8

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Препринт № 7

Л.А. Табаровский, М.И. Эпов, О.Г. Сосунов

ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕТОДОВ И ПОДАВЛЕНИЕ ПОМЕХ В СИСТЕМАХ МНОГОКРАТНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

(ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММЫ)

НОВОСИБИРСК 1985

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Препринт № 7

Л.А. Табаровский, М.И. Эпов, О.Г. Сосунов

ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕТОДОВ И ПОДАВЛЕНИЕ ПОМЕХ В СИСТЕМАХ МНОГОКРАТНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

(ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММЫ)

НОВОСИБИРСК 1985

УДК 550.837

Предлагаеся методика качественной и количественной оценки результатов интерпретации данных электрометрии, формализуются понятия разрешающей способности, глубинности и эквивалентности, возникающие при решении обратных задач геоэлектрики. Показано, что в системах электроразведки с многократным наблюдением высокоэффективным средством борьбы с помехами являются фильтры, основанные на изучении статистических свойств измеряемых сигналов.

Приводится описание программных средств, реализующих разработанные алгоритмы.

В настоящее время одним из основных направлений развития геоэлектрики является повышение разрешающей способности при одновременном увеличении глубинности исследований. Разрешающая способность представляет основную суммарную характеристику геофизического эксперимента и отражает предельно достижимое при данной системе наблюдений качество определения параметров изучаемого геологического объекта. Известные подходы к оценке разрешающей способности различаются выбором критериев. В настоящей работе предпочтение отдано статистическому подходу /2/.

Оценка эффективности интерпретации осуществляется, как и в работе Пороховой Л.Н., Ковтун А.А. /6/, на основе информационной матрицы. Однако подход, приводящий к этой матрице, связан не с байесовскими оценками, а с проектированием области неопределенности данных в пространство параметров. Проектирование и анализ структуры ошибок осуществляется методом Марквардта /8/.

Вопросы обработки данных обсуждаются в работе в связи с подавлением помех в многократно повторяемом геофизическом эксперименте, наиболее распространенном в методах становления электромагнитного поля (метод переходных процессов, зондирование становлением поля в ближней зоне).

Один из возможных способов борьбы с помехой - аппаратурно реализуемое накопление ("ЦИКЛ-2"). В связи с созданием и широким внедрением систем, фиксирующих каждую реализацию многократного эксперимента ("ЦЭС-2") для обработки данных стали предлагаться более эффективные алгоритмы, такие как селективное накопление в пакете программ ЭПАК /I,4/ или робастное оценивание /3/.

В работе рассматриваются также линейные трансформации исходных данных, зависящие от статистических свойств помехи и обладающие наименьшей относительной дисперсией.

Как известно, интерпретация геофизических данных принципиально неоднозначна. Причины этого можно усмотреть уже в самой общей схеме интерпретации, если рассматривать ее как процесс согласования экспериментальных (E) и модельных данных (M) в рамках некоторого решающего правила R . Под модельными данными понимаются результаты моделирования экспериментальной системы наблюдения на математической модели геофизического объекта. Решающее правило - это критерий согласованности E- и M - данных. Если критерий удовлетворяется, модель отождествляется с объектом. Такая структура соответствует наиболее употребительной схеме интерпретации - подбору (рис. I). Все математические модели, не противоречащие наблюдениям, будем называть, согласно общепринятой терминологии, эквивалентными. Источником эквивалентности могут быть свойства как модели, так и свойства экспериментальных данных. В соответствии с этим будем рассматривать два типа эквивалентности: модельно обусловленную или M - эквивалентность и экспериментально обусловленную или E - эквивалентность.

M - эквивалентность связана с неоднозначностью выбора модели в рамках зафиксированной экспериментом структуры данных. Например, если число независимых параметров модели равно числу независимых измерений, то эквивалентность может проявляться как результат нелинейной зависимости M - данных от параметров модели. Множество эквивалентных моделей в этом случае будет счетным. Если число параметров превышает количество данных, то множество эквивалентных моделей будет непрерывным в пространстве параметров или будет состоять из ряда непрерывных подмножеств. Существование M - эквивалентности не противоречит теоремам единственности для обратных задач, поскольку эти теоремы доказываются для непрерывно распределенных систем наблюдений, мы же рассматриваем конечные дискретные системы данных. Теоремы единственности в этом случае указывают лишь возможный способ сужения эквивалентности - увеличение плотности наблюдений.

E - эквивалентность порождается неотъемлемым внутренним свойством экспериментальных данных - неопределенностью, обусловленной естественными помехами и ограниченной инструментальной точностью. Относительно результатов измерений может быть высказано лишь утверждение о их принадлежности к определенным доверительным облас-

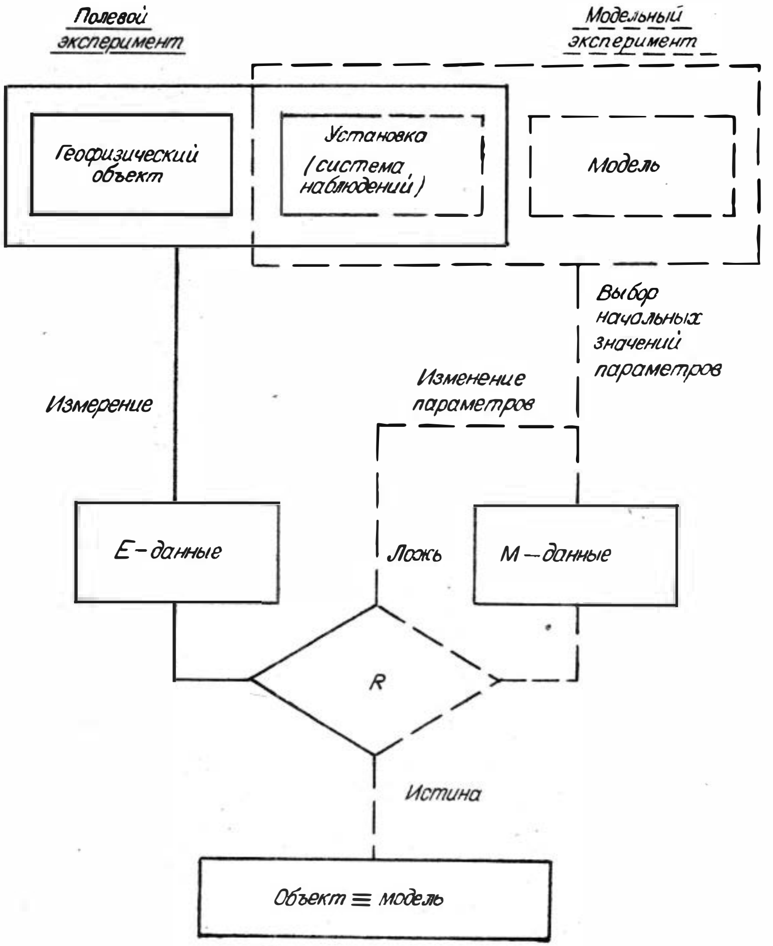

Рис. I.

тям. Всевозможным значениям данных в пределах доверительной области соответствует множество эквивалентных моделей.

Принципиальное различие двух типов эквивалентности выявляется при сравнении размеров эквивалентных областей в нормированном пространстве параметров. В случае Е – эквивалентности диаметр эквивалентной области определяется точностью эксперимента и в пределе, для идеальных измерений, стремится к нулю. В то же время диаметр модельно обусловленной эквивалентной области остается конечным (или бесконечным) при повышении точности эксперимента. В соответствии с такими представлениями будем Е - эквивалентность считать локальной, а М - эквивалентность - глобальной.

Основное средство преодоления глобальной эквивалентности при недостаточной системе наблюдений - привлечение априорной информации, на основе которой формируется начальное приближение для процесса подбора параметров модели. Для сужения экспериментально обусловленной эквивалентности, и, следовательно, для повышения достоверности интерпретации, необходимо, наряду с повышением точности измерений разрабатывать методы более эффективного планирования эксперимента и обработки его результатов. Как на этапе планирования эксперимента, так и на этапе обработки важнейшей целью является повышение чувствительности данных к параметрам исследуемых объектов при одновременном подавлении естественных и геологических помех. На этапе планирования эта задача решается средствами проектирования установок, обладающих, в зависимости от решаемой геолого-геофизической задачи, необходимыми свойствами, на этапе обработки - соответствующими алгоритмическими средствами. Настоящая работа посвящена методам построения систем наблюдения и обработки данных, позволяющих эффективно решать задачу повышения разрешающей способности. В разделах I-4 рассматриваются методы оценки локальной эквивалентности при наличии многократных наблюдений. В разделе 5 для многократных наблюдений предлагается более эффективный, по сравнению с накоплением, метод обработки данных, возможности которого иллюстрируются в определенном классе помех на примере метода становления поля.

I. Математическая модель эксперимента

Для математического описания системы "эксперимент - модель" (рис. I) целесообразно ввести пять линейных пространств, точки которых будут изображать соответственно экспериментальные данные, геофизический объект, систему наблюдений, модель среды и модельные данные.

Пространство экспериментальных данных G. Пусть результат эксперимента представляет собой совокупность N_g измеряемых скаляров g_1, g_2, ... g_{Ng}. Будем эту совокупность представлять точкой в евклидовом пространстве G. Через $\vec{g}$ обозначим вектор-столбец координат:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{N_g} \end{pmatrix} \qquad (I.I)$$

Пространство может описывать весьма различные по физической природе экспериментальные данные. Величины g_1, ... g_{Ng} могут быть физически однородны и соответствовать, например, значениям какой-либо компоненты поля на частотах w_1, ..., w_{Ng} или на временах t_1, ..., t_{Ng} или на разносах v_1, ..., v_{Ng} и т.д. Они могут также описывать комплексный эксперимент и иметь несхожую физическую природу. Например, g_1, ..., g_i могут быть значениями характеристик, измеряемых в методе ВЭЗ на разносах v_1, ..., v_i, а g_{i+1}, ..., g_{Ng} – значениями поля, измеренного в методе становления на временах t_1, ..., t_{Ng-i}.

Пространство параметров объекта Q. Считаем, что геометрические и физические свойства объекта допускают описание с помощью конечного числа параметров q_1, ..., q_{Nq}. Тогда объект изображается точкой в N_q – мерном пространстве Q:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_q} \end{pmatrix} \qquad (I.2)$$

Целью интерпретации является определение размерности и компонент вектора $\vec{q}$.

Пространство конструктивных параметров K. Управляемые средствами экспериментатора параметры системы наблюдений будем называть конструктивными. К их числу относятся моменты, частоты, времена регистрации, координаты активных и пассивных элементов установок и т.д. Пусть измеряемая величина g_i зависит от n_i конструктивных параметров $k_{i,j}$ ($j = I, ..., n_i$). Упорядочим величины $k_{i,j}$ в виде следующей последовательности:

$$\underbrace{k_{1,1}, \dots, k_{1,n_1}}_{i=1}, \quad \underbrace{k_{2,1}, \dots, k_{2,n2}}_{i=2}, \quad \underbrace{k_{N_g,1}, \dots, k_{N_g,n_{ng}}}_{i=N_g}. \qquad (I.3)$$

Если какой-либо из параметров $k_{i,j}$ в последовательности (I.3) совпадает с любым из предшествующих параметров, то $k_{i,j}$ из последовательности вычеркнем. Члены оставшейся подпоследовательности занумеруем от I до N_k : $k_1, \ldots, k_{N_k}$. Величины k_j ($j = \overline{I, N_k}$) будем рассматривать как координаты точки в пространстве К :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{N_g} \end{pmatrix}. \tag{I.4}$$

Пусть, например, измеряется компонента нестационарного поля на расстоянии r от источника на временах $t_I, \ldots, t_{Ng}$. Момент установки – М. Каждое измерение зависит от трех конструктивных параметров M, r, t_i . Таким образом последовательность (I.3) имеет вид:

$$\underbrace{M, r, t_1,}_{i = 1} \quad \underbrace{M, r, t_2,}_{i = 2} \quad \ldots \quad \underbrace{M, r, t_{N_g}}_{i = N_g}$$

Вычеркивая при $i = 2, \ldots, N_g$ параметры M, r, получаем

$$N_k = N_g + 2 \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} M \\ r \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{N_g} \end{pmatrix}$$

Пространство параметров модели Р. На стадии интерпретации результатов измерений выдвигается определенная гипотеза о параметрическом описании объекта, основанная на априорных данных и разрезе и предварительном качественном анализе данных. Эта гипотеза определяет параметризацию класса априорно допустимых моделей. Пусть p_j($j = \overline{I, N_p}$) – параметры модели. Точку с координатами p_j будем считать принадлежащей N_p – мерному пространству Р:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{N_p} \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

Пространство модельных данных F . Любая конструктивная конфигурация $\vec{k}$ из пространства К может быть смоделирована (на основе соответствующих уравнений) на модели $\vec{p}$ из пространства Р. Результат моделирования – вектор $\vec{f}$ размерности N_g :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N_g} \end{pmatrix} \qquad (I.6)$$

Будем векторы $\vec{f}$ считать элементами линейного векторного пространства F. По физической природе и структуре элементов пространства F и G тождественны. Поэтому при необходимости между этими пространствами можно не делать различия.

