальное решение векторного уравнения Лапласа:

$$\text{rot rot } \vec{G}^m - \text{grad div } \vec{G}^m = \vec{e}^m \delta(Q_0 - Q). \quad (36)$$

Здесь $\vec{e}^m$ — единичный вектор; Q_0, Q — произвольные точки трехмерного пространства. Рассмотрим (36) совместно с (28):

$$\text{rot rot } \vec{A} - \text{grad div } \vec{A} = 0. \quad (28)$$

Умножим (36) скалярно на $\vec{A}$, (28) — на $\vec{G}^m$, вычтем из первого уравнения второе и выполним преобразования:

$$\begin{aligned} (\vec{e}^m \vec{A}) \delta(Q_0 - Q) &= (\vec{A} \text{rot rot } \vec{G}^m - \vec{G}^m \text{rot rot } \vec{A}) - \\ &\quad - (\vec{A} \text{grad div } \vec{G}^m - \vec{G}^m \text{grad div } \vec{A}) = \\ &= (\vec{A} \text{rot rot } \vec{G}^m - \text{rot } \vec{A} \text{rot } \vec{G}^m) + (\text{rot } \vec{A} \text{rot } \vec{G}^m - \vec{G}^m \text{rot rot } \vec{A}) - \\ &\quad - (\vec{A} \text{grad div } \vec{G}^m + \text{div } \vec{A} \text{div } \vec{G}^m) + (\text{div } \vec{A} \text{div } \vec{G}^m + \vec{G}^m \text{grad div } \vec{A}) = \\ &= \text{div} [\text{rot } \vec{G}^m \times \vec{A}] + \text{div} [\vec{G}^m \times \text{rot } \vec{A}] - \\ &\quad - \text{div} (\vec{A} \cdot \text{div } \vec{G}^m) + \text{div} (\vec{G}^m \cdot \text{div } \vec{A}). \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть область V ограничена поверхностью S и $Q_0 \in V$. Пусть S является координатной поверхностью некоторой криволинейной ортогональной системы координат ξ_1, ξ_2, η с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_η . Будем полагать, что $h_\eta = 1$. Проинтегрируем соотношение (37) по объему V :

$$\begin{aligned} A_m(Q_0) &= \int_S ([\text{rot } \vec{G}^m \times \vec{A}]_\eta + [\vec{G}^m \times \text{rot } \vec{A}]_\eta - A_\eta \text{div } \vec{G}^m + G_\eta^m \text{div } \vec{A}) dS \\ &= \int (\text{rot}_1 \vec{G}^m \cdot A_2 - \text{rot}_2 \vec{G}^m \cdot A_1 + G_1^m \text{rot}_2 \vec{A} - G_2^m \text{rot}_1 \vec{A} - \\ &\quad - A_\eta \text{div } \vec{G}^m + G_\eta^m \text{div } \vec{A}) dS = \\ &= \underbrace{\int_S \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_\eta^m}{\partial \xi_2} A_2 - \frac{1}{h_2} \frac{\partial (h_2 G_2^m)}{\partial \eta} A_2 + \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_\eta^m}{\partial \xi_1} A_1 - \frac{1}{h_1} \frac{\partial (h_1 G_1^m)}{\partial \eta} A_1}_{\text{wavy lines}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{h_1} G_1^m \frac{\partial A_n}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_1} G_1^m \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial n} - \frac{1}{h_2} G_2^m \frac{\partial A_n}{\partial \xi_2} + \frac{1}{h_2} G_2^m \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial n} \\
& - \frac{1}{h_1 h_2} A_n \left(\frac{\partial(h_2 G_1^m)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(h_1 G_2^m)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 G_n^m)}{\partial n} \right) + \\
& + \frac{1}{h_1 h_2} G_n^m \left(\frac{\partial(h_2 A_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(h_1 A_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_n)}{\partial n} \right) \Big] ds
\end{aligned}$$

Преобразуя группы одинаково подчеркнутых слагаемых, получаем:

$$\begin{aligned}
A_m(Q_0) = \int_S \left[\bar{G}^m \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} - \bar{A} \frac{\partial \bar{G}^m}{\partial n} + \right. \\
\left. + \operatorname{div}_S (G_n^m \bar{A}) - \operatorname{div}_S (A_n \bar{G}^m) \right] ds
\end{aligned} \quad (38)$$

Здесь $\bar{\partial}/\partial n$ — оператор покомпонентного дифференцирования координатной строки вектора. Оператор div_S является поверхностным аналогом объемной дивергенции. Он действует по следующему правилу на двухкомпонентный вектор $\vec{P} = (P_1, P_2)$, определенный в касательной к S ортонормированной системе координат:

$$\operatorname{div}_S \vec{P} = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(h_2 P_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(h_1 P_2)}{\partial \xi_2} \right).$$

Если поверхность S обладает достаточной гладкостью и замкнута, а вектор $\vec{P}$ дифференцируем на ней, то справедливо соотношение:

$$\int_S \operatorname{div}_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (39)$$

С учетом (39), получаем из (38):

$$A_m(Q_0) = \int \left(\bar{G}^m \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} - \bar{A} \frac{\partial \bar{G}^m}{\partial n} \right) ds \quad (40)$$

Записывая (40) при $s_m = 1, 2, 3$, получаем:

$$\bar{A}(Q_0) = \int_S (G^1(Q_0, Q) \frac{\partial \bar{A}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial G^1(Q_0, Q)}{\partial n} \bar{A}(Q)) ds. \quad (41)$$

Здесь $G^1(Q_0, Q)$ — матрица, строки которой составлены из координат векторов $\vec{G}^1, \vec{G}^2, \vec{G}^3$:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 & G_3^1 \\ G_1^2 & G_2^2 & G_3^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 \end{pmatrix}$$

Интегрирование в (4I) выполняется по координатам точки Q . Матрица $\hat{G}$ является фундаментальным тензором векторного уравнения Лапласа. Тензор $\hat{G}_*(Q_0, Q)$ характеризуется двумя системами координат: координатами в точке Q_0 с базисными векторами $\vec{t}^m$ (в этой системе рассматривается вектор $\vec{A}(Q_0)$ в левой части (4I)) и координатами в точке Q с базисом $\vec{t}^m$ (в этих координатах рассматриваются векторы $\partial \vec{A}(Q)/\partial n$ и $\vec{A}(Q)$ в подынтегральном выражении (4I), а также строки самого тензора $\hat{G}$). Базисные тройки в точках Q_0 и Q будем обозначать соответственно через B_0 и B : $B_0 = \{\vec{t}^1, \vec{t}^2, \vec{t}^3\}$; $B = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\}$. Базисы B_0 и B при $Q_0 \rightarrow Q$ не обязательно должны совпадать, т.е. они могут принадлежать двум различным системам координат в пространстве. Будем обозначать эти системы соответственно через C_0 и C .

Рассмотрим вопрос об инвариантности соотношения (4I) относительно преобразований координатных систем C_0 и C . Пусть в точках Q_0 и Q в результате преобразования криволинейных координат C_0 и C в координаты C'_0 и C' произошло следующее изменение базисов:

$$\begin{pmatrix} \vec{t}^1 \\ \vec{t}^2 \\ \vec{t}^3 \end{pmatrix}' = \hat{T}_0 \begin{pmatrix} \vec{t}^1 \\ \vec{t}^2 \\ \vec{t}^3 \end{pmatrix}; \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \\ \vec{t}_3 \end{pmatrix}' = \hat{T} \begin{pmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \\ \vec{t}_3 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Здесь и в дальнейшем штрихом вверху слева (или справа) отмечается преобразование величин, связанное с переходом к новым координатам в точке Q_0 (или Q). Координатные строки произвольного вектора $\vec{P}$ в каждой из систем преобразуются по правилам:

$${}^i \vec{P} = \hat{T}_0^i \vec{P} \quad (44)$$

$$\vec{p}' = \hat{T} \vec{p} \quad (45)$$

Инвариантность относительно преобразований координат C_0 .

Поддействуем на левую и правую часть (4I) оператором $\hat{T}_0$. Элементы матрицы $\hat{T}_0$ не зависят от координат C , по которым осуществляется дифференцирование $\partial/\partial n$ в подынтегральном выражении. Поэтому операторы $\hat{T}_0$ и $\partial/\partial n$ перестановочны. В результате получаем:

$$\vec{A} = \int_s \left(\hat{G}' \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} - \frac{\partial \hat{G}'}{\partial n} \vec{A} \right) ds, \quad (46)$$

$$\hat{G}' = \hat{T}_0 \hat{G} \quad (47)$$

Таким образом, соотношение (4I) инвариантно относительно любых преобразований координат C_0 . Фундаментальный тензор преобразуется по правилу (47).

Инвариантность относительно преобразований координат C .

Отметим сразу, что соотношение (4I) получено при определенных предположениях о структуре координат C , а именно:

- а) граница является в системе C координатной поверхностью;
- б) коэффициент Ламе h_n равен единице на S .

Следовательно, допустимы только такие преобразования координат C , при которых новая координатная система C' также обладает свойствами а), б). Покажем, что все такие преобразования перестановочны с операцией дифференцирования по нормали. Для доказательства воспользуемся известными свойствами базисных векторов орthonормированной криволинейной системы координат [3]:

$$\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial \xi_1} = -\frac{\vec{l}_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - \frac{\vec{l}_n}{h_n} \frac{\partial h_1}{\partial n} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial \xi_2} = \frac{\vec{l}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \quad (49)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial n} = \frac{\vec{l}_n}{h_1} \frac{\partial h_n}{\partial \xi_1} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_2}{\partial \xi_2} = -\frac{\vec{l}_n}{h_n} \frac{\partial h_2}{\partial n} - \frac{\vec{l}_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \quad (51)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_2}{\partial h} = \frac{\vec{l}_n}{h_2} \frac{\partial h_n}{\partial \xi_2} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_2}{\partial \xi_1} = \frac{\vec{l}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \quad (53)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_n}{\partial n} = \frac{\vec{l}_1}{h_1} \frac{\partial h_n}{\partial \xi_1} - \frac{\vec{l}_2}{h_2} \frac{\partial h_n}{\partial \xi_2} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_n}{\partial \xi_1} = \frac{\vec{l}_1}{h_n} \frac{\partial h_1}{\partial n} \quad (55)$$

$$\frac{\partial \vec{l}_n}{\partial \xi_2} = \frac{\vec{l}_2}{h_n} \frac{\partial h_2}{\partial n} \quad (56)$$

Если $h_n = I$, из (50), (52), (56) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial n} \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Пусть базисы систем C' и C , удовлетворяющих условиям а), б), связаны соотношением (43). В силу свойства а)

$$\vec{l}_n' = \vec{l}_n, \quad (58)$$

а с учетом (58) и свойства б)

$$\partial/\partial n' = \partial/\partial n. \quad (59)$$

Дифференцируя (43) по нормали и учитывая (59), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial n'} \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_n \end{pmatrix}' = \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_n \end{pmatrix} + \hat{T} \frac{\partial}{\partial n} \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_n \end{pmatrix}. \quad (60)$$

С учетом того, что для обоих базисов справедливо соотношение (57), из (60) следует:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\partial \hat{T} / \partial n = 0 \quad (61)$$

Из (6I) вытекает перестановочность операторов $\hat{T}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$. Учитывая, это, выполним в (4I) преобразование базиса B :

$$\bar{A} = \int_S \left(\hat{G} \frac{\partial}{\partial n} \left(\hat{T}^{-1} \bar{A}' \right) - \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \left(\hat{T}^{-1} \bar{A}' \right) \right) ds' =$$

$$= \int_S \left(\hat{G}' \frac{\partial \bar{A}'}{\partial n'} - \frac{\partial \hat{G}'}{\partial n'} \bar{A}' \right) ds \quad (62)$$

$$\hat{G}' = \hat{G} \hat{T}^{-1} \quad (63)$$

Объединяя (46)–(47) и (62)–(63), получаем правило совместного преобразования соотношения (4I) по координатам точек Q_0 и Q :

$$\bar{A}' = \int_S \left(\hat{G}' \frac{\partial \bar{A}'}{\partial n'} - \frac{\partial \hat{G}'}{\partial n'} \bar{A}' \right) ds', \quad (64)$$

$$\hat{G}' = \hat{T}_0 \hat{G} \hat{T}^{-1} \quad (65)$$

Таким образом, можно окончательно сформулировать следующее утверждение: Формула Грина инвариантна относительно любых преобразований координат точки Q_0 и относительно таких преобразований координат точки Q , при которых граница S остается координатной поверхностью, а коэффициент Ламе h_n сохраняет на S значение, равное единице. Фундаментальный тензор $\hat{G}$ преобразуется по правилу (65).

