

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

—◆—  
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**  
—◆—

Кафедра физико-технического контроля процессов  
горного производства

*Утверждено на заседании Совета Учебно-методического объединения вузов Российской Федерации по образованию в области горного дела 27.01.2011, протокол № 1*

А. С. Вознесенский

## **КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Часть 2. Компьютерное моделирование физических объектов и процессов горного производства

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области горного дела в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Физические процессы горного или нефтегазового производства» направления подготовки «Горное дело»*

Москва 2010

**ВОЗНЕСЕНСКИЙ А. С.**

Компьютерные методы в научных исследованиях. Часть 2. Компьютерное моделирование физических объектов и процессов горного производства: Учебник для студентов специальности 130401 «Физические процессы горного или нефтегазового производства».- М.:МГГУ, 2011, 107 с.:ил.

Предназначен для студентов специальности 130401 «Физические процессы горного или нефтегазового производства». Часть 2 содержит общие сведения по компьютерному моделированию физических объектов и процессов горного производства, по их моделированию в среде COMSOL Multiphysics, а также типовые примеры, позволяющие студентам освоить моделирование в этой среде. Может представлять интерес для студентов других специальностей, а также для научных и инженерных работников, чья деятельность связана с компьютерным моделированием.

А. С. Вознесенский – д-р техн. наук, проф. кафедры «Физико-технический контроль процессов горного производства» Московского государственного горного университета.

Рецензенты:

- д-р техн. наук, проф. Парамонов А. А. [зав. кафедрой «Радиоприемные устройства» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (Технического университета)]
- д-р техн. наук, проф. Захаров В. Н. [зав. лаб. «Информационные системы геотехнологий» Института проблем комплексного освоения недр РАН (УРАН ИПКОН РАН)]

## СОДЕРЖАНИЕ

6. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА .....	5
6.1. Общие сведения о компьютерном моделировании .....	5
6.2. Метод конечных элементов .....	6
6.3. Метод конечных разностей .....	7
6.4. Сравнение МКЭ и МКР .....	10
6.5. Решение прямой и обратной задач измерений .....	11
6.6. Компьютерное мультифизическое моделирование природных и технических процессов .....	13
6.7. Моделирование мультифизических приложений .....	15
6.8. Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы .....	17
6.9. Дифференциальные уравнения в частных производных, используемые в системе COMSOL Multiphysics .....	20
6.10. Основные компоненты среды COMSOL Multiphysics .....	24
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6 .....	32
7. РАСЧЕТЫ В РАЗДЕЛАХ СТРУКТУРНОЙ МЕХАНИКИ СИСТЕМЫ COMSOL MULTIPHYSICS .....	33
7.1. Общие сведения .....	33
7.2. Координатные системы .....	34
7.3. Затухание .....	35
7.4. Переменные .....	40
7.5. Примеры моделирования в разделе структурной механики .....	41
7.5.1. Нагружение образца породы с отверстием .....	41
7.5.2. Распространение упругих волн в геосреде .....	42
7.5.3. Пьезокерамический преобразователь с радиальной поляризацией .....	46
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 7 .....	64
8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДЕ COMSOL MULTIPHYSICS .....	65
8.1. Общая характеристика задач расчета тепловых процессов .....	65
8.2. Уравнения теплопереноса за счет теплопроводности и за счет конвекции .....	65
8.3. Граничные условия при решении тепловых задач .....	66
8.4. Теплопередача за счет излучения .....	67
8.5. Решение задач теплопередачи в системе COMSOL Mutiphysics .....	71
8.6. Пример тепловых расчетов в системе COMSOL Multiphysics .....	79
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 8 .....	85
9. МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ .....	86
9.1. Общие сведения о мультифизическом моделировании .....	86
9.2. Расчет термических напряжений в образце горной породы при его нагревании .....	86
9.2.1. Общие сведения о модели .....	86
9.2.2. Постановка задачи .....	87
9.2.3. Описание модели .....	87

9.2.4. Порядок формирования модели для мультифизического моделирования.....	90
9.2.5. Результаты расчетов термических напряжений .....	94
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 9 .....	96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	97
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	98
П1. Список операторов и специальных символов системы MATLAB .....	98
П2. Список функций MATLAB для работы с матрицами .....	98
П3. Список функций MATLAB для работы с файлами данных .....	100
П4. Список функций MATLAB, используемых для аналогового и цифрового ввода/вывода данных в компьютер.....	101
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	106
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	107

## 6. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

### 6.1. Общие сведения о компьютерном моделировании

Основные определения понятий, связанных с моделированием, даны в 1 главе. Здесь же уточним их применительно именно к компьютерному моделированию.

**Моделирование** – это воспроизведение процессов, происходящих в реальном процессе, системе путем их искусственной имитации.

Различают аналитическое и имитационное моделирование. При **аналитическом** моделировании изучаются математические (абстрактные) модели реального объекта в виде алгебраических, дифференциальных и других уравнений, а также предусматривающих осуществление однозначной вычислительной процедуры, приводящей к их точному решению. В то же время аналитическое моделирование в принципе может быть проведено и без компьютера, правда, для этого от исследователя требуется отличное владение соответствующим математическим аппаратом. При **имитационном** моделировании исследуются математические модели в виде алгоритмов и компьютерных программ, воспроизводящих функционирование исследуемой системы путем последовательного выполнения большого количества элементарных операций. Имитационное моделирование более доступно и часто не требует такого глубокого знания математики, как аналитическое.

В последнее время при исследовании физических процессов в природных и технических системах широкое развитие получило именно имитационное моделирование, которое часто проводится с применением метода конечных элементов. Осуществляется оно с использованием компьютеров, поэтому называется также компьютерным моделированием.

**Компьютерное моделирование** заключается в составлении и отладке на компьютере вычислительной модели и проведении на этой модели серии вычислительных экспериментов. Целью таких экспериментов является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта, а также, при необходимости, последующее уточнение модели и т. д. В дальнейшем такие модели могут использоваться для прогнозирования ситуаций, не встречавшихся ранее.

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Компьютерные модели проще и удобнее аналитических, они позволяют проводить так называемые вычислительные эксперименты в условиях, когда реальные эксперименты затруднены из-за финансовых и физических препятствий или могут дать непредсказуемый результат (например, ядерный взрыв). Логичность и формализованность компьютерных моделей позволяет выявить основные факторы, определяющие свойства изучаемого объекта, в частности, исследовать отклик моделируемой физической системы на изменения ее параметров, начальных условий или воздействий на эту систему.

В последнее время моделирование физических систем осуществляется на компьютерах с использованием численных методов, в которых точное решение заменяется его численными аппроксимациями. К таким методам относятся метод конечных элементов и метод конечных разностей.

## 6.2. Метод конечных элементов

Одним из возможных методов компьютерного моделирования является метод конечных элементов (МКЭ). Метод конечных элементов завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод решения самых разнообразных задач математической физики и техники. Высокая популярность этого метода объясняется простотой его физической интерпретации, а также ясностью

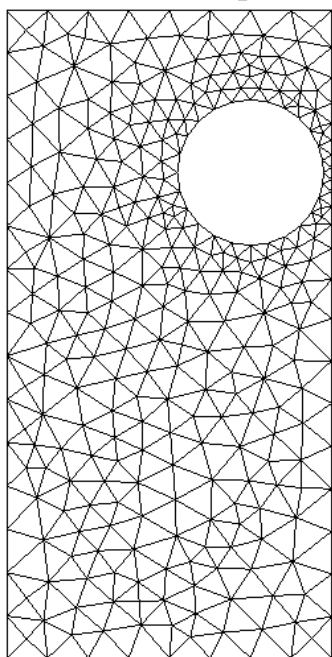


Рис. 6.1. Идея метода конечных элементов: разбиение исследуемой области на треугольники или элементы другой формы

и четкостью численного алгоритма, что существенно облегчает программирование сложных задач математической физики. В своей основе этот метод является вариационным. Его возникновение и развитие связано с классическими работами Б. Г. Галеркина, И. Г. Бубнова и В. Ритца.

Метод конечных элементов основан на локальной аппроксимации решения кусочно-полиномиальными функциями. Исходная область разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых в двумерном случае выступают **треугольники или четырехугольники** (рис. 6.1). Делая подобласть достаточно малой либо выбирая достаточно высокую степень полиномов, которыми осуществляется аппроксимация решения, можно добиться того, чтобы аппроксимирующая функция достаточно точно передавала локальное поведение решения. Этот метод может применяться для областей произвольной формы и граничных условий общего вида, причем возможно нерегулярное разбиение области. Таким образом, на расположение элементов при разбиении области не накладываются ограничения, что позволяет применять метод конечных элементов для широкого круга областей без использования глобальной фиксированной системы координат.

Метод широко используется для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики, электромагнитных полей и других. Возникновение метода конечных элементов связано с решением задач космических исследований в 1950-х годах (идея МКЭ была разработана советскими учёными ещё в 1936 году, но из-за неразвитости вычислительной техники метод не получил развития). Этот метод возник из строительной механики и теории упругости, а уже затем было получено его математическое обос-

нование. Существенный толчок в своём развитии МКЭ получил в 1963 году после того, как было доказано, что его можно рассматривать как один из вариантов распространённого в строительной механике метода Рэлея-Ритца, который путём минимизации потенциальной энергии сводит задачу к системе линейных уравнений равновесия. После того, как была установлена связь МКЭ с процедурой минимизации, он стал применяться к задачам, описываемым уравнениями Лапласа или Пуассона. Область применения МКЭ значительно расширилась, когда было установлено (в 1968 году), что уравнения, определяющие элементы в задачах, могут быть легко получены с помощью вариантов метода взвешенных невязок, таких, как метод Галёркина или метод наименьших квадратов. Это сыграло важную роль в теоретическом обосновании МКЭ, так как позволило применять его при решении многих типов дифференциальных уравнений. Таким образом, метод конечных элементов превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений.

С развитием вычислительных средств возможности метода постоянно расширяются, также расширяется и класс решаемых задач. Практически все современные расчёты на прочность проводят, используя метод конечных элементов.

Наиболее распространёнными универсальными системами МКЭ-анализа в настоящее время являются ANSYS, MSC.Nastran, ABAQUS, Impact, NEiNastran, NXNastran, SAMCEF, COMSOL Multiphysics. Существуют и специализированные системы, такие, как Temper-3D - система КЭ анализа для расчета температурных полей в трехмерных конструкциях. Plaxis представляет собой простой и удобный пакет конечно-элементных программ для выполнения расчетов сложных комплексных геотехнических проектов в области современного высокотехнологического строительства. В процессе двумерных и трехмерных расчетов, доступных в программах Plaxis, определяются напряжения, деформации, прочность (устойчивость) в сложных геотехнических системах с учетом совместной работы инженерных конструкций и их взаимодействия с грунтом на этапах строительства, эксплуатации и реконструкции.

В дальнейшем моделирование будет рассматриваться применительно к программному пакету COMSOL Multiphysics.

### **6.3. Метод конечных разностей**

Как один из вычислительных алгоритмов при моделировании физических явлений используется также метод конечных разностей, позволяющий решать дифференциальные уравнения с помощью вычислений на компьютерах.

Метод **конечных разностей** — широко известный и простейший метод интерполяции. Его суть заключается в замене дифференциальных коэффициентов уравнения на разностные коэффициенты, что позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению его разностного аналога, т. е. построить его конечно-разностную схему.

Пример 1.

В обыкновенном дифференциальном уравнении

$$u'(x) = 3u(x+2)$$

заменив производную на конечную разность

$$\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \approx u'(x),$$

где  $\Delta x$  – приращение по  $x$ , получаем аппроксимированную форму (конечно-разностную схему)

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x(3u(x) + 2).$$

Последнее выражение носит название конечно-разностного уравнения, а его решение соответствует приближенному решению первоначального дифференциального уравнения. При известном  $u(x)$ , начиная с первой точки  $x=0$  при начальном условии, что  $u(0)=0$  вычисляются значения в следующей точке  $u(x+h)$  и так далее.

Пример 2.

Однородное уравнение струны (волновое уравнение), описывающее ее свободные колебания, имеет вид

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx},$$

где  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ ,  $T_0$  – сила натяжения струны;  $\rho$  – удельная плотность, т. е. плотность единицы длины струны. Пусть при определенных конкретных значениях входящих в него величин такое уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2$$

при начальных условиях  $u(0)=0$ ;  $u(1)=0$ . Т. е. в данном случае  $a^2 u_{xx} = -2$ .

Чертеж, иллюстрирующий колебание струны, изображен на рис. 6.2. При решении необходимо найти величины смещения струны в зависимости от координаты  $x$ , т. е.  $u(x)$ .



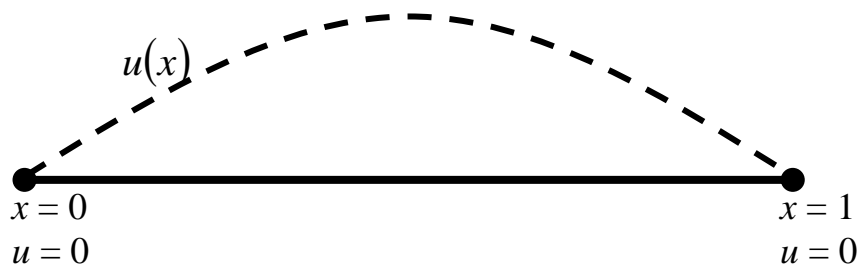


Рис. 6.2. Изображение натянутой струны в координатах  $x$  и  $u$  и аналитическое решение  $u(x)$

Аналитическое решение предусматривает нахождение функциональной зависимости  $u(x)$  в следующей последовательности:

- 1) интегрирование уравнения;
- 2) определение из начальных условий постоянных, получающихся в результате интегрирования.

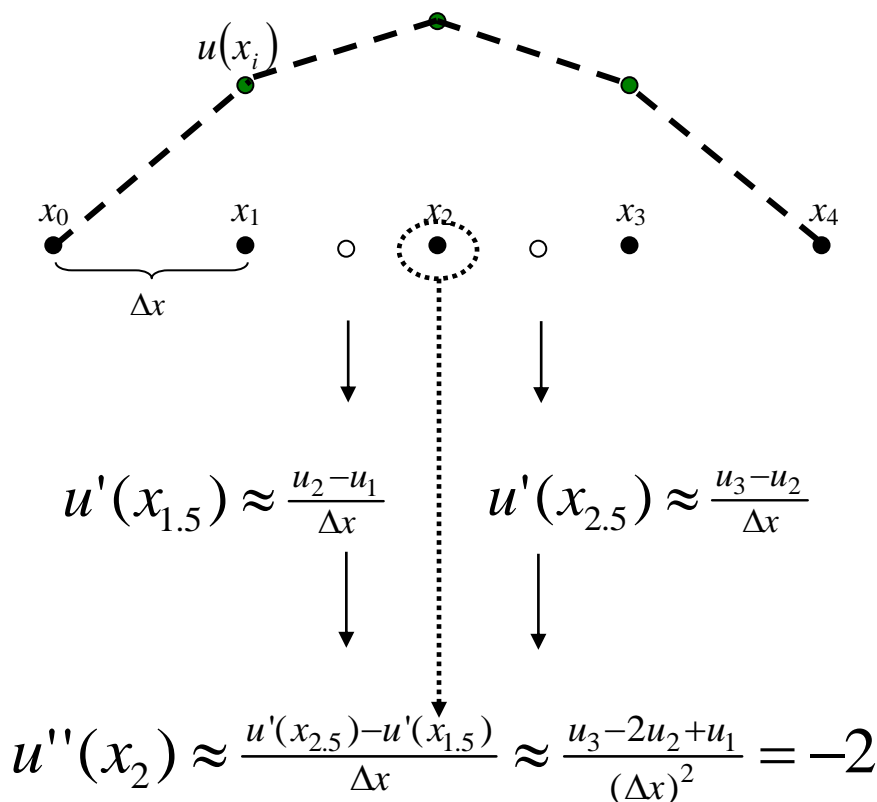


Рис. 6.3. Схема определения смещений струны численным методом конечных разностей в дискретных точках  $x_i$

Численное решение уравнения включает в себя:

- 1) аппроксимацию значений производных в узлах  $x_i$ ;
- 2) запись всех уравнений в матрицу и решение системы уравнений.

При номерах узлов от 0 до  $n+1$  системы уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} u_0 = u(x_0) = 0 \\ u_0 - 2u_1 + u_2 = -2(\Delta x)^2 \\ \dots\dots\dots \\ u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = -2(\Delta x)^2 \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1} = u(x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

всего  $n+2$  уравнения. В матричной форме эта система будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(\Delta x)^2 \\ -2(\Delta x)^2 \\ \dots \\ -2(\Delta x)^2 \\ -2(\Delta x)^2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к решению системы  $N=n+2$  уравнений.

Данный пример касался одномерной задачи. Аналогично решается задача и в двумерном и трехмерном случаях. Следует учитывать, что при увеличении размерности количество уравнений возрастает пропорционально степени размерности.

#### 6.4. Сравнение МКЭ и МКР

Таким образом, численные методы вообще применяются в следующих случаях:

- для получения приближенных решений уравнений, которые не могут быть решены аналитически;
- для получения простого решения в случае большого количества различных условий;
- для проверки корректности аналитического решения.

Помимо определенных достоинств численные методы обладают также и рядом своих недостатков, к которым относятся:

- недопустимо большое время расчета и расходимость результата при решении некоторых задач;
- приближенное решение в отличие от точного, получаемого аналитическими методами;

- сильная зависимость от расчетных параметров и от погрешностей исходных данных.

При сравнении между собой метода конечных элементов (МКЭ) и метода конечных разностей (МКР) можно выделить следующие отличия, приведенные в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Сравнение МКЭ и МКР

Преимущества	МКЭ	МКР
МКЭ	Легко учитывает всю геометрию модели в целом, а также граничные условия	В основном ограничен прямоугольными формами модели
МКЭ	Минимизирует погрешность по всей модели	Минимизирует погрешность в узлах дискретизации
МКР	Более сложные математические соотношения	Более простые математические соотношения

Идеология программного пакета COMSOL Multiphysics, рассматриваемого ниже, базируется на методе конечных элементов как наиболее перспективном при компьютерном моделировании.

### 6.5. Решение прямой и обратной задач измерений

В процессе изучения каких-либо объектов или явлений с помощью измерений приходится решать прямую и обратную задачи (рис. 6.4).

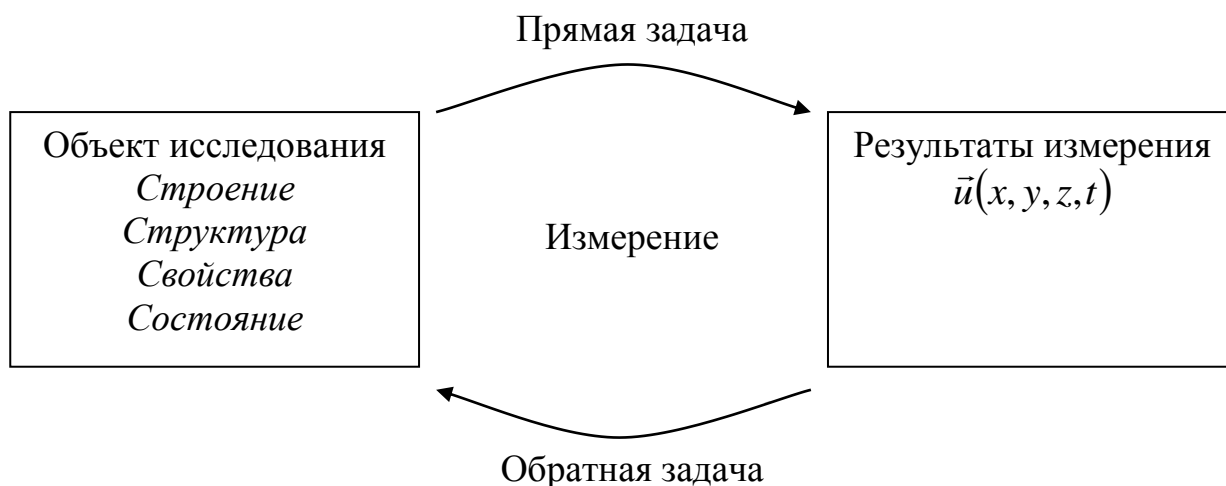


Рис. 6.4. Прямая и обратная задачи измерений

В прямой задаче измерений осуществляется получение векторов значений измеряемой величины (информативных параметров) в зависимости от ко-

ординат и времени, в неявной форме характеризующих объект исследования: его строение, структуру, свойства и состояние.

В обратной задаче производится определение структуры, свойств и состояния объекта по значениям информативных параметров, полученных в процессе измерения.

Наиболее сложной является обратная задача, которая часто математиками относится к классу так называемых некорректно поставленных задач, т. е. задач, решения которых сильно меняются при незначительном изменении исходных величин. Это приводит к тому, что в реальных условиях при измерении с погрешностями невозможно получение однозначного результата.



Рис. 6.5. Решение обратной задачи измерений с помощью компьютерного моделирования

Обратные задачи могут решаться методами вариационного исчисления, которые достаточно сложны.

Возможен также и другой путь решения методом перебора гипотетических моделей, при котором (рис. 6.5):

- создается одна или несколько моделей исследуемого объекта, в которых по каким-либо соображениям задаются его строение, структура, свойства, состояние;
- моделируются сигналы, получаемые в результате измерений;
- сравниваются сигналы, полученные при моделировании и при реальном измерении, устанавливаются различия этих сигналов;
- выбирается модель с наибольшим совпадением сигналов или производится корректировка исходной модели, и повторяются указанные действия до тех пор, пока различие не будет превосходить допустимой величины.