Между элементами различных пространств существуют функциональные связи. Экспериментальные данные $\vec{g}$ определяются конструктивными параметрами $\vec{k}$ и параметрами объекта $\vec{q}$. Кроме того, на результаты измерения влияет индуктивная естественная помеха $\vec{\Delta}$. Вектор $\vec{\Delta}$ идентичен по структуре векторам $\vec{f}$ и $\vec{g}$ и имеет размерность N_g. Таким образом:

$$\vec{g} = \vec{g}_0(\vec{k}, \vec{q}) + \vec{\Delta}. \qquad (I.7)$$

Элементы пространства модельных данных определяются параметрами $\vec{k}$ и $\vec{p}$:

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{k}, \vec{p}). \qquad (I.8)$$

Решающее правило R формулируется в терминах определенным образом выбранной меры близости векторов $\vec{f}$ и $\vec{g}$ и обычно имеет вид неравенства:

$$L(\vec{f}, \vec{g}) \leqslant L_k. \qquad (I.9)$$

Здесь L_k – критическое значение принятой меры.

На рис. 2 изображена схема взаимной зависимости элементов пространств. Структура схемы тождественна рис. I. Отождествление объекта и модели осуществляется в рамках локальной эквивалентности. Величина l_k является мерой расстояния между объектом и моделью в пространстве параметров. Значение величины l_k зависит от критического значения меры L_k.

2. Критерий локальной эквивалентности в пространстве данных

Конструктивные параметры $\vec{k}$ могут быть нестабильны в процессе проведения эксперимента или измеряться с определенной погрешностью, т.е. $\vec{k}$ – случайный вектор. Случайным является также вектор помехи $\vec{\Delta}$

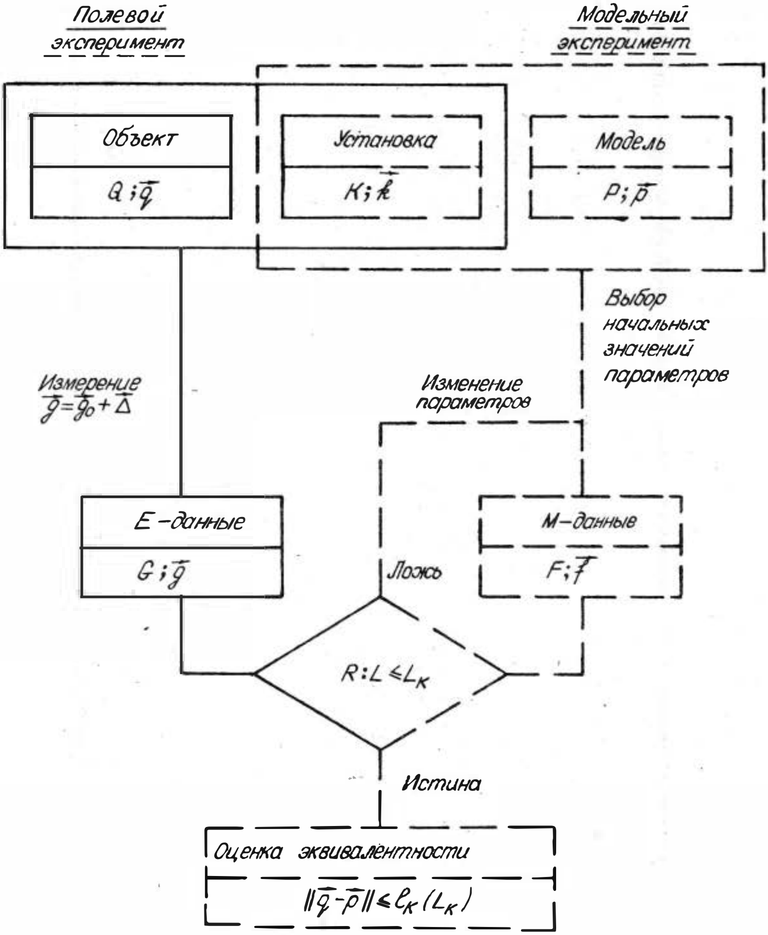

Рис. 2

Отсюда вытекает, что случайными величинами являются измеряемый и модельный сигналы $\vec{g}$ и $\vec{f}$.

Геофизические измерения выполняются с весьма разнообразными объемами выборок N_a . В уникальных экспериментах N_a = I, в схемах с накоплением $N_a \gg$ I. Будем считать, что для любого случайного вектора $\vec{V}$ объем выборок по всем компонентам $V_I, \ldots, V_n$

одинаков. Для оценки математического ожидания $\vec{m}_v$ и рассеяния вектора $\vec{v}$ будем использовать выборочное среднее $\vec{\mu}_v$ и выборочную ковариационную матрицу $\hat{\Sigma}_v$:

$$\vec{\mu}_v = \frac{1}{Na} \sum_{j=i}^{Na} \vec{v}_i , \tag{2.1}$$

$$\hat{\Sigma}_v = \frac{1}{Na-1} \sum_{j=1}^{Na} (\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)(\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)^T . \tag{2.2}$$

Здесь индекс "т" означает транспортирование вектор-столбца. Решающее правило R, на основе которого выносится суждение о тождественности модели и объекта, является обычно мерой близости модельного сигнала $\vec{f}$ и выборочного среднего $\vec{\mu}_g$ вектора экспериментальных данных $\vec{g}$. Таким образом, необходимо нормировать пространство G. Поскольку выборочное среднее является случайной величиной, то распределение нормы $\|\vec{\mu}_g - \vec{m}_g\|$ может служить для определения доверительной области значений вектора $\vec{\mu}_g$. Таким образом, при нормировании пространства G целесообразно отдавать предпочтение таким нормам, которые, как статистики, имели бы известные распределения, по крайней мере в рамках соответствующих параметрических гипотез. Например, при многомерном нормированном распределении задается статистика T^2, определяемая соотношением:

$$T^2 = Na\,(\vec{\mu}_g - \vec{m}_g)^T \hat{\Sigma}_g^{-1} (\vec{\mu}_g - \vec{m}_g), \qquad Na > Ng \tag{2.3}$$

Величина $\left(\frac{T^2}{Na-1} \cdot \frac{Na - Ng}{Ng}\right)$ подчиняется центральному F- распределению с N_g и $(N_a - N_g)$ степенями свободы. С другой стороны, функция T удовлетворяет всем аксиомам нормы. Тогда для того, чтобы доказать это, покажем вначале, что матрица $\hat{\Sigma}_g$ положительно определена. Пусть $\vec{a}$ - произвольный вектор из G. Тогда

$$\vec{\alpha}^T \hat{\Sigma}_g \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^T \left\{ \frac{1}{Na-1} \sum_{i=1}^{Na} (\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)(\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)^T \right\} \vec{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{Na-1} \sum_{i=1}^{Na} \left[\vec{\alpha}^T (\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)\right]\left[(\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)^T \vec{\alpha}\right] = \frac{1}{Na-1} \sum_{i=1}^{Na} \left[\vec{\alpha}^T (\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)\right]^2 .$$

Если $N_a < N_g$, то очевидно, что вектор $\vec{a}$ можно подобрать так, чтобы он был ортогонален всем векторам $(\vec{v}_i - \vec{\mu}_v)$ $(i = 1, \ldots, N_a)$.

В этом случае все слагаемые последней суммы обращаются в нуль и, следовательно, оператор $\hat{\Sigma}_g$ является всего лишь неотрицательным. Пусть $N_a \geqslant N_g$ и в выборке $\{\vec{V}_i\}$ существует N_g линейно независимых векторов (если это не так, то либо компоненты вектора V как случайные величины не являются независимыми, либо выборка "неудачна"; обе такие возможности исключаем из рассмотрения). Тогда все слагаемые рассматриваемой суммы обращаются в нуль в тривиальном случае $\vec{a} = 0$, т.е. оператор $\hat{\Sigma}_g$ положительно определен. В дальнейшем будем считать, что условия положительной определенности матрицы $\hat{\Sigma}_g$ выполняются.

В силу положительной определенности матрицы $\hat{\Sigma}_g$ существует и положительно определена матрица $\hat{\Sigma}_g^{-1}$, поэтому имеется величина T, определяемая соотношением:

$$T = \sqrt{Na\,(\vec{M}_g - \vec{m}_g)^T \hat{\Sigma}_g^{-1} (\vec{M}_g - \vec{m}_g)}\,. \tag{2.4}$$

Докажем, что T - норма в G. При любом $\vec{a}$ из G, очевидно, что $T(\vec{a}) \geqslant 0$ и $T(\lambda\vec{a}) = \lambda T(\vec{a})$. Докажем, что $T(\vec{a}+\vec{b}) = T(\vec{a})+T(\vec{b})$. Выполним в G поворот, диагонализующий $\hat{\Sigma}_g$:

$$\hat{C}\hat{\Sigma}_g\hat{C}^T = \hat{L} = \begin{pmatrix} \ell_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_{Ng} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Здесь $\hat{C}$ - унитарная матрица, строками которой являются координаты нормированных собственных векторов $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{Ng}$ матрицы $\hat{\Sigma}_g$; $l_1, \ldots l_{N_g}$ - положительные собственные значения матрицы. Очевидно,

$$\hat{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\ell_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\ell_{Ng} \end{pmatrix} = (\hat{C}\hat{\Sigma}_g\hat{C}^T)^{-1} = \hat{C}\hat{\Sigma}_g^{-1}\hat{C}^T; \tag{2.6}$$

$$\hat{\Sigma}_g^{-1} = \hat{C}^T\hat{L}^{-1}\hat{C}. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в выражение для нормы $\vec{a}+\vec{b}$, получим:

$$T(\vec{a}+\vec{b}) = \left\{Na\left[(\hat{C}(\vec{a}+\vec{b}))^T\hat{L}^{-1}(\hat{C}(\vec{a}+\vec{b}))\right]\right\}^{1/2} =$$
$$= \left\{Na\left(\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,(\vec{a}+\vec{b})\right)^T\left(\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,(\vec{a}+\vec{b})\right)\right\}^{1/2}. \tag{2.8}$$

Здесь

$$\sqrt{\hat{L}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{\ell_{N_g}} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Учитывая неравенство треугольника для евклидовой нормы вектора $\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,(\vec{a}+\vec{b})$, получаем из (4.2.8):

$$T(\vec{a}+\vec{b}) \le \{Na(\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,\vec{a})^T(\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,\vec{a})\} + \{Na(\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,\vec{b})^T(\sqrt{\hat{L}^{-1}}\,\hat{C}\,\vec{b})\} =$$

$$= \{Na\,\vec{a}^T\hat{\Sigma}_g^{-1}\vec{a}\}^{1/2} + \{Na\,\vec{b}^T\hat{\Sigma}_g^{-1}\vec{b}\}^{1/2} = T(\vec{a}) + T(\vec{b}). \tag{2.10}$$

Таким образом, статистика T является нормой в пространстве G .

В процессе интерпретации целесообразно оценивать близость векторов $\vec{\mu}_g$ и $\vec{f}$ в смысле T-нормы, принимая текущие значения $\vec{f}$ как гипотезы о математическом описании $\vec{m}_g$. Если T^2_α - квантиль T^2 - распределения, соответствующая доверительному уровню (I- α), то доверительное множество значений $\vec{m}_g$ в случае нормального распределения определяется, как известно, соотношением:

$$Na\,((\vec{\mu}_g - \vec{m}_g)^T\hat{\Sigma}_g^{-1}(\vec{\mu}_g - \vec{m}_g)) \le T^2_\alpha. \tag{2.11}$$

Если в процессе подбора минимизировать $T(\vec{\mu}_g - \vec{f})$, то решающее правило для принятия текущего значения $\vec{f}$ в качестве основной гипотезы о значении $\vec{m}_g$ можно сформулировать следующим образом:

$$R: \qquad T^2(\vec{\mu}_g - \vec{f}) \le T^2_\alpha. \tag{2.12}$$

Решающее правило (2.I2) имеет смысл при условии, что величина подчиняется многомерному нормальному распределению. Значение вектора параметров модели, минимизирующее левую часть (2.I2), обозначим через $\vec{p}_0$, соответствующее значение модельного сигнала - через $\vec{f}_0$. Модель $\vec{p}_0$ будем называть центральной.