§ 3. Тензор Грина задач Неймана и Дирихле для векторного уравнения Лапласа

Рассмотрим следующую краевую задачу в области V , ограниченной поверхностью S :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{G}^m - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{G}^m = \vec{T}^m \delta(Q_0 - Q); Q_0, Q \in V \quad (66)$$

$$\frac{\partial \vec{G}^m}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (67)$$

$$m = 1, 2, 3.$$

Три вектора – решения трех задач (66), (67) – составят в совокупности тензор Грина векторной задачи Неймана. Заметим сразу, что если в области V введена система криволинейных координат C , в которой поверхность S является координатной и на ней $h_n = 1$, то задачу (66), (67) можно решать в декартовых координатах точки Q , а затем перейти к криволинейным координатам C . При этом граничное условие (67) достаточно обеспечить для каждой из декартовых компонент, и тогда оно будет обеспечено для криволинейных компонент. Действительно, пусть $\hat{T}$ – матрица перехода от декартова базиса $\{\bar{t}_x, \bar{t}_y, \bar{t}_z\}$ к базису системы $C\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_n\}$:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_n \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{pmatrix} \quad (68)$$

Дифференцируя (68) по нормали и учитывая, что производные от базисных векторов равны нулю, получаем

$$\bar{\partial} \hat{T} / \partial n = 0; \quad \bar{\partial} \bar{G}^m / \partial n = \bar{\partial} \bar{G}^m / \partial n$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{G}^m}{\partial n} = \frac{\bar{\partial}}{\partial n} \begin{pmatrix} G_1^m \\ G_2^m \\ G_n^m \end{pmatrix} = \frac{\bar{\partial}}{\partial n} \left[\hat{T} \begin{pmatrix} G_x^m \\ G_y^m \\ G_z^m \end{pmatrix} \right] = \hat{T} \frac{\bar{\partial}}{\partial n} \begin{pmatrix} G_x^m \\ G_y^m \\ G_z^m \end{pmatrix} \quad (69)$$

Из (69) вытекает, что если

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial n} \begin{pmatrix} G_x^m \\ G_y^m \\ G_z^m \end{pmatrix} = 0,$$

то и

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial n} \begin{pmatrix} G_1^m \\ G_2^m \\ G_n^m \end{pmatrix} = 0$$

Итак, будем решать задачу (66)–(67) в декартовых координатах. Совместим для простоты системы координат точек Q_0 и Q , т.е. положим:

$$\begin{pmatrix} \vec{l}^1 \\ \vec{l}^2 \\ \vec{l}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{l}_x \\ \vec{l}_y \\ \vec{l}_z \end{pmatrix} \quad (70)$$

Прежде чем построить тензор Грина задачи (66)–(67), рассмотрим фундаментальное решение уравнения (66) в неограниченном пространстве. Очевидно, в базисе (70) фундаментальный тензор $\hat{q}_\infty$ имеет вид

$$\hat{q}_\infty = \frac{1}{4\pi R} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

$$R = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right)^{1/2}.$$

Введем понятие фундаментального решения уравнения (66) в ограниченной области. Пусть $\{N_s\}$ – совокупность всех нормалей, которые можно опустить из точки Q_0 на поверхность S . Обозначим через N_s^0 ту нормаль, расстояние вдоль которой до поверхности является наименьшим (если этому условию удовлетворяют несколько нормалей, выберем любую из них). Пусть Q_s – точка, отраженная относительно поверхности S по нормали N_s^0 . Будем фундаментальным решением уравнения (66) для области V считать тензор $\hat{q}_s$, определяемый в базисе (70) соотношением:

$$\hat{q}_s = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\bar{R}} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (72)$$

$$\bar{R} = \left((x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь (x_s, y_s, z_s) – координаты точки Q_s . Строки матрицы (72) будем рассматривать как однокомпонентные векторы

$$\vec{q}_s^m = \mathcal{U} \vec{l}^m$$

Перейдем к построению тензора Грина задачи Неймана (66)–(67). Представим каждый из векторов $\vec{G}^m$ в виде:

$$\vec{G}^m = \vec{F}^m + \vec{q}_s^m.$$

Очевидно, что для декартовых компонент вектора $\vec{F}^m$ получаются следующие независимые скалярные задачи Неймана:

$$\Delta F_j^m = 0$$

$$(\partial f_j^m / \partial n)_s = -(\partial u / \partial n) \delta_j^m ,$$

$$m = 1, 2, 3,$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Здесь δ_j^m - символ Кронекера. Обозначим через f_N решение задачи

$$\Delta f_N = 0 \quad (73)$$

$$\frac{\partial f_N}{\partial n} \Big|_s = -\frac{\partial u}{\partial n} . \quad (74)$$

Тогда, очевидно

$$\hat{G} = (f_N + u) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (75)$$

Соотношение (75) определяет тензор $\hat{G}$ в координатах (70). Переход к другим координатам осуществляется с помощью преобразования (65). Таким образом, тензор Грина задачи Неймана для векторного уравнения Лапласа конструируется из решения одной единственной скалярной задачи Неймана (73)-(74). Этот результат справедлив при условии, что в координатах точки Q граница S является координатной поверхностью и на ней $h_n = I$. Аналогичный результат для задачи Дирихле является очевидным. Для того, чтобы сконструировать тензор Грина векторной задачи Дирихле, необходимо построить решение скалярной задачи:

$$\Delta f_D = 0 , \quad (76)$$

$$f_D|_s = -u . \quad (77)$$

Тогда в координатах (70) тензор Грина векторной задачи определяется соотношением:

$$\hat{G} = (f_D + u) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение задач (73)-(74) и (76)-(77) может быть построено известными методами, например, методом интегральных уравнений.

§ 4. Интегральные краевые условия для векторного потенциала

Используя функцию Грина задачи Неймана, можно с помощью (4I) выразить значения поля $\vec{A}$ в области V через значения нормальной производной $\partial \vec{A} / \partial n$:

$$\vec{A} = \int_S \vec{G} \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} ds. \quad (78)$$

Учитывая, что, согласно (26), $(\operatorname{div} \vec{A})_{\text{INS}} = 0$, получаем:

$$\vec{A} = \int_S \vec{G} \begin{pmatrix} \partial A_1 / \partial n \\ \partial A_2 / \partial n \\ -\operatorname{div}_S \vec{A} \end{pmatrix} ds. \quad (79)$$

Преобразуем входящие в (79) выражения вида

$$- \int_S (\operatorname{div}_S \vec{A}) G_n^m ds \quad (m=1, 2, 3). \quad (80)$$

Поскольку

$$\int_S \operatorname{div}_S (\vec{A} G_n^m) ds = 0,$$

то

$$- \int_S (\operatorname{div}_S \vec{A}) G_n^m ds = \int_S \vec{A} \cdot \operatorname{grad}_S G_n^m ds. \quad (81)$$

С учетом (81), можно интегральное представление (79) записать в виде:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_n \end{pmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} G_1^1, G_2^1, \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_n^1}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_n^1}{\partial \xi_2} \\ G_1^2, G_2^2, \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_n^2}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_n^2}{\partial \xi_2} \\ G_1^3, G_2^3, \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_n^3}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_n^3}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Исследуем поведение тензора Грина в криволинейной системе координат, когда точка Q принадлежит границе, а точка Q_0 расположена на малом расстоянии от Q на самой границе или вне ее. Будем полагать, что координатные системы точек Q_0 и Q тождественны: $C_0 = C$. Пусть $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_n$ — единичные орты в точке Q . Выразим в этом базисе орты $\vec{t}'_1, \vec{t}'_2, \vec{t}'_3$, принадлежащие точке Q_0 . Пользуясь соотношениями (48)–(56), можно записать:

$$\vec{t}'_1 = \vec{t}_1 + \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial \xi_1} (\xi_1^0 - \xi_1) + \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial \xi_2} (\xi_2^0 - \xi_2) + \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial n} (\xi_n^0 - \xi_n) =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{l}_1 + \bar{l}_2 \left[-\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} (\xi_1^0 - \xi_1) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} (\xi_2^0 - \xi_2) \right] + \bar{l}_n \left[-\frac{\partial h_1}{\partial n} (\xi_1^0 - \xi_1) \right. \\
&\bar{l}_2' = \bar{l}_2 + \bar{l}_1 \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} (\xi_1^0 - \xi_1) - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} (\xi_2^0 - \xi_2) \right] + \bar{l}_n \left[-\frac{\partial h_2}{\partial n} (\xi_2^0 - \xi_2) \right] \\
&\bar{l}_n' = \bar{l}_n + \bar{l}_1 \left[\frac{\partial h_1}{\partial n} (\xi_1^0 - \xi_1) \right] + \bar{l}_2 \left[\frac{\partial h_2}{\partial n} (\xi_2^0 - \xi_2) \right].
\end{aligned}$$

Вводя обозначения:

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_1} (\xi_1^0 - \xi_1) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} (\xi_2^0 - \xi_2), \quad (83)$$

$$\varepsilon_{13} = -\frac{\partial h_1}{\partial n} (\xi_1^0 - \xi_1), \quad (84)$$

$$\varepsilon_{23} = -\frac{\partial h_2}{\partial n} (\xi_2^0 - \xi_2), \quad (85)$$

получим:

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_n \end{pmatrix}' = \hat{T}_\varepsilon \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & 1 & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_n \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Таким образом, тензор Грина при $Q_0 \rightarrow Q$ имеет вид:

$$\hat{G}_{Q_0 \rightarrow Q} \approx (f_N + U) \hat{T}_\varepsilon. \quad (87)$$

Учитывая регулярность f_N , характер особенности U (см. (72)) и разложение (87), нетрудно показать, что в соотношениях (79), (82) возможен предельный переход $Q_0 \rightarrow S$. При этом интегралы с касательными производными функции G_N^3 в третьей строке (82) следует понимать в смысле главного значения. В результате предельного перехода получается две группы эквивалентных интегро-дифференциальных соотношений (79) и (82), связывающих на границе величины $\bar{A}, \partial A_1 / \partial n, \partial A_2 / \partial n$. Значения компонент потенциала и их нормальных производных в (79), (82) берутся с той стороны границы S , которая обращена к изолатору. Однако, благодаря граничным условиям (29)–(33) можно также считать, что соотношения (79), (82) связывают граничные значения $\bar{A}, \partial A_1 / \partial n, \partial A_2 / \partial n$ со стороны проводящей области. Это делает возможным использовать (79) или

(82) в качестве краевых условий для замыкания разностных схем в проводящей области. Алгоритм численного сопряжения условий (79), (82) с разностной схемой рассмотрен в [2] на примере скалярной задачи. Исследуем в качестве примера соотношение (79) для случая, когда изолирующая область является полупространством. Рассмотрим проведем в цилиндрической системе координат с осью Z , направленной из диэлектрика в проводящую среду. Результаты могут быть использованы при решении методом конечных разностей квазитрехмерных задач дифракции нестационарного электромагнитного поля (среда-осесимметричная, источник - произвольный).

В случае плоской границы краевое условие в (74) становится однородным, поэтому $f_N = 0$, и тензор Грина в декартовой системе $\{x, y, z\}$ принимает вид:

$$\hat{G} = \frac{1}{2\pi\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (88)$$

$$\rho = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2} = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^{1/2}.$$

Здесь (ρ_0, φ_0) и (ρ, φ) - цилиндрические координаты точек Q_0 и Q , расположенных на плоскости. Перейдем в (88) к цилиндрическим координатам:

$$\begin{aligned} \hat{G}' &= \frac{1}{2\pi\rho} \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 & 0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \varphi_0) & -\sin(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ \sin(\varphi - \varphi_0) & \cos(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Соотношение (79) в этих координатах принимает вид:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \varphi_0) & -\sin(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ \sin(\varphi - \varphi_0) & \cos(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial A_r / \partial n \\ \partial A_\varphi / \partial n \\ -\text{div}_s \vec{A} \end{pmatrix} ds \quad (89)$$

Представим вектор (A_r, A_φ, A_z) в виде ряда Фурье:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^{c,n} \\ A_\varphi^{s,n} \\ A_z^{c,n} \end{pmatrix} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sin n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^{s,n} \\ A_\varphi^{c,n} \\ A_z^{s,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда (89) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S \begin{bmatrix} \cos(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi, & -\sin(\varphi-\varphi_0)\sin n\varphi, & 0 \\ \sin(\varphi-\varphi_0)\cos n\varphi, & \cos(\varphi-\varphi_0)\sin n\varphi, & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r^{c,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_\varphi^{s,n}}{\partial n} \\ D^{c,n} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S \begin{bmatrix} \cos(\varphi-\varphi_0)\sin n\varphi, & -\sin(\varphi-\varphi_0)\cos n\varphi, & 0 \\ \sin(\varphi-\varphi_0)\sin n\varphi, & \cos(\varphi-\varphi_0)\cos n\varphi, & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r^{s,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_\varphi^{c,n}}{\partial n} \\ D^{s,n} \end{pmatrix} \quad (90)$$

Здесь

$$D^{c,n} = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r^{c,n})}{\partial r} + \frac{n}{r} A_\varphi^{s,n} \right)$$

$$D^{s,n} = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r^{s,n})}{\partial r} - \frac{n}{r} A_\varphi^{c,n} \right)$$

Разложим функцию $1/\rho$ в ряд Фурье:

$$1/\rho = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell \cos \ell(\varphi-\varphi_0) \quad (91)$$

$$g_\ell = \int_0^\infty J_\ell(\lambda r) J_\ell(\lambda r_0) d\lambda.$$

Подставляя (91) в (90) и выполняя интегрирование по углу, получаем:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, -\frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, 0 \\ -\frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, 0 \\ 0, 0, g_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r^{c,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_\varphi^{s,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_z^{c,n}}{\partial n} \end{pmatrix} r dr +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, \frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, 0 \\ \frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, 0 \\ 0, 0, g_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r^{s,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_\varphi^{c,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_z^{s,n}}{\partial n} \end{pmatrix} r dr$$

Отделяя независимые моды, получаем следующие две последовательности соотношений:

$$\begin{pmatrix} A_r^{c,n} \\ A_\varphi^{s,n} \\ A_z^{c,n} \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, -\frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, 0 \\ -\frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, 0 \\ 0, 0, g_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r^{c,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_\varphi^{s,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_z^{c,n}}{\partial n} \end{pmatrix} r dr \quad (92)$$

$$\begin{pmatrix} A_r^{s,n} \\ A_\varphi^{c,n} \\ A_z^{s,n} \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, \frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, 0 \\ \frac{g_{n-1}-g_{n+1}}{2}, \frac{g_{n-1}+g_{n+1}}{2}, 0 \\ 0, 0, g_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r^{s,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_\varphi^{c,n}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_z^{s,n}}{\partial n} \end{pmatrix} r dr \quad (93)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Производя в (92), (93) преобразование переменных с помощью матриц

$$\hat{T}_0 = \hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

получим:

$$\begin{pmatrix} A_+^{cs,n} \\ A_-^{cs,n} \\ A_2^{c,n} \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} g_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & g_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial A_+^{cs,n} / \partial n \\ \partial A_-^{cs,n} / \partial n \\ D^{c,n} \end{pmatrix} r dr \quad (94)$$

$$\begin{pmatrix} A_+^{sc,n} \\ A_-^{sc,n} \\ A_2^{s,n} \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} g_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & g_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial A_+^{sc,n} / \partial n \\ \partial A_-^{sc,n} / \partial n \\ D^{s,n} \end{pmatrix} r dr \quad (95)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Здесь

$$A_\pm^{cs,n} = A_r^{c,n} \pm A_\varphi^{s,n}$$

$$A_\pm^{sc,n} = A_r^{s,n} \pm A_\varphi^{c,n}$$

Соотношения (94)–(95) позволяют исключить из разностной схемы верхнее полупространство при решении квазитрехмерных задач. Они удобны, поскольку выбранные переменные независимы, и, кроме того, векторное уравнение теплопроводности (27) в пространстве Фурье–амплитуд также распадается на три скалярных уравнения. В совокупности эти обстоятельства позволяют во многих случаях применять для сопряжения разностной схемы с интегродифференциальным соотношением на дневной поверхности такой же алгоритм, как и в скалярном случае.

