

52
А, д 3

АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ СЕЙСМОЛОГИИ

ДВИЖЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛИ



Издательство «НАУКА» Казахской ССР

АЛМА АТА-1986

521.1 + 550.3

УДК 550.3+521.1

Движение и устойчивость слонстой Земли. — Алма-Ата: Наука, 1986. — 240 с.

Поступательно-вращательное движение и устойчивость слонстой Земли исследованы преимущественно методами небесной механики. Найден механизм взаимодействия Земли, находящейся в поле ньютоновского притяжения. Выявлены и показаны новые качественные свойства и объяснен ряд особенностей движения Земли, включая природу трехосности ее фигуры. Полученные результаты имеют большие перспективы для применения при обосновании движущих механизмов глобальной тектоники и решения разнообразных задач динамики Земли и планет земной группы.

Книга предназначена для специалистов по геофизике, геологии, механике и астрономии.

Библиогр. 82 назв. Ил. 4. Табл. 6.

Авторы:

Ж. С. ЕРЖАНОВ, А. А. КАЛЫБАЕВ, А. А. БАЙМУХАМЕТОВ,
Т. Т. КОРЖЫМБАЕВ

Ответственный редактор

член-корреспондент АН КазССР Б. Р. РАКИШЕВ

Рецензенты:

член корреспондент АН КазССР Т. Б. ОМАРОВ,
кандидат физико-математических наук А. К. ЕГОРОВ

484384

С. Т. Егоров
академик ЦИУ-дің
академик С. Бейсембаев
атындағы ғылыми
КІТАПХАНАСЫ

Д 190302000-104
407(05)-86

© Издательство «Наука» Казахской ССР, 1986

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория вращения Земли около центра масс, восходящая к И. Ньютону и Ж. Д'Аламберу, получила свое аналитическое завершение в динамике твердого тела Эйлера. Достаточно полное для того времени изложение такой теории, впоследствии принятое в качестве международного стандарта, содержится в работе Л. Эйлера [63]. Переход от динамики твердого тела Эйлера к стандартной теории вращения Земли [10], по существу, выполнен не по общим принципам — от локального к глобальному. Поэтому стандартная теория, не успев стать основой практической астрономии, перестала в полной мере удовлетворять ее потребностям. В 70-х годах построено численно аналитическое обоснование другой теории вращения Земли [74]. Однако анализ содержания этой теории, выполненный в [23], показал ее ограниченность как в постановке, так и в применимости для анализа процессов, протекающих в геологическом масштабе времени.

В связи с этим возникла общая теория вращения Земли [23], базирующаяся на неограниченной постановке основной задачи небесной механики, качественных методах анализа и спутниковых данных о внешнем гравитационном поле Земли. В общей теории вращения Земли, основанной на полном соблюдении законов сохранения, отсутствует понятие диссипации энергии. Между тем все реальные объекты диссипативны. Уровень диссипативности Земли как свободной системы обычно оценивают через посредство разности чендлеровского и эйлерова периодов движения ее полюса. Возникает вопрос: где и как происходит диссипация энергии в теле Земли? Поэтому первый основной вопрос, рассматриваемый в предлагаемой книге, заключается в построении соответствующей модели Земли, ее обосновании и исследовании эволюции поступательно-вращательного движения.

Диссипативные системы согласно теореме Биркгофа непременно стремятся занять установившиеся (предельные) режимы движения. Последние в механике называют финальными, а в математике — предельными. Теория устойчивости движения по Ляпунову позволяет изучить именно предельные режимы, являющиеся движением консервативной системы. Поэтому второй основной вопрос, рассматриваемый в книге, состоит в исследовании устойчивости по Ляпунову предельных режимов вращения Земли.

Изучение эволюции движения сводится к доказательству существования, единственности и устойчивости по Ляпунову предельного режима вращения Земли, описанию процесса выхода на этот режим, а также доказательству существования, единственности и неединственности предельных режимов поступательного движения модели Солнечной системы, согласованных с режимом вращения Земли. Это исследование опирается на качественные методы анализа.

Следует подчеркнуть неприменимость методов теории динамических систем по Биркгофу из-за того, что, во-первых, анализ проводится по части переменных, во-вторых, полная система дифференциальных уравнений движения наряду с обыкновенными имеет и уравнения в частных производных. В связи с этим изложен качественный метод обобщенных динамических систем по Биркгофу, общая теория которых восходит к работам М. В. Бебутова, В. В. Степанова, Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова. Построен также метод сравнения и взаимного сравнения движения с его основными характеристиками (количество движения, полярный момент инерции и кинетическая энергия), рассматриваемыми вдоль траектории движения как функции времени. Некоторые принципы теории сравнения движения были получены М. В. Бебутовым, а сама теория построена Б. А. Щербаковым. В данной работе результаты этой теории обобщены на случай движения модели Солнечной системы.

* * *

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

- r — радиус-вектор;
- r_e — экваториальный радиус;
- r_p — полярный радиус;
- r_0 — средний радиус внешней поверхности литосферы;
- r_1 — радиус внутренней поверхности литосферы;

- r_2 — радиус внешней поверхности мантии;
 r_3 — радиус проводящей мантии;
 r_4 — радиус внутренней поверхности мантии;
 r_5 — радиус внутреннего ядра;
 r_{11} — расстояние между телами O_1 и O_j Солнечной системы;
 e_n — полярное сжатие фигуры Земли;
 e_s — экваториальное сжатие фигуры Земли;
 e_a — отношение радиусов внешней и внутренней поверхностей литосферы;
 e_1 — отношение радиусов внутренней поверхности литосферы и внешней поверхности мантии;
 e_2 — отношение радиусов внутренней поверхности мантии и внутреннего ядра;
 $O^* \eta \xi$ — инерциальная система координат;
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты координатных осей системы;
 $OXYZ$ — кенигова система координат;
 $Oxyz$ — собственная прямоугольная декартова система координат;
 $O\alpha\beta\gamma$ — сферическая система координат;
 φ, ψ, θ — углы Эйлера;
 \vec{K} — кинетический момент вращения Земли относительно центра масс;
 \vec{K}_1 — кинетический момент вращения литосферы;
 \vec{K}_2 — кинетический момент вращения мантии;
 \vec{K}_3 — кинетический момент вращения внутреннего ядра;
 \vec{I} — количество движения;
 \vec{Q} — главный момент относительно центра масс Земли всех приложенных к ней внешних сил;
 $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли;
 $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость вращения литосферы;
 $\vec{\omega}_2$ — угловая скорость вращения мантии;
 $\vec{\omega}_3$ — угловая скорость вращения ядра;
 A, B, C — главные центральные моменты инерции Земли;
 A_1, B_1, C_1 — главные центральные моменты инерции литосферы;
 C_2, C_3 — осевые моменты инерции мантии и внутреннего ядра;
 p, q, r — проекции вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости Земли на главные оси инерции,
 \vec{v} — вектор скорости,

- R_1 — действительная ось времени;
 t — время;
 ρ — плотность Земли;
 ρ_1 — плотность астеносферы;
 ρ_2 — плотность внешнего ядра;
 ν_1 — динамический коэффициент вязкости астеносферы;
 ν_2 — динамический коэффициент вязкости внешнего ядра;
 γ_1 — кинематический коэффициент вязкости астеносферы;
 γ_2 — кинематический коэффициент вязкости внешнего ядра;
 σ — проводимость внешнего ядра;
 σ_1 — проводимость мантии;
 σ_2 — проводимость внутреннего ядра;
 B — индукция магнитного поля;
 U_3 — электрический потенциал;
 E — напряженность электрического поля;
 c — скорость света;
 p — давление;
 U — силовая функция;
 G — постоянная тяготения;
 s — параметр преобразования Лапласа;
 λ
 λ — тензор напряжений;
 λ
 τ — тензор пар напряжений;
 λ
 ϵ — тензор деформаций;
 u — вектор упругих перемещений;
 m — число Пуассона;
 G^* — модуль сдвига.

Глава I

СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О СТРОЕНИИ И ДВИЖЕНИИ ЗЕМЛИ. МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Исторически первой моделью Земли был абсолютно твердый шар с центрально-симметричным распределением масс, способный вращаться вокруг своей оси и перемещаться около Солнца. С точки зрения дифференциальных уравнений движения шар — Земля ничем не отличается от материальной точки. Так возникла модель Солнечной системы из материальных точек, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения Ньютона. Модель Земли в виде шара с опоясывающим его кольцом, имитирующим экваториальное вздутие, впервые рассмотрена Н. Ньютоном. Модель динамически симметричной Земли в виде абсолютно твердого тела с двухосным главным центральным эллипсоидом инерции ($A = B < C$) и теория вращения такой Земли предложены Л. Эйлером. Общая теория вращения динамически асимметричной и неуравновешенной абсолютно твердой Земли, построенная в неограниченной постановке задачи, принадлежит Ж. С. Ержанову и А. А. Калыбаеву.

Подход к изучению влияния на изменяемость и деформативность Земли (отклонения от абсолютно твердого тела) на ее вращательное движение опирается на различные модельные представления. Именно так возникли модели изменяемой, упругодеформируемой, послойно изменяемой Земли и т. д. Закономерности вращения изменяемой Земли — Земли с изменяемой геометрией масс — исследовали В. Вольтерра, Н. Гюльден, Г. Дарвин и многие другие. Вращение Земли, моделируемой абсолютно твердой оболочкой, с полостью, заполненной жидкостью, изучали Н. Е. Жуковский, В. А. Стеклов и другие авторы.

Результаты этих работ показывают, что любая трактовка Земли достоверна в такой степени, в какой полна математическая модель Земли. В свою очередь, последняя физична в такой мере, в какой

она отражает общие законы природы и позволяет исследовать эволюцию движения. Поэтому главной задачей этих исследований является построение наиболее полной математической модели Земли, основанной на современных представлениях о ней, и теории эволюции движения Земли, отражающей физические законы сохранения. В настоящей главе приведены общие данные о Земле как составном элементе Солнечной системы, о ее строении и структуре, а также обзор работ о различных моделях Земли и вытекающая из него постановка задач.

1.1. Общие данные

Земля является одной из девяти больших планет, движущихся вокруг Солнца. Среднее расстояние между Землей и Солнцем принято за астрономическую единицу длины и составляет $1,495\,978\,70 \times 10^{11}$ м. В Солнечной системе самая удаленная планета — Плутон — отстоит от Солнца на расстоянии 40 астрономических единиц. Расстояние же от Солнца до ближайшей звезды — 271 000 астрономических единиц. Это свидетельствует о малости гравитационных сил, действующих на Солнечную систему со стороны звезд. Поэтому полагают, что Солнечная система в пространстве изолирована, т. е. на нее не действуют никакие внешние силы.

Все тела Солнечной системы взаимно притягиваются по закону Ньютона и движутся около Солнца по своим орбитам. Движение Земли вокруг Солнца можно представить суммой поступательного перемещения ее центра масс и вращения около этого центра масс. Период вращения Земли вокруг своей оси составляет 23 часа 56 минут 4 секунды, а движение вокруг Солнца осуществляется с периодом в 365,25 средних солнечных суток. Наряду с движением около Солнца центр масс Земли обращается около центра масс системы Земля — Луна с периодом в 27,32 средних солнечных суток. Ось вращения Земли совершает долгопериодическое движение, являясь образующей почти кругового конуса, с периодом 25 729 лет. Изменение положения оси вращения в теле Земли смещает точку пересечения этой оси с поверхностью Земли, вследствие чего полюс Земли описывает некоторую кривую.

С помощью астрономических наблюдений, а также измерений на поверхности Земли и в космосе определяют форму и размеры Земли, ее массу и моменты инерции, гравитационное и магнитное поля, тепловой поток из ее недр.

В первом приближении Землю считают шаром с радиусом $r = 6371$ км. Ближе к истинной форме Земли является эллипсоид вращения с экваториальным радиусом $r_e = 6378,16$ км, полярным радиусом $r_n = 6356,78$ км и с геометрическим сжатием $e_n = (r_e - r_n)/r_n = 1/298,258$.

Таблица 1. Характеристика элементов модели Солнечной системы

Небесное тело	Плотность, г/см ³	Масса, отн. ед.	Экваториальный радиус, км	Большая полуось орбиты, а. е. д.	Эксцентриситет орбиты	Наклон орбиты к эклиптике, угл. град	Сидерический период, год	Период вращения, сут	Число спутников планет
Солнце	1,40	332 958	696 000	—	—	—	—	25,36	—
Меркурий	5,44	0,06	2 439	0,387	0,206	7,0	0,24	58,60	—
Венера	5,24	0,82	6 051	0,723	0,007	3,4	0,62	243,00	—
Земля	5,52	1,00	6 378	1,000	0,017	0	1,00	1,00	1
Марс	3,95	0,11	3 394	1,524	0,093	1,9	1,88	1,03	2
Юпитер	1,33	318	71 398	5,203	0,048	1,3	11,86	0,41	14
Сатурн	0,68	95,1	60 000	9,539	0,056	2,5	29,46	0,43	15
Уран	1,27	14,5	25 400	19,182	0,047	0,8	84,01	1,00	6
Нептун	1,62	17,3	24 750	30,058	0,009	1,8	164,8	0,92	2
Плутон	1—1,5	0,002	1 400	39,439	0,250	17,2	247,7	6,40	1
Луна	3,33	0,0123	1 738	$2,56 \cdot 10^{-3}$	0,055	5,09	0,0748	27,32	—

Еще более соответствует форме Земли трехосный эллипсоид, характеризующийся тремя полуосями. Наибольший и наименьший радиусы экватора отличаются один от другого на величину, не превышающую 200 м, и геометрическое сжатие экватора составляет $e_p = 1/30\,000$.

Масса Земли равна $5,98 \cdot 10^9$ триллионов т, средняя масса 1 см³ вещества Земли оказывается равной 5,52 г, момент инерции составляет треть (точнее, 0,3308) от произведения ее массы на квадрат ее среднего радиуса.

Земля обладает собственным магнитным полем, главной компонентой которого является поле магнитного диполя или однородного намагниченного шара. Ось магнитного диполя наклонена к оси вращения Земли под углом 11,5°, магнитный момент диполя равен $8,3 \cdot 10^{26}$ СГСМ.

В табл. 1 приведены основные астрономические характеристики Солнечной системы [23, 42].

1.2. Стрoение Земли

Внутреннюю структуру Земли получают главным образом методом сейсмического зондирования. Для исследования земной коры применяются методы сейсмического зондирования с искусственными источниками возбуждения упругих волн. Глубинные части Земли вплоть до земного ядра изучаются по наблюдениям за распространением сейсмических волн от землетрясений. Кроме того, используются электромагнитное зондирование, наблюдения приливов и собственных колебаний в твердой Земле.

Сейсмологией накоплено большое количество данных, позволяющих сформулировать основные представления о внутренней структуре Земли. Ее делят на кору, верхнюю и нижнюю мантию и внешнее и внутреннее ядро (рис. 1). К. Буллен предложил более детальное деление на области, обозначаемые буквами от А до Г. На рис. 1 показаны его подразделения. Рис. 2 отражает скоростной разрез Земли по Б. Гутенбергу, дающий изменение скорости сейсмических волн с глубиной.

Построенная Б. Гутенбергом и К. Буллeном модель Земли сохранила свое принципиальное значение. В табл. 2 приводятся основные характеристики для оболочек модели «А» Гутенберга—Буллена.

Вопросы строения Земли и ее отдельных оболочек исследованы довольно подробно [6, 15, 16, 17, 30, 39, 45, 55, 64]. В «твердой» Земле выделяются: 1 — земная кора (слой А) средней толщиной 33 км; 2 — мантия с глубиной нижней границы 2900 км, она делится на верхнюю (слой В с глубиной нижней границы 400 км), сред-



Рис. 1. Слои в Земле по К. Буллену

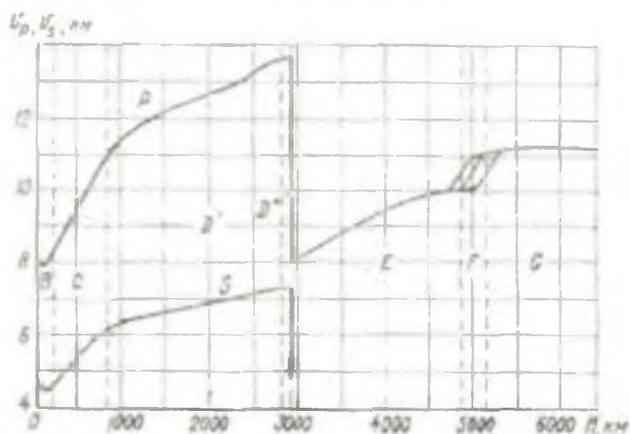


Рис. 2. Распределение скоростей в Земле по Б. Гутенбергу

ною (слой *C*, залегающий на глубине 400—1000 км) и нижнюю (слой *D* с глубиной 1000—2900 км); 3 — ядро, состоящее из внешнего жидкого ядра (слой *E* на глубине 2900—4980 км), переходного слоя *F* между внешним и внутренним ядром (4980—5120 км) и внутреннего твердого ядра (слой *G* на глубине 5120—6371 км).

Каждый из этих слоев характеризуется следующим образом.

Земная кора. Корой называют верхний слой твердой Земли, отделенный от лежащих ниже слоев разделом Мохоровичича. Этот раздел находят почти повсеместно под континентами и океанами. Она отмечается как граница, при переходе которой меняется химический состав вещества и скачкообразно увеличивается скорость распространения упругих волн. Масса коры составляет около 0,8% от массы Земли, а объем — менее 1% от объема Земли. Земная кора подразделяется на континентальную и океаническую. Континентальная кора значительно толще (25—75 км против 6—10 км), содержит гранитометаморфический слой, отсутствующий в океанической коре, отличается и по некоторым формам рельефа.

Т а б л и ц а 2. Характеристика внутренних слоев Земли

Слой	Интервал глубин, км	Интервал плотности, г/см ³	Доля от объема Земли, %	Масса, 10 ²⁵ г	Доля полной массы, %
Кора	(A) 0—33	2,7—3,0	1,55	5	0,8
	(B) 33—400	3,32—3,65	16,67	62	10,4
Мантия	(C) 400—1000	3,65—4,68	21,31	98	16,4
	(D) 1000—2900	4,68—5,69	44,28	245	41,0
	(E) 2900—5000	9,40—11,5	15,16		
Ядро	(F) 5000—5100	11,5—12,0	0,28	189	31,5
	(G) 5100—6371	12,0—12,3	0,76		

Мантия. Мантия занимает 83% объема и 68% массы Земли. Верхняя мантия (слой B), залегающая непосредственно под земной корой, отделена от средней мантии (слой C, называемый также слоем Голицына) границей на глубине около 400 км. При переходе этой границы сейсмические скорости возрастают. Слой Голицына отделен от нижней мантии (слой D') границей на глубине около 1000 км. На этой границе возрастание скоростей сейсмических волн с глубиной резко замедляется. Между нижней мантией и ядром имеется переходный слой D'' толщиной около 200 км, в котором возможно некоторое уменьшение с глубиной скоростей сейсмических волн.

В верхней мантии на глубине 100—300 км залегает слой с пониженной скоростью сейсмических волн и вязкостью. Этот слой называют астеносферой. Лежащую выше, образованную сравнительно твердыми и хрупкими породами часть слоя B вместе с земной корой называют литосферой. Кора и мантия являются петрологическими понятиями, поскольку эти слои сложены разными породами. Введение же понятия литосфера и астеносфера связано о

определением их реологических свойств. Одна и та же порода в зависимости от температуры может обладать высокой и низкой вязкостью и соответственно относиться к литосфере и астеносфере. Установлено, что динамический коэффициент вязкости астеносферы составляет 10^{20} — 10^{21} П, литосферы — 10^{23} — 10^{24} П.

Ядро. Внешнее ядро (слой *E*) залегает на глубине 2900—4980 км, его объем составляет 15,16%, а масса — 29,8% соответственно от объема и массы Земли. Через внешнее ядро проходят продольные сейсмические волны, а поперечные полностью поглощаются. Это позволяет считать, что вещество в слое *E* находится в жидком состоянии. Это состояние вещества внешнего ядра подтверждается наличием нутационных колебаний оси вращения Земли, существованием чендлеровских колебаний полюсов, данными о приливных колебаниях внутри Земли. Вязкость внешнего ядра меньше или порядка 10^9 П.

Толщина переходного слоя *F* между внешним и внутренним ядром около 140 км. Внутреннее ядро (*G*) имеет радиус 1250 км, его объем составляет 0,7%, а масса около 1,2% всей Земли. Специфика отраженных и проходящих через внутреннее ядро сейсмических волн показывает, что внутреннее ядро является твердым телом. И внешнее и внутреннее ядро обладает большой электропроводностью. Обычно полагают, что электропроводность ядра можно оценить в 10^5 — 10^6 Ом⁻¹·м⁻¹.

Современные модели Земли подразделяются на оптимальные, наилучшим образом удовлетворяющие всем имеющимся данным о Земле, и стандартные, достаточно хорошо удовлетворяющие данным наблюдений и сравнительно простые для использования в геофизической практике. Классические модели Земли сферически-симметричны и построены в постановке прямой задачи геофизики методом подбора. Построение современных моделей ведется методом решения обратной задачи геофизики с учетом отклонения наружных слоев от сферической симметрии. Известно, что отклонения от сферической симметрии с глубиной нивелируются и все модели должны переходить в одну общую сферически-симметричную модель земных недр. Именно по такому пути построены стандартные современные модели Земли, близкие к лучшим оптимальным моделям [65, 70]. В работе [70] построенная модель Земли названа предварительной референц-моделью Земли, отвечающей основным принципам, установленным Комитетом по стандартной модели Земли.

Итак, Земля представляет собой сложную механическую систему: вращающийся трехслойный шар (литосфера, астеносфера и мантия) с внутренней полостью, заполненной тяжелой жидкостью (слой *E*), в которой вращается шарообразное твердое ядро *G*, удер-

живаемое в центре системы силами ньютоновского тяготения, но могущее вращаться иначе, чем мантия. В ядре формируется главное геомагнитное поле. Поэтому движение внешнего и внутреннего ядер, обладающих большой электропроводностью, представляет собой движение проводников в геомагнитном поле.

1.3. Движение Земли

Движение Земли около собственного центра масс характеризуется скоростями ее собственного вращения, процессии и нутации земной оси, движением земных полюсов и вариацией продолжительности солнечных суток.

Различают две постановки задачи о вращении Земли: ограниченную и неограниченную. При ограниченной постановке учитывается влияние поступательного перемещения Земли на ее вращение без учета обратной динамической связи. Отметим, что при этом нарушается закон сохранения энергии и исключается возможность использования априорных сведений о движении.

Основы теории вращения Земли в ограниченной постановке задачи заложены Н. Ньютоном [50], Д'Аламбером [68], построена сна Л. Эйлером [63], дальнейшее ее развитие связано с работами [10, 41, 74, 76].

В настоящее время Ж. С. Ержановым, А. А. Калыбаевым [23] построена общая теория вращения динамически асимметричной и неуравновешенной Земли в неограниченной постановке задачи о тел. Она позволила выявить ряд существенных особенностей поступательно-вращательного движения Земли, таких, как вековое движение полюса, вековое замедление и периодические вариации вращения, вековой уход лунного узла и сближение плоскости орбиты ее околосолнечного перемещения с неизменяемой плоскостью Лапласа Солнечной системы.

В упомянутой работе [23] Земля рассмотрена как абсолютно твердое тело. Однако чендлеровское движение полюса с периодом в 430 средних солнечных суток, существенно превышающим свободный эйлеров период, а также луно-солнечные приливные эффекты указывают на отличие Земли от твердого тела.

В целях объяснения удлинения свободного эйлерова периода движения полюса до чендлеровского периода внутренними движениями жидких масс В. Вольтерра [82], Н. Гюльден [73], Г. Дарвин [69], Н. Е. Жуковский [31], П. К. Штернберг [61] рассмотрели задачи о вращении твердого тела с внутренними циклическими движениями, в частности тела с полостью, целиком заполненной жидкостью. В основу названных работ положена идея о возможных изменениях значений главных центральных моментов инерции Зем-

ли. Обобщая эту идею, Ж. С. Ержанов, М. А. Науразбаев [28, 29] исследовали вращение изменяемой Земли в неограниченной постановке задачи, используя при этом принцип монотонного возрастания длины полуосей эллипсоида инерции Земли, обеспечивающий подобное изменение эллипсоида. Случай немонотонного изменения длины полуосей эллипсоида инерции Земли остается открытым.

Вращательное движение слоистой модели Земли в виде абсолютного твердого центрального шара с шаровой симметрией распределения масс и объемлющей его твердой литосферной оболочки с трехосным эллипсоидом инерции, разделенных шаровым вязким астеносферным слоем, рассмотрено в статье [26]. Такая модель Земли позволила изучать некие перемещения земных полюсов как следствие собственного перемещения литосферы по астеносферному слою. Однако при этом не рассмотрены ни собственная гравитация Земли, ни ее взаимодействие с внешними небесными телами.

Исследована задача о вращательном движении твердой Земли (шар) с упругой литосферой и вязким астеносферным слоем вокруг центра масс [19]. При этом определено напряженно-деформированное состояние литосферы под действием напряжений, на границе раздела этого тела и вязкого астеносферного слоя, а также под действием центробежных сил.

Поставлена и решена задача о напряженно-деформированном состоянии толщ упругой оболочки (литосферы), вращающейся в ньютоновом поле сил несимметрично расположенных притягивающих центров [20]. Установлено, что под действием внешнего поля симметрия в строении Земли действительно нарушается, но это нарушение отчетливо выражается вблизи внешней границы и с глубиной оно инвелируется.

Природу геомагнитного поля связывают с динамо-механизмом. Свидетельством в пользу гипотезы о динамо-механизме в жидком ядре считают обнаруженную Э. Вестингом тесную связь между неравномерностями западного дрейфа недипольной части магнитного поля и измеренными астрономами вариациями скорости вращения Земли. Кинематическая теория достаточно развита и показывает, что самовозбуждение магнитного поля в земном ядре возможно при весьма разнообразных движениях. Полная теория, т. е. теория «двигателя», находится еще в начальной стадии и активно развивается [16, 48, 55, 64].

Исследования электромагнитного взаимодействия ядра с мантией, начатые Е. Буллардом [66, 67], продолжены в работах [75, 77, 78]. Стационарное вращение внутреннего ядра вокруг полярной оси под действием момента сил, возникающих под влиянием гидромагнитного динамо, обсуждено в статье [72]. Рассмотрены коле-

бания внутреннего ядра крутильного типа. Приводятся оценки порядка величины для крутильных колебаний, охватывающих жидкое ядро. Указывается на то, что в будущих моделях гидромагнитного динамо Земли следует учитывать внутреннее ядро и его вращение вокруг полярной оси.

Выдвинута гипотеза о том, что единственно количественно объяснимой причиной нерегулярных флюктуаций в длительности суток является передача углового момента между ядром и мантией. Наблюдаемые вековые геомагнитные вариации и данные о вращении Земли свидетельствуют, что кратковременные изменения геомагнитного поля у поверхности ядра оказывают определяющее влияние на изменение скорости вращения и на возбуждение чендлеровского движения [79, 80].

В работах [11, 47] рассмотрена упрощенная модель Земли, состоящая из трех слоев: мантии, жидкого внешнего ядра и твердого внутреннего ядра, движения которых взаимодействуют благодаря вязким и магнитным напряжениям на границах жидкого слоя. Выведены уравнения для векторных скоростей вращения твердого ядра и мантии, для движения в жидком ядре, а также для кинетической, магнитной и внутренней энергии всех трех слоев. Приведены численные оценки величин компонент энергии и их взаимных превращений, однако здесь также не рассмотрены действия гравитационных сил.

В связи с этим наименее изученным является движение Земли с учетом:

— слоистости внутреннего строения Земли с перемежающимися свойствами твердого тела и жидкости;

— сил вязкого трения твердых составных частей Земли о жидкие слои;

— сил гидромагнитного торможения в проводящих слоях;

— сил внутренней гравитации и сил взаимодействия Земли с Луной, Солнцем, планетами Солнечной системы;

— полной неограниченной постановки задачи о движении.

Отсюда вытекает следующая постановка задач исследования движения слоистой Земли.

1.4. Модель и постановка задач

Геофизические данные свидетельствуют о неоднородно-слоистом строении Земли и существовании собственного магнитного поля; наличие внешнего и внутреннего гравитационных полей Земли составляет основу ее материального мира. Отсюда и вытекает следующее модельное представление Земли и постановка задач.

Земля представлена пятью перемежающимися твердыми и не-

сжимаемо вязкими телами: твердой литосферой (внешней оболочкой), вязкой астеносферой, твердой мантией, вязким внешним и твердым внутренним шаровым ядрами. Поверхность раздела этих тел является софокусными сферами, центры которых совпадают с центром масс Земли. Предполагается, что эта софокусность сохраняется во все время движения Земли. Данное предположение, эквивалентное голономной кинематической связи, не нарушает общность. Внешнее, внутреннее ядра и часть мантии, прилегающая к внешнему ядру, предполагаются проводимыми и их движения суть движения в геомагнитном поле. На протяжении всей работы внутренние твердые тела выступают как абсолютно твердые. Твердая литосфера во второй главе рассматривается как абсолютно твердое тело, а в третьей — как упругодеформируемое тело. Разбирается также частный случай данной модели — трехслойная Земля, когда мантия и ядра приняты за единое центрально-симметричное абсолютно твердое тело.

Общая постановка задачи исследования такова. Механическая система G_n состоит из слоистой Земли, представленной упомянутой сферически-симметричной референтной геофизической моделью с ее собственным магнитным полем, и материальных точек, представляющих Луну, Солнце и планеты, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. В момент времени $t=0$ твердые слои и внутреннее ядро вращаются около центра масс Земли с различными угловыми скоростями, а сам центр масс и материальные точки имеют заданные положения и скорости движения в пространстве — начальные условия для соответствующей задачи Коши. В рамках этой задачи исследуются поступательно-вращательное движение и устойчивость вращения слоистой Земли, поступательно-вращательное движение механической системы G_n (модели Солнечной системы) и эволюция этого движения.

Указанная общая постановка задачи распадается на частные задачи об определении главного вектора и главного момента относительно центра масс Земли всех приложенных к ее слоям внешних и внутренних сил — гравитационных сил, силы вязкого трения твердых слоев в вязких жидких слоях и силы сопротивления движению в геомагнитном поле. Отметим постановку этих частных задач.

Моменты гравитационных сил определяются в соответствии с теорией ньютоновского тяготения.

Для определения моментов сил вязкого трения твердых слоев и внутреннего ядра Земли в ее вязких жидких слоях и сил сопротивления движения в геомагнитном поле ставятся гидродинамические задачи:

— о движении вязкого несжимаемого вещества астеносферы,

вызванном вращением литосферы и мантии с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 :

— о движении вязкого несжимаемого проводящего вещества внешнего ядра вследствие вращения мантии и ядра с угловыми скоростями ω_2 и ω_3 при наличии магнитного поля с индукцией и направлением оси вращения ω_3 . При этом ядро и часть мантии, прилегающая к проводящей жидкости, имеют постоянные проводимости σ_1 и σ_2 .

Установив силовые факторы, необходимо:

— вывести дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения системы G_n ; доказать корректность постановки соответствующей задачи Коши и построить формальное функциональное пространство нелинейных членов из правых частей уравнений вращения Земли;

— на основе имеющихся геофизических данных о распределении плотности, электропроводности, вязкости динамических слоев и о внешнем гравитационном поле Земли определить значения моментов инерции и коэффициенты системы дифференциальных уравнений вращения ее слоев, а также корни характеристического уравнения этой системы;

— провести качественный анализ уравнений вращения слоев Земли, исследовать предельные режимы их вращения и на основании первых интегралов уравнений движения системы G_n в предельном режиме получить оценки на решение системы;

— изучить устойчивость предельных режимов вращения слоистой Земли при неравном нулю моменте гравитационных сил; обосновать правомерность такого подхода с помощью теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях и оценок на решение;

— определить эволюцию поступательно-вращательного движения системы G_n .

Последний пункт частных задач предполагает построение качественного метода исследования уравнений движения. В связи с этим необходимо разработать методы обобщенных динамических систем применительно к теории движения и устойчивости слоистой Земли и методы анализа движения по части его переменных.

Наконец, общая постановка задач и постановка частных задач отнесена к модели слоистой Земли с упругодеформируемой литосферой.

Глава 2

ДВИЖЕНИЕ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛИ С ТВЕРДОЙ ЛИТОСФЕРОЙ

В главе исследовано поступательно-вращательное движение слоистой Земли в неограниченной постановке задачи n тел. Целью этих исследований является выявление механизмов взаимных влияний движений Земли и окружающих ее небесных тел; поступательного движения и вращения относительно центра масс самой Земли; относительных движений внутренних слоев Земли.

2.1. Постановка задачи

Введем механическую модель G_n Солнечной системы, состоящей из Земли и рассматриваемых как материальные точки Луны, Солнца и планет с массами M_1, M_2, \dots, M_n . По предположению, массы M_1, M_2, \dots, M_n сосредоточены в центрах масс O_1, O_2, \dots, O_n соответствующих небесных тел. Предполагается также, что эти материальные объекты имеют заданные положения и скорости движения относительно некоторой инерциальной декартовой системы отсчета $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$ и взаимодействуют между собой по закону всемирного тяготения Ньютона. Выберем подходящую модель Земли, обозначив через O ее центр масс.

Слоистая Земля представлена следующей механической системой (рис. 3). Литосфера смоделирована вращающейся абсолютно твердой оболочкой с трехосным центральным эллипсоидом инерции и сферической полостью радиуса $r_1 = r_1$, причем предполагается, что внешняя поверхность и плотность оболочки идентичны физической поверхности и плотности Земли. Внутри оболочки находится толстостенный шар радиуса $r_2 \leq r_2 \leq r_2$ со сферическим распределением масс и внутренней заполненной жидкостью полостью. Этот шар моделирует твердую мантию Земли. В полости шара содержится твердое шаровое ядро радиуса $0 < r_3 \leq r_3$, имеющее также ра-

диально-симметричное распределение масс и удерживаемое в центре системы силами ньютоновского притяжения. Последнее условие не нарушает общности выбора модели, а выполняется при весьма общих предположениях. Астеносфера моделируется сферическим слоем вязкой жидкости радиуса $r_2 \leq r \leq r_1$, находящимся между оболочкой и толстостенным шаром. Внешний слой ядра, внутреннее ядро и часть мантии радиуса $r_4 \leq r \leq r_3$, примыкающей к ядру, обладают большой проводимостью и их движения суть движения проводников в геомагнитном поле.

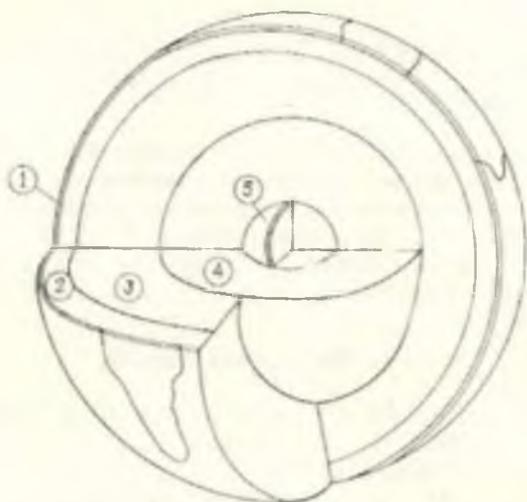


Рис. 3. Модель слоистой Земли: 1 — литосфера; 2 — астеносфера; 3 — мантия; 4 — внешнее ядро; 5 — внутреннее ядро

Предположим, что твердые слои (оболочка, толстостенный шар и ядро) вращаются с разными угловыми скоростями и взаимодействуют между собой, во-первых, по закону притяжения Ньютона и, во-вторых, благодаря вязким и гидромагнитным напряжениям.

Относительно гравитирующей системы G_n с выбранной моделью Земли ставится задача: исследовать поступательно-вращательное движение системы G_n и пространственно-временную эволюцию вращения Земли около центра масс при условии, что тела системы G_n не соударяются между собой.

Для выполнения этой задачи необходимо:

— определить силовую функцию внешней и внутренней гравитации Земли;

— исследовать вопрос о движении вязкой жидкости в астеносферном слое;

— определить тормозящий момент, образуемый от вязкого трения литосферы об астеносферный слой;

— решить задачу о магнитогидродинамическом течении вязкой несжимаемой проводящей жидкости во внешнем слое ядра с учетом действия магнитного поля;

— найти результирующий момент сопротивления вращению мантии и ядра, образующийся от вязкого трения о жидкие слои, от непосредственного торможения в магнитном поле;

— сформулировать и исследовать корректность постановки задачи Коши, описывающей движение системы G_n ;

— провести качественный анализ поступательно-вращательного движения системы G_n и обосновать постановку задачи о вращательном движении слоистой Земли с вязкой астеносферой и жидким проводящим слоем ядра при равном нулю главном моменте внешних и внутренних сил гравитации;

— провести количественный анализ взаимодействия элементов модели на основании данных о геопотенциале, динамическом строении и физических свойствах Земли;

— исследовать существование различных предельных режимов вращения слоистой Земли.

2.2. Уравнения движения и их разрешимость

Пусть в гравитирующей системе G_n слоистая Земля имеет массу M и материальные точки O_1, O_2, \dots, O_n — Луна, Солнце и планеты Солнечной системы — массы M_1, M_2, \dots, M_n соответственно. Предположим, что эти материальные объекты, имея в начальный момент времени $t=0$ заданные положения и скорости движения, взаимно притягиваются по закону Ньютона и внешние силы отсутствуют. Тогда силовая функция U системы G_n имеет вид [18]:

$$U = \sum_{0 \leq i < j \leq n} U_{ij}, \quad (2.1)$$

где функция U_{ij} имеет вид $U_{ij} = GM_i M_j / r_{ij}$ при $1 \leq i < j \leq n$ (r_{ij} — расстояние между телами O_i, O_j);

$$U_{0j} = \frac{GM}{r_{0j}} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_z}{r_{0j}} \right)^n J_n P_n(\cos \beta_j) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_z}{r_{0j}} \right)^n P_{nk} \cos \beta_j (C_{nk} \cos k\alpha_j + S_{nk} \sin k\alpha_j) \right]$$

при $i=0, j=1, 2, \dots, n$.

Пусть $O^*\xi\eta\zeta$ — инерциальная, $OXYZ$ — кениговая и $Oxyz$ — собственная прямоугольные декартовы системы отсчета. Обозначим через

$$\vec{T} = \int_V \rho \vec{v} dV, \quad \vec{K} = \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{v}) dV \quad (2.2)$$

количество движения и момент количества движения Земли, где $\{\vec{v}\}$, $\{\vec{r}\}$ — поля скоростей и радиусов-векторов элементарных частиц, заключенных в ее объеме V с элементом объема dV .

Пусть (ξ_i, η_i, ζ_i) — координаты центров масс тел M_i ($i=0, 1, \dots, n$), ω — угловая скорость вращения Земли относительно центра масс и (p, q, r) — проекции вектора $\vec{\omega}$ на координатные оси системы $Oxyz$. Положим

$$\dot{\xi}_i = u_i, \quad \dot{\eta}_i = v_i, \quad \dot{\zeta}_i = w_i. \quad (2.3)$$

Тогда движение системы G_n описывается дифференциальными уравнениями, вытекающими из теорем об изменении количества движения тел M_i ($i=1, 2, \dots, n$) и величин (2.2) для Земли [18, 23]:

$$M_i \dot{u}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad M_i \dot{v}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad M_i \dot{w}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)pr &= \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cos \Theta \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \Theta} + \frac{\partial U}{\partial \Theta} \sin \varphi; \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cos \Theta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \Theta} - \frac{\partial U}{\partial \Theta} \cos \varphi; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$C\dot{r} + (B-A)pq = \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Здесь A , B и C — главные центральные моменты инерции Земли.

Система (2.3) — (2.5) замыкается кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \Theta + \dot{\Theta} \cos \varphi; \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \Theta - \dot{\Theta} \sin \varphi; \\ r &= \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Запишем начальные условия

$$\begin{aligned} \xi_{i|t=0} &= \xi_{i0}; \quad \gamma_{i|t=0} = \gamma_{i0}; \quad \zeta_{i|t=0} = \zeta_{i0}; \\ u_{i|t=0} &= u_{i0}; \quad v_{i|t=0} = v_{i0}; \quad w_{i|t=0} = w_{i0}; \\ \psi_{i|t=0} &= \psi_{i0}; \quad \varphi_{i|t=0} = \varphi_{i0}; \quad \theta_{i|t=0} = \theta_{i0}; \\ \dot{\psi}_{i|t=0} &= \dot{\psi}_{i0}; \quad \dot{\varphi}_{i|t=0} = \dot{\varphi}_{i0}; \quad \dot{\theta}_{i|t=0} = \dot{\theta}_{i0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

и через $g(t, q)$ обозначим решение задачи Коши (2.3) — (2.7), где $q = \{\xi_{i0}, \eta_{i0}, \dots, \zeta_{i0}, u_{i0}, v_{i0}, \dots, w_{i0}, \psi_0, \varphi_0, \dots, \dot{\theta}_0\}$ — постоянный $6(n+2)$ -мерный вектор.

Известно, что система уравнений (2.3) — (2.6) имеет десять первых интегралов:

$$\sum_{i=0}^n M_i \dot{\xi}_i = at + a_0; \quad \sum_{i=0}^n M_i \dot{\gamma}_i = bt + b_0; \quad \sum_{i=0}^n M_i \dot{\zeta}_i = ct + c_0; \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=0}^n M_i u_i = a; \quad \sum_{i=0}^n M_i v_i = b; \quad \sum_{i=0}^n M_i w_i = c; \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n M_i (w_i \dot{\gamma}_i - v_i \dot{\zeta}_i) + Ap \cos(x, \xi) + Bq \cos(y, \xi) + \\ + Cr \cos(z, \xi) = a_1; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=0}^n M_i (u_i \dot{\zeta}_i - w_i \dot{\xi}_i) + Ap \cos(x, \eta) + Bq \cos(y, \eta) + Cr \cos(z, \eta) = b_1;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n M_i (v_i \dot{\xi}_i - u_i \dot{\gamma}_i) + Ap \cos(x, \zeta) + Bq \cos(y, \zeta) + \\ + Cr \cos(z, \zeta) = c_1; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n M_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \right] - U = h,$$

где $a, a_0, a_1, b, b_0, b_1, c, c_0, c_1$ и h — постоянные величины, значения которых определяются начальными условиями (2.7).

Первые интегралы (2.8) и (2.9) называются интегралами дви-

жения центра инерции, (2.10) — интегралами моментов, а (2.11) — интегралом энергии. Эти интегралы соответственно выражают законы движения центра инерции (прямолинейность и равномерность движения), сохранения моментов и полной энергии системы G_n [18, 23]. Отметим некоторые выводы, вытекающие из априорных сведений, содержащихся в первых интегралах (2.8) — (2.11).

Начальные условия (2.7) можно фиксировать так, чтобы постоянные a , a_0 , b , b_0 и c , c_0 были нулями. Тогда центр инерции системы G_n будет неподвижным. Начало O^* инерциальной системы совместим с центром инерции, а ее координатную плоскость $O^*\xi\eta$ — с плоскостью

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1z = 0. \quad (2.12)$$

Неизменяемая плоскость Лапласа (2.12) проходит через начало O^* системы $O^*\xi\eta$.

Известно, что в рамках ньютоновской механики скорости движения материальных тел малы по сравнению со скоростью света, поэтому кинетическая энергия системы G_n как функция времени t ограничена сверху, т. е.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left[\sum_{i=0}^n M_i(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \right] = u^* < \infty. \quad (2.13)$$

В силу интеграла энергии и выражения (2.13) будем иметь

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} U(t) = U^* < \infty. \quad (2.14)$$

Из неравенства (2.14) и выражения (2.1) силовой функции вытекают следующие оценки:

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} r_{i1}(t) > a_{i1} > 0 \text{ при } 1 \leq i \leq n; \quad (2.15)$$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} r_{0j}(t) > a_{0j} > a_e \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Из неравенств (2.15) следует, что силовая функция U системы G_n имеет непрерывные частные производные любого порядка по каждой из своих переменных; эти производные, рассматриваемые как функции независимой переменной t , определены, непрерывны, однозначны и ограничены для всех значений $t \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, главный вектор сил, приложенных к каждому из тел M_i ($i=0, 1, \dots, n$), и главный момент сил, приложенных к Земле, также определены, непрерывны, однозначны и ограничены для всех зна-

чений времени $t \in R_1$ вместе с полными по времени производными любого порядка. В связи с этим будут выполнены все условия теоремы существования и единственности решения $g(t, q)$, теоремы о его продолжаемости на всю действительную ось времени, теоремы о непрерывной зависимости $g(t, q)$ как от начальных условий (2.7), так и от правых частей уравнений (2.3)—(2.6) и теоремы о гладкости решения $g(t, q)$ [46, 52, 54]. Условия названных теорем могут быть проверены так же, как в [22—25]. При этом правые части уравнений движения системы G_n являются элементами банахова пространства $C^\infty(R_1, R_{(a, 2)})$ и задача Коши (2.3)—(2.7) корректно разрешима.

2.3. Движение вязкого астеносферного слоя

Пусть литосфера и мантия вращаются с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ около центра масс Земли (см. рис. 3). Это порождает движение вязкой жидкости, заключенной в сферическом астеносферном слое с внешним и внутренним радиусами r_1 и r_2 . В сферической системе координат r, α, β вектор $\vec{\omega}_1$ направим по прямой $\beta=0$ (ось Z), вектор $\vec{\omega}_2$ — в плоскости $\alpha=0$, т. е. по оси Z_1 , угол между векторами $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ обозначим через γ (рис. 4).

Для описания медленного слоистого движения сильно вязкой астеносферы воспользуемся линейными уравнениями гидродинамики при малых числах Рейнольдса. В связи с этим рассматриваемое течение вязкой жидкости между двумя концентрическими сферами можно представить в виде двух осесимметричных течений: 1 — течением с составляющей v_a вектора скорости частиц жидкости в системе координат r, α, β , вызванным вращением обеих сфер вокруг оси OZ с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2 \cos \gamma$; 2 — течением с составляющей v_a в системе координат r, α', β' , вследствие вращения внутренней сферы с угловой скоростью $\omega_1 \sin \gamma$ вокруг оси OX при неподвижной внешней сфере [27].

Для тангенциальной составляющей v_a вектора скорости имеет место дифференциальное уравнение [58]:

$$\frac{\partial v_a}{\partial t} = \nu_1 \left(\Delta v_a - \frac{v_a}{r^2 \sin^2 \beta} \right), \quad (2.16)$$

в котором

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \beta},$$

ν_1 является кинематическим коэффициентом вязкости жидкости.

Граничные условия прилипания и начальные условия задачи записываются в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 r_1 \sin \beta \text{ при } r=r_1; \\ v_2 &= \omega_2 r_2 \cos \gamma \sin \beta \text{ при } r=r_2; \\ v_1 &= 0 \text{ при } t=0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

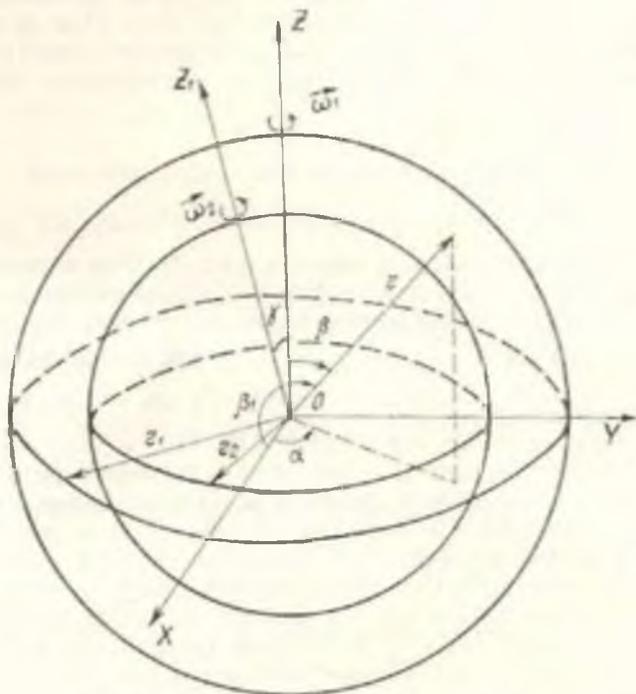


Рис. 4. Сферические системы координат

Следует отметить, что дифференциальное уравнение (2.16) принадлежит к параболическому типу, а граничные и начальные условия (2.17) являются несогласованными. Кроме того, здесь имеет место теорема единственности ограниченного решения уравнения параболического типа с разрывными начальными данными [13, 59].

Для решения уравнения (2.16) применяется метод преобразования Лапласа [37]. Введем обозначение

$$\frac{v_1^{\circ}}{s} = \int_0^{\infty} e^{-st} v_1 dt, \quad (2.18)$$

где $\frac{v^*}{s}$ — изображение по Лапласу функции v_s , а v_s — оригинал и s — параметр преобразования.

Преобразование (2.18) уравнения (2.16) и граничных условий (2.17) приводит к следующей краевой задаче для изображения:

$$\begin{aligned} \Delta v_s^* - v_s^* \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \beta} + \frac{s}{v_1} \right) &= 0; \\ v_s^* &= \omega_1 r_1 \sin \beta \quad \text{при } r=r_1; \\ v_s^* &= \omega_2 r_2 \cos \gamma \sin \beta \quad \text{при } r=r_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Вид граничных условий позволяет искать решение дифференциального уравнения в форме

$$v_s^* = \tau(r) \sin \beta. \quad (2.20)$$

Подставляя выражение (2.20) в соотношения (2.19), получаем для величины $v(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} - v \left(\frac{2}{r^2} + \frac{s}{v_1} \right) = 0 \quad (2.21)$$

и простые граничные условия

$$\begin{aligned} v &= \omega_1 r_1 \quad \text{при } r=r_1; \\ v &= \omega_2 r_2 \cos \gamma \quad \text{при } r=r_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

С помощью подстановки

$$v = \frac{y}{r} \quad (2.23)$$

уравнение (2.21) приводится к уравнению Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{r} y' - y \left(\frac{s}{v_1} + \frac{9}{4r^2} \right) = 0, \quad (2.24)$$

общее решение которого представляется через функции Бесселя дробного порядка от мнимого аргумента [14]:

$$y = AI_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) + BK_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right). \quad (2.25)$$

Определяя постоянные A и B из соотношений (2.22) и (2.23)

$$A = \frac{r_1^{3/2} \omega_1 K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - r_2^{3/2} \omega_2 \cos \gamma K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)}{I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)},$$

$$B = \frac{r_1^{3/2} \omega_1 I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - r_2^{3/2} \omega_2 \cos \gamma I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)}{K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)}.$$

с учетом (2.25), (2.23), (2.20), решение задачи (2.19) для изображения v_z^* поперечной скорости получаем в виде:

$$v_z^* = \frac{\sin \beta}{V r} \left[\frac{r_1^{3/2} \omega_1 K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) -}{I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) -} \right. \\ \left. \frac{-r_2^{3/2} \omega_2 \cos \gamma K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)}{-I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)} \times I_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r_1^{3/2} \omega_1 I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - r_2^{3/2} \omega_2 \cos \gamma I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)}{I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)} \times \right. \\ \left. \times K_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) \right]. \quad (2.26)$$

Оператор (2.18) обратим, поэтому возможен переход от изображения (2.26) к оригиналу [58]:

$$v_z = r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r}} \omega_1 \sin \beta \frac{1}{2\alpha i} \times \\ \times \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \frac{K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) I_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)}{K_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) I_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) - I_{3/2} \left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right) K_{3/2} \left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}} \right)} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{ds}{s} - r_2 \sqrt{\frac{s_0}{r}} \omega_2 \cos \tau \sin \beta \frac{1}{2\pi i} \times \\
 & \times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) -}{K_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) -} - \\
 & \frac{-I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)}{-I_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)} \frac{ds}{s}. \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Особые точки подынтегральной функции (2.27) совпадают с корнями уравнения

$$K_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) - I_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) = 0,$$

где $I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)$, $I_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)$, $K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)$, $K_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Корни последнего чисто мнимые и связаны с действительными корнями уравнения [14]

$$G_{3/2}(\lambda) J_{3/2}(e_1 \lambda) - J_{3/2}(\lambda) G_{3/2}(e_1 \lambda) = 0 \quad (2.28)$$

соотношением

$$r_2 \sqrt{\frac{s_0}{v_1}} = i \lambda_k.$$

При этом k -й корень (по порядку абсолютных величин) уравнения (2.28) будет [14]:

$$\lambda_k = \delta + \frac{b_1}{\delta} + \frac{c_2 - \lambda_1^2}{\delta^3} + \frac{c_3 - 4\lambda_1^2 c_2 + 2\delta_1^3}{\delta^5} + \dots$$

где

$$\delta = \frac{\pi k}{e_1 - 1}, \quad \delta_1 = \frac{1}{e_1}, \quad c_2 = -\frac{e_1^3 - 1}{3e_1(e_1 - 1)},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{5e_1^3(e_1 - 1)}, \quad e_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Особые точки подынтегральных функций в выражении (2.27) являются простыми полюсами, поэтому можно воспользоваться разложением мероморфной функции на простые дроби в виде [36]:

$$\frac{F_1^{(i)}(s)}{F_2^{(i)}(s)} = \frac{c_0^{(i)}}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{s-s_k} \quad (i=1,2).$$

Вычеты $c_0^{(i)}$ и $c_k^{(i)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} c_0^{(i)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s F_1^{(i)}(s)}{F_2^{(i)}(s)}, \\ c_k^{(i)} &= \frac{F_1^{(i)}(s_k)}{F_2^{(i)}(s_k)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для выражения (2.27) имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{F_1^{(1)}(s)}{F_2^{(1)}(s)} &= \frac{K_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) -}{K_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) -} \\ &\quad \frac{-I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)}{-I_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)}, \\ \frac{F_1^{(2)}(s)}{F_2^{(2)}(s)} &= \frac{K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) -}{K_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) -} \\ &\quad \frac{-I_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)}{-I_{3/2}\left(r_2 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right) K_{3/2}\left(r_1 \sqrt{\frac{s}{v_1}}\right)}. \end{aligned}$$

Тогда на основании соотношений (2.29) получим

$$c_0^{(1)} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{3/2} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}; \quad c_0^{(2)} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{3/2} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 - r_2^2};$$

$$c_k^{(1)} = 2 \frac{r_1}{\lambda_k} \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r}{r_2} \lambda_k\right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r}{r_1} \lambda_k\right) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}; \quad (2.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_k^{(2)} = & 2 \frac{r_2}{\lambda_k} \left[G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Суммируя вычеты (2.30) и учитывая равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st) \frac{ds}{s} = 1; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st) \frac{ds}{s-s_k} = e^{-s_k t},$$

на (2.27) находим следующее выражение для составляющей вектора скорости:

$$\begin{aligned} v_0 = & \omega_1 r \sin \vartheta \left[\frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\ & \times \frac{1}{\lambda_k} \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \left. + \right. \\ & + \omega_2 r \cos \gamma \sin \vartheta \left[\frac{r_2^3}{r_1^3} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\ & \times \frac{1}{\lambda_k} \left[J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\ & \times \left. \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right]^{-1} \right]. \quad (2.31)$$

Если рассмотреть предельный режим решения (2.31) при $t \rightarrow \infty$, то получим выражение для составляющей скорости v_a установившегося течения вязкой жидкости, которое будет иметь вид

$$v_a = \frac{r \sin \beta}{r_1 - r_2} \left[(\omega_1 r_1^3 - \omega_2 \cos \gamma r_2^3) - \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) \right].$$

Полученное выражение соответствует решению задачи об установившемся движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами [34] при допущениях, принятых нами для решения задачи о нестационарном течении.

Определим силы вязкости, приложенные к поверхностям сфер и обусловленные скоростью v_a . Для этого применим формулы

$$\begin{aligned} (p_{r_1})_{r_1} &= \mu_1 \left(\frac{\partial v_a}{\partial r} - \frac{v_a}{r} \right)_{r_1}; \\ (p_{r_2})_{r_2} &= \mu_1 \left(\frac{\partial v_a}{\partial r} - \frac{v_a}{r} \right)_{r_2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где μ_1 — динамический коэффициент вязкости.

Подставляя выражение (2.31) в соотношения (2.32), получаем:

$$\begin{aligned} (p_{r_1})_{r_1} &= \mu_1 \omega_1 \sin \beta \left[\frac{3r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_1^2) \times \right. \\ &\quad \times \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \mu_1 \omega_2 \cos \gamma \sin \beta \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2} r_2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$+ r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right]^{-1}; \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} (\rho_{r_1})_{r_1} = & \mu_1 \omega_1 \sin \beta \left[\frac{3r_1^2}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_1^2}{r_2^3} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \\ & \times \left. \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \\ & + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right]^{-1} - \\ & - \mu_1 \omega_2 \cos \gamma \sin \beta \left[\frac{3r_1^2}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\ & \times \left. \left[G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) J_{3/2}(\lambda_k) - J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2}(\lambda_k) \right] \times \right. \\ & \times \left. \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right]^{-1} \right\} \right]. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Для тангенциальной составляющей v_τ скорости частиц жидкости имеем уравнение

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial t} = \nu_1 \left(\Delta v_\tau - \frac{v_\tau}{r^2 \sin^2 \beta'} \right)$$

с граничными и начальными условиями

$$v_\tau = 0 \text{ при } r = r_1;$$

$$v_\tau = \omega_2 r_2 \sin \gamma \sin \beta' \text{ при } r = r_2; \quad (2.35)$$

$$v_\tau = 0 \text{ при } t = 0.$$

Опустив промежуточные выкладки, аналогичные примененным ранее, запишем выражение для v_τ :

$$v_\tau = \omega_2 r \sin \gamma \sin \beta' \left[\frac{r_2^3}{r^3} \frac{r_1^3 - r^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_2}{r} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left[J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Силы вязкости на поверхности сфер для этого движения жидкости определяются по формулам (2.32), где вместо v_x следует подставить v_x^* . Тогда выражения для сил вязкости, действующих на сферы, согласно решению (2.36) и условию (2.35), примут вид

$$\begin{aligned} (p_{r_2})_{r_1} = & -\mu_1 \omega_2 \sin \gamma \sin \beta' \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_n^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_n} \times \right. \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_n) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) - J_{3/2}(\lambda_n) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) \right] + \right. \\ & \left. \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_n) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) - J'_{3/2}(\lambda_n) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) \right] \right\}^{-1} \right]; \quad (2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p_{r_2})_{r_2} = & -\mu_1 \omega_2 \sin \gamma \sin \beta' \left[\frac{3r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_n^2 t / r_2^2) \times \right. \\ & \times \left[G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) J'_{3/2}(\lambda_n) - G'_{3/2}(\lambda_n) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) \right] \times \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_n) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) - J_{3/2}(\lambda_n) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) \right] + \right. \\ & \left. \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_n) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) - J'_{3/2}(\lambda_n) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) \right] \right\}^{-1} \right]. \quad (2.38) \end{aligned}$$

Разлагая компоненту скорости v_x^* , определяемую выражением (2.36), на составляющие по направлениям v_z и v_r в системе координат r, α, β , получим

$$\begin{aligned} v_x^{(1)} = & \omega_2 r \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha \left[\frac{r_2^3}{r^3} \frac{r_1^3 - r^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_2}{r} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_n^2 t / r_2^2) \times \right. \\ & \times \frac{1}{\lambda_n} \left[J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) G_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_n \right) - J_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_n \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_n \right) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\
& \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}; \\
v_z^{(1)} = & -\omega_2 r \sin \gamma \sin \alpha \left[\frac{r_2^3}{r^3} \frac{r_1^3 - r^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\
& \times \frac{1}{\lambda_k} \left[J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\
& \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\
& \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Учитывая последние соотношения, а также соотношения (2.31), получаем поле скоростей в астеносферном слое:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_z = & v_z + v_z^{(1)} = \omega_1 r \sin \beta \left[\frac{r_2^3}{r^3} \frac{r^3 - r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\
& \times \frac{1}{\lambda_k} \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\
& \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\
& \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \left. + \right. \\
& \left. + \omega_2 r (\cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha) \left[\frac{r_2^3}{r^3} \frac{r_1^3 - r^3}{r_1^3 - r_2^3} + \right. \right. \\
& \left. + 2r_2 \left(\frac{r_1}{r} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \left[G_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - J_{3/2} \left(\frac{r}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \cdot \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-J_{3/2}(\lambda_k)G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right)\left]+r_2\left[G'_{3/2}(\lambda_k)J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right)-\right. \\ \left.-J'_{3/2}(\lambda_k)G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right)\right]^{-1}]; \quad (2.39)$$

$$\bar{v}_r = v_3^{(1)} = -\omega_2 r \sin \gamma \sin \beta \left[\frac{r_2^3}{r_0^3} \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \times \right. \\ \times (-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \left[J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right)G_{3/2}\left(\frac{r}{r_0}\lambda_k\right) - J_{3/2}\left(\frac{r}{r_0}\lambda_k\right) \times \right. \\ \times G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) \left. \right] \cdot \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k)J'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) - J_{3/2}(\lambda_k)G'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) \right] + \right. \\ \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k)J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) - J'_{3/2}(\lambda_k)G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) \right] \right]^{-1} \left. \right]; \\ \bar{v}_r = 0.$$

Используя соотношения для сил вязкости на поверхности сфер, найдем выражения для главных моментов, приложенных к литосфере и мантии.

Умножая левые и правые части равенств (2.33), (2.34) соответственно на элементы поверхности сфер $r_1^2 \sin \beta d\alpha d\beta$, $r_2^2 \sin \beta d\alpha d\beta$ в их расстояния $r_1 \sin \beta$, $r_2 \sin \beta$ до оси OZ и интегрируя по всей поверхности сфер, получаем моменты:

$$L_Z^{(r_1)} = \frac{8}{3} \pi \nu_1 \omega_1 r_1^5 \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\ \times \left[J_{3/2}(\lambda_k)G'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) - J'_{3/2}(\lambda_k)G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) \right] \times \\ \times \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k)J'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) - J_{3/2}(\lambda_k)G'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) \right] + \right. \\ \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k)J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) - J'_{3/2}(\lambda_k)G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_0}\lambda_k\right) \right] \right]^{-1} \left. \right] - \\ - \frac{8}{3} \pi \nu_1 \omega_2 r_1^3 \cos \gamma \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right.$$

$$\times \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1}; \quad (2.40)$$

$$L_X^{(2)} = -\frac{8}{3} \pi \nu_1 \omega_1 r_2^3 \left[\frac{3r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_1^{5/2}}{r_2^{5/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \\ \times \left. \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right] - \\ - \frac{8}{3} \pi \nu_1 \omega_2 r_2^3 \cos \gamma \left[\frac{3r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 r_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\ \times \left. \left[G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) J_{3/2}(\lambda_k) - J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2}(\lambda_k) \right] \times \right. \\ \times \left. \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right].$$

Поступая аналогично для сил (2.37), (2.38), имеем следующие выражения:

$$L_X^{(1)} = -\frac{8}{3} \pi \nu_1 r_1^3 \omega_2 \sin \gamma \left[\frac{3r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{5/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_1^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \\ \times \left. \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1}; \quad (2.41)$$

$$L_X^{(2)} = -\frac{8}{3} \pi \nu_1 r_2^3 \sin \gamma \left[\frac{3r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 r_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left[G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) J_{3/2}(\lambda_k) - J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) G_{3/2}(\lambda_k) \right] \times \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Суммируя (2.40) и (2.41), определяем главные моменты вязкости, примененные к литосфере и мантии соответственно:

$$\begin{aligned} \vec{I}(r_1) = & 8\pi r_1 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) + \frac{16}{3} \pi r_1 \vec{m}_1 r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \\ & \times r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \times \\ & \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} - \\ & - \frac{16}{3} \pi r_1 r_1^3 \vec{m}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \\ & \times r_1 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{3/2} \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}; \quad (2.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{I}(r_2) = & 8\pi r_2 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) + \frac{16}{3} \pi r_2 \vec{m}_2 r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \\ & \times r_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3/2} \lambda_k^{-1} \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} - \frac{16}{3} \pi r_2 \vec{m}_2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times r_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения для функций Бесселя [14]

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -\frac{3}{2} \frac{J_{5/2}(x)}{x} + J_{1/2}(x); \\ G_{3/2}(x) &= -\frac{3}{2} \frac{G_{5/2}(x)}{x} + G_{1/2}(x); \\ G_{3/2}(x) &= -\frac{\pi}{2} [J_{-3/2}(x) - i J_{3/2}(x)]; \\ G_{1/2}(x) &= \frac{\pi}{2} [J_{-1/2}(x) + i J_{1/2}(x)]; \\ J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \\ J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x; \\ J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right); \\ J_{-3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x} \right) \end{aligned}$$

в формулы (2.42), получаем следующие выражения для главных моментов:

$$\begin{aligned} \vec{L}(t, \vec{\omega}) &= 8\pi i_1 \frac{r_1^3}{r_1^3 - 1} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) + \frac{16}{3} \pi i_1 r_1^3 \vec{\omega}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \cdot N_{1k} - \\ & - \frac{16}{3} \pi i_1 r_1^3 \vec{\omega}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \cdot N_{2k}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\vec{L}(r_1) = 8\pi\mu_1 \frac{r_1^3}{e_1^2 - 1} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) + \frac{16}{3} \pi e_1 r_2^3 \vec{\omega}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \cdot N_{3k} - \\ - \frac{16}{3} \pi \mu_1 r_2^3 \vec{\omega}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \cdot N_{4k}, \quad (2.44)$$

где

$$e_1 = \frac{r_1}{r_2};$$

$$N_{1k} = \frac{e_1^2 (\lambda_k \cos[(e_1 - 1)\lambda_k] + \sin[(e_1 - 1)\lambda_k])}{e_1 \lambda_k (e_1 - 1) \cos[(e_1 - 1)\lambda_k] + (e_1^2 + 1) \sin[(e_1 - 1)\lambda_k]};$$

$$N_{2k} = \frac{\lambda_k}{e_1 \lambda_k (e_1 - 1) \cos[(e_1 - 1)\lambda_k] + (e_1^2 + 1) \sin[(e_1 - 1)\lambda_k]}; \quad (2.45)$$

$$N_{3k} = \frac{e_1^3 \lambda_k}{e_1 \lambda_k (e_1 - 1) \cos[(e_1 - 1)\lambda_k] + (e_1^2 + 1) \sin[(e_1 - 1)\lambda_k]};$$

$$N_{4k} = \frac{e_1 \lambda_k \cos[(e_1 - 1)\lambda_k] - \sin[(e_1 - 1)\lambda_k]}{e_1 \lambda_k (e_1 - 1) \cos[(e_1 - 1)\lambda_k] + (e_1^2 + 1) \sin[(e_1 - 1)\lambda_k]}.$$

2.4. Магнитогидродинамическое течение жидкого слоя ядра

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости с проводимостью σ и вязкостью μ_2 в слое между вращающимися с угловыми скоростями $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ магнитной ($r_1 \leq r \leq r_2$) и ядром ($0 \leq r \leq r_1$) при наличии магнитного поля с индукцией \vec{B} , направленного по оси вращения (см. рис. 3). Пусть ядро характеризуется постоянной проводимостью σ_2 , проводимость части магнитной ($r_1 \leq r \leq r_2$), непосредственно примыкающей жидкости, равна σ_1 , а остальная часть магнитной непроводящая.