После того, как принята основная гипотеза $\vec{f}_0$ ($\vec{p}_0$), нужно рассмотреть вероятные конкурирующие. При критическом уровне α вероятность отвергнуть основную гипотезу, если она верна, равна α (ошибка первого рода). Представляется вполне разумным принимать во внимание на равных с основной гипотезой все конкурирующие гипотезы, для которых вероятность ошибки второго рода больше α . Совокупность таких гипотез может быть описана в случае нормального распределения с помощью параметра нецентральности нецентрального F - распределения. Обозначим через τ_α такое значение параметра нецентральности, при котором ошибка второго рода равна α при критическом уровне основной гипотезы, равным α. Таким образом, область эквивалентных конкурирующих гипотез определится соотношением:

$$N_a(\bar{f}-\vec{f}_0)^T\hat{S}_g^{-1}(\bar{f}-\vec{f}_0)\le\tau_\alpha^2. \qquad (2.13)$$

Здесь $\hat{S}_g$ - истинная ковариационная матрица. Поскольку она неизвестна, можно использовать для оценки области (2.13) выборочно-ковариационную матрицу.

Соотношение (2.13) определяет в случае нормального распределения область эквивалентных значений модельных или измеренных сигналов на доверительном уровне (1- α). В табл. I для различных значений величины выборки N_a и размерности вектора наблюдений $\bar{N}_g$ приводятся значения параметров T_α^2 и τ_α^2 при критическом уровне α = 0,05. Каждому значению N_g соответствует две строки. В первой располагаются величины T_α^2, во второй τ_α^2.

Параметрическое оценивание области эквивалентности требует выдвижения довольно жестких гипотез о характере распределения. Представляется целесообразным рассмотреть непараметрические критерии. В случае нормального распределения мы исходим из того, что в процессе интерпретации следует по возможности приблизить модельный сигнал $\vec{f}$ к выборочному среднему в смысле критерия R(2.12). Уже отмечалось, что не только измеренный, но и модельный сигнал является случайным вектором в силу нестабильности конструктивных параметров. Представим себе следующую последовательность экспериментов E_k. В каждом эксперименте E_k выполняется дважды многократное наблюдение вектора экспериментальных данных $\vec{g}$. Два множества этих наблюдений обозначим через $\{\vec{g}_1\}_k$ и $\{\vec{g}_2\}_k$, k= I, 2, ... , соответствующие выборочные средние - через $\vec{\mu}_k^1$, $\vec{\mu}_k^2$.

Очевидно, что векторы $\vec{\mu}_k^1$ и $\vec{\mu}_k^2$ не совпадают между собой, т.е. норма $T_k^2(\vec{\mu}_k^1-\vec{\mu}_k^2)$, которую можно оценить с помощью либо матрицы $\hat{\Sigma}_{k,1}$, либо $\hat{\Sigma}_{k,2}$, отличной от нуля. Положим для определенности

$$T_K^2 = N_a\left(\vec{M}_K^1 - \vec{M}_K^2\right)^T \hat{\Sigma}_{K,1}^{-1}\left(\vec{M}_K^1 - \vec{M}_K^2\right). \tag{2.14}$$

Таблица 1

Значения T^2_α и τ^2_α при $\alpha = 0,05$.

N_g	$N_a - N_g$					
	5	10	15	20	25	30
10	102,09	53,13	41,70	36,66	33,85	32,04
	132,59	56,59	40,70	34,04	30,42	28,14
15	145,59	71,87	54,62	46,99	42,71	39,96
	263,27	102,42	69,70	56,18	48,88	44,32
20	188,98	90,37	67,24	56,99	51,21	47,51
	437,57	160,89	105,51	82,84	70,66	63,10
25	232,32	108,77	79,73	66,82	59,52	54,84
	655,53	232,03	148,12	114,07	95,82	84,52
30	275,68	127,13	92,13	76,55	67,74	61,98
	917,12	315,85	197,72	149,87	124,36	108,61
35	319,07	145,45	104,51	86,20	75,91	69,15
	1222,40	412,35	254,13	190,27	156,31	135,38
40	362,54	163,76	116,85	95,80	83,91	76,37
	1571,20	521,52	317,41	235,27	191,67	164,84
45	406,12	182,12	129,09	105,51	91,77	83,40
	1963,80	643,40	387,58	284,87	230,44	197,00
50	449,87	200,52	141,20	115,29	99,71	90,09
	2400,00	777,95	464,64	339,07	272,63	231,85
55	493,88	218,95	153,24	124,99	107,93	96,65
	2879,80	925,19	548,57	397,88	318,24	269,40
60	538,24	237,26	165,37	134,40	116,41	103,43
	3403,30	1085,10	639,39	461,29	367,26	309,64

N_g	$N_a - N_g$					
	40	50	60	80	I00	I20
IO	29,87 25,45	28,63 23,9I	27,82 22,9I	26,63 2I,7I	25,79 2I,00	25,48 20,54
I5	36,66 38,97	34,68 35,93	33,37 33,97	32,I2 3I,6I	3I,38 30,23	30,2I 29,32
20	42,98 54,25	40,45 49,24	38,7I 46,03	36,I6 42,I5	35,40 39,90	35,5I 38,43
25	49,I2 7I,34	45,68 63,9I	43,73 59,I6	40,93 53,43	38,46 50,I0	37,9I 47,94
30	55,2I 90,27	50,96 79,97	48,05 73,39	45,68 65,47	42,95 60,89	40,40 57,90
35	60,95 III,07	56,45 97,44	52,76 88,74	49,07 78,30	47,9I 72,26	44,7I 68,33
40	66,5I I33,36	6I,49 II6,32	57,96 I05,7I	52,07 9I,92	5I,29 84,24	49,98 79,24
45	72,40 I58,27	65,95 I36,62	62,80 I22,84	55,98 I06,35	53,2I 96,84	53,95 90,65
50	78,62 I84,68	70,45 I58,35	66,7I I4I,6I	60,90 I2I,59	55,37 II0,05	55,63 I02,56
55	84,76 2I2,96	75,54 I8I,5I	70,I2 I6I,52	66,0I I37,64	58,70 I23,90	56,55 II4,97
60	90,34 243,I3	8I,27 206,09	73,85 I82,58	70,I3 I54,5I	63,34 I38,37	58,I8 I27,89

Пусть F – распределение величины (2.I4), α – квантиль этого распределения соответствует тому, что норма расстояния между двумя выборочными средними $\vec{\mu}_k^1$ и $\vec{\mu}_k^2$ не превосходят T^2_α с вероятностью $I - \alpha$. Рассмотрим теперь единственную пару экспериментов, в которой первый является натурным, второй – модельным. Очевидно, мы должны признать результат интерпретации приемлемым на доверительном уровне I - α , если

$$T^2(\vec{M}-\vec{f}) \le T^2_\alpha . \qquad (2.15)$$

Изложенный подход не требует привлечения гипотез о распределении величины $\vec{g}$, но в нем необходимо знать распределение статистики расстояний между результатами экспериментов, составляющих пары. Это распределение может быть смоделировано по единственной выборке $\{\vec{g}_i\}$ ($i = I, \dots N_a$) методом Бутстрэпа /7/. Схема моделирования показана на рис. 3. Экспериментальные данные $\{g^i_1\}$ и величины μ_1 , $\hat{\Sigma}_1$ являются исходными данными для моделирования. Далее на каждом шаге методом Бутстрэпа моделируется новый экспериментальный набор $\{\vec{g}^i_k\}$ и величины $\vec{\mu}_k$, $\hat{\Sigma}_k$, t_k . В результате получается необходимое распределение $F(T)$. Объединим (2.I3), (2.I5) в одной записи:

$$N_a(\vec{f}-\vec{f_0})^T \hat{\Sigma}_g^{-1}(\vec{f}-\vec{f_0}) \le L^2_\alpha . \qquad (2.16)$$

Здесь L^2_α - значение соответствующего критерия при доверительном уровне (I- α). Соотношение (2.I6) определяет, очевидно, N_g -мерный эллипсоид в пространстве данных.

3. Критерий эквивалентности в пространстве параметров модели

Соотношение (2.I6) определяет область эквивалентности в пространстве модельных данных. Наша основная задача заключается в том, чтобы описать область эквивалентности в пространстве параметров P. Для этого нужно найти в этом пространстве прообраз эллипсоида (2.I6). Мы сделаем это в линейном приближении по параметрам модели $\bar{p}$. Разложим вектор $\vec{f}$ ($\vec{p}$) в ряд в окрестности точки $\vec{p}_0$. Поскольку $\vec{f}$ ($\vec{p}_0$) = $\vec{f_0}$, то можно записать:

$$\vec{f}-\vec{f_0} = \hat{Z}(\vec{p}-\vec{p}_0) . \qquad (3.1)$$

Здесь $\hat{Z}$ - матрица $N_g \cdot N_p$ частных производных модельного сигнала по параметрам p_j :

$$Z_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j}(\vec{p}_0) . \qquad (3.2)$$

Подставляя (3.I) в (2.I6), получаем соотношение, определяющее область эквивалентности в пространстве параметров:

$$N_a\left((\vec{p}-\vec{p}_0)^T \hat{Z}^T \hat{\Sigma}_g^{-1} \hat{Z} (\vec{p}-\vec{p}_0)\right) \leq L_\alpha^2 \quad (3.3)$$

или

$$N_a\left((\vec{p}-\vec{p}_0)^T \hat{A} (\vec{p}-\vec{p}_0)\right) \leq L_\alpha^2 . \quad (3.4)$$

Здесь

$$\hat{A} = \hat{Z}^T \hat{\Sigma}_g^{-1} \hat{Z} . \quad (3.5)$$

Неравенство (3.4) описывает эллипсоид в пространстве параметров и все его свойства определяются свойствами матрицы $\hat{A}$. Матрица $\hat{A}$ имеет размерность $N_p \cdot N_p$, симметрична и неотрицательна. Симметрия $\hat{A}$ доказывается транспонированием (3.5) с учетом симметрии $\hat{\Sigma}_g$. Докажем неотрицательность матрицы $\hat{A}$. При любом $\vec{v} \in P$

$$\vec{v}^T \hat{A} \vec{v} = \vec{v}^T \hat{Z}^T \hat{\Sigma}_g^{-1} \hat{Z} \vec{v} = \vec{v}^T \hat{Z}^T \sqrt{\hat{\Sigma}_g^{-1}} \sqrt{\hat{\Sigma}_g^{-1}} \hat{Z} \vec{v} =$$
$$= \vec{v}^T \hat{Z}^T \left(\sqrt{\hat{\Sigma}_g^{-1}}\right)^T \sqrt{\hat{\Sigma}_g^{-1}} \hat{Z} \vec{v} =$$
$$= \left(\sqrt{\hat{\Sigma}_g^{-1}} \hat{Z} \vec{v}\right)^T \left(\sqrt{\hat{\Sigma}_g^{-1}} \hat{Z} \vec{v}\right) \geqslant 0 .$$

В выкладках использована симметричность и положительная определенность матрицы $\hat{\Sigma}_g$. Относительно ранга матрицы $\hat{A}$ заметим, что если $N_g \geqslant N_p$, то предельно возможное значение ранга равно N_p. Если $N_g < N_p$, то ранг матрицы $\hat{A}$ не может превосходить величины N_g. Приведенные утверждения следуют из (3.5) и того обстоятельства, что ранг прямоугольной матрицы $\hat{Z}$ не превосходит ее меньшей размерности и известной теоремы о ранге произведения матриц. Если ранг матрицы $\hat{A}$ равен N_p, то она, очевидно, является положительно определенной. Для нормирования векторов $\vec{p}$, $\vec{p}_0$ и матрицы $\hat{A}$ в (3.4) целесообразно ввести диагональную матрицу

$$\hat{M}_p = \begin{pmatrix} p_{01} & & & 0 \\ & p_{02} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_{0N_p} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

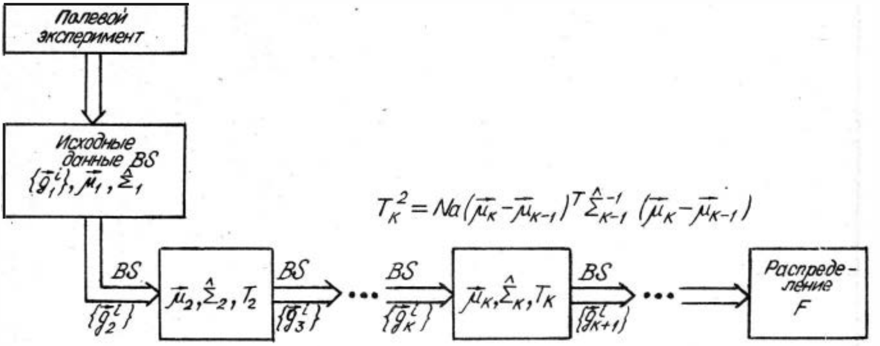

Рис. 3.

