

**Бернхард Гофман-Велленгоф
Гельмут Мориц**



**ФИЗИЧЕСКАЯ
ГЕОДЕЗИЯ**

**Москва
МИИГАиК 2007**

Федеральное агентство по образованию
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ**

**Бернхард Гофман-Велленгоф
Гельмут Мориц**

ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Перевод с английского Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой

Под редакцией доктора технических наук
Ю.М. Неймана

*Рекомендовано УМО по образованию в области геодезии и фотограмметрии
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 120100 «Геодезия»
специальностей 120102 «Астрономогеодезия», 120103 «Космическая геодезия»*



Москва
МИИГАиК 2007

УДК 528.2
ББК 26.11
Г 75

Бернхард Гофман-Велленгоф, Гельмут Мориц Физическая геодезия.: Перевод с английского Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой/Под редакцией Ю.М. Неймана. –М.: Изд-во МИИГАиК, 2007, 426 с., илл.

Университетский учебник по физической геодезии — науке о фигуре Земли и ее гравитационном поле — написан крупнейшими специалистами с мировым именем. Основной упор делается на взаимодействие между геометрическими (связанными с GPS) и современными гравитационными методами. Математические выкладки основаны, главным образом, на теории потенциала, и даются, по мере возможности, в максимально простом виде.

Для студентов высших учебных заведений геодезических специальностей.
Табл. 10, илл. 111, лит. 124 назв.

ISBN 978-5-91188-007-1

ISBN-10 3-211-23584-1 SpringerWienNewYork

ISBN-13 978-3-211-23584-3 SpringerWienNewYork

УДК 528.2
ББК 26.11

© B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz
© Springer-VerlagWien New York
© Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С., 2007 (перевод)
© Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК), 2007, (оформление)

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства МИИГАиК и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается

Эта книга посвящается памяти

Weikko Aleksanteri Heiskanen
(1895–1971)

первопроходца, инициатора и соавтора учебника "Физическая геодезия", чьи мечты стали явью и превзошли все наши ожидания.

Предисловие к русскому изданию

Физическая геодезия – наука о фигуре Земли и ее поле силы тяжести – была значительно продвинута вперед – и теоретически, и практически – трудами российских ученых. Важнейшие достижения в области физической геодезии неразрывно связаны во всем мире с именем М.С. Молодецкого (1909-1991). "Задача Молодецкого" является основной красной задачей геодезии; а в математике это – одна из "трудных" обратных задач нелинейного функционального анализа.

Теория прогнозирования случайных процессов, развитая примерно в 1940 году независимо друг от друга двумя величайшими математиками, Андреем Колмогоровым в России и Норбертом Винером в США, была применена к аномальному полю силы тяжести Земли. Прогнозирование силы тяжести методом наименьших квадратов было обобщено и превратилось в другой мощный инструмент физической геодезии – среднеквадратическую коллокацию. Пионером этого метода в России стал Юрий Нейман, автор первой монографии (1979 г), трактующей эту задачу с позиций функционального анализа.

Возможно другое совпадение: 1957 год был Международным Геофизическим Годом. Все мы знаем, что в этом году был запущен первый Спутник. В настоящее время без искусственных спутников уже немислимо определение глобальных свойств Земли и ее поля силы тяжести, достаточно вспомнить о глобальных системах позиционирования, таких как GPS и ГЛОНАСС...

Может быть, эта вводная книга станет маленьким "спасибо", крошечным даром в ответ на то, что мы и целое поколение геодезистов во всем мире получили от наших российских коллег.

Переводчик Лейла Сугаипова и редактор Юрий Нейман не только проделали большую и бескорыстную работу по переводу нашей книги, но они также исправили погрешности и улучшили текст. Профессор Нейман также редактировал русский перевод ("Современная физическая геодезия", 1983 г) книги Г. Морица "Advanced Physical Geodesy", 1980 г. Им, и всем, кто внес вклад в это издание, мы выражаем свою сердечную благодарность.

Грац, март 2007

Бернхард Гофманн-Велленгоф, Гельмут Мориц

От редактора перевода

Университетский учебник по физической геодезии *Physical Geodesy* by Weikko A. Heiskanen and Helmut Moritz, вышедший в свет в 1967 году, очень быстро и надолго завоевал признание геодезистов – от студентов до крупных учёных буквально во всём мире. И хотя на русский язык эта книга так и не была переведена, она сыграла заметную роль в развитии и отечественной геодезии. В знак признания этого факта профессору Гельмуту Морицу в 1999 году присвоено звание почётного доктора Московского государственного университета геодезии и картографии.

Новый учебник *Physical Geodesy* by Bernhard Hofmann · Wellenhof and Helmut Moritz, перевод которого предлагается русскоязычным читателям, построен на базе упомянутого учебника *Physical Geodesy* by Weikko A. Heiskanen and Helmut Moritz 1967-го года, но, по существу, является совсем новой работой, отражающей все те революционные события, которые неузнаваемо изменили облик геодезии за прошедшие почти четыре десятилетия. Авторы не стремились "объять необъятное", и некоторые интересные вопросы, например, разного рода спектральные методы, обойдены молчанием. Но основные разделы университетского курса физической геодезии изложены очень подробно и доступно. Современная трактовка теории М.С.Молоденского¹, редукция силы тяжести в свете этой теории, средняя квадратическая коллокация и многое другое представляет интерес не только для студентов, но и для специалистов.

Я благодарю декана ФЭУТ МИИГАиК профессора В.В.Голубева за финансовую поддержку работы над переводом. Особая благодарность авторам переведенного учебника профессору Гельмуту Морицу и профессору Бернхарду Гофману-Велленгофу, бесплатно предоставившим в моё распоряжение английскую электронную версию книги в формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$, что существенно облегчило работу по подготовке верстки перевода.

Я также благодарен издательству Springer Publishing Company за благодарное сотрудничество.

Москва, август 2006

Ю.М.Нейман

¹Подробную биографическую и научную информацию о Михаиле Сергеевиче Молоденском можно найти в работе "M. S. Molodensky In Memoriam". Н. Moritz and M.I. Yurkina (eds.). Publ. Geod. Inst. of TU Graz, vol. 88, Graz 2000, 85 pp., доступную для свободной загрузки в PDF формате с домашней страницы <http://www.helmut-moritz.at>.

Предисловие

Почти целое поколение успело смеяться с 1967 года, с того года, когда впервые вышла в свет *Physical Geodesy* by Weikko A. Heiskanen and Helmut Moritz². Вскоре эта книга стала бестселлером. Может показаться удивительным, что и сегодня, изучая работы, имеющие отношение к физической геодезии, мы по-прежнему часто встречаем ссылки на эту книгу. Разве с тех пор время остановилось? Ничуть, время легло с той же скоростью, что и прежде, а может быть даже и быстрее – по крайней мере, в чем то представлении. Дело в том, что продолжительность жизни работы коррелирует с её превосходным качеством. Вот та причина, по которой "эта книга" все еще играет важную роль в геодезической науке и не только в геодезической.

Но, конечно, в последние десятилетия геодезия непрерывно развивалась далее – с одной стороны, посредством новых идей и новых вычислительных методов, а с другой стороны, за счёт современных методов измерений. Здесь и начинается история этой книги.

Несколько лет назад я пытался убедить Гельмута Морица в необходимости нового издания "Физической геодезии". Мои попытки не имели успеха, хотя мне и удалось вызвать некоторый интерес с его стороны. "Steter Tropfen höhlt den Stein"³ решил я и стал повторять свои попытки регулярно. Истоки моего в некотором смысле упрямства лежали в прошлом. В 1993 году я имел шанс помогать Гельмуту Морицу в написании книги под названием "Geometry, Relativity, and Geodesy"⁴. Для меня это было чрезвычайно захватывающим временем, временем всестороннего сотрудничества. После этого опыта я незамедлительно проявил желание заполучить другой шанс для сотрудничества. В эти дни назревала идея относительно нового издания "Физической геодезии".

Наконец, упорные капли проточили камень. Я не могу сказать, Почему и Когда это случилось; но неожиданно мы получили контракт с издательством Springer Publishing Company. Мне казалось, что колесо времени повернуло всячь – спасибо, Гельмут!

Многие люди заслуживают похвалы и благодарности. Профессор доктор Klaus-Peter Schwarz, работавший на кафедре инженеров геоматики Университета Калгари, оказал сильное влияние на баланс между сохранением, устранением, обновлением и добавлением тем.

Профессор доктор Herbert Lichtenegger, работавший в Институте Космической Геодезии и Навигации Технологического Университета города Грац, был рецензентом книги. Он критически прочитал и исправил весь объем книги. Многие из его указаний и усовершенствований, критических замечаний и предложений с благодарностью приняты.

²На русский язык "Физическая геодезия" Вейкко А. Хейсканена и Гельмута Морица, к сожалению, не переводилась (прим. ред.)

³Вода камень точит (прим. ред.)

⁴Геометрия, Относительность и Геодезия (прим. ред.)

Профессор доктор Norbert Kühtreiber из Института Космической Геодезии и Навигации Технологического Университета города Грац помог конструктивным критическим анализом и ценными предложениями. Кроме того, он сильно помог в формировании главы 11, снабжая нас численными примерами и своим ценным опытом в практических аспектах вычисления геоида.

В нескольких плодотворных дискуссиях профессор доктор Roland Pail из Института Космической Геодезии и Навигации Технологического Университета города Грац поделился своим богатым опытом участия в космических проектах изучения силы тяжести. В соответствующем разделе отражены некоторые положения из конспекта его лекций. Он также заслуживает благодарности за тщательную корректуру этого раздела.

Иллюстрация обложки была разработана и создана инженером Elmar Wastle из TeleConsult Austria GmbH (www.teleconsult-austria.at). Реакция при представлении этой иллюстрации издательству Springer Publishing Company была чрезвычайно положительной благодаря ее бросающемуся в глаза высокому качеству.

Предметный указатель книги был создан с помощью компьютерной программы, написанной доктором Walter Klostius из Института Геоинформационных систем Технологического Университета города Грац. Кроме того, его программа помогла обнаружить некоторые орфографические ошибки.

Верстка книги создана с помощью издательской системы $\LaTeX 2\epsilon$. Один из включенных рисунков также создан в $\LaTeX 2\epsilon$, остальные – с помощью графического редактора CorelDRAW 11. За создание рисунков прежде всего следует поблагодарить доктора Klaus Legat из Института Космической Геодезии и Навигации Технологического Университета города Грац. Ему оказал поддержку профессор доктор Norbert Kühtreiber. Высокий научный уровень создателей является гарантией высокого качества. Многие из этих рисунков представляют собой изменения оригиналов из Heiskanen and Moritz (1967).

Я также благодарен издательству Springer Publishing Company за их рекомендации и сотрудничество.

Названия коммерческих компаний или коммерческой продукции мы старались не включать всюду, где это было возможно.

Наконец, ваши идеи и рекомендации для будущего издания этой книги являются желательными и будут приветствоваться.

Выбор тем, конечно же, иной, чем в первоначальной книге, написанной Хейсканеном и Морицем. Однако, мы пытались не только сохранить общую структуру везде, где это было возможно, но также и оставлять текст неизменным. Первостепенными критериями отбора тем были значимость, обучающее содержание, а также интересы и компетентность авторов. Детальное описание содержания дается в Предисловии.

Вступление

Эта книга представляет собой университетский учебник. Физическая геодезия – это наука о фигуре Земли и ее гравитационном поле. Основной упор делается на взаимодействие между геометрическими (связанными с GPS) и современными гравитационными методами. Математическим инструментом служит теория потенциала. Подробнее о назначении и применении физической геодезии сказано в последующем введении. Для удобства чтения в тексте намеренно допускаются некоторые повторы. Математические выкладки, по мере возможности, даются в максимально простом виде.

Книга включает в себя 11 глав, список использованной литературы и подробный предметный указатель⁵, который должен помочь читателю быстро найти интересующие его темы.

Первая глава – это введение в математическую теорию потенциала в объеме, необходимом для понимания данной книги. Точнее, это "классическая" теория потенциала в том виде, в каком она изложена, например, в книге Kellogg (1929). (Мы обычно будем ссылаться на источники по фамилии автора и году публикации). Математики сразу отметят неформальный стиль изложения материала, как в большинстве учебников по теоретической физике: доказательства часто опущены или заменены "эвристическими" рассуждениями.

Во второй главе вводятся понятия, относящиеся к гравитационному полю Земли, такие как сила тяжести, уровенные поверхности, отвесные линии, геоид, а также связанные с ними координаты: астрономические широта и долгота и высоты над геоидом. При изложении используется мощный математический аппарат – ряды по шаровым и сферическим функциям. Естественной отсчетной поверхностью служит эллипсоид вращения, связанный с "нормальным" гравитационным полем. Это дает нам "геодезическую систему отсчета" (Geodetic Reference System, GRS) или общеземную геодезическую систему (World Geodetic System, WGS). Отклонения количественных характеристик реального гравитационного поля от соответствующих характеристик отсчетного поля малы и могут быть линеаризованы. Широко известным классическим решением этой задачи является интегральная формула Стокса.

Третья глава посвящена редукциям силы тяжести, в частности, редукциям с использованием теории изостазии. Так впервые устанавливается связь с геофизикой.

В четвертой главе рассматривается проблема высот, которая на самом деле сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Первые четыре главы представляют собой обновленный материал из старой книги Heiskanen and

⁵В русском издании предметный указатель несколько сокращён (прим. ред.).

Moritz (1967), послужившей основой для данной книги.

Пятая глава – центральная во многих отношениях. По сравнению с предыдущей книгой, она значительно расширена и имеет совершенно другую структуру. В этой главе обсуждается проблема взаимосвязи геометрии и физики во всей ее сложности, от общих (часть I) до классических частных аспектов (часть III). Связующим звеном является "трехмерная геодезия" в её "доспутниковом" понимании (часть II). Можно сказать, что часть I – интегральная, а часть III – дифференциальная. Часть I, геоцентрические и глобальные системы отсчета, обязана своим существованием высокоточным геометрическим спутниковым методам. Проблема третьего измерения, одна из самых сложных задач геодезии, формулируется и решается в этой главе наиболее прямым и естественным способом. Часть II – попытка решить эту задачу классически, без использования дифференциальных уравнений, однако слабым звеном здесь является измерение зенитных расстояний, слишком неточное из-за атмосферной рефракции. Классическое решение этой дилеммы, эффективное и по сей день астрономо-геодезическое интегрирование уклонений отвеса, рассматриваемое в части III.

В шестой главе сравнительно кратко описывается вычисление гравитационного поля до высот около 10 км, применительно к авиационной гравиметрии. Это обновленный материал главы 6 из старой книги.

Седьмая глава соответствует старой главе 9, однако, она значительно расширена, чтобы отразить огромный прогресс в развитии спутниковых методов определения глобального гравитационного поля. До настоящего времени основной проблемой было наличие некоторого пробела между полученным на больших высотах глобальным полем и детальными, но неравномерными наземными измерениями силы тяжести. В данной главе описываются новые спутниковые проекты, призванные ликвидировать этот недостаток.

Восьмая глава, посвященная теории Молоденского и др., также значительно расширена, поскольку она очень важна концептуально. Молоденский первым заложил в основу физической геодезии краевые задачи на физической поверхности Земли, а не на геоиде. Его теория также включает астрономо-геодезические методы. Хотя эта теория задумывалась Молоденским как метод, позволяющий избежать использование редукции силы тяжести к уровню моря, в горных районах она дает наилучшие результаты при совмещении с изостатическими и подобными редукциями силы тяжести, которые в настоящее время более известны как методы "удаления-восстановления". Существенным отличием от предыдущей книги является тот факт, что сейчас мы понимаем теорию Молоденского гораздо лучше и можем пользоваться при её описании только сравнительно простой математикой, не прибегая к интегральным уравнениям.

Девятая глава практически полностью повторяет старую главу 7. Статистический подход к изучению силы тяжести неожиданно обрел большую зна-

чимось, как в теоретическом, так и в практическом плане, поэтому ему отводится отдельная новая глава.

Десятая глава посвящена среднеквадратической коллокации. Это синтез обобщенного среднеквадратического прогноза силы тяжести, описанного в главе 9, теории бесконечномерного гильбертова пространства с воспроизводящим ядром и представлений о редукции силы тяжести в свете теории Молоденского. Этот метод появился в результате публикации небольшой статьи Кгагур (1969). Среднеквадратическая коллокация обладает чрезвычайно простой математической структурой и задействует только матричные методы, хорошо приспособленные для автоматизированных вычислений. Тем не менее, представляется возможность комбинировать практически любые типы геодезических данных. Это сделало коллокацию очень популярным методом численных расчетов.

Одипнадцатая глава иллюстрирует различные методы на примере вычисления в Австрии, в которой сочетаются сложная топография и доступность данных.

В ссылках на интернет-источники часть "http://" опущена, если адрес начинается с "www"; то есть "www.esa.int" означает "http://www.esa.int". Как правило, интернет-адреса, указанные в тексте, не повторяются в списке источников. Таким образом, список источников не является исчерпывающим перечнем использованных нами ресурсов.

Использование интернет-источников вызвало некоторые трудности. В процессе поиска точного и краткого определения или объяснения мы часто встречали идентичные определения в разных источниках. Установить наиболее ранний, оригинальный источник – задача практически невыполнимая. Поэтому в ряде случаев, чтобы избежать конфликта интересов, мы приняли решение вообще не давать ссылку на источник. Это означает, что основой для некоторых фраз и предложений в книге послужили материалы сети интернет. С другой стороны, когда эта книга будет издава, она сама, возможно, будет использована в качестве какого-нибудь интернет-источника.

Для библиографических ссылок использованы наиболее легко доступные или наиболее полные публикации (а не первые по времени). Список источников не претендует на полноту; если какие-то важные публикации были пропущены, то это было сделано ненамеренно.

Символы, обозначающие векторы и матрицы, выделены жирным шрифтом. Скалярное произведение двух векторов обозначено точкой " \cdot ". Норма вектора, т.е. его длина, обозначена двумя двойными черточками " $\|\cdot\|$ ". Векторы, не относящиеся к матрицам, могут быть записаны в виде столбца или строки, смотря что удобнее в каждом конкретном случае.

Оглавление

Введение	1
1 Основы теории потенциала	3
1.1 Притяжение и потенциал	3
1.2 Потенциал твердого тела	6
1.3 Гармонические функции	8
1.4 Уравнение Лапласа в сферических координатах	10
1.5 Сферические и шаровые функции	12
1.6 Поверхностные сферические функции	13
1.7 Функции Лежандра	15
1.8 Функции Лежандра второго рода	19
1.9 Разложение по сферическим функциям и понятие ортогональности	22
1.10 Полностью нормированные сферические функции	24
1.11 Зональные гармоники и формула сложения	26
1.12 Решение задачи Дирихле	28
1.13 Другие краевые задачи	31
1.14 Радиальная производная гармонической функции	33
1.15 Уравнение Лапласа в эллипсоидально-гармонических координатах	36
1.16 Эллипсоидальные функции	39
2 Поле силы тяжести Земли	44
2.1 Сила тяжести	44
2.2 Уровенные поверхности и отвесные линии	47
2.3 Кривизна уровенных поверхностей и отвесных линий	50
2.4 Естественная система координат	55
2.5 Потенциал Земли в терминах сферических функций	58
2.6 Сферические функции низших степеней	62
2.7 Гравитационное поле уровенного эллипсоида	66
2.8 Нормальная сила тяжести	71
2.9 Разложение нормального потенциала в ряд по сферическим функциям	75

2.10	Разложения в ряд нормального гравитационного поля	79
2.11	Референц-эллипсоид: численные значения	85
2.12	Аномальное поле силы тяжести	93
2.13	Сферическая аппроксимация	99
2.14	Аномалии силы тяжести вне Земли	102
2.15	Формула Стокса	105
2.16	Интеграл Стокса и функция Стокса	109
2.17	Обобщение на случай произвольного референц-эллипсоида	112
2.18	Возмущения силы тяжести и формула Коха	118
2.19	Уклонения отвеса и формула Венинг-Мейнеса	120
2.20	Вертикальный градиент силы тяжести	123
2.21	Практическое использование интегральных формул	126
3	Редукция силы тяжести	133
3.1	Введение	133
3.2	Вспомогательные формулы	134
3.3	Редукция в свободном воздухе	138
3.4	Редукция Буге	139
3.5	Редукция Пуанкаре и Прея	142
3.6	Изостатическая редукция	145
3.6.1	Изостазия	145
3.6.2	Топографо-изостатические редукции	150
3.7	Косвенный эффект	153
3.8	Инверсионная редукция Рудзкого	155
3.9	Конденсационная редукция Гельмерта	157
4	Высоты	160
4.1	Геометрическое нивелирование	160
4.2	Геопотенциальные числа и динамические высоты	163
4.3	Ортометрические высоты	165
4.4	Нормальные высоты	170
4.5	Сравнение различных систем высот	172
4.6	GPS-нивелирование	175
5	Геометрия Земли	177
5.1	Краткий обзор	177
	Часть I: Глобальные системы отсчета эпохи GPS	177
	Часть I: Глобальные системы отсчета эпохи GPS	179
5.2	Введение	179
5.3	Глобальная система местопределения	181
5.3.1	Основная идея	181
5.3.2	Архитектура системы	182

5.3.3	Спутниковый сигнал и объекты наблюдения	186
5.3.4	Возможности системы и ее точность	188
5.3.5	Концепции модернизации GPS	192
5.4	От GPS к координатам	194
5.4.1	Точечное местоопределение с помощью кодовых псевдодальностей	194
5.4.2	Относительное местоопределение с фазовыми псевдодальностями	196
5.5	Проекция на эллипсоид	198
5.6	Преобразования координат	199
5.6.1	Эллипсоидальные и прямоугольные координаты	199
5.6.2	Эллипсоидальные, эллипсоидально- гармонические и сфе- рические координаты	203
5.7	Преобразования геодезических дат	205
5.7.1	Введение	205
5.7.2	Трехмерное преобразование в общем виде	206
5.7.3	Трехмерное преобразование между WGS 84 и локальными системами координат	207
5.7.4	Дифференциальные формулы для других преобразований референц-систем	210
Часть II: Развитие трехмерной геодезии		213
5.8	Трехмерная геодезия Брунса и Хотина	213
5.9	Глобальные и локальные горизонтальные координаты	215
5.10	Комбинирование наземных данных и данных GPS	217
5.10.1	Общая система координат	217
5.10.2	Представление измеренных величин	218
Часть III: Локальные геодезические системы		223
5.11	Формулировка задачи	223
5.12	Редукция астрономических измерений на эллипсоид	224
5.13	Редукция горизонтальных и вертикальных углов и расстояний	228
5.14	Астрономогеодезическое определение геоида	230
5.15	Редукция за кривизну отвесной линии	236
5.16	Эллипсоиды наилучшей аппроксимации и эллипсоид общеземной	241
6	Поле силы тяжести вне Земли	246
6.1	Введение	246
6.2	Вектор нормальной силы тяжести	247
6.3	Вектор возмущения силы тяжести и аномалии силы тяжести	249
6.4	Вычисление возмущений силы тяжести продолжением вверх	254
6.5	Дополнительные соображения	256
6.6	Сравнение аномалий и возмущений силы тяжести	259

7	Космические методы	261
7.1	Введение	261
7.2	Орбиты искусственного спутника	263
7.3	Определение зональных гармоник	267
7.4	Прямоугольные координаты спутника и возмущения	273
7.5	Определение тессеральных гармоник и местоположения станций	277
7.6	Новые спутниковые проекты изучения гравитационного поля	281
7.6.1	Мотивация и вводные рассмотрения	281
7.6.2	Основные принципы измерения	283
7.6.3	Проект CHAMP	287
7.6.4	Проект GRACE	289
7.6.5	Проект GOCE	291
8	Современный подход к определению фигуры Земли	296
8.1	Введение	296
	Часть I: Гравиметрические методы	297
8.2	Редукция силы тяжести и геоид	297
8.3	Геодезические краевые задачи	301
8.4	Подход Молоденского и линеаризация	303
8.5	Сферический случай	309
8.6	Решение с помощью аналитического продолжения	311
8.6.1	Идея	311
8.6.2	Решение первого порядка	312
8.6.3	Решение более высокого порядка	316
8.6.4	Проблемы аналитического продолжения	317
8.6.5	Другая перспектива	320
8.7	Уклонения отвеса	323
8.8	Возмущения силы тяжести: случай GPS	325
8.9	Редукция силы тяжести в современной теории	327
8.10	Определение геоида по наземным аномалиям	332
8.11	Первый баланс	335
	Часть II: Астрономогеодезические методы по Молоденскому	338
8.12	Некоторые предварительные сведения	338
8.13	Еще раз об астрономическом нивелировании	345
8.14	Топографо - изостатическая редукция уклонений отвеса	347
8.15	Значение геоида	350
9	Статистические методы физической геодезии	355
9.1	Введение	355
9.2	Ковариационная функция	356
9.3	Разложение ковариационной функции в ряд по шаровым функциям	361

9.4	Интерполяция и экстраполяция аномалий силы тяжести	366
9.5	Точность методов прогноза	368
9.6	Среднеквадратический прогноз	371
9.7	Корреляция с высотой	374
10	Среднеквадратическая коллокация	378
10.1	Основы среднеквадратической коллокации	378
10.2	Применение коллокации при определении геоида	385
11	Методы вычислений	387
11.1	Принцип удаления восстаповления	387
11.2	Определение геоида в Австрии методом коллокации	390
11.3	Поправки Молоденского	393
11.4	Геоид в интерпете	397
	Литература	398
	Предметный указатель	406

Введение

Как уже было отмечено во вступлении, предметом физической геодезии является изучение гравитационного поля и фигуры Земли. В прошлом в науке в качестве фигуры Земли использовали геоид, определяемый как одна из эквипотенциальных поверхностей гравитационного поля Земли, частью которой является (усредненная) поверхность океанов. Таким образом, понятие гравитационного поля сразу же появляется в определении фигуры Земли. Высоты над уровнем моря – это высоты над геоидом, следовательно, они определяются как геометрически, так и физически.

Гравитация, вызванная силой земного притяжения, всегда играла определяющую роль в жизни человечества, от походов по холмистой местности, до путешествий на кораблях и самолетах. Она также определила форму нашей планеты.

Геодезия как наука возникла тогда, когда ведущие ученые, такие как Ньютон, пришли к выводу, что Земля не может иметь форму шара, а должна быть сплюснута, благодаря вращению. Не слишком сильно, но, вероятно, существенно. Это была одна из величайших научных проблем того времени.

Поэтому около 1740 г. Французская Академия Наук организовала две экспедиции – одну в район Бугер, Перу, и другую – под Моперти, Лапландия. Их целью было измерение дуги меридиана, к примеру, 1° широты, вблизи экватора и вблизи Северного полюса. Расхождение между двумя измерениями является мерой сжатия, т.е. отклонения земного эллипсоида от сферы. Эти измерения ясно показали, что фигура Земли приблизительно представляет собой эллипсоид вращения.

Следующий век был отмечен попытками определить фигуру Земли более точно. К.Ф. Гаусс (1777-1855), "король математики", поднял геодезию до уровня науки. Он сделал это с помощью своей теории поверхностей, которая в итоге привела к общей теории относительности (см. Moritz and Hofmann-Wellenhof (1993)), а также уравнивания методом наименьших квадратов – первым из всех статистических методов оценивания. Он любил практическую геодезическую работу и создал триангуляционную сеть. Гаусс также ввел понятие геоида как "математической фигуры Земли", определив его как уровенную поверхность гравитационного поля.

Геоид отличается от удачно выбранного эллипсоида (например, GRS 1980) менее, чем на 100 м. Геоцентрические положения сегодня могут быть определены с помощью GPS с точностью лучше 1 дм чисто геометрическим путем. Мы можем определить эти положения либо в системе геоцентрических декартовых координатах, либо в системе эллипсоидальных координатах ϕ , λ , h .

Таким образом, геометрия Земли в основном может быть определена независимо от гравитационного поля, благодаря GPS и другим спутниковым методам. Однако, гравитационное поле все равно нужно, например, для опреде-

ления орбиты самих спутников.

Вероятно, со временем вместо аномалий силы тяжести Δg под влиянием GPS будут использоваться возмущения силы тяжести δg . Мы приняли это во внимание при написании этой книги.

Данные по гравитации постепенно становились наиболее востребованными и широко используемыми в геофизике, и любое увеличение точности незамедлительно создавало новые потребности. К примеру, поверхность океана, определяемая спутниковой альтиметрией – это не точная эквипотенциальная поверхность из-за небольших уклонов, вызванных океаническими течениями. Таким образом, эта "топография океана", измеряемая путем сравнения результатов спутниковой альтиметрии с точным гравиметрическим геоидом, полученным путем комбинирования различных методов, дает важные краевые условия для задач океанографии.

Еще Клеро связывал плотность масс внутри Земли с внутренним тяготением в условиях гидростатического равновесия, и этот вопрос под классическим названием "фигура Земли" теперь может быть пересмотрен в свете спутниковых данных; см. Moritz (1990).

Изучение геологических феноменов земной коры и верхней мантии, таких как изостазия и тектоника плит, требуют взаимодействия геодезии, геофизики и геологии.

Движение полюсов и аномалии вращения Земли вызваны главным образом непрерывной циркуляцией воздушных масс, определяющих погоду. Наблюдения за вращением Земли в настоящее время ведутся с помощью лазеров и GPS, выявляя неожиданную связь между геодезией и метеорологией; см. Moritz and Mueller (1987).

Новые способы измерения, связанные с инерциальными навигационными системами (Inertial Navigational Systems, INS) требуют совместного использования геометрии и гравитационного поля. Это дает существенные практические результаты, например, при работе в туннелях. GPS не пригодна для работы внутри туннеля, а INS или традиционные методы наблюдения справляются с этой задачей. Однако, и те и другие зависят от гравитационного поля.

Наземные измерения силы тяжести занимают очень много времени. Аэрогравиметрия (авиационная гравиметрия) стала возможной только после того, как взаимодействие с GPS позволило разделить гравитационные и инерциальные силы.

Не все отмеченные вопросы могут быть рассмотрены в данной работе во всех деталях. Эта книга задумывалась как целостный, математически ориентированный и не слишком сложный курс ВУЗовского уровня, который должен помочь читателю перейти к собственным диссертационным исследованиям.

Книга Heiskanen and Moritz (1967) была переходной от классической к спутниковой геодезии. Также и эта книга отмечает начало новой эры, для которой характерны "интеграция датчиков", комбинирование данных, кинематические и навигационные методы.

Глава 1

Основы теории потенциала

1.1 Притяжение и потенциал

Цель этой вводной главы – представить основы теории потенциала, включая сферические и эллипсоидальные функции, в объеме, достаточном для понимания последующих глав. Мы намерены объяснить значение теорем и формул, избегая длинных выводов, которые при желании можно найти в любом учебнике по классической (до 1950 г.) теории потенциала; мы рекомендуем Kellogg (1929). В этой книге дано скорее упрощенное, чем исчерпывающее изложение.

Тем не менее, читателю эта глава может показаться более сложной и отвлекающей, чем другие части книги. Поскольку последующие практические примеры придадут более конкретное значение темам, затронутым в данной главе, читатель может сначала лишь бегло ознакомиться с изложенным здесь материалом и возвращаться к нему по мере необходимости.

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, две материальные точки с массами m_1 и m_2 , разделенные расстоянием l , притягиваются друг к другу с силой

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}. \quad (1-1)$$

Эта сила направлена вдоль линии, соединяющей эти точки; G – гравитационная постоянная Ньютона. В системе СИ, основанной на метрах [м], килограммах [кг] и секундах [с], гравитационная постоянная имеет значение

$$G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}. \quad (1-2)$$

С гравитационной постоянной Ньютона G в экспериментальной физике связаны некоторые проблемы. С одной стороны, это одна из самых важных физических констант, с другой – одна из наименее точно определенных. Международной организацией, наделенной полномочиями в данном вопросе, является Committee on Data for Science and Technology (CODATA), см. www.codata.org.

В июле 2002 г. CODATA рекомендовал к использованию приведенное выше значение G , точнее $G = (6.6742 \pm 0.0010) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$. Символ \pm обозначает стандартную неопределенность, также называемую среднееквadrатическим отклонением или среднееквadrатической погрешностью. Это соответствует относительной стандартной неопределенности $1.5 \cdot 10^{-4}$, что является весьма большой погрешностью для такой важной константы; см. <http://physics.nist.gov/cuu/constants>. (Другие константы определены с относительной точностью 10^{-7} или выше.) Для сравнения результатов экспериментов рекомендуем обратиться к Internet.

Хотя массы m_1 и m_2 притягиваются друг к другу абсолютно симметричным образом, удобнее одну из них считать притягивающей массой, а другую – притягиваемой массой. Для простоты примем притягиваемую массу равной единице и обозначим притягивающую массу как m . Формула

$$F = G \frac{m}{l^2} \quad (1-3)$$

выражает силу, с которой масса m действует на единичную массу, расположенную в точке P на расстоянии l от массы m .

Далее, введем прямоугольную систему координат и обозначим в ней координаты материальной точки с массой m как ξ, η, ζ , а координаты притягиваемой точки P – как x, y, z . Сила притяжения может быть обозначена вектором \mathbf{F} с модулем F (Рис. 1.1).

Компонентами вектора \mathbf{F} являются:

$$\begin{aligned} X &= -F \cos \alpha = -\frac{Gm}{l^2} \frac{x - \xi}{l} = -Gm \frac{x - \xi}{l^3}, \\ Y &= -F \cos \beta = -\frac{Gm}{l^2} \frac{y - \eta}{l} = -Gm \frac{y - \eta}{l^3}, \\ Z &= -F \cos \gamma = -\frac{Gm}{l^2} \frac{z - \zeta}{l} = -Gm \frac{z - \zeta}{l^3}, \end{aligned} \quad (1-4)$$

где

$$l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (1-5)$$

Определим скалярную функцию

$$V = \frac{Gm}{l}, \quad (1-6)$$

называемую потенциалом силы притяжения. Компоненты X, Y, Z силы притяжения \mathbf{F} могут быть представлены в виде

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1-7)$$

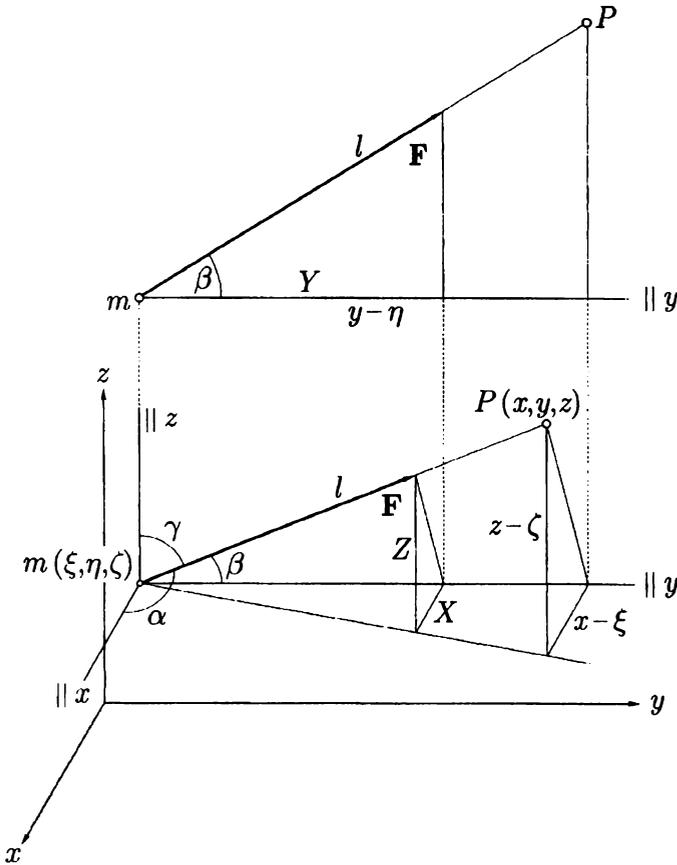


Рис. 1.1: Компоненты силы притяжения;
вверху показана y -компонента

В этом нетрудно убедиться, продифференцировав (1-6), так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \right) = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{1}{l^2} \frac{x - \xi}{l} = -\frac{x - \xi}{l^3}, \dots \quad (1-8)$$

В векторной записи уравнение (1-7) принимает вид

$$\mathbf{F} = [X, Y, Z] = \text{grad } V; \quad (1-9)$$

то есть, вектор силы – это градиент скалярной функции V .

Важно уяснить, что, в соответствии с (1-7), три компоненты вектора \mathbf{F} могут быть заменены одной функцией V . При этом гораздо легче оперировать с потенциалом, чем с тремя компонентами вектора силы, особенно, когда мы имеем дело с притяжением системы материальных точек или твердых тел, как это часто бывает в геодезии. Даже в таких сложных случаях соотношения (1-7) остаются справедливыми; функция V будет просто суммой потенциалов частиц, составляющих систему.

Таким образом, если мы имеем систему из нескольких материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n , то потенциал системы есть сумма отдельных составляющих (1-6):

$$V = \frac{G m_1}{l_1} + \frac{G m_2}{l_2} + \dots + \frac{G m_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i}. \quad (1-10)$$

1.2 Потенциал твердого тела

Допустим, что точечные массы распределены непрерывно в некоторой области объема v (рис. 1.2) с плотностью

$$\rho = \frac{dm}{dv}, \quad (1-11)$$

где dv - элементарный объем, а dm - элементарная масса. Тогда сумма (1-10) становится интегралом (интегралом Ньютона),

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv, \quad (1-12)$$

где l - расстояние между элементарной массой $dm = \rho dv$ и притягиваемой точкой P . Обозначив координаты притягиваемой точки P как x, y, z , а координаты элемента массы m как ξ, η, ζ ; видим, что l вновь определяется соотношением (1-5). Поэтому мы можем записать (1-12) в явном виде:

$$V(x, y, z) = G \iiint_v \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta; \quad (1-13)$$

здесь мы воспользовались тем, что дифференциал объема dv может быть представлен в виде

$$dv = d\xi d\eta d\zeta, \quad (1-14)$$

что и объясняет использование тройных интегралов в (1-12).

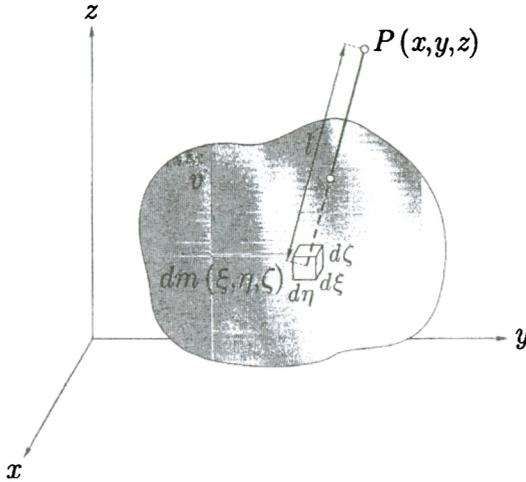


Рис. 1.2: Потенциал твердого тела

Компоненты силы притяжения определяются соотношением (1-7). Например,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial x} \iiint_v \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{l} d\xi d\eta d\zeta \\ &= G \iiint_v \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \right) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (1-15)$$

Заметьте, что мы поменяли порядок дифференцирования и интегрирования. Подставив (1-8) в данное соотношение, получим

$$X = -G \iiint_v \frac{x - \xi}{l^3} \rho dv. \quad (1-16)$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для Y и Z .

Потенциал V непрерывен во всем пространстве и стремится к нулю на бесконечности, как $1/l$ при $l \rightarrow \infty$. Это можно объяснить тем, что на очень больших расстояниях l твердое тело ведет себя приближенно как материальная точка. В результате его притяжение может быть приближенно описано соотношением (1-6). Так, в небесной механике планеты обычно считаются материальными точками.

Первые производные V , то есть компоненты вектора силы, также непрерывны во всем пространстве в то время, как некоторые из вторых производных

терпят разрыв в точках, где плотность меняется скачкообразно. Это очевидно, поскольку потенциал V удовлетворяет *уравнению Пуассона*

$$\Delta V = -4\pi G \rho, \quad (1-17)$$

где

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (1-18)$$

Символ Δ , называемый *оператором Лапласа*, имеет форму

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1-19)$$

Из (1-17) и (1-18) мы видим, что по крайней мере одна из вторых производных V должна иметь разрыв там же, где и ρ .

В пустом пространстве, окружающем притягивающие тела, плотность ρ равна нулю, и выражение (1-17) принимает вид

$$\Delta V = 0. \quad (1-20)$$

Это — *уравнение Лапласа*. Его решения называются *гармоническими функциями*. Таким образом, гравитационный потенциал является гармонической функцией вне притягивающих тел, но не внутри них: внутри он удовлетворяет уравнению Пуассона.

1.3 Гармонические функции

Ранее мы определили гармонические функции как решения уравнения Лапласа

$$\Delta V = 0. \quad (1-21)$$

Точнее, функция называется *гармонической в области v* , если она удовлетворяет уравнению Лапласа в каждой точке, принадлежащей v . Кроме того, если область v является внешней по отношению к некоторой замкнутой поверхности S , то гармоническая функция должна стремиться к нулю на бесконечности, как $1/l$ при $l \rightarrow \infty$. Можно показать, что *любая гармоническая функция является аналитической* (в области, где она удовлетворяет уравнению Лапласа), то есть она непрерывна, имеет непрерывные производные любого порядка и может быть разложена в сходящийся ряд Тейлора.

Простейшая гармоническая функция — обратное расстояние

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (1-22)$$

между двумя точками $P_0(\xi, \eta, \zeta)$ и $P(x, y, z)$. Это потенциал материальной точки с массой $m = 1/G$, расположенной в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$; сравните (1-5) и (1-6).

Можно легко показать, что функция $1/l$ является гармонической. Запишем следующие частные производные по x, y, z в виде (1-8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \right) &= -\frac{x - \xi}{l^3}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \right) &= -\frac{y - \eta}{l^3}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{l} \right) &= -\frac{z - \zeta}{l^3}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{l} \right) &= \frac{-l^2 + 3(x - \xi)^2}{l^3}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{l} \right) &= \frac{-l^2 + 3(y - \eta)^2}{l^3}, & & \\ & & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{l} \right) &= \frac{-l^2 + 3(z - \zeta)^2}{l^3}. & & \end{aligned} \quad (1-23)$$

Сложив вторые производные и вспомнив определение оператора Δ , получим

$$\Delta \left(\frac{1}{l} \right) = 0, \quad (1-24)$$

то есть функция $1/l$ – гармоническая.

Точка $P_0(\xi, \eta, \zeta)$, в которой l равно нулю и $\lim_{l \rightarrow 0} 1/l = \infty$, – единственная точка, где дифференцирование не применимо; функция $1/l$ в этой точке не является гармонической.

Понятно, что потенциал (1-6) произвольной материальной точки с массой m – также гармоническая функция во всех точках, кроме $P_0(\xi, \eta, \zeta)$, так как равенство (1-24) сохраняется, если обе его части умножить на Gm .

Не только потенциал материальной точки, но и любой другой гравитационный потенциал представляет собой гармоническую функцию вне притягивающих тел. Рассмотрим потенциал твердого тела (1-12). Помня порядок дифференцирования и интегрирования, получим

$$\Delta V = G \Delta \left[\iiint_v \frac{\rho}{l} dv \right] = G \iiint_v \rho \Delta \left(\frac{1}{l} \right) dv = 0. \quad (1-25)$$

Таким образом, потенциал твердого тела – гармоническая функция в любой точке $P(x, y, z)$, находящейся вне притягивающих тел.

Если P находится внутри притягивающих тел, то производная не существует, поскольку $1/l$ стремится к бесконечности для элементарной массы $dm(\xi, \eta, \zeta)$, совпадающей с точкой $P(x, y, z)$, и равенство (1-24) неприменимо. По этой причине потенциал твердого тела не является гармоническим внутри этого тела, а удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона (1-17).

1.4 Уравнение Лапласа в сферических координатах

Самые важные гармонические функции - это сферические гармоники. Для их определения введем сферические координаты: r (радиус-вектор; заметим, что это стандартный термин, хотя r и не соответствует общепринятому понятию вектора), ϑ (полярное расстояние), λ (геоцентрическая долгота), см. рисунок 1.3.

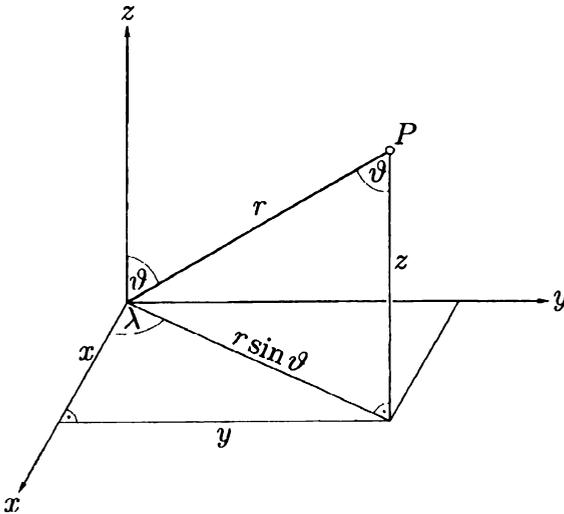


Рис. 1.3: Сферические и прямоугольные координаты

Сферические координаты связаны с прямоугольными x , y , z соотношениями

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \lambda, \\y &= r \sin \vartheta \sin \lambda, \\z &= r \cos \vartheta;\end{aligned}\tag{1 26}$$

и обратно

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \vartheta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \lambda &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{1 27}$$

Чтобы получить уравнение Лапласа в сферических координатах, мы определим сначала дифференциал дуги ds в этих координатах. С этой целью введем

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (1 \cdot 28)$$

Продифференцировав (1 26) и подставив в формулу элементарного расстояния

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1 \cdot 29)$$

получим

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\lambda^2. \quad (1 \cdot 30)$$

Мы могли бы получить эту известную формулу проще, путем геометрических выкладок, но использованный здесь подход более общий и применим также к эллипсоидальным координатам.

В (1 30) не входят выражения $dr d\vartheta$, $dr d\lambda$ и $d\vartheta d\lambda$. Это отражает очевидный факт, что сферические координаты являются ортогональными: сферы $r = \text{const}$, конусы $\vartheta = \text{const}$ и плоскости $\lambda = \text{const}$ пересекают друг друга под прямым углом.

В общем виде дифференциал дуги в произвольных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 определяется соотношением

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \quad (1 \cdot 31)$$

Можно показать, что оператор Лапласа в этих координатах выглядит следующим образом:

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (1 \cdot 32)$$

Для сферических координат имеем $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \lambda$. Сравнив (1 30) и (1 31), мы увидим, что

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \vartheta. \quad (1 \cdot 33)$$

Подставив эти соотношения в (1 32), получим

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}. \quad (1 \cdot 34)$$

Проведя дифференцирование, найдем

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1-35)$$

Это и есть *уравнение Лапласа в сферических координатах*. Другое выражение можно получить, умножив обе части уравнения на r^2 :

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1-36)$$

Эта форма несколько удобнее для последующего изложения.

1.5 Сферические и шаровые функции

Попытаемся решить уравнение Лапласа (1-35) или (1-36), разделяя переменные r , ϑ , λ и используя замену

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f(r) Y(\vartheta, \lambda), \quad (1-37)$$

где f – некоторая функция от r , а Y зависит только от ϑ и λ . Подставив это в (1-36) и поделив затем на fY , получим

$$\frac{1}{f} (r^2 f'' + 2r f') = -\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right), \quad (1-38)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу функции (в данном случае по r). Поскольку левая часть зависит только от r , а правая часть – только от ϑ и λ , то обе части должны быть постоянными. Поэтому мы можем разбить данное уравнение на два:

$$r^2 f''(r) + 2r f'(r) - n(n+1) f(r) = 0 \quad (1-39)$$

и

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1) Y = 0; \quad (1-40)$$

здесь $n(n+1)$ является константой.

Решениями (1-39) служат функции

$$f(r) = r^n \quad \text{и} \quad f(r) = r^{-(n+1)}, \quad (1-41)$$

что можно проверить подстановкой. Обозначив все еще неизвестные решения (1-40) как $Y_n(\vartheta, \lambda)$, мы увидим, что решениями уравнения Лапласа (1-35) являются функции вида

$$V = r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad \text{и} \quad V = \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}. \quad (1-42)$$

Эти функции называются *пространственными сферическими*, или *шаровыми функциями*, а функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ известны как *поверхностные сферические функции* (Лапласа). И те и другие часто называют просто *сферическими функциями*; о каких именно сферических функциях идет речь, обычно бывает ясно из контекста.

Заметим, что n – не произвольная константа. Как мы увидим позднее, n должно быть целым числом $0, 1, 2, \dots$. Если мы имеем дело с линейным дифференциальным уравнением, и мы знаем некоторые его решения, то, как известно, сумма этих решений также является решением данного уравнения (это справедливо для *всех* систем линейных уравнений!). Поэтому можно утверждать, что

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad \text{и} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \quad (1.43)$$

также являются решениями уравнения Лапласа $\Delta V = 0$, то есть являются гармоническими функциями. Важно, что *любая* гармоническая функция с некоторыми ограничениями – может быть выражена в одной из форм (1.43).

1.6 Поверхностные сферические функции

Теперь мы должны определить сферические функции Лапласа $Y_n(\vartheta, \lambda)$. Попробуем решить уравнение (1.40) с помощью замены

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = g(\vartheta) h(\lambda), \quad (1.44)$$

где каждая из функций g и h зависит только от одной переменной. Осуществив подстановку в (1.40) и умножив на $\sin^2 \vartheta / g h$, найдем

$$\frac{\sin \vartheta}{g} [\sin \vartheta g'' + \cos \vartheta g' + n(n+1) \sin \vartheta g] = -\frac{h''}{h}, \quad (1.45)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу: по ϑ для g и по λ для h . Левая часть уравнения – функция ϑ , правая часть – функция λ . Поэтому опять обе части уравнения должны быть константами; обозначим эту константу как m^2 . Таким образом, уравнение в частных производных (1.40) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения для функций $g(\vartheta)$ и $h(\lambda)$:

$$\sin \vartheta g''(\vartheta) + \cos \vartheta g'(\vartheta) + \left[n(n+1) \sin \vartheta - \frac{m^2}{\sin \vartheta} \right] g(\vartheta) = 0; \quad (1.46)$$

$$h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) = 0. \quad (1.47)$$

Решениями уравнения (1 47) являются функции

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \quad \text{и} \quad h(\lambda) = \sin m\lambda, \quad (1-48)$$

в чем можно убедиться путем подстановки. Уравнение (1 46) – дифференциальное уравнение Лежандра – более сложное. Можно показать, что его решения имеют физический смысл, только если n и m – целые числа $0, 1, 2, \dots$, и при этом m меньше или равно n . Решением (1 46) служит функция Лежандра $P_{nm}(\cos \vartheta)$, которая будет подробнее рассмотрена в следующем разделе. Следовательно,

$$g(\vartheta) = P_{nm}(\cos \vartheta), \quad (1 49)$$

и функции

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \quad \text{и} \quad Y_n(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \quad (1 50)$$

являются решениями дифференциального уравнения (1 40) для сферических функций Лапласа.

Поскольку это уравнение линейно, любая линейная комбинация решений (1 50) также будет решением. Такая линейная комбинация в общем виде записывается как

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda], \quad (1 51)$$

где a_{nm} и b_{nm} – произвольные константы. Это и есть общее выражение для сферических функций $Y_n(\vartheta, \lambda)$.

Подставив это соотношение в уравнения (1 43), обнаружим, что функции вида

$$V_i(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda], \quad (1 52)$$

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda] \quad (1 53)$$

являются решениями уравнения Лапласа $\Delta V = 0$, то есть являются функциями гармоническими. Более того, эти решения весьма общие: любая функция, являющаяся гармонической внутри некоторой сферы, может быть разложена в ряд (1 52), где индекс i означает "внутренний", а любая функция, являющаяся гармонической снаружи некоторой сферы (например, гравитационный потенциал Земли), может быть разложена в ряд (1 53), где индекс e означает "внешний". Это показывает, как сферические функции могут использоваться в геодезии.

1.7 Функции Лежандра

В предыдущем разделе мы ввели функции Лежандра $P_{nm}(\cos \vartheta)$ как решения дифференциального уравнения Лежандра (1-46). Индекс n обозначает *степень*, а индекс m — *порядок* функции P_{nm} .

Удобно преобразовать дифференциальное уравнение Лежандра (1-46) с помощью замены

$$t = \cos \vartheta. \quad (1-54)$$

Чтобы избежать путаницы, мы будем использовать черту над g для обозначения ее как функции t . Тогда

$$\begin{aligned} g(\vartheta) &= \bar{g}(t), \\ g'(\vartheta) &= \frac{dg}{d\vartheta} = \frac{dg}{dt} \frac{dt}{d\vartheta} = -\bar{g}'(t) \sin \vartheta, \\ g''(\vartheta) &= \bar{g}''(t) \sin^2 \vartheta - \bar{g}'(t) \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1-55)$$

Подставив эти соотношения в (1-46), поделив на $\sin \vartheta$, и затем, произведя замену $\sin^2 \vartheta = 1 - t^2$, получим

$$(1 - t^2) \bar{g}''(t) - 2t \bar{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - t^2} \right] \bar{g}(t) = 0. \quad (1-56)$$

Функция Лежандра $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$, которая определяется выражением

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n, \quad (1-57)$$

удовлетворяет условию (1-56). Не считая множителя $(1 - t^2)^{m/2} = \sin^m \vartheta$ и константы, функция P_{nm} — это производная порядка $(n+m)$ полинома $(t^2 - 1)^n$, и может быть соответственно вычислена. Например,

$$P_{11}(t) = \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{2 \cdot 1} \frac{d^2}{dt^2} (t^2 - 1) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - t^2} \cdot 2 = \sqrt{1 - t^2} = \sin \vartheta. \quad (1-58)$$

Особенно важен случай, когда $m = 0$. Функции $P_{n0}(t)$ часто обозначают просто как $P_n(t)$. Тогда (1-57) даст нам

$$P_n(t) = P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (1-59)$$

Поскольку $m = 0$, квадратный корень отсутствует, то есть отсутствует $\sin \vartheta$. Следовательно, $P_n(t)$ представляют собой простые полиномы от переменной

t . Их называют *полиномами Лежандра*. Приведем выражения полиномов Лежандра для степеней от $n = 0$ до $n = 5$:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \\ P_1(t) &= t, & P_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}, \\ P_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, & P_5(t) &= \frac{63}{8}t^5 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{15}{8}t. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Напомним, что

$$t = \cos \vartheta. \quad (1.61)$$

Полиномы могут быть получены с помощью (1.59) или проще — по *рекуррентной формуле*

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n}P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n}tP_{n-1}(t). \quad (1.62)$$

Таким образом, P_2 можно вычислить, зная P_0 и P_1 ; P_3 можно вычислить, зная P_1 и P_2 , и т.д. Графики полиномов Лежандра показаны на рисунке 1.4.

Известно, что степени $\cos \vartheta$ могут быть выражены через косинусы кратных ϑ , к примеру,

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} \cos 2\vartheta + \frac{1}{2}, \quad \cos^3 \vartheta = \frac{1}{4} \cos 3\vartheta + \frac{3}{4} \cos \vartheta. \quad (1.63)$$

Следовательно, мы можем так же выразить $P_n(\cos \vartheta)$, получив при этом

$$\begin{aligned} P_2(\cos \vartheta) &= \frac{3}{4} \cos 2\vartheta + \frac{1}{4}, \\ P_3(\cos \vartheta) &= \frac{5}{8} \cos 3\vartheta + \frac{3}{8} \cos \vartheta, \\ P_4(\cos \vartheta) &= \frac{35}{64} \cos 4\vartheta + \frac{5}{16} \cos 2\vartheta + \frac{9}{64}, \\ P_5(\cos \vartheta) &= \frac{63}{128} \cos 5\vartheta + \frac{35}{128} \cos 3\vartheta + \frac{15}{64} \cos \vartheta, \\ &= \dots \end{aligned} \quad (1.64)$$

Если порядок m не равен нулю (т.е. $m = 1, 2, \dots, n$), то функции Лежандра $P_{nm}(\cos \vartheta)$ называются *присоединенными функциями Лежандра*. Они могут быть сведены к полиномам Лежандра с помощью уравнения

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad (1.65)$$

которое следует из (1.57) и (1.59). Таким образом, присоединенные функции Лежандра выражаются через полиномы Лежандра той же степени n . Приведем некоторые P_{nm} , полагая $t = \cos \vartheta$ и $\sqrt{1-t^2} = \sin \vartheta$:

$$\begin{aligned}
 P_{11}(\cos \vartheta) &= \sin \vartheta, & P_{31}(\cos \vartheta) &= \sin \vartheta \left(\frac{15}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{3}{2} \right), \\
 P_{21}(\cos \vartheta) &= 3 \sin \vartheta \cos \vartheta, & P_{32}(\cos \vartheta) &= 15 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \\
 P_{22}(\cos \vartheta) &= 3 \sin^2 \vartheta, & P_{33}(\cos \vartheta) &= 15 \sin^3 \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{1.66}$$

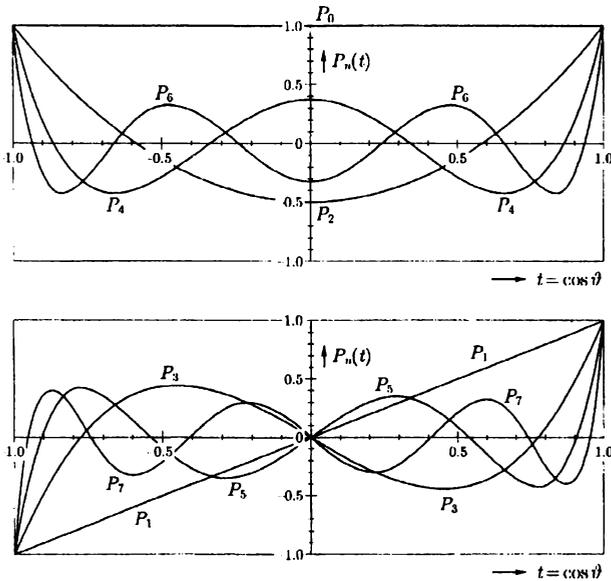


Рис. 1.4: Полиномы Лежандра как функции $t = \cos \vartheta$: при четном n (вверху) и при нечетном n (внизу)

Приведем также явную формулу для любой функции Лежандра (полиномиальной или присоединенной):

$$P_{nm}(t) = 2^{-n} (1-t^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-m-2k)!} t^{n-m-2k}. \tag{1.67}$$

Здесь r — наибольшее целое $\leq (n-m)/2$, то есть r принимает значение $(n-m)/2$ или $(n-m-1)/2$ в зависимости от того, какое из чисел целое. Эта формула удобна для написания программ.

Так как эта полезная формула редко встречается в литературе, мы приводим ее довольно простой вывод. Необходимые сведения по факториалам можно найти в любом математическом справочнике. Бином Ньютона даст нам

$$(t^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{2n-2k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} t^{2n-2k}. \quad (1.68)$$

Поэтому (1.57) принимает вид

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n} (1-t^2)^{n/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^{2n-2k}), \quad (1.69)$$

$n!$ сокращается. Производная порядка r от t^s имеет вид:

$$\frac{d^r}{dt^r} (t^s) = s(s-1) \cdots (s-r+1) t^{s-r} = \frac{s!}{(s-r)!} t^{s-r}. \quad (1.70)$$

Полагая $r = n+m$ и $s = 2n-2k$, получаем

$$\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-m-2k)!} t^{n-m-2k}. \quad (1.71)$$

Подставив этот результат в приведенное выше выражение для $P_{nm}(t)$ и учитывая, что наименьшая возможная степень t — это либо t , либо $t^0 = 1$, получим (1.67).

Сферические функции — это функции Лежандра, помноженные на $\cos m\lambda$ или на $\sin m\lambda$:

$$\begin{aligned} \text{степень } 0 & P_0(\cos \vartheta); \\ \text{степень } 1 & P_1(\cos \vartheta), \\ & P_{11}(\cos \vartheta) \cos \lambda, \quad P_{11}(\cos \vartheta) \sin \lambda; \\ \text{степень } 2 & P_2(\cos \vartheta), \\ & P_{21}(\cos \vartheta) \cos \lambda, \quad P_{21}(\cos \vartheta) \sin \lambda; \\ & P_{22}(\cos \vartheta) \cos 2\lambda, \quad P_{22}(\cos \vartheta) \sin 2\lambda; \end{aligned} \quad (1.72)$$

и так далее.

Полезно геометрическое представление сферических функций. Функции порядка $m = 0$, то есть полиномы Лежандра, являются многочленами степени n переменной t и, следовательно, имеют n корней. Все эти n корней действительны и расположены на отрезке $-1 \leq t \leq +1$, то есть, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ (рис. 1.4).

Таким образом, сферические функции порядка $m = 0$ меняют свой знак n раз на этом промежутке; кроме того, они не зависят от λ . Их геометрическое представление дано на рис. 1.5 а (на примере полинома $P_6(\cos\vartheta)$ 6-ой степени). Так как они делят сферу на зоны, то их еще называют *зональными сферическими гармониками*.

Присоединенные функции Лежандра меняют свой знак $n - m$ раз на промежутке $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Функции $\cos m\lambda$ и $\sin m\lambda$ имеют $2m$ корней в интервале $0 \leq \lambda < 2\pi$. Таким образом, геометрическое представление сферических функций порядка $m \neq 0$ имеет вид, подобный приведенному на рис. 1.5 б. Они делят сферу на сферические четырехугольники и треугольники, в которых попеременно меняют знак (нечто вроде шахматной доски), и называются *тессеральными сферическими гармониками* ("тессера" означает квадрат или прямоугольник, или черепица). В частном случае, при $n = m$ они превращаются в функции, делящие сферу на положительные и отрицательные секторы, и в этом случае носят название *секторных сферических гармоник* (см. рис. 1.5 в).

1.8 Функции Лежандра второго рода

Функция Лежандра $P_{nm}(t)$ – не единственное решение дифференциального уравнения Лежандра (1 56). Существует полностью отличная от нее функция, которая также удовлетворяет этому уравнению. Она называется функцией Лежандра второго рода степени n и порядка m и обозначается $Q_{nm}(t)$.

Хотя функции $Q_{nm}(t)$ обладают совсем иной природой, чем $P_{nm}(t)$, они удовлетворяют весьма схожим соотношениям.

"Зональные" функции

$$Q_n(t) \equiv Q_{n0}(t) \quad (1\ 73)$$

определяются формулой

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \frac{1+t}{1-t} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(t) P_{n-k}(t), \quad (1\ 74)$$

а остальные – формулой

$$Q_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(t)}{dt^m}. \quad (1\ 75)$$

Соотношение (1 75) полностью аналогично (1 65); более того, функции $Q_n(t)$, так же как и $P_n(t)$, удовлетворяют рекуррентной формуле (1 62).

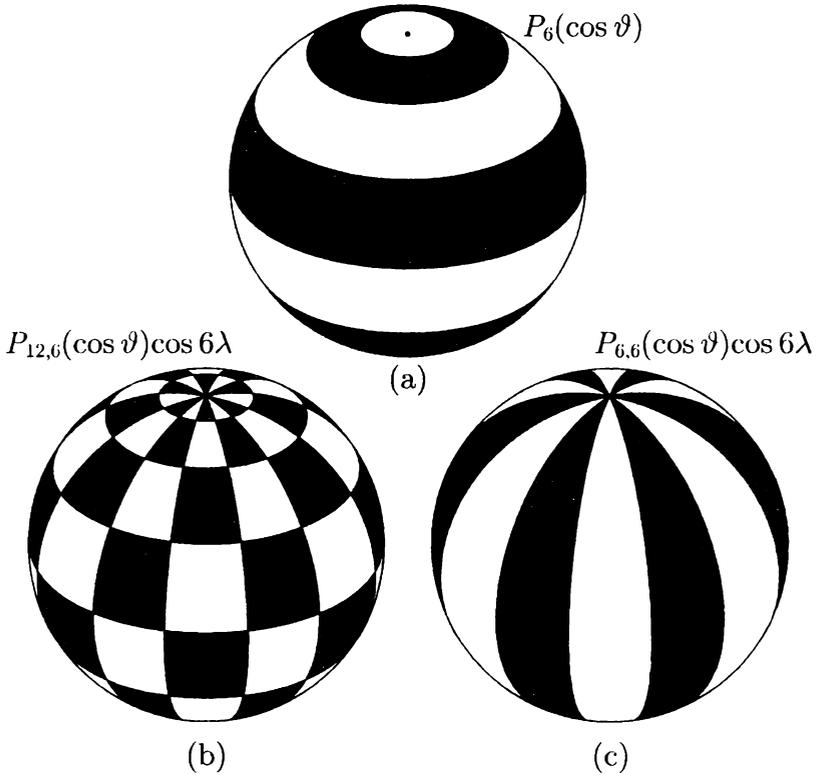


Рис. 1.5: Типы сферических гармоник: (а) зональная, (б) тессеральная, (с) секториальная

Из формулы (1.74) найдем несколько первых степеней функции $Q_n(t)$

$$Q_0(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \operatorname{ar th} t.$$

$$Q_1(t) = \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} - 1 = t \operatorname{ar th} t - 1. \quad (1.76)$$

$$Q_2(t) = \left(\frac{3}{4} t^2 - \frac{1}{4} \right) \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{3}{2} t = \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \operatorname{ar th} t - \frac{3}{2} t.$$

Эти формулы и рис. 1.6 показывают, что функции Q_{nm} действительно совершенно отличны от функций P_{nm} . При $t = \pm 1$ (т.е. $\vartheta = 0$ или π) Q_{nm} обращает-

тся в $\pm\infty$; из этого видно, что $P_{nm}(\cos\vartheta)$ невозможно заменить на $Q_{nm}(\cos\vartheta)$ (ϑ означает полярное расстояние), поскольку гармонические функции должны быть регулярными.

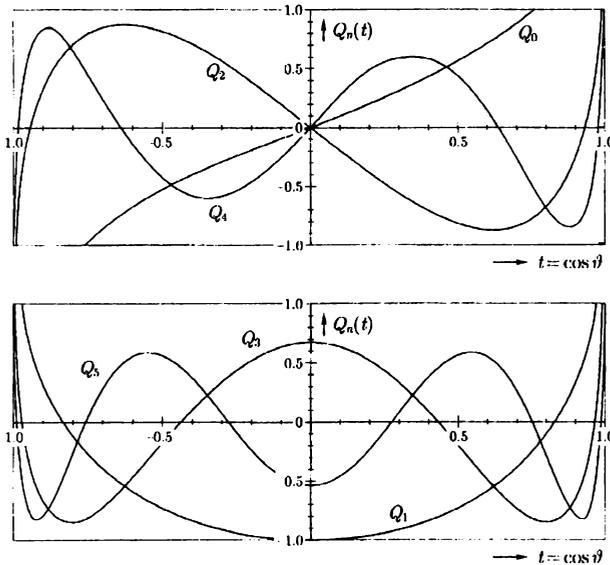


Рис. 1.6: Функции Лежандра второго рода: n четное (вверху) и n нечетное (внизу)

Тем не менее, мы еще встретим их в теории эллипсоидальных функций (раздел 1.16), которые находят применение в теории нормального гравитационного поля Земли (раздел 2.7). Для этой цели нам понадобятся функции Лежандра второго рода от комплексной переменной. Если z – комплексная переменная, то соотношение (1.74) принимает вид

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{n-k}(z), \quad (1.77)$$

где полиномы Лежандра $P_n(z)$ определяются теми же формулами, что и в случае действительной переменной t . Таким образом, в формуле (1.74) замещается только

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \operatorname{ar th} t \quad (1.78)$$

на

$$\frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} = ar \operatorname{cth} z. \quad (1.79)$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} = ar \operatorname{cth} z, \\ Q_1(z) &= \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1 = z ar \operatorname{cth} z - 1, \\ Q_2(z) &= \left(\frac{3}{4} z^2 - \frac{1}{4} \right) \ln \frac{z+1}{z-1} - \frac{3}{2} z = \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2} \right) ar \operatorname{cth} z - \frac{3}{2} z. \end{aligned} \quad (1.80)$$

1.9 Разложение по сферическим функциям и понятие ортогональности

В (1.52) и (1.53) мы разложили *гармонические* функции в пространстве в ряд по шаровым функциям. Таким же образом, *произвольная* (в очень широком смысле) функция $f(\vartheta, \lambda)$ на поверхности сферы может быть разложена в ряд по сферическим функциям:

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + b_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)]; \quad (1.81)$$

здесь мы ввели обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda, \\ \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Символами a_{nm} и b_{nm} обозначены постоянные коэффициенты, которые мы сейчас определим. Существенным для этой цели является свойство *ортогональности*. Это замечательное свойство заключается в том, что интеграл по единичной сфере от произведения двух *различных* функций \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{S}_{nm} равен нулю:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \mathcal{R}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \mathcal{S}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \mathcal{S}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{если хотя бы } s \neq n \text{ или } r \neq m; \\ &\text{в любом случае.} \end{aligned} \quad (1.83)$$

Если функции \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{S}_{nm} совпадают, то

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} [\mathcal{R}_{n0}(\vartheta, \lambda)]^2 d\sigma &= \frac{4\pi}{2n+1}; \\ \iint_{\sigma} [\mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda)]^2 d\sigma &= \iint_{\sigma} [\mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (1\ 84)$$

Заметим, что \mathcal{S}_{n0} отсутствует, так как $\sin 0\lambda = 0$. В этих формулах мы использовали обозначение

$$\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \quad (1\ 85)$$

для интеграла по единичной сфере. Выражение

$$d\sigma = \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \quad (1\ 86)$$

представляет собой дифференциал площади поверхности сферы.

Теперь мы обратимся к определению коэффициентов a_{nm} и b_{nm} из (1 81). Умножая обе части равенства на некоторую сферическую функцию $\mathcal{R}_{sr}(\vartheta, \lambda)$ и интегрируя по поверхности единичной сферы, получим

$$\iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \mathcal{R}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma = a_{sr} \iint_{\sigma} [\mathcal{R}_{sr}(\vartheta, \lambda)]^2 d\sigma, \quad (1\ 87)$$

так как в двойном интеграле в правой части все члены, кроме одного с $n = s$, $m = r$, исчезнут в силу свойства ортогональности (1 83). Интеграл в правой части имеет значение, указанное в (1 84), так что a_{sr} определен. Аналогично, умножая (1-81) на $\mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)$ и интегрируя по единичной сфере, найдем b_{sr} . Результаты таковы:

$$\left. \begin{aligned} a_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) P_n(\cos \vartheta) d\sigma; \\ a_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma \\ b_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (m \neq 0). \quad (1\ 88)$$

Таким образом, коэффициенты a_{nm} и b_{nm} могут быть найдены путем интегрирования.

Заметим, что сферические функции Лапласа $Y_n(\vartheta, \lambda)$ в (1 81) могут быть найдены непосредственно по формуле

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda' : \quad (1-89)$$

здесь ψ — сферическое расстояние между точкой P , представленной координатами ϑ, λ , и точкой P' с координатами ϑ', λ' (рис. 1.7)), такое, что

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (1-90)$$

После ознакомления с разделом 1.11 формула (1 89) может быть проверена непосредственным вычислением с использованием формулы сложения (1 105).

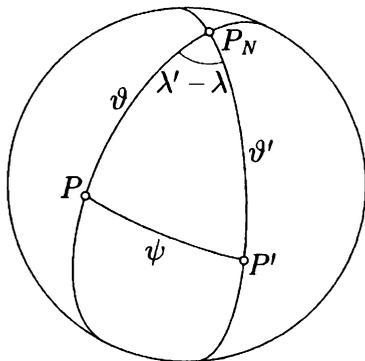


Рис. 1.7: Сферическое расстояние ψ

1.10 Полностью нормированные сферические функции

Формулы предыдущего параграфа для разложения функции в ряд по сферическим функциям не очень удобны в использовании. Взглянем на (1 84) и (1 88): они различны для $m = 0$ и $m \neq 0$ и, кроме того, довольно громоздки и трудны для запоминания.

В связи с этим было предложено обычные сферические функции \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{S}_{nm} , определяемые формулами (1 82) и (1 57), заменить другими, отличающимися постоянным коэффициентом и более удобными в использовании. В

дальнейшем мы будем рассматривать только *полностью нормированные* сферические функции, которые, по видимому, являются наиболее удобными и широко используемыми.

"Полностью нормированные" сферические функции являются просто "нормированными" в смысле теории действительных функций; мы вынуждены использовать это громоздкое выражение, потому что термин "нормированные сферические функции" уже был, к сожалению, применен к другим функциям, часто не являющимся "нормированными" в математическом смысле.

Мы обозначим полностью нормированные сферические функции через $\bar{\mathcal{R}}_{nm}$ и $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$; они определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_{n0}(\vartheta, \lambda) &= \sqrt{2n+1} \mathcal{R}_{n0}(\vartheta, \lambda) \equiv \sqrt{2n+1} P_n(\cos \vartheta); \\ \left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \sqrt{2(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \sqrt{2(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (1 \ 91)$$

Свойство ортогональности (1 83) остается верным для полностью нормированных функций, в то время, как формула (1 84) значительно упрощается и выглядит так:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{\mathcal{R}}_{nm}^2 d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{\mathcal{S}}_{nm}^2 d\sigma = 1. \quad (1 \ 92)$$

Это значит, что средний квадрат любой полностью нормированной сферической функции равен единице; среднее значение берется по поверхности сферы, то есть интеграл делится на площадь сферы 4π . Эта формула теперь верна для любого m , в том числе и для $m = 0$.

Если мы разложим произвольную функцию $f(\vartheta, \lambda)$ в ряд по полностью нормированным сферическим функциям, аналогично (1 81),

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda)], \quad (1 \ 93)$$

то коэффициенты \bar{a}_{nm} и \bar{b}_{nm} определяются просто:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{nm} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma, \\ \bar{b}_{nm} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma; \end{aligned} \quad (1 \ 94)$$

то есть коэффициенты суть среднее по сфере значение произведения функции $f(\vartheta, \lambda)$ на соответствующую сферическую функцию $\bar{\mathcal{R}}_{nm}$ или $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$.

Простота формул (1 92) и (1 94) составляет главное преимущество полностью нормированных сферических функций и делает их полезными во многих отношениях, хотя функции $\bar{\mathcal{R}}_{nm}$ и $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$ в (1 91) более сложны, чем обычные \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{S}_{nm} . Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda, \\ \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda,\end{aligned}\tag{1 95}$$

где

$$\bar{P}_{n0}(t) = \sqrt{2n+1} 2^{-n} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} t^{n-2k}\tag{1 96}$$

для $m = 0$, и

$$\begin{aligned}\bar{P}_{nm}(t) &= \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} 2^{-n} (1-t^2)^{m/2} \cdot \\ &\sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{n-m-2k}\end{aligned}\tag{1 97}$$

для $m \neq 0$. Это соответствует (1 67); здесь, как и в (1 67), r наибольшее целое $\leq (n-m)/2$.

Ниже указаны соотношения между коэффициентами \bar{a}_{nm} и b_{nm} для полностью нормированных сферических функций и коэффициентами a_{nm} и b_{nm} для обычных сферических функций, являющиеся обратными к тем, что приведены в (1 91):

$$\left. \begin{aligned}\bar{a}_{n0} &= \frac{a_{n0}}{\sqrt{2n+1}}; \\ \bar{a}_{nm} &= \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} a_{nm} \\ \bar{b}_{nm} &= \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} b_{nm}\end{aligned}\right\} (m \neq 0).\tag{1 98}$$

1.11 Разложение обратного расстояния в ряд по зональным гармоникам и формула сложения сферических функций

Расстояние l между двумя точками со сферическими координатами

$$P(r, \vartheta, \lambda), \quad P'(r', \vartheta', \lambda')\tag{1 99}$$

задается формулой

$$l^2 = r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \psi, \quad (1\ 100)$$

где ψ - угол между радиус векторами r и r' (рис. 1.8), так что из (1 90) получим

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (1\ 101)$$

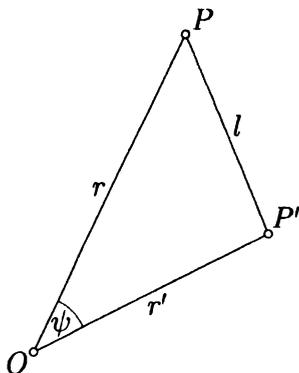


Рис. 1.8: Пространственное расстояние l

Полагая $r' < r$, можем записать

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r r' \cos \psi + r'^2}} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\alpha u + \alpha^2}}, \quad (1\ 102)$$

где мы приняли $\alpha = r'/r$ и $u = \cos \psi$. Если $r' < r$, то приведенная выше функция может быть разложена в степенной ряд относительно α . Примечательно, что коэффициентами при α^n служат обычные зональные гармоники, то есть полиномы Лежандра $P_n(u) = P_n(\cos \psi)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha u + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(u) = P_0(u) + \alpha P_1(u) + \alpha^2 P_2(u) + \dots \quad (1\ 103)$$

Отсюда получаем следующую важную формулу

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (1\ 104)$$

В этой формуле было бы желательно выразить $P_n(\cos \psi)$ через функции сферических координат ϑ, λ и ϑ', λ' , с которыми ψ связано соотношением (1 90).

Этого можно добиться с помощью формулы сложения

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \mathcal{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') + \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \mathcal{S}_{nm}(\vartheta', \lambda')]. \quad (1-105)$$

Подставив (1-105) в (1-104), получим

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} r'^n P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{\mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} r'^n \mathcal{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') + \frac{\mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} r'^n \mathcal{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') \right] \right\}. \quad (1-106)$$

Использование полностью нормированных сферических функций упростит эти формулы. Заменяя обычные сферические функции в (1-105) и (1-106) полностью нормированными (1-91), пайдем

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [\bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta', \lambda') + \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta', \lambda')]; \quad (1-107)$$

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} r'^n \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta', \lambda') + \frac{\bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} r'^n \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta', \lambda') \right]. \quad (1-108)$$

Последняя формула будет играть фундаментальную роль при разложении гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям.

1.12 Решение задачи Дирихле с помощью сферических функций и интеграл Пуассона

Определим задачу Дирихле, или первую краевую задачу теории потенциала, следующим образом: по произвольной функции, заданной на некоторой замкнутой поверхности S , требуется найти функцию V , гармоническую внутри или вне S и совпадающую с заданной функцией на поверхности S .

Если поверхность S - сфера, то задача Дирихле может быть решена с помощью сферических функций. Возьмем для начала сферу радиуса $r = 1$ и разложим функцию, заданную на поверхности этой сферы и обозначенную

$V(1, \vartheta, \lambda)$, в ряд по сферическим функциям (1 81):

$$V(1, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (1 109)$$

где $Y_n(\vartheta, \lambda)$ определены в (1 89). (Этот ряд сходится для широкого класса функций V .) Функции

$$V_i(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (1 110)$$

и

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \quad (1 111)$$

совпадают с функцией $V(1, \vartheta, \lambda)$ на единичной сфере. Ряд (1 109) сходится, и мы имеем при $r < 1$

$$r^n Y_n < Y_n, \quad (1 112)$$

при $r > 1$

$$\frac{Y_n}{r^{n+1}} < Y_n. \quad (1 113)$$

Следовательно, ряд (1 110) сходится при $r \leq 1$, а ряд (1-111) при $r \geq 1$: кроме того, оба ряда, как указывалось выше, представляют собой гармонические функции. Таким образом, мы видим, что решением задачи Дирихле являются функция $V_i(r, \vartheta, \lambda)$ внутри единичной сферы и функция $V_e(r, \vartheta, \lambda)$ вне единичной сферы.

Для сферы произвольного радиуса $r = R$ решение схожее. Разложим заданную функцию в ряд

$$V(R, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1 114)$$

Сферические функции Y_n определяются формулой

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} V(R, \vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \quad (1 115)$$

Тогда ряд

$$V_i(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (1 116)$$

является решением внутренней задачи Дирихле, а ряд

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (1 117)$$

решает внешнюю задачу Дирихле для сферы радиуса $r = R$.

Таким образом, мы видим, что задача Дирихле всегда может быть решена для сферы. Очевидно, что это тесно связано с возможностью разложения произвольной функции на сфере в ряд по сферическим функциям, а гармонической функции в пространстве – в ряд по шаровым функциям.

Красная задача Дирихле может быть решена не только для сферы, но и для любой достаточно гладкой граничной поверхности. Соответствующий пример приведен в разделе 1.16.

Разрешимость задачи Дирихле существенна для решения задачи Молодцовского (раздел 8.3). См. также Kellog (1929: Chap. XI).

Интеграл Пуассона

Укажем сейчас непосредственное решение задачи Дирихле. Мы рассмотрим только внешнюю задачу, поскольку она представляет больший интерес для в геодезии. Подставляя $Y_n(\vartheta, \lambda)$ из (1.89) в (1.117), получим

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} V(R, \vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \quad (1.118)$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} V(R, \vartheta', \lambda') \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \right] \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \quad (1.119)$$

Сумму в скобках легко вычислить. Обозначим пространственное расстояние между точками $P(r, \vartheta, \lambda)$ и $P'(R, \vartheta', \lambda')$ через l . Тогда, используя (1.104), получим

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (1.120)$$

Дифференцируя по r , имеем

$$-\frac{r - R \cos \psi}{l^3} = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} P_n(\cos \psi). \quad (1.121)$$

Умножая это соотношение на $-2Rr$, а выражение для $1/l$ – на $-R$, и затем складывая их, приходим к

$$\frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (1.122)$$

Правая часть представляет собой выражение, стоящее в скобках в (1.119). Подставляя её в (1.119), окончательно получаем, что

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{V(R, \vartheta', \lambda')}{l^3} \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda', \quad (1.123)$$

где

$$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}. \quad (1.124)$$

Это - *интеграл Пуассона*. Он представляет собой явное решение внешней задачи Дирихле для сферы и имеет много приложений в физической геодезии.

1.13 Другие краевые задачи

Имются и другие подобные краевые задачи. В *задаче Неймана*, или *второй краевой задаче теории потенциала*, вместо функции V задается ее нормальная производная $\partial V/\partial n$ на поверхности S . Нормальная производная - это производная по направлению внешней нормали n к поверхности S . В *третьей краевой задаче* задается линейная комбинация функции V и ее нормальной производной

$$hV + k \frac{\partial V}{\partial n} \quad (1.125)$$

на поверхности S .

Решения этих краевых задач легко находятся с помощью сферических функций. Мы рассмотрим только внешние задачи, так как они представляют наибольший интерес для геодезии.

В задаче Неймана мы разложим данные значения $\partial V/\partial n$ на сфере радиуса $r = R$ в ряд по сферическим функциям

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1.126)$$

Тогда гармоническая функция, являющаяся решением внешней задачи Неймана для сферы, имеет следующий вид

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = -R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n+1}. \quad (1.127)$$

Чтобы проверить это, продифференцируем (1.127) по r :

$$\frac{\partial V_e}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1.128)$$

Так как для сферы нормаль совпадает с радиус вектором, то

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{r=R} = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} \quad (1\ 129)$$

откуда видно, что (1 126) удовлетворяется.

Третья краевая задача представляет наибольший интерес для физической геодезии, поскольку определение высот геоида по аномалиям силы тяжести представляет собой как раз такую задачу. Чтобы решить эту задачу в общем случае, опять разложим функцию, определенную заданными краевыми значениями, в ряд по сферическим функциям

$$hV + k \frac{\partial V}{\partial n} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (1\ 130)$$

Гармоническая функция

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{h - (k/R)(n+1)} \quad (1\ 131)$$

решает внешнюю третью краевую задачу для сферы $r = R$. Непосредственная проверка проводится аналогично случаю второй краевой задачи (1 127).

При определении высот геоида константы h и k имеют следующие значения

$$h = -\frac{2}{R}, \quad k = -1; \quad (1\ 132)$$

таким образом, функция

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n-1} \quad (1\ 133)$$

решает *краевую задачу физической геодезии*.

В предыдущем параграфе мы видели, что первая краевая задача может быть решена непосредственно с помощью интеграла Пуассона. Подобные интегральные формулы существуют и для второй и третьей краевых задач. Интегральная формула, соответствующая решению (1 133) краевой задачи физической геодезии, называется *интегралом Стокса* и будет нами подробно рассмотрена в главе 2.

Замечание об обратных задачах

Краевые задачи определяют *внешний* потенциал Земли, где нет масс и потенциал, удовлетворяя уравнению Лапласа, является гармонической функцией. Задача определения потенциала внутри Земли носит совершенно иной

характер, так как Земля наполнена массами и внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, а не уравнению Лапласа, как мы видели в разделе 1.2. К сожалению, плотность ρ внутри Земли в общем случае неизвестна.

Чтобы оценить трудность этой задачи, рассмотрим интеграл Ньютона (1-12). Если бы внутренние массы были известны, мы с помощью этой формулы легко и непосредственно посчитали бы внутренний (и внешний) потенциал Земли. Определение потенциала по массам является "прямой" задачей. "Обратная" задача заключается в определении масс по потенциалу, то есть в решении интегрального уравнения Ньютона относительно плотности. Эта задача существенно труднее.

В действительности, невозможно однозначно определить по внешнему потенциалу порождающие его массы. Эта *обратная задача теории потенциала* не имеет единственного решения. Подобные обратные задачи часто возникают в геофизической разведке посредством гравитационных измерений: подземные массы предпологается определить по возмущениям гравитационного поля. Чтобы решить эту задачу, требуется дополнительная информация, которая может быть получена, например, на основании геологических изысканий или с помощью сейсмических измерений.

В настоящее время известно, что многие задачи геофизики и других наук, включая медицину (например, сейсмическая и медицинская томография), являются обратными. Мы не можем здесь заниматься этой интересной проблемой и лишь сошлемся на обширную литературу по этому вопросу, например, на книги Moritz (1995), Anger and Moritz (2003) или на интернет-страницу www.icas.tugraz.at/forschung/InverseProblems/AngerMoritz.html.

1.14 Радиальная производная гармонической функции

Для применения в дальнейшем к задачам, связанным с нахождением вертикального градиента силы тяжести, мы выведем интегральную формулу для производной вдоль радиус-вектора r произвольной гармонической функции. Такая функция (обозначим ее V) удовлетворяет интегралу Пуассона (1-123):

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{V(R, \vartheta', \lambda')}{l^3} \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \quad (1-134)$$

При нахождении радиальной производной $\partial V / \partial r$ заметим, что $V(R, \vartheta', \lambda')$ не зависит от r . Таким образом, достаточно продифференцировать $(r^2 - R^2)/l^3$, что даст

$$\frac{\partial V(r, \vartheta, \lambda)}{\partial r} = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} M(r, \vartheta) V(R, \vartheta', \lambda') \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda', \quad (1-135)$$

где

$$M(r, \psi) \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} \right) = \frac{1}{l^5} (5R^2 r - r^3 - Rr^2 \cos \psi - 3R^3 \cos \psi). \quad (1-136)$$

Составим соотношение (1-135) для гармонической функции вида

$$V_1(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R}{r}; \quad \frac{\partial V_1}{\partial r} = -\frac{R}{r^2}, \quad V_1(R, \vartheta', \lambda') = \frac{R}{R} = 1. \quad (1-137)$$

В результате имеем

$$-\frac{R}{r^2} = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} M(r, \psi) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \quad (1-138)$$

Умножая обе части последнего равенства на $V(r, \vartheta, \lambda)$ и вычитая затем из (1-135), получим

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{R}{r^2} V_P = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} M(r, \psi) (V - V_P) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda', \quad (1-139)$$

где

$$V_P = V(r, \vartheta, \lambda), \quad V = V(R, \vartheta', \lambda'). \quad (1-140)$$

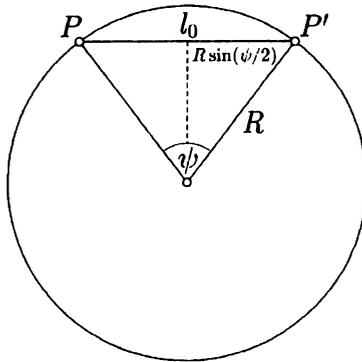


Рис. 1.9: Пространственное расстояние между двумя точками на сфере

Для того, чтобы найти радиальную производную на поверхности сферы радиуса R , мы должны положить $r = R$. Тогда l примет следующий вид

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}, \quad (1-141)$$

а функция M запишется в более простой форме

$$M(R, \psi) = \frac{1}{4R^2 \sin^3 \frac{\psi}{2}} = \frac{2R}{l_0^3}. \quad (1.142)$$

Если $\psi \rightarrow 0$, то $M(R, \psi) \rightarrow \infty$, и мы не можем применить непосредственно формулу (1.135) на поверхности сферы $r = R$. Однако, в преобразованном выражении (1.139) $(V - V_P) \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow 0$, и сингулярность M при $\psi \rightarrow 0$ будет нейтрализована (при условии, что V дважды дифференцируема по P). В результате мы получаем следующую формулу для производной:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{R} V_P + \frac{R^2}{2\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{V - V_P}{l_0^3} \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \quad (1.143)$$

Это соотношение выражает $\partial V / \partial r$ на сфере $r = R$ через значения V на этой сфере; то есть, теперь мы имеем

$$V_P = V(R, \vartheta, \lambda), \quad V = V(R, \vartheta', \lambda'). \quad (1.144)$$

Решение в терминах сферических функций

Мы можем записать V_P как

$$V_P = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1.145)$$

Дифференцирование дает

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1.146)$$

Для $r = R$ это выглядит так:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1.147)$$

Полученная формула эквивалентна (1.143), но выражена через сферические функции. Из нее можно получить интересное следствие. Переписывая (1.147) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{R} V_P - \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (1.148)$$

и сравнивая с (1.143), заметим, что

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{V - V_P}{l_0^3} \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda' = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (1.149)$$

Это соотношение полностью сформулировано в терминах величин, относящихся только к сферической поверхности. Более того, для любой функции, заданной на поверхности сферы, можно найти функцию, определенную во всем пространстве, гармоническую вне сферы и совпадающую с заданной функцией на поверхности сферы. Это -- то, что получается при решении внешней краевой задачи Дирихле. Из перечисленных фактов заключаем, что (1.149) верно для любой (произвольной в разумных пределах) функции V , определенной на поверхности сферы. Эти результаты будут использованы нами в разделе 2.20.

1.15 Уравнение Лапласа в эллипсоидально-гармонических координатах

Сферические функции используются в геодезии чаще других благодаря тому, что они сравнительно просты и Земля по форме близка к сфере. Но Земля больше похожа на эллипсоид вращения, и можно ожидать, что эллипсоидальные функции, которые определяются тем же способом, что и сферические, больше соответствуют нашим целям. В действительности, это лишь вопрос удобства, поскольку и сферические и эллипсоидальные функции могут быть использованы для любого притягивающего тела независимо от его формы. Так как эллипсоидальные функции имеют более сложную структуру, то они используются лишь в некоторых специальных случаях, которые, тем не менее, важны, например, в задачах, связанных с точным вычислением нормальной силы тяжести.

Введем *эллипсоидально-гармонические координаты* u, ϑ, λ (рис. 1.10). Рассмотрим точку P с координатами x, y, z в прямоугольной системе. Проведем эллипсоид вращения так, чтобы точка P лежала на его поверхности, центр находился в начале координат O , ось вращения совпадала с осью Oz , а линейный эксцентриситет имел постоянное значение E . Координата u -- малая полуось эллипсоида, ϑ -- дополнение до редуцированной широты β точки P относительно этого эллипсоида (см. рис. 1.10), то есть $\vartheta = 90^\circ - \beta$, а λ -- геоцентрическая долгота в обычном смысле. Следует заметить, что в сферических координатах ϑ -- это полярное расстояние, которое является ничем иным, как дополнением до геоцентрической широты, в то время как в эллипсоидально-гармонических координатах ϑ -- это дополнение до редуцированной широты, обозначаемой через β .

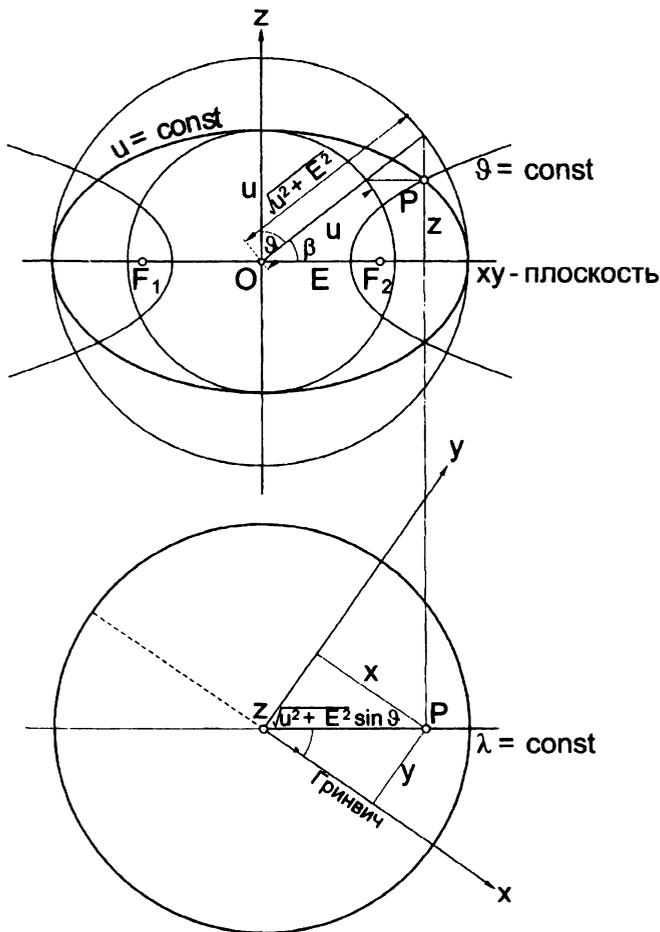


Рис. 1.10: Эллипсоидально-гармонические координаты: вид сверху (вверху) и вид сверху (внизу)

Эллипсоидально гармонические координаты u, ϑ, λ связаны с декартовыми

x, y, z следующими соотношениями

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda, \\y &= \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda, \\z &= u \cos \vartheta,\end{aligned}\quad (1-150)$$

что можно увидеть из рис. 1.10, если учесть, что большая полуось эллипсоида, проходящего через точку P , равна $\sqrt{u^2 + E^2}$. Так как $\vartheta = 90^\circ - \beta$, то мы можем записать и так:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda, \\y &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda, \\z &= u \sin \beta.\end{aligned}\quad (1-151)$$

Приимая $u = \text{const}$, получим уравнение

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + E^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1, \quad (1-152)$$

описывающее эллипсоид вращения. При $\vartheta = \text{const}$ получим однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2 + y^2}{E^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{z^2}{E^2 \cos^2 \vartheta} = 1, \quad (1-153)$$

а при $\lambda = \text{const}$ – меридиональную плоскость

$$y = x \operatorname{tg} \lambda. \quad (1-154)$$

Постоянное фокусное расстояние E (то есть расстояние от начала координат O до одного из фокусов F_1 или F_2) – одно и то же для всех эллипсоидов $u = \text{const}$, и характеризует рассматриваемую систему координат. При $E = 0$ получаем обычные сферические координаты $u = r$, ϑ , λ как предельный случай.

Для нахождения дифференциала дуги ds в эллипсоидально-гармонических координатах действуем так же, как и в сферических (формула (1-30)):

$$ds^2 = \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{u^2 + E^2} du^2 + (u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + (u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta d\lambda^2. \quad (1-155)$$

Координатная система u, ϑ, λ ортогональна: произведения $du d\vartheta$ и т.п. отсутствуют в формуле.

Полагая в (1-31) $u = q_1$, $\vartheta = q_2$, $\lambda = q_3$, приходим к соотношениям

$$h_1^2 = \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{u^2 + E^2}, \quad h_2^2 = u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta, \quad h_3^2 = (u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta. \quad (1-156)$$

Подставляя их в (1 32), имеем

$$\Delta V = \frac{1}{(u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[(u^2 + E^2) \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right] \right\}. \quad (1 157)$$

После дифференцирования и сокращения на $\sin \vartheta$, получаем

$$\Delta V \equiv \frac{1}{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta} \left[(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right] = 0. \quad (1 158)$$

Это – уравнение Лапласа в эллипсоидально-гармонических координатах.

Опуская $(u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta)^{-1}$, приходим к другой записи этого уравнения

$$(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1 159)$$

Предельный случай ($E \rightarrow 0$) дает выражения (1 35) и (1 36) в сферических координатах.

1.16 Эллипсоидальные функции

Чтобы решить уравнение (1-158) (или (1 159)), мы воспользуемся методом, аналогичным тому, который применялся для решения соответствующего уравнения (1 36) в сферических координатах. Коротко напомним его.

С помощью подстановки

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f(r) g(\vartheta) h(\lambda), \quad (1 160)$$

мы разделяли переменные r, ϑ, λ . В результате исходное дифференциальное уравнение в частных производных (1 36) распалось на три обыкновенных дифференциальных уравнения (1 39), (1 46) и (1-47).

Чтобы решить уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах (1 159), воспользуемся соответствующей подстановкой

$$V(u, \vartheta, \lambda) = f(u) g(\vartheta) h(\lambda). \quad (1 161)$$

Подставив (1 161) и разделив на $f g h$, получим

$$\frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{1}{g} (g'' + g' \operatorname{ctg} \vartheta) + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} \frac{h''}{h} = 0. \quad (1 162)$$

Переменная λ присутствует только в частном h''/h , которое, следовательно, должно быть константой. Чтобы это стало очевидным, перепишем уравнение в таком виде

$$-\frac{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta}{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta} \left\{ \frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{1}{g} (g'' + g' \operatorname{ctg} \vartheta) \right\} = \frac{h''}{h}. \quad (1-163)$$

Левая часть зависит только от u и ϑ , правая - только от λ . Эти две части могут быть тождественно равны друг другу только в том случае, когда они равны одной и той же константе. Следовательно,

$$\frac{h''}{h} = -m^2. \quad (1-164)$$

Множитель, стоящий при h''/h , можно разложить так:

$$\frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2}. \quad (1-165)$$

Подставляя (1-164) и (1-165) в (1-163) и собирая вместе функции одной и той же переменной, получим

$$\frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = -\frac{1}{g} (g'' + g' \operatorname{ctg} \vartheta) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}. \quad (1-166)$$

В правой и левой частях этого равенства стоят функции различных независимых переменных: следовательно, они должны быть равны одной и той же константе. Наконец, обозначая упомянутую константу через $n(n+1)$, получим три обыкновенных дифференциальных уравнения, на которые распадается исходное уравнение в частных производных (1-159) при использовании подстановки (1-161):

$$(u^2 + E^2) f''(u) + 2u f'(u) - \left[n(n+1) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 \right] f(u) = 0; \quad (1-167)$$

$$\sin \vartheta g''(\vartheta) + \cos \vartheta g'(\vartheta) + \left[n(n+1) \sin \vartheta - \frac{m^2}{\sin \vartheta} \right] g(\vartheta) = 0; \quad (1-168)$$

$$h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) = 0. \quad (1-169)$$

Второе и третье уравнения - те же, что и в случае сферических координат (1-159) и (1-161); отличается только первое. Подстановки

$$\tau = i \frac{u}{E} \quad (\text{где } i = \sqrt{-1}) \quad \text{и} \quad t = \cos \vartheta \quad (1-170)$$

преобразуют первое и второе уравнения к виду

$$\begin{aligned} (1 - \tau^2) \bar{f}''(\tau) - 2\tau \bar{f}'(\tau) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \tau^2} \right] \bar{f}(\tau) &= 0, \\ (1 - t^2) \bar{g}''(t) - 2t \bar{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - t^2} \right] \bar{g}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.171)$$

где черта сверху указывает на то, что функции f и g выражены через новые переменные τ и t . Мы уже встречались с подстановкой $t = \cos \vartheta$ и соответствующим уравнением для $\bar{g}(t)$ при изучении сферических функций.

Заметим, что $\bar{f}(\tau)$ формально удовлетворяет тому же уравнению, что и $\bar{g}(t)$, а именно, уравнению Лежандра (1.56). Мы уже видели, что это уравнение имеет два решения: функцию Лежандра P_{nm} и функцию Лежандра второго рода Q_{nm} . Для $\bar{g}(t)$, где $t = \cos \vartheta$, функция $Q_{nm}(t)$ была исключена из рассмотрения по очевидным причинам (см. раздел 1.8). Однако для $\bar{f}(\tau)$ оба множества функций $P_{nm}(\tau)$ и $Q_{nm}(\tau)$ являются возможными решениями; они соответствуют двум различным решениям $f = r^n$ и $f = r^{-(n+1)}$ в случае сферических функций. И, наконец, решениями уравнения (1.169) являются, как и прежде, функции $\cos m\lambda$ и $\sin m\lambda$.

Итак, уравнения (1.167), (1.168) и (1.169) имеют следующие решения:

$$\begin{aligned} f(u) &= P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) \quad \text{или} \quad Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right); \\ g(\vartheta) &= P_{nm}(\cos \vartheta); \\ h(\lambda) &= \cos m\lambda \quad \text{или} \quad \sin m\lambda. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Здесь n и $m < n$, как и прежде, целые числа $0, 1, 2, \dots$. Следовательно, функции

$$\begin{aligned} V(u, \vartheta, \lambda) &= P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) P_{nm}(\cos \vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix}, \\ V(u, \vartheta, \lambda) &= Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) P_{nm}(\cos \vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.173)$$

являются решениями уравнения Лапласа $\Delta V = 0$, то есть гармоническими функциями.

Используя линейные комбинации этих функций, мы можем составить ряды

$$\begin{aligned}
 V_i(u, \vartheta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{P_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} \cdot \\
 &\quad [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda]; \\
 V_e(u, \vartheta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} \cdot \\
 &\quad [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda].
 \end{aligned}
 \tag{1-174}$$

Здесь b – малая полуось произвольного, но фиксированного эллипсоида, который можно назвать *референц эллипсоидом* (рис. 1.11).

Деление на $P_{nm}(ib/E)$ и $Q_{nm}(ib/E)$ допустимо, так как они являются константами; это позволяет упростить вид рассматриваемых выражений и сделать коэффициенты a_{nm} и b_{nm} действительными.

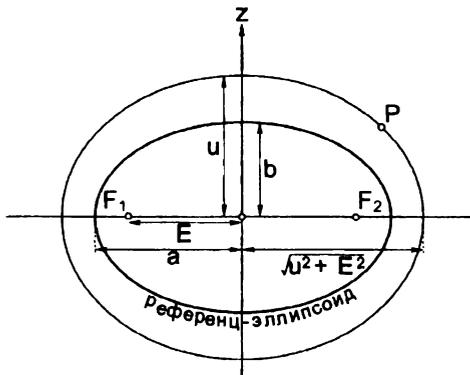


Рис. 1.11: Референц-эллипсоид и эллипсоидально-гармонические координаты

Если эксцентриситет E вырождается в ноль, то эллипсоидально гармонические координаты u, ϑ, λ становятся сферическими r, ϑ, λ ; эллипсоид $u = b$ превращается в сферу $r = R$, так как полуоси a и b равны радиусу R . При

этом

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{P_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} = \left(\frac{u}{b}\right)^n = \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad \lim_{E \rightarrow 0} \frac{Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \quad (1.175)$$

так что первый ряд в (1.174) превращается в (1.116), а второй – в (1.117). Таким образом, мы видим, что функция $P_{nm}(iu/E)$ соответствует r^n , а $Q_{nm}(iu/E)$ соответствует функции $r^{-(n+1)}$ сферического случая.

Следовательно, первый ряд в (1.174) является гармонической функцией внутри эллипсоида $u = b$, а второй – вне него. Этот случай имеет приложения в геодезии. При $u = b$ оба ряда совпадают:

$$\begin{aligned} V_i(b, \vartheta, \lambda) &= V_c(b, \vartheta, \lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda]. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Таким образом, задача Дирихле для эллипсоида вращения решается легко. Разложим функцию $V(b, \vartheta, \lambda)$, заданную на поверхности эллипсоида $u = b$, в ряд по сферическим функциям со следующими аргументами: $\vartheta =$ дополнение до редуцированной широты, $\lambda =$ геоцентрической долготы. Тогда первый ряд в (1.174) является решением внутренней задачи Дирихле, а второй – решением внешней задачи Дирихле.

Формула (1.176) показывает, что в ряд по сферическим функциям можно разложить не только функции, заданные на сфере. Такое разложение допускает произвольная в широком смысле функция, заданная на выпуклой поверхности.

Замечание о терминологии

Эллипсоидально гармонические координаты u, ϑ (или β), λ , как обобщение сферических координат, используются только для получения решений уравнения Лапласа в явном виде, в частности, для описания гравитационного поля референц эллипсоида в разделе 2.7. Краткое название "эллипсоидальные координаты", часто используемое в отношении u, β, λ , может привести к путанице с эллипсоидальными координатами φ, λ, h . В настоящей книге эллипсоидальные координаты будут всегда называться "эллипсоидальными географическими" координатами (их также часто называют "геодезическими координатами") и обозначаться φ, λ, h .