Подобная задача решена в работах [12, 35]. Однако в них рассмотрено движение безграничной вязкой несжимаемой жидкости около равномерно вращающегося шара при наличии магнитного поля, направленного по оси вращения.

Система уравнений, описывающих изотермическое движение электропроводящей среды в присутствии магнитного поля, состоит из уравнений Навье—Стокса, содержащих члены электромагнитно-

го происхождения, уравнений Максвелла и закона Ома для движущихся сред. Выпишем их последовательно:
уравнение Навье—Стокса с членом, учитывающим лоренцеву силу, —

$$\rho_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = - \frac{1}{\rho_2} \text{ grad } p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho_2} \vec{j} \times \vec{B},$$

уравнения Максвелла —

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{j},$$

закон Ома для движущихся сред —

$$\vec{j} = \rho_1 \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$$

Магнитное поле Земли можно считать полем стационарным, так как изменение его во времени составляет малую часть по отношению ко всему полю. При рассмотрении многих явлений земного магнетизма эти изменения мало сказываются на величине индуцированного электрического поля, в связи с этим в большинстве случаев пользуются законами стационарного поля, которые являются частными случаями общих законов электромагнитного поля, выражаемых уравнениями Максвелла.

Считая заданной индукцию магнитного поля, пренебрежем обратным влиянием течения на приложенное магнитное поле. В безиндукционном приближении можно пренебречь величиной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Тогда $\text{rot } \vec{E} = 0$, т. е. электрическое поле потенциально. В этом случае уравнения движения вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитном поле и уравнения для электрического поля в среде примут вид [35]:

$$\rho_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{\vec{F}}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \text{ grad } p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{\rho_2} \text{ grad } \text{div } \vec{v}, \quad (2.46)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0; \quad \vec{E} = - \text{grad } U; \quad \text{div } \vec{j} = 0, \quad (2.47)$$

где \vec{F} — плотность внешней силы, приложенной к жидкости; p — давление; ν — кинематическая вязкость; ρ_2 — плотность; \vec{v} — ско-

рость жидкости; \vec{E} — напряженность электрического поля; U — электрический потенциал; \vec{j} — плотность тока.

Плотность тока определяется соотношением

$$\vec{j} = \sigma \left(-\text{grad } U + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (2.48)$$

где σ — проводимость; c — скорость света; \vec{B} — индукция магнитного поля.

Рассмотрим случай основного течения, т. е. когда скорость частиц жидкости имеет одну компоненту v_z . Для скорости частиц мантии и ядра будем иметь

$$\begin{aligned} v_z^{(1)} &= \omega_2 r \sin \beta; \\ v_z^{(2)} &= \omega_3 r \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.49)$$

С учетом последнего и поскольку магнитное поле направлено вдоль оси вращения, из (2.49) получим следующие компоненты плотности тока:

внутри мантии —

$$\begin{aligned} j_r^{(1)} &= \sigma_1 \left(-\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\sin^2 \beta \cdot \omega_2 r B}{c} \right); \\ j_\beta^{(1)} &= \sigma_1 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \omega_2 r B}{c} \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

в жидком слое ядра —

$$\begin{aligned} j_r &= \sigma \left(-\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\sin \beta \cdot v_z B}{c} \right); \\ j_\beta &= \sigma \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta \cdot v_z B}{c} \right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

внутри ядра —

$$\begin{aligned} j_r^{(2)} &= \sigma_2 \left(-\frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\sin^2 \beta \cdot \omega_3 r B}{c} \right); \\ j_\beta^{(2)} &= \sigma_2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \omega_3 r B}{c} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Подставляя выражения (2.50) — (2.52) в (2.47), получаем сле-

дующие дифференциальные уравнения для электрического потенциала:

в мантии —

$$\Delta U_1 - \frac{2\omega_2 B}{c} = 0, \quad (2.53)$$

в жидком слое ядра —

$$\Delta U - \frac{B}{c} \left(\sin \beta \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\cos \beta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \beta} + \frac{v_z}{r \cdot \sin \beta} \right) = 0, \quad (2.54)$$

в ядре —

$$\Delta U_2 - \frac{2\omega_1 B}{c} = 0. \quad (2.55)$$

Плотность внешней силы, приложенной к жидкости, составляет

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B},$$

а компонента F_z определяется как

$$F_z = -\frac{B}{c} (j_r \sin \beta + j_\beta \cos \beta). \quad (2.56)$$

Тогда с учетом (2.51) уравнение (2.46) для тангенциальной составляющей вектора скорости жидкости примет вид

$$\Delta v_z - \frac{v_z}{r^2 \sin^2 \beta} + \frac{2B}{\mu_1 c} \left(\sin \beta \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{\cos \beta}{r} \frac{\partial v'}{\partial \beta} - \frac{v_z B}{c} \right) = 0, \quad (2.57)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Граничные условия задачи таковы, что на внутренней поверхности мантии и поверхности ядра скорость жидкости равна скоростям мантии и ядра соответственно:

$$r = r_4, \quad v_z = \omega_2 r_4 \sin \beta, \quad (2.58)$$

$$r = r_5, \quad v_z = \omega_1 r_5 \sin \beta.$$

На поверхности ядра и на внутренней поверхности мантии непрерывны электрический потенциал и нормальные компоненты плотности тока:

$$r = r_5; \quad U = U_2; \quad (r_1 - r) \frac{\sin^2 \beta \omega_1 r_5 B}{c} = r_1 \frac{\partial v_z}{\partial r} = r_1 \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (2.59)$$

$$r=r_4; U=U_1; (r_1-\sigma) \frac{\sin^2 \beta \cdot \omega_2 \cdot r_4 \cdot B}{c} \rightarrow \omega_1 \frac{dr_1}{dr} \rightarrow \omega \frac{dr}{dr}, \quad (2.60)$$

$$r=r_5; \frac{dr_1}{dr} = \frac{\sin^2 \beta \cdot \omega_2 \cdot B \cdot r_5}{c}, \quad (2.61)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи имеем систему дифференциальных уравнений (2.53), (2.54), (2.55), (2.57) с граничными условиями (2.58) — (2.61). Ее решение построим методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем поле скоростей жидкости в сферическом слое при отсутствии магнитного поля [34]:

$$v_{\theta} = \frac{\sin \beta}{r^2 (r_4^3 - r_5^3)} [\omega_2 r_4^2 (r^3 - r_5^3) - \omega_1 r_5^2 (r^3 - r_4^2)]. \quad (2.62)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (2.54) приводит к следующему уравнению для электрического потенциала:

$$\Delta U = \frac{2B(\omega_2 r_4^3 - \omega_1 r_5^3)}{c(r_4^3 - r_5^3)} - \frac{B r_1^2 r_4^2 (3 \cos^2 \beta - 1)}{c(r_4^3 - r_5^3)^2} (\omega_2 - \omega_1). \quad (2.63)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (2.53), (2.55) и (2.63) можно представить в виде

$$U_2 = C_1 r^2 (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{c} \cdot r^2, \quad (2.64)$$

$$U_1 = \left(C_2 r^2 + \frac{C_3}{r} \right) (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{c} \cdot r^2, \quad (2.65)$$

$$U = \left(C_4 r^2 + \frac{C_5}{r} \right) (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{2B(\omega_2 r_4^3 - \omega_1 r_5^3)}{3c(r_4^3 - r_5^3)} \cdot r^2 + \frac{B r_1^2 r_4^2 (\omega_2 - \omega_1)}{6c(r_4^3 - r_5^3) r} \cdot (3 \cos^2 \beta - 1), \quad (2.66)$$

Постоянные C_i ($i=1, 2, \dots, 5$) определяются граничными условиями (2.59) — (2.61):

$$C_1 = \frac{\omega_2 (\Lambda_1 + \sin^2 \beta \Lambda_2) - \omega_1 (r_1^2 + \Lambda_4 \cdot \sin^2 \beta)}{3 \cos^2 \beta - 1} - \omega_2 \Lambda_5 - \omega_1 \Lambda_6;$$

$$C_2 = \frac{\omega_1 (-\Lambda_1 + \Lambda_2 \sin^2 \beta) + \omega_2 (\Lambda_8 + \Lambda_{10} \sin^2 \beta)}{3 \cos^2 \beta - 1} - \omega_2 \Lambda_{11} + \omega_1 \Lambda_{12};$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{\omega_2(\Lambda_{13} - \Lambda_{14} \sin^2 \beta) - \omega_3(\Lambda_{16} + \Lambda_{19} \sin^2 \beta)}{3 \cos^2 \beta - 1} + \omega_2 \Lambda_{17} - \omega_3 \Lambda_{18}; \\
 C_4 &= \frac{\omega_2(\Lambda_{13} - \Lambda_{14} \sin^2 \beta) + \omega_3(\Lambda_{21} + \Lambda_{22} \sin^2 \beta)}{3 \cos^2 \beta - 1} - \omega_2 \Lambda_{23} + \omega_3 \Lambda_{24}; \quad (2.67) \\
 C_5 &= \frac{\omega_2(\Lambda_{25} + \Lambda_{26} \sin^2 \beta) - \omega_3(\Lambda_{28} - \Lambda_{29} \sin^2 \beta)}{3 \cos^2 \beta - 1} - \omega_2 \Lambda_{29} - \omega_3 \Lambda_{20}.
 \end{aligned}$$

Где

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 &= -\frac{2Br_4^3 \cdot r_5^3}{3cx_{11}(r_4^3 - r_5^3)} - \frac{x_{15}}{x_{11}} \Lambda_{13} - \frac{x_{14}}{x_{11}} \Lambda_{23}; \\
 \Lambda_2 &= \frac{x_{16}}{x_{11}} \Lambda_{20} - \frac{x_{10}}{x_{11}} \Lambda_{25}; \\
 \Lambda_3 &= \frac{Br_8^5}{3cx_{11}(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{Br_8^2}{3cx_{11}} + \frac{x_{15}}{x_{11}} \Lambda_{21} - \frac{x_{16}}{x_{11}} \Lambda_{22}; \\
 \Lambda_4 &= \frac{x_{16}}{x_{11}} \Lambda_{22} + \frac{x_{10}}{x_{11}} \Lambda_{25}; \\
 \Lambda_5 &= \frac{Br_4^3 \cdot r_8^3}{6cx_{11}(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{x_{15}}{x_{11}} \Lambda_{23} - \frac{x_{10}}{x_{11}} \Lambda_{24}; \\
 \Lambda_6 &= \frac{Br_4^3 \cdot r_5^3}{6cx_{11}(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{x_{15}}{x_{11}} \Lambda_{24} - \frac{x_{10}}{x_{11}} \Lambda_{23}; \\
 \Lambda_7 &= \frac{2Br_8}{3 \cdot r_{53}} + \frac{x_{54}}{x_{53}} \Lambda_{12}; \quad \Lambda_8 = \frac{Br_8}{cx_{53}} - \frac{x_{54}}{r_{53}} \Lambda_{14}; \\
 \Lambda_9 &= \frac{x_{54}}{x_{53}} \Lambda_{15}; \quad \Lambda_{10} = \frac{x_{51}}{r_{53}} \Lambda_{16}; \quad \Lambda_{11} = \frac{x_{51}}{r_{53}} \Lambda_{17}; \\
 \Lambda_{12} &= \frac{x_{54}}{x_{53}} \Lambda_{18}; \quad \Lambda_{13} = \frac{Br_4^5 \cdot r_{53}}{3cs_2(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{2Br_{53} \cdot r_2}{3cs_2} - \\
 &\quad - \frac{1}{3} \frac{Br_4^2 \cdot r_{53}}{cs_2} - \frac{r_{55} \cdot r_{56}}{s_2} \Lambda_{19} - \frac{r_{51} \cdot x_{50}}{s_2} \Lambda_{21}; \\
 \Lambda_{14} &= \frac{Br_2 r_{53}}{cs_2} - \frac{r_{55} \cdot r_{56}}{s_2} \cdot \Lambda_{20} + \frac{x_{54} \cdot r_{50}}{s_2} \Lambda_{26}; \\
 \Lambda_{15} &= \frac{Br_2^3 \cdot r_{53}^2}{3cs_2(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{r_{51} \cdot x_{54}}{s_2} \Lambda_{21} - \frac{x_{55} \cdot r_{53}}{s_2} \Lambda_{27};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{16} &= \frac{\gamma_{25} \cdot x_{54}}{s_2} \Lambda_{23} + \frac{x_{36} \cdot x_{54}}{s_2} \cdot \Lambda_{28}; \\
\Lambda_{17} &= \frac{Br_4^2 \cdot r_5^2 x_{53}}{6cs_2(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{x_{25} \cdot x_{53}}{s_2} \Lambda_{23} - \frac{x_{25} \cdot \gamma_{23}}{s_2} \cdot \Lambda_{28}; \\
\Lambda_{18} &= \frac{Br_4^2 \cdot r_5^2 x_{53}}{6cs_2(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{x_{25} \cdot x_{53}}{s_2} \Lambda_{24} - \frac{x_{25} \cdot x_{53}}{s_2} \cdot \Lambda_{20}; \\
\Lambda_{19} &= \frac{2\gamma_{25} r_5^2 x_{11}}{3cs_1(r_4^3 - r_5^3)} - \frac{Br_4^2 \cdot r_5^2 x_{21}}{3cs_1(r_4^3 - r_5^3)} - \frac{s_2}{s_1} \cdot \Lambda_{26}; \\
\Lambda_{20} &= \frac{s_2}{s_1} \Lambda_{26}; \quad \Lambda_{21} = \frac{s_2}{s_1} \Lambda_{27} + \frac{Br_5^2 x_{21}}{3cs_1} + \frac{Br_5^2 x_{21}}{3cs_1(r_4^3 - r_5^3)} - \\
&\quad - \frac{2\gamma_{25} Br_5^2 x_{11}}{3cs_1(r_4^3 - r_5^3)} - \frac{2\gamma_{25} Br_5^2 x_{11}}{3cs_1}; \\
\Lambda_{22} &= \frac{(s_2 - \gamma_1) r_5^2 x_{11}}{cs_1} - \frac{s_2}{s_1} \cdot \Lambda_{28}; \\
\Lambda_{23} &= \frac{\gamma_{25} Br_4^2 r_5^2 x_{11}}{6c(r_4^3 - r_5^3) \cdot s_1} + \frac{Br_4^2 \cdot r_5^2 x_{21}}{6cs_1(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{s_2}{s_1} \cdot \Lambda_{20}; \\
\Lambda_{24} &= \frac{\gamma_{25} Br_4^2 r_5^2 x_{21}}{6c(r_4^3 - r_5^3) \cdot s_1} + \frac{Br_4^2 \cdot r_5^2 x_{21}}{6cs_1(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{s_2}{s_1} \cdot \Lambda_{20}; \\
\Lambda_{25} &= \frac{Br_4^2 r_5^2 \cdot s_0 + 2\gamma_{25} Br_4^2 r_5 \cdot s_7 - Br_4^2 \cdot s_8 + 2\gamma_{25} Br_4^2 \cdot s_9}{3c(r_4^3 - r_5^3)} + \\
&\quad + \frac{Br_4^2 \cdot s_4 - 2\gamma_{25} Br_4 \cdot s_0 - 2Br_4 \cdot \gamma_0}{3c}; \quad \Lambda_{26} = \frac{(s_1 - \gamma_1) \cdot r_4 Br_5 + Br_5 \cdot r_5}{c}; \\
\Lambda_{27} &= \frac{Br_5^2 \cdot s_0 + 2\gamma_{25} Br_5^2 \cdot s_7 - Br_5^2 \cdot r_4^2 \cdot s_0 + 2\gamma_{25} Br_5^2 \cdot s_9}{3c(r_4^3 - r_5^3)} + \frac{Br_5^2 \cdot s_0 + 2\gamma_{25} Br_5 \cdot s_7}{3c}; \\
\Lambda_{28} &= \frac{(s_2 - \gamma_1) r_5 \cdot Br_5}{c}; \quad \Lambda_{29} = \frac{Br_4^2 r_5^2 \cdot s_0 - \gamma_{25} Br_4^2 r_5 \cdot s_2 - Br_4^2 r_5^2 \cdot s_4}{6c(r_4^3 - r_5^3)} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{2Br_4 r_5^2 \cdot S_8}{6c(r_4^3 - r_5^3)}; \Lambda_{30} = \frac{Br_4^2 r_5^2 \cdot S_4 - Br_4^2 r_4^2 \cdot S_7 - Br_4^2 r_5^2 \cdot S_8 - cBr_4 r_5^2 \cdot S_9}{6c(r_4^3 - r_5^3)};$$

$$S_1 = x_{26} x_{11} - x_{15} \cdot x_{21}; S_2 = x_{26} \cdot x_{11} - x_{16} \cdot x_{21};$$

$$S_3 = x_{51} \cdot x_{24} - x_{33} \cdot x_{54}; S_4 = x_{44} \cdot x_{53} - x_{41} \cdot x_{54};$$

$$S_5 = x_{53}(x_{45} \cdot S_1 - x_{45} \cdot S_2)S_3 - (x_{33} \cdot S_1 - x_{33} \cdot S_2) \cdot S_4;$$

$$S_6 = (x_{45} \cdot x_{53} \cdot x_{21} \cdot S_3 - x_{33} \cdot x_{53} \cdot x_{21} \cdot S_4) \cdot S_5^{-1};$$

$$S_7 = (x_{15} x_{53} \cdot x_{11} \cdot S_4 - x_{45} \cdot x_{53} \cdot x_{11} \cdot S_8) \cdot S_5^{-1};$$

$$S_8 = x_{53} S_1 \cdot S_4 \cdot S_5^{-1}; S_9 = x_{33} \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5^{-1};$$

$$S_{10} = (x_{33} S_1 S_4 - x_{45} S_1 S_2) \cdot S_5^{-1}; x_{11} = r_5^2;$$

$$x_{15} = -r_5^2; x_{14} = -r_5^{-2}; x_{21} = 2\sigma_2 r_5;$$

$$x_{26} = -2\sigma_1 r_5; x_{23} = 3\sigma_1 r_5^{-1}; x_{33} = r_4^2; x_{24} = r_4^{-2};$$

$$x_{35} = -r_4^2; x_{36} = -r_4^{-2}; x_{43} = 2\sigma_1 r_4; x_{44} = -3\sigma_1 r_4^{-1};$$

$$x_{45} = -2\sigma_1 r_4; x_{46} = 3\sigma_1 r_4^{-1}; x_{53} = 2r_5; x_{54} = -3r_5^{-1}.$$

Далее подставим полученный потенциал (2.66) с учетом выражений (2.67) в уравнение (2.57). Этим определяется дифференциальное уравнение для скорости

$$\Delta u = \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \beta} + \frac{\sigma_2^2}{\mu_2 c^2} \right) u = \Lambda_6 r \sin \beta + \Lambda_7 \frac{\sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{r^4} +$$

$$+ \frac{9}{5} \Lambda_8 \frac{\sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{r^2} + \frac{4}{5} \Lambda_9 \frac{\sin \beta}{r^4} + \Lambda_{10} \frac{\sin \beta}{r^4}. \quad (2.69)$$

где

$$\Lambda_6 = -\frac{\sigma B}{\mu_2 c} \left[2\omega_2 (\Lambda_{13} - \Lambda_{20} + \Lambda_{23}) + 2\omega_1 (\Lambda_{21} + \Lambda_{22} - \Lambda_{24}) + \right.$$

$$\left. + \frac{2B(\omega_2 r_4^3 - \omega_1 r_5^3)}{3c(r_4^3 - r_5^3)} \right]; \Lambda_7 = -\frac{\sigma B}{\mu_2 c} [\omega_2 \Lambda_{16} + \omega_1 \Lambda_{23} -$$

$$- 3\omega_2 \Lambda_{23} + 3\omega_1 \Lambda_{30}]; \Lambda_8 = \frac{\sigma B}{6\mu_2 c^2} r_4^3 r_5^3 (\omega_2 - \omega_1) \times (r_4^3 - r_5^3)^{-1};$$

$$A_1 = \frac{v\beta}{\mu_0^2} [\omega_2(2\Lambda_{26} + 3\Lambda_{25}) + \omega_3(2\Lambda_{25} - 3\Lambda_{27})]. \quad (2.70)$$

Решение уравнения (2.69) будет первым приближением для значения истинной скорости.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\Delta v_1 - \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \beta} + k \right) v_1 = 0, \quad (2.71)$$

где

$$k = \frac{v^2 \beta^2}{\mu_0^2 c^2}.$$

Решение дифференциального уравнения (2.71) представим в виде

$$v_1 = \tau(r) \cdot \sin \beta. \quad (2.72)$$

Тогда для $\tau(r)$ получится обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} - v \left(\frac{2}{r^2} + k \right) = 0. \quad (2.73)$$

С помощью подстановки

$$v = \frac{y}{r} \quad (2.74)$$

уравнение (2.73) приводится к уравнению Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{r} y' - y \left(k + \frac{9}{4r^2} \right) = 0. \quad (2.75)$$

На основании решения уравнения (2.75) с учетом соотношений (2.74), (2.72) запишем общее решение уравнения (2.71):

$$v_1 = \frac{\sin \beta}{r} [C_6 I_{3/2}(r\sqrt{k}) + C_7 K_{3/2}(r\sqrt{k})]. \quad (2.76)$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.69) определено в форме (2.72) и с помощью подстановки (2.74):

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = & \frac{A_1 \sin \beta}{\sqrt{r}} \left[K_{3/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{I_{3/2}(r\sqrt{k}) \cdot \sqrt{r} dr}{W} - I_{3/2}(r\sqrt{k}) \times \right. \\ & \left. \times \int \frac{K_{3/2}(r\sqrt{k}) \cdot \sqrt{r} dr}{W} \right] + \frac{A_2 \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{\sqrt{r}} \left[K_{7/2}(r\sqrt{k}) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{I_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} - I_{7/2}(r\sqrt{k}) \right] \frac{K_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} \Big] + \\
& + \frac{9A_6 \sin 3(5 \cos^2 \beta - 1)}{5Vr} \left[K_{7/2}(r\sqrt{k}) \right] \frac{I_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} - \\
& - I_{7/2}(r\sqrt{k}) \Big] \frac{K_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} \Big] + \frac{4A_6 \sin \beta}{5Vr} \left[K_{3/2}(r\sqrt{k}) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{I_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W} - I_{3/2}(r\sqrt{k}) \right] \frac{K_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W} \right] + \frac{A_6 \sin \beta}{Vr} \times \\
& \times \left[K_{3/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{I_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W} - I_{3/2}(r\sqrt{k}) \frac{K_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W} \right], \quad (2.77)
\end{aligned}$$

где

$$W = I_{3/2}(r\sqrt{k})K_{3/2}(r\sqrt{k})' - I_{3/2}(r\sqrt{k})'K_{3/2}(r\sqrt{k});$$

$$W_2 = I_{7/2}(r\sqrt{k})K_{7/2}(r\sqrt{k})' - I_{7/2}(r\sqrt{k})'K_{7/2}(r\sqrt{k}).$$

Тогда на основании решений (2.76), (2.77) общее решение уравнения (2.69) примет вид

$$\begin{aligned}
v_2 = & \frac{\sin \beta}{Vr} [C_6 I_{3/2}(r\sqrt{k}) + C_7 K_{3/2}(r\sqrt{k})] + \frac{A_6 \sin \beta}{Vr} \times \\
& \times \left[K_{3/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{I_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{W} - I_{3/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{K_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{W} \right] + \\
& + \frac{A_7 \sin 3(5 \cos^2 \beta - 1)}{Vr} \left[K_{7/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{I_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} - I_{7/2}(r\sqrt{k}) \times \right. \\
& \times \left. \int \frac{K_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} \right] + \frac{9A_6 \sin 3(5 \cos^2 \beta - 1)}{5Vr} \left[K_{7/2}(r\sqrt{k}) \times \right. \\
& \times \left. \int \frac{I_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} - I_{7/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{K_{7/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W_2} \right] + \\
& + \frac{4}{5} \frac{A_6 \sin \beta}{Vr} \left[K_{3/2}(r\sqrt{k}) \times \int \frac{I_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W} - I_{3/2}(r\sqrt{k}) \times \right. \\
& \times \left. \int \frac{K_{3/2}(r\sqrt{k})\sqrt{r}dr}{r^4 W} \right] + \frac{A_6 \sin \beta}{Vr} \left[K_{3/2}(r\sqrt{k}) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \int \left[\frac{I_{3/2}(r\sqrt{k})}{r^2 W} - I_{3/2}(r\sqrt{k}) \int \frac{K_{3/2}(r\sqrt{k})}{r^2 W} dr \right]. \quad (2.78)$$

Постоянные C_6 и C_7 определяются граничными условиями (2.58). После интегрирования и определения постоянных C_6 и C_7 решение (2.76) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} \{ C_6 I_{3/2}(r\sqrt{k}) - C_7 K_{3/2}(r\sqrt{k}) \} - \frac{A_2 \sin^2 \beta}{\sqrt{k}} \Phi_1(r\sqrt{k}) - \\ & - \frac{A_1 \sin^2 \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{\sqrt{k} r^2} \Phi_2(r\sqrt{k}) - \frac{9 A_2 \sin^2 \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{5 a r^2} \Phi_3(r\sqrt{k}) - \\ & - \frac{4}{3} \frac{A_3 \sin \beta}{\sqrt{r}} \Phi_4(r\sqrt{k}) - \frac{A_4 \sin \beta}{\sqrt{r}} \Phi_5(r\sqrt{k}), \end{aligned} \quad (2.79)$$

где

$$\Phi_1(r\sqrt{k}) = I_{1/2}(r\sqrt{k}) K_{5/2}(r\sqrt{k}) + K_{3/2}(r\sqrt{k}) I_{5/2}(r\sqrt{k});$$

$$\Phi_2(r\sqrt{k}) = I_{7/2}(r\sqrt{k}) K_{5/2}(r\sqrt{k}) + K_{7/2}(r\sqrt{k}) I_{5/2}(r\sqrt{k});$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(r\sqrt{k}) = & r\sqrt{k} \cdot [I_{7/2}(r\sqrt{k}) \cdot K_{5/2}(r\sqrt{k}) + K_{7/2}(r\sqrt{k}) \cdot I_{5/2}(r\sqrt{k})] - \\ & - 2 [I_{7/2}(r\sqrt{k}) K_{3/2}(r\sqrt{k}) + K_{7/2}(r\sqrt{k}) \cdot I_{3/2}(r\sqrt{k})]; \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(r\sqrt{k}) = & -(rk)^{-1/2} \cdot [I_{3/2}(r\sqrt{k}) \cdot K_{1/2}(r\sqrt{k}) - \\ & - K_{3/2}(r\sqrt{k}) \cdot I_{1/2}(r\sqrt{k})]; \end{aligned}$$

$$\Phi_5(r\sqrt{k}) = -\frac{1}{3} (r\sqrt{k})^{-1/2} (r\sqrt{k})^{3/2} \cdot [I_{3/2}(r\sqrt{k}) K_{1/2}(r\sqrt{k}) -$$

$$+ K_{3/2}(r\sqrt{k}) \cdot I_{1/2}(r\sqrt{k})] - \frac{1}{3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} (r\sqrt{k})^{3/2} \cdot I_{3/2}(r\sqrt{k}) \cdot \left[\ln |r\sqrt{k}| + \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (r\sqrt{k})^{2n}}{a \cdot n!} \right] - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (r\sqrt{k})^{3/2} K_{3/2}(r\sqrt{k}) \times$$

$$\times \left[\ln |r\sqrt{k}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r\sqrt{k})^{2n}}{2n \cdot (2n)!} \right];$$

$$\begin{aligned} C_6 = & [MK_{3/2}(r_3\sqrt{k}) - NK_{3/2}(r_4\sqrt{k})] \cdot [I_{3/2}(r_4\sqrt{k}) - \\ & - K_{3/2}(r_3\sqrt{k}) - I_{3/2}(r_3\sqrt{k}) \cdot K_{3/2}(r_4\sqrt{k})]^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_7 &= [M_{3/2}(r_5 | \bar{k}) - N_{3/2}(r_4 | \bar{k})] \cdot [K_{3/2}(r_4 | \bar{k}) \times \\
&\quad \times I_{3/2}(r_5 | \bar{k}) - K_{3/2}(r_5 | \bar{k}) \cdot i_{2/2}(r_4 | \bar{k})]^{-1}; \\
M &= a_2 r_4^{3/2} + A_6 r_4^{5/2} k^{-1/2} \Phi_1(r_4 | \bar{k}) + A_7 r_4^{5/2} k^{-1/2} (5 \cos^2 \beta - \\
&\quad - 1) \Phi_2(r_4 | \bar{k}) - 9 A_8 (5k)^{-1/2} r_4^{-3/2} (5 \cos^2 \beta - 1) \Phi_2(r_4 | \bar{k}) - \\
&\quad - \frac{4}{5} A_9 \Phi_2(r_4 | \bar{k}) - A_9 \Phi_2(r_4 | \bar{k}); \\
N &= a_2 r_5^{3/2} + A_6 r_5^{5/2} k^{-1/2} \Phi_1(r_5 | \bar{k}) + A_7 r_5^{5/2} k^{-1/2} (5 \cos^2 \beta - \\
&\quad - 1) \Phi_2(r_5 | \bar{k}) - 9 A_8 (5k)^{-1/2} r_5^{-3/2} (5 \cos^2 \beta - 1) \Phi_2(r_5 | \bar{k}) - \\
&\quad - \frac{4}{5} A_9 \Phi_2(r_5 | \bar{k}) - A_9 \Phi_2(r_5 | \bar{k}).
\end{aligned}$$

Пользуясь приведенным решением задачи о магнитогидродинамическом течении вязкой несжимаемой жидкости во внешнем слое ядра, определим тормозящие моменты, приложенные к мантии и ядру вследствие взаимодействия с жидким слоем ядра и геомагнитным полем. Результирующие моменты сопротивления вращения мантии и ядра будут складываться из моментов $L_1^{(r_4)}$ и $L_1^{(r_5)}$, образующихся от вязкого трения о жидкий слой ядра, и из моментов $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$, возникающих от непосредственного торможения в магнитном поле.

Согласно [58], выражения для моментов сил вязкости, приложенных со стороны жидкого слоя ядра, определяются по формуле

$$L_1^{(r_4)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\rho r_2) r_{r_2} \cdot r_4^3 \cdot \sin^2 \beta d\beta d\alpha, \quad (2.81)$$

$$L_1^{(r_5)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\rho r_1) r_{r_1} \cdot r_5^3 \cdot \sin^2 \beta d\beta d\alpha,$$

где

$$\begin{aligned}
(\rho r_2) r_{r_2} &= \eta_2 \left| \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial r} - \frac{v_{\alpha}}{r} \right|_{r=r_2}; \\
(\rho r_1) r_{r_1} &= \eta_2 \left| \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial r} - \frac{v_{\alpha}}{r} \right|_{r=r_1}.
\end{aligned} \quad (2.82)$$

С учетом выражения (2.79) для скорости v , силы вязкости (2.82) примут вид

$$\begin{aligned}
 (Pr)_r=r_4= & \mu_2 \left\{ \frac{-3 \sin \beta}{r_4 \cdot \sqrt{r_4}} \cdot M - \frac{\sin \beta}{\sqrt{r_4}} \cdot \sqrt{k} \frac{\Delta_4 M - \Delta_2 V}{\Delta_1} - \right. \\
 & - \frac{A_6 r_4 \cdot \sin \beta}{\sqrt{k}} \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) - \frac{A_6 r_4^2 \cdot \sin \beta}{\sqrt{k}} \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) + \\
 & + \frac{4 A_7 \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{\sqrt{k} r_4^4} \Phi_2(r_4 \sqrt{k}) - \frac{A_7 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{\sqrt{k} r_4^3} \Phi_2(r_4 \sqrt{k}) + \\
 & + \frac{27 A_8 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{5 k \cdot r_4^5} \Phi_3(r_4 \sqrt{k}) - \frac{9 A_8 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{5 k \cdot r_4^4} \Phi_3(r_4 \sqrt{k}) - \\
 & - \frac{6}{5} \frac{A_9 \cdot \sin \beta}{r_4 \cdot \sqrt{r_4}} \Phi_4(r_4 \sqrt{k}) + \frac{4}{5} \frac{A_9 \sin \beta}{\sqrt{r_4}} \Phi_4(r_4 \sqrt{k}) - \\
 & \left. - \frac{3}{2} \frac{A_{10} \cdot \sin \beta}{r_4 \cdot \sqrt{r_4}} \Phi_5(r_4 \sqrt{k}) - \frac{A_{10} \sin \beta}{\sqrt{r_4}} \Phi_5(r_4 \sqrt{k}) \right\}; \quad (2.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (Pr)_r=r_5= & \mu_2 \left\{ \frac{-3 \sin \beta}{r_5 \cdot \sqrt{r_5}} \cdot N + \frac{\sin \beta}{\sqrt{r_5}} \cdot \sqrt{k} \frac{\Delta_4 M - \Delta_5 N}{\Delta_1} - \right. \\
 & - \frac{A_6 r_5 \sin \beta}{\sqrt{k}} \Phi_1(r_5 \sqrt{k}) - \frac{A_6 r_5^2 \sin \beta}{\sqrt{k}} \Phi_1(r_5 \sqrt{k}) + \\
 & + \frac{4 A_7 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{\sqrt{k} r_5^4} \Phi_2(r_5 \sqrt{k}) - \frac{A_7 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{\sqrt{k} r_5^3} \Phi_2(r_5 \sqrt{k}) + \\
 & + \frac{27 A_8 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{5 k \cdot r_5^5} \Phi_3(r_5 \sqrt{k}) - \frac{9 A_8 \cdot \sin \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{5 k \cdot r_5^4} \Phi_3(r_5 \sqrt{k}) - \\
 & - \frac{6}{5} \frac{A_9 \cdot \sin \beta}{r_5 \cdot \sqrt{r_5}} \Phi_4(r_5 \sqrt{k}) + \frac{4}{5} \frac{A_9 \sin \beta}{\sqrt{r_5}} \Phi_4(r_5 \sqrt{k}) - \\
 & \left. - \frac{3}{2} \frac{A_{10} \cdot \sin \beta}{r_5 \cdot \sqrt{r_5}} \Phi_5(r_5 \sqrt{k}) - \frac{A_{10} \cdot \sin \beta}{\sqrt{r_5}} \Phi_5(r_5 \sqrt{k}) \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = I_{3/2}(r_4 \sqrt{k}) \cdot K_{3/2}(r_5 \sqrt{k}) - I_{3/2}(r_5 \sqrt{k}) \cdot K_{3/2}(r_4 \sqrt{k});$$

$$\Delta_2 = K_{3/2}(r_5 \sqrt{k}) \cdot I_{1/2}(r_4 \sqrt{k}) + I_{3/2}(r_5 \sqrt{k}) \cdot K_{1/2}(r_4 \sqrt{k});$$

$$\Delta_3 = K_{3/2}(r_4 \sqrt{k}) \cdot I_{1/2}(r_4 \sqrt{k}) + I_{3/2}(r_4 \sqrt{k}) \cdot K_{1/2}(r_4 \sqrt{k});$$

$$\Delta_4 = K_{3/2}(r_5 \sqrt{k}) \cdot I_{1/2}(r_5 \sqrt{k}) + I_{3/2}(r_5 \sqrt{k}) \cdot K_{1/2}(r_5 \sqrt{k});$$

$$\Delta_5 = K_{3/2}(r_4 \sqrt{k}) \cdot I_{1/2}(r_5 \sqrt{k}) + K_{1/2}(r_5 \sqrt{k}) \cdot I_{3/2}(r_4 \sqrt{k}).$$

Подставляя найденные силы вязкости (2.83) в формулы для их моментов (2.81) и интегрируя, получаем

$$L_1^{(r_4)} = \frac{8}{3} \pi \mu_2 (\bar{\Xi}_1^{(m_2)} - \bar{\Xi}_2^{(m_2)}), \quad (2.84)$$

$$L_1^{(r_5)} = \frac{8}{3} \pi \mu_2 (\bar{\Xi}_3^{(m_2)} - \bar{\Xi}_4^{(m_2)}), \quad (2.85)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_1 = & -3r_4^3 \frac{r_4^4 \sqrt{k} \Delta_2}{\Delta_1} (\Lambda_{10} - \Lambda_{20} - \Lambda_{22}) \left(\frac{2r_4^{5/2} B}{\Delta_1 \mu_2 c} [\Phi_1(r_5 \sqrt{k}) \Delta_3 - \right. \\ & \left. - r_4^{5/2} \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) \cdot \Delta_2] + \frac{2r_4^4 B}{\sqrt{k} \mu_2 c} [r_4 \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) + 4\Phi_1(r_4 \sqrt{k})] + \right. \\ & \left. + (2\Lambda_{26} - 3\Lambda_{25}) \left(\frac{1 \sqrt{k} r_4^{5/2} B}{\Delta_1 \mu_2 c} [\Phi_2(r_5 \sqrt{k}) \cdot \Delta_3 - \Phi_2(r_4 \sqrt{k}) \cdot \Delta_2] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B r_4^{3/2}}{2\pi c} [2r_4 \Phi_3(r_4 \sqrt{k}) + 3\Phi_3(r_4 \sqrt{k})] + \frac{r_5^3 r_4^{3/2} B}{30 \mu_2 c^2 (r_4^3 - r_5^3) \Delta_1} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times [6\Phi_4(r_4 \sqrt{k}) \cdot \Delta_1 - 4r_4 \sqrt{k} \Phi_4(r_4 \sqrt{k}) \cdot \Delta_2 + 4r_4 \sqrt{k} \Phi_4(r_5 \sqrt{k}) \cdot \Delta_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4r_4 \Phi_4(r_4 \sqrt{k}) \cdot \Delta_1] + \frac{B^2 r_4}{30 \mu_2 c^2 (r_4^3 - r_5^3) \mu_2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times [2r_4^{9/2} r_5^{3/2} \Phi_1(r_5 \sqrt{k}) \cdot \Delta_1 - 2r_4^7 \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) \cdot \Delta_2] + \frac{B^2}{30 \mu_2 c^2 \mu_2 (r_4^3 - r_5^3)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. [2r_4^8 \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) - 8r_4^7 \Phi_1(r_4 \sqrt{k})]; \right. \right. \\ \bar{\Xi}_2 = & \frac{r_4^{5/2} r_5^{3/2} \sqrt{k} \Delta_2}{\Delta_1} + (\Lambda_{21} + \Lambda_{22} - \Lambda_{24}) \left(\frac{B}{\Delta_1 \mu_2 c} \times \right. \\ & \left. \times [2r_4^3 \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) \Delta_2 - 2r_4^{5/2} \Phi_1(r_5 \sqrt{k}) r_5^{3/2} \Delta_2] - \frac{B}{\mu_2 c} \times \right. \\ & \left. \times [2r_4^3 \Phi_1(r_4 \sqrt{k}) + 8r_4^4 \Phi_1(r_4 \sqrt{k})] + (2\Lambda_{26} - 3\Lambda_{27}) \left(\frac{B \sqrt{k}}{\Delta_1 \mu_2 c} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [r_4^{5/2} \Phi_3(r_4 | \bar{k}) \Delta_2 - r_4^5 \Phi_1(r_4 | \bar{k}) \cdot \Delta_3] - \frac{z\beta}{2r_4 c} \times \\
& \times [2r_4^{5/2} \Phi_3(r_4 | \bar{k}) - 3r_4^{3/2} \Phi_3(r_4 | \bar{k})] + \frac{z\beta r_4^{5/2} r_4^{3/2}}{3\Omega_{13} c^2 (r_4^3 - r_3^3) \Delta_1} \times \\
& \times [4r_4 | \bar{k} \Phi_3(r_4 | \bar{k}) \Delta_3 - 4r_4 | \bar{k} \Phi_1(r_4 | \bar{k}) \cdot \Delta_2 + 4r_4 \Phi_4(r_4 | \bar{k}) \cdot \Delta_1 + \\
& + 6\Phi_4(r_4 | \bar{k}) \cdot \Delta_1] - \frac{z\beta^2}{3\Omega_{13} c^2 (r_4^3 - r_3^3) \Delta_2} [2r_4^{5/2} \Phi_1(r_4 | \bar{k}) r_3^2 \cdot \Delta_2 + \\
& + 2r_4^{3/2} r_3^{11/2} \Phi_1(r_3 | \bar{k}) \Delta_3] - \frac{z\beta^2}{3\sqrt{k} c^2 (r_4^3 - r_3^3) \Delta_2} \times \\
& \times [2r_4^5 \Phi_1(r_4 | \bar{k}) r_3^3 - 8r_4^3 r_3^3 \Phi_1(r_4 | \bar{k})]; \quad (2.86) \\
\Xi_1 = & \frac{r_4^{3/2} r_3^{5/2} | \bar{k} \Delta_1}{\Delta_1} (\Lambda_{19} - \Lambda_{20} - \Lambda_{21}) \left(\frac{z\beta}{\Delta_1^{1/2} c} [2r_5^5 \Phi_1(r_5 | \bar{k}) \cdot \Delta_3 - \right. \\
& \left. - 2r_4^{5/2} r_3^{5/2} \Phi_1(r_4 | \bar{k}) \cdot \Delta_1] + \frac{z\beta}{| \bar{k} \Delta_2 c} [2r_5^5 \Phi_1(r_5 | \bar{k}) - 8r_4^3 \Phi_1(r_5 | \bar{k})] \right) + \\
& + (2\Lambda_{23} + 3\Lambda_{25}) \left(\frac{z\beta | \bar{k} r_5^{5/2}}{\Delta_1^{1/2} c} [\Phi_3(r_5 | \bar{k}) \cdot \Delta_3 - \Phi_3(r_4 | \bar{k}) \cdot \Delta_1] + \right. \\
& \left. + \frac{z\beta r_5^{1/2}}{2\Delta_2 c} [2r_5 \Phi_3(r_5 | \bar{k}) - 3\Phi_3(r_5 | \bar{k})] \right) - \frac{z\beta^2 r_4^{3/2} r_3^{3/2}}{3\Omega_{12} c^2 \Delta_1 (r_4^3 - r_3^3)} \times \\
& \times [4\Phi_4(r_5 | \bar{k}) \cdot r_5 \Delta_3 - 4\Phi_4(r_4 | \bar{k}) \cdot r_5 | \bar{k} \cdot \Delta_1 - 4r_5 \Phi_4(r_5 | \bar{k}) \cdot \Delta_2 + \\
& + 6\Phi_4(r_5 | \bar{k}) \Delta_1] - \frac{z\beta^2}{3\sqrt{k} c^2 (r_4^3 - r_3^3) \Delta_2} [2r_4^3 r_3^5 \Phi_1(r_5 | \bar{k}) + \\
& + 8r_4^3 \Phi_1(r_5 | \bar{k}) r_3^3] - \frac{z\beta^2}{3\Omega_{12} c^2 (r_4^3 - r_3^3)} [2r_4^3 r_3^5 \Phi_1(r_5 | \bar{k}) \Delta_3 - \\
& - 2r_4^{11/2} r_3^{5/2} \Phi_1(r_4 | \bar{k}) \Delta_1]; \\
\Xi_1 = & 3r_3^3 + \frac{r_5^3 | \bar{k} \Delta_3}{\Delta_3} + (\Lambda_{21} + \Lambda_{22} - \Lambda_{23}) \left\{ \frac{z\beta r_5^{5/2}}{\Delta_1^{1/2} c} [r_4^{5/2} \Phi_1(r_4 | \bar{k}) \Delta_1 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2r_5^{5/2} \phi_3(r_5 | \bar{k}) \Delta_1 - \frac{2iB_0^2}{\delta k^{1/2} c} [r_5^2 \phi_1(r_5 | \bar{k}) - 4\phi_3(r_5 | \bar{k})] + \\
& + (2\Lambda_{23} - 3\Lambda_{27}) \left[\frac{2iB_0^2 r_5^{5/2}}{\Delta_1 \delta c} [\phi_3(r_5 | \bar{k}) \Delta_1 - \phi_5(r_5 | \bar{k}) \Delta_5] - \right. \\
& - \frac{2iB_0^2 r_5^{3/2}}{2\delta c} [2r_5 \phi_5(r_5 | \bar{k}) + 3\phi_3(r_5 | \bar{k})] \left. - \frac{2iB_0^2 r_5^{3/2}}{3\delta c^2 (\gamma_4^2 - \gamma_5^2) \Delta_4} \times \right. \\
& \times [4r_5 \phi_4(r_5 | \bar{k}) \Delta_5 - 4\phi_4(r_5 | \bar{k}) r_5 | \bar{k} \Delta_1 - 4r_5 \phi_4(r_5 | \bar{k}) \Delta_1 + \\
& + 6\phi_4(r_5 | \bar{k}) \Delta_1] - \frac{2iB_0^2}{3\delta c^2 c (\gamma_4^2 - \gamma_5^2)} [r_5^2 \phi_1(r_5 | \bar{k}) \Delta_2 - \\
& - r_5^{2/2} r_5^{11/2} \phi_2(r_5 | \bar{k}) \Delta_4] + \\
& \left. + \frac{2iB_0^2}{3\delta c^2 c (\gamma_4^2 - \gamma_5^2)} [r_5^2 \phi_1(r_5 | \bar{k}) - 4r_5^2 \phi_3(r_5 | \bar{k})] \right].
\end{aligned}$$

Перейдем к определению плотности силы F , (2.54). По формулам (2.50), (2.52) на основании соотношений (2.64) и (2.65) для электрического потенциала получим следующие компоненты плотности тока.

внутри мантии —

$$\begin{aligned}
j_r^{(1)} = & \gamma_1 \left[-2r \left[\omega_3 \Lambda_2 - \omega_2 \Lambda_7 + (\omega_2 \Lambda_8 + \omega_3 \Lambda_{10}) \sin^2 \beta + \right. \right. \\
& + (\omega_3 \Lambda_{12} - \omega_2 \Lambda_{11}) (3 \cos^2 \beta - 1) + \frac{1}{3} \frac{a^3}{c} \left. \right] - \\
& - \frac{3r}{r_4} \left[\omega_2 \Lambda_9 - \omega_3 \Lambda_{13} - (\omega_2 \Lambda_{14} - \omega_3 \Lambda_{15}) \sin^2 \beta + (\omega_2 \Lambda_{17} - \right. \\
& \left. - \omega_3 \Lambda_{16}) (3 \cos^2 \beta - 1) \right] - \frac{\sin^2 \beta \omega_2 r^2}{c} \left. \right]; \quad (2.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_\theta^{(1)} = & \gamma_1 \left[-r [(\omega_2 \Lambda_8 + \omega_3 \Lambda_{10}) 2 \sin \beta \cos \beta + (\omega_3 \Lambda_{12} - \omega_2 \Lambda_{11}) \times \right. \\
& \times (-6 \sin \beta \cos \beta)] - \frac{1}{r_4} [-2(\omega_2 \Lambda_{14} + \omega_3 \Lambda_{15}) \sin \beta \cos \beta +
\end{aligned}$$

$$+(\omega_2 \Lambda_{17} - \omega_3 \Lambda_{18})(-6 \sin \beta \cos \beta) \left. + \frac{\omega_2 r B \sin \beta \cos \beta}{c} \right\};$$

внутри ядра —

$$j_r^{(2)} = \sigma_2 \left\{ 2r \left[\omega_3 \Lambda_3 - \omega_2 \Lambda_1 - (\omega_2 \Lambda_7 - \omega_3 \Lambda_4) \sin^2 \beta - \right. \right. \\ \left. \left. - (\omega_2 \Lambda_5 - \omega_3 \Lambda_6)(3 \cos^2 \beta - 1) - \frac{\omega_2 B}{3c} \right] + \frac{\omega_2 r B \sin^2 \beta}{c} \right\}; \quad (2.88)$$

$$j_\beta^{(2)} = \sigma_2 \left\{ -r \left[(\omega_2 \Lambda_7 - \omega_3 \Lambda_4) 2 \sin \beta \cos \beta + \right. \right. \\ \left. \left. + (\omega_2 \Lambda_5 - \omega_3 \Lambda_6) 6 \sin \beta \cos \beta \right] + \frac{\omega_2 r B \sin \beta \cos \beta}{c} \right\}.$$

Плотности j_z (2.56) при найденных выражениях (2.87) и (2.88), приложенные к мантии и ядру и обусловленные наличием магнитного поля, примут вид

$$F_z^{(1)} = -\frac{\sigma_2 B}{c} \left\{ r \sin \beta \left[\frac{\omega_2 B}{3c} + 2\omega_2(\Lambda_7 - \Lambda_4 - \Lambda_{11}) + 2\omega_3(\Lambda_{12} - \Lambda_{10} - \Lambda_4) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \beta}{r^2} [\omega_2(3\Lambda_{11} - 2\Lambda_{14}) - \omega_3(3\Lambda_{15} + 2\Lambda_{16})] - \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \beta (5 \cos^2 \beta - 1)}{r^4} [\omega_2(\Lambda_{14} + 3\Lambda_{17}) + \omega_3(\Lambda_{16} - 3\Lambda_{18})] \right\}. \quad (2.89)$$

$$F_z^{(2)} = -\frac{\sigma_2 B}{c} \left\{ \frac{\omega_2 B}{3c} + 2\omega_2(\Lambda_5 - \Lambda_1 - \Lambda_2) + 2\omega_3(\Lambda_3 + \Lambda_4 - \Lambda_6) \right\} r \sin \beta. \quad (2.90)$$

Помножив полученные силы (2.89), (2.90) на r и проинтегрировав по всему объему ядра ($0 \leq r \leq r_2$) и по объему части мантии ($r_5 \leq r \leq r_3$), являющейся проводящей, найдем моменты объемных сил $F_z^{(1)}$ и $F_z^{(2)}$:

$$L_z^{(1)} = -\Xi_3 \omega_2 - \Xi_4 \omega_3, \quad (2.91)$$

$$L_z^{(2)} = -\Xi_7 \omega_2 - \Xi_8 \omega_3, \quad (2.92)$$

где

$$\Xi_3 = \frac{\sigma_2 B}{c} \left\{ \left[\frac{B}{3c} + (2\Lambda_7 - \Lambda_4 - \Lambda_{11}) \right] \frac{r_2^2(r_2 - r_4)}{5} + \right. \\ \left. + (3\Lambda_{11} - 2\Lambda_{14}) r_2^2 \ln \frac{r_2}{r_4} + (\Lambda_{14} - 3\Lambda_{17}) \frac{r_2^4}{4} \ln \frac{r_2}{r_4} \right\};$$

$$\begin{aligned} \Xi_6 = & \frac{2B}{c} \left\{ 2(\Lambda_{12} - \Lambda_{10} - \Lambda_9) \frac{\pi^2 (r_3^3 - r_4^3)}{5} - \right. \\ & \left. - (\Lambda_{15} - 2\Lambda_{16}) \pi^2 \ln \frac{r_3}{r_4} - (\Lambda_{16} - 3\Lambda_{17}) \frac{\pi^2}{4} \ln \frac{r_3}{r_4} \right\}; \quad (2.93) \end{aligned}$$

$$\Xi_7 = \frac{2\gamma B}{c} (\Lambda_8 - \Lambda_1 - \Lambda_2) \frac{\pi^2 r_6^5}{5};$$

$$\Xi_8 = \frac{2B}{c} \left[\frac{B}{3c} + 2(\Lambda_3 + \Lambda_4 - \Lambda_5) \right] \frac{\pi^2 r_6^5}{5}.$$

2.5. Уравнения вращения внутренних твердых слоев Земли

Дифференциальные уравнения вращательного движения слоистой Земли можно получить на основе теоремы об изменении ее момента количества движения. Для этого необходимо знать результирующий момент всех действующих на Землю активных сил:

— момент силы взаимных притяжений по Ньютону слоев Земли между собой, а также Земли с Луной, Солнцем и планетами Солнечной системы;

— момент силы вязкого трения литосферы об астеносферный слой;

— результирующий момент силы вязкого трения мантии и ядра о жидкие слои и силы сопротивления вращению в магнитном поле.

Определим момент силы притяжения литосферы внутренними слоями Земли и внешними небесными телами.

Пусть $Oxyz$ — система главных центральных осей инерции Земли. Она в силу выбора модели слоистой Земли совпадает с системой главных центральных осей инерции литосферы. Обозначим через V область трехмерного евклидова пространства R_3 , занятую телом Земли, через $\rho(x, y, z)$ — ее плотность, через $P(x, y, z)$ — точку, где сосредоточена элементарная масса $dm = \rho dV$, а через V^* — часть области V , занятую литосферой. Тогда притяжение по закону Ньютона, оказываемое Землей на внешнюю точку $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in R_3 \setminus V$, будет определяться силовой функцией [18]:

$$U_E(Q) = G \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{r(P, Q)} dx dy dz, \quad (2.94)$$

где G — постоянная гравитации; $dV = dx dy dz$ — элемент объема;

$r(P, Q) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ — расстояние между точками P, Q ; интеграл распространен на весь объем Земли.

Функция U_E удовлетворяет уравнению Лапласа, имеющему частные решения в виде гармонических многочленов. Перейдя к сферическим координатам, эти многочлены можно выразить через сферические функции [19, 24]. С этой целью перейдем к сферической системе координат $O\alpha\beta$ по формулам $x=r \sin \beta \cos \alpha$, $y=r \sin \beta \sin \alpha$, $z=r \cos \beta$, где α — долгота; β — широта, т. е. обычные географические координаты точек Земли.

Пусть в системе $O\alpha\beta$ точки P и Q имеют координаты: $P(r_p, \alpha_p, \beta_p)$, $Q(r_q, \alpha_q, \beta_q)$ и γ — угол между радиусами-векторами этих точек. Учитывая неравенство $r_q > r_p$, имеем следующее разложение функции $1/r(P, Q)$ в ряд:

$$\frac{1}{r(P, Q)} = \frac{1}{r_q} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r_p/r_q) \cos \gamma + (r_p/r_q)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (r_p^n / r_q^{n+1}) P_n(\cos \gamma), \quad (2.95)$$

где $P_n(\cos \gamma)$ — многочлен Лежандра n -й степени, $|P_n(\cos \gamma)| \leq 1/n$ и

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{\delta_n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_{nk}(\cos \beta_q) P_{nk}(\cos \beta_p) \cos k(\alpha_q - \alpha_p), \quad (2.96)$$

Здесь $\delta_0=2$, $\delta_k=1$ для всех $k \geq 1$; P_{nk} — присоединенная функция Лежандра.

Используя формулу сложения сферических функций (2.96) и разложение в ряд (2.95) обратного расстояния $1/r(P, Q)$, силовую функцию (2.94) представляем в виде

$$U_e(Q) = G \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_{nk}(\cos \beta) [A_{nk} \cos k\alpha - B_{nk} \sin k\alpha], \quad (2.97)$$

где $r=r(P, Q)$, $\alpha=\alpha_q$, $\beta=\beta_q$ и

$$\left. \begin{matrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_V r^n P_{nk}(\cos \beta) \begin{cases} \cos k\alpha \\ \sin k\alpha \end{cases} dm, \quad (2.98)$$

причем величины A_{nk} , B_{nk} являются постоянными.

Обозначим через a_e радиус минимальной сферы S_e с центром в центре масс Земли, охватывающей ее целиком, и положим

$$C_{nk} = A_{nk}/Ma^n; \quad S_{nk} = B_{nk}/Ma^n; \quad C_{n0} = -J_n. \quad (2.99)$$

С учетом обозначений (2.99) геопотенциал (2.97) представим в виде

$$U_e = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \beta) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{nk}(\cos \beta) (C_{n2} \cos kz - S_{n2} \sin kz) \right], \quad (2.100)$$

рекомендованном Международным астрономическим союзом (МАС) [23, 53].

Ряд (2.100) сходится абсолютно и равномерно в любой точке пространства вне сферы S_e и для остатка $U_e^{(n)}$ после его членов с номерами n верна оценка

$$|U_e^{(n)}| < G \frac{M}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \left(1 - \frac{a_e}{r} \right)^{-1}. \quad (2.101)$$

Рассмотрим случай внутренней точки Q , $Q \in V \setminus V^*$, т. е. точка Q не принадлежит литосфере, а точка P , наоборот, принадлежит ей. Тогда, по закону Ньютона, притяжение, оказываемое литосферой на внутреннюю точку Земли, определяется силовой функцией

$$U_i(Q) = G \int_{V^*} \frac{\rho(x, y, z)}{r(P, Q)} dx dy dz, \quad (2.102)$$

где интеграл распространен на весь объем литосферы.

При этом, учитывая неравенство $r_P > r_Q$, имеем разложение в ряд функции $1/r(P, Q)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(P, Q)} &= \frac{1}{r_P} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r_Q/r_P) \cos \tau + (r_Q/r_P)^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (r_Q/r_P)^{n+1} P_n(\cos \tau). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Используя формулу (2.96) и выражение ряда (2.103), представим силовую функцию (2.102) в виде

$$U_l(Q) = G \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n r^n P_{nk}(\cos \beta) [A_{nk}^* \cos k\alpha - B_{nk}^* \sin k\alpha], \quad (2.104)$$

где коэффициенты A_{nk}^* , B_{nk}^* выражаются интегралами типа (2.98), распространенными на объем V^* литосферы:

$$\begin{Bmatrix} A_{nk}^* \\ B_{nk}^* \end{Bmatrix} = \frac{2}{3_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{V^*} \frac{1}{r^{\alpha-1}} P_{nk}(\cos \beta) \begin{Bmatrix} \cos k\alpha \\ \sin k\alpha \end{Bmatrix} dm. \quad (2.105)$$

Учитывая, что внутренняя граница литосферы есть сфера S_l радиуса a с центром в точке O , и обозначив через M^* массу литосферы, положим

$$C_{nk}^* = A_{nk}^* a^n / M^*, \quad S_{nk}^* = B_{nk}^* a^n / M^*, \quad C_{n0}^* = -J_n^*. \quad (2.106)$$

С учетом обозначений (2.106) представим ряд (2.104) в виде

$$\begin{aligned} U_l = GM^* & \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n J_n^* P_n(\cos \beta) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_{nk}(\cos \beta) (C_{nk}^* \cos k\alpha - S_{nk}^* \sin k\alpha) \right]. \quad (2.107) \end{aligned}$$

Ряд (2.107) сходится абсолютно и равномерно в любой точке пространства внутри сферы S_l и для остатка $U_l^{(n)}$ после его членов с номерами n верна оценка

$$|U_l^{(n)}| \leq GM \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(1 - \frac{r}{a}\right)^{-1}. \quad (2.108)$$

Обозначим через $OXYZ$ кеннигову систему отсчета, координатные оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы отсчета $O^*X^*Y^*Z^*$. Взаиморасположение систем $OXYZ$ и $Oxuz$ зададим при помощи углов Эйлера:

$$\psi = (OX, L), \quad \varphi = (L, Ox), \quad \theta = (OZ, Oz), \quad (2.109)$$

где L — линия узлов, т. е. линия пересечения координатных плоскостей OXY и Oxy .

Пусть (X^*, Y^*, Z^*) , (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) — инерциальные координаты точек Q и O ; (X, Y, Z) и (x, y, z) — кенниговые и локальные координаты точки Q . Известно, что

$$X = X^* - X_0^*, \quad Y = Y^* - Y_0^*, \quad Z = Z^* - Z_0^*; \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} x &= X \cos(x, X) + Y \cos(x, Y) + Z \cos(x, Z); \\ y &= X \cos(y, X) + Y \cos(y, Y) + Z \cos(y, Z); \\ z &= X \cos(z, X) + Y \cos(z, Y) + Z \cos(z, Z). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Направляющие косинусы, входящие в формулы (2.111), выражаются через углы Эйлера (2.109) [7, 23], поэтому момент \vec{Q} относительно центра масс O силы притяжения Земли точкой Q имеет следующие составляющие по осям $Oxyz$:

$$\begin{aligned} Q_{ex} &= \left(\frac{\partial l_e}{\partial \varphi} - \frac{\partial l_e}{\partial \vartheta} \cos \Theta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \Theta} + \frac{\partial l_e}{\partial \Theta} \cos \varphi; \\ Q_{ey} &= \left(\frac{\partial l_e}{\partial \varphi} - \frac{\partial l_e}{\partial \vartheta} \cos \Theta \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \Theta} - \frac{\partial l_e}{\partial \Theta} \sin \varphi; \\ Q_{ez} &= \frac{\partial l_e}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

если Q — внешняя притягивающая точка, и

$$\begin{aligned} Q_{Ix} &= \left(\frac{\partial l_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial l_i}{\partial \vartheta} \cos \Theta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \Theta} + \frac{\partial l_i}{\partial \Theta} \cos \varphi; \\ Q_{Iy} &= \left(\frac{\partial l_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial l_i}{\partial \vartheta} \cos \Theta \right) \frac{\cos \varphi}{\cos \Theta} - \frac{\partial l_i}{\partial \Theta} \sin \varphi; \\ Q_{Iz} &= \frac{\partial l_i}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

где Q — внутренняя относительно литосферы точка.

Оценки (2.101) и (2.108) показывают, что каждая из составляющих (2.112) и (2.113) момента \vec{Q} является величиной третьего порядка малости относительно (a_e/r) и (r/a) соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} \{ |Q_{ex}|, |Q_{ey}|, |Q_{ez}| \} \sim O((a_e/r)^3); \\ \{ |Q_{Ix}|, |Q_{Iy}|, |Q_{Iz}| \} \sim O((r/a)^3). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Пусть притягивающая точка Q последовательно совпадет с внешними небесными телами — Луной, Солнцем и планетами с

массами M_1, M_2, \dots, M_s ($s \geq 2$). Тогда силовая функция Земли, находящейся в поле притяжения этих тел, определяется равенством

$$U_e = \sum_{j=1}^s M_j U_{ej}, \quad (2.115)$$

где для силовой функции Земли принято прежнее обозначение U_e и

$$U_{ej} = \frac{GM}{r_{0j}} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r_{0j}} \right)^n J_n P_n(\cos \beta_j) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_e}{r_{0j}} \right)^n P_{nk}(\cos \beta_j) (C_{nk} \cos kx_j + S_{nk} \sin kx_j) \right]. \quad (2.116)$$

Здесь r_{0j} — расстояние от центра масс O Земли до внешнего тела M_j ; $M = M_0$ — масса Земли.

Соотношения (2.115) и (2.116) показывают, что выражения (2.112) составляющих момента \vec{Q}_e по осям $Oxyz$ остаются без изменения.

Обозначим через $V_1 = V \setminus V^*$ внутреннюю по отношению к литосфере часть Земли. Тогда литосфера является внешним телом относительно V_1 , поэтому внешний ньютоновский потенциал U_1 части V_1 тела Земли, рассматриваемый в объеме литосферы, может быть найден по формулам (2.97) и (2.98). При этом интегралы, входящие в соотношения (2.98), распространяются по объему V_1 . Так как V_1 представляет собой центрально-симметричное сферическое тело, то все коэффициенты (кроме первого) разложения U_1 в ряд будут равны нулю. Это означает, что действие тела V_1 с массой M_1^* на литосферу будет эквивалентно действию массы M_1^* , сосредоточенной в точке O , а равнодействующая и момент относительно точки этих сил будут равны нулю.

Итак, момент силы притяжения элементов литосферы элементарной части V_1 равен нулю. Пусть теперь точка Q пробегает объем V_1 . Тогда сила притяжения \vec{F}_Q точки Q литосферой имеет составляющие по осям

$$F_{Qr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad F_{Q\alpha} = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha}; \quad F_{Q\lambda} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

Но так как вся система находится в равновесии, то эта сила будет уравновешена результирующей силой притяжения точки Q элементами тела V_1 . Тогда и суммарный момент относительно точки Q всех внутренних сил также равен нулю.

Таким образом, силы самогравитации и момент относительно точки O этих сил, как и в случае абсолютно твердой Земли, не оказывают никакого влияния на ее движение.

Результирующий момент относительно центра масс Земли сил, приложенных к литосфере, представляется суммой моментов гравитационных сил (2.112) и сил вязкости (2.43):

$$\begin{aligned} \vec{L}_L = \vec{Q}_e - \vec{L}_1^{(e)} &= Q_{ex} \vec{e}_x + Q_{ey} \vec{e}_y + Q_{ez} \vec{e}_z - \\ &- 8\pi\gamma_1 \frac{r_1^3}{r_1^3 - 1} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) - \frac{16}{3} \pi\gamma_1 r_1^3 \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp(-\gamma_1 t_k^2 / r_1^2) + \\ &- \frac{16}{3} \pi\gamma_1 r_1^3 \alpha_3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp(-\gamma_1 t_k^2 / r_1^2). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Результирующий момент относительно центра масс Земли сил, приложенных к мантии, определяется суммой моментов сил вязкости (2.44), (2.84) и объемных сил (2.91):

$$\begin{aligned} \vec{L}_M = \vec{L}_1^{(r)} + \vec{L}_1^{(v)} - \vec{L}_1^{(g)} &= 8\pi\mu(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) r_1^2 / (e_1^2 - 1) + \\ &+ \frac{16}{3} \pi\gamma_1 r_1^3 \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp(-\gamma_1 t_k^2 / r_1^2) - \\ &- \frac{16}{3} \pi\gamma_1 r_1^3 \alpha_3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp(-\gamma_1 t_k^2 / r_1^2) - \\ &- \frac{8}{3} \pi\gamma_1 (\vec{\Sigma}_1 \vec{\omega}_1 - \vec{\Sigma}_2 \vec{\omega}_1) - \vec{\Sigma}_2 \vec{\omega}_2 - \vec{\Sigma}_2 \vec{\omega}_3. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Наконец, результирующий момент относительно центра масс Земли сил, приложенных к ядру, дается суммой моментов сил вязкости (2.85) и объемных сил (2.92):

$$\vec{L}_x = \frac{8}{3} \pi \rho_2 (\vec{\Xi}_3 \vec{\omega}_2 - \vec{\Xi}_4 \vec{\omega}_3) - \vec{\Xi}_2 \vec{\omega}_2 - \vec{\Xi}_8 \vec{\omega}_3 \quad (2.119)$$

при обозначениях (2.45), (2.86) и (2.93).