Литература

1. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975. 142 с.
2. Табаровский Л.А. Электромагнитные поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типа в многослойных средах. — В кн.: Электромагнитные методы исследования скважин. Новосибирск: Наука, 1979, с.225–233.

Л.А.Табаровский, В.П.Соколов
ПРОГРАММА РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ
ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ
(АЛЕКС)

В настоящее время существует несколько программ расчета нестационарных электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах. Наиболее известные среди них – это программы П.П.Фролова, В.И.Дмитриева, А.А.Кауфмана, В.Н.Курилло, Г.М.Морозовой, М.М.Гольдмана, В.А.Филатова. На основе этих программ была разработана современная теория методов нестационарного поля и обеспечено их широкое внедрение в практику геофизических исследований. Вместе с тем, по мере развития теории, методики и аппаратуры в области электроразведки нестационарными полями сформировались научные и практические проблемы, решение которых существующими средствами математического моделирования представляется затруднительным. В частности, проведение систематического сравнительного анализа разнообразных установок, конструирование и исследование компенсационных схем возбуждения и регистрации поля, осуществление дифференциальных трансформаций компонент для обеспечения более детальной интерпретации возможно только на основе новых алгоритмов:

- а) более универсальных, т.е. обеспечивающих мобильную замену компонент, источников, временных режимов и моделей среды;
- б) более точных.

Авторы программы АЛЕКС поставили перед собой задачу построить алгоритм, удовлетворяющий названным требованиям. Каждый из многочисленных частных алгоритмов, примененных для достижения поставленной цели, в конечном счете, поддерживает одно из двух свойств суммарного алгоритма – универсальность или точность. В соответствии с этим в программе выделяются два алгоритмических ядра – композиционное и вычислительное.

Композиционное ядро решает задачу конструирования (композиции) формул для запрошенных пользователем компонент поля. Основным в этом ядре является табличный алгоритм описания полей точечных источников в горизонтально-слоистой среде [1].

Вычислительное ядро проводит расчеты по формулам, сформиро-

важным композиционным ядром. Увеличение точности расчетов обеспечивается двумя приемами:

1) применением сплайновых интерполяционных квадратур с характерными весами;

2) переходом на двойную точность машинных вычислений.

Относительно точности была поставлена ограниченная, но удовлетворительная с практической точки зрения цель: обеспечить хорошую точность в области времен, существующих при интерпретации зондирований, не стремясь к высокой точности в асимптотически поздней стадии нестационарного процесса (за последним минимумом кривых ρ_z в разрезах с изолирующим основанием, на подходе к предельным значениям ρ_z в разрезах с проводящим основанием и т.п.). Такая постановка задачи позволила ограничиться универсальным алгоритмом для всех источников, компонент, режимов возбуждения и моделей среды.

§ I. Композиционное ядро программы

Переходные характеристики в программе АЛЕКС рассчитываются интегрированием частотного режима по вещественной оси частот. Пусть V - источник поля, A - измеряемая компонента, $v(t)$ - зависимость плотности сторонних токов от времени. Тогда:

$$v_A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v^*(\omega) v_A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Здесь

$$v^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i\omega t} dt -$$

спектр функции $v(t)$; $v_A(\omega)$ - спектр отклика среды на возбуждение в форме δ - импульса, т.е. при $v(t) = \delta(t)$. Известно, что для нестационарных процессов, начинающихся в момент $t = 0$, выражение (1) может быть преобразовано к одной из двух следующих форм:

$$\begin{aligned} v_A(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(v^* v_A) \cos \omega t d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}(v^* v_A) \sin \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Расчетные формулы для гармонического режима (т.е. для функции $v_A(\omega)$) конструируются на основе следующего интегрального представления [1]:

$$v_{\alpha \ell}^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [(\epsilon^v \Gamma_A)_\ell^m f_\ell^m(\lambda) + (\epsilon^v \Gamma_A)_\ell^m f_\ell^m(\lambda)] d\lambda. \quad (3)$$

Индексы m , ℓ в (3) указывают, в какой среде расположены соответственно источник и точка измерения. Функции $\phi f_\ell^m(\lambda)$ являются фундаментальными функциями слоистой задачи электрического ($\Phi = E$) и магнитного ($\Phi = H$) типа [1]. Они зависят от свойств среды и вертикальных координат источника (z_0) и точки измерения (z). Для всех источников и компонент эти функции являются одинаковыми. Зависимость поля от типа источника описывается коэффициентами $(\epsilon^v \Gamma_A)_\ell^m$, которые в общем случае являются дифференциальными операторами. В табл. I приведены значения коэффициентов $(\epsilon^v \Gamma_A)_\ell^m$. Обозначения:

I, M — моменты диполей;

σ_j, μ_j — проводимость и магнитная проницаемость j -й среды;

$$\Pi_z = \partial/\partial z; \quad \Pi_{z_0} = \partial/\partial z_0; \quad \Pi_{zz_0} = \partial^2/\partial z \partial z_0;$$

$$\Delta = J_0(\lambda r);$$

$$\Delta_x = -\lambda \cos \varphi J_1(\lambda r);$$

$$\Delta_y = -\lambda \sin \varphi J_1(\lambda r);$$

$$\Delta_{xx} = -\frac{\lambda^2}{2} [J_0(\lambda r) - \cos 2\varphi J_2(\lambda r)];$$

$$\Delta_{yy} = -\frac{\lambda^2}{2} [J_0(\lambda r) + \cos 2\varphi J_2(\lambda r)];$$

$$\Delta_{xy} = \frac{\lambda^2}{2} \sin 2\varphi J_2(\lambda r);$$

r, φ, z — цилиндрические координаты точки измерения.

Анализ формулы (3) и табл. I позволяет выделить в выражениях для компонент поля точечных источников ряд композиционных элементов. Каждому элементу можно поставить в соответствие определенный признак и со значениями этого признака ассоциировать конкретные формы данного элемента. Ниже охарактеризованы выделяемые в программе АЛЕКС композиционные элементы формулы (3) и соответствующие им признаки.

ν	ϕ	A					
		E_x	E_y	E_z	H	H_y	H_z
I_x	E	$-\frac{I}{\epsilon_m} \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx} \Pi_{zz0}$	$-\frac{I}{\epsilon_m} \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{zz0}$	$-\frac{I}{\epsilon_m} \lambda \Delta_x \Pi_{z0}$	$-\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{z0}$	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx} \Pi_{z0}$	0
	H	$-i \omega \mu_e I \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy}$	$i \omega \mu_e I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy}$	0	$-I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_z$	$-I \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy} \Pi_z$	$-I \lambda \Delta_y$
I_y	E	$-\frac{I}{\epsilon_m} \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{zz0}$	$-\frac{I}{\epsilon_m} \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy} \Pi_{zz0}$	$-\frac{I}{\epsilon_m} \lambda \Delta_y \Pi_{z0}$	$-\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} I \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy} \Pi_{z0}$	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{z0}$	0
	H	$i \omega \mu_e I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy}$	$-i \omega \mu_e I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx}$	0	$I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx} \Pi_z$	$I \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_z$	$I \lambda \Delta_x$
I_z	E	$\frac{I}{\epsilon_m} \lambda \Delta_x \Pi_z$	$\frac{I}{\epsilon_m} \lambda \Delta_y \Pi_z$	$\frac{I}{\epsilon_m} \lambda^3 \Delta$	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} I \lambda \Delta_y$	$-\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} I \lambda \Delta_x$	0
	H	0	0	0	0	0	0

Коэффициенты $\left(\overset{V}{\underset{\Phi}{\Gamma}}_A\right)_c^m$ (магнитные диполи)

Продолжение табл. I

$\begin{matrix} \backslash \\ V \end{matrix}$	A	E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z
	Φ						
M_x	E	$-i\omega\mu_m M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_z$	$-i\omega\mu_m M \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy} \Pi_z$	$-i\omega\mu_m M \lambda \Delta_y$	$-i\omega\mu_m \epsilon_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy}$	$i\omega\mu_m \epsilon_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy}$	0
	H	$-i\omega\mu_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{z0}$	$i\omega\mu_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx} \Pi_{z0}$	0	$-M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx} \Pi_{zz0}$	$-M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{zz0}$	$-M \lambda \Delta_x \Pi_{z0}$
M_y	E	$i\omega\mu_m M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx} \Pi_z$	$i\omega\mu_m M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_z$	$i\omega\mu_m M \lambda \Delta_x$	$i\omega\mu_m \epsilon_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy}$	$-i\omega\mu_m \epsilon_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xx}$	0
	H	$-i\omega\mu_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy} \Pi_{z0}$	$i\omega\mu_e M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{z0}$	0	$-M \frac{1}{\lambda} \Delta_{xy} \Pi_{zz0}$	$-M \frac{1}{\lambda} \Delta_{yy} \Pi_{zz0}$	$-M \lambda \Delta_y \Pi_{z0}$
M_z	E	0	0	0	0	0	0
	H	$i\omega\mu_e M \lambda \Delta_y$	$-i\omega\mu_e M \lambda \Delta_x$	0	$M \lambda \Delta_x \Pi_z$	$M \lambda \Delta_y \Pi_z$	$M \lambda^3 \Delta$

Таблица 2

1. Вид фундаментальной функции – признак NQPIZ

Значение NQPIZ	1	2	3	4
Форма элемента	f_e^m	$\frac{\partial}{\partial z} f_e^m$	$\frac{\partial}{\partial z_0} f_e^m$	$\frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} f_e^m$
Процедура, вычисляющая элемент	L A Y E R			

Таблица 3

2. Вид осциллирующего фактора – признак NQVES

Значение NQVES	1	2	3	4	5	6
Форма элемента	J_0	$\cos \varphi J_1$	$\sin \varphi J_1$	$J_0 - \cos 2\varphi J_2$	$J_0 + \cos 2\varphi J_2$	$\sin 2\varphi J_2$
Процедура, вычисляющая элемент	W E I C O F					

Таблица 4

3. Коэффициенты, зависящие от параметров среды –
– признак NQWEI

Значение NQWEI	1	2	3	4	5	6	7
Форма элемента	0	1	$\frac{1}{\sigma_m}$	$\frac{\sigma_e}{\sigma_m}$	μ_e	μ_m	$\mu_m \sigma_m$
Процедура, вычисляющая элемент	L O T D Q W						

4. Степень переменной λ в подынтегральном выражении (3) - признак NQLAM. Значение признака равно показателю степени.
5. Степень частоты ω в выражении (3) - признак NQOME
Значение признака равно показателю степени.
6. Знак выражения (3) - признак NQSGN. Значение признака равно ± 1 .

В программе имеются массивы каждого признака для всех компонент. Поскольку каждая компонента формируется из двух мод (электрической и магнитной), а композиции мод различны, постольку массивы признаков имеют внутреннюю размерность 2. Внешняя размерность всех массивов равна I44 (наряду с 36 перечисленными в табл. I компонентами программа вычисляет некоторые функции этих компонент - см. § 3). Кроме массивов, описанных в п.п. I-6, имеется специальный признаковый массив, отмечающий наличие или отсутствие моды.

7. Признак наличия моды - NQMOD.

$$NQMOD = \begin{cases} 1, & \text{мода есть;} \\ 0, & \text{моды нет.} \end{cases}$$

Признак NQMOD применяется для выяснения того, имеются ли в затребованных пользователем компонентах обе моды. Если имеется только одна мода, то объем вычислений сокращается примерно вдвое.

На основе рассмотренного структурирования формулы (3) подынтегральное выражение FUNC гармонического режима может быть сформировано по композиционным признакам следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{FUNC} = & \text{LAYER (NQPIZ)} * \\ & \text{WEICOF (NQBES)} * \\ & \text{LOTDQW (NQWEI)} * \\ & \text{LAMBDA} ** \text{NQLAM} * \\ & \text{OMEGA} ** \text{NQOME} * \\ & \text{NQSGN}. \end{aligned}$$

Относительно множителя WEICOF будет внесено уточнение при обсуждении вычислительного ядра программы (§ 2).