Глава 2

Поле силы тяжести Земли

2.1 Сила тяжести

Полная сила, действующая на тело, находящееся в покое на земной поверхности, является равнодействующей силы притяжения и центробежной силы вращения Земли и называется силой тяжести.

Зададим прямоугольную систему координат с началом в центре тяжести Земли и осью Oz , совпадающей с осью вращения Земли (рис. 2.1). Выбор осей Ox и Oy соответствует правой системе координат; в остальном они произвольны. Для удобства можно положить, что ось Ox "указывает" на гринвичский меридиан. Заметим, что в этой книге мы считаем Землю твердым телом, вращающимся с постоянной скоростью вокруг фиксированной оси. Это довольно упрощенное представление, см. Moritz and Mueller (1987). Центробежная сила f , действующая на единичную массу, описывается формулой

$$f = \omega^2 p, \quad (2.1)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли, а

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

– расстояние от оси вращения. Вектор \mathbf{f} этой силы сонаправлен с вектором

$$\mathbf{p} = [x, y, 0] \quad (2.3)$$

и, следовательно, может быть представлен в виде

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{p} = [\omega^2 x, \omega^2 y, 0]. \quad (2.4)$$

Центробежная сила может быть также найдена путем дифференцирования потенциала

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.5)$$

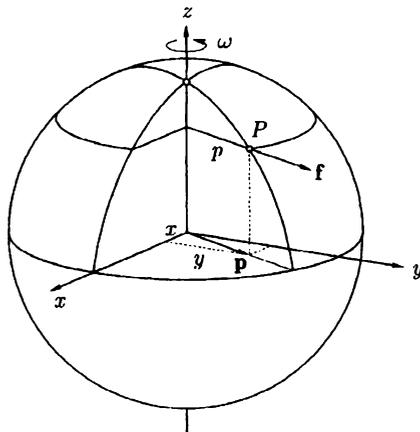


Рис. 2.1: Центробежная сила

так что

$$\mathbf{f} = \text{grad } \Phi \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]. \quad (2.6)$$

Подстановка (2-5) в (2-6) даст (2-4).

Сила тяжести, как уже указано выше, является равнодействующей силы притяжения и центробежной силы. Соответственно, потенциал W силы тяжести является суммой потенциала V силы притяжения и потенциала Φ центробежной силы:

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi = G \iiint_V \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.7)$$

где интегрирование производится по всей Земле.

Дифференцируя (2-5), найдем

$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (2.8)$$

С учетом уравнения Пуассона (1-17) для V , мы получим *обобщенное уравнение Пуассона* для потенциала W силы тяжести:

$$\Delta W = -4\pi G \rho + 2\omega^2. \quad (2.9)$$

Так как Φ – аналитическая функция, то разрывы функции W унаследованы от V : некоторые из вторых производных имеют скачки в местах разрыва плотности.

Градиент W

$$\mathbf{g} = \text{grad } W \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right] \quad (2-10)$$

с координатами

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = -G \iiint_v \frac{x - \xi}{l^3} \rho \, dv + \omega^2 x, \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = -G \iiint_v \frac{y - \eta}{l^3} \rho \, dv + \omega^2 y, \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = -G \iiint_v \frac{z - \zeta}{l^3} \rho \, dv \end{aligned} \quad (2-11)$$

называется *вектором силы тяжести*; это полная сила (сила притяжения плюс центробежная сила), действующая на единичную массу. Как и всякий вектор, он имеет *модуль* и *направление*.

Модуль g называется силой тяжести в узком смысле. Он имеет физическую размерность ускорения и измеряется в галах (1 гал = 1 см с⁻²), названных так в честь Галилео Галилея. Численно g приблизительно равно 978 галам на экваторе и 983 галам на полюсах. В геодезии удобнее пользоваться другой единицей – миллигалом (сокращенно мгал) (1 мгал = 10⁻³ гал).

В единицах СИ

$$\begin{aligned} 1 \text{ гал} &= 0.01 \text{ м с}^{-2}, \\ 1 \text{ мгал} &= 10 \text{ мк с}^{-2}. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Направление вектора силы тяжести определяет собой направление *отвесной линии*; ее фундаментальное значение для геодезических и астрономических измерений хорошо известно.

Помимо центробежной силы, на движущееся тело воздействует так называемая *сила Кориолиса*. Она пропорциональна скорости движения относительно Земли и, следовательно, равна нулю для тел, пребывающих в покое на Земле. Так как в классической геодезии (за исключением навигации) обычно имеют дело с инструментами, находящимися в покое относительно Земли, то сила Кориолиса не играет роли, и мы не будем ее здесь рассматривать.

Гравитационная и инерциальная массы

Возможно, читатель заметил, что масса m используется в двух концептуально различных смыслах: как инерциальная масса в ньютоновском законе инерции, *сила = масса × ускорение*, и как гравитационная масса в ньютоновском законе всемирного тяготения (1-1). Масса m , участвующая в силе притяжения

(которая и в действительности является силой), представляет собой гравитационную массу в то время, как масса m , участвующая в центробежной силе (которая в действительности является ускорением), представляет собой инерциальную массу. Уже около 1890 года венгерский физик Роланд Этвёш экспериментально показал, что оба вида масс равны с точностью до 10^{-11} , что является очень трудно достижимой точностью. Он использовал тот же тип инструментов, с помощью которых экспериментальные физики смогли определить численное значение гравитационной постоянной G лишь с малой точностью около 10^{-4} , о чем говорилось в начале этой книги. Разность между гравитационной и инерциальной массами была слишком мала, чтобы стать событием в физике, но для классической механики это было несобъяснимым чудом. И только в 1915 году Эйнштейн сделал ее одной из основ общей теории относительности!

2.2 Уровенные поверхности и отвесные линии

Поверхности

$$W(x, y, z) = \text{const}, \quad (2.13)$$

на которых потенциал постояен, называются *эквипотенциальными поверхностями* или *уровенными поверхностями*.

Дифференцируя потенциал силы тяжести $W = W(x, y, z)$, найдем

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz. \quad (2.14)$$

Используя скалярное произведение векторов, это можно записать так

$$dW = \text{grad } W \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

где

$$d\mathbf{x} = [dx, dy, dz]. \quad (2.16)$$

Если вектор $d\mathbf{x}$ направлен вдоль эквипотенциальной поверхности $W = \text{const}$, то потенциал остается постоянным и $dW = 0$; тогда (2.15) запишется так

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (2.17)$$

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то эти векторы ортогональны друг другу. Тем самым выражение (2.17) описывает хорошо известный факт: *вектор силы тяжести ортогонален эквипотенциальной поверхности*, проходящей через данную точку.

Поверхность океанов, после некоторой идеализации, можно рассматривать как часть одной поверхности уровня. Эта особая эквипотенциальная поверхность была предложена Гауссом, "королем математиков", в качестве "математической фигуры Земли" и позже названа *геоидом*. Это определение оказалось очень верным, и до сих пор многие считают геоид фундаментальной поверхностью физической геодезии. Таким образом, геоид определяется уравнением

$$W = W_0 = \text{const.} \quad (2-18)$$

Если взглянуть на уравнение (2.7) потенциала силы тяжести W , то увидим,

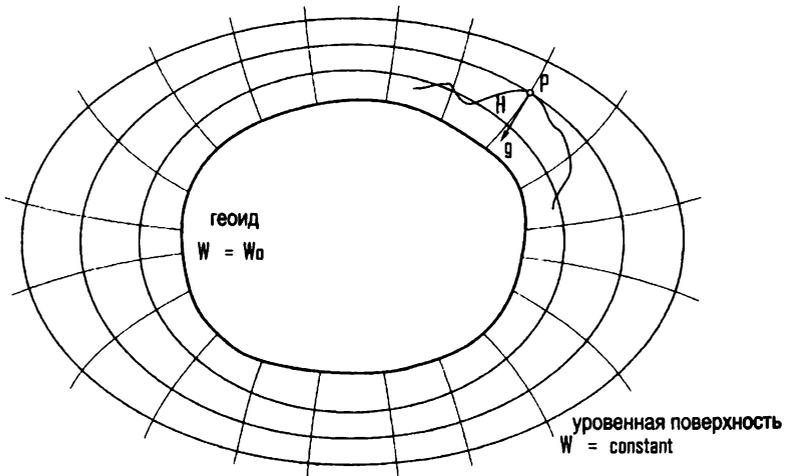


Рис. 2.2: Уровневые поверхности и линии отвеса

что эквипотенциальные поверхности, описываемые уравнением $W(x, y, z) = \text{const}$, имеют довольно сложный математический вид. Уровневые поверхности, целиком лежащие вне Земли, являются, по меньшей мере, аналитическими поверхностями (хотя и не описываются простым аналитическим выражением), поскольку потенциал W аналитичен вне Земли. Но для уровневых поверхностей, частично или целиком лежащих внутри Земли - таких, как геоид - это уже неверно. Они непрерывны и гладки (то есть не имеют изломов), но не являются аналитическими; в следующей главе мы увидим, что кривизна внутренних уровневых поверхностей имеет разрывы вместе с плотностью.

Линии, пересекающие ортогонально все эквипотенциальные поверхности, не являются прямыми, а слегка искривлены (рис. 2.2). Их называют *силовыми* или *отвесными линиями*. Вектор силы тяжести в любой точке направлен

касательно к отвесной линии в этой точке, и в этом смысле выражения "направление вектора силы тяжести", "вертикаль" и "направление отвесной линии" являются синонимами. Иногда само это направление кратко называют отвесной линией.

Так как уровенные поверхности, так сказать, горизонтальны всюду, то они соответствуют интуитивному и физическому смыслу горизонтали; для геодезии они так же важны как и отвесные линии потому, что уровенные поверхности и отвесные линии ортогональны. Теперь мы видим, почему так много внимания уделяется уровенным поверхностям.

Высота H точки над уровнем моря (называемая также *ортометрической высотой*) измеряется от геоида вдоль искривленных отвесных линий (рис. 2.2). Если взять вектор $d\mathbf{x}$, направленный вдоль отвесной линии в сторону возрастания высоты H , то его длина будет

$$\|d\mathbf{x}\| = dH, \quad (2\ 19)$$

а направление противоположно вектору силы тяжести \mathbf{g} , который направлен вниз, так что угол между $d\mathbf{x}$ и \mathbf{g} равен 180° . Используя определение скалярного произведения (для двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} оно определяется так: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \omega$, где ω – угол между этими двумя векторами), мы получим

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} = g dH \cos 180^\circ = -g dH, \quad (2\ 20)$$

и формула (2 15) принимает такой вид :

$$dW = -g dH. \quad (2\ 21)$$

Это уравнение связывает высоту H с потенциалом W и будет основным в теории определения высот (глава 4). Оно ясно показывает неразделимую взаимосвязь между геометрическими (H) и динамическими (W) понятиями, характерную для геодезии.

Уравнение (2 21) можно записать иначе:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial H}. \quad (2\ 22)$$

Отсюда видно, что сила тяжести представляет собой вертикальную производную потенциала W , взятую с обратным знаком, или отрицательную вертикальную компоненту вектора $\text{grad } W$.

Так как геодезические измерения (измерения теодолитом, швевелирование, а также спутниковые методы и т.п.) почти исключительно отнесены к системе уровенных поверхностей и отвесных линий, то геоид играет существенную роль. Из этого видно, почему целью физической геодезии является *определение уровенных поверхностей гравитационного поля Земли*. В более абстрактной,

но эквивалентной формулировке цель физической геодезии звучит как определение потенциала $W(x, y, z)$. На первый взгляд, такое определение (данное Брунсом в 1878 году), может озадачить, но его смысл легко понять: если потенциал W задан как функция координат x, y, z , то мы знаем все уровенные поверхности, включая геоид; они описываются уравнением

$$W(x, y, z) = \text{const.} \quad (2 \ 23)$$

2.3 Кривизна уровенных поверхностей и отвесных линий

Кривизна кривой $y = f(x)$ определяется выражением

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (2 \ 24)$$

где κ - кривизна, ρ - радиус кривизны, и

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2 \ 25)$$

Если использовать локальную плоскую систему координат xy , в которой касательная к кривой в точке P параллельна к оси Ox (рис. 2.3), то $y' = 0$, и мы получим, что

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2 \ 26)$$

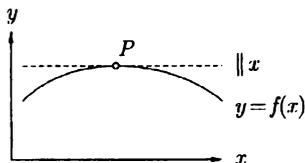


Рис. 2.3: Кривизна кривой

Уровенные поверхности

Рассмотрим теперь точку P на уровенной поверхности S . Зададим локальную систему координат xyz с началом в точке P и вертикальной (то есть ортогональной к поверхности S) осью z (рис. 2.4). Рассечем эту уровенную поверхность

$$W(x, y, z) = \text{const} \quad (2\ 27)$$

плоскостью xz , положив

$$y = 0. \quad (2\ 28)$$



Рис. 2.4: Локальная система координат

Сравнивая рис. 2.4 с рис. 2.3, видим, что ось z заняла место оси y . Следовательно, вместо (2 26) получим следующую формулу кривизны сечения уровенной поверхности плоскостью xz

$$K_1 = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (2\ 29)$$

Если продифференцировать $W(x, y, z) = W_0$ по x с учетом того, что y равно нулю, а z есть функция x , то получим

$$\begin{aligned} W_x + W_z \frac{dz}{dx} &= 0, \\ W_{xx} + 2W_{xz} \frac{dz}{dx} + W_{zz} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + W_z \frac{d^2 z}{dx^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2\ 30)$$

где нижние индексы обозначают частное дифференцирование

$$W_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \quad \dots \quad (2\ 31)$$

Так как касательная в точке P параллельна оси x , то $dz/dx = 0$ в точке P и

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{W_{xx}}{W_z}. \quad (2-32)$$

Поскольку ось z вертикальна, то, с учетом (2-22), получим

$$W_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial H} = -g. \quad (2-33)$$

Таким образом, (2-29) примет вид

$$K_1 = \frac{W_{xx}}{g}. \quad (2-34)$$

Кривизна сечения поверхности уровня плоскостью yz получается путем замены x на y

$$K_2 = \frac{W_{yy}}{g}. \quad (2-35)$$

Средняя кривизна J поверхности в точке P определяется как среднее арифметическое кривизн кривых, по которым пересекают данную поверхность две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через нормаль к этой поверхности (рис. 2.5). Следовательно,

$$J = -\frac{1}{2}(K_1 + K_2) = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2g}. \quad (2-36)$$

Здесь знак минуса - лишь условность. Это выражение описывает *среднюю кривизну поверхности уровня*.

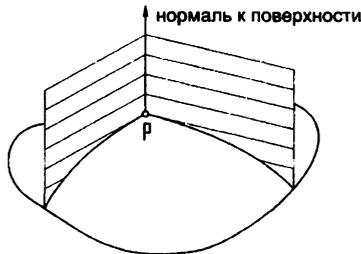


Рис. 2.5: Определение средней кривизны

Из обобщенного уравнения Пуассона

$$\Delta W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = -4\pi G \rho + 2\omega^2 \quad (2-37)$$

пайдем

$$-2gJ + W_{zz} = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (2\ 38)$$

Учитывая, что

$$W_z = -g, \quad W_{zz} = -\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial H}, \quad (2\ 39)$$

окончательно получим

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2. \quad (2\ 40)$$

Это важное уравнение, связывающее *вертикальный градиент силы тяжести* $\partial g/\partial H$ со средней кривизной уровенной поверхности, также получено Брунсом (1878). Это еще один красивый пример связи между геометрическими и динамическими понятиями в геодезии.

Отвесные линии

Кривизну отвесной линии необходимо знать для перенесения астрономических наблюдений на геоид. Отвесную линию можно определить как кривую, вектор дифференциала которой

$$d\mathbf{x} = [dx, dy, dz] \quad (2\ 41)$$

совпадает с направлением вектора силы тяжести

$$\mathbf{g} = [W_x, W_y, W_z], \quad (2\ 42)$$

то есть векторы $d\mathbf{x}$ и \mathbf{g} отличаются только коэффициентом пропорциональности. Лучшее всего это выражается следующим соотношением

$$\frac{dx}{W_x} = \frac{dy}{W_y} = \frac{dz}{W_z}. \quad (2\ 43)$$

В координатной системе рисунка 2.4 кривизна проекции отвесной линии на плоскость xz дается формулой

$$\kappa_1 = \frac{d^2x}{dz^2}, \quad (2\ 44)$$

полученной в результате применения (2 26). Используя (2 43), получим

$$\frac{dx}{dz} = \frac{W_x}{W_z}. \quad (2\ 45)$$

Продифференцируем (2-45) по z , учитывая, что $y = 0$:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{W_z^2} \left[W_z \left(W_{xz} + W_{zx} \frac{dx}{dz} \right) - W_x \left(W_{zz} + W_{zz} \frac{dx}{dz} \right) \right]. \quad (2\ 46)$$

В рассматриваемой системе координат вектор силы тяжести совпадает с осью z , и поэтому его координаты x и y равны нулю:

$$W_x = W_y = 0. \quad (2\ 47)$$

Из рисунка 2.4 видно, что

$$\frac{dx}{dz} = 0. \quad (2\ 48)$$

Таким образом,

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{W_z W_{xz}}{W_z^2} = \frac{W_{xz}}{W_z} = \frac{W_{zx}}{W_z}. \quad (2\ 49)$$

Полагая $W_z = -g$, окончательно получим

$$\kappa_1 = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (2\ 50)$$

и, аналогично,

$$\kappa_2 = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (2\ 51)$$

Это – кривизны проекций отвесной линии на плоскости xz и yz при условии, что ось z совпадает с вектором силы тяжести. В соответствии с известной формулой дифференциальной геометрии, полная кривизна κ отвесной линии находится так (в сущности, по теореме Пифагора)

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} = \frac{1}{g} \sqrt{g_x^2 + g_y^2}. \quad (2\ 52)$$

Для того, чтобы перенести результаты астрономических наблюдений на геоид, достаточно знать кривизны проекций (2 50) и (2 51).

В заключение упомянем, что различные формулы для вычисления кривизны уровенных поверхностей и отвесных линий эквивалентны одному векторному уравнению

$$\text{grad } g = (-2gJ + 4\pi G \rho - 2\omega^2) \mathbf{n} + g \kappa \mathbf{n}_1, \quad (2\ 53)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, касательный к отвесной линии, а \mathbf{n}_1 – единичный вектор ее главной нормали. Это можно легко проверить. Используя локальную систему координат xuz , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= [0, 0, 1], \\ \mathbf{n}_1 &= [\cos \alpha, \sin \alpha, 0], \end{aligned} \quad (2\ 54)$$

где α – угол между главной нормалью и осью x (рис. 2.6). Координата z в (2 53) дает уравнение Брунса (2 40), а горизонтальные координаты приводят к уравнениям

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g \kappa \cos \alpha, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = g \kappa \sin \alpha. \quad (2\ 55)$$

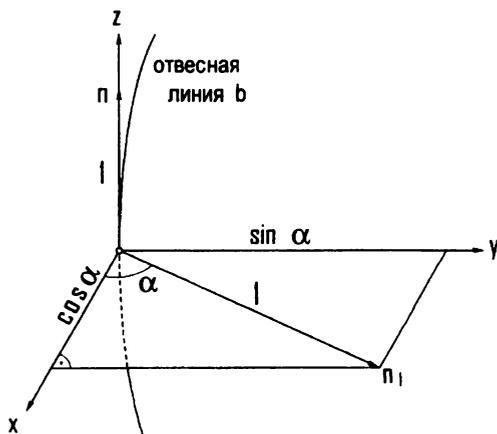


Рис. 2.6: Обобщенное уравнение Брунса

Они идентичны формулам (2 50) и (2 51), поскольку $\kappa_1 = \kappa \cos \alpha$ и $\kappa_2 = \kappa \sin \alpha$, как известно из дифференциальной геометрии.

Уравнение (2 53) называется *обобщенным уравнением Брунса*.

Более подробную информацию о свойствах кривизны и "внутренней геометрии" гравитационного поля можно найти, например, в книгах Hotine (1969: гл. 4 – 20), Marussi (1985) и Moritz and Hofmann-Wellenhop (1993: гл. 3).

2.4 Естественная система координат

Система уровенных поверхностей и отвесных линий может быть использована как трехмерная криволинейная система координат, удобная для определенных целей; в отличие от локальных прямоугольных координат x, y, z , эти координаты могут быть измерены непосредственно. Заметим, однако, что глобальные прямоугольные координаты могут быть измерены непосредственно с помощью спутников, см. раздел 5.3.

Направление оси вращения Земли и положение плоскости экватора (перпендикулярной к этой оси) могут быть определены астрономически. Астрономической широтой Φ точки P является угол между вертикалью (направление отвесной линии) в точке P и плоскостью экватора, см. рис. 2.7. Из этого рисунка видно, что линия PN параллельна оси вращения, плоскость GPF перпендикулярна к ней, то есть параллельна плоскости экватора; \mathbf{n} – единичный вектор, касательный к отвесной линии; NPF – меридиональная плоскость, проходящая через точку P , а плоскость NPG параллельна меридиональной

плоскости Гривича.

Рассмотрим теперь прямую, проходящую через точку P параллельно оси вращения Земли. Эта прямая и вертикаль в точке P вместе определяют меридиональную плоскость точки P . Угол между этой плоскостью и меридиональной плоскостью Гривича (или какой-либо другой фиксированной плоскостью) является астрономической долготой Λ точки P . (Упражнение: определить Φ и Λ без использования единичной сферы. Решение можно найти в разделе 5.9).

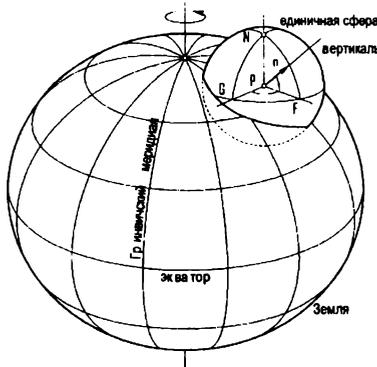


Рис. 2.7: Определение астрономических координат Φ и Λ точки P с помощью единичной сферы с центром в P

Астрономические координаты – широта Φ и долгота Λ – представляют собой две из трех пространственных координат точки P . В качестве третьей координаты мы можем взять ортометрическую высоту H точки P или ее потенциал W . Эквивалентом W является *геопотенциальное число* $C = W_0 - W$, где W_0 – потенциал геоида. Определение ортометрической высоты H было дано в разд. 2.2; см. также рис. 2.2. Связь между W , C и H дается следующими формулами

$$\begin{aligned} W &= W_0 - \int_0^H g dH = W_0 - C, \\ C &= W_0 - W = \int_0^H g dH, \\ H &= - \int_{W_0}^W \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

которые получаются при интегрировании (2.21). Интеграл берется вдоль отвесной линии в точке P , начиная от геоида, где $H = 0$ и $W = W_0$ (см. также

рис. 2.8).

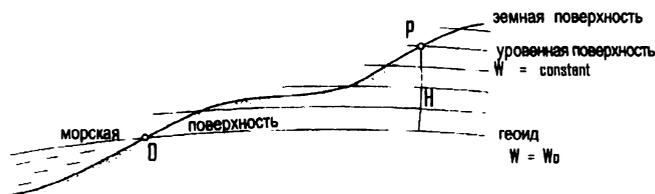


Рис. 2.8: Ортометрическая высота H

Величины

$$\Phi, \Lambda, W \text{ или } \Phi, \Lambda, H \quad (2.57)$$

называют *естественными координатами*. Для реальной Земли они являются аналогами эллипсоидальных координат. Они связаны следующим образом с геоцентрическими прямоугольными координатами x, y, z раздела 2.1. Ось x соответствует среднему гринвичскому меридиану; из рис. 2.7 видим, что единичный вектор вертикали \mathbf{n} имеет следующие координаты x, y и z

$$\mathbf{n} = [\cos \Phi \cos \Lambda, \cos \Phi \sin \Lambda, \sin \Phi]; \quad (2.58)$$

известно, что вектор силы тяжести \mathbf{g} имеет вид

$$\mathbf{g} = [W_x, W_y, W_z]. \quad (2.59)$$

С другой стороны, так как \mathbf{n} является единичным вектором, соответствующим вектору \mathbf{g} , но противоположно направленным, то его можно записать как

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} = -\frac{\mathbf{g}}{g}, \quad (2.60)$$

так что

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{n}. \quad (2.61)$$

Это соотношение вместе с (2.58) и (2.59) дает следующие уравнения

$$\begin{aligned} -W_x &= g \cos \Phi \cos \Lambda, \\ -W_y &= g \cos \Phi \sin \Lambda, \\ -W_z &= g \sin \Phi. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Решая эти уравнения относительно Φ и Λ , получим

$$\begin{aligned}\Phi &= \operatorname{arctg} \frac{-W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}, \\ \Lambda &= \operatorname{arctg} \frac{W_y}{W_x}, \\ W &= W(x, y, z).\end{aligned}\tag{2-63}$$

Эти три формулы связывают естественные координаты Φ, Λ, W с прямоугольными x, y, z в предположении, что функция $W = W(x, y, z)$ известна.

Мы видим, что связь координат Φ, Λ, H с x, y, z значительно сложнее, чем сферических координат r, ϑ, λ в разделе 1.4. Следует также обратить внимание на принципиальную разницу между астрономической долготой Λ и геоцентрической долготой λ .

2.5 Потенциал Земли в терминах сферических функций

Если посмотреть на выражение (2-7) для потенциала W силы тяжести, то можно заметить, что наиболее сложной частью здесь является потенциал V силы притяжения, в то время как потенциал центробежной силы является простой аналитической функцией.

Потенциал V может быть приведен к более удобному для многих целей виду, если учесть, что вне притягивающих масс он является гармонической функцией и, следовательно, может быть разложен в ряд по сферическим функциям.

Вычислим коэффициенты этих рядов.

Потенциал V силы притяжения дается основной формулой (1-12)

$$V = G \iiint_{\text{Земля}} \frac{dM}{l},\tag{2-64}$$

где мы теперь обозначили дифференциал массы через dM : интеграл берется по всему телу Земли. Подставим сюда выражение (1-104)

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi),\tag{2-65}$$

где P_n – обычные полиномы Лежандра, r – радиус вектор фиксированной точки P , в которой определяется значение V , r' – радиус вектор перемещенного дифференциала массы dM , и ψ – угол между r и r' (рис. 2.9).

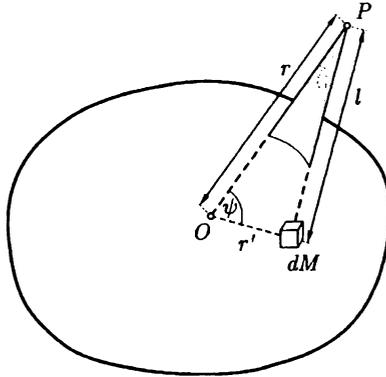


Рис. 2.9: Разложение в ряд по сферическим функциям

Так как при интегрировании по объему Земли переменная r является константой, то ее можно вынести за знак интеграла. Таким образом, мы получим

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} G \iiint_{\text{Земля}} r'^n P_n(\cos \psi) dM. \tag{2 66}$$

Записывая это в виде ряда по шаровым функциям

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}, \tag{2 67}$$

и сравнивая, видим, что сферическая функция Лапласа $Y_n(\vartheta, \lambda)$ описывается формулой

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = G \iiint_{\text{Земля}} r'^n P_n(\cos \psi) dM, \tag{2 68}$$

а зависимость от ϑ и λ проявляется через угол ψ , так как

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda' - \lambda). \tag{2 69}$$

Сферические координаты ϑ и λ были определены в разделе 1.4.

Более развернутый вид можно получить с помощью формулы сложения (1 108):

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} r'^n \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta', \lambda') + \frac{\bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} r'^n \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta', \lambda') \right]. \tag{2 70}$$

Подставляя это выражение в интеграл (2-64), получим

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\bar{A}_{nm} \frac{\bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} + \bar{B}_{nm} \frac{\bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \right], \quad (2-71)$$

где постоянные коэффициенты \bar{A}_{nm} и \bar{B}_{nm} задаются так

$$(2n+1) \bar{A}_{nm} = G \iiint_{\text{Земли}} r'^n \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta', \lambda') dM, \quad (2-72)$$

$$(2n+1) \bar{B}_{nm} = G \iiint_{\text{Земли}} r'^n \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta', \lambda') dM.$$

Эти формулы полностью симметричны и легко запоминаются: коэффициент шаровой функции

$$\frac{\bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}, \quad (2-73)$$

умноженный на $2n+1$, равен интегралу шаровой функции

$$r'^n \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta', \lambda'). \quad (2-74)$$

Аналогичное соотношение верно и для $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$.

Обратите внимание на красивую аналогию: V – сумма, а коэффициенты – интегралы.

Так как дифференциал массы суть

$$dM = \rho dx' dy' dz' = \rho r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\lambda', \quad (2-75)$$

то практическое вычисление интегралов требует, чтобы плотность была представлена как функция переменных r' , ϑ' , λ' . Хотя на данный момент и не существует такого представления, это не умаляет теоретического и практического значения сферических функций, поскольку коэффициенты A_{nm} , B_{nm} могут быть найдены из красивых значений силы тяжести на поверхности Земли. Это – красивая задача (см. раздел 1.13), она будет детально изучена позднее.

Вспоминая соотношения (1-91) и (1-98) между обычными и полностью нормированными сферическими функциями, мы легко можем записать уравнения (2-71) и (2-72) в терминах обычных сферических функций:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[A_{nm} \frac{\mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} + B_{nm} \frac{\mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \right], \quad (2-76)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{n0} &= G \iiint_{\text{Земля}} r'^n P_n(\cos \vartheta') dM, \\ A_{nm} &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} G \iiint_{\text{Земля}} r'^n \mathcal{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') dM \\ B_{nm} &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} G \iiint_{\text{Земля}} r'^n \mathcal{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') dM \end{aligned} \right\} (m \neq 0). \quad (2.77)$$

В приложении к динамике спутников потенциал V часто записывают в следующем виде:

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + S_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \right\}, \quad (2.78)$$

где a - экваториальный радиус Земли, так что

$$\left. \begin{aligned} A_{nm} &= GM a^n C_{nm} \\ B_{nm} &= GM a^n S_{nm} \end{aligned} \right\} (n \neq 0). \quad (2.79)$$

Следует различать коэффициент S_{nm} и функцию \mathcal{S}_{nm} ! Коэффициент C_{n0} ранее был обозначен через $-J_n$. Обратите внимание на то, что C связан с косинусом, а S - с синусом.

Также используют соответствующие полностью нормированные коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{n0} &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} C_{n0}, \\ C_{nm} &= \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} C_{nm} \\ \bar{S}_{nm} &= \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} S_{nm} \end{aligned} \right\} (m \neq 0) \quad (2.80)$$

Если бы Земля обладала полной осевой симметрией, то, очевидно, все непольные члены ($m \neq 0$) в рассмотренных разложениях исчезли бы, так как они зависят от долготы λ , а в телах с осевой симметрией нет зависимости от долготы λ , поскольку все долготы эквивалентны. Так как у реальной Земли отклонение от осевой симметрии небольшое, тессеральные и секториальные функции являются малыми.

В завершение, обсудим сходимость разложения потенциала Земли в ряд (2.71). Этот ряд представляет собой разложение по степеням $1/r$. Следовательно, чем больше r , тем лучше сходимость. Для малых r ряд не всегда сходится. Можно показать, что для произвольного тела разложение потенциала V в ряд по сферическим функциям всегда сходится вне сферы наименьшего радиуса $r = r_0$, целиком охватывающей это тело (рис. 2.10).

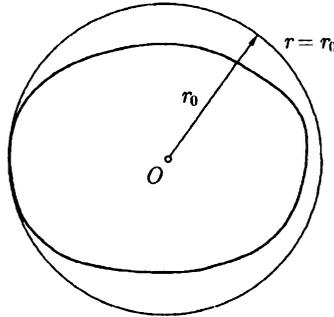


Рис. 2.10: Разложение в ряд по сферическим функциям потенциала V сходится вне сферы $r = r_0$

Внутри этой сферы ряд обычно расходится. В некоторых случаях он может частично сходиться внутри сферы $r = r_0$. Если бы Земля представляла собой однородный эллипсоид примерно тех же размеров, то ряд для V , конечно, сходился бы и на поверхности Земли. Однако реальный потенциал Земли, вследствие неравномерного распределения масс, может как сходиться, так и расходиться. *Теоретически* это затрудняет использование разложения V по сферическим функциям на поверхности Земли. *Практически* его всегда с уверенностью можно считать сходящимся. Для детального изучения см. Moritz (1980a: разделы 6 и 7) и раздел 8.6 здесь. Едва ли требуется указывать на то, что с помощью ряда по сферическим функциям, всегда представляющего собой гармоническую функцию, можно описать потенциал лишь вне притягивающих масс, и никогда – внутри.

2.6 Сферические функции низших степеней

Полезно найти в явном виде коэффициенты нескольких первых сферических функций. Для удобства, мы сначала установим вид нескольких сферических

функций \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{S}_{nm} , используя формулы (1 60), (1 66) и (1 82):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{00} &= 1, & \mathcal{S}_{00} &= 0, \\
 \mathcal{R}_{10} &= \cos \vartheta, & \mathcal{S}_{10} &= 0, \\
 \mathcal{R}_{11} &= \sin \vartheta \cos \lambda, & \mathcal{S}_{11} &= \sin \vartheta \sin \lambda, \\
 \mathcal{R}_{20} &= \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}, & \mathcal{S}_{20} &= 0, \\
 \mathcal{R}_{21} &= 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \lambda, & \mathcal{S}_{21} &= 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \lambda, \\
 \mathcal{R}_{22} &= 3 \sin^2 \vartheta \cos 2\lambda, & \mathcal{S}_{22} &= 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\lambda.
 \end{aligned} \tag{2 81}$$

Соответствующие шаровые функции представляют собой просто однородные многочлены переменных x, y, z . Например,

$$r^2 \mathcal{S}_{22} = 6r^2 \sin^2 \vartheta \sin \lambda \cos \lambda = 6(r \sin \vartheta \cos \lambda)(r \sin \vartheta \sin \lambda) = 6xy. \tag{2 82}$$

Таким способом найдем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{00} &= 1, & \mathcal{S}_{00} &= 0, \\
 r \mathcal{R}_{10} &= z, & r \mathcal{S}_{10} &= 0, \\
 r \mathcal{R}_{11} &= x, & r \mathcal{S}_{11} &= y, \\
 r^2 \mathcal{R}_{20} &= -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + z^2, & r^2 \mathcal{S}_{20} &= 0, \\
 r^2 \mathcal{R}_{21} &= 3xz, & r^2 \mathcal{S}_{21} &= 3yz, \\
 r^2 \mathcal{R}_{22} &= 3x^2 - 3y^2, & r^2 \mathcal{S}_{22} &= 6xy.
 \end{aligned} \tag{2 83}$$

Подстановка этих функций в выражение (2 77) для коэффициентов A_{nm} и B_{nm} даёт для нулевой степени

$$A_{00} = G \iiint_{\text{Земля}} dM = GM, \tag{2 84}$$

то есть, произведение массы Земли на гравитационную постоянную. Для коэффициентов первой степени получим

$$A_{10} = G \iiint_{\text{Земля}} z' dM, \quad A_{11} = G \iiint_{\text{Земля}} x' dM, \quad B_{11} = G \iiint_{\text{Земля}} y' dM; \tag{2 85}$$

и для коэффициентов второй степени

$$\begin{aligned}
 A_{20} &= \frac{1}{2} G \iiint_{\text{Земля}} (-x'^2 - y'^2 + 2z'^2) dM, \\
 A_{21} &= G \iiint_{\text{Земля}} x' z' dM, \quad B_{21} = G \iiint_{\text{Земля}} y' z' dM, \\
 A_{22} &= \frac{1}{4} G \iiint_{\text{Земля}} (x'^2 - y'^2) dM, \quad B_{22} = \frac{1}{2} G \iiint_{\text{Земля}} x' y' dM.
 \end{aligned} \tag{2 86}$$

Из механики известно, что

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint x' dM, \quad y_c = \frac{1}{M} \iiint y' dM, \quad z_c = \frac{1}{M} \iiint z' dM \tag{2 87}$$

являются прямоугольными координатами центра тяжести (центра масс, геоцентра). Если начало координат совпадает с центром тяжести, то координаты этого центра, а следовательно, и интегралы (2 85) суть нули.

Если начало координат $r = 0$ расположено в центре тяжести Земли, то в разложении потенциала V в ряд по сферическим функциям не будет членов первой степени. Следовательно, это верно и для нашей геоцентрической системы координат.

Интегралы

$$\iiint x' y' dM, \quad \iiint y' z' dM, \quad \iiint z' x' dM \tag{2 88}$$

являются *моментами инерции*. Они обращаются в нуль, если координатные оси совпадают с главными осями инерции. Если ось z направить по средней оси вращения Земли, совпадающей с осью максимальной инерции, то, по меньшей мере, второй и третий из этих моментов инерции должны исчезнуть. Вследствие этого, A_{21} и B_{21} будут равны нулю, но не B_{22} — он пропорционален первому моменту инерции. Коэффициент B_{22} оказался бы равным 0 только в том случае, если Земля обладала бы полной осевой симметрией или главная ось инерции совпадала бы с гринвичским меридианом.

Пять сферических функций $A_{10}\mathcal{R}_{10}, A_{11}\mathcal{R}_{11}, B_{11}\mathcal{S}_{11}, A_{21}\mathcal{R}_{21}$ и $B_{21}\mathcal{S}_{21}$ — все сферические функции первой степени, а также второй степени и первого порядка — которые должны, таким образом, отсутствовать в любом разложении потенциала Земли по сферическим функциям, называются *запрещенными* или *недопустимыми сферическими функциями*.

Вводя в рассмотрение *моменты инерции* относительно осей x, y и z следу-

ющим образом

$$\begin{aligned} A &= \iiint (y'^2 + z'^2) dM, \\ B &= \iiint (z'^2 + x'^2) dM, \\ C &= \iiint (x'^2 + y'^2) dM, \end{aligned} \quad (2\ 89)$$

и обозначая x -момент инерции, который не исчезает, через

$$D = \iiint x'y' dM, \quad (2\ 90)$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} A_{00} &= GM, \\ A_{10} &= A_{11} = B_{11} = 0, \\ A_{20} &= G [(A + B)/2 - C], \\ A_{21} &= B_{21} = 0, \\ A_{22} &= \frac{1}{4} G (B - A), \\ B_{22} &= \frac{1}{2} G D. \end{aligned} \quad (2\ 91)$$

Пусть теперь оси x и y совпадают с соответствующими главными осями инерции Земли. Это возможно только теоретически, поскольку главные оси инерции Земли известны лишь приближённо. Тогда $B_{22} = 0$; учитывая (2 78) и (2 79), мы можем записать в явном виде

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} \left\{ \frac{1}{2} [C - (A + B)/2] (1 - 3 \cos^2 \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{4} (B - A) \sin^2 \vartheta \cos 2\lambda \right\} + O(1/r^4). \end{aligned} \quad (2\ 92)$$

В прямоугольных координатах это выражение имеет симметричный вид

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^5} \left[(B + C - 2A) x^2 + (C + A - 2B) y^2 + \right. \\ &\quad \left. (A + B - 2C) z^2 \right] + O(1/r^4), \end{aligned} \quad (2\ 93)$$

который получается с учетом связи (1 26) между прямоугольными и сферическими координатами.

Членами порядка выше, чем $1/r^3$, можно пренебречь для больших расстояний (скажем, для расстояния до Луны), так что выражения (2 92) или (2 93) без учета членов $O(1/r^4)$ высших порядков достаточны для многих астрономических целей, см. Moritz and Mueller (1987). Здесь через $O(1/r^4)$ обозначены члены порядка $1/r^4$. Для планетарных расстояний даже члена первого порядка

$$V = \frac{GM}{r} \quad (2\ 94)$$

обычно достаточно; он выражает собой потенциал точечной массы. Таким образом, при очень больших расстояниях любое тело действует как точечная масса.

Воспользуемся видом (2 78) разложения потенциала V по сферическим функциям; тогда коэффициенты низших степеней могут быть найдены из (2 79) и (2 91). Получим

$$\begin{aligned} C_{10} &= C_{11} = S_{11} = 0, \\ C_{20} &= -\frac{C - (A + B)/2}{M a^2}, \\ C_{21} &= S_{21} = 0, \\ C_{22} &= \frac{B - A}{4M a^2}, \\ S_{22} &= \frac{D}{2M a^2}. \end{aligned} \quad (2\ 95)$$

Первая из этих формул показывает, что суммирование в (2 78) в действительности начинается с $n = 2$; остальные устанавливают связь коэффициентов второй степени с массой и моментами инерции Земли.

2.7 Гравитационное поле уровня эллипсоида

В первом приближении Земля - это сфера; во втором приближении её можно рассматривать как эллипсоид вращения. Конечно, Земля не является в точности эллипсоидом; тем не менее, гравитационное поле эллипсоида имеет фундаментальную практическую значимость, потому что оно удобно с математической точки зрения, а отклонения реального гравитационного поля от "нормального" эллипсоидального так малы, что их можно трактовать как линейные. Это разбиение гравитационного поля Земли на "нормальное" и остаточное малое "возмущающее" поля значительно упрощает задачу его определения; едва ли эта задача могла быть решена иначе.

Итак, мы предполагаем, что нормальная фигура Земли представляет собой уровенный эллипсоид, то есть эллипсоид вращения, являющийся эквипотенциальной поверхностью нормального гравитационного поля. Это предположение необходимо, так как нормальной формой геоида, являющегося эквипотенциальной поверхностью реального гравитационного поля, должен быть эллипсоид. Обозначая потенциал нормального гравитационного поля через

$$U = U(x, y, z), \quad (2.96)$$

видим, что уровенный эллипсоид, представляющий собой поверхность $U = \text{const}$, в точности соответствует геоиду, определяемому как поверхность $W = \text{const}$.

Основным здесь является то, что, постулируя данный эллипсоид как эквипотенциальную поверхность нормального гравитационного поля и задавая общую массу M , мы тем самым полностью и однозначно определяем нормальный потенциал U . Точное распределение плотности внутри эллипсоида, создающего потенциал U , не имеет значения, и знать его не требуется. В действительности, нам неизвестно ни одного приемлемого распределения масс для уровня эллипсоида (Moritz 1990: гл. 5). Pizzetti (1894) безуспешно использовал однородное распределение плотности в сочетании с поверхностным слоем отрицательной плотности, что довольно "нестественно".

Такое определение возможно в силу принципа Дирихле (разд. 1.12): потенциал силы притяжения вне поверхности S полностью определяется геометрической формой S и значением потенциала на S . Первоначально это было показано только для потенциала V силы притяжения, однако может быть также применено и к потенциалу силы тяжести

$$U = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.97)$$

если известна угловая скорость ω . Доказательство, с соответствующими изменениями, дано в разделе 1.12. Итак, нормальный потенциал $U(x, y, z)$ полностью определяется

1. формой эллипсоида вращения, то есть полуосями a и b ;
2. общей массой M ;
3. угловой скоростью ω .

Теперь все эти соображения обсудим детально. Данный эллипсоид S_0

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.98)$$

по определению является эквипотенциальной поверхностью

$$U(x, y, z) = U_0. \quad (2 \cdot 99)$$

Здесь удобно ввести эллипсоидально-гармонические координаты u, β, λ раздела 1.15. При этом в качестве референц эллипсоида S_0 возьмём эллипсоид $u = b$.

Поскольку $V(u, \beta)$ – гравитационная часть нормального потенциала U – гармонична вне эллипсоида S_0 , мы воспользуемся второй формулой из (1 174). Поле V обладает осевой симметрией и, следовательно, не зависит от долготы λ . Поэтому все поперечные члены, зависящие от λ , должны быть равны нулю, и остается

$$V(u, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_n \left(i \frac{b}{E} \right)} A_n P_n(\sin \beta), \quad (2 \cdot 100)$$

где

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2 \cdot 101)$$

– линейный эксцентриситет. Потенциал $\Phi(u, \beta)$ центробежной силы имеет вид

$$\Phi(u, \beta) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta. \quad (2 \cdot 102)$$

Таким образом, полный нормальный гравитационный потенциал может быть записан так

$$U(u, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_n \left(i \frac{b}{E} \right)} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta. \quad (2 \cdot 103)$$

На эллипсоиде S_0 $u = b$ и $U = U_0$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta = U_0. \quad (2 \cdot 104)$$

Это уравнение верно для всех точек S_0 , то есть для всех значений β . Так как

$$b^2 + E^2 = a^2 \quad (2 \cdot 105)$$

и

$$\cos^2 \beta = \frac{2}{3} [1 - P_2(\sin \beta)], \quad (2 \cdot 106)$$

то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 P_2(\sin \beta) - U_0 = 0 \quad (2 \cdot 107)$$

или

$$\begin{aligned} & (A_0 + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 - U_0) P_0(\sin \beta) + A_1 P_1(\sin \beta) \\ & + (A_2 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) P_2(\sin \beta) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) = 0. \end{aligned} \quad (2 \cdot 108)$$

Этому уравнению удовлетворяют все значения β только в том случае, если коэффициенты при всех $P_n(\sin \beta)$ равны нулю. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} A_0 &= U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2, \quad A_1 = 0, \\ A_2 &= \frac{1}{3}\omega^2 a^2, \quad A_3 = A_4 = \dots = 0. \end{aligned} \quad (2 \cdot 109)$$

Подстановка этих выражений в (2·100) даёт

$$V(u, \beta) = (U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) \frac{Q_0\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i \frac{b}{E}\right)} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{Q_2\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i \frac{b}{E}\right)} P_2(\sin \beta). \quad (2 \cdot 110)$$

По существу, эта замкнутая формула представляет собой решение задачи Дирихле для уровенного эллипсоида, но можно получить и более удобные формы этого решения.

Прежде всего, найдем функции Лежандра второго рода Q_0 и Q_2 . Так как

$$\operatorname{ar} \operatorname{cth} (ix) = \frac{1}{i} \operatorname{ar} \operatorname{ctg} x = -i \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}, \quad (2 \cdot 111)$$

то из (1·80) при $z = iu/E$ имеем

$$\begin{aligned} Q_0\left(i \frac{u}{E}\right) &= -i \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{E}{u}, \\ Q_2\left(i \frac{u}{E}\right) &= \frac{i}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2}\right) \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right]. \end{aligned} \quad (2 \cdot 112)$$

Вводя в (2·112) обозначения

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2}\right) \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right], \\ q_0 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2}\right) \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right], \end{aligned} \quad (2 \cdot 113)$$

и подставляя их в уравнение (2 110), получим

$$V(u, \beta) = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\operatorname{arctg} \frac{E}{u}}{\operatorname{arctg} \frac{E}{b}} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta). \quad (2 \ 114)$$

Теперь мы можем выразить U_0 через массу M . Для больших значений u имеем

$$\operatorname{arctg} \frac{E}{u} = \frac{E}{u} + O(1/u^3). \quad (2 \ 115)$$

Из выражений (1 26) для сферических координат и формул (1 151) для эллипсоидально гармонических координат найдем

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = u^2 + E^2 \cos^2 \beta, \quad (2 \ 116)$$

так что для больших значений r имеем

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + O(1/r^3) \quad (2 \ 117)$$

и

$$\operatorname{arctg} \frac{E}{u} = \frac{E}{r} + O(1/r^3), \quad (2 \ 118)$$

где $O(x)$ означает "малая порядка x ", то есть малая порядка $1/r^3$ в нашем случае. При очень больших значениях расстояния r первый член в (2 114) является главным, так что асимптотически

$$V = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{E}{\operatorname{arctg}(E/b)} \frac{1}{r} + O(1/r^3). \quad (2-119)$$

Из разд. 2.6 нам известно, что

$$V = \frac{GM}{r} + O(1/r^3). \quad (2 \ 120)$$

Подставив это выражение для V в левую часть (2 119), получим

$$\frac{GM}{r} = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{E}{\operatorname{arctg}(E/b)} \frac{1}{r} + O(1/r^3). \quad (2-121)$$

Умножим теперь это выражение на r и перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$. Результат (точный!) таков

$$GM = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{E}{\operatorname{arctg}(E/b)}, \quad (2 \ 122)$$

или в преобразованном виде

$$U_0 = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{b} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad (2.123)$$

Это и есть искомое отношение между массой M и потенциалом U_0 .

Подстановка в (2.114) выражения для U_0 , полученного в (2.123), упрощает вид V :

$$V = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{u} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta). \quad (2.124)$$

Представив P_2 в виде

$$P_2(\sin \beta) = \frac{3}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{2} \quad (2.125)$$

и прибавив потенциал центробежной силы $\Phi = \omega^2(u^2 + E^2) \cos^2 \beta / 2$ из (2.102), получим следующий вид нормального гравитационного потенциала U :

$$U(u, \beta) = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta. \quad (2.126)$$

Константами в этой формуле являются только a, b, GM и ω . Это полностью согласуется с теоремой Дирихле.

2.8 Нормальная сила тяжести

Обращаясь к линейному элементу в эллипсоидально-гармонических координатах (1.155) и заменяя ϑ его дополнением $90^\circ - \beta$, получим

$$ds^2 = w^2 du^2 + w^2(u^2 + E^2) d\beta^2 + (u^2 + E^2) \cos^2 \beta d\lambda^2, \quad (2.127)$$

где

$$w = \sqrt{\frac{u^2 + E^2 \sin^2 \beta}{u^2 + E^2}}. \quad (2.128)$$

Таким образом, вдоль координатных линий имеем:

$$u = \text{переменная}, \quad \beta = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}, \quad ds_u = w du,$$

$$\beta = \text{переменная}, \quad u = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}, \quad ds_\beta = w \sqrt{u^2 + E^2} d\beta, \quad (2.129)$$

$$\lambda = \text{переменная}, \quad u = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad ds_\lambda = \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta d\lambda.$$

Компоненты вектора нормальной силы тяжести

$$\gamma = \operatorname{grad} U \quad (2.130)$$

вдоль этих координатных линий задаются соответственно

$$\begin{aligned}\gamma_u &= \frac{\partial U}{\partial s_u} = \frac{1}{w} \frac{\partial U}{\partial u}, \\ \gamma_\beta &= \frac{\partial U}{\partial s_\beta} = \frac{1}{w\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{\partial U}{\partial \beta}, \\ \gamma_\lambda &= \frac{\partial U}{\partial s_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0.\end{aligned}\quad (2-131)$$

Координата γ_λ равна нулю, так как U не содержит λ . Это также следует из осевой симметрии.

Выполняя частное дифференцирование, найдем

$$\begin{aligned}-w \gamma_u &= \frac{GM}{u^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2 + E^2} \frac{q'}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \omega^2 u \cos^2 \beta, \\ -w \gamma_\beta &= \left(-\frac{\omega^2 a^2}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{q}{q_0} + \omega^2 \sqrt{u^2 + E^2} \right) \sin \beta \cos \beta,\end{aligned}\quad (2-132)$$

где мы положили

$$q' = -\frac{u^2 + E^2}{E} \frac{dq}{du} = 3 \left(1 + \frac{u^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{u}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{u} \right) - 1. \quad (2-133)$$

Обратите внимание на то, что q' не означает dq/du ; это обозначение перенято от Нирвен (1960), где q' — производная относительно другой независимой перемещенной, которую мы здесь не используем.

Для самого уренного эллипсоида S_0 имеем $U = b$ и

$$\gamma_{\beta,0} = 0. \quad (2-134)$$

(Обратите внимание: мы часто будем пометать величины, относящиеся к S_0 , нижним индексом 0). Это очевидно, так как на S_0 вектор силы тяжести нормален к урениной поверхности S_0 . Следовательно, в дополнение к λ -компоненте, β -компонента также равна нулю на референц эллипсоиде $u = b$. Заметим, что другие координатные эллипсоиды $u = \text{const}$ не являются эквипотенциальными поверхностями $U = \text{const}$, и поэтому β компонента в общем случае не равна нулю.

Таким образом, полная сила тяжести на эллипсоиде S_0 , которую мы просто обозначим через γ , задается так

$$\begin{aligned}\gamma = |\gamma_{u,0}| &= \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \cdot \\ &\cdot \left[1 + \frac{\omega^2 a^2 E}{GM} \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \cos^2 \beta \right],\end{aligned}\quad (2-135)$$

поскольку на S_0 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 + E^2} &= \sqrt{b^2 + E^2} = a, \\ w_0 &= \frac{1}{a} \sqrt{b^2 + E^2 \sin^2 \beta} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Введем теперь обозначение

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (2.137)$$

и второй эксцентриситет

$$e' = \frac{E}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (2.138)$$

Штрих над e не является знаком дифференцирования, а лишь отличает второй эксцентриситет от первого, определяемого как $e = E/a$.

Избавляясь от постоянных членов с помощью тождества

$$1 = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta, \quad (2.139)$$

получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{GM}{a \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \cdot \\ &\cdot \left[\left(1 + \frac{m}{3} \frac{e' q'_0}{q_0} \right) \sin^2 \beta + \left(1 - m - \frac{m}{6} \frac{e' q'_0}{q_0} \right) \cos^2 \beta \right]. \end{aligned} \quad (2.140)$$

На экваторе ($\beta = 0$) имеем

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \frac{e' q'_0}{q_0} \right); \quad (2.141)$$

на полюсах ($\beta = \pm 90^\circ$) нормальная сила тяжести задается как

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \frac{e' q'_0}{q_0} \right). \quad (2.142)$$

Нормальная сила тяжести на экваторе γ_a и нормальная сила тяжести на полюсах γ_b удовлетворяют соотношению

$$\frac{a-b}{a} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{\omega^2 b}{\gamma_a} \left(1 + \frac{e' q'_0}{2q_0} \right), \quad (2.143)$$

что можно проверить непосредственной подстановкой. Это - точная форма приближённой формулы, опубликованной Клеро в 1738 г. Она носит название теоремы Клеро. Ее значимость проявится в разд. 2.10.

Сравнивая выражения (2-141) для γ_a и (2-142) для γ_b с величинами, заключенными в круглые скобки в формуле (2-140), видим, что γ можно записать в следующей симметричной форме

$$\gamma = \frac{a \gamma_b \sin^2 \beta + b \gamma_a \cos^2 \beta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}. \quad (2-144)$$

Наконец, введем на эллипсоиде эллипсоидальную широту φ , являющуюся углом между нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора (рис. 2.11). Используя известную формулу из эллипсоидальной геометрии

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi, \quad (2-145)$$

получим

$$\gamma = \frac{a \gamma_a \cos^2 \varphi + b \gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2-146)$$

Вывод этой формулы оставляется читателю в качестве упражнения. Это — точная формула для нормальной силы тяжести на эллипсоиде, полученная Somigliana в 1929 году.

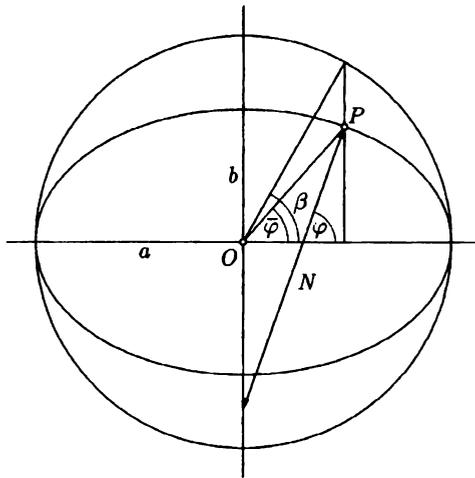


Рис. 2.11: Эллипсоидальная широта φ , геоцентрическая широта $\bar{\varphi}$ и редуцированная (эллипсоидально-гармоническая) широта β точки P на эллипсоиде

Мы завершим этот параграф кратким замечанием о вертикальном градиенте $\partial\gamma/\partial s_n = \partial\gamma/\partial h$ силы тяжести на референц-эллипсоиде. Формула Брунса (2 40), примененная к полю нормальной силы тяжести с соответствующей эллипсоидальной высотой h и $\rho = 0$, дает

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h} = -2\gamma J - 2\omega^2. \quad (2 147)$$

Здесь средняя кривизна эллипсоида имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right), \quad (2 148)$$

где M и N – главные радиусы кривизны: M – радиус в направлении меридиана, а N – нормальный радиус кривизны, взятый в направлении первого вертикала. Из эллипсоидальной геометрии известно, что

$$M = \frac{c}{(1 + e'^2 \cos^2\varphi)^{3/2}}, \quad N = \frac{c}{(1 + e'^2 \cos^2\varphi)^{1/2}}, \quad (2 149)$$

где

$$c = \frac{a^2}{b} \quad (2 150)$$

– радиус кривизны на полюсе. Нормальный радиус кривизны N допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 2.11). Вследствие этого он еще известен как "нормаль, ограниченная малой осью" (Bonford, 1962, p. 497).

2.9 Разложение нормального потенциала в ряд по сферическим функциям

Мы нашли гравитационный потенциал нормальной фигуры Земли в терминах эллипсоидальных функций в (2 124) в виде

$$V = \frac{GM}{E} \arctg \frac{E}{u} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta). \quad (2 151)$$

Теперь мы ставим целью выразить эту формулу через сферические координаты r, ϑ, λ .

Сначала установим связь между эллипсоидально гармоническими и сферическими координатами. Сравнивая прямоугольные координаты в этих двух системах в соответствии с формулами (1 26) и (1 151), получим

$$\begin{aligned} r \sin \vartheta \cos \lambda &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda, \\ r \sin \vartheta \sin \lambda &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda, \\ r \cos \vartheta &= u \sin \beta. \end{aligned} \quad (2 152)$$

Долгота λ одна и та же в обеих системах. Из этих формул легко найдем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \vartheta &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + E^2}} \operatorname{tg} \beta, \\ r &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos^2 \beta. \end{aligned} \quad (2-153)$$

Непосредственное преобразование (2-151) путем выражения u и β через r и ϑ с помощью формул (2-153) – крайне трудоемкое занятие. Однако косвенным путем эта задача может быть решена довольно просто.

Разложим $\operatorname{arctg}(E/u)$ в хорошо известный степенной ряд

$$\operatorname{arctg} \frac{E}{u} = \frac{E}{u} - \frac{1}{3} \left(\frac{E}{u} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{E}{u} \right)^5 - \dots \quad (2-154)$$

Подстановка этого ряда в первую из формул (2-113), то есть,

$$q = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \operatorname{arctg} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right], \quad (2-155)$$

приведет после небольших преобразований к

$$q = 2 \left[\frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{E}{u} \right)^3 - \frac{2}{5 \cdot 7} \left(\frac{E}{u} \right)^5 + \frac{3}{7 \cdot 9} \left(\frac{E}{u} \right)^7 - \dots \right]. \quad (2-156)$$

Точнее, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{E}{u} &= \frac{E}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{E}{u} \right)^{2n+1}, \\ q &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{E}{u} \right)^{2n+1} \end{aligned} \quad (2-157)$$

Подставив эти соотношения в (2-151), получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{u} + \frac{GM}{E} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{E}{u} \right)^{2n+1} \\ &\quad - \frac{\omega^2 a^2}{3q_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{E}{u} \right)^{2n+1} P_2(\sin \beta). \end{aligned} \quad (2-158)$$

Воспользовавшись обозначением m , определенным в (2-137), и вторым эксцентриситетом $e' = E/b$, найдем

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{GM}{(2n+1)E} \left(\frac{E}{u} \right)^{2n+1} \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{m e'}{3q_0} \frac{2n}{2n+3} P_2(\sin \beta) \right]. \end{aligned} \quad (2-159)$$

Итак, мы разложили нормальный потенциал V в ряд по сферическим функциям. Но в силу осевой симметрии здесь будут присутствовать только зональные члены; в силу симметрии относительно экваториальной плоскости, здесь будут участвовать только четные сферические функции. Зональные функции нечетной степени меняют знак при отрицательных значениях широты и, следовательно, должны отсутствовать. С учетом сказанного, полученный ряд имеет вид

$$V = \frac{GM}{r} + A_2 \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} + A_4 \frac{P_4(\cos \vartheta)}{r^5} + \dots \quad (2.160)$$

Далее мы должны найти коэффициенты A_2, A_4, \dots . С этой целью рассмотрим какую-нибудь точку на оси вращения, лежащую снаружи от эллипсоида. Для этой точки $\beta = 90^\circ, \vartheta = 0^\circ$ и, согласно (2.153), $u = r$. Поэтому (2.159) выглядит так:

$$V = \frac{GM}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{GM E^{2n}}{2n+1} \left(1 - \frac{2n}{2n+3} \frac{m e'}{3q_0} \right) \frac{1}{r^{2n+1}}, \quad (2.161)$$

а (2.160) принимает следующий вид:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{A_2}{r^3} + \frac{A_4}{r^5} + \dots = \frac{GM}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{1}{r^{2n+1}}. \quad (2.162)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что для всех значений n

$$P_n(1) = 1 \quad (2.163)$$

(см. также рис. 1.4). Сравнивая коэффициенты в обоих выражениях для V , найдем, что

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{GM E^{2n}}{2n+1} \left(1 - \frac{2n}{2n+3} \frac{m e'}{3q_0} \right). \quad (2.164)$$

Формулы (2.160) и (2.164) дают искомое представление потенциала уровня эллипсоида в виде ряда по сферическим функциям.

Коэффициент второй степени A_2 выглядит так

$$A_2 = G(A - C). \quad (2.165)$$

Это следует из (2.91), если учесть, что $A = B$ в силу симметрии. Здесь C — момент инерции относительно оси вращения, а A — момент инерции относительно любой оси в экваториальной плоскости. Полагая $n = 1$ в (2.164), получим

$$A_2 = -\frac{1}{3} GM E^2 \left(1 - \frac{2}{15} \frac{m e'}{q_0} \right). \quad (2.166)$$

Сравнивая это с предыдущей формулой (2 165), пайдём

$$G(C - A) = \frac{1}{3} GM E^2 \left(1 - \frac{2}{15} \frac{m e'}{q_0} \right). \quad (2 167)$$

Таким образом, разность между главными моментами инерции выражена через стоксовы постоянные a, b, M и ω .

Можно исключить q_0 из выражений (2 164) и (2 167), что приведет к

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{3GM E^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{C-A}{M E^2} \right). \quad (2 168)$$

Если записать потенциал V в виде

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{r} \left[1 + C_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) + C_4 \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \vartheta) + \dots \right] \\ &= \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \right], \end{aligned} \quad (2 169)$$

то C_{2n} задается следующим образом:

$$C_{2n} = -J_{2n} = (-1)^n \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{C-A}{M E^2} \right). \quad (2 170)$$

Здесь мы ввели первый эксцентриситет $e = E/a$. При $n = 1$ это даёт важную формулу

$$C_{20} = -\frac{C-A}{M a^2}, \quad (2 171)$$

или, что эквивалентно,

$$J_2 = \frac{C-A}{M a^2}; \quad (2 172)$$

это согласуется с соответствующим соотношением в (2 95), если учесть, что осевая симметрия влечет $A = B$.

В заключение заметим, что, исключая $q_0 = (1/i)Q_2(i(b/E))$ с помощью формулы (2 167) и U_0 с помощью формулы (2 122), мы можем переписать разложение V по эллипсоидальным функциям (2 110) в виде

$$\begin{aligned} V(u, \beta) &= \frac{i}{E} GM Q_0 \left(i \frac{u}{E} \right) \\ &+ \frac{15i}{2E^3} G \left(C - A - \frac{1}{3} M E^2 \right) Q_2 \left(i \frac{u}{E} \right) P_2(\sin \beta). \end{aligned} \quad (2 173)$$

Отсюда видно, что коэффициенты при эллипсоидальных функциях нулевой и первой степеней являются функциями массы и разности между двумя главными моментами инерции. Аналогия с коэффициентами при соответствующих сферических функциях (2 91) очевидна. *Это - замкнутая формула, а не урезанный ряд!*

2.10 Разложения в ряд нормального гравитационного поля

Так как земной эллипсоид очень близок к сфере, то величины

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt{a^2 - b^2} \text{ — линейный эксцентриситет,} \\
 e &= \frac{E}{a} \text{ — первый (числовой) эксцентриситет,} \\
 e' &= \frac{E}{b} \text{ — второй (числовой) эксцентриситет,} \\
 f &= \frac{a - b}{a} \text{ — сжатие,}
 \end{aligned}
 \tag{2 174}$$

и другие подобные параметры, характеризующие отклонение от сферы, малы. Вследствие этого, разложения в ряд по этим или подобным параметрам будут удобны для численных расчетов.

Линейная аппроксимация

Для того, чтобы читатели могли ориентироваться в последующих практических формулах, мы сначала рассмотрим аппроксимацию, линейную относительно сжатия f . Мы получим очень простые и симметричные формулы, которые, вместе с тем, выявляют структуру разложений высших порядков.

Известно, что радиус-вектор r эллипсоида приближенно выражается формулой

$$r = a(1 - f \sin^2 \varphi). \tag{2 175}$$

Мы увидим впоследствии, что нормальная сила тяжести может быть записана с той же степенью приближения как

$$\gamma = \gamma_a(1 + f^* \sin^2 \varphi). \tag{2 176}$$

При $\varphi = \pm 90^\circ$, то есть на полюсах, имеем $r = b$ и $\gamma = \gamma_b$. Следовательно, можно написать

$$b = a(1 - f), \quad \gamma_b = \gamma_a(1 + f^*), \tag{2 177}$$

и, решая это относительно f и f^* , получим

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{a - b}{a}, \\
 f^* &= \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a},
 \end{aligned}
 \tag{2 178}$$

где f является сжатием, определенным в (2 174) , а f^* – аналогичная величина, которую можно назвать *гравитационным сжатием*.

С тем же приближением, (2 143) можно записать в виде

$$f + f^* = \frac{5}{2} m, \quad (2 179)$$

где

$$m \approx \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} = \frac{\text{центробежная сила на экваторе}}{\text{сила тяжести на экваторе}}. \quad (2 180)$$

Это – *теорема Клеро* в своем первоначальном виде. Это одна из самых поразительных формул физической геодезии: (геометрическое) сжатие f в (2 178) может быть выражено через f^* и m , которые являются чисто динамическими величинами, получаемыми с помощью гравитационных измерений; то есть, *сжатие Земли может быть найдено с помощью гравитационных измерений*.

Формула Клеро является лишь первым приближением и может быть улучшена, во первых, включением в f членов высших степеней, и, во вторых, учетом отклонения поля силы тяжести Земли от нормального гравитационного поля. Но суть остается та же.

Разложение до членов второго порядка включительно

Теперь мы разложим замкнутые формулы двух предыдущих разделов в ряды по второму численному эксцентриситету e' и сжатию f до членов e'^4 или f^2 включительно. Членами порядков e'^6 или f^3 и выше мы будем пренебрегать.

Начнем с рядов

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{E}{u} &= \frac{E}{u} - \frac{1}{3} \left(\frac{E}{u} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{E}{u} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{E}{u} \right)^7 + \dots, \\ q &= 2 \left[\frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{E}{u} \right)^3 - \frac{2}{5 \cdot 7} \left(\frac{E}{u} \right)^5 + \frac{3}{7 \cdot 9} \left(\frac{E}{u} \right)^7 - \dots \right], \\ q' &= 6 \left[\frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{E}{u} \right)^3 - \frac{1}{5 \cdot 7} \left(\frac{E}{u} \right)^5 + \frac{1}{7 \cdot 9} \left(\frac{E}{u} \right)^7 - \dots \right]. \end{aligned} \quad (2 181)$$

Первые два ряда уже использовались в предыдущем разделе в (2 154) и (2 156), соответственно: третий получен подстановкой разложения арктангенса в ряд в замкнутую формулу (2 133) для q' .

На референц эллипсоиде S_0 имеем $u = b$ и

$$\frac{E}{u} = \frac{E}{b} = e', \quad (2 182)$$

так что

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} e' &= e' - \frac{1}{3} e'^3 + \frac{1}{5} e'^5 \dots, \\ q_0 &= \frac{2}{15} e'^3 \left(1 - \frac{6}{7} e'^2 \dots\right), \\ q'_0 &= \frac{2}{5} e'^2 \left(1 - \frac{3}{7} e'^2 \dots\right), \\ \frac{e' q'_0}{q_0} &= 3 \left(1 + \frac{3}{7} e'^2 \dots\right). \end{aligned} \quad (2-183)$$

Нам также потребуется ряд

$$b = \frac{a}{\sqrt{1+e'^2}} = a \left(1 - \frac{1}{2} e'^2 + \frac{3}{8} e'^4 \dots\right). \quad (2-184)$$

Потенциал и сила тяжести

Подставляя эти выражения в замкнутые формулы (2-123), (2-141), (2-142) и (2-143), мы получим следующие соотношения до членов порядка e'^4 включительно. Потенциал:

$$U_0 = \frac{GM}{b} \left(1 - \frac{1}{3} e'^2 + \frac{1}{5} e'^4\right) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad (2-185)$$

Сила тяжести на экваторе и полюсе:

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \frac{GM}{ab} \left(1 - \frac{3}{2} m - \frac{3}{14} e'^2 m\right), \\ \gamma_b &= \frac{GM}{a^2} \left(1 + m + \frac{3}{7} e'^2 m\right). \end{aligned} \quad (2-186)$$

Теорема Клеро:

$$f + f^* = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 b}{\gamma_a} \left(1 + \frac{9}{35} e'^2\right). \quad (2-187)$$

Отношение $\omega^2 a / \gamma_a$ может быть выражено как

$$\frac{\omega^2 a}{\gamma_a} = m + \frac{3}{2} m^2, \quad (2-188)$$

что является более точной версией (2-180).

Из первой формулы в (2-186) найдем

$$GM = ab \gamma_a \left(1 + \frac{3}{2} m + \frac{3}{14} e'^2 m + \frac{9}{4} m^2\right), \quad (2-189)$$

что выражает массу через экваториальную силу тяжести. С помощью этого соотношения мы можем выразить GM в (2.185) через γ_a , что дает

$$U_0 = a\gamma_a \left(1 - \frac{1}{3}e^2 + \frac{11}{6}m + \frac{1}{5}e^4 - \frac{2}{7}e^2m + \frac{11}{4}m^2\right). \quad (2.190)$$

Здесь мы исключили $\omega^2 a$, подставив вместо него GMm/b .

Теперь мы можем вернуться к формуле (2.146) для нормальной силы тяжести. Простые преобразование дают

$$\gamma = \gamma_a \frac{1 + \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_b} \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (2.191)$$

Знаменатель разлагается в биномиальный ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad (2.192)$$

Затем вводятся сокращенные ряды

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{a^2} &= \frac{e^2}{1 + e^2} = e^2 - e^4, \\ \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} &= -e^2 + \frac{5}{2}m^2 + e^4 - \frac{13}{7}e^2m + \frac{15}{4}m^2, \end{aligned} \quad (2.193)$$

и в результате мы получим

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_a \left[1 + \left(-\frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{2}m + \frac{1}{2}e^4 - \frac{13}{7}e^2m + \frac{15}{4}m^2 \right) \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{8}e^4 + \frac{5}{4}e^2m \right) \sin^4 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Мы также можем выразить эти величины через сжатие f , подставив соотношение

$$e^2 = \frac{1}{(1-f)^2} - 1 = 2f + 3f^2 + \dots \quad (2.195)$$

Сжатие f используется чаще всего; оно имеет небольшое преимущество по сравнению со вторым эксцентриситетом e' , так как обладает тем же порядком малости, что и m ; то, что величины m^2 , e^2m и e^4 имеют одинаковый порядок, видно не сразу. Получаем

$$GM = ab\gamma_a \left(1 + \frac{3}{2}m + \frac{3}{7}fm + \frac{9}{4}m^2\right), \quad (2.196)$$

$$U_0 = a \gamma_a \left(1 - \frac{2}{3} f + \frac{11}{6} m - \frac{1}{5} f^2 - \frac{4}{7} f m + \frac{11}{4} m^2 \right), \quad (2-197)$$

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_a \left[1 + \left(-f + \frac{5}{2} m + \frac{1}{2} f^2 - \frac{26}{7} f m + \frac{15}{4} m^2 \right) \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2} f^2 + \frac{5}{2} f m \right) \sin^4 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2-198)$$

Последнюю формулу обычно записывают сокращенно

$$\gamma = \gamma_a (1 + f_2 \sin^2 \varphi + f_4 \sin^4 \varphi), \quad (2-199)$$

где

$$\begin{aligned} f_2 = -f + \frac{5}{2} m + \frac{1}{2} f^2 - \frac{26}{7} f m + \frac{15}{4} m^2, \\ f_4 = -\frac{1}{2} f^2 + \frac{5}{2} f m. \end{aligned} \quad (2-200)$$

Подставив сюда

$$\sin^4 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi, \quad (2-201)$$

окончательно получим

$$\gamma = \gamma_a \left(1 + f^* \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} f_4 \sin^2 2\varphi \right), \quad (2-202)$$

где

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} = f_2 + f_4 \quad (2-203)$$

- "гравитационное сжатие".

Коэффициенты при сферических функциях

Из формулы (2-167) для главных моментов инерции сразу получим

$$\frac{C - A}{M E^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{45} \frac{m e'}{q_0}. \quad (2-204)$$

Воспользовавшись разложением q_0 в ряд (2-183), найдем

$$\frac{C - A}{M E^2} = \frac{1}{e^2} \left(\frac{1}{3} e'^2 - \frac{1}{3} m - \frac{2}{7} e'^2 m \right). \quad (2-205)$$

Подставив это в (2-170), получаем

$$\begin{aligned} -C_{20} = J_2 = \frac{C - A}{M E^2} = \frac{1}{3} e'^2 - \frac{1}{3} m - \frac{1}{3} e'^4 + \frac{1}{21} e'^2 m \\ = \frac{2}{3} f - \frac{1}{3} m - \frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{21} f m, \end{aligned} \quad (2-206)$$

$$-C_{40} = J_4 = -\frac{1}{5} e'^4 + \frac{2}{7} e'^2 m = -\frac{4}{5} f^2 + \frac{4}{7} f m. \quad (2-207)$$

Коэффициенты C или J более высоких степеней уже обладают тем порядком малости, которым мы пренебрегаем.

Сила тяжести над эллипсоидом

Под высотой над эллипсоидом будем понимать эллипсоидальную высоту h ; тогда нормальная сила тяжести γ_h на малой высоте может быть разложена в ряд по h :

$$\gamma_h = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} h^2 + \dots, \quad (2-208)$$

Здесь γ и ее производные отнесены к эллипсоиду, где $h = 0$.

Первую производную $\partial \gamma / \partial h$ можно получить, применив формулу Брунса (2 147) с учетом (2-148) к эллипсоидальной высоте h (вместо H):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - 2\omega^2, \quad (2-209)$$

где M, N – главные радиусы кривизны, определенные в (2-149). Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{b}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} = \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \varphi \dots \right), \\ \frac{1}{N} &= \frac{b}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} = \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 \varphi \dots \right), \end{aligned} \quad (2-210)$$

то

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{b}{a^2} (2 + 2e'^2 \cos^2 \varphi) = \frac{2b}{a^2} (1 + 2f \cos^2 \varphi). \quad (2-211)$$

Здесь мы ограничились членами, линейными относительно f , поскольку высота h имеет малую величину. Таким образом, из (2-209) после несложных преобразований пайдём

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2\gamma}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi). \quad (2-212)$$

Вторая производная $\partial^2 \gamma / \partial h^2$ может быть найдена с помощью сферической аппроксимации, достигаемой, если пренебречь e'^2 или f :

$$\gamma = \frac{GM}{a^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial a} = -\frac{2GM}{a^3}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial a^2} = \frac{6GM}{a^4}, \quad (2-213)$$

так что

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} = \frac{6\gamma}{a^2}. \quad (2-214)$$

Таким образом, мы получили

$$\gamma_h = \gamma \left[1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right]. \quad (2-215)$$

Используя формулу (2-198) для γ , мы можем также записать разность $\gamma_h - \gamma$ в виде

$$\gamma_h - \gamma = -\frac{2\gamma_a}{a} \left[1 + f + m + \left(-3f + \frac{5}{2} m \right) \sin^2 \varphi \right] h + \frac{3\gamma_a}{a^2} h^2. \quad (2-216)$$

Символом γ_h обозначена нормальная сила тяжести в точке с широтой φ , расположенной на высоте h над эллипсоидом; γ – сила тяжести на самом эллипсоиде для той же широты φ , что дается формулой (2-202) или эквивалентными формулами.

Разложения в ряд до членов второго порядка включительно для *внутреннего* гравитационного поля найдены в работе Moritz (1990, гл. 4).

2.11 Референц-эллипсоид: численные значения

Немного истории

Референц-эллипсоид и его гравитационное поле полностью определяются четырьмя константами. До начала эры спутников брали следующие четыре параметра:

$$\begin{aligned} a & \dots \text{ большая полуось,} \\ f & \dots \text{ сжатие,} \\ \gamma_a & \dots \text{ экваториальная сила тяжести,} \\ \omega & \dots \text{ угловая скорость.} \end{aligned} \quad (2-217)$$

Наиболее известными и широко используемыми были следующие значения этих параметров для *Международного эллипсоида*:

$$\begin{aligned} a & = 6\,378\,388.000 \text{ м,} \\ f & = 1/297.000, \\ \gamma_a & = 978.049\,000 \text{ гал,} \\ \omega & = 0.729\,211\,51 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (2-218)$$

Значения геометрических параметров a и f были определены в США Хейфордом в 1909 году по изостатически редуцированным астрономогеодезическим данным. Они были приняты для Международного эллипсоида ассамблей Международной Ассоциации Геодезии (IAG) в Мадриде в 1924 году. Значение экваториальной силы тяжести γ_a было найдено Heiskanen (1924, 1928) по изостатически редуцированным значениям силы тяжести. Соответствующая *международная формула силы тяжести*

$$\gamma = 978.0490 (1 + 0.005\,2884 \sin^2 \varphi - 0.000\,0059 \sin^2 2\varphi) \text{ гал,} \quad (2-219)$$

была принята ассамблеей IAG в Стокгольме в 1930 году; ее коэффициенты вычислил Cassinis (1930), исходя из указанных значений a, f, γ_a, ω с помощью формул (2-200), (2-202), (2-203).

Все параметры Международного эллипсоида и его гравитационного поля могут быть вычислены, исходя из (2-218) до любой желаемой степени точности, что ясно показывает внутреннюю непротиворечивость. В частности, пайдем следующие (округленные) значения

$$\begin{aligned} b &= 6\,356\,912 \text{ м}, \\ E &= 522\,976 \text{ м}, \\ e^2 &= 0.006\,7682, \\ m &= 0.003\,4499. \end{aligned} \quad (2-220)$$

Для коэффициентов в разложении нормального гравитационного поля в ряд по сферическим функциям имеем

$$\begin{aligned} -C_{20} &= J_2 = \frac{C - A}{M a^2} = 0.001\,0920, \\ -C_{40} &= J_4 = -0.000\,002\,43. \end{aligned} \quad (2-221)$$

Изменение нормальной силы тяжести с высотой задается формулой (2-216), которая для Международного эллипсоида выглядит так:

$$\gamma_h = \gamma - (0.308\,77 - 0.000\,45 \sin^2 \varphi) h + 0.000\,072 h^2; \quad (2-222)$$

здесь γ_h и γ измеряются в галах, а h – высота в километрах.

Хотя Международный эллипсоид уже не рассматривается как наилучшее приближение Земли эллипсоидом, он может быть использован как референц-эллипсоид для геодезических целей. Всякое официальное изменение системы отчета должно всегда быть тщательно обосновано, поскольку огромное количество данных может быть отнесено к этой системе.

В восточных странах использовался эллипсоид Красовского:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,245 \text{ м}, \\ f &= 1/298.3. \end{aligned} \quad (2-223)$$

Современные данные

После запуска первого искусственного спутника в 1957 году Международный Астрономический Союз принял в 1964 году новый набор значений констант, среди них $a = 6\,378\,160$ м и $f = 1/298.25$. Значение a , которое заметно меньше, чем соответствующая величина для Международного эллипсоида, получено, в частности, по астрономогеодезическим данным; изменение в значение J_2 и, следовательно, f , внесено по результатам наблюдений искусственных спутников.

Таблица 2.1: Параметры, определяющие GRS 1980

Параметр и его значение	Описание
$a = 6\,378\,137 \text{ м}$	большая полуось эллипсоида геоцентрическая гравитационная постоянная Земли (включая атмо- сферу)
$GM = 3\,986\,005 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$	
$J_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8}$	коэффициент динамического сжа- тия Земли (исключая остаточную деформацию за счет приливов)
$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$	угловая скорость вращения Земли

В 1967 году эти значения были приняты Международным Союзом Геодезии и Геофизики (IUGG) как *Геодезическая Система Отсчета 1967*.

Вскоре стало ясно, что это решение ошибочно; особенно это касалось значения параметра a , которое, как выяснилось, было слишком велико. Сейчас считается, что он имеет значение порядка 6378137 м; оно принято в Геодезической Системе Отсчета 1980 (GRS 1980) и основанной на ней Всемирной Геодезической Системе 1984 (WGS 84). Подробнее об этих системах будет сказано ниже.

Геодезическая система отсчета 1980 (GRS 1980)

GRS 1980 была принята XVII Генеральной Ассамблеей IUGG в Канберре в декабре 1979 года Резолюцией №7. По сути, эта резолюция, *признающая*, что Геодезическая Система Отсчета 1967, принятая на XIV Генеральной Ассамблее IUGG в Люцерне в 1967 году, больше не представляет размер, форму и гравитационное поле Земли с точностью, соответствующей многим геодезическим, геофизическим, астрономическим и гидрографическим приложениям, и *считающая*, что теперь доступны более подходящие значения, *рекомендует* заменить Геодезическую систему отсчета 1967 новой Геодезической Системой Отсчета 1980, которая также базируется на теории геоцентрического эквипотенциального эллипсоида. Четыре параметра, определяющих GRS 1980, приведены в табл. 2.1. Обратите внимание также на то, что GM , "геоцентрическая гравитационная постоянная" Земли, определяется как "произведение (ньютоновской) гравитационной постоянной и массы Земли".

На основании этих определяющих параметров и с использованием формул, приведенных в Moritz (1980 b), можно найти значения геометрических

и физических параметров, указанных в табл. 2.2. GRS 1980 все еще (2005)

Таблица 2.2: Производные константы GRS 1980

Параметр и его значение	Описание
Геометрические константы	
$b = 6\,356\,752.3141$ м	малая полуось эллипсоида
$E = 521\,854.0097$ м	линейный эксцентриситет
$c = 6\,399\,593.6259$ м	полярный радиус кривизны
$e^2 = 0.006\,694\,380\,022\,90$	квадрат первого эксцентриситета
$e'^2 = 0.006\,739\,496\,775\,48$	квадрат второго эксцентриситета
$f = 0.003\,352\,810\,681\,18$	сжатие
$1/f = 298.257\,222\,101$	обратное сжатие
Физические константы	
$U_0 = 62\,636\,860.850$ м ² с ⁻²	нормальный потенциал на эллипсоиде
$J_4 = -0.000\,002\,370\,912\,22$	зональный коэффициент 4-ой степени
$J_6 = 0.000\,000\,006\,083\,47$	зональный коэффициент 6-ой степени
$J_8 = -0.000\,000\,000\,014\,27$	зональный коэффициент 8-ой степени
$m = 0.003\,449\,786\,003\,08$	$m = \omega^2 a^2 b / (GM)$
$\gamma_a = 9.780\,326\,7715$ м с ⁻²	нормальная сила тяжести на экваторе
$\gamma_b = 9.832\,186\,3685$ м с ⁻²	нормальная сила тяжести на полюсе

действительна как официальная система отсчета IUGG и составляет основу WGS 84.

Всемирная Геодезическая Система 1984 (WGS 84)

Как уже упоминалось, WGS 84 может рассматриваться как своего рода потомок GRS 1980. Важность WGS 84 продолжает возрастать, и потому уместно описать её несколько более детально.

Следуя National Imagery and Mapping Agency (2000) США, WGS 84 представляет собой некоторую общепринятую наземную систему отсчета (Conventional Terrestrial Reference System (CTRS)), построенную по следующим критериям Международной службы вращения Земли (International Earth Rotation Service (IERS)):

- система геоцентрична, при этом центр масс определяется для всей Земли, включая океаны и атмосферу;
- её масштаб соответствует шкале наземной системе отсчета в смысле релятивистской теории гравитации;

- её исходная ориентация 1984.0 определена Международным бюро (Bureau International de l'Heure (БИН));
- её временная эволюция в ориентации не создает никакого остаточного глобального вращения относительно земной коры.

WGS 84 является правой жестко связанной с Землей ортогональной системой координат. Её начало и оси определены следующим образом:

- начало совпадает с центром масс Земли;
- ось Z направлена на IERS отсчётный полюс (IRS), что соответствует направлению БИН на земной полюс (Conventional Terrestrial Pole (CTR)) эпохи 1984.0; другими словами, ось Z, по договоренности, идентична среднему положению оси вращения Земли;
- ось X представляет собой пересечение IERS отсчётного меридиана (IERS Reference Meridian (IRM)) с плоскостью, проходящей через начало перпендикулярно оси Z; международный отсчётный меридиан IRM совпадает с нулевым меридианом БИН эпохи 1984.0; другими словами ось X связана со средним гринвичским меридианом;
- ось Y ортогонально дополняет центрированную с Землей и жестко связанную с Землей (earth-centered-earth-fixed (ECEF)) систему координат до правой.

Начало отсчёта WGS 84 является также геометрическим центром WGS 84 эллипсоида, а ось Z служит осью вращения этого эллипсоида.

На этом заканчивается описание WGS 84 в соответствии с National Imagery and Mapping Agency (2000). Заметим, что определение WGS 84 CTRS существенно не изменилось.

Отсчётные системы: WGS 84 и ITRF

Необходимо делать различие между *определением* и *реализацией*. Когда мы говорим "координатная система" или "отсчётная система", то подразумеваем только определение; если мы имеем в виду реализацию, то следует говорить "координатная конструкция" (Mueller 1985). До сих пор мы говорили об определении WGS 84 и потому нам следовало пользоваться обозначением WGS 84 CTRS. Теперь мы рассмотрим реализацию и будем пользоваться термином "координатная конструкция". Согласно National Imagery and Mapping Agency (2000) и Hofmann-Wellenhof et al (2001, sect.3.2.1), примером наземной отсчётной конструкции является на базе предыдущего определения отсчётная конструкция WGS 84 (часто обозначаемая просто как WGS 84, и мы тоже так

будем делать). Соответствующий этой конструкции эллипсоид вращения изначально определен четырьмя параметрами: 1) большой полуосью a , 2) нормированным зональным коэффициентом \bar{C}_{20} , 3) округлённой угловой скоростью вращения Земли ω и 4) гравитационной постоянной Земли G . Эта конструкция используется для GRS с 1987 года.

Другой пример отсчётной конструкции построен IERS и называется Международной земной отсчётной конструкцией (International Terrestrial Reference Frame, (ITRF)) (McCarthy 1996). Определение её осей аналогично WGS 84, то есть ось Z определяется IERS отсчётным полюсом (IRP), а ось X лежит в плоскости IERS отсчётного меридиана (IRM); однако, реализация отличается! ITRF реализуется определённым количеством наземных станций, где во внимание принимаются и временные эффекты (движение тектонических плит, приливные явления). Таким образом, ITRF регулярно обновляется (почти каждый год) и акроним дополняется двумя цифрами последнего года обновления, например, ITRF89, ITRF90, ITRF91, ITRF92, ITRF93, ITRF94, ITRF95, ITRF96, ITRF97 или полным указанием года, например, ITRF2000.

Сравнение начал WGS 84 и ITRF обнаруживает примечательные различия (Malys and Slater 1994):

1. WGS 84 установлена посредством доплеровских наблюдений спутниковой системой TRANSIT, тогда как ITRF основана на спутниковых лазерных дальностях (SLR) и длиннобазисной интерферометрии (VLBI). Точность станций системы TRANSIT оценивается величиной порядка 1 -- 2 метра, тогда как точность ITRF станций имеет сантиметровый уровень.
2. Численные значения первоначально определённых параметров отличаются от параметров ITRF. Однако, единственное значимое отличие было в гравитационной постоянной Земли $G_{WGS} - G_{ITRF} = 0.582 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$ за счёт небольшой разности спутниковых орбит.

В связи со сказанным, бывшее Военное Картографическое Агентство США (U.S. Defence Mapping Agency (DMA)) предложило заменить значение G в WGS 84 стандартным IERS значением и уточнить координаты GPS станций слежения. Подправленная WGS 84, начиная с 2 января 1994 года, стала называться WGS 84 (G 730), где 'G' указывает на то, что соответствующие координаты получены с помощью GPS, а 730 есть номер GPS недели, когда DMA осуществило коррекцию системы. В 1996 году Национальное Картографическое Агентство США (U.S. National Imagery and Mapping Agency (NIMA)) – преемник DMA – выполнило новое уточнение, и с 29 сентября 1996 года конструкция стала называться WGS 84 (G 873). Она реализуется станциями наблюдений с уточненными координатами. Соответствующий эллипсоид и его

гравитационное поле теперь определяются четырьмя параметрами a, f, GM, ω , которые очень мало отличаются от соответствующих ITRF значений. Например, современная WGS 84 (G 873) конструкция и ITRF97 имеют незначительные систематические различия (меньше 2 см). На практике обе конструкции считаются идентичными.

Заметим, что исправления отсчётной конструкции WGS 84 уменьшили неопределённости в её координатах, гравитационном поле и высотах геоида, но *никак не изменили определения WGS 84 в смысле координатной системы!*

В общем, соотношение между WGS 84 и ITRF характеризуется двумя положениями: 1) WGS 84 и ITRF непротиворечивы; 2) различия между WGS 84 и ITRF по всей Земле имеют сантиметровый уровень (National Imagery and Mapping Agency 2000).

Если, однако, требуется преобразование между отсчётными конструкциями, то оно выполняется путём преобразования исходных дат (см. разд.5.7).

Численные значения для отсчётной конструкции WGS 84

Как отмечалось в самом начале раздела 2.11, отсчётный эллипсоид и его гравитационное поле полностью определяются четырьмя константами. Их значения для WGS 84 перечислены в таблице 2.3.

Таблица 2.3: Параметры, определяющие WGS 84

Параметр и его значение	Описание
$a = 6\,378\,137$ м	большая полуось эллипсоида
$f = 1/298.257\,223\,563$	сжатие эллипсоида
$GM = 3\,986\,004.418 \cdot 10^8$ м ³ с ⁻²	геоцентрическая гравитационная постоянная Земли (включая атмосферу)
$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11}$ рад · с ⁻¹	угловая скорость вращения Земли

Первоначально параметрами, определяющими референц эллипсоид WGS 84, служили большая полуось a , произведение массы Земли и гравитационной постоянной GM (называемой также "геоцентрической гравитационной постоянной Земли"), нормированный гравитационный зональный коэффициент 2-ой степени C_{20} и угловая скорость вращения Земли ω . После тщательного анализа этих первоначально определяющих параметров DMA рекомендовала уточнённое значение GM , но значение полуоси $a = 6378137$ м и значение сжа-

тия $f = 1.298.257223563$ было решено оставить без изменения. В результате в качестве определяющих параметров были выбраны a, f, GM, ω .

Вследствие такого нового выбора определяющих параметров приходится различать два значения параметра C_{20} : одно выводится динамически, а другое геометрически по определяющим параметрам. Геометрический вывод по определяющим параметрам a, f, GM, ω даёт $C_{20} = -0.484166774985 \cdot 10^{-3}$ и отличается от первоначального значения на $7.5015 \cdot 10^{-11}$. Другие детали см. в National Imagery and Mapping Agency (2000).

В заключение приведём полезную таблицу геометрических и физических констант, связанных с референц-эллипсоидом WGS 84 и полученных по его четырём определяющим параметрам, см. табл. 2.4.

Таблица 2.4: Производные константы референц-эллипсоида WGS 84

Параметр и его значение	Описание
Геометрические константы	
$C_{20} = -0.484166774985 \cdot 10^{-3}$	нормир. зональный коэффициент 2-ой степени
$b = 6356752.3142$ м	малая полуось эллипсоида
$e = 8.1819190842622 \cdot 10^{-2}$	первый эксцентриситет
$e^2 = 6.69437999014 \cdot 10^{-3}$	квадрат первого эксцентриситета
$e' = 8.2094437949696 \cdot 10^{-2}$	второй эксцентриситет
$e'^2 = 6.73949674228 \cdot 10^{-3}$	квадрат второго эксцентриситета
$E = 5.2185400842339 \cdot 10^5$	линейный эксцентриситет
$c = 6399593.6258$ м	полярный радиус кривизны
$b/a = 0.996647189335$	отношение осей
Физические константы	
$U_0 = 62636851.7146$ м ² с ⁻²	нормальный потенциал на эллипсоиде
$\gamma_a = 9.7803253359$ м с ⁻²	нормальная сила тяжести на экваторе
$\gamma_b = 9.8321849378$ м с ⁻²	нормальная сила тяжести на полюсе
$\bar{\gamma} = 9.7976432222$ м с ⁻²	среднее значение нормальной силы тяжести
$M = 5.9733328 \cdot 10^{24}$ кг	масса Земли (включая атмосферу)
$m = 0.00344978650684$	$m = \omega^2 a^2 b / (GM)$

Численное сравнение GRS 1980 и WGS 84

Как уже выше отмечалось, основой WGS 84 является GRS 1980. Однако, за счёт, с одной стороны, различных определяющих параметров, и с другой стороны, уточнённого значения GM для WGS 84, возникают небольшие числен-

ные различия между GRS 1980 и WGS 84. Некоторые из этих различий приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5: Численное сравнение GRS 1980 и WGS 84

Параметр	GRS 1980	WGS 84
GM	$3\,986\,005 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$	$3\,986\,004.418 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$
$1/f$	298.257 222 101	298.257 223 563
b	6 356 752.3141 м	6 356 752.3142 м
e^2	0.006 694 380 022 90	0.006 694 379 990 14
e'^2	0.006 739 496 775 48	0.006 739 496 742 28
E	521 854.0097 м	521 854.0084 м
c	6 399 593.6259 м	6 399 593.6258 м
U_0	$62\,636\,860.850 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	$62\,636\,851.7146 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$
γ_a	$9.780\,326\,7715 \text{ м с}^{-2}$	$9.780\,325\,3359 \text{ м с}^{-2}$
γ_b	$9.832\,186\,3685 \text{ м с}^{-2}$	$9.832\,184\,9378 \text{ м с}^{-2}$
m	0.003 449 786 003 08	0.003 449 786 506 84

2.12 Аномальное поле силы тяжести, высоты геоида и уклонения отвесных линий

Та небольшая разница, которая существует между реальным W и нормальным U гравитационными потенциалами, обозначается буквой T , так что

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z); \quad (2-224)$$

T называется *аномальным потенциалом*, или *возмущающим потенциалом*. Сравним геоид

$$W(x, y, z) = W_0 \quad (2-225)$$

с референц эллипсоидом

$$U(x, y, z) = W_0 \quad (2-226)$$

при одинаковых значениях потенциала: $U_0 = W_0$. Точка P геоида проектируется в точку Q эллипсоида вдоль нормали к эллипсоиду (рис. 2.12). Расстояние PQ между геоидом и эллипсоидом называется *высотой геоида* и обозначается буквой N . К сожалению, имеется некоторая накладка в системе обозначений. В геодезической литературе одинаково часто буквой N обозначают как нормальный радиус кривизны, так и высоту геоида. Мы будем следовать этой практике, так как шанс возникновения путаницы невелик.

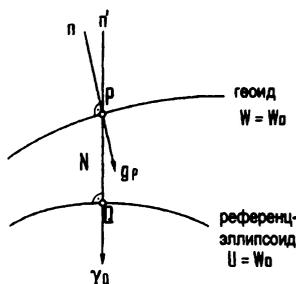


Рис. 2.12: Геоид и референц-эллипсоид

Рассмотрим теперь вектор силы тяжести \mathbf{g} в точке P и вектор нормальной силы тяжести γ в точке Q . Вектор аномалии силы тяжести $\Delta \mathbf{g}$ определяется как разность:

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \gamma_Q. \quad (2.227)$$

Вектор, как известно, характеризуется длиной и направлением. Разность длин называется *аномалией силы тяжести*

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q; \quad (2.228)$$

разность направлений – *уклонением отвеса*. Уклонение отвеса может быть составлено из двух компонент: северно–южной компоненты ξ и восточно–западной компоненты η (рис. 2.13).

Поскольку направление отвеса напрямую определяется астрономическими координатами – широтой Φ и долготой Λ – то компоненты ξ и η могут быть просто выражены через них. Реальные астрономические координаты точки P геоида, которые определяют направление отвеса n или вектора силы тяжести \mathbf{g} , могут быть найдены астрономическими измерениями. Эллипсоидальные координаты (или геодезические, рассматриваемые как географические координаты на эллипсоиде), задаваемые направлением нормали n' к эллипсоиду, обозначаются как φ и λ – но их не следует путать с эллипсоидально–гармоническими координатами разд. 1.15! Ясно, что это λ идентично геоцентрической долготе (а также эллипсоидально–гармонической долготе). Таким образом,

нормаль n к геоиду определяет астрономические координаты Φ, Λ ;

нормаль n' к эллипсоиду определяет эллипсоидальные координаты φ, λ .

(2-229)

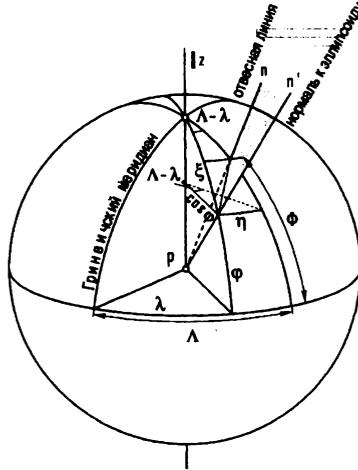


Рис. 2.13: Уклонение отвеса иллюстрируется с помощью единичной сферы с центром в точке P

Из рис. 2.13 видим, что

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi.\end{aligned}\quad (2\ 230)$$

Можно также сравнить векторы \mathbf{g} и γ в той же точке P . Тогда мы получим вектор возмущения силы тяжести

$$\delta\mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \gamma_P. \quad (2\ 231)$$

Соответствующая разность длин называется *возмущением силы тяжести*¹

$$\delta g = g_P - \gamma_P. \quad (2\ 232)$$

Разность в направлении – то есть уклонение отвеса – остается той же, что и прежде, так как направления γ_P и γ_Q фактически совпадают.

Возмущение силы тяжести идейно проще, чем аномалия силы тяжести, но не так важно для наземной геодезии. Значимость аномалии силы тяжести состоит в том, что она задается непосредственно: сила тяжести g измеряется на геоиде (или редуцируется на него), см. главу 3, а нормальная сила тяжести γ вычисляется для эллипсоида.

¹В русскоязычной литературе δg обычно называют *чистой аномалией силы тяжести*, а Δg – *смешанной аномалией силы тяжести* (прям. ред.)

Очень важное замечание

До сих пор, по историческим причинам, значения аномалии силы тяжести Δg были доступны и подвергались обработке гораздо чаще, чем возмущения силы тяжести δg . Однако GPS определяет координаты точки P , а не Q . Поэтому можно ожидать, что в будущем δg станет более важным понятием, чем Δg .

Однако, отражая существующее состояние дел в физической геодезии, мы продолжим работать, главным образом, с Δg . Большинство утверждений, относящихся к Δg , с очевидными изменениями (такими, как поправки Молодецкого (см. главу 8)) оказываются применимыми и к δg , а формула Стокса заменяется формулой Коха (см. ниже в этой главе).

Соотношения

Между только что определенными понятиями существует несколько базовых математических соотношений. Так как

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_Q N = U_Q - \gamma N, \quad (2-233)$$

то

$$W_P = U_P + T_P = U_Q - \gamma N + T_P. \quad (2-234)$$

Поскольку

$$W_P = U_Q = W_0, \quad (2-235)$$

то

$$T = \gamma N \quad (2-236)$$

(где слева опущен нижний индекс P), или

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (2-237)$$

Это – известная *формула Брунса*, связывающая высоту геоида с возмущающим потенциалом.

Далее рассмотрим возмущение силы тяжести. Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \text{grad } W, \\ \gamma &= \text{grad } U, \end{aligned} \quad (2-238)$$

то вектор возмущения силы тяжести (2-231) имеет вид

$$\delta \mathbf{g} = \text{grad } (W - U) = \text{grad } T \equiv \left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right]. \quad (2-239)$$

При этом

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}, \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial n'} \approx -\frac{\partial U}{\partial n}, \quad (2.240)$$

так как направления нормалей n и n' почти совпадают. Поэтому возмущение силы тяжести задается как

$$\delta g = g_P - \gamma_P = -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n'}\right) \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\right) \quad (2.241)$$

или

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial n}. \quad (2.242)$$

Поскольку высота h отсчитывается вдоль нормали, можно также написать, что

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (2.243)$$

Сравнивая (2.242) с (2.239), видим, что возмущение силы тяжести δg , представляющее собой разность длин реального и нормального векторов силы тяжести, является также *нормальным компонентом вектора возмущения силы тяжести*.

Обратимся теперь к аномалии силы тяжести Δg . Поскольку

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.244)$$

то

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N. \quad (2.245)$$

Вспомнив определение (2.228) аномалии силы тяжести и принимая во внимание формулу Брунса (2.237), мы получим следующие эквивалентные соотношения:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.246)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.247)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T, \quad (2.248)$$

$$\delta g = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2.249)$$

$$\delta g = \Delta g - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T, \quad (2.250)$$

связывающие различные количественные характеристики аномального поля силы тяжести.

Еще одно эквивалентное выражение:

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0. \quad (2-251)$$

Это выражение было названо *фундаментальным уравнением физической геодезии*, потому что оно связывает измеряемую величину Δg с неизвестным аномальным потенциалом T . Возможно, что в будущем его заменит соотношение

$$\frac{\partial T}{\partial h} + \delta g = 0. \quad (2-252)$$

Оно имеет вид дифференциального уравнения в частных производных. Если бы значение Δg было известно всюду в пространстве, то (2-251) можно было бы рассматривать и решать как дифференциальное уравнение в частных производных. Однако, поскольку Δg известно только на поверхности (геоида), фундаментальное уравнение (2-251) может использоваться только как *граничное условие*, которого в отдельности недостаточно для вычисления T . Поэтому название "дифференциальное уравнение физической геодезии", которое иногда используется по отношению к (2-251), лишь вводит в заблуждение.

Обычно предполагается, что вне геоида нет никаких масс. На самом деле это не так. В то же время, мы не производим наблюдений непосредственно на геоиде; они производятся на физической поверхности Земли. При редуцировании измеренной силы тяжести на геоид воздействие масс, расположенных вне геоида, удаляется вычислением, так что мы можем действительно предполагать, что все массы заключены внутри геоида (см. гл. 3 и 8).

Так как плотность ρ равна нулю всюду вне геоида, то возмущающий потенциал T там гармоничен и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (2-253)$$

Это – настоящее дифференциальное уравнение в частных производных, достаточное (если его дополнить граничным условием (2-251)) для определения значений T в каждой точке вне геоида. Если переписать граничное условие в виде

$$-\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T = \Delta g, \quad (2-254)$$

где Δg предполагается известной в каждой точке геоида, то мы увидим, что линейная комбинация T и $\partial T / \partial n$ задается на всей этой поверхности. Согласно разд. 1.13, нахождение T в указанных условиях представляет собой *третью краевую задачу теории потенциала*. Если она решена для T , то высота геоида, которая является самой важной геометрической величиной в физической геодезии, может быть вычислена с помощью формулы Брунса (2-237).

Итак, мы можем сказать, что основная задача физической геодезии – определение геоида с помощью гравиметрических измерений – является, по существу, третьей краевой задачей теории потенциала.

2.13 Сферическая аппроксимация и разложение возмущающего потенциала в ряд по шаровым функциям

Референц-эллипсоид отклоняется от сферы лишь на величины того же порядка, что и сжатие $f \approx 3 \cdot 10^{-3}$. Поэтому, если мы будем рассматривать референц-эллипсоид как сферу в формулах, связывающих количественные характеристики апомального поля, это может вызывать относительную ошибку того же порядка. Такая погрешность обычно допустима для величин N , T , Δg , δg , и т.д. Например, абсолютное воздействие этой относительной ошибки на высоту геоида имеет порядок $3 \cdot 10^{-3} N$; поскольку N едва превышает 100 м, то можно ожидать, что эта погрешность будет менее 1 м.