## 6.6. Компьютерное мультифизическое моделирование природных и технических процессов

Физика как одна из областей современной науки включает несколько разделов прикладной физики и технологии. Это электромагнетизм, механика жидких сред, классическая или квантовая механика и др. Явления природы, рассматриваемые в различных областях прикладной физики, описываются соответствующими законами, как, например, законы сохранения и превращения

энергии, масс и моментов в классической механике.

Описание таких законов осуществляется с использованием дифференциальных уравнений (ДУ). ДУ описывают изменения состояния в пространстве и во времени и базируются на фундаментальных законах физики. Каждый раз, когда решаются дифференциальные уравнения, описывающие феномен, изучаются все новые и новые характеристики моделируемого явления.

### Последовательность моделирования физических процессов

Для того, чтобы описать какое-либо физическое явление, нужно вначале определить, какие именно фундаментальные законы физики составляют его основу

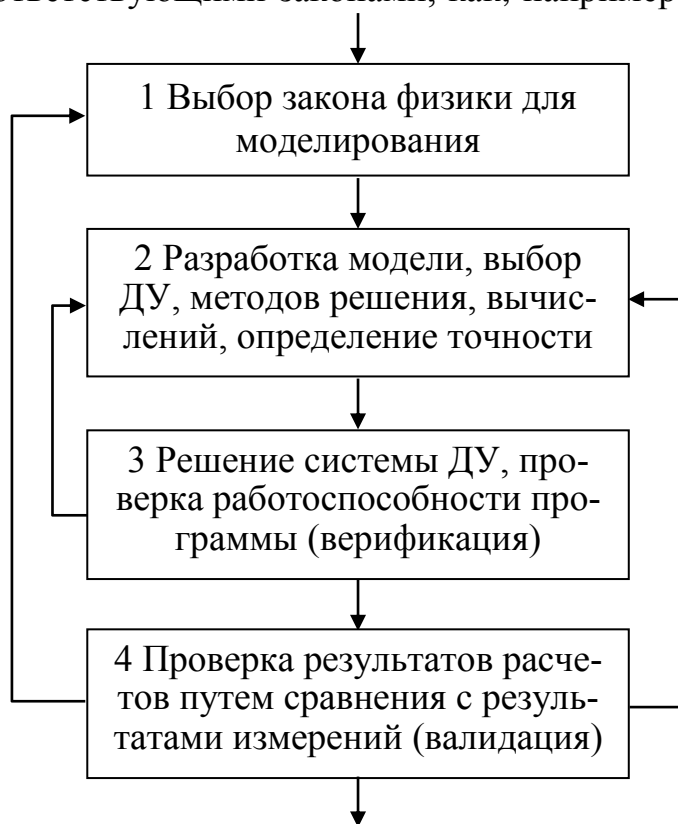


Рис. 6.6. Этапы компьютерного моделирования физических объектов

(блок 1, рис. 6.6). Когда эта задача осуществлена, в соответствии с выбранными законами физики подбирают или формулируют ДУ, используемые для моделирования (блок 2). При этом могут быть установлены определенные допущения и упрощения, которые при необходимости впоследствии корректируются.

На следующем этапе (блок 3) производится решение уравнений и проверка процесса поиска решений, называемая также верификацией.

Сделаем некоторое отступление от основной темы и остановимся на различии понятий верификации и валидации программного обеспечения.

**Верификация** - это процесс определения того, выполняют ли программные средства и их компоненты требования, наложенные на них в последовательных этапах жизненного цикла разрабатываемой программной системы.

Основная цель верификации состоит в подтверждении того, что программное обеспечение соответствует поставленным требованиям. Дополнительной целью является выявление и регистрация дефектов и ошибок, которые внесены во время разработки или модификации программы.

**Валидация** - подтверждение на основе представления объективных свидетельств того, что требования, предназначенные для конкретного использования или применения, точно и в полном объеме предопределены.

Валидация производится на основе сравнения результатов расчетов с данными, полученными в ходе измерений на реальных объектах.

Теоретически верификация продолжается вплоть до момента кодирования программы при составлении алгоритма вычислений, а валидация осуществляется непосредственно после. Однако на практике в большинстве случаев процессы верификации, валидации, тестирования и реализации пересекаются по времени.

Таким образом, на этапе 3 производится проверка работоспособности и отладка самого программного обеспечения без учета характеристик моделируемого объекта.

На этом этапе по результатам проверок возможен возврат к предыдущей ступени и корректировка программного обеспечения, что обозначено обратной стрелкой, направленной от блока 3 к блоку 2.

После отладки и устранения программных ошибок производится расчет и переход к следующему этапу (блок 4).

На этом этапе осуществляется сравнение результатов расчетов с результатами измерений на реальных объектах, т. е. валидация. По результатам такой проверки могут быть внесены изменения в модель, например, устранены некоторые упрощающие допущения, принятые ранее, изменены начальные или граничные условия и т. д. Это обозначено стрелкой, направленной от блока 4 к блоку 2.

Вполне вероятно, что в результате валидации может оказаться необходимым пересмотреть сами физические законы, заложенные в вычисления, что обозначено стрелкой, направленной от блока 4 к блоку 1.

После того, как произведена верификация и валидация программного обеспечения, производится расчет с целью исследования изучаемого явления.

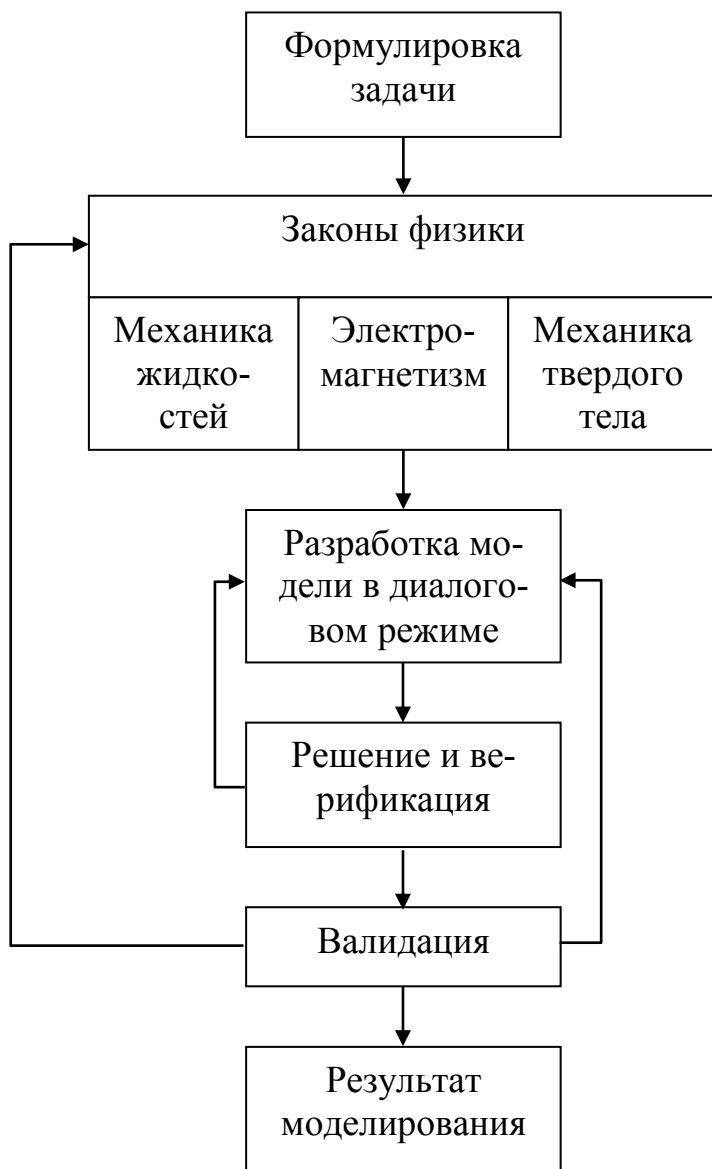


Рис. 6.7. Работа с мультифизической моделью

добавляется еще и такое действие, как изменение количества и содержания законов физики по результатам валидации.

### 6.7. Моделирование мультифизических приложений

Примером мультифизической модели является моделирование работы радиатора охлаждения микросхемы (рис. 6.8). При протекании электрического тока через микросхему (или в другом примере через горную породу) выделяется тепло, которое приводит к расширению радиатора. Таким образом, для моделирования работы такого устройства необходимо использовать систему уравнений, описывающих три физических закона: электротехники, теплотехники, механики.

Такие исследования могут производиться с целью оптимизации какого-либо устройства, процесса или изучения закономерностей интересующих явлений.

Когда приходится привлекать несколько законов фундаментальной физики в одной и той же модели, речь идет о **мультифизическом** моделировании. В схеме на рис. 6.7 речь идет о комбинированной модели, использующей законы механики жидких сред, электромагнетизма и механики твердых тел. На практике приходится сталкиваться с большим количеством вариантов сочетаний законов физики, которые приходится использовать при моделировании. От предыдущей схемы эта отличается тем, что здесь используется несколько законов физики. В данном случае это механика жидкостей, электромагнетизм, механика твердого тела. Помимо операций, рассмотренных на схеме рис. 6.6, при работе с мультифизической моделью

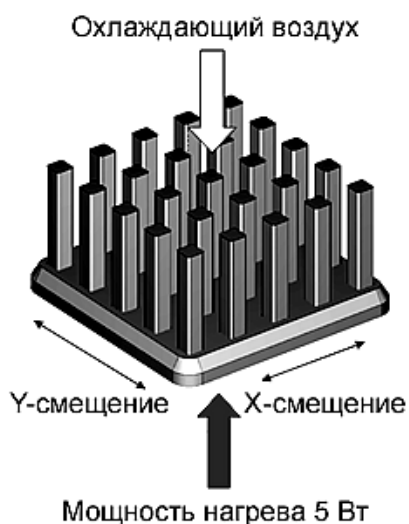


Рис. 6.8. Охлаждающий радиатор

Процесс мультифизического моделирования включает в себя выбор соответствующих нескольких законов физики, конструирование модели, т. е. задание, черчение или импорт геометрии объекта, ввод параметров, описывающих свойства материалов модели, граничных и начальных условий, сеточное разбиение модели, получение решения, постобработку, верификацию и валидацию. На этапе постобработки возможен возврат на предыдущие стадии и расширение модели путем добавления не использованных ранее законов физики.

Указанная последовательность в виде схемы представлена на рис. 6.9.



Рис. 6.9. Последовательность действий при мультифизическом компьютерном моделировании



## 6.8. Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы

Моделирование осуществляется с использованием **дифференциальных уравнений в частных производных** (ДУЧП, англ. partial differential equations или сокращенно PDE). PDE – это уравнение, содержащее неизвестную функцию двух или более переменных и ее частные производные.

Такие уравнения и системы уравнений могут быть:

- линейными и нелинейными;
- скалярными уравнениями или системами уравнений.

Системы нелинейных уравнений или нелинейные скалярные уравнения более сложны для решения, чем системы линейных уравнений или линейные уравнения скалярных величин.

При описании PDE используется ряд обозначений, позволяющих сократить запись.

1. Обозначение частной производной переменной  $u$  по  $x$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

2. Оператор набла, называемый также оператором Гамильтона – это векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом набла  $\nabla$ .

$$\nabla u = [u_x \ u_y \ u_z].$$

3. С помощью оператора набла можно записать различные виды дифференцирования, в частности, двойное дифференцирование

$$\nabla \cdot (\nabla u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

4. Оператор Лапласа (лапласи́ан) — дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом  $\Delta$ . Функции  $F$  он ставит в соответствие функцию

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) F.$$

Оператор Лапласа часто обозначается следующим образом:  $\nabla^2$ , то есть в виде скалярного произведения оператора набла на самого себя. Оператор Лапласа эквивалентен также последовательному взятию операций градиента и дивергенции, т. е.  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad}$ , таким образом, значение оператора

Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников (стоков) потенциального векторного поля  $\text{grad } F$  в этой точке.

Использование таких обозначений позволяет компактно записать различные дифференциальные уравнения.

Приведем примеры некоторых распространенных дифференциальных уравнений в общей форме (General form). В записях используются обозначения:  $\Omega$  - одно-, двух- или трехмерное пространство;  $\partial\Omega$  - границы;  $\partial^2\Omega$  - точки.

Пример 1. Уравнение конвекции-диффузии

$$\begin{cases} \vec{u}_t + \beta \cdot \nabla \vec{u} - \nabla \cdot c \nabla \vec{u} = 0 & \text{внутри области } \Omega \text{ - дифференциальное уравнение;} \\ \vec{u}(x, t) = g(x) & \text{в } \partial\Omega \text{ - граничные условия;} \\ \vec{u}(x, 0) = f(x) & \text{в } \partial^2\Omega \text{ начальные условия.} \end{cases}$$

Пример 2. Уравнения Навье — Стокса (англ. *Navier-Stokes*) — система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости. Уравнения Навье — Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач. Названы по имени французского физика Луи Навье и британского математика Джорджа Стокса.

Система состоит из двух уравнений:

- уравнения движения,
- уравнения неразрывности.

В векторном виде для несжимаемой жидкости они записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu_k \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}, \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $t$  — время,  $\nu_k$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)$  — векторное поле скоростей,  $\vec{f}$  — векторное поле массовых сил. Неизвестные  $p$  и  $\vec{v}$  являются функциями времени  $t$  и координаты  $x \in \Omega$ , где  $\Omega \subset R^n$ ,  $n = 2, 3$  — плоская или трехмерная область, в которой движется жидкость.  $R^n$  в данном случае обозначает  $n$ -мерное пространство. Обычно в систему уравнений Навье-Стокса добавляют краевые (граничные) и начальные условия, например

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{\partial\Omega} &= 0 \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0. \end{aligned}$$

Иногда в систему уравнений Навье — Стокса дополнительно включают уравнение теплопроводности и уравнение состояния.

Пример 3. Уравнения Максвелла – система из двух векторных и двух скалярных уравнений. Это основные уравнения классической электродинамики, описывающие эволюцию электромагнитного поля и его взаимодействие с зарядами и токами.

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Здесь  $\vec{H}, \vec{E}$  - векторы напряженности магнитного и электрического полей;  $\rho$  - плотность стороннего электрического заряда;  $\vec{j} = \vec{u}\rho$  - плотность электрического тока (плотность тока проводимости);  $\vec{u}$  - скорость зарядов в данной точке;  $c$  - скорость света в вакууме (299 792 458 м/с);  $\vec{B}, \vec{D}$  - векторы магнитной и электрической индукции;  $\nabla$  - дифференциальный оператор набла, при этом:  $\nabla \times \vec{E} \equiv \text{rot } \vec{E}$  означает ротор вектора,  $\nabla \cdot \vec{E} \equiv \text{div } \vec{E}$  означает дивергенцию вектора. Приведённые выше уравнения Максвелла не составляют ещё полной системы уравнений электромагнитного поля, поскольку они не содержат свойств среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Соотношения, связывающие величины  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{j}$  и учитывающие индивидуальные свойства среды, называются материальными уравнениями.

В табл. 6.2 приведены наиболее употребительные дифференциальные уравнения в компактной и стандартной записях. В этих обозначениях  $\vec{u}$  - вектор перемещений;  $\vec{f}$  - вектор сил.

Таблица 6.2

Классические PDE в компактной и стандартной записях

Уравнение	Компактная запись	Стандартная запись (2D)
Уравнение Лапласа	$-\nabla \cdot (\nabla \vec{u}) = 0$	$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
Уравнение Пуассона	$-\nabla \cdot (c \nabla \vec{u}) = \vec{f}$	$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f$
Уравнение Гельмгольца	$-\nabla \cdot (c \nabla \vec{u}) + \alpha \vec{u} = \vec{f}$	$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \alpha u = f$

Уравнение теплопроводности	$d_a \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \vec{u}) = \vec{f}$	$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f$
Волновое уравнение	$e_a \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla \vec{u}) = \vec{f}$	$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f$
Уравнение Шредингера	$-\nabla \cdot (c \nabla \vec{u}) + \alpha \vec{u} = \lambda \vec{u}$	$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \alpha u = \lambda u$
Уравнение конвекции-диффузии	$d_a \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \vec{u}) + \beta \cdot \nabla \vec{u} = \vec{f}$	$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial u}{\partial y} = f$

## 6.9. Дифференциальные уравнения в частных производных, используемые в системе COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics – это мощная интерактивная среда для моделирования и расчетов методом конечных элементов большинства научных и инженерных задач, основанных на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE). Этот программный пакет позволяет расширять стандартные модели, использующие одно дифференциальное уравнение (прикладной режим) и мультифизические модели для расчета связанных между собой физических явлений. Расчет в этой среде не требует глубокого знания математической физики и метода конечных элементов. Это возможно благодаря встроенным физическим режимам, где коэффициенты PDE задаются в виде величин понятных физических свойств и условий, таких, как теплопроводность, теплоемкость, модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность и других, в зависимости от выбранного физического раздела. Преобразование этих величин в коэффициенты математических уравнений происходит автоматически. Взаимодействие пользователя с программой возможно стандартным способом – через графический интерфейс пользователя (англ. Graphical User Interface или сокращенно GUI), либо программированием с помощью скриптов на языке COMSOL Script или языке MATLAB.

В системе COMSOL Multiphysics для решения интересующих нас задач используется обобщенное дифференциальное уравнение, конкретные виды других ДУ получаются путем исключения из него определенных слагаемых. Конкретные физические задачи получаются приданием определенного смысла тем или иным коэффициентам и переменным, входящим в это уравнение.

Уравнения могут быть заданы в двух формах: строгой (или, другими словами, сильной) в виде ДУЧП, а также в слабой в виде интегральных уравнений. В свою очередь, существует два варианта строгой формы: коэффициентная форма, которая применима для решения линейных задач, и общая форма, которая пригодна для решения как линейных, так и нелинейных задач.

Таким образом, всего существуют три формы записи ДУ:

1) коэффициентная форма, в наибольшей степени благоприятная для использования инженерами, применяется при решении линейных или слабо нелинейных задач;

2) общая (генеральная) форма, используется при решении нелинейных задач;

3) ослабленная проекционная форма (другие названия - интегральная форма, вариационная формулировка, полуслабая вариационная формулировка).

Последние две формы требуют более глубокой математической подготовки. В дальнейшем будем ориентироваться на коэффициентную форму как наиболее доступную.

Система позволяет производить различные типы анализа:

- стационарный (stationary) и переходный (transient) анализ;
- линейный и нелинейный анализ;
- модальный анализ и анализ собственных частот.

Дифференциальное уравнение в частных производных в полном виде записывается как

$$e_a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \bar{u} + \alpha \bar{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \bar{u} + a \bar{u} = f \quad \text{- внутри подобластей (в } \Omega \text{)}; \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{n} \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + q u = g - h^T \mu \\ hu = r \end{array} \right\} \quad \text{- на границах подобластей (в } \partial \Omega \text{)}. \quad (6.2)$$

Пример: уравнение Пуассона

$$-\nabla \cdot \nabla u = 1 \quad \text{- внутри подобластей (в } \Omega \text{)};$$

$$u = 0 \quad \text{- на границах подобластей (в } \partial \Omega \text{)}$$

получается из (1) и (2) при  $c = f = h = 1$  и при значениях всех других коэффициентов, равных 0.

Рассмотрим интерпретацию слагаемых и коэффициентов этого дифференциального уравнения. Слагаемые, входящие в это уравнение, в зависимости от решаемой задачи могут обозначать те или иные физические величины. В тех случаях, когда речь идет о задачах механики сплошной среды или массопереноса, они имеют смысл, указанный на рис. 6.10.

Соответственно, коэффициенты, входящие в это уравнение, обозначают:

$e$  – коэффициент масс (плотность);

$d$  – коэффициент демпфирования или коэффициент масс;

$c$  – коэффициент диффузии (рассеяния);

$\alpha$  - коэффициент конвекции консервативного потока (консервативного означает без потерь, в отличие от диссипативного, когда при переносе масс происходят потери энергии с переходом в тепло);

$\beta$  - коэффициент конвекции;

$\gamma$  - член уравнения, характеризующий источник консервативного потока;

$a$  – коэффициент поглощения;  
 $f$  – член уравнения, характеризующий источник.