§ 2. Вычислительное ядро программы

Вычислительное ядро программы АЛЕКС формируется на основе трех главных алгоритмов: алгоритма расчета фундаментальной функции слоистой задачи, алгоритма интегрирования по пространственной частоте λ и алгоритма интегрирования по временной частоте ω . Интегрирование выполняется по сплайновым интерполяционным квадратурам, коэффициенты которых находятся численно. Наиболее емкие в вычислительном отношении коэффициенты квадратур гармонического режима рассчитываются по отдельной программе FINT и запоминаются во внешнем устройстве (файл INTEGR). Такой подход позволяет законсервировать максимально возможный объем вычислений, не связанных со свойствами среды, оставив на долю программы АЛЕКС в качестве основной вычислительной работы расчет фундаментальной функции в узлах интегрирования по λ и ω .

Алгоритм вычисления функции ϕf_c^m . Реализован рекурсивный алгоритм без потери точности, изложенный в работе [2]. Основные этапы алгоритма:

1. Прямые рекурсии

$$a) \quad \lambda_{n+1} = 0,$$

$$\hat{\Pi}_K = \frac{\delta_{K+1}}{\delta_K} \frac{P_K}{P_{K+1}} \frac{\lambda_{K+1} + 1}{\lambda_{K+1} - 1},$$

$$\hat{\psi}_K = (1 + \hat{\Pi}_K) / (1 - \hat{\Pi}_K),$$

$$\lambda_K = e^{-2P_K(Z_K - Z_{K-1})} \hat{\psi}_K,$$

$$K = n, n-1, \dots, m+1, m;$$

$$b) \quad \varepsilon_1 = 0,$$

$$\hat{\Pi}_{K-1}^v = \frac{\delta_{K-1}}{\delta_K} \frac{P_K}{P_{K-1}} \frac{1 + \varepsilon_{K-1}}{1 - \varepsilon_{K-1}},$$

$$\hat{\psi}_{K-1}^v = \frac{1 - \hat{\Pi}_{K-1}^v}{1 + \hat{\Pi}_{K-1}^v},$$

$$\varepsilon_K = -e^{-2P_K(Z_K - Z_{K-1})} \hat{\psi}_{K-1}^v,$$

$$K = 1, 2, \dots, m-1, m.$$

Здесь $p_K^2 = \lambda^2 - i\omega\mu_K\sigma_K$,

z_K — координаты граничных плоскостей, $K = I, \dots, n$;

$$\tau_K = \begin{cases} \sigma_K & \text{для электрической моды} \\ \mu_K & \text{для магнитной моды} \end{cases} \quad K = I, \dots, n+I.$$

2. Коэффициенты C_m , D_m .

$$C_m = \frac{e^{-p_m z_0}}{2p_m} e^{-2p_m(z_m - z_{m-1})} \frac{\overset{\wedge}{\varphi}_m \overset{\vee}{\varphi}_{m-1}}{W} - \frac{e^{p_m z_0}}{2p_m} e^{-2p_m z_m} \frac{\overset{\wedge}{\varphi}_m}{W},$$

$$D_m = \frac{e^{-p_m z_0}}{2p_m} e^{2p_m z_{m-1}} \frac{\overset{\vee}{\varphi}_{m-1}}{W} + \frac{e^{p_m z_0}}{2p_m} e^{-2p_m(z_m - z_{m-1})} \frac{\overset{\wedge}{\varphi}_m \overset{\vee}{\varphi}_{m-1}}{W},$$

$$W = 1 - \overset{\wedge}{\varphi}_m \overset{\vee}{\varphi}_{m-1} e^{-2p_m(z_m - z_{m-1})},$$

$$\overset{\vee}{\varphi}_0 = \overset{\wedge}{\varphi}_{n+1} = 0.$$

3. Обратные рекурсии

$$\left\{ \begin{aligned} D_{K+1} &= \frac{2D_K}{\lambda_{K+1} + 1} e^{-p_K(z_K - z_{K-1})} \frac{\overset{\wedge}{\Pi}_K}{\overset{\wedge}{\Pi}_{K-1}} \frac{\tau_K}{\tau_{K+1}}, \\ K &= m+2, \dots, n+1 \end{aligned} \right.$$

$$D_{m+1} = \frac{C_m e^{p_m z_m} + D_m e^{-p_m z_m} + \frac{e^{p_m z_0}}{2p_m} e^{-p_m z_m} \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}}}{\lambda_{m+1} + 1} \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}},$$

$$C_{K+1} = \lambda_{K+1} D_{K+1},$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_K &= \frac{2C_{K+1}}{\varepsilon_{K+1}} e^{-p_{K+1}(z_{K+1} - z_K)} \frac{\overset{\vee}{\Pi}_K}{1 + \overset{\vee}{\Pi}_K} \frac{\tau_{K+1}}{\tau_K}, \\ K &= m-2, \dots, 1 \end{aligned} \right.$$

$$C_{m-1} = \frac{C_m e^{p_m z_{m-1}} + D_m e^{-p_m z_{m-1}} + \frac{e^{-p_m z_0}}{2p_m} e^{p_m z_{m-1}} \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}{\varepsilon_{m-1} + 1} \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}},$$

$$D_K = \varepsilon_K C_K.$$

4. Выражения для функций ϕf_e^m

$$\phi f_e^m = C_e e^{\rho_e(z-z_{e-1})} + D_e e^{-\rho_e(z-z_{e-1})}, \quad e > m$$

$$\phi f_m^m = C_m e^{\rho_m z} + D_m e^{-\rho_m z} + \frac{e^{-\rho_m/2-z_0}}{2\rho_m},$$

$$\phi f_e^m = C_e e^{\rho_e(z-z_e)} + D_e e^{-\rho_e(z-z_e)}, \quad e < m.$$

Нетрудно видеть, что функция (ϕf_e^m) имеет затухающий фактор, который при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к функции $e^{-\lambda/2-z_0}$. Если $|z-z_0|$ является малой величиной и точки z и z_0 расположены в одной среде или в соседних слоях, то в программе предусмотрены дополнительные меры по усилению затухания. В этом случае функция ϕf_e^m представляется в виде:

$$\phi f_e^m = (\phi f_e^m)_0 + (\phi f_e^m)_a.$$

Здесь $(\phi f_e^m)_0$ - фундаментальная функция полупространства с параметрами:

$$\sigma_e, \mu_e; \quad \sigma_m, \mu_m, \quad e \neq m$$

$$\sigma_1, \mu_1; \quad \sigma_2, \mu_2, \quad e = m = 1$$

$$\sigma_{n+1}, \mu_{n+1}; \quad \sigma_n, \mu_n, \quad e = m = n$$

$$\sigma_e, \mu_e; \quad \sigma_{e-1}, \mu_{e-1}, \quad e = m \wedge \\ (z_0 - z_{e-1}) + (z - z_{e-1}) < (z_e - z_0) + (z_e - z)$$

$$\sigma_{e+1}, \mu_{e+1}; \quad \sigma_e, \mu_e, \quad e = m \wedge \\ (z_0 - z_{e-1}) + (z - z_{e-1}) > (z_e - z_0) + (z_e - z).$$

Процесс становления от полупространства рассчитывается по специальной подпрограмме FFOLE. Декремент затухания DECR является одним из выходных параметров процедуры LAYER. Например, при

$z_0 = z = z_1; DECR = 2(z_2 - z_1)$. Затухающий фактор исключается из функции ϕf_e^m и переносится в вес квадратурной формулы гармонического режима, так что вместо значений ϕf_e^m процедура LAYER дает на выходе величину:

$$\bar{f}(\lambda) = \phi f_e^m(\lambda) e^{\lambda \cdot DECR}$$

Алгоритм интегрирования по пространственной частоте. Интегралы, входящие в состав выражения (3), в общем виде можно представить следующим образом:

$$\text{Int } \lambda = \int_0^{\infty} F(\lambda) e^{-\lambda \text{DECR}} J_p(\lambda r) d\lambda. \quad (5)$$

Ввиду наличия затухающего фактора, верхний предел в (5) можно считать конечным. Пусть $\chi F(j)$, $j = 1, \dots, NF$ — узлы квадратурной формулы для вычисления интеграла (5). Пусть $\rho_j^F(\lambda)$ — сплайновые полиномы влияния узлов ($j = 1, \dots, NF$) и краевых производных ($j = 0, NF + 1$) на сетке χF :

$$\begin{aligned} \rho_j^F(\chi F(k)) &= \delta_{j,k}, \\ [\rho_j^F(\chi F(1))]^I &= \delta_{j,0}, \\ [\rho_j^F(\chi F(NF))]^I &= \delta_{j,NF+1}. \end{aligned}$$

Проинтерполируем функцию $F(\lambda)$ на интервале $[\chi F(1), \chi F(NF)]$ полиномами $P_j^F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \sum_{K=0}^{NF+1} F_K P_K^F(\lambda).$$

Здесь:

$$\begin{aligned} F_K &= F(\chi F(k)), \quad K=1, \dots, NF, \\ F_0 &= F'(\chi F(1)), \\ F_{NF+1} &= F'(\chi F(NF)). \end{aligned}$$

Тогда интеграл (5) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Int } \lambda &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{K=0}^{NF+1} F_K P_K^F(\lambda) \right) e^{-\lambda \text{DECR}} J_p(\lambda r) d\lambda = \\ &= \sum_{K=0}^{NF+1} A_K F_K \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь:

$$A_K = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \text{DECR}} P_K^F(\lambda) J_p(\lambda r) d\lambda. \quad (7)$$

Квадратурные коэффициенты A_K зависят:

- от сетки χF ;
- от декремента затухания DECR ,

с) от разнosa r ,

d) от номера функции Бесселя P .

После того как сетка MF отлажена, коэффициенты A_k становятся функциями только $DECR$, r , P . Как следует из табл. I, индекс P принимает всего три значения $P = 0, 1, 2$ (сетка S_P состоит из трех значений). По параметрам $DECR$ и r было решено назначить дискретную сетку $S_D \times S_r$ и создать для узлов суммарной сетки

$S_D \times S_r \times S_P$ библиотеку коэффициентов A_k . Для расчета поверхностных установок достаточно иметь коэффициенты A_k на упрощенной сетке $S_r \times S_P$ при $DECR = 2(Z_2 - Z_1)$. Вычисление квадратурных коэффициентов с наперед заданной точностью ведется по специальной программе $FINT$, организующей на внешнем носителе файл последовательного доступа $INTEGR$. Каждая запись файла $INTEGR$ содержит квадратурные коэффициенты A_k для одного разнosa и $P = 0, 1, 2$. Записи полностью паспортизованы. Для того, чтобы пополнить файл $INTEGR$, нужно выполнить расчеты по программе $FINT$ при следующем списке ввода.

Таблица 5

Переменная	Формат	Смысл
VAR	A4/	= 'UNIT' при создании файла INTEGR = 'NEXT' при модификации файла INTEGR
NDIST	I3/	Число разносов
(DIST(J), J=	4D16.9/	Разносы
1, NDIST)		
PREC	D 8.1/	Относительная точность вычисления коэффициентов

В заключение возвратимся к формуле (4) и уточним смысл сомножителя $WEICOF(NQBES)$. Очевидно, это квадратурный коэффициент, образованный по правилам табл. 3, если в ней под символами J_0, J_1, J_2 понимать квадратурные коэффициенты при $P = 0, 1, 2$.

Алгоритм интегрирования по временной частоте. Интегралы, переводящие гармонический режим в нестационарный, имеют согласно (2), следующий вид:

$$I_{nt\omega} = \int_0^{\infty} G(\omega) \begin{bmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{bmatrix} d\omega. \quad (8)$$

Пусть $\chi T(J)$, $J=1, \dots, NT$ – сетка значений переменной ω . Пусть G_J – значения функции $G(\omega)$ в узлах сетки χT . Проинтерполируем $G(\omega)$ между узлами кубическим многозвенником:

$$G(\omega) = \sum_{K=1}^4 a(K, J) (\omega - \chi T(J))^{4-K}; \quad (9)$$

$$\chi T(J) \leq \omega \leq \chi T(J+1);$$

$$J = 1, \dots, NT-1.$$

Пусть

$$Res(K, J) = \int_{\chi T(J)}^{\chi T(J+1)} (\omega - \chi T(J))^{4-K} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} d\omega \quad (10)$$

Из (8)–(10) вытекает квадратурная формула:

$$Int \omega = \sum_{J=1}^{NT-1} \sum_{K=1}^4 Res(K, J) * a(K, J). \quad (11)$$

Квадратура (II) является модифицированной квадратурой Филлона и имеет более высокую точность. По сравнению с обычными квадратурами формула (II) позволяет получать значения переходного процесса на более поздних временах при одинаковой точности вычисления гармонического режима. Расчет коэффициентов $Res(K, J)$ выполняет подпрограмма FQUADR.

§ 3. Возможности, предоставляемые пользователю.

Структура входных данных и результатов.

Ограничения

Ниже перечислены основные возможности, предоставляемые пользователю программой АЛЕКС. Параллельно охарактеризованы входные параметры, управляющие реализацией этих возможностей.

1. Модель среды – горизонтально-слоистая с произвольным числом границ. Характеристики модели приведены в табл.6.

2. Источники. Компоненты и их функции. Точки измерения.