В сферической аппроксимации

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3}, \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2}{r}. \quad (2-255)$$

Введем средний радиус R Земли. Он часто определяется как радиус сферы, которая имеет тот же объем, что и земной эллипсоид; из условия

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b, \quad (2-256)$$

получим

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}. \quad (2-257)$$

Подобным образом мы можем определить среднее значение силы тяжести γ_0 , как нормальную силу тяжести на широте $\varphi = 45^\circ$ (Moritz 1980b: с. 403). Обычно используются следующие численные значения этих величин:

$$R = 6371 \text{ км}, \quad \gamma_0 = 980.6 \text{ гал}. \quad (2-258)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} &= -\frac{2}{R}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial h} &= -\frac{2\gamma_0}{R}. \end{aligned} \quad (2-259)$$

Так как нормаль к сфере направлена по радиус-вектору r , то с той же степенью точности имеем

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2-260)$$

В теореме Брунса (2-237) мы можем заменить γ на γ_0 , и формулы с (2-246) по (2-251) принимают вид

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g + \frac{2\gamma_0}{R} N, \quad (2-261)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\gamma_0}{R} N, \quad (2-262)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T, \quad (2-263)$$

$$\delta g = \Delta g + \frac{2\gamma_0}{R} N, \quad (2-264)$$

$$\delta g = \Delta g + \frac{2}{R} T, \quad (2-265)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R} T + \Delta g = 0. \quad (2-266)$$

Последняя формула представляет собой сферическую аппроксимацию фундаментального граничного условия.

Замечание

Очень важно помнить о роли сферической аппроксимации. Она используется только в формулах, связывающих малые величины T , N , Δg , δg , и т.д. Референц-поверхность *никогда* не является сферой ни в каком геометрическом смысле, она всегда является эллипсоидом. Поскольку сжатие f очень мало, эллипсоидальные формулы могут быть разложены в степенной ряд по f , где всеми членами, содержащими f , f^2 , и т.д., можно пренебречь. Таким образом получаются формулы, точные для сферы, которые также могут быть использованы как приближенные для реального референц-эллипсоида. Однако нормальная сила тяжести γ в аномалии силы тяжести $\Delta g = g - \gamma$ должна быть вычислена для эллипсоида с высокой степенью точности. Не следует говорить о "референц сфере" в пространстве в любом геометрическом смысле, так как это только вводит в заблуждение.

Возмущающий потенциал $T = W - U$ является гармонической функцией и потому он может быть разложен в ряд по шаровым функциям:

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2\ 267)$$

$T_n(\vartheta, \lambda)$ – сферическая функция Лапласа степени n . На геоиде, которому в сферической аппроксимации соответствует сфера $r = R$, формально мы имеем

$$T = T(R, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-268)$$

Здесь нас не должны беспокоить вопросы сходимости. Дифференцируя ряд (2-267) по r , получим

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-269)$$

На геоиде, где $r = R$, это даст

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-270)$$

Эти ряды выражают возмущение силы тяжести в терминах шаровых функций.

Следующее выражение является эквивалентом формулы (2-263) вне Земли

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T. \quad (2-271)$$

Его точный смысл будет обсужден в конце следующего раздела. Подставив (2-269) и (2-267) в это выражение, получим

$$\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-272)$$

На геоиде (2-272) принимает такой вид

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-273)$$

Это – разложение аномалии силы тяжести в ряд по шаровым функциям.

Заметим, что, даже если возмущающий потенциал T содержит сферическую функцию первой степени $T_1(\vartheta, \lambda)$, то в выражении для Δg она будет умножена на коэффициент $1 - 1 = 0$; таким образом, Δg никогда не может содержать сферическую функцию первой степени.

2.14 Аномалии силы тяжести вне Земли

Если гармоническая функция H задана на поверхности Земли, то в сферической аппроксимации значения H вне Земли могут быть вычислены с помощью интегральной формулы Пуассона (1-123)

$$H_P = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r^2 - R^2}{l^3} H d\sigma. \quad (2-274)$$

Символ \iint_{σ} представляет собой обычную запись интеграла, взятого по всей единичной сфере. Смысл других обозначений виден из рис. 2.14. Значение гармонической функции на перемещенном элементе поверхности $R^2 d\sigma$ обозначено просто как H , тогда как символ H_P относится к фиксированной точке P . Далее имеем

$$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}. \quad (2-275)$$

Гармоническая функция H может быть разложена в ряд по шаровым функциям:

$$H = \left(\frac{R}{r}\right) H_0 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 H_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n. \quad (2-276)$$

Опуская члены нулевой и первой степеней, мы получим новую функцию

$$H' = H - \left(\frac{R}{r}\right) H_0 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 H_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n. \quad (2-277)$$

Согласно формуле (1-89), сферические функции задаются так:

$$H_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} H d\sigma, \quad H_1 = \frac{3}{4\pi} \iint_{\sigma} H \cos \psi d\sigma. \quad (2-278)$$

Подставив теперь H_0 и H_1 из (2-278) в (2-277) и выражая там H с помощью интеграла Пуассона (2-274), получим

$$H'_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right) H d\sigma. \quad (2-279)$$

Причиной такого преобразования интеграла Пуассона служит то, что формулы физической геодезии упрощаются, если участвующие в них члены не содержат сферических функций нулевой и первой степеней. Поэтому полезно выделять эти функции. В преобразованном интеграле Пуассона (2-279) это делается автоматически.

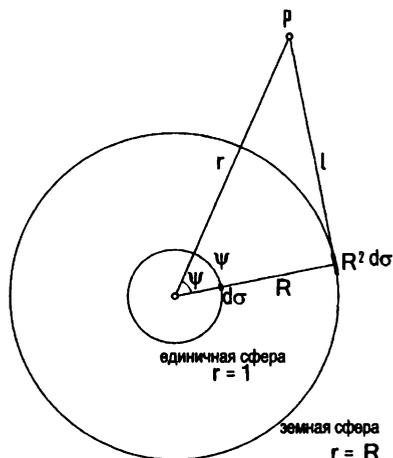


Рис. 2.14: Обозначения для интеграла Пуассона и формул, выведенных из него

Воспользуемся теперь этими формулами для нахождения аномалии силы тяжести вне Земли. Из формулы (2·272) сразу следует, что

$$r \Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-280)$$

Так как $T_n(\vartheta, \lambda)$ является сферической функцией Лапласа, то теми же свойствами обладает и функция $(n-1)T_n$. Следовательно, $r \Delta g$, рассматриваемая как пространственная функция, может быть разложена в ряд по шаровым функциям, а значит, сама является гармонической. Это позволяет нам применить к функции $r \Delta g$ формулу Пуассона, что даёт

$$r \Delta g_P = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right) R \Delta \sigma, \quad (2-281)$$

или

$$\Delta g_P = \frac{R^2}{4\pi r} \iint_{\sigma} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right) \Delta g \, d\sigma. \quad (2-282)$$

Мы получили формулу, позволяющую вычислять аномалию силы тяжести вне Земли, исходя из ее значений на поверхности, то есть осуществлять продолжение аномалии силы тяжести вверх.

В заключение обсудим точный смысл понятия аномалии силы тяжести δg_P вне Земли. Начнем с удобного определения. Уровневые поверхности реального потенциала силы тяжести, то есть поверхности

$$W = \text{const}, \quad (2-283)$$

часто называют *геопотенциальными поверхностями*; уровневые поверхности нормального поля силы тяжести, то есть поверхности

$$U = \text{const}, \quad (2-284)$$

называют *сферопотенциальными поверхностями*.

Рассмотрим теперь точку P вне Земли (рис. 2.15)



Рис. 2.15: Геопотенциальная и сферопотенциальная поверхности

и обозначим геопотенциальную поверхность, проходящую через нее, как

$$W = W_P. \quad (2-285)$$

Для константы W_P существует также и сферопотенциальная поверхность

$$U = W_P. \quad (2-286)$$

Линия отвеса нормального поля, проходящая через точку P , пересекает эту сферопотенциальную поверхность в точке Q , которая, как говорят, соответствует точке P .

Мы видим, что уровневые поверхности $W = W_P$ и $U = W_P$ связаны друг с другом так же, как и геоид $W = W_0$ связан с референс-эллипсоидом $U = W_0$. Поэтому, если аномалия силы тяжести определена, в соответствии с разд. 2.12, как

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q, \quad (2-287)$$

то все рассуждения и формулы того параграфа остаются верными и для данного случая; при этом геоид $W = W_0$ заменяется геопотенциальной поверхностью $W = W_P$, а эллипсоид $U = W_0$ — сферопотенциальной поверхностью

$U = W_P$. По этой же причине формула (2-271) применима к точке P , так же как и к точкам геоида.

Заметим, что в разд. 2.12 точка P является точкой геоида, которая на рис. 2.15 обозначена как P_0 .

Мы вернёмся к этим вопросам в главе 8 в связи с проблемой Молоденского.

2.15 Формула Стокса

Основное уравнение (2-271)

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T \quad (2-288)$$

рассматривается как граничное условие, если аномалия силы тяжести Δg известна только на поверхности Земли. Однако, мы теперь в состоянии вычислить аномалию силы тяжести вне Земли с помощью интеграла продолжения вверх (2-282). Таким образом, наше основное уравнение радикально изменяет свое значение, действительно становясь дифференциальным уравнением, которое может быть проинтегрировано относительно r . Заметим, что это возможно только благодаря тому, что T , помимо граничного условия, удовлетворяет также уравнению Лапласа $\Delta T = 0$.

Умножая (2-288) на $-r^2$, имеем

$$-r^2 \Delta g = r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + 2r T = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 T). \quad (2-289)$$

Интегрируя выражение

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T) = -r^2 \Delta g(r) \quad (2-290)$$

в пределах от ∞ до r , получим

$$r^2 T \Big|_{\infty}^r = - \int_{\infty}^r r^2 \Delta g(r) dr, \quad (2-291)$$

где обозначение $\Delta g(r)$ указывает на то, что Δg здесь является функцией r , найденной исходя из аномалии силы тяжести на поверхности посредством формулы (2-282). Так как эта формула автоматически удаляет сферические функции нулевой и первой степени из $\Delta g(r)$, то возмущающий потенциал T , вычисленный таким образом, не может содержать этих функций. Таким образом, имеем

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n = \frac{R^3}{r^3} T_2 + \frac{R^4}{r^4} T_3 + \dots \quad (2-292)$$

Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{R^3}{r} T_2 + \frac{R^4}{r^2} T_3 + \dots \right) = 0, \quad (2-293)$$

так что

$$r^2 T \Big|_{\infty}^r = r^2 T - \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = r^2 T \quad (2-294)$$

и

$$r^2 T = - \int_{\infty}^r r^2 \Delta g(r) dr. \quad (2-295)$$

Тот факт, что r здесь используется и как переменная интегрирования, и как верхний предел интегрирования, не должен вызывать каких-либо затруднений. Подставляя интеграл (2-282) продолжения вверх аномалии силы тяжести, получим

$$r^2 T = \frac{R^2}{4\pi} \int_{\infty}^r \left[\iint_{\sigma} \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) \Delta g d\sigma \right] dr. \quad (2-296)$$

Изменение порядка интегрирования даёт

$$r^2 T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\int_{\infty}^r \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) dr \right] \Delta g d\sigma. \quad (2-297)$$

Интеграл, стоящий в скобках, может быть вычислен стандартными методами. Неопределенный интеграл :

$$\int \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) dr \quad (2-298)$$

$$= \frac{2r^2}{l} - 3l - 3R \cos \psi \ln(r - R \cos \psi + l) + r + 3R \cos \psi \ln r.$$

Читателю советуем выполнить это интегрирование, принимая во внимание (2-275), или, по крайней мере, проверить результат, продифференцировав правую часть по r .

Для больших значений r имеем

$$l = r \left(1 - \frac{R}{r} \cos \psi \dots \right) = r - R \cos \psi \dots, \quad (2-299)$$

и, следовательно, при $r \rightarrow \infty$ правая часть вышеупомянутого неопределенного интеграла стремится к

$$5R \cos \psi - 3R \cos \psi \ln 2. \quad (2-300)$$

Если мы вычтем это выражение из неопределенного интеграла, то получим определенный интеграл, так как бесконечность – его нижний предел интегрирования. Таким образом,

$$\int_{\infty}^r \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) dr \quad (2-301)$$

$$= \frac{2r^2}{l} + r - 3l - R \cos \psi \left(5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right).$$

В результате получаем формулу Пицетти

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(r, \psi) \Delta g \, d\sigma, \quad (2-302)$$

где

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3 \frac{Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos \psi \left(5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right). \quad (2-303)$$

На самом геоиде $r = R$; обозначив $T(R, \vartheta, \lambda)$ просто как T , получим

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \, d\sigma, \quad (2-304)$$

где

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2-305)$$

получено из $S(r, \psi)$, положив

$$r = R \quad \text{и} \quad l = 2R \sin \frac{\psi}{2}. \quad (2-306)$$

По теореме Брунса, $N = T/\gamma_0$, и мы окончательно имеем

$$N = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \, d\sigma. \quad (2-307)$$

Эта формула была опубликована Стоксом в 1849 году и поэтому называется *формулой Стокса*, или *интегралом Стокса*. Это, безусловно, самая важная формула физической геодезии, потому что она позволяет *определить геоид по данным о силе тяжести*. Выражение (2-304) также называют формулой Стокса, а $S(\psi)$ известна как функция Стокса.

Используя формулу (2-302), которая была получена Pizzetti (1911) и позже Vening Meinesz (1928), мы можем вычислить возмущающий потенциал T в любой точке вне Земли. Поделив T на нормальную силу тяжести в данной точке P (теорема Брунса), мы определим расстояние N_P между геопотенциальной $W = W_P$ и соответствующей сферопотенциальной $U = W_P$ поверхностями. Это расстояние N_P вне Земли является высотой геоида N (см. рис. 2.15 и объяснения в конце предыдущего раздела).

Вновь напомним, что эти формулы основаны на сферической аппроксимации, когда величинами порядка $3 \cdot 10^{-3} N$ пренебрегают. В N это приводит к погрешности, вероятно, меньшей, чем 1 м, которой можно пренебречь при решении многих практических задач. Sastrebin (1956)², Молоденский и др. (1962: с. 53)³, Bjerhammar, и Lelgemann разработали приближения более высоких степеней, которые учитывают сжатие f референц-эллипсоида; см. Moritz (1980a: Sect. 39).

Далее, мы видим, что преобразование формулы Стокса посредством интеграла продолжения вверх (2-282) автоматически приводит к подавлению членов нулевой и первой степеней в величинах T и N . Значение этого факта будет обсуждено позже. Мы увидим, что формула Стокса в ее первоначальной форме (2-304) и (2-307) применима только к референц-эллипсоиду, который (1) имеет тот же потенциал $U_0 = W_0$, что и геоид, (2) ограничивает массу, численно равную массе Земли, и (3) имеет своим центром центр тяжести Земли. Так как референц-эллипсоиды, которые применяются на практике в настоящий момент, не удовлетворяют в точности первым двум условиям (и вряд ли когда-нибудь будут удовлетворять им), то формула Стокса будет позже изменена на случай произвольного референц-эллипсоида.

Наконец, как предполагают, функция T является гармонической вне геоида. Это означает, что влияние масс, расположенных над геоидом, должно быть устранено с помощью подходящей редукции силы тяжести. Это будет обсуждено в главах 3 и 8.

Дополнительное приложение к спутниковой геодезии

В качестве несколько неожиданного приложения, не связанного с формулой Стокса, отметим то, что формула (2-280) может использоваться для вычисления аномалии силы тяжести Δg , исходя из полученного с помощью спутниковых данных разложения в ряд по сферическим функциям внешнего гравитационного потенциала V !

²Имеется ввиду перевод с русского издания: Загребин Д.В. Теория регуляризованного геоида. Тр. ИТА, №1, 1952. (Прим. ред.)

³Имеется ввиду перевод с русского издания: Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131, М., Геодезиздат, 1960. (Прим. ред.)

2.16 Явный вид интеграла Стокса и функции Стокса в терминах сферических функций

Поставим теперь целью записать формулу Стокса (2-307) в более развернутом виде, воспользовавшись для этого подходящей системой координат на сфере.

Преимущество использования сферических *полярных координат* с началом в точке P заключается в том, что угол ψ , который является аргументом функции Стокса, представляет собой одну из координат, а именно, *сферическое расстояние*. Другая координата – *азимут* α , отсчитываемый от направления на север. Их определения видны из рис. 2.16. Обозначать буквой P как фиксированную точку на сфере $r = R$ (или в пространстве), так и ее проекцию на единичную сферу – общепринятая практика, не вызывающая затруднений.

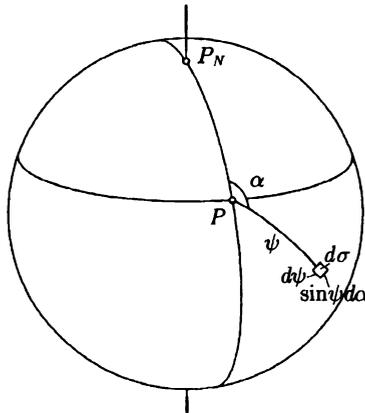


Рис. 2.16: Полярные координаты на единичной сфере (P_N – северный полюс)

Если точка P совпадает с северным полюсом, то координаты ψ и α идентичны ϑ и λ . Тогда, согласно разд. 1.9, дифференциал поверхности $d\sigma$ примет вид

$$d\sigma = \sin \psi \, d\psi \, d\alpha. \quad (2-308)$$

Так как все точки сферы эквивалентны, то это соотношение верно для произвольного начала P . Таким же образом, имеем

$$\iint_{\sigma} = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \cdot \quad (2-309)$$

Следовательно,

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha, \quad (2-310)$$

что представляет собой явный вид формулы (2-307). Выполняя интегрирование сначала относительно α , получим

$$N = \frac{R}{2\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \, d\alpha \right] S(\psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (2-311)$$

Выражение в скобках представляет собой среднее значение величины Δg на окружности радиуса ψ . Обозначим это среднее как $\overline{\Delta g}(\psi)$, то есть

$$\overline{\Delta g}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \, d\alpha. \quad (2-312)$$

Таким образом, формула Стокса может быть записана в следующем виде

$$N = \frac{R}{\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \overline{\Delta g}(\psi) F(\psi) \, d\psi, \quad (2-313)$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{2} S(\psi) \sin \psi = F(\psi). \quad (2-314)$$

Графики функций $S(\psi)$ и $F(\psi)$ показаны на рис. 2.17.

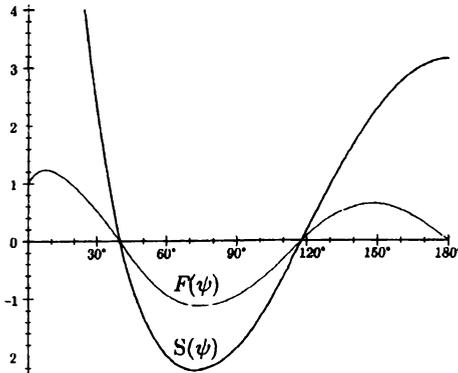


Рис. 2.17: Функции Стокса $S(\psi)$ и $F(\psi)$

В качестве альтернативы мы можем использовать *эллипсоидальные координаты* φ , λ . В сферической аппроксимации ϑ является дополнением эллипсоидальной широты в том смысле, что

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi. \quad (2-315)$$

Поэтому

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda, \quad (2-316)$$

так что формула Стокса принимает вид

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) \cos \varphi' \, d\varphi' \, d\lambda', \quad (2-317)$$

где φ , λ – эллипсоидальные координаты точки, в которой производятся вычисления, а φ' , λ' – координаты переменного дифференциала поверхности $d\sigma$. Сферическое расстояние ψ может быть выражено в виде функции этих координат следующим образом:

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (2-318)$$

Функция Стокса в терминах сферических функций

Согласно формулам (2-273) раздела 2.13 мы имеем

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-319)$$

Можно также непосредственно представить $\Delta g(\vartheta, \lambda)$ в виде ряда по сферическим функциям Лапласа:

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-320)$$

Сравнение этих двух рядов показывает, что

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \frac{n-1}{R} T_n(\vartheta, \lambda) \quad \text{или} \quad T_n = \frac{R}{n-1} \Delta g_n, \quad (2-321)$$

и потому

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1}. \quad (2-322)$$

Эта формула вновь показывает нам, что в разложении Δg по сферическим функциям не должно быть члена первой степени, иначе выражение $\Delta g_n/(n-1)$

обратилось бы в бесконечность при $n = 1$. Как обычно, будем предполагать, что сферические функции нулевой и первой степеней отсутствуют; вследствие этого, суммирование начинается с $n = 2$.

Согласно формуле (1-89), мы можем написать

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g P_n(\cos \psi) d\sigma; \quad (2-323)$$

тогда предыдущая формула принимает вид

$$T = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \iint_{\sigma} \Delta g P_n(\cos \psi) d\sigma. \quad (2-324)$$

Поменяв местами операции суммирования и интегрирования, получим

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \right] \Delta g d\sigma. \quad (2-325)$$

Сравнив этот результат с формулой Стокса (2-304), мы найдем *выражение для функции Стокса в терминах полиномов Лежандра* (зональных сферических функций):

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (2-326)$$

В действительности, аналитическое выражение (2-305) для функции Стокса могло быть получено проще путем непосредственного суммирования этого ряда. Однако, мы полагаем, что вывод, данный в предыдущем разделе, более содержателен, поскольку дает дополнительные сведения по важным смежным вопросам (например, формулу (2-280)).

2.17 Обобщение на случай произвольного референц-эллипсоида

Как мы видели, формула Стокса в своем первоначальном виде аннулирует сферические функции нулевой и первой степеней в возмущающем потенциале T и поэтому строго справедлива, только если эти члены отсутствуют. Этот факт, а также условие $U_0 = W_0$ налагают на референц-эллипсоид и его нормальное поле силы тяжести ограничения, которые трудно выполнимы на практике.

Поэтому мы обобщим формулу Стокса таким образом, что она будет применима к произвольному референц-эллипсоиду, который должен удовлетворять

лишь одному условию, а именно: его отклонения от геоида так малы, что их можно трактовать как линейные.

Рассмотрим возмущающий потенциал T на поверхности Земли. Он выражается через сферические функции следующим образом:

$$T(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-327)$$

Выделяя члены нулевой и первой степеней, получим

$$T(\vartheta, \lambda) = T_0 + T_1(\vartheta, \lambda) + T'(\vartheta, \lambda), \quad (2-328)$$

где

$$T'(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-329)$$

В общем случае, результатом формулы Стокса является именно функция T' , а не T . Функцию T мы получим, только если члены T_0 и T_1 отсутствуют. Иначе для получения полной функции T следует прибавить члены T_0 и T_1 .

Нулевой член в разложении потенциала по сферическим функциям равен

$$\frac{GM}{r}, \quad (2-330)$$

где M – масса. Следовательно, нулевым членом возмущающего потенциала $T = W - U$ на поверхности Земли с $r = R$ является

$$T_0 = \frac{G \delta M}{R}, \quad (2-331)$$

где

$$\delta M = M - M' \quad (2-332)$$

– разность между массой M Земли и массой M' эллипсоида. Эта разность была бы равна нулю, если бы обе массы были равны между собой. Но как мы можем добиться этого, не зная точной массы Земли?

Впоследствии мы увидим, что сферическую функцию первой степени всегда можно предполагать равной нулю. При таком допущении мы можем подставить (2-331) в (2-328) и выразить T' с помощью обычной формулы Стокса (2-304). Тогда получим

$$T = \frac{G \delta M}{R} + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (2-333)$$

Это – обобщение формулы Стокса для T . Оно справедливо для произвольного референц эллипсоида, центр которого совпадает с центром тяжести Земли.

Члены первой степени

Коэффициенты при сферической функции первой степени в разложении потенциала W , согласно (2-85) и (2-87), задаются так:

$$GM x_c, \quad GM y_c, \quad GM z_c, \quad (2-334)$$

где x_c, y_c, z_c — прямоугольные координаты центра тяжести Земли. Для нормального потенциала U имеем аналогичные величины

$$GM' x'_c, \quad GM' y'_c, \quad GM' z'_c. \quad (2-335)$$

Так как x'_c, y'_c, z'_c всегда очень малы, то (2-335) практически равны

$$GM x'_c, \quad GM y'_c, \quad GM z'_c. \quad (2-336)$$

Таким образом, коэффициенты при сферической функции первой степени в возмущающем потенциале $T = W - U$ имеют вид

$$GM(x_c - x'_c), \quad GM(y_c - y'_c), \quad GM(z_c - z'_c). \quad (2-337)$$

Они обращаются в нуль и, следовательно, сферическая функция первой степени $T_1(\vartheta, \lambda)$ отсутствует тогда и только тогда, когда центр референц-эллипсоида совпадает с центром тяжести Земли. Обычно это предполагается.

В общем случае, полагая $r = R$ и используя выражения для коэффициентов (2-85) и (2-87), мы найдем из (2-76)

$$T_1(\vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \left[(z_c - z'_c) P_{10}(\cos \vartheta) + (x_c - x'_c) P_{11}(\cos \vartheta) \cos \lambda + (y_c - y'_c) P_{11}(\cos \vartheta) \sin \lambda \right]. \quad (2-338)$$

Если за начало координат системы принять центр референц-эллипсоида, то $x'_c = y'_c = z'_c = 0$. С учетом того, что $P_{10}(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$, $P_{11}(\cos \vartheta) = \sin \vartheta$, и $GM/R^2 = \gamma_0$, мы получим следующее выражение для сферической функции первой степени в разложении T :

$$T_1(\vartheta, \lambda) = \gamma_0 (x_c \sin \vartheta \cos \lambda + y_c \sin \vartheta \sin \lambda + z_c \cos \vartheta). \quad (2-339)$$

Поделив это выражение на γ_0 , мы получим сферическую функцию первой степени в разложении высоты геоида:

$$N_1(\vartheta, \lambda) = x_c \sin \vartheta \cos \lambda + y_c \sin \vartheta \sin \lambda + z_c \cos \vartheta. \quad (2-340)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{x}_c = [x_c, y_c, z_c] \quad (2-341)$$

и единичный вектор направления (ϑ, λ) ,

$$\mathbf{e} = [\sin \vartheta \cos \lambda, \sin \vartheta \sin \lambda, \cos \vartheta]. \quad (2-342)$$

Тогда (2-340) можно переписать в виде скалярного произведения

$$N_1(\vartheta, \lambda) = \mathbf{x}_c \cdot \mathbf{e}, \quad (2-343)$$

что интерпретируется как проекция вектора \mathbf{x}_c на направление (ϑ, λ) .

Следовательно, если два центра тяжести не совпадают, то для того, чтобы получить наиболее общее решение задачи Стокса, достаточно прибавить члены первой степени (2-339) и (2-340) к обобщенной формуле Стокса (2-333) и к ее аналогу для N , соответственно. Напомним, что проблема Стокса заключается в вычислении значений T и N по значениям Δg . Формула (2-273) показывает, что для заданного поля Δg допустимо *любое* значение величины $T_1(\vartheta, \lambda)$, так как при $n = 1$ выражение $(n - 1)T_1$ обращается в нуль и, следовательно, T_1 , независимо от его реального значения, никак не участвует в Δg .

Таким образом, наиболее общее решение для T и N содержит три произвольных постоянных x_c, y_c, z_c , которые можно расценить как постоянные интегрирования в проблеме Стокса. На практике всегда полагают $x_c = y_c = z_c = 0$, размещая, таким образом, центр референц-эллипсоида в центре Земли. Это составляет существенное преимущество гравиметрического метода определения геоида по сравнению с методом астрономогеодезическим, где положение референц-эллипсоида относительно зсмного центра остается неизвестным.

Члены нулевой степени в разложениях N и Δg

Прежде всего обобщим формулу Брунса (2-237) на случай произвольного референц-эллипсоида. Пусть

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= W_0, \\ U(x, y, z) &= U_0 \end{aligned} \quad (2-344)$$

– уравнения геоида и эллипсоида, где, вообще говоря, константы W_0 и U_0 отличны. Как и в разд. 2.12, имеем (см. рис. 2.12) $W_P = U_Q - \gamma N + T$; но здесь $U_Q = U_0 \neq W_0 = W_P$, так что

$$\gamma N = T - (W_0 - U_0). \quad (2-345)$$

Обозначив разность между потенциалами как

$$\delta W = W_0 - U_0, \quad (2-346)$$

мы получим следующее простое обобщение формулы Брунса:

$$N = \frac{T - \delta W}{\gamma}. \quad (2-347)$$

Нам также потребуются обобщения формул (2-246) – (2-250). Эти формулы, содержащие N вместо T , подходят, как легко заметить, и для произвольного референц-эллипсоида, но теперь переход от N к T будет произведен посредством (2-347). Следовательно, формула (2-247), то есть,

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (2-348)$$

остается неизменной, а (2-248) принимает вид

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \delta W. \quad (2-349)$$

Следовательно, фундаментальное граничное условие выглядит так

$$-\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \delta W. \quad (2-350)$$

В сферической аппроксимации имеем:

$$N = \frac{T - \delta W}{\gamma_0}, \quad (2-351)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T + \frac{2}{R} \delta W \quad (2-352)$$

и

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T = \Delta g - \frac{2}{R} \delta W. \quad (2-353)$$

Соотношения между величинами T , N и Δg

Согласно (2-351),

$$T = \gamma_0 N + \delta W. \quad (2-354)$$

Подставив это в (2-353) и поделив на γ_0 , получим

$$N = \frac{G \delta M}{R \gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (2-355)$$

Это – обобщение формулы Стокса для N . Оно справедливо при произвольном референц-эллипсоиде, центр которого совпадает с центром тяжести Земли.

В то время как формула (2-353) для T содержит только влияние разности масс δM , формула (2-355) для N содержит также разность потенциалов δW .

Эти формулы ясно показывают, что обычные стоксовы интегралы (2-304) и (2-307) верны только, если $\delta M = \delta W = 0$, то есть если референц-эллипсоид имеет тот же потенциал, что и геоид, и ту же массу, что и Земля. Иначе они дают значения N и T лишь с точностью до аддитивных постоянных: полагая

$$N_0 = \frac{G \delta M}{R \gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} \quad (2-356)$$

и учитывая (2-331), имеем

$$T = T_0 + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (2-357)$$

$$N = N_0 + \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (2-358)$$

Альтернативные формы выражения (2-355), которые иногда бывают полезны, можно получить следующим образом. Подставим ряды (2-268) и (2-270) в (2-352); тогда

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda) + \frac{2}{R} \delta W, \quad (2-359)$$

что обобщает формулу (2-273). Разлагая функцию $\Delta g(\vartheta, \lambda)$ в обычный ряд по сферическим функциям Лапласа,

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda), \quad (2-360)$$

и сравнивая постоянные члены ($n=0$) этих двух выражений, получим

$$-\frac{1}{R} T_0 + \frac{2}{R} \delta W = \Delta g_0, \quad (2-361)$$

где, согласно (1-89),

$$\Delta g_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g d\sigma. \quad (2-362)$$

Выражая T_0 с помощью формулы (2-331) в терминах δM , получим

$$\Delta g_0 = -\frac{1}{R^2} G \delta M + \frac{2}{R} \delta W. \quad (2-363)$$

Два уравнения – (2-356) для N_0 и (2-363) для Δg_0 – могут быть теперь решены относительно δM и δW :

$$\begin{aligned} G \delta M &= R(R \Delta g_0 + 2\gamma_0 N_0), \\ \delta W &= R \Delta g_0 + \gamma_0 N_0. \end{aligned} \quad (2-364)$$

Константа N_0 может быть найдена с помощью любого из этих уравнений:

$$N_0 = -\frac{R}{2\gamma_0} \Delta g_0 + \frac{G \delta M}{2\gamma_0 R}, \quad (2-365)$$

$$N_0 = -\frac{R}{\gamma_0} \Delta g_0 + \frac{\delta W}{\gamma_0}.$$

Заключительное замечание

Прямым следствием формулы (2-356) является то, что N_0 имеет очевидный геогеографический смысл: если a – экваториальный радиус (большая полуось) данного референс-эллипсоида, то

$$a_E = a + N_0 \quad (2-366)$$

– экваториальный радиус эллипсоида E , нормальный потенциал U_0 которого равен реальному потенциалу W_0 геоида, и который ограничивает массу, равную массе Земли; величина сжатия f при этом сохраняется. Обоснованием служит тот факт, что для такого нового эллипсоида E , согласно (2-356), значение $N_0 = 0$ при $\delta M = 0$ и $\delta W = 0$.

Малая *аддитивная* константа N_0 эквивалентна изменению *масштаба* почти сферической Земли. Чтобы понять это, вообразите почти сферический ашельсин. Увеличение толщины кожицы ашельсина всюду, скажем, на 1 мм эквивалентно преобразованию подобия (однородное увеличение размера) поверхности ашельсина.

Таким образом, обычная формула Стокса, без N_0 , дает глобальный геоид, который определен *только с точностью до масштаба*, неявно содержащегося в N_0 . Однако, этот геоид является *геоцентрическим*, по крайней мере, теоретически, так как не содержит сферической функции первой степени $T_1(\vartheta, \lambda)$. Он был бы в точности геоцентрическим, если бы Земля была равномерно покрыта гравиметрическими измерениями.

Раньше масштаб был определен астрономогеодезическим методом с помощью градусных измерений, относящихся к 18-ому столетию (Клеро, Maupertuis см. Todhunter [1873]). Сегодня данные о масштабе доставляются спутниками (лазер, GPS).

2.18 Возмущения силы тяжести и формула Коха

Нетрудно получить *формулу Коха*, являющуюся аналогом формулы Стокса для возмущения силы тяжести δg . Но мы укажем путь для этого только в общих чертах, оставляя читателю возможность "прокладывать четырехполосную магистраль".

Сравним формулы (2-269) и (2-270) с (2-272) и (2-273). Мы видим, что главное отличие между возмущением силы тяжести δg и аномалией силы тяжести Δg заключается в коэффициентах $n+1$ и $n-1$ соответственно, стоящих перед сферическими функциями. Другое – очень малое – отличие заключается в том, что в Δg опущены члены нулевой и первой степеней (см. комментарий после (2-273)), чего не требуется делать в δg .

Следуя почти буквально разделу 2.14, мы получим формулу для δg , являющуюся эквивалентом формулы (2-282) для Δg . Интегрируя вслед за разд. 2.15, мы получим выражение вида (2-302)

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} K(r, \psi) \delta g \, d\sigma, \quad (2-367)$$

а на сфере с $r = R$ – выражение вида (2-304), которое назовем *формулой Коха*:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} K(\psi) \delta g \, d\sigma. \quad (2-368)$$

Здесь $K(\psi)$ – функция Хотина-Коха

$$K(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - \ln \left(1 + \frac{1}{\sin(\psi/2)} \right); \quad (2-369)$$

она очень схожа с функцией Стокса (2-305). Наконец, по теореме Брунса имеем

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} K(\psi) \delta g \, d\sigma. \quad (2-370)$$

Совершенно аналогично с (2-326), имеем (просто заменяя $n-1$ на $n+1$ и оставляя $n=0$ в качестве нижнего предела суммы)

$$K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (2-371)$$

то есть выражение функции Хотина-Коха в терминах многочленов Лежандра (зональных сферических функций). Действительно, так просто!

Историческое замечание

Это замечание имеет место благодаря М. И. Юркиной (Москва). С математической точки зрения, вышесказанное является решением задачи Неймана (второй краевой задачи теории потенциала) для сферы, сравните с разд. 1.13. Это – классическая задача теории потенциала, по крайней мере, со 150-летней историей, как и формула Стокса. "Задача Неймана" названа так в честь

математика Карла Неймана, отредактировавшего лекции 1850-х годов своего отца Франца Неймана (Neumann 1887: см. особенно с. 275). Внешняя задача Неймана для сферы также встречается у Kellogg (1929: с. 247) и вновь описана у Hotine (1969: сс. 311, 318).

Ее фундаментальное значение для современной физической геодезии при известной земной поверхности было осознано и разработано в работе Koch (1971). Таким образом, современную интегральную формулу, возможно, следовало бы назвать формулой Ф. Неймана - К. Неймана - Келлогга - Хотина - Коха. Для краткости, мы будем называть ее *формулой Коха*.

2.19 Уклонения отвеса и формула Вининг-Мейнеса

Формула Стокса позволяет вычислить высоту геоида, исходя из аномалии силы тяжести. Подобная формула для вычисления уклонения отвесной линии, исходя из значений аномалии силы тяжести, была получена Vening Meinesz (1928).

На рисунке 2.18 показано сечение геоида и референц-эллипсоида вертикальной плоскостью произвольного азимута. Если ε - компонента уклонения отвеса в этой плоскости, то

$$dN = -\varepsilon ds, \quad (2.372)$$

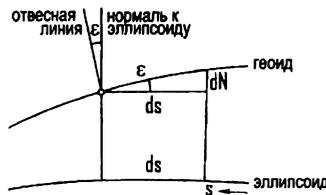


Рис. 2.18: Связь между высотой геоида и уклонением отвеса

или

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}; \quad (2.373)$$

знак "минус" является результатом соглашения, его смысл будет объяснен позже.

В северно-южном направлении

$$\varepsilon = \xi \quad \text{и} \quad ds = ds_\varphi = R d\varphi; \quad (2.374)$$

в восточно-западном направлении

$$\varepsilon = \eta \quad \text{и} \quad ds = ds_\lambda = R \cos \varphi d\lambda. \quad (2.375)$$

В формулах для ds_φ и ds_λ мы вновь использовали сферическую аппроксимацию; согласно (1-30), дифференциал дуги на сфере $r = R$ задается так:

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2. \quad (2-376)$$

С помощью (2-373) найдем соотношения

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{dN}{ds_\varphi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}, \\ \eta &= -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (2-377)$$

связывающие между собой высоту геоида N и компоненты ξ и η уклонения отвеса.

Так как N дается интегралом Стокса, то наша задача сводится к дифференцированию этой формулы по переменным φ и λ . Для этого мы воспользуемся формулой Стокса в виде (2-317),

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda', \quad (2-378)$$

где ψ определено в (2-318) в виде функции φ , λ и φ' , λ' .

Зависимость интеграла в правой части этой формулы от φ и λ выражается лишь через ψ в $S(\psi)$. Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'; \quad (2-379)$$

аналогично получится выражение для $\partial N / \partial \lambda$. Здесь

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} = \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (2-380)$$

Дифференцирование (2-318) по переменным φ и λ даёт

$$\begin{aligned} -\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda), \\ -\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} &= \cos \varphi \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (2-381)$$

Теперь введем в рассмотрение азимут α , как показано на рис. 2.16.

Используя известные формулы сферической тригонометрии, получим для сферического треугольника на рис. 2.19

$$\begin{aligned} \sin \psi \cos \alpha &= \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda), \\ \sin \psi \sin \alpha &= \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (2-382)$$

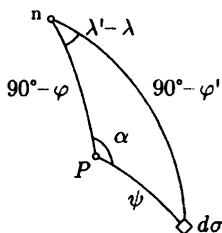


Рис. 2.19: Связь между географическими и полярными координатами на сфере (n – северный полюс)

Подставляя эти соотношения в предыдущие формулы, получаем простые выражения

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha; \quad (2-383)$$

поэтому

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} = -\frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha, \quad \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = -\frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \varphi \sin \alpha. \quad (2-384)$$

Подставим эти выражения в (2-379) и соответствующую формулу для $\partial N/\partial \lambda$; наконец, из (2-377) получим

$$\xi(\varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi \gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha \cos \varphi' d\varphi' d\lambda', \quad (2-385)$$

$$\eta(\varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi \gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \alpha \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$

или, записывая это в обычной сокращенной форме,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha d\sigma, \\ \eta &= \frac{1}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \alpha d\sigma. \end{aligned} \quad (2-386)$$

Это и есть *формулы Виннга-Мейнса*. Дифференцируя функцию Стокса $S(\psi)$ (2-305) относительно ψ , мы получим *функцию Виннга-Мейнса*

$$\begin{aligned} \frac{dS(\psi)}{d\psi} &= -\frac{\cos(\psi/2)}{2 \sin^2(\psi/2)} + 8 \sin \psi - 6 \cos(\psi/2) - 3 \frac{1 - \sin(\psi/2)}{\sin \psi} \\ &+ 3 \sin \psi \ln [\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)]. \end{aligned} \quad (2-387)$$

Её легко проверить с помощью элементарных тригонометрических тождеств. Азимут α определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)}{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)}, \quad (2.388)$$

что непосредственно следует из (2-382).

Формулы (2-385) – это выражения (2-386), записанные в эллипсоидальных координатах φ и λ . Как и в формуле Стокса (разд. 2.15), мы можем воспользоваться здесь сферическими полярными координатами ψ и α :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \cos \alpha \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \psi \, d\psi \, d\alpha, \\ \eta &= \frac{1}{4\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \sin \alpha \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \psi \, d\psi \, d\alpha. \end{aligned} \quad (2-389)$$

Читатель может легко убедиться, что эти формулы дают компоненты уклонения ξ и η с правильным знаком, соответствующим определению (2-230); см. также рис. 2.13. Это и есть та причина, по которой мы ввели знак "минус" в (2-373).

Заметим, что формула Венинг–Мейнеса справедлива в таком виде и для произвольного референц-эллипсоида, тогда как формула Стокса должна была быть изменена путем прибавления константы N_0 . Если мы продифференцируем относительно φ и λ модифицированную формулу Стокса с целью получения формулы Венинг–Мейнеса, то константа N_0 пропадет, и мы получим выражения (2-386).

Для ознакомления с практическими приложениями формул и задач Стокса и Венинг–Мейнеса рекомендуются разд. 2.21 и глава 3.

2.20 Вертикальный градиент силы тяжести

Формула Брунса (2.40) при $\varrho = 0$,

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2g J - 2\omega^2, \quad (2-390)$$

не может быть непосредственно использована для определения значений градиента $\partial g / \partial H$, поскольку средняя кривизна J уровней поверхностей неизвестна. Поэтому мы воспользуемся обычным приемом и разобьем $\partial g / \partial H$ на нормальную и аномальную части:

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial H} + \frac{\partial \Delta g}{\partial H}. \quad (2.391)$$

Нормальный градиент $\partial \gamma / \partial H$ дается формулами (2-147) и (2.148). Рассмотрим сейчас аномальную часть $\partial \Delta g / \partial H \approx \partial \Delta g / \partial r$.

Выражение в терминах Δg

Выражение (2-272) может быть записано как (заметим, что $r \Delta g$ является гармонической функцией, и коэффициент при $r = R$ должен быть равен 1)

$$\Delta g(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \Delta g_n(\vartheta, \lambda). \quad (2-392)$$

Дифференцируя это относительно r и полагая $r = R$, мы получим на уровне моря:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \Delta g_n = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n \Delta g_n - \frac{2}{R} \Delta g. \quad (2-393)$$

Теперь можно применить (1 149), положив $V = \Delta g$ и $Y_n = \Delta g_n$. Результат таков:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{l_0^3} d\sigma - \frac{2}{R} \Delta g_P. \quad (2-394)$$

В этой формуле Δg_P относится к фиксированной точке P , в которой должна быть вычислена производная $\partial \Delta g / \partial r$; l_0 – пространственное расстояние между фиксированной точкой P и переменным дифференциалом поверхности $R^2 d\sigma$, выраженное в терминах углового расстояния ψ :

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}. \quad (2-395)$$

Сравните это с рис. 1.9 из разд. 1.14; элемент поверхности $R^2 d\sigma$ соответствует точке P' .

Важная интегральная формула (2 394) выражает вертикальный градиент аномалии силы тяжести непосредственно в терминах аномалии силы тяжести. Так как подынтегральная функция очень быстро убывает с увеличением расстояния l_0 , то в этой формуле достаточно интегрировать лишь по сравнительно небольшой окрестности точки P , в противоположность формулам Стокса и Венинг-Мейссса, где для достижения необходимой точности интегрирование должно производиться по всей поверхности Земли.

Выражение в терминах N

Дифференцируя по r выражение (2-271)

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T, \quad (2-396)$$

получим

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r^2} T. \quad (2-397)$$

К этой формуле мы прибавим уравнение Лапласа $\Delta T = 0$, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} = 0; \quad (2-398)$$

(в уравнении (1-35) V заменили на T и воспользовались подстановкой $\vartheta = 90^\circ - \varphi$.) Теперь, полагая $r = R$, получим

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{2}{R^2} T - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}. \quad (2-399)$$

Так как $T = \gamma_0 N$, то мы можем также написать

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{2\gamma_0}{R^2} N - \frac{\gamma_0}{R^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial N}{\partial \varphi} + \frac{\gamma_0}{R^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi^2} + \frac{\gamma_0}{R^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2}, \quad (2-400)$$

где, как обычно, γ_0 – глобальное среднее значение. Эта формула выражает вертикальный градиент аномалии силы тяжести в терминах высоты геоида N и ее первой и второй горизонтальных производных. Ею можно воспользоваться путём численного дифференцирования с помощью карты значений функции N . Однако, этот путь меньше подходит для практического приложения, чем (2-394), потому что требует чрезвычайно точной и детальной локальной карты геоида, которой мы вряд ли когда-либо будем располагать; неточности N значительно увеличиваются при вычислении производных.

Выражение в терминах ξ и η

Из формул (2-377) пайдём

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = -R \xi, \quad \frac{\partial N}{\partial \lambda} = -R \eta \cos \varphi; \quad (2-401)$$

и затем

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \varphi^2} = -R \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2} = -R \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \cos \varphi. \quad (2-402)$$

Подстановка этих соотношений в (2-400) приводит к

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{2\gamma_0}{R^2} N + \frac{\gamma_0}{R} \xi \operatorname{tg} \varphi - \frac{\gamma_0}{R} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - \frac{\gamma_0}{R \cos \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}. \quad (2-403)$$

Вводя локальные прямоугольные координаты x , y в касательной плоскости, получим

$$\begin{aligned} R d\varphi &= ds_\varphi = dx, \\ R \cos \varphi d\lambda &= ds_\lambda = dy; \end{aligned} \quad (2-404)$$

тогда (2-403) принимает вид

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{2\gamma_0}{R^2} N + \frac{\gamma_0}{R} \xi \operatorname{tg} \varphi - \gamma_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (2-405)$$

Можно показать, что первые два члена в правой части очень малы по сравнению с третьим членом; следовательно, с достаточной точностью можно пользоваться формулой

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = -\gamma_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (2-406)$$

Эти красивые формулы выражают вертикальный градиент аномалии силы тяжести через горизонтальные производные уклонения отвеса. К ним тоже может быть применено численное дифференцирование, если в распоряжении имеется карта значений ξ и η . Они несколько лучше подходят для практического применения, чем (2-400), так как здесь необходимы лишь первые производные.

2.21 Практическое использование интегральных формул

Интегральные формулы, такие как интегралы Стокса и Вининг – Мейнеса, практически приближенно заменяют суммированием. Для этого дифференциалы поверхности $d\sigma$ заменяют малыми, но конечными ячейками q , которые получают соответствующим разбиением поверхности Земли. Используется два различных метода разбиения:

1. Палетки (рис. 2.20).

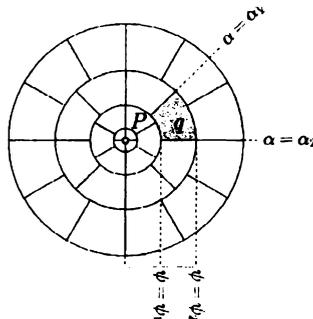


Рис. 2.20: Палетка

Разбиение производится при помощи концентрических окружностей и их радиусов. Палетка накладывается на карту силы тяжести того же масштаба так, чтобы центр палетки совпал с точкой вычисления P на карте. Для этой цели естественно использовать *полярные координаты* ψ , α с началом в точке P .

2. Сетка координатных линий (рис. 2.21).

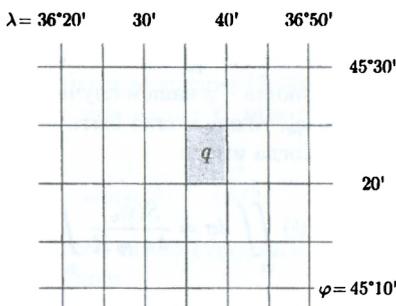


Рис. 2.21: Блоки, образованные координатными линиями эллипсоидальной системы координат

Разбиение производится при помощи сетки координатных линий некоторой установленной системы координат, в частности, *эллипсоидальной* системы φ , λ . Они образуют прямоугольные *блоки*, например, $10' \times 10'$ или $1^\circ \times 1^\circ$. Эти блоки также называют квадратами, хотя обычно они не являются квадратами в строгом смысле.

Использование палетки легко для понимания и для теоретических рассуждений, но полностью устарело. Только методу координатной сетки удалось выжить в компьютерном мире.

В качестве простого и поучительного примера, поясняющего правила численного интегрирования, рассмотрим формулу Стокса

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.407)$$

в ее явных формах (2.310) и (2.317). К первой из них мы применим метод палетки, а ко второй – метод, использующий фиксированные блоки.

Для каждой ячейки q_k аномалия силы тяжести заменяется ее средним по этой ячейке значением $\overline{\Delta g}_k$. При этом формула (2.407) принимает вид

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \sum_k \iint_{q_k} \overline{\Delta g}_k S(\psi) d\sigma = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \sum_k \overline{\Delta g}_k \iint_{q_k} S(\psi) d\sigma \quad (2.408)$$

или

$$N = \sum_k c_k \overline{\Delta g_k}, \quad (2 \ 409)$$

где коэффициенты

$$c_k = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{q_k} S(\psi) d\sigma \quad (2-410)$$

получены интегрированием по ячейке q_k ; они не зависят от Δg .

Если подынтегральная функция – в нашем случае, функция Стокса $S(\psi)$ – близка к постоянной в ячейке q_k , то она может быть заменена своим значением $S(\psi_k)$ в центре этой ячейки. Тогда имеем

$$c_k = \frac{R}{4\pi \gamma_0} S(\psi) \iint_{q_k} d\sigma = \frac{S(\psi_k)}{4\pi \gamma_0 R} \iint_{q_k} R^2 d\sigma. \quad (2 \ 411)$$

Последний интеграл представляет собой просто площадь A_k рассматриваемой ячейки, и мы получаем

$$c_k = \frac{A_k S(\psi_k)}{4\pi \gamma_0 R}. \quad (2 \ 412)$$

Преимущество метода палетки заключается в его большой гибкости. Влияние ячеек, расположенных вблизи точки вычисления P , больше тех, которые расположены дальше; кроме того, подынтегральная функция изменяется быстрее в окрестности точки P . Вследствие этого, вблизи точки P необходимо более детальное разбиение. Этого легко достичь с помощью палетки. Тем не менее, этот метод полностью устарел и в настоящее время не используется.

Преимущество использования системы фиксированных блоков, образованных сеткой эллипсоидальных координатных линий, основано на том, что средние значения аномалии силы тяжести в этих блоках используются также для многих других целей. Достаточно однажды определить средние значения аномалии в блоках стандартного размера, и в дальнейшем они могут легко храниться и обрабатываться с помощью компьютера. Но для всех точек вычисления используется одно и то же разбиение на блоки, тогда как ячейки, полученные методом палетки, меняются вместе с точкой вычисления. В этом смысле гибкость метода стандартных блоков ограничена; однако, можно использовать блоки меньших размеров (например, $5' \times 5'$) вблизи точки P и больших (например, $1^\circ \times 1^\circ$) – в отдаленных районах. При нынешних возможностях вычислительной техники на практике применяется только этот метод.

Покажем теперь удобство использования полярных координат в теоретических рассуждениях.

Эффект ближайшей зоны

Этот вопрос интересен и поучителен. Если подынтегральная функция обращается в бесконечность при $\psi \rightarrow 0$, то в ближайшей внутренней зоне могут возникать трудности даже при использовании палетки. Именно такая ситуация имеет место при вычислениях с формулой Стокса, поскольку

$$S(\psi) \approx \frac{2}{\psi} \quad (2.413)$$

для малых ψ . Это следует из определения (2-305), так как первый член в этом выражении преобладает и, при малых ψ , может быть представлен как

$$\frac{1}{\sin(\psi/2)} \approx \frac{1}{(\psi/2)} = \frac{2}{\psi}. \quad (2.414)$$

Функция Венинг-Мейнса также стремится к бесконечности, поскольку с той же степенью приближения

$$\frac{dS(\psi)}{d\psi} \approx -\frac{2}{\psi^2}. \quad (2.415)$$

Аналогично ведёт себя и градиентная формула (2-394), так как её подынтегральная функция

$$\frac{1}{l_0^3} \approx \frac{1}{R^3 \psi^3}. \quad (2.416)$$

Вследствие этого, бывает удобно выделить ближайшую внутреннюю зону. Будем полагать, что она представляет собой круг радиуса ψ_0 с центром в точке вычисления. Тогда, например, интеграл Стокса примет вид

$$N = N_i + N_e, \quad (2.417)$$

где

$$N_i = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi_0} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (2.418)$$

$$N_e = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} \Delta g S(\psi) d\sigma.$$

Радиус ψ_0 внутренней зоны соответствует линейному расстоянию в несколько километров. В пределах этого расстояния мы можем рассматривать сферу как плоскость и пользоваться полярными координатами s, α , где

$$s \approx R\psi \approx R \sin \psi \approx 2R \sin \frac{\psi}{2}; \quad (2.419)$$

тогда дифференциал площади примет вид

$$R^2 d\sigma = s ds d\alpha. \quad (2-420)$$

При таком приближении допустимо использование формул (2-413) – (2-416), если положить в них

$$S(\psi) \approx \frac{2R}{s}, \quad \frac{dS}{d\psi} \approx -\frac{2R^2}{s^2}, \quad \frac{1}{l_0^3} \approx \frac{1}{s^3}. \quad (2-421)$$

Для функций Стокса и Венинг–Мейнса относительная ошибка такой аппроксимации равна приблизительно 1% при $s = 10$ км и 3% при $s = 30$ км; для функции $1/l_0^3$ – даже меньше. Итак, влияние внутренней зоны на наших интегральных формулах отражается следующим образом:

$$N_i = \frac{1}{2\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{s_0} \frac{\Delta g}{s} s ds d\alpha, \quad (2-422)$$

$$\xi_i = -\frac{1}{2\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{s_0} \frac{\Delta g}{s^2} \cos \alpha s ds d\alpha, \quad (2-423)$$

$$\eta_i = -\frac{1}{2\pi \gamma_0} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{s_0} \frac{\Delta g}{s^2} \sin \alpha s ds d\alpha, \quad (2-424)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H} \right)_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{s_0} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{s^3} s ds d\alpha.$$

Чтобы найти эти интегралы, мы разложим Δg в ряд Тейлора в точке вычисления P :

$$\Delta g = \Delta g_P + x g_x + y g_y + \frac{1}{2!} (x^2 g_{xx} + 2xy g_{xy} + y^2 g_{yy}) + \dots \quad (2-425)$$

Прямоугольные координаты x , y задаются формулами

$$x = s \cos \alpha, \quad y = s \sin \alpha \quad (2-426)$$

так, чтобы ось x при этом была направлена на север. Далее, имеем

$$g_x = \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_P, \quad g_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2} \right)_P, \quad \text{и т.д.} \quad (2-427)$$

Разложение Δg в ряд Тейлора можно также записать в виде

$$\Delta g = \Delta g_P + s (g_x \cos \alpha + g_y \sin \alpha) + \frac{s^2}{2} (g_{xx} \cos^2 \alpha + 2g_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + g_{yy} \sin^2 \alpha) + \dots \quad (2-428)$$

Подставляя это выражение в рассматриваемые интегралы, мы легко можем их вычислить. Интегрируя сначала по переменной α и замечая, что

$$\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha = 0, \quad (2-429)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \pi,$$

мы найдем

$$N_i = \frac{1}{\gamma_0} \int_0^{s_0} \left[\Delta g_P + \frac{s^2}{4} (g_{xx} + g_{yy}) + \dots \right] ds, \quad (2-430)$$

$$\xi_i = -\frac{1}{2\gamma_0} \int_0^{s_0} (g_x + \dots) ds, \quad (2-431)$$

$$\eta_i = -\frac{1}{2\gamma_0} \int_0^{s_0} (g_y + \dots) ds,$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H} \right)_i = \frac{1}{4} \int_{s=0}^{s_0} (g_{xx} + g_{yy} + \dots) ds. \quad (2-432)$$

Теперь выполним интегрирование по s , сохраняя только не обращающиеся в нуль члены самых низких степеней. Тогда

$$N_i = \frac{s_0}{\gamma_0} \Delta g_P, \quad (2-433)$$

$$\xi_i = -\frac{s_0}{2\gamma_0} g_x, \quad \eta_i = -\frac{s_0}{2\gamma_0} g_y, \quad (2-434)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H} \right)_i = \frac{s_0}{4} (g_{xx} + g_{yy}). \quad (2-435)$$

Мы видим, что влияние внутренней круговой зоны на формулу Стокса зависит, в первом приближении, от значения Δg в точке P ; на формулу Венинг-Мейнеса – от первых горизонтальных производных функции Δg ; и на вертикальный градиент – от вторых горизонтальных производных.

Заметим, что вклад внутренней зоны в полное уклонение отвеса имеет то же направление, что и линия наибольшей крутизны "поверхности аномалии силы тяжести", потому что плоский вектор

$$\vartheta = [\xi_i, \eta_i] \quad (2-436)$$

пропорционален горизонтальному градиенту функции Δg ,

$$\text{grad } \Delta g = [g_x, g_y]. \quad (2-437)$$

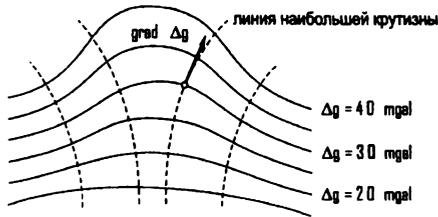


Рис. 2.22: Линии уровня Δg и линии наибольшей кривизны

Направление $\text{grad}\Delta g$ определяет линию самого крутого спуска (рис. 2.22).

Значения величин g_x и g_y могут быть найдены по карте силы тяжести. Они представляют собой уклоны северно-южных и восточно-западных меридиональных сечений, проходящих через точку P . Значения g_{xx} и g_{yy} можно найти путем полиномиальной аппроксимации второй степени по x и y функции аномалии силы тяжести в окрестности точки P .

Замечание о точности

Уклонения отвесной линии ξ, η в сочетании с астрономическими наблюдениями астрономических широты Φ и долготы Λ определяют положение на референц-эллипсоиде, выраженное эллипсоидальными координатами

$$\begin{aligned}\varphi &= \Phi - \xi, \\ \lambda &= \Lambda - \eta \sec \varphi,\end{aligned}\tag{2 438}$$

в принципе так же, как вертикальное положение определяется формулой

$$h = H + N.\tag{2 439}$$

К сожалению, достичь для горизонтального положения той же точности, что и для вертикального, намного труднее, поскольку на земной поверхности имеет место соотношение $1'' \cong 30$ м. Так, для достижения точности в 1 м, которую не слишком трудно получить с помощью формулы Стокса, необходимо знать значения Φ и ξ (аналогично, Λ и η), с точностью выше, чем $0.03''$, что практически невозможно.

Глава 3

Редукция силы тяжести

3.1 Введение

Нужно различать силу тяжести g , измеренную на физической поверхности Земли, и нормальную силу тяжести γ , отнесенную к поверхности эллипсоида. Для того, чтобы отнести g к уровню моря, необходима определенная редукция. Так как выше уровня моря расположены массы, то методы редукции различаются в зависимости от способа обращения с этими топографическими массами. Редукция силы тяжести, по существу, одинакова как для аномалии силы тяжести Δg , так и для возмущения силы тяжести δg .

Редукция силы тяжести служит для трех главных целей:

- определение геоида,
- интерполяция и экстраполяция силы тяжести,
- исследование земной коры.

Геодезическую природу имеют только первые две цели. Третья представляет интерес для геофизиков-теоретиков и геологов, изучающих общее строение коры, а также геофизиков-исследователей.

При использовании формулы Стокса для определения геоида необходимо, чтобы аномалия силы тяжести Δg представляла граничные значения на геоиде. Это требование накладывает два условия: первое – сила тяжести g должна быть отнесена к геоиду; второе – вне геоида не должно быть никаких масс (разд. 2.12). Следовательно, редукция силы тяжести, образно говоря, состоит из следующих шагов:

1. топографические массы вне геоида полностью удаляются или сдвигаются ниже уровня моря;
2. затем пункт измерения силы тяжести перемещается с земной поверхности (точка P) на геоид (точка P_0 , см. рис. 3.1).

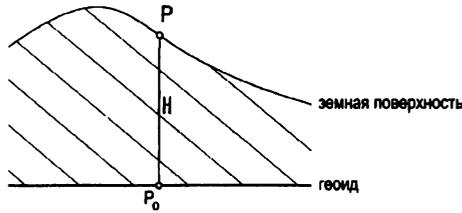


Рис. 3.1: Редукция силы тяжести

Первый шаг требует знания плотности распределения топографических масс, что всегда проблематично.

С помощью такой процедуры редуцирования удастся избавиться от определенной нерегулярности в значениях силы тяжести, возникающей из-за разности высот пунктов измерения. В результате, интерполяция и даже экстраполяция в ненаблюдаемые области становится проще (раздел 9.7).

3.2 Вспомогательные формулы

Вычислим потенциал U и вертикальное притяжение A однородного кругового цилиндра радиуса a и высоты b в точке P , расположенной на оси цилиндра на высоте c над его основанием (рис. 3.2).

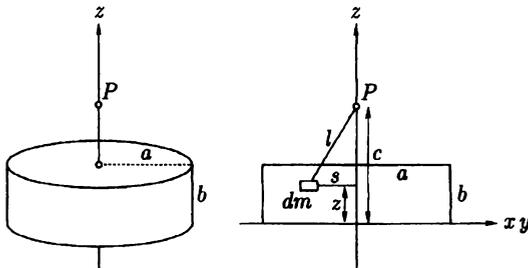


Рис. 3.2: Потенциал и притяжение кругового цилиндра во внешней точке

Точка P вне цилиндра

Допустим сначала, что точка P расположена выше цилиндра, $c > b$. Тогда потенциал вычисляется по общей формуле (1-12),

$$U = G \iiint \frac{\rho}{l} dv. \quad (3-1)$$

Введем полярные координаты s, α на плоскости xy

$$x = s \cos \alpha, \quad y = s \sin \alpha; \quad (3-2)$$

имеем

$$l = \sqrt{s^2 + (c - z)^2} \quad (3-3)$$

и

$$dv = dx dy dz = s ds d\alpha dz. \quad (3-4)$$

Далее, с плотностью $\rho = \text{const}$ получим

$$\begin{aligned} U &= G \rho \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^a \int_{z=0}^b \frac{s ds dz d\alpha}{\sqrt{s^2 + (c - z)^2}} \\ &= 2\pi G \rho \int_{s=0}^a \int_{z=0}^b \frac{s ds dz}{\sqrt{s^2 + (c - z)^2}}. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Интегрирование относительно s приводит к

$$\begin{aligned} \int_{s=0}^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + (c - z)^2}} &= \sqrt{s^2 + (c - z)^2} \Big|_0^a \\ &= \sqrt{a^2 + (c - z)^2} - c + z, \end{aligned} \quad (3-6)$$

так что

$$U = 2\pi G \rho \int_0^b \left[-c + z + \sqrt{a^2 + (c - z)^2} \right] dz. \quad (3-7)$$

Соответствующий неопределенный интеграл равен произведению $2\pi G \rho$ на

$$\frac{1}{2} (c - z)^2 - \frac{1}{2} (c - z) \sqrt{a^2 + (c - z)^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln \left[c - z + \sqrt{a^2 + (c - z)^2} \right]; \quad (3-8)$$

это можно проверить дифференцированием. Наконец, U примет вид

$$\begin{aligned} U_e &= \pi G \rho \left\{ (c - b)^2 - c^2 - (c - b) \sqrt{a^2 + (c - b)^2} + c \sqrt{a^2 + c^2} \right. \\ &\quad \left. - a^2 \ln [c - b + \sqrt{a^2 + (c - b)^2}] + a^2 \ln [c + \sqrt{a^2 + c^2}] \right\}, \end{aligned} \quad (3-9)$$

где нижний индекс e означает, что точка P является внешней по отношению к цилиндру.

Вертикальное притяжение A представляет собой отрицательную производную потенциала U относительно высоты c [см. формулу (2-22)]:

$$A = -\frac{\partial U}{\partial c}. \quad (3-10)$$

Дифференцируя (3-9), получаем

$$A_e = 2\pi G \rho \left[b + \sqrt{a^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right]. \quad (3-11)$$

Точка P на цилиндре

В этом случае имеем $c = b$, и формулы (3-9), (3-11) принимают вид

$$U_0 = \pi G \rho \left[-b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right], \quad (3-12)$$

$$A_0 = 2\pi G \rho \left[a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \right]. \quad (3-13)$$

Точка P внутри цилиндра

Предположим теперь, что точка P расположена внутри цилиндра, $c < b$. Плоскостью $z = c$ разделим цилиндр на две части, 1 и 2 (рис. 3.3), и вычислим U как сумму потенциалов этих двух частей:

$$U_i = U_1 + U_2, \quad (3-14)$$

где нижний индекс i означает, что P теперь находится внутри цилиндра. Член U_1 получается из формулы (3-12), если в ней b заменить на c , и U_2 — из той же формулы путем замены b на $b - c$. Их сумма равна

$$U_i = \pi G \rho \left[-c^2 - (b-c)^2 + c\sqrt{a^2 + c^2} + (b-c)\sqrt{a^2 + (b-c)^2} + a^2 \ln \frac{c + \sqrt{a^2 + c^2}}{a} + a^2 \ln \frac{b-c + \sqrt{a^2 + (b-c)^2}}{a} \right]. \quad (3-15)$$

Легко заметить, что притяжение есть разность $A_1 - A_2$:

$$A_i = 2\pi G \rho \left[2c - b - \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + (b-c)^2} \right]; \quad (3-16)$$

эту формулу, согласно (3-10), можно также получить дифференцированием (3-15).

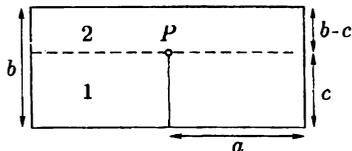


Рис. 3.3: Потенциал и притяжение во внутренней точке

Круговой диск

Пусть толщина b цилиндра стремится к нулю так, что произведение

$$\kappa = b \rho \quad (3-17)$$

при этом остается конечным. Величину κ можно тогда рассматривать как поверхностную плотность, с которой массы распределены на поверхности круга радиуса a . Нам нужны потенциал и притяжение для внешней точки. Полагая в (3-9) и (3-11)

$$\rho = \frac{\kappa}{b} \quad (3-18)$$

и затем устремляя b к 0, мы получим, с помощью хорошо известных методов вычисления,

$$U_e^0 = 2\pi G \kappa \left[\sqrt{a^2 + c^2} - c \right], \quad (3-19)$$

$$A_e^0 = 2\pi G \kappa \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right).$$

Сектора и ячейки

Для сектора радиуса a и угла

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}, \quad (3-20)$$

нужно разделить полученные выше значения на n . Тогда для ячейки, стягивающей тот же угол и ограниченной радиусами a_1 и a_2 (рис. 3.4), получим (с очевидными обозначениями)

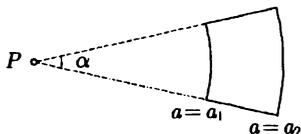


Рис. 3.4: Ячейка палетки

$$\Delta U = \frac{1}{n} [U(a_2) - U(a_1)], \quad (3-21)$$

$$\Delta A = \frac{1}{n} [A(a_2) - A(a_1)].$$

Поскольку A_e и A_i отличаются только константой, то эта константа исчезает во второй формуле (3-21), и мы получаем из (3-11) и (3-16)

$$\Delta A_e = \Delta A_i = \frac{2\pi}{n} G \rho \left[\sqrt{a_2^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a_1^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a_2^2 + c^2} + \sqrt{a_1^2 + c^2} \right]. \quad (3-22)$$

С другой стороны, $\Delta U_e \neq \Delta U_i$.

Заметим, что мы намеренно, в дидактических целях, использовали ячейки, соответствующие полярным координатам (рис. 3.4), потому что они столь просты и поучительны. Кроме того, они все еще полезны для многих целей. Для практических вычислений почти исключительно используются прямоугольные блоки (см. рис. 2.21). Однако, для концептуальных целей шаблоны полярной системы координат неоценимы; сравните с разделом 2.21.

3.3 Редукция в свободном воздухе

Для получения теоретически верной редукции силы тяжести на геоид нам необходим вертикальный градиент силы тяжести $\partial g / \partial H$. Если g – наблюдаемое значение силы тяжести на поверхности Земли, то значение g_0 силы тяжести на геоиде может быть получено с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$g_0 = g - \frac{\partial g}{\partial H} H \dots, \quad (3-23)$$

где H – высота между точкой P измерения силы тяжести над геоидом и соответствующей точкой P_0 на геоиде (рис. 3.1). Предположим, что над геоидом нет никаких масс. Пренебрегая всеми нелинейными членами, получим

$$g_0 = g + F, \quad (3-24)$$

где

$$F = -\frac{\partial g}{\partial H} H \quad (3-25)$$

представляет собой *редукцию в свободном воздухе* на геоид. Заметим, что предположение об отсутствии масс над геоидом может интерпретироваться в том смысле, что такие массы были математически удалены заранее, так, что эта редукция действительно была выполнена "в свободном воздухе".

Для многих прикладных целей достаточно использовать нормальный градиент силы тяжести (соответствующий эллипсоидальной высоте h) $\partial\gamma/\partial h$ вместо $\partial g/\partial H$. Тогда

$$F \approx -\frac{\partial\gamma}{\partial h} H \approx +0.3086 H \text{ [мгал]}, \quad (3-26)$$

где H измеряется в метрах.

3.4 Редукция Буге

Цель редукции Буге силы тяжести состоит в полном удалении топографических масс, то есть масс, расположенных вне геоида.

Пластина Буге

Предположим, что область вокруг точки P , в которой измеряется сила тяжести, полностью плоская и горизонтальная (рис. 3.5), а массы между геоидом

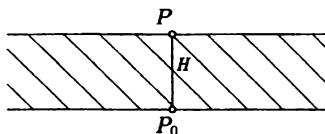


Рис. 3.5: Пластина Буге

и земной поверхностью имеют постоянную плотность ρ . Тогда притяжение A этой так называемой пластины Буге может быть получено из (3-13) при $a \rightarrow \infty$, поскольку плоская пластина может рассматриваться как круговой цилиндр толщины $b = H$ и бесконечно большого радиуса. В соответствии с известными правилами вычисления, мы получаем

$$A_B = 2\pi G \rho H \quad (3-27)$$

как притяжение бесконечной пластины Буге. Со стандартной плотностью $\rho = 2.67 \text{ г см}^{-3}$ это принимает вид

$$A_B = 0.1119 H \text{ [мгал]}, \quad (3-28)$$

где H измерено в метрах.

Удаление пластины эквивалентно вычитанию ее притяжения (3-27) из наблюдаемой силы тяжести. Это называется *неполной редукцией Буге*. Заметим, что это – обычная "плоская" пластина Буге; для действительно "сферической" пластины Буге мы имели бы коэффициент 4π вместо 2π (Moritz 1990: с. 235).

Чтобы продолжить и завершить обсуждаемую редукцию силы тяжести, мы должны теперь применить редукцию в свободном воздухе F , как указано в (3-26). Этот комбинированный процесс, состоящий из удаления топографических масс и применения редукции в свободном воздухе, называется *полной редукцией Буге*. Ее результатом является сила тяжести Буге на геоиде:

$$g_B = g - A_B + F. \quad (3-29)$$

С принятыми численными значениями получим:

сила тяжести, измеренная в P	g	
минус пластина Буге	- 0.1119 H	
плюс редукция в свободном воздухе	+ 0.3086 H	(3-30)
сила тяжести Буге в P_0	$g_B = g + 0.1967 H.$	

Так как g_B теперь относится к геоиду, то, вычитая из нее нормальную силу тяжести γ , относящуюся к эллипсоиду, мы получим истинную аномалию силы тяжести в смысле разд. 2.12,

$$\Delta g_B = g_B - \gamma. \quad (3-31)$$

Её называют *аномалией Буге*.

Поправка за рельеф

Указанная простая процедура может быть улучшена с помощью так называемой *поправки за рельеф* или *топографической поправки*, то есть учета отклонения реальной топографии от пластины Буге точки P (рис. 3.6). Для этого в точке A избыток масс Δm_+ , который притягивает вверх, удаляют, вызывая тем самым увеличение g в точке P . В точке B недостаток масс Δm_- восстанавливают, вновь вызывая увеличение g в точке P . Таким образом, *поправка за рельеф всегда положительна*.

Практически поправки за рельеф A_i можно определять с помощью палетки (рис. 2.20), используя формулу (3-22); влияние индивидуальных ячеек суммируют:

$$A_i = \sum \Delta A. \quad (3-32)$$

Опять удобно использовать шаблоны с полярной системой координат (рис. 2.20) для теоретических рассуждений, а прямоугольную координатную сетку (рис. 2.21) для практических вычислений. Для избытка масс Δm_+ , $H > H_P$,

$$b = H - H_P, \quad c = 0; \quad (3-33)$$

и для недостатка масс Δm_- , $H < H_P$,

$$b = c = H_P - H. \quad (3-34)$$

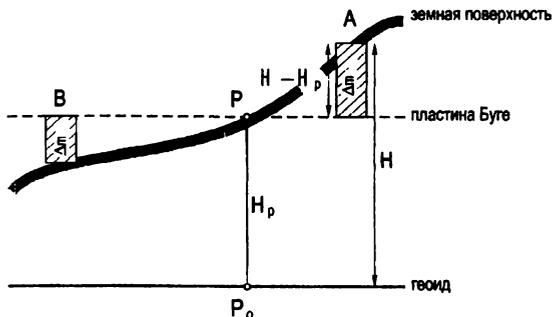


Рис. 3.6: Поправка за рельеф

Прибавляя поправку за рельеф A_t к (3-29), получим *уточнённую силу тяжести Буге*¹

$$g_B = g - A_B + A_t + F. \quad (3-35)$$

Редукция Буге и соответствующая аномалия Буге Δg_B называются *уточнённой* или *простой* в зависимости от того, была введена поправка за рельеф или нет.

На практике удобно разбивать редукцию Буге на эффект пластины Буге и поправку за рельеф, потому что величина последней обычно намного меньше. Даже для гор высотой 3000 м поправка за рельеф достигает значения лишь порядка 50 мгал (Heiskanen and Vening Meinesz 1958: с. 154).

Унифицированная процедура

Можно также вычислять полное влияние топографических масс

$$A_T = A_B - A_t \quad (3-36)$$

за один приём, используя столбики с основанием на уровне моря (рис. 3.7) и вновь разбивая местность на ячейки. При этом следует различать притяжение топографических масс A_T и поправку за рельеф A_t !

Как обычно,

$$A_T = \sum \Delta A, \quad (3-37)$$

где теперь $b = H$, $c = H_p$.

Для внутреннего круга используется формула (3-13) при $b = H_p$.

¹Сумму поправки за рельеф и редукция в свободном воздухе обычно называют аномалией Фая (прим. ред.)

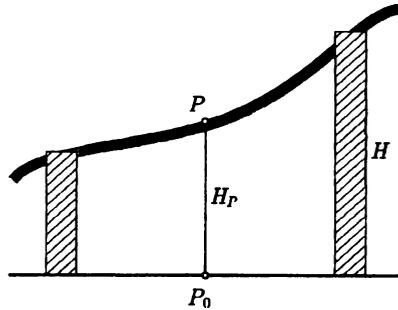


Рис. 3.7: Редукция Буге

В результате вместо (3-35) мы теперь имеем

$$g_B = g - A_T + F. \quad (3-38)$$

Дальнейшее уточнение редукции Буге может быть достигнуто с помощью использования аномалий плотности, аномалий градиента силы тяжести в свободном воздухе (разд. 2.20) и учета сферических эффектов. Необходимые формулы можно найти в работе Jung (1961: разд. 6.4).

3.5 Редукция Пуанкаре и Прея

Предположим, что нам нужно найти силу тяжести g' внутри Земли. Поскольку g' не может быть измерена, то она должна быть вычислена, исходя из значений силы тяжести на поверхности. Этого можно достичь, редуцируя измеренные значения силы тяжести по методу Пуанкаре и Прея.

Обозначим точку, в которой должна быть вычислена сила тяжести g' , как Q , так что $g' = g_Q$. Пусть P — такая точка на поверхности, которая расположена с точкой Q на одной и той же отвесной линии, см. рис. 3.8. Значение силы тяжести g_P в точке P измеряется.

Прямой способ вычисления g_Q состоял бы в использовании формулы

$$g_Q = g_P - \int_Q^P \frac{\partial g}{\partial H} dH \quad (3-39)$$

при условии, что реальный градиент силы тяжести $\partial g / \partial H$ внутри Земли известен. Его можно было бы найти по формуле Брунса (2-40),

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2g J + 4\pi G \rho - 2\omega^2, \quad (3-40)$$

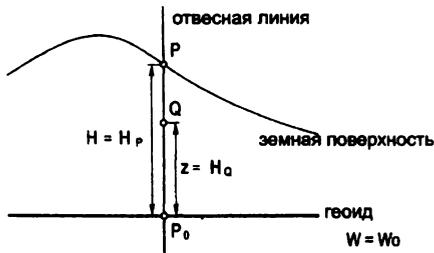


Рис. 3.8: Редукция Прея

если бы были известны средняя кривизна J геопотенциальных поверхностей и плотность ρ между точками P и Q .

Нормальный градиент в свободном воздухе дается формулой (2-147):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2, \quad (3-41)$$

где J_0 – средняя кривизна сферопотенциальных поверхностей. Если аппроксимация

$$g J \approx \gamma J_0 \quad (3-42)$$

является достаточной, то из (3-40) и (3-41) получим

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G \rho. \quad (3-43)$$

Практически, пренебрегая изменением $\partial \gamma / \partial h$ с широтой, мы найдем для плотности $\rho = 2.67 \text{ г см}^{-3}$ и (округлённой) гравитационной постоянной $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ сек}^{-2}$

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -0.3086 + 0.2238 = -0.0848 \text{ гал км}^{-1}. \quad (3-44)$$

При этом (3-39) принимает вид

$$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q) \quad (3-45)$$

где g измеряется в галах, а H – в километрах. Эта простая формула, хотя и довольно грубая, часто применяется на практике.

Точный способ вычисления g_Q , как уже отмечалось, состоит в использовании формул (3-39) и (3-40) с реальной средней кривизной J геопотенциальных поверхностей. Но это потребовало бы такой точности детализации формы этих поверхностей, которая недостижима на сегодняшний день.

Существует другой, более реальный в настоящее время, способ вычисления g_Q . Он подобен обычной редукции силы тяжести к уровню моря (см. разд. 3.4) и состоит из следующих трех шагов:

1. Численно удаляют все массы, расположенные над геопотенциальной поверхностью $W = W_Q$, которая проходит через точку Q , и вычитают их притяжение из значения g в точке P .
2. Поскольку пункт P вычисления силы тяжести теперь находится "в свободном воздухе", то применяют редукцию в свободном воздухе, перемещая, таким образом, пункт вычисления силы тяжести из P в Q .
3. Восстанавливают удаленные массы на их прежнее место и добавляют (алгебраически) их притяжение к значению g в точке Q .

Целью этой немного усложненной, но логически правильной, процедуры является возможность использования в шаге 2 градиента в *свободном воздухе*. Если мы *здесь* заменим реальный градиент в свободном воздухе нормальным градиентом $\partial\gamma/\partial h$, то, по-видимому, погрешность будет меньше, чем при использовании (3-43).

Заметим, что градиент в свободном воздухе может также быть вычислен точно с помощью формулы (2-394). Под аномалией силы тяжести Δg в этой формуле следует понимать аномалию силы тяжести, полученную после выполнения шага 2, то есть аномалию Буге, отнесенную к точке Q , расположенной ниже.

Эффект масс, расположенных над точкой Q (шаги 1 и 3), может быть вычислен, например, посредством некоторого шаблона или компьютерной процедуры численного трехмерного интегрирования. Если пренебречь поправкой за рельеф и принимать во внимание только бесконечную пластину Буге между точками P и Q с нормальной плотностью $\rho = 2.67 \text{ г см}^{-3}$, то получим следующие шаги, пронумерованные как выше:

сила тяжести, измеренная в P	g_P
1. удаление пластины Буге	$- 0.1119 (H_P - H_Q)$
2. редукция в свободном воздухе из P в Q	$+ 0.3086 (H_P - H_Q)$
3. восстановление пластины Буге	$- 0.1119 (H_P - H_Q)$
<hr/>	
вместе: сила тяжести в Q	$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$

(3-46)

Это – то же самое, что и (3-45). Таким образом, мы подтвердили эту формулу независимо. Мы видим теперь, что использование (3-43) или (3-45) равносильно замене рельефа местности пластиной Буге. Наконец, заметим, что редукция Пуанкаре и Пряя (сокращенно – *редукция Пряя*), дает реальную силу тяжести, которая была бы измерена внутри Земли, если бы это было возможно. Ее цель, таким образом, полностью отлична от целей других редукций силы тяжести, которые дают граничные значения на геоиде.

Редукция Пряя не может использоваться непосредственно для определения геоида, но она необходима для получения ортометрических высот. Это будет

обсуждено в разд. 4.3. Реальная сила тяжести g_0 в точке P_0 геоида связана с силой тяжести Буге g_B (3-38) следующим образом

$$g_0 = g_B - A_{T, P_0}. \quad (3-47)$$

Эта формула получена вычитанием из g_B притяжения A_{T, P_0} топографических масс в P_0 , что соответствует восстановлению рельефа после редукцирования в свободном воздухе силы тяжести Буге из точки P в точку P_0 .

3.6 Изостатическая редукция

3.6.1 Изостазия

Возможно, читатель склонен предполагать, что топографические массы просто наложены на совершенно однородную земную кору. Если бы это имело место, редукция Буге удаляла главную нерегулярность поля силы тяжести так, что аномалии Буге были бы очень малы и колебались случайным образом около нуля. Однако верно как раз обратное. Аномалии Буге в гористой области представляют собой систематически отрицательные величины и могут достигать больших значений, увеличивающихся в среднем на 100 мгал на каждые 1000 м высоты. Единственно возможное объяснение этого состоит в том, что под горами наблюдается некоторый недостаток масс. Это означает, что топографические массы определённым образом *компенсированы*.

Подобный эффект имеет место и для уклонений отвеса. Реальные уклонения оказываются меньше, чем те, что должны были бы вызывать видимые топографические массы. В середине девятнадцатого столетия Пратт наблюдал такой эффект в Гималаях. В одном месте этой области он получил значение $28''$ для уклонения отвеса от притяжения видимых масс гор. Значение, полученное с помощью астрономогеодезических измерений, было равно всего лишь $5''$. И вновь возникает необходимость в некоторой компенсации, объясняющей это несоответствие.

Две различные теории такой компенсации были разработаны почти одновременно Праттом в 1854 и 1859 годах и Эйри в 1855 году. Согласно Пратту, горы выпирают из-под земли как забродившее тесто. Согласно Эйри, горы плавают на жидкой лаве более высокой плотности (нечто вроде айсберга, плавающего на воде), так что, чем выше гора, тем глубже ее погружение.

Система компенсации Пратта-Хейфорда

Эта система компенсации была предложена Праттом и облечена в аналитическую форму Дж.Ф.Хейфордом, систематически использовавшим ее в геодезических целях.

Ее принцип проиллюстрирован на рис. 3.9.

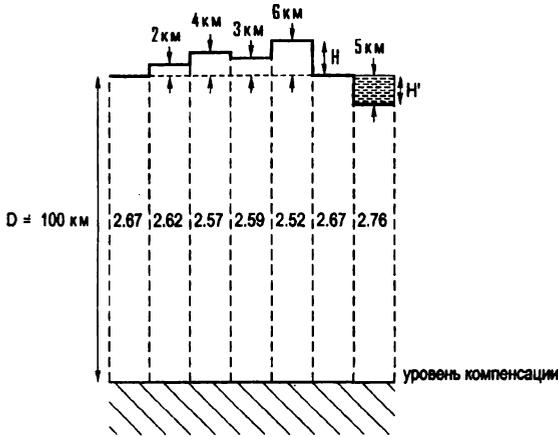


Рис. 3.9: Изостатическая модель Пратта-Хейфорда

Под уровнем компенсации расположена масса однородной плотности. Выше – столбики с одинаковым поперечным сечением имеют равные массы. Пусть D – глубина уровня компенсации, отсчитываемая от уровня моря, ρ_0 – плотность столбика высотой D . Тогда плотность ρ столбика высотой $D + H$ (H представляет собой высоту рельефа) удовлетворяет уравнению

$$(D + H) \rho = D \rho_0, \quad (3-48)$$

выражающему условие равенства масс. Можно предположить, что

$$\rho_0 = 2.67 \text{ г см}^{-3}. \quad (3-49)$$

Согласно (3-48), реальная плотность ρ немного меньше, чем это нормальное значение ρ_0 . Следовательно, имеет место недостаток масс, который, согласно (3-48), дается формулой

$$\Delta \rho = \rho_0 - \rho = \frac{H}{D + H} \rho_0. \quad (3-50)$$

В океанах условие равенства масс принимает вид

$$(D - H') \rho + H' \rho_w = D \rho_0, \quad (3-51)$$

где

$$\rho_w = 1.027 \text{ г см}^{-3} \quad (3-52)$$

– плотность, а H' – глубина океана. Следовательно, наблюдается избыток масс для столбика, расположенного под океаном:

$$\rho - \rho_0 = \frac{H'}{D - H'} (\rho_0 - \rho_w). \quad (3-53)$$

По существу, эта модель компенсации идеализирована и схематична. В природе она может выполняться лишь приближённо. Предполагается, что значения глубины компенсации варьируют около

$$D = 100 \text{ км}. \quad (3-54)$$

Для сфероидальной Земли столбики будут немного сходиться к ее центру, могут быть введены и другие усовершенствования. Мы можем постулировать равенство масс либо равенство давления; каждый постулат приводит к несколько различным сферическим усовершенствованиям. Стоит отметить, что по численным соображениям Хейфорд использовал другую, немного отличающуюся, модель; например, он отсчитывал глубину компенсации D от поверхности Земли, а не от уровня моря.

Система компенсации Эйри–Хейсканена

Эйри предложил эту модель, а Хейсканен дал ее точную формулировку для геодезических целей и широко использовал её на практике. Рисунок 3.10 иллюстрирует принцип этой модели. Горы постоянной плотности

$$\rho_0 = 2.67 \text{ г см}^{-3} \quad (3-55)$$

плавают на субстрате с большей постоянной плотностью

$$\rho_1 = 3.27 \text{ г см}^{-3}. \quad (3-56)$$

Чем выше горы, тем глубже они погружаются. Таким образом, под горами существуют подножные формирования, а под океанами – "антиподножие".

Обозначим разность плотностей $\rho_1 - \rho_0$ как $\Delta\rho$. На основе принятых численных значений имеем

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0 = 0.6 \text{ г см}^{-3}. \quad (3-57)$$

Обозначим высоту рельефа как H , а толщину подножного основания – как t (рис. 3.10); тогда условие гидростатического равновесия имеет вид

$$t \Delta\rho = H \rho_0, \quad (3-58)$$

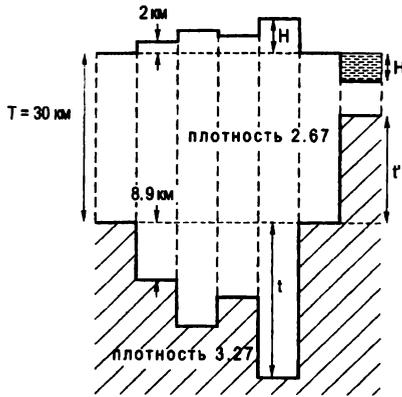


Рис. 3.10: Изостатическая модель Эйри-Хейсканена

то есть

$$t = \frac{\rho_0}{\Delta \rho} H = 4.45 H. \quad (3-59)$$

Для океанов соответствующее условие имеет вид

$$t' \Delta \rho = H' (\rho_0 - \rho_w), \quad (3-60)$$

где H' и ρ_w определяются так же, как указано выше, а t' – толщина "антиподножия" (рис. 3.10); таким образом, для принятых численных значений получим

$$t' = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\rho_1 - \rho_0} H' = 2.73 H'. \quad (3-61)$$

Для достижения большей точности к этим формулам также следует применить поправки за сферичность. И вновь, формулировки в терминах равной массы и равного давления введут к несколько различным результатам.

Нормальная толщина земной коры обозначается как T (рис. 3.10); ее величина принята около

$$T = 30 \text{ км}. \quad (3-62)$$

Тогда толщина коры под горами равна

$$T + H + t, \quad (3-63)$$

а под океанами –

$$T - H' - t'. \quad (3-64)$$

Система региональной компенсации Венинг–Мейнеса

Обе рассмотренные системы очень идеализированы, поскольку они предполагают, что компенсация имеет строго локальный характер, то есть распределена строго по вертикальным столбикам. Это предполагает слишком большую подвижность масс, что, по-видимому, нереально в такой строгой форме.

Поэтому Венинг–Мейнес в 1931 году модифицировал теорию Эйри, заменив локальную компенсацию региональной. Главная разница между этими двумя видами компенсации показана на рис. 3.11.

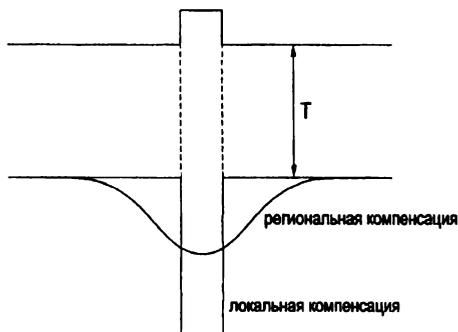


Рис. 3.11: Локальная и региональная компенсации

В теории Венинг–Мейнеса рельеф рассматривается как груз на перазломанной, но податливой упругой коре.

Можно описать это весьма неточным, но удобным для запоминания способом: встав на тонкий лед, Эйри проломит его, в то время как под Венинг–Мейнесом лед прочнее, и он лишь прогнется, но не сломается.

Хотя теория Венинг–Мейнеса более реалистична, она, вместе с тсм, и более сложна и поэтому редко применяется геодезистами. Дело в том, что, как мы увидим в дальнейшем, любая изостатическая система, примененная последовательно, служит для геодезических целей примерно одинаково.

Геофизические и геодезические данные показывают, что Земля приблизительно на 90% изостатически компенсирована. Однако трудно решить, по крайней мере, исходя из гравиметрических данных, какая из моделей лучше всего описывает эту компенсацию. Хотя сейсмические результаты указывают на тип компенсации Эйри, в некоторых местах компенсация, по-видимому, следует модели Пратта. Конечно, природа никогда не будет соответствовать ни одной из этих моделей с той степенью точности, которую мы предположили выше. Тем не менее, четкий и последовательный математический алгоритм является необходимой предпосылкой приложения изостазии к геодезическим задачам.

Для детального ознакомления с несколькими типами изостазии, см. Moritz (1990: Chap. 8). Модель Венинг–Мейнеса подробно описана в работе Abd-Elmotaal (1995); много информации имеется также в Интернете. Классической по изостазии и ее геофизическим приложениям является работа Heiskanen and Vening Meinesz (1958: Chap. 5 и 7).

3.6.2 Топографо–изостатические редукции

Целью топографо–изостатической редукции силы тяжести является *регуляризация* земной коры в соответствии с некоторой моделью изостазии. Регуляризация здесь означает попытку сделать земную кору настолько однородной, насколько это возможно. Топографические массы не удаляются полностью, как при редукции Буге, а сдвигаются вовнутрь геоида, чтобы возместить недостаток масс, существующий под континентами. В топографо–изостатической модели Пратта–Хейфорда топографические массы распределены между уровнем компенсации и уровнем моря так, что плотность коры изменяется от ее первоначального значения до постоянной стандартной величины ρ_0 . В модели Эйри–Хейсканена топографические массы используются для заполнения подножия континентов, изменяя тем самым значение плотности от $\rho_0 = 2.67 \text{ г/см}^3$ к $\rho_1 = 3.27 \text{ г/см}^3$.

Иными словами, топографические массы удаляются вместе с их компенсацией, и конечным результатом является идеально однородная кора плотности ρ_0 и постоянной толщины D (Пратт–Хейфорд) или T (Эйри–Хейсканен).

Таким образом, топографо–изостатическая редукция состоит из трех шагов:

1. удаление рельефа,
2. удаление компенсации,
3. редукция в свободном воздухе к геоиду.

Шаги 1 и 3 известны нам из редукции Буге, так что к ним может быть применена техника разд. 3.4. Шаг 2 является новым и мы обсудим его сейчас применительно к двум главным топографо–изостатическим системам.

Система Пратта–Хейфорда

Здесь применяется тот же метод, что и для нахождения поправки за рельеф (разд. 3.4, формула (3–32)). Притяжение (отрицательной) компенсации вычисляется по формуле

$$A_C = \sum \Delta A, \quad (3-65)$$

где притяжение вертикального столбика, представляющего собой ячейку, дается формулой (3–22) при

$$b = D, \quad c = D + H_P, \quad (3-66)$$

а вместо ρ берётся дефект плотности $\Delta\rho$. Если бы предшествующая редукция Буге была выполнена с первоначальной плотностью ρ столбика, выраженной, согласно (3-48), как

$$\rho = \frac{D}{D+H} \rho_0, \quad (3-67)$$

то $\Delta\rho$ следовало бы вычислять по формуле (3-50).

Но обычно редукция Буге выполняется при постоянной плотности ρ_0 . Тогда дефект плотности $\Delta\rho$ надо вычислять по формуле

$$\Delta\rho = \frac{H}{D} \rho_0, \quad (3-68)$$

что несколько отличается от (3-50), но восстанавливает равенство масс

$$(\rho_0 - \Delta\rho) D + \rho_0 H = \rho_0 D. \quad (3-69)$$

Первый член в левой части представляет собой массу слоя между уровнем компенсации и уровнем моря, второй – топографическую массу с предполагаемой плотностью ρ_0 .

Система Эйри – Хейсканена

Вновь воспользуемся формулой

$$A_c = \sum \Delta A, \quad (3-70)$$

где, согласно рис. 3.12, величины b и c из (3-22) задаются так:

$$b = t, \quad c = H_p + T + t, \quad (3-71)$$

а ρ заменяется на $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0 = 0.6 \text{ г/см}^3$.

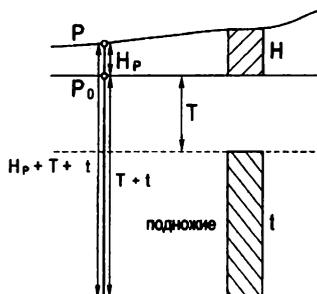


Рис. 3.12: Топография и компенсация - модель Эйри - Хейсканена

Полная редукция

По аналогии с (3-38), сила тяжести, приведенная на геоид с помощью топографо-изостатической редукции, принимает вид

$$g_{Г1} = g - A_T + A_C + F. \quad (3-72)$$

Здесь $-A_C$ — притяжение компенсации, которая фактически является отрицательной величиной, так что ее удаление эквивалентно члену $+A_C$; A_T — притяжение топографических масс, которое следует вычислять как эффект комбинирования пластины Буге с поправкой за рельеф, (3-36), или в один шаг, как описано в разд. 3.4; F — редукция в свободном воздухе, приближённо вычисляемая по (3-26).

Пункты измерения силы тяжести на океане

Здесь члены A_T и F в формуле (3-72) равны нулю, так как пункт измерения силы тяжести расположен на геоиде, однако член A_C имеет более сложный вид.

В модели Пратта-Хейфорда процедура такова. Избыток массы (3-53) субокеанического столбика высоты $D - H'$ (рис. 3.9) удаляется и используется для заполнения соответствующего океанического столбика высоты H' до получения требуемой плотности ρ_0 . В математических терминах это выглядит так:

$$A_C = -A_1 + A_2, \quad (3-73)$$

где A_1 и A_2 имеют вид (3-32), а ΔA задается формулой (3-22). Для A_1 имеем

$$b = D - H', \quad c = D, \quad (3-74)$$

и плотность $\rho - \rho_0$; для A_2 имеем

$$b = c = H' \quad (3-75)$$

и плотность $\rho_0 - \rho_w$.

В модели Эйри Хейсканева для заполнения океанов до достижения требуемой плотности ρ_0 используется избыток массы "антиподножия" $\rho_1 - \rho_0$. Соответствующая величина A_C вычисляется по той же формуле (3-73), где теперь для A_1 имеем

$$b = t', \quad c = T \quad (3-76)$$

и плотность $\rho_1 - \rho_0$; для A_2 , как и прежде,

$$b = c = H' \quad (3-77)$$

и плотность $\rho_0 - \rho_w$.

В обеих моделях формула (3-72) для пунктов измерения силы тяжести, расположенных на океане, сводится к виду

$$g_{Г1, океан} = g + A_C. \quad (3-78)$$

Топографо–изостатические аномалии

Топографо–изостатические аномалии силы тяжести – по аналогии с аномалиями Буге – определяются так:

$$\Delta g_{TI} = g_{TI} - \gamma. \quad (3-79)$$

Если бы какая-либо из топографо–изостатических систем строго соответствовала истинному положению вещей, то топографо–изостатическая редукция выполнила бы свою цель полной регуляризации земной коры в совершенстве, то есть земная кора стала бы ровной и однородной. Тогда, с должным образом выбранной референц–моделью для γ , топографо–изостатические аномалии силы тяжести (3-79) равнялись бы нулю.

Реальная топографо–изостатическая компенсация, существующая в природе, не может полностью соответствовать таким абстрактным моделям. Поэтому топографо–изостатические аномалии силы тяжести отличны от нуля, но они оказываются величинами малыми и гладкими, более или менее случайным образом принимающими положительные и отрицательные значения. Из-за этой гладкости и в силу своей независимости от высоты, они лучше подходят для интерполяции или экстраполяции, чем любой другой тип аномалий; см. гл. 9, в частности, разд. 9.7.

Подчеркнем еще раз, что топографо–изостатическая модель, используемая для геодезических целей, должна быть математически точной и самосогласованной; при этом всюду должна использоваться одна и та же модель. Усовершенствование модели предполагает учёт нерегулярности плотности топографических масс и рассмотрение аномального градиента силы тяжести.

3.7 Косвенный эффект

Удаление или смещение масс, лежащее в основе редукций силы тяжести, изменяет потенциал силы тяжести, а, следовательно, и геоид. Это изменение геоида является *косвенным эффектом* редукций силы тяжести.

Таким образом, поверхность, вычисленная с помощью формулы Стокса, исходя из топографо–изостатических аномалий силы тяжести, представляет собой не геоид непосредственно, а немного отличную поверхность – когеоид. Каждой редукции силы тяжести соответствует свой когеоид.

Пусть N^c – высота когеоида. Тогда высота N реального геоида находится по формуле

$$N = N^c + \delta N, \quad (3-80)$$

где косвенное влияние на N определяется величиной

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma}; \quad (3-81)$$

здесь δW – изменение потенциала на геоиде. Формула (3-81) является результатом применения теоремы Брунса (2-237).

Изменение потенциала δW для редукции Буге имеет вид

$$\delta W_B = U_T, \quad (3-82)$$

а для топографо-изостатической редукции

$$\delta W_{\text{ТИ}} = U_T - U_C. \quad (3-83)$$

Здесь нижние индексы потенциала U имеют тот же смысл, что и нижние индексы притяжения A , используемые в предыдущих разделах.

Для практического определения U_T и U_C можно вновь, как и в (3-32), воспользоваться палеткой (по крайней мере, идейно):

$$U = \sum \Delta U, \quad (3-84)$$

где уместно применение формул (3-9), (3-12), (3-15) и первой из (3-21). Точка, к которой относится U – это всегда точка P_0 , расположенная на уровне моря (рис. 3.1). Для вычисления U_T используем U_0 , см. (3-12), при $b = H$ и плотности ρ_0 (рис. 3.12). Для вычисления U_C в случае континента используем U_c , см. (3-9), со следующими величинами: в случае системы Пратта – Хейфорда

$$b = c = d, \quad \text{плотность } \frac{H}{D} \rho_0; \quad (3-85)$$

в случае системы Эйри – Хейсканена

$$b = t, \quad c = t + T, \quad \text{плотность } \rho_1 - \rho_0. \quad (3-86)$$

Соответствующие рассуждения для случая океана оставим читателю в качестве упражнения.

Косвенный эффект аномалий Буге очень велик, примерно в десять раз больше собственно высоты геоида (см. карту в конце книги Helmert (1884: табл. I), где максимальная величина достигает 440 м!) Причиной этого является то, что Земля в целом топографо-изостатически компенсирована. Поэтому аномалии Буге не могут быть использованы для определения геоида.

С топографо-изостатическими аномалиями силы тяжести косвенный эффект имеет порядок 10 м и меньше, чем N , как и следовало ожидать. Тем не менее, необходимо очень аккуратно вычислять косвенный эффект δN_I , используя при этом ту же топографо-изостатическую модель, что и для редукции силы тяжести.

Далее, прежде, чем применять формулу Стокса, нужно редуцировать топографо-изостатические аномалии силы тяжести с геоида на когеоид. Это делается с помощью простой редукции в свободном воздухе, используя (3-26) для прибавления к Δg_i поправки

$$\delta = +0.3086 \delta N \text{ [мгал]}. \quad (3-87)$$

Здесь δN измеряется в метрах. Эта поправка δ представляет собой *косвенный эффект на силу тяжести* и по величине имеет порядок 3 мгал.

Теперь топографо-изостатические аномалии силы тяжести относятся строго к геоиду. Применение формулы Стокса дает значение N^c , которое, согласно (3-80), должно быть откорректировано с помощью косвенного эффекта δN , чтобы получить высоту N реального геоида.

Уклонения отвесной линии

Косвенное влияние на уклонения отвесной линии определяется, согласно (2-377), формулами

$$\begin{aligned}\delta\xi &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \delta N}{\partial \varphi}, \\ \delta\eta &= -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial \delta N}{\partial \lambda}.\end{aligned}\tag{3-88}$$

Этот косвенный эффект, по существу, идентичен так называемым топографо-изостатическим уклонениям отвеса (Heiskanen and Vening Meinesz 1958: сс. 252-255).

Итак, *топографо-изостатическая редукция* как таковая является довольно действенной процедурой. Это – *практически единственная редукция силы тяжести, которая используется для определения геоида в настоящее время* (за исключением, возможно, редукции в свободном воздухе, которая является отдельным случаем).

Последним чисто гравиметрическим геоидом перед появлением спутников был Columbus (Heiskanen 1957).

3.8 Инверсионная редукция Рудзкого

Можно найти такую редукцию силы тяжести, при которой косвенный эффект равен нулю. Для этого топографические массы перемещают во внутрь геоида таким образом, что при этом

$$U_C = U_T.\tag{3-89}$$

Тогда

$$\delta W = U_T - U_C = 0.\tag{3-90}$$

Эта процедура описана М. П. Рудзким (Rudzki) в 1905 году. При её рассмотрении можно полагать, что геоид является сферой радиуса R (рис. 3.13).

Пусть дифференциал массы dm в точке Q замещается дифференциалом массы dm' в некоторой точке Q' внутри геоида, расположенной на том же

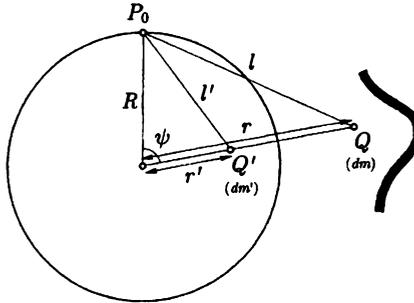


Рис. 3.13: Редукция Рудзкого как инверсия в сфере

радиус-векторе. Потенциал в точке геоида P_0 благодаря этим дифференциалам масс имеет вид:

$$dU_T = G \frac{dm}{l} = \frac{G dm}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}},$$

$$dU_C = G \frac{dm'}{l'} = \frac{G dm'}{\sqrt{r'^2 + R^2 - 2Rr' \cos \psi}}.$$
(3-91)

Мы получим равенство

$$dU_C = dU_T \quad (3-92)$$

если

$$dm' = \frac{R}{r} dm \quad (3-93)$$

и

$$r' = \frac{R^2}{r}. \quad (3-94)$$

Это легко проверяется подстановкой во второе уравнение (3-91). Условие (3-94) означает, что точки Q' и Q связаны *инверсией относительно сферы* радиуса R (Kellogg 1929: с. 231). Поэтому этот метод редукции называют *инверсионной редукцией*, или *редукцией Рудзкого*.

Условие (3-93) выражает тот факт, что компенсирующая масса dm' не равна в точности dm , а немного меньше. Поскольку это относительное уменьшение массы имеет порядок 10^{-8} , то им можно пренебречь, положив

$$dm' = dm. \quad (3-95)$$

Обычно бывает достаточно заменить сферу плоскостью. Тогда Q' является обыкновенным зеркальным отображением Q (рис. 3.14).

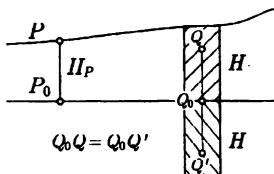


Рис. 3.14: Плоская аппроксимация редукции Рудзкого.