В нормированном виде (3.4) перепишется следующим образом:

$$Na\,(\vec{\delta}_p^T \hat{A}_M \vec{\delta}_p) \le L_\alpha^2 . \tag{3.7}$$

Здесь

$$\delta p_i = \frac{p_i - p_{oi}}{p_{oi}} = \frac{p_i}{p_{oi}} - 1 , \tag{3.8}$$

$$\hat{A}_M = \hat{M}_p^T \hat{A}\, \hat{M}_p = \hat{M}_p^T \hat{Z}^T \hat{\Sigma}_g^{-1} \hat{Z} \hat{M}_p . \tag{3.9}$$

Компоненты вектора $\delta\vec{p}$ имеют, согласно (3.8), смысл относительных приращений компонент вектора $\vec{p}$ в точке $\vec{p}_o$. Оператор $\hat{A}_M$ симметричен и неотрицателен.

Соотношение (3.7) определяет область эквивалентности в пространстве параметров. Формулировка принципа эквивалентности в форме (3.7) объединяет важнейшие характеристики натурного и модельного этапов эксперимента. Ковариационная матрица $\hat{\Sigma}_g$, а также объем выборки N_a, характеризуют статистические свойства данных о измерительной процедуре. Матрица описывает аналитические свойства модели. Соотношение (3.7) имеет вероятностный смысл. Гипотеза p_o принимается с доверительной вероятностью $(1 - \alpha)$. За пределами области (3.7) остаются те модели, для которых вероятность быть отброшенными, если они верны, не превышает α.

Рассмотрим подробнее структуру области эквивалентности Ve, определяемую соотношением (3.7). Пусть l_1^A, l_2^A, ... l_{Np}^A – собственные числа матрицы $\hat{A}_M$, $\vec{W}_1^A$, $\vec{W}_2^A$, ..., $\vec{W}_{N_p}^A$ – нормированные собственные векторы. Полагая

$$\vec{\delta p} = \sum_{i=1}^{N_p} \vec{w}_i^A dt_i \tag{3.10}$$

и подставляя (3.10) в (3.7), получим, с учетом ортогональности собственных векторов:

$$Na \sum_{i=1}^{N_p} \frac{l_i^A (dt_i)^2}{L_\alpha^2} \leq 1 . \tag{3.11}$$

Очевидно, что (3.11) определяет внутренность N_p -мерного эллипсоида с полуосями

$$\beta_i = \frac{L_\alpha}{\sqrt{l_i^A\ Na}}, \qquad i = 1, \dots, N_p . \tag{3.12}$$

Направление i-й полуоси в пространстве P совпадает с направлением вектора $\vec{W}_i^A$. Если изменять параметры p_i совместно таким образом, чтобы это соответствовало перемещению вдоль одного из собственных векторов $\vec{W}_i^A$, то мы получим один из N_p возможных главных принципов эквивалентности:

$$\vec{\delta p} = \vec{w}_i^A dt_i . \tag{3.13}$$

Или, по компонентам:

$$\frac{dp_k}{p_{ok}} = (\vec{W}_i^A)_k\ dt_i \tag{3.14}$$

В том же линейном приближении (3.14) можно представить в виде:

$$\frac{dp_k}{p_k} = (\vec{W}_i^A)\ dt_i \tag{3.15}$$

Отсюда:

$$p_k = p_{ok}\ e^{(\vec{W}_i^A)\ t_i} .$$

Смысл параметра t_i легко установить, если умножить скалярно правую и левую часть (3.13) на $\vec{W}_i^A$. Учитывая нормированность вектора $\vec{W}_i^A$, получаем:

$$(\vec{\omega}_i^A)^T \delta\vec{p} = dt_i \,. \tag{3.16}$$

Понимая компоненты $\delta\vec{p}$ в смысле левой части (3.15), получаем:

$$d \ln \Pi_i = dt_i$$

$$\Pi_i = p_1^{(\vec{\omega}_i^A)_1} p_2^{(\vec{\omega}_i^A)_2} \ldots p_{N_p}^{(\vec{\omega}_i^A)_{N_p}} \,. \tag{3.17}$$

Таким образом, параметр t_i есть логарифм обобщенного параметра, а абсолютные приращения dt_i характеризуют относительные приращения Π_i. Каждый из собственных векторов $\vec{W}_i^A$ можно понимать как мультииндекс, каждая компонента которого подставляется в показатель степени произведения $p_1, \ldots, p_{N_p}$, при этом определяется соответствующий обобщенный параметр Π_i, а, следовательно, и t_i. Параметры t_i являются независимыми в том смысле, что если относительные приращения параметров p_k связаны соотношениями (3.15), то это приводит к изменению только t_i, все остальные параметры t_j ($j \neq i$) при этом не изменяются. Допустимые пределы изменения параметра t_i в рамках принципа эквивалентности (3.7) или (3.11) определяются соотношением (полагаем, что $t_i(\vec{p}_0)=0$):

$$-\frac{L_k}{\sqrt{\ell_i^A N_a}} \leq t_i \leq \frac{L_k}{\sqrt{\ell_i^A N_a}} \,. \tag{3.18}$$

Соотношения (3.17), (3.18) описывают N_p принципов эквивалентности. При этом наиболее сильная эквивалентность (т.е. наиболее значительные относительные изменения параметров, оставляющие модель в пределах зоны эквивалентности) имеет место в направлении собственного вектора матрицы $\hat{A}_k$, соответствующего наименьшему собственному числу. На основе соотношения (3.7) можно рассматривать условные, или частные, принципы эквивалентности при фиксированных значениях некоторых параметров. Например, если положить

$$p_j = p_{oj} \,, \quad j = n_1, n_2, \ldots, n_k \,, \tag{3.19}$$

то это будет соответствовать соотношениям:

$$\delta p_j = 0\ , \quad j = n_1, n_2, \ldots, n_k\ .$$

Из (3.7) легко **понять**, что принцип эквивалентности для остальных параметров имеет вид:

$$Na\left(\vec{\tilde{\delta p}}^T \hat{\tilde{A}}_M \vec{\tilde{\delta p}}\right) \le L_\alpha^2\ . \tag{3.20}$$

Здесь матрица $\hat{\tilde{A}}_M$ имеет размерность $(N_p - k)\cdot(N_p - k)$ и получается из матрицы $\hat{A}_M$ вычеркиванием строк и столбцов с номерами n_1, n_2, ... n_k. Вектор $\vec{\tilde{p}}$ размерности $(N_p - k)$ получается из вектора $\vec{\delta p}$ исключением компонент с теми же номерами. Частный принцип эквивалентности (3.20) описывает эллипсоид размерности $N_p - k$, который является результатом сечения эллипсоида (3.7) линейным многообразием (3.I9). Параметры эллипсоида (3.I9) определяются через собственные числа и векторы матрицы $\hat{\tilde{A}}_M$ так же, как параметры эллипсоида (3.7) через собственные числа и векторы матрицы $\hat{A}_M$. Отметим, что если ранг Υ_A матрицы $\hat{A}_M$ меньше N_p, то среди собственных чисел l_i^A имеется $(N_p - \Upsilon_A)$ нулевых. Как следует из (3.II), соответствующие этим числам обобщенные параметры t_i не оказывают влияния на расстояние между моделями.

В табл. 2. приведены в качестве примера результаты исследования эквивалентности системы данных ВЭЗ, полученных на трехслойной модели среды с параметрами $\rho_1 = I$, $h_1 = I$, $\rho_2 = 0{,}I$, $h_2 = 0{,}I$; $\rho_3 = I$. Данные включали I0 измерений на разносах $r_i = (\sqrt{2})^{i-1}$, $i = I, \ldots, I0$. Имитировались многократные измерения путем наложения нормально распределенной помехи с диагональной ковариационной матрицей $\hat{S}_g$, диагональные элементы которой имели значения:

$$(\hat{S}_g)_{ii} = 0.25\, f_i^2\ , \quad i = 1, \ldots, 10\ . \tag{3.2I}$$

В результате формировалась выборка наблюденных данных $\{\tilde{g}_k\}$, $k = I$, ..., 60, т.е. моделировалось 60 реализаций процесса ($N_a = 60$).

Собственные значения матрицы $\hat{A}_M$ изменяются в очень широких пределах. По крайней мере, последнее из них определяет явно несущественный параметр. Полуоси эллипсоида эквивалентности приведены для доверительного уровня 0.25. Координаты собственных векторов расположены по столбцам и упорядочены в соответствии со

Таблица 2

Номер обобщенного параметра				
I	2	3	4	5
Собственные значения матрицы				
69,7	40,7	I,66	0,348	$0{,}375 \cdot 10^{-5}$
Собственные векторы				
- 0,503	0,788	0,296	0,I97	- 0,0003
- 0,II4	0,267	-0,30I	-0,908	0,0I9
- 0,I49	0,080	-0,623	0,233	- 0,728
0,I56	-0,077	0,652	-0,273	- 0,686
- 0,829	-0,543	0,097	-0,087	- 0,0009
Главные полуоси				
0,083	0,I08	0,535	I,I7	357,0

следующим размещением параметров: ρ_I, h_I, ρ_2, h_2, ρ_3. Собственный вектор $\vec{w}_5$ практически определяет обобщенный параметр $\rho_2 h_2$, т.е. поперечное сопротивление тонкого слоя. Этот параметр в рамках имеющейся системы наблюдений не может быть определен. Анализ остальных собственных векторов показывает, что влияние тонкого слоя устойчиво определяется параметром h_2/ρ_2, т.е. продольной проводимостью. Исследование частного принципа эквивалентности в подпространстве (ρ_2, h_2) дает собственные числа $l_1 = 5{,}I4$, $l_2 = 0{,}000972$ и соответствующие обобщенные параметры

$$\pi_1 = h_2^{0{,}721} \rho_2^{-0{,}693}, \quad \pi_2 = h_2^{0.693} \cdot \rho_2^{0.721}.$$

На рассматриваемой модели было исследовано, насколько точно линейное приближение описывает прообраз эллипсоида (3.I6) в пространстве параметров. Для этого от точки $\vec{p}_0$ осуществлялось продвижение в направлениях, задаваемых собственными векторами $\vec{W}i$, вычислялись в новых точках модельные значения f_i и проверялось, удовлетворяется ли неравенство (2.I6). Предельные значения параметров t_i, при которых еще соблюдается (2.I6), приведены в табл. 3. При этом t_i^+ – критические значения t_i при движении в

Таблица 3

Главные полуоси	Номер обобщенного параметра				
	I	2	3	4	5
	0,083	0,108	0,535	1,170	357,0
	0,084	0,106	0,403	0,750	-
	-0,080	-0,111	-0,610	-0,841	-

положительном направлении, t_i^- – в отрицательном. Через t_i обозначены главные полуоси линейного приближения. Отметим, что при движении вдоль пятого собственного вектора выйти за пределы области (2.16) не удалось. Данные таблицы 3 свидетельствуют о том, что область эквивалентности в пространстве параметров описывается линейным приближением вполне удовлетворительно.

4. Разрешающая способность системы наблюдений

В результате интерпретации получается вектор $\vec{p}_0$, характеризующий основную гипотезу о строении среды, и область эквивалентности, определяемая соотношением (4.3.7). Среди эквивалентных моделей могут быть такие, в которых те или иные детали строения среды отсутствуют. Например, в точке $\vec{p}_0$ проводимости пласта σ_I и локального объекта σ_2 могут различаться. Однако модель, характеризуемая соотношением $\sigma_I = \sigma_2$, может принадлежать области эквивалентности (рис. 4). В этом случае следует признать, что на принятом доверительном уровне объект не выделяется. Он может быть выделен либо на более низком доверительном уровне, либо при более высокой точности измерений (в обоих случаях будет уменьшена область эквивалентности). Это наводящее соображение мы и положим в основу математического определения понятия разрешающей способности.