Программа АЛЕКС позволяет рассчитывать поля для электрических и магнитных источников трех ориентаций – $I_x, I_y, I_z, M_x, M_y, M_z$. Для каждого источника может быть рассчитано шесть компонент – $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$, для каждой компоненты – производные по времени, по

Параметр	С м ы с л
MEDIUM	Число сред
PLANES (J)	$J = 1, \dots, \text{MEDIUM} - 1$. Координаты граничных плоскостей в цилиндрической системе координат с осью z . нормальной границам и направленной от среды с номером 1 в среду с номером MEDIUM. Слой с номером J заключен между плоскостями $\text{PLANES}(J-1)$, $\text{PLANES}(J)$ ($J = 2, \dots, \text{MEDIUM} - 1$). Среды с номерами $J = 1$ и $J = \text{MEDIUM}$ являются полупространствами.
SIGMYU (K,J)	$K = 1, 2$; $J = 1, \dots, \text{MEDIUM}$. $\text{SIGMYU}(1,J)$ - проводимости сред, $\text{SIGMYU}(2,J)$ - магнитные проницаемости. Задаются в любых единицах.
UNILAY	Номер среды, проводимость, проницаемость и мощность которой (т.е. $\text{PLANES}(\text{UNILAY}) - \text{PLANES}(\text{UNILAY}-1)$) принимаются в качестве нормирующих для всех величин соответствующей размерности.

радиусу и двойные производные по времени и по радиусу. Принципы взаимности было решено не учитывать. Каждая рассчитываемая компонента или ее функция кодируется четырехбуквенным символом. В табл. 7 приведены возможные значения каждой из четырех позиций (нумерация справа налево) и их смысл.

Считается, что источники расположены на оси z системы координат. Таким образом, любая установка характеризуется четырьмя величинами: вертикальной координатой источника z_0 и цилиндрическими координатами точки измерения (r, φ, z) . Для каждой компоненты обеспечивается возможность при заданном полярном угле выполнить расчеты для набора разносов. Входная информация, касающаяся компонент и установок, перечислена в табл. 8.

Таблица 7

Позиция	Возможные значения	
4. <u>Источники и функции компонент</u>	I	электр. диполи, компонента поля
	M	магнит. диполи, компонента поля
	T	электр. диполи, $\partial/\partial t$
	U	магнит. диполи, $\partial/\partial t$
	R	электр. диполи, $\partial/\partial r$
	S	магнит. диполи, $\partial/\partial r$
	A	электр. диполи, $\partial^2/\partial t \partial r$
	B	магнит. диполи, $\partial^2/\partial t \partial r$
3. <u>Ориентация источника</u>	X	
	Y	
	Z	
2. <u>Поле</u>	E	– электрическое
	H	– магнитное
1. <u>Компонента вектора поля</u>	X	
	Y	
	Z	

Примечание. В первом варианте программы значения четвертой позиции, равные R,S,A,B не реализованы. Возможность реализации зарезервирована.

Таблица 8

Параметр	С м ы с л
CAT (1,J)	$J = 1, \dots, NCOMP$ Компонента или её функция, поименованные в соответствии с правилами табл.7. Величина NCOMP устанавливается в процессе ввода по количеству фактически запрошенных компонент.
CAT (2, J)	$J = 1, \dots, NCOMP$ Полярный угол точки измерения.
NRAZ	Количество запрашиваемых разносов.
RAZ (J)	$J = 1, \dots, NRAZ$. Значения разносов.

Параметр	С м ы с л
DIPREC	Если относительное расхождение запрошенного и табличного разнosa из файла INTEGR не превосходит величины DIPREC, то запрошенное значение заменяется на табличное и расчеты выполняются, в противном случае работа программы прекращается.
Вертикальные координаты	В первом варианте программы $Z_0 = Z = \text{PLANES}(1)$, т.е. источники и приемники располагаются на дневной поверхности. Это делается принудительно, и вертикальные координаты источников и точек измерения из списка ввода исключены.

3. Временной режим. Предусматривается два вида зависимости тока в источнике от времени:

$\nu(t) = \delta(t)$ - функция;

$\nu(t) = 1 - \chi(t)$ - ступенеобразное выключение.

Таблица 9

Параметр	Допустимое значение	
IMPULS	DELT	- δ импульс
	NEVY	- ступенька

4. Набор времен. Значения времен, на которых вычисляются компоненты и их функции, определяются через параметр τ :

$$\tau = 2\pi \sqrt{2t/\mu_u \epsilon_u} / h_u$$

Здесь $\mu_u, \epsilon_u, h_u = \text{PLANES}(\text{UNILAY}) - \text{PLANES}(\text{UNILAY} - 1)$

- магнитная проницаемость, проводимость и мощность среды с номером UNILAY.

Параметр	С м ы с л
NTAU	Количество времен
UDFOUR	Характеристика шага геометрической прогрессии при задании значений параметра τ : $\tau_{j+1} = \tau_j \times 2^{UDFOUR}; \quad \tau_1 = 1.$

5. Алгоритм пересчета гармонического режима в нестационарный. Как следует из формул (2), (3) и табл. I, для принятых в программе режимов возбуждения, имеющих либо чисто вещественный спектр, либо чисто мнимый, пересчет в становление может быть осуществлен или по значениям вещественной части фундаментальной функции, или по значениям ее мнимой части. Выбор режима пересчета осуществляется с помощью параметра KIMRE.

Таблица 11

Параметр	Возможные значения и соответствующие действия программы
KIMRE	IMIM – пересчет по мнимой части
	RERE – пересчет по вещественной части
	IMRE – пересчет по мнимой и по вещественной частям

В табл. I2 приведен полный список вводных величин в необходимой последовательности с указанием форматов и ограничений.

Таблица 12

Переменная	Формат	Ограничения
UDFOUR	D 11.4 /	
NTAU	I 3 /	≤ 200
MEDIUM	I 2 /	≤ 99
((SIGMYU (J,K), J=1,2), K=1,MEDIUM)	8D 10.3 /	
(PLANES(J), J=1,MEDIUM-1)	8D 10.3 /	

Переменная	Формат	Ограничения
UNILAY	I 2 /	≥ 2 $\leq \text{MEDIUM}-1$
IMPULS	A 4 /	
NRAZ	I 2 /	≤ 18
DIPREC	D I 0.3 /	
(RAZ(J), J=1, NRAZ)	8 D I 0.3 /	
KIMRE	A 4 /	
((CAT (J,K), J=1,2), K=1, NCOMP)	A 4, I 3/	NCOMP ≤ 18

Примечание. NCOMP * NRAZ ≤ 18 .

6. Результат. Как правило, исследованию подвергаются не компоненты поля, получаемые в результате работы вычислительного ядра программы АЛЕКС, а некоторые трансформации компонент. Предусмотреть все возможные потребности пользователя по части трансформации не представляется возможным. Поэтому авторы приняли следующую схему использования программы АЛЕКС:

а) программа выполняет вычисления в некотором шаге задания. Результаты вычислений размещаются в виде одной записи в файле с ссылочным номером I5. Файл имеет последовательную организацию, запись осуществляется бесформатно. По диспозиции PASS файл передается следующему шагу задания;

б) очередной шаг задания осуществляет необходимым, запрограммированную самим пользователем трансформацию компонент и выдачу результатов в предусматриваемой пользователем форме.

Таблица I3

Структура записи, осуществляемой программой АЛЕКС в файл I5

Переменная	Тип
(FORM (J), J = 1, 300)	INTEGER
MEDIUM	INTEGER
((SIGMYU (J,K), J=1,2), K=1, MEDIUM)	DOUBLE PREC.
NPLANE	INTEGER

Переменная	Тип
(PLANES(J), J = 1, NPLANE)	DOUBLE PREC.
UNILAY	INTEGER
NCOMP	INTEGER
((CAT (J,K), J=1,2), K=1, NCOMP)	INTEGER
NRAZ	INTEGER
(RAZ(J), J=1, NRAZ)	DOUBLE PREC.
NTAU	INTEGER
(T(J), J=1, NTAU)	DOUBLE PREC.
(TAU(J), J=1, NTAU)	DOUBLE PREC.
((RESULT (J,K,L), J = 1, NTAU), K = 1, NRAZ), L = 1, NCOMP)	DOUBLE PREC.

Здесь FORM - массив формата, печать по которому в форме WRITE (6, FORM) дает полную информацию о структуре записи;

NPLANE - число границ (= MEDIUM-1);

T (J) - массив времен;

TAU (J) - массив параметра τ ;

RESULT - массив результата, структура которого очевидна (J,K,L) из его индексации.

§ 4. Блок-схема программы

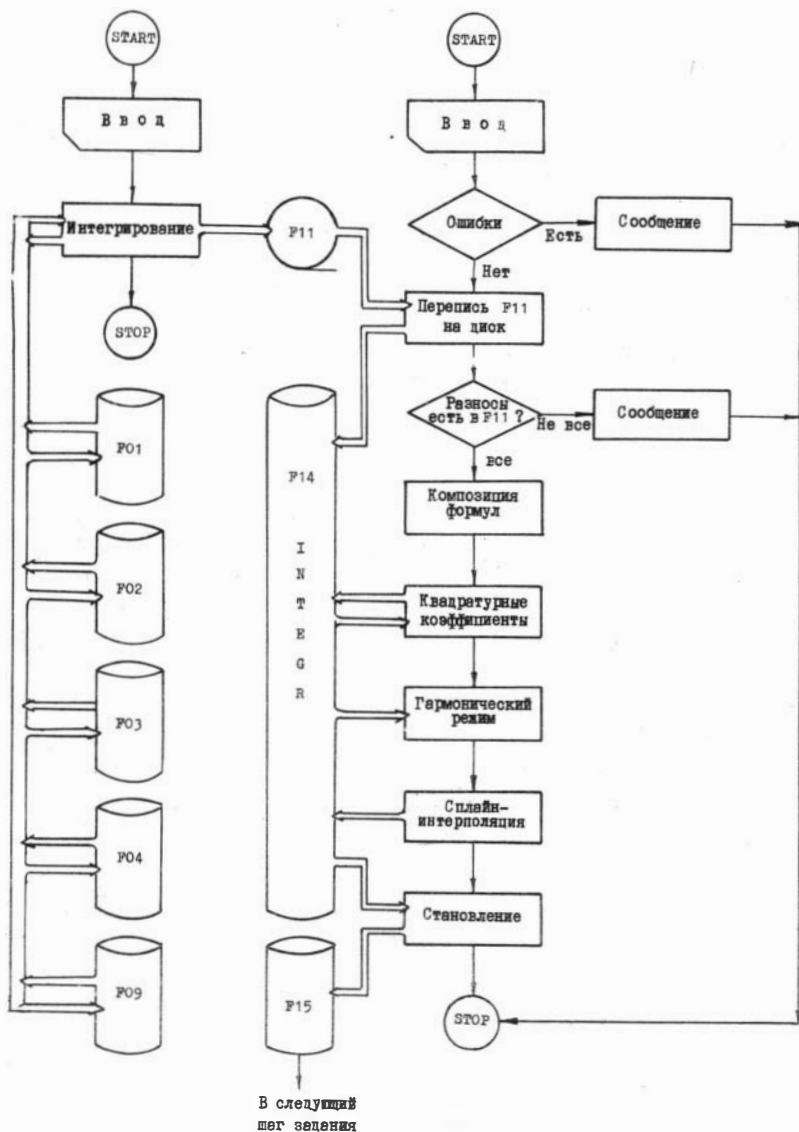
Схема, приведенная на рисунке, отражает общую структуру программ FINT и АЛЕКС и их взаимодействие с внешними устройствами. Основные этапы алгоритма обсуждались в § I-3.

Из всех файлов, с которыми взаимодействуют программы FINT и АЛЕКС, пользователь должен детально ознакомиться только с файлом I5 (см. § 3). Необходимые для составления заданий в ОС ЕС данные о всех файлах приводятся ниже в форме соответствующих DD-операторов.

Том WORK - это рабочий диск. Том SOKOL - лента (или диск), на которой постоянно хранится файл INTEGR. Том TABAR - лента

P I N T

А Л Е К С



```
//FT01FOO1 DD DSN=&F1,VOL=SER=WORK,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,DELETE),SPACE=(2400,(20,20),RLSE)
//FT02FOO1 DD DSN=&F2,VOL=SER=WORK,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,DELETE),SPACE=(2400,(20,20),RLSE)
//FT03FOO1 DD DSN=&F3,VOL=SER=WORK,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,DELETE),SPACE=(2400,(20,20),RLSE)
//FT04FOO1 DD DSN=&F4,VOL=SER=WORK,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,DELETE),SPACE=(2400,(20,20),RLSE)
//FT09FOO1 DD DSN=FORM,VOL=SER=WORK,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,DELETE),SPACE=(2400,(20,20),RLSE)
//FT11FOO1 DD DSN=INTEGR,VOL=SER=SOKOL,UNIT=5010,
//DISP=(OLD,KEEP),DCB=(RECFM=VBS,BLKSIZE=1024,LRECL=1020)
//FT14FOO1 DD DSN=JOBFIL,VOL=SER=WORK,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,DELETE),SPACE=(2048,(400,100))
//FT15FOO1 DD DSN=RESULT,VOL=SER=TABAR,UNIT=SYSDA,
//DISP=(NEW,PASS),SPACE=(1024,(100,100)),
//DCB=(RECFM=VBS,BLKSIZE=1024,LRECL=1020)
```

(или диск), на которой размещаются результаты расчетов, передаваемые в следующий шаг задания.

Литература

1. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975. 142 с.

2. Табаровский Л.А. Электромагнитные поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типа в многослойных средах. - В кн.: Электромагнитные методы исследования скважин. Новосибирск: Наука, 1979, с.225-233.