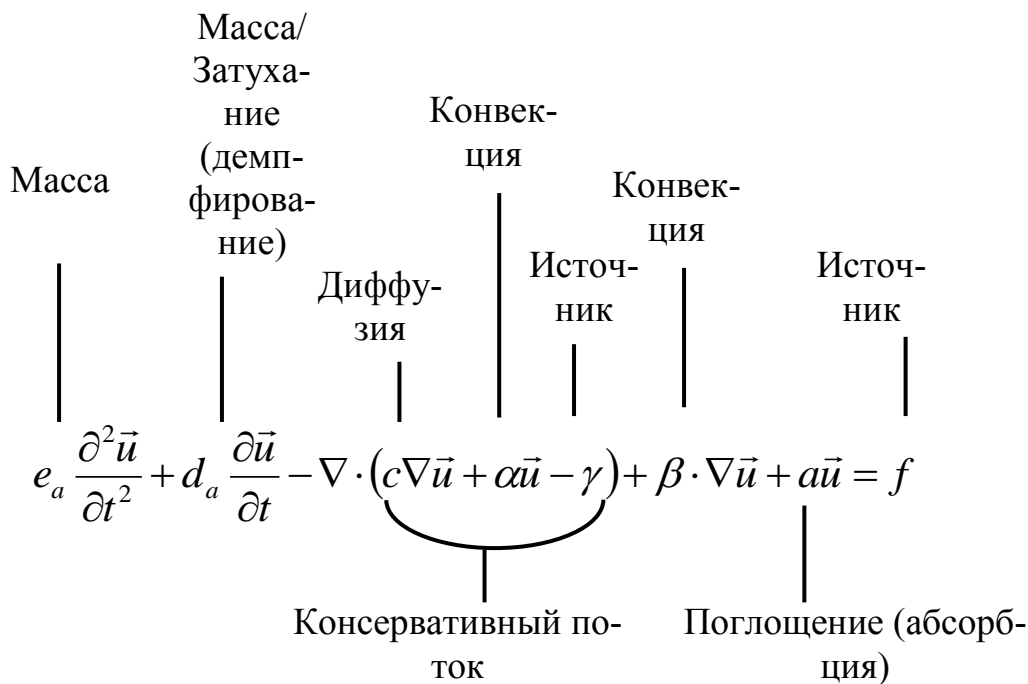


Рис. 6.10. Интерпретация слагаемых и коэффициентов дифференциального уравнения в полном виде

Данная трактовка коэффициентов дифференциального уравнения в частных производных может быть применена для многих приложений.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

### 1. Волновое уравнение

Волновое уравнение в математике — линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах) и электромагнетизме (электродинамике). Находит применение и в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн.

В общем случае волновое уравнение, описывающее свободные колебания, записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \Delta \vec{u},$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$  - неизвестная функция,  $t$  - время,  $x \in R^n$  - пространственная переменная, а коэффициент вычисляется по формуле

$$\frac{1}{a^2} = v^2,$$

где  $v$  - фазовая скорость.

В одномерном случае уравнение называется также уравнением колебания струны и записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

В случае силового воздействия рассматривается неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \Delta \vec{u} + f,$$

где  $f = f(x, t)$  - некая заданная функция внешнего воздействия (внешней силы). Это уравнение описывает вынужденные колебания в системе.

В системе COMSOL Multiphysics волновое уравнение получается из (1) путем исключения некоторых слагаемых (приравниванием соответствующих коэффициентов нулю). Такое уравнение показано на рис. 6.11, где отсутствующие слагаемые отмечены зачеркиванием.

$$\begin{array}{c}
 \text{Упругие} \quad \text{Началь-} \\
 \text{напряже-} \quad \text{ные/термические} \\
 \text{ния} \quad \quad \text{напряжения} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 e_a \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \vec{u} + \cancel{\sigma \vec{u}} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \vec{u} + \cancel{\alpha \vec{u}} = f \\
 \text{Масса} \quad \text{Демпфи-} \quad \text{Сила, при-} \\
 \quad \quad \text{рование} \quad \quad \text{кладываемая} \\
 \quad \quad \text{массы} \quad \quad \quad \text{к телу}
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 6.11. Волновое уравнение, получаемое из (1)

В этом уравнении

$e_a = \rho$  - плотность;

$d_a$  - коэффициент затухания;

$\sigma = c \nabla u - \gamma$  - напряжения;

$c$  - жесткость.

## 2. Дифференциальное уравнение конвективно-диффузионного переноса (конвективно-диффузионное уравнение)

Преобразование дифференциального уравнения общего вида к уравнению конвективно-диффузионного переноса показано на рис. 6.12.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{диффузия} & \text{источник} & \text{абсорбция} & & \\
 & & | & | & | & & \\
 e_a \cancel{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}} + d_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \bar{u} + a \bar{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \bar{u} + a \bar{u} = f \\
 \text{аккумуляция/накопление} & & \text{конвекция} & \text{конвекция} & \text{источник} & & 
 \end{array}$$

Рис. 6.12. Преобразование дифференциального уравнения общего вида к уравнению конвективно-диффузионного переноса

## 3. Волновое уравнение, описывающее частотный отклик

Другая форма волнового уравнения (уравнение Гельмгольца) представлена на рис. 6.13.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Диффузия} & \text{Элемент} \\
 & | & \text{Гельмгольца} \\
 e_a \cancel{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}} + d_a \cancel{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} - \nabla \cdot (c \nabla \bar{u} + a \bar{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \bar{u} + a \bar{u} = f \\
 & & \text{Источник}
 \end{array}$$

Рис. 6.13. Волновое уравнение в форме, описывающей частотный отклик

Уравнение Гельмгольца имеет вид  $-\nabla \cdot (c \nabla \bar{u}) - k^2 \bar{u} = f$ , где

$$a = -k^2;$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ - волновое число;}$$

$\lambda$  - длина волны.

## **6.10. Основные компоненты среды COMSOL Multiphysics**

Рассмотрим основные компоненты среды COMSOL Multiphysics.

Работа в этой среде начинается с Навигатора моделей (Model Navigator), интерфейс которого в версии 3.5a имеет вид, представленный на рис. 6.14.

Здесь производятся все программные настройки, такие, как установка размерности модели и режимы приложений при создании новых моделей, от-



крытие существующих моделей, которые были созданы ранее, а также осуществляется вход в библиотеку моделей.

COMSOL Multiphysics предоставляет интегрированный графический интерфейс пользователя, в котором можно создавать и производить расчеты моделей с использованием предварительно установленного физического режима, режима PDE, или комбинации этих двух режимов, т. е. собственно мультифизического моделирования.

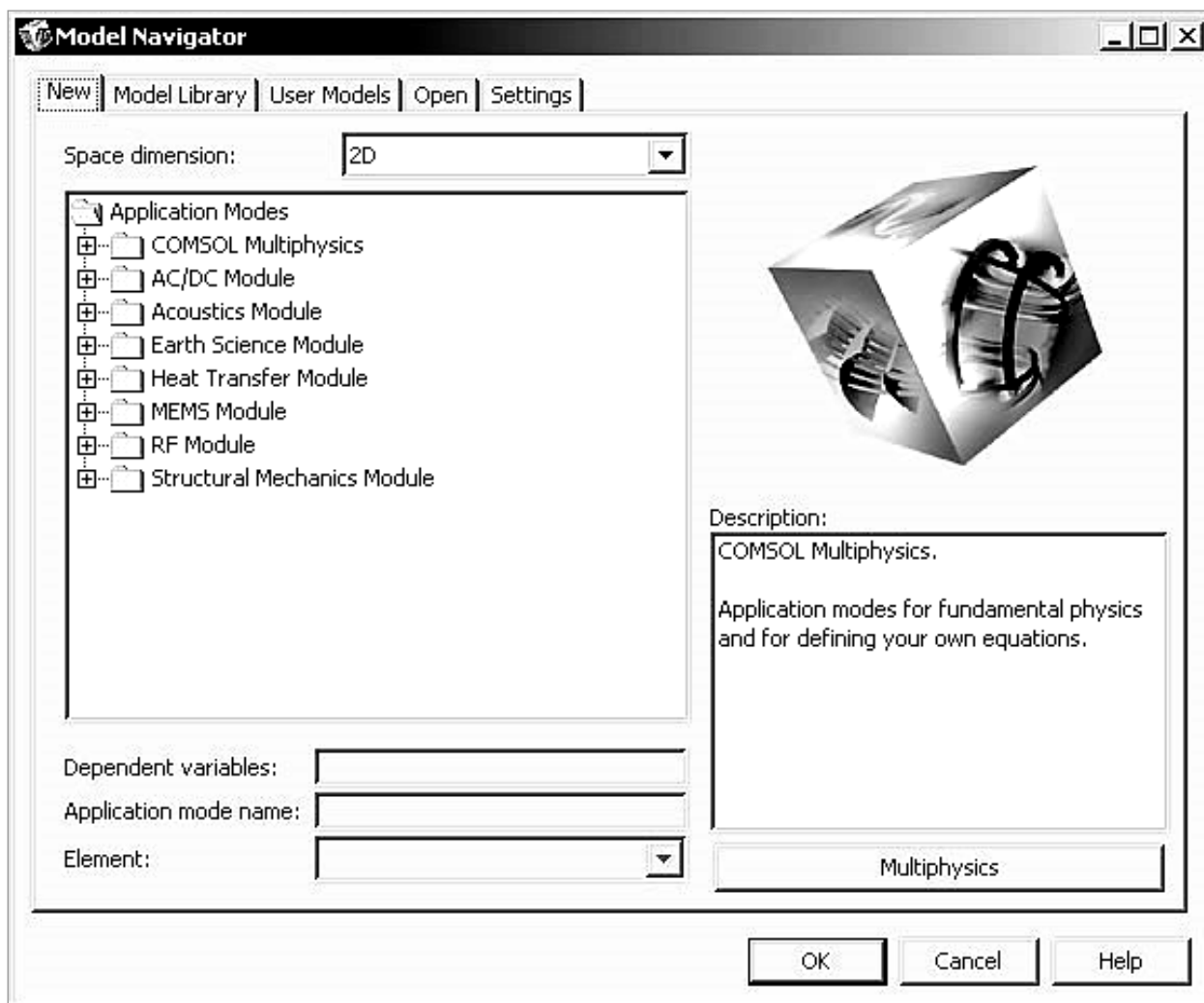


Рис. 6.14. Окно навигатора моделей среды COMSOL Multiphysics 3.5

При формировании задачи могут быть выбраны режимы двумерных 2D, трехмерных 3D, а также осесимметричных моделей. После выбора размерности пространства моделирования используются шаблоны, в которых задаются свойства материалов, граничные условия и другие величины, после чего COMSOL Multiphysics формирует дифференциальные уравнения в частных производных PDE.

Для того чтобы было легче осваивать работу в среде COMSOL Multiphysics при решении конкретных задач, в ней имеется раздел COMSOL Multiphysics Model Library, содержащий готовые к запуску примеры, иллюстрирующие применения различных возможностей системы. Такие примеры содержат два элемента: файлы моделей, установленные вместе с системой, и

сопровождаящие их описания. При освоении системы следует подыскивать наиболее близкий по смыслу пример расчета, загрузить его и нажать кнопку Solve. Каждая модель сопровождается расширенной документацией, включающей техническое описание, обсуждение результатов, а также пошаговые инструкции по установке параметров моделей.

Описание последовательности дальнейших действий проиллюстрируем на примере расчета и визуализации напряжений и деформаций образца гранита в виде прямоугольной призмы с квадратным основанием, в которой в горизонтальном направлении просверлено отверстие цилиндрической формы. Нижней гранью образец устанавливается на неподвижную плиту пресса, а к верхней грани прикладывается нагрузка. Расчетным путем следует смоделировать:

- распределение напряжений и деформаций в объеме образца при постоянной нагрузке;

- изменение напряжений, деформаций и формы образца при нагрузке, возрастающей от нуля до заданного значения;

- изменение формы при вибрациях на собственных частотах колебаний.

Результаты расчетов можно визуализировать в различных видах.

Одной из важнейших частей моделирования является создание геометрии модели (рис. 6.15).

Интерфейс пользователя системы содержит набор инструментов для создания одно-, двух- и трехмерных моделей, обозначаемых соответственно как 1D, 2D и 3D. Здесь буква D обозначает размерность, что произошло от слова dimension. С их помощью пользователь может начертить самостоятельно объект исследований. Пакет позволяет также импортировать созданные ранее модели в форматах DXF, GDS, STL, VRML, а также в формате COMSOL. Возможен также импорт непосредственно 3D-сеток в формате NASTRAN. В сочетании с программными инструментами для создания геометрии модели возможно также использовать даже сами изображения.

При создании моделей пользователю предоставляется большая гибкость при установке различных констант и переменных с использованием различных математических и логических функций. В среде программирования COMSOL возможна работа с языками скриптов COMSOL Script или MATLAB, с помощью которых можно определять свойства материала, нагрузки, источники и граничные условия.

После того, как задана геометрия и параметры модели, COMSOL автоматически разбивает ее по сетке (рис. 6.16). Если же возникает необходимость, можно изменить параметры генератора, например, для того, чтобы увеличить шаг сетки, если не хватает оперативной памяти, или уменьшить его, чтобы сделать расчеты более точными. Возможна также установка как треугольных, так и четырехугольных форм элементов.

Затем следует стадия решения, для которой имеется целый набор программ-решателей (солверов), разработанных для решения задач нахождения собственных значений, стационарного и временного анализа. Для решения линейных систем имеются как непосредственные, так и итеративные решатели.

COMSOL Multiphysics по умолчанию устанавливает тип решателя в соответствии с решаемой задачей и типом выбранного приложения. Вы можете записать последовательные вызовы необходимых решателей в виде скрипта и затем редактировать или автоматизировать процесс решения.

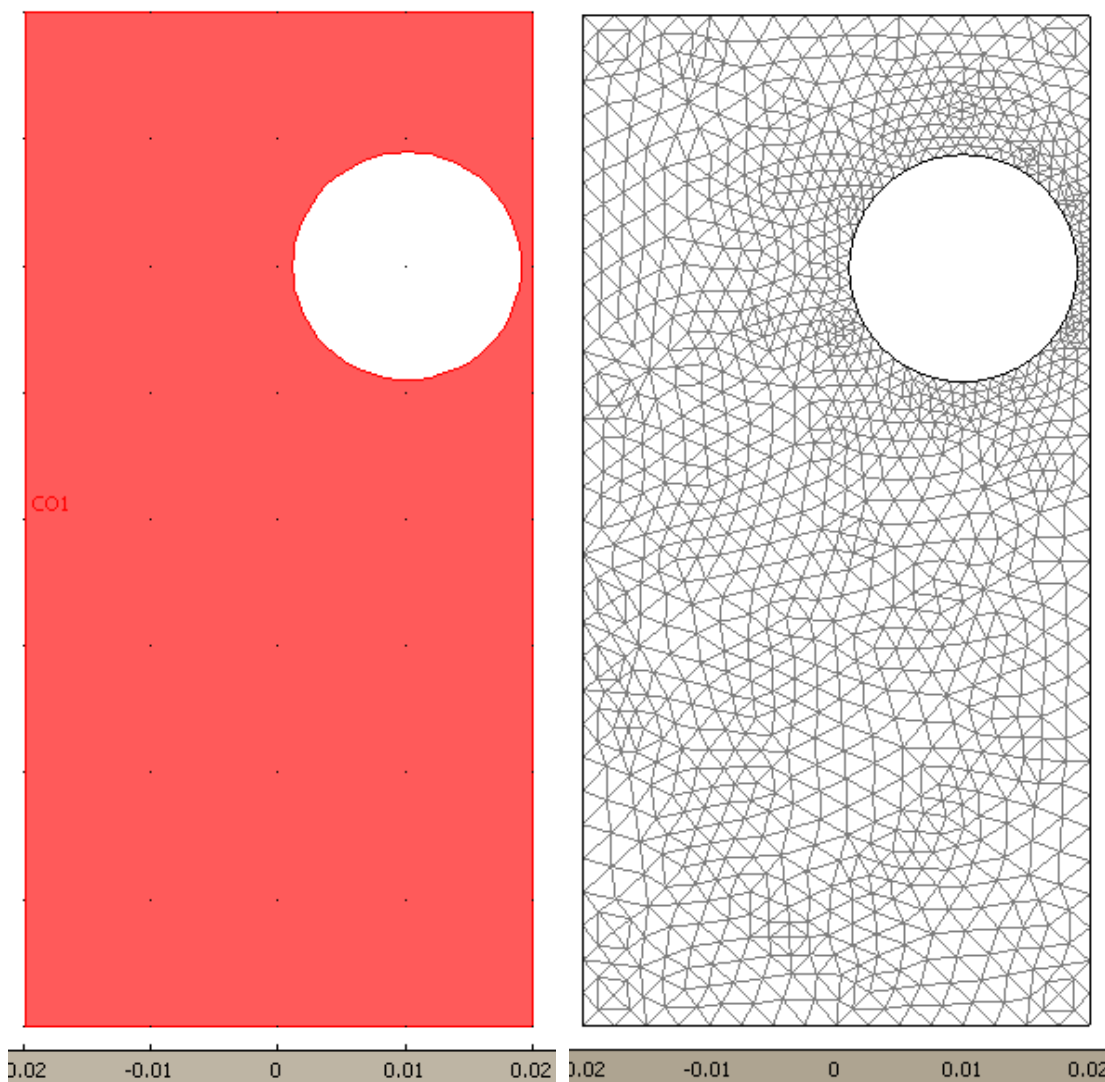


Рис. 6.15. Чертеж геометрической формы призмы с отверстием

Рис. 6.16. Разбивка призмы с отверстием по сетке на треугольные элементы

Для постобработки COMSOL Multiphysics предоставляет целый ряд возможностей. К ним относятся: изображения в виде поверхностей, слоев, изолиний, контуров, деформированных форм, стрелочных диаграмм, линий токов, движения частиц, перекрестных графиков зависимостей одной величины от другой, анимации.

На рис. 6.17, а)-ж) представлены примеры визуализации результатов расчетов напряжений и деформаций в прямоугольной гранитной призме с шириной основания 0,04 м и высотой 0,08 м, в которой просверлено горизонтальное отверстие диаметром 0,018 м. Здесь приведены изображения рассчитанных величин при статическом нагружении верхней грани напряжением 10 МПа:

- вертикальных напряжений с помощью цветовой или яркостной кодировки (рис. 6.17, *а*), с помощью изолиний равных напряжений (рис. 6.17, *в*), а также в виде поверхности (рис. 6.17, *б*);

- деформаций в виде стрелочной диаграммы (рис. 6.17, *г*), линий токов, характеризующих направление движения частиц при деформировании (рис. 6.17, *д*), а также деформированной формы призмы с увеличенными для наглядности смещениями (рис. 6.17, *е*).

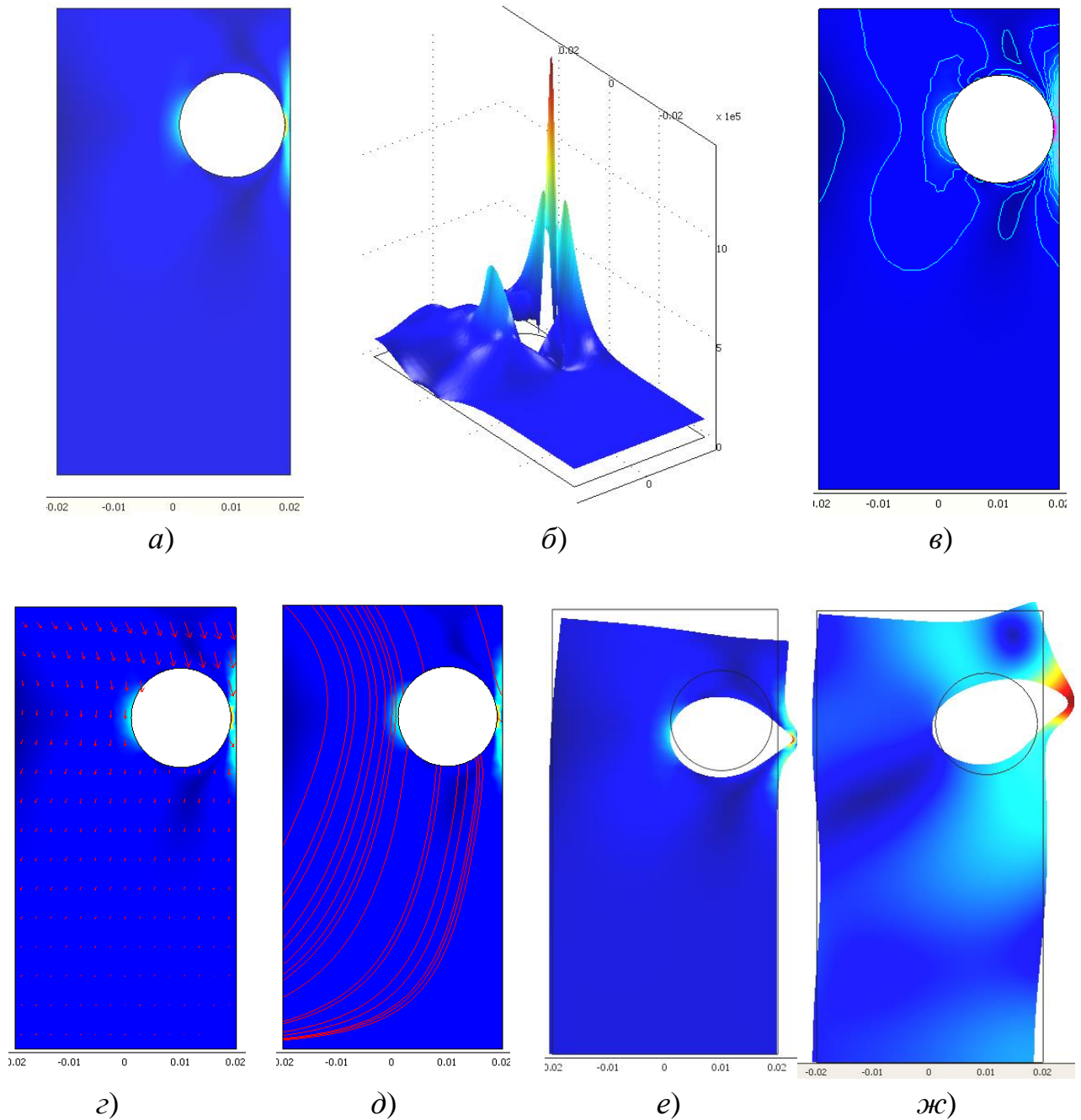


Рис. 6.17. Различные варианты визуализации результатов расчетов напряжений (*а-в*) и деформаций (*г - д*), а также формы колебаний на одной из собственных частот (*ж*) образца гранита в виде призмы с размерами основания 0,04 x 0,04 м и высотой 0,08 м с отверстием

Кроме того, отражены результаты расчета одной из частот собственных колебаний в виде деформаций призмы при таких колебаниях (рис. 6.17, ж).