Всякий элемент геоэлектрической структуры при определенных соотношениях между его параметрами и параметрами прилегающих участков среды может быть сделан как бы частью одного или нескольких соседних элементов или ликвидирован вообще. При этом число параметров, характеризующих модель, уменьшается. В предыдущем примере соотношение $\sigma_I = \sigma_2$ задает внутри локального проводника такую же проводимость, как и в окружающей среде, проводник перестает существовать как <u>аномальный</u> объект, а в параметризации, очевидно, нужно исключить параметр σ_2. Совокупность точек, определяемых уравнением $\sigma_I = \sigma_2$, образует в параметрическом пространстве P линейное многообразие P_A. Это многообразие будем называть аннулирующим многообразием локального проводника. Очевидно, можно предложить другие аннулирующие многообразия, например, $r = 0$ или $h = \infty$ (r – наибольший линейный размер, h – глубина погружения объекта). В общем случае будем полагать, что аннулирующее многообразие любого элемента модели может быть задано с помощью и линейных соотношений, разрешенных относительно аннулируемых параметров:

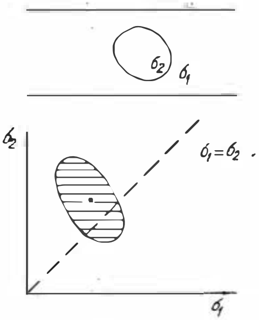

Рис.4.

$$\begin{cases} \delta p_{i1} = \sum\limits_{j=1}^{N_p} R_{i_1,j}\,\delta p_j + Q_{i1} \\ \delta p_{i2} = \sum\limits_{j=1}^{N_p} R_{i_2,j}\,\delta p_j + Q_{i2} \\ \vdots \\ \delta p_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{N_p} R_{ik,j}\,\delta p_j + Q_{ik} \\ j \neq i_1, i_2, \ldots, i_k \end{cases} \qquad (4.I)$$

Присоединяя к (4.I) тождества

$$\delta p_j = \delta p_j \quad (j \neq i_1, i_2, \ldots, i_k) , \qquad (4.2)$$

получим:

$$\delta\vec{p} = \hat{R}\,\delta\vec{\Pi} + \vec{Q} . \qquad (4.3)$$

Здесь $\hat{R}$ – матрица размерности $N_p \cdot (N_p - k)$, $\delta\vec{\Pi}$ – вектор длины $(N_p - k)$, образованный из вектора $\delta\vec{p}$ вычеркиванием элементов δp_{i1}, δp_{i2}, $\ldots$, δp_{ik}, $\vec{Q}$ – вектор длины N_p, с отличными от нуля элементами $Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ik}$. Если уравнения аннулирующего многообразия заданы в абсолютных значениях параметров p_i, то их легко привести к форме (4.I), учитывая, что $p_i = p_i^0(\delta p_i + 1)$. Параметры p_i на аннулирующем многообразии целесообразно выбрать таким образом, чтобы минимизировать квадратичную форму (3.7). Точка $\vec{p}^*$, минимизирующая норму, является на аннулирующем многообразии ближней к исходной модели. Подставляя (4.3) в выражение формы, получим, что нужно минимизировать квадратичную форму (N_p-k) переменных:

$$(\hat{R}\delta\vec{\Pi}+\vec{Q})^T \hat{A}_M (\hat{R}\delta\vec{\Pi}+\vec{Q}) =$$

$$= \delta\vec{\Pi}^T(\hat{R}^T\hat{A}_M\hat{R})\delta\vec{\Pi}+\delta\vec{\Pi}^T(\hat{R}^T\hat{A}_M)\vec{Q}+\vec{Q}^T(\hat{A}_M\hat{R})\delta\vec{\Pi}+\vec{Q}^T\hat{A}_M\hat{Q}=$$

$$=\delta\vec{\Pi}^T(\hat{R}^T\hat{A}_M^T\hat{R})\delta\vec{\Pi}+2\delta\vec{\Pi}^T(\hat{R}^T\hat{A}_M)\vec{Q}+\vec{Q}^T\hat{A}_M\vec{Q}.$$

Дифференцируя по параметрам $\delta\Pi_i$, получаем систему уравнений относительно компонент вектора $\delta\vec{\Pi}$:

$$(\hat{R}^T\hat{A}_M\hat{R})\delta\vec{\Pi}+\hat{R}^T\hat{A}_M\vec{Q}=0. \tag{4.4}$$

Пусть $\delta\vec{\Pi}^*$ - решение системы (4.4). Из (4.3) определяется вектор $\delta\vec{p}^*$:

$$\delta\vec{p}^*=\hat{R}\delta\vec{\Pi}^*+\vec{Q}. \tag{4.5}$$

Рассмотрим квадратичную форму (3.7) как функцию параметров $\delta\vec{\Pi}$ Согласно (4.3), (4.5):

$$\delta\vec{p}=\vec{R}\delta\vec{\Pi}+\vec{Q}=\hat{R}(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)+\hat{R}\delta\vec{\Pi}^*+\vec{Q}=$$

$$=\hat{R}(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)+\delta\vec{p}^*.$$

Подставляя это выражение в (3.7), получим:

$$(\delta\vec{p}^T\hat{A}_M\delta\vec{p})=(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)^T(\hat{R}^T\hat{A}_M\hat{R})(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)+$$

$$2(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)^T\hat{R}^T\hat{A}_M\delta\vec{p}^*+\delta\vec{p}^{*T}\hat{A}_M\delta\vec{p}^*.$$

Согласно (4.4), (4.5)

$$\hat{R}^T\hat{A}_M\delta\vec{p}^*=0,$$

то

$$(\delta\vec{p}^T\hat{A}_M\delta\vec{p})=(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)^T(\hat{R}^T\hat{A}_M\hat{R})(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^*)$$

$$+\delta\vec{p}^{*T}\hat{A}_M\delta\vec{p}^* \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.7), получаем принцип эквивалентности в пространстве параметров упрощенной модели:

$$Na(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^{*})^{T}(\hat{R}^{T}\hat{A}_{m}\hat{R})(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^{*})\leq L_{\alpha}^{2}-(\delta\vec{p}^{*T}\hat{A}_{m}\delta\vec{p}^{*})Na. \tag{4.7}$$

Если правая часть (4.7) положительна, это означает, что точка $\vec{p}^{*}$ осталась в пределах области эквивалентности. В этом случае мы будем говорить, что система измерений не обладает разрешающей способностью, необходимой для выделения аннулирующего объекта на принятом доверительном уровне. Таким образом, критерий разрешимости данных по отношению к заданному объекту на данном доверительном уровне можно сформулировать следующим образом:

$$Na(\delta\vec{p}^{*T}\hat{A}_{m}\delta\vec{p}^{*})>L_{\alpha}^{2}. \tag{4.8}$$

Здесь

$$(\delta\vec{p}^{*})_{i}=\frac{p_{i}^{*}-p_{0i}}{p_{0i}}.$$

$\vec{p}^{*}$ - ближняя к исходной модели точка аннулирующего многообразия объекта. Если объект не разрешим, то соотношение (4.7) описывает новую область эквивалентности. Это эллипсоид с центром в точке $\vec{p}^{*}$. Действительно:

$$(\delta\vec{\Pi}-\delta\vec{\Pi}^{*})_{i}=\frac{\Pi-\Pi_{0i}}{\Pi_{0i}}-\frac{\Pi_{i}^{*}-\Pi_{0i}^{*}}{\Pi_{0i}}=\frac{\Pi_{i}-\Pi_{i}^{*}}{\Pi_{0i}}=\frac{\Pi_{i}-\Pi_{i}^{*}}{\Pi_{i}}. \tag{4.9}$$

Последнее равенство в цепочке (4.9) записано с учетом линейности приближения. Совместное аннулирование некоторых объектов осуществляется точно также, при этом нужно в соотношение (4.3) включить все условия аннулирования.

Если матрица $\hat{A}_{M}$ имеет резко различающиеся по величине собственные числа, можно предложить другую процедуру проверки разрешающей способности. Систему (4.I) можно дополнить $(N_{p}-k)$ соотношениями. Целесообразно выбрать их таким образом, чтобы измененная в результате аннулирования модель, по возможности, наименее удалилась от исходной в смысле (2.I6). Согласно (3.II), норма (2.I6) наиболее сильно изменяется, если изменяются параметры t_i, соответствующие самым большим собственным числам матрицы $\hat{A}_M$. Считая, что собственные числа упорядочены в порядке убывания ($l_1^A, l_2^A, \ldots, l_{N_p}^A$), дополним систему (4.I) $(\bar{N}_p-k)$ соотношениями (3.I6) при $dt_i = 0$:

$$\sum_{j=1}^{N_p} (\vec{W}_i^A)_j \, \delta p_j = 0 \, ; \quad i = 1, \ldots, N_p - k \, . \tag{4.10}$$

Соотношения (4.I0) означают, что обобщенные параметры, вносящие наибольший вклад в расстояния между моделями, не изменяются. Совокупность уравнений (4.I), (4.I0) позволяет аннулировать объект в пределах общего принципа эквивалентности с малым, но не наименьшим уклонением от исходной модели. Если какие-либо параметры при аннулировании объекта нежелательно изменять (пусть это будут параметры p_{ik}, $k = 1, 2, \ldots k_0$), то k_0 последних уравнений (4.I0) следует заменить соотношениями:

$$\delta p_{ik} = 0 \, ; \quad k = 1, \ldots, k_0 \, . \tag{4.11}$$

В этом случае проверка разрешающей способности осуществляется в рамках частного принципа эквивалентности. Решив полученную систему, определим новые значения параметров модели:

$$p_j^* = p_j^0 \, e^{\delta p_j} \tag{4.12}$$

После этого проверяется критерий (4.8).

Рассмотренная методика оценки разрешающей способности позволяет построить процедуру упрощения разреза в пределах эквивалентной области. Такая процедура является важным этапом оценки окончательных результатов интерпретации, позволяя проверять достоверность выделения тех или иных элементов среды и отказываться от них, если данные не разрешены и если нет априорных сведений, подтверждающих существования этих элементов в реальном объекте.

Последовательно отказываясь от неразрешенных деталей, можно построить предельно простой разрез, все компоненты которого выделяются достоверно. Естественно начинать процедуру упрощения разреза с аннулирования объекта, наименее отдаляющего модель от центральной. Таким образом, в дополнение к уже разработанным приемам аннулирования, нужно сформулировать принцип упорядочения структурных элементов объекта по степени удаленности ближайших точек аннулирующих многообразий от центральной модели. Если рассмотреть частные принципы эквивалентности по каждому параметру модели, то из (3.7) легко увидеть, что вклад параметра $\hat{p}_i$ в норму пропорционален диагональному элементу a_{ii} матрицы $\hat{A}_M$. Это обстоятельство можно принять за основу при ранжировании элементов среды. Пусть объект, содержит k стуктурных элементов S_i ($i = I, \ldots, k$). Пусть $Tr(S_i)$ - сумма тех диагональных элементов матрицы $\hat{A}_M$, которые соответствуют всем параметрам, определяющим элемент S_i. Для процедуры упрощения разреза целесообразно упорядочить элементы S_i в порядке возрастания величин $Tr(S_i)$.

В качестве примера рассмотрим проверку разрешающей способности и процедуру упрощения следующего горизонтально-слоистого разреза: $\rho_I = I$, $h_I = I$; $\rho_2 = 0{,}I$, $h_2 = I$; $\rho_3 = 0{,}2$, $h_3 = 2$, $\rho_4 = I$. Метод - ВЭЗ, система наблюдения $r_i = (0{,}25)\,2^{i-I}$ ($i = I, \ldots, I0$). Совокупность данных $\{\vec{\varepsilon}_k\}$ ($k = I, \ldots, 60$) получена из модельного сигнала $\vec{f}$ так же, как в примере, рассмотренном в табл. 2. Доверительный уровень 0,95. Проверка разрешающей способности проводилась методом (4.4), (4.5), (4.8). Обозначим слои через S_i ($i = I, \ldots, 4$). Величины $Tr(S_i)$ в исходной модели имеют следующие значения:

$$Tr(S_1) = II3{,}8$$

$$Tr(S_2) = I3{,}45$$

$$Tr(S_3) = 9{,}609$$

$$Tr(S_4) = 27{,}78$$

Упрощение разреза целесообразно начинать с проверки разрешающей способности данных относительно слоя S_3. В качестве уравнения, аннулирующего его многообразия, следует принять условие $\rho_3 = \rho_2$. Объединение S_3 с нижним полупространством нецелесообразно, поскольку $Tr(S_4) > Tr(S_1)$. После аннулирования S_3 по формулам (4.4.4) - (4.4.5) получается трехслойный разрез.