Ю.А. Дашевский

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ
И ГАРМОНИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

При математическом моделировании электромагнитных полей в задачах геоэлектрики часто возникает необходимость расчета плохо сходящихся несобственных интегралов от быстроосциллирующих функций. Ряд методов электроразведки основан на измерении полей либо в дальней зоне источников, либо на больших расстояниях от них, причем источники, как правило, расположены на поверхности горизонтально-слоистой среды (ВЗЗ, ЧЗ). В задачах каротажа приходится выполнять расчеты полей на оси скважины в случае очень больших длин зондов (БКЗ, ИК). Кроме того, при использовании метода интегральных уравнений для расчета компонент поля в сложно-построенных средах поля вспомогательных источников (элементы матрицы Грина) также описываются несобственными интегралами, содержащими осциллирующие факторы.

Вид осциллирующего фактора зависит от геометрии модели и первичного поля. В выражениях, описывающих поля точечных источников в горизонтально-слоистых средах, — это функции Бесселя, в цилиндрически-слоистых средах — тригонометрические функции. Известно, что при расчете подобных интегралов по вещественной оси с помощью квадратур Гаусса или Филона в тех случаях, когда точка измерения находится в волновой зоне или когда ее расстояние до источника значительно превышает расстояние до ближайшей границы горизонтально-слоистой (цилиндрически-слоистой) среды, возникают значительные вычислительные трудности.

В настоящее время существует два подхода к выполнению подобных расчетов. Один из них основан на преобразовании интегралов посредством деформации пути в комплексную плоскость переменной интегрирования [4]. Обоснование этого метода расчета связано с исследованием аналитических свойств подынтегральных функций.

Другой подход основан на представлении интеграла по вещественной оси в виде суммы некоторого числового ряда. Каждый член

ряда представляет собой интеграл по отрезку вещественной оси и вычисляется по обычной квадратурной формуле. Полученный таким образом числовой ряд подвергается преобразованию, которое состоит в замене данного сходящегося ряда — по тому или иному правилу — другим рядом с той же суммой [3]. Конечно, применять такое преобразование целесообразно лишь в том случае, если новый ряд сходится быстрее и необходимая точность вычисления может быть достигнута при суммировании меньшего числа членов. Так, например, в [1] этот метод применен для расчета кривых вертикального электрического зондирования. Ускорение сходимости достигнуто при преобразовании ряда в цепную дробь.

В настоящей работе исследованы возможности использования преобразования Эйлера при расчете стационарных и гармонических полей, применяемых в электроразведке. Идея использовать преобразование Эйлера при расчете интегралов от быстроосциллирующих функций принадлежит Лонгману [2,5].

1. Преобразование Эйлера

Пусть задана сумма

$$S = V_0 - V_1 + V_2 - \dots + (-1)^n V_n. \quad (1)$$

Члены этой суммы удовлетворяют условию $V_k > 0$ и убывают с ростом k ($k = 0, \dots, n$) столь медленно, что вычисление S с заданной точностью путем последовательного суммирования практически невозможно.

Введем в рассмотрение функцию $S(x)$, определенную следующим образом:

$$S(x) = V_0 - V_1 x + V_2 x^2 - \dots + (-1)^n V_n x^n, \quad (2)$$

$$x > 0.$$

Из (1), (2) видно, что при $x \rightarrow 1$ $S(x) \rightarrow S$.

Рассмотрим также функцию $S(x) + S(x)x$, которая, как следует из (2), имеет вид:

$$S(x) + S(x)x = V_0 - (V_1 - V_0)x + (V_2 - V_1)x^2 - \dots + (-1)^n (V_n - V_{n-1})x^n + (-1)^n V_n x^{n+1}. \quad (3)$$

Используем определение конечных разностей:

$$\Delta^{r+1} V_i = \Delta^r V_{i+1} - \Delta^r V_i,$$

$$\Delta^1 V_i = \Delta V_i = V_{i+1} - V_i, \quad \Delta^0 V_i = V_i, \quad (4)$$

$$i = 0, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, \ell-1,$$

ℓ — произвольное натуральное число, не превосходящее n . С учетом (4) соотношение (3) можно представить следующим образом:

$$(1+x)S(x) = V_0 - (\Delta V_0)x + (\Delta V_1)x^2 - \dots + (-1)^n (\Delta V_{n-1})x^{n+1} + (-1)^n V_n x^{n+1}$$

или

$$S(x) = \frac{V_0 + (-1)^n V_n x^{n+1}}{1+x} - y [\Delta V_0 - (\Delta V_1)x + (\Delta V_2)x^2 - \dots + (-1)^n (\Delta V_{n-1})x^{n-1}], \quad (5)$$

здесь $y = x/(1+x)$.

Применим проведенное выше преобразование к слагаемым, заключенным в (5) в квадратные скобки, тогда

$$S(x) = \frac{V_0 + (-1)^n V_n x^{n+1}}{1+x} - \frac{\Delta V_0 + (-1)^{n-1} (\Delta V_{n-1}) x^n}{1+x} + y^2 [\Delta^2 V_0 - (\Delta^2 V_1)x + (\Delta^2 V_2)x^2 - \dots + (-1)^{n-2} (\Delta^2 V_{n-2})x^{n-2}].$$

После выполнения ρ таких шагов, для функции $S(x)$ получится следующее выражение:

$$\begin{aligned} S(x) = & (V_0 - y \Delta V_0 + y^2 \Delta^2 V_0 - \dots + (-1)^{\rho-1} y^{\rho-1} \Delta^{\rho-1} V_0) / (1+x) + \\ & + (-1)^n [V_n x^{n+1} + (\Delta V_{n-1}) x^n y + (\Delta^2 V_{n-2}) x^{n-2} y^2 - \dots + \\ & + (\Delta^{\rho-1} V_{n-\rho+1}) y^{\rho+1} x^{n-\rho+2}] / (1+x) + \\ & + (-1)^{\rho} y^{\rho} [\Delta^{\rho} V_0 - (\Delta^{\rho} V_1)x + (\Delta^{\rho} V_2)x^2 - \dots + \\ & + (-1)^{n-\rho} (\Delta^{\rho} V_{n-\rho}) x^{n-\rho}]. \end{aligned}$$

Полагая $\chi = 1$, получаем:

$$S(\chi) = S = \left[(1/2)V_0 - (1/4)\Delta V_0 - \dots + (-1)^{p-1} 2^{-p} (\Delta^{p-1}) V_0 \right] + R_p, \quad (6)$$

где

$$R_p = (-1)^n \left[(1/2)V_n + (1/4)\Delta V_{n-1} + (1/8)\Delta^2 V_{n-2} + \dots + 2^{-p} \Delta^{p-1} V_{n-p-1} \right] + \\ + 2^{-p} (-1)^p \left[\Delta^p V_0 - \Delta^p V_1 + \Delta^p V_2 - \dots + (-1)^{n-p} \Delta^p V_{n-p} \right], \\ p \leq n.$$

Представления S в виде (I) и (6) тождественны, однако, если $p \rightarrow \infty$, а, следовательно, и $n \rightarrow \infty$, то, как показано в [3], R_p стремится к нулю. Поэтому и при конечных, но достаточно больших n и p , в (6) можно опустить R_p . Таким образом, приходим к преобразованию Эйлера для суммы S :

$$S = \sum_{k=0}^n (-1)^k V_k \approx \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k \Delta^k V_0}{2^{k+1}} = S_E. \quad (7)$$

2. Вычисление интегралов с использованием суммирования по Эйлеру

Пусть необходимо вычислить несобственный интеграл от быстро-осциллирующей функции вида

$$\int_0^\infty g(x) \omega(x) dx, \quad (8)$$

где $\omega(x)$ — осциллирующий фактор с известными нулями.

Возьмем отрезок числовой оси $[0, A]$ и разобьем его на p отрезков, концами которых являются нули функции $g(x) \omega(x)$. Тогда абсолютные значения интегралов по участкам знакопостоянства подынтегральной функции и будут теми величинами V_k ($k = 0, \dots, p-1$), которые используются в (7). Если задана некоторая квадратурная формула, использующая для вычисления V_k информацию о значениях подынтегральной функции в N точках, то (7) также является квадратурной формулой, для которой необходимо $p \times N$ значений подынтегральной функции.

Следует заметить, что если точность расчета V_k значительно превышает заданную точность вычисления исходного интеграла (8),

то погрешность при использовании (7) практически определяется значением ρ .

Поиск нулей подынтегральной функции осуществляется следующим образом. Если $\rho(x)$ знакопостоянна в интересующем нас диапазоне изменения переменной x , то искомые нули совпадают с известными корнями $\omega(x)$. В противном случае ($\rho(x)$ — меняет знак) необходимо определить нули $\rho(x)$ (аналитически или численно) и расположить корни $\rho(x)$ и $\omega(x)$ в порядке возрастания.

Рассмотрим возможность применения квадратурной формулы (7). Начнем с наиболее простого случая. Пусть на поверхности проводящего полупространства с сопротивлением ρ расположен точечный источник постоянного тока силы I . Известно, что потенциал φ и радиальная компонента электрического поля E_R , измеряемые на расстоянии R от источника, имеют следующий вид:

$$\varphi = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{R} = \frac{\rho I}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(mR) dm, \quad (9)$$

$$E_R = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{R^2} = \frac{\rho I}{2\pi} \int_0^{\infty} m J_1(mR) dm.$$

Продемонстрируем возможности квадратурной формулы на примере интегралов, находящихся в правой части (9). Эти интегралы заменой переменных приводятся к следующим табличным формам:

$$\int_0^{\infty} J_0(m) dm = 1, \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} m J_1(m) dm = 1. \quad (11)$$

Для приближенного вычисления этих интегралов вещественная ось разбивается на отрезки, концами которых являются нули $m_0, \dots, m_{p-1}$ функций $J_0(m)$ или $J_1(m)$. Тогда в случае интеграла (10)

$$V_K = I_{0K} = \left| \int_{m_K}^{m_{K+1}} J_0(m) dm \right|,$$

а в случае (11) —

$$V_K = I_{1K} = \left| \int_{m_K}^{m_{K+1}} m J_1(m) dm \right|, \quad K=0, \dots, p-1.$$

В табл. I, 2 представлены результаты расчетов для интегралов (10), (11). При вычислении I_{0K}, I_{1K} на каждом из участков

(m_k, m_{k+1}) использовалось четыре девятиточечных квадратуры Гаусса, что обеспечивало 10–12 верхних знаков мантиссы при использовании процедуры вычисления функции Бесселя с двойной точностью. Данные в таблицах сгруппированы следующим образом. В колонках $(-1)^k I_{0k}, (-1)^k I_{1k}$ приведены значения соответствующих интегралов для $k = 0, \dots, 19$ ($\rho = 20$). В третьей и четвертой колонках таблиц представлены соответственно величины S и S_E как функции K ,

Таблица I

K	$(-1)^k I_{0k}$	S	S_E
0	1,4702995	1,4702995	0,90
I	- 0,80145337	0,6688457	0,96
2	0,5993222	1,2681679	0,98
3	- 0,4990493	0,7691185	0,9929
4	0,4365348	1,2056534	0,9968
5	- 0,3928223	0,8128310	0,9986
6	0,3600566	1,1728877	0,9993
7	- 0,3343228	0,8385668	0,99974
8	0,3134149	1,1519817	0,99987
9	- 0,2959958	0,8559859	0,99994
10	0,2811911	1,1371771	0,99997
11	- 0,2684062	0,8687708	0,999983
12	0,2572201	1,1259909	0,999994
13	- 0,2473251	0,8786658	0,999997
14	0,2384906	1,1171564	0,999998
15	- 0,2305397	0,8866166	0,9999991
16	0,2233344	1,1099511	0,9999994
17	- 0,2167650	0,8931861	0,9999996
18	0,2107431	1,1039293	0,9999996
19	- 0,2051968	0,8987324	

так что двигаясь по этим колонкам сверху вниз можно судить о характере сходимости S и S_E , а следовательно, и о точности вычисления интегралов (10), (11).

Данные табл. I показывают, что использование преобразования

Таблица 2

K	$(-1)^K I_{1K}$	S	S_E
0	2,635454I	2,635454I	I,03II
I	- 3,78I6238	-I,I46I697	I,0040
2	4,7I04458	3,5642762	0,9997
3	- 5,4897606	-I,9254845	0,9993
4	6,I73I937	4,2477092	0,9995
5	- 6,7889I59	-2,54I2066	0,9997
6	7,3536448	4,8I2438I	0,99984
7	- 7,8782II7	- 3,0657735	0,9999I
8	8,370I028	5,3043292	0,99995
9	- 8,8347379	-3,5304086	0,99997
IO	9,276I884	5,7457797	0,999988
II	- 9,6976076	-3,95I8279	0,999994
I2	IO,I0I493	6,I49665I	0,999997
I3	-IO,489863	- 4,340I97I	0,9999986
I4	IO,864377	6,524I802	0,9999995
I5	-II,2264I8	-4,7022378	0,9999999
I6	II,577I54	6,8749I70	I,0000000
I7	-II,9I7582	- 5,0426654	I,000000I
I8	I2,248560	7,2058947	I,0000002
I9	- I2,570833	-5,3649389	I,0000002

Эйлера резко улучшает сходимость и позволяет вычислять исходный интеграл с высокой точностью. Обратимся к табл.2. Отметим следующее обстоятельство: подынтегральная функция в (II) возрастает с ростом m , следовательно, S в этом случае расходится. Тем не менее, преобразованный ряд S_E обладает хорошей сходимостью, что обеспечивает высокую точность (семь верных знаков мантиссы) вычисления интеграла (II). В этом собственно и состоит метод Эйлера суммирования рядов: сумма преобразованного ряда приписывается в качестве "обобщенной" суммы исходному ряду [3].