Сила тяжести Рудзкого на геоиде, по аналогии с (3.72), имеет вид

$$g_R = g - A_T + A_C + F, \quad (3.96)$$

где $A_C = \sum \Delta A$, $b = H$, $c = H + H_P$, а плотность равна плотности топографических масс.

Так как косвенный эффект равен нулю, то когеоид Рудзкого совпадает с реальным геоидом, но изменяется поле силы тяжести вне Земли, что сегодня находится в центре внимания. Кроме того, редукция Рудзкого не соответствует никакой геофизически значимой модели. *Тем не менее, она интересна с концептуальной точки зрения.* Расценивайте ее как интересный исторический факт, но никогда даже не пытайтесь её использовать!

3.9 Конденсационная редукция Гельмерта

Здесь топографические массы конденсируются так, что формируют поверхностный слой на геоиде (что-то вроде стеклянной сферы, сделанной из очень тонкого, но очень тяжелого и крепкого стекла); при этом общая масса остается неизменной. И вновь, масса перемещается вдоль локальной отвесной линии (рис. 3.15).

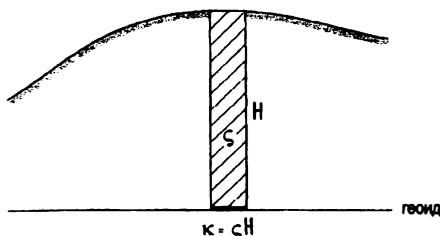


Рис. 3.15: Метод конденсации Гельмерта

Мы можем рассматривать конденсацию Гельмерта как предельный случай изостатической редукции по системе Пратта-Хейфорда, если глубину компенсации D устремить к нулю. Иногда это полезно.

Опять имеем

$$g_H = g - A_T + A_C + F, \quad (3-97)$$

где $A_C = \sum \Delta A$ теперь надо вычислять с помощью второго уравнения (3-19), полагая $c = H_P$ и $\kappa = \rho H$; здесь H_P – высота пункта P и H – высота ячейки.

Косвенный эффект таков:

$$\delta W = U_T - U_C. \quad (3-98)$$

Потенциал $U_C = \sum \Delta U$ должен быть вычислен, используя первое из уравнений (3-19) при $\kappa = \rho H$, как и прежде, и $c = 0$, так как эта величина относится к точке геоида P_0 . Соответствующее значение δN очень мало, составляя приблизительно 1 м на каждые 3 км среднего возвышения. Таким изменением можно пренебречь и полагать, что когеоид конденсационной редукции практически совпадает с реальным геоидом.

Часто можно пренебречь даже "прямым эффектом", $-A_T + A_C$, поскольку притяжение слоя Гельмерта почти компенсирует притяжение топографических масс. Остаётся

$$g_H = g + F, \quad (3-99)$$

то есть, простая редукция в свободном воздухе. В этом смысле, *простая редукция в свободном воздухе может рассматриваться как процедура, предоставляющая приближённые граничные значения на геоиде*, которые используются затем в формуле Стокса. С той же степенью приближения "когеоид в свободном воздухе" совпадает с реальным геоидом.

Следовательно, аномалии в свободном воздухе

$$\Delta g_F = g + F - \gamma \quad (3-100)$$

можно рассматривать как аппроксимацию "конденсационных аномалий"

$$\Delta g_H = g_H - \gamma. \quad (3-101)$$

Многогранность редукции в свободном воздухе

Это – одна из самых фундаментальных, самых трудных и самых привлекательных тем физической геодезии. Фактически аномалия в свободном воздухе подразумевает несколько идейно различных, но связанных концепций.

1. Величина F , как мы могли заметить, была скорее частью каждой редукции силы тяжести, чем полноценной самостоятельной редукцией силы тяжести.

2. Как мы видели выше, аномалии в свободном воздухе можно *приближённо* идентифицировать с конденсационными аномалиями Гельмерта.
3. *Строго* – аномалии в свободном воздухе можно даже считать результатом *переноса масс* путём редукции силы тяжести, в том же смысле, что и изостатические аномалии. Только представьте, что Вы переносите массы, расположенные над геоидом, во внутрь него таким образом, что *внешний потенциал остаётся неизменным!* Это напоминает редукцию Рудзкого (потенциал геоида остаётся неизменным), но довольно сильно отличается от неё. Самое важное преимущество состоит в том, что аномалия в свободном воздухе в нынешнем смысле оставляет неизменным внешний потенциал, что в настоящее время намного важнее, чем геоид. Самый большой недостаток заключается в том, что нельзя проделать точные вычисления: мы не знаем, как сдвинуть массы так, чтобы внешние массы остались неизменными. Иначе говоря, редукция Рудзкого конструктивна – нам говорят, как это сделать, тогда как рассматриваемая редукция неконструктивна – мы не знаем, как это сделать непосредственно. Больше об этом будет сказано в разделах 8.2, 8.6, 8.9 и 8.15. Таким образом мы попытаемся разрезать трудный пирог на более простые части.

Мы разобрали основные методы, которые были предложены для редукции силы тяжести. Их простой обзор иллюстрирует рис. 3.16.

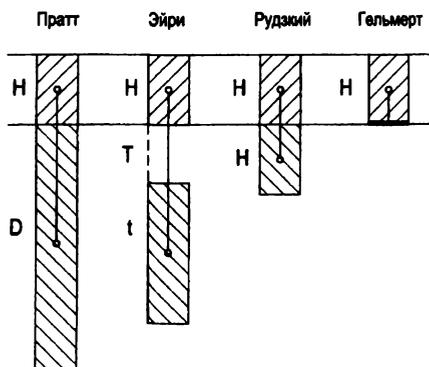


Рис. 3.16: Топография и компенсация при различных типах редукции силы тяжести

Глава 4

Высоты

4.1 Геометрическое нивелирование

Принцип геометрического нивелирования хорошо известен. Для того, чтобы измерить превышение δH_{AB} между двумя точками A и B , в каждой из них устанавливаются вертикальные рейки, и нивелир (инструмент, задающий уровень) – где-нибудь между ними (рис. 4.1).

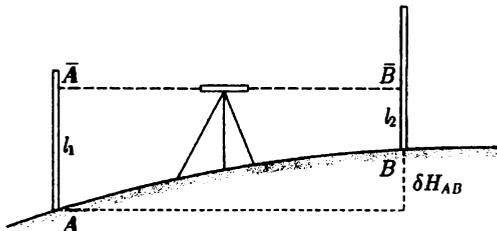


Рис. 4.1: Геометрическое нивелирование

Так как линия $\bar{A}\bar{B}$ горизонтальна, то разность показаний реек $l_1 = A\bar{A}$ и $l_2 = B\bar{B}$ и является превышением:

$$\delta H_{AB} = l_1 - l_2. \quad (4.1)$$

Если мы измеряем замкнутый полигон, то есть, такую замкнутую линию нивелирования, в которой мы, в конце концов, возвращаемся к исходному положению, то алгебраическая сумма всех измеренных превышений, вообще говоря, не будет строго равна нулю, как можно было бы ожидать, даже если бы мы были в состоянии производить наблюдения абсолютно точно. Эта невязка указывает, что нивелирование представляет собой более сложную процедуру, чем может показаться на первый взгляд.

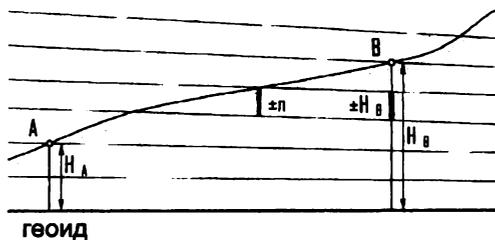


Рис. 4.2: Нивелирование и ортометрическая высота

Изучим этот вопрос более детально. Рисунок 4.2 иллюстрирует соответствующий геометрический принцип. Пусть точки A и B находятся столь далеко друг от друга, что процедуру рисунка 4.1 требуется применить неоднократно. Тогда сумма полученных превышений между A и B не будет равна разности их ортометрических высот H_A и H_B . Причина заключается в том, что нивелирное приращение δn , как мы впредь будем его обозначать, отличается от соответствующего приращения δH_B ортометрической высоты H_B (рис. 4.2) из-за непараллельности уровневых поверхностей. Обозначая соответствующее приращение потенциала W как δW , имеем, согласно (2-21),

$$-\delta W = g \delta n = g' \delta H_B, \quad (4-2)$$

где g – сила тяжести на станции нивелирования, g' – сила тяжести на отвесной линии B на отрезке δH_B . Следовательно,

$$\delta H_B = \frac{g}{g'} \delta n \neq \delta n. \quad (4-3)$$

Таким образом, не существует прямой геометрической связи между результатом нивелирования и ортометрической высотой, поскольку соотношение (4-3) выражает физическую связь этих величин. Что же тогда, если не высота, получается в результате нивелирования? Если сила тяжести g также измерена, то приращение потенциала

$$\delta W = -g \delta n \quad (4-4)$$

определено, так что мы получим

$$W_B - W_A = - \sum_A^B g \delta n. \quad (4-5)$$

Таким образом, нивелирование в сочетании с гравиметрическими измерениями доставляет *разность потенциалов*, то есть физическую величину.

Мы получим более строгое в теоретическом смысле соотношение, если заменим сумму в (4-5) интегралом:

$$W_B - W_A = - \int_A^B g \, dn. \quad (4 \ 6)$$

Заметим, что этот интеграл¹ не зависит от формы пути интегрирования; то есть, интегрирование вдоль различных нивелирных ходов, соединяющих точки A и B (рис. 4.3), должно давать одинаковый результат.

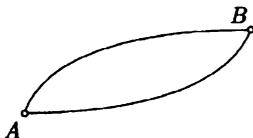


Рис. 4.3: Два различных нивелирных хода, соединяющих точки A и B (вместе они образуют замкнутую линию)

Это очевидно, потому что W есть функция только местоположения и потому каждой точке соответствует единственное значение W . Если нивелирный ход возвращается в исходную точку A , то полный интеграл должен быть равен нулю:

$$\oint g \, dn = -W_A + W_A = 0. \quad (4 \ 7)$$

Символом \oint обозначен (криволинейный) интеграл по замкнутому контуру.

С другой стороны, измеренное превышение, то есть сумма нивелирных приращений

$$\Delta n_{AB} = \sum_A^B \delta n = \int_A^B dn, \quad (4 \ 8)$$

зависит от пути интегрирования и, таким образом, в общем случае не равна нулю для замкнутой линии:

$$\oint dn = \text{невязка} \neq 0. \quad (4 \ 9)$$

С математической точки зрения дело объясняется тем, что dn не является полным дифференциалом, тогда как $dW = -g \, dn$ — полный дифференциал; таким образом, dn становится полным дифференциалом только при умножении на *интегрирующий множитель* $(-g)$.

¹Речь идёт о криволинейном интеграле 2-го рода (прим. ред.).

Итак, результатом нивелирования в сочетании с гравиметрическими измерениями является разность потенциалов. Это понятие является основным во всей теории высот; даже ортометрические высоты следует рассматривать как величины, полученные из разности потенциалов. Хотя нивелирование применяется на практике и без гравиметрических измерений, в таком виде оно, строго говоря, является бессмысленным, поскольку использование нивелирных высот (4-8) как таковых приводит к противоречиям (нвязкам); здесь такое нивелирование рассматриваться не будет.

4.2 Геопотенциальные числа и динамические высоты

Пусть O – точка, расположенная на уровне моря, то есть, проще говоря, на геоиде; обычно берут подходящую точку на побережье. Пусть A – другая точка, связанная с O нивелирным ходом. Тогда разность потенциалов между A и O может быть определена по формуле (4.6). Интеграл

$$\int_0^A g \, dn = W_0 - W_A = C, \quad (4.10)$$

являющийся разностью между потенциалом на геоиде и потенциалом в точке A , рассмотрен в разд. 2.4 и определяет собой *геопотенциальное число* точки A . Оно определено таким образом, что всегда является положительным.

Геопотенциальное число C как разность потенциалов не зависит от конкретного нивелирного хода, используемого для соединения точки с уровнем моря. Оно одинаково для всех точек уровенной поверхности. Таким образом, геопотенциальное число можно рассматривать как *естественную меру высоты*, хотя оно и не имеет соответствующей размерности.

Геопотенциальное число C измеряется в геопотенциальных единицах (г.п.е.) где

$$1 \text{ г.п.е.} = 1 \text{ гкал м} = 1000 \text{ гал м.} \quad (4.11)$$

Подставляя $g \approx 0.98$ гкал в (4.10), получим

$$C \approx g H \approx 0.98 H; \quad (4.12)$$

таким образом, геопотенциальное число в г.п.е. почти равно высоте над уровнем моря в метрах.

Геопотенциальные числа были приняты на встрече Подкомиссии Международной Ассоциации Геодезии во Флоренции в 1955 году. Раньше использовались *динамические высоты*, определяемые как

$$H^{\text{dyn}} = \frac{C}{\gamma_0}, \quad (4.13)$$

где γ_0 – нормальная сила тяжести для произвольной стандартной широты, обычно 45° :

$$\gamma_{45^\circ} = 9.806\,199\,203 \text{ м с}^{-2} = 980.6\,199\,203 \text{ гал} \quad (4-14)$$

для GRS 1980. Напомним, что $1 \text{ гал} = 10^{-2} \text{ м с}^{-2}$ и, соответственно, $1 \text{ мгал} = 10^{-5} \text{ м с}^{-2}$.

Динамическая высота отличается от геопотенциального числа только масштабом, или единицей измерения: деление на константу γ_0 в (4-13) просто преобразовывает геопотенциальное число в длину. Однако динамическая высота совсем не имеет никакого геометрического смысла, так что деление на произвольное γ_0 лишь затеняет истинное физическое значение разности потенциалов. Поэтому геопотенциальные числа предпочтительнее динамических высот как по теоретическим соображениям, так и с точки зрения практического установления национальной или континентальной системы высот.

Динамическая поправка

Иногда удобно преобразовать измеренное превышение Δn_{AB} (4-8) в разность динамических высот путем прибавления малой поправки.

С помощью формул (4-13) и (4-10) получим

$$\Delta H_{AB}^{\text{dyn}} = H_B^{\text{dyn}} - H_A^{\text{dyn}} = \frac{1}{\gamma_0} (C_B - C_A) = \frac{1}{\gamma_0} \int_A^B g \, dn \quad (4-15)$$

что можно переписать как

$$\Delta H_{AB}^{\text{dyn}} = \frac{1}{\gamma_0} \int_A^B (g - \gamma_0 + \gamma_0) \, dn = \int_A^B dn + \int_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \, dn. \quad (4-16)$$

Поэтому

$$\Delta H_{AB}^{\text{dyn}} = \Delta n_{AB} + DC_{AB}, \quad (4-17)$$

где

$$DC_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \, dn \approx \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n \quad (4-18)$$

– *динамическая поправка*.

Фактически динамическая поправка может также использоваться и для вычисления разностей геопотенциальных чисел. В самом деле,

$$C_B - C_A = \gamma_0 \Delta n_{AB} + \gamma_0 DC_{AB}. \quad (4-19)$$

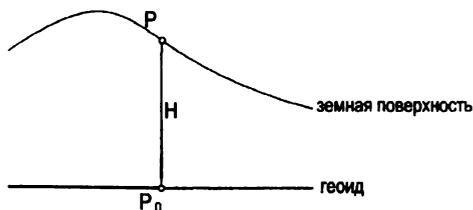


Рис. 4.4: Редукция силы тяжести

4.3 Ортометрические высоты

Обозначим пересечение геоида с отвесной линией, проходящей через точку P , как P_0 (рис. 4.4). Пусть C – геопотенциальное число точки P , то есть,

$$C = W_0 - W, \quad (4-20)$$

и H – ее ортометрическая высота, то есть, длина отрезка отвесной линии, заключенного между P_0 и P . Выполним интегрирование в (4-10) вдоль этого отрезка P_0P . Это допустимо, потому что результат не зависит от пути интегрирования. Получаем

$$C = \int_0^H g \, dH. \quad (4-21)$$

Эта формула содержит H неявно. Но можно получить выражение для H и в явном виде. В самом деле, из

$$dC = -dW = g \, dH, \quad dH = -\frac{dW}{g} = \frac{dC}{g} \quad (4-22)$$

имеем

$$H = -\int_{W_0}^W \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g}. \quad (4-23)$$

Здесь, как и прежде, интегрирование производится вдоль отвесной линии.

Однако от явной формулы (4-23) мало пользы на практике. Лучше преобразовать (4-21) тривиальным, на первый взгляд, образом:

$$C = \int_0^H g \, dH = H \cdot \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH, \quad (4-24)$$

так что

$$C = \bar{g} H, \quad (4-25)$$

где

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH \quad (4-26)$$

является средним значением силы тяжести на отрезке отвесной линии между точкой P_0 геоида и точкой P поверхности. Из (4-25) следует, что

$$H = \frac{C}{\bar{g}}; \quad (4-27)$$

это позволяет вычислить H , если известна средняя сила тяжести \bar{g} . Поскольку \bar{g} зависит от H нестрого, то (4-27) представляет собой практически полезную формулу, а не просто тавтологию. Для определения средней силы тяжести \bar{g} формулу (4-26) можно переписать так:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g(z) dz, \quad (4-28)$$

где $g(z)$ – фактическая сила тяжести в переменной точке Q , имеющей высоту z (рис. 3.8). Самая простая аппроксимация получается с помощью упрощенной редукции Прейя (3-45):

$$g(z) = g + 0.0848 (H - z), \quad (4-29)$$

где g – сила тяжести, измеренная в точке P поверхности. Теперь можно легко проинтегрировать (4-28) и получить

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{1}{H} \int_0^H [g + 0.0848 (H - z)] dz \\ &= g + \frac{0.0848}{H} \left[H z - \frac{z^2}{2} \right] \Big|_0^H, \end{aligned} \quad (4-30)$$

или

$$\bar{g} = g + 0.0424 H \quad (g \text{ в гал, } H \text{ в км}). \quad (4-31)$$

Коэффициент 0.0424 относится к нормальной плотности $\rho = 2.67 \text{ г/см}^3$. Соответствующая формула для произвольной постоянной плотности, согласно (3-43), имеет вид

$$\bar{g} = g - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 2\pi G \rho \right) H. \quad (4-32)$$

Если мы воспользуемся выражениями (4-31) или (4-32) для \bar{g} в основной формуле (4-27), то получим так называемую высоту Гельмерга:

$$H = \frac{C}{g + 0.0424 H}, \quad (4-33)$$

где C измеряется в г.п.е., g – в галах, а H – в километрах.

Как мы видели в разд. 3.5, эта аппроксимация замещает рельеф бесконечной пластиной Буге постоянной плотности и высоты H . Этого часто оказывается достаточно. Но иногда – для высокогорных районов или с целью

достижения большей точности – возникает необходимость в применении к g более строгой редукции Прёя, состоящей, например, из трех шагов, описанных в разд. 3.5. Практический и довольно точный метод для этой цели был предложен Niethammer в 1932 году. Этот метод учитывает рельеф, предполагая только, что градиент в свободном воздухе является нормальным, а плотность постоянна внизу вплоть до геоида.

Достаточно бывает и вычисления \bar{g} в виде среднего арифметического значения силы тяжести g , измеренной в точке P поверхности, и силы тяжести g_0 , вычисленной с помощью редукции Прёя в соответствующей точке P_0 геоида :

$$\bar{g} = \frac{1}{2} (g + g_0). \quad (4.34)$$

Это предполагает, что вдоль отвесной линии сила тяжести g изменяется линейно. Такое предположение, как показано в работах Mader (1954) и Ledersteger (1955), оказывается допустимым с достаточной точностью даже в экстремальных ситуациях.

Ортометрическая поправка

Ортометрическая поправка прибавляется к измеренному превышению, чтобы преобразовать его в разность ортометрических высот.

Пусть нивелирный ход соединяет две точки A и B (рис. 4.5).

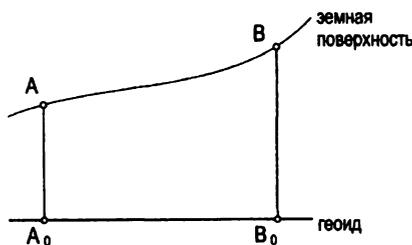


Рис. 4.5: Ортометрическая и динамическая поправки

Вспользуемся сначала простым приемом:

$$\begin{aligned} \Delta H_{AB} &= H_B - H_A = H_B - H_A - H_B^{\text{dyn}} + H_A^{\text{dyn}} + (H_B^{\text{dyn}} - H_A^{\text{dyn}}) \\ &= \Delta H_{AB}^{\text{dyn}} + (H_B - H_B^{\text{dyn}}) - (H_A - H_A^{\text{dyn}}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Из (4-17) имеем

$$\Delta H_{AB}^{\text{dyn}} = \Delta \pi_{AB} + DC_{AB}. \quad (4.36)$$

Рассмотрим теперь разности между ортометрическими и динамическими высотами, $H_A - H_A^{dyn}$ и $H_B - H_B^{dyn}$. Представьте воображаемый нивелирный ход, идущий от точки A_0 геоида к точке A поверхности вдоль отвесной линии. Тогда измеренное превышение было бы равно собственно H_A : $\Delta n_{A_0A} = H_A$, так что

$$DC_{A_0A} = \Delta H_{A_0A}^{dyn} - \Delta n_{A_0A} = H_A^{dyn} - H_A \quad (4-37)$$

и

$$\begin{aligned} H_A - H_A^{dyn} &= -DC_{A_0A}, \\ H_B - H_B^{dyn} &= -DC_{B_0B}. \end{aligned} \quad (4-38)$$

Подставляя (4-36) и (4-38) в (4-35), мы наконец получим

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + DC_{AB} + DC_{A_0A} - DC_{B_0B}, \quad (4-39)$$

или

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + OC_{AB}, \quad (4-40)$$

где

$$OC_{AB} = DC_{AB} + DC_{A_0A} - DC_{B_0B} \quad (4-41)$$

— ортометрическая поправка. Это замечательное соотношение связывает между собой ортометрические и динамические поправки (Ledersteger 1955). Его можно записать так

$$OC_{AB} = DC_{AB} + DC_{A_0A} + DC_{B_0B_0}; \quad (4-42)$$

Мы изменили здесь порядок следования нижних индексов последнего члена и, следовательно, его знак. Так как $DC_{B_0A_0} = 0$ (почему?), то можно написать

$$OC_{AB} = DC_{AB} + DC_{B_0B} + DC_{B_0A_0} + DC_{A_0A}, \quad (4-43)$$

или

$$OC_{AB} = DC_{AB B_0 A_0 A}. \quad (4-44)$$

Таким образом, ортометрическая поправка от A до B равна динамической поправке по петле $AB B_0 A_0 A$, — любопытно, но практически бесполезное соотношение, эквивалентное (4-41). (*Вопрос*: Почему это не зависит от γ_0 ?)

Из (4-18) найдем

$$\begin{aligned} DC_{AB} &= \int_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dn = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n, \\ DC_{A_0A} &= \int_{A_0}^A \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dH = \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A, \\ DC_{B_0B} &= \int_{B_0}^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dH = \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B, \end{aligned} \quad (4-45)$$

где \bar{g}_A и \bar{g}_B – средние значения силы тяжести вдоль отвесных линий точек A и B . Таким образом, ортометрическая поправка (4-41) принимает вид

$$\text{OC}_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B. \quad (4-46)$$

Здесь вновь возникает необходимость в средних значениях силы тяжести вдоль отвесных линий, \bar{g}_A и \bar{g}_B ; γ_0 – произвольная постоянная, за которую мы всегда принимаем нормальную силу тяжести на широте 45° .

Точность

Оценим сначала влияние на H погрешности средней силы тяжести \bar{g} . Дифференцируя $H = C/\bar{g}$, получим

$$\delta H = -\frac{C}{\bar{g}^2} \delta \bar{g} = -\frac{H}{\bar{g}} \delta \bar{g}. \quad (4-47)$$

Поскольку \bar{g} приближённо равно 1000 гал, то, пренебрегая знаком "минус", получаем простую формулу

$$\delta H_{[\text{мм}]} \approx \delta \bar{g}_{[\text{мгал}]} H_{[\text{км}]}; \quad (4-48)$$

здесь нижние индексы обозначают единицы измерения; δH – погрешность величины H , вызванная погрешностью $\delta \bar{g}$ величины \bar{g} .

При $H = 1 \text{ км}$

$$\delta H_{[\text{мм}]} \approx \delta \bar{g}_{[\text{мгал}]}, \quad (4-49)$$

откуда видно, что погрешность $\delta \bar{g}$ порядка 100 мгал искажает значение высоты в 1000 м лишь на 10 см.

Теперь оценим влияние погрешности плотности ρ на \bar{g} . Дифференцируя (4-32) и опуская знак "минус", получим

$$\delta \bar{g} = 2\pi G H d\rho. \quad (4-50)$$

Если $\delta \rho = 0.1 \text{ г см}^{-3}$ и $H = 1 \text{ км}$, то

$$\delta \bar{g} = 4.2 \text{ мгал}, \quad (4-51)$$

что вызывает погрешность в 4 мм в H . Погрешность плотности 0.6 г/см^3 , которая соответствует максимальной вариации плотности горных пород, встречающейся на практике, искажает значение $H = 1000 \text{ м}$ лишь на 25 мм.

Mader (1954) оценил разность между простым вычислением средней силы тяжести по Гельмерту (4-32) и более точными методами, учитывающими

поправку за рельеф. Он нашел для Nochtor в Альпах, $H = 2504$ м:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Гельмерт} & \bar{g} = 980.263 \quad (\text{только пластина Буге}), \\ \text{Neithhammer} & 986 \\ \bar{g} = \frac{1}{2}(g + g_0) & 985 \end{array} \right\} \text{ (с учётом поправки за рельеф)}. \quad (4-52)$$

Среднее значение силы тяжести \bar{g} , полученное по формуле (4-34), отличается от значения, полученного по методу Neithhammer, только на 1 мгал, что говорит о лишнейности g вдоль отвесной линии даже в экстремальном случае. Эта величина соответствует разности в H около 3 мм. Высота, полученная просто по Гельмерту, отличается примерно на 6 см от этих более детально вычисленных значений.

Итак, разности очень малы даже в рассмотренном довольно экстремальном случае; мы видим, что ортометрические высоты могут быть получены с очень высокой точностью. Это очень важно для обсуждения современной теории Молоденского с практической точки зрения (см. гл. 8, в частности, разд. 8.11).

4.4 Нормальные высоты

Представим на минуту, что поле силы тяжести Земли нормально, то есть $W = U$, $g = \gamma$, $T = 0$. При таком допущении вычислим "ортометрические высоты"; мы будем называть их *нормальными высотами* и обозначать как H^* . Таким образом, формулы (4-21) – (4-26) принимают вид

$$W_0 - W = C = \int_0^{H^*} \gamma dH^*, \quad (4-53)$$

$$H^* = \int_0^C \frac{dC}{\gamma}, \quad (4-54)$$

$$C = \bar{\gamma} H^*, \quad (4-55)$$

где

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H^*} \int_0^{H^*} \gamma dH^* \quad (4-56)$$

– средняя нормальная сила тяжести вдоль отвесной линии.

Поскольку нормальный потенциал U – простая аналитическая функция, то эти формулы можно вычислить непосредственно. Но потенциал Земли, очевидно, не нормален; тогда что все это означает? Рассмотрим точку P на физической поверхности Земли. Она имеет определенный потенциал W_P и определенный нормальный потенциал U_P , но, вообще говоря, $W_P \neq U_P$. Но на

отвесной линии точки P имеется некоторая точка Q , такая, что $U_Q = W_P$; то есть, нормальный потенциал U в Q равен реальному потенциалу W в P . Нормальная высота H^* точки P есть ни что иное, как эллипсоидальная высота точки Q над эллипсоидом, так же, как и ортометрическая высота P — это высота точки P над геоидом.

Подробнее эти вопросы обсуждаются в разд. 8.3; рис. 8.2 поясняет геометрические соотношения.

Здесь мы приводим некоторые практические формулы для вычисления нормальных высот, исходя из значений геопотенциальных чисел. Переписав (4-56) в виде

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H^*} \int_0^{H^*} \gamma(z) dz, \quad (4-57)$$

соответствующем (4 28), мы сможем выразить $\gamma(z)$, с учетом (2 215), как

$$\gamma(z) = \gamma \left[1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) z + \frac{3}{a^2} z^2 \right]; \quad (4-58)$$

здесь γ — сила тяжести на эллипсоиде, зависящая от широты φ , но не от z . Таким образом, непосредственное интегрирование относительно z даст

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{1}{H^*} \gamma \left[z - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{z^2}{2} + \frac{3}{a^2} \frac{z^3}{3} \right] \Big|_0^{H^*} \\ &= \frac{1}{H^*} \gamma \left[H^* - \frac{1}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) H^{*2} + \frac{1}{a^2} H^{*3} \right] \end{aligned} \quad (4-59)$$

или

$$\bar{\gamma} = \gamma \left[1 - (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{H^{*2}}{a} + \frac{H^{*2}}{a^2} \right]. \quad (4 60)$$

Это соотношение может использоваться для вычисления H^* по формуле

$$H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}}. \quad (4 61)$$

Хотя средняя теоретическая сила тяжести, согласно (4 60), сама зависит от H^* , но это не меняет сути дела, так как решение получится очень просто путём итераций.

Можно также выразить H^* непосредственно через геопотенциальное число C . Для этого подставим (4-60) в (4-61) и разложим в ряд по степеням H^* :

$$H^* = \frac{C}{\gamma} \left[1 + \frac{1}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) H^* + O(H^{*2}) \right]. \quad (4-62)$$

Решая это уравнение относительно H^* и разлагая затем H^* по степеням C/γ , получим

$$H^* = \frac{C}{\gamma} \left[1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C}{a\gamma} + \left(\frac{C}{a\gamma} \right)^2 \right], \quad (4 63)$$

где γ - нормальная сила тяжести на эллипсоиде для той же широты φ . Точность этой формулы достаточна почти для всех практических целей; более точные выражения имеются в работе Hirvonen (1960).

По аналогии с динамической и оргометрической поправками, существует и *нормальная поправка* NC измеренного превышения. Подстановка в формулу (4-46) $\bar{\gamma}$ вместо \bar{g} и H^* вместо H немедленно дает:

$$NC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^* - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B^*, \quad (4-64)$$

так что

$$\Delta H_{AB}^* = H_B^* - H_A^* = \Delta n_{AB} + NC_{AB}. \quad (4-65)$$

Нормальные высоты были введены Молоденским в связи с его методом определения физической поверхности Земли; см. гл. 8.

4.5 Сравнение различных систем высот

С помощью геопотенциального числа

$$C = W_0 - W = \int_{\text{геоид}}^{\text{точка}} g \, dn, \quad (4-66)$$

мы можем записать различные виды высоты в общей форме, которая очень наглядна:

$$\text{высота} = \frac{C}{G_0}. \quad (4-67)$$

Системы высот отличаются выбором силы тяжести G_0 в знаменателе. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{динамическая высота:} & \quad G_0 = \gamma_0 = \text{const}, \\ \text{оргометрическая высота:} & \quad G_0 = \bar{g}, \\ \text{нормальная высота:} & \quad G_0 = \bar{\gamma}. \end{aligned} \quad (4-68)$$

Понятно, что, выбирая G_0 различными способами, можно изобрести неограниченное количество и других систем высот.

Геопотенциальное число C представляет собой, в некотором смысле, самый непосредственный результат пивелирования и имеет большое научное значение. Однако оно не является высотой в геометрическом или каком-нибудь практическом смысле. Динамическая высота хотя и имеет размерность высоты, тем не менее, она тоже не имеет никакого геометрического смысла. Ее

преимущество состоит в том, что точки одной и той же уровенной поверхности имеют одинаковые динамические высоты; это соответствует интуитивно представлению о том, что, если мы двигаемся горизонтально, то все время остаемся на одной и той же высоте. Заметим, что ортометрическая высота различна для точек одной и той же уровенной поверхности, так как уровенные поверхности не параллельны. Это вызывает известные парадоксы "воды, текущей в гору" и т.п.

Динамическая поправка может быть очень большой, потому что сила тяжести изменяется от экватора до полюса примерно на 5000 мгал. Возьмем, например, нивелирный ход с разностями высот в 1000 м на экваторе, где $g \approx 978.0$ гал, и обработаем его при $\gamma_0 = \gamma_{45^\circ} \approx 980.6$ гал. Тогда (4 18) дает следующую приближенную динамическую поправку

$$DC = \frac{978.0 - 980.6}{980.6} \cdot 1000 \text{ м} = -2.7 \text{ м}. \quad (4-69)$$

Из за столь больших поправок динамические высоты непригодны для практических целей; что касается научных целей, то предпочтительней являются геопотенциальные числа.

Ортометрические высоты – это естественные "высоты над уровнем моря", то есть высоты над геоидом. Поэтому их геометрическое и физическое значение неопределимо. Их вычисление сравнительно трудоёмко, но в большинстве случаев достаточно пользоваться простой формулой Гельмерга (4 33). Ортометрическая поправка довольно мала. Для альпийского нивелирного хода, идущего от точки на высоте 754 м к точке на высоте 2505 м, ортометрическая поправка, согласно Mader (1954), приближенно равна 15 см на каждый километр в разности высот. См. также разд. 8.15.

Физический и геометрический смысл *нормальных высот* менее очевиден; они зависят от используемого референц эллипсоида. Хотя нормальные высоты являются основными в новых теориях физической геодезии, они выглядят несколько искусственно по сравнению с ортометрическими высотами. Однако, их легко вычислить точно; порядок величины нормальных поправок такой же, что и у ортометрических. В некоторых странах они полностью заменили на практике ортометрические высоты.

В разд. 8.13 мы обсуждаем оценки разности между ортометрической H и нормальной H^* высотами одних и тех же точек.

Все рассмотренные системы высот, основанные на C , являются лишь функциями местоположения. Поэтому здесь не может быть связей, подобных тем, которые возникали при вычислениях с измеренными высотами.

С чисто практической точки зрения желательно, чтобы система высот удовлетворяла следующим требованиям:

1. невязки должны быть исключены.

2. поправки к измеренным высотам должны быть как можно меньше.

Были предложены различные эмпирические системы высот с целью получения меньших поправок, чем при использовании ортометрических или нормальных высот. Однако они не имеют ясного физического смысла, и выходят за рамки данной книги.

Точность

Нивелирование – одно из самых точных геодезических измерений. Возможная средняя квадратическая ошибка имеет порядок 0.1мм на один км расстояния и увеличивается пропорционально квадратному корню из расстояния.

Если пренебречь погрешностями силы тяжести (измерение, интерполяция и т.п.), то разности геопотенциальных чисел C могут быть определены с точностью до 0.1галл на один км расстояния; это соответствует 0.1мм в измеренной высоте. Что касается гравиметрических измерений, то их достаточно измерять на расстояниях в несколько километров.

Динамические и нормальные высоты, очевидно, имеют тот же порядок точности, что и геопотенциальные числа, так как нормальная сила тяжести γ безошибочна. Ортометрические высоты дополнительно искажаются за счет неполного знания плотности и т.д., хотя и незначительно; см. копец разд. 4.3.

Триангуляционные высоты

Для исторической справки и полноты изложения упомянем ещё определение высот в триангуляции посредством измерения зенитных расстояний.

Главная проблема здесь – это атмосферная рефракция, искажающая зенитные расстояния. В результате точность триангуляционных высот намного меньше, чем точность высот, полученных с помощью нивелирования. Вследствие этого триангуляционные высоты в дальнейшем здесь рассматриваться не будут.

Для малых расстояний (скажем, < 1 км) тригонометрические измерения высот, отнесенные к локальной линии отвеса, имеют характер нивелирных превышений dh . Этим можно пользоваться (но осторожно!) для заполнения небольших пробелов в нивелирной сети.

Замечание о невязках

Все невязки в любой приемлемой системе высот, обозначаемых в данный момент буквой h (но не путайте с эллипсоидальными высотами), должны быть равны нулю, то есть:

$$\oint dh = 0 \quad (4 \ 70)$$

для любого замкнутого контура. Можно показать, что с математической точки зрения это эквивалентно коммутативности вторых производных:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}. \quad (4.71)$$

4.6 GPS-нивелирование

Геометрическое нивелирование (рис. 4.6) – операция, требующая больших затрат времени. GPS совершила революцию и здесь. Основное уравнение имеет вид

$$H = h - N. \quad (4.72)$$

Оно связывает ортометрическую высоту H (над геоидом), эллипсоидальную высоту h (над эллипсоидом) и высоту геоида N . Если любые две из этих вы-

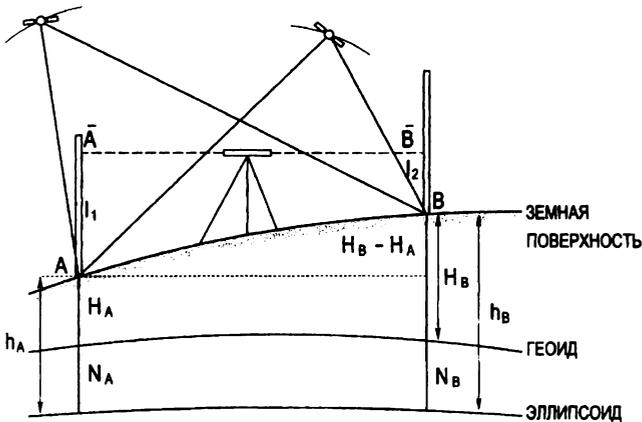


Рис. 4.6: GPS-нивелирование

личии измерены, то третья может быть вычислена.

Если h измерена с помощью GPS, и имеется достоверная цифровая карта высот геоида N , то тотчас же может быть получена ортометрическая высота H .

Уравнение (4.72) можно использовать также для определения геоида: если h измерена с помощью GPS, а H получена посредством нивелирования, то высота геоида N определяется, как $N = h - H$. Тот же принцип может быть применен и на оксанах в виде *спутниковой альтиметрии*. Мы обсудим этот вопрос в гл. 7 (см., например, формулу (7.47)).

GPS нивелирование подразумевает, в определённой мере, замену классического нивелирования нивелированием с помощью GPS. Обратимся к рисунку 4.6. Применение формулы (4 72) к точкам A и B даёт

$$\begin{aligned} H_A &= h_A - N_A, \\ H_B &= h_B - N_B, \end{aligned} \quad (4\ 73)$$

и, следовательно, превышение

$$H_B - H_A = h_B - h_A - N_B + N_A. \quad (4\ 74)$$

Использование обозначений $\delta H_{AB} = H_B - H_A$, $\delta h_{AB} = h_B - h_A$, и $\delta N_{AB} = N_B - N_A$ упрощает запись последнего соотношения:

$$\delta H_{AB} = \delta h_{AB} - \delta N_{AB}. \quad (4\ 75)$$

С помощью GPS нивелирования можно найти величину δh_{AB} ; тогда, при известном геоиде, то есть, при известной величине δN_{AB} , ортометрическое превышение δH_{AB} определяется с помощью (4-75). Это – огромное преимущество, поскольку иначе для определения ортометрического превышения требуется классическое нивелирование в сочетании с гравиметрическими измерениями, см. формулы (4 40) и (4-46).

Заметим, что только разность высот геоида заметно влияет на результат.

Глава 5

Геометрия Земли

5.1 Краткий обзор

Эта глава состоит из трех частей.

Часть I: Глобальные системы отсчета в эпоху GPS

Фундаментальная задача состоит в том, чтобы определить глобальную систему отсчета, основанную на референц-эллипсоиде, который является хорошим глобальным представлением Земли и, в идеале, должен характеризоваться следующими свойствами: его центр совпадает с геоцентром (центр масс Земли), его ось z представляет собой определенную соответствующим образом среднюю ось вращения Земли, и плоскость xz параллельна средней плоскости, расположенной близко к Гринвичскому меридиану. Сам референц-эллипсоид определяется как эллипсоид вращения, являющийся наилучшей глобальной аппроксимацией геоида.

Однако, на практике такое геометрическое или физическое определение никогда не может быть реализовано абсолютно точно и однозначно: в конечном счёте, всегда будет содержаться некоторый произвольный условный элемент.

Тот факт, что Земля не является полностью твердым телом, еще более усложняет задачу. Её можно (но опять приближённо!) рассматривать как упругое тело с жидким ядром, которое подвергается малым более или менее периодическим изменениям. Таким образом, Землю следует соотносить с некоторым средним эллипсоидом, не меняющимся со временем.

Все это в данном вводном описании будет предполагаться. Мы будем рассматривать соответствующим образом определенный геоцентрический референц-эллипсоид с неизменными размерами, фиксированным началом и инвариант-

пой относительно времени ориентацией – всё это условно, хотя и близко к действительности. Сведения о временных изменениях в теле Земли и в ее вращении можно найти в работе Moritz and Mueller (1987).

До появления спутниковой геодезии геоцентрическая система отсчета не могла быть реализована. Поэтому мы были вынуждены работать с локальной геодезической системой, смещенной относительно геоцентра на неизвестную величину порядка нескольких сотен метров. Вследствие этого, нужно было учитывать параллельный сдвиг локального референц-эллипсоида относительно геоцентрической системы, что подразумевает наличие трёх параметров переноса.

Заметим, что термин "локальный" здесь используется в смысле "региональный", то есть для страны, территории или области, в отличие от "глобального".

Обычно ориентация локальной системы отсчета известна с точностью до 0.1" (дуговые секунды), поскольку направления осей x , y и z можно было определить с помощью астрономических измерений весьма точно, по крайней мере, в течение последних двух столетий.

Сегодня мы в состоянии определить отклонение локальной системы, или *локальных дат.* от глобальной системы отсчёта. Нам известны отклонения

- размера и формы референц-эллипсоида (a , f),
- сдвиг (x_0 , y_0 , z_0), и
- ориентации (три очень малых эйлеровых угла ε_1 , ε_2 , ε_3).

Так как GPS достаточно полно описаны в литературе (см. Hofmann-Wellenhof et al. 2001), мы предполагаем наличие у читателей общих познаний в этой области и резюмируем в данной книге только некоторые основные факты.

Часть II: Развитие трехмерной геодезии

В этой части мы будем рассматривать как выглядели бы современные геодезические концепции Молоденского, Марусси и Хотина незадолго до появления спутников (однако, электронные приборы для измерения пространственных расстояний (трилатерация) уже существовали). Мы работаем с локальной декартовой системой координат, повернутой известным способом на астрономически измеряемые величины Φ , Λ , A (астрономические широта, долгота, азимут), рассматриваемые как эйлеровы углы поворота локальных осей относительно глобальных. Однако мы не имеем никакой возможности определить геоцентр. Таким образом, ситуация несколько усложнена, но все-таки геометрически определена и понятна. Термин "локальный" здесь означает "строго локальный", то есть изменяющийся от точки к точке вместе с отвесными линиями, определяемыми величинами (Φ , Λ).

Главная проблема, возникающая при таком подходе, связана с невозможностью точно измерить эпититые расстояния из-за атмосферной рефракции. Можно сказать, что вертикальное положение определено намного хуже, чем горизонтальное.

В конце мы рассмотрим, как наземные данные могут быть скомбинированы с данными GPS.

Часть III: Локальные геодезические даты

Проблема, связанная с недостаточной точностью вертикальных определений, решается путем полного разделения горизонтальных и вертикальных определений и выполнением последних посредством дифференциального метода астрономогеодезического определения геоида. Это был скорее "2+1 мерный" подход, чем трехмерный логически более сложный, но практически более точный. Фактически старые (и новые) астрономогеодезические методы могли бы быть поняты намного лучше, если выводить их с глобальной точки зрения. Сегодня, располагая GPS, мы находимся в гораздо лучшем положении как с практической, так и с теоретической точек зрения: классические локальные даты могут быть поняты лучше всего в их связи с глобальной геометрией.

Здесь "локальная геодезическая система", или локальные геодезические даты опять понимаются в "региональном" смысле, например, Североамериканская Система или Европейская Система.

GPS позволяет отделить геометрию от поля силы тяжести, определение которого по-прежнему остаётся сложной задачей для физической геодезии. Ее решение требует комбинирования наземных и спутниковых данных.

Часть I: Глобальные системы отсчета в эпоху GPS

5.2 Введение

Геодезия, как наука о размерах и форме Земли, не является чисто геометрической наукой, поскольку поле земного тяготения – физический объект – вовлечено во многие геодезические измерения, особенно наземные.

Обычно полагают, что гравиметрические методы составляют физическую геодезию в узком смысле. Триангуляция, нивелирование и геодезическая астрономия существенно используют отвесные линии, которые, будучи направлением вектора силы тяжести, физически не менее определены в природе, чем его длина, то есть сила тяжести g . К физической геодезии, наравне с гравиметрическими методами, относятся всевозможные определения геоида различными методами и их использование, а также использование уклонов отвесных

линий.

Даже в эпоху GPS многие старые геодезические данные остаются полезными. Их следует лучше понять, чтобы оптимально комбинировать с новыми спутниковыми данными. В точных методах инженерной геодезии, таких, как туннельная съемка, также необходимо учитывать положения отвесных линий.

Для оптимального понимания и использования локальных (или, скорее, региональных) геодезических данных мы должны знать их взаимосвязь с глобальной геодезической системой отсчета, используемой в GPS. Поэтому полезно начать с рассмотрения глобальной геометрии, хотя бы на элементарном уровне.

Несколько вводных идей могут помочь в понимании этого предмета. Для определения положения точки в пространстве мы нуждаемся в трех координатах. Мы можем использовать (и использовали) прямоугольную декартову систему координат. Это – основная геометрическая система координат. Она легко может быть преобразована численно к эллипсоидальной системе координат φ, λ, h , отнесенной к любому заданному референц-эллипсоиду.

Однако для многих специальных целей предпочтительнее пользоваться тем, что мы называли *естественными координатами*: Φ (астрономическая широта), Λ (астрономическая долгота), и H (ортометрическая высота), которые непосредственно относятся к полю силы тяжести Земли (разд. 2.4). Высота H может быть получена геометрическим нивелированием в сочетании с гравиметрическими измерениями, а Φ и Λ – с помощью астрономических измерений.

Использование этих координат для вычислений очень просто до тех пор, пока геоид может быть идентифицирован с эллипсоидом. Однако, поскольку такая идентификация достаточна лишь для получения результатов довольно невысокой точности, то следует учитывать отклонения геоида от эллипсоида. Как мы уже видели, геоид обладает довольно неприятными математическими свойствами. Это – сложная поверхность с разрывно меняющейся кривизной. Поэтому геоид, в отличие от эллипсоида, мало подходит для непосредственного выполнения на нем математических вычислений.

Повторимся, что эллипсоидальные координаты φ, λ, h относятся непосредственно к эллипсоиду (что и определяет их название) так же, как естественные координаты относятся к геоиду.

Так как отклонения геоида от эллипсоида – величины небольшие и доступные для вычислений, то удобно прибавлять малые редукции к первоначальным координатам Φ, Λ, H так, чтобы получить значения, соответствующие эллипсоиду. На этом пути в разд. 5.12 мы найдем, что

$$\begin{aligned}\varphi &= \Phi - \xi, \\ \lambda &= \Lambda - \eta \sec \varphi, \\ h &= H + N.\end{aligned}\tag{5 1}$$

Здесь φ и λ – эллипсоидальные координаты на эллипсоиде, иногда также на-

зываемые *геодезической широтой* и *геодезической долготой*, в отличие от *астрономической широты* Φ и *астрономической долготы* Λ . Астрономические и эллипсоидальные координаты отличаются друг от друга уклонением отвеса (компоненты ξ и η). Величина h – это *геометрическая высота* над эллипсоидом: она отличается от *ортометрической высоты* H над геоидом на высоту геоида N .

Геодезические измерения (углы, расстояния) обрабатываются аналогично. Принцип *триангуляции* хорошо известен: исторически, значения расстояний получали косвенно, измеряя углы в соответствующей сети треугольников; для определения масштаба сети достаточно было одной базисной линии. Триангуляция была незаменима в прежние времена, так как измерять углы было тогда намного проще, чем измерять большие расстояния.

В наше время большие расстояния могут быть измерены непосредственно с помощью электронных измерительных приборов так же легко, как и углы. Поэтому триангуляция, использующая измерение углов, часто заменяется или дополняется *трилатерацией*, использующей измерение расстояний. Производить вычисление триангуляций и трилатераций на эллипсоиде просто. Поэтому удобно редуцировать измеренные углы, базисные линии и большие расстояния на эллипсоид, по аналогии с астрономическими координатами. Тогда эллипсоидальные координаты φ, λ , полученные (1) редуцированием астрономических координат и (2) вычислением триангуляции, или трилатерации на эллипсоиде, можно сравнивать; они должны быть одинаковыми для одной и той же точки.

На сегодняшний день GPS-определения представляют собой, конечно, наилучший метод непосредственного определения φ, λ и h .

5.3 Глобальная система местоопределения

Следующие разделы о Глобальной системе местоопределения (Global Positioning System, GPS) взяты из работы Hofmann Wellenhop et al (2003: разд. 9.3), которая, в свою очередь, опирается на работу Hofmann Wellenhop et al 2001: гл. 2). Более детальное описание вопроса читатель найдет в этих книгах.

5.3.1 Основная идея

GPS находится в ведении JPO (Joint Program Office), входящего в состав Космического и Ракетного Центра (Space and Missile Center) в Эль Серундо, Калифорния. В 1973 г. JPO было предписано Министерством обороны США (U.S. Department of Defense, DOD) разработать, протестировать и развернуть космическую систему местоопределения. Действующая в настоящее время навигационная система с измерением времени и дальностей является результатом

этой первоначальной директивы. GPS была задумана как система измерения расстояний от известных местоположений спутников в космосе до неизвестных местоположений на Земле, на море, над Землей и в космосе. Первоначальной целью GPS было мгновенное определение положения и скорости на непрерывном базисе и точная координата по времени (то есть передача времени).

Основанная на измерениях кода или несущей фазы система GPS использует псевдодальности, которые выводятся по радиосигналам со спутника.

Для определения псевдодальности по измерениям кодов время прохождения кодового сигнала умножается на его скорость. Так как часы приемника и спутника не могут быть синхронизированы с абсолютной точностью, то должна быть принята во внимание ошибка часов. Следовательно, каждое уравнение этого типа включает четыре неизвестных: три координаты точки, содержащиеся в истинной дальности, и ошибка часов. Таким образом, для нахождения этих четырех неизвестных необходимы четыре спутника. И действительно, концепция GPS задумана таким образом, что при любом положении на Земле или около нее в поле зрения без преград должны круглосуточно находиться не менее четырех спутников.

При использовании измерений несущей фазы должна быть принята во внимание неоднозначность как дополнителное неизвестное. Более подробную информацию об этом читатель найдет в работе Hofmann–Wellenhof et al (2001: разд. 6.1.2).

5.3.2 Архитектура системы

Космический сектор

Созвездие

Спутники GPS имеют почти круговые орбиты с высотой около 20200 км над Землей, то есть их средняя околоземная орбита (mean earth orbit, МЕО) характеризуется номинальным периодом обращения в 12 звездных часов. Номинальное созвездие состоит из 24 рабочих спутников, развернутых в шести равноотстоящих плоскостях (от А до F) с уклоном в 55° от экватора; на каждую плоскость приходится по четыре спутника. Кроме того, имеются ещё активные запасные спутники, которые могут стать рабочими. Относительно информации о текущем состоянии см. <http://tycho.usno.navy.mil/gpscurr.html>.

Космический сектор с номинальным созвездием обеспечивает глобальное покрытие четырьмя – восемью спутниками, которые могут наблюдаться одновременно в любое время суток с углом возвышения более 15° . Если угол возвышения понизить до 10° , то временами будут видны до 10 спутников одновременно; если ещё понизить до 5° , то количество видимых спутников будет иногда доходить до 12.

Категории спутников

По существу, спутники GPS обеспечивают платформу для приемопередатчиков, атомных часов, компьютеров и различного вспомогательного оборудования. Электрошное оборудование каждого спутника позволяет потребителю измерить псевдодалность до спутника, и каждый спутник передает радиосигналы, которые позволяют потребителю определить пространственное положение спутника в произвольные моменты времени. Вспомогательное оборудование содержит, среди прочего, панели солнечных батарей для обеспечения питания и двигательную установку для контроля орбиты и обеспечения её стабильности.

Существует несколько классов или типов спутников GPS. Это – Block I, Block II, Block IIA, Block IIR, Block IIR-M и будущие спутники Block IIF и Block III. Современное состояние описать очень трудно, потому что новые системы обозначений вводятся довольно произвольно; например, недавно введено обозначение Block IIR-M.

Одиннадцать спутников класса Block I были запущены в период с 1978 по 1985 гг. Сегодня ни один из них уже больше не действует.

Основное отличие между спутниками классов Block I и Block II связано с американской национальной безопасностью. Сигналы спутника Block I были полностью доступны гражданским потребителям. Начиная с Block II использование спутниковых сигналов в гражданских целях может быть ограничено. Спутники Block II снабжены возможностью взаимной коммуникации. Некоторые из них оборудованы уголковыми отражателями и могут быть отслежены лазерным дальномером.

Спутники класса Block IIR ("R" обозначает пополнение или замену) имеют расчетный срок службы 10 лет. Они оборудованы улучшенными средствами коммуникации и межспутникового слежения. Спутники Block IIR-M включают два новых сигнала для военных целей и второй сигнал для целей гражданских. Первый запуск Block IIR-M состоялся в 2005 году.

В настоящее время (начало 2005) первый запуск спутника Block IIF ("F" означает "продолжать"), намечен на 2007 год (вместо ранее планировавшейся середины 2006 года). Эти спутники будут передавать новый сигнал L5 для гражданских целей (см. разд. 5.3.5).

В настоящее время DOD предпринимает разработку следующего поколения спутников GPS под названием Block III. Предварительные даты (возможно их изменение) первого запуска и проведения орбитальных испытаний – 2011/12 гг. (Civil GPS Service Interface Committee 2002). Эти спутники будут характеризоваться повышенным уровнем достоверности без необходимости их пополнения.

Спутниковый сигнал

Основой точности системы является тот факт, что все компоненты сигнала точно контролируются атомными часами. Эти очень точные частотные стандарты спутников GPS производят основную частоту 10.23 МГц. Когерентно полученными из этой частоты являются (на данный момент) два сигнала в L-диапазоне – несущие частоты L1 и L2, генерируемые умножением основной частоты на 154 и 120, соответственно:

$$L1 = 1575.42 \text{ МГц}$$

$$L2 = 1227.60 \text{ МГц.}$$

Эти двойные частоты очень важны для устранения главного источника погрешности – ионосферной рефракции.

Псевдодалности, которые получены из измеренного времени прохождения сигнала с каждого спутника на приёмник, используют два псевдослучайных шумовых кода (pseudorandom noise, PRN), смодулированных на две несущие частоты.

C/A-код (coarse/acquisition-code – приближённый общедоступный код) доступен для гражданского использования. Каждый C/A-код – это уникальная последовательность 1023 бит, которая повторяется каждую миллисекунду и называется чипом. Продолжительность каждого чипа C/A-кода приближённо равна 1 мкс. Эквивалентная длина чипа – обозначаемая также как длина волны или ширина чипа (Misra and Enge 2001: разд. 2.3.1) – приближённо равна 300 м. C/A-код в настоящее время модулируется только на частоту L1 и преднамеренно опускается для частоты L2. Это позволяет JPO управлять информацией, которая передаётся спутником и, таким образом, запрещать доступ к полной точности системы для невоенных потребителей.

P-код (precision code – точный код) зарезервирован для американских военных и других зарегистрированных пользователей. Для этого используется W-код, позволяющий зашифровать P-код в Y-код (борьба с получением доступа несанкционированным путём). P-код имеет эффективную длину чипа, равную примерно 30 м и модулируется на обеих несущих частотах L1 и L2.

Помимо PRN-кодов на несущие частоты модулируются навигационные сообщения, состоящие из информации о состоянии спутника, смещении часов спутника и эфемерид спутника. Орбитальные данные имеют вид элементов, подобных кеплеровским, и обозначаются как широковещательные эфемериды. Полный набор элементов приведен, например, в работе Montenbruck and Gill (2001: разд. 2.2). Стоит отметить, что существующее на данный момент строение сигнала в ближайшее время будет улучшено (см. разд. 5.3.5).

Сектор управления и контроля

Операционная система управления (operational control system, OCS) состоит из ведущей станции управления, станций слежения и наземных загружающих станций. Главными задачами OCS являются слежение за спутниками для определения и прогноза их орбит и часов, синхронизация спутников по времени и загрузка на спутники навигационных сообщений .

Ведущая станция управления

Ведущая станция управления расположена в Объединенном Центре Космических Операций (Consolidated Space Operations Center, CSOC) на Авиационной базе ВВС в Шрайверс, штат Колорадо. CSOC собирает данные со станций слежения и оценивает параметры орбит и часов спутников с помощью фильтрации по Калману. Эти результаты затем передаются на одну из трех наземных загружающих станций для окончательной передачи на спутники. Управление спутниками и контроль за работой системы также осуществляются ведущей станцией управления.

Станции слежения

Всего имеется пять станций слежения, расположенных на Гавайях, в Колорадо–Спрингсе, на острове Вознесения в Южноатлантическом океане, на Диего–Гарсия в Индийском океане и на Кваджалейне на севере Тихого океана. Каждая из этих станций снабжена точным атомным эталоном времени и приёмниками, которые непрерывно измеряют псевдодальности до всех спутников в поле зрения. Псевдодальности измеряются каждые 1.5 секунды; далее, используя ионосферные и метеорологические данные, их сглаживают, чтобы получить данные с 15–минутными интервалами, которые затем передаются ведущей станции управления.

Наземные загружающие станции

Эти станции, расположенные вместе со станциями слежения на острове Вознесения и на островах Диего–Гарсия и Кваджалейн, представляют собой линии связи со спутниками и состоят, главным образом, из наземных антенн. Информация о спутниковых эфемерисах и часах, вычисленная на ведущей станции управления и полученная от нее через канал связи, загружается отсюда на каждый спутник GPS по линиям радиосвязи в S-диапазоне.

Сектор потребителя

Различие между военными и гражданскими потребителями обеспечено типом доступных на сегодня приёмников.

Приёмники GPS классифицируются по типу объектов, доступных для наблюдения (то есть, кодовые псевдодальности или фазовые псевдодальности) и по доступности кодов (то есть, С/А-код, Р-код или Y-код). Для большинства навигационных приложений достаточно приёмников, работающих с С/А-кодом и псевдодальностями. Этот тип приёмников измеряет только кодовые псевдодальности и используют С/А-код на частоте L1. Типовые программы выводят трехмерное местоположение либо в виде широты, долготы и высоты, либо в какой-нибудь картографической проекции, например, координаты и высоту в универсальной поперечной проекции Меркатора (universal transverse Mercator, UTM).

5.3.3 Спутниковый сигнал и объекты наблюдения

Компоненты сигнала

Официальное описание сигнала GPS дается в документе ICD-GPS-200 (GPS Interface Control Document), доступном на сайте www.navcen.uscg.gov. Детальную информацию можно найти также в работе Spilker (1996).

На сегодняшний день сигнал имеет компоненты, приведенные в таблице 5.1. Заметим, что номинальная основная частота f_0 преднамеренно занижена примерно на 0.005 Гц, чтобы компенсировать релятивистские эффекты.

Навигационное сообщение, в основном, содержит информацию о рабочем состоянии спутника, о часах и орбите спутника, а также различные корректирующие данные.

Содержание блока орбитальной информации состоит из отсчётной эпохи,

Таблица 5.1: Компоненты спутникового сигнала

Компонент	Частота или скорость передачи кода [МГц]	Длина волны
Основная частота	$f_0 = 10.23$	
Несущая частота L1	$154 f_0 = 1575.42$	19.0 см
Несущая частота L2	$120 f_0 = 1227.60$	24.4 см
Р-код	$f_0 = 10.23$	
С/А-код	$f_0/10 = 1.023$	
Навигационное сообщение	$f_0/204\,600 = 50 \cdot 10^{-6}$	

шести параметров, описывающих эллипс Кеплера в отсчётную эпоху, трёх вековых и шести периодических поправочных членов.

Объекты наблюдения

По идее, объектами наблюдения GPS являются дальности, вычисляемые по результатам измерения времени или разности фаз путем сравнения сигналов генерируемого и полученного приёмником. Как отмечалось ранее, дальности смещены из-за ошибок часов спутника и приёмника, и поэтому называются псевдодальностями. По существу, псевдодальности отличаются от расстояний на неизвестную аддитивную постоянную.

Другие источники погрешностей могут быть разбиты на три группы: погрешности, связанные со спутником (например, орбитальные погрешности), погрешности, связанные со средой распространения сигнала (например, ионосферная и тропосферная рефракция), и погрешности, связанные с приёмником (например, вариация фазового центра антенны, многолучевое распространение). Все эти группы будут опущены в последующих упрощенных моделях. Расширенные модели даны в работе Hofmann–Wellenhof et al (2003: разд. 10.2.2).

Кодовые псевдодальности

Измеренное приращение времени Δt подвержено влиянию погрешности часов спутника δ_S и погрешности часов приёмника δ . Погрешность δ_S спутниковых часов может быть смоделирована некоторым многочленом с коэффициентами, передаваемыми в навигационном сообщении. Если поправка δ_S учтена, то кодовая псевдодальность R получится умножением интервала времени Δt на скорость света c :

$$R = c \Delta t. \quad (5-2)$$

Полагая общую привязку ко времени для спутника и приёмника, например, ко времени GPS, член Δt можно разбить на время прохождения расстояния сигналом $\Delta t(\text{GPS})$ и погрешность часов приёмника δ , то есть

$$R = c \Delta t(\text{GPS}) + c \delta = \rho + c \delta, \quad (5-3)$$

где ρ – геометрическое расстояние между спутником и приёмником. Модуль приёмника, ответственный за измерение кодовых псевдодальностей, обозначается как DLL (delay lock loop – контур фиксации запаздывания). Подробнее о функциональных возможностях DLL см. в работе Misra and Enge (2001: разд. 9.5).

Фазовые псевдодальности

Если предположить, что поправка за ошибку часов спутника введена, то модель фазовой псевдодальности Φ имеет вид

$$\lambda \Phi = \rho + c\delta + \lambda N, \quad (5-4)$$

где λ – длина несущей волны. Дальность ρ представляет собой расстояние между спутником в эпоху эмиссии t и приёмником в эпоху приема $t + \Delta t$. Фазовые измерения неоднозначны, поскольку неизвестно начальное целое число N циклов, которые укладываются в расстоянии между спутником и приёмником. Эта неоднозначность выражается константой в пределах программы слежения приёмника, пока слежение не прервано. Блок приёмника, ответственный за фазовые измерения, обозначается как PLL (phase lock loop – контур захвата фазы). Согласно (5-3), фазовая псевдодальность отличается от кодовой псевдодальности только членом λN за счёт фазовой неоднозначности. Деление обеих частей уравнения (5-4) на λ соотносит фазу и циклы.

Как уже упоминалось, большая часть навигационных приложений не нуждается в измерениях несущей фазы. Необходимость в таких измерениях возникает только при наличии повышенных требований к точности (например, при определении относительного местоположения, см. ниже).

Допплеровские данные

Некоторые из первых моделей, предложенных для GPS, должны были использовать доплеровские наблюдения. Связь наблюдаемого доплеровского сдвига и скорости изменения дальности вытекает из формулы (5-4) и имеет вид

$$D = \lambda \dot{\Phi} = \dot{\rho} + c\dot{\delta}, \quad (5-5)$$

где точка сверху обозначает производную по времени. Более точный результат, чем первичный доплеровский сдвиг, получается путём усреднения.

Доплеровский сдвиг измеряется контуром отслеживания несущей в GPS – приёмнике (Misra and Enge 2001: разд. 9.6). Если скорость спутника известна, то доплеровский сдвиг можно использовать для оценки скорости самого наблюдателя.

5.3.4 Возможности системы и ее точность

Различают два уровня операционных возможностей: уровень IOC (initial operational capability – начальные операционные возможности) и уровень FOC (full operational capability – полные операционные возможности).

Уровень IOC был достигнут в июле 1993 года, когда работали и были доступны для навигации 24 спутника GPS (Block I/II/IIA). Официально IOC был объявлен DOD 8 декабря 1993 года.

Уровень FOC был достигнут, когда было обеспечено рабочее состояние на запланированных орбитах 24-х спутников типа Block II/IIA и были протестированы эксплуатационные характеристики созвездия на случай его использования в военных целях. Все 24 спутника классов Block II и Block IIA находились в эксплуатации уже с марта 1994 года, но уровень FOC был объявлен только 17 июля 1995 года, что указывает на длительный период испытаний.

Выбор того или иного метода работы с GPS зависит от особенностей проекта; при этом основную роль играют требования, предъявляемые к точности.

Точечное местоопределение

При использовании одного приёмника обычно выполняется точечное местоопределение с кодовыми псевдодальностями. Идея точечного местоопределения проста (рис. 5.2). Если не учитывать ошибок часов, то трилатерация в пространстве (то есть использование трех дальностей) решает задачу определения координат местоположения. При работе с псевдодальностями необходимо выполнить четыре наблюдения для оценивания трех координатных компонентов и ошибки часов приёмника. GPS предусматривает два уровня обслуживания для точечного местоопределения: SPS (standart positioning service – сервисная служба стандартного местоопределения) с доступом для гражданских потребителей и PPS (precise positioning service – сервисная служба точного местоопределения) с доступом только для зарегистрированных пользователей.

Качественный уровень SPS основан на характеристиках распространения сигнала в пространстве. Влияние ионосферы, тропосферы, приёмника, эффектов многолучевого распространения, топографии или интерференции не учитывается. Кроме того, SPS предусмотрен только для сигнала L1; сигнал L2 не входит в SPS (Department of Defence 2001). Глобальная средняя точность местоопределения составляет 13 м горизонтальной погрешности (уровень вероятности 95%) и 22 м вертикальной погрешности (уровень вероятности 95%).

PPS предоставляет доступ к обоим кодам и обеспечивает точность вплоть до метра.

Дифференциальный метод GPS

Избирательность доступа (selective availability, SA) и преднамеренное понижение точности точечного местоопределения путем добавления к показаниям спутниковых часов псевдослучайного сигнала (названное δ -процессом) или манипулированием эфемерисами (названное ϵ -процессом) привели к разработке дифференциального метода GPS (DGPS). Здесь мы рассмотрим только основную идею этого метода.

Принцип DGPS основан на использовании двух (или более) приёмников, когда один (стационарный) "референчный" или базисный приёмник расположен в известной точке, а положение другого (большей частью, перемещаю-

щегося) удаленного приёмника должно быть определено. При использовании кодовых псевдодальностей с обеих позиций необходимо отследить, по крайней мере, четыре обхода спутника одновременно. Известное положение "референционного" приёмника используется для того, чтобы вычислить поправки к наблюдаемым псевдодальностям. Эти поправки затем передаются посредством телеметрии (то есть, по управляемой радиосвязи) на передвижной приёмник и позволяют определить его положение с гораздо большей точностью, чем в режиме точечного местоопределения.

При использовании DGPS, основанного на C/A-кодовых псевдодальностях, обычно достигается точность порядка 1 – 5 м в режиме реального времени. Кодовые дальности со сглаженной фазой приводят к уровню точности до метра (Lachapelle et al. 1992). Еще более высокая точность может быть получена при помощи несущих фаз (точный DGPS). Для расстояний до 20 км может быть достигнута дециметровая точность в режиме реального времени (DeLoach and Remondi 1991). Но для этого необходимо разрешать неоднозначность "на легу", что (обычно) требует наличия двухчастотных приёмников. Кроме того, требуется пять спутников на каждую эпоху.

После дезактивации SA в мае 2000 года DGPS следует рассматривать уже с иной точки зрения. А увеличившаяся точность точечного местоопределения с применением одного приёмника для ряда приложений оказывается достаточной.

Относительное местоопределение

В настоящее время самая высокая точность достигается в режиме относительного местоопределения с наблюдаемыми несущими фазами. Относительное местоположение ассоциировано с базисом, то есть, трехмерным вектором, соединяющим известную "референционную" станцию с искомым местоположением. Процесс обработки базиса требует, чтобы фазы были наблюдаемы одновременно на обоих концах базиса (рис. 5.1). Первоначально относительное местоопределение было возможно только по результатам пост-обработки исходных данных. Сегодня возможна оперативная передача данных по коротким базисам, что позволило вычислять базисные векторы в режиме реального времени и привело к возникновению кинематического метода в режиме реального времени (real-time kinematic, RTK).

Статическое относительное местоопределение

"Референционная" станция и точка, координаты которой подлежат определению, статичны, то есть, между двумя точками базисной линии не происходит никаких движений. Этот метод предпочтителен, когда требуется наивысшая точность. Время наблюдения полностью зависит от поставленной задачи и длины базиса и может изменяться от нескольких десятков минут до многих часов.

В навигации, где обычно предполагается движение, статическое относительное местоопределение большого интереса не представляет. Подробности можно найти в работе Hofmann-Wellenhof et al. (2001: разд. 7.1.2).

Кинематическое относительное местоопределение

Кинематический метод является очень продуктивным, потому что позволяет определить положение наибольшего числа точек за наименьший период времени.



Рис. 5.1: Смысл относительного местоопределения

Недостаток метода состоит в том, что после инициализации захват, по крайней мере, четырех спутников должен поддерживаться непрерывно.

Полукинематический метод, или метод "стою/иду" характеризуется чередованием остановок и перемещений одного приёмника с целью определения положения фиксированных точек вдоль определённой траектории. Наиболее важной чертой этого метода является возможность увеличивать точность местоопределения за счёт накопления и усреднения нескольких эпох измерений на остановочных пунктах. Этот метод часто упоминается просто как кинематический. Для базисов до 20 км этим методом можно достигнуть относительную точность местоопределения на сантиметровом уровне.

Кинематический метод требует разрешения фазовой неоднозначности инициализацией, которая может быть выполнена статическим или кинематическим методами. Доступному в настоящее время коммерческому программному обеспечению (для двухчастотных приёмников) достаточно 1 – 2 минут наблюдения, чтобы разрешить неоднозначность кинематически ("на лету") для базисов до 20 км.

5.3.5 Концепции модернизации GPS

В январе 1999 года США объявили концепцию модернизации системы GPS, для реализации которой было выделено \$400 миллионов. Главная ее особенность заключается в осуществлении нового стросния сигнала в будущих спутниках.

Будущие спутники GPS

В созвездии GPS увеличивается количество спутников класса Block IIR. Новые разработки модернизируют функциональные возможности этих спутников. Модернизированные спутники класса IIR, обозначенные как IIR-M (replenishment modernization (пополнение- модернизация)), обеспечат новый уровень обслуживания военных и гражданских потребителей. Новые сигналы и увеличение мощности полосы частот L-диапазона значительно улучшат навигационные характеристики GPS (Marquis 2001).

К следующим поколениям спутников относятся спутники классов Block IIF и Block III.

Эти поколения спутников будут обладать множеством усовершенствований по сравнению с нынешними. Планируется включить возможность передачи данных между спутниками, чтобы сделать систему более независимой. Возможность автономной навигации (auto-nav) посредством определения межспутниковой дальности, по существу, позволит спутникам определять свое местоположение без обширного слежения с Земли. В конечном счете, будущие спутники будут обладать следующими, главным образом военными, достоинствами:

- точность навигации будет поддерживаться в течение шести месяцев без управления с Земли;
- будут минимизированы проблемы, связанные с возникновением помех при передаче информации с наземных станций на спутники;
- необходимая информация будет посылаться на каждый спутник раз в месяц, а не ежедневно.
- снизится потребность в зарубежных наземных загрузающих станциях.
- будет повышена навигационная точность.

Новая структура сигнала

В настоящее время гражданские потребители имеют неограниченный доступ только к C/A-коду на несущей частоте L1. Модернизация системы GPS предоставит в пользование новые сигналы: военные коды (M коды) на частотах L1

и L2 и гражданский код на частоте L2 (сокращенно – L2с). Саниционированным пользователям M-код предоставит большую защиту сигнала, улучшенные условия получения информации и большее сопротивление помехам. Новый гражданский сигнал L2с спадит несанкционированных пользователей двухчастотным режимом, позволяющим определять поправку за ионосферу. В дополнение к этим кодам, гражданским потребителям будет предоставлена новая частота L5 с целью увеличения авиационных приложений. Выбор обозначения L5 обусловлен тем, что, на самом деле, спутники передают еще дополнительные сигналы на частотах, называемых L3 и L4. Эти сигналы – секретные и предназначены только для военных целей (Misra and Enge 2001: разд. 2.3).

Согласно планируемой модернизации, опубликованной в 1999 году, концепция Межведомственного Исполнительного органа GPS будет реализована со следующей спецификацией. Будущие сигналы GPS будут передаваться на трёх несущих частотах: частоты L1 и L2 остаются неизменными, а новая несущая частота L5 определяется как

$$L5 = 115f_0 = 1176.45 \text{ МГц},$$

где $f_0 = 10.23$ МГц обозначает основную частоту GPS. Несущая частота L5, размещенная в защищенной полосе частот воздушной радионавигационной службы, была недавно выделена Всемирной Конференцией Радио, организуемой регулярно Международным Телекоммуникационным Союзом (Vorhies 2000).

Заметим, что оба новых гражданских сигнала GPS будут иметь два кода. Сигнал L5 не предназначен для военных целей; он использует два кода одинаковой длины со сдвигом по фазе на 90° на частоте 10.23 МГц. Сигнал L2 предназначен как для гражданских, так и для военных потребителей. Новый сигнал L2с имеет два кода различной длины, построенных путём временного мультиплексирования (Fontana et al. 2001). Используемый ныне военный Y-код будет заменен новыми (расщепленными) M-кодами.

Линейная комбинация несущих фаз L2 и L5 приводит к возникновению сигнала с длиной волны около 5.9 м. Длинные волны облегчают разрешение неоднозначности. Напротив, линейная комбинация L1 с L5 будет использоваться как комбинация, свободная от влияния ионосферы, потому что большие частотные разности удобны для вычисления поправок за ионосферу. Общая обработка фазовых данных на всех трех несущих упростит разрешение неоднозначности (Vollath et al. 1999).

Перспективы выполнения приведены в Федеральном Радионавигационном Плане 2001 года: ИОС (на орбите 18 спутников с новым сигналом L2с и возможностями M кода) запланирован на 2008 год, а ФОС (24 спутника на орбите) запланирован на 2010 год. По крайней мере, один спутник с возможностями

сигнала L5 должен быть задействован не позднее 2005 года, причем ИОС для таких спутников запланирован на 2012 год, а FOC – на 2014 год.

5.4 От GPS к координатам

Мы дали краткий вводный обзор GPS. Теперь обсудим основные методы GPS, позволяющие определять координаты нужных точек. Для этого рассмотрим два наиболее простых примера, один из которых иллюстрирует местоопределение точечное, а другой – относительное.

5.4.1 Точечное местоопределение с помощью кодовых псевдодальностей

Ситуация показана на рис. 5.2. Задача состоит в том, чтобы определить координаты точки A , используя GPS. Как мы знаем из разд. 5.3.4, для определения трех координат точки A и ошибки часов приёмника необходимы четыре значения псевдодальностей до четырех различных спутников. Обобщая формулу (5-3), получим

$$R_A^j(t) = \rho_A^j(t) + c \delta_A(t). \quad (5-6)$$

Это – кодовая псевдодальность на эпоху t ; здесь $R_A^j(t)$ – измеренная кодовая псевдодальность между точкой наблюдения A (как обозначено на рис. 5.2) и спутником j , $\rho_A^j(t)$ – геометрическое расстояние между спутником и точкой

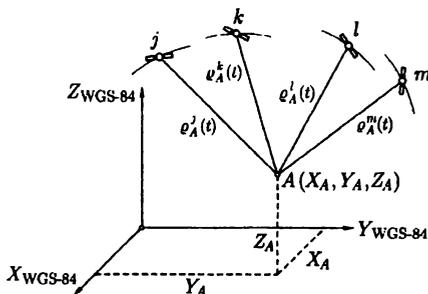


Рис. 5.2: Точечное местоопределение

наблюдения, c – скорость света. Последний член в этой формуле представляет собой ошибку $\delta_A(t)$ часов приемника. Заметим, что мы приняли здесь самую простую модель и, таким образом, не рассматриваем ионосферные и тропосферные влияния, а также другие систематические и случайные погрешности.

В формуле (5-6) координаты точки, подлежащие определению, неявно содержатся в расстоянии $\varrho_A^j(t)$, которое может быть записано в явном виде как

$$\varrho_A^j(t) = \sqrt{(X^j(t) - X_A)^2 + (Y^j(t) - Y_A)^2 + (Z^j(t) - Z_A)^2}. \quad (5\ 7)$$

Здесь WGS 84 (Общеземная геодезическая система координат 1984 г., см. разд. 2.11) координаты $X^j(t)$, $Y^j(t)$, $Z^j(t)$ – компоненты геоцентрического радиус-вектора спутника на эпоху t , а X_A , Y_A , Z_A – три неизвестных координаты точки наблюдения в той же координатной системе WGS 84; их также можно обозначить, как $(X_A, Y_A, Z_A)_{\text{WGS 84}}$ или, что то же самое, $(X_A, Y_A, Z_A)_{\text{GPS}}$.

Сколько неизвестных содержит уравнение (5-7)? Заметим, что координаты спутника $X^j(t)$, $Y^j(t)$, $Z^j(t)$ всегда можно предполагать известными (точнее, их можно вычислить по информации, переданной спутником). Таким образом, остаются неизвестными три координаты X_A , Y_A , Z_A и ошибка часов приёмника $\delta_A(t)$. Иными словами, для составления четырех уравнений типа (5-6) необходимы, по крайней мере, четыре спутника. Обозначая спутники через j, k, l, m , получим соответствующую систему

$$\begin{aligned} R_A^j(t) &= \varrho_A^j(t) + c \delta_A(t) \\ R_A^k(t) &= \varrho_A^k(t) + c \delta_A(t) \\ R_A^l(t) &= \varrho_A^l(t) + c \delta_A(t) \\ R_A^m(t) &= \varrho_A^m(t) + c \delta_A(t); \end{aligned} \quad (5-8)$$

подстановка (5-7) приводит к следующему виду:

$$\begin{aligned} R_A^j(t) &= \sqrt{(X^j(t) - X_A)^2 + (Y^j(t) - Y_A)^2 + (Z^j(t) - Z_A)^2} + c \delta_A(t) \\ R_A^k(t) &= \sqrt{(X^k(t) - X_A)^2 + (Y^k(t) - Y_A)^2 + (Z^k(t) - Z_A)^2} + c \delta_A(t) \\ R_A^l(t) &= \sqrt{(X^l(t) - X_A)^2 + (Y^l(t) - Y_A)^2 + (Z^l(t) - Z_A)^2} + c \delta_A(t) \\ R_A^m(t) &= \sqrt{(X^m(t) - X_A)^2 + (Y^m(t) - Y_A)^2 + (Z^m(t) - Z_A)^2} + c \delta_A(t). \end{aligned} \quad (5\ 9)$$

Эта система уравнений включает только упомянутые выше четыре неизвестных X_A , Y_A , Z_A и $\delta_A(t)$ и, таким образом, может быть решена. Мы не рассматриваем сейчас линеаризацию, возможные избыточные измерения и т.д. Наша цель – продемонстрировать лишь основную идею. Ошибка часов здесь является побочным продуктом, а желаемым результатом, полученным из (5-9), являются координаты X_A , Y_A , Z_A в координатной системе GPS или, что тоже самое, в системе WGS 84.

Можно ожидать, что точность такого точечного местоопределения, основанного на кодовых дальностях, составит, как указывалось в разд. 5.3.4, около 10 м (номинально). Гораздо более высокая точность достигается с помощью метода относительного местоопределения, о котором идет речь в следующем разделе.

5.4.2 Относительное местоопределение с фазовыми псевдодальностями

Цель относительного местоопределения состоит в определении координат неизвестной точки по отношению к какой-нибудь известной точке. Другими словами, относительное местоопределение состоит в определении координат вектора, соединяющего две указанные точки; его часто называют базисным вектором, или просто базисом (рис. 5.3).

Пусть теперь A – известная "референсная" точка, B – неизвестная точ-

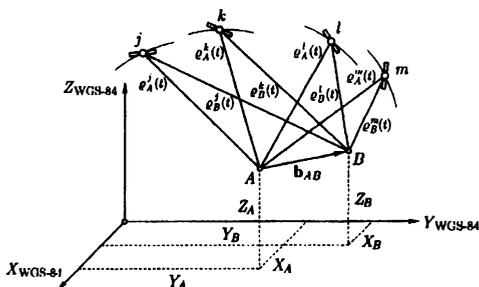


Рис. 5.3: Относительное местоопределение

ка, \mathbf{b}_{AB} – базисный вектор. Вводя соответствующие радиус-векторы \mathbf{X}_A , \mathbf{X}_B , запишем соотношение

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_A + \mathbf{b}_{AB}, \quad (5-10)$$

откуда получаем координаты базиса \mathbf{b}_{AB} :

$$\mathbf{b}_{AB} = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{bmatrix}. \quad (5-11)$$

Координаты "референсной" точки должны быть заданы в системе WGS 84; обычно их определяют приближенно с помощью кодовых псевдодальностей. Относительное местоопределение может быть выполнено с использованием кодовых (ср. с (5-3)) или фазовых псевдодальностей (ср. с (5-4)). Впоследствии будут рассматриваться только фазовые псевдодальности. Запишем еще раз формулу (5-4)

$$\lambda \Phi = \rho + c\delta + \lambda N. \quad (5-12)$$

В разд. 5.3.3 мы уже поясняли значения терминов, входящих в эту формулу – длины волны λ , фазы Φ , расстояния ρ (которое является тем же, что и в модели с кодовой псевдодальностью), скорости света c , ошибки часов приёмника δ и неоднозначного коэффициента N .

Пусть f обозначает частоту соответствующего спутникового сигнала. Поделив (5-12) на λ и приняв во внимание соотношение $f = c/\lambda$, получим

$$\Phi = \frac{1}{\lambda} \varrho + f \delta + N. \quad (5-13)$$

Это соотношение может быть обобщено, как

$$\Phi_i^j(t) = \frac{1}{\lambda} \varrho_i^j(t) + f \delta_i(t) + N_i^j, \quad (5-14)$$

где $\Phi_i^j(t)$ – выраженная в циклах измеренная несущая фаза, относящаяся к точке i и спутнику j на эпоху t . Не зависящая от времени фазовая неоднозначность N_i^j есть целое число, и поэтому ее часто называют целочисленной неоднозначностью, или целочисленным неизвестным, или просто неоднозначностью.

Относительное местоопределение требует одновременных наблюдений как в "референсной", так и в определяемой точках. Это означает, что наблюдаемые временные метки для этих двух точек должны быть одинаковыми. Полагая, что наблюдения (5-14) за спутниками j и k производятся одновременно в двух точках A и B в эпоху t , получаем следующие уравнения измерений:

$$\begin{aligned} \Phi_A^j(t) &= \frac{1}{\lambda} \varrho_A^j(t) + f \delta_A(t) + N_A^j, \\ \Phi_A^k(t) &= \frac{1}{\lambda} \varrho_A^k(t) + f \delta_A(t) + N_A^k, \\ \Phi_B^j(t) &= \frac{1}{\lambda} \varrho_B^j(t) + f \delta_B(t) + N_B^j, \\ \Phi_B^k(t) &= \frac{1}{\lambda} \varrho_B^k(t) + f \delta_B(t) + N_B^k. \end{aligned} \quad (5-15)$$

Введём краткие обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^{jk}(t) &= \Phi_B^k(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t), \\ \varrho_{AB}^{jk}(t) &= \varrho_B^k(t) - \varrho_B^j(t) - \varrho_A^k(t) + \varrho_A^j(t), \\ N_{AB}^{jk} &= N_B^k - N_B^j - N_A^k + N_A^j. \end{aligned} \quad (5-16)$$

Тогда модель двукратной разности определяется как

$$\Phi_{AB}^{jk}(t) = \frac{1}{\lambda} \varrho_{AB}^{jk}(t) + N_{AB}^{jk}. \quad (5-17)$$

Важно, что смещения часов приёмников здесь отсутствуют; это – главная причина, по которой предпочитают использование двукратных разностей. Отсутствие ошибок часов в (5-17) является следствием допущений о синхронных наблюдениях и одинаковых частотах спутниковых сигналов (что для GPS обосновано).

Предположим, что A – референсная точка с известными координатами. Тогда в формуле двукратной разности остаются неизвестными искомые координаты X_B, Y_B, Z_B точки B (они содержатся в $\varrho_B^j(t)$ и $\varrho_B^k(t)$) и неоднозначность. Чтобы найти эти неизвестные, мы нуждаемся в большем количестве спутников (чтобы установить дополнительные двукратные разности), а также в большем количестве эпох наблюдения.

Мы не рассматриваем здесь линеаризацию, возможные избыточные измерения и т.д., поскольку намереваемся продемонстрировать лишь основную идею метода. Искомым результатом, полученным из (5-17), является базисный вектор \mathbf{b}_{AB} с компонентами $\Delta X_{AB}, \Delta Y_{AB}, \Delta Z_{AB}$ или, в конечном счёте, GPS координаты X_B, Y_B, Z_B , полученные из формулы (5-10) через координаты известной точки A . Заметим, что результирующие координаты получены в системе WGS 84.

Этим мы завершаем краткое введение, знакомящее с тем, как потребитель GPS получает WGS 84 координаты, то есть геоцентрические прямоугольные координаты X, Y, Z или вычисленные по ним эллипсоидальные координаты φ, λ, h ; см. разд. 5.6.1.

5.5 Проекция на эллипсоид

Предположим, что положение точки P установлено посредством естественных координат Φ, Λ, H . Тогда мы можем спроецировать эту точку вдоль (слегка искривленной) отвесной линии на геоид. Ортометрическая высота – это расстояние между точкой P и ее проекцией P_0 на геоид, измеренное вдоль отвесной линии (рис. 5.4). Хотя такой способ спроецирования абсолютно естественен, геоид не подходит для выполнения вычислений непосредственно на нем; поэтому точку P_0 , в свою очередь, следует спроецировать в точку Q_0 на референц-эллипсоиде посредством прямой эллипсоидальной нормали. Таким образом, точка P на поверхности Земли и соответствующая точка Q_0 на эллипсоиде связаны двойным спроецированием, то есть двумя проекциями, выполняемыми одна за другой и весьма схожими; ортометрическая высота $H = PP_0$ соответствует высоте геоида $N = P_0Q_0$. Эту двойную проекцию называют *проекцией Пизетти*.

Намного проще спроецировать точку P с физической поверхности Земли непосредственно на эллипсоид сразу вдоль прямой эллипсоидальной нормали; таким образом, получим точку Q . Расстояние $PQ = h$ – эллипсоидальная высота, то есть высота точки над эллипсоидом. Тогда точка P поверхности Земли определяется эллипсоидальной высотой h и эллипсоидальными координатами φ, λ точки Q на эллипсоиде. Таким образом, *эллипсоидальные координаты* φ, λ, h заменят собой *естественные координаты* Φ, Λ, H . Такой способ

проецирования называют *проекцией Гельмерта*. Практически разность меж-

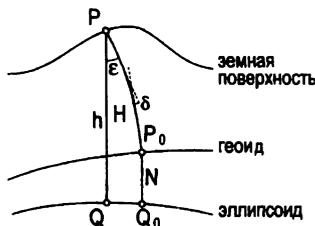


Рис. 5.4: Проекция Гельмерта и Пицетти

ду проекциями Пицетти и Гельмерта мала. Эллипсоидальная высота h равна $H + N$ в пределах долей миллиметра. Эллипсоидальные координаты φ и λ связаны, относительно этих двух проекций, уравнениями

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{Гельмерт}} &= \varphi_{\text{Пицетти}} + \frac{H}{R} \xi, \\ \lambda_{\text{Гельмерт}} &= \lambda_{\text{Пицетти}} + \frac{H}{R} \eta \sec \varphi,\end{aligned}\tag{5-18}$$

что видно из рис. 5.4, поскольку $QQ_0 \approx H \varepsilon$; $R = 6371$ км – средний радиус Земли. Даже если $\varepsilon = 1$ дуговой минуте и $H = 1000$ м, расстояние QQ_0 достигает величины лишь около 30 см, и эллипсоидальные координаты отличаются менее, чем на $0.01''$, что меньше точности астрономических наблюдений. Таким образом, при решении большинства задач мы можем пренебречь разностью между этими двумя проекциями.

Проекция Пицетти лучше приспособлена к применению на геоиде, потому что она задает точное соответствие между точкой P_0 геоида и точкой Q_0 эллипсоида. Однако проекция Гельмерта обладает значительными практически преимуществами. В первую очередь, это касается прямого преобразования эллипсоидальных координат φ, λ, h в прямоугольные координаты x, y, z . Она также более удобна и в других отношениях. Решающее преимущество проекции Гельмерта заключается в ее прямой связи с GPS. Поэтому теперь на практике используется исключительно проекция Гельмерта.

5.6 Преобразования координат

5.6.1 Эллипсоидальные и прямоугольные координаты

Выведем соотношение между эллипсоидальными координатами φ, λ, h и соответствующими прямоугольными координатами x, y, z .

Уравнение референс-эллипсоида в прямоугольных координатах имеет вид:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (5-19)$$

Через эллипсоидальные координаты этот эллипсоид определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= N \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= N \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= \frac{b^2}{a^2} N \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5-20)$$

Здесь N – нормальный радиус кривизны (2-149):

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5-21)$$

Эти уравнения известны из геометрии; можно также проверить непосредственной подстановкой, что точка с прямоугольными координатами (5-20) удовлетворяет уравнению эллипсоида (5-19) и, следовательно, лежит на нем. Координаты единичного вектора нормали \mathbf{n} имеют вид

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi], \quad (5-22)$$

так как φ представляет собой угол между эллипсоидальной нормалью и плоскостью xy , являющейся также экваториальной плоскостью (рис. 5.5). Пусть теперь точка P вне эллипсоида имеет радиус-вектор

$$\mathbf{X} = [X, Y, Z]; \quad (5-23)$$

аналогично, для точки Q на эллипсоиде имеем

$$\mathbf{x} = [x, y, z]. \quad (5-24)$$

Из рис. 5.5 видно, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + h \mathbf{n}, \quad (5-25)$$

то есть

$$\begin{aligned} X &= x + h \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= y + h \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= z + h \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5-26)$$

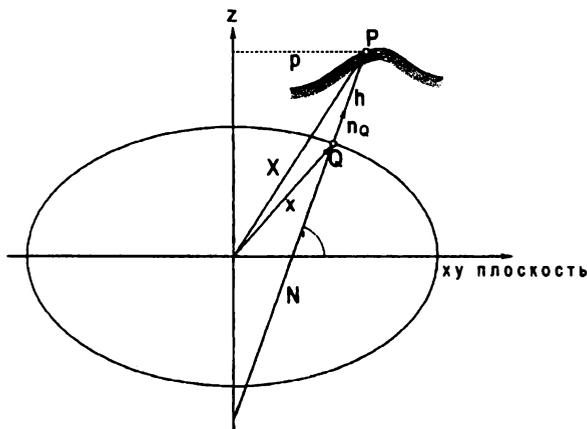


Рис. 5.5: Эллипсоидальные и прямоугольные координаты

С учетом (5-20), это даёт

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5-27)$$

Полученные соотношения являются основными формулами преобразований между эллипсоидальными φ, λ, h и прямоугольными X, Y, Z координатами точки, расположенной вне эллипсоида. Начало прямоугольной системы координат совпадает с центром эллипсоида, а ось z – с его осью вращения; ось x имеет долготу Гринвича, то есть 0° , ось y – долготу 90° к востоку от Гринвича (то есть, $\lambda = +90^\circ$).

Возможно, некоторую путаницу вызовет тот факт, что как нормальный радиус кривизны эллипсоида, так и высота геоида обозначены одним и тем же символом N ; в (5-27) N – это, конечно же, нормальный радиус кривизны. Вообще, по контексту всегда можно определить, о какой из этих столь различных между собой величин (6000 км и 60 м) идет речь.

Уравнения (5-27) позволяют вычислить прямоугольные координаты X, Y, Z исходя из эллипсоидальных φ, λ, h .

Обратная процедура вычисления φ, λ, h исходя из данных X, Y, Z , часто выполняется итерационно, хотя существует и решение в замкнутой форме. Приведем одну из возможных процедур итерации.

Обозначая $\sqrt{X^2 + Y^2}$ как p , мы получим из первых двух уравнений (5-27) или из рис. 5.5, что

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h) \cos \varphi, \quad (5-28)$$

и потому

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N. \quad (5-29)$$

Третье уравнение в (5-27) можно преобразовать к виду

$$Z = \left(N - \frac{a^2 - b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi = (N + h - e^2 N) \sin \varphi, \quad (5-30)$$

где $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$. Поделив это соотношение на выведенное выше выражение для p , получим

$$\frac{Z}{p} = \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h} \right) \operatorname{tg} \varphi, \quad (5-31)$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{p} \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h} \right)^{-1} \quad (5-32)$$

Если X, Y, Z даны, то, вычислив p , мы можем решить уравнения (5-29) и (5-32) относительно h и φ методом последовательных приближений. В первом приближении положим $h = 0$ в (5-32). Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_{(1)} = \frac{Z}{p} (1 - e^2)^{-1}. \quad (5-33)$$

Используя $\varphi_{(1)}$, вычисляем приближенное значение $N_{(1)}$ с помощью формулы (5-21). Затем по формуле (5-29) находим $h_{(1)}$. Далее, во втором приближении, положим $h = h_{(1)}$ в (5-32), что даст

$$\operatorname{tg} \varphi_{(2)} = \frac{Z}{p} \left(1 - e^2 \frac{N_{(1)}}{N_{(1)} + h_{(1)}} \right)^{-1} \quad (5-34)$$

Используя $\varphi_{(2)}$, находим более точные значения величин N и h и т.д. Эта процедура повторяется до тех пор, пока φ и h не станут фактически постоянными.

Формула для λ легко получается из первых двух уравнений (5-27):

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}. \quad (5-35)$$

Было предложено множество других методов. Одним из примеров преобразования X, Y, Z в φ, λ, h без итерации, но с некоторой неизбежной аппроксимацией, являются следующие формулы:

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctg} \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}, \\ \lambda &= \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \\ h &= \frac{p}{\cos \varphi} - N,\end{aligned}\tag{5-36}$$

где

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{Z a}{p b}\tag{5-37}$$

– вспомогательная величина, а

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \quad e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2\tag{5-38}$$

представляют собой первый и второй числовые эксцентриситеты. Как и в (5-28), $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$. По существу, нет никаких оснований для того, чтобы эти формулы были менее популярны, чем метод итерации. Другие методы вычислений можно найти, например, в работах Sünkel (1977) и Zhu (1993).

5.6.2 Эллипсоидальные, эллипсоидально–гармонические и сферические координаты

Хотя мы уже несколько раз указывали это, тем не менее подчеркнём еще раз, что необходимо различать следующие координатные тройки (см. рис. 5.6):

- эллипсоидальные координаты: φ, λ, h ;
- эллипсоидально–гармонические координаты: β, λ, u ,
или: $\vartheta_{\text{эллипсоидально-гармоническ}}, \lambda, u$;
- сферические координаты: $\bar{\varphi}, \lambda, r$, или: $\vartheta_{\text{сферическ}}, \lambda, r$.

Долгота λ здесь одна и та же для всех троек. Широта φ и долгота λ эллипсоидальных координат также называются *геодезической широтой* и *геодезической долготой*. Эллипсоидально–гармоническая координата β представляет собой *редуцированную широту*, а сферическая координата $\bar{\varphi}$ – *геоцентрическую широту*.

Широта φ относится к *референц-эллипсоиду*. Редуцированная широта β относится к *координатному эллипсоиду* $u = \text{const}$ (конфокальный эллипсоид, проходящий через точку P на рис. 5.6).

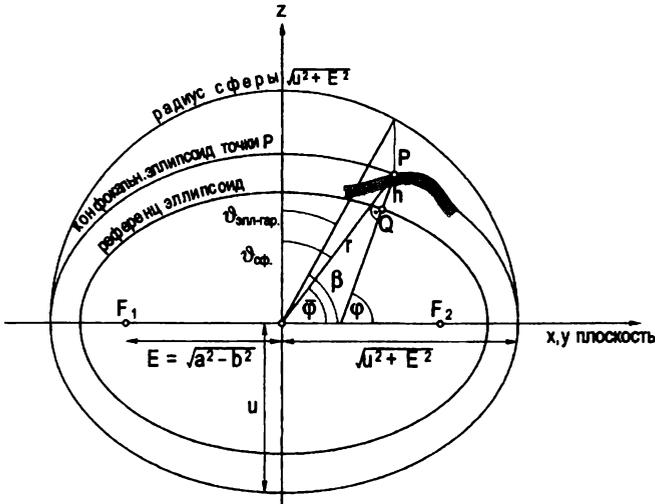


Рис. 5.6: Эллипсоидальные, эллипсоидально-гармонические и сферические координаты

Пока все ясно. Особое внимание требуется при использовании координаты ϑ , которая была введена как дополнение сферической координаты $\bar{\varphi}$, а также, как дополнение эллипсоидально-гармонической координаты β .

Поэтому правильнее (но и более громоздко) было бы обозначать их так:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{эллипсоидально-гармоническ}} &= 90^\circ - \beta \\ \vartheta_{\text{сферическ}} &= 90^\circ - \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Заметим, однако, что раньше для различия между сферическим и эллипсоидально-гармоническим значениями ϑ эти индексы мы не использовали. Поэтому читателю следует относиться к этим различиям очень внимательно! По возможности, мы всюду старались избегать путаницы.

Несколько примеров: мы использовали сферические координаты r, ϑ, λ в разделах 1.4, 1.11, 1.12, 1.14, 2.5, 2.6, 2.13, 2.18, и т.д.; эллипсоидально-гармонические координаты u, ϑ, λ были использованы в разделах 1.15, 1.16, а эллипсоидально-гармонические координаты u, β, λ – в разделах 2.7, 2.8; в разделе 2.9 мы использовали сферические координаты r, ϑ, λ наравне с эллипсоидально-гармоническими u, β, λ .

Следующие соотношения выражают прямоугольные координаты через эти три координатные тройки:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda = \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda = r \cos \bar{\varphi} \cos \lambda, \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda = \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda = r \cos \bar{\varphi} \sin \lambda, \\ Z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi = u \sin \beta = r \sin \bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Они вытекают из формул (1–26), (1–151) и (5–27) и могут быть использованы для вычисления u и β , исходя из h и φ или из r и $\bar{\varphi}$ и т.д.

5.7 Преобразования геодезических дат

5.7.1 Введение

Для определения *геодезических дат*, или *геодезической системы отсчёта (референц системы)* необходимо задать: (1) размеры референц эллипсоида (большая полуось a и сжатие f) и (2) его положение относительно Земли или геоида. Это взаимное положение проще всего определить при помощи координат x_0, y_0, z_0 центра референц-эллипсоида относительно геоцентра. Так как геоцентр не был доступен для классических геодезических измерений до наступления спутниковой эры, то *фундаментальная* или *начальная точка* P_1 на земной поверхности просто выбиралась, как, например, Meades Rancho для Северной Америки и Потсдам для Центральной Европы. Оказывается, что удобный, но условный выбор эллипсоидальных координат $\varphi_1, \lambda_1, h_1$ фундаментальной точки P_1 эквивалентен выбору координат x_0, y_0, z_0 геоцентра.

Таким образом, мы имеем 5 определяющих параметров:

- 2 параметра a (большая полуось) и f (сжатие) определяют *форму*, и
- 3 параметра x_0, y_0, z_0 или $\varphi_1, \lambda_1, h_1$ определяют *положение*.

В дальнейшем мы будем также допускать наличие масштабного коэффициента и малые повороты вокруг трех осей координат.

Преобразование (геодезической) референц системы определяет зависимость между глобальной (геоцентрической) и локальной (в общем случае, пегеоцентрической) трехмерными декартовыми системами координат и, следовательно, переводит одну систему координат некоторого типа в другую того же типа. Это – одна из основных задач при комбинировании данных GPS с наземными данными, так как приходится преобразовывать геоцентрическую систему координат WGS 84 к локальной земной системе координат. Земная система обычно основана на специально подобранном эллипсоиде локально оптимальной аппроксимации, например, на эллипсоиде Кларка или эллипсоиде GRS–80

в США и эллипсоиде Бесселя во многих частях Европы. Локальный эллипсоид связан с геоцентрической декартовой системой координат, начало которой совпадает с центром эллипсоида.

5.7.2 Трехмерное преобразование в общем виде

Рассмотрим два набора трехмерных прямоугольных координат – сначала в общем виде – образующих два вектора \mathbf{X} и \mathbf{X}_T (рис. 5.7). Семипараметрическое

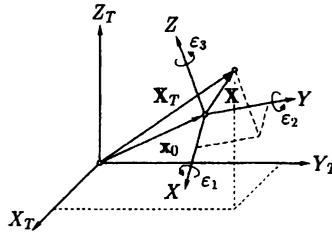


Рис. 5.7: Трехмерное преобразование

преобразование между этими двумя наборами в пространстве, часто называемое преобразованием Гельмерта или преобразованием подобия, определяется соотношением

$$\mathbf{X}_T = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{R} \mathbf{X}, \quad (5-41)$$

где \mathbf{x}_0 – вектор сдвига, μ – масштабный коэффициент и \mathbf{R} – матрица поворота.

Компоненты вектора сдвига

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (5-42)$$

представляют собой координаты начала системы \mathbf{X} в системе \mathbf{X}_T . При этом используется единый масштабный коэффициент. В общем случае возникают три масштабных коэффициента – по одному для каждой оси (но при использовании GPS в этом нет необходимости). Матрица поворота – ортогональная матрица, которая состоит из трех поочередных вращений

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3\{\varepsilon_3\} \mathbf{R}_2\{\varepsilon_2\} \mathbf{R}_1\{\varepsilon_1\}. \quad (5-43)$$

В явном виде имеем

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 & \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_3 & \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_3 \\ & + \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 & - \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 \\ - \cos \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 & \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_3 & \sin \varepsilon_1 \cos \varepsilon_3 \\ & - \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 & + \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 \\ \sin \varepsilon_2 & - \sin \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 & \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Если параметры преобразования \mathbf{x}_0 , μ , \mathbf{R} известны, то координаты любой точки, заданные в системе \mathbf{X} , могут быть преобразованы в систему \mathbf{X}_T по формуле (5.41).

Если параметры преобразования неизвестны, то они могут быть определены при помощи узловых (идентичных) точек, называемых также контрольными точками. Это означает, что координаты одной и той же точки заданы в обеих системах. Так как каждая узловая точка (заданная в \mathbf{X}_T и \mathbf{X}) приводит к трем уравнениям, то для нахождения семи неизвестных параметров достаточно двух узловых точек и одного дополнительного общего компонента (например, высоты). На практике обычно используется избыточная узловая точка, и искомые параметры оцениваются методом наименьших квадратов.

Так как параметры входят в уравнение (5-41) нелинейно, то приходится выполнять линеаризацию, для чего необходимы приближенные значения $\mathbf{x}_{0\text{прибл}}$, $\mu_{\text{прибл}}$, $\mathbf{R}_{\text{прибл}}$ параметров.

5.7.3 Трехмерное преобразование между WGS 84 и локальными системами координат

В случае преобразования между WGS 84 и локальными системами координат возникают некоторые упрощения. Так, при определении необходимых приближенных значений можно положить $\mu_{\text{прибл}} = 1$, что дает соотношение

$$\mu = \mu_{\text{прибл}} + \delta\mu = 1 + \delta\mu. \quad (5.45)$$

Кроме того, углы поворота ε_i в (5-44) – малые величины и могут рассматриваться как дифференциалы. Полагая в (5-44) $\cos \varepsilon_i = 1$ и $\sin \varepsilon_i = \varepsilon_i$ и рассматривая только члены первых степеней, получим

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \delta\mathbf{R}, \quad (5.46)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, а $\delta\mathbf{R}$ – (кососимметрическая) дифференциальная матрица поворота. Таким образом, допустимо приближение $\mathbf{R}_{\text{прибл}} = \mathbf{I}$. Наконец, вектор сдвига можно представить в виде

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0\text{прибл}} + \delta\mathbf{x}_0, \quad (5-47)$$

где приближенный вектор сдвига

$$\mathbf{x}_{0\text{прибл}} = \mathbf{X}_T - \mathbf{X} \quad (5-48)$$

получен путем подстановки приближенного масштабного коэффициента и приближенной матрицы поворота в формулу (5-41).