Величина нормы в левой части (4.8) составила I,II при $L_\alpha^2=28,63$. Таким образом, слой S_3 не разрешен. Отметим, что при упрощении разреза с высокой точностью сохранилась суммарная продольная проводимость слоев S_2 и S_3. В исходной модели $h_2/\rho_2 + h_3/\rho_3 = 20$, в упрощенной модели $h_2/\rho_2 = 21,6$. Попытка объединить слои S_2, S_3 и S_4 дает значение левой части (4.8), равное 726.8. Таким образом, полученный трехслойный разрез является разрешенным по всем элементам. Вместе с тем, это не означает, что все параметры разреза могут быть в результате интерпретации определены с высокой точностью. Структура окончательной модели приведена в табл. 4. Мультииндексы упорядочены в соответствии с размещением $\rho_I, h_1, \rho_2, h_2, \rho_3$.

Таблица 4

Номер обобщенного параметра				
I	2	3	4	5
Собственные значения матрицы Ам				
IOI	52,2	22,3	8,36	0,I63
Собственные векторы				
0,734	0,3I9	0,575	-0,I69	-0,0I72
0,576	0,02I3	-0,583	0,539	0,I96
0,325	-0,546	-0,230	-0,335	-0,657
-0,I55	0,526	0,0058	0,4I4	-0,726
-0,02I7	-0,569	0,526	0,630	-0,0434
Главные полуоси				
0,069	0,096	0,I46	0,239	I,69

Из таблицы 4 следует, что по меньшей мере, один параметр разреза в результате интерпретации определить не удается.

Упрощение исходного четырехслойного разреза в рамках частного принципа эквивалентности по параметрам (ρ_2, h_2, ρ_3, h_3) при фиксированных ρ_I, h_1, ρ_4 дает следующий эквивалентный трехслойный разрез:

$$\rho_1 = 1,\ h_1 = 1;\ \rho_2 = 0.129,\ h_2 = 2.53;\ \rho_3 = 1 .$$

Отметим, что в упрощенной модели $h_2/\rho_2 = 19.6$.

Рассмотрим вопрос о глубинности системы наблюдений. Он может быть решен на основе разрешающей способности в пространстве данных. Пусть его некоторая основная модель Мо, на которой система наблюдений дает сигнал $\vec{f}o$ с областью эквивалентности Е, определенной в пространстве данных соотношением (2.16). Пусть есть объем $\mathfrak{M}$, который характеризуется параметрами p_m и может в модели Мо размещаться в диапазоне глубин от h_{min} до ∞ (точка $h = \infty$ является аннулирующим многообразием объекта). Рассмотрим траекторию объекта в пространстве F, когда он перемещается из бесконечности в предельно допустимую геометрически точку $h = h_{min}$. Очевидно, эта траектория начинается в точке и вначале проходит внутри области Е (рис. 5). При некотором $h = h_{max}$ траектория выходит за пределы области эквивалентности и объект становится разрешимым. Значение h_{max} можно принять за характеристику глубинности метода по отношению к объекту $\mathfrak{M}$. Очевидно, что глубинность при фиксированной основной модели Мо определяется двумя главными факторами: доверительным уровнем $(1-\alpha)$ и параметрами объекта $\vec{p}_m$:

$$H = h_{max}(\vec{p}_m, \alpha) .$$

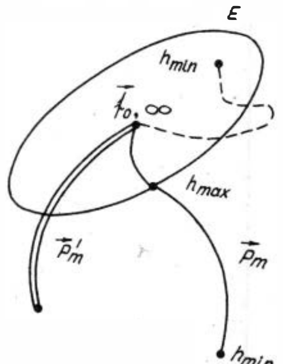

Рис. 5.

Если параметры $\vec{p}_m$ изменяются, очевидно, изменяется и h_{max} (рис. 5, двойная линия). Траектория объекта в пространстве данных может пройти и таким образом, что объект окажется разрешенным в диапазоне глубин (рис. 5, пунктир) или в нескольких диапазонах глубин.

На рис. 6 в качестве примера приведены графики глубинности метода ВЭЗ по отношению к проводящему пласту мощности $h_4/h_1 = 0{,}1$, перекрытому изолирующим или проводящим экраном мощности $h_2/h_1 = 0{,}1$. Верхняя граница экрана расположена на глубине h_1. Система наблюдений – $r/h_1 = (\sqrt{2})^i$, $(i = 0,\ldots, 9)$. Варьируются параметры $S_2 = h_2/\rho_2$ (или $T_2 = h_2 \cdot \rho_2$), а так-

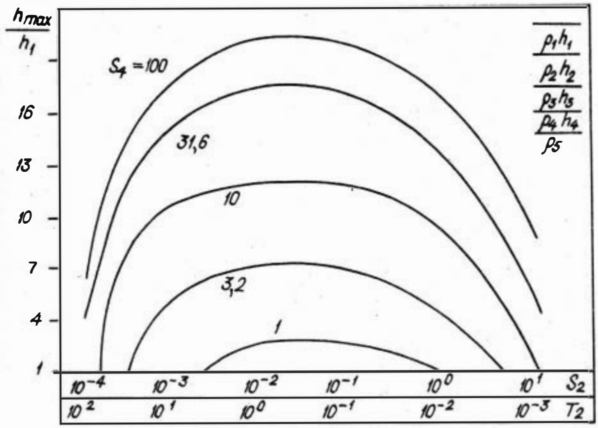

Рис. 6.

же $S_4 = h_4/\rho_4$. По оси ординат отложены значения h_{max}/h_I. Доверительный уровень -0,95. Система экспериментальных данных смоделирована так же, как и в предыдущих случаях.

5. Борьба с естественными помехами в системах многократных наблюдений

Один из принципиальных путей сужения области эквивалентности в пространстве данных - подавление естественных помех. Наибольшими возможностями в этом отношении располагают системы многократных наблюдений, широко применяемые в методах нестационарного поля. Наиболее распространены два подхода к использованию данных таких измерений. Первый подход связан с аппаратурной реализацией накопления сигнала /5/. Если процесс $\vec{f}$ регистрируемый на N_g временах, реализуется N_a раз, то такая аппаратура (например, регистраторы серии "Цикл") выдает на времени t_i величину

$$\bar{f_i} = \frac{1}{N_a} \sum_{i=1}^{N_a} f_i . \tag{5.I}$$

Попутно в такой аппаратуре реализуются некоторые приемы, улучшающие статистические характеристики накопительной процедуры, такие как медианный контроль случайных выбросов, специальное подавление помех промышленной частоты и т.п. Второй подход связан с регистрацией каждой реализации процесса и последующей математической обработкой данных ("ЦЭС-2" /I,4/). Наиболее распространенный алгоритм обработки основан на процедуре селективного накопления /I,4/. Каждый дискрет f_i рассматривается как случайная величина, и путем многоступенчатого анализа выборки этого дискрета производится последовательное отсеивание измерений, выходящих за пределы доверительного интервала. Селективное накопление является эффективным средством борьбы со случайными выбросами. Следующим шагом в обработке, позволяющим, на наш взгляд, существенно уменьшить разброс данных, является переход от обработки выборок отдельных дискретов к обработке выборок некоторых последовательных дискретов, что позволяет учесть ковариационные свойства помехи и сконструировать на этой основе наименее дисперсную трансформацию сигнала.

Рассмотрим k последовательных дискретов реализации f_i:

$$\varphi_1 = f_{r+1}, \ldots, \varphi_k = f_{r+k}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим линейную комбинацию дискретов φ_j ($j=1,\ldots,k$):

$$F = \sum_{j=1}^{k} x_j \varphi_j \tag{5.3}$$

Будем рассматривать величину F в качестве нового (трансформированного) сигнала. Выберем коэффициенты x_j из следующего условия: отношение дисперсии D_f к мощности усредненного сигнала F должно быть минимальным. Тем самым минимизируется относительная погрешность трансформации :

$$\delta^2 = \frac{D_F}{F^2} = min. \tag{5.4}$$

Выразим D_f через исходный сигнал φ_j и коэффициенты x_j. Для удобства будем по повторяющимся индексам подразумевать суммирование:

$$D_F = \overline{(F-\overline{F})^2} = \overline{F^2} - \overline{F}^2 = \overline{(x_j \varphi_j)^2} - \overline{(x_j \varphi_j)}^2 =$$

$$=x_\mu x_\nu \overline{\varphi_\mu \varphi_\nu} - x_\mu x_\nu \bar{\varphi}_\mu \bar{\varphi}_\nu = x_\mu x_\nu (\overline{\varphi_\mu \varphi_\nu} - \bar{\varphi}_\mu \bar{\varphi}_\nu) =$$

$$= x_\mu x_\nu \overline{(\varphi_\mu - \bar{\varphi}_\mu)(\varphi_\nu - \bar{\varphi}_\nu)} = x_\mu x_\nu \hat{\Sigma}_{\mu\nu} =$$

$$= \vec{x}^T \hat{\Sigma} x \, . \qquad (5.5)$$

Здесь $\hat{\Sigma}$ – ковариационная матрица вектора наблюдений, составленного из дискретов φ_j (j = I, ..., k), $\vec{x}$ – вектор коэффициентов x_j . Таким образом, задача минимизации (5.4) формулируется следующим образом:

$$\delta^2 = \frac{\vec{x}^T \hat{\Sigma} x}{(\vec{x}^T \varphi)^2} = min \, . \qquad (5.6)$$

Потребуем, чтобы сумма квадратов коэффициентов x_j равнялась единице, т.е. будем искать минимум функционала δ^2 на единичной k – мерной сфере:

$$\vec{x}^T \vec{x} = 1 \, . \qquad (5.7)$$

Отметим, что функционал δ^2 зависит только от угловых параметров сферы и не зависит от ее радиуса. Поэтому минимум функционала можно искать на любом выпуклом замкнутом многообразии размерности k–I, содержащим центр сферы (5.7). В частности, удобно искать минимум δ^2 на эллипсоиде:

$$\vec{x}^T \hat{\Sigma} \vec{x} = \vec{x}^T (\hat{\Sigma}^{1/2})^T (\hat{\Sigma}^{1/2})^T \vec{x} =$$

$$= (\hat{\Sigma}^{1/2} \vec{x})^T (\hat{\Sigma}^{1/2} \vec{x}) = R^2 \, . \qquad (5.8)$$

Когда вектор $\vec{x}$ пробегает поверхности эллипсоида, вектор

$$\vec{x}\,' = \hat{\Sigma}^{1/2} \vec{x} \qquad (5.9)$$

пробегает по поверхности сферы радиуса R. С учетом (5.8),(5.9) функционал (5.6) приобретает вид:

$$\delta^2 = \frac{R^2}{[(\vec{x}\,')^T \hat{\Sigma}^{-1/2} \bar{\varphi}]^2} \qquad (5.10)$$

Таким образом, задача минимизации δ^2 свелась к задаче максимизации значений знаменателя (5.I0) на (k-I) - мерной сфере. Очевидно, что максимум знаменателя достигается, когда вектор x' параллелен вектору $\hat{\Sigma}^{-1/2}\bar{\varphi}$, т.е. при условии

$$\vec{x}' = \hat{\Sigma}^{1/2}\vec{x} = C\hat{\Sigma}^{-1/2}\bar{\bar{\varphi}}$$

или

$$\vec{x} = C\hat{\Sigma}^{-1}\vec{\bar{\varphi}} \ . \qquad (5.II)$$

Константа C находится из условия нормировки (5.7) :

$$C = \frac{1}{(\bar{\varphi}^T\hat{\Sigma}^{-2}\bar{\varphi})^{1/2}} \ . \qquad (5.I2)$$

Подставляя (5.II), (5.I2) в (5.3), получаем выражение для трансформированного сигнала:

$$F = \frac{\vec{\bar{\varphi}}^T\hat{\Sigma}^{-1}\vec{\varphi}}{(\vec{\bar{\varphi}}^T\hat{\Sigma}^{-2}\vec{\bar{\varphi}})^{1/2}} \ . \qquad (5.I3)$$

Трансформация (5.I3) удовлетворяет условию (5.4). Усредняя (5.I3) по всем реализациям, получаем:

$$\bar{F} = \frac{\vec{\bar{\varphi}}^T\hat{\Sigma}^{-1}\vec{\bar{\varphi}}}{(\bar{\varphi}^T\hat{\Sigma}^{-2}\vec{\bar{\varphi}})^{1/2}} \ . \qquad (5.I4)$$

Осуществляя группирование (5.2) при $r = 0, \ldots, N_g - k$, получаем: $(N_g - k + I)$ значений трансформации F. Считая для удобства k нечетным и относя условно значение трансформации к моменту $t_r + (k+I)/2$, получаем новую систему дискретов F_j ($j = (k+I)/2, \ldots, N_g - (k-I)/2$), которую можно рассматривать как трансформированную кривую зондирования.