3. Вертикальное электрическое зондирование

Рассмотрим задачу расчета интерпретационного параметра ВЗЗ – кажущегося удельного сопротивления ρ_K для случая горизонтально-слоистой модели среды, состоящей из N изотропных слоев, имеющих сопротивление ρ_i и мощности h_i ($i=1, \dots, N, h_N = \infty$).

Известно, что для величины ρ_K справедливо следующее представление:

$$\frac{\rho_K}{\rho_1} = \int_0^\infty \frac{1+F(x/r)}{1-F(x/r)} x J_1(x) dx, \quad (I2)$$

$$F(x/r) = \frac{\rho_2 R_2 - \rho_1}{\rho_2 R_2 + \rho_1} e^{-2x h_1 / r}$$

Функция R_2 определяется из рекурсии

$$R_{i-1} = \frac{R_i + \frac{R_{i-1}}{\rho_1} t h(x h_{i-1} / r)}{R_i t h(x h_{i-1} / r) + \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}} \quad (I3)$$

$$i = N, \dots, 3, R_N = 1.$$

Здесь r – расстояние от центра установки до точки измерения.

Исследуем подынтегральную функцию в (I2) и покажем, что ее неосциллирующая часть знакопостоянна во всем диапазоне изменения x . Действительно, из (I3) видно, что при всех значениях переменной x $R_i > 0$ ($i=N, \dots, 3$). Следовательно, $|F(x/r)| \leq 1$ при любых значениях аргумента и величин ρ_1, ρ_2 и R_2 . Отсюда следует, что неосциллирующая часть подынтегральной функции положительна во всем диапазоне изменения аргумента.

Вычисление величины ρ_K с использованием квадратурной формулы (7) осуществлялось следующим образом. На основании предыдущих расчетов диапазон изменения переменной x был ограничен сверху двадцатым нулем функции $J_1(x)$ ($\rho = 20, x \leq 62$). В качестве узлов (7) выбирались узлы девятиточечной квадратуры Гаусса, по которой рассчитывались интегралы между нулями. На каждом таком интервале использовалась одна квадратура Гаусса. Массив требуемых значений $J_1(x)$ для всех разносов вычислялся один раз и далее в процессе счета находился в оперативной памяти ЭВМ. Анализ результатов расчетов в широком диапазоне параметров двухслойных

и трехслойных моделей свидетельствует о высокой эффективности метода, особенно в случае больших значений r/h_1 . Так, например, для двухслойной модели среды в диапазоне параметров $0,001 \leq \rho_2/\rho_1 \leq 10000$, $r/h_1 \leq 130000$ все вычисления проведены не менее чем с тремя верными знаками мантиссы. Эти результаты иллюстрируются данными табл.3, где для двухслойной модели среды приведены величины ρ_K/ρ_2 для различных значений ρ_2/ρ_1 ($r/h_1 = 130000$). Как показывают тестовые расчеты для этой модели, в диапазоне $\rho_2/\rho_1 < 1$ при $r/h_1 > 10000$ значения ρ_K совпадают с ρ_2 в пределах шести-семи знаков мантиссы, поэтому по данным этой таблицы можно судить о точности расчетов по квадратурной формуле (7).

Таблица 3

ρ_2/ρ_1	0,1	0,01	0,001	0,000025
ρ_K/ρ_2	1,0000	1,0000	1,0035	1,008

Некоторое увеличение погрешности счета при $\rho_2/\rho_1 < 0,001$ связано с недостаточно точным, для этого случая, вычислением V_K . ($K = 0, \dots, 19$).

4. Частотное зондирование

Возможности применения преобразования Эйлера при расчете гармонических полей исследовались на примере интеграла, описывающего вертикальную компоненту магнитного поля вертикального магнитного диполя с моментом M , расположенного на поверхности горизонтально-слоистого полупространства:

$$H_z = -\frac{M}{4\pi r^3} + \int_0^\infty B(m/r, \lambda) J_0(m) dm,$$

λ - длина волны.

В случае горизонтально-слоистой среды функция $B(m, \lambda)$ не является знакопостоянной во всем диапазоне изменения m . Определение интервалов знакопостоянства функции B аналитическим путем представляется затруднительным, поэтому необходима численная процедура.

Для модели однородного полупространства в широком диапазоне значений параметра r/λ были произведены расчеты магнитного поля. Точность расчетов контролировалась по соответствующим асимптотическим выражениям для компоненты поля. Во всех рассмотренных случаях точность вычислений составляла не менее трех верных знаков мантийсы.

В табл.4 в качестве примера приведены данные, позволяющие судить о характере поведения обычного ряда (I) и ряда Эйлера при расчете $J_m(H_z)$ в волновой зоне ($r/\lambda = 1000$). Представление данных в табл.4 такое же, как и в табл.1,2. I_k - интегралы по участкам знакопостоянства подынтегральной функции, которые в случае однородного полупространства определяются нулями функции $J_0(m)$.

Таблица 4

k	$(-1)^k J_k$	S	S_E
0	1,77113	1,77113	- 8,99
1	- 41,3101	- 39,5390	2,38
2	171,881	132,340	0,324
3	- 426,368	- 294,027	0,0865
4	830,063	536,036	0,0283
5	- 1404,38	- 868,339	0,00995
6	2168,20	1299,86	0,00330
7	- 3138,61	- 1838,75	0,000722
8	4331,31	2492,57	- 0,000336
9	- 5760,90	- 3268,33	- 0,000785
10	7441,02	4172,70	- 0,000980
11	- 9384,59	- 5211,91	- 0,001067
12	11603,9	6391,95	- 0,001107
13	- 14110,5	- 7718,52	- 0,001124
14	16915,6	9197,06	- 0,001132
15	- 20030,0	- 10832,8	- 0,001136
16	23464,1	12631,0	- 0,0011382
17	- 27227,0	- 14596,1	- 0,0011391
18	31329,3	16733,2	- 0,0011395
19	- 35780,2	- 19046,7	

Автор выражает искреннюю благодарность Л.А.Табаровскому за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе и считает своим приятным долгом поблагодарить В.П.Соколова, любезно предоставившего отдельные результаты расчетов гармонических полей.

Литература

1. Зиненберг В.И. Вычисление интегралов от осциллирующих функций при расчете потенциала точечного источника тока. - Изв. АН УзССР. Сер. техн.наук, 1970, № 4, с.41-48.
2. Кухаркин А.Б., Новикова Е.И. О вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций методом Лонгмана. - Журнал вычислит. матем. и матем. физ., 1981, т.21, № 5, с.1091-1090.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления. М.: Физматгиз, 1962. 897 с.
4. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975. 139 с.
5. Longman J.M. A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions - Math. Comput., 1960, v.14, N 69, p.53-59.

УДК 550.837

Ю.Л.Брылкин

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАСТОВ В СКВАЖИНАХ

В настоящее время общепринятый способ определения диэлектрической проницаемости пластов ϵ_n^* в скважинах по диаграммам тех или иных характеристик (параметров) электромагнитного поля базируется на использовании палеточного материала, полученного решением прямых задач. Но такой способ, как правило, требует наличия

палеток как для разных диаметров скважин, так и для разных сопротивлений бурового раствора (рассматривается двухслойная коаксиально-цилиндрическая среда).

Одним из возможных способов определения ε_n^* пластов в скважинах следует считать использование методов многомерного корреляционно-регрессионного анализа и математического моделирования, уже широко применяемых при изучении явлений, зависящих от большого числа разнородных факторов, т.е. так называемых нетрадиционных способов обработки геофизической информации [4], позволяющих эффективно использовать современные возможности ЭВМ.

В нашем случае использование нетрадиционного способа решения поставленной задачи имеет целью определение количественных соотношений между ε_n^* пластов, и, например, относительными характеристиками электромагнитного поля в двухслойной среде.

Как известно, одним из важных моментов математического моделирования является выбор существенных факторов и формы связи между ними. При решении этих вопросов мы руководствовались:

содержательным аспектом рассматриваемой задачи;

результатами расчетов коэффициентов парной корреляции между отобранными для математической модели параметрами;

расчетными данными о величине и значимости коэффициентов множественной корреляции;

величиной средней квадратической погрешности прогнозирования ε_n^* для каждой из рассмотренных моделей.

Выбор существенных характеристик поля и математической модели основывался на результатах вероятностной оценки значимости этих параметров для решения поставленной геологической задачи. Согласно полученным нами данным наибольшей геологической эффективностью с точки зрения однозначного определения ε_n^* характеризуются следующие комплексы, состоящие из относительных характеристик электромагнитного поля частотой 43 мГц:

$$A/A_2 \text{ и } \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \quad \text{при } \rho_n \leq 20 \text{ Ом}\cdot\text{м},$$

$$A/A_1 \text{ и } A/A_2 \quad \text{при } \rho_n > 20 \text{ Ом}\cdot\text{м},$$

где A_1 , A_2 — полные амплитуды электромагнитного поля, измеряемые в скважинах измерительными установками ИО, 30ИО, 45Г ($Z_1 = 0,45 \text{ м}$, $Z_2 = 0,75 \text{ м}$) и ИО, 30ИО, 95Г ($Z_1 = 0,95 \text{ м}$,

$z_2 = 1,25 \text{ м}$); $A = |A_1 - A_2|$, $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ - соответственно разность амплитуд и разность фаз каждой из указанных измерительных установок.

При фиксированных значениях длины зонда (z), диаметра скважины (d_c), удельного электрического сопротивления (ρ_c) и диэлектрической проницаемости (ϵ_n^*) бурового раствора выбранные характеристики поля являются функцией удельного электрического сопротивления (ρ_n) и диэлектрической проницаемости ϵ_n^* пласта (пластов), т.е.:

$$\text{при } \rho_n \leq 200 \text{ ом}\cdot\text{м}: \quad \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = f_1(\rho_n', \epsilon_n^*), \quad (1)$$

$$A/A_2 = f_2(\rho_n', \epsilon_n^*), \quad (2)$$

$$\text{при } \rho_n > 200 \text{ ом}\cdot\text{м}: \quad A/A_1 = f_3(\rho_n'', \epsilon_n^*), \quad (3)$$

$$A/A_2 = f_4(\rho_n'', \epsilon_n^*). \quad (4)$$

Так как в уравнениях (3), (4) параметры A/A_1 и A/A_2 являются зависимыми величинами (разность амплитуд A представляет собой производную функцию от полных амплитуд A_1 и A_2), их можно представить в виде:

$$A_1/A_2 = f_5(\rho_n'', \epsilon_n^*). \quad (5)$$

Иначе говоря, для определения ϵ_n^* во всем интервале изменения их удельного электрического сопротивления ρ_n мы имеем систему уравнений (1), (2), (5), решение которой относительно можно представить в виде функции трех характеристик поля, а именно:

$$\epsilon_n^* = F\left(A/A_2, A_1/A_2, \sin \frac{\Delta\varphi}{2}\right). \quad (6)$$

К сожалению, нам ничего не известно о характере и аналитическом выражении этой функции. В то же время, исходя из общих теоретических соображений и анализа решения прямой задачи диэлектрического метода, можно лишь утверждать, что в реальном диапазоне изменения ϵ_n^* функция является непрерывной и дифференцируемой функцией параметров A/A_2 , A_1/A_2 и $\sin \frac{\Delta\varphi}{2}$. Что же касается аналитического выражения связи ϵ_n^* с указанными параметрами электромагнитного поля, то здесь следует руководствоваться имеющимся опытом регрессионного анализа.

Практика расчета многомерных связей свидетельствует о том, что уравнения линейной или параболической регрессии часто достаточно хорошо выражают зависимость между исследуемыми перемен-

ными даже в тех случаях, когда на самом деле она оказывается более сложной. Это объясняется тем, что в определенных интервалах изменения рассматриваемых величин достаточно сложные зависимости могут быть приближенно аппроксимированы полиномом первой или второй степени. Однако окончательный выбор математической модели осуществляется эмпирически путем расчета нескольких уравнений регрессии (из класса степенных полиномов) и их сравнительной оценки на основе методов математической статистики.

В качестве исходной информации были использованы результаты строгих расчетов рассматриваемых характеристик электромагнитного поля в двухслойных средах при диаметрах скважины $d_c = 0,20; 0,25; 0,30$ м, удельных электрических сопротивлениях бурового раствора $\rho_c = 0,5; 1,0; 3,0; 5,0; 10,0$ Ом·м в пластах, имеющих диэлектрическую проницаемость $\epsilon_n^* = 4; 8; 16; 32; 45$ отн.ед. и удельное электрическое сопротивление $\rho_n = 5; 10; 20; 40; 80; 160; 320; 640; 1280; 2560$ Ом·м.

На основании этих данных были составлены выборки для расчета математических моделей. Каждая из таких выборок, составленная для фиксированных диаметров скважины и сопротивлений бурового раствора охватывала совокупность ϵ_n^* и соответствующих им значений A/A_2 , A_1/A_2 и $\sin \frac{\Delta \varphi}{2}$ при различных удельных сопротивлениях пластов. Это позволило сформировать 15 выборок по 50 наблюдений в каждой.