Пусть \vec{K}_1^* , \vec{K}_2^* , \vec{K}_3^* — моменты количества движения и $\vec{\omega}_1^*$, $\vec{\omega}_2^*$, $\vec{\omega}_3^*$ — угловые скорости литосферы, мантии и ядра соответственно. Используя теорему об изменении \vec{K}_1^* , \vec{K}_2^* и \vec{K}_3^* и выражения моментов относительно точки O сил, приложенных к литосфере, мантии и ядру (2.117), (2.118), (2.119), запишем уравнения вращательного движения последних:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_1^*}{dt_1} &= Q_x^* \vec{e}_x + Q_y^* \vec{e}_y + Q_z^* \vec{e}_z - \int_0^{t_1} \frac{d\vec{\omega}_1^*}{d\tau} \left[\frac{8\pi\rho_1 r_1^3}{c_1^3 - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{3} \pi \rho_1 r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k} \exp[-\nu_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau)/r_1^2] \right] d\tau + \\ &\quad + \int_0^{t_1} \frac{d\vec{\omega}_2^*}{d\tau} \left[\frac{8\pi\rho_1 r_1^3}{c_1^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \rho_1 r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} \exp[-\nu_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau)/r_2^2] \right] d\tau, \\ \frac{d\vec{K}_2^*}{dt_1} &= \int_0^{t_1} \frac{d\vec{\omega}_1^*}{d\tau} \left[\frac{8\pi\rho_1 r_1^3}{c_1^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \rho_1 r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp[-\nu_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau)/r_2^2] \right] d\tau - \\ &\quad - \int_0^{t_1} \frac{d\vec{\omega}_2^*}{d\tau} \left[\frac{8\pi\rho_1 r_1^3}{c_1^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \rho_1 r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{4k} \exp[-\nu_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau)/r_2^2] \right] d\tau - \\ &\quad - \frac{8}{3} \pi \rho_2 (\vec{\Xi}_1 \vec{\omega}_2^* - \vec{\Xi}_2 \vec{\omega}_3^*) - \vec{\Xi}_5 \vec{\omega}_2^* - \vec{\Xi}_6 \vec{\omega}_3^*; \\ \frac{d\vec{K}_3^*}{dt_1} &= \frac{8}{3} \pi \rho_2 (\vec{\Xi}_3 \vec{\omega}_2^* - \vec{\Xi}_4 \vec{\omega}_3^*) - \vec{\Xi}_7 \vec{\omega}_2^* - \vec{\Xi}_8 \vec{\omega}_3^*. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Здесь $\frac{d}{dt_1}$ — абсолютная производная по времени t_1 дифференцируемой величины, а через Q_x^* , Q_y^* , Q_z^* в целях согласования записаны величины (2.112).

Обозначив через $\omega_0 = |\dot{\omega}_1(0)|$ модуль угловой скорости литосферы в начальный момент времени, а через I — ее момент инерции относительно какой-либо фиксированной в теле Земли оси, введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 t &= t_1 \omega_0; & B &= \nu_1 / r_1^2 \omega_0; & \Gamma_1 &= \nu_1 r_1^3 / I \omega_0; & \Gamma_2 &= \nu_1 r_2^3 / I \omega_0; \\
 A_1^0 &= A_1 / I; & B_1^0 &= B_1 / I; & C_1^0 &= C_1 / I; & C_2^0 &= A_2 / I = B_2 / I = C_2 / I; \\
 C_3^0 &= A_3 / I = B_3 / I = C_3 / I; & \bar{K}_1 &= \bar{K}_1^0 / I \omega_0; \\
 \bar{K}_2 &= \bar{K}_2^0 / I \omega_0; & \bar{K}_3 &= \bar{K}_3^0 / I \omega_0; & \bar{\omega}_1 &= \bar{\omega}_1^0 / \omega_0; & \bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_2^0 / \omega_0; \\
 \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}_3^0 / \omega_0; & \bar{\Xi}_1 &= \bar{\Xi}_1^0 / I \omega_0; & \bar{\Xi}_2 &= \bar{\Xi}_2^0 / I \omega_0; & & (2.121) \\
 \bar{\Xi}_3 &= \bar{\Xi}_3^0 / I \omega_0; & \bar{\Xi}_4 &= \bar{\Xi}_4^0 / I \omega_0; & \bar{\Xi}_5 &= \bar{\Xi}_5^0 / I \omega_0; \\
 \bar{\Xi}_6 &= \bar{\Xi}_6^0 / I \omega_0; & \bar{\Xi}_7 &= \bar{\Xi}_7^0 / I \omega_0; & \bar{\Xi}_8 &= \bar{\Xi}_8^0 / I \omega_0.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения (2.120) в безразмерных переменных (2.121) примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{K}_1}{dt} &= Q_x \bar{e}_x + Q_y \bar{e}_y + Q_z \bar{e}_z - \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_1}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\Gamma_1}{r_1^3 - 1} + \frac{16}{3}\pi\Gamma_1 \times \right. \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k} \exp[-B\lambda_k^2(t-\tau)] \Big\} d\tau + \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_2}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\Gamma_2}{r_2^3 - 1} + \right. \\
 &\left. + \frac{16}{3}\pi\Gamma_1 \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} \exp[-B\lambda_k^2(t-\tau)] \Big\} d\tau; \\
 \frac{d\bar{K}_2}{dt} &= \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_1}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\Gamma_1}{r_1^3 - 1} + \frac{16}{3}\pi\Gamma_2 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp[-B\lambda_k^2(t-\tau)] \Big\} d\tau - \\
 &- \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_2}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\Gamma_2}{r_2^3 - 1} + \frac{16}{3}\pi\Gamma_2 \sum_{k=1}^{\infty} N_{4k} \exp[-B\lambda_k^2(t-\tau)] \Big\} d\tau -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{8}{3}\pi\mu_1(\Xi_1\vec{\omega}_2 - \Xi_2\vec{\omega}_1) - \Xi_3\vec{\omega}_2 - \Xi_6\vec{\omega}_1; \quad (2.122)$$

$$\frac{d\vec{K}_2}{dt} = -\frac{8}{3}\pi\mu_2(\Xi_3\vec{\omega}_2 - \Xi_4\vec{\omega}_1) - \Xi_7\vec{\omega}_2 - \Xi_8\vec{\omega}_1.$$

Здесь $Q_x = Q_x^*/\omega_0^2$, $Q_y = Q_y^*/\omega_0^2$ и $Q_z = Q_z^*/\omega_0^2$.

Переход от абсолютных производных к производным в подвижной системе координат $Oxyz$, которые обозначим символом d'/dt , осуществляется по формуле Эйлера:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d'h}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{h}, \quad (2.123)$$

где \vec{h} — произвольный вектор.

Двукратное интегрирование правых частей (2.122) и переход от абсолютных производных к локальным по формулам (2.123) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{d'\vec{K}_1}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_1 = Q_x \vec{e}_x + Q_y \vec{e}_y + Q_z \vec{e}_z - D_1 \frac{d'\vec{\omega}_1}{dt} + \\ & + \varepsilon_1 \left(\frac{d''\vec{\omega}_1}{dt^2} + \vec{\omega}_1 \times \frac{d'\vec{\omega}_1}{dt} \right) + E_1(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + D_2 \left(\frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \right) - \\ & - \varepsilon_2 \left[\frac{d''\vec{\omega}_2}{dt^2} + \frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{\omega}_2 + 2 \left(\vec{\omega}_1 \times \frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} \right) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \right]; \quad (2.124) \\ & \frac{d'\vec{K}_2}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_2 = D_3 \frac{d'\vec{\omega}_1}{dt} - \varepsilon_3 \left(\frac{d''\vec{\omega}_1}{dt^2} + \vec{\omega}_1 \times \frac{d'\vec{\omega}_1}{dt} \right) - \\ & - E_3(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - D_4 \left(\frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \right) + \\ & + \varepsilon_4 \left[\frac{d''\vec{\omega}_2}{dt^2} + \frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{\omega}_2 + 2 \left(\vec{\omega}_1 \times \frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} \right) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \right] - \\ & - \left(\frac{8}{3}\pi\mu_2\Xi_1 + \Xi_5 \right) \vec{\omega}_2 + \left(\frac{8}{3}\pi\mu_2\Xi_2 - \Xi_6 \right) \vec{\omega}_1; \\ & \frac{d'\vec{K}_3}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_3 = \left(\frac{8}{3}\pi\mu_2\Xi_3 - \Xi_7 \right) \vec{\omega}_2 - \left(\frac{8}{3}\pi\mu_2\Xi_4 + \Xi_8 \right) \vec{\omega}_1, \end{aligned}$$

где

$$D_1 = d_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{1k}}{\lambda_k^2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{d_1}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{1k}}{\lambda_k^4};$$

$$D_2 = d_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{2k}}{\lambda_k^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{d_1}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{2k}}{\lambda_k^4};$$

$$D_3 = d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{3k}}{\lambda_k^2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{d_2}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{3k}}{\lambda_k^4};$$

$$D_4 = d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{4k}}{\lambda_k^2}; \quad \varepsilon_4 = \frac{d_2}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{4k}}{\lambda_k^4};$$

$$d_1 = \frac{16}{3} \pi_1 \frac{r_1^3 r_2^2}{l}; \quad d_2 = \frac{16}{3} \pi_2 \frac{r_2^5}{l}; \quad E_1 = \frac{8\pi \Gamma_1}{r_1^2 - 1}.$$

При больших значениях B , являющихся обратной величиной числа Рейнольдса, постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и ε_4 играют роль малых параметров. Поэтому можно пренебречь членами второго порядка малости, содержащими к тому же эти малые параметры. Тогда система уравнений движения литосферы, мантии и ядра в проекциях на координатные оси $Oxyz$ примет вид

$$(A_1^0 + D_1) \dot{p}_1 + (C_1^0 - B_1^0) q_1 r_1 = Q_x + E_1(p_2 - p_1) + D_1(\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1);$$

$$(B_1^0 + D_1) \dot{q}_1 + (A_1^0 - C_1^0) r_1 p_1 = Q_y + E_1(q_2 - q_1) + D_1(q_2 \dot{r}_1 - p_1 r_2);$$

$$(C_1^0 + D_1) \dot{r}_1 + (B_1^0 - A_1^0) p_1 q_1 = Q_z + E_1(r_2 - r_1) + D_1(\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1);$$

$$(C_2^0 + D_4)(\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1) = E_1(p_1 - p_2) + D_3 \dot{p}_1 -$$

$$- \left(\frac{8}{3} \pi \mu_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \right) p_2 + \left(-\frac{8}{3} \pi \mu_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \right) p_1;$$

$$(C_2^0 + D_4)(\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2) = E_1(q_1 - q_2) + D_3 \dot{q}_1 -$$

$$- \left(\frac{8}{3} \pi \mu_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \right) q_2 + \left(-\frac{8}{3} \pi \mu_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \right) q_1; \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned}
(C_2^0 + D_3)\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1 &= E_1(r_1 - r_2) + D_3 \dot{r}_1 - \\
&- \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_5\right) r_2 + \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_6\right) r_3; \\
C_3^0 \dot{p}_3 + q_1 r_3 - q_3 r_1 &= \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_5\right) p_2 - \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_4 + \bar{\varepsilon}_4\right) p_3; \\
C_3^0 \dot{q}_3 + p_3 r_1 - p_1 r_3 &= \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_5\right) q_2 - \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_4 + \bar{\varepsilon}_8\right) q_3; \\
C_3^0 \dot{r}_3 + p_1 q_3 - p_3 q_1 &= \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_5\right) r_2 - \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_4 + \bar{\varepsilon}_3\right) r_3,
\end{aligned}$$

где p_i, q_i, r_i ($i=1, 2, 3$) — проекции угловой скорости $\vec{\omega}_1$ на координатные оси системы $Oxyz$; A_1, B_1, C_1 — главные центральные моменты инерции литосферы; C_2 и C_3 — главные центральные моменты инерции мантии и ядра соответственно;

$$\begin{aligned}
I_{00}^x Q_x &= \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cos \Theta\right) \frac{\cos \varphi}{\sin \Theta} + \frac{\partial U}{\partial \Theta} \sin \varphi, \\
I_{00}^y Q_y &= \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cos \Theta\right) \frac{\sin \varphi}{\sin \Theta} - \frac{\partial U}{\partial \Theta} \cos \varphi, \quad I_{00}^z Q_z = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}.
\end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
D_5 &= \frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_5; \quad D_6 = \frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_6; \\
D_7 &= \frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_8 - \bar{\varepsilon}_7; \quad D_8 = \frac{8}{3} \pi \mu_2 \bar{\varepsilon}_4 + \bar{\varepsilon}_8,
\end{aligned} \quad (2.126)$$

из системы уравнений (2.125) получаем

$$\begin{aligned}
(A_1^0 + D_1)\dot{p}_1 + (C_1^0 - B_1^0)q_1 r_1 &= E_1(p_2 - p_1) + D_3(\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1) + Q_x; \\
(B_1^0 + D_1)\dot{q}_1 + (A_1^0 - C_1^0)r_1 p_1 &= E_1(q_3 - q_1) + D_2(\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2) + Q_y; \\
(C_1^0 + D_1)\dot{r}_1 + (B_1^0 - A_1^0)p_1 q_1 &= E_1(r_2 - r_1) + D_3(\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1) + Q_z; \\
(C_2^0 + D_4)(\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1) &= E_1(p_1 - p_2) + D_5 p_1 - D_5 p_2 + D_6 p_3;
\end{aligned}$$

$$(C_2^0 + D_4)(\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2) - E_1(q_1 - q_2) + D_3 \dot{q}_1 - D_5 q_2 + D_6 q_3; \quad (2.127)$$

$$(C_2^0 + D_4)(\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1) - E_1(r_1 - r_2) + D_3 \dot{r}_1 - D_5 r_2 + D_6 r_3;$$

$$C_3^0(\dot{p}_3 + q_1 r_3 - q_3 r_1) = D_7 p_2 - D_8 p_3;$$

$$C_3^0(\dot{q}_3 + p_3 r_1 - p_1 r_3) = D_7 q_2 - D_8 q_3;$$

$$C_3^0(\dot{r}_3 + p_1 q_3 - p_3 q_1) = D_7 r_2 - D_8 r_3.$$

Система уравнений (2.127) разрешима относительно первых производных от составляющих p_i , q_i , r_i ($i = 1, 2, 3$) векторов $\bar{\omega}_F$:

$$\dot{p}_1 = -a_{11} p_1 + a_{14} p_2 + a_{17} p_3 - a_{20} q_1 r_1 + \bar{Q}_x;$$

$$\dot{q}_1 = -a_{22} q_1 + a_{25} q_2 + a_{28} q_3 - a_{31} r_1 p_1 + \bar{Q}_y;$$

$$\dot{r}_1 = -a_{33} r_1 + a_{36} r_2 + a_{39} r_3 - a_{40} p_1 q_1 + \bar{Q}_z;$$

$$p_2 = a_{41} p_1 - a_{44} p_2 + a_{47} p_3 - a_{50} q_1 r_1 - (q_1 r_2 - q_2 r_1);$$

$$q_2 = a_{52} q_1 - a_{55} q_2 + a_{58} q_3 - a_{60} r_1 p_1 - (p_2 r_1 - p_1 r_2); \quad (2.128)$$

$$r_2 = a_{63} r_1 - a_{66} r_2 + a_{69} r_3 - a_{70} p_1 q_1 - (p_1 q_2 - p_2 q_1);$$

$$\dot{p}_3 = a_{74} p_2 - a_{77} p_3 + r_1 q_3 - q_1 r_3;$$

$$\dot{q}_3 = a_{88} q_2 - a_{91} q_3 + p_1 r_3 - r_1 p_3;$$

$$\dot{r}_3 = a_{96} r_2 - a_{99} r_3 + q_1 p_3 - p_1 q_3;$$

где $a_{11} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{14} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{17} = D_2 D_3 / [(A_1^0 + D_1) \times (C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{20} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{22} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{25} = -[E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{28} = D_2 D_3 / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{31} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{33} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{36} = D_2 D_3 / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{39} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{40} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{41} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{44} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{47} = D_2 D_3 / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{50} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{52} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{55} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{58} = D_2 D_3 / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{60} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{63} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{66} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{69} = D_2 D_3 / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{70} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{74} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{77} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{88} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{91} = [E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) - D_2 D_3] / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{96} = D_2 D_3 / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$; $a_{99} = (C_2^0 + D_4)(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]$.

$$\begin{aligned}
& \times [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{30} = (A_1^0 - C_1^0)(C_2^0 + D_4) / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + \\
& + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{31} = E_1(C_2^0 + D_4 - D_2) / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{32} = \\
& = [E_1(C_2^0 + D_1 - D_2) - D_2 D_3] / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{33} = D_2 D_4 / \times \\
& \times [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{40} = (B_1^0 - A_1^0)(C_2^0 + D_4) / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + \\
& + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{41} = E_1(D_1 + A_1^0 - D_2) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{42} = \\
& = [E_1(D_1 + A_1^0 - D_2) + (A_1^0 + D_1)D_3] / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{43} = \\
& = (A_1^0 + D_1)D_3 / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{50} = D_2(C_1^0 - B_1^0) / [(A_1^0 + \\
& + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{51} = E_1(D_1 + B_1^0 - D_2) / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - \\
& - D_2 D_3]; \quad a_{52} = [E_1(D_1 + B_1^0 - D_2) + (B_1^0 + D_1)D_3] / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - \\
& - D_2 D_3]; \quad a_{53} = (B_1^0 + D_1)D_3 / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{60} = [E_1(D_1 + \\
& + C_1^0 - D_2) + (C_1^0 + D_1)D_3] / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{61} = (C_1^0 + \\
& + D_1)D_3 / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{62} = E_1(D_1 + C_1^0 - D_2) / [(C_1^0 + \\
& + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{63} = [E_1(D_1 + C_1^0 - D_2) + (C_1^0 + D_1)D_3] / [(C_1^0 + \\
& + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \quad a_{70} = D_2(B_1^0 - A_1^0) / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \\
a_{71} = D_7 / C_3^0; \quad a_{72} = D_8 / C_3^0; \quad a_{80} = D_7 / C_3^0; \quad a_{81} = D_8 / C_3^0; \quad a_{1,6} = D_7 / C_3^0; \quad a_{2,6} = \\
= D_8 / C_3^0. \tag{2.129}
\end{aligned}$$

Величины \bar{Q}_x , \bar{Q}_y и \bar{Q}_z в уравнениях (2.128) выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_x &= Q_x(C_2^0 + D_4) / [(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \\
\bar{Q}_y &= Q_y(C_2^0 + D_4) / [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3]; \\
\bar{Q}_z &= Q_z(C_2^0 + D_4) / [(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3].
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Проведем анализ системы (2.128).

2.6. Анализ решения уравнений вращательного движения Земли

Систему дифференциальных уравнений (2.128) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 - \dot{p}_2 &= b_{11}(p_1 - p_2) + b_{14}(p_2 - p_3) + (a_{60} - a_{20})l_1 r_1 + q_1 r_2 - q_2 r_1 + \bar{Q}_x; \\
 \dot{q}_1 - \dot{q}_2 &= b_{22}(q_1 - q_2) + b_{36}(r_2 - r_3) + (a_{80} - a_{30})r_1 p_1 + p_2 r_1 - p_1 r_2 + \bar{Q}_y; \\
 \dot{r}_1 - \dot{r}_2 &= b_{33}(r_1 - r_2) + b_{36}(r_2 - r_3) + (a_{70} - a_{40})p_1 q_1 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + \bar{Q}_z; \\
 \dot{p}_2 - \dot{p}_3 &= b_{41}(p_1 - p_2) + b_{44}(p_2 - p_3) - a_{10} l_1 r_1 - q_1 r_2 + q_2 r_1 - r_1 p_3 + q_1 r_3; \\
 \dot{q}_3 - \dot{q}_4 &= b_{52}(q_1 - q_2) + b_{54}(q_2 - q_3) - a_{10} r_1 p_1 - p_2 r_1 + p_1 r_2 - p_1 r_3 + r_1 p_3; \\
 \dot{r}_3 - \dot{r}_4 &= b_{63}(r_1 - r_2) + b_{65}(r_2 - r_3) - a_{70} p_1 q_1 - p_1 q_2 + p_2 q_1 - q_1 p_3 + p_1 q_3.
 \end{aligned}
 \tag{2.131}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
 p_1 - p_2 &= x_1; & q_1 - q_2 &= x_2; & r_1 - r_2 &= x_3; \\
 p_2 - p_3 &= x_4; & q_2 - q_3 &= x_5; & r_2 - r_3 &= x_6,
 \end{aligned}
 \tag{2.132}$$

систему (2.131) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= b_{11}x_1 + b_{14}x_4 + A_1; \\
 \dot{x}_2 &= b_{22}x_2 + b_{36}x_6 + A_2; \\
 \dot{x}_3 &= b_{33}x_3 + b_{36}x_6 + A_3; \\
 \dot{x}_4 &= b_{41}x_1 + b_{44}x_4 + A_4; \\
 \dot{x}_5 &= b_{52}x_2 + b_{54}x_5 + A_5; \\
 \dot{x}_6 &= b_{63}x_3 + b_{65}x_6 + A_6,
 \end{aligned}
 \tag{2.133}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11} &= E_1(D_3 - A_1^0 - D_1 - C_2^0 - D_4 + D_2)(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{14} &= [(A_1^0 + D_1)D_5 - D_2D_3][(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{22} &= E_1(D_3 - B_1^0 - D_1 - C_2^0 - D_4 + D_2)(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{25} &= [D_1(B_1^0 + D_1) - D_2D_3][(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{33} &= E_1(D_3 - C_1^0 - D_1 - C_2^0 - D_4 + D_2)(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{36} &= [D_3(C_1^0 + D_1) - D_2D_3][(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \quad (2.134) \\
b_{41} &= E_1(D_1 + A_1^0 - D_3)(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{44} &= [-C_3^0(A_1^0 + D_1)D_5 - D_1(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) + D_2D_3D_7][(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + \\
&\quad + D_4) - D_2D_3]^{-1} \cdot (C_3^0)^{-1}; \\
b_{52} &= E_1(D_1 + B_1^0 - D_3)(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{55} &= [-C_3^0(B_1^0 + D_1)D_5 - D_7(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) + D_2D_3D_7] \cdot [(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + \\
&\quad + D_4) - D_2D_3]^{-1} \cdot (C_3^0)^{-1}; \\
b_{63} &= E_1(D_1 + C_1^0 - D_3)(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1}; \\
b_{66} &= [-C_3^0(C_1^0 + D_1)D_5 - D_7(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) + D_2D_3D_7] \cdot [(C_1^0 + D_1) \times \\
&\quad \times (C_2^0 + D_4) - D_2D_3]^{-1} \cdot (C_3^0)^{-1}.
\end{aligned}$$

Величинами A_i ($i=1, 2, \dots, 6$), вошедшими в уравнения (2.133), обозначены нелинейные члены, а также моменты гравитационных сил \bar{Q}_x , \bar{Q}_y и \bar{Q}_z . Если предположить решение $g(t, q)$ дифференциальных уравнений (2.3) — (2.6) построенным, то, внося его в выражения моментов гравитационных сил, \bar{Q}_x , \bar{Q}_y и \bar{Q}_z , можно обратиться в функции времени $t \in R_1$. Поэтому величины A_i ($i=1, 2, \dots, 6$) будут иметь вид $f_i(t, x)$, где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ — шестимерный вектор.

Введем обозначения

$$f(t, x) = \{f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_6(t, x)\},$$

$$L = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & b_{14} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & b_{25} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 & b_{36} \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & b_{52} & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & b_{63} & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

С учетом обозначений (2.135) представим систему (2.133) в виде

$$\dot{x} = Lx + f(t, x) \quad (2.136)$$

и отметим начальные условия

$$x^0 = \{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{60}\}. \quad (2.137)$$

Каждое решение системы (2.136) можно представить интегральным уравнением [8, 52]:

$$x(t, x^0) = W(t, 0)x^0 + \int_0^t W(t, \tau)f(\tau, x(\tau, x^0))d\tau, \quad (2.138)$$

где W — оператор Коши.

Рассмотрим соответствующую (2.136) однородную систему

$$\dot{y} = Ly, \quad y^0 = x^0. \quad (2.139)$$

Очевидно, решение задачи (2.139) также выражается формулой (2.138):

$$y(t, y^0) = W(t, 0)y^0. \quad (2.140)$$

По условиям задачи постоянно действующие возмущения $f(t, x)$ в силу ограниченности решения $x(t, x_0)$ удовлетворяют неравенству

$$\|f(t, x)\| \leq F, \quad (2.141)$$

где F — некоторая постоянная; $\|\cdot\|$ — норма банахова пространства [3, 8].

С учетом неравенства (2.141) оценим накопление возмущения $f(t, x)$ на бесконечном интервале времени:

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|x(t, x^0) - y(t, y^0)\| &= \sup_{t>0} \left\| \int_0^t W(t, \tau) f[\tau, x(\tau, x^0)] d\tau \right\| \ll \\ &\ll F \int_0^t \sup_{\tau>0} \|W(t, \tau)\| d\tau = P \cdot \Phi. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Здесь

$$\Phi = \int_0^t \sup_{\tau>0} \|W(t, \tau)\| d\tau, \quad (2.143)$$

а под $\|W(t, \tau)\|$ понимается норма матрицы.

Предположим, что существуют такие положительные постоянные Φ_0 и α_0 , что

$$\|W(t, \tau)\| \ll \Phi_0 \exp[-\alpha_0(t - \tau)] \quad (2.144)$$

для любых $0 \leq \tau \leq t < \infty$.

Тогда оценка (2.142) примет вид

$$\sup_{t>0} \|x(t, x^0) - y(t, y^0)\| \ll F \cdot \Phi_0 \cdot e^{-\alpha_0 t} / \alpha_0. \quad (2.145)$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x^0) - y(t, y^0)\| = 0, \quad (2.146)$$

т. е. возмущенное движение со временем стремится к невозмущенному.

Таким образом, если матрица Коши удовлетворяет неравенству (2.144), то возмущение $f(t, x)$ не накапливается, а возмущенные и невозмущенные движения стремятся к стационарному предельному режиму по экспоненциальному закону.

Для линейной неоднородной системы (2.133) покажем справедливость оценки (2.144). С этой целью определим коэффициенты системы (2.132) с использованием геофизических данных

$$\begin{aligned} r_4 &= 3,5 \cdot 10^8 \text{ см}; \quad r_5 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ см}; \quad r_2 = 6,09 \cdot 10^8 \text{ см}; \\ r_3 &= 5,47 \cdot 10^8 \text{ см}; \quad r_1 = 6,27 \cdot 10^8 \text{ см}; \quad \mu_2 = 10^9 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\mu_1 = 10^{-1} \text{ II}; B = 3 \text{ Гс}; \sigma = 10^{-2}; \quad (2.147)$$

$$\sigma_2 = 10^{-2}; \sigma_1 = 10^{-2}; \omega_0 = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1};$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с.}$$

При вычислении моментов инерции элементов модели слоистой Земли воспользуемся распределением плотности внутри Земли [65]. Моменты элементов модели Земли определим по формуле [7]:

$$J_{xx} = \iiint_V (x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{8}{3} \pi \int_0^R \rho(r) r^4 dr \quad (2.148)$$

в предположении радиального распределения плотности $\rho(r)$ [65].

Для приближенного вычисления интегралов (2.148) можно воспользоваться формулами трапеций или Симпсона [44]. На основании табл. 3, с учетом моментов инерции для всей Земли [25] ($A = 8,01151964 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $B = 8,102855055 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $C = 8,039884391 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$) значения моментов инерции элементов модели многослойной Земли с вязкой астеносферой и жидким слоем ядра определены в следующем виде:

$$A_1 = 0,381444219 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$B_1 = 0,382779635 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$C_1 = I = 0,409808971 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2; \quad (2.149)$$

$$A_2 = B_2 = C_2 = 5,965618 \cdot 10^{41} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$A_3 = B_3 = C_3 = 1,143079 \cdot 10^{39} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

При физических и динамических параметрах (2.147), (2.149) коэффициенты (2.134) системы дифференциальных уравнений (2.133) имеют значения

$$b_{11} = -1,655432837 \cdot 10^{10}; b_{14} = 2,04205740 \cdot 10^{-7};$$

$$b_{21} = -1,652313352 \cdot 10^{10}; b_{25} = 2,041355119 \cdot 10^{-7};$$

$$b_{32} = -1,591840475 \cdot 10^{10}; b_{36} = 2,027734428 \cdot 10^{-7}; \quad (2.150)$$

$$b_{41} = 1,798698213 \cdot 10^9; b_{44} = -1,024837968 \cdot 10^{-2};$$

$$b_{51} = 1,798079325 \cdot 10^9; b_{55} = -1,024837967 \cdot 10^{-2};$$

$$b_{61} = 1,786081862 \cdot 10^9; b_{66} = -1,024837940 \cdot 10^{-2}.$$

Таблица 3. Распределение плотности внутри Земли

l	$r_l \cdot 10^{-8}$, см	ρ_l , г/см ³	$\rho_l \cdot r_l^3 \cdot 10^{-32}$, г·см
0	0	12,58	0
1	0,2	12,55	0,02008
2	0,4	12,53	0,320768
3	0,6	12,52	1,622592
4	0,8	12,58	5,128192
5	1,0	12,48	12,48000
6	1,2	12,30	25,50528
7	1,4	12,05	46,29128
8	1,6	11,92	78,11891
9	1,8	11,77	123,5567
10	2,0	11,60	185,6000
11	2,2	11,44	267,9888
12	2,4	11,23	374,2433
13	2,6	11,10	507,2133
14	2,8	10,89	669,3603
15	3,0	10,63	861,030
16	3,2	10,37	1087,373
17	3,4	10,09	1348,363
18	3,485	9,96	1469,164
19	3,485	5,53	815,7108
20	3,7	5,45	1021,117
21	4,0	5,31	1359,360
22	4,3	5,12	1750,426
23	4,6	4,95	2220,818
24	4,9	4,81	2772,869
25	5,2	4,67	3414,524
26	5,5	4,54	4154,383
27	5,7	4,36	4602,416
28	5,7	4,07	4296,292
29	5,8	3,95	4170,015
30	5,9	3,76	4556,127
31	6,0	3,59	4652,61
32	6,1	3,37	4666,048
33	6,125	3,34	4700,789
34	6,15	3,34	4778,088
35	6,175	3,35	4870,714
36	6,2	3,37	4979,625
37	6,225	3,39	5080,460
38	6,25	3,40	5187,987
39	6,270	3,44	5316,533

Вычисления корней характеристического уравнения системы (2.133) дают следующие значения:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -1,655432837 \cdot 10^9; \lambda_4 = -1,025199890 \cdot 10^{-2}; \\
 \lambda_2 &= -1,652313352 \cdot 10^{10}; \lambda_5 = -1,025199890 \cdot 10^{-2}; \\
 \lambda_3 &= -1,591840475 \cdot 10^{10}; \lambda_6 = -1,025199889 \cdot 10^{-2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.151}$$

Все корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные, поэтому для системы (2.133) выполняется оценка (2.144). Предварительно построим решение однородной системы (2.139).

В системе уравнений (2.139) первое и четвертое уравнения независимы от остальных:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= b_{11}y_1 + b_{14}y_4; \\ \dot{y}_4 &= b_{41}y_1 + b_{44}y_4. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Общее решение системы уравнений (2.152) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y_4 &= C_1 \frac{\lambda_1 - b_{44}}{b_{41}} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 - b_{44}}{b_{41}} e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Подставляя найденные значения λ_1 , λ_2 , b_{11} , b_{14} в (2.153), получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{-1,55 \cdot 10^{-3} t} + C_2 e^{-1,025 \cdot 10^{-3} t}; \\ y_4 &= C_2 \cdot 8,106 \cdot 10^{16} \cdot e^{-1,025 \cdot 10^{-3} t}, \end{aligned} \quad (2.154)$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются начальными условиями $t=0$, $y_1 = y_1^0$, $y_4 = y_4^0$ и равны

$$C_1 = y_1^0 - \frac{y_4^0}{8,106 \cdot 10^{16}}, \quad C_2 = \frac{y_4^0}{8,106 \cdot 10^{16}}.$$

При этом решение (2.154) примет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1^0 \cdot e^{-1,55 \cdot 10^{-3} t} + \frac{y_4^0}{8,106 \cdot 10^{16}} (e^{-1,025 \cdot 10^{-3} t} - e^{-1,55 \cdot 10^{-3} t}); \\ y_4 &= y_4^0 e^{-1,025 \cdot 10^{-3} t}. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Аналогично определяются решения систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= b_{22}y_2 + b_{25}y_5; \\ \dot{y}_5 &= b_{52}y_2 + b_{55}y_5; \\ \dot{y}_3 &= b_{33}y_3 + b_{36}y_6; \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$y_6 = b_{63}y_3 + b_{66}y_6. \quad (2.157)$$

Решение этих систем найдено в виде

$$y_2 = y_2^0 \cdot e^{-1.632 \cdot 10^{11} t} + \frac{y_5^0}{8,094 \cdot 10^{16}} (e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t} - e^{-1.652 \cdot 10^{11} t});$$

$$y_3 = y_3^0 \cdot e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t};$$

$$y_5 = y_5^0 \cdot e^{-1.652 \cdot 10^{11} t} + \frac{y_2^0}{7,850 \cdot 10^{16}} (e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t} - e^{-1.652 \cdot 10^{11} t});$$

$$y_6 = y_6^0 \cdot e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t}. \quad (2.158)$$

Здесь y_2 , y_3 , y_5 , y_6 определяются начальными условиями задачи.

На основании соотношений (2.155), (2.158) и (2.132) решение систем дифференциальных уравнений (2.139) примет вид

$$p_1 - p_2 = (p_1^0 - p_2^0) e^{-1.656 \cdot 10^{11} t} + \frac{(p_2^0 - p_3^0)}{8,106 \cdot 10^{16}} (e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t} - e^{-1.655 \cdot 10^{11} t});$$

$$p_2 - p_3 = (p_2^0 - p_3^0) e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t};$$

$$q_1 - q_2 = (q_1^0 - q_2^0) e^{-1.652 \cdot 10^{11} t} + \frac{(q_2^0 - q_3^0)}{8,094 \cdot 10^{16}} (e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t} - e^{-1.652 \cdot 10^{11} t});$$

$$q_2 - q_3 = (q_2^0 - q_3^0) e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t}; \quad (2.159)$$

$$r_1 - r_2 = (r_1^0 - r_2^0) e^{-1.652 \cdot 10^{11} t} + \frac{(r_2^0 - r_3^0)}{7,850 \cdot 10^{16}} (e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t} - e^{-1.652 \cdot 10^{11} t});$$

$$r_2 - r_3 = (r_2^0 - r_3^0) e^{-1.025 \cdot 10^{-3} t}.$$

Качественный анализ полученного решения (2.159) показывает, что с течением времени быстро выравниваются угловые скорости литосферы и мантии и относительно медленно — мантии и ядра. Количественно процессы выравнивания угловых скоростей литосферы и мантии, с одной стороны, мантии и ядра — с другой, отличаются на порядок exr (10^{13}). Найденный механизм взаимодействия позволяет предположить, что внешние воздействия или процессы, происходящие на поверхности Земли, приводят к периодическому перераспределению момента количества движения между слоя-

ми внутри Земли, тем самым вызывая вековые вариации элементов вращательного движения Земли.

В целях сравнения характера взаимодействия внутренних слоев Земли при наличии и в отсутствие магнитного поля рассмотрим вращения около центра масс Земли ее литосферы, мантии и ядра с учетом лишь моментов сил вязких трений о жидкие слои.

Моменты сил вязких трений литосферы и мантии об астеносферный слой имеют вид (2.43), (2.44). На основании этих формул и обозначений (2.45) можно получить выражения для моментов сил вязких трений мантии и ядра об его внешний слой, если положить

$$\begin{aligned} r_1 &\sim r_4, \quad r_2 \sim r_5, \quad \mu_1 \sim \mu_2, \quad \bar{\omega}_1 \sim \bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_3 \sim \bar{\omega}_4, \\ v_1 &\sim v_2, \quad e_1 \sim e_2, \quad \lambda_1 \sim \lambda_2, \quad N_{1k} \sim N_{1k}, \\ N_{2k} &\sim N_{2k}, \quad N_{3k} \sim N_{2k}, \quad N_{4k} \sim N_{4k}. \end{aligned} \quad (2.160)$$

При этом в отличие от уравнений (2.120) уравнения вращательного движения литосферы, мантии и ядра с учетом приложенных моментов сил вязкости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_1}{dt} &= - \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_1}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_1 r_1^3}{e_1^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \mu_1 r_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k} \exp[-v_1 \lambda_k^2 (t - \tau)/r_1^2] \right\} d\tau + \\ &+ \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_2}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_2 r_2^3}{e_2^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \mu_2 r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} \exp[-v_2 \lambda_k^2 (t - \tau)/r_2^2] \right\} d\tau; \\ \frac{d\bar{K}_2}{dt} &= - \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_2}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_2 r_2^3}{e_2^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \mu_2 r_2^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} \exp[-v_2 \lambda_k^2 (t - \tau)/r_2^2] \right\} d\tau - \\ & - \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_3}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_3 r_3^3}{e_3^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \mu_3 r_3^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp[-v_3 \lambda_k^2 (t - \tau)/r_3^2] \right\} d\tau - \\ & - \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_4}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_4 r_4^3}{e_4^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \mu_4 r_4^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{4k} \exp[-v_4 \lambda_k^2 (t - \tau)/r_4^2] \right\} d\tau + \\ & - \int_0^t \frac{d\bar{\omega}_5}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_5 r_5^3}{e_5^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi \mu_5 r_5^3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{5k} \exp[-v_5 \lambda_k^2 (t - \tau)/r_5^2] \right\} d\tau + \end{aligned} \quad (2.161)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t d\tau \left\{ \frac{8\pi p_2 r_4^2}{c_2^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi p_2 r_4^2 \sum_{k=1}^{\infty} N'_{2k} \exp[-\gamma_2 \lambda_k'^2 (t-\tau)/r_2^2] \right\} d\tau; \\
\frac{dK_3}{dt} & = \int_0^t d\tau \left\{ \frac{8\pi p_2 r_4^2}{c_2^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi p_2 r_4^2 \sum_{k=1}^{\infty} N'_{2k} \exp[-\gamma_2 \lambda_k'^2 (t-\tau)/r_2^2] \right\} d\tau - \\
& - \int_0^t d\tau \left\{ \frac{8\pi p_2 r_4^2}{c_2^3 - 1} + \frac{16}{3} \pi p_2 r_4^2 \sum_{k=1}^{\infty} N'_{2k} \exp[-\gamma_2 \lambda_k'^2 (t-\tau)/r_2^2] \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Применяя изложенные выше упрощения, из системы уравнений (2.161) в проекциях на координатные оси $Oxyz$ и разрешенном виде относительно первых производных от составляющих p_i , q_i , r_i ($i = 1, 2, 3$) векторов $\dot{\omega}_1$, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= a_1(p_2 - p_1) + a_2(p_2 - p_3) + A_1; \\
\dot{q}_1 &= a_3(q_2 - q_1) + a_4(q_2 - q_3) + A_2; \\
\dot{r}_1 &= a_5(r_2 - r_1) + a_6(r_2 - r_3) + A_3; \\
\dot{p}_2 &= a_7(p_2 - p_1) + a_8(p_2 - p_3) + A_4; \\
\dot{q}_2 &= a_9(q_2 - q_1) + a_{10}(q_2 - q_3) + A_5; \\
\dot{r}_2 &= a_{11}(r_2 - r_1) + a_{12}(r_2 - r_3) + A_6; \\
\dot{p}_3 &= a_{13}(p_2 - p_1) + a_{14}(p_2 - p_3) + A_7; \\
\dot{q}_3 &= a_{15}(q_2 - q_1) + a_{16}(q_2 - q_3) + A_8; \\
\dot{r}_3 &= a_{17}(r_2 - r_1) + a_{18}(r_2 - r_3) + A_9,
\end{aligned} \tag{2.162}$$

где A_i ($i = 1, 9$) — нелинейные члены малости выше первого порядка и

$$a_1 = \frac{E_1 + D_1 \sigma_1}{A_1^0 + D_1}, \quad a_2 = \frac{D_2 \tau_1}{A_1^0 + D_1}, \quad a_3 = \frac{E_1 + D_2 \sigma_2}{B_1^0 + D_1},$$

$$a_4 = \frac{D_2 a_{10}}{B_1^0 + D_1}; \quad a_5 = \frac{E_1 + D_2 a_{11}}{C_1^0 + D_1}; \quad a_6 = \frac{D_2 a_{17}}{C_1^0 + D_1};$$

$$a_7 = l_2/l_1; \quad a_8 = l_3/l_1; \quad a_9 = l_5/l_4; \quad a_{10} = l_6/l_4;$$

$$a_{11} = l_7/l_5; \quad a_{12} = l_9/l_7; \quad l_1 = \frac{D_2 D_3}{A_1^0 + D_1} - (C_2^0 + D_4 - D_5) -$$

$$- \frac{D_6 D_7}{C_3^0 + D_5}; \quad l_2 = E_1 - \frac{D_2 E_1}{A_1^0 + D_1}; \quad l_3 = \frac{D_6 E_2}{C_3^0 + D_5} - E_2;$$

$$l_4 = \frac{D_2 D_3}{B_1^0 + D_1} - (C_2^0 + D_4 - D_5) - \frac{D_6 D_7}{C_3^0 + D_5}; \quad l_5 = E_1 - \frac{E_1 D_2}{B_1^0 + D_1};$$

$$l_6 = \frac{D_6 E_3}{C_3^0 + D_5} - E_2; \quad l_7 = \frac{D_2 D_3}{C_1^0 + D_1} - (C_2^0 + D_4 - D_5) - \frac{D_6 D_7}{C_2^0 + D_5};$$

$$l_8 = E_1 - \frac{D_2 E_1}{C_1^0 + D_1}; \quad l_9 = \frac{E_3 D_6}{C_3^0 + D_5} - E_2; \quad a_{13} = \frac{D_2 a_7}{C_3^0 + D_5};$$

$$a_{14} = \frac{E_1 + D_7 a_5}{C_3^0 + D_5}; \quad a_{15} = \frac{D_7 a_2}{C_3^0 + D_5}; \quad a_{16} = \frac{E_2 + D_7 a_{10}}{C_3^0 + D_5};$$

$$a_{17} = \frac{D_7 a_{11}}{C_3^0 + D_5}; \quad a_{18} = \frac{E_3 + D_7 a_{12}}{C_3^0 + D_5};$$

$$E_1 = \frac{8\pi\Gamma_1}{e_1^3 - 1}; \quad E_2 = \frac{8\pi\Gamma_2}{e_2^3 - 1}; \quad \Gamma_1 = \frac{\mu_1 r_1^3}{l\omega_0};$$

$$\Gamma_2 = \frac{\mu_2 r_2^3}{l\omega_0}; \quad D_1 = d_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{1k}}{l_k^2}; \quad D_2 = d_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{2k}}{l_k^2}; \quad (2.163)$$

$$D_3 = d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{3k}}{l_k^2}; \quad D_4 = d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{4k}}{l_k^2};$$

$$d_1 = \frac{16}{3} \pi \tau_1 \frac{r_1^3 r_2^2}{l}; \quad d_2 = \frac{16}{3} \pi \tau_2 \frac{r_2^5}{l};$$

$$D_5 = d_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{1k}}{l_k^2}; \quad D_6 = d_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{2k}}{l_k^2};$$

$$D_7 = d_4 \sum_{k=1}^m \frac{N_{4k}}{b_k^2}; \quad D_8 = d_4 \sum_{k=1}^m \frac{N_{4k}}{b_k^2};$$

$$d_3 = \frac{16}{3} \tau p_2 \frac{r_2^3}{l}; \quad d_4 = \frac{16}{3} \tau p_2 \frac{r_2^3}{l}.$$

Относительно разностей (2.132) систему дифференциальных уравнений (2.162) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_{11}x_1 + b_{14}x_4 + A_1; \\ \dot{x}_2 &= b_{22}x_2 + b_{25}x_5 + A_2; \\ \dot{x}_3 &= b_{33}x_3 + b_{36}x_6 + A_3; \\ \dot{x}_4 &= b_{41}x_1 + b_{44}x_4 + A_4; \\ \dot{x}_5 &= b_{52}x_2 + b_{55}x_5 + A_5; \\ \dot{x}_6 &= b_{63}x_3 + b_{66}x_6 + A_6, \end{aligned} \quad (2.164)$$

где A_i ($i = \overline{1, 6}$) — нелинейные члены и

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_7 - a_1; & b_{14} &= a_2 - a_8; & b_{22} &= a_9 - a_3; \\ b_{25} &= a_4 - a_{10}; & b_{33} &= a_{11} - a_5; & b_{36} &= a_6 - a_{12}; \\ b_{41} &= a_{13} - a_7; & b_{44} &= a_8 - a_{14}; & b_{52} &= a_{15} - a_9; \\ b_{55} &= a_{10} - a_{16}; & b_{63} &= a_{17} - a_{11}; & b_{66} &= a_{12} - a_{18}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Проведя анализ решения уравнений движения (2.164), как это было сделано выше, при тех же геофизических данных (2.147) и динамических параметрах (2.149), получаем, что в отсутствие магнитного поля количественно процессы выравнивания угловых скоростей литосферы и мантии, с одной стороны, и мантии и ядра — с другой, отличаются на порядок $\exp(10^{11})$, при наличии же магнитного поля подобная оценка была равна $\exp(10^{13})$. Сравнивая эти оценки, можно сделать вывод, что влияние геомагнитного поля на характер взаимодействия внутренних слоев Земли заключается в ускорении процессов выравнивания их угловых скоростей.

С целью проанализировать характер взаимодействия собственно

не литосферы с подастеносферной частью Земли посредством вязкого астеносферного слоя представим ее в виде сплошного твердого шара с главными моментами инерции $A_2 = B_2 = C_2$. Главные моменты инерции абсолютно твердой литосферы обозначим через A_1, B_1, C_1 и положим, что $A_1 < B_1 < C_1$. Пусть центры литосферы и шара совпадают с центром инерции O системы тел и точкой закрепления.

Используя выражения главных моментов сил вязкости (2.43), (2.44), приложенных к литосфере и шару, записываем уравнения их движения:

$$\begin{aligned}
 \frac{dK_1^*}{dt_1} &= - \int_0^{t_1} \frac{d\omega_1^*}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_1 r_1^3}{r_1^2 - 1} + \frac{16}{3} \pi\mu_1 r_1^3 \right\} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k} \exp[-v_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau) / r_1^2] d\tau + \\
 &+ \int_0^{t_1} \frac{d\omega_2^*}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_1 r_1^3}{r_1^2 - 1} + \frac{16}{3} \pi\mu_1 r_1^3 \right\} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} \exp[-v_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau) / r_1^2] d\tau; \quad (2.166) \\
 \frac{dK_2^*}{dt_1} &= \int_0^{t_1} \frac{d\omega_1^*}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_1 r_1^3}{r_1^2 - 1} + \frac{16}{3} \pi\mu_1 r_2^3 \right\} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} \exp[-v_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau) / r_1^2] d\tau - \\
 &- \int_0^{t_1} \frac{d\omega_2^*}{d\tau} \left\{ \frac{8\pi\mu_1 r_1^3}{r_1^2 - 1} + \frac{16}{3} \pi\mu_1 r_2^3 \right\} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} N_{4k} \exp[-v_1 \lambda_k^2 (t_1 - \tau) / r_1^2] d\tau,
 \end{aligned}$$

где d/dt_1 — абсолютная производная по времени; \vec{K}_1^0 , $\vec{\omega}_1^0$ и \vec{K}_2^0 , $\vec{\omega}_2^0$ — векторы кинетического момента и мгновенной угловой скорости литосферы и шара соответственно; r_1 — радиус внутренней сферической поверхности литосферы; r_2 — радиус шара; $e_1 = r_1/r_2$; μ_1 — динамический коэффициент вязкости астеносферного слоя; λ_A — корни уравнения (2.28); N_1, N_2, N_3, N_4 определяются соотношениями (2.15).

Следуя преобразованиям раздела 2.5 при выводе уравнения (2.125), из уравнений (2.166) получаем в проекциях на подвижные оси следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (A_1^0 + D_1) \dot{p}_1 + (C_1^0 - B_1^0) q_1 r_1 &= E_1 (p_2 - p_1) + D_2 (\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1); \\ (B_1^0 + D_1) \dot{q}_1 + (A_1^0 - C_1^0) r_1 p_1 &= E_1 (q_2 - q_1) + D_2 (\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2); \\ (C_1^0 + D_1) \dot{r}_1 + (B_1^0 - A_1^0) p_1 q_1 &= E_1 (r_2 - r_1) + D_3 (\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1); \\ D_2 \dot{p}_1 &= E_1 (p_2 - p_1) + (C_2^0 + D_1) (\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1); \\ D_2 \dot{q}_1 &= E_1 (q_2 - q_1) + (C_2^0 + D_1) (\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2); \\ D_3 \dot{r}_1 &= E_1 (r_2 - r_1) + (C_2^0 + D_1) (\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned} \quad (2.167)$$

Здесь введены обозначения

$$D_1 = d_1 \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k} / \lambda_k^2; \quad D_2 = d_2 \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} / \lambda_k^2;$$

$$D_3 = d_3 \sum_{k=1}^{\infty} N_{3k} / \lambda_k^2; \quad D_4 = d_4 \sum_{k=1}^{\infty} N_{4k} / \lambda_k^2;$$

$$d_1 = \frac{16}{3} \pi \rho_1 \frac{r_1^2 r_2^2}{I}; \quad d_2 = \frac{16}{3} \pi \rho_1 \frac{r_2^2}{I};$$

$$E_1 = \frac{8\pi}{r_1^2 - 1} \cdot \frac{\mu_1 r_1^3}{7\mu_0}; \quad A_1^0 = \frac{A_1}{I}; \quad B_1^0 = \frac{B_1}{I};$$

$$C_1^0 = \frac{C_1}{I}; \quad C_2^0 = \frac{A_2}{I} = \frac{B_2}{I} = \frac{C_2}{I};$$

где I — момент инерции литосферы какой-нибудь оси; A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции литосферы; $A_2=B_2=C_2$ — главные моменты инерции шара.

Система уравнений (2.167) разрешима относительно первых производных от составляющих $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{E_1(C_2^0 + D_3 - D_2)}{(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} (p_2 - p_1) - \frac{(C_1^0 - B_1^0)(C_2^0 + D_4)}{(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} q_1 r_1; \\ \dot{q}_1 &= \frac{E_1(C_2^0 + D_4 - D_2)}{(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} (q_2 - q_1) + \frac{(C_1^0 - A_1^0)(C_2^0 + D_4)}{(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} r_1 p_1; \\ \dot{r}_1 &= \frac{E_1(C_2^0 + D_4 - D_2)}{(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} (r_2 - r_1) - \frac{(B_1^0 - A_1^0)(C_2^0 + D_4)}{(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} p_1 q_1; \\ \dot{p}_2 &= \frac{E_1(A_1^0 + D_1 - D_2)}{(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} (p_1 - p_2) - \frac{D_2(A_1^0 - B_1^0)}{(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} q_1 r_1 - \\ &\quad - (q_1 r_2 - q_2 r_1); \\ \dot{q}_2 &= \frac{E_1(B_1^0 + D_1 - D_2)}{(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} (q_1 - q_2) - \frac{D_2(A_1^0 - C_1^0)}{(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} r_1 p_1 - \\ &\quad - (p_2 r_1 - p_1 r_2); \\ \dot{r}_2 &= \frac{E_1(C_1^0 + D_1 - D_2)}{(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} (r_1 - r_2) - \frac{D_2(B_1^0 - A_1^0) p_1 q_1}{(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3} - \\ &\quad - (p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned} \quad (2.168)$$

Из системы уравнений (2.168) находим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 - \dot{p}_2 &= a_1(p_1 - p_2) - b_1 q_1 r_1 + (q_1 r_2 - q_2 r_1); \\ \dot{q}_1 - \dot{q}_2 &= a_2(q_1 - q_2) + b_2 r_1 p_1 + (p_2 r_1 - p_1 r_2); \\ \dot{r}_1 - \dot{r}_2 &= a_3(r_1 - r_2) - b_3 p_1 q_1 + (p_1 q_2 - p_2 q_1), \end{aligned} \quad (2.169)$$

где

$$a_1 = \frac{E_1(D_2 + D_3 - C_2^0 - A_1^0 - D_4 - D_1)}{(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3}; \quad a_2 = \frac{E_1(D_2 + D_3 - C_2^0 - B_1^0 - D_4 - D_1)}{(B_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3};$$

$$a_0 = \frac{E_1(D_2 + D_3 - C_2^0 - C_1^0 - D_4 - D_1)}{(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3}; \quad b_1 = \frac{(C_1^0 - B_1^0)(C_2^0 + D_4 - D_3)}{(A_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3};$$

$$b_2 = \frac{(C_1^0 - A_1^0)(C_2^0 + D_4 - D_3)}{(B_1^0 - D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3}; \quad b_3 = \frac{(B_1^0 - A_1^0)(C_2^0 + D_4 - D_3)}{(C_1^0 + D_1)(C_2^0 + D_4) - D_2 D_3}.$$

Введем обозначения: $x_1 = p_1 - p_2$, $x_2 = q_1 - q_2$, $x_3 = r_1 - r_2$ и соотношения (2.169) запишем в виде

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 + A_1; \quad \dot{x}_2 = a_2 x_2 + A_2; \quad \dot{x}_3 = a_3 x_3 + A_3, \quad (2.170)$$

где A_1, A_2, A_3 — нелинейные члены.

Момент инерции шара определяем по формуле (2.148), пользуясь радиальным распределением плотности внутри Земли согласно табл. 3. Применяя численное интегрирование, получаем

$$A_1 = B_1 = C_1 = 6,89028057 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^2. \quad (2.171)$$

При физических и динамических параметрах (2.147), (2.149) и (2.171) корни характеристического уравнения системы уравнений первого приближения (2.170) равны:

$$\lambda_1 = a_1 = -1,630 \cdot 10^{10}; \quad \lambda_2 = a_2 = -1,620 \cdot 10^{10}; \quad \lambda_3 = a_3 = -1,560 \cdot 10^{10}. \quad (2.172)$$

При вариациях коэффициентов вязкости μ_1 и начальных скоростей, не нарушающих условий постановки задачи, сохраняется отрицательность корней характеристического уравнения системы (2.170). Следовательно, нулевое решение системы уравнений (2.170) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при $t \rightarrow \infty$ [43], поэтому решение данной системы представимо в виде

$$p_1 - p_2 = (p_1^0 - p_2^0) \cdot e^{-1,630 \cdot 10^{10} t};$$

$$q_1 - q_2 = (q_1^0 - q_2^0) \cdot e^{-1,620 \cdot 10^{10} t};$$

$$r_1 - r_2 = (r_1^0 - r_2^0) \cdot e^{-1,560 \cdot 10^{10} t}. \quad (2.173)$$

При $t \rightarrow \infty$ из равенств (2.173) ввиду отрицательности всех показателей имеем: $p_1 - p_2 \rightarrow 0$; $q_1 - q_2 \rightarrow 0$; $r_1 - r_2 \rightarrow 0$, иными словами, с течением времени происходит выравнивание угловых скоростей ω_1, ω_2 литосферы и шара. Численный анализ показывает, что чем боль-

ше вязкость астеносферного слоя, разделяющего литосферу и шар, тем быстрее выравниваются их угловые скорости, а также чем меньше величины разностей начальных угловых скоростей этих элементов Земли, тем больше скорость их выхода на предельный режим вращения.

При тех же геофизических данных (2.147) и динамических параметрах (2.149) решение системы уравнений имеет вид

$$p_1 - p_2 = (p_1^0 - p_2^0) \cdot e^{-1,63 \cdot 10^{11} t} - \frac{p_2^0 - p_3^0}{3,032 \cdot 10^{18}} (e^{-1,211 \cdot 10^{-5} t} - e^{-1,736 \cdot 10^{11} t});$$

$$q_1 - q_2 = (q_1^0 - q_2^0) e^{-1,63 \cdot 10^{11} t} - \frac{q_2^0 - q_3^0}{3,028 \cdot 10^{18}} (e^{-4,11 \cdot 10^{-5} t} - e^{-1,593 \cdot 10^{11} t});$$

$$r_1 - r_2 = (r_1^0 - r_2^0) e^{-1,211 \cdot 10^{11} t} - \frac{r_2^0 - r_3^0}{2,938 \cdot 10^{18}} (e^{-1,211 \cdot 10^{-5} t} - e^{-1,211 \cdot 10^{11} t});$$

(2.174)

$$p_2 - p_1 = (p_2^0 - p_3^0) e^{-4,214 \cdot 10^{-5} t};$$

$$q_2 - q_1 = (q_2^0 - q_3^0) e^{-4,11 \cdot 10^{-5} t};$$

$$r_2 - r_3 = (r_2^0 - r_3^0) e^{-1,211 \cdot 10^{-5} t}.$$

Сопоставление равенств (2.173) и (2.174) показывает, что качественно картина взаимодействия собственно литосферы с подастеносферной частью Земли посредством вязкого астеносферного слоя имеет тот же вид, как и в случае взаимодействия литосферы, мантии и ядра посредством разделяющих их жидких слоев астеносферы и внешнего ядра.

2.7. Качественный анализ поступательно-вращательного движения Земли

Ранее было доказано, что возмущения, действующие на Землю в виде момента гравитационных сил, силы вязкого трения и сопротивления, не накапливаются. Согласно оценке (2.149) и предельному соотношению (2.146), указанные возмущения ослабевают, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$. Действительно, в силу оценки (2.144), имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y^0)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t, 0)x^0\| \ll$$

$$\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|x^0\| \cdot \|W(t, 0)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|x^0\| \cdot \Phi_0 e^{-\alpha t} = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y^0)\| = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x^0)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y^0)\| = 0, \quad (2.175)$$

иначе говоря, угловые скорости ω_1 , ω_2 и ω_3 литосферы, мантии и ядра выравниваются с течением времени. При этом выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, x)\| = 0 \quad (2.176)$$

равномерно по x . Тогда вместе с нелинейными членами обращается в нуль и момент \ddot{Q}_g гравитационных сил, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (2.177)$$

Равенство (2.176) выражает, что с течением времени деформативные жидкие слои Земли как бы затвердевают, превращая ее в твердое тело. Согласно равенству (2.177), этому предельному состоянию Земли соответствует ее перманентное вращение с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. При этом предельное вращение происходит вокруг оси, постоянной как в пространстве, так и в теле Земли, ибо по формуле (2.75)

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} = \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} = 0.$$

Следовательно, вектор $\vec{\Omega}$ в теле Земли занимает положение одной из ее главных центральных осей инерции, а его положение в пространстве определяется из равенств (2.177).

С учетом равенств (2.177) рассмотрим первые интегралы задачи о движении системы G_g . Из их числа интегралы о движении центра инерции G_{g_0} не зависящие от вращения, остаются без изменения, а интегралы моментов и энергии соответственно принимают вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n M_i (\mathbf{r}_i^T(t) - \mathbf{r}_i^T(t_0)) = C_{10};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n M_i(u_i^2 - x_i^2) = c_{20}; \quad (2.178)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n M_i(v_i^2 - u_i^2) = c_{30};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n M_i(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) - U \right] = h_0,$$

где c_{10} , c_{20} , c_{30} и h_0 — постоянные величины.

Силовая функция U системы G_n , согласно равенствам (2.177), становится как бы не зависящей от углов Эйлера. Это совместно с соотношениями (2.178) означает, что с течением времени система G_n выходит на предельный режим, т. е.:

— тела M_0, M_1, \dots, M_n движутся как материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона;

— Земля вращается вокруг одной из своих главных центральных осей инерции с постоянной угловой скоростью Ω .

В этой ситуации остается открытым вопрос: какая из главных осей инерции Земли избирается за ось ее вращения около центра масс? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо исследовать устойчивость предельных режимов вращения Земли:

$$\begin{aligned} \text{а) } p(t) &= 0, \quad q(t) = 0, \quad r(t) = \Omega; \\ \text{б) } p(t) &= 0, \quad q(t) = \Omega, \quad r(t) = 0; \\ \text{в) } p(t) &= \Omega, \quad q(t) = 0, \quad r(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Эти исследования проведены в 4-й главе.

ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗЕМЛИ С УПРУГОДЕФОРМИРУЕМОЙ ЛИТОСФЕРОЙ

В неограниченной постановке задачи и тел исследовано поступательно-вращательное движение сплошной Земли с упругой литосферой. Получены соответствующие уравнения движения, доказана их корректная разрешимость и проведен качественный анализ решения.

Отметим некоторые исторические аспекты исследуемых вопросов. Вплоть до конца XIX в. влияние свойств упругости вещества Земли на ее движение не было известно. Открытое С. Чендлером (1891 г.) удлинение свободного эйлерова периода движения полюса положило начало изучению влияния механических свойств вещества Земли на ее движение. Так, С. Ньюкомб (1892 г.) дал качественную картину свободного колебания полюса Земли, затем А. Лява предложил аппарат безразмерных чисел, отражающих некоторые механические свойства вещества Земли.

Определение значений чисел Лява h^* , k^* и l^* относится к теории упругости и в них вкладывается следующий смысл: h^* — отношение высоты прилива земной коры к высоте статического океанического прилива; k^* — отношение добавочного гравитационного потенциала, вызванного деформацией, к главной части силовой функции Земли; l^* — число Шиды, определяемое равенством $l^* = \Lambda^* - k^* - 1$, где Λ^* — коэффициент приливного колебания отвесной линии относительно оси вращения Земли.

Приведем значения чисел Лява для различных моделей Земли (табл. 4) [41, 53].

Последние две строки табл. 4 дают значения чисел Лява для так называемой «реальной» Земли. Однако, проанализировав многие геофизические процессы и их влияние на вращение Земли, Г. Джеффрис указал на необходимость создания теории деформации Земли (но не в рамках чисел Лява) в зависимости от различ-

ных внешних и внутренних факторов, основанной на решениях уравнения Ливуилля с различными правыми частями и на оценке влияния упругости Земли на это решение. Так появилась серия работ Г. Джеффриса, в которых исследовалось вращение Земли с упругой сферической литосферой и жидким ядром.

Т а б л и ц а 4. Упругие свойства моделей Земли

Модель Земли	h^*	k^*	l^*
Абсолютно твердая	0,000	0,000	0,00
Однородно жидкая	2,000	1,000	0,23
Модель Буллена I	0,587	0,290	0,068
Модель Буллена II	0,610	0,281	0,082

Эта модель Земли была положена в основу теории нутации земной оси М. С. Молоденского, предсказавшего существование различных периодов в спектре частот чендлеровского колебания полюса. В дальнейшем обнаружилась нестабильность спектра частот, что в свою очередь выдвинуло модель Земли с затухающим чендлеровским периодом движения полюса. Однако эта модель Земли, связанная с проблемой диссипации энергии, осталась неразработанной.

Резюмируя изложенное, проблему исследования движения слоистой Земли с упругой литосферой следует считать открытой. Именно этой проблеме посвящена настоящая глава.

3.1. Дифференциальные уравнения движения слоистой Земли с упругой литосферой и их разрешимость

Рассмотрим систему G_n материальных точек O_1, O_2, \dots, O_n с массами M_1, M_2, \dots, M_n слоистой Земли с массой M и упругой литосферой, взаимодействующих между собой по закону тяготения Ньютона. Обозначим через V_0, S_0 объем и поверхность Земли в момент времени $t=0$, а через V_t, S_t — объем и поверхность Земли в произвольный момент времени t . Пусть $\{v\}, \{r\}$ — поля скоростей и радиусов векторов вещества Земли с плотностью $\rho(r)$, заключенного в ее объеме V_t относительно некоторой инерциальной системы отсчета $O^* \xi \eta \zeta$. Очевидно,

$$M = \int_{V_0} \rho dV_0 = \int_{V_t} \rho dV_t = \text{const}, \quad (3.1)$$

а интегралы

$$\vec{I}_t = \int_{V_t} \rho(\vec{r}) \vec{v} dV_t, \quad \vec{K}_t = \int_{V_t} \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{v}) dV_t, \quad (3.2)$$

выражают количество движения и момент количества движения Земли в момент времени t . Напишем выражения производных по времени t величин (3.2):

$$\frac{d}{dt} \vec{I}_t = \int_{V_t} \vec{F}_{t,p}(\vec{r}) dV_t; \quad \frac{d}{dt} \vec{K}_t = \int_{V_t} \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{F}_t) dV_t, \quad (3.3)$$

где \vec{F}_t — плотность внешних массовых сил, действующих в объеме V_t Земли.

Обозначив через

$$\vec{R}_t = \int_{V_t} \vec{F}_{t,p}(\vec{r}) dV_t; \quad \vec{Q}_t = \int_{V_t} \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{F}_t) dV_t, \quad (3.4)$$

главный вектор и главный момент всех внешних действующих на Землю сил, из системы (3.3) получим дифференциальные уравнения движения Земли, рассматриваемой как абсолютно твердое тело (жесткое целое):

$$\frac{d}{dt} \vec{I}_t = \vec{R}_t; \quad \frac{d}{dt} \vec{K}_t = \vec{Q}_t. \quad (3.5)$$

Учитывая, что внешними массовыми силами являются силы взаимодействия по закону Ньютона частиц Земли и тел M_i ($i=1, 2, \dots, n$), получаем выражения для \vec{R}_t и \vec{Q}_t : $\vec{R}_t = \text{grad } U_E^{(t)}$; $\vec{Q}_t = \vec{r} \times \text{grad } U_E^{(t)}$, где градиент берется по декартовым инерциальным координатам центра масс Земли, а ее силовая функция U_E в момент времени t имеет вид

$$U_E^{(t)} = G \sum_{i=1}^n M_i \int_{V_t} \frac{\rho(\vec{r}) dV_t}{|\vec{r}_i - \vec{r}|}, \quad (3.6)$$

Здесь G — постоянная гравитации, а величина $|\vec{r}_i - \vec{r}|$ выражает расстояние между телом O_i и частицей Земли с радиусом-вектором \vec{r} .

На основании выражения силовой функции абсолютно твердой Земли запишем представление $U_E^{(t)}$ в виде ряда

$$U_E^{(t)} = G \sum_{l=1}^n \frac{M_l M}{r_{0l}^2} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_l}{r_{0l}} \right)^m P_m(\cos \beta_l) J_m^{(t)} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{a_l}{r_{0l}} \right)^m P_{m,k}(\cos \beta_l) \left(C_{m,k}^{(t)} \cos k\alpha_l + S_{m,k}^{(t)} \sin k\alpha_l \right) \right], \quad (3.7)$$

где a_l — радиус минимальной сферы с центром в точке O , целиком охватывающей Землю, а коэффициенты разложения выражаются интегралами

$$J_m^{(t)} = \frac{1}{Ma_l^m} \int_{V_l} \rho(\vec{r}) r^m P_m(\cos \beta) dV_l; \\ C_{m,k}^{(t)} = \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \frac{1}{Ma_l^m} \int_{V_l} \rho(\vec{r}) r^m P_{m,k}(\cos \beta) \cos k\alpha \cdot dV_l; \quad (3.8) \\ S_{m,k}^{(t)} = \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \frac{1}{Ma_l^m} \int_{V_l} \rho(\vec{r}) r^m P_{m,k}(\cos \beta) \sin k\alpha \cdot dV_l.$$

Здесь r , α , β — координаты текущей точки объема V_l Земли.