Используя приближения (5-45), (5-46), (5-47) в формуле (5-41) и опуская детали, которые можно найти, например, в работе Hofmann–Wellenhof et al. (1994: разд. 3.3), получим модель линсаризации для одной точки i . Эта модель может быть записана в виде

$$\mathbf{X}_{T_i} - \mathbf{X}_i - \mathbf{x}_{0\text{прибл}} = \mathbf{A}_i \delta\mathbf{p}, \quad (5-49)$$

где левая часть уравнения известна и формально может рассматриваться как результат наблюдений. Матрица коэффициентов \mathbf{A}_i и вектор $\delta\mathbf{p}$, содержащий неизвестные параметры, имеют вид

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

$$\delta\mathbf{p} = [\delta x_0 \quad \delta y_0 \quad \delta z_0 \quad \delta\mu \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3].$$

Теперь соотношение (5-49) представляет собой систему линейных уравнений для i -ой точки. Для n узловых точек матрица коэффициентов \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix}. \quad (5-51)$$

Например, для трех узловых точек матрица коэффициентов выглядит так:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_2 & 0 & -Z_2 & Y_2 \\ 0 & 1 & 0 & Y_2 & Z_2 & 0 & -X_2 \\ 0 & 0 & 1 & Z_2 & -Y_2 & X_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_3 & 0 & -Z_3 & Y_3 \\ 0 & 1 & 0 & Y_3 & Z_3 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 1 & Z_3 & -Y_3 & X_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5-52)$$

что соответствует слегка избыточной системе. Использование метода наименьших квадратов позволяет найти вектор параметров δp и улучшенные значения величин (5-45), (5-46), (5-47). После определения семи параметров преобразования подобия формула (5-41) может использоваться для преобразования координат других точек (помимо узловых).

В качестве типичного примера рассмотрим задачу преобразования GPS-координат некоторой сети, то есть координат глобальной геоцентрической системы WGS 84, к (трехмерным) координатам (негеоцентрической) локальной системы, обозначенной нижним индексом LS. GPS координаты обозначены как $(X, Y, Z)_{GPS}$; координаты локальной системы – это координаты на плоскости $(y, x)_{LS}$ и эллипсоидальная высота h_{LS} . При нахождении параметров преобразования предполагается, что известны координаты узловых точек в обеих системах. Задача решается по следующему алгоритму:

1. координаты $(y, x)_{LS}$ узловых точек на плоскости преобразуются при помощи подходящих формул в эллипсоидальные поверхностные координат $(\varphi, \lambda)_{LS}$;
2. эллипсоидальные координаты $(\varphi, \lambda, h)_{LS}$ узловых точек преобразуются в прямоугольные координаты $(X, Y, Z)_{LS}$ с помощью (5-27);
3. используя координаты $(X, Y, Z)_{GPS}$ и $(X, Y, Z)_{LS}$ узловых точек определяются семь параметров преобразования Гельмерга;
4. с помощью найденных параметров преобразования и уравнения (5-41) координаты $(X, Y, Z)_{GPS}$ точек сети (не являющихся узловыми) преобразуются в $(X, Y, Z)_{LS}$;
5. полученные прямоугольные координаты $(X, Y, Z)_{LS}$ преобразуются в эллипсоидальные $(\varphi, \lambda, h)_{LS}$, например, посредством итерации (5-28) – (5-34);
6. полученные эллипсоидальные поверхностные координаты $(\varphi, \lambda)_{LS}$ преобразуются с помощью соответствующих формул в координаты на плоскости $(y, x)_{LS}$.

Преимущество такого трехмерного подхода состоит в том, что для определения семи параметров преобразования подобия не требуется никакая априорная информация. Недостаток метода заключается в том, что для узловых точек нужно знать эллипсоидальные высоты (и, следовательно, высоты геоида). Однако, как показано в работе Schmitt et al. (1991), высоты узловых точек часто лишь незначительно влияют на координаты (y, x) . Например, погрешности высот могут вызывать наклон сети 20 км × 20 км до 5 м в пространстве;

однако искажения координат на плоскости при этом имеют порядок лишь 1 мм.

Для больших площадей высотная проблема может быть решена с помощью трехмерного аффинного преобразования вместо преобразования подобия; это позволяет ограничиться приближенными значениями эллипсоидальных высот узловых точек.

5.7.4 Дифференциальные формулы для других преобразований референц-систем

Рассмотрим упрощенные случаи. Предположим, что геоцентр не совпадает с центром референц-эллипсоида, но *геоцентрические оси параллельны эллипсоидальным*. Такой параллельный сдвиг называют также *переносом* (рис. 5.8). Рассмотрим прямоугольную систему координат XYZ , чье начало находится

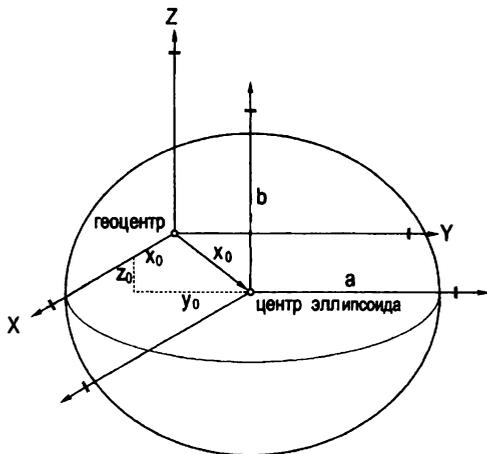


Рис. 5.8: Задача переноса

в геоцентре, а оси направлены как обычно. Пусть координатами центра эллипсоида относительно этой системы будут x_0, y_0, z_0 , как было принято ранее. Тогда формулы (5-27) подвергнутся очевидному преобразованию:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= y_0 + (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= z_0 + \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi. \end{aligned} \tag{5-53}$$

Эти соотношения являются отправной точкой для различных важных дифференциальных формул координатного преобразования.

Выясним сначала, как изменятся прямоугольные координаты X, Y, Z при изменении эллипсоидальных координат φ, λ, h на малые величины $\delta\varphi, \delta\lambda, \delta h$, а также при изменении геодезической референц-системы, а именно, референц-эллипсоида a, f и его местоположения x_0, y_0, z_0 , на величины $\delta a, \delta f$ и $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$. Заметим, что $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ соответствуют малому смещению (параллельному переносу) эллипсоида; при этом *его ось остается параллельной оси Земли*.

Решение этой задачи ищется путем дифференцирования (5-53):

$$\begin{aligned}\delta X &= \delta x_0 + \frac{\partial X}{\partial a} \delta a + \frac{\partial X}{\partial f} \delta f + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial X}{\partial h} \delta h, \\ \delta Y &= \delta y_0 + \frac{\partial Y}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Y}{\partial f} \delta f + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial Y}{\partial h} \delta h, \\ \delta Z &= \delta z_0 + \frac{\partial Z}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Z}{\partial f} \delta f + \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial Z}{\partial h} \delta h,\end{aligned}\quad (5-54)$$

поскольку, согласно теореме Тейлора, малые изменения можно рассматривать как дифференциалы.

В этих дифференциальных формулах мы будем довольствоваться приближенными значениями. Так как сжатие f — малая величина, то мы можем разложить (2-149) как

$$\begin{aligned}N &= \frac{a^2}{b} (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{-1/2} = \frac{a^2}{b} \left(1 - \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 \varphi \dots\right) \\ &= a(1 + f \dots)(1 - f \cos^2 \varphi \dots) = a(1 + f - f \cos^2 \varphi \dots);\end{aligned}\quad (5-55)$$

откуда

$$N \approx a(1 + f \sin^2 \varphi); \quad (5-56)$$

и

$$\frac{b^2}{a^2} N = (1 - 2f \dots) a(1 + f \sin^2 \varphi \dots) \approx a(1 - 2f + f \sin^2 \varphi), \quad (5-57)$$

и

$$b = a(1 - f), \quad e'^2 = 2f \dots \quad (5-58)$$

Таким образом, формулы (5-53) аппроксимируются соотношениями

$$\begin{aligned}X &= x_0 + (a + af \sin^2 \varphi + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= y_0 + (a + af \sin^2 \varphi + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= z_0 + (a - 2af + af \sin^2 \varphi + h) \sin \varphi.\end{aligned}\quad (5-59)$$

Теперь можно найти частные производные, участвующие в (5-54); например,

$$\frac{\partial X}{\partial a} = (1 + f \sin^2 \varphi) \cos \varphi \cos \lambda \approx \cos \varphi \cos \lambda, \quad (5-60)$$

так как сжатием в этих коэффициентах можно пренебречь. Это равнозначно применению к коэффициентам, и только к ним, сферической аппроксимации, аналогичной рассмотренной в разд. 2.13. Аналогично через частные производные получаются и все остальные коэффициенты; в результате соотношения (5-54) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta X &= \delta x_0 - a \sin \varphi \cos \lambda \delta \varphi - a \cos \varphi \sin \lambda \delta \lambda \\ &\quad + \cos \varphi \cos \lambda (\delta h + \delta a + a \sin^2 \varphi \delta f), \\ \delta Y &= \delta y_0 - a \sin \varphi \sin \lambda \delta \varphi + a \cos \varphi \cos \lambda \delta \lambda \\ &\quad + \cos \varphi \sin \lambda (\delta h + \delta a + a \sin^2 \varphi \delta f), \\ \delta Z &= \delta z_0 + a \cos \varphi \delta \varphi + \sin \varphi (\delta h + \delta a + a \sin^2 \varphi \delta f) \\ &\quad - 2a \sin \varphi \delta f. \end{aligned} \quad (5-61)$$

Эти формулы выражают изменения, возникающие в прямоугольных координатах X, Y, Z , в зависимости от изменений местоположения (x_0, y_0, z_0) и размеров (a, f) эллипсоида, а также соответствующих ему эллипсоидальных координат φ, λ, h .

Преобразование эллипсоидальных координат

Из соотношений (5-61) можно вывести несколько важных формул преобразования координат. Так, предположим сначала, что положение точки P в пространстве остается неизменным, то есть

$$\delta X = \delta Y = \delta Z = 0. \quad (5-62)$$

Определим изменения эллипсоидальных координат φ, λ, h , вызываемые варьированием размеров референс-эллипсоида и его местоположения. Геометрическая иллюстрация дана на рис. 5.9. Задача сводится, таким образом, к решению системы уравнений (5-61) относительно $\delta \varphi, \delta \lambda, \delta h$ с левой частью, равной нулю. Чтобы выразить $\delta \varphi$, умножим первое уравнение системы (5-61) на $-\sin \varphi \cos \lambda$, второе — на $-\sin \varphi \sin \lambda$, третье — на $\cos \varphi$ и сложим все полученные таким образом уравнения. Для $\delta \lambda$ соответствующими множителями являются $-\sin \lambda, \cos \lambda$ и 0; для δh — это $\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda$ и $\sin \varphi$. Результат таков:

$$\begin{aligned} a \delta \varphi &= \sin \varphi \cos \lambda \delta x_0 + \sin \varphi \sin \lambda \delta y_0 - \cos \varphi \delta z_0 + 2a \sin \varphi \cos \varphi \delta f, \\ a \cos \varphi \delta \lambda &= \sin \lambda \delta x_0 - \cos \lambda \delta y_0, \\ \delta h &= -\cos \varphi \cos \lambda \delta x_0 - \cos \varphi \sin \lambda \delta y_0 - \sin \varphi \delta z_0 - \delta a + a \sin^2 \varphi \delta f. \end{aligned} \quad (5-63)$$

Эти формулы выражают изменения $\delta\varphi, \delta\lambda, \delta h$ в произвольной точке в тер-

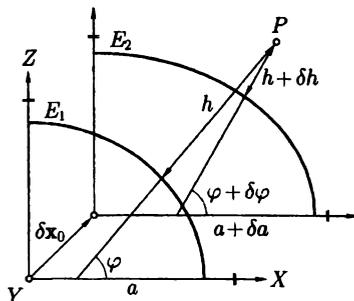


Рис. 5.9: Малые изменения референц-эллипсоида в сочетании с малым параллельным сдвигом

минах вариаций $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ в данной точке и изменений δa и δf параметров референц эллипсоида. Таким образом, они связывают две различных системы эллипсоидальных координат при условии, что эти системы расположены так близко друг к другу, что возникающие различия можно трактовать как линейные. С математической точки зрения, соотношения (5-63) представляют собой бесконечно малые координатные преобразования (по существу, ортогональные преобразования, но не полностью); геодезисту они дают информацию о влиянии изменений в геодезической референц-системе.

Замечание. Дифференциальные формулы можно было бы заменить поочередным применением исходных конечных формул. Попробуйте!

Часть II: Развитие трехмерной геодезии

5.8 Трехмерная геодезия Брунса и Хотина

Идея вычисления триангуляционной сети в пространстве восходит к Брунсу (см. Bruns 1878). На основе его идей Хотин в своей работе Hotine 1969, и ранее в 1959 году, в значительной мере разработал концепцию классической (предспутниковой) геодезической сети строгим трехмерным способом, см. Levallois 1963.

Рассмотрим многогранник, образованный пунктами триангуляции на поверхности Земли и соединяющими их прямыми линиями видимости, см. рис. 5.10. Другой набор прямых линий, проходящих по одной через каждую вершину угла, представляет отвесные линии в этих пунктах.

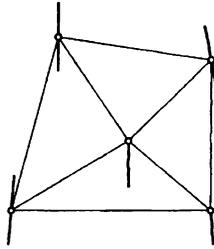


Рис. 5.10: Многогранник Брунса

Чтобы полностью определить эту фигуру, нам нужно знать пять параметров для каждого пункта – три координаты и два параметра, определяющие направление отвесной линии. Исходными данными для этой задачи являются:

1. горизонтальные углы и зенитные расстояния, полученные с помощью теодолита;
2. пространственные расстояния, полученные путем электрических измерений расстояний; и
3. астрономические наблюдения широты и долготы для установления направления отвесной линии, и азимута – для определения ориентации многогранника.

Мы можем использовать прямоугольную систему координат; тогда определению подлежат три координаты X, Y, Z . В качестве параметров, определяющих направление отвесной линии, удобно взять астрономическую широту Φ и долготу Λ . Астрономический азимут A , зенитное расстояние z' и пространственное расстояние z можно выразить в терминах этих пяти параметров. Это сделано в разд. 5.9.

Эта информация является чисто "геометрической". Нам требуются наземные измерения (особенно величины Φ, Λ, A), чтобы связать геометрию с полем силы тяжести, представленным отвесными линиями. Многогранник Брунса – наилучшая иллюстрация геометрического подхода.

Сегодня GPS является лучшим способом непосредственного определения глобальных прямоугольных координат X, Y, Z или эллипсоидальных координат φ, λ, h .

5.9 Глобальные и локальные горизонтальные координаты

Мы будем использовать декартову систему координат XYZ , введенную в разд. 5.6.1 – глобальную, но не обязательно геоцентрическую. Координаты X, Y, Z образуют вектор \mathbf{X} . Таким образом, векторы \mathbf{X}_i и \mathbf{X}_j представляют две наземные точки P_i и P_j . Определим вектор между этими двумя точками в глобальной системе координат как $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i$.

Кроме того, мы введем "локальную горизонтальную систему", отнесенную к касательной плоскости к уровенной поверхности в точке P_i и к локальной вертикали, касательной в P_i к естественному отвесу, определенному астрономическими координатами Φ и Λ , см. разд. 2.4. Тогда оси $\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{u}_i$ этой локальной (связанной с касательной плоскостью) координатной системы в точке P_i , имеют направления на север, восток, вверх и в глобальной системе имеют следующие координаты:

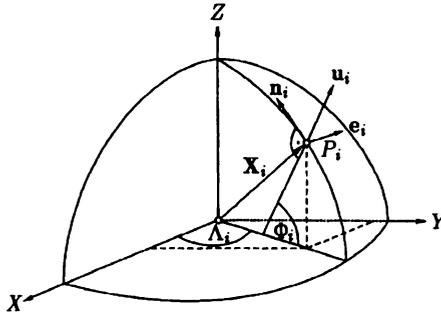


Рис. 5.11: Глобальные и локальные горизонтальные координаты

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} -\sin \Phi_i \cos \Lambda_i \\ -\sin \Phi_i \sin \Lambda_i \\ \cos \Phi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} -\sin \Lambda_i \\ \cos \Lambda_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \cos \Phi_i \cos \Lambda_i \\ \cos \Phi_i \sin \Lambda_i \\ \sin \Phi_i \end{bmatrix}. \quad (5-64)$$

Здесь векторы \mathbf{n}_i и \mathbf{e}_i определяют касательную плоскость в точке P_i (рис. 5.11). Третья координатная ось локальной горизонтальной системы координат, то есть, вектор \mathbf{u}_i , ортогональна к касательной плоскости и имеет направление отвесной линии.

Таким образом вводятся координаты n_{ij}, e_{ij}, u_{ij} вектора \mathbf{x}_{ij} в локальной горизонтальной системе; их иногда обозначают как ENU (east-восток, north-север, up-вверх)-координаты. Из рисунка 5.12 видно, что они получаются

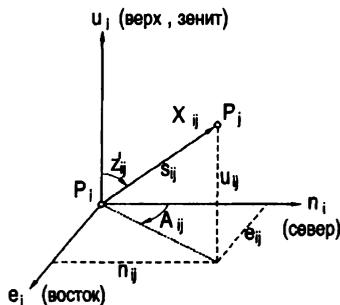


Рис. 5.12: Измеряемые величины в локальной горизонтальной системе координат

проецировав вектор \mathbf{X}_{ij} на оси \mathbf{n}_i , \mathbf{e}_i , \mathbf{u}_i . Аналитически это выражается скалярным произведением. Таким образом, имеем

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{X}_{ij} \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{X}_{ij} \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{X}_{ij} \end{bmatrix}. \quad (5-65)$$

Если векторы \mathbf{n}_i , \mathbf{e}_i , \mathbf{u}_i локальной горизонтальной системы координат представить как столбцы ортогональной матрицы \mathbf{D}_i , то есть

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} -\sin \Phi_i \cos \Lambda_i & -\sin \Lambda_i \cos \Phi_i \cos \Lambda_i \\ -\sin \Phi_i \sin \Lambda_i & \cos \Lambda_i \cos \Phi_i \sin \Lambda_i \\ \cos \Phi_i & 0 & \sin \Phi_i \end{bmatrix}, \quad (5-66)$$

то соотношение (5-65) можно кратко записать следующим образом:

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{D}_i^T \mathbf{X}_{ij}. \quad (5-67)$$

Координаты вектора \mathbf{x}_{ij} можно также выразить через пространственное расстояние s_{ij} , азимут A_{ij} и зенитное расстояние z'_{ij} , в которое, как предполагается, уже введена поправка за рефракцию. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ij} \sin z'_{ij} \cos A_{ij} \\ s_{ij} \sin z'_{ij} \sin A_{ij} \\ s_{ij} \cos z'_{ij} \end{bmatrix}, \quad (5-68)$$

где величины s_{ij} , A_{ij} , z'_{ij} наземных измерений относятся к точке P_i , то есть, измерения были произведены в P_i . Обращение формулы (5-68) позволяет вы-

разить значения измерений в явном виде:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sqrt{n_{ij}^2 + e_{ij}^2 + u_{ij}^2} \\ \operatorname{tg} A_{ij} &= \frac{e_{ij}}{n_{ij}} \\ \cos z'_{ij} &= \frac{u_{ij}}{\sqrt{n_{ij}^2 + e_{ij}^2 + u_{ij}^2}}. \end{aligned} \quad (5-69)$$

Подставив сюда соотношения (5-65) для n_{ij} , e_{ij} и u_{ij} , мы сможем выразить величины измерений через координаты вектора \mathbf{X}_{ij} в глобальной системе.

Замечание об азимуте и зенитном расстоянии

Так как локальные горизонтальные координаты отнесены к локальному отвесу, определяемому астрономическими координатами Φ, Λ (разд. 2.4), то A и z' называют астрономическим азимутом и астрономическим зенитным расстоянием (зенитным углом). Они играют важную роль в части III.

Измеренный ("астрономический") азимут обозначен буквой A , а соответствующий эллипсоидальный азимут – буквой α . Так как эллипсоидальное зенитное расстояние традиционно обозначают как z , то было бы уместно обозначить измеренное ("астрономическое") зенитное расстояние как Z . Этот символ, однако, прочно закреплен за третьей осью координатной системы XYZ . Поэтому мы использовали и будем использовать обозначение z' . (В следующих разделах мы вновь обратимся и к A , и к z' .)

5.10 Комбинирование наземных данных и данных GPS

5.10.1 Общая система координат

До сих пор уравнивание GPS-сетей и наземных сетей рассматривалось отдельно. Комбинирование этих сетей, например, путем некоторого преобразования системы координат, предлагалось выполнять после индивидуальных уравниваний. В настоящее время исследуется вопрос совместного уравнивания GPS наблюдений и наземных данных. Проблема состоит в том, что GPS наблюдения относятся к трехмерной геоцентрической декартовой системе координат WGS 84, тогда как наземные данные в каждой точке измерения относятся к индивидуальным локальным горизонтальным системам, которые определяются локальными отвесными линиями. Более того, плановые и высотные местоположения наземных данных традиционно отличаются друг от друга в том

смысле, что плановые координаты относятся к эллипсоиду, а ортометрическая высота – к геоиду.

Для совместного уравнивания необходима общая система координат, в которую преобразуются все наблюдения. В принципе, любая система может быть введена как общая. Один из вариантов состоит в использовании двумерных (плоских) координат локальной системы, как это предложено в работе Daxinger and Stirling (1995). Здесь выбрана трехмерная система координат. Её начало находится в центре эллипсоида, принятого для локальной системы координат, ось Z совпадает с малой полуосью эллипсоида, ось X получена пересечением плоскости гринвичского меридиана с экваториальной плоскостью эллипсоида, а ось Y дополняет систему до правой. Радиус-векторы, отнесенные к этой системе, обозначаются как X_{LS} , где индекс LS указывает на локальную систему координат.

После принятия общей системы координат все наземные измерения, относящиеся к индивидуальным локальным горизонтальным системам координат на станциях наблюдения, пересчитываются в эту общую систему. Точно так же преобразуются в эту систему и базисные векторы GPS, трактуемые как измеренные величины.

5.10.2 Представление измеренных величин

Расстояния

Пространственное расстояние s_{ij} как функция локальных горизонтальных координат определяется формулой (5-69). Если вместо координат n_{ij} , e_{ij} , u_{ij} вектора x_{ij} подставить соотношения (5-65), то получим

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sqrt{n_{ij}^2 + e_{ij}^2 + u_{ij}^2} \\ &= \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}, \end{aligned} \quad (5-70)$$

где учтено, что векторы n_i , e_i , u_i (5-64) являются единичными. Очевидно, что правая часть этого выражения сразу следует из теоремы Пифагора. Дифференцирование (5-70) даёт

$$ds_{ij} = \frac{X_{ij}}{s_{ij}} (dX_j - dX_i) + \frac{Y_{ij}}{s_{ij}} (dY_j - dY_i) + \frac{Z_{ij}}{s_{ij}} (dZ_j - dZ_i), \quad (5-71)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} X_{ij} &= X_j - X_i, \\ Y_{ij} &= Y_j - Y_i, \\ Z_{ij} &= Z_j - Z_i. \end{aligned} \quad (5-72)$$

Если в (5-71) дифференциалы заменить разностями, то получим, что

$$\delta s_{ij} = \frac{X_{ij}}{s_{ij}} (\delta X_j - \delta X_i) + \frac{Y_{ij}}{s_{ij}} (\delta Y_j - \delta Y_i) + \frac{Z_{ij}}{s_{ij}} (\delta Z_j - \delta Z_i) \quad (5-73)$$

Азимуты

Вновь применим тот же принцип: измеренный азимут A_{ij} как функция локальных горизонтальных координат определяется формулой (5-69). Если координаты n_{ij} , e_{ij} , u_{ij} вектора \mathbf{x}_{ij} заменить соотношениями (5-65), то получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A_{ij} &= e_{ij}/n_{ij} \\ &= \frac{-X_{ij} \sin \Lambda_i + Y_{ij} \cos \Lambda_i}{-X_{ij} \sin \Phi_i \cos \Lambda_i - Y_{ij} \sin \Phi_i \sin \Lambda_i + Z_{ij} \cos \Phi_i}. \end{aligned} \quad (5-74)$$

После дифференцирования это соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \delta A_{ij} &= \frac{\sin \varphi_i \cos \lambda_i \sin \alpha_{ij} - \sin \lambda_i \cos \alpha_{ij}}{s_{ij} \sin z_{ij}} (\delta X_j - \delta X_i) \\ &+ \frac{\sin \varphi_i \sin \lambda_i \sin \alpha_{ij} + \cos \lambda_i \cos \alpha_{ij}}{s_{ij} \sin z_{ij}} (\delta Y_j - \delta Y_i) \\ &- \frac{\cos \varphi_i \sin \alpha_{ij}}{s_{ij} \sin z_{ij}} (\delta Z_j - \delta Z_i) \\ &+ \cot z_{ij} \sin \alpha_{ij} \delta \Phi_i \\ &+ (\sin \varphi_i - \cos \alpha_{ij} \cos \varphi_i \cot z_{ij}) \delta \Lambda_i. \end{aligned} \quad (5-75)$$

В коэффициентах, записанных в терминах φ , λ , α , z вместо Φ , Λ , A , z' , достаточно пользоваться приближенными значениями.

Направления

Измеренные направления R_{ij} связаны с азимутами A_{ij} через неизвестную ориентацию o_i . Соотношение имеет вид

$$R_{ij} = A_{ij} - o_i, \quad (5-76)$$

откуда сразу имеем

$$\delta R_{ij} = \delta A_{ij} - \delta o_i. \quad (5-77)$$

Зенитные углы

Зенитное расстояние z'_{ij} как функция локальных горизонтальных координат определяется формулой (5-69). Если координаты n_{ij} , e_{ij} , u_{ij} вектора \mathbf{x}_{ij} заменить соотношениями (5-65), то, с учетом (5-70) и (5-72), получим

$$\begin{aligned} \cos z'_{ij} &= u_{ij}/s_{ij} = \\ &= \frac{X_{ij} \cos \Phi_i \cos \Lambda_i + Y_{ij} \cos \Phi_i \sin \Lambda_i + Z_{ij} \sin \Phi_i}{\sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2}}. \end{aligned} \quad (5-78)$$

После дифференцирования это соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \delta z'_{ij} &= \frac{X_{ij} \cos z_{ij} - s_{ij} \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{s_{ij}^2 \sin z_{ij}} (\delta X_j - \delta X_i) \\ &+ \frac{Y_{ij} \cos z_{ij} - s_{ij} \cos \varphi_i \sin \lambda_i}{s_{ij}^2 \sin z_{ij}} (\delta Y_j - \delta Y_i) \\ &+ \frac{Z_{ij} \cos z_{ij} - s_{ij} \sin \varphi_i}{s_{ij}^2 \sin z_{ij}} (\delta Z_j - \delta Z_i) \\ &- \cos \alpha_{ij} \delta \Phi_i - \cos \varphi_i \sin \alpha_{ij} \delta \Lambda_i. \end{aligned} \quad (5-79)$$

Предполагается, что зенитные расстояния редуцированы к хорде светового луча. Эта редукция моделируется соотношением

$$z'_{ij} = z'_{ij_{\text{изм}}} + \frac{s_{ij}}{2R} k, \quad (5-80)$$

где $z'_{ij_{\text{изм}}}$ – измеренное зенитное расстояние, R – средний радиус Земли, а k – коэффициент рефракции. Вместо k можно подставить стандартное значение либо оценивать этот коэффициент как дополнительное неизвестное. Во втором случае возможны несколько вариантов. Например, можно принять одно значение k для всех зенитных расстояний или для какой-нибудь группы таких измерений, или одно значение в течение одного дня. (Известно, что измеренные зенитные расстояния обычно имеют невысокую точность по сравнению с другими наблюдениями, что можно учесть, придавая им более низкие веса.)

Эллипсоидальные превышения

"Измеренное" эллипсоидальное превышение определяется как

$$h_{ij} = h_j - h_i. \quad (5-81)$$

Участвующие в этой формуле высоты получаются путем преобразования прямоугольных координат в эллипсоидальные согласно (5-36) или методом итерации, описанным в разд. 5.6.1. Превышение приближенно (если пренебречь

кривизной Земли) равно третьей координате вектора \mathbf{x}_{ij} в локальной горизонтальной системе координат. Следовательно,

$$h_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{X}_{ij}, \quad (5-82)$$

откуда, с учетом (5-64), получаем

$$h_{ij} = \cos \Phi_i \cos \Lambda_i X_{ij} + \cos \Phi_i \sin \Lambda_i Y_{ij} + \sin \Phi_i Z_{ij}. \quad (5-83)$$

Это соотношение можно продифференцировать относительно прямоугольных координат. Если дифференциалы заменить соответствующими разностями, то после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta h_{ij} = & \cos \Phi_j \cos \Lambda_j \delta X_j + \cos \Phi_j \sin \Lambda_j \delta Y_j + \sin \Phi_j \delta Z_j \\ & - \cos \Phi_i \cos \Lambda_i \delta X_i - \cos \Phi_i \sin \Lambda_i \delta Y_i - \sin \Phi_i \delta Z_i. \end{aligned} \quad (5-84)$$

Базисные линии

Базисные линии $\mathbf{X}_{ij(\text{GPS})} = \mathbf{X}_{j(\text{GPS})} - \mathbf{X}_{i(\text{GPS})}$ относительных измерений GPS получают в системе WGS 84. Радиус-векторы $\mathbf{X}_{i(\text{GPS})}$ и $\mathbf{X}_{j(\text{GPS})}$ можно перевести с помощью трехмерного преобразования подобия (с 7 параметрами) в локальную систему координат, помеченную индексом LS. Согласно (5-41), это преобразование имеет вид

$$\mathbf{X}_{\text{LS}} = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{R} \mathbf{X}_{\text{GPS}}, \quad (5-85)$$

где:

\mathbf{X}_{LS}	радиус-вектор положения в локальной системе координат,
\mathbf{X}_{GPS}	радиус-вектор положения в системе WGS 84,
\mathbf{x}_0	вектор сдвига,
\mathbf{R}	матрица поворота,
μ	масштабный коэффициент.

При формировании разности двух радиус-векторов, то есть базиса \mathbf{X}_{ij} , вектор сдвига \mathbf{x}_0 исключается. Поэтому, согласно (5-85), для базиса имеем

$$\mathbf{X}_{ij(\text{LS})} = \mu \mathbf{R} \mathbf{X}_{ij(\text{GPS})}. \quad (5-86)$$

Подобно (5-49), линеаризация этого соотношения имеет вид

$$\mathbf{X}_{ij(\text{LS})} = \mathbf{X}_{ij(\text{GPS})} + \mathbf{A}_{ij} \delta \mathbf{p}, \quad (5-87)$$

где теперь вектор $\delta \mathbf{p}$ и матрица коэффициентов \mathbf{A}_{ij} – следующие:

$$\delta \mathbf{p} = [\delta \mu \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T,$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ij} & 0 & -Z_{ij} & Y_{ij} \\ Y_{ij} & Z_{ij} & 0 & -X_{ij} \\ Z_{ij} & -Y_{ij} & X_{ij} & 0 \end{bmatrix}_{(\text{GPS})} \quad (5-88)$$

Заметим, что повороты ε_i относятся к осям системы, используемой в GPS. Если их отнести к локальной системе координат, то нужно изменить знаки этих углов, и потому знаки элементов последних трех столбцов матрицы \mathbf{A}_{ij} должны быть изменены на обратные.

Вектор $\mathbf{X}_{ij(\text{LS})}$ в левой части (5-87) содержит координаты точек $\mathbf{X}_{i(\text{LS})}$ и $\mathbf{X}_{j(\text{LS})}$ в локальной системе. Если они неизвестны, то их заменяют известными приближенными значениями с неизвестными приращениями

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i(\text{LS})} &= \mathbf{X}_{i0(\text{LS})} + \delta \mathbf{X}_{i(\text{LS})}, \\ \mathbf{X}_{j(\text{LS})} &= \mathbf{X}_{j0(\text{LS})} + \delta \mathbf{X}_{j(\text{LS})}. \end{aligned} \quad (5-89)$$

Матрицу коэффициентов в таком случае образуют коэффициенты этих приращений (+1 или -1) вместе с матрицей \mathbf{A}_{ij} .

Вектор $\mathbf{X}_{ij(\text{GPS})}$ в (5-87) трактуется как измеренная величина. В результате получаем линеаризованное уравнение наблюдений

$$\mathbf{X}_{ij(\text{GPS})} = \delta \mathbf{X}_{j(\text{LS})} - \delta \mathbf{X}_{i(\text{LS})} - \mathbf{A}_{ij} \delta \mathbf{p} + \mathbf{X}_{j0(\text{LS})} - \mathbf{X}_{i0(\text{LS})}. \quad (5-90)$$

В принципе, геодезические измерения любого типа можно включать в описанную интегральную модель совместной обработки. Основная идея состоит в том, что любое геодезическое измерение представляется как функция одного или более радиус-векторов \mathbf{X} и поля силы тяжести W Земли. Эта функция обычно нелинейная и её следует линеаризовать; при этом поле силы тяжести W разбивается на нормальный потенциал U эллипсоида и возмущающий потенциал T , то есть, $W = U + T$. Применение принципа минимума приводит к формулам коллокации (Moritz 1980 а: гл. 11).

В технических публикациях можно найти много примеров комбинирования данных GPS с результатами измерений, полученных другими методами. В частности, предпринимались попытки при помощи GPS и наземных данных обнаружить земные деформации.

Часть III: Локальные геодезические системы

5.11 Формулировка задачи

Как мы уже не раз отмечали, слабая сторона метода Брунса-Хогина заключается в недостаточной точности измерения зенитного расстояния, что препятствует практическому применению этого метода для обширных триангуляций. Тригонометрические высоты, полученные таким образом, значительно менее точны, чем горизонтальные положения.

Практическое решение этой проблемы состояло в отделении планового местоопределения от высот. Горизонтальное положение вычислялось на референц эллипсоиде способом, который мы рассмотрим позже. Точные высоты были получены нивелированием, отнесенным к "реальным" уровненным поверхностям, в основном, к геоиду.

Таким образом, эта теоретически и практически неудовлетворительная процедура использовала две различные референц-поверхности: эллипсоид для горизонтального местоположения и геоид для высот. Не было даже известно взаимное положение этих двух поверхностей из-за недостатка сведений о значениях высот геоида N . Эта процедура была справедливо названа "2+1-мерной геодезией".

Тем не менее, решение этой проблемы существует даже для локальных (или, скорее, региональных) геодезических систем. Надо только тригонометрические высоты h определять не зенитными расстояниями, а с помощью простой формулы

$$h = H + N, \quad (5-91)$$

то есть путем прибавления высот геоида N к нивелирным ортометрическим высотам H !

Но как мы получим геоид? Даже до спутниковой эры существовало два метода определения геоида:

1. *астрономогеодезический метод*, определяющий N по уклонениям отвесной линии ξ и η ;
2. *гравиметрический метод*, использующий с этой целью аномалии силы тяжести Δg .

Теоретически оба метода были известны уже в 1850 году, но препятствовал их применению недостаток данных, особенно гравиметрических. Серьезные практические приложения начались незадолго до 1950 года, сто лет спустя, как раз перед появлением спутников. Мы подробно обсудим эти вопросы, но позднее.

Примемлемая точность измерений стала достижима, но появилась другая трудность. Оба метода требуют вычисления интегралов от дашных (ξ и η , или

Δg) как непрерывных функций. Однако данные всегда измеряются только в дискретных точках. Возникает необходимость в интерполяции, что приводит к дополнительным погрешностям. Если данные распределены равномерно и плотно, то можно добиться того, чтобы результирующие погрешности были небольшими. Однако, эта фундаментальная проблема остается.

Подводя итоги, можно сказать: (1) метод зенитных расстояний теоретически строг, но недостаточно точен; (2) астрономогеодезический метод, использующий интегрирование уклонений отвеса, не строг теоретически, но может быть достаточно точным.

Метод 1 был рассмотрен в части II этой главы; метод 2 детально обсуждается ниже в этой части III.

5.12 Редукция астрономических измерений на эллипсоид

Установим связь между естественными Φ, Λ, H и эллипсоидальными φ, λ, h координатами, отнесенными к эллипсоиду в соответствии с проекцией Гельмерга.

Эллипсоидальная h и ортометрическая H высоты были рассмотрены, например, в разд. 4.6 (см. также рис. 5.4 и формулу (5-91)). Они связаны соотношением $h = H + N$.

Таким образом, остается *редуцировать к эллипсоиду астрономические координаты* Φ и Λ , а также астрономический азимут A , если он включается в астрономические наблюдения. Эта редукция позволит нам получить эллипсоидальные координаты φ и λ и эллипсоидальный азимут α .

Введем вспомогательные величины

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \Phi - \varphi, \\ \Delta\lambda &= \Lambda - \lambda, \\ \Delta\alpha &= A - \alpha.\end{aligned}\tag{5-92}$$

Редукция Φ и Λ к соответствующим эллипсоидальным координатам φ и λ неявно содержится в формуле (2-230):

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi = \Delta\varphi, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi = \Delta\lambda \cos \varphi,\end{aligned}\tag{5-93}$$

куда мы подставили соответствующие вспомогательные величины. Таким образом, формулы преобразования естественных координат Φ, Λ, H в эллипсоид-

дальние φ, λ, h имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi &= \Phi - \xi, \\ \lambda &= \Lambda - \eta / \cos \varphi, \\ h &= H + N.\end{aligned}\tag{5-94}$$

Теперь обратимся к редукции азимута. Вопрос состоит в том, как $\Delta\alpha$ зависит от $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$. Ответ содержится в соотношении (5-75), где мы рассмотрим только последние два члена правой части (то есть мы не принимаем во внимание изменения координат точки). Опуская все нижние индексы и используя вспомогательные величины (5-92), получим

$$\Delta\alpha = \operatorname{ctg} z \sin \alpha \Delta\varphi + (\sin \varphi - \cos \alpha \cos \varphi \operatorname{ctg} z) \Delta\lambda\tag{5-95}$$

или, если положить $\Delta\varphi = \xi$ и $\Delta\lambda \cos \varphi = \eta$, то

$$\Delta\alpha = \xi \sin \alpha \operatorname{ctg} z + \sin \varphi \Delta\lambda - \eta \cos \alpha \operatorname{ctg} z.\tag{5-96}$$

Это соотношение можно переписать так

$$\Delta\alpha = \sin \varphi \Delta\lambda + (\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \operatorname{ctg} z.\tag{5-97}$$

Если учесть, что $\Delta\lambda = \eta / \cos \varphi$, то

$$\Delta\alpha = \eta \operatorname{tg} \varphi + (\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \operatorname{ctg} z.\tag{5-98}$$

В высокоточной триангуляции линии визирования обычно почти горизонтальны, так что $z \approx 90^\circ$, $\operatorname{ctg} z \approx 0$. Поэтому, соответствующим членом можно, в общем случае, пренебречь, что даёт

$$\Delta\alpha = \eta \operatorname{tg} \varphi = \Delta\lambda \sin \varphi.\tag{5-99}$$

Это – *уравнение Лапласа* в его обычной упрощенной форме. Замечательно, что разности $\Delta\alpha = A - \alpha$ и $\Delta\lambda = \Lambda - \lambda$ связаны таким простым способом. Уравнение Лапласа является фундаментальным соотношением для классической астрономогеодезической триангуляции (разд. 5.14).

Для дальнейшего заметим, что полное отклонение отвеса – то есть угол ϑ между реальной отвесной линией и эллипсоидальной нормалью – имеет вид

$$\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},\tag{5-100}$$

а компонентом отклонения ε в направлении азимута α является

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha.\tag{5-101}$$

Ясно, что ϑ из (5-100) не имеет никакого отношения к двум различным ϑ (полярные расстояния), используемым в сферических и эллипсоидально-гармонических координатах.

Что касается редукции астрономических величин к соответствующим эллипсоидальным, то соотношения (5-94) редуцируют Φ , Λ , H к φ , λ , h , а формула

$$\alpha = A - \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (5-102)$$

редуцирует астрономический азимут A к эллипсоидальному азимуту α .

Для приложения этих формул нам требуются значения высоты геоида N и компонентов ξ и η уклонения относительно используемого референц-эллипсоида. В связи с этим отметим два момента.

1. Вертикальная ось референц-эллипсоида параллельна земной оси вращения, но его центр может не совпадать с центром тяжести Земли. Напомним, что причиной этого является тот факт, что земная ось доступна для (астрономического) наблюдения, тогда как геоцентр определяется физически и недоступен для прямого геометрического наблюдения.
2. Геоцентр можно найти двумя физически определенными способами: (1) гравиметрически – с помощью формулы Стокса и (2) физически – с помощью первого закона Кеплера. Его применение к движению спутников позволяет выяснить, насколько центры орбит GPS близки к геоцентру.

Отметим, что, если не оговорено иное, то мы всегда предполагаем, что наблюдения произведены на уровне моря. Это достаточно естественно для жителя обширного равнинного региона, но вызывает головную боль у геодезиста, работающего в Альпах или в Скалистых Горах. Мы уже столкнулись с такой ситуацией при редуцировании силы тяжести, и встретимся еще не раз, особенно при рассмотрении проблемы Молоденского.

Следует также упомянуть, что эллипсоидальный азимут α в формуле (5-102) относится к реальной точке, которая, в общем случае, не лежит на эллипсоиде. При использовании обычного метода вычисления на эллипсоиде желательно, чтобы азимут относился к точке на эллипсоиде, которая является основанием нормали, проходящей через реальную точку. Кроме того, α скорее относится к так называемому нормальному сечению эллипсоида, чем к используемой в вычислениях геодезической линии. В любом случае необходимы очень малые редукции азимута. Но поскольку редуцирование является исключительно задачей эллипсоидальной геометрии, то мы отсылаем читателя к любому соответствующему учебнику.

Эффект движения полюса

Направление оси вращения Земли не является строго фиксированным ни в пространстве, ни относительно Земли. Оно подвергается очень малым, более

или менее периодическим, изменениям. Астрономам это явление известно под названием *мутация* (относительно инерциального пространства), геодезисты называют его *движением полюса* (относительно тела Земли). Этот феномен возникает вследствие очень малой разности между осью вращения и осью максимальной инерции (угол между ними приближённо равен $0.3''$) и несколько подобен прецессии волчка. Движение полюса имеет главный период около 430 дней – период Чандлера. Но он довольно нерегулярен, по-видимому из-за перемещения масс, атмосферных изменений, и т.д. (рис. 5.13).

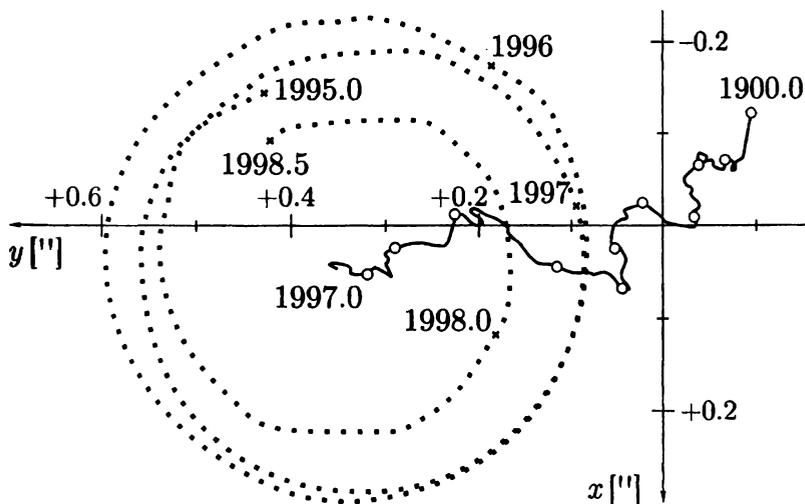


Рис. 5.13: Движение полюса: перемещения среднего полюса за 1900 - 1997 гг. (сплошная линия), детализированное движение полюса за 1995 - 1998 гг. (пунктир)

Международная служба вращения Земли (International Earth Rotation Service, IERS), первоначально Международная служба широт (International Latitude Service), затем Служба движения полюса (Polar Motion Service), поддерживаемая Международным Астрономическим союзом и Международным Союзом Геодезии и Геофизики, непрерывно наблюдает за изменением множества параметров в большом количестве мест, распределенных по всей Земле. Таким образом, она следит за перемещениями земной оси (движением полюса) и изменениями ее угловой скорости вращения.

Результаты публикуются как прямоугольные координаты мгновенного полюса P_{μ} относительно среднего полюса P_N^0 . Астрономически наблюдаемые

значения величин Φ , Λ и A , естественно, относятся к мгновенному полюсу P_N и, поэтому, их нужно редуцировать к среднему полюсу, используя опубликованные значения величин x и y . Для этого используют следующие формулы:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\text{набл}} - x \cos \lambda + y \sin \lambda, \\ \Lambda &= \Lambda_{\text{набл}} - (x \sin \lambda + y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi + y \operatorname{tg} \varphi_{\text{Гр}}, \\ A &= A_{\text{набл}} - (x \sin \lambda + y \cos \lambda) \operatorname{sec} \varphi.\end{aligned}\quad (5-103)$$

Полученные таким образом Φ , Λ , A относятся к среднему полюсу; в геодезии используются именно эти величины, так как они не изменяются со временем. Всюду в данной книге долгота предполагается положительной при отсчете на восток, как и обычно в геодезии; однако следует упомянуть, что в литературе прошлых лет эти формулы часто записаны для западной долготы, согласно прежней практике астрономов. Так как поправочные члены, содержащие x и y , чрезвычайно малы (порядка $0.1''$), то мы можем использовать в них как эллипсоидальные φ и λ , так и астрономические Φ и Λ величины. Член, содержащий $\varphi_{\text{Гр}}$ (широта Гринвича) в формуле для Λ обычно опускается, так что за обычный *нулевой меридиан* принимают скорее средний меридиан Гринвича, чем астрономическую долготу Гринвича непосредственно.

Формулы (5-103) – те же, что и формулы (7-13), (7-14) и (7-15) в работе Moritz and Mueller (1987: сс. 419 – 420). Интересно отметить близкое подобие между редукцией азимута (5-98) в связи с "вариацией зенита" – то есть уклонением отвеса – и редукцией долготы (5-103) в связи с вариацией полюса. Фактически, геометрия в обоих случаях одинакова. Величины ξ , η , $90^\circ - z$, φ соответствуют величинам x , y , φ , $\varphi_{\text{Гр}}$; разница в знаке $\sin \alpha$ и $\sin \lambda$ объясняется тем, что азимут отсчитывается по часовой стрелке, если смотреть из зенита, а восточная долгота отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть из полюса.

5.13 Редукция горизонтальных и вертикальных углов и расстояний

Горизонтальные углы

Относительно редукции измеренных горизонтальных углов ω к эллипсоиду, заметим, что каждый угол можно рассматривать как разность между двумя азимутами:

$$\omega = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (5-104)$$

Следовательно, мы можем применить формулу (5-98). В разности $\alpha_2 - \alpha_1$ сокращается главный член $\eta \operatorname{tg} \varphi$, так что для почти горизонтальных линий визирования можно пренебречь всей редукцией в целом.

Вертикальные углы

Соотношение между измеренным зенитным расстоянием z' и соответствующим эллипсоидальным зенитным расстоянием z можно записать как

$$z = z' + \varepsilon = z' + \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad (5-105)$$

где α – азимут наблюдаемой точки.

Пространственные расстояния

Электронное измерение расстояния дает пространственное расстояние l между двумя точками A и B (рис. 5.14). Эти расстояния либо непосредственно

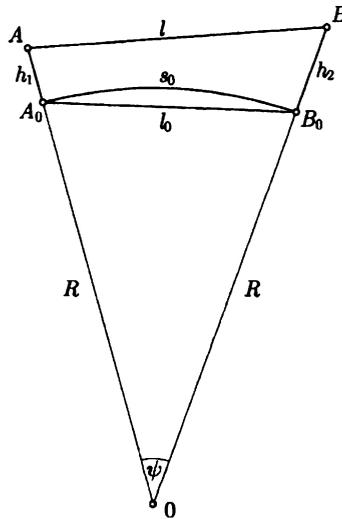


Рис. 5.14: Редукция пространственных расстояний

используют для вычислений в эллипсоидальной системе координат φ, λ, h , как в "трехмерной геодезии" (см. разд. 5.9), либо редуцируют на поверхность эллипсоида, чтобы получить хордовые l_0 или геодезические s_0 расстояния.

Вновь аппроксимируем эллипсоидальную дугу A_0B_0 дугой окружности радиуса R , который является средним эллипсоидальным радиусом кривизны вдоль A_0B_0 . Применяя теорему косинусов к треугольнику OAB , найдем

$$l^2 = (R + h_1)^2 + (R + h_2)^2 - 2(R + h_1)(R + h_2) \cos \psi. \quad (5-106)$$

Так как

$$\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad (5-107)$$

то

$$l^2 = (h_2 - h_1)^2 + 4R^2 \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right) \sin^2 \frac{\psi}{2}; \quad (5-108)$$

с учетом соотношения

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2} \quad (5-109)$$

и обозначения $\Delta h = h_2 - h_1$ получим

$$l^2 = \Delta h^2 + \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right) l_0^2. \quad (5-110)$$

Следовательно, хорда l_0 и дуга s_0 выражаются формулами

$$l_0 = \sqrt{\frac{l^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}}; \quad (5-111)$$

$$s_0 = R \psi = 2R \arcsin \frac{l_0}{2R}. \quad (5-112)$$

Некоторые усовершенствования этих формул можно найти в работе Rinnet (1956).

Заметим, что пространственные расстояния, по существу, не зависят от вертикали. Поэтому формула приведения (5-111) не содержит уклонения отвесной линии ε .

5.14 Астрономогеодезическое определение геоида

Формула Гельмерта

Если даны значения уклонения отвесной линии, то можно определить форму геоида. Основным соотношением при этом является *формула Гельмерта*

$$dN = -\varepsilon ds \quad (5-113)$$

в том виде, как она дана в (2-372), см. рис. 5.15. Интегрируя левую и правую части этого соотношения, получим

$$N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon ds, \quad (5-114)$$

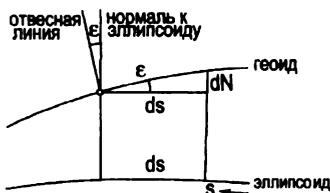


Рис. 5.15: Связь между высотой геоида и уклонением отвесной линии

где

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (5-115)$$

является компонентом уклонения отвеса вдоль профиля AB , азимут которого равен α (см. формулу (5-101)).

Формула (5-114) представляет высоту геоида как интеграл от уклонений отвеса по профилю. Так как N есть функция положения, то этот интеграл не зависит от формы пути, соединяющего точки A и B . Эта линия не обязательно должна быть геодезической линией на эллипсоиде, и α может, в общем случае, быть переменной величиной. На практике часто используются северно-южные ($\varepsilon = \xi$) или восточно-западные профили ($\varepsilon = \eta$). Интеграл (5-114) вычисляется численно или с помощью графического метода. При этом нужно иметь такое количество станций вдоль профиля со значениями компонента ε уклонения, которое обеспечивает достаточно надежную интерполяцию между этими станциями. Иногда для некоторых областей имеется в распоряжении карта значений ξ и η . Такая карта создается с помощью интерполяции между хорошо распределенными станциями, в которых ξ и η уже известны (Grafarend and Offermanns 1975). Тогда профили интегрирования можно выбирать произвольно и формировать их так, чтобы получать избыточные измерения, позволяющие затем выполнять уравнивание.

Если компоненты уклонения ξ и η получены непосредственно из уравнений

$$\xi = \Phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi, \quad (5-116)$$

то есть, путем сравнения астрономических и эллипсоидальных (или геодезических) координат одной и той же точки, то такой метод называют *астрономогеодезическим определением геоида*.

Астрономические координаты измеряются непосредственно; получение эллипсоидальных координат описывается ниже.

Определение локальной астрономогеодезической системы отсчета

Эта тема представляет лишь исторический интерес, вместе с тем она важна для понимания существующей классической системы триангуляции. В согласии с частью I, но в отличие от части II, "локальный" здесь снова означает "региональный", то есть относящийся к стране (например, Франция) или даже континенту (например, Европейская система отсчета или Североамериканская система отсчета). В более обширной системе триангуляции выбирается некоторая "начальная точка" P_1 , для которой заданы высота N_1 и компоненты ξ_1 и η_1 уклонения отвеса. Здесь значения ξ_1 , η_1 и N_1 могут быть заданы произвольно; таким образом, задаётся положение референс эллипсоида относительно Земли. Для определенности рассмотрим случай, который имел наибольшее практическое значение, то есть случай, когда $\xi_1 = \eta_1 = N_1 = 0$. Тогда, так как $\xi_1 = \eta_1 = 0$, то нормали к поверхности геоида и эллипсоида совпадают; вследствие этого и того, что $N_1 = 0$, эллипсоид касается геоида под точкой P_1 (рис. 5.16). Наконец, то условие, что ось референс-эллипсоида должна

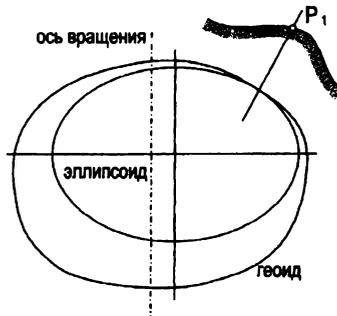


Рис. 5.16: Референс-эллипсоид касается геоида в точке P_1

быть параллельна оси вращения Земли, определяет ориентацию триангуляционной сети. Действительно, из уравнения Лапласа (5 99) тогда следует, что $\Delta\alpha_1 = \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 0$, а это значит, что $\alpha_1 = A_1$; то есть, в начальной точке эллипсоидальный азимут равен астрономическому азимуту.

Теперь мы можем редуцировать измеренные расстояния и углы на эллипсоид и вычислять положение на нем точек триангуляционной сети (их эллипсоидальные координаты φ и λ) обычным способом. После измерения астрономических координат Φ и Λ в тех же точках, мы сможем вычислить компоненты уклонения ξ и η по формуле (5-116). Исходя из заданного значения N_1 в начальной точке P_1 (в нашем случае, $N_1 = 0$), мы можем наконец вычислить высоту геоида N для любой точки триангуляционной сети путем повторного применения формулы (5 114). Эти высоты геоида относятся к эллипсоиду,

который был задан величинами ξ_1, η_1, N_1 и, конечно, большой полуосью a и сжатием f . В таком случае часто говорят, что они относятся к данной астрономогеодезической системе отсчета $(a, f; \xi_1, \eta_1, N_1)$.

Зная N и ортометрическую высоту H , можно найти высоту эллипсоида h с помощью соотношения $h = H + N$; тогда прямоугольные пространственные координаты X, Y, Z могут быть вычислены по формуле (5-27). Но до тех пор, пока ξ и η не будут представлять собой абсолютные (геоцентрические) отклонения, начало системы координат не будет совпадать с центром масс Земли (см. разд. 5.7).

Недостаток описанной процедуры заключается, очевидно, в том, что для редукции измеренных углов и расстояний к эллипсоиду необходимо знать N, ξ, η . Однако для этой цели достаточно знать эти значения N, ξ, η приближенно. Их можно получить с помощью вышеописанной процедуры, используя при этом нередуцированные углы и расстояния. Величины N, ξ, η можно получить и другими способами, например, с помощью формулы Стокса.

Правильное и неправильное использование уравнения Лапласа

Следует отметить, что на практике значение компонента η часто получали, используя измерения азимута и соотношение (5-102) в преобразованной форме, то есть,

$$\eta = (A - \alpha) \operatorname{ctg} \varphi, \quad (5-117)$$

потому что измерение астрономического азимута проще, чем измерение астрономической долготы. Но это является примером неправильного действия, которое может привести к систематическому искажению сети. Долгота и азимут часто измеряются в одной и той же точке. Тогда условие Лапласа

$$\Delta \alpha = \Delta \lambda \sin \varphi \quad (5-118)$$

позволяет проверить, правильно ли ориентирована сеть и параллельна ли ось эллипсоида оси вращения Земли. Таким образом, это условие может использоваться для целей уравнивания сети. При этом астрономические станции с наблюдением долготы и азимута называют *пунктами Лапласа*. Для этих целей точность полевых астрономических измерений достаточна, в отличие от использования этих измерений для непосредственного определения горизонтального положения с помощью соотношения $\varphi = \Phi - \xi$, и т.д. в разд. 2.21.

Астрономогеодезическое определение геоида было известно еще Гельмергу (Helmert (1880)) и даже до него; его также называют *астрономическим нивелированием*.

Сравнение с методом Стокса

Весьма поучительно сравнить формулу Гельмерта

$$N = N_A - \int_A^B \varepsilon ds \quad (5-119)$$

для астрономогеодезического метода с формулой Стокса

$$N = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (5-120)$$

для гравиметрического метода. Оба метода используют вектор силы тяжести. Его сравнивают с нормальным вектором силы тяжести γ . Компоненты $\xi = \Delta\varphi$ и $\eta = \Delta\lambda \cos\varphi$ уклонения отвеса представляют разность в *направлении*, а аномалия силы тяжести Δg – разность в *длинах* этих двух векторов. Формула Гельмерта определяет высоту геоида N , исходя из значений ξ и η , то есть, используя направление вектора, в то время как формула Стокса определяет N , исходя из значений Δg , то есть, используя длину вектора. Обе формулы до некоторой степени схожи: это – интегралы, содержащие ε , или ξ и η , и Δg в линейной форме.

С другой стороны, эти две формулы проявляют отмеченные различия, характеризующие соответствующий метод. В формуле Гельмерта интегрирование производится вдоль части профиля; таким образом, достаточно знать уклонение отвеса в ограниченной области. Однако, положение референц-эллипсоида относительно центра масс Земли неизвестно, и может быть определено только посредством гравиметрического метода или, более практично, посредством анализа орбит искусственных спутников (разд. 7.2). Кроме того, астрономогеодезический метод может использоваться только на суше, поскольку невозможно произвести необходимые измерения на море.

В формуле Стокса интегрирование должно производиться по всей поверхности Земли, и аномалия силы тяжести Δg должна быть известна на всей поверхности Земли; но при этом точные гравиметрические измерения возможны и на море. Гравиметрический метод дает абсолютные высоты геоида для всей Земли: центр референц-эллипсоида совпадает с центром масс Земли. В настоящее время это – лишь теоретическая возможность, потому что требуемое покрытие всей Земли пока недоступно. В настоящее время активно используется GPS. Однако гравиметрический метод все еще является основным: он позволяет выявить не только геоцентр, но и детали геоида, в сочетании с астрономогеодезическим методом!

Астрономогеодезический метод часто применялся для определения сечений геоида. Мы упомянем пионерскую работу Galle (1914) с романтическим названием "Das Geoid im Harz". После 1970 года интегральную формулу Гельмерта

в ее первоначальной форме используют редко, а отклонения отвесной линии чаще комбинируют с другими данными (сила тяжести, GPS, различные спутниковые данные) для унифицированного определения геоида и поля силы тяжести (см. главы 10 и 11).

Уравнивание сетей астрономогеодезических высот геоида

При достаточно плотной сети астрономогеодезических станций (предпочтительно с пунктами Лапласа) со средним расстоянием 10–20 км между станциями, интеграл Гельмерта (5-119) может быть аппроксимирован соотношением

$$\Delta N_{AB} \equiv N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon ds = - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} \int_A^B ds \quad (5-121)$$

или

$$\Delta N_{AB} = - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} s_{AB}. \quad (5-122)$$

Таким образом может быть вычислена разность высот для линии AB , и, тем же способом, для двух других линий BC и CA треугольника ABC (рис. 5.17). Для них должно выполняться условие замкнутости

$$\Delta N_{AB} + \Delta N_{BC} + \Delta N_{CA} = 0, \quad (5-123)$$

которое используется при уравнивании сети методом наименьших квадратов.

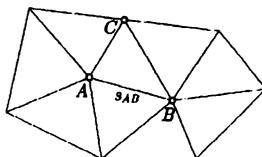


Рис. 5.17: Треугольная сеть для астрономогеодезического геоида

Аналогично обрабатываются и другие треугольники, как в любой другой высотной сети (например, в нивелирной сети).

Любопытно, что, как можно показать, такие условия замкнутости математически эквивалентны известному соотношению

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial x}. \quad (5-124)$$

См. также разд. 4.5.

5.15 Редукция за кривизну отвесной линии

Мотивация

Астрономические координаты Φ и Λ , наблюдаемые на поверхности Земли, не строго равны соответствующим величинам на геоиде, так как отвесная, то есть силовая линия, не является прямой, или, другими словами, уровенные поверхности не параллельны. Поэтому, если мы желаем, чтобы наши астрономические координаты относились к геоиду, то мы должны соответствующим образом редуцировать наблюдения.

Приведем примеры таких ситуаций:

1. Гравиметрические уклонения обычно вычислялись по формуле Вэнинг-Мейнеса для геоида, так что либо гравиметрические уклонения нужно редуцировать вверх, к соответствующей точке на поверхности Земли, либо астрономические наблюдения нужно редуцировать вниз, к геоиду, чтобы сделать эти две величины сопоставимыми.
2. Если астрономические наблюдения используются для определения геоида, то, в принципе, должна быть применена та же самая редукция.

Важное замечание

Принцип редукции отвесной линии имеет фундаментальное теоретическое значение для понимания геометрии земного поля силы тяжести. На практике ее обычно игнорируют, если рельеф области достаточно плоский, либо замещают более сложными методами в гористых местностях, как мы увидим позже (разд. 8.12 и 8.13). Данный раздел можно опустить при первом чтении, за исключением пункта о *нормальной кривизне отвесной линии* в самом конце.

Принципы

Рассмотрим проекцию отвесной линии на плоскость меридиана. Согласно известному определению кривизны плоской кривой, угол между двумя соседними касательными к этой проекции равен

$$d\varphi = -\kappa_1 dh, \quad (5-125)$$

где знак "минус" принят условно, а кривизна κ_1 определяется формулой (2-50):

$$\kappa_1 = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (5-126)$$

Ось x горизонтальна и направлена на север. Следовательно, полное изменение широты вдоль отвесной линии между точкой P на Земле и ее проекцией P_0

на геоид дается формулой

$$\delta\varphi = \int_{P_0}^P d\varphi = - \int_{P_0}^P \kappa_1 dh, \quad (5.127)$$

или

$$\delta\varphi = - \int_{P_0}^P \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} dh. \quad (5.128)$$

Используя κ_2 из (2-51), аналогично найдем соотношение, описывающее изменение долготы

$$\delta\lambda \cos \varphi = - \int_{P_0}^P \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y} dh; \quad (5.129)$$

здесь ось y горизонтальна и направлена на восток.

Альтернативные формулы

Существует тесная связь между редукцией астрономических координат за кривизну и рассмотренной в разд. 4.3 ортометрической редукцией нивелирования.

Ортометрическая поправка $d(\text{OC})$ была определена как величина, которая должна быть прибавлена к нивелирному приращению dn , чтобы преобразовать его в ортометрическое превышение dH :

$$d(\text{OC}) = dH - dn. \quad (5.130)$$

Из рис. 5.18 видно, что для северно-южного профиля редукция за кривизну и ортометрическая поправка связаны простой формулой

$$\delta\varphi = \frac{\partial(\text{OC})}{\partial x}. \quad (5.131)$$

Аналогично, находим

$$\delta\lambda \cos \varphi = \frac{\partial(\text{OC})}{\partial y}. \quad (5.132)$$

Согласно разд. 4.3, имеем

$$dC = g dn = -dW, \quad H = \frac{C}{g}. \quad (5.133)$$

Поэтому формула (5.130) принимает вид

$$d(\text{OC}) = dH - \frac{1}{g} dC = dH + \frac{1}{g} dW \quad (5.134)$$

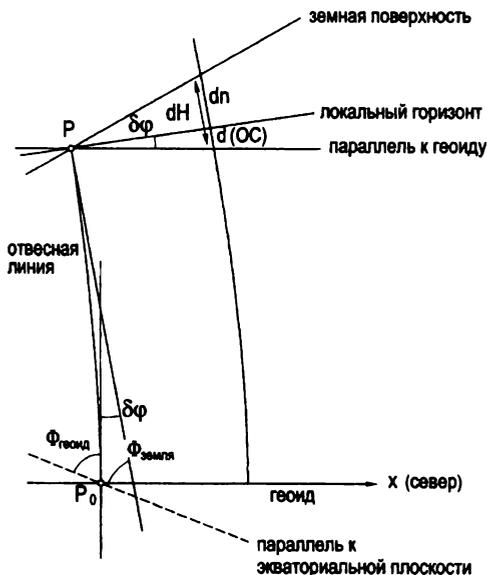


Рис. 5.18: Кривизна отвеса и ортометрическая поправка

и, следовательно,

$$\delta\varphi = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (5.135)$$

$$\delta\lambda \cos \varphi = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Эти уравнения связывают редукцию за кривизну отвесной линии с ортометрической высотой H и потенциалом W . Замечательно, что, несмотря на нерегулярную форму отвесных линий, существуют такие простые и общие соотношения как (5.131), (5.132) и (5.135).

С помощью этих соотношений можно получить вычислительные формулы для редукций $\delta\varphi$ и $\delta\lambda$ за кривизну. Имеем

$$\begin{aligned} d(OC) &= dH - \frac{dC}{g} = d\left(\frac{C}{\bar{g}}\right) - \frac{dC}{g} \\ &= \frac{dC}{\bar{g}} - \frac{C}{\bar{g}^2} d\bar{g} - \frac{dC}{g} = -\frac{C}{\bar{g}^2} d\bar{g} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} \frac{dC}{g}, \end{aligned} \quad (5.136)$$

или

$$d(OC) = -\frac{H}{\bar{g}} d\bar{g} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} dn. \quad (5.137)$$

Подставляя это соотношение в (5-131) и (5-132), получим

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= -\frac{H}{\bar{g}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} \operatorname{tg} \beta_1, \\ \delta\lambda \cos \varphi &= -\frac{H}{\bar{g}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} \operatorname{tg} \beta_2.\end{aligned}\quad (5-138)$$

Здесь

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (5-139)$$

то есть β_1 и β_2 – углы уклона северно-южного и восточно-западного профилей относительно видимого горизонта; \bar{g} – среднее значение силы тяжести между геоидом и Землей. В этих формулах требуется знать лишь среднее значение \bar{g} вместе с его горизонтальными производными и значение g на Земле, тогда как в (5-128) и (5-129) мы должны знать горизонтальные производные силы тяжести вдоль всей отвесной линии. В формуле (5-138), в отличие от соотношений (5-128) и (5-129), детальная форма отвесной линии непосредственно не участвует.

Среднее значение \bar{g} находится путем применения редукции Прися к измеренной силе тяжести g . Чтобы численное дифференцирование $\partial g/\partial x$ и $\partial g/\partial y$ дало приемлемые результаты, необходимо создавать вокруг станции достаточно плотную гравиметрическую сеть и тщательно выполнять редукцию Прися. Углы уклона β_1 и β_2 берутся с топографической карты.

Знак этих поправок может быть найден следующим образом. Если g уменьшается в направлении оси x , то формулы (5-128) и (5-138) дают $\delta\varphi > 0$, и из рисунка 5.18 видно, что тогда Φ в P_0 больше, чем в P . Относительно Λ рассуждение аналогично. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{геоид}} &= \Phi_{\text{земля}} + \delta\varphi, \\ \Lambda_{\text{геоид}} &= \Lambda_{\text{земля}} + \delta\lambda.\end{aligned}\quad (5-140)$$

Интегральная форма

В формуле (5-114) компоненты уклонения ξ и η относятся к геоиду. Это означает, что астрономические наблюдения Φ и Λ нужно редуцировать к геоиду.

Можно также – и часто это более удобно – вводить поправку за кривизну отвесной линии не к астрономическим координатам Φ и Λ , а в геоидальное превышение, вычисленное с использованием нередуцированных компонентов уклонения.

Эти значения N , обозначенные как N' , получаются путем применения формулы (5-116) непосредственно к наблюдаемым величинам Φ и Λ , определяющим направление отвеса на станции P (рис. 5.19). Обозначение N закреплено

Кривизна нормальной отвесной линии

Если при вычислении кривизны отвесной линии вместо фактической силы тяжести g использовать нормальную силу тяжести γ , то, с учетом соотношения

$$\gamma = \gamma_a \left(1 + f^* \sin^2 \varphi - \frac{2}{a} h \dots \right), \quad (5-145)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial x} &\approx \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \approx \frac{2\gamma_a}{R} f^* \sin \varphi \cos \varphi \approx \frac{2\gamma}{R} f^* \sin \varphi \cos \varphi, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} &\approx \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = 0. \end{aligned} \quad (5-146)$$

Следовательно, подинтегральное выражение $(1/\gamma)(\partial\gamma/\partial x)$ в (5-128) не зависит от h , и мы легко можем выполнить интегрирование. Получим

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\text{нормал}} &= -\frac{f^*}{R} h \sin 2\varphi = -0.17'' h_{[\text{км}]} \sin 2\varphi, \\ \delta\lambda_{\text{нормал}} &= 0. \end{aligned} \quad (5-147)$$

Кривизна нормальной отвесной линии в направлении "восток-запад" равна нулю вследствие осевой симметрии эллипсоида вращения. *Нормальная редукция* (5-147) *очень важна для практического применения*, см. разд. 8.13.

5.16 Эллипсоиды наилучшей аппроксимации и эллипсоид общеземной

Определим общеземной эллипсоид физически как эллипсоид вращения, обладающий теми же массой M , потенциалом W_0 , разностью между главными моментами инерции $G(C - \bar{A})$, где $\bar{A} = (A + B)/2$, и угловой скоростью ω , что и Земля.

Можно определить общеземной эллипсоид и геометрически как эллипсоид, который наилучшим образом аппроксимирует геоид. Это определение, возможно, более привлекательно для геодезиста; оно может быть сформулировано на основании, например, требования, чтобы сумма квадратов уклонов N геоида от эллипсоида была минимальной:

$$\iint_{\sigma} N^2 d\sigma = \text{минимум} \quad (5-148)$$

(этот интеграл нужно рассматривать как предел соответствующей суммы). Условие наилучшего приближения может также быть выражено в терминах

уклонений отвеса:

$$\iint_{\sigma} (\xi^2 + \eta^2) d\sigma = \text{минимум}, \quad (5-149)$$

минимизируя, таким образом, сумму квадратов полного отклонения отвеса

$$\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (5-150)$$

Можно дать множество других определений наилучшей аппроксимации, подобных данным.

Первое определение, основанное на условии (5-148), является, как отмечал еще Гельмерт, наиболее приемлемым и соответствующим интуитивному представлению об общеземном эллипсоиде; тем не менее, все определения являются условными в той или иной мере и, как мы увидим ниже, теоретически эквивалентны.

Второе определение, основанное на условии (5-149), использует отклонения отвеса и поэтому особенно хорошо подходит для астрономогеодезического метода. Однако, так как этот метод применим только к ограниченным областям, максимум к континентам, то интеграл (5-149) следует заменить суммой, включающей астрономические станции в пределах этих областей:

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) d\sigma = \text{минимум}. \quad (5-151)$$

Таким образом, мы можем получить эллипсоид наилучшей аппроксимации лишь для рассматриваемой области, а не для всей Земли. Как видно из рисунка 5.20, *локальный эллипсоид наилучшей аппроксимации* может сильно



Рис. 5.20: Локальный эллипсоид наилучшей аппроксимации и общеземной эллипсоид

отличаться от эллипсоида общеземного, представляющего собой эллипсоид наилучшей аппроксимации для Земли в целом.

Если требуется, чтобы локальный эллипсоид наилучшей аппроксимации был, по возможности, близким к эллипсоиду общеземному, то перед реализацией условия минимума (5-151) рекомендуется из астрономического уклонения отвеса вычесть эффект топографии и ее изостатической компенсации. В результате этой процедуры неровности геоида сглаживаются. Таким способом Хейфорд вычислил международный эллипсоид как эллипсоид, наилучшим образом приближающий изостатически редуцированные уклонения отвеса в Соединенных Штатах. Повторно эти вычисления проделал Rapp (1963).

Однако, в настоящее время определение локальных эллипсоидов наилучшей аппроксимации безнадежно устарело, и мы не советуем пользоваться формулой (5-151), несмотря на её историческое значение.

Дело в том, что неизвестны аномалии плотности и отсутствует полная изостатическая компенсация. Поэтому лучше сделать ещё один шаг вперед и из астрономического уклонения ξ^a, η^a вычесть уклонения ξ^g, η^g , полученные гравиметрически. Тогда условие минимума принимает вид

$$\sum [(\xi^a - \xi^g)^2 + (\eta^a - \eta^g)^2] = \text{минимум.} \quad (5-152)$$

Таким образом, мы можем сказать, что метод Хейфорда эквивалентен использованию соотношения (5-152), где гравиметрические уклонения ξ^g, η^g аппроксимированы уклонениями, учитывающими только эффект топографии и ее изостатической компенсации. Если бы изостатическая компенсация была полной и мы обладали точными знаниями о плотности над геоидом, то оба метода при правильном применении давали бы одинаковый результат.

Эквивалентность различных определений земного эллипсоида

Весьма примечательно, что определения, основанные на условиях минимума (5-148) и (5-149), и определение по Рудзкому с использованием условия

$$\iint_{\sigma} (\Delta g)^2 d\sigma = \text{минимум} \quad (5-153)$$

приводят к результатам, которые в обычной сферической аппроксимации идентичны как друг другу, так и физическому определению в терминах $M, W_0, C - \bar{A}$ и ω . Это видно из следующего. Запишем разложение возмущающего потенциала в ряд по сферическим функциям в виде

$$T = \frac{G \delta M}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + b_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)]. \quad (5-154)$$

Тогда, согласно разд. 2.17, уравнениям (2-351) и (2-359) или (2-363), имеем

$$N = \frac{G \delta M}{R \gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + b_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (5-155)$$

и

$$\Delta g = -\frac{G \delta M}{R^2} + \frac{2\delta W}{R} + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(n-1) a_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + (n-1) b_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)]; \quad (5-156)$$

напомним, что γ_0 обозначает глобальное среднее значение силы тяжести. Предположим, что выполняется вполне естественное условие равенства масс $\delta M = 0$. Если возвести в квадрат выражения для N и Δg и затем проинтегрировать по всей поверхности Земли, то все интегралы от произведений различных сферических функций \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{S}_{nm} будут равны нулю, согласно свойству ортогональности (1-83), а оставшиеся интегралы задаются соотношением (1-84). В результате получим

$$\iint_{\sigma} N^2 d\sigma = \frac{4\pi}{\gamma_0^2} \delta W^2 + \frac{4\pi}{\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[a_{n0}^2 + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{2(n-m)!} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right], \quad (5-157)$$

$$\iint_{\sigma} (\Delta g)^2 d\sigma = \frac{16\pi}{R^2} \delta W^2 + \frac{4\pi}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2n+1} \left[a_{n0}^2 + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{2(n-m)!} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right]. \quad (5-158)$$

С помощью более сложного вывода, который мы здесь опускаем (его можно найти в работе Molodenskii et al. (1962: с. 87)), получается похожая формула

$$\iint_{\sigma} (\xi^2 + \eta^2) d\sigma = \frac{4\pi}{R^2 \gamma_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[a_{n0}^2 + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{2(n-m)!} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right]. \quad (5-159)$$

Изменение размера и формы референц-эллипсоида и его положения относительно Земли влияет только на коэффициенты δW , a_{10} , a_{11} , b_{11} и a_{20} , оставляя другие коэффициенты практически неизменными. Следовательно, каждый из интегралов (5-157), (5-158) и (5-159) достигает минимума, когда все

эти коэффициенты равны нулю. Таким образом, $\delta W = 0$ означает равенство потенциалов $U_0 = W_0$; $a_{10} = a_{11} = b_{11} = 0$ означает абсолютное положение (то есть совпадение центров тяжести); и $a_{20} = 0$ означает равенство J_2 или $C - (A + B)/2$ нулю.

Таким образом, установлена эквивалентность физического определения в терминах $M, W_0, C - \bar{A}, \omega$ и условия наилучшей аппроксимации в любой из форм (5-148), (5-149) или (5-153). (Можно заметить, что (5-158) не содержит члена первой степени из-за коэффициента $(n - 1)^2$, а (5-159) не содержит члена нулевой степени; это означает, что указанные члены из этих уравнений определить нельзя.)

Эллипсоид наилучшей аппроксимации и общеземная геодезическая система отсчёта

Следует иметь в виду, что общеземной эллипсоид, определенный выше описанным методом, не обязательно доставляет наилучшую референц-поверхность для практических целей геодезии. Такой эллипсоид определяется, по существу, опытным путем посредством эмпирического вычисления величин GM, W_0 и т.д. Его параметры могут изменяться с каждым фактом улучшения качества или количества доступных измерений (силы тяжести, расстояний и т.п.). Что же касается принятого референц-эллипсоида, то с ним связано огромное количество численных данных, и было бы очень непрактично менять его слишком часто, поскольку это потребовало бы преобразования всех данных. Гораздо целесообразнее пользоваться установленным референц-эллипсоидом с фиксированными параметрами, которые обеспечивают достаточно хорошую, но не обязательно наилучшую аппроксимацию. В этом смысле Геодезическая Референц система 1980 все еще (2005 г.) остается вполне приемлемой.

Относительно земного эллипсоида существует некоторого рода конфликт между интересами геодезистов и астрономов. Геодезисту нужна постоянная референц-поверхность, тогда как астроном предпочитает эллипсоид наилучшего приближения к Земле. Компромисс может быть достигнут используем фиксированного геодезического референц-эллипсоида, но время от времени вычисляются "наилучшие" поправки к принятым параметрам для астрономических и других целей. Именно так и поступает Международная Ассоциация Геодезии (IAG) с 1974 года.

Глава 6

Поле силы тяжести вне Земли

6.1 Введение

Поле силы тяжести вне Земли особенно важно знать на высоте полёта спутников; но этот вопрос обсуждается, главным образом, в главе 7. Результаты данной главы также применимы к силам притяжения на спутниковых высотах (см. разд. 7.2). Однако их главное практическое приложение состоит в вычислении реальных значений вектора силы тяжести, возмущений силы тяжести и апомалий силы тяжести на высоте полета самолетов для сравнения их с результатами аэрогравиметрии в процессе калибровки. Аэрогравиметрия представляет большой интерес для геофизической разведки, поскольку она намного оперативнее, чем наземная или морская гравиметрия.

Для вычислительных целей удобно вновь разбить потенциал силы тяжести W и вектор силы тяжести

$$\mathbf{g} = \text{grad } W \quad (6-1)$$

на нормальный потенциал U и нормальный вектор силы тяжести

$$\gamma = \text{grad } U, \quad (6-2)$$

и возмущающий потенциал $T = W - U$ и вектор возмущения силы тяжести

$$\delta\mathbf{g} = \text{grad } T = \mathbf{g} - \gamma. \quad (6-3)$$

В качестве нормального поля силы тяжести берётся, как обычно, поле силы тяжести какого-нибудь подходящего эквипотенциального эллипсоида. Это позволяет использовать замкнутые формулы и вообще упростить математические выкладки (см. разд. 2.12).

Таким образом, прежде вычисляются значения величин U и γ , а величины W и \mathbf{g} получаются затем из формул

$$\begin{aligned} W &= U + T, \\ \mathbf{g} &= \gamma + \delta\mathbf{g}. \end{aligned} \quad (6-4)$$

В некоторых задачах нам понадобится вектор силы притяжения $\text{grad } V$ (чистое притяжение без центробежной силы), а не вектор силы тяжести. Вектор силы притяжения получается вычитанием вектора центробежной силы из вектора силы тяжести:

$$\text{grad } V = \mathbf{g} - \text{grad } \Phi = \mathbf{g} - \begin{bmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6-5)$$

здесь использованы обозначения разд. 2.1. Прямоугольная система координат x, y, z в этой главе будет пониматься в обычном смысле: это – геоцентрическая система, оси x и y которой лежат в экваториальной плоскости с долготами 0° на Гринвиче и 90° на востоке, а ось z является осью вращения Земли.

Знаки компонентов векторов \mathbf{g} , γ , $\delta\mathbf{g}$ и т.д. всегда будут выбираться так, чтобы они были положительны в направлении возрастания координат.

6.2 Вектор нормальной силы тяжести

Поле силы тяжести эквипотенциального эллипсоида лучше всего описывается в эллипсоидально-гармонических координатах u, β, λ , введенных в разд. 1.15 и 2.7. Они связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda, \\ y &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda, \\ z &= u \sin \beta. \end{aligned} \quad (6-6)$$

Если x, y, z известны, то u, β, λ могут быть вычислены с помощью замкнутых формул. Сначала получим

$$x^2 + y^2 = (u^2 + E^2) \cos^2 \beta, \quad z^2 = u^2 \sin^2 \beta. \quad (6-7)$$

Исключая β из этих двух уравнений, мы получим квадратное уравнение относительно u^2 , решение которого имеет вид

$$u^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - E^2) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4E^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - E^2)^2}} \right]. \quad (6-8)$$

Тогда β задается так:

$$\text{tg } \beta = \frac{z \sqrt{u^2 + E^2}}{u \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6-9)$$

а для λ имеем

$$\text{tg } \lambda = \frac{y}{x}. \quad (6-10)$$

Если эллипсоидально-гармонические координаты известны, то нормальный потенциал U имеет вид (2-126)

$$U(u, \beta) = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta. \quad (6-11)$$

Координатами вектора γ вдоль координатных линий, согласно (2-131) и (2-132), являются

$$\begin{aligned} \gamma_u &= \frac{1}{w} \frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{1}{w} \left[\frac{GM}{u^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2 + E^2} \frac{q'}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \omega^2 u \cos^2 \beta \right], \\ \gamma_\beta &= \frac{1}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \frac{\partial U}{\partial \beta} = -\frac{1}{w} \left[-\frac{\omega^2 a^2}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{q}{q_0} + \omega^2 \sqrt{u^2 + E^2} \right] \sin \beta \cos \beta, \\ \gamma_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0. \end{aligned} \quad (6-12)$$

Чтобы получить компоненты γ в xyz -системе, мы вычислим частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{и т. д.} \quad (6-13)$$

Частные производные x, y, z относительно u, β, λ получаются дифференцированием соотношения (6-6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \cos \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \sin \lambda \frac{\partial U}{\partial y} + \sin \beta \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &= -\sqrt{u^2 + E^2} \sin \beta \cos \lambda \frac{\partial U}{\partial x} - \sqrt{u^2 + E^2} \sin \beta \sin \lambda \frac{\partial U}{\partial y} + u \cos \beta \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= -\sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6-14)$$

Вводя обозначения

$$\gamma_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \dots; \quad \gamma_u = \frac{1}{w} \frac{\partial U}{\partial u}, \dots, \quad (6-15)$$

получим

$$\begin{aligned} \gamma_u &= \frac{u}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \cos \lambda \gamma_x + \frac{u}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \sin \lambda \gamma_y + \frac{1}{w} \sin \beta \gamma_z, \\ \gamma_\beta &= -\frac{1}{w} \sin \beta \cos \lambda \gamma_x - \frac{1}{w} \sin \beta \sin \lambda \gamma_y + \frac{u}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \gamma_z, \\ \gamma_\lambda &= -\sin \lambda \gamma_x + \cos \lambda \gamma_y. \end{aligned} \quad (6-16)$$

Это формулы ортогонального преобразования прямоугольных координат. Матрица обратного преобразования есть транспонированная матрица этой системы уравнений. Таким образом,

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{u}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \cos \lambda \gamma_u - \frac{1}{w} \sin \beta \cos \lambda \gamma_\beta - \sin \lambda \gamma_\lambda, \\ \gamma_y &= \frac{u}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \sin \lambda \gamma_u - \frac{1}{w} \sin \beta \sin \lambda \gamma_\beta + \cos \lambda \gamma_\lambda, \\ \gamma_z &= \frac{1}{w} \sin \beta \gamma_u + \frac{u}{w \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \gamma_\beta.\end{aligned}\quad (6-17)$$

Это следует из определения коэффициентов этой системы как направляющих косинусов. Соотношения (6-17) можно также найти, решая систему линейных уравнений (6-16) относительно γ_x , γ_y , γ_z каким-либо другим способом.

Формулы данного раздела являются строгими и могут быть легко запрограммированы. Применение здесь сферической аппроксимации было бы неуместно, так как величины относительно нормального эллипсоидального поля здесь сравнительно велики.

6.3 Выражение вектора возмущения силы тяжести через аномалии силы тяжести

В разд. 1.4 мы ввели сферические координаты: r (радиус-вектор), ϑ (полярное расстояние), λ (геоцентрическая долгота) (см. рис. 1.3). Теперь мы вновь воспользуемся этими координатами, но заменим полярное расстояние ϑ его дополнением геоцентрической широтой $\bar{\varphi}$ (рис. 6.1). По аналогии с (1-26), эти сферические координаты связаны с прямоугольными координатами x , y , z соотношениями

$$\begin{aligned}x &= r \cos \bar{\varphi} \cos \lambda, \\ y &= r \cos \bar{\varphi} \sin \lambda, \\ z &= r \sin \bar{\varphi};\end{aligned}\quad (6-18)$$

или, обратно,

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \bar{\varphi} &= \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \lambda &= \arctg \frac{y}{x}.\end{aligned}\quad (6-19)$$

Удобно начать с выражения компонентов δg_r , $\delta g_{\bar{\varphi}}$, δg_λ вектора возмущения силы тяжести δg (6-3) в сферических координатах r , $\bar{\varphi}$, λ . Имеем, по аналогии

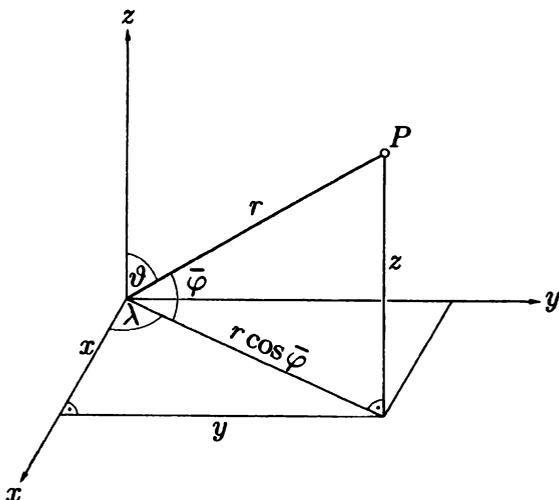


Рис. 6.1: Сферические координаты $r, \bar{\varphi}$ (или ϑ , соответственно), λ и прямоугольные координаты x, y, z

с формулой (2-377),

$$\delta g_r = \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \delta g_{\bar{\varphi}} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \bar{\varphi}}, \quad \delta g_\lambda = \frac{1}{r \cos \bar{\varphi}} \frac{\partial T}{\partial \lambda}. \quad (6-20)$$

Так как мы имеем дело с относительно малыми величинами возмущенного поля, то сферическая аппроксимация может оказаться достаточной (разд. 2.13), как это было в случае формулы Стокса.

Возмущающий потенциал T может быть выражен в терминах аномалий в свободном воздухе на земной поверхности по формуле Пизетти (2-302) и (2-303):

$$T_P = T(r, \bar{\varphi}, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(r, \psi) d\sigma, \quad (6-21)$$

где $S(r, \psi)$ – обобщенная функция Стокса

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3 \frac{Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos \psi \left(5 + 3 \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right), \quad (6-22)$$

и

$$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}. \quad (6-23)$$

Согласно (6 20), мы должны дифференцировать (6 21) по r , $\bar{\varphi}$, и λ . Заметим, что интеграл в правой части (6-21) зависит r , $\bar{\varphi}$, λ только через функцию $S(r, \psi)$. Поэтому Δg является константой при дифференцировании, и

$$\begin{aligned} \delta g_r &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial r} d\sigma, \\ \delta g_{\bar{\varphi}} &= \frac{R}{4\pi r} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \bar{\varphi}} d\sigma, \\ \delta g_{\lambda} &= \frac{R}{4\pi r \cos \bar{\varphi}} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \lambda} d\sigma. \end{aligned} \quad (6 \ 24)$$

Точка P , в которой должен быть вычислен вектор δg , имеет координаты $\bar{\varphi}$, λ ; пусть соответствующие координаты переменной точки P' , к которой относятся величины Δg и $d\sigma$, обозначены как $\bar{\varphi}'$, λ' . Тогда:

$$d\sigma = \cos \bar{\varphi}' d\bar{\varphi}' d\lambda', \quad (6 \ 25)$$

а ψ , угловое расстояние между P и P' , представляется как

$$\cos \psi = \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi}' + \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (6 \ 26)$$

Имеем

$$\frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varphi}}, \quad \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \lambda} = \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (6-27)$$

Теперь мы вновь воспользуемся выводами разд. 2.19, которые привели нас к формуле Венинг-Мейнса. Так как сферическая аппроксимация достаточна для величин T , δg и т.д., то мы можем заменить геоцентрическую широту $\bar{\varphi}$ эллипсоидальной φ . Таким образом, соотношения (6-27) и (2 380) полностью аналогичны, и (2 383) можно позаимствовать из разд. 2.19:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varphi}} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \bar{\varphi} \sin \alpha. \quad (6 \ 28)$$

Азимут α выражается формулой (2-388):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \bar{\varphi}' \sin(\lambda' - \lambda)}{\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi}' - \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}' \cos(\lambda' - \lambda)}. \quad (6 \ 29)$$

С учетом (6 27) и (6 28), формулы (6-24) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta g_r &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial r} d\sigma, \\ \delta g_{\bar{\varphi}} &= -\frac{R}{4\pi r} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \cos \alpha d\sigma, \\ \delta g_{\lambda} &= -\frac{R}{4\pi r} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \sin \alpha d\sigma. \end{aligned} \quad (6 \ 30)$$

Далее, найдем производные обобщенной функции Стокса (6-22) относительно r и ψ . Дифференцируя (6-23), получим

$$\frac{\partial l}{\partial r} = \frac{r - R \cos \psi}{l}, \quad \frac{\partial l}{\partial \psi} = \frac{Rr}{l} \sin \psi. \quad (6-31)$$

Используя эти вспомогательные соотношения, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r} &= -\frac{R(r^2 - R^2)}{r l^3} - \frac{4R}{r l} - \frac{R}{r^2} + \frac{6Rl}{r^3} \\ &\quad + \frac{R^2}{r^3} \cos \psi \left(13 + 6 \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial \psi} &= \sin \psi \left[-\frac{2R^2 r}{l^3} - \frac{6R^2}{r l} + \frac{8R^2}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3R^2}{r^2} \left(\frac{r - R \cos \psi - l}{l \sin^2 \psi} + \ln \frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6-32)$$

Более удобные выражения можно получить подстановкой

$$t = \frac{R}{r}, \quad (6-33)$$

$$D = \frac{l}{r} = \sqrt{1 - 2t \cos \psi + t^2}. \quad (6-34)$$

Тогда обобщенная функция Стокса (6-22) и ее производные (6-32) примут вид

$$S(r, \psi) = t \left[\frac{2}{D} + 1 - 3D - t \cos \psi \left(5 + 3 \ln \frac{1 - t \cos \psi + D}{2} \right) \right], \quad (6-35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial r} &= -\frac{t^2}{R} \left[\frac{1 - t^2}{D^3} + \frac{4}{D} + 1 - 6D \right. \\ &\quad \left. - t \cos \psi \left(13 + 6 \ln \frac{1 - t \cos \psi + D}{2} \right) \right], \\ \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} &= -t^2 \sin \psi \left[\frac{2}{D^3} + \frac{6}{D} - 8 \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{1 - t \cos \psi - D}{D \sin^2 \psi} - 3 \ln \frac{1 - t \cos \psi + D}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6-36)$$

Эти выражения использованы в (6-21) и (6-30) при вычислении величин T и δg .

Расстояние N_P между геопотенциальной поверхностью $W = W_P$, проходящей через точку P , и соответствующей сферопотенциальной поверхностью $U = W_P$, согласно теореме Брунса, равно

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_Q}; \quad (6\ 37)$$

см. также разд. 2.14 и рис. 2.15.

Уклонение отвеса, являющееся отклонением фактического отвеса от нормального в точке P , представлено его северно-южным и восточно-западным компонентами,

$$\xi_P = -\frac{1}{r} \frac{\partial N_P}{\partial \varphi}, \quad \eta_P = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial N_P}{\partial \lambda}; \quad (6\ 38)$$

эти формулы соответствуют (2-377). Так как γ очень мало изменяется с широтой и не зависит от долготы, то

$$\frac{\partial N_P}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{T_P}{\gamma_Q} \right) = \frac{1}{\gamma_Q} \frac{\partial T_P}{\partial \varphi} - \frac{T_P}{\gamma_Q^2} \frac{\partial \gamma_Q}{\partial \varphi} \approx \frac{1}{\gamma_Q} \frac{\partial T_P}{\partial \varphi} \quad (6\ 39)$$

и

$$\frac{\partial N_P}{\partial \lambda} = \frac{1}{\gamma_Q} \frac{\partial T_P}{\partial \lambda}. \quad (6\ 40)$$

Подставляя результаты (6 39) и (6 40) в (6 38) и сравнивая с (6 20), получим

$$\xi_P = -\frac{1}{\gamma_Q} \delta g_{\varphi}, \quad \eta_P = -\frac{1}{\gamma_Q} \delta g_{\lambda}. \quad (6\ 41)$$

Видно, что N_P , ξ_P , η_P задаются соотношениями (6 21) и (6 30), за исключением коэффициента $\pm 1/\gamma_Q$. Следовательно, эти соотношения представляют собой обобщения формул Стокса и Вининг-Мейнса для точек, расположенных вне Земли, и приводят к ним при $r = R$, $t = 1$.

Записывая соотношения (6-41) в виде

$$\delta g_{\varphi} = -\gamma \xi, \quad \delta g_{\lambda} = -\gamma \eta, \quad (6\ 42)$$

видим, что горизонтальные компоненты δg напрямую связаны с уклонением отвеса, которое является разностью в направлениях векторов \mathbf{g} и γ . Радиальный компонент δg_r представляет собой разность величин этих векторов, так как, согласно сферической аппроксимации,

$$-\delta g_r = \delta g = g_P - \gamma_P, \quad (6\ 43)$$

что является скалярным возмущением силы тяжести (см. разд. 2.12).

Заметим, что здесь основной величиной, которую требуется вычислить, является возмущение силы тяжести δg , а не аномалия силы тяжести Δg , потому что как g , так и γ относятся к одной и той же точке вычисления P .

6.4 Вычисление возмущений силы тяжести продолжением вверх

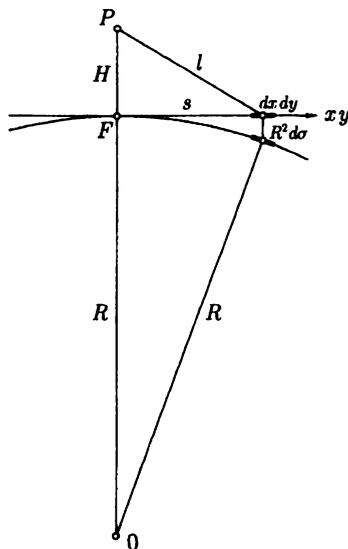


Рис. 6.2: Плоская аппроксимация

Применим интегральную формулу Пуассона (1.123) к гармонической функции T :

$$T_P = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{T}{l^3} d\sigma. \quad (6-44)$$

В окрестности точки P сфера фактически совпадает с касательной плоскостью, проведенной к ней в точке F (рис. 6.2). Так как значения подынтегральной функции очень малы на больших расстояниях от точки P , то мы можем распространить интегрирование по касательной плоскости вместо интегрирования по сфере. Тогда, согласно рис. 6.2,

$$l = \sqrt{s^2 + H^2}. \quad (6-45)$$

Введем прямоугольную систему координат x, y, z , у которой ось x направлена на север, ось y направлена на восток; эти оси лежат в касательной плоскости. Тогда

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}, \quad (6-46)$$

дифференциал поверхности

$$R^2 d\sigma \approx dx dy, \quad (6-47)$$

и

$$\begin{aligned} r &= R + H, \\ r^2 - R^2 &= (r + R)(r - R) \approx 2RH. \end{aligned} \quad (6-48)$$

Таким образом, на плоскости формула (6-44) имеет вид

$$T_P = \frac{H}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T}{r^3} dx dy = \frac{H}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T}{(x^2 + y^2 + H^2)^{3/2}} dx dy. \quad (6-49)$$

Эту важную формулу называют "*интегралом продолжения вверх*". Она позволяет вычислять значения гармонической функции T в точке, расположенной над плоскостью xy , исходя из ее значений на плоскости, то есть, продолжает вверх гармоническую функцию. Как T , так и ее частные производные, $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$, являются гармоническими функциями. В самом деле, если

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (6-50)$$

то и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (6-51)$$

Поэтому формула продолжения вверх (6-49), применимая к любой гармонической функции, может быть применена и к $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ и $\partial T/\partial z$.

Так как T – возмущающий потенциал, то его частные производные являются компонентами вектора возмущения силы тяжести:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \delta g_x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \delta g_y, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \delta g_z. \quad (6-52)$$

Мы не используем здесь обозначения δg_x , δg_y , δg_z , потому что хотим сохранить их за компонентами в геоцентрической глобальной системе координат, которую не следует путать с введенной в этом разделе локальной системой координат. Как обычно, r , φ , λ обозначают геоцентрические сферические координаты (см. разд. 6.3), соответствующие сферической аппроксимации.

Таким образом, в дополнение к (6-49), имеем

$$\delta g_r = \frac{H}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta g_r}{r^3} dx dy, \quad (6-53)$$

$$\delta g_{\varphi} = \frac{H}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta g_{\varphi}}{l^3} dx dy, \quad (6 \ 54)$$

$$\delta g_{\lambda} = \frac{H}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta g_{\lambda}}{l^3} dx dy.$$

Компоненты вектора $\delta \mathbf{g}$, стоящие в левых частях этих уравнений, относятся к точке P , расположенной над поверхностью Земли; в интеграле в правой части они взяты в точке на уровне моря и должны быть вычислены с помощью выражений

$$\delta g_r = -\delta g = -\left(\Delta g + \frac{2\gamma_0}{R} N \right), \quad (6 \ 55)$$

$$\delta g_{\varphi} = -\gamma_0 \xi, \quad (6 \ 56)$$

$$\delta g_{\lambda} = -\gamma_0 \eta;$$

Эти соотношения следуют из (2-264) и (6-42), (6-43) на уровне моря. Символы R и γ_0 обозначают, как обычно, средний земной радиус и среднее значение силы тяжести на земной поверхности.

Следовательно, посредством интеграла продолжения вверх мы можем вычислить T и $\delta \mathbf{g}$, если на поверхности Земли заданы высоты геоида N и компонентыклонения ξ и η .

Плоская аппроксимация достаточна для не очень больших высот (скажем, < 250 км). Иначе необходимо использовать сферическую формулу (6-44) для T . К радиальному компоненту вектора δg_r формулу (6-44) можно применить, заменив в ней T на $r \delta g$, поскольку и $r \delta g$, и $r \Delta g$ являются, как известно из разд. 2.14, гармоническими функциями. Соответствующие сферические формулы для продолжения вверх горизонтальных компонентов δg_{φ} и δg_{λ} неизвестны. Причина того, что в плоском случае один и тот же интеграл продолжения вверх может быть применён как к T , так и к компонентам вектора $\delta \mathbf{g}$, заключается в том, что производные функции T являются гармоническими функциями только в декартовой системе координат.

6.5 Дополнительные соображения

Отсчётная поверхность

Предыдущие формулы для возмущающего потенциала T и вектора возмущения силы тяжести $\delta \mathbf{g}$ точны, если отсчётной поверхностью служит сфера. На практике аномалии силы тяжести относятся к эллипсоиду. В таком случае формулы для T и $\delta \mathbf{g}$ верны, если пренебречь относительной ошибкой порядка сжатия $f \approx 0.3\%$, то есть если пользоваться сферической аппроксимацией.

Напомним, что *это не означает, что эллипсоид заменён сферой в каком-либо геометрическом смысле*; просто в исходных эллиптических формулах пренебрегают первыми и более высокими степенями сжатия, вследствие чего они формально становятся сферическими формулами.

Так как аномалии силы тяжести и т.п. отнесены к эллипсоиду, то следует быть очень осторожными при вычислении значения величины t , входящей в формулы разд. 6.3. Если бы в качестве отсчётной поверхности использовалась точная сфера радиуса R , то $r = R + H$, где H – высота точки вычисления над сферой. Фактически же мы используем референц-эллипсоид; при этом опять

$$r = R + H, \quad t = \frac{R}{R + H}, \quad (6-57)$$

но теперь H – это высота точки *над эллипсоидом* (или, с достаточной точностью можно сказать, *над уровнем моря*); константа $R = 6371$ км является средним земным радиусом. Таким образом, r , вычисленное по формуле (6-57), отличается от геоцентрического радиус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Мы уже упоминали, что, когда речь идет о T и δg , геоцентрическую широту $\bar{\varphi}$ можно заменить эллипсоидальной широтой φ , например, полагая в формулах (6-26) или (6-29), что $\bar{\varphi} = \varphi$.

Исходные данные

При всех вычислениях, связанных с определением внешнего поля силы тяжести Земли, в качестве Δg должна использоваться *аномалия силы тяжести в свободном воздухе*, поскольку все другие типы аномалий силы тяжести соответствуют какому-либо перемещению или удалению масс, влекущих за собой изменение внешнего поля. Если, помимо Δg , используются отклонения отвеса ξ, η (для продолжения вверх), то они также должны быть получены по аномалиям в свободном воздухе. Если, как это обычно делается, для редукции в свободном воздухе используется нормальный градиент в свободном воздухе $dy/\partial h \approx 0.3086$ мгал/м, то аномалии в свободном воздухе относятся, строго говоря, к физической поверхности Земли (к уровню суши), а не к геоиду (к уровню моря). Значения N , вычисленные по формуле Стокса с использованием таких величин, представляют собой скорее аномалии высот ζ , относящиеся к земной поверхности, чем высоты реального геоида. Однако, это различие столь незначительно, что может быть проигнорировано в большинстве случаев, так что мы можем рассматривать Δg как аномалии на уровне моря (см. разд. 8.6).

Если же этим различием пренебречь нельзя, и мы стремимся получить наивысшую точность для низких высот H в высокогорной области, то можно поступить следующим образом. Редуцируем аномалию в свободном воздухе Δg из точки A на земной поверхности к соответствующей точке A_0 на уровне моря (см. рис. 6.3)

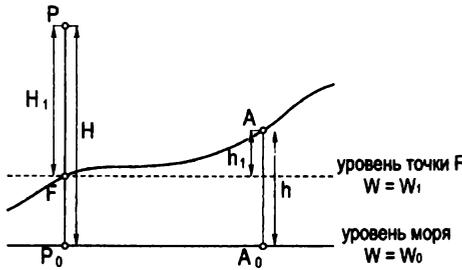


Рис. 6.3: Редукция к уровню моря и к уровню точки F

$$\Delta g^{\text{г.р.м.}} = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} h, \quad (6-58)$$

и используем полученную таким образом аномалию $\Delta g^{\text{г.р.м.}}$ на уровне моря. Вертикальный градиент $\partial \Delta g / \partial h$ может быть вычислен с помощью формулы (2-394) и аномалий Δg на земной поверхности. Можно редуцировать к любой другой уровневой поверхности $W = W_1$, например, к поверхности, проходящей через точку F (рис. 6.3), и при этом использовать в формуле (6-58) h_1 вместо h . Тогда в формуле (6-57) также следует использовать H_1 , а не H . Но для крупномасштабных целей редуция к уровню моря более предпочтительна. Такая редуция достигнет значительной величины, по-видимому, только в исключительных случаях, поэтому обычно ее можно пренебречь, и в формулах разд. 6.3 и 6.4 в качестве H можно брать высоту точки P над уровнем моря или над земной поверхностью. См. также разд. 8.6.

Вычисление вектора силы тяжести

После вычисления компонентов δg_r , δg_{φ} , δg_{λ} численным интегрированием мы можем преобразовать их в прямоугольные координаты δg_x , δg_y , δg_z относительно глобальной системы координат.

Это можно сделать с помощью эллипсоидально-гармонических координат, согласно разд. 6.2. При малых значениях величин δg_u , δg_β , δg_λ можно пользоваться сферической аппроксимацией, пренебрегая, таким образом, относительной ошибкой порядка сжатия. Но если сжатие пренебрегается, то эллипсоидально-гармонические координаты u , β , λ редуцируются к сферическим координатам r , φ , λ , так что в сферической аппроксимации имеем

$$\delta g_u = \delta g_r, \quad \delta g_\beta = \delta g_\varphi, \quad (6-59)$$

а δg_λ — одно и то же в обеих системах (строго). Таким образом, δg_r , δg_φ , δg_λ можно также рассматривать как компоненты вектора $\delta \mathbf{g}$ в эллипсоидально-гармонических координатах.