Для математического описания рассматриваемых моделей были выбраны зависимости вида:

$$Y = a_0 + \sum_i a_i \cdot X_i, \quad (7)$$

$$Y = a_0 + \sum_i a_i \cdot X_i + \sum_i b_i \cdot X_i^2 (i=1, 2, 3), \quad (8)$$

при этом были приняты следующие обозначения:

$$Y = \epsilon_n^*, X_1 = A/A_2, X_2 = A_1/A_2, X_3 = \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

Расчеты уравнений регрессии проведены на ЭВМ по программам [2], а выбор оптимальной модели – на основании сравнения статистических характеристик уравнений регрессии.

В связи с тем, что при расчете зависимостей использовались небольшие по объему выборки исходных данных, в значениях коэффициентов множественной корреляции R вводились соответствующие

коррективы [3]. Для оценки значимости скорректированных коэффициентов множественной корреляции $\bar{R}$ и, следовательно, для решения вопроса о реальности полученных зависимостей использовалось z -преобразование Р. Фишера [1], с помощью которого определялись доверительные границы $\bar{R}$.

Результаты расчета уравнений регрессии и их статистических характеристик позволяют сделать следующие выводы:

а) несмотря на высокие значения коэффициентов множественной корреляции ($0,86+0,91$) уравнения линейной регрессии нельзя использовать для установления величины ε_n^* пластов. Связано это с тем, что в этом случае погрешность определения ε_n^* достигает 35–40%;

б) с точки зрения практического использования несомненный интерес представляют результаты, полученные для квадратичной зависимости ε_n^* от рассмотренных характеристик поля. Действительно, табл. I, 2 показывают, что уравнения регрессии характеризуются высокими значениями коэффициентов множественной корреляции (не менее 0,998) для обоих зондов и позволяют с большой точностью определять диэлектрическую проницаемость пластов ε_n^* (с максимальной средней квадратической ошибкой, равной 7,5%);

в) принимая во внимание характер изменения коэффициентов уравнений регрессии a_i и b_i от удельного сопротивления бурового раствора, по данным табл. I, 2, представляется возможным найти значения коэффициентов уравнений регрессии и для промежуточных значений диаметра скважин.

Результаты определения ε_n^* по уравнениям регрессии (квадратичная форма связи) и допускаемые при этом ошибки иллюстрируются табл. 3. Из этих данных видно, что при отсутствии проникновения фильтрата бурового раствора в пласт для получения истинного значения ε_n^* необходимо использовать измерения по двум зондам. Полученные при этом ошибки в определении истинного значения ε_n^* вполне приемлемы для решения практических задач.

При необходимости по результатам расчетов уравнений регрессии можно построить палетки, соответствующие фиксированному диаметру скважины. Методика построения таких палеток заключается в следующем:

а) каждое уравнение регрессии, рассчитанное для фиксиро-

Таблица I

Статистические параметры и значения коэффициентов уравнений регрессии
(квадратичная форма связи) для зонда ИО,30ИО,45Г

d_c м	ρ_c	$\bar{R}$	$\Delta \varepsilon_n^*$	a_0	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
0,20	0,5	0,999	$4,9 \pm 0,8$	10,02	-13,33	-2,05	9,98	3,60	-4,10	76,61
	1,0	0,999	$5,3 \pm 0,8$	9,70	-15,96	-0,54	11,11	4,16	-4,77	77,56
	3,0	0,999	$5,0 \pm 0,8$	9,62	-16,40	-0,25	9,98	4,45	-4,94	79,20
	5,0	0,999	$4,9 \pm 0,7$	9,53	-16,21	-0,25	9,68	4,42	-4,86	79,34
	10,0	0,999	$4,7 \pm 0,7$	9,46	-15,98	-0,26	9,34	4,37	-4,80	79,41
0,25	0,5	0,999	$4,8 \pm 0,8$	9,88	-10,66	-3,28	10,18	2,72	-2,98	73,55
	1,0	0,999	$6,2 \pm 1,0$	8,92	-16,97	0,69	13,78	3,96	-4,74	74,22
	3,0	0,999	$5,1 \pm 0,8$	9,84	-18,56	0,65	10,87	5,27	-5,78	78,32
	5,0	0,999	$4,7 \pm 0,7$	9,82	-17,44	0,08	10,17	5,13	-5,48	78,47
	10,0	0,999	$4,5 \pm 0,7$	9,69	-16,42	-0,33	9,78	4,92	-5,15	78,34
0,30	0,5	0,999	$4,8 \pm 0,8$	9,40	-7,90	-3,97	11,94	1,70	-1,78	68,77
	1,0	0,998	$7,0 \pm 1,4$	6,87	-18,24	3,11	18,16	3,44	-4,44	69,78
	3,0	0,999	$5,9 \pm 1,0$	9,93	-24,36	3,70	12,63	7,14	-7,73	77,79
	5,0	0,999	$4,5 \pm 0,7$	10,39	-20,62	1,39	9,87	6,79	-7,01	77,91
	10,0	0,999	$3,7 \pm 0,6$	10,18	-17,39	-0,12	9,16	6,20	-6,16	76,97

Примечание. $\Delta \varepsilon_n^*$ - средняя относительная погрешность определения ε_n^* (в %); ρ_c - удельное электрическое сопротивление бурового раствора (Ом·м); d_c - диаметр скважины, м.

Таблица 2

Статистические параметры и значения коэффициентов уравнений регрессии
(квадратичная форма связи) для зонда ИО,30ИО,95Г

$d_{с.м.}$	ρ_c	$\bar{R}$	$\Delta \varepsilon_n^*$	a_0	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
0,20	0,5	0,998	$4,1 \pm 0,9$	5,68	-20,10	3,62	4,25	2,85	-2,21	96,14
	1,0	0,999	$5,3 \pm 0,8$	4,65	-20,82	6,13	4,29	3,44	-3,30	95,41
	3,0	0,999	$4,7 \pm 0,8$	3,36	-20,57	9,12	3,54	4,19	-5,07	92,38
	5,0	0,998	$5,2 \pm 0,9$	6,39	-13,92	5,26	-8,15	3,71	-5,03	93,57
	10,0	0,999	$5,0 \pm 0,8$	4,27	-20,08	7,46	1,48	3,65	-4,16	95,09
0,25	0,5	0,999	$5,0 \pm 1,0$	6,93	-12,42	3,17	-10,79	2,10	-3,40	99,97
	1,0	0,999	$6,7 \pm 0,8$	5,01	-17,26	6,02	-0,71	3,28	-4,12	94,32
	3,0	0,999	$5,0 \pm 0,8$	4,72	-20,03	6,16	2,66	3,34	-3,51	95,65
	5,0	0,999	$4,9 \pm 0,8$	4,66	-20,56	6,22	3,10	3,36	-3,38	95,95
	10,0	0,999	$4,1 \pm 0,8$	5,26	-20,31	5,04	1,72	2,95	-2,66	98,16
0,30	0,5	0,999	$5,1 \pm 0,8$	5,39	-16,80	6,17	-2,55	3,57	-4,68	94,30
	1,0	0,999	$5,1 \pm 0,8$	5,12	-15,77	6,00	-2,48	3,28	-4,47	93,01
	3,0	0,999	$5,1 \pm 0,8$	4,36	-20,83	7,00	4,83	3,72	-4,04	93,37
	5,0	0,999	$4,8 \pm 0,7$	4,34	-21,12	6,78	5,20	3,72	-3,82	93,79
	10,0	0,999	$4,6 \pm 0,7$	4,49	-20,34	5,30	3,33	3,22	-2,96	96,05

Примечание. $\Delta \varepsilon_n^*$ - средняя относительная погрешность определения ε_n^* (в %); ρ_c - удельное электрическое сопротивление бурового раствора (Ом·м); d_c - диаметр скважины, м.

Результаты определения ε_n^* с использованием уравнений регрессии
(квадратичная форма связи) по данным, полученным зондами ИО,30ИО,45Г/ИО,30ИО,95Г

Таблица 3

Исходные данные							Результаты интерпретации	
d_c м	ρ_c (Ом·м)	ρ_n (Ом·м)	ε_n^* (отн. ед.)	A_1/A_2	A/A_2	$\sin \frac{\Delta \varphi}{2}$	ε_n^* (отн. ед.)	$\delta \varepsilon_n^*$ (%)
0,20	1,0	10	4	2,16/2,53	2,05/2,40	0,58/0,59	3,57/4,63	+2,5
		80	4	1,00/1,08	0,44/0,56	0,22/0,27	4,37/4,95	+16,5
		2560	4	0,78/0,81	0,32/0,42	0,13/0,21	4,45/4,42	+10,8
0,20	5,0	5	8	3,40/3,96	3,72/4,30	0,77/0,78	7,86/7,65	-3,1
		20	8	1,40/1,63	1,15/1,39	0,45/0,49	7,28/7,89	-5,3
		640	8	0,73/0,81	0,52/0,63	0,26/0,33	7,40/7,55	-6,6
0,25	1,0	5	8	3,46/4,03	3,89/4,39	0,81/0,79	8,33/8,10	+2,6
		40	8	1,12/1,21	0,78/0,88	0,36/0,39	7,50/7,68	-5,1
		320	8	0,77/0,83	0,51/0,62	0,26/0,32	7,62/7,16	-7,6
0,25	10,0	5	32	2,75/3,38	3,29/3,98	0,84/0,87	32,56/33,60	+0,3
		40	32	0,81/0,99	1,18/1,36	0,64/0,68	31,87/32,04	-0,2
		320	32	0,65/0,80	1,07/1,22	0,63/0,67	32,62/32,42	+1,6
0,30	1,0	5	4	3,86/4,15	4,36/4,48	0,84/0,78	3,08/2,87	-25,6
		80	4	1,16/1,06	0,51/0,54	0,22/0,26	3,47/4,54	0,0
		2560	4	0,86/0,79	0,25/0,41	0,11/0,20	4,76/4,38	+14,3
0,30	1,0	5	32	2,85/3,23	3,56/3,81	0,91/0,86	32,64/32,05	+1,1
		80	32	0,76/0,85	1,18/1,24	0,66/0,67	32,32/32,57	+1,4
		2560	32	0,65/0,76	1,11/1,19	0,65/0,67	32,09/33,07	+2,1

ванных значений ρ_c и d_c , представляется в виде

$$\varepsilon_n^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*,$$

где

$$\varepsilon_1^* = a_2 (A_1/A_2) + b_2 (A_1/A_2)^2,$$

$$\varepsilon_2^* = a_3 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + b_3 (\sin \frac{\Delta\varphi}{2})^2,$$

$$\varepsilon_3^* = a_0 + a_1 (A/A_2) + b_1 (A/A_2)^2,$$

б) рассчитываются величины ε_1^* , ε_2^* , ε_3^* , и результаты расчета изображаются в виде семейства кривых:

$$A_1/A_2 = \text{const} \quad \text{в системе координат } (\varepsilon_1^*; \rho_c),$$

$$\sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \text{const} \quad \text{в системе координат } (\varepsilon_2^*; \rho_c),$$

$$\rho_c = \text{const} \quad \text{в системе координат } (\varepsilon_3^*; A/A_2).$$

Использование палеток для определения ε_n не вызывает каких-либо затруднений и в связи с этим опускается.

Таким образом, описанная методика решения задачи по определению диэлектрической проницаемости пластов в скважинах при отсутствии в них проникновения фильтрата бурового раствора дает возможность:

а) получить приближенное аналитическое выражение зависимости ε_n^* от характеристик электромагнитного поля A_1/A_2 , A/A_2 и $\sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ в заданном диапазоне изменения ε_n^* и ρ_n ;

б) использовать для определения ε_n^* только информацию о значениях характеристик электромагнитного поля в скважине заданного диаметра при известном сопротивлении бурового раствора;

в) существенно сократить объем палеточного материала, который обычно используется в этих случаях при интерпретации;

г) обеспечить наиболее простой способ определения диэлектрической проницаемости пластов при обработке скважинных материалов на ЭВМ.

Литература

1. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М.: Гос - техтеориздат, 1955, 556 с.

2. Стрелко Р.С. Вычисление параметров уравнений регрессии и

коэффициентов корреляции. — В кн.: Статистические алгоритмы и программы. Новосибирск, 1970, с.59–126.

3. Френкель А.А. Многофакторные корреляционные модели производительности труда. М.; Энергоиздат, 1966. 95 с.

4. Элланский М.М. Петрофизические связи и комплексная интерпретация данных промысловой геофизики. М.: Недра, 1978. 215 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Антонов Ю.Н., Емаев С.С. Электромагнитные зондирования при каротаже нефтяных скважин	3
Морозова Г.М. Пространственно-временные характеристики нестационарного электромагнитного поля в глубинных зондированиях	20
Табаровский Л.А. Краевые условия для векторного потенциала на границе между проводником и изолятором	36
Табаровский Л.А., Соколов В.П. Программа расчета нестационарного поля дипольных источников в горизонтально-слоистой среде (АЛЕКС)	57
Дашевский Ю.А. Применение преобразования Эйлера для расчета стационарных и гармонических электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах	78
Брылкин Ю.Л. Способ определения диэлектрической проницаемости пластов в скважинах	88

Сводный план, 1982, поз. 43

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ МЕТОДЫ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сборник научных трудов

О т в е т с т в е н н ы й р е д а к т о р

Юрий Николаевич Антонов

Утверждено к печати
Институтом геологии и геофизики СО АН СССР

Редактор Л.А. Довгаль

Технический редактор Н.Н. Александрова

Корректор З.В. Белоусова

Подписано к печати 23.11.82. МН 17324.
Бумага 60x84/16. Печ.л. 6,25 + 1 вкл. Уч.-изд.л. 5,75
Тираж 300. Заказ 455. Цена 40 коп.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск, 90. Ротапринт.