Если плотность $\rho(\vec{r})$ с областью определения V_l является интегрируемой функцией своих координат, то интегралы (3.8) существуют и однозначно определяют коэффициенты ряда (3.7).

Ряд (3.7) в каждой точке пространства вне области, ограниченной сферой S_l радиуса a_l , сходится абсолютно и равномерно. При этом имеет место оценка [18, 23]:

$$|W_{ll}^{(t)}| < G \frac{M_l M}{r_{0l}^2} \left(\frac{a_l}{r_{0l}} \right)^l \left(1 - \frac{a_l}{r_{0l}} \right)^{-1}, \quad (3.9)$$

где $W_{ll}^{(t)}$ выражает сумму остатка ряда (3.7), начинающегося членами с номером $l+1$, т. е.

$$W_{ll}^{(t)} = \frac{GM_l M}{r_{0l}^2} \left[\sum_{m=l+1}^{\infty} \left(\frac{a_l}{r_{0l}} \right)^m P_m(\cos \beta_l) J_m^{(t)} + \right.$$

$$\left[\sum_{m=1}^x \sum_{k=1}^m \left(\frac{a_k}{a} \right)^m P_{mk}(\cos \beta_1) \left(C_{mk}^{(1)} \cos k\alpha_1 + S_{mk}^{(1)} \sin k\alpha_1 \right) \right].$$

Дифференциальные уравнения (3.5) с неопределенными коэффициентами (3.8) являются незамкнутыми. В целях замыкания системы (3.5) запишем уравнения движения индивидуальной частицы Земли с плотностью $\rho(\vec{r})$. Для этого в данный момент времени t зафиксируем произвольную точку с координатами (x, y, z) Земли и проведем через нее оси, параллельные осям декартовой системы $O^* \xi \eta \zeta$. На этих осях отложим бесконечно малые отрезки $d\xi, d\eta, d\zeta$ и построим бесконечно малый тетраэдр. Внешнюю нормаль к грани этого тетраэдра, непараллельной координатным плоскостям системы $O^* \xi \eta \zeta$, обозначим через \vec{e} :

$$\vec{e} = \vec{e}_1 \cos(\vec{e}, \vec{e}_1) + \vec{e}_2 \cos(\vec{e}, \vec{e}_2) + \vec{e}_3 \cos(\vec{e}, \vec{e}_3). \quad (3.10)$$

Здесь $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты координатных осей $O^* \xi, O^* \eta$ и $O^* \zeta$.

Напряжения на площадках с нормальными $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}$ обозначим через $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ и $\vec{\sigma}$, а площадь грани с нормалью \vec{e} — через ΔS . Тогда площади других граней будут равны $\Delta S \cos(\vec{e}, \vec{e}_1), \Delta S \cos(\vec{e}, \vec{e}_2), \Delta S \cos(\vec{e}, \vec{e}_3)$, а объем ΔV тетраэдра — $\Delta V = \frac{1}{3} \Delta h \times \Delta S$, где Δh — высота тетраэдра, опущенная из вершины на грань с нормалью \vec{e} . Учитывая свойство непрерывности внутренних напряжений тела, при $\Delta V \rightarrow 0$ имеем равенство

$$\vec{\tau}_e = \vec{\tau} \cos(\vec{e}, \vec{e}_1) + \vec{\sigma}_1 \cos(\vec{e}, \vec{e}_1) + \vec{\sigma}_2 \cos(\vec{e}, \vec{e}_2) + \vec{\sigma}_3 \cos(\vec{e}, \vec{e}_3), \quad (3.11)$$

связывающее напряжение на произвольной площадке с напряжениями на площадках, параллельных координатным плоскостям системы $O^* \xi \eta \zeta$.

Обозначив через $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3, \vec{\tau}_e$ вектора пар напряжений, возникающих на гранях с нормальными $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и \vec{e} , аналогично (3.11) получим формулу связи между этими парами. Запишем их в виде

$$\vec{\tau}_e = \vec{e} \cdot \overset{\Delta}{\sigma}; \quad \vec{\tau}_e = \overset{\Delta}{\tau} \cdot \vec{e}, \quad (3.12)$$

где $\overset{\Delta}{\sigma}, \overset{\Delta}{\tau}$ — тензоры напряжений и пар напряжений.

Пусть \vec{L}_i, \vec{J}_i — плотности внутренних сил самогравитации и объемных сил инерции, соответствующих движению Земли как твердого тела; \vec{W}_i, \vec{N}_i — плотности моментов сил \vec{L}_i, \vec{J}_i и \vec{u}, \vec{w} — векторы перемещений и поворотов, соответствующих деформации Земли.

Для равновесия выделенного объема ΔV Земли необходимо и достаточно, чтобы результирующая сила и результирующий момент всех сил и моментов, примененных в точке с плотностью $\rho(\vec{r})$, при $\Delta V \rightarrow 0$ были бы равны нулю. Отсюда вытекают дифференциальные уравнения движения частицы Земли с упругой литосферой:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho(\vec{r})(\vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i) &= \rho(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}; \\ \nabla \cdot (-\vec{\sigma} \times \vec{r} + \vec{\tau}) + \rho(\vec{r})(\vec{Q}_i + \vec{W}_i + \vec{N}_i) &= \eta(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ — дифференциальный оператор Гамильтона и $\eta(\vec{r})$ — момент инерции Земли, отнесенный к единице ее объема.

Обозначив через $\vec{\sigma}$ вектор тензора напряжений $\vec{\sigma}$, второе уравнение системы (3.13) можно привести к виду [51, 57]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho(\vec{r})(\vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i) &= \rho(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}; \\ \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho(\vec{r})(\vec{Q}_i + \vec{W}_i + \vec{N}_i) &= \eta(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Далее необходимо установить связь между кинематическими величинами \vec{u}, \vec{w} и силовыми величинами $\vec{\sigma}, \vec{\tau}$. Для этого достаточно воспользоваться принципом возможных перемещений [7], предположив существование потенциальной энергии упругой деформации с плотностью τ изотропной Земли. При этом, вводя единичный тензор \hat{I} и тензоры

$$\hat{E} = \nabla \vec{u} - 2\vec{w}_a, \quad \hat{P} = \nabla \vec{w}, \quad \hat{x}_a = -\frac{1}{2} \hat{I} \times \vec{w}, \quad (3.15)$$

следуя [51], будем иметь закон малых упругих деформаций

$$\vec{\sigma} = \lambda \text{tr} \hat{E} \cdot \hat{E}_a + 2\mu \hat{E}_a + 2\eta_2 \hat{E}_a; \quad (3.16)$$

$$\vec{\tau} = \lambda_1 \overset{\Delta\Delta}{H} \cdot \overset{\Delta}{P}_c + 2\mu_1 \overset{\Delta}{P}_c + 2\mu_2 \overset{\Delta}{P}_{\Sigma},$$

где две точки означают двойное скалярное произведение, нижние индексы a и c — антисимметричные и симметричные составляющие соответствующих тензоров, а коэффициенты $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ — упругие характеристики Земли с однородной изотропной литосферой.

Дифференциальные уравнения (3.5), (3.14) и соотношения (3.15), (3.16) образуют полную замкнутую систему уравнений по-ступательно-вращательного движения Земли с упругой литосферой. Дифференциальные уравнения (3.14) и соотношения (3.15), (3.16) образуют систему уравнений линейной моментной теории упругости, учитывающей помимо напряжений и пары напряжений.

Заметим, что полная система (3.5), (3.14), (3.15), (3.16) включает обыкновенные дифференциальные уравнения (3.5) и дифференциальные уравнения в частных производных (3.15). По-видимому, такая модельная система уравнений нова и получена впервые. По отношению к ней должны быть поставлены краевые — начально-граничные условия. Корректность постановки соответствующих краевых задач последует ниже. Отметим некоторые частные случаи этих уравнений.

Предварительно рассмотрим выражение абсолютной скорости \vec{v}_a частицы $\rho(r)$:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_\Sigma + \vec{v}_d; \quad \vec{v}_\Sigma = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad \vec{v}_d = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.17)$$

где \vec{v}_Σ — скорость частицы при жестком перемещении Земли как твердого тела; \vec{v}_d — скорость частицы при деформации содержащего ее элементарного объема. Как известно, скорость \vec{v}_Σ частицы складывается из скорости движения \vec{v}_0 центра масс Земли и скорости переносного движения частицы при ее вращении около центра масс с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Последняя формула из выражения (3.17) имеет аналогичный смысл. Очевидно, скоростью \vec{v}_d можно пренебречь по сравнению со скоростью \vec{v}_Σ частицы, т. е.

$$|\vec{v}_d| \ll |\vec{v}_\Sigma|. \quad (3.18)$$

Тогда количество движения \vec{I}_t Земли определяется количеством движения \vec{I}_0 абсолютно твердой Земли. С учетом этого рас-

смотрим момент количества движения: $\vec{K}_T = \vec{r}_0 \times \vec{I}_0 + \int_V (\vec{r} \times \vec{v}_d) \times$

$\times \rho(\vec{r}) dV$, $= \vec{K}_0 + \vec{K}_d$, где \vec{K}_0 — момент количества движения твердой Земли; \vec{K}_d — момент количества движения Земли при ее малой упругой деформации. Из неравенства (3.16) следует, что

$$|\vec{K}_d| \ll |\vec{K}_0|. \quad (3.19)$$

Оценки (3.18) и (3.19) существенно упрощают уравнения (3.14), так как они эквивалентны следующему утверждению: за деформацию ответственны объемные силы инерции, соответствующие движению Земли как абсолютно твердого тела, и объемные моменты этих сил, а также силы самогравитации и их моменты.

Пусть при $t=0$ Земля имеет сферическую форму со сферическим распределением масс, т. е. $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$. Тогда объемные силы инерции и самогравитации в силу симметрии тела имеют нулевые моменты. Поэтому $\vec{\omega}$ будет нулевым вектором, $\hat{\sigma}$ — нулевым тензором, как обычно, $\hat{\sigma}$ — симметричным тензором и $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$. При этом, пренебрегая влиянием сил инерции $\rho(\vec{r}) \partial^2 \vec{u} / \partial t^2$, можно построить двухпараметрическое решение уравнений (3.14) и (3.16), зависящее от v_0 и ω как от параметров [51, 57].

Аналогичная ситуация сохраняется, если учесть лишь главные члены разложения силовой функции Земли, соответствующие номерам $l=1, 2$, в ряд (3.7). Решение этой задачи получено в работе [20].

Иследуем разрешимость задачи о поступательно-вращательном движении Земли с упругой литосферой. Предположим заданными положения и скорости центров масс тел M_i ($i=0, 1, \dots, n$) системы G_n в момент времени $t=0$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i|_{t=0} &= \vec{r}_{i0}; & \dot{\vec{r}}_i|_{t=0} &= \dot{\vec{r}}_{i0}; & \vec{r}'_i|_{t=0} &= \vec{r}'_{i0}; \\ \vec{r}_i|_{t=0} &= \vec{r}_{i0}; & \dot{\vec{r}}_i|_{t=0} &= \dot{\vec{r}}_{i0}; & \vec{r}'_i|_{t=0} &= \vec{r}'_{i0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Каждая из материальных точек M_i ($i=1, 2, \dots, n$) имеет силовую функцию U_i :

$$U_i = G \left[\sum_{1 \leq l < m} \frac{M_l M_m}{r_{lm}} - \frac{M_i M}{r_{oi}} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{r_{oi}} \right)^n P_n(\cos \beta_i) \right] \times \right.$$

$$\times \left[J_m^{(t)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{a_k}{r_{kl}} \right)^m P_{mk}(\cos \beta_k) \left(C_{mk}^{(t)} \cos k\alpha_k + S_{mk}^{(t)} \sin k\alpha_k \right) \right], \quad (3.21)$$

градиент которой по координатам (ξ_i, η_i, ζ_i) тела определяет главный вектор \vec{F}_i приложенных к M_i сил, т. е.

$$\vec{F}_i = \text{grad}_i U_i. \quad (3.22)$$

Следовательно, дифференциальные уравнения движения тел M_i имеют вид

$$M_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \partial U_i / \partial \xi_i; \quad M_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = \partial U_i / \partial \eta_i; \quad M_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \partial U_i / \partial \zeta_i. \quad (3.23)$$

Пусть модель Земли состоит из тех же пяти основных слоев: упругой литосферы, вязкой астеносферы, твердой мантии, вязкого внешнего ядра и твердого внутреннего ядра, имеющих центры масс в центре масс Земли и не меняющих их положения во все время движения Земли. Эти кинематические условия обеспечиваются силами реакции связей. Предположим, что литосфера в момент времени $t=0$ имеет форму сферической оболочки с внешним и внутренним радиусами r_0 и r_1 , причем она сохраняет внутреннюю поверхность в виде сферы с радиусом $r=r_1$ во все время движения Земли. Эти кинематические условия также обеспечиваются силами реакции связей. Допустим, что в начальный момент времени литосфера вращается с угловой скоростью

$$\vec{\omega}_1|_{t=0} = \vec{\omega}_{10}. \quad (3.24)$$

На ее внешней границе $r=r_0$ зададим нулевые нагрузки

$$(\vec{e} \cdot \vec{\sigma})|_{r=r_0} = \vec{0}; \quad (\vec{e} \cdot \vec{\tau})|_{r=r_0} = \vec{0}, \quad (3.25)$$

на внутренней границе $r=r_1$ — силы \vec{F}_e ее трения об астеносферу и моменты \vec{M}_e этих сил:

$$\vec{F}_e|_{r=r_1} = \vec{F}^*; \quad \vec{M}_e|_{r=r_1} = \vec{M}^*, \quad (3.26)$$

определенные выражениями (2.33), (2.43), и начальные условия

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{t=0} &= \vec{0}; & \vec{\omega}|_{t=0} &= \vec{0}; \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \vec{0}; & \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $\hat{0}$ и $\vec{0}$ — нулевой тензор и нулевой вектор; \vec{e} — внешняя нормаль сферы $r=r_0$.

Дифференциальные уравнения движения центра масс Земли имеют вид

$$M \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} + R_i; \quad M \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0} + R_0; \quad M \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0} + R_0. \quad (3.28)$$

Здесь R_i , R_0 , R_0 — составляющие сил реакции связей, обеспечивающих кинематические условия на положения твердых частей и форму внутренней поверхности литосферы.

Дифференциальные уравнения мантии и внутреннего ядра, вращающихся при $t=0$ с начальными угловыми скоростями

$$\vec{\omega}_2|_{t=0} = \vec{\omega}_{20}; \quad \vec{\omega}_3|_{t=0} = \vec{\omega}_{30}, \quad (3.29)$$

имеют вид (2.120).

Тогда будет сформулирована полная система уравнений движения тел M_i ($i=1, 2, \dots, n$), поступательного движения Земли и вращения ее твердых частей, удовлетворяющих крайним условиям (3.20), (3.24)–(3.27), (3.29) и кинематическим условиям связи.

Отметим, что в начальный момент времени система имеет полную энергию:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n M_i (\dot{x}_{i0}^2 + \dot{y}_{i0}^2 + \dot{z}_{i0}^2) + \frac{1}{2} A_0 \omega_0^2 - U_0 = h^*, \quad (3.30)$$

где ω_0 — модуль результирующей угловой скорости вращения сферической Земли; A_0 — ее момент инерции относительно этой оси вращения, а

$$U_0 = G \sum_{0 < i < j < n} \frac{M_i M_j}{(x_{i0} - x_{j0})^2 + (y_{i0} - y_{j0})^2 + (z_{i0} - z_{j0})^2}.$$

Для доказательства разрешимости сформулированной краевой задачи необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1 — несовместимость тел системы $G_n: r_{ij} > 0$ для всех $i \neq j = 1, 2, \dots, n$; $r_{0j}(t) > a_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$; 2 — знакоопределенная положительность квадратичной формы, описывающей плотность потенциальной энергии упругой деформации литосферы.

Необходимость 1-го условия вытекает из того, что правые части уравнений движения зависят от обратных величин расстояний r_{ij} .

Необходимость 2-го условия также очевидна, ибо уравнения упру-

гой деформации литосферы были получены при этих допущениях. Достаточность 1-го условия проверяется так же, как в работе [24]. Достаточность 2-го условия при доказательстве единственности решения проверяется, как в классической теории упругости, методом рассуждений от противного, а при доказательстве существования решения — методом, приведенным в работе [51]. Схема этого метода такова: при помощи плотности τ потенциальной энергии деформации строится пространство возможных решений; доказываются, что это пространство совпадает с пространством Соболева W_2^2 ; строятся энергетические неравенства, на основании которых устанавливается, что операторы упругой деформации литосферы переводят шар в самого себя; проверяется условие теоремы Боля — Брауэра о неподвижных точках подобных операторов.

Итак, поставленная задача о поступательно-вращательном движении слюистой Земли с упругой литосферой корректно разрешима. С учетом этого исследуем вопросы об эволюции и предельных режимах вращения Земли.

3.2. Работа внутренних сил. Закон сохранения энергии

Как уже отмечалось, компоненты тензоров напряжений $\overset{\Delta}{\sigma}$ и пар напряжений $\overset{\Delta}{\tau}$, векторы перемещений \vec{u} и поворотов $\vec{\omega}$ являются непрерывными вместе с их частными производными по пространственным координатам и времени функциями в объеме V_i^* литосферы. Приняв это во внимание, обе части уравнений количества движения (3.14) скалярно умножим на вектор $\vec{dr} = \vec{u} dt$ перемещения объема dV за время dt и полученное выражение проинтегрируем по объему V_i^* :

$$\begin{aligned} \int_{V_i^*} (\nabla \cdot \overset{\Delta}{\sigma}) \vec{dr} dV_i + \int_{V_i^*} \rho(\vec{r}) (\vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i) \vec{dr} dV_i = \\ = \int_{V_i^*} \rho(\vec{r}) \vec{u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} dt dV_i. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (3.31). Для этого используем выражения составляющих векторов \vec{dr} и d^2r в декартовой системе координат $O^* \xi \eta \zeta$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) + \frac{d\eta}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{u}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{V_t^*} \rho(\vec{r}) \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt dV_t &= \frac{1}{2} \int_{V_t^*} d(\rho(\vec{r}) \vec{u} \cdot \vec{u}) dV_t = \\ &= d \left(\int_{V_t^*} \frac{1}{2} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \rho(\vec{r}) dV_t \right) = dT_g^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где через $T_g^{(1)}$ обозначена кинетическая энергия перемещений объема V_t^* литосферы.

Первый из интегралов, стоящих в левой части равенства (3.31), выражает работу поверхностных сил, т. е.

$$\int_{V_t^*} (\nabla \cdot \vec{\sigma}) dt dV_t = dA_{\text{нов}}^{(1)}. \quad (3.33)$$

Работу массовых сил, выражаемую вторым интегралом левой части равенства (3.31), обозначим через

$$dA_m^{(1)} = \int_{V_t^*} \rho(\vec{r}) (\vec{F}_t + \vec{L}_t + \vec{J}_t) dt dV_t. \quad (3.34)$$

Внося в равенство (3.31) выражения (3.32) — (3.34), получаем

$$dA_{\text{нов}}^{(1)} + dA_m^{(1)} = dT_g^{(1)},$$

или

$$T_g^{(1)} - A_{\text{нов}}^{(1)} - A_m^{(1)} = h_g^{(1)}, \quad (3.35)$$

где $h_g^{(1)}$ — постоянная величина.

Аналогично, умножая скалярно обе части уравнений момента количества движения (3.14) на вектор $\vec{\omega} dt$ поворота объема dV за время dt и интегрируя полученное выражение по объему V_t , будем иметь

$$T_g^{(2)} - A_{\text{нов}}^{(2)} - A_m^{(2)} = h_g^{(2)}, \quad (3.36)$$

где $T_g^{(2)}$ — кинетическая энергия поворотов объема V_g^* литосферы; $A_{пов}^{(2)}$ — работа поверхностных пар сил; $A_m^{(2)}$ — работа момента массовых сил; $h_g^{(2)}$ — постоянная величина.

Вводя обозначения $T_g = T_g^{(1)} + T_g^{(2)}$; $A_{пов} = A_{пов}^{(1)} + A_{пов}^{(2)}$; $A_m = A_m^{(1)} + A_m^{(2)}$; $h_g = h_g^{(1)} + h_g^{(2)}$ и складывая выражения (3.35), (3.36), получаем закон сохранения энергии при упругой деформации литосферы:

$$T_g - A_{пов} - A_m = h_g. \quad (3.37)$$

Учитывая равенство (3.37) и независимость от времени кинематических условий связей, наложенных на элементы Земли, находим закон сохранения поступательно-вращательного движения Земли как жесткого целого тела в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n M A \dot{\tau}_i^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) - U = \bar{h}, \quad (3.38)$$

где \bar{h} — постоянная величина; U — силовая функция системы G_n .

Тогда сохраняется полная энергия системы

$$T^* + U^* = h, \quad (3.39)$$

где T^* — кинетическая энергия; U^* — потенциальная энергия и h — постоянная энергия системы G_n , причем $h = h^*$, где h^* определяется равенством (3.30).

Отметим, что равенство (3.39) получено путем существенного использования малости деформации литосферы, так как в выражениях (3.32) — (3.34) пренебрегается изменением ее объема V_g .

Перейдем к анализу вращательного движения твердых частей Земли.

3.3. Предельные режимы вращения Земли

В силу малости деформации литосферы существует сфера с центром в центре масс Земли, содержащая ее во все время движения $t \in R_1$. Радиус этой сферы примем за единицу длины. Тогда в силу известных свойств [24, 33] полиномов Лежандра гармоники $C_{m,k}^{(t)}$ и $S_{m,k}^{(t)}$ геопотенциала, описываемые выражениями (3.8), оцениваются так:

$$|C_{m,k}^{(t)}| < \frac{(m-k)!}{(m+k)!}, \quad |S_{m,k}^{(t)}| < \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \quad (3.40)$$

и с ростом номера m стремятся к нулю, но крайней мере, как $1/m$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |C_{mk}| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m}; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |S_{mk}| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m}. \quad (3.41)$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения вращения литосферы, мантии и внутреннего ядра, обозначив через \vec{K}_1 , \vec{K}_2 и \vec{K}_3 их кинетические моменты:

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} = \vec{Q} + \vec{Q}_1; \quad \frac{d\vec{K}_2}{dt} = \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \vec{H}_1; \quad \frac{d\vec{K}_3}{dt} = \vec{Q}_4 + \vec{H}_2, \quad (3.42)$$

где $\vec{Q} = \text{шени grad } U_E$ — момент силы взаимодействия литосферы с телами M_1, M_2, \dots, M_n ; \vec{Q}_1 — момент силы трения литосферы о вязкую астеносферу; \vec{Q}_2 и \vec{Q}_3 — моменты силы трения мантии о вязкие астеносферу и внешнее ядро; \vec{H}_1, \vec{H}_2 — моменты силы сопротивления движению мантии и внутреннего ядра в геомагнитном поле; \vec{Q}_4 — момент силы трения внутреннего ядра о вязкое внешнее ядро.

Пусть $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ — угловые скорости вращения литосферы, мантии и внутреннего ядра около их центров масс O , $Oxyz$ — система главных центральных осей инерции литосферы и \vec{Q}_5 — момент сил инерции, возникающих вследствие движения системы отсчета $Oxyz$ в теле Земли. Тогда уравнения (3.42) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_1}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_1 = & \vec{Q} + \vec{Q}_5 - D_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \\ & + \varepsilon_2 \left(\frac{d^2 \vec{v}_2}{dt^2} + \vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right) + E_1 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + D_2 \left(\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \right) - \\ & - \varepsilon_1 \left[\frac{d^2 \vec{v}_3}{dt^2} + \frac{d\vec{v}_3}{dt} \times \vec{\omega}_2 + 2 \left(\vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \right]; \quad (3.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_2}{dt} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_2 = & \vec{Q}_3 + D_3 \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \varepsilon_3 \left(\frac{d^2 \vec{v}_1}{dt^2} + \vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right) - \\ & - E_1 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - D_4 \left(\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \right) + \varepsilon_4 \left[\frac{d^2 \vec{v}_3}{dt^2} + \frac{d\vec{v}_3}{dt} \times \vec{\omega}_2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \right) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \Big] - \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \Xi_3 + \Xi_5 \right) \vec{\omega}_2 + \\
& \quad + \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \Xi_2 - \Xi_6 \right) \vec{\omega}_3; \\
\frac{d\vec{K}_3}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_3 &= \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \Xi_3 - \Xi_7 \right) \vec{\omega}_2 - \left(\frac{8}{3} \pi \mu_2 \Xi_4 + \Xi_8 \right) \vec{\omega}_3 + \vec{Q}_5.
\end{aligned}$$

Здесь через (d'/dt) обозначена локальная производная по времени.

В силу оценок (3.40) главные центральные моменты инерции $\bar{A}(t)$, $\bar{B}(t)$, $\bar{C}(t)$ литосферы удовлетворяют следующим равенствам:

$$A_* = \inf_{t \in R_1} \bar{A}(t); \quad B_* = \inf_{t \in R_1} \bar{B}(t); \quad C_* = \inf_{t \in R_1} \bar{C}(t);$$

$$A^* = \sup_{t \in R_1} \bar{A}(t); \quad B^* = \sup_{t \in R_1} \bar{B}(t); \quad C^* = \sup_{t \in R_1} \bar{C}(t),$$

причем выполняются неравенства

$$0 < A_* \leq \bar{A}(t) \leq A^* < \infty; \quad 0 < B_* \leq \bar{B}(t) \leq B^* < \infty; \quad (3.44)$$

$$0 < C_* \leq \bar{C}(t) \leq C^* < \infty; \quad A_* \leq \bar{A}(t) \leq \bar{B}(t) \leq \bar{C}(t) \leq C^*.$$

С учетом неравенств (3.44) нетрудно установить существование величин

$$\begin{aligned}
A_c &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \bar{A}(s) ds; \quad B_c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \bar{B}(s) ds; \quad C_c = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \bar{C}(s) ds, \text{ принимающих конечные значения, и}
\end{aligned}$$

$$A_c \leq B_c \leq C_c. \quad (3.45)$$

Вместо литосферы рассмотрим твердую оболочку S^* со сферической полостью радиуса $r=r_1$, имеющую главные моменты инерции A_c , B_c , C_c и кинетическую энергию T_c , равную кинетической

энергии T^* вращения литосферы. Очевидно, такая замена будет эквивалентной, если к оболочке будет приложен момент, обеспечивающий равенство кинетических энергий T_c и T^* .

В целях сокращения записи кинетический момент и угловую скорость оболочки обозначим по-прежнему через $\vec{K}_1, \vec{\omega}_1$, моменты вращающихся A_c, B_c, C_c — через A_1, B_1 и C_1 . Далее, как и во второй главе, систему уравнений (3.43) разрешим относительно производных составляющих угловых скоростей и запишем эти уравнения относительно разностей $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_3$. Последние сохраняют вид (2.131). Здесь, переходя к новым переменным $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ через замену (2.132), получим линейную неоднородную систему вида (2.133). В ней линейная часть совпадает с линейной частью системы (2.136) как по форме, так и по содержанию, а нелинейные свободные члены имеют другой вид и содержание. Однако шестимерная вектор-функция, составляющими которой являются упомянутые свободные члены уравнения, будет ограниченной как по времени, так и по пространственным координатам x . Следовательно, все рассуждения предыдущей главы применимы по отношению к слоистой модели Земли с упругой литосферой. Отсюда вытекает существование предельных режимов вращений Земли:

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0; \quad q_1 = q_2 = q_3 = 0; \quad r_1 = r_2 = r_3 = r^*; \quad (3.46)$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0; \quad q_1 = q_2 = q_3 = q^*; \quad r_1 = r_2 = r_3 = 0; \quad (3.47)$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p^*; \quad q_1 = q_2 = q_3 = 0; \quad r_1 = r_2 = r_3 = 0, \quad (3.48)$$

причем $p^* \neq 0, q^* \neq 0, r^* \neq 0$.

Отметим отличительные особенности вращения слоистой Земли с упругой литосферой от вращения слоистой Земли с твердой литосферой. В случае слоистой Земли с упругой литосферой в линейных частях первых трех уравнений (2.128) соответственно появляются линейные слагаемые вида

$$-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d'A}{dt} p_1; \quad -\frac{1}{B} \cdot \frac{d'B}{dt} q_1; \quad -\frac{1}{C} \cdot \frac{d'C}{dt} r_1, \quad (3.49)$$

а в нелинейных свободных членах — слагаемые, соответствующие упругой деформации литосферы.

Так как упругое тело мгновенно приспосабливается к положению его оси вращения, а для Земли деформация от вращения существенно превосходит деформацию от гравитации [20], то всегда осуществляется лишь один из режимов (3.46), (3.47), (3.48). Этот

режим будет представлять собой перманентное вращение вокруг оси наибольшего главного центрального момента Земли, т. е. совпадает с (3.48). Если учесть, что в начальный момент времени литосфера имела сферическую форму с шаровым эллипсоидом инерции, то Земля осуществляет выход на режим, затрачивая на это минимум энергии, т. е. по наименьшему пути. Следовательно, в случае слонстой Земли с упругой литосферой выход на предельный режим вращения ускорится.

В существующей литературе влияние упругости вещества Земли на ее движение как твердого тела учитывается через числа Лява и Сида [45]. Некорректность такого способа изучения движения Земли установлена в работе [41]. В связи с этим рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии литосферы под действием приложенных к ней объемных сил и их моментов.

3.4. Напряженно-деформированное состояние вращающейся литосферы под действием поверхностных сил вязкого трения

Решим задачу о напряженном и деформированном состоянии упругой толстостенной сферической оболочки (литосферы) при вращательном движении Земли. В линейной постановке задача сводится к рассмотрению равновесия полой сферы, находящейся под действием объемных сил, которыми являются центробежные силы инерции; на внутренней поверхности полой сферы приложены силы вязкого трения астеносферного слоя. Последние определяются из решения задачи о нестационарном движении вязкого астеносферного слоя, приведенного в предыдущей главе. Согласно гидродинамической задаче, силы вязкого трения на внутренней поверхности литосферы являются результирующими сил вязкости $(p_{r\alpha})_{r_1}$, обусловленных вращением литосферы и шара вокруг общей оси OZ , и сил вязкости $(p_{r_1})_{r_1}$, возникающих при вращении шара вокруг оси OX и при неподвижной оболочке. В связи с этим исходная задача о напряженно-деформированном состоянии оболочки при вращательном движении Земли разбита на две: 1 — об упругом равновесии оболочки под действием центробежных сил с приложенными к ее внутренней поверхности силами вязкости $(p_{r\alpha})_{r_1}$; 2 — о напряженном состоянии оболочки, вызванном только силами вязкости $(p_{r_1})_{r_1}$.

В свою очередь, первая из них вследствие симметричной нагрузки оболочки распадается на задачу о кручении, связанную с определением компоненты перемещения u_ϕ по краевым условиям, наложенным на выражающиеся только через нее напряжения $\tau_{r\phi}$, и

задачу о деформации в меридиональной плоскости, когда искомыми величинами являются составляющие перемещения u_r и u_β и напряжения σ_r , σ_β , σ_α , $\tau_{r\beta}$.

Задача рассматривается как квазистационарная.

Пусть упругая литосфера ограничена сферическими поверхностями с радиусами r_1 и r_0 . Положим, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_1$ вращения литосферы в сферической системе координат r, α, β направлен по прямой $\beta=0$, а вектор угловой скорости $\vec{\omega}_2$ вращения шара — по оси Z_1 в плоскости $\alpha=0$ (см. рис. 4).

Сначала рассмотрим задачу об упругом равновесии оболочки, находящейся под действием распределенной по ее внутренней поверхности нагрузки $(p_{r\alpha})_{r_1}$, определяемой формулой (2.33). Запишем выражение сил вязкости (2.33) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (p_{r\alpha})_{r_1} = & \mu_1 \left\{ \omega_1 \left[\frac{3r_1^2}{r_1^3 - r_0^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\gamma_k \lambda_k^2 t / r_1^2) \times \right. \right. \\
 & \times \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \left. \left. r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \left\{ -\omega_2 \cos \gamma \left[\frac{3r_1^2}{r_1^3 - r_0^3} + 2 \frac{r_1^2}{r_1^{3/2}} \times \right. \right. \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\gamma_k \lambda_k^2 t / r_1^2) \lambda_k^{-1} \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\
 & \left. \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right] \right\} \sin \beta.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Уравнения равновесия теории упругости в сферической системе координат r, α, β имеют вид [10]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \beta \sigma_r) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \sin \beta \tau_{r\beta}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{r\alpha}) - \\
 - \sigma_\alpha r \sin \beta - \sigma_\beta r \sin \beta = 0; \\
 \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \beta \sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{\beta\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r^2 \sin \beta \tau_{r\beta}) -
 \end{aligned}$$

$$-\sigma_z r \cos \beta + \tau_{rz} r \sin \beta = 0; \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r \sigma_z) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \beta \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \sin \beta \tau_{z\beta}) + \\ + \tau_{rz} r \sin \beta + \tau_{z\beta} r \cos \beta = 0.$$

Пользуясь выражениями, связывающими составляющие тензора деформации с компонентами перемещения в сферических координатах [2]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\beta \operatorname{ctg} \beta}{r} + \frac{u_r}{r}; \quad (3.52)$$

$$\gamma_{r\beta} = \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \beta}; \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \beta} - \frac{u_\alpha \operatorname{ctg} \beta}{r} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial u_r}{\partial z};$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_z}{r},$$

и принимая во внимание то, что рассматривается задача кручения, когда единственной нулевой компонентой смещения является u_α , т. е. $u_r = u_\beta = 0$, $u_z = u_z(r, \beta)$, получаем

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\beta = \varepsilon_z = \gamma_{r\beta} = 0;$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_z}{r}; \quad (3.53)$$

$$\gamma_{z\beta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \beta} - u_\alpha \operatorname{ctg} \beta \right).$$

Таким образом, из шести компонентов тензора деформации отличными от нуля оказываются только два — сдвиги γ_{rz} и $\gamma_{z\beta}$.

Применяя закон Гука в форме

$$\sigma_r = 2G^* \left(\varepsilon_r + \frac{\Delta}{m-2} \right); \quad \tau_{r\beta} = G^* \gamma_{r\beta};$$

$$\sigma_\beta = 2G^* \left(\varepsilon_\beta + \frac{\Delta}{m-2} \right); \quad \tau_{z\beta} = G^* \gamma_{z\beta}; \quad (3.54)$$

$$\sigma_z = 2G^* \left(\varepsilon_z + \frac{\Delta}{m-2} \right); \quad \tau_{rz} = G^* \gamma_{rz}.$$

где $\Delta = \varepsilon_r + \varepsilon_\beta + \varepsilon_z$; G^* — модуль сдвига; m — число Пуассона, на-

ходим следующие значения для напряжений в рассматриваемой задаче:

$$\sigma_r = \sigma_{\theta} = \sigma_z = \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{r\alpha} = G^* \gamma_{r\alpha}; \quad \tau_{\alpha z} = G^* \gamma_{\alpha z}. \quad (3.55)$$

Поэтому из уравнений равновесия (3.50) получим

$$\frac{\partial \tau_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial \beta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\alpha} + 2\tau_{\alpha z} \operatorname{ctg} \beta) = 0. \quad (3.56)$$

Граничным условием задачи будет

$$\tau_{r\alpha} = (\rho_{r\alpha})_{r_1} \quad \text{при } r = r_1, \quad (3.57)$$

где $(\rho_{r\alpha})_{r_1}$ определяется формулой (3.50).

Выразим компоненты напряжения $\tau_{r\alpha}$ и $\tau_{\alpha z}$ через смещение u_α на основании соотношений (3.55), (3.53):

$$\begin{aligned} \tau_{r\alpha} &= G^* \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \right); \\ \tau_{\alpha z} &= G^* \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - u_\alpha \operatorname{ctg} \beta \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Подставляя найденные выражения для напряжений $\tau_{r\alpha}$, $\tau_{\alpha z}$ в уравнение (3.56), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \beta^2} + \\ + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - \frac{u_\alpha}{r^2} \left(2 + \frac{\cos 2\beta}{\sin^2 \beta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Таким образом получено дифференциальное уравнение для определения смещения u_α . Вид граничных условий (3.57) с учетом равенства (3.50) указывает на возможность поиска решения уравнения (3.59) в виде

$$u_\alpha(r, \beta) = u(r) \sin \beta. \quad (3.60)$$

Тогда из (3.59) для определения u как функции r получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = 0, \quad (3.61)$$

общее решение которого представляется в виде

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (3.62)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Следовательно, для компоненты смещения u_z по формуле (3.60) будем иметь

$$u_z(r, \beta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \sin \beta. \quad (3.63)$$

Подставив найденное соотношение (3.63) для u_z в выражение (3.58), определим напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$:

$$\tau_{rz} = -\frac{3C_2}{r^3} G^* \sin \beta, \quad (3.64)$$

$$\tau_{\theta z} = 0. \quad (3.65)$$

С учетом граничного условия (3.57) найдем произвольную постоянную C_2 :

$$C_2 = -r_1^3 (\rho_{rz})_{r_1} / 3G^* \sin \beta.$$

Следовательно,

$$\tau_{rz} = -r_1^3 (\rho_{rz})_{r_1} / r^3. \quad (3.66)$$

Тогда напряженно-деформированное состояние оболочки, находящейся под действием сил вязкости $(\rho_{rz})_{r_1}$, на основании соотношений (3.66), (3.65), (3.55) характеризуется следующими компонентами напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0; \\ \tau_{rz} = -\mu_1 \frac{r_1^3}{r^3} \left\{ \omega_1 \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \right. \\ \times \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \cdot \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right\} - \omega_2 \cos \gamma \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{3/2}}{r_1^{3/2}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \left\{ \lambda_k^{-1} \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right\} \sin \beta. \quad (3.67)$$

и деформации:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\varphi} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{r\varphi} = 0;$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} = & -\frac{\mu_1 r_1^3}{G^{*} r_2} \left\{ \omega_1 \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right\} - \omega_2 \cos \gamma \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^3}{r_1^3} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \\ & \left. \times t / r_2^2 \right] \frac{1}{\lambda_k} \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + \right. \\ & \left. + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \left. \right\} \sin \beta. \quad (3.68) \end{aligned}$$

Теперь найдем напряженное состояние оболочки под действием распределенных по ее внутренней поверхности сил вязкости $(p_{r\theta})_{r_1}$, определяемых формулой (2.37) в сферической системе координат r, α', β' , введенной в разделе 2.3. Пользуясь выражением (2.37), имеем

$$\begin{aligned} (p_{r\theta})_{r_1} = & \left\{ -\eta_1 \omega_2 \sin \gamma \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^3}{r_1^3} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \lambda_k^{-1} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G'_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G'_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right\} \sin \beta'. \quad (3.69) \end{aligned}$$

Ясно, что во введенной системе сферических координат r, α', β' ось OX играет ту же роль, что OZ в системе координат r, α, β . Тогда, применив изложенный в настоящем разделе метод определения τ_{r_1} и τ_{r_2} , запишем выражения для τ_{r_1}' и τ_{r_2}' :

$$\tau_{r_1}' = -r_1^2 (\rho_{r_1}')_{r_1} / r^3; \quad (3.70)$$

$$\tau_{r_2}' = 0. \quad (3.71)$$

С учетом формулы (3.69) выражение (3.70) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \tau_{r_1}' = & \frac{\gamma_1 \nu_1 \sin \gamma_1 r_1^2}{r^3} \left[\frac{3r_1^2}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_1^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_1^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \\ & \times \left. \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}'\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}'\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}'(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) \right] \right]^{-1} \right] \sin \beta'. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Итак, в этой задаче о напряженном состоянии оболочки, обусловленном нагрузкой $(\rho_{r_1}')_{r_1}$, имеем компоненты напряжения $\sigma_r = \sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha'} = \tau_{r_1} = \tau_{r_2} = 0$, а τ_{r_1}' определяется выражением (3.72). Соответственно для компонент деформации получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha'} = \gamma_{r_1}' = \gamma_{r_2}' = 0, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r_2}' = & \frac{\gamma_2 \nu_2 \sin \gamma_2 r_2^2}{G^* r^3} \left[\frac{3r_2^2}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_2 \lambda_k^2 t / r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \\ & \times \left. \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}'\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}'\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}'(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_k} \lambda_k\right) \right] \right]^{-1} \right] \sin \beta'. \end{aligned}$$

Таким образом, напряженное состояние оболочки, вызванное силами вязкого трения, рассматривается как результат наложения двух напряженных состояний, получаемых при нагружении силами $(\rho_{r_2})_{r_2}$ и $(\rho_{r_1}')_{r_1}$ симметричном относительно осей OZ и OX . Результирующее напряженное состояние само не осесимметрично.

В системе координат r, α, β напряжение $\tau_{r\alpha}$ разлагается на следующие составляющие.

$$\begin{aligned} \tau_{r\alpha}^{(1)} = & \frac{\nu_1 r_1^2 \sin \gamma r_1^2}{r^3} \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \lambda_k^{-1} \times \right. \\ & \times \left. \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right\} \cos \beta \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\alpha}^{(2)} = & \frac{\nu_1 r_2^2 \sin \gamma r_1^2}{r^3} \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \lambda_k^{-1} \times \right. \\ & \times \left. \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \right] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Тогда, суммируя компоненты напряжений, определяемые соотношениями (3.67), (3.74), (3.75), получаем

$$\sigma_r^* = \sigma_\beta^* = \sigma_z^* = \sigma_\alpha^* = 0;$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\alpha}^* = & \frac{\nu_1 r_1^2}{r^3} \left\{ \omega_1 \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \cdot \left. \left[r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right]^{-1} \right. \\ & \left. - \omega_2 \cos \gamma \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\nu_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \lambda_k^{-1} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \Big]^{-1} \Big] \sin \beta + \\
& + \frac{\gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma r_1^2}{i^3} \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \right] \frac{1}{\lambda_k} \times \\
& \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] \right\}^{-1} \Big] \cos \beta \cos \alpha; \quad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{r_2}^* &= \frac{\gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma r_1^2}{i^3} \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \right] \frac{1}{\lambda_k} \times \\
& \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] \right\}^{-1} \Big] \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Полученные соотношения для компонент напряжений (3.76) и определяют напряженное состояние литосферы под действием сил вязкости, приложенных к ее внутренней поверхности, астеносферного слоя.

Аналогично находятся соотношения для компонент деформации

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^* &= \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_\phi^* = \varepsilon_\alpha^* = 0; \\
\gamma_{r\alpha}^* &= -\frac{\gamma_1 r_1^2}{G^* i^3} \left\{ \omega_1 \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \right] \times \right. \\
& \times \left[G_{3/2}(\lambda_k) J'_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] \cdot \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - J'_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2}\left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k\right) \right] \right\}^{-1} \Big] - \omega_2 \cos \gamma \left[\frac{3r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} + 2 \frac{r_2^{5/2}}{r_1^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t / r_2^2) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times t/r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \left| \sin \beta + \frac{v_1^2 \sin^2 \gamma_1}{G^* r_1^3} \left[\frac{3r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{r_2^2}{r_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t/r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \cdot \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \right| \times \\
& \quad \times \cos \beta \cos \alpha; \\
& t_{r_2} = \frac{v_1^2 \sin^2 \gamma_1}{G^* r_1^3} \left[\frac{3r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + 2 \frac{r_2^2}{r_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-v_1 \lambda_k^2 t/r_2^2) \frac{1}{\lambda_k} \times \right. \\
& \left. \times \left\{ r_1 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] + r_2 \left[G_{3/2}(\lambda_k) J_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - J_{3/2}(\lambda_k) G_{3/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \lambda_k \right) \right] \right\}^{-1} \right| \sin \alpha. \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу о напряженно деформированном состоянии литосферы, вращающейся с угловой скоростью ω . Иными словами, требуется построить решение задачи об упругом равновесии полой сферы, находящейся под действием центробежных сил, внешняя и внутренняя поверхность которой свободны от нагрузок. Действующие центробежные силы имеют потенциал, представляемый в виде [38]:

$$\Pi = -\frac{v^2}{2g} r^2 + \frac{1}{2g} r^2 P_2(\cos \beta), \quad (3.78)$$

где $P_2(\cos \beta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1)$, v^2 — удельный вес, g — ускорение силы тяжести.

В монографии [38] для рассматриваемой задачи дан метод определения компонент перемещений и напряжений на основе решений внутренней и внешней задач для сферы. Воспользуемся этим методом.

Решение поставленной задачи получается наложением частного решения задачи для сферы, соответствующего первому слагаемому (3.78):

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2 (m-2)r}{3(4G^*g(m-1))} \left(\frac{3m-1}{m+1} r_0^2 - r^2 \right); & u_\beta^{(1)} &= 0; \\
 \sigma_r^{(1)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} (r_0^2 - r^2); & \tau_r^{(1)} &= 0; \\
 \sigma_\beta^{(1)} = \sigma_\beta^{(1)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} \left(r_0^2 - \frac{m+3}{3m-1} r^2 \right),
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

частного решения, соответствующего второму слагаемому в выражении потенциала (3.78):

$$\begin{aligned}
 u_r^{(2)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2 (m-2)r^3}{21G^*g(m-1)} P_2(\cos \beta); & u_\beta^{(2)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2 (m-2)r^3}{8(4G^*g(m-1))} \frac{dP_2}{d\beta}; \\
 \sigma_r^{(2)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2 (6m-5)}{21G^*g(m-1)} r^3 P_2(\cos \beta); & \tau_r^{(2)} &= \frac{3(m-2)}{14(m-1)} \frac{dP_2}{d\beta}; \\
 \sigma_\beta^{(2)} &= \frac{\gamma^* \omega_1^2 (9-m)r^3}{21g(m-1)} P_2(\cos \beta) - \frac{(m-2)r^3}{14(m-1)} \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta; \\
 \sigma_\beta^{(3)} &= \frac{(2m+3)r^3}{7(m-1)} P_2(\cos \beta) + \frac{(m-2)r^3}{14(m-1)} \frac{dP_2}{d\beta} (\operatorname{tg} \beta).
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

и решений внутренней и внешней задач для сферы, определяемых постоянными A_0^* , D_0^* , A^* , B^* , C^* , D^* :

$$\begin{aligned}
 u_r^{(3)} &= -2A_0^* \frac{m-2}{m} r, & u_\beta^{(3)} &= 0; & \sigma_r^{(3)} = \sigma_\beta^{(3)} = \sigma_\beta^{(3)} &= -4G^* A_0^* \frac{m+1}{m}; & \tau_r^{(3)} &= 0; \\
 u_r^{(4)} &= -\frac{D_0^*}{r^3}; & u_\beta^{(4)} &= 0; & \sigma_r^{(4)} &= \frac{4G^* D_0^*}{r^3}; & \sigma_\beta^{(4)} = \sigma_\beta^{(4)} &= -\frac{2G^* D_0^*}{r^3}; & \tau_r^{(4)} &= 0; \\
 u_r^{(5)} &= \left[\frac{12}{m} A^* r^2 + 2B^* r \right] P_2(\cos \beta); & u_\beta^{(5)} &= \left[A^* \frac{7m-4}{m} r^3 + \right. \\
 & \left. + B^* r \right] \frac{dP_2}{d\beta}; & \tau_r^{(5)} &= \left[-\frac{12G^* A^* r^2}{m} + 4G^* B^* \right] P_2(\cos \beta); \\
 \tau_r^{(6)} &= \left[2G^* A^* \frac{7m+2}{m} r^2 + 2G^* B^* \right] \frac{dP_2}{d\beta}; & \sigma_\beta^{(5)} &= - \left[12G^* A^* \frac{7m+1}{m} r^2 + \right.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$+ 8G^*B^* \left] P_2(\cos \beta) - \left[2G^*A^* \frac{7m-4}{m} r^2 + 2G^*B^* \right] \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta;$$

$$\sigma_r^{(5)} = \left[-\frac{60}{m} G^*A^*r^2 + 4G^*B^* \right] P_2(\cos \beta) + \left[2G^*A^* \frac{7m-4}{m} r^2 + \right. \\ \left. + 2G^*B^* \right] \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta;$$

$$u_r^{(6)} = \left[\frac{2C^*(5m-4)}{m r^2} - \frac{3D^*}{r^4} \right] P_2(\cos \beta); \quad u_\beta^{(6)} = \left[\frac{2C^*(m-2)}{m r^2} + \frac{D^*}{r^4} \right] \frac{dP_2}{d\beta};$$

$$\sigma_r^{(6)} = \left[-\frac{8G^*C^*(5m-1)}{m r^2} + \frac{24G^*D^*}{r^4} \right] P_2(\cos \beta); \quad \tau_{r\beta}^{(6)} = \left[\frac{4G^*C^*(m+1)}{m r^2} - \right. \\ \left. - \frac{4G^*D^*}{r^4} \right] \frac{dP_2}{d\beta};$$

$$\sigma_\beta^{(6)} = \left[\frac{4G^*C^*(m-2)}{m r^2} - \frac{18G^*D^*}{r^4} \right] P_2(\cos \beta) - \left[\frac{4G^*C^*(m-2)}{m r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2G^*D^*}{r^4} \right] \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta;$$

$$\sigma_\beta^{(6)} = \left[\frac{20G^*C^*(m-2)}{m r^2} - \frac{6GD^*}{r^4} \right] P_2(\cos \beta) + \left[\frac{4G^*C^*(m-2)}{m r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2G^*D^*}{r^4} \right] \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta,$$

при которых общее решение задачи для поллой сферы будет удовлетворять условиям обращения в нуль напряжений σ_r и $\tau_{r\beta}$ на ее внешней и внутренней поверхностях.

Постоянные A_0^* , D_0^* , A^* , B^* , C^* , D^* определяются из систем уравнений

$$-2A_0^* \frac{m+1}{m} + \frac{2D_0^*}{r_0^3} = 0; \tag{3.82}$$

$$-2A_0^* \frac{m+1}{m} + \frac{2D_0^*}{r_1^3} = -\frac{r_1^* \omega_1^2}{30G^*r} \frac{3m-1}{m-1} (r_0^2 - r_1^2);$$

$$-\frac{6}{m} A^* r_0^2 + 2B^* - \frac{4C^*(5m-1)}{m r_0^3} + \frac{12D^*}{r_0^5} = -\frac{r_1^* \omega_1^2}{84G^*r} \frac{r_0^2(12m-10)}{(m-1)};$$

$$\begin{aligned}
& \frac{7m+2}{m} A^* r_0^2 + B^* + \frac{2C^*(m+1)}{m r_0^3} - \frac{4D^*}{r_0^3} = \frac{\gamma^* \omega_1^2 r_0^2 (3m-6)}{84G^* g(m-1)}; \\
& -\frac{6}{m} A^* r_1^2 + 2B^* - \frac{4C^*(5m-1)}{m r_1^3} + \frac{12D^*}{r_1^3} = -\frac{\gamma^* \omega_1^2 r_1^2 (12m-10)}{84G^* g(m-1)}; \\
& \frac{7m+2}{m} A^* r_1^2 + B^* + \frac{2C^*(m+1)}{m r_1^3} - \frac{4D^*}{r_1^3} = \frac{\gamma^* \omega_1^2 r_1^2 (3m-6)}{84G^* g(m-1)},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

где m — число Пуассона; r_0, r_1 — радиусы внешней и внутренней поверхностей оболочки; G^* — модуль сдвига.

Найдем выражения компонент перемещений u_r и u_α . С учетом (3.82), (3.83) из соотношений (3.79), (3.81) получим

$$\begin{aligned}
u_r = & \frac{\gamma^* \omega_1^2}{60G^* g(m-1)} \left[\frac{(m-2)r}{2} \left(\frac{3m-1}{m+1} r_0^2 - r^2 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2(m-2)(3m-1)(e_0^2 - 1) r r_1^2}{e_0^3 - 1} + \frac{(3m-1)(e_0^2 - 1) e_0^2 r_1^5}{(e_0^3 - 1) r^3} \right] + \\
& + \frac{\gamma^* \omega_1^2}{84G^* g(m-1)} \left[4(m-2)r^3 + \frac{12}{m} \Lambda_2^* r^3 + 2\Lambda_4^* r_1^2 r + \right. \\
& \left. + \frac{2(5m-4)}{m r^3} r_1^5 \Lambda_3^* - \frac{3e_0^2 r_1^7}{4} \Lambda_1^* \right] P_2(\cos \beta); \\
u_\alpha = & \frac{\gamma^* \omega_1^2}{84G^* g(m-1)} \left[(m-2)r^2 + \frac{7m-5}{m} r^2 \Lambda_2^* + \right. \\
& \left. + r r_1^2 \Lambda_4^* + \frac{2(m-2)r_1^5}{m r^3} \Lambda_3^* + \frac{e_0^2 r_1^7}{4} \Lambda_1^* \right] \frac{dP_1}{d\beta},
\end{aligned} \tag{3.84}$$

где введены обозначения

$$e_0 = \frac{r_0}{r_1}; \quad d_1^* = (60m - 72m^2) e_0^5 + (42m^2 - 64m + 2) e_0^3 + 30m^2 + 4m - 2;$$

$$d_2^* = (42m^2 + 12m) e_0^5 + (5 - 35m^2) e_0^3 - 7m^2 - 12m - 5;$$

$$d_3^* = -36m e_0^5 + (10 - 70m^2) e_0^3 + 70m^2 + 36m - 10;$$

$$d_4^* = (36m - 18m^2)e_0^5 + (18m^2 - 36m)e_0 + (3m^2 + 4m + 1)e_0^2 - 3m^2 - 4m - 1; \quad d_5^* = (28m - 20)e_0^5 + (20 - 100m)e_0^2 + 72m, \\ d_6^* = (14m - 10)e_0^5 + (10m + 10)e_0 - 24m;$$

$$\Lambda_1^* = \frac{d_1^* d_2^* - d_3^* d_4^*}{d_5^* d_2^* - d_3^* d_6^*}; \quad \Lambda_2^* = \frac{m d_4^* - d_6^* \Lambda_1^*}{d_2^*}; \quad \Lambda_3^* = \frac{3m+1}{2} - \frac{7m+5}{12m} \Lambda_2^* + \\ + \frac{5}{8} e_0^2 \Lambda_1^*; \quad \Lambda_4^* = 6 - 3m - \frac{7m+2}{m} \Lambda_2^* - \frac{2(m+1)}{m} \Lambda_3^* + 4e_0^2 \Lambda_1^*; \quad (3.85)$$

Напряженное состояние оболочки характеризуется следующими компонентами напряжения, получаемыми из формул (3.79) — (3.83):

$$\sigma_r = \frac{\gamma^* \omega_1^2}{15g(m-1)} \left[(3m-1)(r_0^2 - r^2) + \frac{(3m-1)(e_0^2 - 1)}{e_0^3 - 1} r_1^2 - \right. \\ \left. - \frac{(3m-1)(e_0^7 - 1)e_0^2}{e_0^3 - 1} \frac{r_1^5}{r^3} \right] + \frac{\gamma^* \omega_1^2}{21g(m-1)} \left[(6m-5)r^2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{m} \Lambda_2^* r^2 + \Lambda_4^* r_1^2 - \frac{2(5m-1)}{m} \Lambda_3^* \frac{r_1^5}{r^3} + 6e_0^2 \Lambda_1^* \frac{r_1^7}{r^3} \right] P_2(\cos \beta); \\ \sigma_\theta = \frac{\gamma^* \omega_1^2 (m-2)r^2}{42g(m-1)} \frac{dP_2}{d\beta} + \frac{\gamma^* \omega_1^2}{42g(m-1)} \left[\frac{7m+2}{m} \Lambda_2^* r^2 + \Lambda_4^* r_1^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{m+1}{m} \Lambda_4^* \frac{r_1^5}{r^3} - 2e_0^2 \Lambda_1^* \frac{r_1^7}{r^3} \right] \frac{dP_2}{d\beta}; \\ \sigma_\phi = \frac{\gamma^* \omega_1^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} \left(r_0^2 - \frac{m+3}{m-1} r^2 + \frac{e_0^2 - 1}{e_0^3 - 1} r_1^2 + \frac{(e_0^2 - 1)e_0^2}{2(e_0^2 - 1)} \frac{r_1^3}{r^3} \right) - \\ - \frac{\gamma^* \omega_1^2 (m-2)}{42g(m-1)} r^2 \frac{dP_0}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta - \frac{\gamma^* \omega_1^2}{42g(m-1)} \left[\frac{6(7m+1)}{m} \Lambda_2^* r^2 + \right. \\ \left. + 4\Lambda_4^* r_1^2 + 2 \frac{m-2}{m} \Lambda_3^* \frac{r_1^5}{r^3} + 9e_0^2 \Lambda_1^* \frac{r_1^7}{r^3} - 2(9-m)r^2 \right] P_2(\cos \beta) - \\ - \frac{\gamma^* \omega_1^2}{42g(m-1)} \left[\frac{7m-4}{m} \Lambda_2^* r^2 + \Lambda_4^* r_1^2 + 2 \frac{m-2}{m} \Lambda_3^* \frac{r_1^5}{r^3} + e_0^2 \Lambda_1^* \frac{r_1^7}{r^3} \right] \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta; \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & \frac{\gamma^* \omega_1^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} \left[r_0^2 - \frac{m+3}{m-1} r^2 + \frac{r_0^2-1}{r_0^2-1} r_1^2 + \frac{\gamma_0^2(\gamma_0^2-1)}{2(\gamma_0^2-1)} \frac{r_1^5}{r^3} \right] + \\ & + \frac{\gamma^* \omega_1^2 (2m+3) r^3}{21g(m-1)} P_2(\cos \beta) + \frac{\gamma^* \omega_1^2 (m-2) r^2}{42g(m-1)} \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta + \\ & + \frac{\gamma^* \omega_1^2}{42g(m-1)} \left[-30\Lambda_2^* r^2 + 2\Lambda_4^* r_1^2 + 10 \frac{m-2}{m} \Lambda_2^* \frac{r_1^5}{r^3} - \right. \\ & \left. - r_0^2 \Lambda_1^* \frac{r_1^7}{r^3} \right] P_2(\cos \beta) + \frac{\gamma^* \omega_1^2}{42g(m-1)} \left[\frac{7m-4}{m} \Lambda_2^* r^2 + \Lambda_4^* r_1^2 + \right. \\ & \left. + \frac{m-2}{m} \Lambda_2^* \frac{r_1^5}{r^3} + \Lambda_0^* \Lambda_1^* \frac{r_1^7}{r^3} \right] \frac{dP_2}{d\beta} \operatorname{ctg} \beta \end{aligned}$$

при обозначениях (3.85).

Таким образом, построено решение второй частной задачи. Тогда напряженно деформированное состояние литосферы, находящейся под действием как сил вязкости, так и центробежных сил, определяется суммой соответствующих компонент перемещений и напряжений (3.76), (3.84), (3.86).

Исходя из полученных решений задач проведем анализ напряженного и деформированного состояния литосферы. В случае нагружения литосферы силами ее вязкого трения об астеносферу на основе решений (3.76), (3.77) можно сделать следующие выводы:

1 — компонента напряжения $\tau_{r\alpha}^*$ принимает отрицательные значения в слое между внешней и внутренней поверхностями литосферы ($r_1 < r < r_0$), наименьшие — на внешней поверхности ($r=r_0$) и наибольшие значения по модулю — на внутренней ($r=r_1$);

2 — компонента напряжения $\tau_{r\beta}^*$ равна минимальным величинам на внешней поверхности литосферы ($r=r_0$) и равна нулю для значений углов $\alpha=0$, $\alpha=\pi$; принимает наибольшие значения на внутренней поверхности ($r=r_1$) и при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{3\pi}{2}$; $\tau_{r\beta}^*$ — отрицательна при $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ и положительна при $0 < \alpha < \pi$;

3 — компонента напряжения $\tau_{r\alpha}^*$ минимальна на полюсах оболочки ($\beta=0$, $\beta=\pi$) и максимальна по абсолютной величине в экваториальной плоскости ($\beta=\frac{\pi}{2}$), а компонента напряжения $\tau_{r\beta}^*$ постоянна для всех β при фиксированном угле α ;

4 — компоненты деформации $\gamma_{\alpha r}^*$ и $\gamma_{\beta r}^*$ суть функции углов α и

β , следовательно, деформация литосферы неосесимметрична и не-симметрична относительно экваториальной плоскости.

Проведем анализ деформированного состояния литосферы под действием центробежных сил. Для исходных геофизических данных $r_0 = 6,371 \cdot 10^6$ м; $r_1 = 6,271 \cdot 10^6$ м; $g = 9,81$ м/с²; $\gamma^3 = 3,3 \cdot 10^3$ кг/м³; $\omega = 7,2921 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹ по формулам (3.84) вычислены компоненты перемещений u_r и u_β при различных значениях r , m и β . Результаты вычислений сведены в табл. 5 и 6.

Таблица 5. Зависимость упругих перемещений в литосфере от числа Пуассона

m	$r \cdot 10^{-6}$, м	$u_r \cdot G^* \cdot 10^{-11}$, кг/м	$u_\beta \cdot G^* \cdot 10^{-11}$, кг/м
4	6,371	921,259—1599,337 $P_2(\cos\beta)$	$-729,415 \frac{dP_2}{d\beta}$
	6,321	920,978—1596,394 $P_2(\cos\beta)$	$-735,910 \frac{dP_2}{d\beta}$
	6,271	916,106—1593,157 $P_2(\cos\beta)$	$-742,591 \frac{dP_2}{d\beta}$
3	6,371	604,153—1728,501 $P_2(\cos\beta)$	$-731,447 \frac{dP_2}{d\beta}$
	6,321	604,342—1724,903 $P_2(\cos\beta)$	$-738,941 \frac{dP_2}{d\beta}$
	6,271	604,592—1720,931 $P_2(\cos\beta)$	$-746,615 \frac{dP_2}{d\beta}$

Результаты вычислений позволяют сделать следующие выводы:

— деформация литосферы симметрична относительно экваториальной плоскости;

— радиальные перемещения частиц литосферы u_r имеют отрицательные значения на полюсах ($\beta = 0, \beta = \pi$) и положительные в экваториальной плоскости ($\beta = \frac{\pi}{2}$); следовательно, вблизи полюсов происходит сжатие, а в области экватора — расширение;

— меридиональные перемещения частиц литосферы u_β равны нулю в полюсах и в экваториальной плоскости, имеют положительные значения для верхней половины литосферы ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) и отрицательные — для нижней ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$);

— перемещения u_r равны нулю для внешней поверхности литосферы ($r_0 = 6,371 \cdot 10^6$ м) при $m = 4$ для значений угла β , близких к 33°.

Таблица 4. Характеристика радиальных и меридиональных перемещений литосферы

β	$r \cdot 10^6, \text{ м}$	$u, G^* \cdot 10^{-11}, \text{ кг/м}$		$u, G^* \cdot 10^{-11}, \text{ кг/м}$	
		$m=4$	$m=3$	$m=4$	$m=3$
0, π	6,371	-678,078	-1124,348	0	0
	6,321	-675,416	-1120,561	0	0
	6,271	-677,051	-1116,339	0	0
$\frac{\pi}{4}$	6,371	24,031	-365,536	1091,123	1097,171
	6,321	25,401	-363,329	1103,865	1108,412
	6,271	22,345	-360,851	1113,887	1119,923
$\frac{\pi}{2}$	6,371	1720,928	1468,101	0	0
	6,321	1719,175	1466,794	0	0
	6,271	1712,685	1465,058	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	6,371	24,031	-365,536	-1091,123	-1097,171
	6,321	25,401	-363,329	-1103,865	-1108,412
	6,271	22,345	-360,851	-1113,887	-1119,923

Таким образом, в процессе деформации литосфера под действием сил вязкости и центробежных сил приобретает форму сплюснутого тела, иными словами, становится твердым телом с главными моментами инерции A, B, C , удовлетворяющими двойному неравенству $A < B < C$.

3.5. Напряженно-деформированное состояние вращающейся литосферы в поле ньютоновых сил притяжения Луной, Солнцем и их моментов

Анализ влияния объемных сил, соответствующих гармоникам второго порядка силовой функции ньютонова воздействия тел Солнечной системы, на процесс деформирования упругой литосферы проведен в работе [20]. Результаты расчетов при исходных данных, отвечающих реальной Земле и различным положениям притягивающих центров — Луны и Солнца, выявили ряд особенностей деформирования. В частности, осевая симметрия деформации вращающейся литосферы нарушается под действием ньютоновых сил притяжения; асимметрия обусловлена появлением перемещений точек поверхности литосферы в направлении вектора, касательного к параллели; названные перемещения меняют свой знак вдоль меридианов — от полюса к полюсу. Указанное решение получено при

условии, что главный вектор и главный момент всех приложенных к литосфере внешних сил равны нулю, т. е. имеет место самоуравновешенность внешних нагрузок, отнесенных к центру масс Земли. Очевидно, данное условие не выполняется, как только число m входящее в выражение (3.21) силовой функции, превосходит двойную, т. е. $m \geq 3$.

В связи с изложенным рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии литосферы, моделируемой сферической оболочкой с радиусами r_1 и r_2 и плотностью $\rho_0 = \text{const}$. Пусть литосфера вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ в поле ньютонова притяжения ее Луной, Солнцем и планетами, принятыми за материальные точки O_1, O_2, \dots, O_{n-1} ($n \geq 2$). Сферические координаты тел O_i обозначим через $(r_i^0, \alpha_i, \beta_i)$. В предположении, что $\vec{\omega}_1 = \text{const}$ и координаты $(r_i^0, \alpha_i, \beta_i)$ являются постоянными, построим решение задачи.