Следует обратить внимание на следующее принципиальное обстоятельство. Преобразование (5.I4) дает не истинный сигнал, а некоторую его трансформацию, обладающую свойством наименьшей относительной дисперсности. Если интерпретация осуществляется методом подбора, то это обстоятельство существенной роли не играет, так как трансформации (5.I4) можно подвергнуть не только измеренный, но и модельный сигнал U . Пусть U - значения модельного сигнала в точках $t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_{r+k}$. Введем величину :

$$U_F = \frac{\vec{\varphi}^T \hat{\Sigma}^{-1} \vec{U}}{(\vec{\varphi}^T \hat{\Sigma}^{-2} \vec{\varphi})^{1/2}}, \quad r = 0, \ldots, N_g - k. \tag{5.I5}$$

Значения U_f следует считать модельным сигналом при интерпретации трансформации F методом подбора.

Если интерпретация осуществляется в классе фиксированных трансформаций (например, ρ_τ или S_τ), то предлагаемая методика оказывается неприменимой. Однако в асимптотической области времен, где справедливы представления поля, служащие основой для введения трансформаций типа ρ_τ , можно по системе данных $\bar{F}$ ввести интерпретационные параметры традиционного типа. Пусть, например, $f = E_\varphi$, источник - вертикальный магнитный диполь. Кажущееся сопротивление вводится по формулам поздней стадии:

$$E\varphi_{t\to\infty} \simeq \frac{a\sigma^{3/2}}{t^{5/2}}, \tag{5.I6}$$

где a - константа. Подставляя (5.I6) вместо компонент $\vec{\varphi}$ в (5.I4), получим:

$$\bar{F} = a\sigma^{3/2} \frac{\vec{\tau}^T \hat{\Sigma}^{-1} \vec{\tau}}{(\vec{\tau}^T \hat{\Sigma}^{-2} \vec{\tau})^{1/2}} \tag{5.I7}$$

Здесь $\vec{\tau}$ - вектор, компонентами которого являются величины $(1/t_{r+j})^{5/2}$, $j = 1, \ldots, k$. Из (5.I7) получаем формулу для введения ρ_τ по трансформации $\bar{F}$:

$$\rho_\tau^F = \left[\frac{a}{F} \quad \frac{\vec{\tau}^T \hat{\Sigma}^{-1} \vec{\tau}}{(\vec{\tau}^T \hat{\Sigma}^{-2} \vec{\tau})^{1/2}}\right]^{2/3}. \tag{5.18}$$

В поздней стадии ρ_τ, введенное по формуле (5.18), дает истинное сопротивление среды. В некоторых моделях и в определенных классах помехи оно может хорошо совпадать с традиционным ρ_τ и в более широкой области времен. Совпадение с традиционным ρ_τ важно именно на поздних временах, поскольку в этой области проблема подавления помехи стоит особенно остро. Если такое совпадение имеет место, то предлагаемая методика может быть использована для повышения достоверности соответствующих участков кривых ρ_τ.

С целью сопоставления результатов обработки накоплением и трансформацией F был выполнен ряд модельных экспериментов. В качестве модельного сигнала использовался переходной процесс в полупространстве сопротивлением ρ = 30 Ом·м, возбуждаемый вертикальным магнитным диполем (компонента E_φ, разнос r = 400 м). Рассматривался диапазон времен /$0{,}5 \cdot 10^{-3}$, ($\sqrt[6]{2}$), 0.456с /, всего 60 точек. Моделировалась помеха двух видов: аппаратурная и теллурическая. Аппаратурная помеха считалась нормально распределенной с нулевым средним и стандартным отклонением $0{,}05\, E_\varphi(t_i)$, i=1, ..., 60. Теллурическая помеха рассматривалась трех видов: монохроматическая, полихроматическая с равномерным амплитудным спектром и полихроматическая с амплитудным спектром $\sim\sqrt{T_j}$, где T_j – период j-го колебания /5/. Общий вид теллурической помехи:

$$U(t) = \sum_{i=1}^{N_T} A_i \sin \frac{2\pi t}{T_i}. \tag{5.19}$$

В случае полихроматической помехи рассматривался вариант N_t = =20 и два диапазона значений T_i : $(10^{-4} \leq T_i \leq 0{,}2)$ с и $(10^{-4} \leq T_i \leq 100)$ с.

В пределах диапазонов значения периодов T выбирались по случайному закону:

$$\ln T = \ln T_{min} + (\ln T_{max} - \ln T_{min})\, R = \ln (T_{min}^{1-R}\, T_{max}^{R}) \tag{5.20}$$

или $$T = T_{min}^{1-R}\, T_{max}^{R}.$$ (5.20)

Здесь R – случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0,I]. Сигнал считается очищенным от случайных выбросов. Моделировалось возбуждение по I00 импульсов с интервалом Δ = I,82 с. Каждый эксперимент рассматривался в двух вариантах: импульсы одного знака и чередование импульсов разных знаков. Амплитуды A_i в (5.I9) выбирались таким образом, чтобы на последних временах регистрация величины U (t) в 2÷5 раз превосходили значение полезного сигнала. Точное значение этого коэффициента указать трудно, поскольку процесс U(t) при условии (5.20) является почти апериодическим. Был поставлен статистический эксперимент, заключающийся в том, что оценивалось среднее по I000 испытаниям следующей величины:

$$U_0 = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{1000} \frac{|U(t_0 + (k-1)\Delta|}{\sum_{i=1}^{20} A_i}$$ (5.2I)

Каждое слагаемое в (5.2I) представляет собой отношение модуля величины помехи, взятой в момент t_0 после очередного возбуждения импульса, к максимально возможному значению этого сигнала. Эксперименты проводились для двух диапазонов периодов и двух типов амплитудных спектров. При переходе к каждому следующему испытанию изменялся набор периодов в соответствии с (5.20). Результаты для случая t_0 = 0,00I с приводится в табл. 5.

Таблица 5

Значения

Диапазон периодов			
(10^{-4} ÷ 0.2) с		(10^{-4} ÷ I00) с	
Амплитудный спектр			
A_i = const	$A_i \sim \sqrt{T_i}$	A_i = const	$A_i \sim \sqrt{T_i}$
0,I27	0,I79	0,I28	0,248

Данные табл. 5 практически не зависят от времени t_0. Значения амплитуд A_i нормировались таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$\bar{U}_0 \sum_{i=1}^{20} A_i = 5E\varphi\,(t_{60}). \tag{5.22}$$

Перейдем к сопоставлению результатов обработки данных накоплением и трансформацией F. В табл. 6 – 8 приведены в процентах расхождения между результатами обработки зашумленных и чистого сигналов. Данные приводятся на поздних временах, когда вклад помехи особенно велик. Трансформация построена при k =7. Монохроматическую помеху трансформация во всех диапазонах периодов подавляет в десятки раз сильнее, чем накопление. В случае полихроматической помехи трансформация дает преимущество в 3÷5 раз. При этом следует отметить, что при наличии низкочастотной помехи, трансформация дает лучшие результаты при использовании однополярных потенциалов.

Таблица 6

Монохроматическая помеха

t_c	Период синусоиды, с											
	10^{-4}				0,I				96,2			
	Полярность											
	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−
0,I8I	0,37	5,7	0,07	2,0	0,08	0,67	0,05	6,3	I,I	40,0	0,08	4,0
0,203	0,0I	7,6	0,03	3,3	0,05	6,4	0,06	0,2I	0,93	54,0	0,09	4,7
0,228	0,23	I0,0	0,I0	4,5	0,27	0,22	0,06	I3,0	0,62	72,0	0,I7	6,0
0,256	0,24	4,2	0,I3	II,0	0,I7	9,9	0,07	3,2	I,3	98,0	0,24	8,0
0,287	0,3I	3,9	0,02	I5,0	0,22	8,3	0,05	I9,0	I,I	I30,0	0,4I	II,0
0,323	0,36	2I,0	0,04	I4,0	0,33	6,5	0,28	28,0	0,73	I73,0	0,I3	I4,0

Таблица 7

Равномерный амплитудный спектр

t,c	Диапазон периодов, с							
	$10^{-4} \div 0,2$				$10^{-4} \div 100$			
	Полярность							
	+	+	+	−	+	+	+	−
	F	H	F	H	F	H	F	H
0,181	1,0	14,0	0,48	1,5	0,46	5,3	6,9	2,2
0,203	0,42	23,0	0,12	6,9	1,8	7,5	14,0	12,0
0,228	3,6	54,0	3,0	4,0	1,4	7,2	16,0	49,0
0,256	8,8	12,0	2,8	6,4	3,4	1,6	25,0	58,0
0,287	0,28	70,0	6,1	30,0	3,5	10,0	45,0	49,0
0,323	6,8	61,0	7,8	19,0	2,3	28,0	69,0	33,0

Таблица 8

Амплитудный спектр $A_i \sim \sqrt{T_i}$

t,c	Диапазон периодов, с							
	$10^{-4} \div 0,2$				$10^{-4} \div 100$			
	Полярность							
	+	+	+	−	+	+	+	−
	F	H	F	H	F	H	F	H
0,181	0,62	13,0	0,21	4,2	1,1	11,0	2,4	0,06
0,203	1,5	23,0	0,28	9,2	0,15	15,0	0,05	3,3
0,228	3,4	48,0	2,2	6,2	2,5	19,0	6,0	5,3
0,256	10,0	2,8	3,2	6,7	0,91	26,0	2,0	5,3
0,287	8,7	78,0	3,0	28,0	0,40	32,0	0,64	2,5
0,323	23,0	68,0	2,9	23,0	3,0	44,0	18,0	8,4

Усредненные представления о соотношении результатов обработки по трансформации и по накоплению дают гистограммы, приведенные на рис. 7. На них показаны по результатам I000 испытаний плотности распределения следующих величин:

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{k=49}^{57}\left(\frac{\bar{F}_k - F_k^T}{F_k^T}\right)^2} \cdot 100\,\%, \tag{5.23}$$

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{k=49}^{57}\left(\frac{\bar{f}_k - f_k^T}{f_k^T}\right)^2} \cdot 100\,\%. \tag{5.24}$$

Здесь f_k - среднее по накоплению, F_k - результат обработки по трансформации, F_k^T - результат трансформации f_k^T теоретической кривой f_k^T. Величины δ_F и δ_H представляют собой квадратические уклонения обработанных результатов от теоретических (в процентах), усредненные по конечной стадии процесса становления (в обработке участвуют I5 последних точек). По оси ординат откладывается N_δ - число исходов эксперимента, пришедшихся в соответствующий интервал значений δ_F, δ_H. Эксперимент проводился с разнополярными импульсами (вариант, наиболее благоприятный для накопления), амплитудный спектр $A_i \sim \sqrt{T_i}$ диапазон периодов ($10^{-4} \leq T \leq 100$) с. В каждом испытании изменялся набор периодов в соответствии с (5.20). Приведем параметры гистограммы. Средние значения:

$$\sigma_F = 1.49 \quad , \quad \sigma_H = 3.28 \ .$$

Доверительные интервалы, соответствующие доверительному уровню 0.9:

$$\sigma_F \leq 2 \quad , \quad \sigma_H \leq 7 \ .$$

Эти данные характеризуют в среднем преимущество трансформации по сравнению с накоплением. В заключение в табл. 9, I0 приводятся данные, позволяющие оценить поведение величины ρ_τ^F в сравнении с ρ_τ^H (накопление) и ρ_τ^T (теоретическая кривая). В таблице 9 среда - полупространство с сопротивлением 30 Ом·м, в табл. I0 - разрез типа H: ρ_1 = 30 Ом·м, ρ_2 = 3,75 Ом·м, $\rho_3 = \infty$, $h_1 = h_2$ = 400 м. В обоих случаях r = 400 м.