В таком случае

$$g_u = \gamma_u + \delta g_r, \quad g_\beta = \gamma_\beta + \delta g_\varphi, \quad g_\lambda = \delta g_\lambda, \quad (6-60)$$

а g_x, g_y, g_z получаются с помощью (6-17), где компоненты вектора \mathbf{g} заменяются соответствующими компонентами вектора γ . Очевидно, что сферическая аппроксимация может использоваться только для δg , а γ_u и γ_β должны быть вычислены по строгим формулам (6-12).

Потенциал силы тяжести W может быть найден из первого уравнения (6-4); потенциал притяжения V получается вычитанием центробежного потенциала $\omega^2(x^2 + y^2)/2$; вектор силы притяжения определяется формулой (6-5).

6.6 Сравнение аномалий и возмущений силы тяжести

Предположим, что сила тяжести g должна быть вычислена в некоторой точке P вне Земли (рис. 6.4); мы рассматриваем сейчас только длину вектора силы

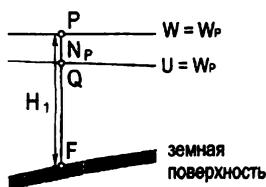


Рис. 6.4: Аномалии и возмущения силы тяжести

тяжести. Это легко сделать, прибавив поправку к нормальной силе тяжести γ . Напомним, что в разд. 2.12 и позднее мы рассматривали два различных вида такой поправки, $g - \gamma$:

1. возмущение силы тяжести δg , в котором и g , и γ относятся к одной и той же точке P ;
2. аномалия силы тяжести Δg , в которой g относится к P , а γ — к соответствующей точке Q , расположенной на отвесной линии, проходящей через точку P , так, что нормальный потенциал U в этой точке совпадает с реальным потенциалом W в P , то есть, $U_Q = W_P$.

Эти две величины связаны соотношением

$$\Delta g = \delta g - \frac{2\gamma_0}{R} N_P, \quad (6-61)$$

достаточным для умеренных высот.

Возмущение силы тяжести используется, когда известно пространственное положение точки P , скажем, измерены его геоцентрические прямоугольные координаты x, y, z . Так, при наличии GPS измерений местоположения самолета естественно пользоваться возмущениями силы тяжести.

Раньше традиционно использовались аномалии силы тяжести Δg . Дело обстоит так, например, при аэрогравиметрических работах, когда измеряется высота самолета над землей. В таком случае аномалии силы тяжести Δg могут быть вычислены продолжением вверх так же, как и δg , см. разд. 6.4. Однако такая ситуация, видимо, принадлежит прошлому.

Ещё раз повторим, что следует пользоваться аномалиями в свободном воздухе, относящимися к земной поверхности или, более точно, к некоторой уровенной поверхности. Если земная поверхность представляет собой некоторую возвышенность над уровнем моря, но имеет достаточно плоскую форму, то лучше рассматривать H как высоту над землей, а не уровнем моря, потому что тогда земную поверхность можно трактовать локально как часть некоторой уровенной поверхности.

Обратная задача – продолжение вниз аномалий силы тяжести или, скорее, возмущений силы тяжести – возникает при редуцировании силы тяжести, измеренной на борту самолета. При этом существует, конечно, связь с задачей о гармоническом продолжении вниз при решении проблемы Молоденского, описанной в разд. (8.6).

Продолжения вверх и вниз являются также инструментами геофизического исследования, но там преследуется совсем иная цель. Однако некоторые из разработанных в геофизике методов применимы и для геодезических целей, см., например, Dobrin and Savit (1988) или Telfort et al. (1990).

Продолжения вверх и вниз связаны между собой как прямые и обратные задачи в общей теории обратных задач, см. Anger et al. (1993), а также на сайте www.inas.tugraz.at и далее forschung/InverseProblems/AngerMoritz.html, где можно найти дополнительные ссылки.

Глава 7

Космические методы

7.1 Введение

Содержание этой главы – использование спутниковых наблюдений для определения глобальных особенностей поля силы тяжести и фигуры Земли. Но излагаются только самые основополагающие понятия. Более подробную информацию читатель найдет в специальных учебниках типа Hofmann-Wellenhof et al. (2001), Montenbruck and Gill (2001) и Seeber (2003).

Исторические замечания

Сразу после первого запуска искусственных спутников Земли (Спутник 1957, Explorer 1958) началось их использование для геодезических целей, и к настоящему времени система глобального местопределения (GPS) стала самым важным методом быстрого и точного определения геодезических координат (см. разд. 5.3). Исторически первые методы наблюдения были предназначены для определения пространственного направления на спутник и расстояния до него. Большинство этих методов теперь утратили свое значение, но некоторые принципы остаются еще полезными.

Направления

Направления могут быть измерены, фотографируя спутник на фоне звезд, или посредством радиоволн, отраженных от спутника, используя принцип интерференции. Точность фотографии может быть достигнута только порядка 0.2 дуговой секунды, что для современных целей недостаточно. Идея фотографического метода состояла в следующем. На фотографической пластине изображение спутника окружено изображениями звезд. Направления к окружающим звездам определены их прямыми восхождениями α и склонениями δ , которые известны из астрономии. Поэтому, искомым является прямое восхождение и

склонение спутника могут быть найдены интерполяцией. В настоящее время эта техника является устаревшей.

Расстояния

Расстояния измеряются радаром или лазером. Радар используется для измерения расстояний до космических зондов в солнечной системе, что является более важным для космических наук, чем для геодезии. Лазерные измерения расстояний до Луны (Lunar Laser Ranging, LLR) и до спутников (Satellite Laser Ranging, SLR) полезны при определении параметров вращения Земли из-за их высокой точности (порядка сантиметров) ; однако их использование ограничено небольшим количеством фундаментальных станций.

Измерения скоростей

Скорости движения определяются с помощью эффекта Допплера радиоволн, передаваемых со спутника. Это же используется также в работе GPS и в системах спутник-спутник (SST).

Спутниковая альтиметрия

При спутниковой альтиметрии со спутника, летящего над океанами, посылают вертикально вниз коротковолновый электронный луч. Луч отражается и принимается спутником снова. Измеренная продолжительность движения луча сразу дает высоту H спутника над океанической поверхностью. Зная орбитальное положение спутника относительно глобальной системы отсчета, мы можем вычислить высоту спутника h над эллипсоидом. Тогда разность $h - H$ представляет собой высоту геоида N . Это так, если верным является предположение о совпадении океанической поверхности и поверхности геоида. В действительности, обе поверхности отличаются за счет "поверхностной топографии морей и океанов" (из-за океанических течений и т. п.), которая может достигать порядка 1 м и представляет интерес для океанографии. Соответствующие величины могут быть определены, если точный океанический геоид известен по результатам изучения гравитационного поля.

Принципы этих методов иллюстрируются на рис. 7.1, где e указывает наблюдаемое направление, s обозначает расстояние между станцией наблюдения и спутником, ds/dt соответствует доплеровскому наблюдению, а ds/dt между двумя спутниками получается посредством SST; наконец, H измерена спутниковой альтиметрией.

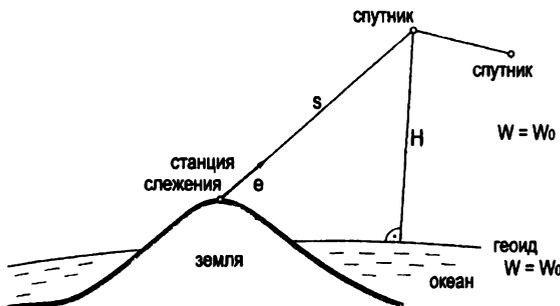


Рис. 7.1: Принципы спутниковых методов

7.2 Орбиты искусственного спутника

Первым впечатляющим следствием наблюдений за спутниками, широко рекламированным NASA в шестидесятые годы, было "открытие" того, что "Земля – не эллипсоид, а скорее по форме подобна груше". Это вызвано шаровой гармонической функцией J_3 . Ее эффект на Северном и Южном полюсах составляет около 30 м, что на три порядка меньше, чем эллиптичность, обусловленная J_2 , чей линейный эффект $a - b$ составляет около 20 км (!).

Первый реальный результат, также полученный в шестидесятые годы, состоял в существенном уточнении значения самого сжатия f . Оказалось, что оно равно $1/298.25$ вместо ранее принятой величины $1/297.3$, что соответствует линейному уточнению земного размера порядка 70 м!

Сжатие Земли вызывает наибольшее, но не единственное, отклонение земного гравитационного поля от поля однородной сферы. Вообще, согласно разд. 2.5, (2-78), гравитационный потенциал может быть разложен в следующий ряд по шаровым функциям :

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \vartheta) \right\}. \quad (7-1)$$

Здесь члены, содержащие коэффициенты J_n , являются зональными сферическими функциями, а члены, содержащие коэффициенты S_{nm} и C_{nm} – тессеральными сферическими функциями.

Прежние обозначения $J_{nm} = -C_{nm}$ и $K_{nm} = -S_{nm}$ для тессеральных гармонических коэффициентов теперь обычно не используются ; для зональ-

ных коэффициентов до сих пор основным является обозначение J_n , при этом $C_{n0} = -J_n$.

Что касается Луны, то единственным коэффициентом, оказывающим заметное влияние, является J_2 , представляющий сжатие. Искусственные спутники, по сравнению с Луной, гораздо ближе к Земле; типичные высоты над Землей спутников, которые используются в геодезических целях, находятся в пределах от 300 км до 20 000 км. Следовательно, их движение подвержено влиянию не только гармоника с J_2 и потому может быть использовано для определения гармоник низких степеней. Для этого мы должны изучить эффект гравитационных возмущений на орбитах близких спутников.

Но прежде мы должны сделать краткий обзор теории неискаженной орбиты, которая имеет место в том случае, когда гравитационный потенциал имеет форму

$$V = \frac{GM}{r}, \quad (7-2)$$

то есть все коэффициенты C и S равны нулю. Это представляет гравитационное поле точечной массы или однородной сферы. Тогда движение спутника описывается тремя законами *планетарного движения Кеплера*. Спутники с параболическими или гиперболическими орбитами выходят за пределы нашего рассмотрения.

Согласно *первому закону Кеплера*, орбита имеет форму эллипса, в одном из фокусов которого находится центр Земли. Положение орбиты в пространстве определяется шестью *элементами орбиты*:

- a большая полуось,
 - e эксцентриситет,
 - i наклонение,
 - Ω узел прямого восхождения,
 - ω аргумент перигея,
 - T время прохождения через перигей.
- (7-3)

Если a и b – полуоси орбитального эллипса (не надо путать с полуосями земного эллипсоида!), то эксцентриситет определяется как

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (7-4)$$

Рисунок 7.2 показывает проекцию орбиты на геоцентрическую единичную сферу, где P обозначает перигей, A – апогей, K – восходящий узел, K' – нисходящий узел, S – мгновенное положение спутника.

Пересечение плоскости орбиты с плоскостью экватора называется линией узлов; она соединяет восходящий узел K и нисходящий узел K' . Прямое восхождение узла Ω представляет собой угол между линией узлов и направлением на точку весеннего равноденствия. Значение Ω также называют долготой

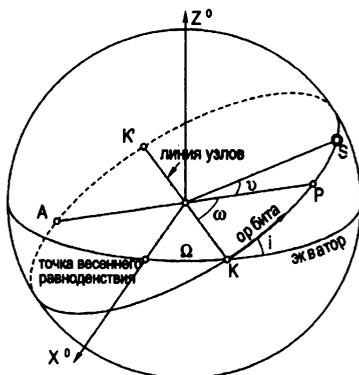


Рис. 7.2: Проекция орбиты спутника на единичную сферу

восходящего узла, но, в соответствии с астрономической терминологией, это прямое восхождение (восходящего) узла. Большая ось орбиты пересекает орбитальный эллипс в точке перигея P , то есть в точке, где положение спутника является самым близким к Земле, и в точке апогея A , где спутник является самым далеким. Угол ω между линией узлов и большой осью называется аргументом перигея.

Угловое расстояние спутника S от перигея называется *истинной аномалией* и обозначается v ; это – функция времени. Отметим, что такое странное название связано с историей астрономии; на самом деле ничего аномального в этом понятии нет!

Уравнение орбитального эллипса может быть записано в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (7-5)$$

где r – расстояние спутника от центра масс Земли, а

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \quad (7-6)$$

является длиной радиуса-вектора r для $v = 90^\circ$. Радиус-вектор r и истинная аномалия v формируют пару полярных координат в орбитальной плоскости, и (7-5) – известное полярное уравнение эллипса. Для иллюстрации этих величин см. рис. 7.3, где фокус F является центром масс Земли.

Согласно *второму закону Кеплера*, площадь эллиптического сектора, заключенного между радиусами-векторами r любых двух положений спутника, пропорциональна времени, которое требуется для перемещения спутника из

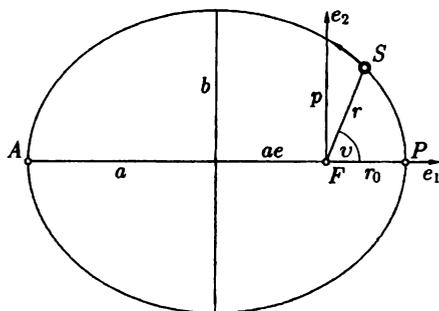


Рис. 7.3: Орбитальный эллипс

одного положения в другое. Другими словами, производная по времени площади области, заключенной между двумя радиусами-векторами, постоянна. Так как элемент площади сектора в полярных координатах r и v равен $\frac{1}{2}r^2 dv$, можно сформулировать следующий математический закон

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{GM a (1 - e^2)}, \quad (7-7)$$

где упоминавшейся константе уже приписано ее реальное значение.

Третий закон Кеплера утверждает, что

$$n^2 a^3 = GM, \quad (7-8)$$

где масса спутника отброшена по малости, а

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (7-9)$$

является "средним движением" (средней угловой скоростью) спутника на рассматриваемом промежутке P .

До сих пор мы предполагали, что все коэффициенты J_n , C_{nm} и S_{nm} в (7-1) равны нулю. На самом деле это не так из-за нерегулярностей гравитационного поля Земли, хотя эти коэффициенты действительно малы. Поэтому на движение спутника оказывают влияние небольшие возмущающие силы. Мы все еще можем рассматривать спутниковую орбиту как эллипс, но тогда параметры этого эллипса, элементы орбиты, следует считать уже не постоянными, а медленно изменяющимися. В каждый момент этот *оскулирующий эллипс* будет немного другим. Это можно представить себе следующим образом. Если

в некоторый момент все возмущающие силы вдруг обратятся в нуль, то спутник продолжит свое движение по точному эллипсу; этот эллипс и называется оскулирующим.

Если разложить полную возмущающую силу на прямоугольные компоненты S , T и W , где S направлен по радиус-вектору, W нормально к орбитальной плоскости, а T нормально к S и W (такая система обозначений принята в астрономии и не имеет никакого отношения к геодезическим обозначениям T и W для потенциалов!), то производные орбитальных параметров по времени могут быть выражены в терминах этих компонентов следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2a^2}{b} \sqrt{\frac{a}{GM}} \left(e S \sin v + \frac{p}{r} T \right), \\ \dot{e} &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{GM}} \left[S \sin v + \left(\frac{r+p}{r} \cos v + \frac{er}{p} \right) T \right], \\ \dot{i} &= \frac{r}{b} \sqrt{\frac{a}{GM}} W \cos(\omega + v), \\ \dot{\Omega} &= \frac{r}{b} \sqrt{\frac{a}{GM}} W \frac{\sin(\omega + v)}{\sin i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{GM}} \left[-\frac{1}{e} S \cos v + \frac{r+p}{ep} T \sin v - \frac{r}{p} W \sin(\omega + v) \operatorname{ctg} i \right]. \end{aligned} \quad (7-10)$$

Как обычно, \dot{a} обозначает da/dt и т.д. Вывод этих уравнений можно найти в любом учебнике по небесной механике, например, Plummer (1918: p. 151), Brouwer and Clemence (1961: p. 301), и Seeber (2003: Sect. 3.2.1.3), где используются символы K_1, K_2, K_3 вместо W, S, R .

7.3 Определение зональных гармоник

Влияние зональных сферических функций на орбиты искусственных спутников намного больше, чем влияние сферических функций тессеральных. Доступные для наблюдений вариации самих орбитальных элементов вызывают только зональные гармоники (J_2, J_3, J_4, \dots). Тессеральные сферические функции вызывают колебательные возмущения, быстро меняющие свой знак, тогда как эффект зональных сферических функций накапливается. Поэтому мы рассмотрим сначала эффект зональных сферических функций, то есть эффект гармоник, независимых от долготы λ .

Итак, пусть

$$V = \frac{GM}{r} + R, \quad (7-11)$$

где возмущающий потенциал

$$R = -\frac{GM}{a_e} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} J_n P_n(\cos \vartheta) \quad (7-12)$$

является функцией только r и ϑ . Отметим, что основная разница между возмущающим потенциалом R в небесной механике и возмущающим потенциалом T в физической геодезии состоит в том, что R , в отличие от T , включает также эффект сжатия через J_2 .

Существуют также и другие возмущающие силы, действующие на спутник, скажем, сопротивление атмосферы, лучевое давление солнечного света и т.д. Эти негравитационные возмущения должны быть приняты во внимание отдельно и здесь рассматриваться не будут.

Заметьте, что экваториальный радиус Земли (большая полуось земного эллипсоида) обозначен a_e , в отличие от a , что сейчас обозначает большую полуось орбитального эллипса. Эта система обозначений будет использоваться и в дальнейшем.

Так как S есть компонента возмущающей силы вдоль радиуса-вектора, то мы имеем

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (7-13)$$

Составляющие возмущающей силы по меридиану и первому вертикалу имеют вид

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \lambda}. \quad (7-14)$$

Составляющие T и W получены из них вращением плоскости (рис. 7.4):

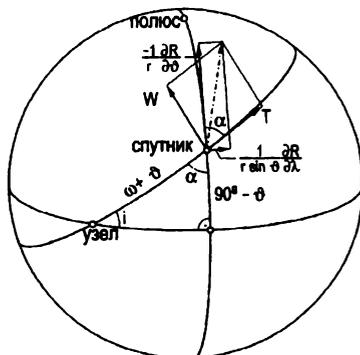


Рис. 7.4: Компоненты возмущающей силы

$$T = -\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \cos \alpha + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \sin \alpha, \quad (7-15)$$

$$W = -\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \sin \alpha - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \cos \alpha.$$

Из прямоугольного сферического треугольника на рис. 7.4 следует, что

$$\cos \alpha = \frac{\cos(\omega + \nu) \sin i}{\sin \vartheta}, \quad \sin \alpha = \frac{\cos i}{\sin \vartheta}, \quad (7-16)$$

поэтому окончательно

$$T = -\frac{\cos(\omega + \nu) \sin i}{r \sin \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} + \frac{\cos i}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \quad (7-17)$$

$$W = -\frac{\cos i}{r \sin \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} - \frac{\cos(\omega + \nu) \sin i}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \lambda}.$$

Мы включили сюда $\partial R/\partial \lambda$, так как в общем случае присутствуют зависимые от долготы тессеральные сферические функции (см. раздел 7.5). Но в данном случае, когда R определяется формулой (7-12), $\partial R/\partial \lambda$ равно нулю.

Теперь мы должны продифференцировать (7-12) относительно r и ϑ , вычислить составляющие S , T , W с помощью (7-13), (7-17) и подставить их в систему (7-10). Таким образом, мы можем выразить производные \dot{a} , \dot{e} , ... элементов орбиты в терминах коэффициентов J_2 , J_3 , J_4 , ... Однако мы не можем наблюдать эти производные непосредственно. Практически мы наблюдаем изменения элементов орбиты только после нескольких вращений. Изменения после *одного* вращения с периодом P таковы:

$$\Delta a = \int_{t_0}^{t_0+P} \dot{a} dt, \quad \Delta e = \int_{t_0}^{t_0+P} \dot{e} dt, \quad \Delta i = \int_{t_0}^{t_0+P} \dot{i} dt \quad \text{и так далее.} \quad (7-18)$$

Здесь t_0 - произвольная "эпоха" (момент времени). Чтобы выполнить интегрирование, мы должны выразить \dot{a} , \dot{e} , ... в терминах одной независимой переменной. В качестве такой независимой переменной мы можем взять время t или истинную аномалию ν . Мы воспользуемся здесь второй возможностью.

Полярное расстояние ϑ выражается как функция ν через соотношение

$$\cos \vartheta = \sin(\omega + \nu) \sin i, \quad (7-19)$$

которое следует из прямоугольного сферического треугольника на рис. 7.4. Радиус-вектор r - также функция ν , согласно (7-5). Наконец, второй закон Кеплера (7-7) дает соотношение между ν и временем t :

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{r^2}{\sqrt{GM a (1 - e^2)}}. \quad (7-20)$$

Следовательно, мы можем изменить переменную интегрирования t на v и получить, например, что

$$\Delta a = \int_{t_0}^{t_0+P} \dot{a} dt = \int_{v=0}^{2\pi} \frac{da}{dv} dv, \quad (7-21)$$

где

$$\frac{da}{dv} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{dv} = \frac{r^2}{\sqrt{GMa(1-e^2)}} \dot{a}. \quad (7-22)$$

Аналогичные формулы имеют место и для других элементов орбиты.

После выполнения всех этих действий, являющихся довольно трудоемкими, хотя и не слишком трудными, выясняется, что

$$\begin{aligned} \Delta a &= 0, \\ \Delta e &= -\frac{1-e^2}{e} \operatorname{tg} i \Delta i, \\ \Delta i &= 3\pi e \left(\frac{a_e}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) \cos i \cos \omega J_3 \\ &\quad + \frac{45}{16} \pi e \left(\frac{a_e}{p}\right)^4 \left(1 - \frac{7}{6} \sin^2 i\right) \sin 2i \sin 2\omega e J_4 \dots, \\ \Delta \Omega &= -3\pi \left(\frac{a_e}{p}\right)^2 \cos i J_2 \\ &\quad + 3\pi \left(\frac{a_e}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{15}{4} \sin^2 i\right) \operatorname{ctg} i \sin \omega e J_3 \\ &\quad + \frac{15}{2} \pi \left(\frac{a_e}{p}\right)^4 \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i\right) \cos i J_4 \dots, \\ \Delta \omega &= 6\pi \left(\frac{a_e}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) J_2 \\ &\quad + 3\pi \left(\frac{a_e}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) \sin i \sin \omega e J_3 \\ &\quad - 15\pi \left(\frac{a_e}{p}\right)^4 \left[\left(1 - \frac{31}{8} \sin^2 i + \frac{49}{19} \sin^4 i\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{16} \sin^2 i\right) \sin^2 i \cos 2\omega \right] J_4 \dots \end{aligned} \quad (7-23)$$

В этих соотношениях мы пренебрегли по малости членами порядка $e^2 J_3$ и $e^2 J_4$. Пропорциональность Δe и Δi более или менее случайна: она имеет

наклонами орбит, чтобы получить уравнения с высокой степенью взаимной независимости.

Теперь возникает вопрос, какие элементы орбиты следует использовать для определения коэффициентов J_n . Ясно, что большая полуось a не может использоваться вообще. Что касается других элементов, то необходимо различать коэффициенты четной и нечетной степеней n . Четные коэффициенты J_2, J_4, \dots можно достаточно надежно определить по регрессии узла $\Delta\Omega$ и вращению перигея $\Delta\omega$. Чтобы убедиться в этом, обратимся к соотношениям (7-23). Четные гармоники вызывают вековые возмущения Ω и ω , которые намного больше, чем длиннопериодические влияния нечетных коэффициентов, так как J_3, J_5, \dots умножаются на малую величину эксцентриситета e .

С другой стороны, в выражениях для Δe и Δi нечетные коэффициенты J_3, J_5, \dots имеют намного большее влияние, чем четные коэффициенты, которые здесь входят с малым коэффициентом e . Следовательно, нечетные коэффициенты определяются из Δe или Δi , или по изменению расстояния до перигея $r_0 \doteq FP$ (рис. 7.3). Так как r_0 – радиус-вектор при $v = 0$, мы имеем, согласно (7-5) и (7-6)

$$r_0 = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad (7-25)$$

и потому

$$\Delta r_0 = -a \Delta e, \quad (7-26)$$

так как $\Delta a = 0$.

Таким образом, вариация расстояния до перигея пропорциональна вариации эксцентриситета и может быть использована вместо Δe .

Численные значения

Helmert (1884: p. 472) использовал регрессию узла орбиты Луны, чтобы определить коэффициент J_2 , который является единственной величиной, имеющей заметное влияние на этот процесс. Заметим, что при $e \approx 0$ и $p \approx a \gg a_e$, уравнение для $\Delta\Omega$ в (7-23) принимает вид

$$\Delta\Omega = -3\pi \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 J_2 \cos i. \quad (7-27)$$

Гельмерт нашел

$$J_2 = 1086.5 \cdot 10^{-6}, \quad (7-28)$$

усреднив два довольно различных значения. Это соответствует сжатию

$$1/f = 297.8 \pm 2.2. \quad (7-29)$$

Полученное значение очень близко к последним результатам, но имеет намного меньшую точность.

Надежные значения этим методом можно получить только с помощью близких искусственных спутников. В настоящее время приняты, например, такие значения:

$$\begin{aligned} J_2 &= 1082.6359 \cdot 10^{-6}, \\ J_3 &= -2.5324 \cdot 10^{-6}, \\ J_4 &= -1.6198 \cdot 10^{-6}; \end{aligned} \quad (7-30)$$

считается, что их средние квадратические ошибки меньше $\pm 0.01 \cdot 10^{-6}$. Значение для J_2 взято из отчета IAG Groten (2004), доступного в интернете на сайте www.gfy.ku.dk/~iag/HB2004/part5/51-groten.pdf. Коэффициенты J_3 и J_4 получены по результатам проекта GRACE (см. ниже раздел 7.5).

Наиболее значимый геодезический результат - это надежное определение J_2 и, следовательно, сжатия f , равного $1/298.25$. Уже в 1964 г. Международный Астрономический Союз (IAU) принял значение 298.25, соответствующее $J_2 = 1082.7 \cdot 10^{-6}$ (см. раздел 2.11), то же принято Международными Геодезическими Системами отсчета IAG 1967 и затем 1980, что не намного отличается от Мировой Геодезической Системы 1984 (WGS 84), являющейся стандартной и на сегодня (2005).

7.4 Прямоугольные координаты спутника и возмущения

Опишем сейчас, как вычислять прямоугольные координаты спутника по элементам орбиты. Затем мы обсудим их подверженность влиянию нерегулярностей поля силы тяжести. Все это необходимо для определения тессеральных сферических функций по спутниковым наблюдениям.

Введем в рассмотрение неподвижную относительно звезд экваториальную систему координат $X^0Y^0Z^0$. Ее начало - в центре масс Земли. Ось Z^0 совпадает с осью вращения Земли; плоскость X^0Y^0 является экваториальной. Ось X^0 служит линия пересечения экваториальной плоскости и эклиптики (то есть плоскости земной орбиты вокруг Солнца); согласно астрономической терминологии, она направлена на точку *весеннего равноденствия*. Такая система координат $X^0Y^0Z^0$ является фундаментальной в сферической астрономии. Отметим, что указанные направления координатных осей не вполне постоянны во времени. Этот факт требует определенных деталей, которые читатель может найти в работе Moritz and Mueller (1987: Chap. 7). Но в данном контексте мы рассматриваем систему $X^0Y^0Z^0$ как неподвижную во времени.

Чтобы установить соотношение между прямоугольными координатами спутника и элементами его оскулирующего эллипса (разд. 7.2) в определенный момент времени, рассмотрим рис. 7.3 и координатную систему e_1, e_2 , определяющую плоскость орбиты. Полагая e_3 ортогональным к этой плоскости,

получаем следующее представление спутника в этой системе:

$$r \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7-31)$$

Этот результат можно преобразовать в экваториальную систему $X^0Y^0Z^0$ с помощью определенной матрицы вращения \mathbf{R} и получить соответствующий вектор $\mathbf{X}^0 = [X^0, Y^0, Z^0]$. Имеем

$$\begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} r \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7-32)$$

где матрица \mathbf{R} составлена из трех последовательных матриц вращения (см. рис. 7.2 и 7.3) и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_3\{-\Omega\} \mathbf{R}_1\{-i\} \mathbf{R}_3\{-\omega\} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega & -\cos \Omega \sin \omega & \sin \Omega \sin i \\ -\sin \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \cos \omega \cos i & \\ \sin \Omega \cos \omega & -\sin \Omega \sin \omega & -\cos \Omega \sin i \\ +\cos \Omega \sin \omega \cos i & +\cos \Omega \cos \omega \cos i & \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}, \quad (7-33) \end{aligned}$$

см. Hofmann-Wellenhof et al. (2001: p. 43). Векторами-столбцами ортонормированной матрицы \mathbf{R} служат оси орбитальной системы координат, представленной в экваториальной системе \mathbf{X}_i^0 .

Заменяя (7-33) в (7-32) и выполняя умножение (Montenbruck and Gill 2001: Eq. (2.51)), получим

$$\begin{aligned} X^0 &= r [\cos \Omega \cos(\omega + v) - \sin \Omega \sin(\omega + v) \cos i], \\ Y^0 &= r [\sin \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \sin(\omega + v) \cos i], \\ Z^0 &= r \sin(\omega + v) \sin i, \end{aligned} \quad (7-34)$$

где, согласно (7-5),

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (7-35)$$

Это выражает прямоугольные координаты спутника в терминах элементов его оскулирующей орбиты, при этом истинная аномалия v фиксирует его положение во времени.

Так как оскулирующий эллипс не остается постоянным, то удобно использовать какую-нибудь фиксированную *отсчетную орбиту* – например, оскулирующий эллипс E_0 , имеющий в определенный момент t_0 элементы $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0$. В более поздний момент t элементы орбиты изменятся до $a_0 + \Delta_t a, e_0 + \Delta_t e, i_0 + \Delta_t i, \Omega_0 + \Delta_t \Omega, \omega_0 + \Delta_t \omega, T_0 + \Delta_t T$, что соответствует оскулирующему эллипсу E_t .

Элементы орбиты в (7-34) относятся к этому мгновенному оскулирующему эллипсу, так что $a = a_0 + \Delta_t a$, и т. д. Поэтому координаты X^0, Y^0, Z^0 зависят от времени двумя способами: *явно*, через истинную аномалию v , и *неявно*, через перемешные элементы оскулирующей орбиты. Чтобы устранить неявную зависимость, вычислим (7-34), пользуясь элементами a_0 и т. д. фиксированного отсчетного эллипса. Тогда полученные координаты зависят от времени только явным образом и соответствуют кеплеровскому движению в пространстве по фиксированному эллипсу. Чтобы преобразовывать их в истинные координаты X^0, Y^0, Z^0 , надо ввести поправки $\Delta_t X^0, \Delta_t Y^0, \Delta_t Z^0$ в виде линейных членов разложения (7-34) в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \Delta_t X^0 &= \\ \frac{\partial X^0}{\partial a} \Delta_t a + \frac{\partial X^0}{\partial e} \Delta_t e + \frac{\partial X^0}{\partial i} \Delta_t i + \frac{\partial X^0}{\partial \Omega} \Delta_t \Omega + \frac{\partial X^0}{\partial \omega} \Delta_t \omega + \frac{\partial X^0}{\partial v} \Delta_t v, \\ \Delta_t Y^0 &= \\ \frac{\partial Y^0}{\partial a} \Delta_t a + \frac{\partial Y^0}{\partial e} \Delta_t e + \frac{\partial Y^0}{\partial i} \Delta_t i + \frac{\partial Y^0}{\partial \Omega} \Delta_t \Omega + \frac{\partial Y^0}{\partial \omega} \Delta_t \omega + \frac{\partial Y^0}{\partial v} \Delta_t v, \\ \Delta_t Z^0 &= \\ \frac{\partial Z^0}{\partial a} \Delta_t a + \frac{\partial Z^0}{\partial e} \Delta_t e + \frac{\partial Z^0}{\partial i} \Delta_t i + \frac{\partial Z^0}{\partial \Omega} \Delta_t \Omega + \frac{\partial Z^0}{\partial \omega} \Delta_t \omega + \frac{\partial Z^0}{\partial v} \Delta_t v. \end{aligned} \quad (7-36)$$

Частные производные легко получить, дифференцируя (7-34); заметим, что r есть функция a, e и v .

В этих выражениях мы использовали возмущение истинной аномалии $\Delta_t v$ вместо возмущения эпохи перигея $\Delta_t T$.

Возмущения, выраженные в терминах C_{nm} и S_{nm}

Возмущения элементов орбиты находят, интегрируя (7-10):

$$\Delta_t a = \int_{t_0}^t \dot{a} dt, \quad \Delta_t e = \int_{t_0}^t \dot{e} dt, \quad (7-37)$$

Подобное выражение может быть написано и для $\Delta_t v$. Компоненты S , T , W возмущающей силы выражаются в терминах J_n , C_{nm} , и S_{nm} на основании уравнений (7-12), (7-13) и (7-17), где возмущающий потенциал

$$R = -\frac{GM}{a_e} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \left[J_n P_n(\cos \vartheta) - \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right] \quad (7-38)$$

теперь содержит также тессеральные сферические функции.

Выполняя интегрирование в (7-37), получим

$$\begin{aligned} \Delta_t a &= \sum_{n,m} (A_{nm} C_{nm} + \bar{A}_{nm} S_{nm}), \\ \Delta_t e &= \sum_{n,m} (B_{nm} C_{nm} + \bar{B}_{nm} S_{nm}), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7-39)$$

где коэффициенты A_{nm} и т.п. являются функциями времени t и, как правило, имеют период. В выражениях (7-39) зональные и тессеральные гармоники объединены, полагая $J_n = -C_{n0}$ при $m = 0$; эта практика будет продолжена и в дальнейшем.

Подстановка (7-39) в (7-36) дает возмущение прямоугольных координат X^0 , Y^0 , Z^0 в виде следующих функций гармонических коэффициентов $C_{n0} = -J_n$, C_{nm} и S_{nm}

$$\begin{aligned} \Delta_t X^0 &= \sum_{n,m} (L_{nm} C_{nm} + \bar{L}_{nm} S_{nm}), \\ \Delta_t Y^0 &= \sum_{n,m} (M_{nm} C_{nm} + \bar{M}_{nm} S_{nm}), \\ \Delta_t Z^0 &= \sum_{n,m} (N_{nm} C_{nm} + \bar{N}_{nm} S_{nm}), \end{aligned} \quad (7-40)$$

где опять L_{nm} , \bar{L}_{nm} , M_{nm} и т.д. являются функциями времени t .

Эти возмущения добавляются к координатам, вычисленным по формулам (7-34) с использованием элементов орбиты отсчетного эллипса E_0 . Таким образом, мы получаем прямоугольные координаты спутника в виде

$$\begin{aligned} X^0 &= X^0(t; a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0; C_{nm}, S_{nm}), \\ Y^0 &= Y^0(t; a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0; C_{nm}, S_{nm}), \\ Z^0 &= Z^0(t; a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0; C_{nm}, S_{nm}) \end{aligned} \quad (7-41)$$

как *явные* функции времени t , содержащие как *постоянные* параметры элементы орбиты отсчетного эллипса E_0 и гравитационные коэффициенты C_{nm} и S_{nm} . Этот факт определяет преимущество полученных формул (7-41) по сравнению с выражениями (7-34), которые формально намного более простые, но зависят от *переменных* орбитальных параметров оскулирующего эллипса.

Подробный вид выражений (7-41) является довольно сложным. Поэтому мы ограничились лишь описанием процедуры их получения, отсылая читателя за деталями к одной из первых книг по спутниковой геодезии Kaula (1966 а) и к указанным там его статьям.

7.5 Определение тессеральных гармоник и местоположения станций

Зональные сферические функции дают начало вековым и длиннопериодическим возмущениям элементов орбиты a , e и т.д. Поэтому их влияние может быть обнаружено в изменениях параметров орбиты, полученных путем интегрирования по многим вращениям спутника.

Возмущения за счет тессеральных сферических функций имеют намного более короткий период. Наибольший период гармоники порядка $m = 1$ равен одному дню, для $m = 2$ – только половине дня и т.д. Поэтому мы должны искать другой метод, который является достаточно чувствительным, чтобы обнаруживать даже короткопериодические эффекты и извлекать из наблюдений как можно больше информации.

Наблюдаемыми элементами являются сферические координаты спутника относительно станции наблюдения: расстояние s и определяемое двумя углами направление. В соответствии с системой координат X^0, Y^0, Z^0 , введенной в предыдущем разделе, этими углами являются *прямое восхождение* α и *склонение* δ , определение которых показано на рис. 7.5. Углы α и δ представляют собой полярные координаты в трехмерном пространстве и получаются путем фотографирования спутника на фоне звезд, как описано в разд. 7.1. Сегодня их можно считать устаревшими, но полезными для геометрической интуиции и симметрии. Наиболее важными являются расстояния s , измеренные

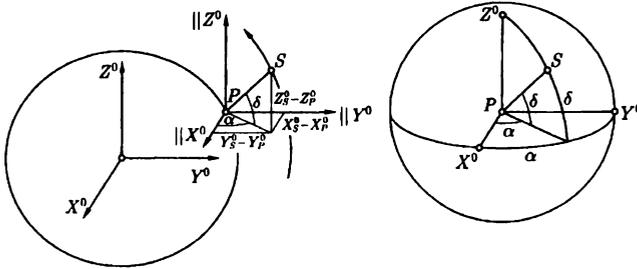


Рис. 7.5: Направление на спутник, определяемое прямым восхождением α и склонением δ (слева – Земля, справа – единичная сфера)

с помощью GPS, радаром или лазером. Заметим, что измерение скорости изменения дальности ds/dt спутника посредством эффекта Доплера также важно для определения тессеральных сферических функций и положения станций.

Обозначая в экваториальной системе $X^0Y^0Z^0$ прямоугольные координаты наземной станции P как X_P^0, Y_P^0, Z_P^0 , а спутника S как X_S^0, Y_S^0, Z_S^0 , мы найдем из рис. 7.5, что

$$\begin{aligned} X_S^0 - X_P^0 &= s \cos \delta \cos \alpha, \\ Y_S^0 - Y_P^0 &= s \cos \delta \sin \alpha, \\ Z_S^0 - Z_P^0 &= s \sin \delta, \end{aligned} \quad (7-42)$$

и потому

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{Y_S^0 - Y_P^0}{X_S^0 - X_P^0}, \\ \delta &= \operatorname{arctg} \frac{Z_S^0 - Z_P^0}{\sqrt{(X_S^0 - X_P^0)^2 + (Y_S^0 - Y_P^0)^2}}, \\ s &= \sqrt{(X_S^0 - X_P^0)^2 + (Y_S^0 - Y_P^0)^2 + (Z_S^0 - Z_P^0)^2}. \end{aligned} \quad (7-43)$$

Теперь вычисляем прямоугольные координаты X_P^0, Y_P^0, Z_P^0 станции наблюдений P . Система $X^0Y^0Z^0$, будучи фиксированной относительно звезд, вращается относительно Земли. Поэтому координаты P в этой системе являются функциями времени. Пусть X_P, Y_P, Z_P обозначают координаты P в обычной геоцентрической системе координат, фиксированной относительно Земли. В этой системе ось Z , совпадающая с осью Z^0 , является земной осью вращения; ось X лежит в плоскости среднего меридиана Гринвича с долготой $\lambda = 0^\circ$; ось

У направлена на восток с $\lambda = 90^\circ$. Рисунок 7.6 показывает, что

$$\begin{aligned} X_P^0 &= X_P \cos \theta_0 - Y_P \sin \theta_0, \\ Y_P^0 &= X_P \sin \theta_0 + Y_P \cos \theta_0, \\ Z_P^0 &= Z_P. \end{aligned} \quad (7-44)$$

Угол θ_0 называется *Гринвичским звездным временем*; его значение

$$\theta_0 = \omega t, \quad (7-45)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли. Оно пропорционально времени t и измеряет его в соответствующих единицах. Таким образом, абсолютное Гринвичское время необходимо, чтобы преобразовать земные координаты X_P, Y_P, Z_P к небесным координатам X_P^0, Y_P^0, Z_P^0 , которые требуются в (7-42) и (7-43).

Наконец, подставив координаты станции (7-44) и координаты спутника (7-41) в (7-43), получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(X_P, Y_P, Z_P; t; a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0; C_{nm}, S_{nm}), \\ \delta &= \delta(X_P, Y_P, Z_P; t; a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0; C_{nm}, S_{nm}), \\ s &= s(X_P, Y_P, Z_P; t; a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0; C_{nm}, S_{nm}). \end{aligned} \quad (7-46)$$

Кроме координат станции и времени, здесь содержатся также орбитальные и гравитационные параметры.

Каждое наблюдение дает уравнение типа (7-46). Имея достаточное количество таких уравнений, мы можем вычислить координаты станции X_P, Y_P, Z_P , орбитальные параметры a_0, e_0 и т.д. отсчетного эллипса и определенный набор гравитационных параметров C_{nm} и S_{nm} . Таков принцип *орбитального метода*. Практически применяются дифференциальные формулы, позволяющие определить методом наименьших квадратов поправки к некоторым приближенным значениям искомых величин. Поэтому реальные аналитические выкладки связаны с получением соответствующих (7-46) дифференциальных формул. Указанные выше подстановки последовательно выполняются в терминах соответствующих дифференциальных выражений. Это позволяет нам работать с линейными уравнениями и использовать эффективный аппарат линейного анализа и матричного исчисления. Хотя принцип этой процедуры достаточно простой, необходимые детали довольно трудоемкие, и читателю опять рекомендуется обратиться к литературе, например, Kaula (1966 a), Montenbruck and Gill (2001). Используется также численный подход.

Помимо этих аналитических задач, решенных достаточно удовлетворительно, геодезическое применение (7-46) сталкивается с трудностями, подобными.

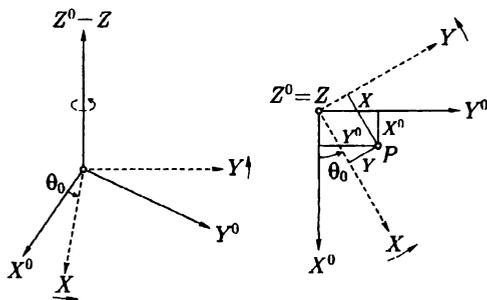


Рис. 7.6: Геоцентрические системы координат $X^0 Y^0 Z^0$ (небесная) и XYZ (земная)

в принципе, тем, которые возникают на практике при определении и зональных сферических функций посредством (7.24), но в данном случае эти трудности являются даже более серьезными. Дело в том, что, строго говоря, бесконечное количество неизвестных C_{nm} , S_{nm} и т.д. приходится определять по конечному числу наблюдений. Чтобы получить решение, необходимо предположить, что эффект членов некоторых высоких степеней пренебрежимо мал. Но даже в этом случае остается очень много неизвестных: координаты станций наблюдений, параметры отсчетной орбиты, гравитационные параметры; к тому же и негравитационные силы, действующие на спутник, должны быть приняты во внимание, например, аэродинамическое сопротивление. Подходящим вычислительным методом при решении обсуждаемой задачи является среднеквадратическая коллокация с параметрами (Мориц 1980 а: Sect. 16).

Чтобы получить надежное решение, наблюдения должны быть равномерно распределены как в пространстве (относительно наклонения орбит используемых спутников), так и во времени.

Современные результаты

В настоящее время (2005 год) мы располагаем несколькими результатами определения коэффициентов тессеральных сферических функций до степени 360 по комбинации спутниковых и наземных данных. Ожидается, что в ближайшем будущем будет достигнута степень 1800. Эти коэффициенты представляют крупномасштабные особенности возмущающего потенциала T и, следовательно, геоида, так как высота геоида $N = T/\gamma$. Имеет место общая согласованность между наиболее существенными аспектами этих определений, отображаемая на картах геоида, но детали этих отображений и особенно индивидуальны коэффициенты различаются довольно заметно.

В качестве примера возьмем первые незональные коэффициенты C_{22} и S_{22} , которые, согласно формуле (2.95), разд. 2.6, отражают неравенство главных экваториальных моментов инерции Земли или, выражаясь несколько вольно, его трехосность. Согласно Groten (2004), мы имеем $C_{22} = (1574.5 \pm 0.7) \cdot 10^{-9}$ и $S_{22} = (-903.9 \pm 0.7) \cdot 10^{-9}$.

Что касается порядка величин, то коэффициент J_2 имеет порядок 10^{-3} , в то время как все другие коэффициенты имеют порядок 10^{-6} . Вот почему Земля может быть так хорошо аппроксимирована эллипсоидом.

7.6 Новые спутниковые проекты изучения гравитационного поля

7.6.1 Мотивация и вводные рассмотрения

Точностные потребности геодезии, геофизики и океанографии относительно детальности поля силы тяжести оцениваются величиной 1 мгал для аномалии силы тяжести. Соответствующая точность высот геоида варьирует от 1 до 2 см. В предспутниковые времена гравитационное поле было известно с высокой точностью только в нескольких регионах мира и получено, главным образом, только с помощью наземных измерений и измерений на борту самолетов. Это означало, что во многих частях мира не было, фактически, никаких доступных данных о силе тяжести.

Зачем вообще нам нужна информация о гравитационном поле? Во-первых, поле силы тяжести, согласно Pail (2003), отражает неоднородность распределения масс в теле Земли и на ее поверхности. Во-вторых, оно составляет основу для определения геоида (см. главу 11), который, в свою очередь, может рассматриваться как материальная отсчетная поверхность для многих процессов геодинамики (это относится к континентам, океанам, большим массам льда, атмосфере и т.д.) и их взаимодействию. Знание неоднородности масс является ключевым для понимания конвекционных движений в земной оболочке, определяющих тектонику плит. Некоторые большие и многие малые плиты литосферы с толщиной порядка 100 – 200 км передвигаются с относительной скоростью несколько сантиметров в год. На краях плит расположены сейсмические зоны и вулканы.

Многие временные процессы, происходящие в Земле, можно расценивать как изменения распределения масс и, следовательно, они влияют на поле силы тяжести. Это относится, например, к океаническим течениям, вариациям ледяных масс, изменениям уровня моря, приливам, вулканам, явлениям ледниковых последествий. Эти процессы можно классифицировать по их периодичности. Некоторые из них являются длиннопериодическими или вековыми, например, движение тектонических плит продолжается на протяжении около

100 миллионов лет. Напротив, изменения ледяных масс могут происходить в течение каких-нибудь 10 лет; могут произойти даже моментальные явления, скажем, землетрясения.

Эти вариации отнесены к глобальной материальной отсчетной поверхности, то есть к геоиду. Поэтому чем более точно мы знаем геоид, тем лучше мы можем понять упомянутые эффекты. Что касается различных дисциплин, то гравитационное поле Земли важно, например, для геодезии, геофизики, океанографии и климатологии.

Геодезия

Как упомянуто в разделе 5.3, геодезия существенно изменилась с появлением GPS. В разделе 5.5 показано, что, несмотря на огромную значимость GPS, потребитель GPS получает только *геометрические* величины: WGS 84 координаты, то есть или геоцентрические прямоугольные координаты X, Y, Z , или вычисленные по ним эллипсоидальные координаты φ, λ, h (см. раздел 5.6.1). Поэтому высота, полученная GPS, то есть высота h над эллипсоидом, является понятием чисто геометрическим. Чтобы преобразовать эти высоты в ортометрические высоты H согласно правилу $H = h - N$, необходимо знать высоту геоида N . Используя спутники для определения гравитационного поля Земли, мы получаем глобально равномерную систему высот.

К тому же, точное знание гравитационного поля Земли улучшает определение орбит спутников.

Океанография

Топографию морской поверхности (see surface topography, SST), то есть разность между геоидом и усредненной морской поверхностью, можно определить из комбинации спутниковой альтиметрии и данных о гравитационном поле Земли. Из рис. 7.7 легко установить, что

$$h = N + SST + \Delta H + a, \quad (7-47)$$

где h – высота спутника-высотомера над эллипсоидом (получается из орбитальных вычислений), N – высота геоида, SST – топография морской поверхности, подлежащая определению, величина ΔH вызвана приливно-отливным эффектом, a – результат измерения высотомером. Отметим, что (7-47) соответствует некоторому упрощенному представлению, так как обычно, например, SST приходится разделять на динамическую и постоянную части. За деталями рекомендуется обратиться к Seeber (2003: Sect. 9.3.1).

Зная топографию морской поверхности, можно объяснить океанические течения и циркуляции, что является чрезвычайно важным для нашего понимания глобальных энергетических изменений. Океанические течения вместе с



Рис. 7.7: Спутниковая альтиметрия

их вариациями во времени являются важным показателем изменений климата.

Такой подход страдает пока от точностной разнородности составляющих. Дело в том, что положение усредненной морской поверхности над эллипсоидом можно было бы определить с точностью до сантиметра. Но для этого такая же точность требуется и при отнесении топографии морской поверхности к геоиду, согласно рис. 7.7, то есть требуется улучшенный геоид соответствующего уровня точности.

Геофизика

Как упомянуто ранее, гравитационное поле Земли отражает неоднородность распределения масс в теле Земли. Знание силы тяжести на земной поверхности и привлечение некоторой дополнительной информации (например, магнитные и сейсмические данные) позволяет построить улучшенные модели строения Земли и ее внутренних процессов. Эти процессы могут вызвать движение тектонических плит, что является причиной землетрясений. Таким образом, как видим, поле силы тяжести является важнейшим звеном в цепи интерактивных процессов. Проще говоря, улучшенное знание поля силы тяжести может привести к более точным методам предсказания землетрясений. Это оправдывает любые усилия для определения гравитационного поля Земли.

7.6.2 Основные принципы измерения

Из сказанного выше потребность в точном определении гравитационного поля Земли становится очевидной. Рассмотрим три различные концепции измерения, приводящие к трем различным методам изучения поля силы тяжести с помощью спутников:

- система спутник-спутник (satellite to-satellite tracking, SST), из которых один высокий, другой низкий, реализованная в проекте CHAMP

(Challenging Minisatellite Payload);

- система спутник-спутник, в которой оба спутника низкие, реализованная в проекте GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment);
- спутниковая градиентометрия, реализуемая в проекте GOCE (Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer).

Прежде чем рассматривать какие-либо детали относительно целей и полезной нагрузки перечисленных проектов, коротко обсудим их основные принципы измерений.

Система спутник-спутник в режиме высокий-низкий

Принцип показан на рис. 7.8. Околосредняя орбита низко летящего спутника (НОО) непрерывно отслеживается спутниками, снабженными глобальными системами местоопределения типа GPS, ГЛОНАСС или, в будущем, Galileo. Заметим, что термин "режим высокий-низкий" не совсем соответствует действительности, так как спутники с GPS, ГЛОНАСС и Galileo находятся на средней околосредней орбите (СОО), а не на высокой околосредней орбите (ВОО). Однако мы придерживаемся системы обозначений в Seeber (2003: Sect. 10.1). Кроме отслеживания спутник-спутник, на спутнике НОО установлен акселерометр. Тем самым измеряются трехмерные возмущающие ускорения, вызванные гравитационным полем Земли. Эти ускорения соответствуют первым производным гравитационного потенциала V . Поле силы тяжести вы-

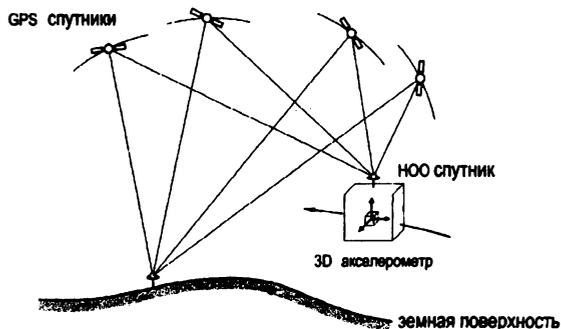


Рис. 7.8: Система спутник-спутник в режиме высокий-низкий

водится путем обращения (в смысле решения обратных задач, см. замечание об обратных задачах в конце раздела 1.13) полученной информации относительно орбиты низко летящего спутника.

Система спутник–спутник в режиме низкий–низкий

Принцип действия показан на рис. 7.9. Два спутника ООН движутся по одной и той же орбите, но отделены несколькими сотнями километров (около 220 км в случае GRACE). Расстояния между ними и скорости изменения этих расстояний измеряются с предельно возможной точностью. Орбита каждого такого спутника подвержена индивидуальному влиянию возмущающих ускорений, которые соответствуют первым производным гравитационного потенциала. Информация от обоих спутников дает разности ускорений. Кроме того, положения спутников ООН определяются другими спутниками с GPS на борту. Так что режим высокий–низкий также, по существу, имеет место. Эффект действия на спутник негравитационных сил, например, за счет аэродинамического сопротивления, должен быть или компенсирован, или измерен акселерометром.

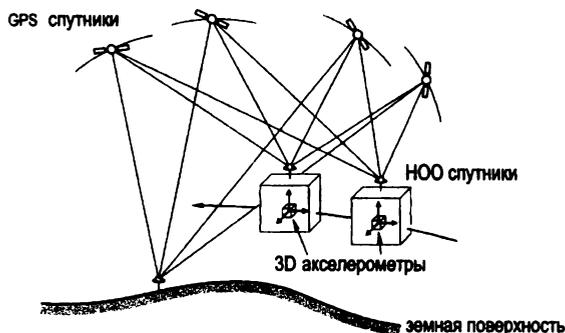


Рис. 7.9: Система спутник–спутник в режиме низкий–низкий

Спутниковая градиентометрия

По сравнению с вышеописанным режимом низкий–низкий системы спутник–спутник с большим базисом между двумя спутниками ООН, можно сказать, что в случае спутниковой градиентометрии базисное расстояние между двумя акселерометрами стремится к нулю. Это достигается размещением обоих акселерометров на одном и том же спутнике (рис. 7.10). Таким образом, спутниковая градиентометрия представляет собой измерение разностей ускорения в трех пространственных взаимно ортогональных направлениях шестью акселерометрами (по два на каждой из трех осей), установленными на одном и том же спутнике. Другими словами, измеренный сигнал есть разность гравитационного ускорения спутника, где гравитационный сигнал является результатом притяжения массами Земли. Следовательно, измеренный сигнал соответствует

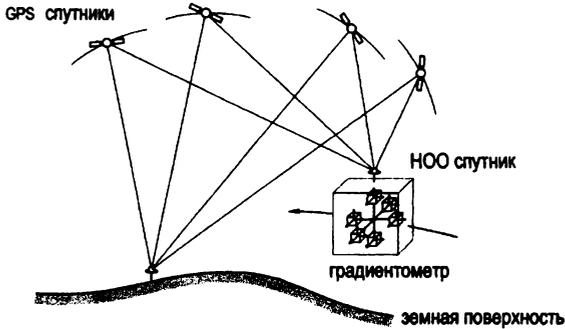


Рис. 7.10: Спутниковая градиентометрия с трехосным градиентометром

производным компонент ускорения силы тяжести, то есть вторым производным гравитационного потенциала. Например, из рис. 7.11 видно, что

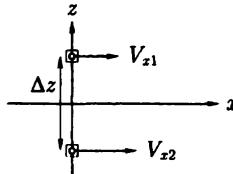


Рис. 7.11: Измерение вторых производных V_{xz}

$$\frac{V_{x2} - V_{x1}}{\Delta z} = \frac{\Delta V_x}{\Delta z} \approx \frac{\partial V_x}{\partial z} = V_{xz}. \quad (7.48)$$

Резюмируя кратко описанные три метода – система спутник-спутник в режиме высокий-низкий, система спутник-спутник в режиме низкий-низкий, спутниковая градиентометрия – мы можем сказать, что основным объектом измерений является гравитационное ускорение. Согласно Rummel et al. (2002), в режиме высокий-низкий системы спутник-спутник определяются координаты местоположения и скорость или ускорение спутника НОО. Трехмерное ускорение соответствует ускорению силы тяжести. Математически это выражается первыми производными гравитационного потенциала.

В режиме низкий-низкий системы спутник-спутник измеряются расстояние между спутниками, скорость его изменения или разности ускорения между

двумя спутниками, движущимися по одной и той же низкой орбите. Разности ускорения между двумя спутниками НОО математически выражаются разностями первых производных гравитационного потенциала на длинном базисе (то есть на расстоянии между двумя спутниками НОО).

В случае спутниковой градиентометрии измеряются разности трехмерного ускорения, относящиеся к очень короткому базису. Градиенту ускорения соответствует градиент компонент силы тяжести. Математически это выражается вторыми производными гравитационного потенциала.

Необходимо иметь ввиду следующую особенность изучения гравитационного поля спутниковыми методами: преобразование результатов измерений со спутниковых высот на земную поверхность приводит к увеличению неизбежных погрешностей измерений пропорционально коэффициенту $(r/R)^{n+1}$, отражающему ослабление гравитационного поля с высотой. Этот эффект минимизируется при использовании орбиты настолько низкой, насколько это возможно, и измерением не самого потенциала V или даже его градиента, а его производных второго порядка как изменений силы тяжести.

7.6.3 Проект CHAMP

Информация о проекте CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) в основном взята с сайта <http://op.gfz-potsdam.de/champ>.

Задуманная и реализованная Научно-исследовательским геоцентром Потсдама (Geoforschungszentrum Potsdam) проект CHAMP преследует следующие основные цели:

- изучение глобального поля силы тяжести, или, конкретнее, уточнение длинноволновой части статического поля и ее временных вариаций (вызванных, например, перераспределениями атмосферных масс, океанической циркуляцией, изменением уровня моря за счет таяния полярного льда);
- изучение глобального магнитного поля, или, конкретнее, уточнение основного магнитного поля и магнитного поля земной коры и их пространственно-временных вариаций;
- профилирование ионосферы и тропосферы, или, более определенно, уточнение атмосферы с точки зрения ее температуры, содержания водяных паров и электронной структуры по данным о преломлении сигналов GPS.

Запуск спутника проекта CHAMP осуществлен 15 июля 2000 года с Российского космодрома Плесецк. Основные параметры:

- орбита почти круговая (эксцентриситет $e < 0.004$) и почти полярная ($i = 87^\circ$),
- начальная высота 454 км.

- проектная длительность – пять лет (но ожидается, что этот срок будет намного больше!),
- вес 522 кг, длина 8.3 м (включая "хвостовую стрелу" 4 м длины), ширина 1.6 м, высота 0.75 м.

Указанную начальную высоту можно рассматривать как компромисс между условиями для измерения магнитного поля и поля гравитационного, так как при измерении гравитационного поля желательна более низкая высота. Но благодаря, главным образом, атмосферному сопротивлению, высота будет постепенно уменьшаться до порядка 300 км и даже меньше, что благоприятно скажется на чувствительности определения гармонических коэффициентов гравитационного поля.

Причина несколько странного размера 4 м хвостовой части объясняется технологическими требованиями магнитометрии – измерительное устройство должно быть отделено от основной части спутника ("магнитная чистота", см. <http://op.gfz-potsdam.de/champ>).

Для достижения целей проекта на борту спутника имеется следующее оборудование :

- двойной частоты приемник GPS, связанный с системой антенн, чтобы определять орбиту спутника CHAMP, используя кодовые и фазовые псевдодалности;
- трехосный акселерометр, чтобы измерять негравитационные ускорения, действующие на космический корабль (аэродинамическое сопротивление, давление солнечного излучения, альbedo и т.д.);
- лазерный ретрафляктор для дублирования системы слежения, чтобы измерять двусторонние расстояния между наземными станциями и спутниками с точностью 1 – 2 см; эти измерения обеспечивают точное определение орбиты;
- магнитометр магнитного потока, измеряющий векторные компоненты магнитного поля Земли (имеется также скалярный магнитометр для обеспечения калибровочных возможностей векторного магнитометра);
- оборудование для определения электрического поля, концентрации, температуры и сноса ионов;
- два усовершенствованных прибора для слежения за звездами, чтобы получать высокоточную информацию относительно ориентировки трехосного акселерометра и цифрового измерителя ионного сноса, а также для корректировки положения спутника.

Мы не касаемся здесь другого оборудования спутника, не имеющего прямого отношения к научным целям проекта, типа газовой двигательной установки,

системы терморегуляции, энергетической системы, обработки данных, телеметрии, следящих и управляющих систем. Мы не упоминаем также элементы сектора управления проекта CHAMP и отсылаем читателя к вышеуказанному сайту.

Как уже объяснялось ранее, основой проекта CHAMP является система спутник-спутник в режиме высокий-низкий. Гравитационное поле Земли возмущает орбиту спутника CHAMP. Эти возмущающие ускорения соответствуют первым производным гравитационного потенциала V . Поэтому гравитационное поле Земли может быть уточнено по результатам измерения гравитационных возмущений орбиты спутника, пользуясь для этого либо численным интегрированием орбиты (Montenbruck and Gill 2001), либо принципом энергетического баланса (Ilk 1999, Jekeli 1999, Sneeuw et al. 2002).

Для дальнейшего знакомства с темой рекомендуются работы Reiger et al. (2003) и Seeber (2003:Sect. 10.2.2).

7.6.4 Проект GRACE

Информация о проекте GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) в основном взята с сайта <http://op.gfz-potsdam.de/grace>.

Проект GRACE – совместный проект Американского национального управления по авионавтике и космонавтике (U.S.National Aeronautics and Space Administration, NASA) и Немецким центром авиационных и космических полетов (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR). Основными целями проекта являются:

- определение глобального гравитационного поля Земли с высокой разрешающей способностью,
- изучение вариации силы тяжести во времени.

Другая задача состоит в изучении с помощью GPS-измерений явлений преломления в ионосфере и тропосфере путем детального определения электропного содержания. Два спутника этого проекта были запущены одновременно 17 марта 2002 г. с космодрома Плисецк (Россия). Основные параметры этих спутников:

- почти круговая (эксцентриситет $e < 0.005$) и почти полярная ($i = 89^\circ$) орбита,
- начальная высота между 485 км и 500 км,
- спутники находятся на расстоянии примерно 220 км друг от друга (чтобы сохранять такое разделение, необходимы орбитальные маневры каждые один или два месяца),
- расчетная длительность миссии – пять лет (но предусмотрена операция по продлению),

- вес каждого спутника – приблизительно 480 кг, длина около 3 м.

Как и в случае с CHAMP, высота спутников GRACE со временем уменьшается прежде всего из-за атмосферного сопротивления. Величина снижения зависит от цикла солнечной активности и может составить приблизительно от 50 км при низкой активности до 200 км при высокой активности за время действия миссии, см. <http://op.gfz-potsdam.de/grace>.

Расстояние между двумя спутниками должно измеряться с максимальной точностью. Скорость его изменения необходимо знать лучше чем $1 \text{ мкм} \cdot \text{с}^{-1}$, что достигается с помощью межспутниковых микроволновых измерений. Основная идея состоит в том, что вариации поля силы тяжести вызывают вариации в расстоянии между этими двумя спутниками; районы с большими значениями силы тяжести воздействуют сначала на первый появившийся там спутник и, следовательно, разгоняют его относительно следующего спутника (Seeber 2003: p. 479).

GRACE будет информировать не только о статическом глобальном поле силы тяжести, но также и о его временных вариациях.

Укажем основное оборудование, которым снабжены спутники проекта для достижения указанных целей.

- Ключевым инструментом GRACE является дальномерная система в полосе частот K , измеряющая изменения расстояния между обоими спутниками, используя двухполосные микроволновые сигналы (то есть две односторонних дальности) с точностью порядка $1 \text{ мкм} \cdot \text{с}^{-1}$. Расстояния измеряются с частотой 10 Гц.
- GPS-приемник служит для точного определения орбиты космического корабля GRACE и доставляет данные для атмосферного и ионосферного профилирования. Чтобы достичь этого, система спутник-спутник реализована не только между двумя спутниками GRACE, но и между GPS-спутниками. Навигационные определения на борту включают положение, скорость и временные отметки. Все это необходимо для системы ориентации. Точная орбита определяется на земле по кодам и несущим псевдодальностям.
- Система ориентации и отслеживания орбиты включает газовую двигательную установку, три магнитных крутильных динамометра, прибор для слежения за звездами, трехосную инерциальную отсчетную систему для измерения угловых скоростей и трехосный магнитометр.
- Акселерометр измеряет все негравитационные ускорения, возникающие на космическом корабле GRACE, например, за счет давления солнечного излучения или аэродинамического сопротивления.
- Лазерный ретранслятор является пассивным инструментом, предназначенным для отражения посылаемых наземными станциями коротких лазерных импульсов. Расстояние между наземной станцией и спутником

GRACE может быть измерено с точностью до 1–2 см. Лазерные данные с ретранслятора используются вместе с данными GPS-приемника для точного определения орбиты.

В 2004 г. научная группа GRACE опубликовала первую версию новой модели гравитационного поля до степени и порядка 150. Соответствующий улучшенный геоид вместе со спутниковой альтиметрией позволит продвинуться в изучении таких проблем океанографии, геодезии и геофизики как океанические теплые перемещения, изменение уровня моря, океанические течения, точная навигация, определение орбит, нивелирование.

Концепция GRACE может трактоваться как одномерный градиентометр с очень длинной базой 220 км (Seeber 2003: р. 480). В отличие от этого, концепция GOCE использует очень короткие базисы (50 см) в трех направлениях.

7.6.5 Проект GOCE

Главные источники этого раздела – www.esa.int/export/esaLP/goce.html, ESA (1999), Müller (2001), Drinkwater et al. (2003), Pail (2003).

Проект GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) является важнейшим в программе (Living Planet Programme) Европейского Космического Агенства (ESA). Основная цель – измерение стационарного поля силы тяжести Земли и определение геоида с очень высокой точностью. А именно, планируется:

- определить аномалии силы тяжести с точностью до 1 мгал,
- определить геоид с точностью до 1–2 см,
- достичь пространственное разрешение лучше, чем 100 км.

Выполнение таких требований предполагает определение гармонических коэффициентов геопотенциала, по крайней мере, до степени и порядка 200 (соответственно пространственному разрешению 100 км), но практически ожидается даже до степени и порядка 250.

С геодезической точки зрения, глобальный геоид с точностью 1–2 см и модель поля силы тяжести с точностью 1 мгал при пространственном разрешении около 100 км может использоваться – среди многих других важных применений – для следующих целей:

- Контроль (или полная замена) традиционного нивелирования нивелированием с помощью GPS. В разделе 4.6 мы уже получили основное уравнение (4–72), $H = h - N$, связывающее ортометрическую высоту H (над геоидом), эллипсоидальную высоту h (над эллипсоидом) и высоту геоида N . Поэтому, если точное значение N можно получить с помощью GOCE, а h измерить с помощью GPS (разделы 5.5, 5.6.1), то сразу получается ортометрическая высота H .

- Приведение различных систем высот к единому общемировому началу позволит сравнивать уровни различных морей (например, Северного и Средиземного) и фиксировать их изменение (например, за счет таяния материковых льдов). Напомним, что, по определению, геоид – это эквипотенциальная поверхность, которая гипотетически совпадает с усредненной поверхностью океана в покое (в отсутствии приливов, течений и других небольших влияний). Следовательно, для точных измерений океанических течений и изменений уровня необходимо знать точный геоид.
- Существенно уточнение определения орбит искусственных спутников и их прогноз. Это особенно важно для низко летящих спутников. Точное знание поля силы тяжести позволит более уверенно отделять возмущения, вызванные статическим полем силы тяжести, от других возмущающих сил (причем не только от негравитационных сил, вызванных аэродинамическим сопротивлением и давлением солнечного излучения, но и от возмущений, вызванных земными и океаническими приливами).

Номинальная продолжительность миссии – 20 месяцев, включая трехмесячный ввод в действие и калибровку и две фазы измерения по шесть месяцев каждая; между фазами измерений – длинный период затмения. Отметим другие важные параметры миссии :

- запуск планируется в августе 2006 г. с космодрома Плисецк (Россия) ¹,
- солнечно-синхронная орбита, наклонение 96.5°,
- высота около 250 км,
- одна наземная станция управления в Кируне, Швеция; руководит миссией Европейский Космический Операционный Центр (European Space Operations Center, ESOC) в Дармштадте.

Основные составляющие полезной нагрузки:

- трехосный градиентометр, составленный из трех пар электростатических сервоуправляемых акселерометров; предназначен для измерения производных силы тяжести в трех взаимно ортогональных направлениях; полезный сигнал – разность гравитационных ускорений (между парой акселерометров, отделенных на 0.5 м) пробной массы внутри космического корабля, вызванных аномалиями силы тяжести за счет неоднородностей масс Земли;
- геодезический двухчастотный (чтобы компенсировать ионосферные задержки) многоканальный GPS-приемник с бескодовой способностью слежения (1) определяет орбиту спутника GOCE и (2) выделяет гравитационную информацию (первая задача выполняется системой спутник-спутник в режиме высокий-низкий, определяющей точное положение

¹Запуск перенесен на конец 2007 года (прим.ред.)

[низкого] космического корабля относительно [высоких] отсчетных GPS-спутников; вторая задача решается посредством анализа и исследовани-ем возмущений орбиты);

- лазерный регранслятор для отслеживания наземными лазерными стан-циями;
- управление ориентацией с приводами ионного ускорителя, приборы сле-жения за звездами, трехосный магнитный динамометр и некоторые дру-гие датчики;
- длина спутника около 5 м, поперечное сечение 1 м², вес около 1000 кг

Ожидаются следующие результаты миссии:

- гармонические коэффициенты гравитационного потенциала, см., напри-мер, (2-80),
- соответствующая ковариационная матрица.

Эти данные позволят точно вычислять высоты геоида, аномалии силы тяже-сти, а также океанографические данные. Важно отметить, что GPS-анализ орбиты GOCE дает информацию о длинноволновой части поля силы тяжести, в то время как спутниковая градиентометрия позволит определить коротко-волновую часть. GOCE является первым проектом, "свободным от торможе-ний", то есть спутник будет совершать свободное движение вокруг Земли. Поэтому требуется точная система ориентации и детальная компенсация сил лобового сопротивления и крутящих моментов. Подробности можно найти в работах Rebhahn et al. (2000), Drinkwater et al. (2003), Pail (2003), или на сайте www.esa.int/livingplanet/goce.

Измерения

Основной принцип градиентометрии в проекте GOCE – измерение разностей ускорения на очень коротком базисе. Для двух акселерометров, расположен-ных на одной оси на расстоянии 50 см друг от друга, можно написать, вслед за Müller (2001) и Pail (2003), следующие два уравнения измерений

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [\mathbf{M} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}] \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_{ng}, \\ \mathbf{a}_2 &= -[\mathbf{M} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}] \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_{ng}, \end{aligned} \quad (7-49)$$

где \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 – измеренные ускорения этих двух акселерометров, а \mathbf{M} – тензор Марусси¹,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \quad (7-50)$$

который включает вторые производные гравитационного потенциала (то есть то, что нам нужно!). Кроме того, кососимметричная матрица

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-51)$$

включает компоненты угловой скорости и описывает ориентацию градиентометра. Так как $\mathbf{\Omega}$ кососимметрична, то тензор $\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}$ симметричен. Наконец, $\Delta\mathbf{x}$ в (7-49) – вектор, направленный от пересечения трех координатных осей к соответствующему акселерометру (у всех таких векторов длина одна и та же), а \mathbf{f}_{ng} включает все негравитационные эффекты (аэродинамическое сопротивление, давление солнечного излучения и т.д.).

Складывая и вычитая два ускорения в (7-49), получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)/2 &= \mathbf{f}_{ng}, \\ (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)/2 &= [\mathbf{M} + \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}] \Delta\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7-52)$$

выделяя, таким образом, негравитационные эффекты \mathbf{f}_{ng} .

Введем обозначение

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M} + \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}. \quad (7-53)$$

Так как $\Delta\mathbf{x}$ надежно известен из геометрии градиентометра, то остается извлечь из $\mathbf{\Gamma}$ тензор градиентов силы тяжести \mathbf{M} . Это может быть сделано с помощью двух соотношений

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^T)/2 &= \dot{\mathbf{\Omega}}, \\ (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^T)/2 &= \mathbf{M} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}, \end{aligned} \quad (7-54)$$

где верхний индекс T обозначает транспонирование. Чтобы проверить эти соотношения, выполним несложные матричные преобразования. Если вообще \mathbf{K} – симметричная матрица, то $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$. Если \mathbf{K} – кососимметричная матрица, то $\mathbf{K} = -\mathbf{K}^T$.

¹Часто это называют матрицей Гессе (прям. ред.)

Обращаясь к (7-53), заметим, что \mathbf{M} симметрична, $\dot{\Omega}$ кососимметрична, и $\Omega\Omega$ симметрична. Поэтому, транспонирование (7-53) дает

$$\Gamma^T = \mathbf{M} - \dot{\Omega} + \Omega\Omega. \quad (7-55)$$

Используя теперь (7-53) и (7-55), мы сразу получаем, что

$$\Gamma - \Gamma^T = 2\dot{\Omega}, \quad (7-56)$$

то есть

$$(\Gamma - \Gamma^T)/2 = \dot{\Omega}. \quad (7-57)$$

Тем самым первое соотношение (7-54) доказано. Чтобы доказать второе соотношение (7-54), сложим уравнения (7-53) и (7-55). Получим:

$$\Gamma + \Gamma^T = 2\mathbf{M} + 2\Omega\Omega, \quad (7-58)$$

или

$$(\Gamma + \Gamma^T)/2 = \mathbf{M} + \Omega\Omega, \quad (7-59)$$

что и завершает доказательство.

Поскольку $\dot{\Omega}$ уже определено формулой (7-57), мы можем получить Ω путем интегрирования:

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\Omega} dt, \quad (7-60)$$

где начальная ориентация $\Omega(t_0)$ может быть получена с помощью слежения за звездами. Возведение $\Omega(t)$ в квадрат дает $\Omega\Omega$, что необходимо для (7-59). Таким образом, выражение

$$\mathbf{M} = (\Gamma + \Gamma^T)/2 - \Omega\Omega \quad (7-61)$$

является конечным результатом для искомого тензора Марусси \mathbf{M} . Много других деталей можно найти в работе Rummel (1986).

Глава 8

Современный подход к определению фигуры Земли

8.1 Введение

В предыдущих главах мы обычно использовали классические наблюдения и следовали взглядам, которые можно назвать консервативным подходом к задачам физической геодезии. Геодезические измерения – астрономические координаты и азимуты, горизонтальные углы, сила тяжести и т.д. – приведены к геоиду, и "геодезическая краевая задача" решается посредством интегральных преобразований Стокса на геоиде. Геоид при этом служит как бы основой для определения местоположения точек земной поверхности.

Преимущество такого подхода состоит в том, что геоид является уровневой поверхностью, что позволяет дать ему простое определение в терминах физически значимого и важного для геодезии потенциала W . Геоид дает наиболее очевидную математическую формулировку горизонтальной поверхности на уровне моря. Вот почему использование геоида упрощает геодезические задачи и согласовывает их с геометрической интуицией.

Недостатком является тот факт, что потенциал W внутри Земли, а следовательно, и геоид $W = \text{const}$, зависят от плотности ρ в силу уравнения Пуассона (2-9),

$$\Delta W = -4\pi G \rho + 2\omega^2. \quad (8.1)$$

Поэтому, чтобы определить геоид или воспользоваться им, необходимо знать, по крайней мере теоретически, плотность масс в каждой точке между геоидом и земной поверхностью. Ясно, что это невозможно, и потому приходится делать некоторые гипотетические допущения относительно плотности, которые теоретически неудовлетворительны, даже при том, что их практическое влияние обычно является довольно небольшим.

Поэтому чрезвычайно важное значение имеет работа *М.С. Молоденского*

(1945 г.), в которой удалось показать, что физическая поверхность Земли может быть определена только с помощью геодезических измерений, не используя плотность земной коры. Это приводит к тому, что понятие геоида оказывается лишним, но математическая формулировка задачи становится более абстрактной и более трудной. И гравиметрический метод, и астрономогеодезический метод должны быть изменены при этом. Но зато аномалии силы тяжести и уклонения отвеса теперь относятся к реальной Земле, а не к уровню моря; высота геоида при этом заменяется понятием "аномалия высоты".

Эти разработки значительно расширили наше понимание основ физической геодезии и предоставили новые мощные методы для решения классических задач. Их фундаментальное теоретическое значение ни в коем случае не уменьшается тем фактом, что многие ученые предпочитают сохранить понятие геоида из-за его концептуальных и практических преимуществ.

В этой главе мы сначала даем краткий обзор традиционного определения геоида посредством редукции силы тяжести, чтобы лучше понять современные идеи. После описания теории Молоденского, мы показываем, как новые методы решают такие классические задачи, как редукция силы тяжести и определение геоида гравиметрическим или астрономогеодезическим методами. Подчеркнем, что термины "современные" и "традиционные" служат просто удобными обозначениями; они не подразумевают никакого дополнительного смысла и никакой предпочтительности.

Часть I: Гравиметрические методы

8.2 Редукция силы тяжести и геоид

Интегралы Стокса, Венинг-Мейнеса и т.п. предполагают, что возмущающий потенциал T является гармонической функцией на геоиде, что равносильно отсутствию каких-либо масс вне геоида. Такое допущение – нет никаких масс вне граничной поверхности – является необходимым, если мы трактуем задачу физической геодезии как краевую задачу теории потенциала. Причина в том, что краевые задачи теории потенциала всегда имеют дело с гармоническими функциями, то есть с решениями уравнения Лапласа

$$\Delta T = 0. \quad (8-2)$$

Это эквивалентно $\Delta V = 0$. Доказательство: $T = W - U$ (U – нормальный потенциал). $\Delta W = 2\omega^2$ вне Земли (нулевая плотность, только вращение, $\Delta U = 2\omega^2$ по той же причине, следовательно $\Delta T = \Delta W - \Delta U = 2\omega^2 - 2\omega^2 = 0$). Так как $\Delta W = 2\omega^2$, а не нулю, то не совсем правильно называть внешний

потенциал силы тяжести W тоже гармоническим, но для простоты мы можем это делать, так как недоразумения маловероятны.

Мы знаем, например, что определение T или N по аномалиям силы тяжести Δg можно рассматривать как третью краевую задачу (см. раздел 1.13).

При этом все массы вне геоида должны быть перемещены внутрь геоида или полностью удалены прежде, чем мы сможем применить интеграл Стокса или связанные с ним подобные формулы. В этом состоит цель различных редукиций силы тяжести. Мы подробно рассматривали эти вопросы в главе 3 и сейчас можем ограничиться указанием только тех теоретических особенностей, которые характерны для обсуждаемой проблемы. Если внешние массы вне геоида удалены или перемещены внутрь, то сила тяжести изменяется. Кроме того, сила тяжести измеряется на поверхности Земли, а необходима на уровне моря. Таким образом, для получения краевых условий на геоиде необходимо рассмотреть два эффекта редукиции силы тяжести.

Регуляризация геоида путем перемещения внешних масс, к сожалению, изменяет уровенные поверхности, а следовательно меняет и геоид. Это – косвенный эффект; измененный геоид называют когеоидом или регуляризованным геоидом.

Суть этого метода может быть описана следующим образом (Jung 1956: p. 578); см. рис. 8.1.

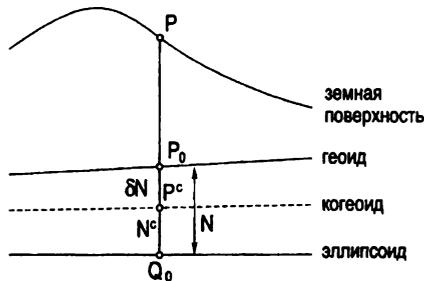


Рис. 8.1: Геоид и когеоид

1. Массы вне геоида путем вычислений или удаляются полностью или перемещаются внутрь геоида. Учитывается влияние этой процедуры на значение силы тяжести g на станции P .
2. Станция измерения силы тяжести перемещается от P вниз к точке P_0 на геоиде и снова учитывается соответствующий эффект на силу тяжести.

3. Косвенный эффект, то есть расстояние $\delta N = P_0 P^c$, получается делением изменения потенциала на геоиде δW на нормальную силу тяжести (теорема Брунса):

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma}. \quad (8-3)$$

4. Станция измерения силы тяжести теперь перемещается от точки P_0 на геоиде к точке P^c на когеоиде (обозначается верхним индексом с). Это дает граничное значение g^c силы тяжести на когеоиде.
5. По редуцированным значениям аномалии силы тяжести

$$\Delta g^c = g^c - \gamma \quad (8-4)$$

по формуле Стокса вычисляется форма когеоида, то есть $N^c = Q P^c$.

6. Наконец, геоид определяется с учетом косвенного эффекта. Высота геоида N , таким образом, получается как

$$N = N^c + \delta N. \quad (8-5)$$

Замечание. На первый взгляд может показаться, что массы между геоидом и когеоидом должны быть удалены, если когеоид оказывается ниже геоида, потому что формула Стокса применяется к когеоиду. Однако в этом нет необходимости, и мы можем не беспокоиться о "вторичном косвенном эффекте". Обоснование этого факта можно найти в работе Moritz (1965: p. 26).

В принципе, любая редукция силы тяжести, которая дает граничные значения на геоиде, одинаково пригодна для определения геоида, при условии, что косвенный эффект принят во внимание должным образом. Поэтому выбор хорошего метода редукции должен быть сделан с других точек зрения, таких как геофизический смысл редуцированных аномалий силы тяжести, простота вычислений, выполнимость интерполяции между станциями измерений силы тяжести, малостью или даже отсутствием косвенного эффекта и т.д. (см. разд. 3.7).

Редукция Буге соответствует полному удалению внешних масс. При *изостатической редукции* эти массы перемещаются вертикально вниз согласно некоторой теории изостазии. *Конденсационная редукция* Гельмерта сжимает внешние массы до поверхностного слоя на геоиде. Редукция Буге и особенно изостатическая редукция (в современной терминологии *топографо-изостатическая редукция*) используются как вспомогательные средства при вычислениях, особенно для облегчения интерполяции.

Аномалия в свободном воздухе в настоящее время используется в трех смыслах.

1. На земном уровне (на физической поверхности Земли) это – обычная аномалия силы тяжести в смысле Молоденского (раздел 8.4).
2. На уровне моря она может пониматься как аналитическое продолжение аномалии Молоденского с земного уровня к уровню моря. Мы рассмотрим это подробно в разделе 8.6. Завершающий обзор можно найти в разделе 8.15.
3. Аномалию в свободном воздухе можно теоретически интерпретировать как приближенное значение классической конденсационной аномалии в смысле Гельмерта (раздел 3.9). Это одна из часто используемых на практике интерпретаций, позволяющая упростить применение формулы Стокса к классической аномалии в свободном воздухе, когда используется только стандартная нормальная редукция измеренной силы тяжести g , см. формулу (8-6) ниже.

Сказанное относится к аномалии силы тяжести в строгом смысле Молоденского (пункт 1 выше). Но возможна и другая интерпретация: это (сознательное или несознательное) использование метода Молоденского в нулевом приближении (то есть, используется только формула Стокса без поправки Молоденского g_1 , см. раздел 8.6). Конечно, это работает только при достаточно плоском рельефе.

Важное замечание. Любопытно, что при этом благоприятное действие оказывает введение поправки за рельеф (раздел 3.4); объясняется это с помощью изостатической редукции, Moritz (1990: p. 244) и возможностью трактовать поправку за рельеф как своеобразную поправку Молоденского g_1 , Moritz (1980 a: Sect. 48).

Совсем другой смысл имеет редукция *Пуанкаре – Прея* (раздел 3.5). Она не предназначена для вычисления значений на краевой поверхности, а аппроксимирует реальную силу тяжести внутри Земли и используется в теории оргометрических высот (глава 4).

Во всех методах редукции необходимо знать плотность распределения масс над геоидом. Практически это приводит к необходимости делать какие-нибудь предположения – например, полагать $\rho = 2.67 \text{ г см}^{-3}$. Второе допущение обычно делается при вычислении редукции в свободном воздухе, которая является частью редукции силы тяжести на геоид: реальный градиент силы тяжести в свободном воздухе полагается равным нормальному градиенту

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \approx -0.3086 \text{ мгал} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (8-6)$$

Эти два предположения фальсифицируют наши результаты, по крайней мере, теоретически.

Второго допущения можно избежать, если градиент в свободном воздухе вычислять методами раздела 2.20. Аномалии Δg , предназначенные для использования в формуле (2-394), должны быть аномалиями силы тяжести, редуцированными к геоиду: из силы тяжести g после выполнения указанных выше шагов 1 и 2 вычитается нормальная сила тяжести γ на эллипсоиде. Это предполагает, что в шаге 2 была использована предварительная редукция в свободном воздухе, полученная с помощью нормального градиента.

Уклонения отвеса

Косвенный эффект сказывается на уклонении отвеса так же, как и на высоте геоида. Мы нашли ранее, что

$$N = N^c + \delta N, \quad (8-7)$$

где N^c – высота когеоида, непосредственный результат формулы Стокса, а δN – косвенный эффект. Дифференцируя N в горизонтальном направлении, мы получаем соответствующую этому направлению составляющую уклонения :

$$\varepsilon = -\frac{\partial N}{\partial s} = -\frac{\partial N^c}{\partial s} - \frac{\partial(\delta N)}{\partial s}. \quad (8-8)$$

Это означает, что к непосредственному результату формулы Венинг–Мейнеса $-\partial N^c/\partial s$ мы должны прибавить член, представляющий горизонтальную производную от δN (см. также раздел 3.7).

Повторим, что главная цель должна состоять в получении какой-нибудь простой краевой поверхности. Геоид, аппроксимированный эллипсоидом или даже сферой – намного более простая краевая поверхность, чем физическая поверхность Земли, с которой мы теперь собираемся иметь дело.

8.3 Геодезические краевые задачи

Однако нетрудно понять основные принципы. Хорошо известно, что вектор силы тяжести \mathbf{g} и потенциал силы тяжести (геопотенциал) W в пространстве связаны соотношением

$$\mathbf{g} = \text{grad } W \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right], \quad (8-9)$$

которое показывает, что сила \mathbf{g} – градиент потенциала.

Пусть S обозначает земную топографическую поверхность, а W и \mathbf{g} – геопотенциал и силу тяжести на этой поверхности. Тогда там имеет место соотношение

$$\mathbf{g} = f(S, W), \quad (8-10)$$

то есть вектор силы тяжести \mathbf{g} на S является функцией поверхности S и геопотенциала W на этой поверхности. В самом деле, если поверхность S и геопотенциал W на S даны, то гравитационный потенциал V можно получить простым вычитанием потенциала центробежной силы Φ , что хорошо известно (раздел 2.1):

$$V = W - \Phi. \quad (8-11)$$

Потенциал V вне Земли удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V = 0$ и, следовательно, является функцией *гармонической* (раздел 1.3). Поэтому, зная V на S , мы можем получить V и вне S , решая краевую задачу Дирихле (первую краевую задачу теории потенциала), которая практически всегда имеет единственное решение (раздел 1.12), по крайней мере, если V является достаточно гладким на S . Найдя V как функцию во внешнем относительно S пространстве, мы легко получаем силу притяжения $\text{grad } V$. Прибавляя далее известный вектор центробежной силы, мы получаем вектор силы тяжести \mathbf{g} вне и, по условию непрерывности, на S .

Это в точности то, что означает (8-10). При этом понятие *функция* следует понимать в ее современной трактовке, то есть как *правило вычисления*, указывающее, что по заданным S и W на S мы можем единственным образом вычислить \mathbf{g} на S . Таким образом, здесь f представляет собой скорее "нелинейный оператор", чем функцию в ее элементарном смысле, но пока это неважно. Итак, мы можем сформулировать следующие задачи.

- (1) *Краевая задача Молоденского* состоит в определении земной поверхности S по заданным на ней \mathbf{g} и W . Формально, мы должны решить (8-10) относительно S :

$$S = F_1(\mathbf{g}, W), \quad (8-12)$$

и определить, таким образом, *геометрию по силе тяжести*.

- (2) *Краевая задача GPS*. Поскольку сегодня мы имеем в своем распоряжении GPS, то поверхность S можно рассматривать как известную, или, по крайней мере, доступную для определения с помощью GPS. Но если геометрия S известна, то мы можем решить (8-10) относительно W :

$$W = F_2(S, \mathbf{g}), \quad (8-13)$$

и получить *потенциал по силе тяжести*. В дальнейшем мы увидим, что это далеко не тривиально, но зато мы имеем теперь возможность *заменить нивелирование* – утомительную и трудоемкую старомодную процедуру – современным и быстрым *GPS нивелированием*, см. раздел 4.6.

Однако, несмотря на внешнее подобие, мы должны понимать фундаментальную разницу: (8-13) решает *краевую задачу с фиксированной краевой поверхностью* (граница S задана), тогда как (8-12) решает *краевую задачу со*

свободной краевой поверхностью (граница S априори неизвестна, "свободная"). Краевые задачи с фиксированной краевой поверхностью обычно более просты, чем задачи со свободной границей.

Но это только формулировка принципа решений, облегчающая понимание основной идеи. Непосредственное выполнение этих соображений сталкивается с большими трудностями, так как подразумевает использование "строгих теорем об обратном преобразовании" из нелинейного функционального анализа. Однако численные решения с помощью рядов – в форме "рядов Молоденского" – являются достаточными для всех современных целей и к тому же выводятся в достаточно доступной форме без привлечения интегральных уравнений (Molodenski 1958; Molodenskii et al. 1962; Moritz 1980 a: Sect. 45). Мы опишем сейчас известное достаточно простое решение проблемы Молоденского и распространим его на современную ситуацию, подразумевающую наличие GPS-данных. Обе задачи будут решены в терминах очень похожих рядов Молоденского.

Простейший пример

Предположим, что поверхность Земли S представляет собой сферу радиуса R . Если не принимать во внимание вращение Земли и считать ее однородным телом, то потенциал W идентичен гравитационному потенциалу V и на поверхности S мы имели бы постоянные значения

$$\begin{aligned} W &= \frac{GM}{R}, \\ g &= \frac{GM}{R^2}. \end{aligned} \quad (8-14)$$

Зная W и g , легко получить радиус сферы S :

$$R = \frac{W}{g}. \quad (8-15)$$

Таким образом, мы решили проблему Молоденского в этой тривиальной, но поучительной ситуации. Мы действительно получили геометрию (то есть R) из физики (то есть g и W)!

8.4 Подход Молоденского и линеаризация

Мы только что видели, что приведение силы тяжести к уровню моря обязательно включает предположения относительно плотности масс Земли над геоидом. Это одинаково верно и для других геодезических вычислений, выполняемых традиционным способом.

Рассмотрим, например, задачу вычисления эллипсоидальных координат φ, λ, h по естественным координатам Φ, Λ, N , как это описано в главе 5. Геометрическая эллипсоидальная высота h над эллипсоидом складывается из ортометрической высоты N над геоидом и высоты геоида N ,

$$h = H + N. \quad (8-16)$$

Определение N было рассмотрено в главе 2 и в других местах этой книги. Чтобы вычислить N по результатам нивелирования, мы нуждаемся в средней силе тяжести \bar{g} вдоль отвесной линии между геоидом и поверхностью Земли (раздел 4.3). Так как сила тяжести g не может быть измерена внутри Земли, мы вычисляем ее с помощью редукции Проя, для которой необходимо знать плотность масс Земли над геоидом.

Эллипсоидальные координаты φ и λ получаются по астрономическим координатам Φ и Λ и компонентам уклонения отвеса ξ и η ,

$$\varphi = \Phi - \xi, \quad \lambda = \Lambda - \eta \sec \varphi. \quad (8-17)$$

Координаты Φ и Λ измеряются на поверхности Земли; ξ и η можно вычислить для геоида по формуле Венинг–Мейнеса, при этом принимается во внимание косвенный эффект, согласно разделу 8.2. Чтобы применить упомянутые формулы, надо или Φ и Λ редуцировать вниз к геоиду, или ξ и η надо редуцировать к земной поверхности. В обоих случаях требуется кривизна отвесной линии (раздел 5.15), которая также зависит от среднего значения \bar{g} через ее горизонтальные производные. Следовательно, опять приходится прибегать к редукции Проя.

Таким образом мы видим, что при традиционном подходе к задачам физической геодезии мы должны знать плотность масс или делать какие-нибудь предположения относительно этого. Молоденский в 1945 году предложил принципиально иной подход, избегающий всякие гипотезы.

Рисунок 8.2 показывает геометрические принципы этого подхода, являющегося, по существу, линеаризацией уравнения (8-10). Точка P земной поверхности S опять проецируется на эллипсоид, согласно Гельмерту. Однако эллипсоидальная высота h теперь определяется как

$$h = H^* + \zeta, \quad (8-18)$$

то есть *нормальная высота* H^* заменяет ортометрическую высоту H , а *аномалия высоты* ζ заменяет высоту геоида N .

Это будет ясно, если рассмотреть поверхность, нормальный потенциал U которой в каждой точке Q равен реальному потенциалу W в соответствующей точке P , так что $U_Q = W_P$, причем точки P и Q располагаются на одной и той же эллипсоидальной нормали. Такая поверхность называется *теллуroidом* (Hirvonen 1960, 1961). Вертикальное расстояние от эллипсоида до теллуroidа есть нормальная высота H^* (раздел 4.4), тогда как эллипсоидальная

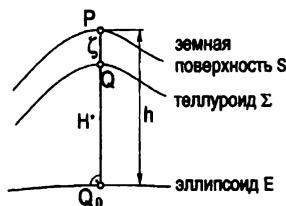


Рис. 8.2: Теллуриод, нормальная высота H^* и аномалия высоты ζ

высота h есть вертикальное расстояние от эллипсоида до земной поверхности. Таким образом, разность между этими двумя высотами представляет собой аномалию высоты

$$\zeta = h - H^*, \quad (8-19)$$

близкую по величине к высоте геоида $N = h - H$, которая является разностью между высотами эллипсоидальной и ортометрической.

Нормальная высота H^* и, следовательно, теллуриод Σ могут быть определены из комбинации нивелирования и гравиметрии, согласно разделу 4.4. Сначала в точке P вычисляется геопотенциальное число $C = W_0 - W_P$ как

$$C = \int_0^P g \, dn, \quad (8-20)$$

где g - измеренная сила тяжести, а dn - нивелирное превышение. Нормальная высота H^* теперь связана с C аналитическим выражением (4-63),

$$H^* = \frac{C}{\gamma_{Q_0}} \left[1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C}{a \gamma_{Q_0}} + \left(\frac{C}{a \gamma_{Q_0}} \right)^2 \right], \quad (8-21)$$

где γ_{Q_0} - нормальная сила тяжести в точке Q_0 эллипсоида. Заметим, что H^* не зависит от плотности.

Нормальная высота H^* точки P на земной поверхности идентична эллипсоидальной высоте h (то есть высоте над эллипсоидом) соответствующей точки теллуриода Q . Если бы геопотенциальная функция W была равна нормальной потенциальной функции U в каждой точке, то Q совпала бы с P , теллуриод совпал бы с физической поверхностью Земли, а нормальная высота каждой точки была бы равна ее эллипсоидальной высоте. Фактически, однако, $W_P \neq U_P$; следовательно, разность

$$\zeta_P = h_P - H_P^* = h_P - h_Q \quad (8-22)$$

не равна нулю. Этим и объясняется появление "аномалии высоты" ζ .

Аномалия силы тяжести теперь определяется как

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q; \quad (8-23)$$

это – разность между фактической силой тяжести, измеряемой на поверхности Земли, и нормальной силой тяжести на теллуриоиде. Нормальная сила тяжести на теллуриоиде, которую мы будем кратко обозначать γ , вычисляется по нормальной силе тяжести на эллипсоиде γ_{Q_0} посредством нормальной редукции в свободном воздухе, но теперь направленной *вверх*:

$$\gamma \equiv \gamma_Q = \gamma_{Q_0} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} H^* + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} H^{*2} + \dots \quad (8-24)$$

Поэтому новые аномалии силы тяжести (8-23) называют *аномалиями в свободном воздухе*. Они *относятся к земному уровню*, тогда как традиционные аномалии силы тяжести относятся к уровню моря. Поэтому новые аномалии в свободном воздухе не имеют ничего общего с редукцией в свободном воздухе реальной силы тяжести к уровню моря, кроме названия. Это различие никогда не следует забывать.

Правило вычисления γ в точке Q дается формулой (2-215)

$$\gamma = \gamma_{Q_0} \left[1 - 2(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{H^*}{a} + 3 \left(\frac{H^*}{a} \right)^2 \right], \quad (8-25)$$

где γ_{Q_0} есть соответствующее значение на эллипсоиде.

Аномалию высоты ζ можно рассматривать как расстояние между геопотенциальной поверхностью $W = W_P = \text{const}$ и соответствующей сферопотенциальной поверхностью $U = W_P = \text{const}$ в точке P . В разделе 2.14 (рис. 2.15), мы обозначили это расстояние N_P и нашли, что формула Брунса (2-237) также использует эту величину. Следовательно, для $\zeta = N_P$ мы имеем

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad (8-26)$$

где $T = W_P - U_P$ есть возмущающий потенциал на земном уровне, а γ – нормальная сила тяжести на теллуриоиде.

Можно предположить, что ζ связана с наземными аномалиями Δg выражением, аналогичным формуле Стокса для высоты геоида N . И это действительно верно. Однако теллуриод не является уровенной поверхностью, и каждой точке P на земной поверхности соответствует, в общем случае, своя геопотенциальная поверхность $W = W_P$. Поэтому соотношение между Δg и ζ в новой теории значительно более сложное, чем для геоида. В оригинальной формулировке Молоденского задача сводится к некоторому интегральному уравнению, которое может быть решено методом итераций, причем первое приближение

дается формулой Стокса. Мы будем пользоваться эквивалентным, но гораздо более простым подходом, без интегрального уравнения.

Наконец, отметим, что, если аномалии высот ζ отложить от эллипсоида, то получится некоторая поверхность, совпадающая с геоидом на оксанах, потому что там $\zeta = N$, и очень близкая к геоиду в остальных местах. Такую поверхность Молоденский называл *квазигеоидом*. Однако квазигеоид – не уровенная поверхность и не имеет никакого материального воплощения. Ее можно рассматривать как своеобразную уступку традиционной концепции, требующей иметь некоторую поверхность, подобную геоиду. С этой точки зрения, нормальная высота точки есть ее высота над квазигеоидом, так же, как ортометрическая высота есть высота над геоидом.

Возмущение силы тяжести

Как обычно, возмущение силы тяжести определяется как

$$\delta g = g_P - \gamma_P. \quad (8-27)$$

Оно стало типичным для физической геодезии благодаря GPS, потому что GPS определяет эллипсоидальные координаты φ, λ, h точки P , расположенной непосредственно на поверхности Земли; так что теперь в качестве исходных наблюдений можно рассматривать δg , а не Δg .

Линеаризация

Линеаризация одинаково хорошо применима как при решении классической проблемы Молоденского, так и при решении этой проблемы с использованием GPS. Геометрия нам знакома по рис. 8.2.

Мы называем *теллуroidом* поверхность Σ , которая определяется условием

$$U(Q) = W(P). \quad (8-28)$$

Замстим, что (8-28) – поверхностный эквивалент классического соотношения для уровня моря (см. рис. 8.3)

$$U(Q_0) = W(P_0). \quad (8-29)$$

Уравнение (8-28) соответствовало бы условию

$$W(P_0) = W_0 = const, \quad (8-30)$$

если бы поверхность S была эквипотенциальной, то есть геоидом, что имеет место только на акваториях оксанов при обычном упрощенном предположении о совпадении поверхности океана с эквипотенциальной поверхностью, не изменяющейся со временем (рис. 8.3).

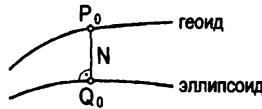


Рис. 8.3: Геоид и эллипсоид

Теория Молодецкого не использует геоид, а ориентирована непосредственно на физическую поверхность Земли. Мы повторяем еще раз, что это – эпохальная идея Молодецкого, которая радикально изменила курс физической геодезии с 1945 года.

Однако сначала мы фиктивно предположим, что S все-таки является эквипотенциальной поверхностью, но это будет лишь начальное приближение в подходе с последовательными возмущениями, соответствующими реальной земной поверхности (ряд Молодецкого). Такой первой аппроксимацией является сферический случай, который рассмотрен в следующем разделе.

А сейчас обсудим линеаризацию более подробно. С помощью GPS эллипсоидальная высота h определяется непосредственно. Она может быть представлена в виде суммы

$$h = H^* + \zeta. \quad (8-31)$$

Здесь H^* – нормальная высота, а ζ – аномалия высоты, определение которой видно из рис. 8.2. На самом деле, при наличии GPS мы непосредственно определяем земную поверхность S , но теллуриод Σ и аномалия высоты ζ необходимы для формулировки краевого условия, так же, как знание геоида не делает лишним референц эллипсоид.

Определение аномалии силы тяжести Δg и возмущения силы тяжести δg имеет на земной поверхности такую же форму, как и в классическом случае геоида и уровня моря:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T, \quad (8-32)$$

$$\delta g = g_P - \gamma_P = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (8-33)$$

Возмущение силы тяжести δg стало практически важным только с появлением GPS, так как эллипсоидальная высота h точки P теперь может быть измерена и, следовательно, может быть определена γ_P – нормальная сила тяжести γ в точке P .

Как обычно, формула Брунса применима как в P_0 (классическая высота геоида N), так и в P (аномалия высоты Молодецкого ζ):

$$N = \frac{T(P_0)}{\gamma}, \quad (8-34)$$

$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma} \quad (8-35)$$

с некоторым приближенным значением γ , типа γ_{45° . Уравнение (8-32) может быть переформулировано как *красное условие для проблемы Молоденского*

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0, \quad (8-36)$$

сравните с (2-251), а для GPS проблемы

$$\frac{\partial T}{\partial h} + \delta g = 0, \quad (8-37)$$

сравните с (2-252).

Эти два граничных условия справедливы как на поверхности S (Молоденский), так и на уровне моря.

В заключение введем сферическую аппроксимацию, игнорируя сжатие f в уравнениях (которые являются линейными зависимостями между малыми величинами).

Замечание: сферическая аппроксимация представляет собой формальную операцию (игнорирующую f в малых *эллипсоидальных* величинах) и не означает использование какой-либо "отчетной сферы" вместо референц-эллипсоида в каком-нибудь геометрическом смысле (Moritz 1980 а: р. 15), что приводило бы к высотам геоида порядка 20 км!

Тогда (8-36) и (8-37) принимают вид

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r} T + \Delta g = 0, \quad (8-38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \delta g = 0. \quad (8-39)$$

Эти уравнения в теории Молоденского и с использованием GPS являются справедливыми как на уровне моря (классика), так и на S (Молоденский).

8.5 Сферический случай

Как договорились, мы работаем со сферой формально (референц-эллипсоид остается на своем месте!). Это означает допущение $r = R = \text{const.}$ Кроме того, мы предполагаем (фиктивно!), что S является уровневой поверхностью.

Раскладывая T и Δg в ряд Лапласа по сферическим функциям, см. (2-322) и (2-320), мы найдем

$$T(\vartheta, \lambda) = \sum_2^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda), \quad (8-40)$$

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_2^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda) \quad (8-41)$$

на сфере, откуда с помощью (8-38) и (2-321) с $r = R$,

$$T = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1}. \quad (8-42)$$

Суммирование традиционно начинается с $n = 2$, а не $n = 0$, по нескольким причинам, одна из которых состоит в том, что значение $n = 1$ привело бы к нулевому знаменателю в (8-42).

Использование (2-325) и (2-326) приводит к хорошо известной формуле Стокса

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g \, d\sigma, \quad (8-43)$$

где

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (8-44)$$

Здесь $P(\cos \psi)$ – полиномы Лежандра, а ψ обозначает сферическое расстояние от точки, в которой должен быть вычислен T .

Точно так же мы получаем для возмущения силы тяжести с граничным условием (8-39), суммируя производную в разделе 2.18,

$$\delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_0^{\infty} \delta g_n(\vartheta, \lambda), \quad (8-45)$$

$$T(\vartheta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta g_n}{n+1}, \quad (8-46)$$

и формула Неймана-Коха

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} K(\psi) \delta g \, d\sigma, \quad (8-47)$$

где

$$K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (8-48)$$

Суммирование этого ряда дает функцию Неймана-Коха

$$K(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - \ln \left(1 + \frac{1}{\sin(\psi/2)} \right). \quad (8-49)$$

Таким образом, для краевой GPS-задачи на сфере решение (8-47) полностью аналогично формуле Стокса (8-43) для классической задачи.

Тот факт, что GPS-задача является концептуально более простой (фиксированная граничная поверхность), чем задача Молоденского (свободная граничная поверхность), проявляется в том, что функция Стокса должна начинаться с $n = 2$, так как $n = 1$ дает нулевой знаменатель, тогда как функция Неймана Коха (8-48) регулярна для всех n .

В обоих случаях аномалия высоты ζ (здесь высота геоида) дается формулой Брунса

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \approx \frac{T}{\gamma_0}. \quad (8-50)$$

В сферической аппроксимации γ в формулах типа Брунса и Стокса можно заменить нашим обычным средним значением $\gamma_0 = \gamma_{45^\circ}$.