Любые две части литосферы, разделенные некоторой поверхностью с внешней нормалью \vec{e} , взаимодействуют между собой через вектор напряжений $\vec{\sigma}_e$ и вектор пар напряжений $\vec{\tau}_e$. При этом имеют место равенства (3.12). Обозначим через R и P интенсивности всех объемных сил и их моментов соответственно. Тогда, согласно принципу Даламбера, условия статического равновесия формулируются аналогично (3.14) и имеют вид

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{R} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{P} = 0. \quad (3.87)$$

Здесь $\vec{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ — тензор напряжений; $\vec{\tau} = \{\tau_{ij}\}$ — тензор пар напряжений, причем для всех $i \neq j$ выполняются неравенства

$$\tau_{ij} \neq \tau_{ji}, \quad \tau_{ij} \neq \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.88)$$

Обозначив через \vec{u} (u_r, u_α, u_β) и $\vec{\omega}$ ($\omega_r, \omega_\alpha, \omega_\beta$) векторы упругих перемещений и поворотов, предположим, что они связаны кинематическим условием

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}. \quad (3.89)$$

Тогда тензоры $\vec{\sigma}$ и $\vec{\tau}$ будут выражены равенствами

$$\vec{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \vec{u} + 2\mu (\nabla \cdot \vec{u})_s + \vec{\sigma}_s, \quad (3.90)$$

$$\vec{\tau} = \frac{\lambda + \mu}{2} \nabla \nabla \times \vec{u} + \frac{\lambda - \mu}{2} \nabla \times (\vec{u} \nabla), \quad (3.91)$$

где точка и крестик означают скалярное и векторное произведения, индекс a — выделение антисимметричной части соответствующего тензора и

$$(\vec{u}\nabla) = \nabla \cdot \vec{u} + \overset{\Delta}{I} \times (\nabla \times \vec{u}), \quad \overset{\Delta}{\sigma}_a = -\frac{1}{2} \overset{\Delta}{I} \times \vec{\sigma}. \quad (3.92)$$

Обозначая через $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$ объемное расширение, а через Δ — оператор Лапласа и учитывая выражения (3.90) — (3.92), из системы (3.87) получим векторное уравнение равновесия литосферы в перемещениях:

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \Delta \vec{u} + \frac{\lambda_1 + \mu_1}{4\mu} \nabla \cdot \overset{\Delta}{I} \cdot \nabla \cdot \nabla \times \vec{u} + \frac{\vec{R}}{\mu} + \frac{1}{2\mu} \nabla \cdot (\overset{\Delta}{I} \times \vec{P}) = 0. \quad (3.93)$$

Согласно выбору модели литосферы, исходя из выражения (3.21) силовой функции ньютоновских сил притяжения ее Луной, Солнцем и планетами, имеем

$$U = -G_0 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_i}{r_i} \left[1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i} \right)^m P_m(\cos \gamma_i^*) \right], \quad (3.94)$$

где γ_i^* — угол между радиусами-векторами точки O_i и текущей точки литосферы. Силовая функция объемных центробежных сил равна $\frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 \sin^2 \alpha$. Поэтому существует силовая функция

$$\Phi = U + \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 \sin^2 \alpha, \quad (3.95)$$

выражающая векторы \vec{R} и \vec{P} посредством равенств

$$\vec{R} = \nabla \Phi; \quad \vec{P} = \nabla \times \nabla \Phi. \quad (3.96)$$

Запишем граничные условия уравнений (3.93):

$$(\vec{e}_r \cdot \vec{\sigma})|_{r=r_1} = (\vec{e}_r \cdot \vec{\sigma})|_{r=r_0} = 0. \quad (3.97)$$

Однородное уравнение, соответствующее (3.93), имеет вид

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \Delta \vec{u} + \frac{\lambda_1 + \mu_1}{4\mu} \nabla \cdot \overset{\Delta}{I} \cdot \nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = 0. \quad (3.98)$$

Решение задачи (3.93), (3.97) можно представить суммой общего решения \bar{u}_* уравнений (3.98) и какого-либо частного решения \bar{u}_0 уравнений (3.93). Соответствующие этим полям перемещений \bar{u}_0 и \bar{u}_* тензоры напряжений $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\sigma}_*$ и тензоры пар напряжений $\bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_*$ определяются по формулам (3.90) и (3.91) последовательной заменой \bar{u} на \bar{u}_0 и \bar{u}_* . При этом граничные условия (3.97) принимают один из следующих двух видов:

$$(\bar{e}_r \cdot \bar{\sigma}_0 + \bar{e}_r \cdot \bar{\sigma}_*)|_{r=r_l} = 0, \quad (3.99)$$

$$(\bar{e}_r \cdot \bar{\tau}_0 + \bar{e}_r \cdot \bar{\tau}_*)|_{r=r_l} = 0 \quad (i=0,1). \quad (3.100)$$

Соотношения (3.99) и (3.100) эквивалентны системам скалярных равенств вида

$$\sigma_{ri}^* = -\sigma_{ri}^0; \quad \tau_{r0i}^* = -\tau_{r0i}^0; \quad \tau_{r1i}^* = -\tau_{r1i}^0, \quad (3.101)$$

$$\tau_{r0i}^* = -\tau_{r0i}^0; \quad \tau_{r1i}^* = -\tau_{r1i}^0; \quad \tau_{r2i}^* = -\tau_{r2i}^0. \quad (3.102)$$

Граничные условия (3.99) или (3.101) используются для определения произвольных постоянных интегрирования, входящих в общее решение \bar{u}^* уравнений (3.98). Для этой цели в равной степени пригодны и условия (3.100) или (3.102).

С учетом выражения (3.95) и (3.96) построим частное решение \bar{u}_0 уравнения (3.93). Исходя из потенциальности объемных сил и уравнения (3.93) решение \bar{u}_0 будем искать в виде

$$\bar{u}_0 = \nabla \bar{\tau}_0. \quad (3.103)$$

В силу линейности уравнения (3.93) достаточно рассмотреть случай одного притягивающего центра O_1 с потенциалом U_1 и невращающейся литосферы, ибо искомое частное решение \bar{u}_0 будет получено суперпозицией решений, соответствующих силовым функциям U_1, \dots, U_{n-1} и $\frac{1}{2} \omega_1^2 \sin^2 \alpha$.

Итак, рассмотрим случай лишь одного притягивающего центра с массой M , которому соответствует силовая функция

$$U^* = -G \gamma_1 \frac{M}{r^*} \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*} \right)^m P_m(\cos \gamma^*) \right), \quad (3.104)$$

где $P_m(\cos \gamma^*)$ — полином Лежандра и он, согласно формуле сложения, имеет вид

$$P_m(\cos \gamma^*) = \sum_{k=0}^m \frac{2}{\delta_k} \cdot \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \cdot P_{m-k}(\cos \beta^*) \cdot P_{m-k}(\cos \beta) \cos k(\alpha^* - \alpha). \quad (3.105)$$

Здесь (r^*, α^*, β^*) — координаты притягивающего центра; (r, α, β) — координаты текущей точки объема литосферы; $\delta_0 = 2$, $\delta_k = 1$ для всех $k \geq 1$. Так как координаты притягивающего центра фиксированы, то выражение (3.105) можно рассматривать как функцию переменных (α, β) , а именно, как сферическую функцию:

$$Y_m(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^m P_{m-k}(\cos \beta) [A_{m-k} \cos k\alpha + B_{m-k} \sin k\alpha], \quad (3.106)$$

где

$$A_{m-k} = \frac{2}{\delta_k} \cdot \frac{(m-k)!}{(m+k)!} P_{m-k}(\cos \beta^*) \cos k\alpha^*; \quad (3.107)$$

$$B_{m-k} = \frac{2}{\delta_k} \cdot \frac{(m-k)!}{(m+k)!} P_{m-k}(\cos \beta^*) \sin k\alpha^*$$

суть постоянные, зависящие от угловых координат притягивающего центра.

С учетом выражения (3.106) представим ряд (3.104) в виде

$$U^* = -G\mu_0 \frac{M}{r^*} \left[1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m r^m Y_m(\alpha, \beta) \right], \quad (3.108)$$

где $a_m = (r^*)^{-m}$. Ряд (3.108) сходится регулярно в любой точке пространства, для которой $r < r^*$. Первый член ряда (3.108) не зависит от координат текущей точки и отвечает за движение литосферы как абсолютно твердое тело. Поэтому под U^* будем принимать выражение (3.108) без его первого члена $-G\mu_0 \frac{M}{r^*}$.

Полагая $\vec{R} = \nabla U^*$ и $\vec{P} = \vec{r} \times \nabla U^*$, равенство (3.103) внесем в уравнения (3.93). Тогда

$$\nabla \nabla \varphi_0 = - \frac{1-2\nu}{4\mu(1-\nu)} U^*. \quad (3.109)$$

Функция φ_0 , являясь решением уравнения (3.109), непрерывна вместе со вторыми частными производными по каждой из своих переменных. Поэтому она разлагается в ряд по степеням радиуса r

и по сферическим функциям. При этом с учетом порядка производной по r функции φ_0 , входящей в уравнение (3.109), будем иметь выражение

$$\varphi_0(r, \alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m r^m {}^2Y_m(\alpha, \beta), \quad (3.110)$$

где b_m — неизвестные коэффициенты.

Ряд (3.110) также сходится регулярно в области $r < r_*$.

Внося представление (3.110) для φ_0 в уравнение (3.109) и сравнивая правую и левую части полученного при этом выражения, определяем коэффициенты b_m ряда (3.110). К примеру, укажем несколько первых коэффициентов:

$$b_0 = 0; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = \frac{(1-2\nu)\epsilon_0}{56\mu(1-\nu)}; \quad b_3 = \frac{(1-2\nu)\epsilon_0}{36\mu(1-\nu)}. \quad (3.111)$$

Итак, функция φ_0 построена. По формуле (3.103) определим искомое частное решение. Для простоты ограничимся начальным приближением ряда (3.110), содержащим члены с коэффициентами (3.111). Тогда

$$\begin{aligned} u_{0r} &= G_0 r^2 \cdot \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \left[\frac{r}{7} Y_2(\alpha, \beta) + \frac{5r^2}{18} Y_3(\alpha, \beta) \right]; \\ u_{0\alpha} &= G_0 r^2 \cdot \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \left[\frac{r}{28} Y_2(\alpha, \beta) + \frac{r^2}{18} Y_3(\alpha, \beta) \right]; \\ u_{0\beta} &= G_0 r^2 \cdot \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \left[\frac{r}{28} Y_2(\alpha, \beta) + \frac{r^2}{18} Y_3(\alpha, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Сферические функции Y_2 и Y_3 , входящие в решение (3.112), определяются по формуле (3.106), а их коэффициенты A_{mk} и B_{mk} — по формулам (3.107).

Компоненты тензора напряжений σ_0 найдем по формулам (3.90) заменой вектора \vec{u} на \vec{u}_0 . Укажем эти величины:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \frac{\lambda}{r^2 \sin\beta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_{0r} \sin\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r u_{0\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r u_{0\beta} \sin\beta) \right] + 2\nu \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}; \\ \sigma_{r\alpha}^0 &= \mu \left(\frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_{0r}}{\partial \beta} - \frac{u_{0\alpha}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{r^2 \sin\beta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}^0 \sin\beta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r^2 \sigma_{r\alpha}^0) - \frac{\partial}{\partial \beta} (r^2 \sigma_{r\beta}^0 \sin\beta) + r^2 \sigma_{r\alpha}^0 \sin\beta + r^2 \sigma_{r\beta}^0 \cos\beta \right] + \frac{\partial \beta}{\partial \beta} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\beta}^0 &= \mu \left(\frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \beta} \cdot \frac{\partial u_{0r}}{\partial \alpha} - \frac{u_{0\beta}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \beta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\beta}^0 \sin \beta) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{\alpha\beta}^0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \tau_{\alpha\alpha}^0 \sin \beta) + r \tau_{\alpha r}^0 \sin \beta - r \tau_{\alpha\alpha}^0 \cos \beta \right] + \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \Big\}; \\
\sigma_{\alpha\alpha}^0 &= \frac{\lambda}{r^2 \sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{0r} \sin \beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r u_0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r u_{0\alpha} \sin \beta) \right] + \\
&+ \frac{2\mu}{r} \left(u_{0r} + \frac{\partial u_0}{\partial \beta} \right); \\
\sigma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_{0\beta}}{\partial \beta} - u_{0\alpha} \operatorname{ctg} \beta \right) + \frac{1}{2r \sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\beta}^0 \sin \beta) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{\alpha\beta}^0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \tau_{\alpha r}^0 \sin \beta) - r \tau_{\alpha\alpha}^0 \sin \beta - r \tau_{\beta\beta}^0 \sin \beta \right]; \\
\tau_{\alpha r}^0 &= \mu \left(\frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \beta} - \frac{u_{0\alpha}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \beta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\alpha}^0 \sin \beta) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{\alpha\alpha}^0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \tau_{\alpha\beta}^0 \sin \beta) + r \tau_{\alpha r}^0 \sin \beta + r \tau_{\alpha\alpha}^0 \cos \beta \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \Big\};
\end{aligned}
\tag{3.113}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta\beta}^0 &= \frac{\lambda}{r^2 \sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{0\beta} \sin \beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r u_0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r u_{0\beta} \sin \beta) \right] + \\
&+ \frac{2\mu}{r} \left[\frac{2}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r u_{0\alpha}) + 2u_{\alpha} + u_{0\alpha} \operatorname{ctg} \beta \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\alpha}^0 &= \mu \left(\frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{u_{0\beta}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{r^2 \sin \beta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\alpha}^0 \sin \beta) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{\alpha\alpha}^0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \tau_{\alpha\beta}^0 \sin \beta) + r \tau_{\alpha r}^0 \sin \beta - r \tau_{\alpha\alpha}^0 \cos \beta \right] - \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta\alpha}^0 &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_{0\beta}}{\partial \beta} - u_{0\alpha} \operatorname{ctg} \beta \right) + \frac{1}{2r^2 \sin \beta} \times \\
&\times \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\alpha}^0 \sin \beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r \tau_{\alpha\alpha}^0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \tau_{\alpha\beta}^0 \sin \beta) - r \tau_{\alpha\alpha}^0 \sin \beta - r \tau_{\beta\beta}^0 \sin \beta \right].
\end{aligned}$$

В выражения (3.113) входят, во-первых, составляющие u_{0r} , $u_{0\alpha}$,

u_θ вектора u , которые будут получены по формулам (3.112); во вторых, компоненты тензора пар напряжений τ_0 . Запишем выражения элементов тензора τ_0 :

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^0 &= \frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] + \\ &+ \frac{\gamma-1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \\ &- \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} r \sin \theta \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r - r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \cdot \frac{1}{r} \left(u_\theta + \right. \\ &\quad \left. + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \Big|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta}^0 &= \frac{\gamma+1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r - r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] + \frac{\gamma-1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] - \\ &- \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} r \sin \theta \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r - r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \Big|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^0 &= \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} \Big] + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} - u_\tau - r \frac{\partial u_\tau}{\partial r} \right) \operatorname{ctg}\theta \Big] + \\
& + \frac{1-\tau}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \theta} + u_\tau \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} - \right. \\
& \left. - u_\tau - r \frac{\partial u_\tau}{\partial r} \right) \operatorname{ctg}\theta \Big] - \frac{1-\tau}{2} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{1}{r} \times \right. \\
& \times \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \theta} + u_\tau \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} r \sin\theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} - \right. \\
& \left. - u_\tau - r \frac{\partial u_\tau}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} r \cdot \frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \Big]; \quad (3.114) \\
\tau_{r\theta}^e &= \tau \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} - u_\tau - r \frac{\partial u_\tau}{\partial r} \right) \right]; \\
\tau_{r\tau}^e &= \tau \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right]; \\
\tau_{\theta r}^e &= \frac{\tau}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \theta} + u_\tau \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} - u_\tau - r \frac{\partial u_\tau}{\partial r} \right) \right\}; \\
\tau_{\theta\tau}^e &= \frac{\tau}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right]; \\
\tau_{\tau r}^e &= \frac{\tau}{r} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \theta} + u_\tau \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right\}; \\
\tau_{\tau\theta}^e &= \frac{\tau}{r} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} - u_\tau - r \frac{\partial u_\tau}{\partial r} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] \operatorname{ctg}\theta \right\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, по формулам (3.113) и (3.114) можно построить компоненты тензоров $\underline{\sigma}_*$ и $\underline{\tau}_*$, а также тензоров σ и τ с помощью замены вектора u_0 на u_* и u соответственно.

Построим общее решение u_* уравнения (3.98). С этой целью уравнение (3.98) сведем к системе скалярных уравнений от относительного объемного расширения Θ , радиального перемещения u_r и величины ω_r — радиальной составляющей вектора ω , определяемого выражением (3.89) и называемого вращением. Эти уравнения имеют вид

$$\Delta^2 \Delta^2 \omega_r + \nabla_1 \Delta^2 \omega_r + \nabla_2 \omega_r = 0, \quad (3.115)$$

$$\Delta^2 \Theta + \left(r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \Theta = 0, \quad (3.116)$$

$$\Delta^2 \Delta^2 u_r + \nabla_2 \Delta^2 u_r + \nabla_1 u_r = \frac{8(1-\nu)\lambda}{(1-2\nu)(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \nabla_3 \Theta, \quad (3.117)$$

где

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \quad (3.118)$$

оператор Бельтрами, а дифференциальные операторы $\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_5$ зависят от r и

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= 2r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4\nu r^2}{1+\nu}; \quad \nabla_2 = \left[2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \right] \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{4\nu r^2}{1+\nu} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right); \\ \nabla_3 &= \frac{4\nu r^4}{1+\nu} \left\{ \frac{\gamma+\epsilon}{2\nu} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \right] - \frac{1}{r^2} \right\}; \quad \nabla_4 = \frac{4\nu r^4}{1+\nu} \left\{ \left[\frac{\gamma+\epsilon}{2\nu r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{2} r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right\}; \quad \nabla_5 = \frac{4\nu r^4}{1+\nu} \left\{ \left(\frac{2}{r} - \frac{\gamma+\epsilon}{2\nu r^2} r \frac{\partial}{\partial r} \right) \times \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\}. \quad (3.119) \end{aligned}$$

Каждое из уравнений (3.115), (3.116) зависит лишь от одной неизвестной функции n , следовательно, решается автономно. С уче-

том свойств дифференцируемости функций ω_r , Θ и u_r разложим их в ряд по гармоническим многочленам:

$$\omega_r(r, \alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{rm}(r) Y_m(\alpha, \beta), \quad (3.120)$$

$$\Theta(r, \alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m(r) Y_m(\alpha, \beta), \quad (3.121)$$

$$u_r(r, \alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{rm}(r) Y_m(\alpha, \beta). \quad (3.122)$$

Выражения (3.120) и (3.121) соответственно внесем в уравнения (3.115) и (3.116). В последних, учитывая равенства $\Delta^2 Y_m = -m(m+1)Y_m$, приводим подобные члены. Так как система сферических функций $\{Y_m(\alpha, \beta)\}_{m=0}^{\infty}$ независима, ортогональна и полна на единичной сфере, то выражения (3.120) и (3.121) представляют собой решения уравнений (3.115) и (3.116) в том и только в том случае, когда в приведенных выражениях все коэффициенты равны нулю. Приравнявая последние к нулю, получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок и зависит лишь от одной функции $\{\omega_{rm}(r)\}$ и $\{\Theta_m(r)\}$. Решая упомянутую систему решений, определяем коэффициенты рядов (3.120) и (3.121); используя найденное решение $\Theta(r)$, поступаем аналогично с рядом (3.122) и уравнением (3.117).

Таким образом, общее решение уравнения (3.98) строится без особых усилий. В частности, учитывая предположения, при которых было построено частное решение (3.112), будем иметь $\Theta(r, \alpha, \beta) = c_1 r^{1/2} Y_2(\alpha, \beta) + c_2 r^{3/2} Y_2(\alpha, \beta)$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные интегрирования. Значения этих постоянных определяются из граничных условий (3.101).

Итак, построено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой литосферы вращающейся Земли в поле ньютонова притяжения ее Луной, Солнцем и планетами. В силу линейности уравнений, описывающих поле перемещений элементов литосферы, решения рассмотренных в разделах 3.4 и 3.5 задач складываются и дают решение более общей задачи о напряженно-деформированном состоянии вращающейся упругой литосферы, взаимодействующей с астеносферой через вязкие напряжения, с другими внутренними слоями и внешними телами по закону тяготения Ньютона.

Численный и качественный анализ, основанный на энергетических оценках, показывает, что деформация от объемных центробежных сил количественно на четыре порядка выше деформации от гьютоновых сил. Однако особенности фигуры равновесия литосферы определяются действием внешних силовых факторов. При этом еще остается открытым вопрос о влиянии неоднородности плотности вещества литосферы. Этот вопрос исследован в следующем разделе.

3.6. Напряженно-деформированное состояние вращающейся литосферы с центрально-симметричной плотностью

Рассмотрим вращающуюся с угловой скоростью ω литосферу, представленную упругой сферической оболочкой внешнего и внутреннего радиусов r_0 и r_1 . Пусть литосфера имеет центр масс в центре масс Земли и центрально-симметричное распределение вещества с плотностью $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, где \vec{r} — радиус-вектор точек ее объема. В каждой точке литосферы с плотностью $\rho(r)$ действует центробежная сила. Введем функцию вида

$$\rho(r)\Phi(r, \Theta) = \rho(r) \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \Theta. \quad (3.123)$$

Здесь Θ — коширота. Центробежная сила $\vec{F} = \{F_r, F_\theta, F_\phi\}$ имеет составляющие

$$F_r = \rho(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad F_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad F_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \quad (3.124)$$

или в силу выражения (3.123).

$$F_r = \rho(r) \omega^2 r \sin^2 \Theta; \quad F_\theta = 0; \quad F_\phi = \rho(r) \omega^2 r \sin \Theta \cdot \cos \Theta. \quad (3.125)$$

Сила \vec{F} , являясь фиктивной силой инерции вращения, удовлетворяет необходимым и достаточным условиям равновесия Земли, а именно, условиям

$$\iiint_V \vec{F} dV = 0; \quad \iiint_V (\vec{r} \times \vec{F}) dV = 0, \quad (3.126)$$

где V — объем Земли, а dV — элемент объема.

С учетом равенства (3.126) и предпосылок линейной безмоментной теории упругости условия статического равновесия элементарного объема литосферы дают следующее уравнение:

$$(\lambda + \mu) \nabla \Theta + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{F} = 0, \quad (3.127)$$

где Θ — объемное расширение; \vec{u} — вектор перемещения; λ и μ — упругие постоянные Ляме. Решение уравнения (3.127) будем искать в виде суммы общего решения \vec{u}_* и какого-либо частного решения \vec{u} . Последнее будем искать в виде (3.103). Тогда с учетом выражения объемных сил (3.124) для функции будем иметь уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi_0 = \frac{1-2\nu^*}{2G^*(1-\nu^*)} \rho(r) \Phi(r, \Theta), \quad (3.128)$$

где G^* — модуль упругости или модуль Юнга; ν^* — коэффициент Пуассона. Они связаны с постоянными Ляме соотношениями $G^* = \frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$, $\nu^* = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$.

Оператор Δ , входящий в уравнение (3.128), в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{1-\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3.129)$$

где через η обозначен $\cos \theta$.

С учетом свойства непрерывности функции φ_0 разложим его в ряд по полиномам Лежандра. При этом, исходя из вида (3.123) правой части уравнения (3.128), будем иметь выражение для φ_0 :

$$\varphi_0(r, \Theta) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) P_2(\eta). \quad (3.130)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — неопределенные коэффициенты, а $P_2(\eta)$ — обычный полином Лежандра второй степени. Оператором (3.129) подействуем на обе части равенства (3.130). При этом с учетом правой части уравнения (3.128) получим систему, определяющую искомые коэффициенты $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi_1(r)}{dr} - 6\varphi_1(r) &= \frac{1-2\nu^*}{6G^*(1-\nu^*)} \rho(r) r^3; \\ \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi_2(r)}{dr} &= - \frac{1-2\nu^*}{6G^*(1-\nu^*)} \rho(r) r^3. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Второе уравнение (3.131) интегрируется, а первое из них имеет регулярную особенность в точке $r=0$. Так как в рассматриваемой области (сферическая оболочка) $0 < r_1 \leq r \leq r_0$, то и первое уравнение интегрируемо. Предположим, что решение (3.130) построено.

Тогда компоненты вектора u_0 упругого перемещения, соответствующего этому частному решению, выражаются формулами

$$u_r^0 = \frac{\partial \zeta_0}{\partial r}; \quad u_\varphi^0 = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi} = 0; \quad u_\theta^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \theta}. \quad (3.132)$$

Примем, что напряжения на граничных поверхностях равны нулю. Тогда необходимо будет построить решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.127):

$$(\lambda + \mu) \nabla \Theta^* + \mu \Delta \bar{u}^* = 0, \quad (3.133)$$

с измененными граничными условиями, которые записываются с учетом частного решения \bar{u}^0 . Решение \bar{u}^* также будем искать в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} u_r^* (r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{rm}(r) P_m(\eta); \\ u_\theta^* (r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{\theta m}(r) P_m(\eta); \\ u_\varphi^* (r, \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (3.134)$$

где ψ_{rm} , $\psi_{\theta m}$ — неизвестные коэффициенты. Подставляя выражения (3.134) в уравнение (3.133), получаем систему уравнений вида (3.131) для искоемых коэффициентов. Однако исходя из граничных условий получим, что суммы в (3.134) обрываются на $m=2$. Окончательный вид решения $\bar{u} = \bar{u}^0 + \bar{u}^*$ зависит от конкретного распределения $\rho(r)$ вещества литосферы. Решение \bar{u} для частного случая функции $\rho(r)$ указывает на существенное влияние $\rho(r)$ на напряженно-деформированное состояние литосферы. В частности, выявлено, что если функция $\rho(r)$ непостоянна, то в зависимости от величины угловой скорости ω_1 может произойти повсеместное сжатие литосферы.

3.7. Качественный анализ предельного режима вращения сплошной Земли с упругодеформируемой литосферой

Рассмотрим движение системы G_n при условии, что осуществлен выход на режим (3.46). Это означает выполнение равенств

(2.177) и обращение в нуль моментов всех возмущающих сил. Тогда интеграл энергии (3.38) имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^n M_l (\dot{\xi}_l^2 + \dot{\eta}_l^2 + \dot{\zeta}_l^2) + \frac{c}{2} (r^*)^2 - U = h^*, \quad (3.135)$$

где U — силовая функция абсолютно твердой Земли, фигура которой соответствует равновесному состоянию:

— равнодействующая объемных сил инерции вращения литосферы с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}^* = \{0, 0, r^*\}$, массовых сил самогравитации и массовых сил взаимодействия с телами M_1, M_2, \dots, M_n в каждой точке литосферы равна нулю;

— результирующий момент указанных сил в каждой точке литосферы также равен нулю.

Пусть координатная ось O^*_{ξ} системы отсчета $O^*_{\xi\eta\zeta}$ и вектор $\vec{\Omega}$ коллинеарны. Тогда интегралы моментов имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n M_l (\dot{\xi}_l r_{l1} - \dot{\eta}_l r_{l2}) &= \text{const}; \\ \sum_{l=0}^n M_l (\dot{\xi}_l \dot{\zeta}_l - \dot{\eta}_l \dot{\zeta}_l) &= \text{const}; \\ \sum_{l=0}^n M_l (\dot{\eta}_l \dot{\zeta}_l - \dot{\xi}_l \dot{\zeta}_l) + cr^* &= \text{const}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Интеграл энергии системы G_n принимает форму

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^n M_l (\dot{\xi}_l^2 + \dot{\eta}_l^2 + \dot{\zeta}_l^2) - U = h; \quad h = h^* - \frac{c}{2} (r^*)^2 \quad (3.137)$$

и имеют место равенства

$$Q_{\xi} = 0; \quad Q_{\eta} = 0; \quad Q_{\zeta} = 0. \quad (3.138)$$

При этом интегралы движения центра масс, не зависящие от вращения, остаются без изменения и подходящий выбор начала O^* системы $O^*_{\xi\eta\zeta}$ придает им вид

$$\sum_{l=0}^n M_l \dot{\xi}_l = 0; \quad \sum_{l=0}^n M_l \dot{\eta}_l = 0;$$

$$\sum_{i=0}^n M_i \dot{\tau}_i = 0; \quad \sum_{i=0}^n M_i \tau_i = 0; \quad (3.139)$$

$$\sum_{i=0}^n M_i \dot{\tau}_i = 0; \quad \sum_{i=0}^n M_i \tau_i = 0.$$

Итак, с выходом на предельный режим (3.48) Земля совершает перманентное вращение около оси ее наибольшего главного центрального момента инерции, поступательное движение системы G_n удовлетворяет условиям (3.136), (3.137) и (3.138), уровень полной энергии системы снижается до величины h и возрастает уровень ее энергии покоя (потенциальная энергия).

Рассмотрим вопрос о предельном режиме поступательного движения системы G_n . С этой целью режим (3.48) представим в виде

$$\varphi = 0; \quad \dot{\varphi} = \varphi_0 t; \quad \Theta = 0. \quad (3.140)$$

Выражение (3.140) внесем в правые части уравнений движения центров масс тел M_0, M_1, \dots, M_n и представим их в векторной форме:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{Y}; \quad \frac{d\bar{Y}}{dt} = \bar{\Gamma}(t, \bar{X}), \quad (3.141)$$

где \bar{X} , \bar{Y} , и $\bar{\Gamma}$ — $3(n+1)$ -мерные вектор-функции:

$$\bar{X} = \{\xi_0, \eta_0, \dots, \zeta_n\};$$

$$\bar{Y} = \{\xi_0, \dot{\tau}_0, \dots, \dot{\tau}_n\}; \quad (3.142)$$

$$\bar{\Gamma} = \{\bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_{3(n+1)}\}.$$

В общем случае в силу (3.140) вектор-функция $\bar{\Gamma}(t, \bar{X})$ является почти периодической функцией времени. Предположим, что поступательное движение системы G_n устойчиво по Лагранжу, т. е.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_1} |\xi_t| < \infty; \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_1} |\eta_t| < \infty; \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_1} |\zeta_t| < \infty; \quad (3.143)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_1} |\dot{\xi}_t| < \infty; \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_1} |\dot{\eta}_t| < \infty; \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_1} |\dot{\zeta}_t| < \infty,$$

где $i=0, 1, \dots, n$. Зафиксируем произвольную ω -последователь-

ность времени $\{t_k\}$. В силу (3.143) из последовательности $\{t_k\}$ можно извлечь хотя бы одну ω -подпоследовательность, для которой вектор-функция

$$\bar{q} = \{\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \dots, \bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n, \dots, \bar{\xi}_n\} \quad (3.144)$$

имеет ω -предел $q_\infty = \{\xi_{0\infty}, \eta_{0\infty}, \dots, \xi_{n\infty}, \eta_{n\infty}, \dots, \xi_{n\infty}\}$.

По отношению к уравнениям (3.141) поставим задачу Коши с начальными условиями

$$\{X, \bar{Y}\}_{t=0} = q_\infty. \quad (3.145)$$

Задача Коши (3.141), (3.144) имеет единственное решение, которое обозначим через $g(t, q_\infty)$. В силу неравенств (3.143) движение $g(t, q_\infty)$ устойчиво по Лагранжу. Докажем, что оно почти периодически. С этой целью через Z^* обозначим замыкание траектории движения (3.144). По условиям Z^* есть компактное множество. Построим множество

$$F\{\bar{Y}, \bar{Y}(t, X)\} = \{\bar{Y}(t+s), \bar{Y}(t+s, X) | s \in R\} - \quad (3.146)$$

множество всех сдвигов по времени правых частей уравнений (3.141). Очевидно, множество (3.146) предкомпактно в пространстве $C(R_1 \times Z^*, R_{3n+1})$, построенном при условиях движения системы G_n .

Пусть \bar{F} означает замыкание множества (3.146) и $P(t)z^*$ — его произвольный элемент, где $z^* \in Z^*$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz^*}{dt} = P(t)z^*. \quad (3.147)$$

Каждое уравнение вида (3.147) имеет единственное решение $z^*(t)$, являющееся устойчивым по Лагранжу. Согласно известной теореме о согласованных решениях [62], решение $z^*(t)$ будет изохронным по возвращаемости во времени с функцией $P(t)z^*$. Так как $P(t)z^*$ есть почти периодическая функция, то и решение $z^*(t)$ будет почти периодическим. Отсюда в силу произвольности ω -последовательности $\{t_k\}$, ω -предельного элемента q_∞ , элемента $z^* \in Z^*$ и элемента $P(t)z^*$ множества \bar{F} вытекает, что поступательное движение системы G_n имеет своим предельным режимом некоторое почти периодическое движение.

Итак, построена полная качественная картина эволюции и взаимовлияния поступательного и вращательного движений Земли, поступательно-вращательного движения Солнечной системы G_n в целом.

В заключение отметим следующий факт. Так как упругая Земля мгновенно следует приложенным к ней нагрузкам, то для достаточно малого и отличного от нуля момента времени t имеет место неравенство

$$U_0 < U^*. \quad (3.148)$$

Здесь U_0 и U^* — значения силовой функции системы G_n , соответствующие моментам времени $t=0$, $t=t^*$ и t^* мало.

Согласно неравенству (3.148), потенциальная энергия — U системы G_n резко падает, так как

$$-U_0 > -U^*. \quad (3.149)$$

При этом кинетическая энергия вращения Земли не может расти из-за увеличения ее момента инерции относительно оси вращения и избыток энергии, определяемый неравенством (3.149), передается на орбитальное движение системы G_n . Поэтому прежде всего следует ожидать рост кинетической энергии поступательного движения Земли. Если так, то под действием центробежных сил должна расширяться ее орбита. По-видимому, подобный уход небесного тела от светила продолжается и сегодня.

Сказанное хорошо иллюстрируется задачей двух деформируемых тел. Подтверждением тому служат взаимная эволюция системы Земля — Луна в виде векового ухода Луны от Земли, резонансность их движения и положение оси вращения Луны.

ность времени $\{t_n\}$. В силу (3.143) из последовательности $\{t_n\}$ можно извлечь хотя бы одну ω -подпоследовательность, для которой вектор-функция

$$\bar{q} = \{\bar{z}_0, \bar{q}_0, \dots, \bar{z}_n, \bar{q}_n, \bar{z}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \dots, \bar{z}_n\} \quad (3.144)$$

имеет ω -предел $q_\infty = \{\bar{z}_\infty, \bar{q}_\infty, \dots, \bar{z}_\infty, \bar{q}_\infty, \bar{z}_\infty, \bar{q}_\infty, \dots, \bar{z}_\infty\}$.

По отношению к уравнениям (3.141) поставим задачу Коши с начальными условиями

$$\{X, \bar{Y}\}_{t=0} = q_\infty. \quad (3.145)$$

Задача Коши (3.141), (3.144) имеет единственное решение, которое обозначим через $g(t, q_\infty)$. В силу неравенств (3.143) движение $g(t, q_\infty)$ устойчиво по Лагранжу. Докажем, что оно почти периодически. С этой целью через Z^* обозначим замыкание траектории движения (3.144). По условиям Z^* есть компактное множество. Построим множество

$$P\{\bar{Y}, \bar{Y}(t, \bar{X})\} = \{\bar{Y}(t+s), \bar{Y}(t+s, \bar{X}) \mid s \in R_1\} - \quad (3.146)$$

множество всех сдвигов по времени правых частей уравнений (3.141). Очевидно, множество (3.146) предкомпактно в пространстве $C(R_1 \times Z^*, R_{2n+1})$, построенном при условиях движения системы G_n .

Пусть \bar{P} означает замыкание множества (3.146) и $P(t)z^*$ — его произвольный элемент, где $z^* \in Z^*$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz^*}{dt} = P(t)z^*. \quad (3.147)$$

Каждое уравнение вида (3.147) имеет единственное решение $z^*(t)$, являющееся устойчивым по Лагранжу. Согласно известной теореме о согласованных решениях [62], решение $z^*(t)$ будет изохронным по возмущаемости во времени с функцией $P(t)z^*$. Так как $P(t)z^*$ есть почти периодическая функция, то и решение $z^*(t)$ будет почти периодическим. Отсюда в силу произвольности ω -последовательности $\{t_n\}$, ω -предельного элемента q_∞ , элемента $z^* \in Z^*$ и элемента $P(t)z^*$ множества \bar{P} вытекает, что поступательное движение системы G_n имеет своим предельным режимом некоторое почти периодическое движение.

Итак, построена полная качественная картина эволюции и взаимодействия поступательного и вращательного движений Земли, поступательно-вращательного движения Солнечной системы G_n в целом.

В заключение отметим следующий факт. Так как упругая Земля мгновенно следует приложениям к ней нагрузкам, то для достаточно малого и отличного от нуля момента времени t имеет место неравенство

$$U_0 < U^*. \quad (3.148)$$

Здесь U_0 и U^* — значения силовой функции системы G_n , соответствующие моментам времени $t=0$, $t=t^*$ и t^* мало.

Согласно неравенству (3.148), потенциальная энергия — U системы G_n резко падает, так как

$$-U_0 > -U^*. \quad (3.149)$$

При этом кинетическая энергия вращения Земли не может расти из-за увеличения ее момента инерции относительно оси вращения и избыток энергии, определяемый неравенством (3.149), передается на орбитальное движение системы G_n . Поэтому прежде всего следует ожидать рост кинетической энергии поступательного движения Земли. Если так, то под действием центробежных сил должна расширяться ее орбита. По-видимому, подобный уход небесного тела от светила продолжается и сегодня.

Сказанное хорошо иллюстрируется задачей двух деформируемых тел. Подтверждением тому служат взаимная эволюция системы Земля — Луна в виде векового ухода Луны от Земли, резонансность их движения и положение оси вращения Луны.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
СЛОИСТОЙ ЗЕМЛИ

Основу современной теории устойчивости движения составляют методы и теоремы Ляпунова в достаточных условиях непрерывной зависимости равновесных решений от возмущений в некотором функциональном пространстве. Огромный вклад в теорию устойчивости движения внесли советские ученые, обогатившие ее новыми категориями, методами и своими фундаментальными результатами. Построение равновесных решений, восходящее к работам А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, получило свое развитие через посредство асимптотического метода Крылова—Боголюбова, метода точечных преобразований Андронова и Витта, метода Колмогорова и т. д.

Равновесные решения, как правило, представляют собой предельные циклы, открытие которых связано с именем А. Пуанкаре. Качественная теория рождения и устойчивости предельных циклов и предельных режимов движений является интенсивно развивающейся ветвью современной теории устойчивости движения. Последняя в самом широком ее понимании стала единой теорией построения и исследования устойчивости равновесных решений нелинейных уравнений движения. При этом под равновесным решением выступают состояние покоя, периодическое и изредка почти периодическое движения, соответствующие стационарным и повторяющимся во времени процессам.

Как показано в предшествующих главах, во вращательном движении слоистой Земли имеют место равновесные решения, совпадающие с одним из ее перманентных вращений около главных центральных осей инерции. С точки зрения качественного анализа вращательного движения слоистой Земли каждый из трех ее предельных режимов является равновозможным. В связи с этим возникает вопрос: какой из предельных режимов вращения слоистой Земли избирается ею в ходе эволюции движения всей Солнечной

системы? Для того чтобы получить ответ на этот вопрос, в данной главе исследована устойчивость предельных режимов вращения слюистой Земли около осей ее главных центральных моментов инерции. Соответствующий анализ проведен на основании теорем Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению. При этом сначала рассматривается случай равенства нулю главного момента внешних приложенных к Земле гравитационных сил. Затем обосновывается правомерность такого подхода путем применения теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. При геофизических данных о Земле, указанных выше, найдены коэффициенты уравнений первого приближения, составлен характеристический определитель и вычислены его миноры Гурвица. Показана устойчивость вращения слюистой Земли около оси ее наибольшего главного момента инерции и неустойчивость вращения около осей среднего и наименьшего главных моментов инерции.

4.1. Исследование устойчивости движения модели Земли с вязкой астеносферой и жидким проводящим слоем ядра

Дифференциальные уравнения движения около центра масс модели Земли с вязкой астеносферой и жидким проводящим слоем ядра при равном нулю главном моменте внешних сил имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 &= -a_{11}p_1 + a_{14}p_2 + a_{17}p_3 - a_{25}q_1r_1; \\
 \dot{q}_1 &= -a_{22}q_1 + a_{25}q_2 + a_{28}q_3 - a_{30}r_1p_1; \\
 \dot{r}_1 &= -a_{33}r_1 + a_{36}r_2 + a_{39}r_3 - a_{40}p_1q_1; \\
 \dot{p}_2 &= a_{41}p_1 - a_{44}p_2 + a_{47}p_3 - a_{50}q_1r_1 - (q_1r_2 - q_2r_1); \\
 \dot{q}_2 &= a_{52}q_1 - a_{55}q_2 + a_{58}q_3 - a_{60}r_1p_1 - (p_2r_1 - p_1r_2); \\
 \dot{r}_2 &= a_{63}r_1 - a_{66}r_2 + a_{69}r_3 - a_{70}p_1q_1 - (p_1q_2 - p_2q_1); \\
 \dot{p}_3 &= a_{74}p_2 - a_{77}p_3 + r_1q_3 - q_1r_3; \\
 \dot{q}_3 &= a_{85}q_2 - a_{88}q_3 + p_1r_3 - r_1p_3; \\
 \dot{r}_3 &= a_{90}r_2 - a_{93}r_3 + q_1p_3 - p_1q_3.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

За невозмущенное движение слюистой Земли примем ее пре-

дельный режим — вращение около оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω , описываемое равенствами

$$p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = 0; \quad r_1 = r_2 = r_3 = \Omega. \quad (4.2)$$

В возмущенном движении положим $r_1 = \Omega + u$, $r_2 = \Omega + v$, $r_3 = \Omega + w$. Тогда уравнения (4.1), линеаризованные около решения (4.2), примут вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -a_{23}u + a_{36}v + a_{30}w; \\ \dot{v} &= a_{63}u - a_{66}v + a_{65}w; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\dot{w} = a_{96}v - a_{95}u,$$

$$\dot{p}_1 = -a_{11}p_1 + a_{14}p_2 + a_{17}p_3 - a_{20}\Omega q_1;$$

$$\dot{p}_2 = a_{41}p_1 - a_{44}p_2 + a_{47}p_3 - (a_{56}\Omega + \Omega)q_1 + \Omega q_2; \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_3 = a_{44}p_2 - a_{77}p_3 - \Omega q_1 + \Omega q_3,$$

$$\dot{q}_1 = -a_{30}\Omega p_1 - a_{22}q_1 + a_{25}q_2 + a_{28}q_3;$$

$$\dot{q}_2 = (-a_{60}\Omega + \Omega)p_1 - \Omega p_2 + a_{52}q_1 - a_{55}q_2 + a_{58}q_3;$$

$$\dot{q}_3 = \Omega p_1 - \Omega p_3 + a_{58}q_2 - a_{66}q_3.$$

Полученные таким образом преобразованные уравнения (4.3), (4.4) называются дифференциальными уравнениями возмущенного движения.

Обозначим возмущения $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, u, v, w$ через переменную x_s ($s = 1, 2, \dots, 9$). Запишем неравенства

$$|x_s(t_0)| \leq \eta, \quad (4.5)$$

$$|x_s(t)| < \varepsilon. \quad (4.6)$$

Тогда определение устойчивости движения формулируется следующим образом [10].

Невозмущенное движение (4.2) устойчиво, если для всякого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число $\eta(\varepsilon)$, такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени t_0 выпол-

няются неравенства (4.5), при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства (4.6).

Если невозмущенное движение устойчиво и если число $\epsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам (4.5), будут выполняться условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_s(t) = 0, \quad (4.7)$$

то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

В данном определении рассматривается устойчивость по Ляпунову невозмущенного движения (4.2) по отношению к возмущениям начальных условий. Физически это означает, что рассматривается устойчивость по отношению к мгновенно действующим возмущениям.

Однако рассматриваемая модель Земли находится под постоянным воздействием возмущающих сил в виде приложенных к Земле внешних гравитационных сил. Поэтому представляет интерес исследование устойчивости рассматриваемого движения (4.2) по отношению к таким постоянно действующим возмущениям.

Уравнения движения (4.1) запишем в виде

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \dots, y_9), \quad (4.8)$$

где через переменную y_s ($s=1, 2, \dots, 9$) обозначены $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3$.

Наряду с уравнениями движения (4.8) рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \dots, y_9) + R_s(t, y_1, \dots, y_9) \quad (s=1, 2, \dots, 9), \quad (4.9)$$

где $R_s(t, y_1, \dots, y_9)$ — некоторые функции, характеризующие возмущающие факторы в виде внешних гравитационных сил, относительно которых мы можем сказать, что они достаточно малы и удовлетворяют оценкам (2.144).

Будем говорить, что невозмущенное движение $y_s = f_s(t)$ (4.2) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного числа ϵ , как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\eta_1(\epsilon)$ и $\eta_2(\epsilon)$, таких, что всякое решение $y_s(t)$ уравнений (4.9), удовлетворяющее при $t = t_0$ неравенствам $|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \eta_1(\epsilon)$, удовлетворяет при $t > t_0$ не-

равенствам $|y_s(t) - j_s(t)| < \epsilon$, каковы бы ни были функции $R_s(t, y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяющие в области $t > t_0$, $|y_s - j_s(t)| < \epsilon$ неравенствам $|R_s(t, y_1, \dots, y_n)| < \eta_2(\epsilon)$.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (4.3), (4.4) не содержат явно t . Так как соответствующие дифференциальные уравнения возмущенного движения не содержат явно t , то невозмущенное движение является установившимся. Тогда задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях непосредственно приводится к задаче об устойчивости по Ляпунову. Для установившихся движений достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях является асимптотическая устойчивость по Ляпунову [40].

Поскольку дифференциальные уравнения (4.3), (4.4) возмущенного движения не удается проинтегрировать в замкнутой форме, применим методы решения задачи устойчивости, не прибегая к интегрированию уравнений движения.

Такую возможность дают теоремы Ляпунова, при которых вопрос об устойчивости для системы (4.3), (4.4) разрешается рассмотрением лишь уравнений первого приближения независимо от функций, характеризующих возмущающие факторы и являющихся членами не ниже второго порядка.

Имеют место следующие основные теоремы, установленные А. М. Ляпуновым:

1. Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.

2. Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво при любом выборе членов порядка выше первого в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.

3. Если характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю, то члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения можно выбрать так, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость.

Таким образом, для задачи устойчивости имеет большое значение вопрос о знаках вещественных частей корней алгебраических уравнений. В частности, важно знать необходимые и достаточные условия, при которых все корни уравнения имеют отрицательные

вещественные части. Эти необходимые и достаточные условия даются теоремой Гурвица.

Пусть предложено уравнение n -й степени

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (4.10)$$

Составим определители

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1}.$$

где $a_i = 0$, если $i > n$.

Для того чтобы все корни уравнения (4.10) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \dots; \Delta_{n-1} > 0; \Delta_n > 0. \quad (4.11)$$

Заметим, что из теоремы Гурвица и первой теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению можно сделать следующий вывод: если при $a_0 > 0$ все миноры Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ положительны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости.

Заметим также, что если хотя бы одно из неравенств (4.11) имеет противоположный смысл, то среди корней уравнения (4.10) имеются такие, вещественные части которых положительны. Это служит признаком неустойчивости согласно второй теореме Ляпунова.

Характеристические определители систем уравнений (4.3) и (4.4) имеют вид

$$\begin{vmatrix} -a_{33}-\lambda & a_{36} & a_{39} \\ a_{36} & -a_{66}-\lambda & a_{61} \\ 0 & a_{66} & -a_{99}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{vmatrix} -a_{11}-\lambda & a_{14} & a_{17} & -a_{20}\Omega & 0 & 0 \\ a_{41} & -a_{44}-\lambda & a_{47} & -a_{50}\Omega - \Omega & \Omega & 0 \\ 0 & a_{74} & -a_{77}-\lambda & -\Omega & 0 & \Omega \\ -a_{30}\Omega & 0 & 0 & -a_{22}-\lambda & a_{25} & a_{28} \\ -a_{60}\Omega - \Omega & -\Omega & 0 & a_{52} & -a_{55}-\lambda & a_{58} \\ \Omega & 0 & -\Omega & 0 & & -a_{88}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.13)$$

Раскрывая определители (4.12) и (4.13), получаем характеристические уравнения

$$b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0, \quad (4.14)$$

$$M_0\lambda^6 + M_1\lambda^5 + M_2\lambda^4 + M_3\lambda^3 + M_4\lambda^2 + M_5\lambda + M_6 = 0, \quad (4.15)$$

где

$$b_0 = 1; \quad b_1 = a_{33} + a_{66} + a_{99}; \quad b_2 = a_{99}a_{33} + (a_{99} + a_{33})a_{66} -$$

$$-a_{63}a_{36} - a_{56}a_{49}; \quad b_3 = a_{66}a_{99}a_{33} - a_{63}a_{36}a_{99} -$$

$$-a_{96}a_{69}a_{33} - a_{96}a_{63}a_{39};$$

$$M_0 = F_4F_{17}F_{29} + F_8F_{19}F_{23} + F_{14}F_{26}F_{11} + F_{11}F_{17}F_{23} - F_{14}F_8F_{29} + \\ + F_{26}F_{19}F_4;$$

$$M_1 = F_8F_{19}F_{22} + (F_8F_{18} - F_7F_{19})F_{23} - F_4F_{17}F_{26} - \\ - (F_4F_{16} + F_3F_{17})F_{29} - F_{14}F_{26}F_{10} - (F_{14}F_{25} + F_{13}F_{26})F_{11} + \\ + F_{11}F_{17}F_{22} - (F_{11}F_{16} + F_{10}F_{17})F_{23} + F_{14}F_8F_{26} + (F_{14}F_7 + \\ + F_{13}F_8)F_{29} - F_{26}F_{19}F_3 + (F_{26}F_{18} - F_{25}F_{19})F_4;$$

$$M_2 = F_4F_{17}F_{27} + (F_4F_{18} + F_3F_{17})F_{23} + (F_3F_{16} - F_2F_{17})F_{29} - \\ - F_8F_{19}F_{21} + (F_8F_{18} - F_7F_{19})F_{22} - (F_7F_{18} - F_6F_{19})F_{23} +$$

$$\begin{aligned}
& + F_{14}F_{26}F_9 + (F_{14}F_{25} + F_{15}F_{28})F_{10} + (F_{14}F_{24} + F_{13}F_{25} + \\
& + F_{12}F_{26})F_{11} - F_{11}F_{17}F_{21} - (F_{11}F_{16} + F_{10}F_{17})F_{22} + \\
& + (F_{10}F_{16} + F_9F_{17})F_{23} - F_{14}F_8F_{27} - (F_{14}F_7 + F_{13}F_8)F_8 - \\
& - (F_{14}F_6 + F_{13}F_7 + F_{12}F_8)F_{25} - F_{26}F_{19}F_2 - (F_{26}F_{18} - F_{25}F_{19})F_3 + \\
& + (F_{24}F_{19} - F_{25}F_{18})F_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & (F_2F_{16} - F_1F_{17})F_{29} - (F_3F_{16} - F_2F_{17})F_{20} + (F_4F_{16} + F_3F_{17})F_{27} + \\
& + F_8F_{19}F_{20} - (F_8F_{18} - F_7F_{19})F_{21} - (F_7F_{18} - F_6F_{19})F_{22} + \\
& + F_6F_{18}F_{23} - (F_{14}F_{25} + F_{13}F_{26})F_9 - (F_{14}F_{24} + F_{13}F_{25} + \\
& + F_{12}F_{26})F_{10} - (F_{13}F_{24} + F_{12}F_{25})F_{11} + F_{11}F_{17}F_{20} - \\
& - F_2F_{16}F_{23} + (F_{11}F_{16} + F_{10}F_{17})F_{21} + (F_{10}F_{16} + F_9F_{17})F_{22} + \\
& + (F_{14}F_7 + F_{13}F_8)F_{27} + (F_{14}F_6 + F_{13}F_7 + F_{12}F_8)F_{28} + (F_{13}F_6 + \\
& + F_{12}F_7)F_{29} - F_{26}F_{20}F_1 - (F_{26}F_{18} - F_{25}F_{19})F_2 - (F_{24}F_{19} - \\
& - F_{25}F_{18})F_3 + F_{24}F_{18}F_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4 = & (F_3F_{16} - F_2F_{17})F_{21} - \\
& - (F_2F_{16} - F_1F_{17})F_{28} + F_1F_{16}F_{29} + (F_8F_{18} - F_7F_{19})F_{20} + \\
& + (F_7F_{18} - F_6F_{19})F_{21} + F_6F_{18}F_{22} + (F_{14}F_{24} + F_{13}F_{25} + F_{12}F_{26})F_9 + \\
& + (F_{13}F_{24} + F_{12}F_{25})F_{10} + F_{12}F_{24}F_{11} - (F_{11}F_{16} + F_{10}F_{17})F_{20} - \\
& - (F_{13}F_{16} + F_9F_{17})F_{21} - F_9F_{16}F_{22} - (F_{14}F_8 + F_{13}F_7 + F_{12}F_8)F_{27} - \\
& - (F_{13}F_6 + F_{12}F_7)F_{28} - F_{12}F_6F_{29} - (F_{26}F_{18} - F_{25}F_{19})F_1 - (F_{24}F_{19} - \\
& - F_{25}F_{18})F_2 - F_{24}F_{18}F_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_5 = & F_2F_{16}F_{17} - F_1F_{17}F_{27} - F_1F_{16}F_{28} - (F_7F_{18} - F_6F_{19})F_{20} - \\
& - F_6F_{18}F_{21} - (F_{13}F_{24} + F_{12}F_{25})F_9 + F_{12}F_{24}F_{10} + (F_{10}F_{16} + \\
& + F_9F_{17})F_{20} + F_9F_{18}F_{21} + (F_{13}F_6 + F_{12}F_7)F_{27} + F_{12}F_6F_{28} - \\
& - (F_{24}F_{19} - F_{25}F_{18})F_1 - F_{24}F_{18}F_2;
\end{aligned}$$

$$M_6 = F_1F_{16}F_{27} + F_6F_{16}F_{20} + F_{12}F_{24}F_9 - F_9F_{16}F_{20} - F_{12}F_6F_{27} -$$

$$-F_{21}F_{13}F_{11};$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= c_{12}c_{33}c_{61} - c_{12}c_{21}c_{63} - c_{13}c_{61}c_{22} + \\
 &+ c_{11}c_{63}c_{22}; \quad S_2 = c_{63}c_{22} - c_{13}c_{61} + c_{11}c_{63}; \quad S_3 = c_{63}; \\
 Q_2 &= c_{45}c_{61} - c_{41}c_{65}; \quad Q_3 = c_{41}c_{63}; \quad Q_4 = c_{61}c_{41}c_{63}; \\
 Q_5 &= c_{34} - c_{32}c_{14}; \quad Q_6 = c_{54}c_{12} - c_{52}c_{14}; \quad c_{11} = -a_{11}; \quad c_{12} = a_{14}; \\
 c_{13} &= a_{17}; \quad c_{14} = -a_{20}\Omega; \quad c_{41} = -a_{30}\Omega; \quad c_{44} = -a_{22}; \quad c_{45} = a_{25}; \\
 c_{46} &= a_{26}; \quad c_{21} = a_{41}; \quad c_{22} = -a_{34}; \quad c_{23} = a_{47}; \quad c_{24} = a_{50}\Omega - \Omega; \\
 c_{25} &= \Omega; \quad c_{51} = -a_{60}\Omega - \Omega; \quad c_{52} = -\Omega; \quad c_{54} = a_{52}; \quad c_{55} = -a_{55}; \\
 c_{56} &= a_{58}; \quad c_{32} = a_{74}; \quad c_{33} = -a_{77}; \quad c_{34} = -\Omega; \quad c_{36} = \Omega; \\
 c_{61} &= \Omega; \quad c_{63} = -\Omega; \quad c_{65} = a_{85}; \quad c_{66} = -a_{88}; \quad F_1 = Q_4c_{24}c_{12} - \\
 &- Q_4c_{14}c_{22} + S_1c_{44}c_{61}; \quad F_2 = Q_4c_{14} - S_2c_{44}c_{61} - S_1c_{61}; \quad F_3 = S_3c_{44}c_{61} + \\
 &+ S_2c_{61}; \quad F_4 = S_3c_{61}; \quad F_5 = -c_{12}Q_4; \quad F_6 = Q_4Q_5 + S_4c_{44}c_{61}; \\
 F_{10} &= S_7c_{44}c_{61} + c_{61}S_6; \quad F_{11} = S_7c_{61}; \quad F_{12} = Q_3c_{12}c_{25}c_{61} - Q_3c_{21}c_{65}c_{12} + \\
 &+ c_{65}c_{22}c_{11}Q_3 + S_1Q_2; \quad F_{13} = Q_3c_{63}c_{61} + Q_3c_{65}c_{22} + S_2Q_2; \\
 F_{14} &= c_{65}Q_3 + S_3Q_2; \quad F_{15} = c_{61}c_{12}Q_3; \quad F_{16} = Q_3c_{11}c_{63}c_{32} + S_4Q_2; \\
 F_{17} &= Q_3c_{65}c_{52} + S_5Q_2; \quad F_{18} = Q_3c_{12}c_{55}c_{61} - Q_3c_{51}c_{65}c_{2} + Q_3c_{11}c_{65}c_{52} + \\
 &+ S_6Q_2; \quad F_{19} = -Q_3c_{12}c_{61} - Q_3c_{65}c_{52} - S_7Q_2; \quad F_{20} = c_{22}c_{11}c_{66}c_{33} - \\
 &- c_{21}c_{12}c_{16}Q_3 + S_1c_{41}c_{61} - S_1c_{41}c_{46}; \quad F_{21} = c_{11}c_{66}Q_3 + c_{22}c_{36}Q_3 + c_{22}c_{11}Q_3 - \\
 &- c_{21}c_{12}Q_3 + S_2c_{41}c_{61} - S_2c_{41}c_{65} - S_1c_{41}; \quad F_{22} = c_{66}Q_3 + c_{11}Q_3 + c_{22}Q_3 + \\
 &+ S_3c_{41}c_{61} - S_3c_{41}c_{66} - S_2c_{41}; \quad F_{23} = S_3c_{41} - Q_3; \quad F_{24} = Q_3c_{36}c_{61}c_{12} + \\
 &+ Q_3c_{32}c_{11}c_{66} + S_4c_{46}c_{61} - S_4c_{41}c_{66}; \quad F_{25} = Q_3c_{32}c_{66} + Q_3c_{32}c_{11} + S_5c_{46}c_{61} - \\
 &- S_5c_{41}c_{66} - S_4c_{41}; \quad F_{26} = Q_3c_{32} - S_5c_{41}; \quad F_{27} = Q_3c_{12}c_{56}c_{61} - Q_3c_{51}c_{66}c_{12} + \\
 &+ Q_3c_{52}c_{11}c_{66} + S_6c_{46}c_{61} - S_6c_{41}c_{66}; \quad F_{28} = c_{52}c_{66}Q_3 + c_{52}c_{11}Q_3 - c_{12}c_{51}Q_3 + \\
 &+ S_7c_{46}c_{61} - S_7c_{41}c_{66} - S_6c_{41}; \quad F_{29} = c_{52}Q_3 - S_7c_{41}.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

При значениях физических и динамических параметров, указан-

ных выше, для характеристических уравнений (4.14) и (4.15) вычислены миноры Гурвица:

$$\Delta_1^{(1)} = b_1 = 1,591840475 \cdot 10^{10};$$

$$\Delta_2^{(1)} = b_1 b_2 - b_3 b_0 = 2,596987130 \cdot 10^{17};$$

$$\Delta_3^{(1)} = b_3 = 1,582852632;$$

$$\Delta_4^{(2)} = M_1 = 3,307746189 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta_5^{(2)} = M_1 \cdot M_2 - M_3 \cdot M_0 = 9,047657575;$$

$$\Delta_6^{(2)} = M_3(M_1 M_2 - M_0 M_3) - M_4 M_1^2 = 5,074834907 \cdot 10^4; \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta_7^{(2)} = & (M_2 M_1 - M_0 M_3) M_3 M_4 + (M_4 M_1 - M_0 M_5) M_0 M_5 + \\ & + M_1^2 M_2 M_6 - M_0 M_1 M_3 M_6 - (M_2 M_1 - M_0 M_3) M_2 M_5 - \\ & - (M_4 M_1 - M_0 M_5) M_1 M_4 = 1,467399652 \cdot 10^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_8^{(2)} = & (M_2 M_1 - M_0 M_3) (M_4 M_5 - M_3 M_6) M_3 + (M_4 M_1 - M_0 M_5) M_0 M_6^2 + \\ & + (M_2 M_5 - M_1 M_6) M_1^2 M_6 - M_2 M_1 M_3 M_5 M_6 - (M_4 M_1 - M_0 M_5) \times \\ & \times (M_4 M_5 - M_3 M_6) M_1 - (M_2 M_1 - M_0 M_3) (M_2 M_5 - M_1 M_6) M_5 = \\ & = -3,877956624 \cdot 10^{-4}; \end{aligned}$$

$$\Delta_9^{(2)} = M_6 = 1,166643326 \cdot 10^{-13}.$$

Соотношения (4.17) показывают положительность миноров Гурвица. При этом из теоремы Гурвица и первой теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению можно сделать следующий вывод: невозмущенное движение (4.2) асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости.

Таким образом, предельный режим вращения модели Земли с вязкой астеносферой и жидким проводящим слоем ядра около оси ее наибольшего главного момента инерции является устойчивым.

Из доказанного и оценки (2.144) вытекает устойчивость этого режима (4.2) при постоянно действующем моменте гравитационных сил.

Исследуем устойчивость движения модели Земли с вязкой астеносферой и жидким проводящим слоем ядра около оси наименьшего главного момента инерции.

За невозмущенное движение примем предельный режим — вращение вокруг оси наименьшего главного момента инерции с угловой скоростью Ω , описываемое равенствами

$$q_1 = q_2 = q_3 = r_1 = r_2 = r_3 = 0; \quad p_1 = -p_2 = p_3 = \Omega. \quad (4.18)$$

В возмущенном движении положим $p_1 = \Omega + u$; $p_2 = \Omega + v$; $p_3 = \Omega + w$. Тогда уравнения (4.1), линеаризованные около решения (4.18), примут вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -a_{11}u + a_{14}v + a_{17}w; \\ \dot{v} &= a_{41}u - a_{44}v + a_{47}w; \\ \dot{w} &= a_{74}v - a_{77}w; \\ \dot{q}_1 &= -a_{22}q_1 + a_{25}q_2 + a_{28}q_3 - a_{29}\Omega r_1; \\ \dot{q}_2 &= a_{52}q_1 - a_{55}q_2 + a_{58}q_3 - (a_{59}\Omega + \Omega)r_1 + \Omega r_2; \\ \dot{q}_3 &= a_{85}q_2 - a_{88}q_3 + r_3\Omega - r_1\Omega; \\ \dot{r}_1 &= -a_{35}r_1 - a_{36}r_2 + a_{39}r_3 - a_{40}\Omega q_1; \\ \dot{r}_2 &= a_{63} - a_{66}r_2 + a_{69}r_3 - (a_{79}\Omega - \Omega)q_1 - \Omega q_2; \\ \dot{r}_3 &= a_{96}r_2 - a_{99}r_3 + \Omega q_1 - \Omega q_3. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Характеристические определители для системы уравнений (4.19) имеют вид

$$\begin{vmatrix} -a_{11} - \lambda & a_{14} & a_{17} \\ a_{41} & -a_{44} - \lambda & a_{47} \\ 0 & a_{74} & -a_{77} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{vmatrix} -a_{22} - \lambda & a_{25} & a_{28} & -a_{29}\Omega & 0 & 0 \\ a_{52} & -a_{55} - \lambda & a_{58} & -a_{60}\Omega - \Omega & \Omega & 0 \\ 0 & a_{85} & -a_{88} - \lambda & -\Omega & 0 & \Omega \\ -a_{40}\Omega & 0 & 0 & -a_{33} - \lambda & a_{36} & a_{39} \\ -a_{70}\Omega + \Omega & \Omega & 0 & a_{63} & -a_{66} - \lambda & a_{69} \\ \Omega & 0 & -\Omega & 0 & a_{96} & a_{99} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

Раскрыв определители (4.20) и (4.21), получим характеристические уравнения

$$d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3 = 0, \quad (4.22)$$

$$N_0 \lambda^6 + N_1 \lambda^5 + N_2 \lambda^4 + N_3 \lambda^3 + N_4 \lambda^2 + N_5 \lambda + N_6 = 0, \quad (4.23)$$

где

$$d_0 = 1; d_1 = a_{11} + a_{14} + a_{77}; d_2 = a_{11}a_{77} + (a_{11} + a_{77})a_{44} - \\ - a_{41}a_{14} - a_{74}a_{77}; d_3 = a_{11}a_{44}a_{77} - a_{41}a_{14}a_{77} - \\ - a_{74}a_{44}a_{11} - a_{74}a_{41}a_{17}.$$

Коэффициенты $N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ уравнения (4.23) определим через величины $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ (4.16), положив:

$$c_{11} = -a_{22}; c_{12} = a_{25}; c_{13} = a_{24}; c_{14} = -a_{20}\Omega; \\ c_{21} = a_{52}; c_{22} = -a_{55}; c_{23} = a_{53}; c_{25} = \Omega; c_{24} = -a_{60}\Omega - \Omega; \\ c_{32} = a_{85}; c_{33} = -a_{88}; c_{34} = -\Omega; c_{36} = \Omega; \\ c_{41} = -a_{40}\Omega; c_{44} = -a_{33}; c_{45} = a_{36}; c_{46} = a_{39}; \\ c_{51} = -a_{70}\Omega + \Omega; c_{52} = -\Omega; c_{54} = a_{63}; c_{55} = -a_{66}; c_{56} = a_{69}; \\ c_{63} = \Omega; c_{61} = \Omega; c_{65} = a_{46}; c_{66} = -a_{90}.$$

Вычисление миноров Гурвица дает

$$\Delta_1^{(3)} = d_1 = 1,655432837 \cdot 10^{10}; \\ \Delta_2^{(3)} = d_1 d_2 - d_3 d_0 = 2,807868365 \cdot 10^{11}; \\ \Delta_3^{(3)} = d_3 = 1,476244148; \\ \Delta_1^{(4)} = N_1 = 3,244153827 \cdot 10^{-3}; \\ \Delta_2^{(4)} = N_1 N_2 - N_5 N_0 = 8,532835915; \\ \Delta_3^{(4)} = N_3 (N_1 N_2 - N_5 N_0) - N_4 N_1^2 = 4,599741746 \cdot 10^{-3}; \\ \Delta_4^{(4)} = (N_2 N_1 - N_0 N_3) \cdot N_3 N_4 + (N_4 N_1 - N_0 N_5) N_0 N_5 + \\ + N_1^2 N_2 N_6 - N_0 N_1 N_3 N_6 - (N_1 N_2 - N_0 N_3) N_2 N_5 - (N_4 N_1 -$$

(4.24)

$$-N_0 N_5) N_1 N_4 = 1,278181027 \cdot 10^4;$$

$$\begin{aligned} \Lambda_6^{(4)} = & (N_2 N_1 - N_0 N_3) (N_4 N_5 - N_3 N_6) N_3 + (N_4 N_1 - N_0 N_2) N_0 N_2^2 + \\ & + (N_2 N_2 - N_1 N_0) N_1^2 N_6 - N_5 N_1 N_3 N_5 N_6 - (N_1 N_4 - N_0 N_5) \times \\ & \times (N_4 N_5 - N_3 N_6) N_1 - (N_2 N_1 - N_0 N_3) (N_2 N_5 - N_1 N_6) N_6 = \\ & = -1,623820933 \cdot 10^{-4}; \end{aligned}$$

$$\Lambda_6^{(4)} = N_6 = 0.$$

Соотношения (4.24) указывают на отрицательность минора Гурвица и, согласно теореме Гурвица и второй теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению, невозмущенное движение слонстой Земли около оси наименьшего момента инерции неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Этот результат и оценка (2.144) позволяют заключить, что постоянно действующие возмущения в виде момента гравитационных сил не могут обеспечить устойчивость вращения около наименьшей оси инерции Земли.