Здесь также приведены графики зависимостей вертикальных напряжений в случае, когда производится линейное во времени увеличение нагрузки (см. вариант расчета с возрастающей нагрузкой в п. 7.5.1): на рис. 6.18 от времени в точке с координатами  $x = 0,01$  м;  $y = 0,01$  м, а на рис. 6.19 - от координаты  $x$  вдоль горизонтальной линии при  $y = 0,01$  м для моментов времени  $t = 1$  с и  $t = 0$  с. Отрицательные значения соответствуют сжатию, а положительные – растяжению.

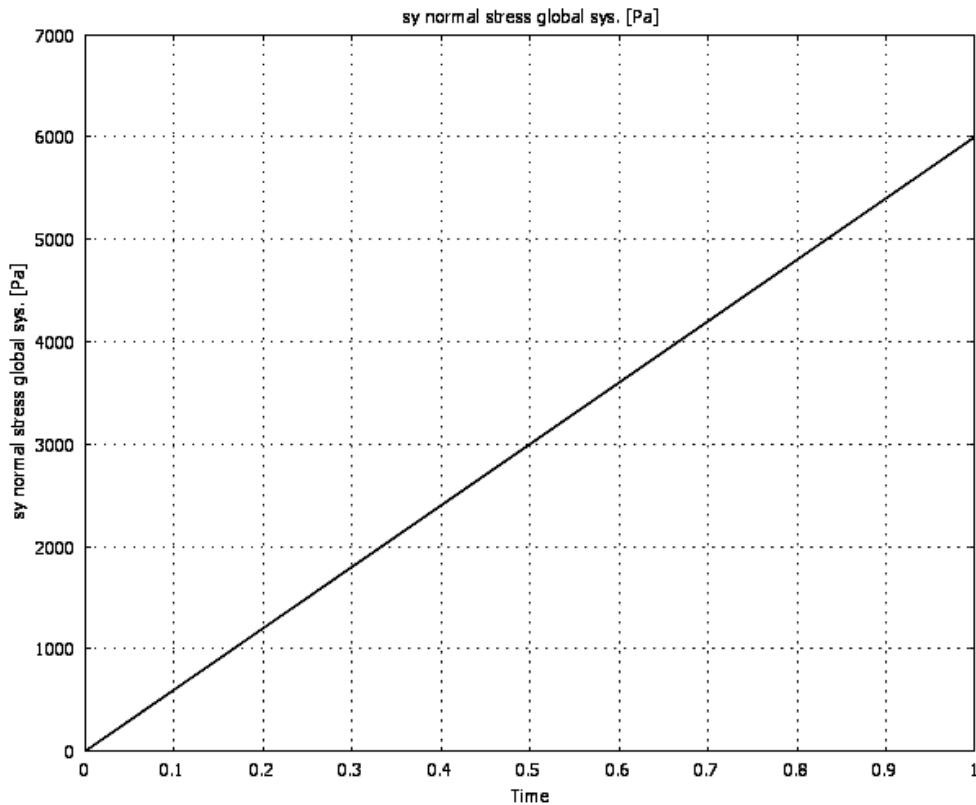


Рис. 6.18. Зависимость вертикальных напряжений в точке с координатами  $x = 0,01$ ;  $y = 0,01$  от времени при линейном увеличении нагрузки на образец

Для последнего он имеет вид горизонтальной линии, проходящей на уровне нуля. При этом нагружение верхней грани осуществляется увеличивающимся от 0 до 10 МПа напряжением в течение 100 с по линейному закону

$$\sigma_y(t) = -\frac{\sigma_{\max} \cdot t}{t_{\max}},$$

где  $\sigma_y(t)$  - зависимость изменения вертикальных напряжений на верхней грани от времени;  $\sigma_{\max} = 10$  МПа,  $t_{\max} = 100$  с - максимальные значения напряжений и времени нагружения соответственно.

В дополнение к этому постобработка может быть продолжена в среде COMSOL Script, где возможна работа со структурами данных и функций COMSOL Multiphysics с использованием скрипт-программирования.

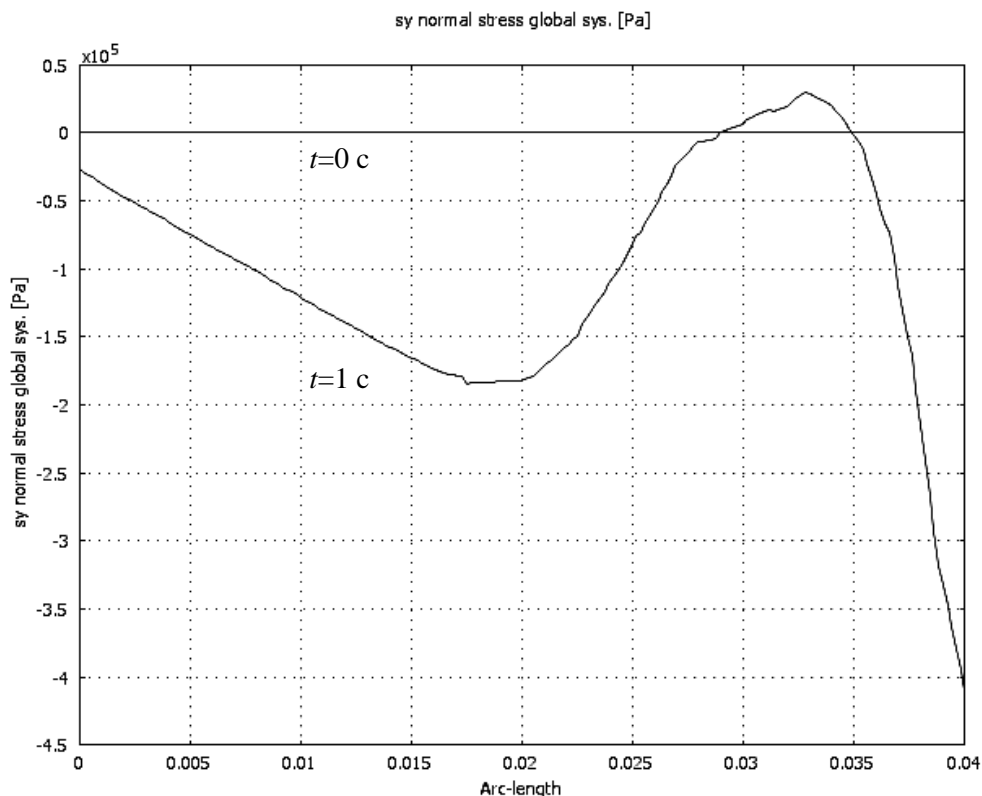


Рис. 6.19. Зависимость вертикальных напряжений по сечению призмы от координаты  $x$  при  $y = 0,01$  м для моментов времени  $t = 0$  с и  $t = 1$  с

Для документирования моделей генератор отчетов COMSOL Multiphysics **Report Generator** создает запись всей модели в виде отчета, включая графику и геометрию, сетку и большое количество вариантов постобработки. Вы можете распечатать этот отчет либо непосредственно, либо в виде HTML-страницы для последующего просмотра через веб-браузер или дальнейшего редактирования.

Таким образом, моделирование осуществляется в следующей последовательности.

1. Формулируют задачу.
2. Выбирают размерность задачи (модели).
3. Выбирают расчетный модуль, который будут использовать для моделирования.
4. Задают или импортируют форму и геометрические размеры исследуемой модели.
5. Задают константы, используемые при расчетах.
6. Задают выражения, используемые при расчетах.
7. Задают физические свойства составных частей модели.
8. Задают граничные условия расчета, на границах указывают действующие силы и ограничения.

9. Задают параметры и осуществляют построение сетки.

10. Задают расчетные параметры: диапазон и шаг исходных величин (времени), метод выбора расчетных точек, метод расчета.

11. Производят расчет модели.

12. Осуществляют послерасчетную обработку и визуализацию данных.

После этого производят интерпретацию полученных результатов.

При расчетах пакет позволяет получать различные величины. Так, например, при расчетах в разделах механики наиболее полную и обобщенную картину напряженно-деформированного состояния дают следующие параметры.

1. Суммарные перемещения  $U_{sum} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$  где  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  — перемещения по направлениям общей системы координат XYZ.

2. Приведенные (эквивалентные) напряжения по Мизесу, где учитывается весь тензор напряжений, выражаются формулой

$$S_{EQV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(S_x - S_y)^2 + (S_y - S_z)^2 + (S_z - S_x)^2 + 6(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)},$$

где  $S_{EQV}$  — эквивалентное напряжение;  $S_x$  — нормальное напряжение по оси X;  $S_y$  — нормальное напряжение по оси Y;  $S_z$  — нормальное напряжение по оси Z;  $S_{xy}$  — касательное напряжение по оси Y;  $S_{yz}$  — касательное напряжение по оси Z;  $S_{zx}$  — касательное напряжение по оси X. Полученная приведенная величина напряжений сравнивается с пределом текучести материала или с допускаемым напряжением. Для плоского напряженного состояния формула Мизеса имеет вид

$$S_{EQV} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 - S_x S_y + 3S_{xy}^2}.$$

3. Другие величины, такие, как отдельные компоненты напряжений или деформаций и их скорости изменения, другие величины, которые также могут быть визуализированы указанными выше способами.

Далее рассмотрим моделирование различных процессов, осуществляемое с использованием различных разделов и модулей системы COMSOL Mutiphysics.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. В чем различие аналитического и имитационного моделирования, каковы достоинства и недостатки каждого метода?
2. Какой принцип лежит в основе метода конечных элементов?
3. В чем заключается суть метода конечных разностей и для чего он используется?
4. Как взаимосвязаны между собой прямая и обратная задачи измерений, какие цели достигаются при решении каждой из них?
5. Какими методами можно решить обратную задачу измерений?
6. Перечислите последовательность действий при описании физических явлений с помощью фундаментальных законов физики.
7. Что такое верификация и валидация программного обеспечения? Какова их роль в компьютерном моделировании?
8. В чем особенность мультифизического компьютерного моделирования физических явлений?
9. Приведите примеры наиболее распространенных дифференциальных уравнений в частных производных. Какие обозначения используются при их записи?
10. Какой вид имеет дифференциальное уравнение в частных производных, используемое в системе COMSOL Multiphysics, позволяющее переходить к различным ДУЧП как к частным случаям? Каков смысл слагаемых, входящих в его состав?
11. Какие виды анализа позволяет осуществлять система COMSOL Multiphysics?
12. Перечислите основные составляющие системы COMSOL Multiphysics.
13. Перечислите последовательность основных действий при моделировании в среде COMSOL Multiphysics.
14. Какие величины система COMSOL Multiphysics позволяет рассчитать в разделах механики?



## 7. РАСЧЕТЫ В РАЗДЕЛАХ СТРУКТУРНОЙ МЕХАНИКИ СИСТЕМЫ COMSOL MULTIPHYSICS

### 7.1. Общие сведения

Разделы **Structural Mechanics** (структурная механика) представлены в сокращенном виде в базовом модуле COMSOL Multiphysics и в расширенном виде в виде отдельного дополнительного модуля **Structural Mechanics**. Этот модуль содержит набор приложений, адаптированный к широкому спектру моделей механики. Программное обеспечение, базирующееся на дифференциальных уравнениях, позволяет разрабатывать модели, реализующие принцип виртуальной работы. С использованием этого модуля в приложении к структурной механике, механике твердого тела и пьезоэлектрическим явлениям возможно производить следующие виды анализа:

- статический анализ;
- анализ собственных частот;
- переходный анализ;
- анализ частотного отклика;
- квазистатический анализ;
- линейный и параметрический анализ потери устойчивости.

Статический анализ (Static Analysis) предусматривает расчет напряжений и деформаций, когда нагрузки и ограничения не изменяются во времени.

Анализ собственных частот (Eigenfrequency Analysis) позволяет рассчитать собственные частоты недемпфированной конструкции.

Анализ собственных частот при демпфировании (Damped Eigenfrequency Analysis) дает возможность рассчитать собственные частоты недемпфированной конструкции и ее поведение, т. е. определить вибрации структуры.

Переходный анализ (Transient Analysis) позволяет определить отклик системы во времени на воздействие сложной формы с учетом масс, момента инерции и затухания.

Анализ частотного отклика (Frequency Response Analysis) дает возможность рассчитать стационарный отклик на гармоническое воздействие различных частот.

Параметрический анализ (Parametric Analysis) позволяет находить решения при различных значениях какого-либо параметра, например, описывающего какие-либо свойства материала.

Большие деформации (Large Deformations). Анализ может включать также расчет больших деформаций с ограничением малых в моделях всех размерностей. Этот эффект иногда рассматривается как нелинейный геометрический эффект. При использовании режима больших деформаций нормальные деформации заменяются деформациями Грина, а напряжения - вторыми напряжениями Пиола-Кирхгофа. COMSOL Multiphysics решает эту задачу с использованием формулировки Лагранжа. Анализ больших деформаций возможен только в постановке задач механики сплошной среды.

### Линейный расчет на потерю устойчивости (Linear Buckling Analysis).

Этот вид расчетов позволяет учитывать эффекты увеличения жесткости при воздействии напряжений, возникающих при нелинейных деформациях. Две составляющие жесткости, определяемые величиной напряжений и свойствами материала, определяют задачу расчета собственной величины, где собственная величина в данном случае - это коэффициент нагрузки, который умножается на величину реально действующей нагрузки и дает значение критической нагрузки в линейной постановке задачи.

Этот анализ использует решатель (солвер) собственных величин.

Другим способом расчета критической нагрузки является включение эффекта больших деформаций и увеличение нагрузки до тех пор, когда решатель не будет иметь решения из-за того, что нагрузка достигла своей критической величины. Этот анализ возможен только в режиме непрерывной среды.

Упруго-пластический анализ (Elasto-Plastic Analysis) использует нелинейную модель с упрочнением или без него. Используются две модели упрочнения: изотропная и кинематическая. Упруго-пластический анализ возможно осуществлять в режиме сплошной среды.

Все разделы проиллюстрированы примерами и могут быть использованы в качестве справки.

## 7.2. Координатные системы

Выбор различных координатных систем доступен только в дополнительном модуле структурной механики, в базовом разделе он отсутствует.

Использование различных координатных систем полезно при определении нагрузок, ограничений и свойств анизотропных материалов, а также при постобработке результатов. Раздел структурной механики позволяет использовать несколько типов координатных систем:

- глобальная координатная система, в которой геометрия исследуемого объекта создается в трехмерной 3D-форме  $(x, y, z)$ ;
- локальная геометрическая координатная система, использующая координаты 2D на границах  $(t, n)$  и 3D на гранях  $(t1, t2, n)$ ;
- индивидуальная координатная система приложения, координатная система оболочки и 3D координатная система Эйлера;
- координатная система, определяемая пользователем.

Выбор координатных систем может осуществляться при установке параметров ограничений (**Constraint**), нагрузок (**Load**), материалов (**Material**).

Здесь ограничимся рассмотрением глобальной координатной системы, используемой в разделе структурной механики базового модуля.

Она может быть использована во всех режимах приложений для определения нагрузок и ограничений в элементах модели всех уровней: точках, ребрах, гранях, подобластях. Она установлена по умолчанию во всех режимах приложений на всех уровнях, исключение составляют ограничения для режима пластины Миндлина. По умолчанию применяются обозначения координат  $x, y, z$  для режимов 2D и 3D и  $r, z$  для режима 2D осевой симметрии.

### 7.3. Затухание

Учет затухания очень важен при временном и спектральном видах анализа. В модуле Structural Mechanics Module возможно задавать различные виды затухания.

Затухание за счет рэлеевского рассеяния. В оптике рэлеевское рассеяние - это рассеяние света без изменения длины волны (называемое также упругим рассеянием) на объектах, размеры которых меньше его длины волны. В нашем же случае речь идет о вязком затухании, когда затухание пропорционально линейной комбинации жесткости и массы. Для иллюстрации этого рассмотрим систему с одной степенью свободы. Следующее уравнение движения описывает динамику такой системы с вязким затуханием

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = f(t).$$

При рэлеевском затухании параметр  $c$  выражается через массу  $m$  и коэффициент упругости  $k$  как

$$c = \alpha_{dM} m + \beta_{dK} k,$$

где  $\alpha_{dM}$ ,  $\beta_{dK}$  - параметры затухания массы и жесткости соответственно.

Проблемой модели рэлеевского затухания (рассеяния) является правильная оценка параметров затухания. Гораздо чаще, чем параметры физического затухания, измеряют коэффициент затухания – отношение существующего затухания к критическому, он часто выражается в процентах. Коэффициент затухания может быть преобразован к параметрам рэлеевского затухания. Для известного коэффициента затухания  $\xi$  на частоте  $f$

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{dM}}{2\pi f} + \beta_{dK} 2\pi f \right),$$

где  $\xi$  – коэффициент затухания.

С точки зрения физики процесса коэффициент  $\alpha_{dM}$  можно интерпретировать как характеристику трения покоя, т. е. при уменьшении частоты силы трения, а вместе с ними и потери, возрастают. Коэффициент  $\beta_{dK}$  при этом можно интерпретировать как характеристику вязкого трения, при котором силы трения и потери возрастают с увеличением частоты.

Измеряя коэффициенты затухания  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  на двух частотах  $f_1$  и  $f_2$ , получают систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi f_1} & \pi f_1 \\ \frac{1}{4\pi f_2} & \pi f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{dM} \\ \beta_{dK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

которую решают относительно  $\alpha_{dM}$ ,  $\beta_{dK}$ .

Можно показать, что существуют пары частот  $f_1$  и  $f_2$  с равными значениями коэффициентов затухания  $\xi_1 = \xi_2$ , но между этими частотами значения коэффициента затухания меньше них (рис. 7.1).

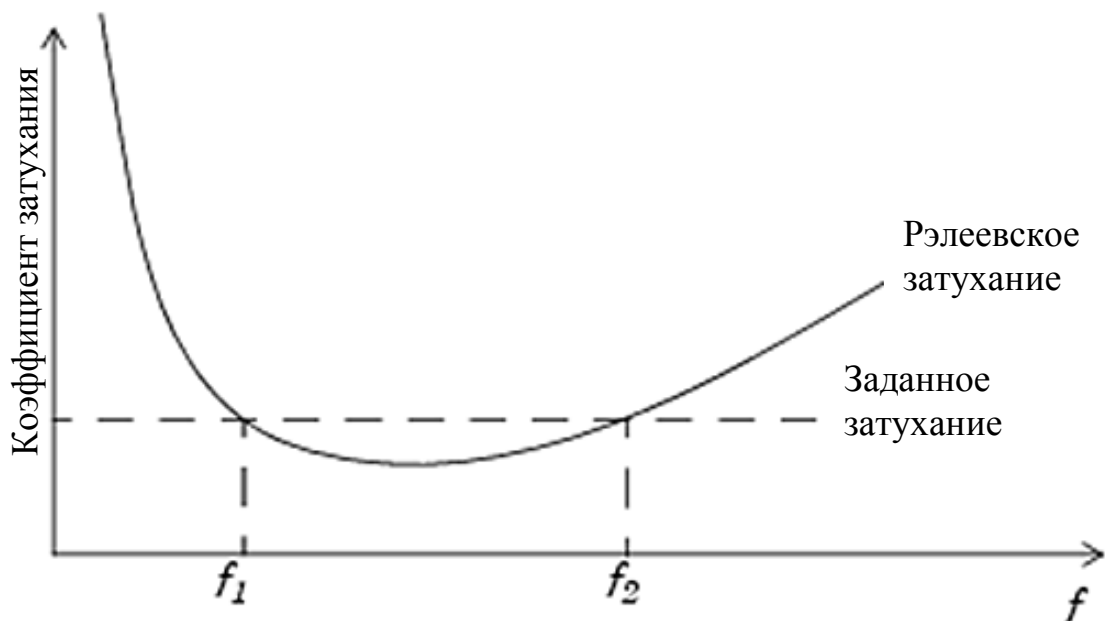


Рис. 7.1. Частотная зависимость рэлеевского затухания

В разделе структурной механики системы COMSOL Multiphysics по умолчанию заданы ненулевые значения величин  $\alpha_{dM}$  and  $\beta_{dK}$ , поэтому необходимо устанавливать их величины в зависимости от конкретной решаемой задачи.

#### Затухание упругих волн в горных породах

Для горных пород принимается  $\alpha_{dM} = 0$  и рассматривается только одна составляющая затухания, а именно,  $\beta_{dK}$ . Определить ее можно путем прозвучивания образцов или участка массива пород и измерений амплитуд сигнала на различных расстояниях. Такие измерения в лабораторных условиях могут быть проведены на образцах различной высоты. Можно измерить амплитуды в одном образце, затем отпилить часть от него и провести повторные измерения на другой базе. В натуральных условиях, например, при измерениях в скважинах, регистрация может быть произведена в двух точках, находящихся на разном расстоянии от излучателя.