Мы увидим, что эти сферические решения составляют основу для принципиального решения задачи Молоденского и GPS-задачи для земной поверхности. Отметим только известный факт, что для земной поверхности S обе эти задачи являются *задачами с косыми производными*, так как направление отвеса не совпадает с нормалью к земной поверхности, по крайней мере, на Земле. Таким образом, краевая GPS-задача для S не совпадает со сферической задачей Неймана, которая всегда имеет ввиду производную по нормали!

8.6 Решение с помощью аналитического продолжения

8.6.1 Идея

Идея очень проста (рис. 8.4). Наши наблюдения Δg или δg , заданные на

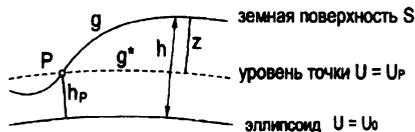


Рис. 8.4: Аналитическое продолжение с земной поверхности к уровню точки

земной поверхности S , "редуцируются", или лучше сказать "аналитически

продолжаются" (вверх или вниз, см. ниже и рис. 8.5), к некоторой уровневой поверхности (или уровневой поверхности нормального потенциала $U = U_P$, что то же самое для нашей цели). В сферическом приближении обе поверхности $U = U_P$ и $U = U_0$ являются концептрическими сферами, но, конечно, лишь в том смысле сферической аппроксимации, как это объяснено выше.

Мы также используем термин "гармоническое продолжение", потому что аналитически продолженная функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Позднее мы объясним это подробнее.

Разложение в ряд Тейлора сразу дает

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta g^* + z \frac{\partial \Delta g^*}{\partial z} + \frac{1}{2!} z^2 \frac{\partial^2 \Delta g^*}{\partial z^2} + \frac{1}{3!} z^3 \frac{\partial^3 \Delta g^*}{\partial z^3} + \dots \\ &= \Delta g^* + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \frac{\partial^n \Delta g^*}{\partial z^n}, \end{aligned} \quad (8-51)$$

где

$$z = h - h_P \quad (8-52)$$

является превышением относительно точки вычисления P . Пока мы предполагаем, что ряд (8-51) сходящийся. Здесь Δg^* – аномалия силы тяжести на уровне точки (рис. 8.4). Использование Ряда Тейлора типично для *аналитического продолжения*. Например, ряд Тейлора является стандартным инструментом аналитического продолжения функций комплексной переменной.

8.6.2 Решение первого порядка

Особенно легко получить решение в виде первого приближения. С γ_0 из (8-50) мы имеем

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \left(\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} h \right) S(\psi) d\sigma + \frac{\partial \zeta}{\partial h} h. \quad (8-53)$$

Это следует из геометрической интерпретации этого уравнения, вытекающей из рис. 8.5а. Мы видим, что аномалии в свободном воздухе Δg с земного уровня "редуцированы" вниз к уровню моря и принимают вид

$$\Delta g^{\text{harmonic}} = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} h \quad (8-54)$$

(верхний индекс "harmonic" обозначает гармоническое продолжение к уровню моря; см. рис. 8.5); интеграл Стокса дает аномалии высот на уровне моря, которые редуцируются вверх к уровню Земли путём добавления члена $\frac{\partial \zeta}{\partial h} h$.

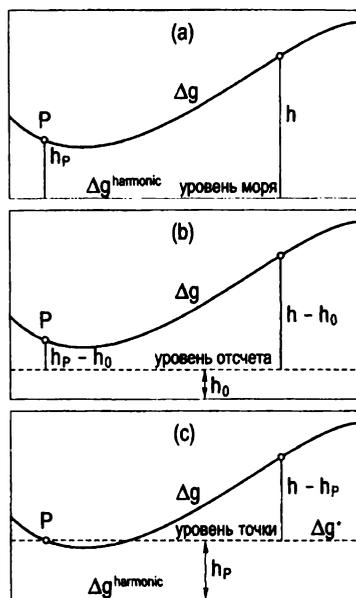


Рис. 8.5: Гармоническое продолжение к уровню моря (а), к произвольному уровню (b) и к уровню точки P (c)

Гармоническое продолжение к уровню точки

Превышение h в (8-53) берется над уровнем моря (см. рис. 8.5а). Но если посмотреть на аргументы этой формулы, то мы обнаружим, что уровень моря не отличается от любого другого уровня. Если мы подсчитываем превышение относительно другого отсчетного уровня, который имеет превышение h_0 над уровнем моря, мы должны заменить h на $h - h_0$ (см. рис. 8.5b). Поэтому (8-53) эквивалентно выражению

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \left[\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_0) \right] S(\psi) d\sigma + \frac{\partial \zeta}{\partial h} (h - h_0). \quad (8-55)$$

В частности, мы можем взять в качестве отсчетного уровня уровень самой точки P так, чтобы

$$h_0 = h_P, \quad (8-56)$$

где P – точка, в которой вычисляется аномалия высоты ζ . При таком выборе последний член в вышеупомянутом выражении обратится в нуль, потому что вне интеграла h всегда означает h_P , и, следовательно, $h - h_0 = h_P - h_P = 0$. Таким образом,

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \left[\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_P) \right] S(\psi) d\sigma. \quad (8-57)$$

Эта формула особенно проста; геометрически она означает, что аномалии в свободном воздухе "редуцированы" (в смысле "аналитически или гармонически продолжены") от уровня Земли до уровня точки вычисления P (см. рис. 8.5b). Таким образом, отсчетный уровень является различным для различных точек вычисления.

Как уже указывалось в начале раздела 8.6.1, рис. 8.5с показывает, что гармоническое продолжение посредством (8-57) представляет собой продолжение *вверх* для поверхностных точек *ниже* уровня P и продолжение *вниз* для поверхностных точек *выше* уровня P .

Важное замечание

Уравнение (8-57) является точной сферической формулой Стокса, примененной к "отсчетной сфере", а именно, к сферическому "уровню точки"! Непосредственное следствие: эта формула может быть просто продифференцирована в *горизонтальном направлении*, чтобы получить точную формулу Венинг-Мейнеса в смысле раздела 2.19 для *уклонения отвеса*. Это имеет важное значение для раздела 8.7.

Вертикальная производная

Вертикальная производная $\partial/\partial r$ может быть выражена в терминах поверхностных значений с помощью известной сферической формулы (раздел 1.14)

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{R} f + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{f - f_Q}{l_0^3} d\sigma. \quad (8-58)$$

Здесь Q – поверхностная точка, в которой вычисляется производная $\partial f/\partial r$ и к которой относится f в первом члене правой части уравнения, σ обозначает единичную сферу, а

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}. \quad (8-59)$$

Если в (8-58) положить $f = \Delta g$, то получим $\partial \Delta g/\partial r$. Первый член правой части в (8-58) много меньше второго и может быть опущен. Поэтому введём линейный оператор дифференцирования L в виде

$$L(f) = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{f - f_Q}{l_0^3} d\sigma. \quad (8-60)$$

Член $\partial \zeta/\partial r$ уже не появляется в (8-57), как это было в (8-53) и (8-55), и больше не потребуется.

Вычислительные формулы; поправка Молоденского

Вычислительную формулу (8-57) мы представим следующим образом: аномалия в свободном воздухе Δg аналитически продолжается (вниз или вверх) от земного уровня до уровня точки P и дает

$$\Delta g^* = \Delta g + g_1, \quad (8-61)$$

где поправка Молоденского (в сферической аппроксимации)

$$g_1 = -\frac{\partial \Delta g}{\partial h}(h - h_P) = -\frac{\partial \Delta g}{\partial r}(h - h_P) \quad (8-62)$$

$$c \quad \frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_Q}{l_0^3} d\sigma. \quad (8-63)$$

Теперь окончательно получаем

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1, \quad (8-64)$$

где

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (8-65)$$

есть обыкновенная формула Стокса, примененная к наземным аномалиям в свободном воздухе Δg , а поправка Молоденского для ζ

$$\zeta_1 = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} g_1 S(\psi) d\sigma. \quad (8-66)$$

Это и есть решение первого порядка, или линейное решение.

Важное замечание

Обратите, пожалуйста, внимание на то, что понятию "линейный", или "первого порядка" придается два различных смысла:

- *общая линеаризация*, линейность в трансформантах аномального потенциала типа N или ζ , как это введено в разделах 2.12 и 8.4 и подразумевается всюду в этой книге, и
- *линейная аппроксимация в h* , косвенно используемая в "поправках Молоденского первого порядка" типа (8-62) или (8-66), но не в (8-67) или (8-68).

В самом деле, при аппроксимации более высокого порядка

$$\Delta g^* = \Delta g + g_1 + g_2 + g_3 + \dots \quad (8-67)$$

и

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots \quad (8-68)$$

Обобщая (8-66), мы имеем

$$\zeta_i = \frac{R}{4\pi \gamma_0} \iint_{\sigma} g_i S(\psi) d\sigma, \quad (8-69)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$

Для уклонения отвеса мы получим подобные выражения, см. раздел 8.7; сравните также (8-75) и (8-76).

8.6.3 Решение более высокого порядка

Следующие рекуррентные формулы являются несколько более сложными и их можно пропустить.

В работе Moritz (1980 a: Sect. 45) можно найти рекуррентную формулу для поправочных членов g_n

$$g_n = - \sum_{r=1}^n z^r L_r(g_{n-r}), \quad (8-70)$$

начиная с

$$g_0 = \Delta g. \quad (8-71)$$

Здесь оператор L_n также определяется рекуррентно:

$$L_n(\Delta g) = n^{-1} L_1[L_{n-1}(\Delta g)] \quad (8-72)$$

начиная с

$$L_1 = L, \quad (8-73)$$

где оператор дифференцирования L определен выражением (8-60), а z дается формулой (8-52).

8.6.4 Проблемы аналитического продолжения

Аналитическое продолжение, основу которого составляет теория функций комплексных переменных, означает расширение области определения функции при помощи рядов Тейлора. Комплексные функции двух переменных всегда удовлетворяют уравнению Лапласа и потому являются гармоническими.

Функции трех переменных, удовлетворяющие уравнение Лапласа, также, как мы знаем, называются гармоническими. Аналитическое продолжение лучше всего выполнять опять с помощью рядов Тейлора, при этом аналитическое продолжение обычно называют *гармоническим продолжением* (Kellogg 1929: Chap. X).

Выше мы не совсем правильно использовали известный термин "редуцирование" в смысле "аналитического" или "гармонического" продолжения, но будем для краткости, и впредь это делать. Как мы уже видели в разд. 8.2 и увидим в разд. 8.9, это не является редукцией силы тяжести в традиционном смысле, то есть в смысле явного перемещения масс. Ряд Тейлора с первым членом (8-54) есть некоторая *аналитическая* операция, действующая на внешний потенциал непосредственно на уровне Земли, сохраняя уравнение Лапласа $\Delta W = 0$. (Фактически, $\Delta W = 2\omega^2$, но мы пока забудем о земном вращении, как это мы делали в (8-2), и будем полагать $\omega = 0$ и $W = V$.) Так что это – гармоническая функция, и наша "редукция" в действительности представляет собой *аналитическое продолжение* по гармоничности, или кратко – *гармоническое продолжение*. **Гармоническое продолжение с помощью рядов – ключевое понятие современной физической геодезии, от проблемы Молоденского до среднеквадратической коллокации.** Его полное значение постепенно проявится в дальнейшем, и мы увидим, что оно является удивительно простым и общим. Символы типа $\Delta g^{\text{harmonic}}$ будут связаны с гармоническим продолжением. В дальнейшем мы по-прежнему будем иногда пользоваться термином "редуцирование вниз", или "продолжение вниз" вместо "гармонического продолжения вниз", и говорить "редуцирование вверх"

в подобном смысле. Мы также пользуемся термином "продолжение вверх". Неуклюжее выражение "гармоническое продолжение вверх" будет использоваться только в сомнительных случаях. Также возможно выражение "аналитическое продолжение". Все это означает одно и то же, и путаница здесь вряд ли возможна.

Теперь мы видим, почему для f в (8-58) могут использоваться аномалии силы тяжести Δg на уровне Земли, тогда как эквивалентное выражение (2-394) было первоначально выведено для аномалий силы тяжести на уровне моря. Так как $\Delta g^{\text{harmonic}}$ и Δg отличаются только членами порядка h , то отличие между используемым в (8-62) $\Delta g^{\text{harmonic}}$ или Δg вызывает погрешность только порядка h^2 , что пренебрежимо в линейной аппроксимации.

Аналитическое продолжение: исторические замечания

Использование в физической геодезии аналитического продолжения имеет интересную историю. Впервые этот подход рассматривал сам Молоденский еще до 1945 г., но скоро он отверг его! Молоденский был очень серьезным математиком с критическим отношением к математической строгости, и потому он не был удовлетворен интуитивными эвристическими подходами, столь обычными в математической физике, а также в данной книге.

Дело в том, что аналитическое продолжение внешнего гравитационного потенциала внутри земных масс вполне может оказаться сингулярным в некоторых точках. Как строгий математик, Молоденский отклонил использование сингулярных функций для регулярных целей.

Однако аналитическое продолжение продолжало проявлять непродолимую привлекательность благодаря своей простоте. Оно было вновь открыто примерно в 1960 А. Вьерхаммер. В 1963 г. на Генеральной Ассамблее Международного Союза Геодезии и Геофизики в Беркли (Калифорния) один из авторов данной книги (Г.М.) говорил Бьерхаммеру (Vjerhammer) об упомянутых выше трудностях, но Бьерхаммер отказывался относиться к ним серьезно. После долгого обсуждения он убедил Г.М., что аналитическое продолжение строго возможно для дискретных граничных условий (все наши наземные измерения силы тяжести дискретны) и приближенно возможны для непрерывных граничных условий.

Строгость этим интуитивным соображениям придала идея Крауна (1969) о том, что теореме Рунге – хорошо известную в теории аппроксимации аналитических функций комплексной переменной – следует применить и к проблеме аналитического продолжения гармонических функций в пространстве. Теорема Рунге в форме Крауна говорит о том, что даже если внешний геопотенциал не может быть регулярно продолжен с земной поверхности S внутрь, это может быть сделано непрерывно после как угодно малого изменения геопотенциала на S . Другое историческое замечание: теорема Крауна Рунге для

гармонических функций в пространстве восходит к Szegő и к Walsh (оба ≈ 1929), см. Frank and Mises (1930: pp.760 762). О приоритетах всегда говорить опасно! Детальное обсуждение этих вопросов можно найти в работе Moritz (1980a: Sects. 6 to 8).

Еще раз о законности аналитического продолжения

Давайте подведем итоги. Предположение этого метода состоит в возможности аналитического продолжения внешнего гравитационного потенциала в виде регулярной гармонической функции вниз к уровню моря. Это возможно тогда и только тогда, когда возможно сдвинуть массы вне эллипсоида внутрь таким образом, что потенциал вне Земли остается неизменным, или, другими словами, если аналитическое продолжение возмущающего потенциала T является регулярной функцией всюду между земной поверхностью и эллипсоидом. Поэтому возникает вопрос о возможности аналитического продолжения внешнего потенциала вниз к уровню моря.

Строго говоря, как уже отмечалось ранее, ответ должен быть отрицательным из-за нерегулярностей топографии (Molodenski et al. 1962: p. 120; Moritz 1965: Sect. 6.4). Этот факт связан также с расходимостью рядов по шаровым функциям для внешнего потенциала в окрестности земной поверхности (разд. 2.5).

Однако теорема Краурупа–Рунге допускает аналитическое продолжение внешнего потенциала вниз к уровню моря *с точностью, достаточной для всех практических целей*. На самом деле, это возможно даже с любой как угодно высокой точностью; если вас не удовлетворяет точность 1 мгал, то можете затребовать точность 10^{-3} мгал или 10^{-1000} мгал!

Бьерхаммер указал, что предположение о полном непрерывном покрытии земной поверхности значениями силы тяжести в каждой точке, откуда и следует вышеупомянутый отрицательный ответ, является нереалистичным, поскольку мы можем измерять силу тяжести только в отдельных дискретных точках. Если цель физической геодезии понимать как *определение поля силы тяжести, совместимого с результатами дискретных наблюдений*, то всегда возможно найти потенциал, который может быть аналитически продолжен вниз к эллипсоиду. Этот факт служит теоретической базой для *среднеквадратической коллокации*.

Здесь мы пуждаемся только в одном результате: **не надо волноваться об аналитическом продолжении! Это всегда возможно с любой как угодно малой погрешностью, хотя и не равной 0.**

На этом основании Марыч и Мориц в том же 1969 году независимо нашли элементарное решение аналитическим продолжением в форме бесконечного ряда, названного "рядом Молоденского". Детали можно найти в работе Moritz (1980a): первоначальная форма ряда Молоденского, полученного пу-

тем решения интегрального уравнения, указана в разд. 45. В разд. 46 описано доказательство Пеллинина о том, что *простое "решение аналитическим продолжением"* и *решение интегрального уравнения Молоденского являются эквивалентными*, то есть ряды почленно равны!

Подчеркнем, что аналитическое продолжение представляет собой чисто математическую концепцию, независимую от плотности топографических масс. Таким образом, это не "введение редукции силы тяжести через черный ход", что противоречило бы духу теории Молоденского.

8.6.5 Другая перспектива

Рассмотрим рис. 8.6. Допустим, что выполнено аналитическое продолже-

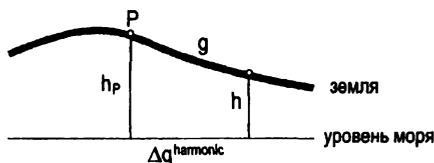


Рис. 8.6: Аномалии в свободном воздухе на уровне Земли, Δg , и на уровне моря, $\Delta g^{\text{harmonic}}$

ние Δg вниз к уровню моря и получено $\Delta g^{\text{harmonic}}$. Аномалии на уровне моря $\Delta g^{\text{harmonic}}$ генерируют на физической поверхности Земли поле аномалий силы тяжести Δg , идентичное фактическим аномалиям силы тяжести на земной поверхности, полученным из измерений. Поэтому аномалии силы тяжести, которые они генерируют вне Земли, также должны быть идентичными фактическим аномалиям силы тяжести вне Земли, так как функция $r \Delta g$ является гармонической, согласно разд. 2.14.

(Замечание: мы последовательно используем обозначение Δg для уровня Земли, $\Delta g^{\text{harmonic}}$ для уровня моря и Δg^* для уровня точки; см. рис. 8.5.)

Из этого следует, что гармоническая функция T , полученная по $\Delta g^{\text{harmonic}}$ согласно обобщению Пизетти (2-302) формулы Стокса

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g^{\text{harmonic}} S(r, \psi) d\sigma, \quad (8.74)$$

идентична реальному возмущающему потенциалу Земли *вне и на ее поверхности*.

Приложения

Предположим, что мы получили каким-нибудь способом (например, с помощью упомянутого выше ряда Тейлора, или методом коллокации, рассмотренной в главе 10, или с помощью высокоточных спутниковых наблюдений) продолженное вниз к уровню моря значение $\Delta g^{\text{harmonic}}$. Тогда мы можем точно вычислить внешнее гравитационное поле, соответствующие сферические гармоники и т.д. посредством обычных формул из глав 2 и 6, если только заменить в них Δg на $\Delta g^{\text{harmonic}}$. Например, коэффициенты сферических функций гравитационного потенциала могут быть получены путем разложения функции $\Delta g^{\text{harmonic}}$ согласно разделам 1.9 и 1.6. Если надо вычислить аномалию высоты ζ в точке P на уровне Земли, то надо иметь в виду, что P находится *выше* эллипсоида и потому надо пользоваться формулами для внешнего поля силы тяжести. С помощью формулы Брунса получим

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g^{\text{harmonic}} S(r, \psi) d\sigma, \quad (8-75)$$

где $r = R + h$, а h – топографическая высота точки P в том или ином смысле главы 4, см. (6-57). (У нас нет сейчас необходимости в точном определении, и сказанное означает, что h *формально* добавляется к постоянному радиусу R общеземной сферы, которая не имеет реальной геометрической интерпретации!) Функция $S(r, \psi)$ выражается посредством (2-303), (6-22) или (6-35). Точно так же ξ и η , будучи характеристиками уклонения отвеса выше уровня моря, должны быть вычислены с помощью (6-41) и второго и третьего уравнений (6-30). Это дает

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{t}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g^{\text{harmonic}} \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \cos \alpha d\sigma, \\ \eta &= \frac{t}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g^{\text{harmonic}} \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \sin \alpha d\sigma, \end{aligned} \quad (8-76)$$

где $\partial S(r, \psi)/\partial \psi$ выражается второй формулой (6-32) или второй формулой (6-36). Линейная аппроксимация (8-74), очевидно, эквивалентна (8-53).

Эта косвенная процедура – продолжение вниз к уровню моря и опять продолжение вверх к уровню Земли или выше – имеет то преимущество, что требуются только обычные сферические формулы, но тем не менее все нерегулярности земной топографии полностью принимаются во внимание. Продолжение Δg вниз должно быть выполнено только единожды; получающиеся аномалии $\Delta g^{\text{harmonic}}$ могут быть сохранены и использованы для всех дальнейших вычислений.

Так же, как функция Δg связана с $\Delta g^{\text{harmonic}}$ аналитическим продолжением, так и ζ и N^{harmonic} связана с высотой "гармонического геоида". Окончательный и, надеемся, не слишком трудный обзор будет дан в разд. 8.15.

Пояснение на примере из повседневной жизни

Вообще "аналитическое продолжение" означает продолжение той же самой математической формулой: рядом Тейлора, уравнением Лапласа, или даже каким-нибудь элементарным уравнением в явном виде.

Можно рассмотреть значение аналитического продолжения с помощью совсем тривиального примера из повседневной жизни (рис. 8.7). Предположим, что некто едет на автомобиле по дороге, которая сначала является совершенно прямой; в точке B , однако, дорога внезапно превращается в круговую кривую. Итак, водитель сначала ведет машину по прямому отрезку пути. К сожалению,

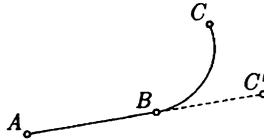


Рис. 8.7: Иллюстрация аналитического продолжения

он устал и его клонит ко сну как раз в тот момент, когда прямолинейная дорога внезапно переходит в круговую кривую. Нашему сонному водителю не удастся своевременно повернуть руль, и он продолжит ехать прямо, в результате чего автомобиль теряет дорогу. К счастью, поворот был достаточно мягкий, и водителю удалось моментально восстановить управление и заставить автомобиль остановиться в точке C' без больших повреждений. Водитель (один из авторов этой книги) даже нашел полученный опыт полезным и использует его в качестве прекрасного примера, поясняющего в учебных курсах смысл аналитического продолжения!

Гравитационный потенциал соответствует пути ABC , который, при некоторой идеализации, можно считать "кусочно аналитическим", состоящим из прямолинейного отрезка AB и дуги окружности BC . Дорога в точке B непрерывна и дифференцируема, но кривизна терпит разрыв со скачком от 0 до $1/R$, где R – радиус дуги окружности. Поэтому функция "дорога" непрерывна и непрерывно дифференцируема, но имеет разрывную вторую производную в точке B , так же, как функция "гравитационный потенциал" является всюду непрерывной и непрерывно дифференцируемой, но имеет разрывные вторые производные на земной поверхности, как это мы видели в разд. 1.2. Прямая имеет уравнение $y'' = 0$ (что является "одномерным уравнением Лапласа"!) и соответствует тому факту, что внешний потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta V = 0$. Таким образом, ни функцию "дорога", ни функцию "гравитационный потенциал" нельзя считать всюду аналитической функцией, но можно сказать, что каждая из них содержит "линейную", или "гармоническую" часть ($y'' = 0$ или соответствующее уравнение Лапласа $\Delta V = 0$) и "нелинейную"

часть ($y'' \neq 0$ или уравнение Пуассона $\Delta V = -4\pi G \rho$). Для дороги аналитическим продолжением служит прямая, для которой $y'' = 0$ даже вне точки B , то есть путь автомобиля к точке C' без действий сонного водителя; а для потенциала это состоит в том, что он удовлетворяет уравнению $\Delta V_{\text{аналит. продолжение}} = 0$ даже внутри Земли.

8.7 Уклонения отвеса

Поправки Молоденского оказывают значительно большее влияние на уклонения отвеса ξ, η , чем на аномалии высоты ζ . Это видно из сравнения порядка этих величин в горных районах: поправки Молоденского для аномалии высоты имеют порядок 0.3 м, тогда как для уклонений отвеса они могут иметь порядок 0.3 дуговой секунды, что соответствует 10 м (1 дуговая секунда соответствует 30 м в местоположении). *Отличие – более чем на порядок!*

Проще всего рассматривать поправки Молоденского к уклонениям отвеса с помощью аналитического продолжения к уровню точки (разд. 8.6). Дифференцируя (8-57) в направлении север – юг и восток – запад, мы получаем соответствующие формулы Венинг-Мейнеса

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \left[\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_P) \right] \frac{dS}{d\psi} \cos \alpha \, d\sigma, \\ \eta &= \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \left[\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_P) \right] \frac{dS}{d\psi} \sin \alpha \, d\sigma.\end{aligned}\quad (8-77)$$

Геометрическая интерпретация аналогична той, которая дана относительно (8-57). Аномалии силы тяжести Δg "приведены" к уровню точки P , так что мы получаем

$$\Delta g^{\text{harmonic}} = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_P). \quad (8-78)$$

Поскольку эти аномалии относятся к *уровневой поверхности*, то мы можем воспользоваться непосредственно формулой Венинг-Мейнеса, которая и дает (8-77).

Связь с эллипсоидальными геодезическими координатами

Компоненты ξ и η уклонения, получаемые с помощью вышеупомянутых выражений, представляют собой уклонение реальной отвесной линии относительно отвесной линии нормального поля в точке P земной поверхности. Поэтому они определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi^*, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda^*) \cos \varphi.\end{aligned}\quad (8-79)$$

Символы Φ и Λ обозначают астрономические координаты точки P земной поверхности. Символы φ^* и λ^* представляют "нормальные координаты" точки P , определяющие направление нормальной отвесной линии в P ; они не идентичны эллипсоидальным координатам φ и λ (точки) P , являющимся координатами основания Q_0 перпендикуляра к эллипсоиду (рис. 8.8). Нормальные

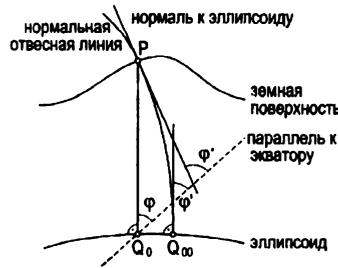


Рис. 8.8: Нормальная широта φ^* и эллипсоидальная широта φ

координаты φ^* и λ^* точки P отличаются от нормальных координат φ' и λ' точки Q_{00} за счет поправок за кривизну нормальной линии отвеса (см. разд. 5.15). Формула (5-147) дает

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \varphi' + f^* \frac{h}{R} \sin 2\varphi, \\ \lambda^* &= \lambda'.\end{aligned}\quad (8-80)$$

Благодаря осевой симметрии, мы имеем строго

$$\lambda' = \lambda, \quad (8-81)$$

так как Q_0 и Q_{00} находятся в плоскости одного и того же эллипсоидального меридиана. Более того, даже в экстремальных случаях расстояние между Q_0 и Q_{00} никогда не превышает нескольких сантиметров. Поэтому можно также утверждать, что

$$\varphi' = \varphi, \quad (8-82)$$

без заметной погрешности. Следовательно, мы можем идентифицировать φ' и λ' с φ и λ , которые являются эллипсоидальными координатами точки P согласно проекции Гельмерта (разд. 5.5). В итоге мы можем заменить вышеуказанные формулы для φ^* и λ^* на следующие:

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \varphi + f^* \frac{h}{R} \sin 2\varphi, \\ \lambda^* &= \lambda.\end{aligned}\quad (8-83)$$

Введение компонентом уклонения согласно проекции Гельмерта определяется как

$$\begin{aligned}\xi_{\text{Гельмерт}} &= \Phi - \varphi, \\ \eta_{\text{Гельмерт}} &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{8-84}$$

Мы видим, что они связаны с ξ и η соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_{\text{Гельмерт}} &= \xi + f^* \frac{h}{R} \sin 2\varphi, \\ \eta_{\text{Гельмерт}} &= \eta.\end{aligned}\tag{8-85}$$

Следовательно, ξ и $\xi_{\text{Гельмерт}}$ различаются за счет нормальной редукции за кривизну отвесной линии,

$$-\delta\varphi_{\text{нормал}} = f^* \frac{h}{R} \sin 2\varphi.\tag{8-86}$$

Компоненты уклонения $\xi_{\text{Гельмерт}}$ и $\eta_{\text{Гельмерт}}$ используются в астрономогеодезических вычислениях; ξ и η получаются из гравиметрии по формулам типа (8-77) и (8-88) ниже.

Эти соотношения *математически* вполне аналогичны соответствующим уравнениям (5-138) традиционного метода, использующего геоид, но теперь, с использованием *нормальной* кривизны, такое серьезное препятствие как поправка за кривизну отвесной линии *практически* принадлежит прошлому.

Замечание о точности

Точность проблемы с применением теории Молоденского по сравнению с тем, о чем говорилось в конце разд. 2.21, даже ухудшается, так как в горном районе почти невозможно вычислить поправки Молоденского с точностью, скажем, $0.03''$, и поэтому наблюдения там нельзя непосредственно использовать для точного определения горизонтальных местоположений.

Астрономические полевые наблюдения широт, долгот и азимутов имеют точность порядка $0.3''$, что достаточно для вычисления классической тригонометрической сети и астрономогеодезического определения геоида (разд.. 5.14).

8.8 Возмущения силы тяжести: случай GPS

Основной факт состоит в том, что "поправки Молоденского" g_n для возмущений силы тяжести идентичны аналогичным поправкам для Δg . Причина в том, что возмущение силы тяжести δg имеет точно такое же аналитическое поведение, как и аномалия силы тяжести Δg , поскольку $r \delta g$ является гармонической функцией, как и $r \Delta g$. Таким образом, аргументы – буквально те же самые, только Δg надо заменить на δg и пользоваться формулой Неймана-Коха (8-47) вместо формулы Стокса; то же имеет место и для формулы Венинга-Мейнеса.

Поэтому мы получаем

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \delta g K(\psi) d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} g_n K(\psi) d\sigma, \quad (8-87)$$

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \delta g \frac{dK}{d\psi} \cos \alpha d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} g_n \frac{dK}{d\psi} \cos \alpha d\sigma, \quad (8-88)$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \delta g \frac{dK}{d\psi} \sin \alpha d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} g_n \frac{dK}{d\psi} \sin \alpha d\sigma.$$

"GPS-формулу Венинг-Мейнеса" (8-88) найдем дифференцированием (8-49)

$$\frac{dK}{d\psi} = -\frac{1 \cos(\psi/2)}{2 \sin^2(\psi/2)} \frac{1}{1 + \sin(\psi/2)}. \quad (8-89)$$

Поправочные члены g_n вычисляются рекуррентно

$$g_n = -\sum_{r=1}^n z^r L_r(g_{n-r}), \quad (8-90)$$

начиная с

$$g_0 = \delta g. \quad (8-91)$$

Надо только замнить Δg на δg и $S(\psi)$ на $K(\psi)$. Операторы L остаются неизменными.

Давайте подытожем еще раз наш подход к решению современных краевых задач (Молоденского и Коха). Трудно работать непосредственно со сложной поверхностью Земли S . Поэтому с помощью аналитического продолжения Δg или, соответственно, δg мы сводим эти сложные задачи к соответствующим сферическим задачам, решение которых является простым и хорошо известным.

Ряды Молоденского для проблемы Молоденского, с одной стороны, и для краевой задачи GPS, с другой стороны, очень близки, потому что Δg и δg имеют одинаковую аналитическую и геометрическую структуру.

В то же время, это подобие очень удивительно, так как две основные краевые задачи математически весьма различны, как это мы видели в разд. 8.3 (сравните формулы (8-12) и (8-13)). Тем не менее, (8-87) действительно дает потенциал, как это требует (8-13): на основании теоремы Брунса, являющейся вездесущей связью между геометрией и физикой, мы имеем

$$T = \gamma \zeta. \quad (8-92)$$

Нужный для (8-13) геопотенциал

$$W = U + T, \quad (8-93)$$

а

$$C = W_0 - W \quad (8-94)$$

– геопотенциальное число, физическая мера высоты над уровнем моря; обычно это число получается с помощью громоздкого нивелирования, но теперь оно вычисляется непосредственно по данным о силе тяжести и представляет собой физический, более общий эквивалент геометрического определения нормальной высоты $H^* = h - \zeta$, согласно уравнению (8-31).

Можно показать, что в линейном приближении поправка Молоденского для возмущения силы тяжести имеет ту же форму, что и поправка для аномалии силы тяжести; каждая из этих поправок вычисляется с использованием или Δg , или δg .

Формулы для поправок Молоденского и их численные значения в линейном приближении одни и те же.

Все это показывает эффективность подхода Молоденского даже в тех задачах, которыми сам он никогда не занимался.

8.9 Редукция силы тяжести в современной теории

В разделе 8.2 мы рассмотрели редукции силы тяжести с точки зрения определения геоида. Весьма замечательно, что эти редукции, такие как редукция Буге или изостатическая редукция, могут быть также включены в новый метод определения непосредственно физической поверхности Земли, хотя и с существенно измененным смыслом (Pellinen 1962; Moritz 1965: Sect. 5.2).

Давайте предположим, что массы вне геоида удалены или перемещены внутрь геоида, как описано в разд. 8.2, и рассмотрим влияние этой процедуры на величины, *относенные к земной поверхности*.

Обозначим изменения в потенциале и в силе тяжести как δW и δg , соответственно; тогда новые значения на земной поверхности будут

$$\begin{aligned} W^c &= W - \delta W, \\ g^c &= g - \delta g. \end{aligned} \quad (8-95)$$

(Ясно, что здесь δg не является аномалией силы тяжести!) Возмущающий потенциал $T = W - U$ становится равным

$$T^c = T - \delta W. \quad (8-96)$$

Физическая поверхность S останется неизменной, но теллуroid Σ изменится, потому что его точки Q определены уравнением $U_Q = W_P$, а потенциал W в любой поверхностной точке P подвержен влиянию смещения масс, согласно (8-95). Расстояние $Q Q^c$ между первоначальным теллуroidом Σ и измененным теллуroidом Σ^c (рис. 8.9) определяется как

$$Q Q^c = \frac{\delta W}{\gamma}, \quad (8-97)$$

согласно теореме Брунса. Это идентично изменению аномалии высоты ζ , так



Рис. 8.9: Теллуroid до и после редукиции силы тяжести, Σ и Σ^c , соответственно

что

$$\delta\zeta = \zeta - \zeta^c = \frac{\delta W}{\gamma}. \quad (8-98)$$

Нормальная сила тяжести γ на измененном теллуroidе Σ^c имеет вид

$$\gamma^c = \gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial h} \delta\zeta = \gamma + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial h} \delta W, \quad (8-99)$$

так что новая аномалия силы тяжести

$$\Delta g^c = g^c - \gamma^c = (g - \delta g) - \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial h} \delta W \right) \quad (8-100)$$

или

$$\Delta g^c = \Delta g - \delta g - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial h} \delta W. \quad (8-101)$$

Редуцированная аномалия силы тяжести Δg^c состоит из аномалии в свободном воздухе (в смысле Молоденского) Δg и двух редукиций:

1. непосредственный эффект смещения внешних масс на g , то есть $-\delta g$; и

2. "косвенный эффект" этого смещения на γ , то есть

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \delta W, \quad (8-102)$$

за счет изменения теллуроида, к которому γ относится.

Повторим еще раз, что все эти аномалии Δg^c относятся к физической поверхности Земли, а не к "земному уровню"!

Если массы вне геоида полностью удалены, то Δg^c есть аномалия Буге; если внешние массы сдвинуты вертикально вниз согласно некоторой изостатической гипотезе, то Δg^c представляет собой изостатическую аномалию, и т.д. Таким образом, мы можем получить "земной эквивалент" для каждой традиционной редукции силы тяжести, при этом связующим звеном служит аналитическое продолжение. См. ниже подробности для изостатических аномалий; относительно апалитического продолжения см. разд. 8.6.

Теперь мы можем описать определение аномалий высоты ζ таким способом, который подобен соответствующей процедуре определения высот геоида N , описанной в разд. 8.2.

1. Массы вне геоида – путем вычислений – или полностью удаляются, или перемещаются внутрь геоида; W и g заменяются на W^c и g^c , согласно (8-95).
2. Точка, в которой вычислена нормальная сила тяжести, сдвигается от эллипсоида вверх к точке теллуроида Q .
3. Косвенный эффект – расстояние $Q Q^c = \delta \zeta$ – вычисляется по формуле (8-98).
4. Точка, к которой относится нормальная сила тяжести, теперь смещается от точки Q теллуроида Σ к точке Q^c измененного теллуроида Σ^c , согласно (8-99).
5. Измененные аномалии высот ζ^c вычисляются по "редуцированным" аномалиям силы тяжести Δg^c (8-101) с помощью любого решения задачи Молоденского типа (8-57) или (8-68).
6. Наконец, нужные аномалии высот ζ получаются с учетом косвенного эффекта согласно

$$\zeta = \zeta^c + \delta \zeta. \quad (8-103)$$

Цель этой несколько усложненной процедуры состоит в том, чтобы использовать известные преимущества аномалий Буге и аномалий изостатических. Аномалии Буге и еще в большей степени изостатические аномалии являются *более гладкими и более представительными*, чем аномалии в свободном воздухе, и потому их можно легче и точнее интерполировать.

Таким образом, изостатические аномалии силы тяжести Δg^c в новом смысле являются полным аналогом традиционных изостатических аномалий; то же можно сказать и относительно любого другого типа редукции силы тяжести. Разница в том, что теперь изостатические аномалии и др. относятся к физической поверхности Земли так же, как и аномалии в свободном воздухе. Если изостатические аномалии в этом новом смысле аналитически продолжить от земной поверхности вниз к геоиду, то получим изостатические аномалии в обычном традиционном смысле. В настоящее время под влиянием процедуры "удаления-восстановления" (remove-restore principle) обычно говорят топографо-изостатическая редукция, но сами аномалии продолжают называть изостатическими.

Следовательно, изостатические аномалии в обычном смысле (на уровне моря) и изостатические аномалии, соответствующие новому определению (на земном уровне) связаны через аналитическое продолжение. Этот факт приводит к двум выводам. Во-первых, разность между изостатическими аномалиями согласно этим двум определениям будет небольшой, потому, что расстояние, вдоль которого выполняется это аналитическое продолжение, есть лишь высота над уровнем моря, и потому что изостатическая редукция обеспечивает наибольшую гладкость аномальному полю силы тяжести. Эта разность является значительно меньшей, чем соответствующее отличие между аномалиями в свободном воздухе на земном уровне и на уровне моря. Понятно, что этот факт дает преимущество при вычислениях, если в формулах типа (8-74) используются изостатические аномалии.

Во-вторых, если для получения аномалий высот используется описанный в предыдущем разделе метод продолжения вниз, то мы получаем соотношение между традиционным и современным использованием редукции силы тяжести. Как мы только что видели, аномалии силы тяжести Δg^{c*} на уровне моря, полученные путем продолжения вниз изостатических наземных аномалий Δg^c , идентичны изостатическим аномалиям в традиционном смысле. Следовательно, мы получаем, с одной стороны, аномалии высот

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g^{c*} S(R+h, \psi) d\sigma + \left(\frac{\delta W}{\gamma} \right)_{\text{Земля}}, \quad (8-104)$$

согласно (8-75) и (8-103), а, с другой стороны, высоты геоида

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g^{c*} S(\psi) d\sigma + \left(\frac{\delta W}{\gamma} \right)_{\text{геоид}}, \quad (8-105)$$

согласно обычной формуле Стокса, примененной к Δg^{c*} и (8-5). Так как аномалии высот связаны с высотой h , функция $S(R+h, \psi)$ заменяет в (8-104)

оригинальную функцию Стокса $S(\psi) \equiv S(R, \psi)$, участвующую в (8-105) потому, что высоты геоида относятся к нулевой высоте. Можно было бы также пользоваться γ_0 в (8-104). Итак, возможны следующие шаги.

1. Вычисление аномалии в свободном воздухе на земном уровне, Δg , согласно (8-23).
2. Вычисление изостатической аномалии на земном уровне, Δg^c , согласно (8-101).
3. Продолжение вниз Δg^c посредством (8-54), где Δg и $\Delta g^{\text{harmonic}}$ заменяются на Δg^c и Δg^{c*} . Получающиеся изостатические аномалии на уровне моря, Δg^{c*} , могут теперь использоваться для двух целей: или для
 - 4а. определения физической поверхности Земли, согласно (8-104), или для
 - 4б. определения геоида, согласно (8-105).

Погрешность за счет неточного знания плотности масс ниже земной поверхности сказывается на высотах геоида, как определено в (8-105), но не влияет на аномалии высот (8-104). Это ясно, потому что неправильное предположение относительно плотности означает только, что массы выше уровня моря не полностью удалены, что не хуже, чем если бы эти массы не удалялись вовсе при использовании аномалий в свободном воздухе.

Эта процедура, как увидим позднее, особенно интересна с точки зрения практических вычислений. Она стала популярной под названием "*метод удаления и восстановления*" (remove-restore principle), разработанный K.Colic и др., см. разд. 11.1.

Почти заключительное замечание о редукции в свободном воздухе

Казалось бы, простая тема о редукции в свободном воздухе на деле оказывается чрезвычайно сложной. Поэтому ее невозможно скомпоновать в какой-нибудь один блок. Задача напоминает гору, которую можно исследовать только при наличии доступа к ней с разных сторон. Первоначальный взгляд был сделан в главе 3, но затем читателю было предложено обратиться к параграфу "Многогранность редукции в свободном воздухе" из разд. 3.9. Теперь намного проще понять сделанные там замечания. То, что теперь мы понимаем под гармоническим продолжением, дает нам возможность *интерпретировать редукцию в свободном воздухе как редукцию силы тяжести за счет перемещения масс*: топографические массы перемещаются внутрь Земли таким способом, что внешний потенциал остается неизменным. Это мало отличается от редукции Рудзкого, где неизменным остается *геоид*. Однако, в то время как редукция Рудзкого "конструктивна" в том смысле, что ее осуществление может быть описано, наша теперешняя интерпретация редукции в свободном воздухе как гармоническое продолжение неконструктивна и представляет собой пример некорректно поставленной задачи; см. Anger and Moritz (2003) и

www.inas.tugraz.at/forschung/InverseProblems/AngerMoritz.html, а также рис. 8.10.

Важное замечание

Изостатические аномалии силы тяжести и топографо–изостатически редуцированные уклонения отвеса (разд. 8.14) являются основными исходными данными для среднеквадратической коллокации в горных районах (разд. 11.2). Таким образом, пространственный подход по Молоденскому является основным даже для среднеквадратической коллокации!

Упражнение

Сбор всех замечаний в отдельную статью о различных аспектах редукции в свободном воздухе был бы хорошей темой работы семинара. Авторы предлагают премию 500 евро, "Премия Молоденского", наиболее интересному обзору по этой теме.

8.10 Определение геоида по наземным аномалиям

Мы видели, что возможно определить физическую поверхность Земли (посредством аномалий высоты ζ) и направление отвеса на ней (посредством компонентов уклонения ξ и η) по аномалиям в свободном воздухе, отнесенным к земной поверхности. Если отложить ортометрическую высоту H по отвесной линии от физической поверхности вниз, то геометрическое место концов даст нам геоид (рис. 8.11). Эту геометрическую идею можно сформулировать аналитически следующим образом. Традиционно высота h над эллипсоидом дается как

$$h = H + N, \quad (8-106)$$

а согласно современной теории

$$h = H^* + \zeta. \quad (8-107)$$

Отсюда следует, что

$$N - \zeta = H^* - H. \quad (8-108)$$

Это означает, что разность между высотой геоида N и аномалией высоты ζ равна разности между нормальной высотой H^* и ортометрической высотой H . Так как ζ является также высотой квазигеоида, то эта разность есть расстояние между геоидом и квазигеоидом.

Согласно разд. 4.5, эти две высоты определяются как

$$H = \frac{C}{\bar{g}}, \quad H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}}, \quad (8-109)$$

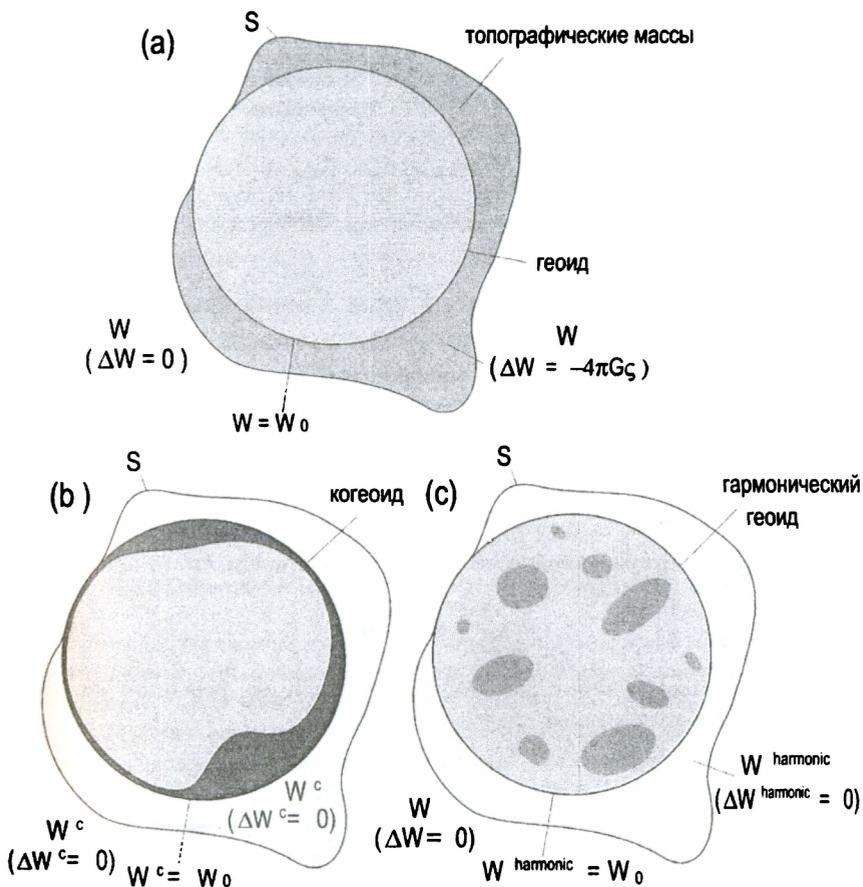


Рис. 8.10: (а) Геоид и топографические массы. (б) перемещение масс при редукации силы тяжести, (с) "плохо определенное" перемещение масс при редукации в свободном воздухе как гармоническое продолжение

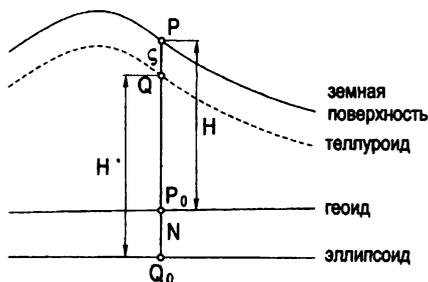


Рис. 8.11: Геоид на глубине H ниже земной поверхности

где C – геопотенциальное число, \bar{g} – сила тяжести, средняя по отвесной линии между геоидом и земной поверхностью, а $\bar{\gamma}$ – нормальная сила тяжести, средняя по нормальной отвесной линии между эллипсоидом и теллуридом. Исключая C , находим

$$H^* - H = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H, \quad (8.110)$$

что также есть расстояние между геоидом и квазигеоидом, см. (8.108); следовательно,

$$N = \zeta + \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H. \quad (8.111)$$

Аномалия высоты ζ может быть выражена, например, формулой Молоденского (8.57). В результате мы получаем

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} g_1 S(\psi) d\sigma + \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H, \quad (8.112)$$

где g_1 определяется формулой (8.62). Таким образом, N определяется интегральной формулой Стокса, примененной к аномалии в свободном воздухе на земном уровне, и двумя маленькими поправками, где

1. член, содержащий g_1 , отражает эффект топографии;
2. член, содержащий $\bar{g} - \bar{\gamma}$, представляет расстояние между геоидом и квазигеоидом.

Если этими поправками пренебречь, то высоты геоида N получаются по интегральной формуле Стокса с использованием аномалий в свободном воздухе. Впервые это было отмечено Стоксом в 1849 году. Новый подход Jeffreys (1931), основанный на тождествах Грина, послужил началом нескольких полезных

разработок, которые достигли своей кульминации в работе Молоденского и других.

Преимущество этого способа определения N состоит в том, что плотность масс выше уровня моря участвует только косвенно в виде влияния на ортометрическую высоту H через среднюю силу тяжести \bar{g} , вычисляемую с помощью редукции Проя (разд. 3.5). Следовательно, высота геоида N , полученная этим способом, имеет такую же погрешность, как и погрешность ортометрической высоты за счет неточного знания плотности масс.

Важно, что аномалия силы тяжести Δg в этом методе относится к земному уровню и представляет собой разность между силой тяжести на земной поверхности и нормальной силой тяжести на теллуриде. Вместо непосредственного использования аномалии в свободном воздухе мы можем также использовать другие аномалии силы тяжести – например, изостатические аномалии в смысле разд. 8.9.

Повторим простое, но фундаментальное правило: Δg , δg , ξ , η , ζ , полученные в соответствии с теорией Молоденского, **первоначально всегда относятся к физической поверхности Земли, а не к уровню моря!**

8.11 Первый баланс

Новые методы, описанные в этой главе, предназначены прежде всего для определения физической поверхности Земли, но они также достаточно удовлетворительны и с точки зрения определения геоида (разд. 8.10). Их существенная особенность состоит в том, что аномалии силы тяжести *теперь* относятся к земной поверхности, вне зависимости от того, имеем ли мы дело с аномалиями в свободном воздухе, или с аномалиями изостатическими, или какнибудь иначе редуцированными аномалиями силы тяжести (разд. 8.9).

В результате мы немедленно приходим к понятию аномалии высоты ζ , отделяющей эквипотенциальную поверхность от поверхности сфероида на земном уровне. Откладывая аномалии высоты от эллипсоида вверх мы получаем квазигеоид. Эта подобная геоиду поверхность не имеет никакого реального воплощения, но дает удобный зрительный образ аномалий высоты. Откладывая ортометрические высоты от земной поверхности вертикально вниз, мы получаем геоид.

Поучительно сравнить геоид и квазигеоид. Высота геоида N и высота квазигеоида ζ связаны выражением (8-111), или

$$N - \zeta = \frac{g - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H = H^* - H. \quad (8-113)$$

Член $g - \bar{\gamma}$ приближенно равен аномалии Буге; это можно увидеть, используя

(4.32) для γ вместе с

$$\bar{\gamma} \approx \gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial h} H. \quad (8.114)$$

Величину $\bar{\gamma}$ в знаменателе можно заменить обычной константой γ_0 . Так как аномалия Буге менее чувствительна к локальным нерегулярностям топографии, коэффициент локально постоянен и потому существует приближенная линейная зависимость между ζ и локальными нерегулярностями высоты H . Другими словами, *квазигеоид отражает топографию* (рис. 8.12). Чтобы по-

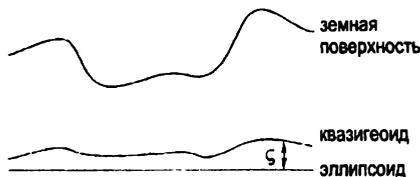


Рис. 8.12: Квазигеоид

лучить количественную оценку разности $N - \zeta$, мы снова используем тот факт, что

$$\frac{g - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \approx \frac{\Delta g_B}{981 \text{ гал}} \approx 10^{-3} \Delta g_B, \quad (8.115)$$

где Δg_B есть аномалия Буге в гал, так что

$$(\zeta - N)_{[\text{км}]} \approx -\Delta g_{B[\text{гал}]} \cdot H_{[\text{км}]}. \quad (8.116)$$

Так как на континентах Δg_B обычно величина отрицательная, то разности $\zeta - N$ там обычно положительны. Другими словами, на суше аномалия высоты ζ обычно больше соответствующей высоты геоида N . На океанах $\zeta = N$. Если $\Delta g_B = -100 \text{ мгал} = -0.1 \text{ гал}$ и $H = 1 \text{ км}$, то

$$\zeta - N = 0.1 \text{ м}. \quad (8.117)$$

Кроме того, аномалия Буге зависит от *средней* высоты местности, уменьшаясь в среднем приблизительно на 0.1 гал на каждый 1 км высоты. Полагая в качестве приближенной оценки, которую можно проверить по картам аномалий Буге,

$$\Delta g_{B[\text{гал}]} = -0.1 H_{[\text{км}]}^{\text{ср}}, \quad (8.118)$$

мы получаем

$$(\zeta - N)_{[\text{м}]} \approx +0.1 H_{[\text{км}]}^{\text{ср}} H_{[\text{км}]}, \quad (8.119)$$

где H есть высота станции, а $H^{\text{ср}}$ — средняя высота рассматриваемой области. Видим, что $\zeta - N$ растет быстрее, чем высота, почти как квадрат высоты.

Но надо иметь в виду, что эта формула дает только общее представление о порядке величины (см. также разд. 11.3).

Так как $\zeta - N = H - H^*$, то данные выше приближенные формулы можно использовать также и для оценки разности между ортометрической высотой H и нормальной высотой H^* .

Теоретически важный момент состоит в том, что квазигеоид, но не геоид, может быть определен без гипотетических предположений относительно плотности. Устранение подобных предположений было руководящей идеей исследований Молоденского. Однако ортометрические высоты не сильно подвержены влиянию погрешностей в плотности. Погрешность в H за счет неполного знания плотности вряд ли превышает 1–2 дециметра даже в экстремальных случаях (разд. 4.3). По-видимому, это меньше, чем неопределенность соответствующего значения ζ из-за неизбежных погрешностей интерполяции и тому подобному даже при очень хорошем покрытии силой тяжести. Поэтому, если используется метод разд. 8.10, то геоид может быть определен фактически с той же точностью, что и квазигеоид. Замечим, что теоретически возможно даже полностью исключить погрешности, возникающие от использования геоида (Moritz 1962, 1964). Таким образом, вполне стоит сохранить понятие геоида с его физической реальностью и другими его преимуществами.

Как сильно формулы Молоденского отличаются от соответствующих формул Стокса и Вининг–Мейнесса? Отличие ζ от результата оригинальной формулы Стокса дается эквивалентными выражениями

$$\zeta_1 = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} g_1 S(\psi) d\sigma \quad \text{или} \quad \zeta_1 = -\frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \frac{\partial \Delta g}{\partial h} (h - h_P) S(\psi) d\sigma, \quad (8-120)$$

согласно (8-62) и (8-66). Эта поправка может быть даже меньше, чем разность $\zeta - N$ (см. разд. 11.3).

Уместно опять отметить, что уклонение отвеса относительно более подвержено поправкам Молоденского, чем аномалия высоты. Как показали исследования Молоденского на модели (Molodenski et al. 1962: pp. 217–225), в экстремальных случаях эта поправка может достигать нескольких секунд. Это много, так как 1" в уклонении соответствует 30 м в положении. Другие численные оценки приведены в главе 11.

Подведём итоги применения формул Стокса и Вининг–Мейнесса непосредственно к аномалиям в свободном воздухе, без всяких поправок. Формула Стокса дает аномалии высот ζ с высокой точностью; для многих практических целей мы можем, к тому же, идентифицировать эти аномалии высот с соответствующими высотами геоида N . Формула Вининг–Мейнесса дает уклонения отвеса на земном уровне, которые являются относительно менее точными, но часто вполне приемлемыми.

Преимуществом современной теории является ее прямая связь с внешним

полем силы тяжести Земли, которое является особенно важным в настоящее время для вычисления влияния гравитационных возмущений на траектории движения космических кораблей и орбиты искусственных спутников. Сразу ясно, что наземные величины, типа аномалий силы тяжести в свободном воздухе, лучше подходят для этой цели, чем соответствующие значения, относенные к геоиду, который отделен от нужного поля внешними массами. Для вычисления внешнего поля и соответствующих шаровых функций наиболее подходящим является метод, описанный в разд. 8.6.5 (см. также разд. 6.5).

Практически при использовании (8.57) обычно достаточно рассмотреть только линейное приближение. Во многих случаях даже возможно пренебречь поправкой $-(\partial \Delta g / \partial h) h$, идентифицируя аномалии в свободном воздухе на уровне моря $\Delta g^{\text{harmonic}}$ с соответствующими наземными аномалиями Δg . Согласно разд. 3.9, эти аномалии в свободном воздухе $\Delta g^{\text{harmonic}} = \Delta g$ можно также считать приближениями к аномалиям конденсации в смысле Гельмерга. Этого приближения вполне достаточно для вычисления внешнего поля силы тяжести, шаровых функций, высот геоида или аномалий высот. Для уклонений отвеса обычно требуется более аккуратный подход, такой как учет косвенного эффекта с помощью редукции силы тяжести (разд. 8.2) или современные методы разд. 8.9.

В высоких и крутых горах подход Молоденского через аномалии в свободном воздухе сталкивается с такими практическими трудностями как ненадежность интерполяции, большие поправки и другие численные проблемы. Чтобы избежать их, следует пользоваться изостатической редуkcией в современном смысле. Таким образом, столкновение между идеями "традиционными" (геоид) и "современными" (типа Молоденского) приводит к важному синтезу. Другим примером слияния идей является среднеквадратическая коллокация, см. разделы 10.2 и 11.2.

Для дальнейшего изучения, особенно исторических аспектов, читателю рекомендуется книга Molodenski et al. (1962) и M.S.Molodensky Anniversary Volume под редакцией Moritz and Yurkina (2000).

Часть II: Астрономогеодезические методы по Молоденскому

8.12 Некоторые предварительные сведения

До недавнего времени вычисление детального геоида или детального потенциального поля силы тяжести в ограниченных областях, особенно в горных районах, не представляло особого интереса. Это можно объяснить по-разному. В центре внимания в течение десятилетий были глобальные определения гео-

ида или по спутниковым данным, или из комбинации спутниковых и гравиметрических данных (Lerch et al. 1979, Reigber et al. 1983, Rapp 1981). Даже (почти) чисто гравиметрические глобальные и локальные геоиды были успешно вычислены (March and Chang 1979), нечто среднее между классической Heiskanen (1957) и современным локальным геоидом (Kühnreiber 2002 b). Отличным обзором подобных результатов является работа Tsiavos (2002). На океанах геоид теперь известен с точностью, по видимому, до нескольких сантиметров благодаря спутниковой альтиметрии. К сожалению, спутниковая альтиметрия не применима на суше. Детальное определение геоида на континентах выполнялось гравиметрическим методом, несмотря на серьезные трудности из-за отсутствия достаточного обеспечения гравиметрической съемкой (или отсутствия информации относительно такого обеспечения). Таким образом, мы имеем парадоксальную ситуацию, когда на океанах, долгое время являющихся пасынком геодезии, геоид теперь в общем известен намного лучше, чем на континентах. Однако гравиметрический метод продолжает привлекать теоретиков, потому что ставит очень интересные и глубокие математические задачи, связанные с геодезической краевой задачей, обсужденной выше в этой главе. Обширные практические и теоретические разработки относительно спутникового и гравиметрического определения глобального поля силы тяжести несколько затмили определение детальных геоидов в меньших областях, в частности, астрономогеодезических геоидов. Определения локального геоида особенно трудны в горных районах. Гравиметрический метод не очень хорошо работает в высоких горах. Астрономогеодезический метод, использующий астрономические наблюдения широты и долготы, лучше подходит для этих целей, но отнимает много времени и считается несколько старомодным, возможно, потому, что работать приходится по ночам, что теперь не очень популярно. Использование силы тяжести и астрономогеодезических данных в высоких горах должно включать некоторую топографическую редукцию. К тому же, теория астрономогеодезического метода не так привлекательно трудна, как теория проблемы Молоденского. Наконец, что, видимо, еще важнее, высокогорные области не так уж часто встречаются и, кроме таких стран, как Швейцария и Австрия, являются обычно областями небольших экономических интересов. По этим и другим подобным причинам, основное русло геодезической теории и практики шло мимо проблем, связанных с высокогорьем. Однако, Швейцария хорошо понимала необходимость таких исследований и традиционно была очень активна в работе по астрономогеодезическому определению локального геоида (Elmiger 1969, Gurtner 1978, Gurtner and Elmiger 1983). За ней последовала Австрия (Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung 1983). Обнаружилось, что проблема не только в выполнении необходимых измерений, но и основополагающая теория не столь тривиальна, как можно было подумать, и проявляются весьма интересные ее особенности. Что касается измерений, то снова было доказано, что

астрономические наблюдения в горах вполне выполнимы; см. статьи Erker, Bretterbauer and Gerstbach, Lichtenegger and Chesi in Chap. 2 of Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung (1983) и последовавшую за ними работу Süinkel et al. (1987). Главные преимущества данных астрономогеодезических по сравнению с гравиметрическими для определения локального геоида в горных районах можно сформулировать следующим образом:

1. достаточно иметь астрономогеодезические отклонения отвеса только в области определения геоида; никакие данные вне района работ не требуются, в отличие от гравиметрического метода.
2. погрешности топографической высоты значительно меньше влияют на отклонения отвеса, чем на данные о силе тяжести. Поэтому даже сравнительно грубая модель рельефа оказывается достаточной для использования астрономогеодезических данных.

На самом деле, два типа данных не являются взаимоисключающими; оптимальное определение геоида предполагает комбинацию астрономогеодезических отклонений отвеса, аномалии силы тяжести и, возможно, данных другого типа. Подходящей численной техникой при этом является средисквадратическая коллокация, обсуждаемая в главе 10.

Что касается самих наблюдений, то полезно иметь ввиду, что необходимые отклонения отвеса и аномалии силы тяжести быстро и с достаточной для многих целей точностью способны давать *геодезические инерциальные системы*.

В заключение перечислим различные методы определения геоида:

- традиционные спутниковые методы (Допплер, лазер и т.д.),
- системы спутник – спутник,
- спутниковая градиентометрия,
- спутниковая альтиметрия,
- гравиметрия,
- астрономогеодезические методы и
- наиболее непосредственно – нивелирование с помощью GPS (Sect. 4.6).

Как правило, перечисление этих методов начинается с самого глобального и заканчивается самым локальным методом, то есть, в порядке уменьшения глобальности или увеличения локальности. В общем, порядок соответствует увеличению разрешающей способности и точности. Необходимо еще раз подчеркнуть, что все эти методы дополняют друг друга и для получения наилучших результатов их следует комбинировать. Новые спутниковые проекты описаны в разд. 7.6.

Астрономогеодезический метод по Молоденскому

Оставшаяся часть этой главы детально описывает теорию астрономогеодезического определения локального геоида в районах с трудной топографией и имеет дело, в основном, с теми методами, которые расположены в этом списке ближе к концу. Подробно исследуется роль (и потребность) топографо-изостатической редукции. Численные результаты для Австрии конкретно отвечают на вопросы, которые неоднократно обсуждались нами теоретически, а именно – каковы разности между высотами геоида и аномалиями высот по Молоденскому (высоты квазигеоида), или каков численный эффект аналитического продолжения от земной поверхности к уровню моря (Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung 1983).

В качестве разминки, вернемся к основам и вспомним некоторые важнейшие принципы геометрии Молоденского. Рис. 8.13 иллюстрирует эти понятия. В классической теории геоид определяется своими отклонениями N от



Рис. 8.13: Основы геометрии

референс эллипсоида; N – высота геоида. Геоид есть уровенная поверхность $W = W_0 = \text{const}$ потенциала силы тяжести W ; эллипсоид определяется в качестве уровенной поверхности $U = U_0 = \text{const}$ нормального потенциала силы тяжести U ; постоянные W_0 и U_0 , полагают, как обычно, равными (разд. 2.12).

В современной теории Молоденского (разд. 8.4) каждой точке P земной поверхности ставится в соответствие такая точка Q , которая принадлежит проходящей через точку P нормали к эллипсоиду, и

$$U(Q) = W(P). \quad (8-121)$$

Таким образом, нормальный потенциал U в точке Q равен реальному потенциалу W в точке P .

Это соответствует отмеченному выше классическому соотношению

$$U_0 = U(Q_0) = W(P_0) = W_0, \quad (8-122)$$

вследствие которого U_0 берется равным W_0 (рис. 8.13). Ввиду аналогичного соответствия, аномалия высоты по Молоденскому

$$\zeta = Q P \quad (8-123)$$

является современным эквивалентом классической высоты геоида

$$N = Q_0 P_0. \quad (8-124)$$

Пользуясь аномальным потенциалом

$$T = W - U, \quad (8-125)$$

мы имеем, согласно теореме Брунса,

$$\zeta = \left(\frac{T}{\gamma} \right)_Q, \quad N = \left(\frac{T}{\gamma} \right)_{Q_0}, \quad (8-126)$$

где γ обозначает эллипсоидальную нормальную силу тяжести.

Точки P_0 образуют геоид, а точки Q_0 составляют эллипсоид, при этом обе поверхности являются уровнями (для W и U , соответственно). С другой стороны, точки P принадлежат земной поверхности, а множество точек Q определяет вспомогательную поверхность, которую называют, вслед за Р.А. Нирвопен, теллуroidом. Поскольку ни земная поверхность, ни теллуroid уровнями поверхностями не являются, то ситуация оказывается более сложной, чем в классическом варианте, где мы имеем дело с уровнями поверхностями.

Следуя предложению Молоденского, можно отложить аномалии высот ζ вертикально от референц эллипсоида. В результате получим геоидоподобную поверхность – квазигеоид, и ζ можно трактовать как высоты квазигеоида. В отличие от геоида, однако, квазигеоид не является поверхностью уровня и не имеет какой-либо естественной физической интерпретации. Поэтому можно не пользоваться понятием квазигеоида, а аномалии высот ζ трактовать как величины, отнесенные к земной поверхности (вертикальные расстояния между земной поверхностью и теллуroidом). Резюме дано в разд. 8.15.

Классическая аномалия силы тяжести Δg_0 на уровне моря определяется как

$$\Delta g_0 = g(P_0) - \gamma(Q_0), \quad (8-127)$$

где g обозначает силу тяжести, а γ – нормальную силу тяжести. Пока $g(P_0)$ обозначает фактическую силу тяжести на геоиде, так как редукции силы тяжести путем перемещения масс здесь еще не имеются ввиду. В теории Молодцовского аналогично:

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q). \quad (8\ 128)$$

Величины, отнесенные к уровню моря, мы будем, по мере возможности, сопровождать нижним индексом "0", чтобы отличать их от величин, отнесенных к земной поверхности и не имеющих нижний индекс. Например, Δg_0 относится к уровню моря, а Δg – к земной поверхности.

При работе с GPS мы имеем возмущения силы тяжести

$$\Delta g = g(P) - \gamma(P). \quad (8\ 129)$$

Что касается уклонений отвеса, то следует различать три линии (рис. 8.13):

1. прямая нормаль к эллипсоиду $Q_0 P$,
2. реальная отвесная линия $P'' P$,
3. нормальная отвесная линия $P'_0 P$.

Эллипсоидальная нормаль геометрически определяется как прямая линия, проходящая через точку P перпендикулярно к эллипсоиду. Реальная отвесная линия определяется условием совпадения ее касательной в каждой точке с вектором силы тяжести \mathbf{g} в этой точке; она немного искривлена, но ее кривизна нерегулярна, поскольку обусловлена нерегулярностью топографических масс. Касательная к нормальной отвесной линии в каждой точке совпадает с нормальным вектором силы тяжести γ ; ее кривизна меньше и полностью регулярна.

Точки P_0 , P'_0 и P''_0 совпадают в пределах нескольких дециметров, и в дальнейшем мы не будем их различать, поскольку расстояние в дуговых секундах между P_0 и P''_0 намного меньше, чем эффект кривизны отвесной линии (разд. 5.15). То же справедливо для Q_0 , Q'_0 , и Q''_0 .

Направление вектора силы тяжести \mathbf{g} есть направление (касательной к) отвесной линии. Оно определяется двумя углами – астрономической широтой Φ и астрономической долготой Λ . Пусть Φ , Λ отнесены к земной поверхности (к точке P), а Φ_0 , Λ_0 относятся к геоиду (строго говоря, к точке P''_0). Разности

$$\delta\varphi = \Phi_0 - \Phi, \quad \delta\lambda = \Lambda_0 - \Lambda \quad (8\ 130)$$

отражают эффект кривизны отвесной линии (рис. 8.14). Можно также обратиться к рис. 5.18. Следовательно, мы имеем

$$\Phi_0 = \Phi + \delta\varphi, \quad \Lambda_0 = \Lambda + \delta\lambda. \quad (8\ 131)$$

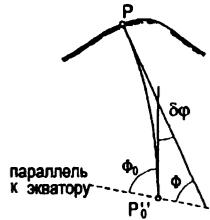


Рис. 8.14: Кривизна отвесной линии вдоль профиля ссевер-юг

Зная кривизну отвесной линии $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, мы могли бы использовать эти простые формулы, чтобы вычислить величины на уровне моря Φ_0 , Λ_0 по наблюдаемым поверхностным значениям Φ , Λ .

Так же, как Φ , Λ связаны с реальной отвесной линией, эллипсоидальная широта φ и эллипсоидальная долгота λ связаны с прямой нормалью к эллипсоиду. Величины

$$\xi = \Phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (8.132)$$

являются компонентами уклонения отвеса в направлениях север - юг и восток - запад. Для произвольного азимута α уклонение отвеса ε определяется как

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha. \quad (8.133)$$

Эти величины ξ , η , ε относятся к земной поверхности. Рис 8.13 показывает ε .

Аналогично имеем для геоида

$$\xi_0 = \Phi_0 - \varphi, \quad \eta_0 = (\Lambda_0 - \lambda) \cos \varphi, \quad (8-134)$$

$$\varepsilon_0 = \xi_0 \cos \alpha + \eta_0 \sin \alpha. \quad (8-135)$$

Посмотрите еще раз на ε_0 на рис. 8.13 и обратите внимание на то, что, как упомянуто выше, мы не различаем нормали в точках Q_0 и Q_0'' .

Кроме того, нам нужно направление нормальной отвесной линии в поверхностной точке P ; оно определяется касательной к нормальной отвесной линии в P ; соответствующие широта и долгота будут обозначаться как $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}$. Эти "локальные" обозначения не следует путать с используемой в более ранних главах сферической координатой φ . Итак, мы имеем

$$\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi_{\text{нормал}}, \quad \lambda = \bar{\lambda} + \delta\lambda_{\text{нормал}}, \quad (8.136)$$

где $\delta\varphi$, $\delta\lambda$ выражают кривизну нормальной отвесной линии. Эти формулы представляют собой "нормальный эквивалент" формулы (8.131): "нормальные поверхностные значения" $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda}$ соответствуют "реальным поверхностным

значениям Φ, Λ , а эллипсоидальные значения φ, λ соответствуют геоидальным значениям Φ_0, Λ_0 . Чтобы сделать аналогию полной, следовало бы заметить $\varphi = \varphi(P_0)$ на $\varphi(P'_0)$, но мы договорились всегда пренебрегать такими разностями.

В отличие от кривизны фактической отвесной линии, кривизну нормальной отвесной линии очень легко вычислить: из (5-147) мы имеем

$$\delta\varphi_{\text{нормал}} = -0.17'' h_{[\text{км}]} \sin 2\varphi, \quad \delta\lambda_{\text{нормал}} = 0, \quad (8-137)$$

где $h_{[\text{км}]}$ обозначает высоту в километрах.

Так как эллипсоидальная нормаль и, следовательно, φ, λ определены геометрически, мы вправе назвать величины (8-132) "геометрическими отклонениями отвеса" на земной поверхности. С другой стороны, нормальная отвесная линия определена физически (или динамически) посредством внешнего поля силы тяжести эквипотенциального эллипсоида. Следовательно, $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$ также определены динамически, и мы можем назвать

$$\bar{\xi} = \Phi - \bar{\varphi}, \quad \bar{\eta} = (\Lambda - \bar{\lambda}) \cos \bar{\varphi} \quad (8-138)$$

"динамическими отклонениями отвеса" на земной поверхности (φ, λ заменены на $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$). На основании (8-136) и (8-137) имеем

$$\bar{\xi} = \xi + \delta\varphi_{\text{нормал}}, \quad \bar{\eta} = \eta, \quad (8-139)$$

так как $\delta\lambda_{\text{нормал}} = 0$. Соответственно, для азимута α

$$\bar{\epsilon} = \bar{\xi} \cos \alpha + \bar{\eta} \sin \alpha. \quad (8-140)$$

Сравните ϵ и $\bar{\epsilon}$ на рис. 8.13 и заметьте, что δ там обозначает кривизну нормальной отвесной линии для азимута α и определяется аналогичной формулой

$$\delta = \delta\varphi_{\text{нормал}} \cos \alpha + (\delta\lambda_{\text{нормал}} \cos \varphi) \sin \alpha = \delta\varphi_{\text{нормал}} \cos \alpha. \quad (8-141)$$

8.13 Еще раз об астрономическом нивелировании

Из рис. 8.15 видны известные дифференциальные соотношения

$$dN = -\epsilon_0 ds, \quad (8-142)$$

где ϵ_0 - отклонение отвеса на геоиде. Интегрирование между точками A и B даёт разность между соответствующими высотами геоида:

$$N_B - N_A = - \int_A^B \epsilon_0 ds, \quad (8-143)$$

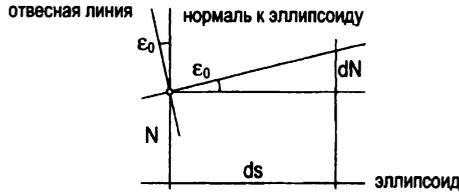


Рис. 8.15: Астрономическое нивелирование по Гельмерту

или приближенно

$$N_B - N_A = -\frac{\varepsilon_{0A} + \varepsilon_{0B}}{2} s_{AB}, \quad (8-144)$$

где s_{AB} обозначает горизонтальное расстояние между A и B , а знак "минус" приписан лишь для удобства. См. разд. 5.14.

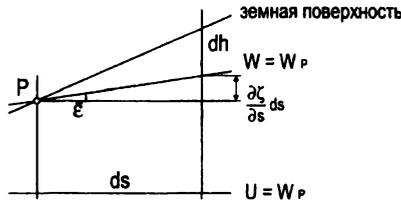


Рис. 8.16: Астрономическое нивелирование по Молоденскому

Соответствующее соотношение для аномалий высот находится следующим образом (Molodensky et al. 1962: p. 125):

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial s} ds + \frac{\partial \zeta}{\partial h} dh. \quad (8-145)$$

Здесь обозначения соответствуют рис. 8.16. Так как земная поверхность не является урванной, мы также имеем вертикальную часть $(\partial \zeta / \partial h) dh$ в дополнение к обычной горизонтальной части $(\partial \zeta / \partial s) ds$. Вертикальная часть является результатом изменения высоты и обычно меньше чем горизонтальная часть.

По аналогии с (8-142), горизонтальная часть определяется величиной

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = -\bar{\varepsilon}, \quad (8-146)$$

где $\bar{\varepsilon}$ обозначает динамическое уклонение отвеса на земной поверхности; см. (8-140) и рис. 8.13. Для вертикальной части мы имеем из (8-126):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{T}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \right) \quad (8-147)$$

или

$$\frac{\partial \zeta}{\partial h} = -\frac{\Delta g}{\gamma} = -\frac{g - \gamma}{\gamma}, \quad (8 \cdot 148)$$

согласно фундаментальному уравнению физической геодезии (8-36).

Следовательно, (8-145) можно записать в виде

$$d\zeta = -\bar{\varepsilon} ds - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh. \quad (8 \cdot 149)$$

Интегрирование этого соотношения приводит к разности аномалии высоты

$$\zeta_B - \zeta_A = - \int_A^B \bar{\varepsilon} ds - \int_A^B \frac{\Delta g}{\gamma} dh; \quad (8 \cdot 150)$$

аномалия силы тяжести Δg относится к земной поверхности, согласно (8-128).

Первый член в правой части представляет интеграл Гельмерта (8-143) от поверхностного уклона $\bar{\varepsilon}$, а второй член – поправка Молодецкого к интегралу Гельмерта, необходимая для получения аномалии высоты. Эта поправка зависит от силы тяжести g на земной поверхности.

8.14 Топографо – изостатическая редукция уклонов отвеса

По причинам, упомянутым в конце предыдущего раздела, естественно попытаться найти метод, который использует известные преимущества топографо – изостатической редукции, но избегает проблем, свойственных редукции в свободном воздухе от поверхностной точки P к геоидальной точке P_0 .

В разд. 8.9 мы обсудили редукцию силы тяжести с современной точки зрения. Вторая формула из (8-95) имеет вид

$$g^c = g - \delta g. \quad (8 \cdot 151)$$

Все относится к земной точке P , а $\delta g = \delta g_{TI}$ – эффект редукции силы тяжести на g , также в P . Топографо изостатическая редукция, которая здесь только и используется, представляет собой гравитационное притяжение топографии минус гравитационное притяжение масс, компенсирующих изостазию, то есть топографии минус изостазия.

Чтобы получить топографо-изостатическую аномалию силы тяжести, мы вычитаем нормальную силу тяжести γ , также отнесенную к земному уровню, точнее, к соответствующей точке теллуроида Q . Таким образом,

$$\Delta g^c = \Delta g - \delta g_{TI}. \quad (8 \cdot 152)$$

Объяснение тривиально: Вы стоите в точке P и наблюдаете, как перемещается топография, чтобы заполнить дефицит за счет изостазии, но каким то чудом Вы все еще остаетесь в точке P , теперь уже в "свободном воздухе".

Применение к уклонениям отвеса

Аномалия силы тяжести является только одним из компонентов аномального вектора силы тяжести, другими двумя являются вертикальные составляющие ξ и η , умноженные, конечно, оба на γ , чтобы получить нужную размерность. Таким образом, ξ и η можно изостатически редуцировать точно таким же способом.

Для ξ и η соотношение (8 152) принимает вид

$$\xi^c = \xi - \xi_{TI} + \delta\varphi_{\text{нормал}}, \quad \eta^c = \eta - \eta_{TI}. \quad (8-153)$$

Посредством (8 139) это можно записать так

$$\xi^c = \tilde{\xi} - \xi_{TI}, \quad \eta^c = \tilde{\eta} - \eta_{TI}. \quad (8-154)$$

Однако, интерпретация (8 154) является довольно простой и строгой: из динамических уклонений отвеса в P , каковыми являются величины $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$, мы вычитаем эффект топографо-изостатических масс ξ_{TI} и η_{TI} , опять же в точке P . Полученные таким образом уклонения отвеса ξ^c и η^c не относятся к (ко-)геоиду; на самом деле, они относятся к земной поверхности!

Но что тогда означает кривизна нормальной отвесной линии $\delta\varphi_{\text{нормал}}$ в (8 153)? Разве она не означает редукцию от земной поверхности к уровню моря? Нет, в формулах (8-139) она обозначает только преобразование между геометрическим и динамическим уклонениями отвеса, причем оба уклонения относятся к точке P земной поверхности. Это также ясно из рис. 8.13, который поясняет формулу

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \delta, \quad (8-155)$$

обобщающую (8 139) для произвольного азимута, δ определяется выражением (8 141).

Интерпретация (8 153) или (8 154) как изостатически редуцированных уклонений отвеса на земной поверхности является точной, тогда как интерпретация (8-8) как уклонения на геоиде была лишь приближенной. Таким образом, мы имеем строгую интерпретацию изостатически редуцированных уклонений отвеса.

Эта интерпретация точно соответствует современным взглядам на редукцию силы тяжести в рамках теории Молодецкого. Согласно этим взглядам, изостатически (или другим способом) приведенные аномалии силы тяжести продолжают относиться к земной поверхности. Классическая редукция силы тяжести (разд. 8.2) включала две процедуры: перемещение массы и сдвиг $P \rightarrow P_0$; новое представление о редукции силы тяжести предполагает только перемещение массы; проблематичного сдвига $P \rightarrow P_0$ не требуется.

Можно сказать, что формально "нормальная редукция в свободном воздухе"

$$F = -\frac{\partial\gamma}{\partial h} h \quad (8-156)$$

также имеет место в теории Молоденского: нормальная сила тяжести γ в новом определении (8 128) аномалии силы тяжести относится к точке Q теллуроида и вычисляется по формуле

$$\gamma = \gamma_{Q_0} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h, \quad (8-157)$$

где $h = Q_0 Q$ обозначает нормальную высоту P . Но вместо редуцирования реальной силы тяжести g вниз от P к P_0 , теперь нормальная сила тяжести редуцируется вверх от Q_0 до Q . В то время как для первого процесса использование нормального градиента $\partial \gamma / \partial h$ проблематично, для второго процесса все обстоит вполне удовлетворительно.

Аналогично можно было бы интерпретировать $\delta \varphi_{\text{нормал}}$ как редукцию φ вверх, скажем, от P_0 к P за счёт кривизны нормальной отвесной линии. Это возможно, потому что допустимо φ в (8 136) относить к P'_0 (потому что P_0 и P'_0 фактически совпадают), и потому что $\bar{\varphi}$ обозначает широту касательной к нормальной отвесной линии в точке P . Эта интерпретация поучительна из-за аналогии с редукцией силы тяжести, хотя трактовка φ и $\bar{\varphi}$ в виде эллипсоидальной и динамической широты одной и той же точки P представляется более естественной. Посмотрите еще раз на ключевой рисунок (рис. 8.13).

Как указано выше, интерпретация ξ^c и η^c как изостатически редуцированных уклонения отвеса на земной поверхности концептуально строга и, следовательно, более точна с практической точки зрения, но это решающее преимущество таит в себе вычислительный недостаток при выполнении интегрирования по профилю: так как теперь интегрировать приходится по земной поверхности, а не по уровенной поверхности типа геоида, то вычисление оказывается более сложным. Вместо простой формулы Гельмерта (8 143), теперь необходимо пользоваться формулой Молоденского (8 150):

$$\zeta_B^c - \zeta_A^c = - \int_A^B \varepsilon^c ds - \int_A^B \frac{g^c - \gamma}{\gamma} dh \quad (8 158)$$

с

$$\varepsilon^c = \xi^c \cos \alpha + \eta^c \sin \alpha, \quad (8 159)$$

и $\Delta g^c = g^c - \gamma$, где g^c – изостатически редуцированное поверхностное значение силы тяжести (измеренное значение g минус притяжение топографо – изостатических масс).

По изостатическим аномалиям высот ζ^c можно получить реальные аномалии высот ζ , добавляя косвенный эффект:

$$\zeta = \zeta^c + \delta \zeta \quad (8 160)$$

с

$$\delta \zeta = \frac{T_{\text{П}}}{\gamma}. \quad (8-161)$$

Это полностью аналогично (8-5) и (8-3), но теперь T_T – потенциал топографо – изостатических масс в поверхностной точке P . Фактически нормальная сила тяжести в (8-3) относится к эллипсоиду, а в (8-161) – к теллуroidу, но в общем случае разница является небольшой.

При непосредственном применении формулы Молодцовского (8-150) для более высоких гор предпочтительной является процедура изостатической редукции, описанная в данном разделе, потому что изостатически редуцированные уклоны отвеса являются гораздо более гладкими и их проще интерполировать. Однако, это чрезвычайно трудосложно с вычислительной точки зрения, так как интегрировать надо вдоль земной поверхности (или, что практически то же самое, по теллуroidу).

Отметим, что указанного недостатка численного характера, связанного с интегрированием по Молодцовскому вдоль земной поверхности, можно полностью избежать, если выполнять вычисления в пространстве: вместо того, чтобы интегрировать по поверхности, можно выполнить коллокацию в пространстве. Эта современная процедура, описанная в следующей главе, предоставляет простое и удобное в вычислительном отношении использование поверхностных уклонов отвеса и их комбинации с гравиметрическими и другими данными. Однако описанные соображения необходимы для полного понимания коллокационного подхода.

Заключительное замечание

В последних разделах мы пытались применить один и тот же принцип топографо – изостатической редукции ("метод удаления восстановления") на уровне точки ко всем наземным данным, связанным с вектором силы тяжести: аномалиям и возмущениям силы тяжести (разд. 8.9) и уклонам отвеса (разд. 8.14). Такой унифицированный подход к изостатически редуцированным данным позволяет непосредственно использовать эти данные для комбинированных решений методом среднеквадратической коллокации, описанной в главе 10.

8.15 Значение геоида

В этом разделе мы сравним геоид и некоторые другие поверхности, которые могли бы его заменить. В результате мы снова подтвердим уникальную роль геоида как стандартной поверхности физической геодезии.

Значение геоида очень простое. Оно определено в разд. 2.2 как одна из эквипотенциальных поверхностей (то есть поверхность с постоянным значением потенциала силы тяжести)

$$W(x, y, z) = \text{constant.}$$

(8-162)

Константа выбрана так, чтобы на океанах геоид совпал со средним их уровнем:

$$W(x, y, z) = W_0. \quad (8.163)$$

Это обычное классическое уравнение геоида. Так в чем проблема?

Дело в том, что теория и практика отличаются друг от друга, и в геодезии это имеет место так же, как и в повседневной жизни. Во первых, мы должны игнорировать небольшие приливно-отливные эффекты (порядка 50 см). Это не очень проблематично и делается путем соответствующего моделирования приливов и отливов. Но в результате мы имеем множество различных геоидов, полученных по спутниковым наблюдениям. Во вторых, они обычно выражаются в терминах рядов по шаровым функциям, а на уровне моря такой ряд может расходиться (это связано с трудностями продолжения вниз, см. разд. 8.6). Однако, проблема расходимости может волновать лишь математиков, а геодезистов она не затрагивает по следующим причинам:

1. Наши разложения по шаровым функциям представляют собой не бесконечный, а конечный ряд – по самому смыслу их определения и вычисления. Поэтому проблемы расходимости ряда не существует и речь идет лишь о точности аппроксимации.
2. Такие аппроксимирующие конечные ряды по шаровым функциям всегда существуют для любых точностных потребностей (Frank and Mises 1930: p. 760). В геодезии мы обычно ссылаемся на теорему Рунге. Весь комплекс подобных вопросов обсужден в работе Moritz (1980a: Sects. 6 to 8).
3. Если Вы применяете пространственную коллокацию, то поведение решения (гармонично или нет, сходящееся или расходящееся,...) полностью определено используемой ковариационной функцией. Всегда можно подобрать "хорошие" ковариационные функции, которые являются гармоническими и аналитическими вплоть до некоторой сферы, целиком охватывающей в теле Земли.

Так что забудьте о проблеме сходимости. *Практически она решена.* Дальнейшая дискуссия, конструктивно улучшающая до сих пор полученные результаты, должна проводиться только на очень высоком математическом уровне. Вопрос можно сделать как угодно сложным; но при разумном подходе он оказывается достаточно простым.

Геоид и продолжение вниз

Согласно рассуждениям конца разд. 10.1, геоид, вычисленный с помощью (гармонического!) конечного ряда по шаровым функциям или с помощью коллокации, не является уровневой поверхностью реального геопотенциала W , а

является *уровневой поверхностью некоторого гармонически продолженного вниз* потенциала W . Последний непременно является гармоническим по той простой причине, что базисные функции как коллокации, так и ряда по шаровым функциям удовлетворяют уравнению Лапласа (8-2). В результате мы можем говорить о "гармоническом геоиде". Это снова подчеркивает значимость аналитического продолжения (разд. 8.6). В выражении, набранном выше курсивом, мы преднамеренно говорим о "некотором" потенциале, потому что гармоническое продолжение вниз является обратной задачей и, следовательно, не имеет единственного решения (см. ниже).

Применение коллокации к $\xi, \eta, \Delta g$ без *редукции силы тяжести* дает аномалии высот ζ или высоты гармонического геоида N^{harmonic} простым изменением высотного параметра (h или h_0 , соответственно) в программе коллокации. Полностью аналогичный факт был отмечен в конце последнего раздела для случая аномалий высот ζ^c и высот геоида N^c .

Полностью аналогичную ситуацию мы видели и в случае проблемы Молденского (без или с редукцией силы тяжести) с применением обобщенных формул Стокса и Венинг-Мейссера, (8-75) и (8-76).

Геоид, гармонические геоиды, и квазигеоид

Геоид в обычном смысле (2-18) или (8-163) полностью определяется природой и не зависит от геодезических наблюдений (за исключением приливно отливных поправок). Его основной недостаток -- зависимость от "топографических масс" выпячивания геоида, плотность которых неизвестна, по крайней мере, в принципе. Но этот недостаток кажется больше теоретическим, чем практическим.

Гармонические геоиды -- это эквипотенциальные поверхности аналитического продолжения вниз. Потенциал, гармонически продолженный вниз, мы будем обозначать как W^{harmonic} , так что

$$W^{\text{harmonic}} = W_0 = \text{constant} \quad (8-164)$$

обозначает гармонический геоид (гармонические геоиды).

Повторим, что аналитическое продолжение вниз, основанное на дискретных данных на земной поверхности является примером *обратной задачи*, которая имеет бесконечно много различных решений (разд. 1.13, для получения дополнительной информации можно воспользоваться интернетом, например, www.inas.tugraz.at/forschung/InverseProblems/AngerMoritz.html).

Для коллокации, например, каждому выбору той или иной ковариационной функции соответствует свое решение. Таким образом, "гармонический геоид" определяется не единственным образом. Он является продуктом не только природы, но и используемого метода вычислений, и потому не может заменить реальный геоид в роли стандартной поверхности.

"Когеоиды" различных редукиций силы тяжести (разд. 8.2) являются вспомогательными понятиями и их не следует использовать вместо геоида. Топографо-изостатические аномалии высот на уровне точки, ζ^c , и высоты топографо-изостатического когеоида, N^c , связаны друг с другом *аналитическим продолжением*. Одна и та же формула коллокации применима и в том случае, когда аномалия высоты $f(P)$ вычисляется на уровне моря с высотным параметром 0, чтобы получить N^c , и в том случае, когда $f(P)$ вычисляется на уровне точки с высотным параметром h для получения ζ^c . Высотным параметром h служит высота над уровнем моря в любом определении главы 4, см. пункт 5 в конце разд. 10.2.

Для предельного случая, изображенного на рис. 8.5с, возникает вопрос: "Как высота N^{harmonic} "гармонического геоида" связана с аномалией высоты ζ на земной поверхности и на той же самой вертикали?" Ответ: "Аналитическим продолжением!"

Другой специальный вопрос: "Какая редукиция силы тяжести оставляет геоид неизменным?" Ответ: "Редукиция Рудзкого" (разд. 3.8). Так почему бы ею не пользоваться? Потому что она изменяет внешний потенциал, который сегодня является понятием первостепенной важности.

"Какая разница между редукицией Рудзкого и гармоническим продолжением вниз?" Ответ: "Редукиция Рудзкого оставляет геоид неизменным, но изменяет внешний геопотенциал: равенство $W^c = W = W_0$ имеет место только на геоиде, но $W^c \neq W$ вне Земли, что недопустимо. Гармоническое продолжение оставляет внешний геопотенциал неизменным, но изменяет геоид: $W^{\text{harmonic}} = W$ вне Земли и на земной поверхности, но $W^{\text{harmonic}} \neq W$ на уровне моря".

Аномалии высот и квазигеоид

Аномалии высот ζ относятся к физической поверхности Земли и имеют естественную физическую интерпретацию в виде *теллуроида* Хирвонена. Молодецкий предложил отложить ζ от референц-эллипсоида вверх и получил "квазигеоид". Таким образом, ζ образуют квазигеоид точно так же, как высоты геоида N образуют геоид. Однако эта аналогия чисто формальная. Квазигеоид не является поверхностью постоянного потенциала, и не удастся найти для него какую-либо другую физическую интерпретацию. Поэтому в роли стандартной поверхности заменить реальный геоид не удастся. Таким образом, несмотря на все современные разработки, геоид сохраняет свое значение для физической геодезии как стандартная референц-поверхность. Однако, читателю рекомендуется иметь ясное представление обо всех понятиях этого раздела, см. Forsberg and Tscherning (1997).

Заключительное замечание о многогранной редукции в свободном воздухе

Теперь, уважаемый читатель, преодолев почти всю книгу, Вы в состоянии понять *dissecta membra*¹ о редукции в свободном воздухе, постоянно встречающиеся в таких разделах, как 3.3, 3.9, 8.2, 8.6, 8.9 и в данном разделе. Успехов Вам в преодолении горных дорог!

¹отрывочные сведения, лат.

Глава 9

Статистические методы физической геодезии

9.1 Введение

Некоторые наиболее важные задачи физической геодезии формулируются и решаются в терминах интегралов по всей поверхности Земли. Примером может служить формула Стокса. Таким образом, в принципе, мы должны знать силу тяжести g в каждой точке земной поверхности. На самом деле, даже при самой плотной гравиметрической съемке мы получаем значения g только в относительно немногих точках и должны оценивать g в других точках путем *интерполяции*. На большей части океанов у нас вообще нет никаких наблюдений, и мы вынуждены заполнять эти "окна" с помощью *экстраполяции*.

С математической точки зрения, нет никакой разницы между интерполяцией и экстраполяцией; поэтому мы будем называть их одни и тем же термином *прогноз*.

Прогноз (то есть интерполяция или экстраполяция) не может дать точные значения; следовательно, задача состоит в том, чтобы оценить возможные погрешности силы тяжести g или аномалии силы тяжести Δg . Как обычно, гравитационные возмущения δg также имеются ввиду всякий раз, когда мы говорим об аномалиях силы тяжести.

Так как Δg далее используется для вычисления других величин – высот геоида N или компонентом уклонения ξ и η – мы должны также исследовать влияние погрешностей прогноза Δg на N , ξ , η , и т.д. Это называют *преобразованием погрешностей* и будет играть основную роль.

Важно также знать, какой метод прогноза дает наивысшую точность в Δg или в производных величинах N , ξ , η и т.д. Чтобы найти эти "наилучшие" методы прогноза, необходимо решить предыдущую задачу, то есть знать погрешность прогноза Δg и ее влияние на производные величины.

Итак, нам предстоит рассмотреть следующие задачи:

1. оценивание ошибок интерполяции и экстраполяции Δg (или δg);
2. оценивание влияния этих ошибок на производные величины (N , ξ , η и т. д.);
3. определение наилучшего метода прогноза.

Так как мы больше заинтересованы не в отдельных погрешностях, а в их значениях в среднем, то естественно воспользоваться статистическими методами, что и определило название настоящей главы.

9.2 Ковариационная функция

Весьма замечательно, что все упомянутые выше задачи могут быть решены посредством только одной функции одной переменной, без какой-либо другой информации. (Мы сначала пренебрегаем корреляцией с высотой.) Это – *ковариационная функция* аномалии силы тяжести.

Сначала мы нуждаемся в определении среднего значения аномалии силы тяжести Δg . Если мы составим среднее значение Δg по всей поверхности Земли, мы получим ноль:

$$M\{\Delta g\} \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \, d\sigma = 0. \quad (9-1)$$

Символ M устанавливает среднее значение по всей Земле (по единичной сфере): это среднее значение равно интегралу по единичной сфере, разделенному на площадь 4π этой сферы. Этот интеграл равен нулю, если в разложении аномалии силы тяжести Δg в ряд по шаровым функциям отсутствует нулевая степень, то есть, если референс-эллипсоид имеет ту же массу, что и Земля, и тот же потенциал, что и на геоиде. Это будет принято всюду в этой главе.

Заметим, что если это не так, то есть, если $M\{\Delta g\} = m \neq 0$, то мы всегда можем сформировать новые аномалии силы тяжести $\Delta g^* = \Delta g - m$, вычитая среднее значение m . Тогда $M\{\Delta g^*\} = 0$ и все последующие рассуждения применимы к "центрированным" аномалиям Δg^* .

Ясно, что нулевая величина $M\{\Delta g\}$ не может характеризовать среднее значение аномалий силы тяжести. Поэтому рассмотрим средний квадрат Δg ,

$$\text{var}\{\Delta g\} \equiv M\{\Delta g^2\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g^2 \, d\sigma. \quad (9-2)$$

Это называется *дисперсией* аномалий силы тяжести. Квадратный корень из дисперсии есть *среднеквадратическое (ср. кв.) значение аномалии*:

$$\text{rms}\{\Delta g\} \equiv \sqrt{\text{var}\{\Delta g\}} = \sqrt{M\{\Delta g^2\}}. \quad (9-3)$$

Среднеквадратическая аномалия – очень полезный критерий среднего значения аномалий силы тяжести; обычно это дается в форме

$$\text{rms}\{\Delta g\} = \pm 35 \text{ мгал}; \quad (9.4)$$

знак \pm выражает неоднозначность знака квадратного корня и символизирует тот факт, что величина Δg может быть как положительной, так и отрицательной. Среднеквадратическая аномалия хорошо понимается интуитивно, но с математической точки зрения удобнее иметь дело с дисперсией Δg , которая к тому же допускает важное обобщение.

Вместо среднего квадрата Δg , рассмотрим среднее произведение аномалий силы тяжести $\Delta g \Delta g'$ для каждой пары точек P и P' , расположенных на фиксированном расстоянии s друг от друга. Это среднее произведение называется *ковариацией* аномалий силы тяжести для расстояния s и определяется как

$$\text{cov}_s\{\Delta g\} \equiv M\{\Delta g \Delta g'\}. \quad (9.5)$$

Усреднение выполняется по всем парам точек P и P' , для которых $PP' = s = \text{const}$.

Ковариации характеризуют *статистическую корреляцию* аномалий силы тяжести Δg и $\Delta g'$, то есть их тенденцию иметь ту же величину и тот же знак. Если ковариация равна нулю, то это означает, что аномалии Δg и $\Delta g'$ некоррелированы, или независимы друг от друга (заметим, что на строгом языке математической статистики нулевая корреляция и независимость – не совсем одно и то же, но здесь мы можем пренебречь этим различием!); другими словами, размер или знак Δg не имеют никакого влияния на размер или знак $\Delta g'$. Аномалии силы тяжести в точках, далеко расположенных друг от друга, можно считать некоррелированными или независимыми, потому что локальные возмущения, которые вызывают Δg , не имеют почти никакого влияния на $\Delta g'$, и наоборот.

Если рассматривать ковариацию как функцию расстояния $s = PP'$, то мы получим упомянутую в начале *ковариационную функцию* $C(s)$:

$$C(s) \equiv \text{cov}_s\{\Delta g\} = M\{\Delta g \Delta g'\} \quad (PP' = s). \quad (9.6)$$

При $s = 0$ имеем, согласно (9.2),

$$C(0) = M\{\Delta g^2\} = \text{var}\{\Delta g\}. \quad (9.7)$$

Таким образом, при $s = 0$ ковариация есть дисперсия. Типичная форма графика функции $C(s)$ показана на рис. 9.1. Для небольших расстояний s (скажем, 1 км) $\Delta g'$ почти равна Δg , так что ковариация почти равна дисперсии; другими словами, существует очень сильная корреляция. Ковариация $C(s)$

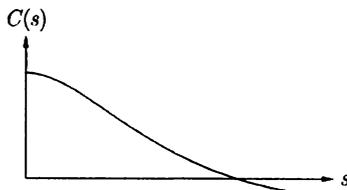


Рис. 9.1: Ковариационная функция

уменьшаться с увеличением s , потому что аномалии Δg и $\Delta g'$ становятся более независимыми. Для очень больших расстояний ковариация будет очень небольшой, но в общем случае не точно равной нулю, потому что аномалии силы тяжести подвержены влиянию не только локальных возмущений масс, но и региональных факторов. Поэтому можно ожидать колебания ковариации между небольшими положительными и отрицательными значениями.

Положительные ковариации означают, что Δg и $\Delta g'$ имеют тенденцию совпадать по величине и по знаку; отрицательные ковариации означают, что Δg и $\Delta g'$ имеют тенденцию совпадать по величине, но иметь противоположные знаки. Чем сильнее эта тенденция, тем больше $C(s)$; однако, абсолютная величина $C(s)$ никогда не может превышать дисперсию $C(0)$.

Практическое определение ковариационной функции $C(s)$ несколько проблематично. Для ее точного определения нам потребовалось бы знать силу тяжести в каждой точке земной поверхности. Очевидно, что это нереально; а если бы мы это знали, то ковариационная функция потеряла бы свое значение, потому что тогда мы могли бы решить наши задачи строго, не нуждаясь в статистике. Практически мы можем только оценить ковариационную функцию по выборкам, распределенным по всей Земле. Но в настоящее время даже и это не совсем возможно из-за несовершенства или полного отсутствия данных о силе тяжести на океанах. О дискуссии по этим проблемам см. Kaula (1963, 1966 б).

Первая всесторонняя оценка ковариационной функции была сделана Kaula (1959). Некоторые из его значений приведены в таблице 9.1 как представляющие исторический интерес. Они относятся к аномалиям в свободном воздухе. Аргументом служит сферическое расстояние

$$\psi = \frac{s}{R}, \quad (9-8)$$

соответствующее линейному расстоянию s , измеренному на земной поверхности; R – средний радиус Земли. Среднеквадратическая аномалия в свободном воздухе равна

$$\text{rms}\{\Delta g\} = \sqrt{1201} = \pm 35 \text{ мгал.} \quad (9-9)$$

Мы видим, что $C(s)$ уменьшается с увеличением s и для $s/R > 30^\circ$ очень

Таблица 9.1: Оценки значений ковариационной функции аномалий в свободном воздухе [в единицах мгал²]

ψ	$C(\psi)$	ψ	$C(\psi)$	ψ	$C(\psi)$
0.0°	+1201	8°	+124	27°	+18
0.5°	751	9°	104	29°	+6
1.0°	468	10°	82	31°	+8
1.5°	356	11°	76	33°	+5
2.0°	332	13°	54	35°	-8
2.5°	306	15°	47	40°	-12
3.0°	296	17°	45	50°	-20
4.0°	272	19°	34	60°	-30
5.0°	246	21°	35	90°	-4
6.0°	214	23°	10	120°	+12
7.0°	174	25°	20	150°	-21

небольшие значения колеблются между плюсом и минусом.

Для некоторых целей нам больше нужна *локальная* ковариационная функция, а не глобальная; в таком случае усреднение M выполняется только по ограниченной области, а не по всей Земле. Такая локальная ковариационная функция полезна для более детальных исследований в ограниченной области, например, для задач интерполяции. Так, Нирвонен (1962), изучая локальную ковариационную функцию аномалий в свободном воздухе в Штате Огайо, обнаружил, что ее численные значения хорошо аппроксимируются аналитическим выражением вида

$$C(s) = \frac{C_0}{1 + (s/d)^2}, \quad (9.10)$$

где

$$C_0 = 337 \text{ мгал}^2, \quad d = 40 \text{ км}. \quad (9.11)$$

Такая зависимость справедлива для $s < 100$ км.

Со временем выяснилось, что разумное определение глобальных и локальных ковариационных функций является центральной практической задачей в обсуждаемом контексте.

Ковариационная модель Чернинга–Ратпа (Tscherning–Rapp) и подпрограмма COVAXN

Фундаментальная модель ковариации Tscherning and Rapp (1974) и подпрограмма COVAXN (Tscherning 1976) очень современны и сегодня; это видно из следующей цитаты Kührtreiber (2002 b) :

"Глобальная ковариационная функция аномалий силы тяжести $C_g(P, Q)$, полученная Tscherning and Rapp (1974, p. 29), записывается как

$$C_g(P, Q) = A \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{(n-2)(n+B)} s^{n+2} P_n(\cos \psi), \quad (9\ 12)$$

где $P_n(\cos \psi)$ обозначает многочлен Лежандра степени n , ψ – сферическое расстояние между точками P и Q , а A , B и s – параметры модели. Имеется также замкнутое выражение для (9 12) (там же, p. 45).

Локальную ковариационную функцию аномалий силы тяжести $C(P, Q)$, полученную Чернингом и Ратпом, можно определить как

$$C(P, Q) = A \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-2)(n+B)} s^{n+2} P_n(\cos \psi). \quad (9\ 13)$$

Моделирование ковариационной функции на практике означает аппроксимацию эмпирически найденной ковариационной функции (посредством трех существенных параметров: дисперсии C_0 , длины корреляции ξ и дисперсии горизонтальной производной G_0) ковариационной функцией модельной. В результате такой аппроксимации определяются четыре параметра A , B , N и s . Простая процедура аппроксимации эмпирической ковариационной функции может быть выполнена с помощью COVAXN-подпрограммы (Tscherning, 1976).

Существенные параметры эмпирической ковариации для 2489 станций силы тяжести в Австрии таковы: 740.47 мгал² для дисперсии C_0 и 43.5 км для длины корреляции ψ_1 . Значение дисперсии горизонтальной производной G_0 приближенно оценивается как 100 E² (здесь E обозначает единицу этвеш; 1 E – 10⁻⁹ с⁻²).

С фиксированным значением $B = 24$, следующие параметры ковариационной функции Чернинга Ратпа оказались наиболее подходящими: $s = 0.997\ 065$, $A = 746.002$ мгал² и $N = 76$. Эти параметры использовались для астрономо-геодезического, гравиметрического и комбинированного определения геоида." (Конец цитаты.)