Иследуем устойчивость движения слонстой Земли около оси среднего момента инерции.

За невозмущенное движение слонстой Земли примем ее предельный режим — вращение около оси среднего момента инерции с угловой скоростью Ω , описываемое равенствами

$$p_1 = p_2 = p_3 = r_1 = r_2 = r_3 = 0; \quad q_1 = q_2 = q_3 = \Omega. \quad (4.25)$$

В возмущенном движении положим

$$q_1 = \Omega + u, \quad q_2 = \Omega + v, \quad q_3 = \Omega + w.$$

Тогда уравнения (4.1), линеаризованные около решения (4.25), примут вид

$$\dot{u} = -a_{12}u + a_{25}v + a_{26}w;$$

$$\dot{v} = a_{52}u - a_{55}v + a_{56}w;$$

$$\dot{w} = a_{85}v - a_{88}w;$$

$$\dot{p}_1 = -a_{11}p_1 - a_{13}p_2 + a_{17}p_3 - a_{20}\Omega r_1;$$

$$\dot{p}_2 = a_{41}p_1 - a_{44}p_2 + a_{47}p_3 - (a_{50}\Omega - \Omega) r_1 - \Omega r_2;$$

$$p_3 = a_{74}p_2 - a_{77}p_3 + \Omega r_1 - \Omega r_3; \quad (4.26)$$

$$r_1 = -a_{33}r_1 + a_{36}r_2 + a_{39}r_3 - a_{40}\Omega p_1;$$

$$r_2 = a_{63}r_1 - a_{66}r_2 + a_{69}r_3 - (a_{70}\Omega + \Omega)p_1 + \Omega p_2;$$

$$r_3 = a_{36}r_2 - a_{93}r_3 + \Omega p_3 - \Omega p_1.$$

Запишем характеристические определители системы уравнений (4.26):

$$\begin{vmatrix} -a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{28} \\ a_{32} & -a_{55} - \lambda & a_{53} \\ 0 & a_{15} & -a_{88} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.27)$$

$$\begin{vmatrix} -a_{11} - \lambda & a_{14} & a_{17} & -a_{20}\Omega & 0 & 0 \\ a_{41} & -a_{44} - \lambda & a_{47} & -a_{50}\Omega + \Omega & -\Omega & 0 \\ 0 & a_{74} & -a_{77} - \lambda & \Omega & 0 & -\Omega \\ -a_{40}\Omega & 0 & 0 & -a_{33} - \lambda & a_{36} & a_{39} \\ -a_{70}\Omega - \Omega & \Omega & 0 & a_{64} & -a_{66} - \lambda & a_{61} \\ -\Omega & 0 & \Omega & 0 & a_{16} & -a_{99} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.28)$$

Раскрыв определители (4.27), (4.28), получим характеристические уравнения

$$f_0\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0, \quad (4.29)$$

$$R_0\lambda^6 + R_1\lambda^5 + R_2\lambda^4 + R_3\lambda^3 + R_4\lambda^2 + R_5\lambda + R_6 = 0, \quad (4.30)$$

где $f_0 = 1$; $f_1 = a_{22} + a_{55} + a_{88}$; $f_2 = a_{22}a_{88} + (a_{22} + a_{88})a_{55} - a_{32}a_{25} - a_{27}a_{88}$; $f_3 = a_{20}a_{50}a_{88} - a_{52}a_{25}a_{88} - a_{85}a_{50}a_{22} - a_{85}a_{52}a_{78}$.

Коэффициент $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ уравнения (4.30) определяем через величины $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ (4.16), положив:

$$c_{11} = -a_{11}; c_{12} = a_{14}; c_{13} = a_{17}; c_{14} = -a_{20}\Omega; c_{21} = a_{41};$$

$$c_{22} = -a_{44}; c_{23} = a_{47}; c_{24} = -a_{50}\Omega + \Omega; c_{25} = -\Omega; c_{32} = a_{74};$$

$$c_{33} = -a_{77}; c_{34} = \Omega; c_{36} = -\Omega; c_{41} = -a_{40}\Omega; c_{44} = -a_{33};$$

$$c_{45} = a_{26}; c_{46} = a_{39}; c_{51} = -a_{7c}\Omega - \Omega; c_{52} = \Omega; c_{54} = a_{63};$$

$$c_{55} = -a_{66}; c_{56} = a_{69}; c_{61} = -\Omega; c_{63} = \Omega; c_{65} = a_{33}; c_{66} = -a_{69}.$$

Вычисленные значения миноров Гурвица таковы:

$$\Delta_1^{(5)} = f_1 = 1,652313352 \cdot 10^{10}; \Delta_2^{(5)} = f_1 f_2 - f_3 f_0 =$$

$$= 2,797162940 \cdot 10^{17}; \Delta_3^{(5)} = f_2 = 1,481473761;$$

$$\Delta_4^{(6)} = R_1 = 3,247273311 \cdot 10^{-2}; \Delta_5^{(6)} = R_1 R_2 - R_0 R_3 =$$

$$= 8,557165897; \Delta_6^{(6)} = R_3 (R_1 R_2 - R_0 R_3) - R_1 R_1^2 =$$

$$= 4,621501620 \cdot 10^3; \Delta_7^{(6)} = (R_2 R_1 - R_0 R_3) R_3 R_4 +$$

$$+ (R_4 R_1 - R_0 R_3) R_0 R_5 + R_1^2 R_2 R_6 - R_1 R_1 R_1 R_1 -$$

$$- (R_2 R_1 - R_0 R_3) R_2 R_6 - (R_4 R_1 - R_0 R_3) R_1 R_4 =$$

$$= 1,285224431 \cdot 10^3; \Delta_8^{(6)} = (R_2 R_1 - R_0 R_3) (R_4 R_5 -$$

$$- R_4 R_4) R_3 + (R_4 R_1 - R_0 R_3) R_0 R_5^2 + (R_2 R_1 - R_0 R_3) R_4 R_1^2 +$$

$$+ (R_4 R_1 - R_0 R_3) (R_4 R_5 - R_3 R_6) R_1 - R_1 R_1 R_5 R_5 R_6 -$$

$$- (R_2 R_1 - R_0 R_3) (R_2 R_5 - R_1 R_6) R_5 = - 8,944556848 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta_9^{(6)} = R_6 = 6,032733516 \cdot 10^{-15}.$$

Они указывают на отрицательность минора $\Delta_6^{(5)}$. Тогда, согласно теореме Гурвица и второй теореме Ляпунова о неустойчивости движения по первому приближению, невозмущенное движение слонстой Земли около оси среднего момента инерции неустойчиво.

Полученный результат и оценка (2.144) показывают, что момент гравитационных сил не может обеспечить устойчивость вращения слонстой Земли около оси ее среднего момента инерции.

При этом открытым остается вопрос: какие внутренние силы являются определяющими в устойчивости движения слонстой Земли? В связи с этим обратимся к исследованию устойчивости движения модели Земли с вязким астеносферным слоем в пренебрежении глубинными относительными движениями в подастеносферной ее части, т. е. рассматривая мантию как сплошной твердый шар.

4.2. Исследование устойчивости движения модели Земли с вязким астеносферным слоем

Пусть модель Земли представлена абсолютно твердой литосферой с главными моментами инерции $A_1 < B_1 < C_1$, подстилающим вязким астеносферным и внутренним сплошным твердым шаром с главными моментами инерции $A_2 = B_2 = C_2$ в пренебрежении глубинными процессами в подастеносферной ее части. Центры литосферы и шара совпадают с центром инерции O системы тел и точкой закрепления. Взаимодействие ее элементов происходит через посредство вязкого астеносферного слоя. На основе метода Ляпунова исследуем устойчивость вращения системы, используя форму функции Ляпунова, построенную в работе [60].

Уравнения движения данной модели слонстой Земли имеют вид (2.167):

$$\begin{aligned} A_2 \dot{p}_1 + (C_2 - B_2) q_1 r_1 &= k_1 (p_2 - p_1); \\ B_2 \dot{q}_1 + (A_2 - C_2) r_1 p_1 &= k_1 (q_2 - q_1); \\ C_2 \dot{r}_1 + (B_2 - A_2) p_1 q_1 &= k_1 (r_2 - r_1); \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$I(\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1) = D_2 \dot{p}_1 + E_1 (p_1 - p_2);$$

$$I(\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2) = D_2 \dot{q}_1 + E_1 (q_1 - q_2);$$

$$I(\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1) = D_2 \dot{r}_1 + E_1 (r_1 - r_2),$$

где

$$\begin{aligned} A_0 = A_1^0 + D_1 - D_2 D_3 / I; \quad B_0 = B_1^0 + D_1 - D_2 D_3 / I; \quad C_0 = C_1^0 + \\ + D_1 - D_2 D_3 / I; \quad I = C_2^0 + D_2; \quad k_1 = E_1 (I - D_2) / I. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} k_2 = E_1 - \frac{D_2 k_1}{A_0} = \frac{E_1 [(I - D_2)I + D_2 D_3]}{A_0 I}; \\ k_3 = E_1 - \frac{D_2 k_1}{B_0} = \frac{E_1 [(I - D_2)I + D_2 D_3]}{B_0 I}; \\ k_4 = E_1 - \frac{D_2 k_1}{C_0} = \frac{E_1 [(I - D_2)I + D_2 D_3]}{C_0 I}; \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$k_5 = D_2 \frac{C_0 - B_0}{A_0}; \quad k_6 = D_2 \frac{C_0 - A_0}{B_0}; \quad k_7 = D_2 \frac{B_0 - A_0}{C_0},$$

из системы уравнений (4.31) получаем

$$\begin{aligned}
 A_0 \dot{p}_1 + (C_0 - B_0) q_1 r_1 &= k_1 (p_2 - p_1); \\
 B_0 \dot{q}_1 + (A_0 - C_0) r_1 p_1 &= k_1 (q_2 - q_1); \\
 C_0 \dot{r}_1 + (B_0 - A_0) p_1 q_1 &= k_1 (r_2 - r_1); \\
 I (\dot{p}_2 + q_1 r_2 - q_2 r_1) &= k_2 (p_1 - p_2) - k_5 q_1 r_1; \\
 I (\dot{q}_2 + p_2 r_1 - p_1 r_2) &= k_3 (q_1 - q_2) + k_5 r_1 p_1; \\
 I (\dot{r}_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1) &= k_4 (r_1 - r_2) - k_5 p_1 q_1.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Пусть невозмущенное движение — вращение Земли вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω_0 , описываемой равенствами

$$p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 0; \quad r_1 = r_2 = \omega_0. \tag{4.35}$$

В возмущенном движении положим $r_1 = \omega_0 + x$, $r_2 = \omega_0 + y$. Тогда уравнения (4.34), линеаризованные около решения (4.35), примут вид

$$\begin{aligned}
 C_0 \dot{x} - k_1 (y - x); \\
 I \dot{y} - k_4 (x - y); \\
 A_0 \dot{p}_1 + (C_0 - B_0) q_1 \omega_0 &= k_1 (p_2 - p_1); \\
 I \dot{p}_2 + I \omega_0 (q_1 - q_2) &= k_2 (p_1 - p_2) - k_5 \omega_0 q_1; \\
 B_0 \dot{q}_1 + (A_0 - C_0) \omega_0 p_1 &= k_1 (q_2 - q_1); \\
 I \dot{q}_2 + I \omega_0 (p_2 - p_1) &= k_3 (q_1 - q_2) + k_5 \omega_0 p_1.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Верхние два уравнения (4.36) независимы от остальных четырех уравнений, и поэтому характеристическое уравнение для системы (4.36) распадается на два уравнения. После раскрытия определителей в левых частях характеристических уравнений

$$\begin{vmatrix} -k_1 - C_0 \lambda & k_1 \\ k_4 & -k_4 - I \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -k_1 - A_0 \lambda & k_1 & -(C_0 - B_0) \omega_0 & 0 \\ k_2 & -k_2 - I \lambda & -(I + k_5) \omega_0 & I \omega_0 \\ (C_0 - A_0) \omega_0 & 0 & -k_1 - B_0 \lambda & k_1 \\ (I + k_6) \omega_0 & -I \omega_0 & k_4 & -k_2 - I \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеем

$$C_0 I \lambda^2 + (k_1 I + k_4 C_0) = 0; \quad (4.37)$$

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

где

$$a_0 = A_0 B_0 I^2;$$

$$a_1 = I [(k_2 + k_3) A_0 B_0 + k_1 I (A_0 + B_0)];$$

$$a_2 = I^2 \omega_0^2 [(C_0 - B_0) (C_0 - A_0) + A_0 B_0] + (k_1 I + k_3 B_0) (k_1 I + k_2 A_0); \quad (4.38)$$

$$a_3 = I \omega_0^2 [(C_0 - B_0) (C_0 - A_0) (k_2 + k_3) +$$

$$+ (C_0 - 2A_0) k_1 k_6 + (2C_0 - A_0 - B_0) k_1 I + (C_0 - 2B_0) k_1 k_6];$$

$$a_4 = \omega_0^2 [k_1 k_2 k_4 + k_1 k_3 k_5 (C_0 - A_0) + (C_0 - B_0) \times$$

$$\times (C_0 - A_0) I \omega_0^2 + k_1 k_2 k_6 (C_0 - B_0) + (C_0 - B_0) (C_0 - A_0) k_2 k_3].$$

Как известно, для устойчивости движения необходимо, чтобы вещественные части всех корней λ уравнений (4.37) были неположительны. Для корней первого из уравнений (4.37) это условие выполняется. Действительно, имеем

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{k_1 I + k_4 C_0}{C_0 I}.$$

Для k_1 и k_4 из (4.32), (4.33) получим

$$k_1 = E_1 \frac{C_2^0 + D_4 - D_3}{C_2^0 + D_4}, \quad k_4 = E_1 \frac{(C_1^0 + D_1 - D_3)(C_2^0 + D_4)}{(C_2^0 + D_4)(C_1^0 + D_1) - D_3 D_5}.$$

Отсюда нетрудно убедиться, что k_1 и k_4 суть положительные величины; следовательно, λ_2 принимает отрицательное значение.

Для того чтобы корни второго из уравнений (4.37) были непо-

ложительны, необходимо выполнение условий Лъенара—Шипара [60]:

$$a_0 > 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_4 \geq 0, \\ a_1 a_2 a_3 \geq a_1 a_3^2 + a_1^2 a_4. \quad (4.39)$$

Действительно, из (4.38) с учетом обозначений (4.32), (4.33) имеем $a_0 > 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ и для a_4 получаем:

$$a_4 = \omega_0^2 (C_0 - B_0) (C_0 - A_0) \left[I^2 \omega_0^2 + k_1^2 \frac{D_3^2}{A_0 B_0} + k_1 k_3 \frac{D_3}{A_0} + \right. \\ \left. + k_1 k_2 \frac{D_3}{B_0} + k_2 k_3 \right] \geq 0.$$

На основании формул (4.38) последнее из неравенств (4.39) представим в виде

$$I^2 \omega_0^2 \left\{ (C_0 - A_0)^2 (C_0 - B_0)^2 k_1 \left(k_2 + k_3 + k_1 \frac{D_3}{A_0} + k_1 \frac{D_3}{B_0} \right) \times \right. \\ \times (A_0 + B_0) (I - D_3) + (C_0 - A_0) (C_0 - B_0) k_1 \left(k_1 + k_3 + k_1 \frac{D_3}{A_0} + \right. \\ \left. + k_1 \frac{D_3}{B_0} \right) \left[k_1 (A_0 + B_0) (I - D_3) - A_0 B_0 \right] \cdot \left[(I - D_3) (C_0 - B_0) + \right. \\ \left. + (I - D_3) (C_0 - A_0) \right] + A_0 B_0 \left[k_1 (I - D_3) (C_0 - B_0) + \right. \\ \left. + k_1 (I - D_3) (C_0 - A_0) \right] \cdot \left[k_1 I (2B_0 - C_0) + k_1 I (2A_0 - C_0) + \right. \\ \left. + k_1 D_3 (C_0 - B_0) + k_1 D_3 (C_0 - A_0) \right] \left. \right\} + \left[k_1 I (A_0 + B_0) + \right. \\ \left. + A_0 B_0 (k_2 + k_3) \right] \cdot \left[(I - D_3)^2 (k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3) + \right. \\ \left. + (I - D_3) \left(k_1 k_3^2 + k_1 k_2^2 + k_1^2 I \frac{D_3}{A_0} + k_1^2 I \frac{D_3}{B_0} \right) \right] \geq 0. \quad (4.40)$$

Из условия $a_4 \geq 0$ следует, что необходимо, чтобы либо $C_0 \leq B_0$, либо $C_0 \leq A_0$. Но условие (4.40) оказывается выполненным только при $C_1 \geq A_0$, $C_1 \geq B_0$. Неравенства $C_0 \geq B_0$, $C_0 \geq A_0$ являются необходимыми условиями устойчивости движения (4.35).

Перейдем к достаточным условиям. Система (4.31) имеет первый интеграл:

$$K^2 = (\vec{J}\omega_1 + I\vec{\omega}_2)^2 - (Ap_1 + Ip_2)^2 + (Bq_1 + Iq_2)^2 + (Cr_1 + Ir_2)^2 - \text{const}, \quad (4.41)$$

где $A = \frac{E_1 A_0}{k_1} - D_1$, $B = \frac{E_1 B_0}{k_1} - D_2$, $C = \frac{E_1 C_0}{k_1} - D_3$ — главные значения тензора инерции \vec{J} . Кинетическая энергия H , определяемая равенством

$$2H = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 + I(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2), \quad (4.42)$$

не возрастает при движении в силу уравнений (4.31), т. е. $\dot{H} \leq 0$. Функция Ляпунова, имеющая вид

$$V = 2(C+I)H - K^2 + [K^2 - (C+I)^2 \omega_0^2]^2, \quad (4.43)$$

обращается в нуль в невозмущенном движении (4.35). Для возмущенного движения $r_1 = \omega_0 + x$, $r_2 = \omega_0 + y$, используя (4.41), (4.42), записываем функцию, определяемую формулой (4.43), как функцию переменных x , y , p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , пренебрегая членами третьего и высших порядков малости:

$$V = [CI(x-y)^2 + 4\omega_0^2(C+I)^2(Cx+Iy)^2] + [A(C+I-A)p_1^2 - 2AIp_1p_2 + ICp_2^2] + [B(C+I-B)q_1^2 - 2BIq_1q_2 + ICq_2^2].$$

Для положительной определенности функции V достаточно выполнение неравенств $C(C+I-A) > AI$, $C(C+I-B) > BI$, которые приводятся к виду $C > A$, $C > B$. Так как $\dot{K} = 0$, а $\dot{H} \leq 0$, то производная функция (4.43) по времени t в силу системы уравнений движения (4.34) неположительная, т. е. $\dot{V} \leq 0$. Поэтому по теореме Ляпунова, движение при условии $C > B > A$ будет асимптотически устойчивым.

Таким образом, устойчивое стационарное вращение Земли, представленной динамически несимметричной литосферой и шаром, разделенными астеносферным слоем, может происходить только около оси наибольшего главного момента инерции.

4.3. Единственность предельного режима вращения слонистой Земли

Полученные результаты свидетельствуют о том, что из предельных режимов (2.179) вращения слонистой Земли в ньютоновом поле сил устойчивым является ее вращение около оси наибольшего глав-

ного момента инерции. Более того, любое отличное от (2.179) положение оси вращения Земли в ее теле, как это вытекает из оценки (2.145) и предельного равенства (2.146), не только является непермацентным, но и неустойчивым. Поэтому Земля избирает во вращении режим движения (4.2). Покажем это, исходя из противоположного допущения.

Итак, пусть Земля в ее вращении может выйти на режим движения либо (4.18), либо (4.25). Тогда под действием постоянных возмущений — момента гравитационных сил, моментов силы вязких трений о жидкие слои и силы сопротивления движению в геомагнитном поле — ось вращения выйдет из этого положения. В силу неустойчивости каждый из режимов движения (4.18) и (3.25) имеет определенную окрестность, для которой существует характерное время, по истечению которого эта окрестность может быть покинута осью вращения навсегда. А так как оценки (2.145) не зависят от начальных условий движения, то ось вращения, покинув упомянутую окрестность, не может застревать в любом другом, отличном от (4.2), положении. Этим доказывается единственность предельного режима движения слоистой Земли в ньютоновом поле сил.

Отметим наиболее существенные положения, сыгравшие определяющую роль в единственности предельного режима вращения:

— наличие постоянно действующих возмущений: момента силы вязких трений о жидкие слои, момента силы сопротивления движению в геомагнитном поле;

— независимость оценки (2.145) между возмущенным и невозмущенным движением Земли;

— неустойчивость отличных от (4.2) режимов вращения слоистой Земли в ньютоновом поле сил.

Полученный результат полностью согласуется с известной теоремой Н. Е. Жуковского [31]. Согласно этой теореме, если в теле имеется какая-нибудь полость, заполненная вязкой жидкостью, и такой системе сообщены какие-нибудь начальные скорости, то движение ее будет стремиться к предельному состоянию, при котором одна из главных осей инерции рассматриваемых масс займет направление главного момента начальных количеств движения, и вся система будет вращаться около нее как одно неизменяемое тело с постоянной угловой скоростью, получаемой в результате деления главного момента начальных количеств движения на момент инерции системы относительно этой оси. Этим обстоятельством Н. Е. Жуковский объяснял то, что, несмотря на всякие случайные начальные скорости, планеты вращаются около своих осей инерции.

Подобный результат получен Ф. Л. Черноусько при исследовании движения твердого тела, содержащего сферические или осесимметричные демпферы [60]. Рассматривается твердое тело со сферической полостью, в которой находится другое твердое тело сферической формы (демпфер). Между сферой и стенками полости имеется узкий зазор, в котором действуют вязкие силы (смазочный слой). Эта система с конечным числом степеней свободы была предложена М. А. Лаврентьевым в качестве модели для описания движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью [60].

Уравнения, описывающие движение тела с демпфером в системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с твердым телом, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{K}} + \bar{\omega} \times \bar{K} - \bar{M}; \quad \bar{K} - \bar{J} \cdot \bar{\omega} + I(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}); \\ I\bar{\omega}_1 + I\bar{\omega} \times \bar{\omega}_1 = -k(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}), \end{aligned} \right\}$$

где \bar{K} — кинетический момент тела с демпфером; \bar{J} — тензор инерции всей системы; I — момент инерции демпфера; $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}$ — угловые скорости вращения демпфера и тела в инерциальной системе координат $Oy_1y_2y_3$.

Коэффициент k найдем по формуле

$$k = \frac{8\pi\rho_1 \eta a^4}{h},$$

где a — радиус полости; h — толщина вязкого слоя; ρ_1, ν_1 — плотность и кинематическая вязкость жидкости.

Показано, что в случае большей вязкости смазки движение твердого тела с демпфером может быть описано теми же уравнениями, что и движение твердого тела с полостью, заполненной жидкостью высокой вязкости. Установлены соотношения между параметрами систем (тело с жидкостью и тело с демпфером) для их механической эквивалентности. Требуется, чтобы были равны массы демпфера и жидкости в полости (для эквивалентности уравнений движения центра инерции), моменты инерции демпфера (для равенства центра инерции всей системы) и выполнялось соотношение

$$\frac{\rho_1 \nu_1}{h} = \frac{7\rho \nu}{a},$$

где ρ, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости в полости твердого тела радиуса a .

Определены стационарные движения свободного твердого тела с демпфером. Путем анализа характеристического уравнения найдены необходимые условия устойчивости этих движений, а с помощью метода Ляпунова получены и достаточные условия устойчивости. Они аналогичны тем, которые имеют место для тела с жидкостью. Из этих результатов следует, что единственным устойчивым стационарным вращением свободного твердого тела со сферическим демпфером при малых числах Рейнольдса является вращение вокруг оси наибольшего главного центрального момента инерции всей системы.

Аналогичный результат имеет место в случае движения проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле [32]. Получено, что медленное стационарное вращение проводящего твердого тела вокруг оси наибольшего момента инерции, совмещенной с вектором напряженности магнитного поля, является единственным устойчивым по Ляпунову стационарным вращением.

Изложенное еще раз указывает на определяющую роль внутренних сил для устойчивости движения сплюснутой Земли.

ОБОБЩЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ
ДВИЖЕНИЯ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛИ

Естественным путем изучения движения слоистой Земли является качественный анализ средствами обобщенных динамических систем. Это объясняется, по меньшей мере, следующими обстоятельствами: во-первых, невозмущенные движения механических систем часто имеют число степеней свободы меньшее, чем их возмущенные движения (см. главы 2 и 3); следует ожидать, что и предельные режимы возмущенного движения обладают меньшим числом степеней свободы по сравнению с самим движением, и тогда возникает необходимость в анализе движения по части его переменных; во-вторых, предельный режим движений аналитически выражается функциями времени; это приводит к системе дифференциальных уравнений, в правые части которых явно входит время, и поэтому названным уравнениям не соответствуют динамические системы по Биркгофу; в-третьих, различные характеристики движения (количество движения, кинетическая энергия, полярный момент инерции системы и т. д.) не обладают свойством динамической системы по Биркгофу. Эти обстоятельства привели к различным обобщениям понятия динамических систем по Биркгофу. Так, в недрах небесной механики возникли квазислучайные динамические системы Алексева; автор этих систем решил проблему финальных типов движений в задаче трех тел с точностью до оценки меры множества начальных условий, порождающих осциллирующие движения [71].

Обобщенные динамические системы впервые появились в работе М. В. Бибутова [4]; полная их теория построена Б. А. Щербаковым [62]. Однако обобщенные динамические системы не нашли применения ни в одной из прикладных задач. Настоящая глава посвящена основным положениям теории обобщенных динамических систем, направленным на изучение глобальных свойств движений,

устойчивых по Лагранжу. При этом новые факты излагаются с доказательствами.

5.1. Свойство самоорганизации движения

Пусть M^* — полное метрическое пространство с метрикой m^* и $C(R_1, M^*)$ — множество всех непрерывных функций со значениями в M^* действительного аргумента — времени $t \in R_1$. Во множестве $C(R_1, M^*)$ выражение

$$m[u(t), v(t)] = \sup_{a>0} \min \left\{ \sup_{|t| \leq a} m^*[u(t), v(t)], \frac{1}{a} \right\} \quad (5.1)$$

задает метрику [62, 71]. Она согласована с метрикой m^* в том смысле, что для любого $\epsilon > 0$ и для любых $u(t), v(t)$ из $C(R_1, M^*)$ условия $m[u(t), v(t)] < \epsilon$, $m[u(t), v(t)] = \epsilon$, $m[u(t), v(t)] > \epsilon$ имеют место тогда и только тогда, когда соответственно выполняются условия

$$\sup_{|t| \leq \frac{1}{\epsilon}} m^*[u(t), v(t)] < \epsilon; \quad \sup_{|t| \leq \frac{1}{\epsilon}} m^*[u(t), v(t)] = \epsilon;$$

$$\sup_{|t| \leq \frac{1}{\epsilon}} m^*[u(t), v(t)] > \epsilon.$$

Множество $C(R_1, M^*)$ с метрикой (5.1) образует полное метрическое пространство (M, m) [62]. Пусть $G(s, \cdot)$ — однопараметрическое семейство отображений M на себя, действующих по правилу

$$G(s, u(t)) = u(s+t), \quad (5.2)$$

где $u(t)$ — произвольная функция из M , а параметр s пробегает всю действительную ось времени R_1 .

Семейство $G(s, \cdot)$ отображений сдвига (5.2) пространства M на себя называется обобщенной динамической системой по Биркгофу [5]. При фиксированной функции $u(t) \in M$ отображение (5.2) называется движением, а функции $G(0, u(t)) = u(t)$, $G(s, u(t)) = u(s+t)$ — его начальным и актуальным состояниями. Актуальное состояние $u(s_0+t)$ движения $G(s, u(t))$, соответствующее моменту времени s_0 , представляет собой сдвиг на s_0 функции $u(t)$. Множества

$$G(R_1^-, u(t)) = \{u(s+t) \mid -\infty < s \leq 0\}, \quad (5.3)$$

$$G(R_1^+, u(t)) = \{u(s+t) \mid 0 \leq s < \infty\}, \quad (5.4)$$

$$G(R_1, u(t)) = \{u(s+t) \mid -\infty < s < \infty\}, \quad (5.5)$$

$$G(s_1 \leq s \leq s_2, u(t)) = \{u(s+t) \mid s_1 \leq s \leq s_2\} \quad (5.6)$$

называются соответственно отрицательной, положительной полу-траекториями, траекторией и дугой траектории временной длины $s_2 - s_1$ движения $G(s, u(t))$ [49]. Замыкания множеств (5.3) — (5.5) обозначим через $\bar{G}(u^-)$, $\bar{G}(u^+)$ и $\bar{G}(u)$, т. е. $\bar{G}(u^-) = \bar{G}(R_1^-, u(t))$, $\bar{G}(u^+) = \bar{G}(R_1^+, u(t))$, $\bar{G}(u) = \bar{G}(R_1, u(t))$. Дуга (5.6) как непрерывный образ отрезка $[s_1, s_2]$ компактна.

Область значений функции $u(t)$ для $t \in R_1^-$, $t \in R_1^+$, $t \in R_1$, $t \in [s_1, s_2]$, т. е. множества

$$u(R_1^+) = \{u(t) \in M^* \mid t \in R_1^+\}, \quad (5.7)$$

$$u(R_1^-) = \{u(t) \in M^* \mid t \in R_1^-\}, \quad (5.8)$$

$$u(R_1) = \{u(t) \in M^* \mid t \in R_1\}, \quad (5.9)$$

$$u(s_1 \leq t \leq s_2) = \{u(t) \in M^* \mid s_1 \leq t \leq s_2\} \quad (5.10)$$

называются соответственно положительным, отрицательным следами, следом и следом временной длины $s_2 - s_1$ движения $G(s, u(t))$ в фазовом пространстве M^* .

Последовательность $\{s_k\}$ моментов времени называется ω -последовательностью (α -последовательностью) и обозначается символом $\{s_k\}_\omega$ ($\{s_k\}_\alpha$), если

$$0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \omega, \quad (5.11)$$

$$(0 \geq s_1 > s_2 > \dots > s_k > \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = -\alpha). \quad (5.12)$$

Произвольная последовательность $\{s_k\}$ вида (5.11) или (5.12) называется λ -последовательностью и обозначается через $\{s_k\}_\lambda$.

Функция $v(t) \in M$ называется ω -предельной (α -предельной) точкой полутраектории (5.4), (5.3), если существует такая $\{s_k\}_\omega$ ($\{s_k\}_\alpha$), что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m[v(t), u(t+s_k)] = 0. \quad (5.13)$$

Множество всех ω -предельных (α -предельных) точек полутраектории (5.4), (5.3) называется ее ω -предельным (α -предельным) образом и обозначается символом $G(u_\omega)$ ($G(u_\alpha)$). Множест-

во $G(u_\lambda) = G(u_{-}) \cup G(u_{+})$ называется λ -предельным образом траектории $G(R_1, u(t))$ движения $G(s, u(t))$.

Справедливы следующие очевидные включения и равенства:

$$\begin{aligned} G(u_{-}) \subseteq G(u^{-}); G(u_{+}) \subseteq G(u^{+}); G(u_{\pm}) \subseteq G(u); G(u^{-}) = \\ = G(u_{-}) \cup G(R_1^{-}, u(t)); G(u^{+}) = G(u_{+}) \cup G(R_1^{+}, u(t)); G(u) = \\ = G(u_{\pm}) \cup G(R_1, u(t)). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Последовательность $\{s_k\}_n$ называется собственной ω -последовательностью движения $G(s, u(t))$, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_k, u(t)), G(0, u(t))] = \lim_{k \rightarrow \infty} m[u(t+s_k), u(t)] = 0. \quad (5.15)$$

Множество всех собственных ω -последовательностей движения $G(s, u(t))$ обозначается через $N(\omega, u)$. Аналогично вводятся понятия собственных α -последовательностей, λ -последовательностей и множеств $N(\alpha, u)$, $N(\lambda, u)$.

Последовательность $\{s_k\}_n$ называется направляющей ω -последовательностью движения $G(s, u(t))$, если последовательность его актуальных состояний $\{G(s_k, u(t))\}$ сходится в M . Множество всех направляющих ω -последовательностей движения $G(s, u(t))$ обозначается через $N^*(\omega, u)$. Аналогично вводятся понятия направляющих α -последовательностей, λ -последовательностей и множеств $N^*(\alpha, u)$, $N^*(\lambda, u)$.

Фиксированный момент времени $s_0 \in R_1$ называется ε -смещением движения $G(s, u(t))$, если для данного $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$m[G(s_0, u(t)), G(0, u(t))] = m[u(t+s_0), u(t)] \leq \varepsilon. \quad (5.16)$$

Для данного $\varepsilon > 0$ множество всех ε -смещений движения $G(s, u(t))$ обозначается через $R(\varepsilon, u)$.

Фиксированный момент времени $s_0 \in R_1$ называется ε -почти периодом движения $G(s, u(t))$, если для данного $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\sup_{t \in M} m^*[G(s_0, u(t)), G(0, u(t))] = \sup_{t \in R_1} m^*[u(t+s_0), u(t)] \leq \varepsilon. \quad (5.17)$$

Для данного $\varepsilon > 0$ множество всех ε -почти периодов движения $G(s, u(t))$ обозначается через $R(\varepsilon, u)$.

Фиксированный момент времени $s_0 \in R_1$ называется периодом движения $G(s, u(t))$, если $G(s_0, u(t)) = G(0, u(t))$, т. е. $u(t+s_0) =$

$= u(t)$ для всех $t \in R_1$. Множество всех периодов движения $G(s, u(t))$ обозначается через $R(u)$.

Движение $G(s, u(t))$ называется положительно (отрицательно) устойчивым по Лагранжу (сокращенно — устойчивым L^+ (L^-)), если множество $G(u^+)$ ($G(u^-)$) компактно в M . Устойчивое L^+ и L^- движение называется устойчивым по Лагранжу (сокращенно — устойчивым L).

Движение $G(s, u(t))$ называется положительно (отрицательно) компактным (сокращенно — компактным R^+ (R^-)), если замыкание $\overline{u(R_1^+)}$ ($\overline{u(R_1^-)}$) множества (5.7) (5.8) компактно в M^* . Компактное R^+ и R^- движение называется компактным и в целом (сокращенно — компактным R). При этом множество $\overline{u(R_1)}$ компактно в M^* .

Предложение 1.1 [62]. Движение $G(s, u(t))$ устойчиво L^+ (L^- или L) тогда и только тогда, когда оно компактно R^+ (R^- или R) и функция $u(t)$ равномерно непрерывна на R_1 (R_1^- или R_1).

Движение $G(s, u(t))$ называется положительно (отрицательно) устойчивым по Пуассону (сокращенно — устойчивым P^+ (P^-)), если множество $N(\alpha, u)$ ($N(\alpha, u)$) не пусто. Устойчивое P^+ и P^- движение называется устойчивым по Пуассону (сокращенно — устойчивым P). При этом множество $N(\lambda, u)$ не пусто.

Понятие устойчивости по Пуассону движения в небесной механике введено А. Пуанкаре и названо им возвращаемостью [5].

Если движение $G(s, u(t))$ устойчиво P^+ (P^-), то наряду с (5.15) выполняется равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_k + s_0, u(t)), G(s_0, u(t))] = 0 \quad (5.18)$$

для любого фиксированного $s_0 \in R_1$. Поэтому имеет место включение

$$\begin{aligned} G(R_1, u(t)) &\subset G(u^+); \\ (G(R_1, u(t)) &\subset G(u^-)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Предложение 1.2 [71]. Если движение $G(s, u(t))$ устойчиво P^+ (P^-) и L^+ (L^-), то оно устойчиво L .

Доказательство. Действительно, устойчивость P^+ движения $G(s, u(t))$ обеспечивает включение (5.19), а его устойчивость L^+ — компактность $G(u^+)$. Тогда множество $G(u)$, как замкнутое подмножество компакта $G(u^+)$, само компактно. Иначе говоря, движение $G(s, u(t))$ устойчиво L . Доказательство завершено.

Отсюда следует, что если некоторое движение устойчиво L^+ (L^-), то его устойчивость L является необходимым условием устойчивости P^+ (P^-).

Если M_1 — некоторое подмножество M , то его образ при движении $G(s, \cdot)$, соответствующий моменту времени s_0 , обозначается символом

$$G(s_0, M_1) = \{G(s_0, u(t)) \mid u(t) \in M_1\}. \quad (5.20)$$

Открытая (замкнутая) ε -окрестность точки $u(t) \in M$ обозначается через

$$S(\varepsilon, u(t)) = \{v(t) \in M \mid m[u(t), v(t)] < \varepsilon\}, \quad (5.21)$$

$$[S[\varepsilon, u(t)] = \{v(t) \in M \mid m[u(t), v(t)] \leq \varepsilon\}). \quad (5.22)$$

Движение $G(s, u(t))$ называется блуждающим, если существует такая скрытая ε -окрестность $S(\varepsilon, u(t))$ его начального состояния $u(t)$ и момент времени $s_0 \in R_+^* \setminus \{0\}$, что

$$S(\varepsilon, u(t)) \cap G(s, S(\varepsilon, u(t))) = \emptyset \quad (5.23)$$

для всех $s \geq s_0$. В противном случае оно называется неблуждающим.

Применяя к обеим частям равенства (5.23) преобразование $G(-s, \cdot)$, получаем

$$S(\varepsilon, u(t)) \cap G(-s, S(\varepsilon, u(t))) = \emptyset \quad (5.24)$$

для всех $-s \leq -s_0$. Сопоставляя равенства (5.23) и (5.24), имеем, что если движение блуждает в одном направлении по времени, то оно блуждает и в другом направлении. Так как любое актуальное состояние движения можно принять за его начальное состояние, то свойство блуждания не зависит от выбора определенного состояния движения и любая точка его траектории задает блуждающее движение.

Пусть M_b — множество всех функций пространства M , расположенных на траекториях блуждающих движений, и M'_b — его дополнение до M , т. е. $M'_b = M \setminus M_b$. Множества M_b и M'_b соответственно называются множествами блуждающих и неблуждающих точек пространства M .

Предложение 1.3 [49]. Множество M_b инвариантно и открыто, а множество M'_b инвариантно замкнуто.

Доказательство. Действительно, если $u(t)$ — произвольная точка множества M_b , то она входит в M_b с некоторой своей открытой ε -окрестностью. Поэтому M_b открыто, а его дополнение M'_b замкнуто. Действуя на обе части равенства (5.23) преобразованием

$G(s, \cdot)$, где $s_1 \in R_1$ — произвольный момент времени, получаем выражение

$$G(s_1, S(\varepsilon, u(t))) \cap G(s, G(s_1, S(\varepsilon, u(t)))) = \emptyset,$$

которое показывает инвариантность множества $G(R_1, S(\varepsilon, u(t)))$. Поэтому множества M_0, M'_0 инвариантны. Доказательство завершено.

Из равенств (5.23) и (5.24) следует, что если движение $G(s, u(t))$ устойчиво H^+ или H^- , то оно не блуждает.

Предложение 1.4 [49]. Если движение $G(s, u(t))$ устойчиво $L^+(L^-)$, то множество $G(v_+)$ ($G(v_-)$) содержит хотя бы одно неблуждающее движение.

Доказательство. Действительно, в этом случае множество $G(v_+)$ непусто, компактно и инвариантно. Обозначим через $G(v_+) = G(v_+) \cap M_0$ множество всех блуждающих точек из $G(v_+)$. Предположим, что множество всех неблуждающих точек $G_0(v_+) = G(v_+) \setminus G_0(v_+)$ из $G(v_+)$ пусто. Тогда каждая точка $u(t) \in G(v_+)$ имеет открытую блуждающую ε -окрестность $S(\varepsilon, u(t))$, для которой выполнены равенства (5.23) и (5.24). В силу компактности метрического пространства $G(v_+)$ из числа окрестностей $S(\varepsilon, u(t))$ можно выбрать конечную сеть $S(\varepsilon_1, u_1(t)), S(\varepsilon_2, u_2(t)), \dots, S(\varepsilon_k, u_k(t))$, так, чтобы каждая $S(\varepsilon_i, u_i(t))$ была покинута движением $G(s, S(\varepsilon_i, u_i(t)))$ раз навсегда за конечное время s_i и

$$G(v_+) = \bigcup_{i=1}^k S(\varepsilon_i, u_i(t)). \quad (5.25)$$

Пусть $u(t)$ — произвольная точка пространства $G(v_+)$. Не нарушая общности, можно считать, что $u(t) \in S(\varepsilon_1, u_1(t))$ и спустя s_1 времени точка $u(t)$ попадает в $S(\varepsilon_2, u_2(t))$. Однако она покинет множество $S(\varepsilon_2, u_2(t))$ раз навсегда за время s_2 и т. д. Поэтому в силу выражения (5.25) за время $s_0 = s_1 + s_2 + \dots + s_k$ точка $u(t)$ вынуждена будет покинуть пространство $G(v_+)$. А это противоречит свойству инвариантности $G(v_+)$ и доказывает сформулированное утверждение. Доказательство завершено.

Предложение 1.5 [49, 71]. Если пространство $C(R_1, M')$ компактно, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое характерное время $s_\varepsilon(\varepsilon)$, что произвольное блуждающее движение $G(s, u(t))$ за время s , не превышающее s_ε , входит в ε -окрестность $S(\varepsilon, M'_0)$ множества неблуждающих точек пространства M и остается в ней.

Доказательство. Пусть ε — произвольное фиксированное положительное число и $S(\varepsilon, M'_0)$ — окрестность M'_0 . Тогда множество

$M \setminus S(\varepsilon, M_0)$ как дополнение открытого множества замкнуто и как замкнутое подмножество само компактно. Более того, по построению оно состоит только из блуждающих точек пространства M . Поэтому каждая точка $u(t) \in M \setminus S(\varepsilon, M_0)$ имеет окрестность $S(\varepsilon, u(t))$, для которой будут выполнены равенства (5.23) и (5.24). Тогда, выбирая из числа окрестностей $S(\varepsilon, u_1(t)), \dots, S(\varepsilon, u_k(t))$ пространства $M \setminus S(\varepsilon, M_0)$ так, чтобы выполнялось (5.25) и $M \setminus S(\varepsilon, M_0)$ было покинуто движением $G(s, \cdot)$ за время $s_0 = s_1 + s_2 + \dots + s_k$, убеждаемся в справедливости сформулированного утверждения. Доказательство завершено.

Здесь время s_1 , за которое окрестность $S(\varepsilon_1, u_1(t))$ будет покинута движением $G(s, \cdot)$ раз навсегда, не зависит от выбора точки $u_1(t)$ из окрестности $S(\varepsilon_1, u_1(t))$. Поэтому время s_1 , за которое произвольное блуждающее движение $G(s, u(t))$ входит в ε -окрестность неблуждающих движений, является абсолютным в том смысле, что оно зависит только от ε .

Таким образом, если фазовое пространство движений компактно, то произвольное движение либо не блуждает, либо с точностью наблюдений (до ε) блуждает лишь конечное время. Отсюда вытекает следующее: так как в небесной механике изучаются конечномерные движения, то можно утверждать, что любое движение, занимающее ограниченную часть фазового пространства, обладает свойством так называемой самоорганизации, ведущим от беспорядка к порядку. Смысл этой самоорганизации заключается в том, что движение с течением времени становится неблуждающим в пределах точности наблюдений за ним.

Пусть некоторое движение описывается n -мерной равномерно непрерывной на R_1 вектор-функцией $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t), u_{k+1}(t), \dots, u_n(t)\}$, первые k компоненты которой представлены ограниченными функциями времени, т. е.

$$\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}, \quad (5.26)$$

$$\sup_{t \in R_1} \|\bar{u}(t)\| = \sup_{t \in R_1} [u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_k^2(t)]^{1/2} < \infty.$$

Согласно введенным ранее понятиям и терминологии, вектор-функция $\bar{u}(t)$ порождает движение $G(s, \bar{u}(t))$, которое в силу оценки (5.26) будет устойчивым M . Следовательно, движение $G(s, \bar{u}(t))$ либо не блуждает, либо за конечное время «пamатывается» на неблуждающее движение. Поэтому движение $G(s, u(t))$, по меньшей

мере по части своих переменных, выходит на предельный режим. В этом смысле обобщенные динамические системы обладают рядом преимуществ перед динамическими системами по Биркгофу.

Предложение 1.6. Если пространство $C(R_1, M^*)$ компактно, то во множестве M_0 неблуждающих движений всюду плотны устойчивые H движения, мера Каратеодори которых равна единице.

Доказательство. Заметим следующее обстоятельство. Во-первых, множество M_0 инвариантно, компактно и может рассматриваться как фазовое пространство. Во-вторых, согласно лемме Боголюбова—Крылова [49], в пространстве $C(R_1, M_0)$ можно ввести такую инвариантную по отношению к динамической системе $G(s, \cdot)$ меру μ , что $\mu M_0 = 1$. В-третьих, согласно теореме Пуанкаре—Каратеодори о возвращении точек, множество E неустойчивых H точек пространства M_0 имеет μ -меру нуль, т. е. $\mu E = 0$ или $\mu(M_0 \setminus E) = 1$. С учетом этого покажем, что в произвольной ε -окрестности каждой точки $u(t)$ пространства M_0 существует устойчивая H точка $v(t) \in S(\varepsilon, u(t))$, где $\varepsilon > 0$. Зафиксировав $\varepsilon > 0$ и окрестность $S(\varepsilon, u(t))$, рассмотрим последовательность $\{s_i\}$. Так как $u(t) \in M_0$ — неблуждающая точка, то для данного $\varepsilon > 0$ и данного s_i найдется такой момент времени $t_1 > s_i$, что $S(\varepsilon, u(t)) \cap G(t_1, v(\varepsilon, u(t))) = S_1$ и $S_1 \neq \emptyset$, причем S_1 — открытое множество. Поэтому S_1 содержит в себе такое открытое множество $S(\varepsilon_1, u_1(t))$, что $S[\varepsilon_1, u_1(t)] \subset S_1$. Не нарушив общности, можно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Аналогично точка $u_1(t) \in M_0$ также не блуждает. Поэтому для данного ε_1 и данного s_2 найдется такой момент времени t_2 , что $t_2 > s_2$ и $S(\varepsilon_1, u_1(t)) \cap G(-t_2, S(\varepsilon_1, u_1(t))) = S_2 \neq \emptyset$ и S_2 есть открытое множество. Тогда S_2 содержит в себе такое открытое множество $S(\varepsilon_2, u_2(t))$, что $S[\varepsilon_2, u_2(t)] \subset S_2$. Не нарушив общности, положим $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2^2}$. Продолжив этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров

$$S[\varepsilon, u(t)] \supset S\left[\frac{\varepsilon}{2}, u_1(t)\right] \supset S\left[\frac{\varepsilon}{2^2}, u_2(t)\right] \supset \dots, \quad (5.27)$$

радиусы которых стремятся к нулю. Поэтому последовательность (5.27) имеет непустое пересечение, состоящее из единственной точки $v(t) \in M_0$. Очевидно, $v(t) \in S(\varepsilon, u(t))$. Поэтому покажем, что точка $v(t)$ устойчива H . С этой целью зафиксируем произвольное положительное число ε_k . По построенной последовательности (5.27) натуральное число $k = 2n$ можно подобрать так, чтобы

$$s_k > s_0; t_{k-1} = \frac{s_k}{2^{k-1}} < t_0; S(\varepsilon_k, u_k(t)) \subset S(\varepsilon_{k-1}, u_{k-1}(t)) \subset S(\varepsilon_0, v(t)). \quad (5.28)$$

Тогда

$$v(t) \in S(\varepsilon_{k+1}, u_{k+1}(t)) \subset S(\varepsilon_{k-1}, u_{k-1}(t)) \cap G(-t_{k+1}, S(\varepsilon_{k-1}, u_{k-1}(t))), \quad (5.29)$$

$$v(t) \in S(\varepsilon_{k+2}, u_{k+2}(t)) \subset S(\varepsilon_k, u_k(t)) \cap G(t_{k+1}, S(\varepsilon_k, u_k(t))), \quad (5.30)$$

где по построению последовательности (5.27) и согласно (5.28) $t_{k+1} > t_k > s_k > s_0$, $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1} < \varepsilon_0$. Применяя к обеим частям включений (5.29) и (5.30) преобразования $G(t_k, \cdot)$ и $G(-t_{k+1}, \cdot)$, соответственно получим

$$G(t_k, v(t)) \in S(\varepsilon_{k-1}, u_{k-1}(t)) \cap G(t_k, S(\varepsilon_{k-1}, u_{k-1}(t))) \subset S(\varepsilon_0, v(t)),$$

$$G(-t_{k+1}, v(t)) \in S(\varepsilon_k, u_k(t)) \cap G(-t_{k+1}, S(\varepsilon_k, u_k(t))) \subset S(\varepsilon_0, v(t)).$$

Иначе говоря, для произвольных $t_k > 0$ и $s_0 > 0$ всегда найдутся такие моменты времени $t = t_k > s_0$ и $t = -t_{k+1} < -s_0$, соответственно, что

$$G(t_k, v(t)) \in S(\varepsilon_0, v(t)), \quad G(-t_{k+1}, v(t)) \in S(\varepsilon_0, v(t)).$$

Следовательно, движение $G(s, v(t))$ устойчиво Π . Доказательство завершено.

Итак, множество устойчивых Π движений всюду плотно во множестве неблуждающих движений:

$$M_0 = \overline{M_0} \setminus E. \quad (5.31)$$

С учетом равенства (5.31), объединив предложения 1.5 и 1.6, получим

Предложение 1.7. Если пространство $C(R, M^*)$ компактно, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое характерное время $s_0(\varepsilon) > 0$, что произвольное блуждающее движение $G(s, u(t))$ за время s , не превышающее s_0 , раз навсегда войдет в ε окрестность множества всех устойчивых Π движений обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$.

Таким образом, окончательно свойства самоорганизации движения с компактным фазовым пространством заключаются в том, что в пределах точности наблюдения за время, характерное этой точности, каждое движение становится устойчивым Π , т. е. обла-

дает свойством возвращаемости. Поэтому необходимо изучать возвращаемость движений.

5.2. Структурное описание

Для структурного описания движений обобщенной динамической системы введем понятие типов, классов, видов и групп движений и докажем соответствующие утверждения.

Предложение 2.1. Каждое движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$ относится к одному и только одному из следующих трех типов:

1. Состояние покоя, при котором для каждого момента времени $s \in R_1$ имеет место равенство

$$G(s, u(t)) = G(0, u(t)) - u(t), \quad u(t) = \text{const}. \quad (5.32)$$

2. Периодическое движение с минимальным положительным действительным периодом τ , т. е. для τ и каждого $s \in (0, \tau)$ справедливы условия

$$G(\tau, u(t)) = G(0, u(t)); \quad G(s, u(t)) \neq G(0, u(t)). \quad (5.33)$$

3. Непериодическое движение, т. е. для любого отличного от нуля момента времени $s \in R_1$ выполнено неравенство

$$G(s, u(t)) \neq G(0, u(t)). \quad (5.34)$$

Доказательство. Пусть движение $G(s, u(t))$ не относится к типу 3. Это означает, что найдется такой отличный от нуля момент времени $s_0 \in R_1$, для которого нарушится неравенство (5.34) и

$$G(s_0, u(t)) = G(0, u(t)). \quad (5.35)$$

Не нарушив общности, можно положить $s_0 > 0$, так как в противном случае $-s_0 > 0$ и

$$G(-s_0, u(t)) = G(0, u(t)). \quad (5.36)$$

Итак, пусть $s_0 > 0$. При этом возможны два случая. Во-первых, может существовать такое наименьшее положительное число $\tau \leq s_0$, для которого выполнено условие (5.33). Тогда движение $G(s, u(t))$ является периодическим, τ — его минимальным положительным периодом и $G(s, u(t))$ относится к типу 2. Во-вторых, может не существовать такого наименьшего положительного числа τ , заключенного между нулем и s_0 , для которого выполнялось бы условие (5.33). Тогда для каждого $s \in [0, s_0]$ имеет место равенство

$$G(s, u(t)) = G(0, u(t)). \quad (5.37)$$

Пусть $s^* \in R_1^+$ — произвольный момент времени. Его всегда можно представить в виде $s^* = ks_0 + s'$, где k — натуральное число и $s' \in [0, s_0)$. Используя (5.37), для s^* будем иметь равенство

$$G(0, u(t)) = G(s^*, u(t)) = G(ks_0 + s', u(t)) = G(s', u(t)),$$

означающее, что s^* есть период движения $G(s, u(t))$. Отсюда в силу произвольности $s^* \in R_1^+$ и равенства (5.36) вытекает, что каждый момент времени $s \in R_1$ является периодом движения $G(s, u(t))$ и выполнено условие (5.32). При этом движение $G(s, u(t))$ относится к типу 1.

Таким образом, установлено, что если движение $G(s, u(t))$ не относится к типу 3, то оно относится к одному и только одному типу (1 или 2). Доказательство завершено.

Заметим, что если движение $G(s, u(t))$ относится к типу 1 или 2, то оно возвращаемо. Существуют также возвращаемые движения, но относящиеся к типу 3, например, непериодические устойчивые Π движения. Полная классификация непериодических возвращаемых движений получена Б. А. Шербаковым [62]. В основу его классификации положено следующее отношение эквивалентности: два движения называются подобными, если они принадлежат всякому основному классу возвращаемых движений, которому принадлежит хотя бы одно из них.

Отметим эти классы возвращаемых движений: L_0 — класс всех движений, относящихся к типу 1; L_1 — класс всех движений, относящихся к типу 2; L_2 — класс всех почти периодических движений; L_3 — класс всех рекуррентных движений, которые псевдопериодичны, но не почти периодичны; L_4 — класс всех рекуррентных движений, которые не псевдопериодичны; L_5 — класс всех почти рекуррентных движений, которые псевдопериодичны, но не рекуррентны; L_6 — класс всех почти рекуррентных движений, которые псевдорекуррентны, но не рекуррентны и не псевдопериодичны; L_7 — класс всех почти рекуррентных движений, которые не псевдорекуррентны; L_8 — класс всех псевдопериодических движений, которые не почти рекуррентны; L_9 — класс всех псевдорекуррентных движений, которые не почти рекуррентны и не псевдопериодичны; L_{10} — класс всех устойчивых по Пуассону движений, которые не почти рекуррентны и не псевдопериодичны.

Классы $L_2 - L_{10}$ состоят из движений, относящихся к типу 3. Так как возвращаемые движения не исчерпывают движения, относящиеся к типу 3, то введем понятие видов движений: возвращаемых K_1 и невозвращаемых K_2 . К возвращаемому виду движений K_1

относятся все движения, входящие в классы L_0 — L_{10} , а к K_2 — все движения типа 3, не попадающие ни в один из классов L_0 — L_{10} . Очевидно, множество K_2 непусто.

Возвращаемые движения не блуждают. Существуют также невозвращаемые неблуждающие и блуждающие движения. Поэтому введем понятие групп движений: неблуждающих B_1 и блуждающих B_2 . В группу B_1 входят все движения вида K_1 и неблуждающие движения вида K_2 . Группа B_2 состоит из блуждающих движений вида K_2 .

Итак, окончательное структурное описание движений выглядит так.

Предложение 2.2. Каждое движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$ относится к одному и только одному из типов 1, 2, 3, принадлежит одному и только одному из классов L_0, L_1, \dots, L_{10} , имеет один и только один из видов K_1, K_2 и является элементом одной и только одной из групп B_1, B_2 .

В небесной механике достаточно хорошо изучены периодические, почти периодические, рекуррентные и устойчивые по Пуассону движения [5, 18]. Введем определения этих движений и для обобщенной динамической системы.

Движение $G(s, u(t))$ называется почти периодическим, если для каждого $\varepsilon > 0$ множество $R(\varepsilon; u)$ его ε -почти периодов s_0 , удовлетворяющих условию (5.17), относительно плотно в R_1 , т. е. существует такое положительное число $l(\varepsilon) > 0$, что каждый отрезок длины l действительной оси времени R_1 содержит хотя бы один ε -почти период s_0 .

Критерий почти периодичности принадлежит С. Бохнеру [49].

Теорема Бохнера. Движение $G(s, u(t))$ почти периодически тогда и только тогда, когда замыкание его траектории $G(u)$ компактно в пространстве $C(R_1, M^*)$ в смысле равномерной сходимости на R_1 .

Движение $G(s, u(t))$ называется рекуррентным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $l(\varepsilon) > 0$, что каждая дуга $G(a \leq s \leq a+l, u(t))$ временной длины l с точностью до ε аппроксимирует всю траекторию $G(R_1, u(t))$, т. е.

$$G(R_1, u(t)) \subset S(\varepsilon, G(a \leq s \leq a+l, u(t))) \quad (5.38)$$

для любого $a \in R_1$.

В качестве определения рекуррентного движения используется следующая

Теорема [49]. Устойчивое M движение $G(s, u(t))$ рекуррентно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ множество его ε -сместий $R(\varepsilon, u)$ относительно плотно в R_1 .

Критерий рекуррентности движения принадлежит Д. Д. Биркгофу.

Теорема Биркгофа. Движение $G(s, u(t))$ рекуррентно тогда и только тогда, когда замыкание его траектории $G(u)$ компактно и минимально, т. е. множество $G(u)$ непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит истинного подмножества, обладающего этими тремя свойствами.

Состояние покоя определяется тавтологически. Поэтому представляет интерес рассмотрение периодических движений как наиболее простого возвращаемого и устойчивых Π движений как наиболее общего возвращаемого движения. Однако каждое из этих движений, являясь представителем первого нетривиального и последнего классов возвращаемых движений, не обладает признаком, описывающим их. Рассматривая этот открытый вопрос, замечаем, что как теорема Бохнера, так и теорема Биркгофа формулируется в терминах «траектория». Поэтому сформулируем критерии периодичности и устойчивости Π движений в терминах «траектория».

5.3. Критерий периодичности

Предварительно сформулируем следующий общий факт, играющий роль теоремы единственности.

Предложение 3.1. Движение $G(s, u(t))$ является периодическим тогда и только тогда, когда найдутся такие неравные между собой моменты времени s_1 и s_2 , что

$$G(s_1, u(t)) = G(s_2, u(t)). \quad (5.39)$$

Если τ — минимальный положительный период движения $G(s, u(t))$, то существует натуральное k , для которого выполняется равенство

$$k\tau = s_2 - s_1 \quad (5.40)$$

при условии, что $s_2 > s_1$.

Доказательство. Пусть движение $G(s, u(t))$ относится к типу 2. Тогда, полагая $s_1 = 0$, $s_2 = \tau$ и $k = 1$, получаем равенства (5.39) и (5.40). Допустим, что, наоборот, выполнено равенство (5.39), где $s_2 - s_1 = s_0$ и $s_0 > 0$. Применяя к обеим частям равенства (5.39) преобразование $G(-s_1, \cdot)$, будем иметь выражение $G(s_0, u(t)) = G(0, u(t))$, означающее, что s_0 — период движения $G(s, u(t))$. Следовательно, движение $G(s, u(t))$ относится либо к типу 1, либо к типу 2. В первом случае равенство (5.40) становится несодержательным. Поэтому допустим, что $G(s, u(t))$ относится к типу 2 и τ — его минимальный период. Представим s_0 в виде $s_0 = k\tau + s_0'$, где k — некоторое натуральное число и $s_0' \in [0, \tau)$. Если $s_0' \neq 0$, то вы-

полностью равенство $G(0, u(t)) = G(s_0, u(t)) = G(k\tau + s_0, u(t)) = G(s_0, u(t))$, из которого вытекает, что $s_0 < \tau$ и s_0 — период движения $G(s, u(t))$. А это противоречит минимальности τ . Поэтому $s_0 = 0$ и выполняется равенство (5.40). Доказательство завершено.

Итак, если траектория $G(R_1, u(t))$ движения $G(s, u(t))$ имеет хотя бы одну точку самопересечения, то такое движение периодично. Поэтому предложение 3.1 играет роль обычной теоремы единственности, утверждающей, что через каждую точку $u(t)$ фазового пространства M проходит одна единственная траектория $G(R_1, u(t))$.

Переходя к двойственному для предложения 3.1 утверждению, получаем признак непериодичности движения: движение $G(s, u(t))$ является непериодическим тогда и только тогда, когда для любых не равных между собой моментов времени s_1 и s_2 выполнено неравенство

$$G(s_1, u(t)) \neq G(s_2, u(t)) \quad (5.41)$$

или неравенство (5.34).

Предложение 3.2. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$ является периодическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) траектория $G(R_1, u(t))$ замкнута, т. е.

$$G(R_1, u(t)) = G(u); \quad (5.42)$$

2) хотя бы одно из множеств $G(u_+)$ и $G(u_-)$ непусто, т. е.

$$G(u_+) = G(u_+) \cup G(u_-) \neq \emptyset. \quad (5.43)$$

Доказательство. Пусть движение $G(s, u(t))$ относится к типу 2. Тогда $G(R_1, u(t)) = G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ и каждое из условий 1 и 2 выполнено. Допустим, что, наоборот, выполнены условия (5.42) и (5.43). Для определенности положим, что множество $G(u_-)$ непусто (случай $G(u_+) \neq \emptyset$ рассматривается аналогично). Следовательно, существуют хотя бы одна функция $v(t) \in G(u_-)$ и соответствующая ей ω -последовательность $\{s_k\}_n$, такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_k, u(t)), G(0, v(t))] = 0. \quad (5.44)$$

В силу условия (5.42) функция $v(t) \in G(R_1, u(t))$. Поэтому для некоторого момента $s_0 \in R_1$ выполняется равенство $v(t) = u(t + s_0)$. Отсюда с учетом выражения (5.44) получим, что движение $G(s, u(t))$ устойчиво H^0 .

Итак, движение $G(s, u(t))$ устойчиво Π^+ и выполнено условие (5.42), а согласно включению (5.19) — равенство

$$G(R_1, u(t)) = G(u) = G(u^+). \quad (5.45)$$

Докажем, что движение $G(s, u(t))$ периодически. Доказательство проведем методом от противного рассуждения. Положив движение $G(s, u(t))$ непериодическим, конструктивно покажем существование такой функции $v(t)$, что $v(t) \in G(u)$ и $v(t) \notin \overline{G(R_1, u(t))}$. С этой целью зафиксируем $\{s_k\} \in N(\omega, u)$ и положительное число ε . В силу устойчивости Π^+ движения $G(s, u(t))$ для данного $\varepsilon > 0$ и данного s_1 найдется такой момент времени $t_1 \in R_1^+$, что $t_1 > s_1$ и

$$m[G(t_1, u(t)), G(0, u(t))] < \varepsilon. \quad (5.46)$$

В силу непериодичности движения $G(s, u(t))$ его актуальное состояние $G(t_1, u(t))$ не принадлежит дуге $G(-t_1 \leq s \leq t_1, u(t))$. Поэтому компактные множества $G(t_1, u(t))$, $\overline{G(-t_1 \leq s \leq t_1, u(t))}$ отделены друг от друга и $m[G(t_1, u(t)), \overline{G(-t_1 \leq s \leq t_1, u(t))}] = a_1$, $a_1 > 0$. Обозначим через b_1 расстояние $m[G(t_1, u(t)), G(0, u(t))] = b_1$. Очевидно, $b_1 < \varepsilon$, так как выполнено условие (5.46). Выберем

$$\varepsilon_1 = \min \left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon - b_1, \frac{a_1}{2} \right).$$

В силу этого выбора имеют место выражения

$$S(\varepsilon_1, G(t_1, u(t))) \subset S(\varepsilon, G(0, u(t))),$$

$$S[\varepsilon_1, G(t_1, u(t))] \cap G(-t_1 \leq s \leq t_1, u(t)) = \emptyset.$$

Из устойчивости Π^+ движения $G(s, u(t))$ вытекает, что для данного $\varepsilon_1 > 0$ и данного $s_2 \in \{s_k\}_\omega$ найдется такой момент времени $t_2 \in R_1^+$, что $t_2 > s_2$ и

$$m[G(t_2, u(t)), G(0, u(t))] < \varepsilon_1. \quad (5.47)$$

Так как движение $G(s, u(t))$ непериодично, то актуальное состояние $G(t_2, u(t))$ не принадлежит дуге $G(-t_2 \leq s \leq t_2, u(t))$ и $m[G(t_2, u(t)), \overline{G(-t_2 \leq s \leq t_2, u(t))}] = a_2$, $a_2 > 0$. Обозначив через b_2 расстояние $m[G(t_2, u(t)), G(0, u(t))] = b_2$, где $b_2 < \varepsilon_1$ в силу (5.47), выберем

$$\varepsilon_2 = \min \left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_1 - b_2, \frac{a_2}{2} \right).$$

Тогда

$$S(\varepsilon_2, G(t_2, u(t))) \subset S(\varepsilon_1, G(0, u(t))),$$

$$S[\varepsilon_2, G(t_2, u(t))] \cap G(-t_2 \leq s \leq t_2, u(t)) = \emptyset.$$

Неограниченно продолжая этот процесс, получаем такие последовательности

$$\varepsilon_k = \min \left(\frac{\varepsilon_{k-1}}{2}, \varepsilon_{k-1} - b_k, \frac{a_k}{2} \right), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad (5.48)$$

$$S(\varepsilon_k, G(t_k, u(t))) \subset S(\varepsilon_{k-1}, G(0, u(t))), \quad (5.49)$$

$$S[\varepsilon_k, G(t_k, u(t))] \cap G(-t_k \leq s \leq t_k, u(t)) = \emptyset, \quad (5.50)$$

что

$$t_k > s_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \quad m[G(t_k, u(t)), G(0, u(t))] < \varepsilon_{k-1}, \quad (5.51)$$

$$S[\varepsilon, G(0, u(t))] \supset S[\varepsilon_1, G(t_1, u(t))] \supset \dots \supset G[\varepsilon_k, G(t_k, u(t))] \supset \dots \quad (5.52)$$

Согласно предельному равенству (5.48), радиусы вложенных друг в друга замкнутых шаров (5.52) стремится к нулю. Поэтому данная последовательность, согласно теореме о вложенных шарах в полных метрических пространствах, имеет непустое пересечение, состоящее из единственного элемента. Обозначим его через $v(t)$, причем $m[G(0, u(t)), G(0, v(t))] < \varepsilon$ и $v(t) \in G(u)$, так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m[G(t_k, u(t)), G(0, v(t))] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0.$$

По построению $G(0, v(t)) \in \overline{G(R_1, u(t))}$, так как в противном случае для некоторого $s_0 \in R_1$ было бы выполнено равенство $G(s_0, u(t)) = G(0, v(t))$. Тогда хотя бы для достаточно большого k имело бы место утверждение $t_k > s_k > |s_0|$ и $G(s_0, u(t)) \in G(-t_k \leq s \leq t_k, u(t))$. Следовательно,

$$G(s_0, u(t)) \in S[\varepsilon_k, G(t_k, u(t))]. \quad (5.53)$$

Поэтому, сопоставив выражения (5.50) и (5.53), получим, что $G(s_0, u(t)) \in G(-t_k \leq s \leq t_k, u(t))$. Таким образом, актуальное состояние $G(s_0, u(t))$ одновременно принадлежит и не принадлежит дуге $G(-t_k \leq s \leq t_k, u(t))$. Отсюда вытекает, что $G(0, v(t)) \in \overline{G(R_1, u(t))}$. А это означает, что замкнутая траектория $G(R_1, u(t))$ не содержит свою ω -предельную точку $G(0, v(t))$. Тем самым получено противоречие с условием (5.42). Следовательно,

допущение о неперриодичности движения $G(s, u(t))$ неверно. Доказательство завершено.