Пусть два приемника упругих волн находятся на расстояниях  $x_1 < x_2$  от излучателя, а амплитуды сигналов первых вступлений при этом равны  $U_1 > U_2$  соответственно. Эти амплитуды определяются выражениями

$$U_1 = U_0 \exp(-\xi x_1); U_2 = U_0 \exp(-\xi x_2),$$

где  $U_0, U_1, U_2$  - амплитуды упругой волны в месте излучения и на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  соответственно,  $\xi$  - коэффициент затухания, 1/м. Разделив одно выражение на другое, получаем

$$\frac{U_1}{U_2} = \exp[\xi(x_2 - x_1)].$$

Логарифмируя правую и левую части, получаем

$$\xi = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

Для горных пород характерна прямая пропорциональная зависимость затухания от частоты

$$\xi = 2\pi f \beta_{дк},$$

что дает возможность определить коэффициент  $\beta_{дк}$ .

Из осциллограмм определяют период колебаний  $T_1$  и соответствующую частоту первых вступлений  $f_1 = \frac{1}{T_1}$ . Коэффициент затухания определяется по вышеупомянутой формуле

$$\xi = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{U_1}{U_2} [1/м],$$

а коэффициент  $\beta_{дк}$  из выражения

$$\beta_{дк} = \frac{\xi}{2\pi f_1}.$$

Коэффициент потерь, тангенс угла потерь (Loss Factor Damping) также называется затуханием материала или структурным затуханием. Он используется тогда, когда работа вязкоупругого материала моделируется в области различных частот. Комплексный модуль упругости  $G^*(\omega)$  – это представление функции зависимости релаксации напряжений вязкоупругого материала от частоты. Он определяется как

$$G^* = G' + jG'' = (1 + j\eta)G', \text{ где}$$

$G'$ ,  $G''$  - действительная и мнимая части (storage modulus и loss modulus соответственно) комплексного модуля упругости. Их отношение  $\eta = G''/G'$  представляет собой тангенс угла потерь. Составляющая  $G'$  определяет количество энергии, накопленной в упругих деформациях, а  $G''$  - количество диссипированной энергии, перешедшей в тепло. Все эти величины  $G'$ ,  $G''$ ,  $\eta$  зависят от частоты.

В системе COMSOL Multiphysics этот вид потерь задается в качестве множителя при относительных деформациях в соотношении напряжения-деформации

$$\sigma = D((1 + j\eta)\varepsilon - \varepsilon_{th} - \varepsilon_0) + \sigma_0.$$

Коэффициент потерь (затухания) используется для расчета частотного отклика во всех приложениях кроме упругопластических материалов.

Эквивалентное вязкое затухание. Хотя эквивалентное вязкое затухание не зависит от частоты, его можно использовать и при расчете частотного отклика. Эквивалентное вязкое затухание использует коэффициент потерь  $\zeta$  в качестве параметра затухания, но его использование различно в зависимости от конкретных значений коэффициента потерь.

Пьезоэлектрические приложения имеют встроенную поддержку этого типа затухания. Для других приложений они могут быть смоделированы с помощью параметра затухания жесткости (упругости)  $\beta_{дж}$ , который определяется отношением коэффициента потерь  $\zeta$  к частоте возбуждения  $f$

$$\beta_{дж} = \frac{\zeta}{2\pi f} = \frac{\zeta}{\omega}.$$

При этом значение коэффициента затухания  $\alpha_{дж}$  должно быть установлено равным 0.

Затухание в явной форме. Другой способ моделирования затухания - это задать его в явной форме, как вязкую силу. В переходном анализе это можно сделать, задавая усилие, прямо пропорциональное скорости и взятое с противоположным знаком

$$\vec{F} = -c \cdot \vec{v},$$

где  $\vec{v}$  - вектор скорости

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{bmatrix},$$

при этом  $u_t$ ,  $v_t$ ,  $w_t$  - компоненты скорости в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Вязкое затухание может быть задано такой силой для любой части модели. При анализе частотного отклика модели вязкое затухание может быть задано похожим образом, но при этом имя переменной, обозначающей скорость, должно быть заменено соответствующим именем, используемым в конкретном приложении, например, **u\_t\_smsld** в приложении **Solid, Stress-Strain**.

Отсутствие затухания. Чтобы создать модель без учета затухания, следует выбрать **no damping** из списка **Damping model**.

### Пример расчета коэффициентов $\alpha_{dM}$ , $\beta_{dK}$

В качестве примера рассмотрим расчет параметров затухания рэлеевской модели при наличии обоих слагаемых  $\alpha_{dM}$  и  $\beta_{dK}$ . Исходными для расчета этих коэффициентов являются значения затухания на двух известных частотах, получаемые из эксперимента, например

$$\alpha_1 = 0,1 \text{ при } f_1 = 200 \text{ Гц};$$

$$\alpha_2 = 0,1 \text{ при } f_2 = 600 \text{ Гц}.$$

В COMSOL Script или MATLAB вводим следующие команды, с помощью которых решаем систему уравнений и получаем искомые значения параметров рэлеевской модели затухания.

```
b=[0.1;0.1];
A=[1/(2*200*2*pi) 2*pi*200/2; 1/(2*600*2*pi) 2*pi*600/2];
% A*damp=b – это комментарий, показывает вид уравнения, не вводить
damp=A\b;
alphadM=damp(1)
betadK=damp(2)
```

В этой программе для параметра  $\alpha_{dM}$  принято обозначение **alphadM**, а для параметра  $\beta_{dK}$  **betadK**. В данном случае как результат получаем

$$\alpha_{dM} = 1.88e2, \beta_{dK} = 3,98e-5.$$

Напомним, что для горных пород коэффициент  $\alpha_{dM}$  приравнивается нулю.

## 7.4. Переменные

Для расчетов внутри программы используются различные переменные, наименование которых в некоторых случаях нужно знать. Например, в табл. 7.1 перечислены свойства материалов, используемые при расчетах в разделе Structural Mechanics, а также приведены их обозначения.

Таблица 7.1

Свойства материалов, их обозначение и описание

Параметр	Переменная	Описание
E	E	Модуль упругости
$\nu$	nu	Коэффициент Пуассона
$S_f$	Sf	Модуль сдвига
$\rho$	rho	Плотность материала
$\alpha$	alpha	Коэффициент термического расширения
th	thickness	Толщина, плотность
$\alpha_{dM}$	alphadM	Параметр масс рэлеевского затухания
$\beta_{dK}$	betadK	Параметр жесткости рэлеевского затухания

В некоторых меню, разделах или вкладках можно также встретить, как обозначаются те или иные переменные. На рис. 7.2 представлен пример вкладки **Variables** в меню **Subdomen Settings>>Equation System**, на которой приведены имена, выражения, по которым вычисляются значения, единицы измерения и описание переменных. Здесь, например, нормальные напряжения в направлении  $x$  обозначены  $sx\_pn$ .

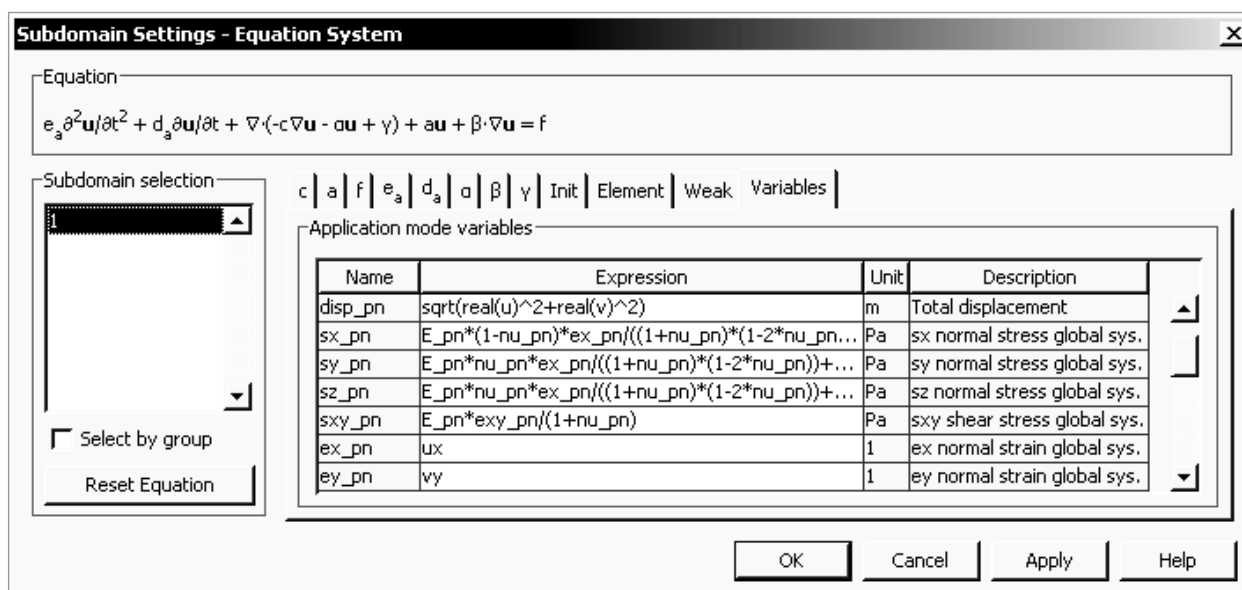


Рис. 7.2. Обозначения переменных на вкладке **Variables** в меню **Subdomen Settings>>Equation System**



## 7.5. Примеры моделирования в разделе структурной механики

В качестве примера рассмотрим две простейшие задачи, иллюстрирующие моделирование в разделе структурной механики, а именно - нагружение образца породы с отверстием и распространение упругих волн в геосреде. Кроме того, здесь приведено решение еще одной задачи о колебаниях пьезопреобразователя.

### 7.5.1. Нагружение образца породы с отверстием

В качестве одного из примеров моделирования в системе COMSOL Multiphysics рассмотрим расчет напряжений в прямоугольной пластине или образце горной породы с отверстием. Не вдаваясь в подробности интерфейса, который постоянно меняется в связи с доработкой системы, обратим внимание на значения параметров и режимов, которые задаются для расчета. Для облегчения восприятия материала будут заданы конкретные значения величин.

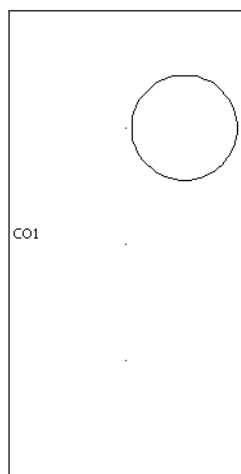


Рис. 7.3. Чертеж пластины с круглым отверстием

1. Выбор размерности модели и расчетного модуля.

Для расчетов используется режим статического анализа напряжений в разделе структурной механики **COMSOL Multiphysics>Structural Mechanics>Plane Strain>Static analysis**, входящий в базовый модуль COMSOL Multiphysics. При этом устанавливается двумерная размерность модели 2D. Для расчетов используется только один раздел, т. е. мультифизический режим расчетов не используется.

2. Черчение модели.

Чертеж модели изображен на рис. 7.3. Размеры прямоугольной пластины 40x80 мм, диаметр отверстия 18 мм, оно смещено относительно центра пластины.

3. Определение свойств модели.

В данном случае модель состоит из одного элемента. Для расчета следует задать его модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\mu$  и плотность  $\rho$ . Для гранита можно принять усредненные параметры  $E = 60 \cdot 10^3$  МПа,  $\mu = 2600$  кг/м<sup>3</sup>. Кроме того, задается толщина модели, в данном случае она принимается равной стороне пластины, т. е. 40 мм.

4. Задание граничных условий.

В качестве граничных условий следует задать ограничение перемещения нижней стороны пластины по оси  $Y$  и нагрузку 10 МПа для верхней.

#### 5. Установка параметров сетки.

Система моделирования COMSOL Multiphysics позволяет задавать различные параметры сетки, по которой происходит разбиение модели на отдельные элементы конечного размера. Например, можно задавать треугольную или четырехугольную форму, определять размеры элементов и коэффициент их изменения при переходе от участков с малыми размерами к участкам с большими размерами. В данном случае будет использован стандартный режим разбиения, который применяется во всех случаях, при которых не предъявляется каких-либо особых требований. При необходимости после того, как будет достигнута работоспособность модели, параметры разбиения по сетке могут быть изменены.

#### 6. Установка параметров расчета статического режима нагружения.

Установка этих параметров осуществляется в разделе **Solve-Solver Parameters**. Здесь должны быть установлены режимы расчета **Static** и **Stationary**.

Вариант расчета. Если производится расчет с переменной нагрузкой, то в п. 4 для верхней грани задается не постоянное значение (в данном случае 10 МПа), а изменение этой нагрузки во времени в Па, например,

$$1e7*t,$$

а в п. 6 задается режим **Transient**.

#### 7. Запуск на расчет.

Расчет осуществляется после выполнения всех предшествующих пунктов.

#### 8. Визуализация результатов.

COMSOL Multiphysics обладает широким набором средств визуализации результатов. Пример визуализации результатов таких расчетов представлен ранее в разделе 6.9.

### 7.5.2. Распространение упругих волн в геосреде

Данная задача моделирует волновые процессы, происходящие в геосреде при сейсморазведке. Этот вид геофизических исследований используется для определения структуры массивов горных пород, выявления нарушений, слоев, неоднородностей (пустот, карстов, жил, рудных тел, пластов). Сейсморазведка составляет более 2/3 всех геофизических исследований. Суть этих измерений состоит в размещении по одной или нескольким профильным линиям группы сейсмоприемников и возбуждении упругих волн с помощью удара или взрыва. После удара производится запись сигналов одновременно по всем каналам. В зависимости от подповерхностной структуры будут различаться и регистрируемые сейсмосигналы. После записи осуществляется обработка этих сигналов и

их интерпретация, в процессе которой решается обратная задача сейсморазведки и создается модель изучаемой среды.

В модели осуществляется построение однородной геоструктуры, задание упругого импульсного воздействия и прослеживание изменений формы распространяющихся от этого воздействия волн в зависимости от расстояния до точки возбуждения. Здесь задаются параметры среды, форма возбуждающего воздействия, моделирующего удар молотом, а также координаты точек, в которых производится регистрация сигналов, получение форм этих сигналов. Важным моментом при моделировании является задание параметров геосреды в модели, особенно параметров, характеризующих затухание. Поскольку размеры модели ограничены, на ее краях, удаленных от места возбуждения, также задается затухание, возрастающее с увеличением расстояния от этого места. Это позволяет устранить эффект отражения от краев модели, искажающего волновую картину.

1. Задается размерность построения моделей Axial Symmetry 2D. Т. е. в отличие от предыдущего примера строится осесимметричная двумерная модель в переходном режиме, т. е. исследующая изменение напряжений и деформаций массива пород во времени. Это достигается выбором раздела **Stress-Strain>Transient analysis** базового модуля. В осесимметричных моделях используются координаты  $r$  (горизонтальная) и  $z$  (вертикальная).

2. Задаются константы и глобальные выражения.

Константы и глобальные выражения приведены в таблицах ниже.

Таблица 7.2

Константы

Имя	Выражение	Пояснение
zgd	45	Расстояние резкого увеличения затухания по $z$
rgd	350	Расстояние резкого увеличения затухания по $r$
freq	1000	Параметр формы импульса возбуждения
alp	0.02	Параметр формы импульса возбуждения

Таблица 7.3

Глобальные выражения

Имя	Выражение	Пояснение
damA	$10^5 * ((z/zgd)^{20} + (r/rgd)^{20})$	Ф-я затухания А
damB	$10^{-3} * ((z/zgd)^{20} + (r/rgd)^{20})$	Ф-я затухания В
Pt	$10^{12} * (t * freq)^3 * \exp(-t/(0.02/freq)) * \sin(2 * \pi * freq * t)$	Импульс возбуждения

3. Составление чертежа модели.

Черчение осуществляется в меню **Draw**, либо с помощью палитры. Модель на чертеже представляет собой два прямоугольника, один из которых моделирует геосреду протяженностью по горизонтали 400 м и глубиной 50 м, по которой распространяются волны, а другой – круглый стальной диск диамет-

ром 0,3 м, по которому производится удар для возбуждения упругих волн. Параметры модели приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Геометрические параметры модели сейсмоволн в геосреде				
Области модели в виде прямоугольников	Ширина, м	Высота, м	Положение левого нижнего угла, м	
			r0	z0
Стальной диск (R2)	0,15	0,05	0	0
Геосреда (R1)	400	50	0	-50

На рис. 7.4 приведено изображение части модели при увеличении. Штрих-пунктирной линией здесь показана ось симметрии.

#### 4. Задание физических свойств элементов модели.

Свойства элементов модели задаются в разделе **Subdomain Settings**, где следует указать  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ . Свойства некоторых грунтов и стали приведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5.

Параметры грунта и стали для задания свойств модели

Порода, материал	Модуль упругости $E$ , Па	Коэффициент Пуассона $\nu$	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Гранит	$60 \cdot 10^9$	0,25	2600
Известняк	$25 \cdot 10^9$	0,33	2500
Суглинок	$15 \cdot 10^6$	0,34	1900
Сталь	$205 \cdot 10^9$	0,28	7850

Для гранита величина затухания  $\alpha_{dM} = \text{damA}$ ,  $\beta_{dK} = \text{damB} + 4 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$  указываются на вкладках **Damping**, а его вес в виде величины  $-9.8 \cdot 2600$  на вкладке **Load** (знак минус, т. к. вес направлен вниз, а ось  $z$  вверх). Соответствующие величины задаются и для стального диска.

#### 5. Задание граничных условий.

На верхней границе стального диска задаются напряжения в виде функции, в математической записи имеющей вид

$$P(t) = 10^{12} (t \cdot \text{freq})^3 \cdot \exp\left(\frac{-t \cdot \text{freq}}{0,02}\right) \sin(2\pi \cdot \text{freq} \cdot t),$$

где  $P(t)$  - зависимость напряжений от времени;  $\text{freq}$  - частота колебаний, формируемых с помощью затухающей гармониче-

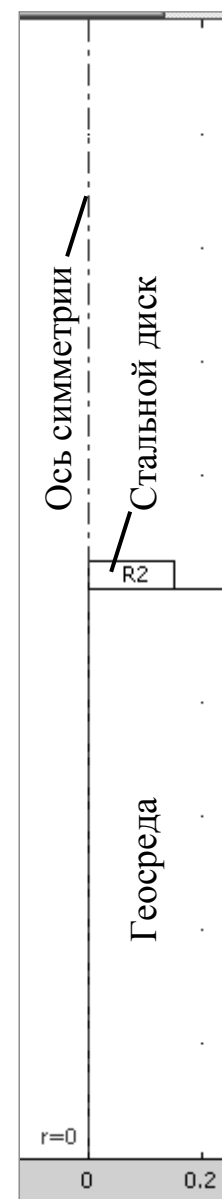


Рис. 7.4. Часть модели при увеличении

ской функции, из которых берется первая полуволна;  $t$  – текущее время. Задание этой функции в таком виде позволяет менять длительность импульса возбуждения путем изменения только одного параметра – частоты  $freq$ . В обозначениях, указанных выше в табл. 7.3, этот импульс задается переменной  $-Pt$  на соответствующей грани стального диска. Кроме того, устанавливается ограничение перемещения вдоль оси  $z$ .

#### 6. Установка параметров расчета модели.

В решателе (солвере) устанавливается режим **Time Dependent** (расчет во временной области), а моменты времени расчета от 0 с с шагом 0,001 с до 0,1 с.

#### 7. Расчет модели.

После запуска расчета модели происходит автоматическое ее разбиение по сетке, а также расчет напряжений, деформаций и других величин для указанных моментов времени. Не касаясь всего многообразия вариантов визуализации расчетов, на рис. 7.5 приведен только график колебательных скоростей в зависимости от времени.