Рис. 7

Данные приведены для помехи, имеющей диапазон периодов ($10^{-4} \leq T \leq 100$) с при амплитудном спектре $A_i \sim \sqrt{T_i}$. В табл.9 – импульсы одного знака, в табл. 10 – разного. Данные таблиц свидетельствуют о том, что кривые ρ_τ^F качественно неплохо отражают тип разреза и имеют те же характерные признаки, что и кривые ρ_τ^T. Там, где поле ведет себя по степенному закону $\sim 1/t^{5/2}$ (поздняя стадия в полупространстве, участок кривой типа Н в районе $t \sim 8$ мс) величина ρ_τ^F совпадает с теоретическими значениями ρ_τ^T. В то же время в поздней стадии над разрезом с изолирующим основанием, где закон поведения поля отличается от $t^{-5/2}$, значения ρ_τ^F значительно отличаются от ρ_τ^t.

6. Описание пакета программ ЭРА

Комплекс программ ЭРА имеет модульную структуру (рис. 8) и предназначен для качественной оценки результатов решения обратных задач геоэлектрики. Ядром пакета является программа DEQRC, реализующая описанные в разделах 1–4 алгоритмы оценивания эквива-

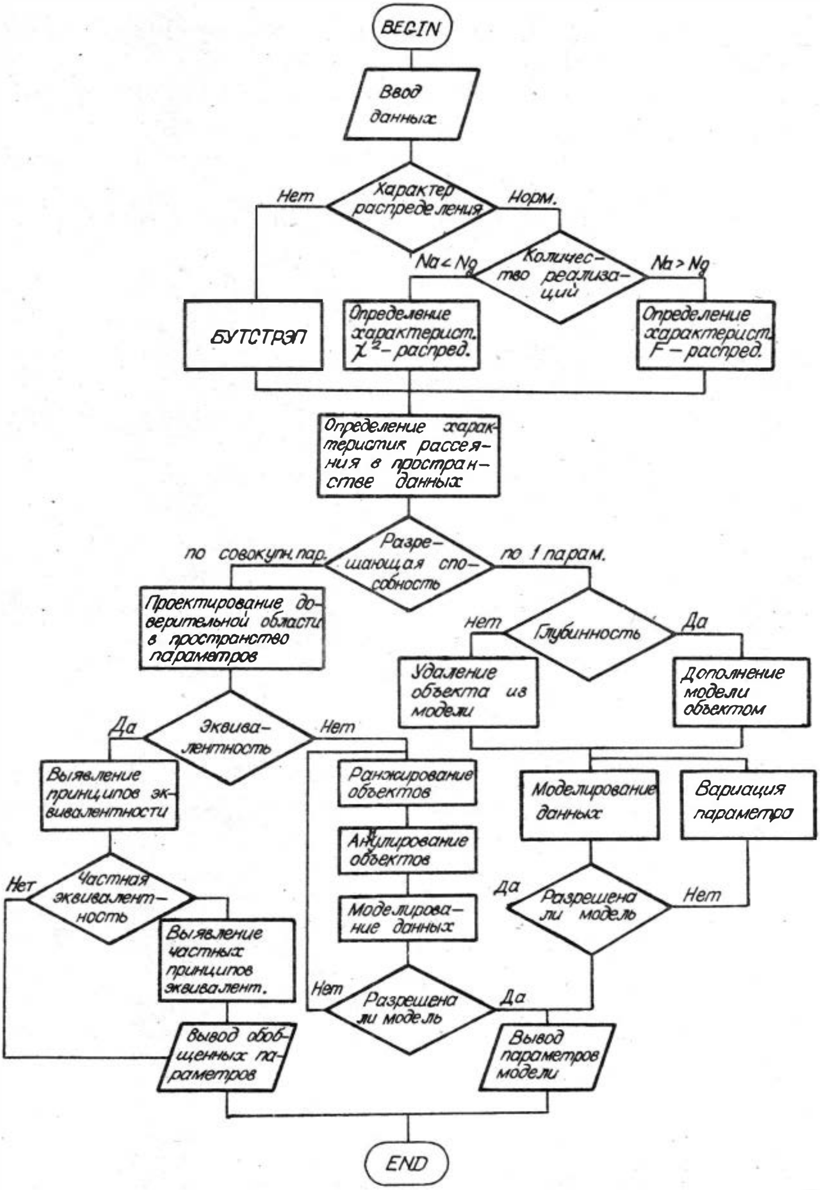
BEGIN
Ввод данных
Характер распределения
Нет
Норм.
Количес-тво реализа-ций
Na < No
Na > No
БУТСТРЭП
Определение характерист. χ^2 - распред.
Определение характерист. F - распред.
Определение характеристик рассея-ния в простран-стве данных
Разре-шающая спо-собность
по совокупн. пар.
по 1 парам.
Проектирование до-верительной области в пространство параметров
Глубинность
нет
Да
Удаление объекта из модели
Дополнение модели объектом
Эквива-лентность
Да
Нет
Выявление принципов эк-вивалентности
Ранжирование объектов
Аннулирование объектов
Моделирование данных
Моделирование данных
Вариация параметра
Частная эквивалент-ность
Нет
Выявление частных принципов эквивалент.
Разрешена ли модель
Да
Нет
Разрешена ли модель
Нет
Да
Вывод обоб-щенных па-раметров
Вывод параметров модели
END

Рис. 8.

лентности, разрешающей способности и глубинности. При обращении к модулю DEQRC необходимо задать следующую информацию:

- значение измеряемой величины и номер отсчета (двумерный массив FRAND);
- значения отсчетов-координат установки или времен измерений (одномерный массив X);
- параметры среды, полученные при решении обратной задачи (одномерный массив XVEZ);
- число параметров модели (L);
- число отсчетов реализации (N);
- число реализаций (M);
- данные расчета прямой задачи для параметров среды, полученных в результате интерпретации (одномерный массив CROK).

При проведении расчетов по программе DEQRC используются подпрограммы вычисления матрицы ковариации (COVAR), определения доверительного уровня (DOVER), размера критической области (ROOTER), квантилей центрального и нецентрального F-распределения с числом степеней свободы N, M-N (QUANT), неполных гамма - (INIGAU) и бета - (BETEFUN) функций.

Оценка глубинности и разрешающей способности по одному ре-

Таблица 9

t,c	F	T
$0{,}794_{-3}$	74,38	76,I2
$0{,}I4I_{-2}$	53,97	5I,57
$0{,}252_{-2}$	4I,59	40,89
$0{,}449_{-2}$	35,69	35,76
$0{,}800_{-2}$	33,20	33,I2
$0{,}I43_{-I}$	3I,63	3I,72
$0{,}254_{-I}$	3I,20	30,96
$0{,}453_{-I}$	30,73	30,53
$0{,}806_{-I}$	30,I9	30,30
0,I44	30,08	30,I7

альному параметру проводится по следующей итерационной схеме. Задается начальное значение варьируемого параметра и через об-

Таблица I0

	Полярность								
	+	+				−	−		
$t \cdot 10^3$	F %	H %	P^F	P^H	F %	H %	P^F	P^H	P^T
0,707	0,II	0,54	92,8	84,7	0,I8	0,4I	8I,5	88,9	84,4
I,000	0,27	I,0	66,2	63,3	0,29	0,82	65,3	63,4	63,7
I,4I4	0,22	0,I0	53,I	52,I	0,09	0,37	52,8	52,2	52,I
2,000	0,2	0,4	46,8	45,7	0,06	0,24	47,I	45,7	45,8
2,222	0,39	I,3	42,9	42,6	0,32	0,8I	43,3	42,7	43,0
4,000	0,35	0,55	4I,6	4I,8	0,23	0,36	4I,9	4I,6	4I,7
5,657	0,06	0,86	39,I	39,9	0,07	0,04	39,2	39,6	39,6
8,000	0,I	0,02	35,I	35,4	0,06	0,39	34,7	35,3	35,4
II,3I	0,I	0,24	29,9	29,7	0,06	0,39	30,5	29,7	29,7
I6,00	0,25	0,59	24,8	23,7	0,07	0,05	24,2	23,8	23,8
22,63	0,I2	0,59	22,4	I8,8	0,05	0,73	I9,2	I8,6	I8,7
32,00	0,46	0,60	I8,7	I4,7	0,I6	0,23	I5,7	I4,6	I4,7
45,26	0,I3	0,53	I5,I	II,9	0,09	0,43	I3,7	II,9	II,9
64,00	0,I	2,I	I2,2	I0,3	0,5	0,6I	II,5	I0,I	I0,I
90,5I	0,6	3,4	I0,0	9,4	0,I7	0,I2	I0,0	9,3	9,2
I28,0	0,35	8,8	9,I	9,5	0,54	0,82	9,3	8,9	9,0
I8I,0	I,25	I9,5	8,7	I0,6	0,23	2,3	8,8	9,I	9,2
256,0	0,32	52,5	8,8	I6,4	I,I	5,I	8,8	9,7	I0,0
287,I	0,82	73,4	8,8	25,2	3,9	6,9	9,0	9,9	I0,4
322,5	I,4	I05,3	8,8	77,0	2,8	I2,0	8,7	I0,0	I0,9

ращение к подпрограмме FUNCL находится соответствующее решение прямой задачи. Далее с помощью Т - статистик находится обобщенное расстояние между моделями в пространстве данных. Если найденное расстояние превосходит размер области, считается, что данный параметр не может быть разрешим в указанной модели. При оценке глубинности значение параметра последовательно изменяется до тех пор, пока вычисленное расстояние не превзойдет характерного размера доверительной области.

Для оценивания главных направлений эквивалентности обращенная матрица ковариаций посредством линейного преобразования переводится в пространство относительных параметров, при этом существенно используется матрица билогарифмических производных функций решения прямой задачи по параметрам модели. Результатом работы указанного модуля является матрица коэффициентов квадратичной формы SQ (L , L), описывающая доверительную область в пространстве параметров. Частные области эквивалентности формируются в соответствии с распределением собственных чисел и векторов матрицы SQ , вычисление которых выполняется в модуле PARTEQ.

На основе описанного выше аппарата в программе DEQRC предусмотрена возможность оценивания разрешающей способности модели по совокупности параметров и сведения к минимальному числу совокупности величин, необходимых для описания геоэлектрического разреза. Подпрограмма REDUCE оценивает вклад каждой части модели, характеризующийся соответствующим диагональным элементом матрицы SQ и организует итерационный процесс упрощения модели с использованием оптимизационной процедуры и модулей по решению задач линейной алгебры.

Литература:

I. Безрук И.А., Сафонов А.С. Принципы построения автоматизированной системы обработки данных, полученных с помощью цифровых электроразведочных станций. - В кн.: Прикладная геофизика . М.: Недра, 1980, вып. 98, с. 93-102.

2. Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1977. 328 с.

3. Дрейзин Ю.А. О применении метода накопления в электромагнитных зондированиях. - Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1982, № 2, с. 108-110.

4. Киселев Е.С., Киселева О.В., Попов Ю.П., Терехин Е.М. Обработка на ЭВМ цифровых записей зондирования становлением электромагнитного поля. - В кн.: Разведочная геофизика. М.: Недра, 1975, вып. 67, с. 101-105.

5. Методические рекомендации по электроразведочным работам методом ЗСБ с аппаратурой "ЦИКЛ". Науч. ред. Б.И.Рабинович. Новосибирск: СНИИГГиМС, 1981. 99 с.

6. Порохова Л.Н., Ковтун А.А. Исследование эффективности интерпретации экспериментальных кривых МТЗ. - В кн.: Прикладная геофизика. М.: Недра, 1970, вып. 61, с. 134-140.

7. Efron B. Computers and the theory of statistics: thinking of unthinkable. - SIAM Rev., 1979, v. 21, No. 4, p. 460-480.

8. Marquardt O.W. An algorithm of least squares estimation of nonlinear parameters. - J. Soc. Indust. Appl. Math., 1963, v. 11, p. 431-441.

Утверждено к печати
Институтом геологии и геофизики СО АН СССР

Редактор М.И. Чиркова

Технический редактор Н.Н. Александрова

Подписано к печати 03.09.85. МН 15103.
Бумага 60x84/16. Печ.л. 3,0. Уч.-изд.л. 2,7.
Тираж 200. Заказ 216. Бесплатно.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск, 90. Ротапринт.