Отметим, что каждое из условий (5.42) и (5.43), взятое в отдельности, недостаточно для периодичности движения $G(s, u(t))$. Например, движение по прямой в конечномерном пространстве совершается по замкнутой траектории, но не является даже возвращаемым. Это означает, что условие (5.42) замкнутости траектории не всегда обеспечивает возвращаемость движения. Существует невозвращаемое устойчивое L^+ (L^-) движение, например движение по спирали, наматывающейся при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$) на начало координат — точку покоя. Для таких движений условие (5.43) выполнено, но не выполнено условие (5.42).

Объединяя (5.42) и (5.43) в одно условие, получим

Предложение 3.3. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы является периодическим тогда и только тогда, когда его траектория $G(R_1, u(t))$ компактна в $C(R_1, M^*)$.

Действительно, из компактности траектории $G(R_1, u(t))$ следует ее замкнутость, т. е. условие (5.42). Пусть $\{s_k\}$ — произвольная ω -последовательность. Тогда из последовательности $\{G(s_k, u(t))\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, которая в силу компактности $C(R_1, M^*)$ принадлежит траектории и обеспечивает выполнение (5.43).

Другое эквивалентное утверждение получится, если учесть, что устойчивость L движения является необходимым условием его периодичности.

Предложение 3.4. Устойчивое L^+ (L^- или L) движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$ является периодическим тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.42).

Действительно, из устойчивости L^+ движения $G(s, u(t))$ следует компактность множества $G(u^*)$. Это влечет за собой неравенство $G(u^*) \neq \emptyset$. Поэтому выполняется условие (5.43). Тогда, согласно предложению 3.2, движение $G(s, u(t))$ является периодическим.

Все перечисленные предложения эквивалентны между собой. Однако анализ их содержания показывает, что в предложении 3.2 указаны самые слабые условия, обеспечивающие периодичность движения $G(s, u(t))$. Поэтому это предложение назовем критерием периодичности.

Сравнив предложение 3.2 и теорему Бохнера, заметим, что в одном случае требуется компактность замыкания траектории в смысле локально равномерной сходимости на R_1 , а в другом случае — компактность замыкания траектории в смысле равномерной сходимости на R_1 . Поэтому создается такое впечатление, что периодичность движения обеспечивается менее слабыми условиями, чем его

почти периодичность. Это вовсе не так, так как периодичность требует замкнутости траектории.

Предложение 3.5. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$ является периодическим с минимальным положительным периодом τ тогда и только тогда, когда дуга $G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ временной длины τ минимальна по Биркгофу.

Действительно, если движение $G(s, u(t))$ является периодическим с минимальным действительным периодом $\tau > 0$, то для каждого $s \in (0, \tau)$ выполнено условие (5.33). Поэтому дуга $G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ компактна и минимальна по Биркгофу. Пусть, наоборот, дуга $G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ минимальна по Биркгофу. Следовательно, для каждого $s \in [0, \tau]: G(R_1, u(s + t)) = G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$. Поэтому $G(R_1, u(t)) = G(u)$ и $G(u) = G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ — компактное множество. Тогда движение $G(s, u(t))$ является периодическим, а τ — его минимальным периодом.

Сравнив предложение 3.5 с теорему Биркгофа, заметим, что за счет замкнутости траектории периодичность движения обеспечивается менее слабыми условиями, чем его рекуррентность.

Рассмотрим вопросы возвращаемости движения.

5.4. Критерий возвращаемости

Пусть $G(s, u(t))$ — некоторое движение обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$. В силу полноты пространства $C(R_1, M^*)$ множество $G(u)$ полно. Оно инвариантно по отношению к динамической системе $G(s, \cdot)$. Поэтому каждое движение этой системы можно изучать в замыкании траектории, рассматриваемом как фазовое пространство движения. В него можно ввести понятие открытого множества — открытого по отношению к пространству $G(u)$. Это позволяет рассматривать границу и внутренность каждого подмножества из $G(u)$.

Итак, под внутренностью траектории $G(R_1, u(t))$ движения $G(s, u(t))$ будем понимать максимальное открытое по отношению к фазовому пространству $G(u)$ множество, содержащееся в $G(R_1, u(t))$. Внутренность траектории обозначим через $\text{int} G(R_1, u(t))$. Тогда границей траектории $G(R_1, u(t))$ движения $G(s, u(t))$ является дополнение до $G(u)$ ее внутренней. Границу обозначим через $\text{cl} G(R_1, u(t))$. По определению имеем

$$\text{cl} G(R_1, u(t)) = G(u) \setminus \text{int} G(R_1, u(t)), \quad (5.54)$$

$$G(u) \setminus \text{int} G(R_1, u(t)) = \overline{G(u) \setminus G(R_1, u(t))}. \quad (5.55)$$

Для внутренней и границы использованы стандартные обозна-

чения теории топологических пространств. Однако, чтобы подчеркнуть, что здесь внутренность и граница множества рассматриваются относительно $G(u)$, Int и Cl заменены на int и cl .

Предложение 4.1. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$, относящееся к типу 3, является устойчивым по Пуассону тогда и только тогда, когда внутренность его траектории пуста, т. е.

$$\text{int} \overline{G(R_1, u(t))} = \emptyset. \quad (5.56)$$

Доказательство необходимости. Пусть движение $G(s, u(t))$ относится к типу 3 и устойчиво P . Следовательно, оно имеет хотя бы одну собственную ω -последовательность. Обозначим ее через $\{s_k\}_k \in N(\omega, u)$, зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и докажем, что

$$S(\varepsilon, G(0, u(t))) \cap (G(u) \setminus G(R_1, u(t))) \neq \emptyset. \quad (5.57)$$

Неравенство (5.57) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $S(\varepsilon, G(0, u(t)))$ начального состояния $G(0, u(t))$ содержит хотя бы одну ω -предельную точку $v(t)$, не принадлежащую траектории. Для доказательства неравенства (5.57) применим построение, использованное при доказательстве предложения 3.2. Проведем это построение, получим последовательность (5.52) вложенных друг в друга шаров пространства $G(u)$, радиусы которых стремятся к нулю. Поэтому пересечение последовательности (5.52) непусто и состоит из единственной точки $v(t) \in G(u)$, причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(t_k, u(t)), G(0, u(t))] = 0, \quad (5.58)$$

и поэтому $v(t) \in G(u)$. По построению $G(0, v(t)) \in \overline{G(R_1, u(t))}$, но, согласно равенству (5.56), $G(0, v(t)) \in S(\varepsilon, G(0, u(t)))$. Следовательно, имеет место неравенство (5.57). Применяя к обеим частям неравенства (5.57) преобразование $G(s, \cdot)$, будем иметь

$$S(\varepsilon, G(s, u(t))) \cap (G(u) \setminus G(R_1, u(t))) \neq \emptyset \quad (5.59)$$

для любого $s \in R_1$.

В силу произвольности s из неравенства (5.59) получим выражение

$$\overline{G(u) \setminus G(R_1, u(t))} = G(u), \quad (5.60)$$

означающее, что дополнение до $G(u)$ траектории $G(R_1, u(t))$ всюду плотно в пространстве $G(u)$. Сравнение выражений (5.55) и (5.60) между собой дает, что $\overline{G(u) \setminus G(R_1, u(t))} = G(u) \setminus$

$\times \text{int} G(R_1, u(t)) = G(u)$. Отсюда следует равенство (5.56). Итак, внутренность траектории устойчивого Π движения пуста.

Доказательство достаточности. Пусть выполнено условие (5.56), означающее, что никакое состояние движения $G(s, u(t))$ не представляет собой внутреннюю точку траектории. Рассмотрим произвольную последовательность таких положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, что

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_k \geq \dots, \quad \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.61)$$

Для данного ε окрестность $S(\varepsilon_1, G(0, u(t)))$ содержит хотя бы одну такую λ -предельную точку $v_1(t)$ траектории, что

$$v_1(t) \in S(\varepsilon_1, G(0, u(t))), \quad \lim_{k_1 \rightarrow \infty} [G(s_{k_1}, u(t)), G(0, u(t))] = 0,$$

где $\{s_{k_1}\}$ — λ -последовательность. Аналогично в силу (5.56) для данного ε_1 окрестность $S(\varepsilon_1, G(0, u(t)))$ содержит хотя бы одну такую λ -предельную точку $v_2(t)$ траектории, что

$$v_2(t) \in S(\varepsilon_1, G(0, u(t))), \quad \lim_{k_2 \rightarrow \infty} [G(s_{k_2}, u(t)), G(0, u(t))] = 0,$$

где $\{s_{k_2}\}$ — λ -последовательность и $S[\varepsilon_1, G(0, u(t))] \subset S \times X |_{\varepsilon, G(0, u(t))}$. Неограниченно продолжая этот процесс, получаем последовательность таких λ -предельных точек $\{v_l(t)\}$ траектории, что

$$v_l(t) \in S(\varepsilon_{l-1}, G(0, u(t))), \quad \lim_{k_l \rightarrow \infty} [G(s_{k_l}, u(t)), G(0, u(t))] = 0, \quad (5.62)$$

и последовательность вложенных друг в друга замкнутых concentрических шаров

$$S[\varepsilon, G(0, u(t))] \supset S[\varepsilon_1, G(0, u(t))] \supset \dots \supset S[\varepsilon_k, G(0, u(t))] \supset \dots, \quad (5.63)$$

радиусы которых в силу (5.61) стремятся к нулю. В силу единственности точки пересечения последовательность (5.63) пересекается в точке $u(t)$. Поэтому проводя диагональную процедуру, из последовательностей $\{G(s_{k_1}, u(t))\}$, $\{G(s_{k_2}, u(t))\}$, ..., $\{G(s_{k_l}, u(t))\}$, ... можно извлечь сходящуюся к $G(0, u(t))$ последовательность $G(s_{11}, u(t))$, $G(s_{22}, u(t))$, ..., $G(s_{kk}, u(t))$, ...
т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_{kk}, u(t)), G(0, u(t))] = 0. \quad (5.64)$$

А это означает, что движение $G(s, u(t))$ устойчиво Π , так как по

построению $\{s_{kk}\}$ есть λ -последовательность. Доказательство завершено.

Сформулируем двойственное утверждение.

Предложение 4.2. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$, относящееся к типу 3, неустойчиво Π тогда и только тогда, когда внутренность его траектории пуста, т. е.

$$\text{int}G(R_1, u(t)) \neq \emptyset. \quad (5.65)$$

В силу предыдущего предложения достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть движение $G(s, u(t))$ относится к типу 3 и неустойчиво Π . Поэтому не выполняется равенство (5.56), а выполняется условие (5.65).

Этим доказательство завершается, но следует уточнить неравенство (5.65).

Предложение 4.3. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$, относящееся к типу 3, неустойчиво Π тогда и только тогда, когда внутренность его траектории совпадает с самой траекторией, т. е.

$$\text{int}G(R_1, u(t)) = G(R_1, u(t)). \quad (5.66)$$

Докажем необходимость, так как достаточность очевидна. Пусть движение $G(s, u(t))$ относится к типу 3, неустойчиво Π , но не выполняется равенство (5.66). Тогда разность $G(R_1, u(t)) \setminus \setminus \text{int}G(R_1, u(t))$ и содержит хотя бы одну точку $u(t+s_0)$, не являющуюся внутренней точкой траектории. Тогда, применив построение, использованное в доказательстве достаточности предложения 4.1, получим последовательность $\{G(s_{kk}, u(t))\}$. По построению она удовлетворяет условию вида (5.64) и сходится к $u(t+s_0)$, для некоторой λ -последовательности $\{s_{kk}\}$. Следовательно, движение $G(s, u(t))$ является устойчивым Π . А это противоречит условиям предложения. Полученное противоречие доказывает равенство (5.66). Доказательство завершено.

Внутренность полутраектории $G(R_1^+, u(t)) (G(R_1^-, u(t)))$ по отношению к подпространству $G(u^+) (G(u^-))$ обозначим через $\text{int}^+ G(R_1^+, u(t)) (\text{int}^- G(R_1^-, u(t)))$. Внутренность полутраектории $G(R_1^+, u(t)) (G(R_1^-, u(t)))$ по отношению к пространству $G(u)$ обозначим через $\text{int} G(R_1^+, u(t)) (\text{int} G(R_1^-, u(t)))$. Очевидно, $\text{int}^+ G(R_1^+, u(t)) \neq \text{int} G(R_1^+, u(t))$; $\text{int}^- G(R_1^-, u(t)) \neq \text{int} G(R_1^-, u(t))$.

Несущественные модификации доказательств предложений 4.1–4.3 позволяют установить следующие факты.

Предложение 4.4. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамиче-

ской системы $G(s, \cdot)$, относящееся к типу 3, является устойчивым Π^+ (Π^-) тогда и только тогда, когда внутренность положительной (отрицательной) полутраектории относительно ее замыкания пуста, т. е.

$$\text{int}^+ G(R_1^+, u(t)) = \emptyset, \quad (\text{int}^- G(R_1^-, u(t)) = \emptyset). \quad (5.67)$$

Предложение 4.5. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$, относящееся к типу 3, является неустойчивым Π^+ (Π^-) тогда и только тогда, когда внутренность положительной (отрицательной) полутраектории относительно ее замыкания не пуста, т. е.

$$\text{int}^+ G(R_1^+, u(t)) \neq \emptyset, \quad (\text{int}^- G(R_1^-, u(t)) \neq \emptyset). \quad (5.68)$$

Аналогично (5.66) неравенства (5.68) имеют следующие уточнения.

Предложение 4.6. Движение $G(s, u(t))$ обобщенной динамической системы $G(s, \cdot)$, относящееся к типу 3, является неустойчивым Π^+ (Π^-) тогда и только тогда, когда внутренность положительной (отрицательной) полутраектории относительно ее замыкания совпадает с самой полутраекторией, т. е.

$$\text{int}^+ G(R_1^+, u(t)) = G(R_1^+, u(t)), \quad (\text{int}^- G(R_1^-, u(t)) = G(R_1^-, u(t))). \quad (5.69)$$

Итак, сформулированы критерии возвращаемости и невозвращаемости движения динамической системы. Можно доказать критерии движения, попадающего в любой из классов L_i ($i=4, 5, \dots, \dots, 9$). Так как представители этих классов ниже нами не рассматриваются, то не будем приводить их критерии.

5.5. Сравнение движений в метрических пространствах

Паряду с M^* рассмотрим другое полное метрическое пространство W^* с метрикой d^* . Пусть $W = C(R_1, W^*)$ — множество всех непрерывных функций со значениями в W^* , зависящих от времени $t \in R_1$, а d — метрика в W , согласованная с d^* и введенная по правилу (5.1), $F(s, \cdot)$ — динамическая система, заданная в пространстве W .

Рассмотрим движения $G(s, u(t))$ и $F(s, v(t))$, где $u(t) \in M$ и $v(t) \in W$. Движение $F(s, v(t))$ называется положительно (отрицательно) сравнимым по возвращаемости (сокращенно — сравнимым R^+ (R^-)) с движением $G(s, u(t))$, если имеет место включение

$$N(a, u) \subset N(a, v), \quad (N^+(a, u) \subset N^+(a, v)). \quad (5.70)$$

Здесь $N(\cdot, X)$ — введенное в предыдущей главе множество собственных (\cdot) -последовательностей функции (X) .

Движения $G(s, u(t))$ и $F(s, v(t))$ называются положительно (отрицательно) изохронными по возвращаемости (сокращенно — изохронными R^+ (R^-)), если имеет место равенство

$$N(\omega, v) = N(\omega, u), (N(a, v) = N(a, u)). \quad (5.71)$$

Движение $F(s, v(t))$ называется положительно (отрицательно) равномерно сравнимым по возвращаемости (сокращенно — сравнимым RR^+ (RR^-)) с движением $G(s, u(t))$, если справедливо включение

$$N^*(\omega, u) \subset N^*(\omega, v), (N^*(a, u) \subset N^*(a, v)), \quad (5.72)$$

где $N^*(\cdot, X)$ — множество всех направляющих (\cdot) -последовательностей функции (X) .

Движения $G(s, u(t))$, $F(s, v(t))$ называются положительно (отрицательно) равномерно изохронными по возвращаемости (сокращенно — изохронными RR^+ (RR^-)), если справедливо равенство

$$N^*(\omega, v) = N^*(\omega, u), (N^*(a, v) = N^*(a, u)). \quad (5.73)$$

Аналогично вводятся понятия сравнимости R , сравнимости RR , изохронности R и изохронности RR движений, заданных в различных фазовых пространствах [24]. При этом соответственно имеют место условия

$$\begin{aligned} N(\lambda, u) \subset N(\lambda, v), N^*(\lambda, u) \subset N^*(\lambda, v); \\ N(\lambda, v) = N(\lambda, u), N^*(\lambda, v) = N^*(\lambda, u). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Двойственные части приведенных ниже фактов не доказываются, ибо они получаются при помощи замены знака плюс (+) на минус (-).

Предложение 5.1. Движение $F(s, v(t))$ сравнимо R^+ (R^-) с движением $G(s, u(t))$ тогда и только тогда, когда из каждой $\{s_k\} \in N(\omega, u)$ ($\{s_k\} \in N(a, u)$) можно извлечь такую последовательность $\{s_k\} \in \{s_k\}$, что $\{s_k\} \in N(\omega, v)$ ($\{s_k\} \in N(a, v)$).

Необходимость очевидна, так как если движение $F(s, v(t))$ сравнимо R^+ с движением $G(s, u(t))$, то выполняется условие (5.70). Докажем достаточность, полагая, что каждая $\{s_k\} \in N(\omega, u)$ содержит в себе $\{s_k\} \in N(\omega, v)$. Предположим, что движение $F(s, v(t))$ не сравнимо R^+ с движением $G(s, u(t))$. Это озна-

часть нарушение условия (5.70). Поэтому найдется такая $\{s_k\} \in N(\omega, u)$, но $\{s_k\} \notin N(\omega, v)$. Тогда из $\{s_k\} \in N(\omega, u)$ можно извлечь такую последовательность $\{s_n\} \in N(\omega, u)$ [24], что никакая ее подпоследовательность не является элементом $N(\omega, v)$. А это противоречит исходным допущениям. Доказательство завершено.

Предложение 5.2. Движение $F(s, v(t))$ сравнимо R^+ (R^-) с движением $G(s, u(t))$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение ∇ полутраектории $G(R_1^+, u(t))$ ($G(R_1^-, u(t))$) на полутраекторию $F(R_1^+, v(t))$ ($F(R_1^-, v(t))$), обладающее свойством

$$\nabla G(s, u(t)) = F(s, v(t)) \quad (5.75)$$

для любого $s \in R_1^+$ ($s \in R_1^-$).

Необходимость. Пусть движение $F(s, v(t))$ сравнимо R^+ с движением $G(s, u(t))$. Отображение ∇ полутраектории $G(R_1^+, u(t))$ на полутраекторию $F(R_1^+, v(t))$ построим так, чтобы каждому актуальному состоянию $G(s, u(t))$ соответствовало актуальное состояние $F(s, v(t))$, где $s \in R_1^+$. Это правило будет выражаться равенством (5.75). Докажем однозначность и непрерывность построенного отображения ∇ .

Рассмотрим сначала случай периодического движения $G(s, u(t))$. Если $G(s, u(t))$ представляет собой состояние покоя, то $N(\omega, u) = R_1$ и в силу включения (5.70) имеем, что $N(\omega, v) = R_1$. Тогда движение $F(s, v(t))$ тоже соответствует состоянию покоя. Это доказывает однозначность и непрерывность отображения ∇ . Если $G(s, u(t))$ — периодическое движение с минимальным положительным периодом τ , то, согласно предложению 2.1, для любого момента времени $s \in (0, \tau)$ имеет место условие (5.71). При этом дуга $G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ совпадает со всей траекторией $G(R_1, u(t))$ и однозначно, непрерывно отображается на дугу $F(0 \leq s \leq \tau, v(t))$, так как в силу включения (5.70) τ является периодом движения $F(s, v(t))$.

Рассмотрим случай непериодического движения $G(s, u(t)) \in \mathcal{E}$. При этом, согласно предложению 3.1, ни при каких значениях моментов времени $s_1 \neq s_2$ не выполняется равенство (5.39). Поэтому ∇ есть однозначное отображение. Докажем его непрерывность. С этой целью рассмотрим произвольное актуальное состояние $G(s_0, u(t))$ и произвольную последовательность актуальных состояний $\{G(s_k, u(t))\}$, сходящихся к $G(s_0, u(t))$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_k, u(t)), G(s_0, u(t))] = 0, \quad (5.76)$$

где $s_0 \in R_1^+$, $s_k \in R_1^+$.

При этом возможны две ситуации. Во-первых, $\{s_k\}$ может оказаться ограниченной последовательностью. Тогда, согласно лемме Больцано—Вейерштрасса [1], из $\{s_k\}$ можно извлечь сходящуюся к s_0 подпоследовательность. Поэтому, не нарушив общности, можно положить $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s_0$. Отсюда в силу свойства локальной непрерывности движений обобщенной динамической системы имеем равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [F(s_k, v(t)), F(s_0, v(t))] = 0, \quad (5.77)$$

из которого вытекает непрерывность отображения ∇ .

Во-вторых, $\{s_k\}$ — неограниченная последовательность. Тогда $\{s_k - s_0\} \in N(\omega, u)$, ибо для $\{s_k\}$ выполнено равенство (5.76). А так как движение $F(s, v(t))$ сравнимо R^+ с движением $G(s, u(t))$, то $\{s_k - s_0\} \in N(\omega, v)$. Поэтому снова имеет место равенство (5.8). Этим доказана необходимость.

Достаточность. Пусть существует непрерывное отображение ∇ множества $G(R_1^+, u(t))$ на множество $F(R_1^+, v(t))$, обладающее свойством (5.6). Покажем, что движение $F(s, v(t))$ сравнимо R^+ с движением $G(s, u(t))$. С этой целью зафиксируем произвольную $\{s_k\} \in N(\omega, u)$. По определению множества $N(\omega, u)$ для $\{s_k\}$ выполнено равенство (5.15). Так как ∇ есть непрерывное отображение, то оно, в частности, непрерывно в точке $G(0, u(t)) \in G(R_1^+, u(t))$. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} [F(s_k, v(t)), F(0, v(t))] = 0$ и $\{s_k\} \in N(\omega, v)$. Отсюда в силу произвольности $\{s_k\} \in N(\omega, u)$ имеем включение (5.70). А это и доказывает достаточность предложения 5.2.

Итак, предложение 5.2 доказано.

Предложение 5.3. Движение $F(s, v(t))$ сравнимо $RR^+(RR^-)$ с движением $G(s, u(t))$ тогда и только тогда, когда существует равномерно непрерывное отображение ∇ полутраектории $G(R_1^+, u(t))$ ($G(R_1^-, u(t))$) на полутраекторию $F(R_1^+, v(t))$ ($F(R_1^-, v(t))$), обладающее свойством (5.75) для любого $s \in R_1^+$ ($s \in R_1^-$).

Предварительно заметим, что если движение $F(s, v(t))$ сравнимо $RR^+(RR^-)$ с движением $G(s, u(t))$, то с ним оно сравнимо $R^+(R^-)$. Поэтому в силу предыдущего предложения существует непрерывное отображение ∇ множества $G(R_1^+, u(t))$ на множество $F(R_1^+, v(t))$ и оно обладает свойством (5.75). Следовательно, предложение 5.3 справедливо в том и только в том случае, когда отображение ∇ равномерно непрерывно.

Необходимость. Пусть движение $F(s, v(t))$ сравнимо RR^+ с

движением $G(s, u(t))$. Покажем равномерную непрерывность отображения \forall . С этой целью проведем рассуждения от противного, полагая \forall непрерывным отображением, не являющимся равномерно непрерывным. Последнее означает существование такого $t_0 > 0$, что при любых $\delta > 0$ найдется пара (s_1, s_2) моментов времени R_1^+ , для которых

$$m[G(s_1, u(t)), G(s_2, u(t))] < \delta; \quad (5.78)$$

$$d[F(s_1, v(t)), F(s_2, v(t))] > \epsilon.$$

Пользуясь произвольностью числа δ , входящего в неравенства (5.78), фиксируем последовательность таких $\{\delta_k\}$, что

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_k > \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0. \quad (5.79)$$

В силу (5.78) каждому числу δ_k соответствует пара таких моментов времени $s_{1k}, s_{2k} \in R_1^+$, что

$$m[G(s_{1k}, u(t)), G(s_{2k}, u(t))] < \delta_k; \quad (5.80)$$

$$d[F(s_{1k}, v(t)), F(s_{2k}, v(t))] > \epsilon \quad (5.81)$$

для любого натурального k . При этом возможны следующие три случая

Во-первых, каждая из последовательностей $\{s_{1k}\}$ и $\{s_{2k}\}$ оказывается ограниченной. Тогда, согласно лемме Больцано-Вейерштрасса, $\{s_{1k}\}$ и $\{s_{2k}\}$ имеют сходящиеся подпоследовательности. Не нарушив общности, можно положить, что $\{s_{1k}\}$ и $\{s_{2k}\}$ сходятся к s_1, s_2 и являются их пределами. При этом, учитывая неравенство (5.80) в силу (5.79) будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_{1k}, u(t)), G(s_{2k}, u(t))] &= \\ = m[G(s_1, u(t)), G(s_2, u(t))] &< \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме о единственности предела получим, что $G(s_1, u(t)) \equiv G(s_2, u(t))$. Поэтому из последовательностей $\{s_{1k}\}$ и $\{s_{2k}\}$ можно образовать такую направляющую ω -последовательность $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in N^*(\omega, u)$, которая, согласно неравенству (5.81), не принадлежит $N^*(\omega, v)$. А это противоречит тому, что $F(s, v(t))$ сравнимо RR^* с $G(s, u(t))$. В этом случае необходимость предложения 5.3 доказана.

Во-вторых, может оказаться, что одна из последовательностей

$\{s_{1k}\}$, $\{s_{2k}\}$ является ограниченной, а другая нет. Без ущерба примем, что $\{s_{1k}\}$ является ограниченной и сходящейся к $s_1 \in R_1^+$, а $\{s_{2k}\}$ — неограниченной. Поэтому $\{s_{2k}\}$ представляет собой ω -последовательность, и в силу (5.79) и (5.80) будем иметь

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_{1k}, u(t)), G(s_{2k}, u(t))] = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_1, u(t)), G(s_{2k}, u(t))] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\{s_{2k} - s_1\}_k \in N(\omega, u)$. Но в силу (5.81) $\{s_{2k} - s_1\}_k \in N(\omega, v)$. Последнее означает, что движение $F(s, v(t))$ несравнимо R^+ с движением $G(s, u(t))$. Итак, для рассматриваемого случая также доказана необходимость предложения 5.3.

В третьих, пусть последовательности $\{s_{1k}\}$ и $\{s_{2k}\}$ неограниченны, т. е. $\{s_{1k}\}_k \in N^*(\omega, u)$ и $\{s_{2k}\}_k \in N^*(\omega, v)$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В соответствии с условием выбора $\{\delta_k\}$ найдется такой номер $k^*(\varepsilon)$, что, начиная с этого номера, все $\delta_k < \varepsilon$. Тогда в силу неравенства (5.80) при любом $k \geq k^*$ имеет место неравенство

$$m[G(s_{1k}, u(t)), G(s_{2k}, v(t))] < \varepsilon. \quad (5.82)$$

Так как ε — произвольное число, то неравенство (5.82) означает, что $\{G(s_{1k}, u(t)), G(s_{2k}, v(t))\}$ есть фундаментальная последовательность Коши. Она в силу полноты пространства $G(u)$ сходится к некоторому элементу из $G(u)$, т. е. из $\{s_{1k}\}$ и $\{s_{2k}\}$ можно образовать такую направляющую ω -последовательность $\{s_k\}_k$, что $\{s_k\}_k \in N^*(\omega, u)$. Однако, согласно неравенству (5.81), соответствующая последовательность $\{F(s_k, v(t))\}$ не является фундаментальной и $\{s_k\}_k \in N^*(\omega, v)$. А это противоречит включению (5.72). Полученное противоречие завершает доказательство необходимости предложения 5.3.

Достаточность. Пусть отображение ∇ , действующее по правилам (5.75), равномерно непрерывно переводит $G(R_1^+, u(t))$ на $F(R_1^+, v(t))$. Покажем, что движение $F(s, v(t))$ сравнимо RR^+ с $G(s, u(t))$. Для этого достаточно показать справедливость включения (5.72). С этой целью рассмотрим произвольную $\{s_k\}_k \in N^*(\omega, u)$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем число $\delta > 0$ в соответствии с равномерной непрерывностью отображения ∇ . Тогда для данного δ найдется такой номер k^* , что $m[G(s_k, u(t)), G(s_{k+1}, u(t))] < \delta$ для любого $k \geq k^*$. Поэтому

$$d[F(s_k, v(t)), F(s_{k+1}, v(t))] =$$

$$= d[\nabla G(s_k, u(t)), \nabla G(s_{k+1}, v(t))] < \epsilon, \quad (5.83)$$

так как ∇ равномерно непрерывно. В силу произвольности ϵ из неравенства (5.14) вытекает, что $\{F(s_k, u(t))\}$ есть фундаментальная последовательность. Поэтому $\{s_k\} \in N^*(\omega, v)$. Итак, произвольная последовательность $\{s_k\} \in N^*(\omega, u)$ входит в множество $N^*(\omega, v)$ и движение $F(s, v(t))$ сравнимо RR^* с движением $G(s, u(t))$.

Предложение 5.3 доказано полностью. Из установленных предложений 5.2 и 5.3 вытекают следующие утверждения, выражающие критерии изохронности и равномерной изохронности движений.

Предложение 5.4. Движения $G(s, u(t))$, $F(s, v(t))$ изохронны R^* (R^-) тогда и только тогда, когда существует гомеоморфное, т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение ∇ между полутраекториями $G(R_1^+, u(t))$ ($G(R_1^-, u(t))$) и $F(R_1^+, v(t))$ ($F(R_1^-, v(t))$), обладающее свойством (5.75).

Предложение 5.5. Движения $G(s, u(t))$, $F(s, v(t))$ изохронны RR^* (RR^-) тогда и только тогда, когда существует изоморфное, т. е. взаимно однозначное и взаимно равномерно непрерывное отображение ∇ между полутраекториями $G(R_1^+, u(t))$ ($G(R_1^-, u(t))$) и $F(R_1^+, v(t))$ ($F(R_1^-, v(t))$).

Из предложения 5.4 вытекает, что изохронные R движения имеют один и тот же тип, попадая в один и тот же класс L_0 , L_1 и L_{10} . Из предложения 5.5 вытекает, что изохронные RR движения принадлежат одному и тому же классу L_2 , L_3, \dots, L_6 [14]. Далее эти замечания неоднократно используются.

5.6. Сравнение в банаховых пространствах

Так как каждое банахово пространство является и метрическим, то сформулированные в предыдущем разделе предложения справедливы в этом пространстве. Однако банаховы пространства следует рассмотреть отдельно, хотя бы потому, что в них вводятся понятия производной функции и интеграла от абстрактной функции со значениями в этих пространствах. Тогда естественным образом возникают понятия сравнения по возвращаемости движения с его производной по времени и с интегралом от него. Исследование этих вопросов составляет содержание данного раздела.

Пусть M^* — банахово пространство и $\|\cdot\|$ — норма его элементов. Через m^* обозначим метрику, введенную как обычно по норме пространства M^* :

$$m^*(x, y) = \|x - y\|, \quad (5.84)$$

где x, y — произвольные элементы из M^* .

При каждом фиксированном значении времени $t^* \in R_1$ значение каждой функции $u(t) \in C(R_1, M^*)$ принадлежит M^* , т. е. $u(t^*) \in M^*$. Поэтому существует число $\|u(t^*)\|$. С учетом этого в пространстве $C(R_1, M^*)$ можно ввести метрику m , определенную равенством (5.1) и согласованную с метрикой (5.84).

Элемент $x \in M^*$ называется производной функции $u(t) \in C(R_1, M^*)$ в точке $t=s$, если при $t \neq s$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow s} m \left[\frac{u(t) - u(s)}{t - s}, x \right] = 0. \quad (5.85)$$

Если найдется такая функция $v(t) \in C(R_1, M^*)$, что она при каждом фиксированном значении $t=s$ принимает значение x , удовлетворяющее равенству (5.85), то $v(t)$ называется производной функции $u(t)$. Производную обозначим через $\frac{d}{dt}$. Тогда

$$\dot{u}(t) = v(t) \quad (5.86)$$

для всех $t \in R_1$.

Функция $w(t) \in C(R_1, M^*)$ называется первообразной функции $v(t) \in C(R_1, M)$, если при любых $s \in R_1$ и $t \in R_1$ имеет место равенство

$$w(t) - w(s) + \int_s^t v(\tau) d\tau. \quad (5.87)$$

Функция $u(t)$ и ее первообразная связаны между собой обычным соотношением, что $\dot{w}(t) = u(t)$. Иначе говоря, производная по переменному верхнему пределу от первообразной совпадает с самой функцией. Как в классическом анализе, нетрудно показать, что первообразная $w(t)$ в каждой точке $s \in R_1$ имеет производную и она равна подинтегральной функции.

Докажем некоторые утверждения о сравнении функции, ее производной и первообразной по возвращаемости. При этом следуем [23, 62].

Предложение 6.1. Если функция $\dot{u}(t) \in C(R_1, M^*)$ равномерно непрерывна на $R_1^+(R_1^-)$, то движение $G(s, \dot{u}(t))$ сравнимо $KK^1(RR^-)$ с движением $G(s, u(t))$.

Доказательство. Для каждого натурального k введем функцию

$$u_k(t) = k \left[u \left(t + \frac{1}{k} \right) - u(t) \right] \quad (5.88)$$

и покажем, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k^* , что для всех $k \geq k^*$ оценка вида

$$\|u_k(t) - \dot{u}(t)\| < \varepsilon \quad (5.89)$$

выполняется равномерно на R_1^+ . С этой целью для данного ε выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ в соответствии с равномерной непрерывностью функции $\dot{u}(t)$ на R_1^+ . Тогда для любых таких s , что $t+s \in R_1^+$ и $|s| \leq \delta$, имеем

$$\|\dot{u}(t+s) - \dot{u}(t)\| < \varepsilon. \quad (5.90)$$

Рассмотрим выражение $\|u_k(t) - \dot{u}(t)\|$. Оно имеет смысл, так как M^* — банахово пространство и $u(t) \in C(R_1, M^*)$. Оценим его, учитывая представление (5.88) функции $u_k(t)$:

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - \dot{u}(t)\| &= \left\| k \int_0^{1/k} \dot{u}(t+s) ds - k \int_0^{1/k} \dot{u}(t) ds \right\| = \\ &= k \left\| \int_0^{1/k} [\dot{u}(t+s) - \dot{u}(t)] ds \right\| \leq k \int_0^{1/k} \|\dot{u}(t+s) - \dot{u}(t)\| ds. \end{aligned}$$

Следовательно с учетом неравенства (5.90) имеем (5.89). А это означает, что последовательность $\{u_k(t)\}$ сходится к $\dot{u}(t)$ равномерно на R_1^+ . Очевидно, функция $u_k(t)$ сравнима RR с функцией $u(t)$. Обозначим через ∇ отображение, переводящее полутраекторию $\{u(t+s) \mid |s| \leq R_1^+\}$ на полутраекторию $\{\dot{u}(t+s) \mid s \in R_1^+\}$ и определяемое равенством $\nabla u(t+s) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t+s) = \dot{u}(t+s)$ для всех $s \in R_1^+$. По доказанному выше ∇ есть однозначное, равномерно непрерывное отображение. Тогда, согласно предложению 5.4, функция $\dot{u}(t)$ сравнима RR^+ с функцией $u(t)$ или, что то же самое, движение $G(s, u(t))$ сравнимо RR^+ с движением $G(s, \dot{u}(t))$. Предложение 6.1 доказано.

Предложение 6.2. Если первообразная $\omega(t)$ компактна $R^+(R^-)$, то движение $G(s, \omega(t))$ сравнимо $R^+(R^-)$ с движением $G(s, u(t))$.

Доказательство. Пусть $\{s_k\}$ — произвольная собственная ω -последовательность функции $u(t)$, т. е. $\{s_k\}_k \in N(\omega, u)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [u(t+s_k), u(t)] = 0. \quad (5.91)$$

Действуя на обе части выражения (5.87) преобразованием $G(s, \cdot)$, где $s \in R_1^+$, имеем

$$G(s, w(t)) = G(s, w(0)) + G\left(s, \int_0^t u(\tau) d\tau\right). \quad (5.92)$$

В частности, равенство (5.92) верно и для s_k :

$$G(s_k, w(t)) = G(s_k, w(0)) + G\left(s_k, \int_0^t u(\tau) d\tau\right). \quad (5.93)$$

С учетом (5.91) рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left[G(s_k, \int_0^t u(\tau) d\tau), G(0, \int_0^t u(\tau) d\tau) \right] = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[G(0, \int_0^t u(\tau+s_k) d\tau), G(0, \int_0^t u(\tau) d\tau) \right] = \\ & = m \left[G(0, \int_0^t u(\tau) d\tau), G(0, \int_0^t u(\tau) d\tau) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Из компактности R^+ функции $w(t)$ вытекает, что последовательность $\{G(s_k, w(0)) = w(s_k)\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности, полагаем, что последовательность $\{w(s_k)\}$ сходится к w^* — ее предел. Исходя из представления (5.87) имеем

$$w(s_k) = w(0) + \int_0^t u(\tau+s_k) d\tau.$$

Здесь с учетом равенства (5.94) перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$. Тогда получим $w^* = w(0)$. Итак, исходя из равенств $w^* = w(0)$,

(5.94) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в выражениях (5.93), будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_k, \omega(t)), G(0, \omega(t))] = 0,$$

т. е. говоря, $\{s_k\} \in N(\omega, \omega)$. Это включение и доказывает предложение 6.2.

Предложение 6.3. Если $\omega(t)$ — первообразная функции $u(t)$ и движение $G(s, \omega(t))$ устойчиво $L^+(L^-)$, то оно сравнимо $RR^+(RR^-)$ с движением $G(s, u(t))$.

Доказательство. Пусть $\{s_k\}$ — произвольная направляющая последовательность движения $G(s, u(t))$, т. е. $\{s_k\} \in N^*(\omega, u)$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\{s_k\} \in N^*(\omega, u)$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k^* , что при всех $k \geq k^*$ имеет место неравенство

$$m[G(s_k, u(t)), G(s_{k+1}, u(t))] < \varepsilon. \quad (5.95)$$

Из равенства (5.92) имеем

$$\begin{aligned} & m[G(s_k, \omega(t)), G(s_{k+1}, \omega(t))] = \\ & = m \left[G \left(s_k, \int_0^t u(\tau) d\tau \right), G \left(s_{k+1}, \int_0^t u(\tau) d\tau \right) \right] = \\ & = m \left[G \left(0, \int_0^t u(\tau + s_k) d\tau \right), G \left(0, \int_0^t u(\tau + s_{k+1}) d\tau \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (5.95) произвольности ε и полноты пространства $C(R_1, M^+)$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m[G(s_k, \omega(t)), G(s_{k+1}, \omega(t))] = 0.$$

А это означает, что $\{s_k\} \in N^*(\omega, \omega)$. Предложение 6.3 доказано.

На основании предложений 6.1 и 6.3 получим

Предложение 6.4. Если функция $u(t)$ равномерно непрерывна на $R_1^+(R_1^-)$ и ее первообразная $\omega(t)$ компактна $R_1^+(R_1^-)$, то движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \omega(t))$ изохронны $R^+(R^-)$.

Предложение 6.5. Если функция $u(t)$ равномерно непрерывна на $R_1^+(R_1^-)$, $\omega(t)$ — ее первообразная и движение $G(s, \omega(t))$ устойчиво $L^+(L^-)$, то движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \omega(t))$ изохронны $RR^+(RR^-)$.

Во многих ситуациях возникает необходимость сравнения по возвращаемости движений $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$, где скалярная функция $\|u(t)\|$ при фиксированном $t \in R_1$ принимает значение, равное норме элемента $u(t) \in M_1^*$ для данного $t \in R_1$.

Предложение 6.6. Движение $G(s, \|u(t)\|)$ сравнимо RR с движением $G(s, u(t))$.

Доказательство тривиально следует из того, что если для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon > \|u(t+s) - u(t)\|$, то выполняется и оценка $\varepsilon > \|u(t+s) - u(t)\| \geq \| \|u(t+s)\| - \|u(t)\| \|$.

Дальнейшая цель заключается в обращении предложения 6.6. Введем отображение траектории $G(R_1, u(t))$ движения $G(s, u(t))$ на траекторию $G(R_1, \|u(t)\|)$ движения $G(s, \|u(t)\|)$ с помощью следующего соотношения:

$$\Lambda G(s, u(t)) = G(s, \|u(t)\|) \quad (5.96)$$

при всех $s \in R_1$.

Обозначим через $\tilde{\Lambda}$ продолжение отображения Λ до отображения всего пространства $\tilde{G}(u)$. Его построим так: для каждой функции $v(t) \in \tilde{G}(u) \setminus G(R_1, u(t))$ положим

$$\tilde{\Lambda} G(s, v(t)) = G(s, \|v(t)\|), \quad (5.97)$$

а на траектории $G(R_1, u(t))$ $\tilde{\Lambda}$ совпадает с Λ . Отметим следующий очевидный факт.

Предложение 6.7. Отображения Λ и $\tilde{\Lambda}$ однозначны и равномерно непрерывны.

Предложение 6.8. Движение $G(s, u(t))$ неперiodично, а отображение Λ взаимнооднозначно тогда и только тогда, когда движение $G(s, \|u(t)\|)$ неперiodично.

Необходимость. Пусть движение $G(s, u(t))$ неперiodично, отображение Λ взаимнооднозначно, но движение $G(s, \|u(t)\|)$ перiodично. Не нарушая общности, положим τ минимальным действительным периодом движения $G(s, \|u(t)\|)$. Тогда

$$G(\tau, \|u(t)\|) = G(0, \|u(t)\|). \quad (5.98)$$

Так как по условиям движение $G(s, u(t))$ неперiodично, то актуальные состояния $G(0, u(t))$ и $G(\tau, u(t))$ движения $G(s, u(t))$ не совпадают между собой. Поэтому взаимнооднозначное отображение (5.96) ставит им в соответствие различные точки $G(0, \|u(t)\|)$, $G(\tau, \|u(t)\|)$ траектории $G(R_1, \|u(t)\|)$. А это противоречит равенству (5.98). Следовательно, допущение о перiodичности движения $G(s, \|u(t)\|)$ неверно.

Достаточность. Пусть движение $G(s, \|u(t)\|)$ непериодично. В силу предложения 6.6 движение $G(s, u(t))$ также непериодично. Покажем взаимную однозначность отображения (5.96). Допустим, что это не так. Тогда хотя бы одно актуальное состояние $G(s_0, \|u(t)\|)$ движению $G(s, \|u(t)\|)$ соответствует двум различным актуальным состояниям $G(s_1, u(t))$ и $G(s_0, u(t))$ непериодического движения $G(s, u(t))$, где $s_1 \neq s_0$. Следовательно, имеет место равенство $G(s_1, \|u(t)\|) = G(s_0, \|u(t)\|)$. Применяя к обеим частям этого равенства преобразования $G(s-s_0, \cdot)$, имеем $G(s_1+s_1-s_0, \|u(t)\|) = G(s, \|u(t)\|)$ для всех $s \in R_1$. Тогда число $\tau = s_1 - s_0 \neq 0$ является периодом движения $G(s, \|u(t)\|)$ вопреки условиям предложения.

Итак, предложение 6.8 доказано. Затем, что если движение $G(s, \|u(t)\|)$ непериодично, то Δ , являясь взаимнооднозначным отображением, становится обратимым. Пусть Δ^{-1} — обратное к Δ отображение. Очевидно, оно действует по правилу

$$\Delta^{-1}G(s, \|u(t)\|) = G(s, u(t)) \quad (5.99)$$

для всех $s \in R_1$. В силу непрерывности Δ при отображении (5.99) каждое открытое и каждое замкнутое множество актуальных состояний движения $G(s, \|u(t)\|)$ переходит соответственно в открытое и замкнутое множества актуальных состояний движения $G(s, u(t))$.

Предложение 6.9. Если движение $G(s, \|u(t)\|)$ непериодично, то движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ изохронны тогда и только тогда, когда отображение Δ^{-1} непрерывно хотя бы в одной точке траектории $G(R_1, \|u(t)\|)$.

Необходимость. По условиям предложения движение $G(s, \|u(t)\|)$ непериодично. Согласно предложению 6.8, отображение Δ^{-1} существует. Пусть движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ изохронны R . Покажем непрерывность отображения Δ^{-1} в точке $G(0, \|u(t)\|)$. С этой целью зафиксируем такую произвольную последовательность $\{s_k\}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_k, \|u(t)\|), G(0, \|u(t)\|)] = 0. \quad (5.100)$$

Если последовательность $\{s_k\}$ ограничена, то из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность к нулю. Не нарушив общности, можно положить, что $s_k \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_k, u(t)), G(0, u(t))] = 0 \quad (5.101)$$

и отображение Δ^{-1} непрерывно в точке $G(0, \|u(t)\|)$. Если последовательность $\{s_k\}$ неограничена, то, согласно равенству (5.100), она

принадлежит множеству $N(\lambda, \|u\|)$. Тогда в силу изохронности движений $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ выполняется $\{s_k\} \in N(\lambda, u)$. Поэтому снова имеет место равенство (5.101), из которого вытекает непрерывность отображения Λ^{-1} в точке $G(0, \|u(t)\|)$.

Достаточность. Пусть отображение Λ^{-1} непрерывно в точке $G(s_0, \|u(t)\|)$ и $\{s_k\}$ — произвольная собственная λ -последовательность движения $G(s, \|u(t)\|)$, т. е. для $\{s_k\}$ выполнено равенство (5.100). Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_k + s_0, \|u(t)\|), G(s_0, \|u(t)\|)] = 0,$$

а в силу непрерывности Λ^{-1} в точке $G(s_0, \|u(t)\|)$ имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(s_k + s_0, u(t)), G(s_0, u(t))] = 0.$$

Поэтому $\{s_k\} \in N(\lambda, u)$. Отсюда следует изохронность R движений $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$.

Предложение 6.10. Если минимальные периоды τ_1 и τ_2 движений $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ совпадают, то они изохронны.

Доказательство. При этом дуга $G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ компактна и совпадает со всей траекторией, а отображение Λ названной дуги представляет собой гомеоморфизм между $G(0 \leq s \leq \tau, u(t))$ и $G(0 \leq s \leq \tau, \|u(t)\|)$. Поэтому движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ изохронны.

Очевидно, справедлив и обратный к предложению 6.10 факт.

Предложение 6.11. Пусть движение $G(s, \|u(t)\|)$ устойчиво \mathcal{A} и неперiodично. Движение $G(s, u(t))$ устойчиво \mathcal{A} и изохронно RR с движением $G(s, \|u(t)\|)$ тогда и только тогда, когда отображение Λ^{-1} непрерывно хотя бы в одной точке траектории $G(R_1, \|u(t)\|)$.

Необходимость следует из предложения 6.9. Докажем достаточность. В силу того же предложения 6.9 отображение Λ^{-1} непрерывно всюду на $G(R_1, \|u(t)\|)$. Покажем, что Λ^{-1} равномерно непрерывно отображает $G(R_1, \|u(t)\|)$ на $G(R_1, u(t))$. С этой целью на $G(u)$ введем факторизацию по следующей эквивалентности \mathcal{E} . Два элемента из $G(u)$ назовем эквивалентными по отображению

Λ , если эти элементы при отображении (5.97) имеют один и тот же образ в $G(\|u\|)$. В каждом классе эквивалентности за представителя этого класса выберем элемент траектории $G(R_1, u(t))$, если такой элемент имеется. В силу неперiodичности движения $G(s, \|u(t)\|)$ все элементы пространства $G(R_1, \|u(t)\|)$ выступают в качестве представителей своего класса, причем каждый его элемент представляет один единственный класс и, кроме того, существ-

буют классы, представленные элементами из $G(u) \cdot G(R_1, u(t))$. Обозначим через Δ^* сужение отображения (5.97) на фактор-пространство $G(u)/\mathcal{E}$, которое каждому представителю ставит в соответствие его норму-функцию $\|\cdot\|$. Очевидно, Δ^* есть факторное отображение, т. е. оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает фактор-пространство $G(u)/\mathcal{E}$ на пространство $G(\|u\|)$. Следовательно, обратное к Δ^* отображение $(\Delta^*)^{-1}$ существует и оно равномерно непрерывно отображает компакт $G(\|u\|)$ на компакт $G(u)/\mathcal{E}$. Сужение отображения $(\Delta^*)^{-1}$ на $G(R_1, \|u(t)\|)$ совпадает с Δ^{-1} . Поэтому Δ^{-1} равномерно непрерывно отображает траекторию $G(R_1, \|u(t)\|)$ на траекторию движения $G(R_1, u(t))$. Следовательно, движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ изохронны RR и устойчивы L . Тем самым достаточность предложения 6.11 доказана.

Из предложений 6.9 и 6.11 вытекает

Предложение 6.12. Движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \|u(t)\|)$ изохронны R тогда и только тогда, когда отображение (5.96) обратимо и обратное к нему отображение непрерывно хотя бы в одной точке траектории $G(R_1, \|u(t)\|)$.

Во многих частных задачах небесной механики возникает необходимость во взаимном сравнении по возвращаемости решения в правых частях дифференциальных уравнений этих задач. Общий подход к проблеме существования согласованного решения дифференциальных уравнений разработан Б. А. Щербаковым в [62]. Следуя этой работе, отметим некоторые факты и необходимые признаки построения согласованных решений в банаховых пространствах.

5.7. Сравнение движений с описывающими их уравнениями

Пусть M^* — банахово пространство с метрикой m^* и $C(R_1 \times M^*, M^*)$ — множество всех непрерывных функций $f(t, u)$ от аргументов $t \in R_1$, $u \in M^*$ со значениями в пространстве M^* . Рассмотрим компакт Q из M^* и обозначим через $C(R_1 \times Q, M^*)$ пространство с метрикой [62, 71]:

$$m[f(t, u), g(t, u)] = \sup_{t \in R_1} \min_{u \in Q} \left(\sup_{|t_1| < 1, u \in Q} m^*[f(t, u), g(t, u)], \frac{1}{t} \right), \quad (5.102)$$

где $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$ и $g(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$.

В некоторых случаях вместо пространства $C(R_1 \times Q, M^*)$ удобно рассматривать изометричное ему пространство $C(R_1$

$C(Q, M^*)$ [62, 71]. Изометричность означает, что, во-первых, каждой функции $f \in C(R_1, C(Q, M^*))$ соответствует единственная функция $j \in C(R_1 \times Q, M^*)$, определенная равенством

$$F(t)u = f(t, u) \quad (5.103)$$

при всех $t \in R_1$, $u \in Q$, и, во-вторых, для любой пары функций Φ и Ψ из $C(R_1, C(Q, M^*))$ выполнено условие

$$m_1(\Phi, \Psi) = m[\varphi(t, u), \psi(t, u)]. \quad (5.104)$$

Здесь m_1 — метрика пространства $C(R_1, C(Q, M^*))$, а функции $\varphi(t, u)$, $\psi(t, u)$ из $C(R_1 \times Q, M^*)$, соответствующие Φ и Ψ , определены по правилам (5.103).

Определение 7.1. Функция $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$ называется устойчивой \mathcal{L}^+ (\mathcal{L}^- или \mathcal{L}), если траектория $G(R_1^+, f(t, u))$ ($G(R_1^-, f(t, u))$ или $G(R_1, f(t, u))$) имеет компактное в $C(R_1 \times M^*, M^*)$ замыкание.

Определение 7.2. Функция $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$ называется устойчивой Π^+ (Π^- или Π) равномерно относительно $u \in Q$, если для любой тройки положительных чисел ε , t^* и l существует такое действительное $s \geq l$ ($s \leq -l$ или $|s| \geq l$), что выполняется неравенство

$$\sup_{|t| < t^*, u \in Q} m^*[f(t+s, u), f(t, u)] < \varepsilon. \quad (5.105)$$

Очевидно, справедливо

Предложение 7.1. Функция $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$ устойчива Π^+ (Π^- или Π) равномерно относительно $u \in Q$ тогда и только тогда, когда существует такая ω -последовательность (α - или λ -последовательность) $\{t_n\}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m[f(t+t_n, u), f(t, u)] = 0. \quad (5.106)$$

Последовательность $\{t_n\}$, для которой выполнено равенство (5.106), называется собственной ω -последовательностью (α - или λ -последовательностью) функции $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$. Множество всех собственных ω -последовательностей (α - или λ -последовательностей) функции $f(t, u)$ обозначается через $\Lambda(\omega, f, u)$ ($N(\alpha, f, u)$ или $N(\lambda, f, u)$).

Определение 7.3. Устойчивая \mathcal{L} функция $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$ называется рекуррентной равномерно относительно $u \in Q$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t^* \in R_1^+$ множество $R_\varepsilon(t^*, f, u)$ моментов времени

$s \in R_1$, для которых выполнено неравенство (5.105), относительно плотно в R_1 .

Аналогично вводятся понятия всех основных составляющих классов возвращаемости движений $G(s, f(t, u))$, заданных на функциях $f(t, u)$ из $C(R_1 \times Q, M^*)$.

Пусть аргумент u функции $f(t, u)$ представляет собой непрерывную функцию $u(t) \in C(R_1, M^*)$, имеющую такую производную $\dot{u}(t) \in C(R_1, M^*)$, что

$$\dot{u} = f(t, u). \quad (5.107)$$

Определение 7.4. Решение

$$q(t) = q_0 + \int_0^t j(\tau, q(\tau)) d\tau, \quad (5.108)$$

где $q_0 = q(0)$ и $q \in M^*$ дифференциального уравнения (5.107) называется положительно (отрицательно или просто) согласованным, сокращенно — согласованным R^+ (R^- или R), если оно сравнимо R^+ (R^- или R) с функцией $j(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$, где $Q = \overline{u(R_1)}$.

Из данного определения вытекает равносильное ему

Предложение 7.2. Компактное решение $q(t)$ дифференциального уравнения (5.107) является согласованным R^+ (R^- или R) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что всякое число $s \in R_1^+$ ($s \in R_1^-$ или $s \in R_1$), удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{|t| < \frac{1}{\delta}, u \in Q} [j(t+s, u), f(t, u)] < \delta,$$

где $Q = \overline{q(R_1)}$, является ε -смещением решения (5.108), т. е.

$$\sup_{|t| < \frac{1}{\delta}} [q(t+s), q(t)] < \varepsilon.$$

Учитывая равенство (5.103) вместе с уравнением (5.107), будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$\dot{u} = F(t)u. \quad (5.109)$$

Определение 7.5. Если $u(R_1) \subset Q = \overline{q(R_1)}$, то дифференциальное

уравнение (5.109) называется уравнением, присоединенным к компактному решению (5.108).

Предложение 7.3 [62]. Компактное решение $q(t)$ уравнения (5.107) является согласованным R тогда и только тогда, когда оно сравнимо R с правой частью присоединенного к $q(t)$ уравнения (5.109).

Рассмотрим множество $\overline{G(R_1, f(t, u))}$ и каждой функции $g(t, u) \in \overline{G(R_1, f(t, u))}$ поставим в соответствие уравнение

$$\dot{u} = g(t, u). \quad (5.110)$$

Определение 7.6. Если $q(t)$ является компактным решением уравнения (5.107), то при $Q = \overline{q(R_1)}$ уравнения (5.110), полученные из (5.107) предельными преобразованиями, называются предельно присоединенными уравнениями к решению (5.108).

Предложение 7.4 [62]. Если функция $f(t, u) \in C(R_1 \times Q, M^*)$ устойчива \mathcal{L} и каждое уравнение вида (5.110) имеет единственное компактное решение, то все эти решения являются согласованными R и устойчивыми \mathcal{L} .

Рассмотрим устойчивую \mathcal{L} функцию $u(t) \in C(R_1, M^*)$, имеющую равномерно непрерывную производную $\dot{u}(t) \in C(R_1, M^*)$, где M^* — гильбертово пространство. Тогда при каждом фиксированном значении $t_0 \in R_1$ норма элемента $u(t_0) \in M^*$ может быть заданной через скалярное произведение $(u(t_0), u(t_0))$ и

$$u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \dots\}, \quad (5.111)$$

$$\dot{u}(t) = \{\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_n(t), \dots\}, \quad (5.112)$$

$$\|u(t)\|^2 = (u(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t), \quad (5.113)$$

$$\|\dot{u}(t)\|^2 = (\dot{u}(t), \dot{u}(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{u}_i^2(t). \quad (5.114)$$

При этом имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = 2(u(t), \dot{u}(t)) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \dot{u}_i(t). \quad (5.115)$$

Предложение 7.5. Если устойчивая \mathcal{L} функция $u(t) \in C(R_1, M^*)$

имеет равномерно непрерывную производную $\dot{u}(t) \in C(R_1, M^*)$ и $\|u(t)\|$ есть непериодическая функция, то движения $G(s, u(t))$, $G(s, \dot{u}(t))$, $G(s, \|u(t)\|)$ и $G(s, \|\dot{u}(t)\|)$ изохронны R .

Действительно, так как функция $u(t)$ устойчива \mathcal{L} , а $\dot{u}(t)$ равномерно непрерывна, то движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \dot{u}(t))$ изохронны R . По условиям данного предложения функция $\|u(t)\|$ — непериодическая функция, а вместе с ней функция $\|\dot{u}(t)\|$ также непериодична. Поэтому отображение (5.113) обратимо, как взаимнооднозначное отображение, причем

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \|u(t)\|^2. \quad (5.116)$$

В силу (5.112) отображение (5.116) имеет непрерывную производную по времени. Следовательно,

$$\dot{\dot{u}}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{grad} \|u(t)\|^2), \quad (5.117)$$

а в силу равенств (5.117) и (5.114)

$$\|\dot{\dot{u}}(t)\|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dt} (\operatorname{grad} \|u(t)\|^2), \frac{d}{dt} (\operatorname{grad} \|u(t)\|^2) \right). \quad (5.118)$$

Так как всякая дифференцируемая функция является непрерывной, то движения $G(s, u(t))$ и $G(s, \|\dot{u}(t)\|)$ изохронны R . Тогда из изохронности R движений $G(s, \|u(t)\|)$ и $G(s, \|\dot{u}(t)\|)$ вытекает доказательство предложения 7.5.

5.8. Обобщенные динамические системы теории движения слоистой Земли

До сих пор была изложена абстрактная часть теории обобщенных динамических систем безотносительно к движению слоистой Земли. Напомним, что анализ предельных режимов вращения Земли и поступательного движения системы G_n проведен на основе энергетических соотношений. При этом функции, определяющие потенциальную и кинетическую энергию вдоль траектории движения, не обладают свойством динамических систем по Биркгофу. В то же время движение, определяющее указанные скалярные характеристики, является динамической системой по Биркгофу. Далее, обобщенные динамические системы возникают естественным образом при рассмотрении закономерностей предельных режимов по-

ступательно-вращательного движения системы G_n . Наглядный пример этому дает уравнение (3.141). Исходя из предельных режимов движения системы G_n , введем следующие обобщенные динамические системы.

Пусть $g(t, q_*)$ — движение, совпадающее с одним из предельных режимов Солнечной системы G_n . Рассмотрим кинетическую энергию

$$T_* [g(t, q_*)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i [\dot{x}_i^2(t, q_*) + \dot{y}_i^2(t, q_*) + \dot{z}_i^2(t, q_*)],$$

слоговую функцию

$$U_* [g(t, q_*)] = G \sum_{1 \leq i < j \leq n} M_i M_j [\dot{x}_i^2(t, q_*) + \dot{x}_j^2(t, q_*) + \dot{z}_i^2(t, q_*)]^{1/2}$$

и полярный момент инерции системы G_n

$$I_* [g(t, q_*)] = \sum_{i=1}^n M_i [\dot{x}_i^2(t, q_*) + \dot{y}_i^2(t, q_*) + \dot{z}_i^2(t, q_*)].$$

Каждая из скалярных характеристик T_* , U_* и I_* движения $g(t, q_*)$ и само движение $g(t, q_*)$ не являются динамической системой по Биркгофу. Поэтому рассмотрим движения $G(s, T_*)$, $G(s, U_*)$ и $G(s, I_*)$, $G(s, g(t, q_*))$. Очевидно, каждое из отображений $G(s, \cdot)$ обладает свойством динамической системы по Биркгофу. Следовательно, они определяют обобщенные динамические системы в смысле данной главы.

Закон сохранения энергии выражается равенством

$$T[g(t, q_*)] - U[g(t, q_*)] = h_*,$$

где h_* — постоянная величина. Поэтому имеет место уравнение Лагранжа — Якоби, которое будет записываться в виде

$$\frac{dI[g(t, q_*)]}{dt} = 2\{T[g(t, q_*)] + h_*\}.$$

Тогда теорию движения слоистой Земли можно строить аналогично общей теории вращения Земли [23] методами обобщенных динамических систем. Соответствующий анализ выполнен в следующей главе.

Глава 6

О ВОЗВРАЩАЕМОСТИ ДВИЖЕНИЯ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛИ

Предельный режим вращательного движения слоистой Земли, обладающей как абсолютно твердой, так и упругой литосферой, совпадает с ее перманентным вращением около оси наибольшего главного центрального момента инерции, причем этот режим единствен и устойчив. Соответствующие предельные режимы поступательного движения Солнечной системы, устойчивой по Лагранжу, представляют собой почти периодические движения. Кроме того, Земля с выходом на предельный режим движения как бы затвердевает. Указанные факты, представляющие выводы предшествующих глав, приводят к необходимости исследования закономерностей поступательно-вращательного движения Солнечной системы с абсолютно твердой Землей в постановке общей теории вращения Земли [23]. В свою очередь это приводит к исследованию эволюции движения гравитирующих систем. Поэтому в данной главе, следуя [24, 71], а также [23], излагается теория движения гравитирующих систем, дополненная новыми фактами.

6.1. Обоснование метода анализа возвращаемости движения гравитирующей системы, устойчивой по Лагранжу

Рассмотрим механическую систему n тел G_n^0 , рассматриваемых как материальные точки O_1, O_2, \dots, O_n с массами M_1, M_2, \dots, M_n , взаимодействующие между собой по закону тяготения Ньютона. Система G_n^0 называется гравитирующей и имеет силовую функцию [18, 23]:

$$U^0 = G \sum_{1 \leq i < j \leq n} M_i M_j / r_{ij}, \quad (6.1)$$

где $r_{ij} = |O_i O_j|$ — расстояние между телами O_i и O_j .

Отметим, что модель G_n^0 гравитирующей системы приемлема до тех пор, пока взаимные расстояния r_{ij} между телами O_i и O_j велики по сравнению с их линейными размерами, т. е. тела O_i можно принять за материальную точку [18]. Таким образом, выбор модели G_n^0 гравитирующей системы уже основан на условиях, более жестких, чем неравенства (2.15).

Введем прямоугольную декартову систему координат $O^* \xi \eta \zeta$, начало O^* и координатная плоскость $O^* \xi \eta$ которой совпадают с центром масс системы G_n^0 и неизменяемой плоскостью Лапласа. Пусть ξ_i, η_i, ζ_i — координаты точки O_i , где $i = 1, 2, \dots, n$.

Движению системы G_n^0 описывается системой $6n$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= u_i, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}; \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}; \\ \frac{d\zeta_i}{dt} &= w_i, \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{1}{M_i} \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \end{aligned} \quad (6.2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi_i(0) &= \xi_{i0}, \quad u_i(0) = u_{i0}; \\ \eta_i(0) &= \eta_{i0}, \quad v_i(0) = v_{i0}; \\ \zeta_i(0) &= \zeta_{i0}, \quad w_i(0) = w_{i0}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $t=0$ — начало отсчета времени.

Задача (6.2) допускает десять первых интегралов, из которых шесть в силу выбора системы отсчета $O^* \xi \eta \zeta$ вырождаются в инвариантные соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\xi}_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i u_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_i \dot{\eta}_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i v_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_i \dot{\zeta}_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i w_i = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Инвариантные соотношения (6.4) выполняются вдоль каждого решения уравнений (6.2).

Запишем интегралы площадей или моментов количества движения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i(\gamma_i \dot{x}_i - \zeta_i v_i) &= a_1; \\ \sum_{i=1}^n M_i(\zeta_i \dot{u}_i - \xi_i \dot{x}_i) &= b_1; \\ \sum_{i=1}^n M_i(\xi_i \dot{v}_i - \gamma_i \dot{u}_i) &= c_1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь a, b, c — постоянные площадей, значения которых определяются по начальным условиям (6.3).