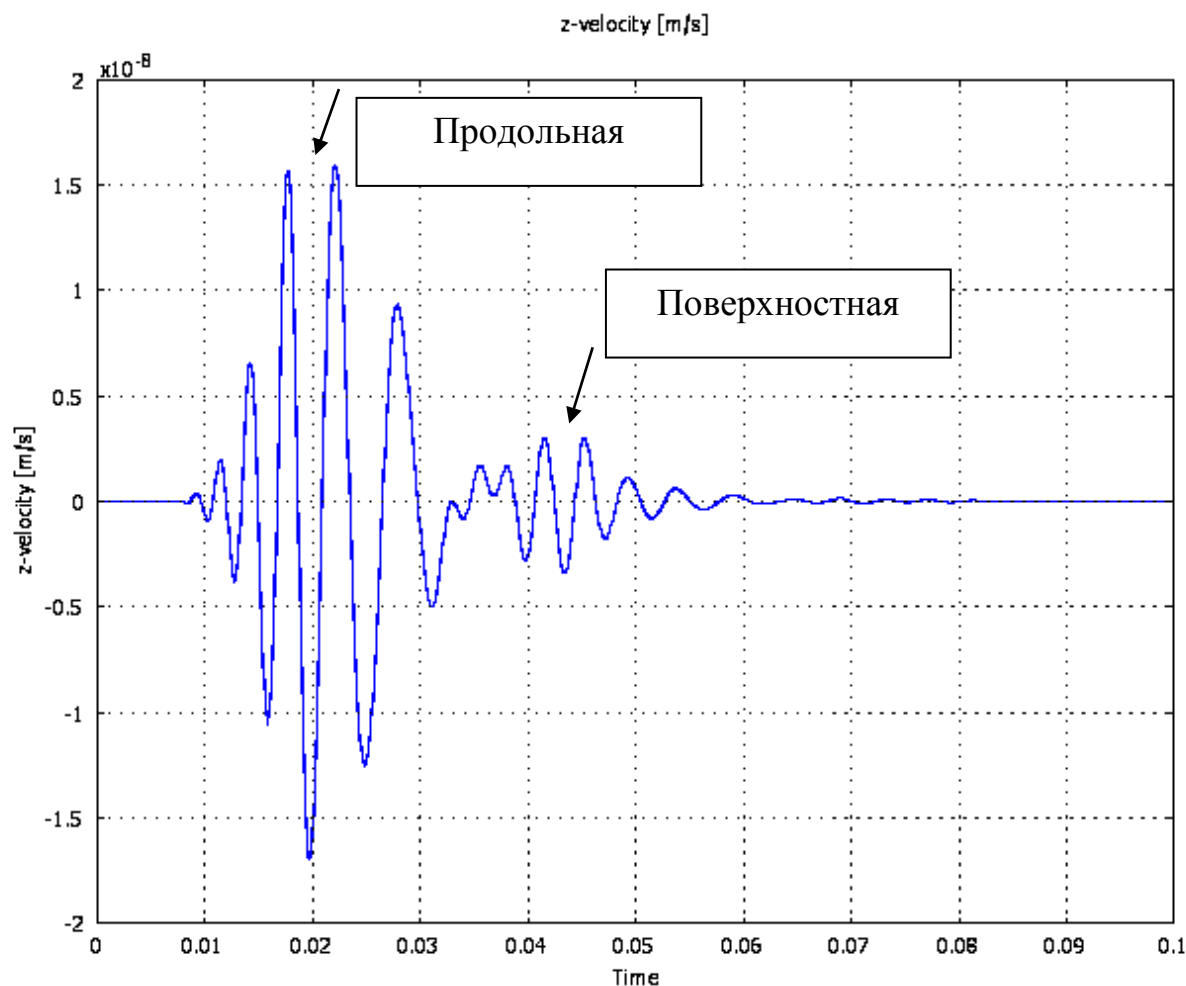


Рис. 7.5. График зависимости скорости вертикальных смещений от времени на поверхности геосреды на расстоянии 100 м от источника

Как следует из полученной формы сейсмосигнала, волновой пакет может быть разделен на две составляющие. Первая, приходящая раньше - это продольная волна. За ней следуют поверхностные волны.

Для валидации модели можно проверить расчет путем вычисления групповой скорости распространения волны. При этом время прихода следует определять по максимуму скорости. В данном случае для скорости продольных волн время от начала шкалы отсчета до максимума амплитуды равно 20 мс, что при расстоянии, на которое распространилась волна, равном 100 м, дает скорость  $v=5000$  м/с, что вполне соответствует действительности.

### **7.5.3. Пьезокерамический преобразователь с радиальной поляризацией**

Во многих задачах акустики, геофизики, неразрушающего контроля находят свое применение пьезокерамические преобразователи электрического сигнала в механические колебания. Аналогичные задачи встречаются также, когда моделируются электрические воздействия на горные породы, содержащие кварц или другие пьезочувствительные минералы.

Преобразователь цилиндрической, кольцевой или другой формы выполняется из пьезочувствительной керамики или других материалов, обладающих аналогичными свойствами. На поверхности преобразователя, которые определяются типом его колебаний, напылением наносятся проводящие покрытия (обкладки) из серебра или других металлов. При изготовлении преобразователей производится поляризация керамики. Для этого преобразователь нагревается выше точки Кюри, на его проводящие поверхности подается электрическое напряжение, после чего температура медленно понижается. В результате этого в керамике сохраняется упорядоченное электрическое поле. При ее деформировании на обкладках появляется электрический потенциал, а при подаче на них электрического напряжения происходит деформация, которая передается в окружающее пространство. Первый эффект используется для приема упругих волн из окружающей среды, а второй – для их излучения.

Проанализируем работу пьезопреобразователя при подаче на его обкладки напряжений различной формы. Будет рассмотрена последовательность действий при анализе радиально поляризованного преобразователя в цилиндрической системе координат. Такой анализ может быть проведен с использованием любого из модулей: акустического, структурной механики, MEMS. Возможностей базового модуля для проведения таких расчетов недостаточно. В процессе расчета будет проведена визуализация электрического поля, напряжений и деформаций в цилиндрической системе координат. Для этого будут использованы следующие виды анализа:

- статический
- переходный
- анализ собственных частот
- анализ частотного отклика.

Описание интерфейса дано применительно к версии COMSOL Multiphysics v3.5.

В данной модели обкладки, на которые подается напряжение, не будут моделироваться отдельными подобластями, а будут указываться электрические потенциалы соответствующих границ. Вначале будут рассмотрены расчеты без учета затухания в пьезокерамике, а затем оно будет введено в расчеты для сравнения и оценки его влияния.

## 1. Начало работы

Для моделирования выберем модуль Structural Mechanics, а в нем **Structural Mechanics Module**>>**Piezoelectric Effects**>>**Piezo Solid**>>**Static analysis**. При запуске новой задачи в навигаторе моделей следует убедиться, что установлен режим 3D, как это показано на рис. 7.6.

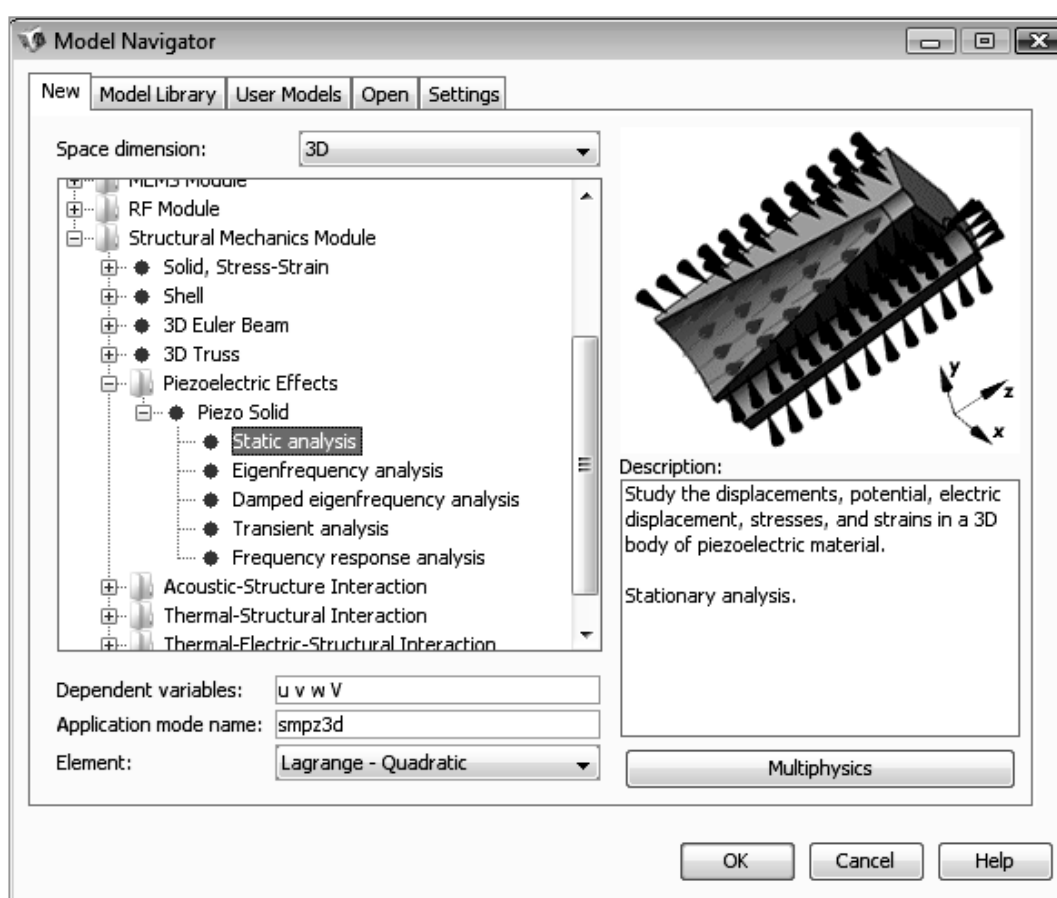


Рис. 7.6. Окно навигатора моделей при формировании задачи анализа работы пьезопреобразователя в COMSOL Multiphysics 3.5

## 2. Черчение модели.




Вначале следует начертить два цилиндра, вложенных один в другой, нажимая кнопку  на палитре и введя параметры согласно табл. 7.6. Для удобства следует пользоваться кнопкой , с помощью которой изображение масштабируется до заполнения всего поля.

Таблица 7.6

Геометрические параметры цилиндров

	Цилиндр внешний, м	Цилиндр внутренний, м
Радиус ( <b>Radius</b> )	5e-3	2.5e-3
Высота ( <b>Height</b> )	1e-3	1e-3

Затем нужно выделить оба цилиндра с помощью комбинации клавишей Ctrl+A и нажать кнопку  **difference** (разность) на палитре.

Внешний вид пьезопреобразователя показан на рис. 7.7. Для лучшего изображения в черно-белой печати он представлен в виде проволочной конструкции. На этом рисунке также номерами отмечены поверхности, которые используются при задании граничных условий. Части 1, 2, 7, 10 образуют внешнюю боковую поверхность диска, 5, 6, 8, 9 – внутреннюю, 3, 4 – нижнюю и верхнюю соответственно.

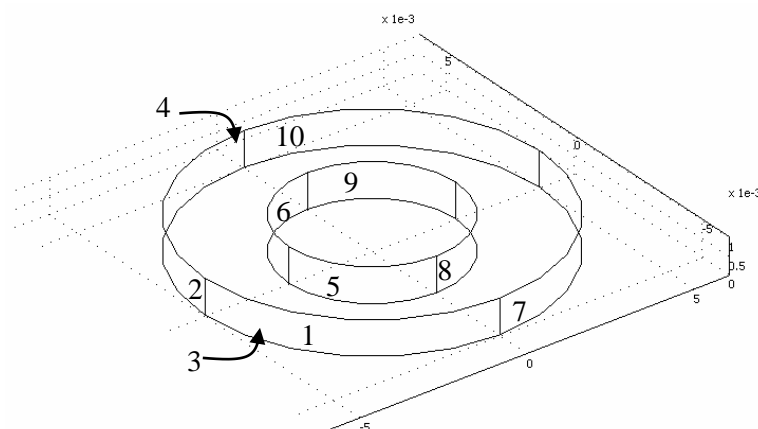


Рис. 7.7. Изображение ребер пьезопреобразователя в виде диска с отверстием

### 3. Установка цилиндрических координат.

Моделирование радиальной поляризации пьезодиска удобно вести в цилиндрической локальной координатной системе. По умолчанию установлена локальная система прямоугольных координат, ориентированная вдоль глобальной системы прямоугольных координат. Соответствие между параметрами цилиндрической системы координат, в которой задается один угол азимута  $\varphi$  и координаты вертикальной оси  $z$  и радиуса  $r$ , задается, как показано в табл. 7.7.

Таблица 7.7

Соответствие декартовых и цилиндрических координат в локальных системах

Локальные оси	Цилиндрические координаты
x	$\varphi$ (Азимут)
y	z (Вертикальная ось)
z	r (Радиус)



Для установки цилиндрической системы координат в меню **Options > Coordinate Systems** на вкладке **General** следует нажать кнопку **New...** и установить содержимое окон в соответствии с рис. 7.8. Новой системе будет присвоено название **Cylindrical**.

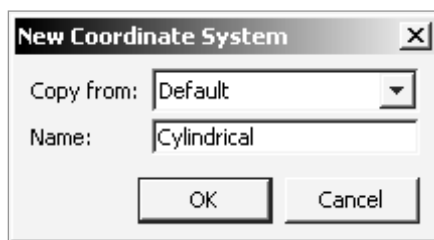


Рис. 7.8. Окно установки новой координатной системы

Затем на этой же вкладке **General** в таблице **Direction method** нужно установить содержимое ячеек в соответствии с табл. 7.8.

Таблица 7.8

Содержимое ячеек таблицы **Direction method**

Direction method	x,y,z components		
x-axis direction vector	$-\sin(\text{atan2}(y,x))$	$\cos(\text{atan2}(y,x))$	0
xy-plane direction vector	0	0	1

Для пересчета используется соотношение

$$\varphi = \text{atan2}(y,x),$$

где  $\text{atan2}(y,x)$  – функция бинарного вычисления арктангенса, который при этом вычисляется по точкам, содержащимся в матрицах  $x$ ,  $y$ . Для скаляров  $x$ ,  $y$  с помощью этого выражения определяется угол  $\varphi$  такой, что  $\tan(\varphi) = y/x$ . Размеры матриц  $x$ ,  $y$  должны соответствовать друг другу.

#### 4. Установка параметров подобластей.

Параметры подобластей вводятся в меню **Physics>>Subdomen Settings** на вкладке **Structural**. Здесь нужно выделить подобласть 1, обозначающую пьезокерамику. Ввести параметры проще всего из библиотеки материалов через кнопку **Load**, выбрав в ней, например, в качестве материала цирконат-титанат свинца **Lead Zirkonate Titanate (PZT-5H)**, как это показано на рис. 7.9.

Следует установить нужную локальную систему координат. По умолчанию здесь используется **Global coordinate system**, которую следует заменить на **Cylindrical**.

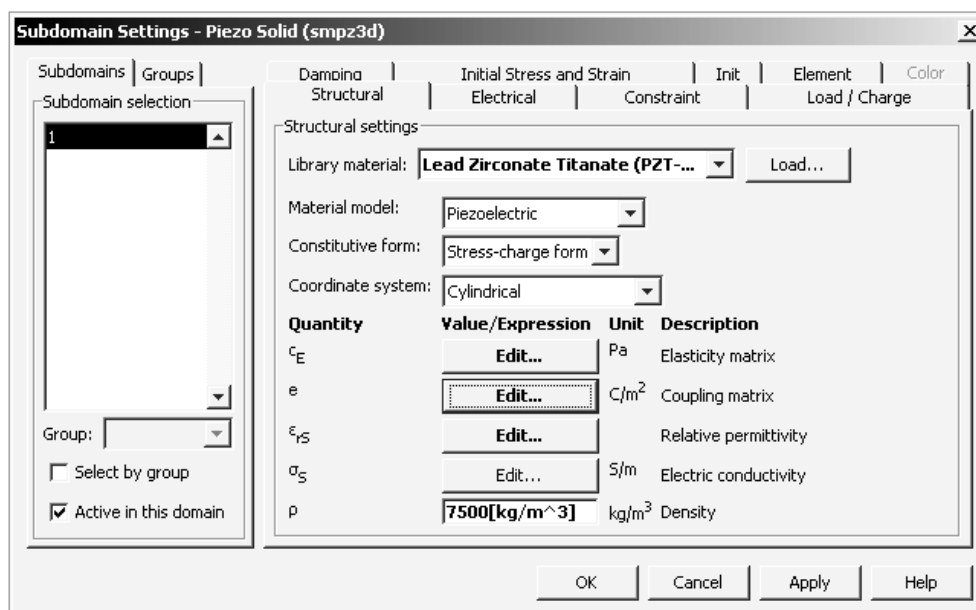


Рис. 7.9. Установки параметров подобластей на вкладке **Structural** меню **Physics>>Subdomain Settings**

Не рассматривая подробно содержание всех параметров, вызываемых нажатием кнопок **Edit**, обратим внимание на матрицу связей **Coupling matrix**, представленную на рис 7.10.

1	2	3	4	5	6
0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	17.0345[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]
0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	17.0345[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]
-6.62281[C/m <sup>2</sup> ]	-6.62281[C/m <sup>2</sup> ]	23.2403[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]	0[C/m <sup>2</sup> ]

Рис. 7.10. Матрица связей

В этой матрице величина поверхностного заряда  $e_{33} = 23,240$  Кл/м<sup>2</sup>, находящаяся в 3-й строке и 3-м столбце, характеризует поляризацию вдоль локальной оси  $z$ . Это направление соответствует аналогичному направлению  $z$  в глобальной системе координат. В то же время в заново созданной системе координат **Cylindrical** оно соответствует радиальному направлению от центральной оси наружу. От направления поляризации зависит направление деформирования при приложении внешнего электрического поля.

Расчет большинства характеристик в данном примере производится без учета затухания, поэтому на вкладке **Damping** следует установить модель **No damping**, если установлен другой режим, или не менять, если этот режим установлен по умолчанию.

## 5. Установка граничных условий.

### *Механические условия*

В меню **Physics > Boundary settings>>Piezo Solid** следует открыть вкладку **Constraint** (ограничения). Выделить элементы границ 5, 6, 8, 9, уста-

новить флажок в ячейке  $R_n$  и выбрать режимы окон из списка в соответствии с табл. 7.9. Заметим, что выделение нескольких элементов осуществляется щелчком мыши по номеру элемента с одновременно нажатой клавишей **Ctrl**.

Табл. 7.9.

Режимы установки границ 5, 6, 8, 9

Название окна	Установленный режим
Constraint condition	Prescribed displacement
Coordinate system	Tangent and normal coord. sys.(t1, t2, n)

Эти установки запрещают тангенциальные перемещения (т. е. вдоль вертикальной оси  $z$ ) поверхности внутреннего отверстия диска, оставляя возможность перемещения этой поверхности по радиусу.

Нижнюю поверхность диска, которая обозначена номером 3, следует также закрепить и не дать возможность перемещаться в вертикальном направлении. В конструкции она является опорной и размещается на основании. Это достигается установкой флажка  $R_z=0$  и установками, представленными в табл. 7.10.

Таблица 7.10

Режимы установки границы 3

Название окна	Установленный режим
Constraint condition	Prescribed displacement
Coordinate system	Global coordinate system

#### Электрические условия

На вкладке **Electric BC (Electric Boundary Conditions)** следует выделить внутреннюю поверхность диска, состоящую из элементов 5, 6, 8, 9, а в окне **Boundary condition** выбрать **Ground**. Тем самым будет осуществлено электрическое соединение этой обкладки с общим проводом – «землей».

Выделив элементы 1, 2, 7, 10, из которых состоит внешняя граница диска, нужно подать потенциал, равный  $V_0 = -100$  В. Это достигается в окне **Boundary condition** выбором режима **Electric potential** и записью в окно  $V_0$  величины -100 В.




Следует проверить правильность установки граничных условий в соответствии с табл. 7.11.

Таблица 7.11

Механические и электрические граничные условия

Границы (Boundaries)	Механические ограничения (Constraint)	Граничные электрические условия (Electric BC)
1, 2, 7, 10	Free	Electric Potential = - 100 V
3	Prescribed displacement ( $R_z = 0$ )	Zero charge/Symmetry
4	Free	Zero charge/Symmetry
5, 6, 8, 9	Prescribed displacement ( $R_n = 0$ )	Ground

## 6. Создание сетки и вычисления.

В данном случае нажатием кнопки  осуществляется разбивка по сетке со стандартным размером ячеек. Произойдет разбивка данной модели на 1224 элемента тетраэдрической формы. После этого следует нажать на кнопку  и произвести статический расчет. Количество степеней свободы (количество независимых переменных и уравнений, которые нужно решить) при этом 9308. Напомним, что при вводе параметров модели с самого начала установлен режим статического расчета. Это можно проверить, нажав кнопку , в открывшемся окне в разделе **Analysis types** убедиться, что установлен режим **Static** и при необходимости установить его.

## 7. Визуализация результатов.

### 7.1. Распределение электрического потенциала.

После проведения расчетов в меню **Postprocessing>>Plot parameters...** в окне **Plot parameters** следует выбрать вкладку **Subdomain** и на ней установить флажок **Subdomain plot**, а в окне **Predefined quantities** – **Electric potential**. После нажатия **ОК** или **Apply** появится окно с изображением исследуемого диска, на котором различными цветами показано распределение потенциала. При интерпретации результатов следует пользоваться соответствующей цветовой шкалой, расположенной рядом с рисунком. Часть окна системы COMSOL Multiphysics с изображением показана на рис. 7.11.

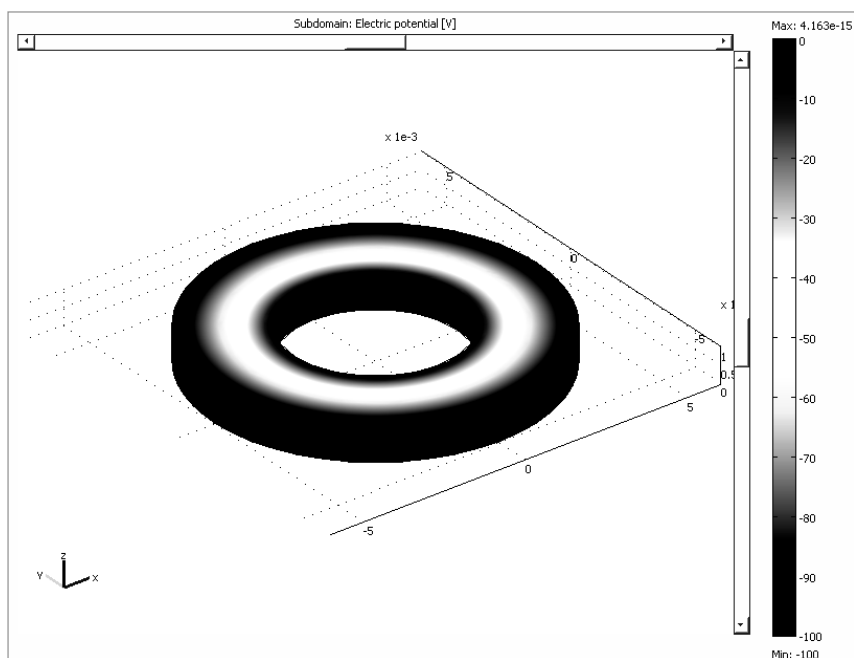


Рис. 7.11. Распределение электрического потенциала в пьезопреобразователе с радиальной поляризацией

На цветовой шкале справа, которая в черно-белой печати изображена оттенками серого, показан диапазон напряжений от 0 В до -100 В. Поскольку внутренняя цилиндрическая поверхность диска при формировании модели соединялась с землей (**Ground**), потенциал этой области окрашен темно-красным цветом, соответствующим 0 В. На внешнюю боковую цилиндрическую поверхность подавался потенциал -100 В, что также отмечено соответствующим цветом, в данном случае темно-синим. Промежуточные области на верхней поверхности диска окрашены в промежуточные цвета, соответствующие различным значениям электрического потенциала.