Модель Чернинга Ратпа может быть просуммирована, чтобы получить замкнутые выражения. Ее популярность объясняется ее полнотой (есть выражения для ковариаций различных производных величин, выведенных по закону преобразования ковариации, см. разд. 10.1), и ее гибкостью, так как она содержит несколько параметров, которым можно придавать различные численные значения.

Замечание. Выражение ковариационной функции в терминах сферических функций рассматривается в разд. 9.3. Более подробно теория глобальных и локальных ковариационных функций описана в работе Moritz (1980 a: Sects. 22 and 23). Там же определены три существенных параметра локальной ковариационной функции (дисперсия C_0 , длина корреляции ξ и параметр кривизны G_0). Фундаментальные численные исследования локальных ковариационных функций проделаны Крайгер (1987, 1988).

9.3 Разложение ковариационной функции в ряд по шаровым функциям

Более или менее сложные интегральные формулы физической геодезии часто принимают гораздо более простую форму, если их переписать в терминах шаровых функций. Хорошим примером является формула Стокса (см. разд. 2.15).

К сожалению, это теоретическое преимущество в большинстве случаев сбалансировано практическим недостатком, состоящим в очень медленной сходимости соответствующего ряда. Но в некоторых случаях сходимость хорошая. Тогда использование шаровых функций очень удобно и практически; мы рассмотрим такой случай в следующем разделе.

Разложение аномалий силы тяжести Δg в ряд по шаровым функциям может быть записано в виде

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda), \tag{9 14}$$

где $\Delta g_n(\vartheta, \lambda)$ есть сферическая функция Лапласа степени n . Более точно,

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + b_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)], \tag{9 15}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda, \\ \mathcal{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \end{aligned} \tag{9-16}$$

являются основными сферическими функциями, или, в терминах полностью нормированных гармоник (см. разд. 1.10),

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda)]. \tag{9 17}$$

Здесь ϑ - полярный угол (дополнение до геоцентрической широты), а λ - долгота.

Теперь давайте найдем средние произведения двух гармоник Лапласа

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \bar{\mathcal{R}}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\vartheta, \lambda)]. \quad (9\ 18)$$

Таковыми средними произведениями являются

$$M\{\Delta g_n \Delta g'_n\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \Delta g_n(\vartheta, \lambda) \Delta g'_n(\vartheta, \lambda) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda, \quad (9\ 19)$$

так как усреднение выполняется по всей Земле, то есть по всей единичной сфере. Положим сначала $n' = n$, что дает средний квадрат гармоники Лапласа степени n :

$$M\{\Delta g_n^2\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} [\Delta g_n(\vartheta, \lambda)]^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda. \quad (9\ 20)$$

Подставляя сюда (9 18) и принимая во внимание соотношения ортогональности (1 83) и нормирования (1 91), легко находим, что

$$M\{\Delta g_n^2\} = \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2). \quad (9\ 21)$$

Рассмотрим теперь среднее произведение (9 19) двух гармоник Лапласа различных степеней, $n' \neq n$. Вследствие ортогональности сферических функций, интеграл в (9 19) равен нулю:

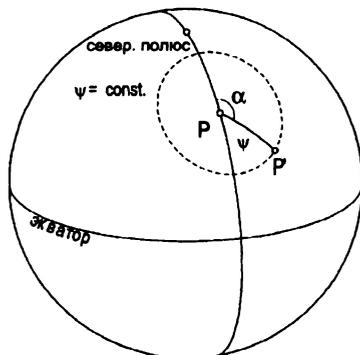
$$M\{\Delta g_n \Delta g'_n\} = 0 \quad \text{если } n' \neq n. \quad (9\ 22)$$

В статистических терминах это означает, что две гармоники Лапласа различных степеней *некоррелированы* или, вообще говоря, *статистически независимы*.

Таким же маэром, как и для аномалий силы тяжести, мы можем разложить ковариационную функцию $C(s)$ в ряд по шаровым функциям. Возьмем для этого произвольную, но фиксированную точку P в качестве полюса этого разложения и введем в рассмотрение показанные на рис. 9.2 сферические полярные координаты ψ (угловое расстояние от P) и α (азимут). Угловое расстояние ψ соответствует линейному расстоянию s , согласно (9 8). Разложение ковариационной функции аргумента ψ в ряд по сферическим функциям относительно полюса P и координат ψ и α имеет вид

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [c_{nm} \mathcal{R}_{nm}(\psi, \alpha) + d_{nm} \mathcal{S}_{nm}(\psi, \alpha)], \quad (9\ 23)$$

что является выражением того же типа, что и (9 15). Но, поскольку C зависит


 Рис. 9.2: Полярные координаты ψ , α на сфере

только от расстояния ψ и не зависит от азимута α , сферические функции не могут содержать членов, явно зависящих от α . Единственными гармониками, не зависящими от α , являются зональные функции

$$\mathcal{R}_{n0}(\psi, \alpha) \equiv P_n(\cos \psi), \quad (9.24)$$

поэтому мы имеем

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi). \quad (9.25)$$

Таким образом, $c_n \equiv c_{n0}$ – единственные коэффициенты, которые не равны нулю. Можно также пользоваться эквивалентным выражением в терминах полностью нормированных гармоник:

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \bar{P}_n(\cos \psi). \quad (9.26)$$

Коэффициенты в этих рядах, согласно разделам 1.9 и 1.10, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \end{aligned} \quad (9.27)$$

и

$$\bar{c}_n = \frac{c_n}{\sqrt{2n+1}}. \quad (9.28)$$

Теперь определим соотношение между коэффициентами c_n функции $C(\psi)$ в (9 25) и коэффициентами \bar{a}_{nm} и \bar{b}_{nm} для Δg в (9 18). Для этого нам потребуется выражение для $C(\psi)$ в терминах Δg , которое легко получить, переписав более подробно (9-27). Возьмем две точки $P(\vartheta, \lambda)$ и $P'(\vartheta', \lambda')$, см. рис. 9.2. Сферическое расстояние ψ между ними определяется выражением

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (9 29)$$

Здесь ψ и азимут α являются полярными координатами $P'(\vartheta', \lambda')$ относительно полюса $P(\vartheta, \lambda)$.

Символ M в (9 6) обозначает среднее по единичной сфере. Чтобы выполнить это, нужны два действия. Сначала составляем среднее по сферической окружности радиуса ψ (обозначено на рис. 9.2 ломаной линией), сохраняя полюс P фиксированным и позволяя P' перемещаться по окружности так, чтобы расстояние PP' оставалось постоянным. Это дает

$$C^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\vartheta, \lambda) \Delta g(\vartheta', \lambda') d\alpha, \quad (9 30)$$

где C^* еще зависит от точки P , выбранной в качестве полюса $\psi = 0$. Затем мы усредняем C^* по единичной сфере:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} C^* \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\vartheta, \lambda) \Delta g(\vartheta', \lambda') \sin \vartheta d\vartheta d\lambda d\alpha. \end{aligned} \quad (9 31)$$

Это равно ковариационной функции $C(\psi)$, причем символ M в (9-6) теперь присутствует явно:

$$C(\psi) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\vartheta, \lambda) \Delta g(\vartheta', \lambda') \sin \vartheta d\vartheta d\lambda d\alpha. \quad (9 32)$$

Координаты ϑ', λ' в этой формуле связаны с ϑ, λ посредством (9 29) с $\psi = \text{const}$, но во всем остальном они произвольны; это выражает тот факт, что в (9 6) усреднение производится по всем парам точек P и P' , для которых $PP' = \psi = \text{const}$.

Чтобы вычислить коэффициенты c_n , подставим (9 32) в (9 27) и получим

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\vartheta, \lambda) \Delta g(\vartheta', \lambda') \cdot \\ & \quad \cdot P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi d\alpha \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\lambda. \end{aligned} \quad (9 33)$$

Рассмотрим сначала интегрирование по α и ψ . Согласно (1·89), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \\ &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \Delta g(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\lambda' = \Delta g_n(\vartheta, \lambda), \end{aligned} \tag{9-34}$$

замена перемешных интегрирования очевидна. Следовательно, (9 33) принимает вид

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \Delta g(\vartheta, \lambda) \Delta g_n(\vartheta, \lambda) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda. \tag{9 35}$$

Это может быть также записано в виде

$$c_n = M\{\Delta g \Delta g_n\}. \tag{9 36}$$

Теперь подставим сюда выражение (9 14), которое запишем как

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n'=2}^{\infty} \Delta g_{n'}(\vartheta, \lambda), \tag{9-37}$$

полагая суммирование по n' вместо n . Получим

$$c_n = M \left\{ \sum_{n'=2}^{\infty} \Delta g_{n'} \Delta g_n \right\} = \sum_{n'=2}^{\infty} M\{\Delta g_n \Delta g_{n'}\}. \tag{9 38}$$

Согласно (9 22), только слагаемые с $n' = n$ отличаются от нуля, поэтому с учётом (9 21) окончательно получаем

$$c_n = M\{\Delta g_n^2\} = \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2). \tag{9 39}$$

Следовательно, c_n есть средний квадрат гармоники Лапласа $\Delta g_n(\vartheta, \lambda)$ степени n . или ее дисперсия. По этим причинам c_n также называются *степенными дисперсиями*. "Степенные ковариации" равны нулю из за (9 22).

Уравнение (9 39) простейшим способом связывает коэффициенты \bar{a}_{nm} и \bar{b}_{nm} функции Δg и c_n функции $C(s)$. Заметьте, что \bar{a}_{nm} и \bar{b}_{nm} являются коэффициентами полностью нормированных гармоник, тогда как c_n — коэффициенты обычных гармоник. На самом деле, мы можем пользоваться a_{nm} и b_{nm} (обычные) или \bar{c}_n (полностью нормированные); но тогда соотношение (9 39) станет, очевидно, немного более сложным. Заметим, что математическая теория, следующая после статистического описания аномалий силы тяжести, есть теория *случайных функций*. Аномальное поле силы тяжести трактуется в

рамках этой теории как стационарная случайная функция на сфере; описанные в этом разделе разложения по сферическим функциям есть ничто иное, как спектральный анализ такой функции. Всестороннее описание указанного подхода можно найти в работе Moritz (1980 а).

9.4 Интерполяция и экстраполяция аномалий силы тяжести

Как указано в разд. 9.1, цель прогноза (интерполяции и экстраполяции) состоит в том, чтобы дополнить наблюдения силы тяжести, которые могут быть выполнены только в относительно немногих точках, путем оценивания значений силы тяжести или аномалий силы тяжести во всех других точках P земной поверхности.

Если точка P окружена станциями измерения силы тяжести, то мы должны интерполировать; если станции с измерениями силы тяжести расположены далеко от P , то мы экстраполируем. Очевидно, нет никакого принципиального различия между этими двумя видами прогноза, и их математическая формулировка в обоих случаях одна и та же.

Чтобы спрогнозировать значение аномалии силы тяжести в точке P , мы должны иметь некоторую информацию о функции аномалии силы тяжести. Наиболее важной информацией являются ее значения, измеренные в определенных точках. Кроме того, нам нужна некоторая информация относительно формы функции аномалии. Если гравиметрические измерения выполнены плотно, то непрерывность или "гладкость" функции достаточна – например, для линейной интерполяции. В противном случае мы можем пытаться использовать статистическую информацию относительно общей структуры аномалий силы тяжести. При этом следует рассмотреть два вида статистической корреляции: *автокорреляцию*, то есть корреляцию аномалий силы тяжести между собой, и *корреляцию аномалий силы тяжести с высотой*.

Корреляцию с высотой пока игнорируем; этому вопросу посвящен раздел 9.7. Автокорреляция характеризуется ковариационной функцией, рассмотренной в разд. 9.2.

С математической точки зрения, целью прогноза является отыскание такой функции F наблюдаемых аномалий силы тяжести $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n$, что искомая аномалия Δg_P в точке P аппроксимируется выражением

$$\Delta g_P \approx F(\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n). \quad (9-40)$$

Здесь Δg_i обозначает значение Δg в точке i , а не сферическую гармонику! Практически только линейные функции F используются. Если обозначить ис-

комое значение Δg_P как $\widetilde{\Delta g}_P$, то линейный прогноз имеет форму

$$\widetilde{\Delta g}_P = \alpha_{P1} \Delta g_1 + \alpha_{P2} \Delta g_2 + \dots + \alpha_{Pn} \Delta g_n \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_{Pi} \Delta g_i. \quad (9.41)$$

Коэффициенты α_{Pi} зависят только от взаимного положения P и станций с измеренными значениями силы тяжести $1, 2, \dots, n$ и не зависят от Δg_i . По-разному выбирая способ определения этих коэффициентов, мы получаем различные методы интерполяции или экстраполяции. Вот некоторые примеры.

Геометрическая интерполяция

"Поверхность аномалии силы тяжести", представленная гравиметрической картой, может быть аппроксимирована многогранником, составленным из плоскостей треугольников, вершины которых определены станциями измерения силы тяжести (рис. 9.3). Это примерно то, что делается при построении гори-

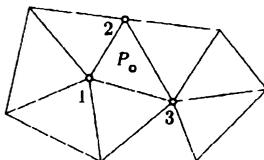


Рис. 9.3: Геометрическая интерполяция

зонтей на карте аномалии силы тяжести посредством графической интерполяции.

Аналитически такая интерполяция может быть сформулирована следующим образом. Пусть точка P расположена в треугольнике с вершинами $1, 2, 3$ (рис. 9.3). Каждой точке припишем соответствующее значение Δg как ее z координату так, чтобы точки $1, 2$ и 3 имели "пространственные" координаты (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) ; здесь x и y — обыкновенные координаты на плоскости. Плоскость, проходящая через точки $1, 2, 3$, имеет уравнение

$$\begin{aligned} z = & \frac{(x_2 - x)(y_3 - y_2) - (y_2 - y)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)} z_1 \\ & + \frac{(x_3 - x)(y_1 - y_3) - (y_3 - y)(x_1 - x_3)}{(x_3 - x_2)(y_1 - y_3) - (y_3 - y_2)(x_1 - x_3)} z_2 \\ & + \frac{(x_1 - x)(y_2 - y_1) - (y_1 - y)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1)} z_3. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Если заменить z_1, z_2, z_3 на $\Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3$, то z есть интерполированное значение $\widetilde{\Delta g}_P$ в точке P с плановыми координатами x, y . Таким образом,

$$\widetilde{\Delta g}_P = \alpha_{P1} \Delta g_1 + \alpha_{P2} \Delta g_2 + \alpha_{P3} \Delta g_3, \quad (9.43)$$

где α_{P_i} есть коэффициенты, стоящие перед z_i в предыдущем уравнении.

Представительство

Часто значение аномалии силы тяжести, измеренное на станции 1, является представительством определенной окрестности так, что

$$\widetilde{\Delta g}_P \equiv \Delta g_1 \quad (9\ 44)$$

для всякой точки P из некоторой окрестности точки 1. Тогда

$$\alpha_{P_1} = 1, \quad \alpha_{P_2} = \alpha_{P_3} = \dots = \alpha_{P_n} = 0. \quad (9\ 45)$$

Этот метод, конечно, грубый, но простой и для многих целей достаточный.

Нулевая аномалия

Если нет никаких гравиметрических измерений в достаточно большой области, например, на океанах, то полагают

$$\widetilde{\Delta g}_P \equiv 0. \quad (9-46)$$

В таком тривиальном случае все α_{P_i} равны нулю.

Если все станции с известными значениями силы тяжести далеко, и мы не знаем ничего лучшего, то применяется этот примитивный метод экстраполяции, хотя его точность низкая. В лучшем случае, такой подход можно применять при работе с изостатическими аномалиями.

Ни один из этих трех методов не дает оптимальную точность. В следующем разделе мы исследуем точность общей формулы прогноза (9 41) и найдем такие коэффициенты α_{P_i} , которые приводят к наиболее точным результатам.

9.5 Точность методов прогноза

Чтобы сравнивать различные возможные методы прогноза, определять их область применения и находить наиболее оптимальные варианты, мы должны уметь оценивать их точность.

Рассмотрим общий случай формулы (9 41). Реальным значением аномалии силы тяжести в точке P является Δg_P , а соответствующий прогноз определяется выражением

$$\widetilde{\Delta g}_P = \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \Delta g_i. \quad (9\ 47)$$

Разность есть ошибка ε_P прогноза,

$$\varepsilon_P = \Delta g_P - \widetilde{\Delta g}_P = \Delta g_P - \sum_i \alpha_{Pi} \Delta g_i. \quad (9-48)$$

Возводя ее в квадрат, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_P^2 &= \left(\Delta g_P - \sum_i \alpha_{Pi} \Delta g_i \right) \left(\Delta g_P - \sum_k \alpha_{Pk} \Delta g_k \right) \\ &= \Delta g_P^2 - 2 \sum_i \alpha_{Pi} \Delta g_P \Delta g_i + \sum_i \sum_k \alpha_{Pi} \alpha_{Pk} \Delta g_i \Delta g_k. \end{aligned} \quad (9-49)$$

Теперь сформируем среднее M этой ошибки по рассматриваемой области (эта область будет или ограниченной, или представлять собой всю земную поверхность). Согласно (9 б), имеем

$$\begin{aligned} M\{\Delta g_i \Delta g_k\} &= C(i k) \equiv C_{ik}, \\ M\{\Delta g_P \Delta g_i\} &= C(P i) \equiv C_{Pi}, \\ M\{\Delta g_P^2\} &= C(0) \equiv C_0. \end{aligned} \quad (9-50)$$

Получили определенные значения ковариационной функции $C(s)$ для $s = i k$, $s = P i$ и $s = 0$; например, $i k$ – расстояние между станциями силы тяжести i и k . Сокращенные обозначения C_{ik} и C_{Pi} очевидны.

Далее устанавливаем, что

$$M\{\varepsilon_P^2\} = m_P^2. \quad (9-51)$$

Таким образом, m_P есть среднеквадратическая ошибка спрогнозированного значения аномалии силы тяжести в точке P , или кратко, стандарт *ошибки прогноза* (интерполяции или экстраполяции).

Принимая во внимание все эти соотношения, находим, что среднее значение M величины (9-49) определяется выражением

$$m_P^2 = C_0 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{Pi} C_{Pi} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{Pi} \alpha_{Pk} C_{ik}. \quad (9-52)$$

Таким образом, получена важная формула для дисперсии линейного прогноза по общей формуле (9-41). Для упомянутых в предыдущем разделе частных случаев достаточно подставить соответствующие им значения α_{Pi} .

Соглашение Эйнштейна о суммировании

По крайней мере с этого момента читатель будет благодарен Альберту Эйнштейну за то, что он изобрел не только теорию относительности – впрочем, даже общая теория относительности использовалась в геодезии (Moritz and Hofmann-Wellenhof 1993), но читателю данной книги это не грозит – но также и очень практичное соглашение о суммировании, которое позволило избежать несметного количества ненужных знаков суммирования в математической литературе. Это соглашение просто говорит, что, если в произведении индекс появляется дважды, то это автоматически подразумевает суммирование. Используя это соглашение, перепишем предыдущее уравнение в виде

$$m_P^2 = C_0 - 2 \alpha_{P_i} C_{P_i} + \alpha_{P_i} \alpha_{P_k} C_{ik}. \quad (9-53)$$

В дальнейшем, если нет специальной оговорки, мы будем иметь ввиду именно это уравнение. Такие формулы также удобны для программирования (цикл).

Теперь вернемся к нашей основной теме.

В качестве примера рассмотрим задачу о представительстве (9-44); все α равны нулю, кроме одного. В этом случае формула (9-53) дает

$$m_P^2 = C_0 - 2C_{P_1} + C_0 = 2C_0 - 2C_{P_1}. \quad (9-54)$$

Для случая нулевой аномалии $m_P^2 = C_0$, что и следовало ожидать.

Часто мы нуждаемся не только в среднеквадратической ошибке m_P прогноза, но и в корреляции погрешностей прогноза ε_P и ε_Q в двух различных точках P и Q , выраженной через "ковариацию погрешностей" σ_{PQ} . Последняя определяется как

$$\sigma_{PQ} = M\{\varepsilon_P \varepsilon_Q\}. \quad (9-55)$$

Если ошибки ε_P и ε_Q некоррелированы, то их ковариация $\sigma_{PQ} = 0$. Согласно (9-48), имеем вообще, что

$$\begin{aligned} \sigma_{PQ} &= M\{(\Delta g_P - \alpha_{P_i} \Delta g_i)(\Delta g_Q - \alpha_{Q_k} \Delta g_k)\} \\ &= M\{\Delta g_P \Delta g_Q - \alpha_{P_i} \Delta g_Q \Delta g_i - \alpha_{Q_k} \Delta g_P \Delta g_k + \alpha_{P_i} \alpha_{Q_k} \Delta g_i \Delta g_k\}, \end{aligned} \quad (9-56)$$

и, наконец,

$$\sigma_{PQ} = C_{PQ} - \alpha_{P_i} C_{Q_i} - \alpha_{Q_k} C_{P_k} + \alpha_{P_i} \alpha_{Q_k} C_{ik}. \quad (9-57)$$

Обозначения здесь очевидны; например, $C_{PQ} = C(PQ)$.

Ковариационная функция ошибок

Значения ковариации ошибок σ_{PQ} для различных положений точек P и Q составляют непрерывную функцию координат P и Q . Эту функцию называют

ковариационной функцией ошибок, или кратко, функцией ошибок, и обозначают $\sigma(x_P, y_P, x_Q, y_Q)$. Если P и Q отличны, то мы просто имеем

$$\sigma(x_P, y_P, x_Q, y_Q) = \sigma_{PQ}; \quad (9-58)$$

если P и Q совпадают, то (9-57) приводит к (9-53), так что

$$\sigma(x_P, y_P; x_P, y_P) = m_P^2, \quad (9-59)$$

то есть квадрат стандарта погрешности прогноза в точке P .

Таким образом, ковариации ошибок σ_{PQ} можно рассматривать как частные значения ковариационной функции ошибок, так же, как ковариации C_{PQ} аномалий силы тяжести, можно рассматривать как частные значения ковариационной функции $C(s)$. Повторим, что под функцией ошибок понимается ковариационная функция ошибок прогноза, определяемая как

$$M\{\varepsilon_P \varepsilon_Q\}, \quad (9-60)$$

тогда как $C(s)$ есть ковариационная функция аномалий силы тяжести, определяемая как

$$M\{\Delta g_P \Delta g_Q\}. \quad (9-61)$$

Термин "ковариационная функция" в более узком смысле мы сохраним для $C(s)$ – в отличие от уравнивания методом наименьших квадратов, где "ковариации" автоматически означают ковариации ошибок. Ковариации "изотропны", то есть независимы от направлений; ковариации ошибок неізотропны.

Используя (9-53) и (9-57), функцию ошибок можно выразить в терминах ковариационной функции; в самом деле,

$$\sigma(x_P, y_P, x_Q, y_Q) = C(PQ) - \alpha_{P_i} C(Q_i) - \alpha_{Q_i} C(P_i) + \alpha_{P_i} \alpha_{Q_k} C(ik). \quad (9-62)$$

Таким образом проявляется основная роль ковариационной функции в точностных расчетах. Но, с другой стороны, функция ошибок необходима для решения задач о преобразовании погрешностей.

9.6 Среднеквадратический прогноз

Значения α_{P_i} для самого точного метода прогноза получаются путем минимизации стандартной погрешности прогноза (9-53) как функции α . Известные необходимые условия минимума состоят в том, что

$$\frac{\partial m_P^2}{\partial \alpha_{P_i}} \equiv -2C_{P_i} + 2\alpha_{P_k} C_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9-63)$$

или

$$C_{ik} \alpha_{Pk} = C_{Pi}. \quad (9-64)$$

Получили систему n линейных уравнений с n неизвестными α_{Pk} ; решением является

$$\alpha_{Pk} = C_{ik}^{(-1)} C_{Pi}, \quad (9-65)$$

где $C_{ik}^{(-1)}$ обозначают элементы матрицы, обратной по отношению к симметричной матрице $[C_{ik}]$.

Подстановка (9 65) в (9 41) дает

$$\widetilde{\Delta g}_P = \alpha_{Pk} \Delta g_k = C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} \Delta g_k. \quad (9-66)$$

В матричном представлении это выглядит следующим образом

$$\widetilde{\Delta g}_P = [C_{P1}, C_{P2}, \dots, C_{Pn}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \vdots \\ \Delta g_n \end{bmatrix}. \quad (9-67)$$

Мы видим, что для оптимального прогноза необходимо знать статистическое поведение аномалий силы тяжести через ковариационную функцию $C(s)$. Существует тесная связь между этим оптимальным методом прогноза и методом наименьших квадратов. Хотя они связаны с решением несколько различных задач, оба они предназначены для получения самых точных результатов. Линейные уравнения (9 64) соответствуют "нормальным уравнениям" в уравнительных вычислениях. Прогноз посредством формулы (9 67) поэтому называют "средисквадратическим прогнозом". Обобщение на случай разнородных данных – "средисквадратическая коллокация" – рассматривается в главе 10. В своей наиболее общей форме средисквадратическая коллокация включает в себя также и параметрическое оценивание методом наименьших квадратов. Эти вопросы выходят за рамки данной книги и детально обсуждаются в работе Moritz (1980 а).

Нетрудно оценить точность средисквадратического прогноза. Достаточно вставить α из (9 65) в (9 53) и соответствующим образом изменить индексы суммирования. Это дает

$$\begin{aligned} m_P^2 &= C_0 - 2\alpha_{Pk} C_{Pk} + \alpha_{Pk} \alpha_{Pl} C_{kl} \\ &= C_0 - 2C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk} + C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{jl}^{(-1)} C_{Pj} C_{kl}. \end{aligned} \quad (9-68)$$

Чтобы читатель смог оценить соглашение Эйнштейна о суммировании, мы

приводим это выражение в его первоначальной форме:

$$\begin{aligned} m_P^2 &= C_0 - 2 \sum_k \alpha_{Pk} C_{Pk} + \sum_k \sum_l \alpha_{Pk} \alpha_{Pl} C_{kl} \\ &= C_0 - 2 \sum_i \sum_k C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk} + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{jl}^{(-1)} C_{Pj} C_{kl}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Но теперь вернемся к более компактным записям! Мы имеем

$$C_{jl}^{(-1)} C_{kl} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \quad (9.70)$$

Матрица $[\delta_{kl}]$ является единичной как произведение матрицы $[C_{kl}]$ и ее обратной матрицы. Поэтому

$$C_{ik}^{(-1)} C_{jl}^{(-1)} C_{kl} = C_{ik}^{(-1)} \delta_{jk} = C_{ij}^{(-1)}, \quad (9.71)$$

так как матрица не меняется при умножении на единичную матрицу. Следовательно,

$$\begin{aligned} m_P^2 &= C_0 - 2C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk} + C_{ij}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pj} \\ &= C_0 - 2C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk} + C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk} \\ &= C_0 - C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка средисквадратического прогноза определяется выражением

$$\begin{aligned} m_P^2 &= C_0 - C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Pk} \\ &= C_0 - [C_{P1}, C_{P2}, \dots, C_{Pn}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{P1} \\ C_{P2} \\ \vdots \\ C_{Pn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Ковариацию ошибок в точках P и Q мы находим тем же путем:

$$\begin{aligned} \sigma_{PQ} &= C_{PQ} - C_{ik}^{(-1)} C_{Pi} C_{Qk} \\ &= C_{PQ} - [C_{P1}, C_{P2}, \dots, C_{Pn}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{Q1} \\ C_{Q2} \\ \vdots \\ C_{Qn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Эти две формулы дают ковариационную функцию ошибок среднеквадратического прогноза. Обе они имеют форму, подобную (9 67), и одинаково удобны для вычислений, так что Δg и ее точность можно оценить одновременно.

Ясно, что после соответствующих незначительных изменений эта теория автоматически применима и к *возмущениям силы тяжести* δg .

Практические соображения

Геометрическая интерполяция (разд. 9.4) пригодна для интерполяции точечных аномалий в плотной сети силы тяжести с расстояниями между станциями 10 км или меньше. Если же необходимы не значения аномалий в точке, а средние аномалии для блоков размером $5' \times 5'$ или больше, то рассмотренное в предыдущем разделе своего рода представительство может быть более простым и едва ли менее точным.

Среднеквадратический прогноз, по самому его определению, представляет собой процедуру более точную по сравнению с геометрической интерполяцией или представительством, но увеличение в точности не является очень значительным. Главное преимущество среднеквадратического прогноза состоит в том, что появляется возможность систематически выполнять простую и только численную обработку данных о силе тяжести; аномалии силы тяжести хранятся в базах данных, а карты аномалий силы тяжести, в случае необходимости, производятся автоматически. Одна и та же формула применима и для интерполяции, и для экстраполяции, так что пробелы в данных силы тяжести не сказываются на методе вычислений, который становится полностью алгоритмическим (Moritz 1963). Практические и вычислительные детали можно найти в работе Rapp (1964) и многих других более поздних статьях.

Для больших расстояний между станциями, 50 км или больше, прогноз отдельных точечных значений становится бессмысленным. В таком случае следует работать с аномалиями, усредненными по блокам, скажем, $1^\circ \times 1^\circ$.

9.7 Корреляция с высотой

До сих пор мы принимали во внимание только корреляцию аномалий силы тяжести между собой, то есть их автокорреляции, игнорируя корреляцию с высотой, которая во многих случаях играет важную роль. Поэтому наши формулы были справедливы только для аномалий силы тяжести, некоррелированных с высотой, таких, как изостатические или, до некоторой степени, аномалии Буге; или для аномалий в свободном воздухе в достаточно плоских областях. С аномалиями в свободном воздухе в горных районах нужно действовать по другому.

Рисунок 9.4, согласно U.A. Uotila, показывает корреляцию аномалий в сво-

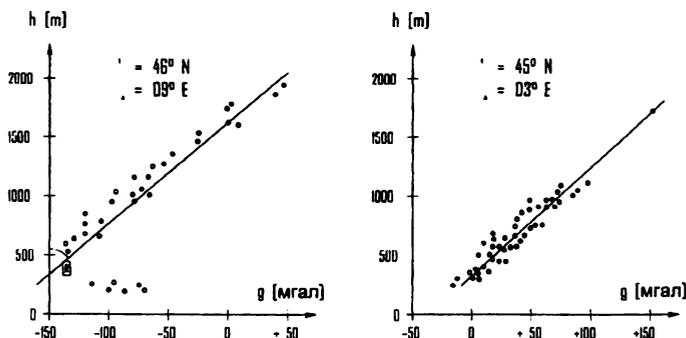


Рис. 9.4: Корреляция аномалий в свободном воздухе с высотой

бодном воздухе с высотой. Аномалии силы тяжести Δg показаны в соответствии с высотой h . Если бы существовала точная функциональная зависимость между Δg и h , то все точки лежали бы на прямой (или, в более общем случае, на кривой). В действительности, имеется только приближенное функциональное соотношение, некоторый тренд или общая тенденция аномалий в свободном воздухе увеличиваться линейно с высотой; но при этом вполне возможны исключения, даже значительные. Это очень хорошо показывает смысл корреляции.

Мы характеризовали корреляцию аномалий силы тяжести между собой с помощью "автоковариационной функции" (9-6),

$$C(s) = M\{\Delta g \Delta g'\}, \quad (9\ 75)$$

где $s = PP'$. Аналогично, мы можем составить "взаимную ковариационную функцию"

$$B(s) = M\{\Delta g \Delta h'\} = M\{\Delta g' \Delta h\}, \quad (9\ 76)$$

выражающую корреляцию между силой тяжести и высотой, и

$$A(s) = M\{\Delta h \Delta h'\}, \quad (9\ 77)$$

представляющую собой автоковариационную функцию разностей высот

$$\Delta h = h - M\{h\}, \quad (9\ 78)$$

где символ $M\{h\}$ обозначает среднюю высоту в рассматриваемой области.

Если Δg и Δh не коррелированы, то функция $B(s)$ тождественно равна нулю. Если это не так, то при интерполяции мы должны также принять во внимание высоту.

Легко обобщить формулу прогноза (9 41) для этой цели, но оказывается, что это имеет лишь небольшое практическое значение.

Применение к аномалиям Буге

Практически очень важным, однако, является вопрос о возможности сделать аномалии в свободном воздухе независимыми от высоты, добавляя некоторое слагаемое, пропорциональное высоте. Другими словами, при каком значении коэффициента b величина

$$z = \Delta g - b \Delta h, \quad (9-79)$$

не коррелирует с высотой? В статистической терминологии, корреляция с высотой – это некоторый *trend*, который может быть удален.

Этот тренд z имеет форму аномалии Буге; для реальной аномалии Буге мы имеем, согласно разд. 3.4,

$$b = 2\pi G \rho. \quad (9-80)$$

Если плотность $\rho = 2.67 \text{ г/см}^3$, то

$$b = +0.112 \text{ мгал/м}. \quad (9-81)$$

Составим ковариационную функцию $Z(s)$ между "аномалией Буге" z (9-79) и разностью высоты Δh

$$Z(s) \equiv M\{z \Delta h'\} = M\{\Delta g \Delta h' - b \Delta h \Delta h'\} = B(s) - b A(s). \quad (9-82)$$

Для того, чтобы z оказалась некоррелированной с h , необходимо, чтобы $Z(s)$ была тождественно равной нулю. Это означает, что условие

$$B(s) - b A(s) \equiv 0 \quad (9-83)$$

должно выполняться при некотором постоянном значении b для любого s , по крайней мере, приближенно.

Мы видим, что "аномалия Буге" z не коррелирована с высотой, если в рассматриваемой области функции $A(s)$ и $B(s)$ пропорциональны; константа b тогда имеет вид

$$b = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (9-84)$$

Можно показать, что это эквивалентно условию о том, что все точки на рис. 9.4 лежат приближенно на одной прямой. При этом коэффициент b определяется углом наклона этой прямой относительно оси h :

$$b = \text{tg } \alpha. \quad (9-85)$$

Эти условия очень часто выполняются на практике с хорошим приближением. Более того, вычисляя b из соотношения (9-84) или определяя его графически посредством (9-85), мы часто получаем значение, близкое к нормальному градиенту Буге (9-81).

Если предположить, что b зависит только от плотности горных пород ρ , то мы получаем способ определения средней плотности, которую часто трудно измерить непосредственно. В этом состоит "метод Неплетона", используемый в геофизической разведке: коэффициент b находится статистически посредством уравнений (9-84) или (9-85) и затем плотность пород ρ вычисляется с помощью (9-80). Рисунок 9.5 иллюстрирует принцип этого метода; см. также работу Jung (1956: p. 600).

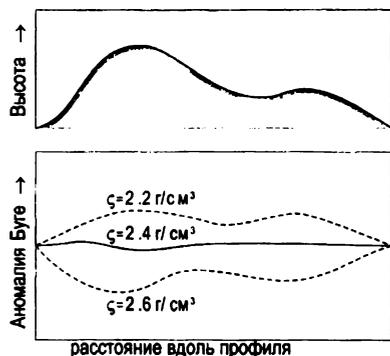


Рис. 9.5: Аномалии Буге, соответствующие различным плотностям ρ : наиболее подходящая плотность $\rho = 2.4 \text{ г/см}^3$ (нет корреляции); при других значениях плотности аномалии Буге коррелируют с высотой (при $\rho = 2.2 \text{ г/см}^3$ корреляция положительна, при $\rho = 2.6 \text{ г/см}^3$) корреляция отрицательна.

Если условие (9-83) выполнено, то мы можем трактовать "аномалию Буге" z как аномалию силы тяжести, которая полностью не коррелирует с высотой; мы можем непосредственно применить к ней всю теорию предыдущих разделов. Но даже когда это условие удовлетворяется не полностью, аномалии Буге будут в общем случае коррелировать с высотой гораздо меньше, чем аномалии в свободном воздухе. Тот факт, что в (9-79) сила тяжести приводится к средней высоте, а не к уровню моря, не имеет значения, так как различие обусловлено только аддитивной постоянной. Недавние разработки этих вопросов обсуждаются в работе Moritz (1990: p. 244).

Таким образом, редукцию Буге можно рассматривать как способ получения аномалий силы тяжести, которые менее зависят от высоты и, следовательно, более представительны, чем аномалии в свободном воздухе. Более точно, аномалии Буге ослабляют зависимость от локальной нерегулярности высот. Изостатические аномалии, кроме того, также в значительной степени независимы от региональных особенностей топографии. См. также главы 3 и 8.

Глава 10

Среднеквадратическая коллокация

10.1 Основы среднеквадратической коллокации

Принцип коллокации очень прост. Возмущающий потенциал T вне Земли является функцией гармонической, то есть удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (10-1)$$

Его приближенное аналитическое выражение может быть представлено в виде линейной комбинации f подходящих базисных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$ с соответствующими коэффициентами b_k , то есть

$$T(P) \approx f(P) = \sum_{k=1}^q b_k \varphi_k(P). \quad (10-2)$$

Все базисные функции являются функциями рассматриваемой пространственной точки P .

Так как T гармоничен вне земной поверхности, то естественно выбрать базисные функции φ_k тоже гармоническими, то есть

$$\Delta \varphi_k = 0, \quad (10-3)$$

в соответствии с (10-1).

Существует много простых систем функций, удовлетворяющих условию гармоничности (10-3), и потому мы имеем много возможностей для подходящего выбора базисных функций φ_k . Мы могли бы, например, выбрать шаровые гармонические функции или потенциалы соответствующим образом распределенных точечных масс в зависимости от того, идет ли речь о глобальном или локальном применении.

Коэффициенты b_k можно подобрать так, что заданные *результаты наблюдений воспроизводятся точно* – например, все отклонения отвеса в данной области. Это означает, что предлагаемая аппроксимирующая функция f в (10-2) дает те же самые отклонения отвеса в астрономических пунктах, что и фактический потенциал и, следовательно, такая функция может считаться хорошей аппроксимацией для T . Давайте теперь попытаемся выразить эти соображения в математической форме.

Интерполяция

Пусть в q пространственных точках P_1, P_2, \dots, P_q заданы безошибочные значения T ; эти точки могут располагаться на земной поверхности или в пространстве над земной поверхностью. Мы полагаем

$$T(P_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (10-4)$$

и требуем, чтобы в точках наблюдения (10-4) аппроксимация $f(P)$ потенциала $T(P)$ воспроизводила потенциал точно. Это означает, что

$$\sum_{k=1}^q b_k \varphi_k(P_i) = T(P_i) = f_i, \quad (10-5)$$

то есть мы имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^q A_{ik} b_k = f_i \quad \text{с} \quad A_{ik} = \varphi_k(P_i), \quad (10-6)$$

или в матричных обозначениях

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{f}. \quad (10-7)$$

Если квадратная матрица \mathbf{A} регулярна, то коэффициенты b_k определяются единственным образом

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}. \quad (10-8)$$

Эта модель удобна, например, для определения геоида по спутниковой альтиметрии, так как этот метод практически непосредственно доставляет высоты геоида N_i и, следовательно, на основании теоремы Брунса (2-236), дает $T(P_i) = \gamma_i N_i$. Для астрономогеодезического определения геоида мы должны обобщить эту модель, что приведет нас к коллокации.

Коллокация

Пусть опять посредством аппроксимации (10-2) надо воспроизвести q измеренных значений, которые по-прежнему предполагаются безошибочными (это

предположение не существенно и в дальнейшем будет снято). Но теперь измеренные величины являются линейными функционалами L_1T, L_2T, \dots, L_qT аномального потенциала T . "Линейный функционал" означает ничто иное как величину LT , которая зависит линейно от T , но не обязательно является обыкновенной функцией, а может также содержать, скажем, дифференцирование или интеграл.

Так, отклонения отвеса

$$\xi = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (10\ 9)$$

аномалии силы тяжести

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2}{R} T, \quad (10\ 10)$$

и возмущения силы тяжести

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} \quad (10\ 11)$$

являются такими линейными функционалами T^1 ; здесь, x, y, z обозначает локальную систему координат, в которой ось z направлена вертикально вверх, оси x, y направлены к северу и востоку, а $R = 6371$ км – средний радиус Земли. Выражение (10-9) является следствием уравнений типа (2-377) с $\partial s = \partial x$ или ∂y ; нормальную силу тяжести γ можно считать постоянной при горизонтальном дифференцировании. Выражение (10-10) представляет собой известное фундаментальное уравнение физической геодезии в сферической аппроксимации (2-263). Выражения (10-9) и (10-10) относятся к земной поверхности.

Повторим, что, когда мы говорим о том, что отклонения отвеса, аномалии силы тяжести и возмущения силы тяжести являются линейными функционалами на T , мы просто указываем тот факт, что зависимость $\xi, \eta, \delta g, \Delta g$ от T определяется выражениями (10-9) и (10-10), которые, конечно, являются линейными; это – линейные члены в разложении Тейлора, а квадратичные члены и члены более высоких степеней отброшены. В используемом обозначении L_iT символ L_i обозначает, например, операцию

$$L_i = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (10\ 12)$$

действующую на T в некоторой точке.

Полагая

$$L_i f = L_i T = \ell_i \quad (10\ 13)$$

и подставляя (10-2), получим

$$\sum_{i=1}^q B_{ik} b_k = \ell_i \quad \text{с} \quad B_{ik} = L_i \varphi_k, \quad (10\ 14)$$

¹Речь идёт о значениях указанных трансформант потенциала в определённой точке (прим. ред.)

где $L_i \varphi_k$ обозначает число, полученное в результате действия функционала L_i на базисную функцию φ_k ; вычисленный таким образом коэффициент B_{ik} не зависит от измеряемых величин. Линейная система (10 14) содержит q уравнений с q неизвестными и весьма похожа на (10 6). Такой метод согласования аналитической аппроксимирующей функции с множеством заданных линейных функционалов называется коллокацией и часто используется в численной математике.

Ясно, что интерполяция является простым частным случаем коллокации, в котором

$$L_i f = f(P_i), \quad (10-15)$$

то есть результат действия функционала $L_i f$ на функцию f представляет собой значение этой функции f в точке P_i . Таким образом, мы видим, что и в интерполяции, и в коллокации определение коэффициентов b_k требует решения линейной системы уравнений (матрица коэффициентов которой, в общем случае, не является симметричной).

Среднеквадратическая интерполяция

Рассмотрим функцию

$$K = K(P, Q), \quad (10-16)$$

в которой две точки P и Q являются независимыми переменными. Пусть эта функция K

- симметрична относительно P и Q ,
- гармонична относительно каждой из этих точек всюду вне определенной сферы, и
- положительно определена (положительная определенность функции имеет тот же смысл, что и в случае матрицы).

Тогда функция $K(P, Q)$ называется (гармоническим) воспроизводящим ядром (Moritz 1980 а: р. 205). Воспроизводящее ядро $K(P, Q)$ может служить "строительным материалом", из которого мы можем сконструировать базисные функции. Если выбрать базисные функции в виде

$$\varphi_k(P) = K(P, P_k), \quad (10-17)$$

где P обозначает переменную точку и P_k – фиксированную точку пространства, то получим *среднеквадратическую интерполяцию*, которую мы уже обсуждали в главе 9, но совершенно с иных позиций. Это название происходит из статистической интерпретации воспроизводящего ядра как *ковариационной функции* (разд. 9.2); при этом среднеквадратическая интерполяция имеет некоторые минимальные свойства (наименьшая дисперсия ошибки, так же,

как при уравнивании методом наименьших квадратов). Однако такая интерпретация несущественна; можно также работать с произвольными воспроизводящими ядрами, рассматривая процедуру как чисто математический аналитический метод приближенных вычислений. Обычно стараются разумным способом объединить оба аспекта .

Подставляя (10 17) в (10 6), мы получаем

$$A_{ik} = K(P_i, P_k) = C_{ik}; \quad (10-18)$$

эта квадратная матрица является симметричной (но в общем случае A_{ik} несимметрична!) и положительно определенной благодаря соответствующим свойствам функции $K(P, Q)$. Теперь можно найти коэффициенты b_k из (10-8) и подставить их в (10 2). Если обозначить

$$\varphi_k(P) = K(P, P_k) = C_{Pk}, \quad (10-19)$$

то результат можно записать в следующем виде

$$f(P) = [C_{P1} \ C_{P2} \ \dots \ C_{Pq}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_q \end{bmatrix}, \quad (10-20)$$

который формально идентичен выражению (9 67), полученному совершенно иным способом.

Среднеквадратическая коллокация

Снова выведем базисные функции из воспроизводящего ядра $K(P, Q)$, но несколько иным путем по сравнению с (10 17). Пусть

$$\varphi_k(P) = L_k^Q K(P, Q), \quad (10 21)$$

где L_k^Q означает, что функционал L_k действует по переменной Q , причём результат уже от Q не зависит (так как применение функционала приводит к определенному числу). Таким образом, в (10-14) мы должны записать

$$B_{ik} = L_i^P L_k^Q K(P, Q) = C_{ik}, \quad (10 22)$$

что дает матрицу, которая по прежнему является симметричной. Решая (10 14) относительно b_k , подставляя результат в (10-2) и учитывая

$$\varphi_k(P) = L_k^Q K(P, Q) = C_{Pk}, \quad (10-23)$$

получим

$$f(P) = [C_{P1} \ C_{P2} \ \dots \ C_{Pq}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_q \end{bmatrix}. \quad (10-24)$$

Формально, это то же самое выражение, что и (10-20), но f_i заменены на ℓ_i , а "ковариации" C_{ik} и C_{Pi} определяются правилом "преобразования ковариации" (10-22) и (10-23). Понятие преобразования ковариации представляет собой непосредственное обобщение формального закона преобразования погрешностей, известного в теории уравнивательных вычислений. Однако эта конструкция является чисто математической, а не статистической. Известно, что "линейный функционал" является непрерывным аналогом (в бесконечномерном гильбертовом пространстве) обычного понятия линейной функции в n -мерном векторном пространстве. Мы стараемся здесь не перегружать читателя слишком большим количеством математического формализма. При желании все детали можно найти в работах Moritz (1980 a) и Moritz and Hofmann-Wellenhof (1993: Chap. 10). Однако, всё таки предлагаем сравнить структуру

$$b_i = L_i^j a_j, \quad (10-25)$$

вдущую к

$$\text{cov}(b_i, b_j) = L_i^k L_j^l \text{cov}(a_k, a_l) \quad (10-26)$$

для конечномерных векторов a и к матрице L с использованием обычного суммирования по каждому из двух индексов, и $N_i = L_i^P \Delta g_P$, приводящую к

$$\text{cov}(N_P, N_Q) = L_i^P L_j^Q \text{cov}(\Delta g_P, \Delta g_Q), \quad (10-27)$$

где N_i - высота геоида в точке i , Δg - аномалия силы тяжести в точке P , а L обозначает формулу Стокса. Явные выражения можно найти в работе Moritz (1980 a: Sect. 15).

Пользуясь статистической интерпретацией, мы выбираем воспроизводящее ядро $K(P, Q)$ в виде ковариационной функции $C(P, Q)$. При этом $f(P)$ - оптимальная (в смысле наименьшей дисперсии) оценка для аномального потенциала T (и, следовательно, для аномалии высоты $\zeta = T/\gamma$), полученная по произвольному набору исходных измерений. Для определения геоида в горных районах нужны наземные измерения, прежде всего, ξ , η , и Δg . Ковариации C_{ik} и C_{Pi} задаются известными аналитическими выражениями, см. Tscherning and Rapp (1974) или Moritz (1980 a: Sect. 15). Общая программа вычислений для коллокации описана в работе Sünkel (1980).

Среднеквадратическая коллокация может быть легко обобщена для ситуации, когда исходные данные содержат случайные ошибки; можно также учесть

и наличие систематических эффектов. В дополнение к оценкам (в данном случае f) можно также вычислить их среднеквадратические ошибки по формуле типа (10-24). Всестороннее описание среднеквадратической коллокации имеется в работе Moritz (1980 а). *По материалу только этой главы изучить коллокацию нельзя!*

Гармонический характер ковариационных функций.

Ковариационные функции, будучи воспроизводящими ядрами и их линейными функциональными преобразованиями L , являются всегда функциями гармоническими в трехмерном пространстве. Если на сфере, согласно (9-25), мы имеем

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi), \quad (10-28)$$

то в пространстве

$$C(r, r', \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{R^2}{r r'} \right)^{n-2} P_n(\cos \psi), \quad (10-29)$$

см. Moritz 1980 а: Sect. 23, Eq. (32-1). Здесь $P(r, \theta, \lambda)$ – точка вычисления, а $Q(r', \theta', \lambda')$ – текущая точка с исходными данными; ψ – сферическое расстояние между (θ, λ) и (θ', λ') ; R – средний радиус Земли. Зависимость от r определяется множителем

$$r^{-(n+2)}, \quad (10-30)$$

потому что произведение $r\Delta g$ является гармоническим, и аналогично для r' . Множитель

$$\left(\frac{R^2}{r r'} \right) \quad (10-31)$$

выбирается таким образом, что, если обе точки P и Q лежат на уровне моря, то он равен 1; при этом выражение (10-29) принимает вид (10-28).

Итак, каждое слагаемое в (10-29) является гармоническим, то есть удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому и сумма ряда (10-29) является гармонической (если ряд сходится), поскольку является линейной комбинацией гармонических членов. Это вытекает из линейности уравнения Лапласа, поскольку линейная комбинация решений любого линейного уравнения есть снова решение этого уравнения.

Таким образом, все члены ряда по шаровым функциям для $T = r\Delta g$ являются гармоническими и относительно r , и относительно r' вплоть до отсчетной сферы $r = R$. Но гармонические функции, по определению, являются *регулярными аналитическими функциями* вплоть до $r = R$. Поэтому T и все его линейные комбинации регулярны и *допускают продолжение вниз вплоть до отсчетной сферы* (см. разд. 8.6).

10.2 Применение коллокации при определении геоида

Хорошо известно, что в высоких горах интерполяция, например, среднеквадратическая, непосредственно аномалий силы тяжести в свободном воздухе, являющихся, по существу, поверхностными аномалиями силы тяжести (8 128), приводит к сравнительно неточным результатам из-за корреляции аномалий в свободном воздухе с высотами (разд. 9.7). Эта корреляция приводит к заметному тренду, который необходимо удалить перед интерполяцией. Аномалии Буге значительно меньше зависят от локальных нерегулярностей высот; изостатические аномалии, кроме того, также в значительной степени независимы от региональных особенностей топографии; в разд. 11.1 мы рассмотрим, кроме того, удаление глобальных трендов с помощью моделей гравитационного поля Земли в виде рядов по шаровым функциям, (например, EGM 96, см. www.iges.polimi.it/index/geoid_repo/global_models.htm).

Точно так же перед применением коллокации необходимо с помощью изостатической редукции удалить основной тренд в отклонениях отвеса ξ, η и в аномалиях силы тяжести Δg . Таким образом, изостатическая редукция, которую формально можно рассматривать как способ удаления тренда, является существенным условием практического применения среднеквадратической коллокации в горах (Forsberg and Tscherning 1981).

С физической точки зрения, мы переносим топографические массы внутрь геоида так, чтобы восполнить изостатический дефицит масс. Положение точки измерения P на земной поверхности не изменяется. Таким образом, не только сохраняется гармонический характер аномального потенциала T вне земной поверхности, но, кроме того, численное удаление топографических масс падением моря делает функцию T гармонической вплоть до этого уровня. Следовательно, формулу коллокации (10-24) можно применять и на уровне моря, получая высоты геоида N^c . Применяя обратную редукцию (косвенный эффект) к вычисленным аномалиям высоты ζ^c и высотам N^c геоида, мы получаем фактические значения ζ и N . Есть основания ожидать, что погрешности используемой изостатической модели (например, модели Эйри - Хейсканена) в значительной мере компенсируются в этой комбинированной процедуре редукции и "антиредукции" (метод удаления - восстановления; см. разд. 11.1).

Эта процедура теоретически оптимальна, а практически хорошо подходит для компьютерного использования. Условия интегрируемости, которые в методе Гельмерта представлены замыканиями индивидуальных треугольников (см. разд. 5.14), автоматически приняты во внимание. Если отклонения отвеса заданы только в некотором определенном регионе, то геоид можно вычислить только в этом регионе. Разности в высотах геоида между двумя соседними станциями A и B , даже при использовании коллокации, существенно зависят

только от уклонений отвеса в этих станциях, и отсутствие таких данных вне рассматриваемого региона едва ли вызывает значимое искажение. Заметим, однако, что добавление константы ко всем высотам геоида N не отражается на уклонениях отвеса; следовательно, астрономогеодезические данные позволяют определять высоты геоида только с точностью до аддитивной постоянной. Эта постоянная может быть выбрана так, что среднее значение всех вычисленных N равно нулю, что приближенно и получается в результате коллокации.

Непосредственно получить почти геоцентрические высоты геоида – это значит соответствующим образом учесть глобальный тренд, который отражается, главным образом, на ζ и N . Это можно сделать путем вычитания эффекта соответствующего глобального поля силы тяжести, например, с помощью модели силы тяжести Papp (1981) в виде разложения в ряд по шаровым функциям до степени 180, следуя, скажем работе Sünkel (1983). Это описано в следующем разделе; в данном разделе мы ограничиваемся изостатической редукцией.

Вычислительная процедура

Процесс вычислений состоит из следующих шагов:

1. Преобразование поверхностных астрономогеодезических уклонений ξ , η из локальной системы координат в геоцентрическую Геодезическую Систему Отсчета 1980 (GRS 1980) посредством хорошо известных дифференциальных формул Веннинг Мейнса (см. Heiskanen and Moritz 1967: Eq. (5-59)). Это необходимо, так как коллокация требует максимально реальную систему отсчета.
2. Исправление "геометрических" поверхностных уклонений ξ , η за кризизну нормальной отвесной линии (8-137) дает "динамические" поверхностные уклонения $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ посредством (8-136).
3. Вычисление, согласно (8-128), аномалий силы тяжести Δg , также относящихся к земной поверхности.
4. Топографо-изостатическая редукция $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, Δg по формулам (8-154) и (8-101) дает значения ξ^c , η^c , Δg^c , которые по-прежнему относятся к поверхностной точке P .
5. Применение коллокации к ξ^c , η^c , Δg дает аномалии высот ζ^c или высоты когеоида N^c простым изменением высотного параметра (h или ρ соответственно) в программе коллокации (см. Sünkel 1983).
6. Используя косвенный эффект (10-2) и (8-153), мы получим реальные аномалии высот ζ и высоты геоида N .

Глава 11

Методы вычислений

11.1 Принцип удаления–восстановления

Начнем с редукции силы тяжести в соответствии с современным представлением об измерении и вычислении гравитационного поля всегда *на земной поверхности*, или, что все равно, *на уровне точки* в смысле разд. 8.9 и 8.14. Более точно, это – *топографо-изостатическая редукция на земном уровне*.

Наиболее практичным методом реализации этой идеи является среднеквадратическая коллокация. Дело в том, что она автоматически действует в трехмерном пространстве, используя нужные топографические высоты h в качестве параметров входа (измерения: аномалии силы тяжести, отклонения отвеса и т. д.) и выхода (потенциал T или какие нибудь подлежащие вычислению функционалы на нем). Символически это означает

$$T = \mathcal{L}(\ell) \quad (11\ 1)$$

или

$$\text{выход} = \mathcal{L}(\text{вход}), \quad (11\ 2)$$

где \mathcal{L} обозначает линейную операцию среднеквадратической коллокации (не надо путать с линейным функционалом L , использованном, например, в выражении (10 13)).

В разд. 8.9 мы уже обсудили редукцию силы тяжести с точки зрения современной теории. Повторим, что, обращаясь непосредственно к топографо-изостатической редукции, мы имеем

- измеренные аномалии силы тяжести Δg на земном уровне,
- редукцированные топографо-изостатические аномалии Δg^c , полученные удалением притяжения топографо-изостатических масс $\delta g_{\text{ТГ}}$,
- "ко-потенциал" $T^c = \mathcal{L}(\Delta g^c)$, вычисленный коллокацией, и

- "реальный потенциал" T , полученный путем *восстановления* "косвенного эффекта" топографо-изостатических масс δT_{TI} .

Математически это можно записать следующим образом

$$T = \mathcal{L}(\Delta g - \delta g_{TI}) + \delta T_{TI}. \quad (11\ 3)$$

Мы повторили интерпретацию редукции силы тяжести, данную в разд. 8.9. Заметим, что, если

$$\delta T_{TI} = \mathcal{L}(\delta g_{TI}), \quad (11\ 4)$$

то формула (11-3) дает

$$\delta T = \mathcal{L}(\Delta g), \quad (11\ 5)$$

как и должно быть.

Тот же принцип остается и в работе с уклонениями отвеса ξ, η на земной поверхности, при этом уклонения могут использоваться и в качестве исходных данных, и как результаты вычислений (разд. 8.14 и 10.2).

Используемая изостатическая модель, вообще говоря, произвольна. Тем не менее, она должна обеспечивать хорошую аппроксимацию (разности δT небольшие) и быть удобной в вычислительном отношении.

Некоторое изменение подхода состоит в том, что коллокация теперь применяется не к "реальному" аномальному полю силы тяжести, как в (11-5), а к остаточному полю после удаления той его части, которая генерируется принятой топографо-изостатической моделью. Модель произвольна, но *выводимые величины* должны быть строго согласованы с теорией. (Согласованность величин, полученных методом коллокации, гарантируется корректным правилом преобразования ковариации; см. разд. 10.2.)

Указанное изменение подхода может показаться неважным, так как якобы меняется только терминология: то, что прежде солидно называли "изостатической аномалией", теперь стало просто "остаточной величиной". Однако, принцип удаления восстановления позволяет также использовать другие приближенные поля для удаления трендов; в частности, одну из многочисленных существующих "моделей (силы тяжести) Земли" (ЕМ или EGM) в виде разложения потенциала T в ряд по шаровым функциям до степени 180 или выше.

Мы "удаляем" из наблюдений ℓ - аномалий силы тяжести, возмущений силы тяжести, уклонений отвеса и т. д. - эффект ℓ_{EM} , вычисленный с помощью определенной земной модели, а затем коллокация "восстанавливает" этот эффект ЕМ на конечных результатах. Математика здесь такая же, как в (11-4) и (11 5):

$$\delta T_{EM} = \mathcal{L}(\delta \ell_{EM}) \quad (11\ 6)$$

и

$$\delta T = \mathcal{L}(\ell). \quad (11\ 7)$$

Обобщение состоит лишь в замене Δg на ℓ .

Теперь мы сделаем важный шаг вперед. Принцип удаления-восстановления должен удовлетворять только двум требованиям:

1. удаляемые вспомогательные потенциалы должны быть гармоническими, просто вычисляемыми и математически согласованными: то, что удалено на входе, должно быть восстановлено на выходе;
2. в обычном случае линейности, два или большее число различных вспомогательных потенциалов могут использоваться (удаляться – восстанавливаться) одновременно.

Так, мы используем одновременно земную модель ЕМ для более длинных волн и топографо-изостатическую геологическую модель ТГ для более коротких волн. Мы можем говорить о длинах волн, так как разложения по сферическим функциям на сфере являются обобщением рядов Фурье на окружности. Максимальная степень N сферического разложения связана с самой короткой разрешающей длиной волны λ соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{N} = \frac{360^\circ}{N}. \quad (11.8)$$

Для разложения до степени, скажем, $N = 180$ мы имеем $\lambda = 360^\circ/180 = 2^\circ$, что примерно соответствует 200 км на меридиане или на экваторе. Часто рассматривают половину длины волны $\lambda/2$ (см. Seeber 2003: p. 469).

Так как ЕМ описывает (приблизительно) длинные волны до определенной максимальной степени N , то естественно учитывать только остающиеся короткие волны, соответствующие гармоникам степеней от N до бесконечности. Последовательность $N + 1, N + 2, \dots \infty$ будем обозначать как CN – сокращение для "дополнения (complement)" последовательности от 2 до N .

Итак, мы можем написать для остатков

$$\begin{aligned} \delta T &= T - T_{EM}^N - T_{TG}^{CN}, \\ \delta \ell &= \ell - \ell_{EM}^N - \ell_{TG}^{CN}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

К этим остаткам и будет применен метод коллокации.

Замечание

Как отмечено в начале разд. 10.2, процесс удаления-восстановления предназначен для удаления всех известных основных трендов:

- локальная топография порождает *аномалии Буге*,
- региональные особенности (то есть, их изостатическая компенсация) вместе с редукцией Буге приводят к *топографо-изостатическим аномалиям*.

- глобальные нерегулярности выражаются какой-нибудь земной моделью и приводят к тому, что скромно называется "остаточными аномалиями".

Ясно, что то, что "удалено" перед вычислением, должно быть полностью "восстановлено" после вычисления.

11.2 Определение геоида в Австрии методом коллокации

Австрия – приятная страна, имеющая, несмотря на свои небольшие размеры, все типы топографии: плоские равнины, холмистые области и альпийские горы с высотами до 3800 м. Таким образом, это не только приятное место для жизни, но и интересный с геодезической точки зрения испытательный полигон.

Пионерской работой были исследования Süinkel (1983). Более поздние работы, особенно Süinkel et al. (1987), Kühnreiber (1998, 2002 a, 2002 b) и Erker et al. (2003) расширили и усовершенствовали изучение поля силы тяжести в Австрии, но работой 1983 года удобно воспользоваться в качестве некоторого введения.

Süinkel (1983) для вычисления геоида в основной части Австрии методом среднеквадратической коллокации использовал очень хорошие данные об отклонениях отвеса. Аномалии силы тяжести аналогичного качества в 1983 году еще не были доступны. В дополнение к изостатической редукции (разд. 8.14) согласно Эйри – Хейсканену ($T = 30$ км), он также удалил глобальный тренд посредством модели земной силы тяжести в виде ряда по шаровым функциям до определенной степени N . В частности, он использовал модель Rapp (1981) с $N = 180$.

После удаления топографо изостатического тренда T_{TI} и глобального тренда T_{EM}^N (напоминаем, что EM обозначает земную модель), был получен остаточный аномальный потенциал

$$\delta T = T - T_{TI} - T_{EM}^N + T_{TI}^N. \quad (11\ 10)$$

Так как модель земного потенциала T_{EM}^N представлена разложением по шаровым функциям до степени N , то для изостатической редукции можно рассматривать только эффект степеней $N > 180$ (или, скажем, $N > 360$), заменяя T_{TI} на

$$T_{TI}^{CN} = (T_{TI})_{N > 180} = T_{TI} - T_{TI}^N, \quad (11\ 11)$$

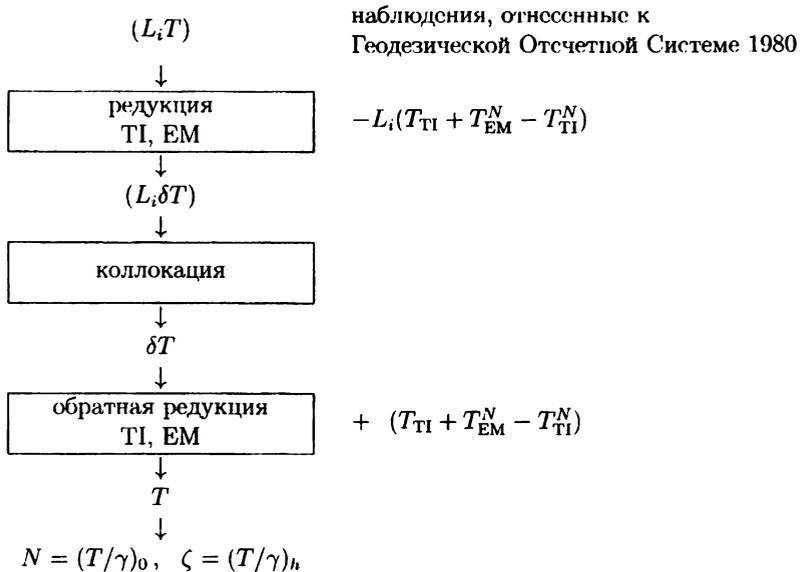
где T_{TI}^N представляет разложение для T_{TI} до степени $N = 180$. Это объясняет выражение (11 11).

Наблюдения $\ell_i = [\xi, \eta, \Delta g]$, которые представляют линейные функционалы $L_i T$, редуцированы так же, то есть

$$\ell_i - L_i T_{TI} - L_i T_{EM}^N + L_i T_{TI}^N = L_i \delta T. \quad (11.12)$$

Если к вычислительной процедуре, описанной в конце предыдущего раздела, добавить редукцию за счет земной модели, то последовательность действий можно изобразить блок-схемой в виде таблицы 11.1.

Таблица 11.1: От наблюдений к геоиду



Исходные данные

Топография в Австрии довольно разнообразная с высотами до 3800 м. Плотность астропомеогеодезических станций была порядка 10 – 20 км; общее количество использованных данных с отклонениями отвеса было 521. Никакие аномалии силы тяжести в этом первом вычислении не использовались.

Топографо-изостатическая редукция уклонов отвеса была выполнена с использованием довольно грубой цифровой модели местности, состоящей из значений высот, усредненных по трапециям $20'' \times 20''$ и полученных по цифровой карте масштаба 1 : 500 000. Среднеквадратическая ошибка этой модели

имеет порядок 100 м. Исследования показали, что, несмотря на невысокую точность, модель достаточно адекватна для редукции уклонений отвеса; однако, она совершенно не годится для редукции силы тяжести! Дело в том, что погрешность редукции для ξ , η приближенно пропорциональна наклону местности; поэтому, если станция находится на местности с нулевым уклоном, то эта погрешность очень мала. Это справедливо, когда станция располагается не только на горизонтальной плоскости, но и на вершине горы, как это обычно и бывает.

Результаты

Оказалось, что почти вся полезная информация о (T, N, ζ) обусловлена топографо изостатическим эффектом и использованной моделью силы тяжести с $N = 180$. Эта часть, ТП+ ЕМ, определяется величинами между 41.5 м и 49.5 м. Вклад коллокации $(\gamma^{-1}T)$ — после удаления явно выраженного тренда порядка 3 м — лежит между -0.5 м и 1.5 м.

Эффективность топографо изостатической редукции можно увидеть также из того факта, что она уменьшила дисперсию уклонений отвеса в Австрии (средний квадрат величин ξ и η) от 30 (дуговые секунды)² to 5 (дуговые секунды)². Следовательно, австрийский геоид можно определить с точностью 1–2 м даже без измерений (уклонений отвеса) и без коллокации, а располагая только топографической картой! Это тем более удивительно, так как Австрия не особенно хорошо изостатически компенсирована.

Значительный интерес представляет эффект аналитического продолжения изостатического (плюс земная модель) редуцированного аномального потенциала $T_{ТТ}$. Он выражается разностью $\gamma^{-1}T$ на земной поверхности минус $\gamma^{-1}T$ на уровне моря. Эта разность достигает максимума 13 см в Центральных Альпах и может быть как положительной, так и отрицательной. По терминологии дашной книги, это — *различие между действительным геоидом и гармоническим геоидом* (разд. 8.15).

Очень интересна также разность между аномалиями высоты ζ ($= \gamma^{-1}T$ на земной поверхности) и высотами геоида N ($= \gamma^{-1}T$ на уровне моря). Максимум 35 см для $\zeta - N$ оказался на горе Grossglockner (самый высокий пик в Австрии, $H = 3797$ м). Эти результаты очень хорошо согласуются с приближенной формулой

$$\zeta - N = -(981 \text{ гал})^{-1} \Delta g_B H, \quad (11-13)$$

где Δg_B — аномалия Буге в галах, а H — высота в тех же единицах, что и ζ и N . Согласие можно легко проверить, так как аномалии Буге в исследуемом районе варьируют от 10 мгал до -170 мгал, соответствуя топографическим высотам от 200 м до 3000 м (Sünkel 1983: p. 140). Согласно Sünkel et al. (1987: p. 69), разности $\zeta - N$ по всей Австрии падают в пределах между -2 см и $+56$ см.

Все это было вычислено только по измеренным уклонениям отвеса. Измеренные значения силы тяжести были включены в работах Kührtreiber (2002 a, 2002 b) и Erker et al. (2003) и привели к тому, что можно было бы назвать "геоидом с точностью до пескольных сантиметров".

В конечном счете, астропогодезический геоид и гравиметрический геоид сопоставлены и – после удаления систематических трендов – скомбинированы, см. работы Kührtreiber (2002 b) и Erker et al. (2003).

11.3 Поправки Молоденского

В разд. 8.6 дано решение проблемы Молоденского с помощью ряда, полученного на основе аналитического продолжения. Это было записано в виде (8-68), (8 69), (8 67), то есть

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots, \quad (11-14)$$

$$\zeta_i = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} g_i S(\psi) d\sigma, \quad (11-15)$$

$$\Delta g^* = \Delta g + g_1 + g_2 + g_3 + \dots. \quad (11-16)$$

Поправочные члены g_n вычисляются по рекуррентным формулам

$$g_n = - \sum_{r=1}^n z^r L_r(g_{n-r}), \quad (11-17)$$

начиная с

$$g_0 = \Delta g. \quad (11-18)$$

Здесь функционал L_n также определяется рекуррентно:

$$L_n(\Delta g) = n^{-1} L_1 [L_{n-1}(\Delta g)], \quad (11-19)$$

начиная с

$$L_1 = L; \quad (11-20)$$

оператор дифференцирования L определяется интегралом (8 60), то есть,

$$L(f) = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{f - f_Q}{l_0^3} d\sigma. \quad (11-21)$$

Это означает: возьмем $g_0 = \Delta g$, где Δg – аномалия в свободном воздухе на земном уровне в смысле Молоденского, вычислим g_1 по формуле (11-17) с $n = 1$, затем вычислим g_2 по формуле (11-17) с $n = 2$ и L_2 по формуле (11-19),

Таблица 11.2: Характерные значения поправок Молоденского ξ_i и η_i для уклонений отвеса в секундах дуги до $i = 4$, вычисленные по аномалиям силы тяжести в свободном воздухе

	ξ_1	η_1	ξ_2	η_2	ξ_3	η_3	ξ_4	η_4
мин	-2.44	-1.94	-0.92	-0.84	-0.35	-0.24	-0.08	-0.12
макс	2.36	3.654	0.88	0.86	0.21	0.20	0.05	0.09
ср	0.19	0.32	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	0.00	0.00
ср.кв	0.90	0.96	0.29	0.27	0.06	0.06	0.02	0.02

потом вычисляем g_3 по формуле (11 17) с $n = 3$ и L_3 по формуле (11 19), и так далее.

Оператор L ведет себя как дифференцирование ($L(f) = \frac{\partial \Delta g}{\partial r}$) и потому "загрубляет" функцию f ; это означает, что каждое последующее действие L становится все менее и менее точным. Это не способствует сходимости ряда Молоденского, даже если исходная функция Δg является очень гладкой, что трудно предположить в горных районах.

В таких случаях некоторое сглаживание Δg неизбежно. Численный анализ постоянно сталкивается с проблемами сглаживания и разработано много методов сглаживания, например, метод скользящего среднего. Для вычисления интеграла L можно воспользоваться быстрым преобразованием Фурье. Задача состоит в том, чтобы найти степень сглаживания, при которой следующие друг за другом поправки g_1, g_2, g_3, \dots последовательно уменьшались бы и таким образом практически обеспечивали сходимость, но без излишнего "заглаживания". Во всяком случае, сглаживание должно гарантировать, что g_5, g_6, \dots практически пренебрегаемы, так как они не могут быть надежно вычислены из-за неизбежного накопления ошибок округления и в конечном счете принимают характер чистого шума.

Как показано в обстоятельной работе Kührtreiber (1990), не существует какого либо готового предписания для определения оптимального сглаживания. Наилучшим подходом оказывается метод проб и ошибок.

Изостатическую редукцию можно рассматривать как некоторый метод сглаживания на основе геофизических данных, сравните таблицы 11.2 и 11.3.

Чтобы показать порядок величин, мы берём некоторые типичные значения поправок Молоденского в высоких горах.

Таблицы 11.2 и 11.3 являются таблицами (8-3) и (8-6) из работы Kührtreiber (1990). Исходные значения силы тяжести даны для прямоугольных ячеек размером 11.25" × 18.75". Предполагается соответствующее сглаживание.

Таблица 11.3: Характерные значения поправок Молоденского ξ_i и η_i для уклонений отвеса в секундах дуги до $i = 4$, вычисленные по изостатическим аномалиям силы тяжести

	ξ_1	η_1	ξ_2	η_2	ξ_3	η_3	ξ_4	η_4
мин	-0.57	-0.36	-0.06	-0.07	-0.01	-0.02	0.00	0.00
макс	0.33	0.46	0.09	0.05	0.01	0.01	0.00	0.00
ср	-0.04	0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
ср.кв	0.11	0.09	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00

Намного лучше, конечно, использование *изостатической редукции*, которая дает физические значимос и более эффективное сглаживание. Это показывает таблица 11.3.

Таблица 11.4, взятая из несколько более ранней работы (Kraiger et al. 1987, Table 6.1), включает также поправки Молоденского для аномалии высоты ζ .

Таблица 11.4: Сравнение численного интегрирования и быстрого преобразования Фурье (БПФ): наибольшее и (арифметическое) среднее значения поправок Молоденского ζ_i , ξ_i , η_i для $i = 1, 2$; испытательный район: $46.788^\circ \leq \varphi \leq 46.512^\circ$, $13.438^\circ \leq \lambda \leq 14.646^\circ$, 600 м \leq топографическая высота \leq 2400 м

	ζ_1 [см]	ξ_1 ["]	η_1 ["]	ζ_2 [см]	ξ_2 ["]	η_2 ["]	
наибольшие значения	40.8	2.0	2.0	0.8	0.2	0.2	числ. интегр.
	47.6	1.5	1.4	0.7	0.1	0.1	БПФ
средние значения	31.3	0.4	0.4	0.2	0.03	0.03	числ. интегр.
	36.7	0.3	0.4	0.5	0.02	0.02	БПФ

Эти значения нельзя сравнивать непосредственно, потому что испытательные районы и плотность данных, а также использованные методы интегрирования, сглаживания и т.п. различны. Однако они приводят к полезным заключениям.

1. Метод поправок Молоденского сильно зависит от деталей численного интегрирования (плотность данных, сглаживание и т.п.).

2. Поправки уменьшаются с увеличением $i = 1, 2, 3, \dots$. Это то, что они и должны делать. Можно ожидать, что поправки более высоких порядков в конечном счете составляют "чистый шум" из-за общей потери гладкости и увеличения ошибок округления, так что вопрос о сходимости становится бессмысленным как с практической, так и с теоретической точек зрения: члены с более высокими значениями i следует просто положить равными нулю волевым порядком.
3. Поправка Молоденского ζ_1 может достигать нескольких дециметров. ζ_2 и члены более высоких порядков часто оказываются пренебрегаемо малы.
4. В конце разд. 2.21 и 8.8 мы отметили любопытное явление. При наличии одних и тех же исходных данных, гравиметрические методы, кажется, обеспечивают вертикальное положение (в виде ζ или N) примерно на порядок лучше, чем положение горизонтальное (выражаемое через ξ, η). Если воспользоваться старым астрономическим правилом о том, что $1'' \approx 30$ м в положении, то 1 м соответствует $0.03''$. Предположим, что мы достигаем точность в 1 м в вертикальном положении и желаем получить такую же точность для горизонтального положения. Это означало бы, что мы должны выполнять астрономические измерения Φ, Λ и получать отклонения отвеса ξ, η точнее, чем $0.03''$. Подобная ситуация имеет место и с поправками Молоденского: если $\zeta_1 = 0.41$ м, то $\xi_1 = \eta_1 = 2''$, что примерно соответствует 60 м.

В этом смысле гравиметрия на порядок слабее в определении горизонтального положения по сравнению с определением положения вертикального. Этот факт обычно использовался в споре против тех ученых, которые утверждали еще примерно в 1960 году, что гравиметрический метод в состоянии сделать все, на что способна спутниковая геодезия. Теперь с появлением GPS мы знаем это лучше, и без идеологических сомнений комбинируем спутниковые данные с наземной гравиметрией.

(Другая перспектива астрономических наблюдений - астрономогеодезическое определение геоида. Здесь точность астрономии достаточна; см. разд. 5.14.)

Заключительное замечание

Вычисление поправок Молоденского является тяжелой работой. В горных районах среднеквадратическая коллокация явно предпочтительнее интегрирования, за исключением некоторых опытных вычислений (Sideris 1987, 1990).

Коллокация также позволяет сравнивать и комбинировать астрономогеодезические и гравиметрические данные; ключевая статья здесь - Kühtreiber (2002 b).

Однако, всё это основывается на фундаментальных идеях М.С.Молоденского. В основополагающей публикации (Крагур 1969) ясно показана эволюция перехода от проблемы Молоденского к среднеквадратической коллокации.

11.4 Геоид в интернете

Международная ассоциация Геодезии (International Association of Geodesy, IAG) имеет очень активную Международную Службу Геоида (International Geoid Service, IGeS IAG). Прежде чем Вы будете вычислять свой собственный геоид, загляните на сайт www.iges.polimi.it. Вы можете найти там глобальный и локальный геоиды, исходные данные, программное обеспечение, ссылки на литературу, планы предстоящей работы и т.д. Особенно отметим следующие базы данных о геоиде:

- www.iges.polimi.it/index/geoid_repo/global_models.htm.
- www.iges.polimi.it/index/geoid_repo/regional_models.htm.

В последнем файле Вы можете найти:

- Гравиметрический геоид США 1996 (Dru Smith),
- Европейский геоид и квазигеоид EGG97 (H. Denker),
- Австрийский геоид 1996 (H. Sünkel).

Другие важные интернет адреса:

- Международное Гравиметрическое Бюро (Тулуза):
http://bgi.cnes.fr8110/bgi_a.html,
- Международная Ассоциация Геодезии:
www.iag_aig.org.

ЛИТЕРАТУРА

- Abd-Elmotaal H (1995): Attraction of the topographic masses. *Bulletin Géodésique*, 69: 304-307.
- Anger G, Moritz H (2003): Inverse problems and uncertainties in science and medicine. *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät*, 61(5): 171-212.
- Anger G, Gorenflo R, Jochmann H, Moritz H, Webers W (1993): Inverse problems: principles and applications in geophysics, technology, and medicine. *Mathematical Research* 74: 37-44.
- Bomford G (1962): *Geodesy*, 2nd edition. Oxford University Press.
- Brouwer D, Clemence GM (1961): *Methods of celestial mechanics*. Academic Press, New York.
- Bruns H (1878): *Die Figur der Erde*. Publikation des Preussischen Geodätischen Instituts, Berlin.
- Cassinis G (1930): Sur l'adoption d'une formule internationale pour la pesanteur normale. *Bulletin Géodésique*. 26: 40-49.
- Civil GPS Service Interface Committee (2002): Summary report of the 40th meeting of the Civil GPS Service Interface Committee (CGSIC). Oregon, March 22-24. Available at www.navcen.uscg.gov/cgsic/default.htm.
- Daxinger W, Stirling R (1995): Kombinierte Ausgleichung von terrestrischen und GPS-Messungen. *Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation*. 83(1+2): 48-55.
- DeLoach SR, Remondi B (1991): Decimeter positioning for dredging and hydrographic surveying. In: *Proceedings of the First International Symposium on Real Time Differential Applications of the Global Positioning System*, vol 1. TÜV Rheinland, Köln: 258-263.
- Department of Defense (2001): Global Positioning System standard positioning service performance standard. Available from the U.S. Assistant for GPS, Positioning and Navigation, Defense Pentagon, Washington (DC).
- Dobrin MB, Savit CH (1988): *Introduction to geophysical prospecting*. 4th edition. McGraw Hill, New York.
- Drinkwater MR, Floberghagen R, Haagmans R, Muzi D, Popescu A (2003): GOCE: ESA's first earth explorer core mission. In: Beutler GB, Drinkwater MR, Rummel R, Steiger R von (eds): *Earth gravity from space - from sensors to earth sciences*. Space Sciences Series of ISSI, 18: 419-432. Kluwer, Dordrecht.
- Ehninger A (1969): *Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz*. Doctoral Dissertation, ETH Zürich.
- Erker E, Höggerl N, Imrek E, Hofmann-Wellenhof B, Kühtreiber N (2003): The Austrian geoid - recent steps to a new solution. *Österreichische Zeitschrift für Vermessung & Geoinformation*, 91(1): 4-13.

- ESA (1999): Gravity field and steady-state ocean circulation mission. Reports for mission selection. The four candidate earth explorer core missions, SP-1233(1). Available at http://esamultimedia.esa.int/docs/goce_sp1233_1.pdf.
- Fontana RD, Cheung W, Stansell T (2001): The modernized L2 civil signal. *GPS World*, 12(9): 28–34.
- Forsberg R, Tscherning CC (1981): The use of height data in gravity field approximation by collocation. *Journal of Geophysical Research*, 86 (B9): 7843–7854.
- Forsberg R, Tscherning CC (1997): Topographic effects in gravity field modelling for BVP. Available at www.gfy.ku.dk/~cct/comored.htm.
- Frank P, Mises R von (eds) (1930): *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, 2nd edition, part 1: Mathematischer Teil. Vieweg, Braunschweig (reprint 1961 by Dover, New York and Vieweg, Braunschweig).
- Galle A (1914): *Das Geoid im Harz*. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts Potsdam, vol 61.
- Grafarend E, Offermanns G (1975): Eine Lotabweichungskarte Westdeutschlands nach einem geodätisch konsistenten Kolmogorov-Wiener-Modell. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A: Theoretische Geodäsie, vol 82.
- Grotten E (2004): Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and geodynamics. Available at www.gfy.ku.dk/~iag/HB2004/part5/51-grotten.pdf.
- Gurtner W (1978): *Das Geoid in der Schweiz*. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich, vol 20.
- Gurtner W, Elmiger H (1983): Computation of geoidal heights and vertical deflections in Switzerland. Presented at the XVIII General Assembly of the IUGG at Hamburg, August 15–27.
- Heiskanen W (1924): *Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie*. Finnish Geodetic Institute, Helsinki, vol 4.
- Heiskanen W (1928): Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid? *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, 19: 356–377.
- Heiskanen WA (1957): The Columbus geoid. *EOS, Transactions, American Geophysical Union*, 38: 841–848.
- Heiskanen WA, Moritz H (1967): *Physical geodesy*. Freeman, San Francisco London.
- Heiskanen WA, Vening Meinesz FA (1958): *The earth and its gravity field*. McGraw-Hill, New York.
- Helmert FR (1880): *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, part 1. Teubner, Leipzig (reprint 1962).
- Helmert FR (1884): *Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*, part 2. Teubner, Leipzig (reprint 1962).
- Hirvonen RA (1960): New theory of the gravimetric geodesy. *Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy*, Helsinki, vol 32.
- Hirvonen RA (1961): The reformation of geodesy. *Journal of Geophysical Research*, 66: 1471–1478.

- Hirvonen RA (1962): On the statistical analysis of gravity anomalies. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Helsinki. vol 37.
- Hofmann-Wellenhof B, Kienast G, Lichtenegger H (1994): GPS in der Praxis. Springer, Wien New York.
- Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J (2001): GPS – theory and practice. 5th edition. Springer, Wien New York.
- Hofmann-Wellenhof B, Legat K, Wieser M (2003): Navigation – principles of positioning and guidance. Springer, Wien New York.
- Hotine M (1969): Mathematical geodesy. ESSA Monograph 2. U.S. Department of Commerce, Washington (reprint 1992 by Springer).
- Ilk KH (1999): Energiebetrachtungen für die Bewegung zweier Satelliten im Gravitationsfeld der Erde. In: Krumm F, Schwarze VS (eds): Quo vadis geodesia? Part 1. Schriftenreihe des Instituts des Studienganges Geodäsie und Geoinformatik der Universität Stuttgart, Report 1999/6: 191–205.
- Jeffreys H (1931): An application of the free-air reduction of gravity. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 31: 378–386.
- Jekeli C (1999): The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 75: 85–101.
- Jung K (1956): Figur der Erde. In: Flüge S (ed): Handbuch der Physik, vol 47, geophysics 1. Springer, Berlin, 534–639.
- Jung K (1961): Schwerkraftverfahren in der Angewandten Geophysik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig.
- Kaula WM (1959): Statistical and harmonic analysis of gravity. Journal of Geophysical Research, 64: 2401–2421.
- Kaula WM (1963): Determination of the earth's gravitational field. Reviews of Geophysics, 1: 507–551.
- Kaula WM (1966a): Theory of satellite geodesy. Blaisdell, Waltham (Massachusetts) Toronto London.
- Kaula WM (1966b): Global harmonic and statistical analysis of gravimetry. In: Orlin H (ed): Proceedings of the Symposium on Extension of Gravity Anomalies to Unsurveyed Areas. American Geophysical Union, Geophysical Monograph, 9: 58–67.
- Kellogg OD (1929): Foundations of potential theory. Springer, Berlin (reprint 1954 by Dover, New York, and 1967 by Springer, Berlin Heidelberg New York).
- Koch KR (1971): Die geodätische Randwertaufgabe bei bekannter Erdoberfläche. Zeitschrift für Vermessungswesen, 96: 218–224.
- Kraiger G (1987): Untersuchungen zur Prädiktion nach kleinsten Quadraten mittels empirischer Kovarianzfunktion unter besonderer Beachtung des Krümmungsparameters. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, vol 53.
- Kraiger G (1988): Influence of the curvature parameter on least-squares prediction. Manuscripta geodactica, 13: 164–171.
- Kraiger G, Kührtreiber N, Wang YM (1987): The correction terms of the solution of Molodensky's problem by analytical continuation in the Central Alps of Austria. In: Austrian Geodetic Commission (ed): The gravity field in Austria. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, vol IV: 95–109.

- Krarup T (1969): A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Danish Geodetic Institute, Copenhagen, vol 44.
- Kühlreiber (1990): Untersuchungen zur gravimetrischen Bestimmung von Lotabweichungen im Hochgebirge nach Molodensky mittels Fast-Fourier-Transformation. PhD thesis, Department of Physical Geodesy, Graz University of Technology, Graz, Austria.
- Kühlreiber (1998): Improved gravimetric geoid AGG97 of Austria. In: Forsberg R, Feissel M, Dietrich R (eds): Geodesy on the move: gravity, geoid, geodynamics and Antarctica. IAG Scientific Assembly, Rio de Janeiro, Brazil, September 3-9, 1997. Springer, Berlin Heidelberg, 306-311 [Schwarz K-P (ed): International Association of Geodesy Symposia, vol 119].
- Kühlreiber (2002 a): High precision geoid determination for Austria. Habilitation, Department of Positioning and Navigation, Graz University of Technology, Graz, Austria.
- Kühlreiber N (2002 b): High precision geoid determination of Austria using heterogeneous data. In: Tziavos IN (ed): Gravity and geoid 2002. Proceedings of the Third Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, August 26-30, 144-149.
- Lachapelle G, Camon ME, Erickson C, Falkenberg W (1992): High precision C/A code technology for rapid static DGPS surveys. In: Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Columbus, Ohio, March 17-20, vol 1: 165-173.
- Ledersteger K (1955): Der Schwereverlauf in den Lotlinien und die Berechnung der wahren Geoidschwere. Publication dedicated to Weikko A. Heiskanen. Finnish Geodetic Institute, Helsinki, vol 46: 109-124.
- Lerch FJ, Klosko SM, Lauhscher RE, Wagner CA (1979): Gravity model improvement using Geos 3 (GEM 9 and 10). Journal of Geophysical Research, 84(B8): 3897-3916.
- Levallois JJ (1963): La réhabilitation de la géodésie classique et la géodésie tridimensionnelle. Bulletin Géodésique, 68: 193-199.
- Mader K (1954): Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft, - vol 15.
- Malys S, Slater J (1994): Maintenance and enhancement of the World Geodetic System 1984. In: Proceedings of ION GPS-94, 7th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Salt Lake City, Utah, September 20-23, part 1: 17-24.
- March JG, Chang ES (1979): Global detailed gravimetric geoid. Marine Geodesy, 2(2): 145-159.
- Marquis W (2001): M is for modernization. GPS World, 12(9): 36-42.
- Marussi A (1985): Intrinsic geodesy. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- McCarthy DD (ed) (1996): IERS Conventions. Observatoire de Paris, IERS Technical Note 21.
- Misra P, Enge P (2001): Global Positioning System signals, measurements, and performance. Ganga-Jamuna, Lincoln (Mass.).

- Molodenski MS (1958): Grundbegriffe der geodätischen Gravimetrie. VEB Verlag Technik, Berlin (Russian originals 1945 and 1948). См. Молоденский М.С.: Основные вопросы геодезической гравиметрии. Труды ЦНИИГАиК, 1945, вып.142, 106 с. (прим. ред.).
- Molodenskii MS, Eremeev VF, Yurkina MI (1962): Methods for study of the external gravity field and figure of the earth. Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem (Russian original 1960). См. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И.: Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, 1960, вып.131, 251 с. (прим. ред.).
- Montenbruck O, Gill E (2001): Satellite orbits – models, methods, and applications, corrected 2nd printing. Springer, Berlin.
- Moritz H (1962): Studies on the accuracy of the computation of gravity in high elevations. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Helsinki, vol 38.
- Moritz H (1963): Interpolation and prediction of point gravity anomalies. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Helsinki, vol 40.
- Moritz H (1964): Zur Bestimmung des Geoides und seiner Verwendung als Reduktionsfläche. Zeitschrift für Vermessungswesen, 89: 200–202.
- Moritz H (1965): Schwerevorhersage und Ausgleichungsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 90: 181–184.
- Moritz H (1980 a): Advanced physical geodesy. Wichmann, Karlsruhe (reprint 2001 by Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio). См. Г.Мориц: Современная физическая геодезия. Пер. с английского П.П.Медведева и Ю.М.Неймана под ред. Ю.М.Неймана. Москва, 1983, Недра, 392 с. (прим. ред.).
- Moritz H (1980 b): Geodetic Reference System 1980. Bulletin Géodésique, 54: 395–405.
- Moritz H (1990): The figure of the earth – theoretical geodesy and the earth's interior. Wichmann, Karlsruhe.
- Moritz H (1995): Science, mind and the universe – an introduction to natural philosophy. Wichmann, Heidelberg.
- Moritz H, Hofmann-Wellenhof B (1993): Geometry, relativity, geodesy. Wichmann, Karlsruhe.
- Moritz H, Mueller II (1987): Earth rotation – theory and observation. Ungar, New York. См. Г.Мориц, А.Мюллер: Вращение Земли: теория и наблюдения. Пер. с английского В.В.Нестерова под ред. Я.С.Яцкива. Киев, 1992, Наукова думка, 512 с. (прим. ред.).
- Moritz H, Yurkina MI (eds) (2000): M.S. Molodensky in memoriam. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, vol 88. Доступно для свободной загрузки в PDF формате с домашней страницы <http://www.helmut-moritz.at> (прим. ред.).
- Mueller II (1985): Reference coordinate systems and frames: concepts and realization. Bulletin Géodésique, 59: 181–188.
- Müller J (2001): Die Satellitengravidimetrieemission GOCE – Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Reihe C, vol 541.

- National Imagery and Mapping Agency (2000): Department of Defense World Geodetic System 1984 its definition and relationships with local geodetic systems. 3rd edition. amendment 1. NIMA Technical Report TR 8350.2, Bethesda, Maryland. Available as PDF file at www.nima.mil.
- Neumann F (1887): Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen (edited by C. Neumann). Teubner, Leipzig.
- Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung (ed) (1983): Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung. Neue Folge, vol III.
- Pail R (2003): Satellitengeodäsie. Lecture manuscript available at the Institute of Navigation and Satellite Geodesy of the Graz University of Technology.
- Pellinen LP (1962): Accounting for topography in the calculation of quasigeoidal heights and plumb-line deflections from gravity anomalies. *Bulletin Géodésique*, 63: 57–65.
- Pizzetti P (1894): Sulla espressione della gravita alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rome*, V(3): 166.
- Pizzetti P (1911): Sopra il calcolo teorico delle deviazioni del geoide dall' ellissoide. *Atti della Reale Accademia della Scienze di Torino*, 46: 331.
- Plummer HC (1918): An introductory treatise on dynamical astronomy. Cambridge University Press (reprint 1960 by Dover, New York).
- Rapp RH (1963): A consideration of Hayford's best fitting ellipsoid data using the differential change equations of Vening Meinesz. *Geofisica pura e applicata*, 54: 1–5.
- Rapp R (1964): The prediction of point and mean gravity anomalies through the use of a digital computer. *Institute of Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State University*, vol 43.
- Rapp RH (1981): The earth's gravity field to degree and order 180 using SEASAT altimeter data, terrestrial gravity data, and other data. *Ohio State University, Department of Geodetic Sciences, Columbus, Ohio*, vol 322.
- Rehhan H, Aguirre M, Johannessen J (2000): The gravity field and steady-state ocean circulation explorer mission – GOCE. *ESA Earth Observation Quarterly*, 66: 6–11.
- Reigber C, Muller H, Rizos C, Bosch W (1983): An improved earth gravity model (GRIM 3B). Presented at the XVIII General Assembly of the IUGG at Hanburg, August 15–27.
- Reigber C, Lühr H, Schwintzer P (eds) (2003): First CHAMP mission results for gravity, magnetic and atmospheric studies. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Rimmer K (1956): Über die Reduktion grosser elektronisch gemessener Entfernungen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 81: 47–55.
- Rummel R (1986): Satellite gradiometry. In: Süinkel H (ed): *Mathematical and numerical techniques in physical geodesy*. Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo. 317–363 [Bhattacharji S, Friedman GM, Neugebauer HJ, Seilacher A (eds): *Lecture Notes in Earth Sciences*, vol 7].
- Rummel R, Bahmino G, Johannessen J, Visser P, Woodworth P (2002): Dedicated gravity field missions – principles and aims. *Journal of Geodynamics*, 33: 3–20.

- Sagrebini DW (1956): Die Theorie des regularisierten Geoids. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts Potsdam, vol 9. См. Загребин Д.В. Теория регуляризованного геоида. Тр. ИТА, №1, 1952. (прим. ред.).
- Schmitt G, Illner M, Jäger R (1991): Transformationsprobleme. Deutscher Verein für Vermessungswesen, special issue: GPS und Integration von GPS in bestehende geodätische Netze, vol 38: 125-142.
- Schwarz KP (1976): Least-squares collocation for large systems. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 35(3): 309-324.
- Seeber G (2003): Satellite geodesy, 2nd edition. Walter de Gruyter, Berlin New York.
- Sideris M (1987): Spectral methods for the numerical solution of Molodensky's problem. University of Calgary, Department of Surveying Engineering, vol 20024.
- Sideris M (1990): Rigorous gravimetric terrain modelling using Molodensky's operator. Manuscripta geodactica, 15: 97-106.
- Sneeuw N, Gerlach C, Svehlha D, Gruber C (2002): A first attempt at time-variable gravity recovery from CHAMP using the energy balance approach. In: Tziavos IN (ed): Gravity and geoid 2002. Proceedings of the Third Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, August 26-30. 237-242.
- Spilker JJ (1996): GPS signal structure and theoretical performance. In: Parkinson BW, Spilker JJ (eds): Global Positioning System: theory and applications, vol 1. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington DC. 57-119 (Progress in Astronautics and Aeronautics, vol 163).
- Stünkel H (1977): Ein nichtiteratives Verfahren zur Transformation geodätischer Koordinaten. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, 64(1): 29-33.
- Stünkel H (1980): A general surface representation module designed for geodesy. Ohio State University, Department of Geodetic Sciences, Columbus, Ohio, vol 292.
- Stünkel H (1983): Geoidbestimmung: Berechnungen an der TU Graz, 2. Teil. In: Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung (ed): Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, vol III: 125-143.
- Stünkel H, Bartelme N, Fuchs H, Hanafy M, Schuh W-D, Wieser M (1987): The gravity field in Austria. In: Austrian Geodetic Commission (ed): The gravity field in Austria. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, vol IV: 47-75.
- Telford WM, Geldart LP, Sheriff RE (1990): Applied geophysics. 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge New York Port Chester Melbourne Sydney.
- Tothunter I (1873): A history of the mathematical theories of attraction and of the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace. Macmillan, London (reprint 1962 by Dover Publications, New York).
- Tscherning CC (1976): Implementation of Algol-procedures for covariance computation on the RC 4000-computer. Danish Geodetic Institute, Copenhagen, vol 12.
- Tscherning CC, Rapp RH (1974): Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. Ohio State University, Department of Geodetic Sciences, Columbus, Ohio, vol 208.

- Tziavos IN (ed): Gravity and geoid 2002. Proceedings of the Third Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, August 26-30.
- Cotila UA (1960): Investigations on the gravity field and shape of the earth. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Helsinki, vol 33.
- Vening Meinesz FA (1928): A formula expressing the deflection of the plumb-line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity field and the gravity potential outside the geoid. Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 31(3): 315-331.
- Vollath U, Birnbach S, Landau H, Fraile-Ordoñez JM, Martín-Neira M (1999): Analysis of three-carrier ambiguity resolution technique for precise relative positioning in GNSS-2. Navigation, 46(1): 13-23.
- Vorhies J (2000): WRC 2000 results – GPS. Available at www.igeb.gov.
- Zhu J (1993): Exact conversion of earth-centered, earth-fixed coordinates to geodetic coordinates. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 16: 389-391.

Предметный указатель

- Альтиметрия
спутниковая, 175, 262
- Аномалия
высоты, 306
силы тяжести, 94, 102, 103, 249, 259
автоковариация, 366
Буге, 140
в свободном воздухе, 299
дисперсия, 356
изостатическая, 330
ингерполяция, 366, 367
ковариация, 357
корреляция с высотой, 374
косвенный эффект, 154
топографо-изостатическая, 153
- Аппроксимация
линейная, 79
сферическая, 99
- Архитектура GPS
сектор
космический, 182
потребителя, 186
управления и контроля, 185
- Время
звёздное, 279
- Высота
Гельмерга, 166
геоида, 93
динамическая, 163
когеоида, 153, 301
нормальная, 170
ортометрическая, 49, 161, 165, 171
триангуляционная, 174
эллипсоидальная, 171, 199
- Гармоники
сферические
зональные, 19, 267
секторные, 19
тессеральные, 19, 263, 267, 276, 277
эллипсоидальные, 39
- Геоид, 48, 118
астрономогеодезический, 235
в интернете, 397
гармонический, 352
регуляризация, 298
роль в геодезии, 350
- Гравитационная постоянная, 3
- Градиентометрия
спутниковая, 285
- Задача
красвая
GPS, 302, 309
вторая (Неймана), 31
геодезическая, 301
Молоденского, 302, 309
первая (Дирихле), 28
с косо́й производной, 311
третья, 31, 32, 98
физической геодезии, 32
обратная, 33

- Инверсия
относительно сферы, 156
- Интеграл
продолжения вверх, 255
Пуассона, 30, 102
Стокса, 107
- Квазигеоид, 307, 335, 353
- Когоид, 153, 298
Рудзкого, 157
- Координаты
астрономические, 55
геодезические, 43, 323
горизонтальные
глобальные, 215
локальные, 215
естественные, 55, 57, 198
преобразование, 205, 207, 210, 212, 249
прямоугольные, 10, 199, 273
сферические, 10, 203
полярные, 109
эллипсоидально гармонические, 36, 68, 203, 258
связь с прямоугольными, 38
эллипсоидальные, 43, 111, 198, 199, 203, 323
- Кривизна
отвесной линии, 50
поверхности
средняя, 52
уровневой, 50
- Линия
отвесная, 48, 53
- Масса
гравитационная, 46
инерциальная, 46
- Местоопределение
дифференциальный метод, 189
относительно, 190, 196
кинематическое, 191
статическое, 190
точечное, 189, 194
- Метод
астрономогеодезический, 223, 231, 234, 341
гравиметрический, 223, 234, 339
коллокации, 222, 271, 272, 280, 319, 352, 372
воспроизводящее ядро, 381
определение геоида, 386, 390
основы теории, 379, 382
статистический, 356
представительство, 368
прогноз, 355, 368, 371, 372
точность прогноза, 369
удаления восстановления, 331, 388
- Момент
инерции, 64
- Нивелирование
астрономическое, 233, 345
по Гельмерту, 345
по Молодецкому, 346
геометрическое, 160, 175
с помощью GPS, 175, 302
- Оператор
Лапласа, 8
- Орбита спутника
апогей, перигей, 264, 272
закон Кеплера, 264, 266
оскулирующий эллипс, 267, 273, 275
элементы, 264
- Ортогональность
функций
на сфере, 22

- Палетка, 127
- Поверхность
геопотенциальная, 104
сферопотенциальная, 104
уровенная. 47, 51. 104
- Полином
Лежандра. 16
- Поправка
динамическая, 164, 168
Молоденского, 315. 393, 396
нормальная, 172
ортометрическая, 167
топографическая (за рельеф), 140
- Потенциал
аномальный, 93
возмущающий, 93, 268
нормальный, 68, 75
силы
притяжения, 4
тяжести, 45
твёрдого тела, 6
- Превышение
эллипсоидальное, 220
- Проблема Молоденского, 303
апалитическое продолжение, 311,
317, 319
исторические замечания, 318
гармоническое продолжение, 312,
314
линсаризация, 307
продолжение вниз, 260
сферический случай, 309
- Проект
CHAMP, 287
GOCE, 291
GRACE, 289
- Проекция
- Гельмерга, 199
Пицетти, 198
- Производная
вертикальная, 315
гармонической функции, 33
- Псевдодальность, 182, 183
кодовая, 187
фазовая, 188
- Пункт
Лапласа, 233
- Разность высот
геоида и квазигеоида, 336
ортометрической и нормальной,
337
- Регуляризация, 150
- Редукция астрономических измере-
ний, 224, 225
- Редукция за кривизну отвесной ли-
нии, 236
- Редукция силы тяжести, 133
Буге
неполная, 139
полная, 140
уточнённая (Фая), 141
в свободном воздухе, 138, 331, 354
Гельмерга, 157
косвенный эффект, 153
полная, 152
Прся, 142, 144, 166, 167
Пуанкаре-Прся, 300
Рудзкого, 155, 156, 353
современный подход, 327
топографо-изостатическая, 150,
155, 388
цель редукции, 298
- Редукция углов и расстояний, 228

- Редукция уклонений отвеса
топографо изостатическая, 347
- Референц-эллипсоид, 42, 85, 114, 244
- Ряды
Молоденского, 303
- Сила
Кориолиса, 46
притяжения, 7, 247
тяжести, 44, 246
возмущение, 95, 97, 246, 249,
259, 307, 325
вычисление, 258
нормальная, 71, 246, 247
центробежная, 44
- Система
геодезических дат, 205
компенсации
Венинг-Мейнса, 149
Пратта-Хейфорда, 145, 150, 154
Эйри-Хейсканена, 147, 151, 154
локальных дат, 178
местоопределения
глобальная GPS, 181
отсчёта
GRS 80, 87
ITRF, 89
WGS 84, 88, 91
глобальная, 179
спутник-спутник
высокий-низкий, 284
низкий-низкий, 285
- Степенные дисперсии, 365
- Теллуroid, 304-307, 328
- Тензор Марусси, 294
- Теорема
Клеро, 80
- Краупа-Рунге, 318
- Тренд
глобальный, 390
топографо-изостатический, 390
- Углы Эйлера, 178
- Уклонения отвесной линии, 94, 301,
323
топографо-изостатические, 155
- Уравнение
Брунса
обобщённое, 55
Лапласа
в прямоугольных координатах,
8
в сферических координатах, 12
в эллипсоидально-гармонических
координатах, 39
Пуассона, 8
обобщённое, 45
физической геодезии
фундаментальное, 98
- Формула
Брунса, 96, 299
Венинг-Мейнса, 122
обобщённая, 253
Гельмерта, 230
Коха, 118-120
Неймаша-Коха, 310
Пицетти, 107, 250
сложения для сферических функ-
ций, 28
Стокса, 107
обобщённая, 253
- Функция
аналитическая, 8
Венинг-Мейнса, 122
гармоническая, 8
ковариационная, 356, 357

Лежандра, 15
второго рода, 19, 69
присоединённая, 16
Неймана–Коха, 310
Стокса, 112
 обобщённая, 250, 252
Хотина–Коха, 119
 глобальная, 358, 361
 локальная, 359
 ошибок прогноза, 370
 Чернишга–Раппа, 360
сферическая, 12, 13
 Лапласа, 24
 полностью нормированная, 25
 шаровая, 12

Число

геопотенциальное, 56, 163, 171

Эллипсоид

Красовского, 86
наилучшей аппроксимации, 242,
 245
общеземной, 241
уровенный, 67

Этвенн единица, 360

Эффект

движения полюса, 226

Учебное издание

**Бернхард Гофман-Велленгоф
Гельмут Морриц**

ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Перевод с английского
Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиновой

Компьютерная верстка *Ю.М. Нейман, Л.С. Сугаинова*
Оформление, обложка *Б.В. Кузнецов*

Подписано в печать 26.09.2007. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать RISO
Объем 26,5 усл. печ. л.
Тираж 500 экз. Заказ №215 Цена договорная

Издательство МИИГАиК
105064, Москва, Горховский пер., 4

Отпечатано в типографии МИИГАиК