Интегралы (6.5) показывают, что вектор $\vec{x} = \{a^0, b^0, c^0\}$ и плоскость L , проходящая через центр масс O^* и перпендикулярная вектору \vec{x} , остаются неизменными в пространстве в течение всего времени движения системы G_n^0 . Плоскость L описывается уравнением

$$a^0 \xi + b^0 \eta + c^0 \zeta = 0$$

и называется *неизменяемой (инвариантной) плоскостью Лапласа*. Запишем выражение интеграла энергии:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) - U^0 = h^0. \quad (6.6)$$

Здесь h^0 — *постоянная энергии*, ее значения также определяются начальными условиями (6.3).

Первые интегралы (6.5) выражают закон сохранения момента количества движения механической системы G_n^0 , а интеграл (6.6) — закон сохранения ее полной энергии.

Введем $6n$ -мерные вектор и вектор-функцию

$$\begin{aligned} q &= \{\xi_{10}, \eta_{10}, \dots, \xi_{n0}, u_{10}, v_{10}, \dots, w_{n0}\}; \\ g(t, q) &= \{\xi_1(t, q), \eta_1(t, q), \dots, \xi_n(t, q), u_1(t, q), \\ & v_1(t, q), \dots, w_n(t, q)\}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

называемые начальным состоянием и движением системы G_n^0 . При этом полярный момент инерции и кинетическая энергия системы G_n^0 вдоль траектории ее движения $g(t, q)$ имеют вид

$$I[g(t, q)] = \sum_{i=1}^n M_i \dot{u}_i^2(t, q) + \eta_i^2(t, q) + \zeta_i^2(t, q); \quad (6.8)$$

$$T[g(t, q)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i [u_i^2(t, q) + v_i^2(t, q) + \omega_i^2(t, q)]$$

и связаны между собой уравнением Лагранжа—Якоби [18, 23]:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(T + h^0). \quad (6.9)$$

Считая безразмерными компоненты вектора-функции $g(t, q)$, вводим функцию

$$Q[g(t, q)] = I[g(t, q)] + 2 \cdot T[q(t, q)]. \quad (6.10)$$

Значение функции $Q[g(t, q)]$ в каждый момент времени t_0 совпадает с евклидовой нормой вектора-функции $g(t, q)$, т. е.

$$\|g(t_0, q)\| = Q[g(t_0, q)]. \quad (6.11)$$

Равенство (6.11) дает информацию об изменении евклидовой длины вектора-функции $g(t, q)$. Поэтому возникает естественный вопрос о взаимном сравнении по возвращаемости движений $G(s, g(t, q))$ и $G(s, Q[g(t, q)])$ обобщенных динамических систем $G(s, \cdot)$.

Запишем выражение, вытекающее из уравнения (6.9) и представления (6.10):

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + I = Q + 2h^0. \quad (6.12)$$

Отметим некоторые предложения, доказательство которых можно найти в [23, 71].

Предложение 6.1. Движение $g(t, q)$ системы G_n^0 определено для всех $t \in R_1$, оно единственно и однопараметрическое семейство отображений $g(t, \cdot)$ множества $g(R_1, q)$ на себя образует динамическую систему, порождающую это движение, тогда и только тогда, когда выполнено условие несоударяемости (2.15).

Отметим следующие свойства силовой функции U , определяемые также условием (2.15).

Предложение 6.2. В каждый момент времени $t \in R_1$ силовая функция U системы G_n^0 конечна, непрерывна и однозначна как функция переменных (ξ_i, η_i, ζ_i) ($i=1, 2, \dots, n$) в каждой точке $p \in \overline{g(R_1, q)}$ замыкания траектории движения $g(t, q)$.

Предложение 6.3. В каждый момент времени $t \in R_1$ силовая функция U системы G_n^0 сколь угодно раз дифференцируема по любой из ее переменных ξ_i, η_i, ζ_i ($i=1, 2, \dots, n$); эти частные производные конечны, непрерывны и однозначны как функции всех своих переменных в каждой точке $p \in \overline{g(R_1, q)}$ замыкания траектории движения $g(t, q)$.

В небесной механике гравитирующую систему принято называть устойчивой по Лагранжу, если тела системы во все время их движения оставались и остаются внутри сферы конечного радиуса, имеющей центр в точке O^* [18]. В этом смысле устойчивость по Лагранжу совпадает с устойчивостью по Хиллу [5]. Это совпадение можно объяснить следующим образом. Аксиомы Ньютона (классической механики) применимы для исследования движений со скоростями малыми в сравнении со скоростью света c_0 . Поэтому кинетическая энергия удовлетворяет неравенству

$$\sup_{t \in R_1} T[g(t, q)] < M^* c_0^2 / 2, \quad (6.13)$$

где $M^* = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$. Тогда согласно интегралу энергии (6.6) будет выполнено

$$\sup_{t \in R_1} U^0[g(t, q)] < |h^0| + M^* c_0^2 / 2. \quad (6.14)$$

Неравенство (6.14) в соответствии с видом (6.1) силовой функции дает

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{ \inf_{t \in R_1} U_i[g(t, q)] \} = r^*, \quad r^* > 0. \quad (6.15)$$

Отсюда и вытекает, что условие (6.15) приводит к совпадению понятий устойчивости по Лагранжу и Хиллу. Однако, если отбросить ограниченность скоростей движения, выражаемую неравенством (6.13), то эти понятия устойчивости не совпадают. В связи с этим сформулируем

Предложение 6.4. Движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво по Лагранжу тогда и только тогда, когда функция Q ограничена вдоль его траектории $g(R_1, q)$, т. е.

$$\sup_{t \in R_1} Q[g(t, q)] = Q^*, \quad Q^* < \infty. \quad (6.16)$$

В силу определения (6.10) функции $Q[g(t, q)]$ имеет место

Предложение 6.5. Движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво по Лагранжу тогда и только тогда, когда функции $I[g(t, q)]$ и $T[g(t, q)]$ ограничены вдоль его траектории $g(R_1, q)$, т. е.

$$\sup_{t \in R_1} I[g(t, q)] = I^*, \quad I^* < \infty; \quad (6.17)$$

$$\sup_{t \in R_1} T[g(t, q)] = T^*, \quad T^* < \infty.$$

Это предложение обратимо.

Предложение 6.6. Движение $g(t, q)$ системы G_n^0 неустойчиво по Лагранжу тогда и только тогда, когда не выполняется хотя бы одно из условий (6.17).

Отметим следующие нелокальные свойства кинетической энергии, рассматриваемой как функция времени вдоль траектории $g(R_1, q)$ движения системы G_n^0 .

Предложение 6.7. Если движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво по Лагранжу, то

1) постоянная энергии h отрицательна, т. е. $h < 0$;

2) существует λ -последовательность моментов времени $\{t_n\}$, при которых кинетическая энергия принимает значение h , т. е.

$$T[g(t_n, q)] = h; \quad (6.18)$$

3) для каждого $\varepsilon > 0$ множество вида

$$R_\varepsilon(t) = \{t \in R_1^- \mid |T[g(t, q)] + h| < \varepsilon\} \quad (6.19)$$

относительно плотно на R_1 ;

4) функция $T[g(t, q)]$ не является постоянной, а функция $T[g(t, q)] + h$ — знакопостоянной.

Предложение 6.8. Если движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво по Лагранжу, то его основные механические характеристики — функции $I[g(t, q)]$, $T[g(t, q)]$ и $Q[g(t, q)]$ — изохронны RR .

Доказательство изохронности функций $I[g(t, q)]$ и $T[g(t, q)]$ основано на уравнении Лагранжа—Якоби, а изохронности этих функций и функции $Q[g(t, q)]$ — на уравнении (6.12).

Следующие факты сформулируем с доказательствами.

Предложение 6.9. Движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво по Лагранжу тогда и только тогда, когда кинетическая энергия

$T[g(t, q)]$ ограничена на всей действительной оси R_1 , а функция $I[g(t, q)]$ сравнима RR с $T[g(t, q)]$.

В силу предложений 6.5 и 6.8 необходимость предложения 6.9 очевидна. Пусть выполнено второе из условий (6.17). При этом функция $T[g(t, q)]$, являясь ограниченной и равномерно непрерывной на R_1 , будет устойчивой по Лагранжу. Тогда устойчива по Лагранжу и функция $I[g(t, q)]$. Поэтому имеет место первое из равенств (6.17). Следовательно, движение $g(t, q)$ будет устойчивым по Лагранжу. Предложение доказано.

Отсюда, учитывая предложение 6.8, получаем

Предложение 6.10. Если кинетическая энергия $T[g(t, q)]$ системы G_n^0 ограничена как функция времени $t \in R_1$, то основные механические характеристики ее движения — функции $I[g(t, q)]$, $T[g(t, q)]$ и $Q[g(t, q)]$ — изохронны RR тогда и только тогда, когда функция $T[g(t, q)]$ сравнима RR с функцией $I[g(t, q)]$.

Сформулированные в предложениях 6.4—6.10 утверждения показывают, что исследования проблемы устойчивости по Лагранжу движения гравитирующей системы эквивалентны исследованиям возвращаемости основных механических характеристик этого движения. Но если учесть, что эти характеристики представлены скалярными функциями, то станет очевидным преимущество такого подхода.

Предложение 6.11. Если движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво \mathcal{T} и \mathcal{P} , то движение $g(t, q)$ устойчиво по Лагранжу.

Доказательство. Согласно предложению 6.10 функции $I[g(t, q)]$ и $T[g(t, q)]$ изохронны RR . Следовательно, они устойчивы \mathcal{P} и, являясь устойчивыми \mathcal{T} , будут устойчивыми \mathcal{L} . Иначе говоря, имеет место оценка (6.17). А это эквивалентно устойчивости по Лагранжу движения $g(t, q)$. Предложение доказано.

Этот факт свидетельствует о необходимости устойчивости по Лагранжу движения системы G_n^0 для его устойчивости \mathcal{T} и устойчивости \mathcal{P} одновременно.

Рассмотрим отображения $\bar{\Delta}_Q, \bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_T$ множества $\overline{G(R_1, g(t, q))}$ в множество $\overline{G(R_1, Q[g(t, q)])}$, $\overline{G(R_1, I[g(t, q)])}$ и $\overline{G(R_1, T[g(t, q)])}$, действующие по законам

$$\bar{\Delta}_Q [g(t+s, p)] = Q(t+s, g, p), \quad (6.20)$$

$$\bar{\Delta}_I [g(t+s, p)] = I(t+s, g, p), \quad (6.21)$$

$$\bar{\Delta}_T [g(t+s, p)] = T(t+s, g, p) \quad (6.22)$$

для всех $s \in R_1$ и $p \in \overline{g(R_1, q)}$.

Отображения (6.20)–(6.22) непрерывны на $\overline{G(R_1, g(t, q))}$. Следовательно, основные характеристики движения сравнимы R с $g(t, q)$, т. е. в смысле возвращаемости основные характеристики движения лучше (во всяком случае, не хуже) самого движения. Итак, установлено

Предложение 6.12. Основные характеристики движения системы G_n сравнимы R с движением $g(t, q)$.

Более того, отображения (6.20)–(6.22) обладают следующими свойствами.

Предложение 6.13. Отображения $\overline{\Delta}_Q, \overline{\Delta}_T, \overline{\Delta}_T$ однозначны, равномерно непрерывны и замкнуты, а их сужения Δ_Q, Δ_T и Δ_T на множество $\overline{G(R_1, g(t, q))}$ также однозначны и равномерно непрерывны.

Отметим следующий факт, являющийся следствием предложения 6.8 главы 5.

Предложение 6.14. Если движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво по Лагранжу, а кинетическая энергия $T[g(t, q)]$ неперидична по t , то отображение Δ_Q является непрерывно обратимым, т. е. гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть условия предложения 6.14 выполнены. Тогда имеет место предложение 6.8, согласно которому каждая из функций $I[g(t, q)]$ и $Q[g(t, q)]$ неперидична по t . Поэтому справедливо предложение 6.8 главы 5, из которого вытекает однозначная обратимость отображения Δ_Q . Это отображение обозначим через Δ_Q^{-1} . Очевидно, оно действует из множества $G(R_1, Q[g(t, q)])$ на множество $G(R_1, g(t, q))$ и действует по правилам

$$\Delta_Q^{-1}\{Q[g(t+s, q)]\} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} Q[g(t+s, q)] = g(t+s, q) \quad (6.23)$$

для каждого фиксированного значения $s \in R_1$.

Заметим, что получение уравнений движения (6.2) обычно сводится к последовательному применению двух линейных операторов. А именно, сначала строится

$$\operatorname{grad} T = \{M_1 \dot{u}_1, M_1 \dot{v}_1, \dots, M_n \dot{w}_n\}, \quad (6.24)$$

а затем полученная вектор функция (6.24) дифференцируется по времени:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{grad} T = \{M_1 \ddot{u}_1, M_1 \ddot{v}_1, \dots, M_n \ddot{w}_n\} = \operatorname{grad} U^0. \quad (6.25)$$

Каждый из операторов grad и $\frac{d}{dt}$ непрерывен хотя бы в достаточно

малой окрестности начального состояния q движения $g(t, q)$. Следовательно, суперпозиция этих операторов, определяющая уравнения (6.25), также непрерывна. Тогда отображение Δ_0^{-1} , совпадающее с оператором (6.24) и его интегралом по времени, непрерывно хотя при $t=0$. А это согласно предложению 6.9 главы 5 и доказывает предложение 6.14.

Отсюда как следствие предложений 6.9 и 6.11 главы 5 получим

Предложение 6.15. Если движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво \mathcal{L}^* , а кинетическая энергия неперпериодична по t , но устойчива \mathcal{H} , то движение $g(t, q)$ устойчиво как по Лагранжу, так и по Пуассону.

В свою очередь, сформулированное предложение дает

Предложение 6.16. Пусть движение $g(t, q)$ системы G_n^0 устойчиво \mathcal{L}^* , а кинетическая энергия $T[g(t, q)]$ неперпериодична по t . Движение $g(t, q)$ принадлежит классу возвращаемости B_i ($i=2, 3, \dots, 10$) тогда и только тогда, когда этому же классу B_i принадлежит движение $G(s, T[g(t, q)])$.

Итак, получен энергетический критерий возвращаемости движения гравитирующей системы. Учитывая, что каждое возвращаемое и устойчивое по Лагранжу движение гравитирующей системы обладает свойством минимальности по Биркгофу, получаем, что наиболее общим классом возвращаемости движения гравитирующей системы является класс рекуррентных движений. Следовательно, самоорганизация движения гравитирующей системы будет направлена к минимальному по Биркгофу энергетическому классу движений. По-видимому, это и является одним из универсальных принципов природы, по которым отбираются движения.

Следующий шаг в этом направлении состоит в распространении результатов данного раздела на более общие модели гравитирующей системы.

6.2. Критерий возвращаемости поступательно-вращательного движения гравитирующей системы, устойчивой по Лагранжу

Рассмотрим механическую систему n тел G_n^1 , состоящую из материальных точек O_1, O_2, \dots, O_{n-1} , с массами M_1, M_2, \dots, M_{n-1} и одного абсолютно твердого тела O_n с массой M_n . Тела O_i взаимодействуют между собой по закону тяготения Ньютона. Система G_n^1 называется также гравитирующей и имеет силовую функцию [18, 23]:

$$U^1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{ij}^1, \quad (6.26)$$

где

$$U_{ij}^1 = \begin{cases} GM_i M_j / r_{ij} & i \leq i < j \leq n-1 \\ \frac{GM_i}{r_{in}} \left\{ M_n - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \left(\frac{a^*}{r_{in}} \right)^m P_m(\cos \beta_i) J_m + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(\frac{a^*}{r_{in}} \right)^m P_{mk}(\cos \beta_i) [C_{mk} \cos ku_i + S_{mk} \sin ku_i] \right\} & i \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (6.27)$$

для всех $i \neq j$.

Ряд (6.27) сходится абсолютно и равномерно вне шара с центром в центре масс тела O_n и радиуса a^* , где a^* — радиус минимальной сферы, содержащей тело O_n . Оценка остатка ряда (6.27) после его членов с номером $m = m^*$ такова [18, 23]:

$$|U_{in}^1(m^*)| \leq G \frac{M_i M_n}{r_{in}} \left(\frac{a^*}{r_{in}} \right)^{m^*} \left(1 - \frac{a^*}{r_{in}} \right)^{-1}. \quad (6.28)$$

Кроме того, положим, что

$$|J_m| \leq \frac{1}{m^2}, \quad |C_{mk}| \leq \frac{1}{m^2}, \quad |S_{mk}| \leq \frac{1}{m^2}. \quad (6.29)$$

Оценки (6.28) и (6.29) имеют место для геопотенциала и его сферических гармоник [23, 42].

Модель G_n^1 гравитирующей системы приемлема до тех пор, пока взаимные расстояния r_{ij} между телами O_i и O_j велики по сравнению с их линейными размерами. Поэтому неравенства (2.15) уже выполнены [23].

Введем прямоугольную декартову систему координат $O^* \xi \eta \zeta$, начало O^* и координатная плоскость $O^* \xi \eta$ которой совпадают с центром масс системы G_n^1 и неизменяемой плоскостью Лапласа. Пусть (ξ_i, η_i, ζ_i) — координаты точки O_i относительно системы отсчета $O^* \xi \eta \zeta$, где $i = 1, 2, \dots, n$, а $K, \bar{\psi}, \bar{\Theta}, \psi, \varphi, \Theta$ — переменные Андуайе. При этом K — модуль вектора \vec{K} кинетического момента вращения тела O_n ; $\bar{\psi}$ и $\bar{\Theta}$ — углы прецессии и нутации вектора \vec{K} ; ψ, φ, Θ — углы Эйлера, определяющие взаиморасположение квазикингеновой системы отсчета и системы главных центральных осей инерции $Oxyz$ тела O_n . Эти переменные введены в соответствии с правилами [23].

Движение системы G_n^1 описывается системой би дифференциальных уравнений (6.2) с начальными условиями (6.3) и системой уравнений [18, 23]:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{K \sin \Theta} \frac{\partial U}{\partial \Theta}; \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{1}{K \sin \Theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \bar{\Theta} - \frac{\partial U}{\partial \varphi'} \right); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= K \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{K} \left(\frac{\partial U}{\partial \Theta} \operatorname{ctg} \bar{\Theta} + \frac{\partial U}{\partial \Theta'} \operatorname{ctg} \Theta \right); \\ \frac{d\varphi'}{dt} &= K \cos \Theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{K \sin \Theta} \frac{\partial U}{\partial \Theta}; \\ \frac{d\Theta'}{dt} &= K \sin \varphi \cos \psi \sin \Theta \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{1}{K \sin \Theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi'} \cos \Theta \right) \end{aligned} \quad (6.30)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} K(t_0) &= K_0; \quad \bar{\psi}(t_0) = \bar{\psi}_0; \quad \bar{\Theta}(t_0) = \bar{\Theta}_0; \\ \psi(t_0) &= \psi_0; \quad \varphi(t_0) = \varphi_0; \quad \Theta(t_0) = \Theta_0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Дифференциальные уравнения (6.2) и (6.30) имеют десять первых интегралов, из которых первые шесть становятся инвариантными соотношениями (6.4). Интегралы площадей (моментов количества движения) и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i (x_i \dot{z}_i - v_i z_i) + K \sin \bar{\psi} \sin \bar{\Theta} &= a; \\ \sum_{i=1}^n M_i (u_i \dot{z}_i - w_i z_i) + K \cos \bar{\psi} \sin \bar{\Theta} &= b; \\ \sum_{i=1}^n M_i (v_i \dot{z}_i - u_i z_i) + K \cos \bar{\Theta} &= c, \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - U = h_1. \quad (6.33)$$

Значения постоянных a , b , c и h_1 , входящих в интегралы (6.32) и (6.33), определяются начальными условиями (6.3) и (6.31). Вводя обозначения

$$f_x = a - \sum_{i=1}^n M_i (w_i \tau_i - v_i \xi_i),$$

$$f_y = b - \sum_{i=1}^n M_i (u_i \tau_i - w_i \eta_i),$$

$$f_z = c - \sum_{i=1}^n M_i (v_i \xi_i - u_i \tau_i),$$

из интегралов площадей получаем выражения для переменных Андавы:

$$K = [f_x^2 + f_y^2 + f_z^2]^{1/2},$$

$$\psi = -\arctg(f_x \cdot f_z^{-1}), \quad \Theta = \arccos(f_z / K^{-1}). \quad (6.34)$$

В правых частях выражений (6.34) фигурируют лишь декартовы переменные $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n$. Выразим углы Эйлера ψ, φ, Θ через эти декартовы переменные и проекции p, q, r вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости вращения тела O_n на координатные оси системы отсчета $Oxyz$. Для этого рассмотрим проекции вектора \vec{K} на координатные оси системы отсчета $Oxyz$:

$$K_x = Ap; \quad K_y = Bq; \quad K_z = Cr \quad (6.35)$$

и, следовательно,

$$\cos(Ox, \vec{K}) = Ap/K; \quad \cos(Oy, \vec{K}) = Bq/K; \quad \cos(Oz, \vec{K}) = Cr/K, \quad (6.36)$$

где направляющие косинусы вектора \vec{K} имеют вид

$$\cos(Ox, \vec{K}) = \sin \psi \sin \Theta; \quad \cos(Oy, \vec{K}) = \cos \varphi \sin \Theta; \quad (6.37)$$

$$\cos(Oz, \vec{K}) = \cos \Theta.$$

Сравнивая выражения (6.36) и (6.37), получаем

$$\varphi = \arctg(Ap/Bq); \quad \Theta = \arccos(Cr/K). \quad (6.38)$$

Запишем кинематические уравнения Эйлера в угловых переменных Андуайе:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{d\psi}{dt} \sin \varphi \sin \Theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cos (Ox, O^*\zeta) + \\
 &\quad + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \cos (Ox, \bar{e}_1); \\
 q &= \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi \sin \Theta - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cos (Oy, O^*\zeta) + \\
 &\quad + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \cos (Oy, \bar{e}_1);
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} \cos \Theta + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cos (Oz, O^*\zeta) + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \cos (Oz, \bar{e}_1),$$

где \bar{e}_1 — вектор, ортогональный вектору \bar{K} и координатной оси $O^*\zeta$. Уравнения (6.39) соответственно умножим на $\sin \varphi \cdot \sin \Theta$, $\cos \varphi \cdot \sin \Theta$ и $\cos \Theta$, а затем их сложим.

Тогда

$$\begin{aligned}
 p \sin \varphi \cdot \sin \Theta + q \cos \varphi \cdot \sin \Theta + r \cos \Theta = \\
 = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cos \Theta + \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cos \bar{\Theta}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dt} = p \sin \varphi \cdot \sin \Theta + q \cos \varphi \sin \Theta + r \cos \Theta - \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cos \bar{\Theta} = \\
 = \frac{d\psi}{dt} \cos \bar{\Theta} = \Psi(p, q, r, \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, u_1, v_1, \dots, w_n).
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Интегрируя выражение (6.40), будем иметь

$$\psi = \Psi(p, q, r, \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, u_1, v_1, \dots, w_n). \tag{6.41}$$

Запишем следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\gamma}}{dt} = K \cos \Theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) = \\
 = \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \cdot \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta} \cdot \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{\sin \Theta} \sin \varphi; \\
 \frac{d\bar{\theta}}{dt} = K \sin \varphi \cos \varphi \sin \Theta \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) = -\frac{d\bar{\theta}}{dt} \cos \varphi =
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

$$-\frac{d\bar{\psi}}{dt} \sin \bar{\Theta} \sin \psi.$$

Используя уравнения (6.42), будем иметь следующее выражение для правой части равенства (6.41):

$$\begin{aligned} \Psi = & -\operatorname{arctg} \left\{ \left[\frac{d\bar{\psi}}{dt} - K \cos \bar{\Theta} \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \bar{\psi}}{A} - \frac{\cos^2 \bar{\psi}}{B} \right) \right] \times \right. \\ & \times \frac{d\bar{\Theta}}{dt} + \left[\frac{d\bar{\Theta}}{dt} - K \sin \bar{\psi} \cdot \cos \bar{\psi} \cdot \sin \bar{\Theta} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \right] \times \\ & \times \frac{d\bar{\psi}}{dt} \cdot \frac{\sin \bar{\Theta}}{\sin \bar{\psi}} \left. \right\} \left\{ \left[\frac{d\bar{\psi}}{dt} - K \cos \bar{\Theta} \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \bar{\psi}}{A} - \frac{\cos^2 \bar{\psi}}{B} \right) \right] \times \right. \\ & \times \frac{d\bar{\psi}}{dt} \sin \bar{\Theta} - \left[\frac{d\bar{\Theta}}{dt} - K \sin \bar{\psi} \cdot \cos \bar{\psi} \cdot \sin \bar{\Theta} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \right] \times \\ & \left. \left. \times \frac{d\bar{\Theta}}{dt} \cdot \frac{1}{\sin \bar{\Theta}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Итак, выражения (6.34), (6.38) и (6.43) определяют переменные Андуайе как функции неизвестных

$$\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, u_1, v_1, \dots, w_n, p, q, r. \quad (6.44)$$

Переменные (6.44) и уравнения движения системы G_n^1 в этих переменных назовем основными. Введем $(6n+3)$ -мерный вектор и нектор-функцию

$$\begin{aligned} q^* = & \{ \xi_{10}, \eta_{10}, \dots, \xi_{n0}, u_{10}, v_{10}, \dots, w_{n0}, p_0, q_0, r_0 \}, \\ g(t, q^*) = & \{ \xi_1(t, q^*), \eta_1(t, q^*), \dots, \xi_n(t, q^*), u_1(t, q^*), \\ & v_1(t, q^*), \dots, w_n(t, q^*), p(t, q^*), q(t, q^*), r(t, q^*) \}. \end{aligned}$$

Справедливо

Предложение 2.1. Движение $g_1(t, q^*)$ системы G_n^1 устойчиво по Лагранжу тогда и только тогда, когда оно устойчиво по Лагранжу относительно переменных $g(t, q^*)$.

Необходимость предложения 2.1 очевидна, а достаточность следует из интеграла энергии (6.33).

Следует отметить, что движение системы G_n^1 , будучи устойчивым по Лагранжу в основных переменных, не является устойчивым по Лагранжу по отношению к переменным $g(t, q^*)$ и переменным Андуайе (или углам Эйлера).

С учетом первых интегралов и выражений (6.34), (6.38), (6.43) нетрудно доказать

Предложение 2.2. Движение $g_1(t, q^*)$ системы G_n^1 принадлежит классу возвращаемости B_l ($l=1, 2, \dots, 10$) тогда и только тогда, когда этому же классу B_l принадлежит движение $g(t, q)$, иными словами, движения $g_1(t, q^*)$ и $g(t, q)$ равномерно изохронны.

Результаты предыдущего раздела справедливы и по отношению к движению системы G_n^1 . Их доказательство существенно использует следующее свойство силовой функции тела O_n [23].

Предложение 2.3. Внешний ньютоновский потенциал W тела O_n при условии (6.28) обладает свойством, что для каждого $\epsilon > 0$ существует конечное число материальных точек A_1, A_2, \dots, A_l , количество l которых зависит от данного ϵ , и таких, что точки A_i сосредоточены и фиксированы на поверхности сферы S_{a^*} радиуса a^* с центром в точке O и их внешний ньютоновский потенциал W_l вне сферы S_{a^*} аппроксимирует W с точностью до ϵ . При этом сумма масс точек A_i совпадает с массой тела O_n и точки O_i можно расположить так, чтобы сумма первых l членов ряда (6.27) совпала с потенциалом W_l .

Условие жесткого закрепления точек A_i выражается равенством

$$r(A_i, A_j) = b_{ij}, \quad b_{ij} = \text{const} \quad (6.45)$$

Кинематические условия (6.45), представляя собой аналитические голономные связи, порождают силы реакции, не совершающие работы. Следовательно, движение системы G_n материальных точек $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, A_1, A_2, \dots, A_l$ с условиями (6.41) имеет интеграл энергии. Тогда имеет место уравнение Лагранжа—Якоби и будет справедливым весь последующий анализ предыдущего раздела.

Итак, все результаты первого раздела справедливы и переносятся на систему G_n^1 .

Пусть тело O_n совершает перманентное вращение около оси его наибольшего главного центрального момента инерции Oz . Это возможно только и только в том случае, когда главный момент всех приложенных к телу O_n внешних сил относительно его центра масс O равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial L^1}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{\partial L^1}{\partial \dot{\psi}} = 0; \quad \frac{\partial L^1}{\partial \dot{\gamma}} = 0; \quad \frac{\partial L^1}{\partial \dot{\delta}} = 0; \quad \frac{\partial L^1}{\partial \dot{\eta}} = 0. \quad (6.46)$$

При условии (6.46) имеем

$$K = K^*; K^* = \text{const}; \bar{\psi} = 0; \bar{\Theta} = 0; \psi = 0; \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 t, \Theta = 0. \quad (6.47)$$

Учитывая (6.47) и свойства функции U_1 , получаем

Предложение 2.4. Если движение $g_1(t, q^*)$ системы G_1^1 устойчиво по Лагранжу, а тело O_n совершает перманентное вращение около оси Oz , то движение $g_1(t, q^*)$ почти периодически.

Доказательство предложения 2.4 тривиально следует из теоремы Бохнера [49] и предложения 7.5 пятой главы.

Итак, перманентное вращение твердого тела гравитирующей системы возможно лишь вдоль траектории равномерно возвращаемых движений и имеет место энергетический критерий возвращаемости. Движение слонстой Земли, эволюционируя, выходит на предельный режим, совпадающий с ее перманентным вращением. Тогда вся Солнечная система эволюционирует так, что ее движение становится почти периодическим, кинетическая энергия — минимальной по Биркгофу и имеет место условие экстремальности (6.46).

Изложим некоторые сведения из нелинейной механики, необходимые для рассмотрения устойчивости предельных режимов движения Солнечной системы.

6.3. Согласованность решений линейных и нелинейных систем.

Устойчивость движения в банаховых пространствах

Пусть D — банахово пространство, $\|\cdot\|$ — норма, x — некоторый его элемент и $X(t, x)$ — оператор, непрерывно отображающий D на себя при каждом фиксированном значении параметра $t \in R_1$ (t — время). Зафиксировав элемент $x \in D$, положим $y(t) = X(t, x)$. Очевидно, $y(t) \in C(R_1, D)$. При этом можно ввести понятие производной $\dot{y}(t_0)$ в точке $t = t_0$ функции $y(t)$ по правилу

$$\dot{y}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},$$

если указанный предел существует в смысле сходимости по метрике d^D , согласованной с нормой пространства D .

Указанное определение корректно и позволяет рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = X(t, x) \quad (6.48)$$

или уравнение вида

$$\dot{x} = A(t)x + X(t, x), \quad (6.49)$$

где $A(t)$ — линейный оператор с начальным условием

$$x|_{t=0} = x_0. \quad (6.50)$$

Задача (6.48), (6.50) и интегральное уравнение

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t X[x(s, x_0), s] ds \quad (6.51)$$

эквивалентны [3]. Известно также, что решение задачи Коши (6.48), (6.50) можно получить по формуле

$$x(t, x_0) = W(t, 0) x_0 + \int_0^t W(t, s) X[x(s, x_0), s] ds, \quad (6.52)$$

где $W(t, \cdot)$ — оператор Коши, однозначно определяемый оператором $A(t)$.

Оператор Коши обладает свойством

$$W(t, s) \cdot W(s, \tau) = W(t, \tau),$$

а если система (6.49) автономна, то он имеет вид

$$W(t, s) = W(t-s),$$

т. е. будет оператором сдвига вдоль траектории движения $x(t, x_0)$.

В D выделим некоторый компакт D' и рассмотрим сужение $\tilde{X}(t, x)$ оператора $X(t, x)$ на $R_1 \times D'$. Очевидно, оператор $\tilde{X}(t, x)$, как сужение непрерывного оператора, принадлежит пространству $C(R_1 \times D', D)$ с метрикой

$$d(j, g) = \sup_{t > 0} \min \left\{ \sup_{\substack{t_1 \leq t \\ x \in D'}} \|j(t, x) - g(t, x)\|, \frac{1}{t} \right\}. \quad (6.53)$$

Обозначим через $G(R_1, \tilde{X}(t, x))$ траекторию движения $G(s, \tilde{X}(t, x))$ и через $\overline{G(R_1, \tilde{X}(t, x))}$ — ее замыкание по метрике (6.53).

Пусть $Y(t, x)$ — некоторый элемент множества $\overline{G(R_1, \tilde{X}(t, x))}$. Наряду с (6.48) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Y(t, x). \quad (6.54)$$

Решение $x(t, x_0)$ задачи (6.48), (6.50) называется равномерно согласованным, если оно равномерно сравнимо с сужением оператора $X(t, x)$ на множестве $R_1 \times D'$, где $D' = \{x(t, x_0) | t \in R_1\}$ — замыкание области значений этого решения в пространстве D .

Понятие равномерно согласованного решения введено в [62] и доказано следующее утверждение: если множество $\bar{G}(R_1, X(t, x))$ компактно в $\bar{C}(R_1 \times D', D)$ и каждое уравнение вида (4.37) имеет компактное решение, то все эти решения являются равномерно согласованными и устойчивыми по Лагранжу.

Сформулированное утверждение было использовано нами при доказательстве существования предельных режимов поступательного движения Солнечной системы, изохронных с предельным режимом вращения Земли.

Рассмотрим уравнение (6.49) с постоянной линейной частью, полагая, что функция $X(t, x^0) \in C(R_1 \times D, D)$. Для систем вида (6.49) справедлива теорема [62]: если спектр оператора A не пересекается с мнимой осью, а функция $X(t, x)$ равномерно непрерывна по t , при каждом фиксированном $x = x_0$ область ее значений $\{X(t, x_0) | t \in R_1\}$ предкомпактна в D и удовлетворяет условию Липшица, то уравнение (6.49) имеет единственное устойчивое по Лагранжу равномерно согласованное решение $x(t, x_0)$, удовлетворяющее условию (6.28).

Перейдем к вопросам устойчивости решений линейных и нелинейных систем в банаховых пространствах. Последние являются наиболее общими пространствами, в которых можно задавать и исследовать разрешимость дифференциальных уравнений. Поэтому устойчивость движений рассмотрим также в банаховых пространствах.

Наряду с (6.48) рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = X(t, x) + Y(t, x), \quad (6.55)$$

где $Y(t, x)$ — также непрерывный оператор, переводящий D в себя.

Положение равновесия $x = 0$ называется экспоненциально устойчивым в малом, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что любое решение $x(t, x_0)$ уравнения (6.48) с начальным условием $\|x_0\| < \varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, x_0)\| \leq C^* \exp(-\lambda(t-t_0)) \cdot \|x_0\| \quad (6.56)$$

для всех $t \geq 0$, где положительные постоянные C^* и λ определяются независимо от $t = 0$.

Справедлива теорема [3]: если функции $X(t, x)$ и $Y(t, x)$ соответственно удовлетворяют условиям $\|X(t, x) - X(t, y)\| < B^* \|x - y\|$,

$\|Y(t, x)\| \leq A^* \|x\|$ и нулевое решение $x=0$ системы (6.48) представляет собой экспоненциально устойчивое в малом положение равновесия, то при достаточно малом A^* нулевое решение уравнения (6.55) также будет экспоненциально устойчивым в малом.

Иными словами, эта теорема позволяет установить, что малые возмущения $Y(t, x)$ могут вывести движения из положения равновесия $x=0$, к которому оно стремится впоследствии по экспоненциальному закону.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (6.57)$$

где $y \in D$. Обозначим $y|_{t=t_0} = y_0$. Нулевое решение $y=0$ уравнения (6.57) называется экспоненциально устойчивым, если существуют положительные постоянные q^* и λ^* , не зависящие от значения $t=t_0$ и такие, что любое решение $y(t, y_0)$ уравнения (6.57) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t, y_0)\| \leq q^* \exp[-\lambda^*(t-t_0)] \cdot \|y_0\| \quad (6.58)$$

для всех $t \geq t_0 \geq 0$.

Если операторная функция $A(t)$ не зависит от t , то экспоненциальная устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда спектр этого оператора лежит внутри левой полуплоскости [8].

Если же D — конечномерное векторное пространство, т. е. $D = R_n$, то условие, что спектр оператора A , не зависящего от времени, лежит в левой полуплоскости, эквивалентно тому, что действительные части всех характеристических корней векового уравнения $\det|A - \lambda E| = 0$ отрицательны.

В задачах о накоплении возмущений на бесконечном интервале времени R_1^+ , R_1^* и R_1 существенную роль играет величина

$$W_0 = \sup_{t \in R_1^+} \int_0^t \|W(t, s)\| ds, \quad (6.59)$$

где $W(t, s)$ — оператор Коши.

Известно, что если W_0 является конечной величиной, то задача о накоплении возмущений имеет решение. А именно, справедливо утверждение [3]: если величина W_0 , определенная равенством (6.59), конечна и при любых $t \in R_1^+$ имеет место неравенство $\|W(t, 0)\| \leq W_1 < \infty$, то существуют такие положительные постоянные числа q^* и λ^* , что

$$\|W(t, 0)\| \leq q^* e^{-\lambda^* t} \quad (6.60)$$

для всех $t \in R_1^+$.

Сформулируем теорему об устойчивости по первому приближению [3, 8]: если в некотором шаре $\{\|x\| \leq d_0\} \subset D$ возмущения $X(t, x)$ системы (6.49) при любых $t \in R_1$ ограничены:

$$\|X(t, x)\| \leq m_0 \|x\|, \quad (6.61)$$

а оператор Коши удовлетворяет условию (6.60) и $\lambda^* - m_0 q^* > 0$, то нулевое решение уравнения (6.49) является экспоненциально устойчивым.

Рассмотрим операторное представление решения (6.52). Исходя из условий (6.60) и (6.61), оценим произвольное решение $x(t, x_0)$ задачи (6.27), (6.28):

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0)\| &\leq \|W(t, 0)x_0\| + \left\| \int_0^t W(t, s) \times \right. \\ &\times X(s, x(s, x_0)) ds \Big\| \leq q^* \|x_0\| e^{-\lambda^* t} + \int_0^t q^* m_0 \exp[-\lambda^*(t-s)] \times \\ &\times \|x(s, x_0)\| ds = q^* \|x_0\| e^{-\lambda^* t} + q^* m_0 e^{-\lambda^* t} \int_0^t e^{\lambda^* s} \|x(s, x_0)\| ds. \end{aligned}$$

Перепишем это неравенство:

$$\|x(t, x_0)\| \leq q^* \|x_0\| e^{-\lambda^* t} + q^* m_0 e^{-\lambda^* t} \int_0^t e^{\lambda^* s} \|x(s, x_0)\| ds. \quad (6.62)$$

Обе части неравенства (6.62) умножим на положительную функцию $e^{\lambda^* t}$. При этом получим:

$$e^{\lambda^* t} \cdot \|x(t, x_0)\| \leq q^* \|x_0\| + q^* m_0 \int_0^t e^{\lambda^* s} \|x(s, x_0)\| ds. \quad (6.63)$$

Применяя сюда лемму Беллмана—Грунролла [8], будем иметь оценку

$$e^{\lambda^* t} \|x(t, x_0)\| \leq q^* \|x_0\| e^{\lambda^* t},$$

или эквивалентную оценку

$$\|x(t, x_0)\| \leq q^* \|x_0\| \exp[(q^* m_0 - \lambda^*) t]. \quad (6.64)$$

Из неравенства (6.64) вытекает, что решение $x(t, x_0)$ будет экспоненциально устойчивым в том и только в том случае, когда $\lambda^* > q^* m_0$. Очевидно, последнее неравенство всегда можно получить, уменьшая радиус m_0 шара. Следовательно, в конечном счете свойство экспоненциальной устойчивости нулевого решения выведено определяется условием (6.60) на оператор Коши. В частности, если априори известна ограниченность решения $x(t, x_0)$, т. е. $\|x(t, x_0)\| \leq k_0$, то из неравенства (6.63) получим оценку

$$\|x(t, x_0)\| \leq q^* \|x_0\| e^{-\lambda^* t} + (q^* m_0 k_0 / \lambda^*).$$

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + X(x), \quad (6.65)$$

где A — постоянный, X — непрерывный операторы. В однородной линейной системе (6.57), соответствующей уравнению (6.65), A также постоянный оператор. Связь между решениями систем (6.57) и (6.65) устанавливается теоремой о гомеоморфизмах [8]: если действительные части спектра оператора A отличны от нуля, возмущение $X(x)$ удовлетворяет условию Липшица $\|X(x)\| \leq m_1 \|x\|$ и $X(0) = 0$, то существует гомеоморфное отображение: $\Phi[y(t, y_0)] = x(t, x_0)$, переводящее каждое решение однородного уравнения (6.57) в решение неоднородного уравнения (6.65), причем эти решения обладают одним и только одним из свойств:

- 1) решения $x(t, x_0)$ и $y(t, y_0)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к положению равновесия $x = 0$ и при $t \rightarrow -\infty$ неограниченно удаляются от положения равновесия;
- 2) решения $x(t, x_0)$ и $y(t, y_0)$ при $t \rightarrow \infty$ неограниченно удаляются от положения равновесия, стремясь к нему при $t \rightarrow -\infty$;
- 3) решения $x(t, x_0)$ и $y(t, y_0)$ неограниченно удаляются от положения равновесия при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow \infty$.

Эта теорема показывает, что возмущение вида $X(x)$ не нарушает устойчивость и экспоненциальную устойчивость положения равновесия.

6.4. К устойчивости предельных режимов движения Солнечной системы

Рассмотрим систему уравнений (2.136) и представим ее в виде

$$\dot{x} = Lx + X(x) + f_0(t, x), \quad (6.66)$$

где

$$\begin{aligned} X(x) &= \{X_1(x), X_2(x), \dots, X_6(x)\}; \\ X_1(x) &= (a_{50} - a_{20})q_1r_1 + q_1r_2 - q_2r_1; \\ X_2(x) &= (a_{60} - a_{30})p_1r_1 + p_2r_1 - p_1r_2; \\ X_3(x) &= (a_{70} - a_{40})p_1q_1 + p_1q_2 - p_2q_1; \\ X_4(x) &= -a_{50}q_1r_1 - q_1r_2 + q_2r_1; \\ X_5(x) &= -a_{60}r_1p_1 - p_2r_1 + p_1r_2; \\ X_6(x) &= -a_{70}p_1q_1 - p_1q_2 + p_2q_1; \\ f_0(t, x) &= \{\bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, 0, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Введем неоднородную систему уравнений, соответствующую (6.66) и являющуюся ее сужением:

$$\dot{z} = Lz + X(z), \quad z(0) = x^0. \quad (6.68)$$

Вектор-функция удовлетворяет условию Липшица и $X(0) = 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы о гомеоморфизмах. Тогда решение уравнения (6.68)

$$z(t, x^0) = W(t, 0)x^0 + \int_0^t W(t, s)X[z(s, x^0)]ds$$

и решение $y(t, x^0)$ системы (2.139) являются согласованными и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t, x^0) - y(t, x^0)\| = 0, \quad (6.69)$$

так как все характеристические показатели (2.151) системы (2.139) отрицательны. Так как равенство (6.69) выполняется вдоль каждой траектории движения (6.68) и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t W(t, s) X[z(s, x^0)] ds \right\| = 0, \quad (6.70)$$

то выбрав такое $z^0 = 0$ и $z^0 = \text{const}$, что $Lz^0 + X(z^0) = 0$, будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t W(t, s) ds \right\| = 0. \quad (6.71)$$

Рассмотрим решение $x(t, x^0)$ уравнения (6.66):

$$\begin{aligned} x(t, x^0) = & W(t, 0)x^0 + \int_0^t W(t, s)X[x(s, x^0)]ds + \\ & + \int_0^t W(t, s)f_0[s, x(s, x^0)]ds. \end{aligned} \quad (6.72)$$

В силу соотношений (6.69) и (6.70) имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x^0)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t W(t, s)f_0[s, x(s, x^0)]ds \right\|. \quad (6.73)$$

Из оценки (6.69) вытекает, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t, x^0) - z(t, x^0)\| \leq \kappa \|x^0\|, \quad (6.74)$$

где κ — положительное постоянное число, не превосходящее единицу. Используя неравенство (6.74), можно применить к решению $z(t, x^0)$ теорему об экспоненциальной устойчивости в малом. Тогда найдется такое число $\varepsilon > 0$, что произвольное решение $z(t, x^0)$ уравнения (6.68) при всех $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|z(t, x^0)\| \leq B_0 e^{-\alpha t} \|x^0\|, \quad (6.75)$$

если $\|x^0\| < \varepsilon$. Здесь B_0, α_0 — положительные постоянные числа.

Из неравенства (6.75) вытекает, что движение $z(t, x^0)$ к перманентному вращению выходит по экспоненциальному закону. Тогда, учитывая равенство (6.73) и ограниченность постоянно действующего возмущения, а также используя теорему об экспоненциальной устойчивости, будем иметь равенство вида (6.75) и для решения

$x(t, x^0)$. Отсюда следует, что при любых ограниченных постоянно действующих возмущениях движение $x(t, x^0)$ выходит на предельный режим, совпадающий с относительным покоем $\dot{x} = 0$. При этом возникает вопрос о поведении поступательного движения Солнечной системы.

Как уже установлено в пятой главе, из устойчивости по Лагранжу движения Солнечной системы следует, что в предельное множество движения непусто. Это в свою очередь дает, что множество предельных режимов поступательного движения также непусто и состоит из замыкания траектории некоторого почти периодического движения. Согласно теореме Биркгофа это множество предельных режимов замкнуто и минимально по Биркгофу. Следовательно, достаточно рассмотреть одно из движений, являющихся предельным режимом поступательного движения Солнечной системы. Пусть этот режим описывается вектор-функцией

$$g_0(t, q^0) = \{\bar{z}_1(t, q^0), \eta_1(t, q^0), \dots, \bar{z}_n(t, q^0); \\ u_1(t, q^0), v_1(t, q^0), \dots, w_n(t, q^0)\}. \quad (6.76)$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и пока произвольную точку \bar{q} . Обозначим через $g_0(t, \bar{q})$ вектор-функцию, соответствующую начальной точке \bar{q} и порожденную обобщенной динамической системой $g_0(t, \cdot)$. Как движение (6.76), так и движение $g_0(t, \bar{q})$ почти периодичны и удовлетворяют одним и тем же условиям (6.42). Пусть движение $g_0(t, \bar{q})$ устойчиво по Лагранжу. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon, q^0) > 0$ так, чтобы для каждой точки $\bar{q} \in S(\delta, q^0)$ и для устойчивого по Лагранжу движения $g_0(t, \bar{q})$ было выполнено неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_1} \|g_0(t, q^0) - g_0(t, \bar{q})\| < \varepsilon. \quad (6.77)$$

Отсюда следует, что если все движения, начинающиеся из достаточно малой окрестности точки q^0 , устойчивы по Лагранжу, то само движение $g_0(t, q^0)$ устойчиво по Ляпунову. Отметим, что, к сожалению, эти условия практически непроверяемы.

Изложенное позволяет заключить, что при любых начальных условиях вращения движение сплюснотой Земли обладает следующим свойством: при любой заданной степени точности $\varepsilon > 0$ вращение Земли выходит на перманентное, совпадающее с вращением около оси наибольшего главного центрального момента инерции, причем скорость выхода начиная с некоторого момента времени $t^*(\varepsilon)$ становится экспоненциально большой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проникновение в физическую сущность вещей и явлений основано на модельном подходе. При этом время от времени выявляется неполнота используемых моделей и методов анализа, а также опытных данных, положенных в их основу. Возникает необходимость детализации и совершенствования моделей и методов. По этому поводу Ф. Клейн писал, что «...перед нами сами собой встают новые проблемы по мере того, как мы все лучше постигаем старые»*. Так старая проблема вращения Земли в свете современных требований выдвинула новые задачи. Возникла общая теория вращения Земли как более совершенная база для постановки и решения актуальных прикладных и научно-технических задач небесной механики, астродинамики, геодезии и практической астрономии.

В настоящей монографии модельный подход к проблеме вращения Земли распространен на глобальные геофизические особенности реальной Земли. Изложим вкратце ее основные результаты и выводы.

В постановке общей теории вращения Земли сформулирована и решена модельная задача о поступательно-вращательном движении Земли, учитывающая ее неоднородное слоистое строение и собственное геомагнитное поле. Согласно референтной геофизической модели слои представлены твердой литосферой, вязкой несжимаемой астеносферой, твердой мантией, вязким несжимаемым внешним и твердым внутренним (шаровым) ядрами с поверхностями раздела, сферическо-симметричными относительно центра масс Земли. Ядра и часть мантии, примыкающая к внешнему ядру, предполагаются проводимыми, и их движения суть движения про-

* Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., Л., 1937, с. 92.

водников в геомагнитном поле. Исследовано влияние слоистого строения, геомагнитного и внутреннего гравитационного полей Земли на эволюцию ее движения при не равном нулю главном моменте гравитационных сил, связанном с литосферой. Предполагается также, что твердые литосфера, мантия и внутреннее ядро вращаются с разными начальными угловыми скоростями, взаимодействуя между собой по закону притяжения Ньютона в поле вязких и гидромагнитных напряжений.

Вязкие и гидромагнитные напряжения найдены путем постановки и решения задачи о движении вязких несжимаемых астеносферы и проводящего внешнего ядра, вовлекаемых разноосно вращающимися твердыми литосферой, мантией и внутренним ядром в его магнитном поле с индукцией, направленной по оси вращения внутреннего ядра. Найдены ответственные за вращение литосферы, мантии и внутреннего ядра результирующие моменты сил (относительно центра масс Земли). Они складываются из моментов гравитационных сил, вязкого трения и сопротивления движению в геомагнитном поле. С учетом результирующих моментов получена замкнутая система дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения слоистой Земли.

По отношению к сформулированной системе дифференциальных уравнений поставлена задача Коши, исследована корректность постановки задачи и доказана ее разрешимость. Качественный и количественный анализ решения выявил три предельных режима вращения слоистой Земли — перманентного вращения около главных центральных осей инерции, постоянных как в теле Земли, так и в пространстве. Указаны соотношения, определяющие положение этих осей в пространстве. С выходом на предельные режимы вращения вязкие несжимаемые слои как бы затвердевают. При этом угловые скорости литосферы и мантии выравниваются быстро, а мантии и внутреннего ядра относительно медленно. Геомагнитное поле ускоряет выход на предельный режим вращения.

Задача об устойчивости предельных режимов вращения слоистой Земли поставлена в связи с их неединственностью. Доказана устойчивость равномерного вращения слоистой Земли около оси наибольшего момента инерции и неустойчивость такого вращения около осей ее среднего и наименьшего моментов инерции. Выяснено, что независимо от начальных условий осуществляется выход на единственный предельный режим — перманентное вращение слоистой Земли около оси наибольшего главного центрального момента инерции. Причем, чем больше вязкость астеносферного слоя, тем больше скорость выхода на предельный режим, и чем меньше разность начальных угловых скоростей, тем быстрее происходит их выравнивание.

Из единственности и устойчивости предельного режима вращения слоистой Земли вытекают взаимосвязь ее поступательного и вращательного движений и связь между движениями материальных точек, представляющих Луну, Солнце и планеты, и полой Земли как элемента Солнечной системы. Указанными связями сочетаются внешние и внутренние силовые факторы, т. е. момент внешних гравитационных сил определяет положение оси предельного режима вращения Земли в пространстве, а моменты внутренних сил — положение этой оси в теле Земли. Эти моменты сил совместно обеспечивают выход на предельный режим движения. Найденный механизм взаимодействия составных элементов слоистой Земли между собой и внешней средой также основан на общих законах сохранения.

Указанные результаты и выводы относятся к модели слоистой Земли с твердой динамически асимметричной литосферой. Закономерности движения слоистой Земли с упругой литосферой как элемента Солнечной системы аналогичны особенностям движения Земли с твердой литосферой. Существенное различие связано с тем, что предельный режим вращения слоистой Земли с упругой литосферой единствен, так как упругодеформируемая литосфера мгновенно приспосабливается к положению оси вращения, и имеет место закон сохранения энергии. Однако из-за такой деформативности литосферы часть кинетической энергии вращения переходит в кинетическую энергию поступательного движения. Следовательно, орбита поступательного движения Земли с упругой литосферой должна расширяться по мере выхода на предельный режим.

Изучено напряженное и деформированное состояние литосферы без учета вращения модели Земли: определено поле перемещений в литосфере под действием напряжений, возникающих на границе раздела этого тела и вязкой несжимаемой астеносферы. Показано, что компоненты напряжений и перемещений меняются с глубиной, что определяет асимметричные деформации упругой литосферы, усугубляющиеся внешними силовыми факторами. Изучено влияние плотностной неоднородности литосферы на ее напряженно-деформированное состояние.

Построено решение задачи о напряженном и деформированном состоянии вращающейся упругой литосферы, основанное на решении внешней и внутренней задач сферы. Наличие центробежных сил обуславливает сжатие оболочки вдоль ее оси вращения и расширение в экваториальной плоскости. Деформации упругой литосферы под действием центробежных сил инерции симметричны относительно экваториальной плоскости, причем в районе полюсов происходит сжатие, а в области экватора — расширение литосферы.

ры. Для значений коширот, близких к 33° , радиальные перемещения на поверхности литосферы равны нулю. Деформирование упругой литосферы в ньютоновом поле притяжения тел Солнечной системы при исходных данных анализа, отвечающих реальной Земле и различным положениям притягивающих центров, имеет ряд особенностей. В частности, осевая симметрия деформации вращающейся литосферы нарушается под действием ньютоновых сил притяжения: асимметрия обусловлена перемещением точек поверхности литосферы в направлении вектора, касательного к параллелям. Эти перемещения меняют свой знак вдоль меридианов — от полюса к полюсу, придавая им очертание латинской буквы S. Таким образом, в процессе деформирования упругая литосфера становится телом с трехосным центральным эллипсоидом инерции, качественно отражая реальную фигуру Земли.

Анализ предельных режимов поступательного движения Солнечной системы и, в частности, Земли проведен методами теории обобщенных динамических систем. Получен ряд новых результатов по абстрактной теории обобщенных динамических систем. Наконец, изложен анализ движения Солнечной системы с учетом перманентного вращения твердой Земли. Эти результаты естественным образом дополняют теорию движения сплюснтой Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Алензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1971. 288 с.
3. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
4. Бибутон М. В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций. — Бюл. МГУ. Математика, 1941. т. 2, вып. 5, с. 1—52.
5. Биркгоф Д. Д. Динамические системы. М.: Л.: ОГИЗ, 1941. 320 с.
6. Ботт М. Внутреннее строение Земли (Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 373 с.
7. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 332 с.
8. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М. и др. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
9. Власов В. З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
10. Виллард Э. Теория вращения Земли около центра масс. М.: Физматгиз, 1963. 167 с.
11. Гаврилин Б. Л., Мочин А. С. О вращении внутренних слоев Земли. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1974, № 5, с. 20—28.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Вращение шара в вязкой проводящей жидкости в магнитном поле. — Журн. техн. физики, 1960, т. 30, № 9, с. 1067—1073.
13. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
14. Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1953. 373 с.
15. Гутенберг Б. Физика земных недр (Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 263 с.
16. Джексоу Д. Земное ядро (Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 305 с.
17. Джеффрис Г. Земля (Пер. с англ. М.: ИЛ, 1960. 485 с.
18. Дубошин Г. Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
19. Ермаков Ж. С., Баймухаметов А. А. О природе трехосности фигуры Земли. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1981, № 3, с. 7—13.
20. Ерманов Ж. С., Егоров А. К. Упругое равновесие шара, вращающегося в неоднородном поле притягивающих центров. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1982, № 3, с. 5—8.
21. Ерманов Ж. С., Калыбаев А. А. К теории возвращаемости движения. — Вестник АН КазССР, 1984, № 7, с. 30—33.
22. Ерманов Ж. С., Калыбаев А. А. Методы анализа возвращаемости движения системы твердых тел. Алма-Ата: Наука, 1985. 200 с.

23. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А.* Общая теория вращения Земли. М.: Наука, 1984. 254 с.
24. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А.* Сравнимость движения гравитирующих систем по его возвращаемости во времени. — Прикладная матем. и мех., 1984, т. 48, вып. 2, с. 188—196.
25. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А.* Точное решение задачи о динамической уравниваемости Земли. — Вестник АН КазССР, 1975, № 3, с. 20—29.
26. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А., Баймухаметов А. А.* Вращение динамически симметричного тела и шара, разделенных сферическим слоем вязкой жидкости. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1978, № 5, с. 45—51.
27. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А., Баймухаметов А. А.* О неустановившемся движении вязкой жидкости в сферическом слое. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1978, № 3, с. 16—22.
28. *Ержанов Ж. С., Науразбаев М. А.* Моменты и полюс инерции Земли при ее оледенении. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1984, № 3, с. 28—31.
29. *Ержанов Ж. С., Науразбаев М. А.* Об эйлеровом вращении Земли переменного состава. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1983, № 3, с. 25—30.
30. *Жарков В. П., Трубицын В. П.* Физика планетных недр. М.: Наука, 1980. 448 с.
31. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной каплеобразной жидкостью. Избр. соч., т. 1, М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 152 с.
32. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 5, с. 1070—1073.
33. *Колмогоров А. И., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
34. *Кочин Н. Е., Кибель П. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
35. *Кручин Ю.* Вращение проводящего шара в проводящей вязкой жидкости в присутствии магнитного поля. — Изв. АН ЛатвССР, 1958, № 2(127), с. 97—102.
36. *Лангренъев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
37. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.: Гостехиздат, 1951. 432 с.
38. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
39. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение и физика Земли. М.: Наука, 1965. 379 с.
40. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
41. *Манк Э., Макдональд Г.* Вращение Земли. М.: Мир, 1961. 381 с.
42. *Маров М. Я.* Планеты и спутники. М.: Наука, 1981. 256 с.
43. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967. 564 с.
44. *Мелентьев П. В.* Приближенные вычисления. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
45. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. Ч. 2. М.: Мир, 1976. 483 с.
46. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
47. *Монин А. С.* О внутреннем вращении Земли. — Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 5, с. 1097—1100.
48. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.

43. Немыцкий В. В., Степанов П. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Л.: ОГИЗ. 1947. 448 с.
44. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — В кн.: Кудряков А. П. Собр. ур Л.: Изд-во АН СССР, 1936, т. 6. 696 с.
45. Пальмов В. А. Основы уравнения теории несимметричной упругости. — Прикладная матем. и мех. 1964, т. 28, вып. 3, с. 401—408.
46. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1970. 280 с.
47. Поддубед В. В., Нестеров В. В. Общая астрометрия. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 576 с.
48. Попряткин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.
49. Фикитаки Т. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли. Л.: Недра, 1966. 331 с.
50. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. — Вестник МГУ. Сер. матем. и мех., 1957, № 4, с. 9—16.
51. Седов Л. М. Механика сплошной среды. Т. I. М.: Наука, 1983. 528 с.
52. Слезкин П. А. Динамика вязкой жидкости. М.: Гостехиздат. 1955. 520 с.
53. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
54. Черноуцко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ИЛ АН СССР, 1968. 232 с.
55. Шерриберг П. К. Широта московской обсерватории в связи с движением полюсов. — Уч. зап. МГУ, 1904, вып. 22. 357 с.
56. Щербаков Б. А. Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1972. 232 с.
57. Эйлер Л. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представлен Академии наук СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 611 с.
58. Яковский Б. М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во МГУ, 1964. 445 с.
59. Anderson D. L., Hart R. S. An Earth model based on free oscillations and body waves — J. Geoph. Res., 1976, v. 81, N 8, p. 1461—1475.
60. Bullard E. C. Electromagnetic induction in a rotating sphere. — Proc. Royal Soc. London, 1949, A 189, p. 413—433.
61. Bullard E. C. The magnetic field within the Earth. — Proc. Royal Soc. London, 1949, A 197, p. 433—453.
62. D'Alembert J. Recherches sur la precession des equinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le systeme Newtonien. P.: Acad. Pres., 1949. 184 p.
63. Darwin G. On the Influence of Geological Changes on the Axis of Rotation. — Phil. Trans. 1877.
64. Dmewowski A. M., Anderson D. L. Preliminary reference Earth model. — Phys. Earth and Planet. Inter. 1981, v. 25, N 4, p. 297—356.
65. Eshchanov Zh. S., Kalybaev A. A. On a new method of qualitative investigation of a gravitating System motion stable according to Lagrange. — Celestial Mechanics. 1984, v. 33, N 5, p. 169—191.
66. Gubbins D. Rotation of the inner core. — J. Geoph. Res., 1981, B 86, N 12, p. 1169—11699.
67. Golden N. Recherches sur la Rotation de la Terre Ueber die Rotation eines festen Korpers, dessen Oberfläche mit einer Flüssigkeit bedect. ist. — Astr. Nachrichten N 226.
68. Kinoshita H. Theory of the rotation of the rigid Earth. — Celest. Mech., 1977, v. 15, N 3, p. 3—75.
69. Roberts P. H. Electromagnetic core — mantle coupling. — J. Geomagn. Geoelectr., 1972, N 24, p. 231—259.

76. *Rochester M. G.* The Earth's rotation, EOS. — Trans Amer Geoph. Union, 1973, v 54, N 8, p. 769—811.
77. *Rochester M. G.* Geomagnetic core — mantle coupling. — J. Geoph. Res., 1962, N 67, p. 4833—4836.
78. *Roden R. B.* Electromagnetic core — mantle coupling. — J. Royal Astron. Soc., 1963, N 7, p. 361—374.
79. *Runcorn S. K.* The role of the core in irregular fluctuations of the Earth's rotation and excitation of the Chandler wobble. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1982, A 306, N 1492, p. 261—268.
80. *Sitz M.* On electromagnetic core — mantle coupling — Geoph. and Astrophys. fluid dyn., 1982, v. 21, N 3—4, p. 303—313.
81. *Vestine E. H.* — J. Geoph. Res., 1953, N 58, p. 127—139.
82. *Volterra V.* — Acta Mathematica. 22:3, 22 4, 1896—1899.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Современные представления о строении и движении Земли.	
Модель и постановка задач	7
1.1. Общие данные	8
1.2. Строение Земли	10
1.3. Движение Земли	14
1.4. Модель и постановка задач	16
Глава 2. Движение слоистой Земли с твердой литосферой	19
2.1. Постановка задачи	19
2.2. Уравнения движения и их разрешимость	21
2.3. Движение вязкого астеносферного слоя	25
2.4. Магнитогидродинамическое течение жидкого слоя ядра	40
2.5. Уравнения вращения внутренних твердых слоев Земли	57
2.6. Анализ решения уравнений вращательного движения Земли	71
2.7. Качественный анализ поступательно-вращательного движения Земли	87
Глава 3. Поступательно-вращательное движение Земли с упругодеформируемой литосферой	90
3.1. Дифференциальные уравнения движения слоистой Земли с упругой литосферой и их разрешимость	91
3.2. Работа внутренних сил. Закон сохранения энергии	100
3.3. Предельные режимы вращения Земли	102
3.4. Напряженно-деформированное состояние вращающейся литосферы под действием поверхностных сил вязкого трения	106
3.5. Напряженно-деформированное состояние вращающейся литосферы в поле ньютоновых сил притяжения Луной, Солнцем и их моментов	122
3.6. Напряженно-деформированное состояние вращающейся литосферы с центрально-симметричной плотностью	133
3.7. Качественный анализ предельного режима вращения слоистой Земли с упругодеформируемой литосферой	135

Глава 4. Устойчивость вращательного движения слоистой Земли	140
4.1. Исследование устойчивости движения модели Земли с вязкой астеносферой и жидким проводящим слоем ядра	141
4.2. Исследование устойчивости движения модели Земли с вязким астеносферным слоем	155
4.3. Единственность предельного режима вращения слоистой Земли	159
Глава 5. Обобщенные динамические системы теории движения слоистой Земли	163
5.1. Свойство самоорганизации движения	164
5.2. Структурное описание	173
5.3. Критерий периодичности	176
5.4. Критерий возвращаемости	181
5.5. Сравнение движений в метрических пространствах	185
5.6. Сравнение в банаховых пространствах	191
5.7. Сравнение движений с описывающими их уравнениями	199
5.8. Обобщенные динамические системы теории движения слоистой Земли	203
Глава 6. О возвращаемости движения слоистой Земли	205
6.1. Обоснование метода анализа возвращаемости движения гравитирующей системы, устойчивой по Лагранжу	205
6.2. Критерий возвращаемости поступательно-вращательного движения гравитирующей системы, устойчивой по Лагранжу	213
6.3. Согласованность решений линейных и нелинейных систем. Устойчивость движения в банаховых пространствах	220
6.4. К устойчивости предельных режимов движения Солнечной системы	226
Заключение	229
Литература	233

**Жақан Сулейманович Ержанов,
Айсұлтан Абдуллович Қалыбаев,
Абай Абышевич Баймухаметов,
Тұрсын Толебаевич Коржымбаев**

ДВИЖЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛИ

Утверждено к печати Ученым советом Института сейсмологии
Академии наук Казахской ССР

Зав. редакцией *Н. А. Межулина*
Редактор *Г. И. Тимошенко*
Художественный редактор *Н. Ф. Чурсин*
Оформление художника *В. Н. Воеводского*
Технический редактор *Е. М. Тахметова*
Корректор *В. И. Муриказева*

ИБ № 2345

Слано в набор 7.01.86. Подписано к печати 6.08.86, УГ12103.
Формат 60×84^{1/8}. Бум. тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать.
Усл. п. л. 14. Усл. п. кр. отт. 14. Уч.-изд. л. 14,4. Тираж 1000. Заказ 31.
Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Наука» Казахской ССР
480100, Алма-Ата, Пишкича, 111/113
Типография издательства «Наука» Казахской ССР
480021, Алма-Ата, Шевченко, 28

НОВАЯ КНИГА
издательства «НАУКА» Казахской ССР

1986 год

Айталiev Ш. М., Баничук И. В., Каюпов М. А. Оптимальное проектирование протяженных подземных сооружений. 14 л. 2 р. 50 к.

Рассмотрен комплекс вопросов, связанных с расчетом на прочность и устойчивость протяженных подготовительных и капитальных горных выработок и транспортных тоннелей, а также с оптимальным выбором форм их поперечного сечения и параметров креней и обделок. Обосновывается эффективная схема расчета методом граничных интегральных уравнений напряженно-деформированного состояния упругого и вязкоупругого анизотропного породного массива вблизи подземного сооружения. Представлен обширный расчетный материал, полученный на ЭВМ. Даются практические рекомендации по выбору форм сечения горных выработок (тоннелей) и параметров крепления (обделки).

Книга рассчитана на работников научных, проектных и отраслевых организаций, специализирующихся в области механики твердых деформируемых тел, теории подземных сооружений и оптимального проектирования конструкций.

Заказы можно направлять по адресу:

480091, г. Алма-Ата, ул. Фурманова,
№ 5-197, Казахская контора «Академкнига»

или

480090, г. Алма-Ата, ул. Байжолды,
№ 190, магазин «Книга — почтой».