Для перехода к следующим построениям следует снять флажок **Subdomain plot**.

## 7.2. Визуализация электрического поля.

Электрическое поле удобно изображать с помощью стрелочной диаграммы. Для этого после выполнения предыдущего пункта следует перейти на вкладку **Arrow**, установить флажок **Arrow plot**, в окошке **Predefined quantities** выбрать **Electric field**, а в окошке **Arrow type** – **3D Arrow**. Полученное изображение показано на рис. 7.12.

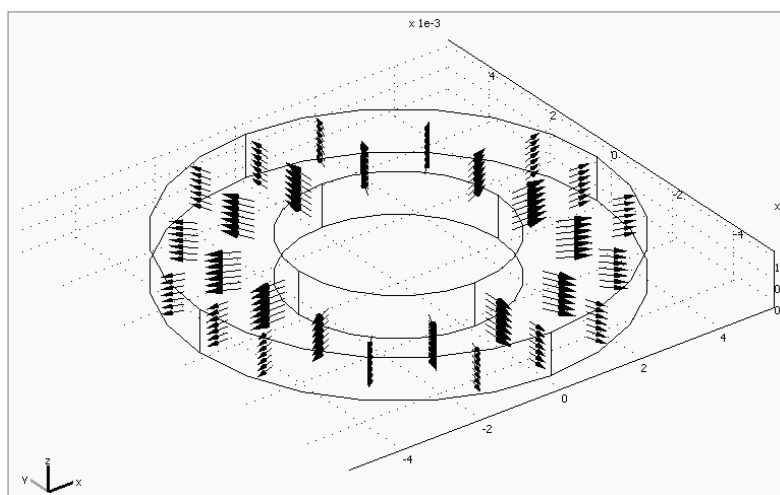


Рис. 7.12. Изображение электрического поля с помощью стрелочной диаграммы

На этой диаграмме величина напряженности электрического поля отмечается длиной стрелок. При перемещении точки наблюдения от внутренней цилиндрической поверхности к внешней напряженность электрического поля уменьшается.

Для следующих построений следует сбросить флажок **Arrow plot** на вкладке **Arrow**.

## 7.3. Изменение формы преобразователя при воздействии электрического поля.

Для визуализации деформирования керамического диска под воздействием электрического поля следует на вкладке **Subdomain** установить фла-

жок **Subdomain plot** и **Electric field**, а на вкладке **Deform – Deformed shape plot** и **Displacement** в окошке **Predefined quantities**. После нажатия ОК появится окно с изображением диска, представленным на рис. 7.13.

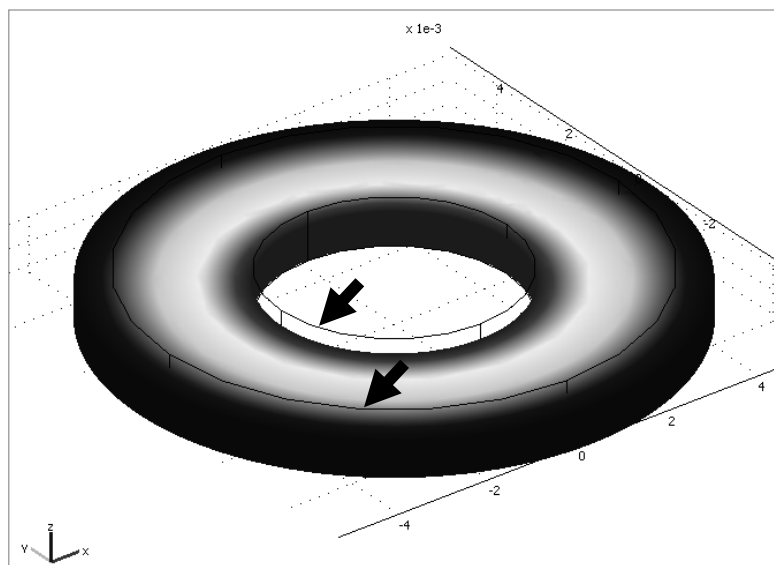


Рис. 7.13. Изображение диска из радиально поляризованной керамики, деформированного под воздействием приложенного к обкладкам электрического напряжения

К сожалению, на черно-белом печатном изображении не видно всех линий, показывающих первоначальное положение границ диска, а только их часть. На рис. 7.13 линии таких границ показаны черными стрелками. На цветном изображении эти линии видны гораздо отчетливее.

Из рис. 7.13 следует, что при приложении напряжения указанной выше полярности при заданном направлении поляризации керамики от центра наружу происходит расширение материала в радиальном направлении и смещение наружу внешней цилиндрической поверхности диска. При этом одновременно происходит уменьшение его толщины.

#### 7.4. Соотношение между глобальными и локальными переменными.

COMSOL Multiphysics может изображать напряжения, деформации, электрическое поле и смещения как в декартовой, так и в локальной (цилиндрической) координатных системах. Эти переменные в двух различных координатных системах связаны между собой матрицей преобразования, компоненты которой обозначаются переменными **coord1\_Tij**, где  $i, j = 1, 2, 3$ . Выражения, используемые для преобразования координат, могут быть доступны в меню **Physics > Equation System > Subdomain Settings**. Рассчитанные величины, изображения которых выводятся при визуализации результатов расчетов, могут быть выбраны в окошке **Predefined quantities**, при этом названия переменных содержат характеристики систем координат, в которых они выводятся. Это, соответственно, **global sys** для глобальной и **local sys** для локальной систем.

7.5. Вывод графиков распределения рассчитанных параметров вдоль заданной линии.

Не останавливаясь подробно на процедуре вывода графиков, отметим, что такой вывод осуществляется установками в окне, вызываемым через меню **Postprocessing>>Cross-Section Plot Parameters**. На рис. 7.14 для примера показано распределение радиальных и осевых напряжений вдоль отмеченной стрелками прямой линии, параметры которой задаются оператором.

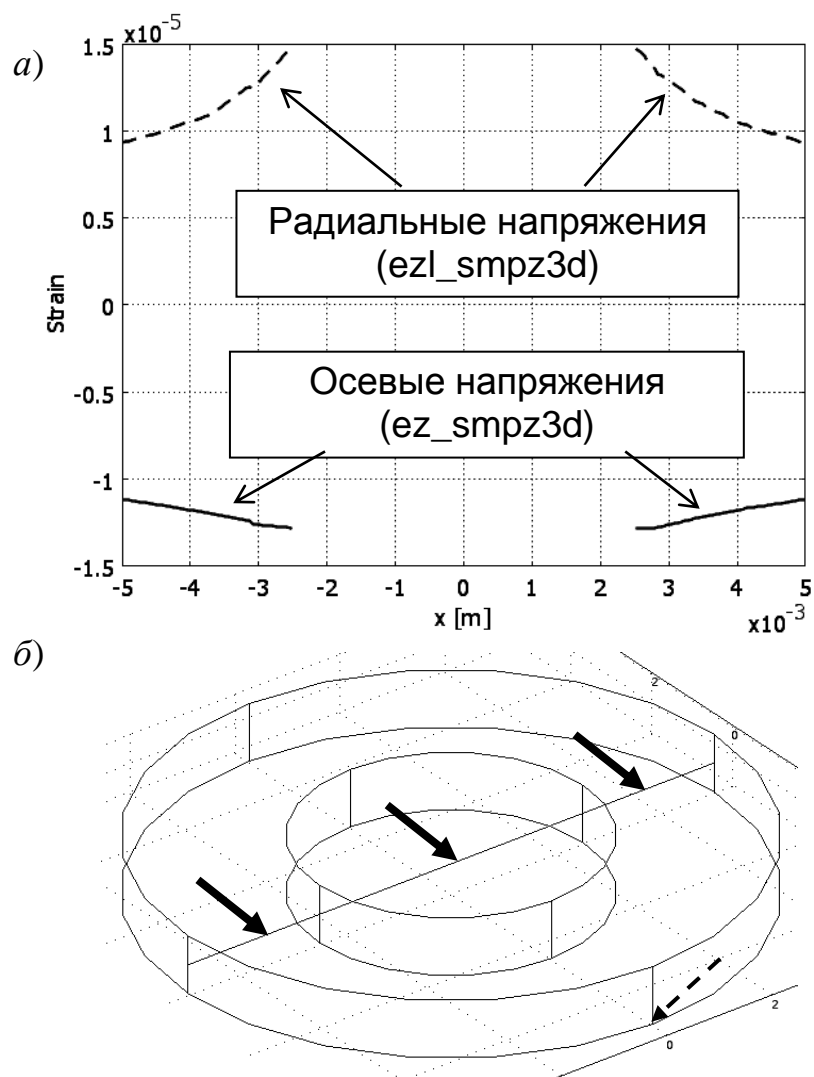


Рис. 7.14. Распределение радиальных и осевых напряжений (а) вдоль прямой линии, отмеченной сплошными стрелками, а также точка, отмеченная пунктирной стрелкой, для которой построен график радиальных смещений (б)

7.6. Анализ деформирования пьезопреобразователя при подаче гармонического напряжения.

Для анализа поведения преобразователя под воздействием переменного напряжения на соответствующих поверхностях следует задать граничные условия в соответствии с заданным воздействием. Этот вид расчетов относит-



ся к переходному анализу (**Transient Analysis**) и выполняется при задании соответствующего режима решателя.

Пусть электрическое напряжение, подаваемое на преобразователь, меняется по гармоническому закону с амплитудой 100 В и частотой 10 Гц, что описывается следующим выражением:

$$u(t) = 100 \sin(2\pi 10t).$$

Для задания этого воздействия следует в окне **Boundary Settings**, вызываемом через меню **Physics >> Boundary Settings**, выделить границы 1, 2, 7, 10 и на вкладке **Electric BC** в окошко для переменной  $V_0$ , задающей потенциал этих границ, записать выражение

$$-100 * \sin(2 * \pi * 10 * t[1/s]).$$

В меню **Solve > Solver Parameters** в разделе **Analysis types** следует установить **Transient**, а на вкладке **General** в окошке **Times** установить значения времени в виде 0:0.005:0.2, что задает расчет для значений времени от 0 с до 0,2 с с шагом 5 мс. После этого, нажав кнопку , выполнить расчет, после завершения которого и вывода изображения в меню **Postprocessing >> Plot Parameters...** на вкладке **General** установить флажки **Subdomain**, **Deformed shape** и **Geometry edges** (геометрические ребра). После этого следует нажать кнопку  (**Animate**), осуществив тем самым создание видео, на котором будет показано во времени изменение формы пьезопреобразователя под воздействием переменного напряжения.

В таком режиме преобразователь используется в качестве излучателя, при этом отрицательным значениям напряжения на обкладке соответствует расширение в плоскости диска и утоньшение в вертикальном направлении, а положительным – сужение в плоскости и расширение в вертикальном направлении.

Для наглядности на рис. 7.15 показаны графики изменения во времени электрического потенциала (7.15, а) и радиальных смещений точки, отмеченной на рис. 7.14 пунктирной стрелкой (7.15, б). Из этих графиков следует, что смещения отстают от изменения потенциала. Это наглядно видно, например, если сравнить точки пересечений этих графиков с нулевой осью. Для электрического потенциала они происходят в моменты времени 0 мс, 50 мс, 100 мс, 150 мс, 200 мс. Для смещения такие пересечения происходят с запозданием на время около 2,5 мс, что обусловлено инерционностью исследуемой системы.



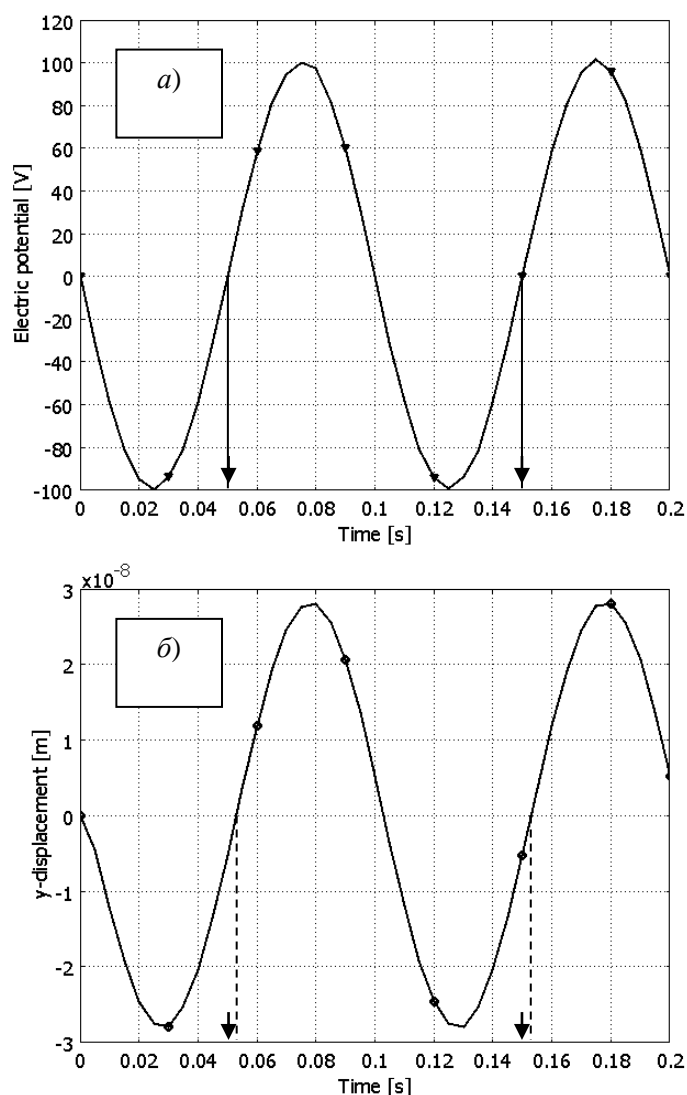


Рис. 7.15. Графики изменения электрического потенциала (а) и смещения точки на внешней вертикальной поверхности диска (б), стрелками отмечены моменты времени перехода напряжения через ноль, пунктирными линиями – перехода через ноль смещений

На рис. 7.16 представлены изображения диска в моменты времени  $t_1 = 25$  мс (рис. 7.16, а) и  $t_2 = 80$  мс (рис. 7.16, б), первый из которых соответствует близкому к минимальному отрицательному, а второй – к максимальному положительному напряжениям на преобразователе. Из этих рисунков следует, что при отрицательном напряжении происходит расширение диска в его плоскости, а при положительном – сжатие. При этом следует обратить внимание, что первоначальные форма и размер на одном и другом рисунках остаются постоянными.

Изменение направления деформирования диска при определенной полярности напряжения, приложенного к обкладкам, может быть достигнуто изменением знака заряда на обкладках при поляризации керамики во время изготовления преобразователя. При моделировании это достигается изменением знака поверхностной плотности заряда, задаваемой в ячейке e33 матрицы связей, о которой шла речь в п. 4 «Установка параметров подобластей» описания данной модели.

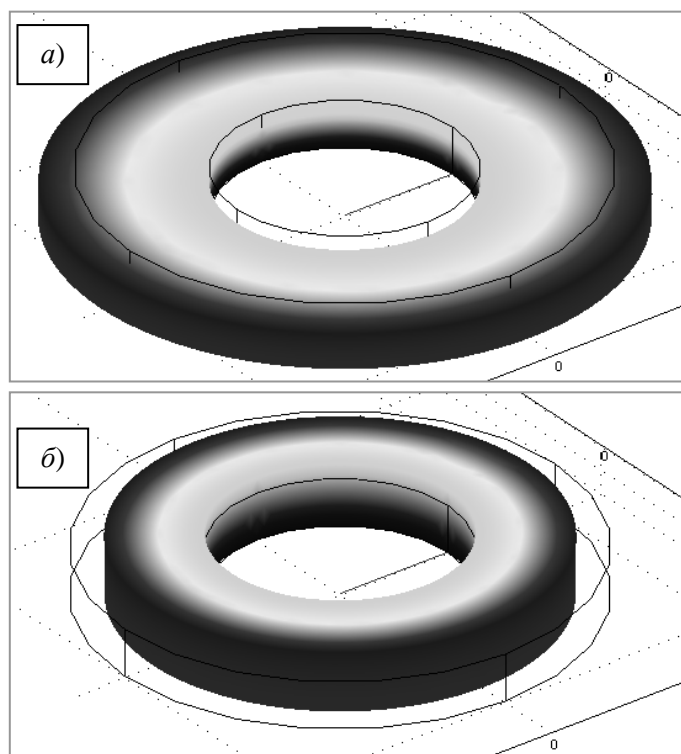


Рис. 7.16. Форма пьезоэлектрического диска в моменты времени  $t_1 = 25$  мс (а) и  $t_2 = 80$  мс (б)

Наиболее наглядное представление о работе пьезопреобразователя при воздействии гармонического напряжения дает анимация, которая в печатном издании не реализуема, но может быть получена при исследовании данной модели на компьютере.

#### 7.7. Расчет частот собственных колебаний.

Знание частот собственных колебаний пьезопреобразователя необходимо для расчета режимов его работы. Так, например, знание первой (т. е. самой нижней) резонансной частоты  $f_1$  позволяет определить диапазон рабочих частот, он находится ниже  $f_1$ . На величину частот собственных колебаний влияют только свойства материала, форма, размеры и механические граничные условия, а также моды (режимы) колебаний.

Рассмотрим, как рассчитать собственные частоты пьезопреобразователя и визуализировать соответствующие моды, что выражается в различных формах деформированного диска. По сравнению с предыдущим пунктом 7.6, где производился расчет реакции диска на гармоническое воздействие, нужно

вернуться к предыдущим установкам и в меню **Physics>>Subdomen Settings** изменить величину напряжения  $V_0$ , приложенного к обкладкам 1, 2, 7, 10, на постоянное, равное -100 В.

Для расчета собственных частот в меню **Solve >> Solver Parameters** в разделе **Analysis types** следует выбрать **Eigenfrequency**. По умолчанию установлен расчет первых 6-ти частот в районе 0 Гц. При желании эти величины могут быть изменены на вкладке **General**.

После расчетов частот, можно по очереди вывести их значения в меню **Postprocessing>>Plot Parameters** на вкладке **General** в разделе **Solution to use**. Расчет первых 6-ти частот дает следующие значения, округленные до 3 знаков после запятой: 416,645 Гц; 89239,780 Гц; 89240,760 Гц;  $1,648 \cdot 10^5$  Гц;  $1,649 \cdot 10^5$  Гц;  $2,248 \cdot 10^5$  Гц. Как следует из приведенного ряда, здесь встречаются пары близких значений вблизи 89 кГц и 165 кГц. Они обусловлены схожим характером деформирования диска, что можно увидеть в последующем анализе форм колебаний, соответствующих разным модам.

Установив одно из значений собственной частоты на вышеуказанной вкладке **General**, следует построить изображение деформированного пьезопреобразователя с распределением деформаций по его поверхности.

На рис. 7.17. показаны изображения мод пьезопреобразователя при колебаниях на различных частотах.

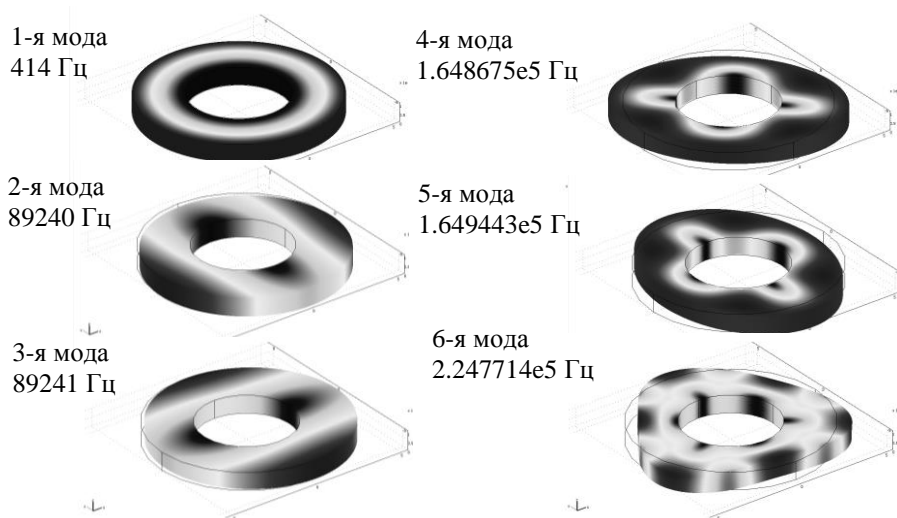


Рис. 7.17. Изображения различных мод колебаний пьезоэлектрического диска

Из этих изображений следует, что большим частотам соответствуют меньшие размеры колеблющихся участков, т. е. меньшие длины волн. Упомянутые выше близкие частоты собственных колебаний соответствуют схожим формам деформирования на модах 2, 3 и 4, 5.

## 7.8. Анализ частотного отклика.

Анализ частотного отклика пьезопреобразователя позволяет получить амплитудно-частотную характеристику, которая используется при расчетах и его практическом применении.

Амплитудно-частотной характеристикой преобразователя электрического напряжения в выходной сигнал вибраций называется зависимость модуля комплексного коэффициента передачи, определяемого как отношение величины выходного сигнала к входному

$$\dot{K}(f) = \frac{\dot{A}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}},$$

где  $\dot{K}(f)$  - комплексный коэффициент передачи, зависящий от частоты приложенного гармонического напряжения,  $\dot{A}_{\text{ВЫХ}}$  - выходной сигнал, которым в зависимости от вида преобразования может быть смещение, его скорость или ускорение,  $\dot{U}_{\text{ВХ}}$  - входное электрическое напряжение преобразователя, меняющееся по гармоническому закону.

Особенно важно знание амплитудно-частотной характеристики вблизи собственных частот, где она может иметь резкие выбросы. В системе COMSOL Multiphysics такие расчеты осуществляются путем анализа частотного отклика **Frequency response** с привлечением параметрического решателя (солвера) **Parametric**, на каждой из заданных частот производящего расчет стационарных режимов.

Рассмотрим зависимость частотного отклика смещения в одной из точек поверхности внешнего цилиндра в диапазоне частот вблизи 1-й моды колебаний при отсутствии затухания в пьезокерамике.

В меню **Solve > Solver Parameters** в разделе **Analysis types** следует установить режим **Frequency response**. На вкладке **General** устанавливается имя рассчитываемой переменной **freq\_smpz3d**, а также частотный диапазон расчета и шаг в окошке **Parameter values** в пределах от 400 до 430 Гц с шагом расчета 1 Гц следующим образом: **range(400,1,430)**. Числа означают начальное значение, шаг и конечное значение расчета.

После вычислений в меню **Postprocessing >> Domain Plot Parameters...** в окошке **Point selection** следует выбрать 2-ю точку, находящуюся на пересечении верхней грани и внешней боковой цилиндрической поверхности и нажать **ОК**.

На рис. 7.18 представлена амплитудно-частотная характеристика пьезопреобразователя, рассчитанная как частотный отклик в точке 2. На графике отчетливо выделяются прямолинейные участки между рассчитанными точками. Для получения более гладкой кривой следует установить меньший шаг, что даст большее количество точек расчета.

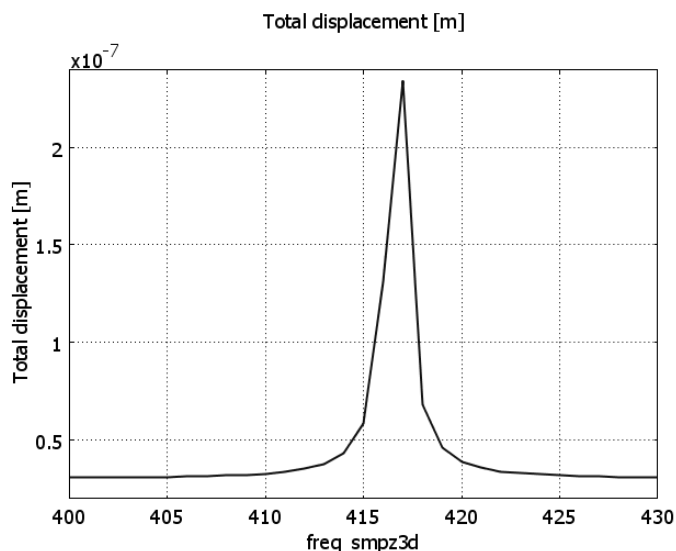


Рис. 7.18. Частотный отклик пьезопреобразователя в области частоты первого максимума  $f_1 = 416,645$  Гц

На рис. 7.19 представлен график частотного отклика, рассчитанный в области частот второй и третьей мод.

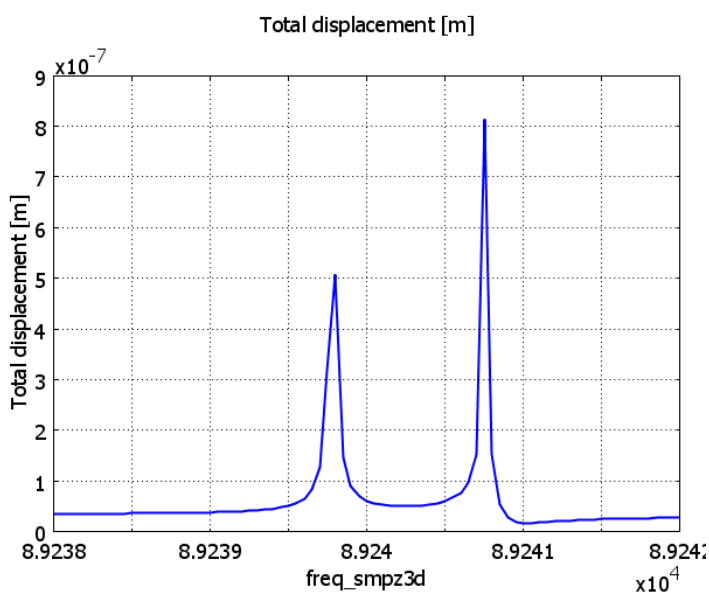


Рис. 7.19. Частотный отклик пьезопреобразователя в области частот второго  $f_2 = 89239,78$  Гц и третьего  $f_3 = 89240,76$  Гц максимумов

Расчет произведен здесь с шагом 0,05 Гц. На этом графике отчетливо различимы оба максимума, соответствующие второй и третьей модам колебаний.

### 7.9. Расчет с учетом потерь.

В расчетах, которые проводились до сих пор, не учитывались потери, приводящие к затуханию колебаний в преобразователе. Проведем расчет вре-

менного отклика на гармоническое воздействие, рассмотренный в п. 7.6, но с учетом затухания в пьезокерамике. Для этого следует сделать настройки, описанные в этом пункте, а также дополнительно установить параметры затухания. Одна из моделей затухания, а именно модель Рэля, содержащая два параметра, может быть введена в расчет временного отклика достаточно легко через меню **Physics > Subdomain settings**. Здесь следует выделить подобласть 1 и на вкладке **Damping** (затухание) в окошке **Structural damping** вместо режима **No damping**, установленного ранее, выбрать **Rayleigh**.

Следует заметить, что только модель Рэля может быть использована для расчетов во времени переходных режимов **Transient analysis**. Часто используемый коэффициент затухания (потерь)  $\xi$  должен быть преобразован в параметр  $\beta_{dK}$  в соответствии с выражением

$$\beta_{dK} = \frac{\xi}{2\pi f},$$

где  $\beta_{dK}$  - параметр затухания модели Рэля,  $\xi$  - коэффициент затухания,  $f$  - частота, на которой произведено измерение коэффициента затухания  $\xi$ . Для этой модели, содержащей два параметра  $\alpha_{dM}$  и  $\beta_{dK}$  принимаем  $\alpha_{dM} = 0$ . Предположим, что на частоте 10 Гц коэффициент затухания  $\xi = 0,2$ . Поэтому в окошко для параметра  $\alpha_{dM}$  следует ввести 0, а для  $\beta_{dK}$  - выражение

$$0.2/(2 * \pi * 10)$$

В данной задаче рассмотрены три случая, соответствующие отсутствию затухания и при коэффициенте затухания  $\zeta$ , равном 0,2 и 0,8. Соответствующие

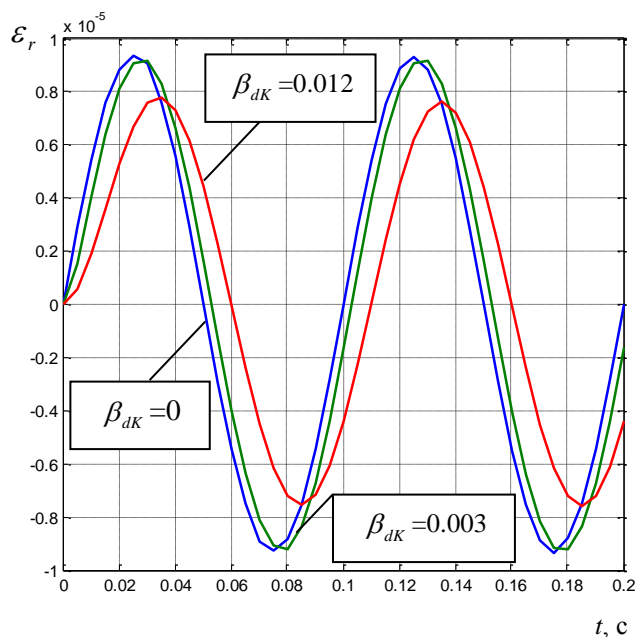


Рис. 7.20. Графики деформаций преобразователя при трех значениях затухания

щие значения параметра  $\beta_{dk}$  будут при этом 0; 0,003; 0,012. Графики, построенные с помощью приведенной ниже программы, показаны на рис. 7.20.

Текст программы для вывода графиков по рассчитанным данным.

```
clc
clear all
D00=dlmread('ex_000.txt');
X00=D00(:,1);
Y00=D00(:,2);
D02=dlmread('ex_003.txt');
X02=D02(:,1);
Y02=D02(:,2);
D08=dlmread('ex_012.txt');
X08=D08(:,1);
Y08=D08(:,2);
plot(X00,Y00,X02,Y02,X08,Y08)
```

Из этих графиков, приведенных на рис. 7.20, следует, что увеличение затухания в пьезокерамике приводит к уменьшению амплитуды колебаний и к запаздыванию сигнала по сравнению со случаем без потерь.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 7

1. Какие расчеты доступны в разделах Structural Mechanics базового и дополнительного модулей? Дайте характеристику каждого вида расчетов.
2. В каких координатных системах возможно производить расчеты в разделах структурной механики?
3. Какие модели затухания в механических системах доступны в базовом и дополнительном модулях системы COMSOL Multiphysics?
4. В чем особенности рэлеевской модели затухания в механических системах?
5. В какие составляющие дифференциального уравнения механического движения и каким образом входят параметры затухания?
6. Как определить на практике коэффициент  $\beta$  модели затухания Рэлея для горных пород?
7. Какими еще величинами характеризуется затухание в механических системах?
8. Какими параметрами задаются свойства материала в разделе Structural Mechanics?
9. Как обозначаются переменные, описывающие свойства материала?
10. Каким образом задаются параметры, описывающие пьезоэлектрические свойства материала, и какие именно?



## 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДЕ COMSOL MULTIPHYSICS

### 8.1. Общая характеристика задач расчета тепловых процессов

Тепловые процессы играют важнейшую роль в природе и технике. Для оптимизации тепловых характеристик различных объектов и снижения стоимости разработок исследователи и конструкторы используют анализ методом конечных элементов. Поскольку многие свойства материалов зависят от температуры, эти процессы должны учитываться при мультифизическом моделировании.

Теплопередача определяется как движение энергии, приводящее к различию температур в среде. Она определяется тремя следующими механизмами.

**Проводимость (теплопроводность)** – это контактная передача тепла с помощью различных механизмов в зависимости от среды, через которую осуществляется контакт. В газах – за счет соударения молекул, в жидкостях – при колебаниях каждой молекулы, вызванных воздействием соседних молекул, в металлах – за счет переноса тепла электронами, а в других твердых телах – в результате колебательного движения молекул. Для теплопроводности характерной является прямая пропорциональная зависимость между тепловым потоком и температурным градиентом.

**Конвекция** – это передача тепла в результате движения флюида (жидкости или газа). Тепло передается от поверхности твердого тела к движущейся жидкости или газу и далее переносится ею в другие места.

**Излучение** – передача тепла электромагнитными волнами (фотонами), которые твердая поверхность может поглощать или отражать. Такой вид теплопередачи наблюдается между двумя поверхностями ( $A$  и  $B$ ) с различными температурами.

Рассмотрим основные математические соотношения, описывающие эти процессы.

### 8.2. Уравнения теплопереноса за счет теплопроводности и за счет конвекции

Математической моделью теплопередачи за счет теплопроводности является уравнение теплопроводности вида

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q,$$

где  $T$  – температура;

$\rho$  – плотность;

$C$  – теплоемкость:

- $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;
- $C_v$  – теплоемкость при постоянном объеме;

$k$  – коэффициент теплопроводности;

$Q$  – возникающее или поглощаемое тепло.

Для стационарной модели распределение температур не меняется во времени, и первое слагаемое, содержащее  $\rho$  и  $C$ , исчезает. Если теплопроводность анизотропна,  $k$  становится тензором тепловой проводимости

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

При моделировании **теплопроводности и конвекции** за счет флюида уравнение теплопередачи включает слагаемое, описывающее конвекцию. COMSOL Multiphysics использует в этом случае уравнение вида

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-k \nabla T + \rho C_p T \vec{u}) = Q,$$

где вектор  $\vec{u}$  описывает поле скоростей. Это поле может быть задано либо в виде математического выражения от независимых переменных, либо рассчитано в связке с полем скоростей из решения уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.

Вектор теплового потока определяется выражением внутри скобок в уравнении, приведенном выше. Для передачи тепла путем проводимости и конвекции уравнение имеет вид

$$\vec{q} = -k \nabla T + \rho C_p T \vec{u},$$

где  $\vec{q}$  - вектор теплового потока. Если теплопередача происходит только за счет проводимости, он определяется как

$$\vec{q} = -k \nabla T.$$

Теплоемкость  $C_p$  означает количество тепла, необходимое для изменения температуры единицы массы вещества на один градус. Она имеет размерность энергии, отнесенной к массе и температуре (Дж/кг/К) в единицах системы СИ). Она называется также удельной теплоемкостью.

### 8.3. Граничные условия при решении тепловых задач

В системе COMSOL Multiphysics используются два вида граничных условий: Дирихле и Неймана. При использовании граничных условий Дирихле на границах задается температура

$$T = T_0,$$

а при использовании граничных условий Неймана на границах задается тепловой поток

$$\vec{n} \cdot \vec{q} = q_0,$$

где  $\vec{q}$  - вектор теплового потока;  $\vec{n}$  - вектор нормали к границе;  $q_0$  - внутренний тепловой поток в направлении нормали к границе.

Модуль теплопередачи системы COMSOL Mutiphysics использует следующую обобщенную формулировку уравнения

$$-\vec{n} \cdot \vec{q} = q_0 + h(T_{\text{inf}} - T). \quad (8.1)$$

В такой формулировке можно задавать тепловой поток в явном виде величиной  $q_0$ , а также коэффициентом теплопередачи  $h$  относительно опорной температуры  $T_0$ . Условие тепловой изоляции может быть обеспечено при  $q_0 = 0$ .

#### 8.4. Теплопередача за счет излучения

Излучение – еще один механизм теплопередачи. Переносчиком тепла является поток электромагнитных волн, излучаемых с поверхности тела, имеющего определенную температуру. Рассмотрим происходящие при этом процессы, а также теоретические соотношения, описывающие этот механизм. Заметим, что расчеты теплопередачи за счет излучения доступны только в дополнительном модуле **Heat Transfer Module**.

На рис. 8.1 показаны схемы взаимодействия излучения с поверхностью тела.

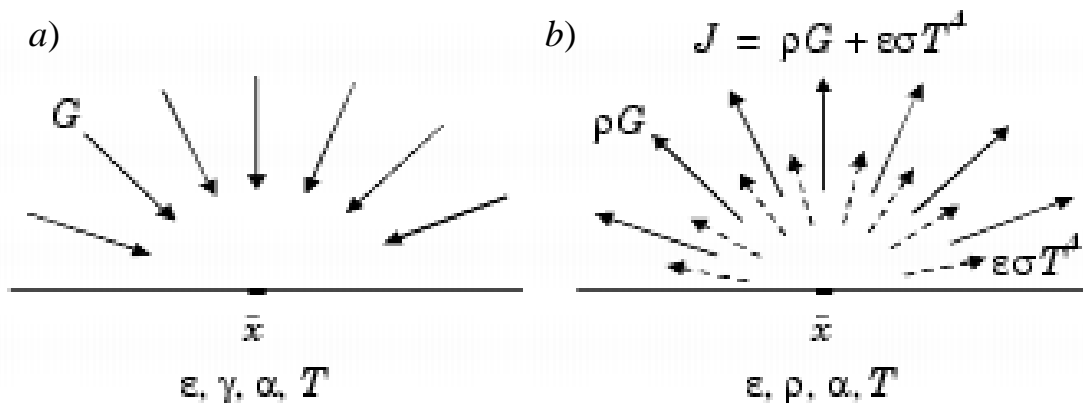


Рис. 8.1. Падающий лучистый поток  $G$  (a) и уходящий лучистый поток  $J$ , состоящий из двух составляющих - потоков отраженной ( $\rho G$ ) и собственной ( $\epsilon \sigma T^4$ ) тепловой радиации (b)

Каждая точка  $\bar{x}$ , расположенная на поверхности, характеризуется коэффициентами излучения  $\varepsilon$ , отражения  $\gamma$ , поглощения  $\alpha$  и температурой  $T$ . Если тело непрозрачно, никакое излучение не проходит через него. Это справедливо для большинства твердых тел.

Суммарный падающий в точку  $\bar{x}$  лучистый поток (по-англ. irradiation) обозначим  $G$ . Суммарный уходящий (излучаемый) из этой точки поток (по-англ. radiosity) обозначим  $J$ . Излучаемый поток представляет собой сумму отраженной и собственной тепловой радиаций

$$J = \rho G + \varepsilon \sigma T^4.$$

Группа внутренних излучающих источников тепла определяет разницу между падающим и исходящим потоками лучистой энергии  $q$

$$q = G - J.$$

Последние два уравнения позволяют исключить  $J$  и получить выражение для определения потока от внутренних излучающих источников тепла в непрозрачном теле, базирующееся на величинах  $G$  и  $T$ . Обобщающее уравнение имеет вид

$$q = (1 - \gamma)G - \varepsilon \sigma T^4.$$

Большинство непрозрачных тел ведут себя как идеальное черное (в зарубежной терминологии серое) тело, для которого энергии поглощения и излучения равны между собой. Это означает, что отражательная способность характеризуется следующим выражением

$$\alpha = 1 - \gamma = \varepsilon.$$

Для идеального черного тела поток от внутренних источников тепла  $q$  определяется следующим выражением

$$q = \varepsilon(G - \sigma T^4). \quad (8.2)$$

В COMSOL Mutiphysics оно используется в разделе **General Heat Transfer** как обобщенное условие на границе излучения.

### Виды тепловой радиации

В модуле теплопередачи (Heat Transfer Module) делается различие между двумя видами теплопередачи за счет излучения: от поверхности к окружающей среде и от поверхности к поверхности. Уравнение (8.2) описывает оба вида излучения, но слагаемое, описывающее лучистый поток  $G$ , для каждого из них будет различным. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

#### 1. Передача тепла излучением от поверхности к окружающей среде

Примем ряд допущений. Среда, окружающая поверхность, имеет температуру  $T_{amb}$ . При этом считается, что среда ведет себя как абсолютно черное тело. Это означает, что коэффициенты излучения и поглощения равны 1, а ко-

ээффициент отражения равен нулю. Эти допущения позволяют однозначно определить падающий лучистый поток, исходящий из окружающей среды, как

$$G = \sigma T_{amb}^4. \quad (8.3)$$

После подстановки (8.3) в (8.2) получаем тепловой поток группы источников рассматриваемой поверхности

$$q = \varepsilon \sigma (T_{amb}^4 - T^4).$$

Для границ, для которых рассматривается излучение от поверхности к окружающей среде, COMSOL Multiphysics добавляет это слагаемое к правой части уравнения (8.1).

## 2. Передача тепла излучением от поверхности к поверхности

Передача тепла от поверхности к поверхности значительно сложнее. Здесь должно учитываться излучение как от рассматриваемых, так и от других поверхностей. Обобщенное уравнение для падающего лучистого потока имеет при этом вид

$$G = G_m + F_{amb} \sigma T_{amb}^4, \quad (8.4)$$

где  $G_m$  – общий поток, поступающий от других поверхностей,  $F_{amb}$  - коэффициент, учитывающий направление в соответствующую точку окружающей среды. Последний описывает часть, видимую из каждой точки, обусловленную условиями внешней среды. В то же время  $G_m$  определяется геометрией, а также локальными температурами окружающих границ. Рассмотрим вывод уравнения для  $G_m$  и  $F_{amb}$  для обобщенного трехмерного случая.

### Расчет падающей тепловой радиации

Рассмотрим точку  $\bar{x}$  на поверхности, как это показано на рис. 8.2.

Из точки  $\bar{x}$  можно увидеть точки на других поверхностях, а также в окружающей среде. Допустим, что точки на другой поверхности характеризуются локальной излучательной способностью  $J'$ , при этом окружающая среда имеет постоянную температуру  $T_{amb}$ .

Общий лучевой поток в точке  $\bar{x}$  описывается следующим интегралом

$$G_m = \int_{S'} \frac{(-\vec{n} \cdot \vec{r})(\vec{n}' \cdot \vec{r})}{\pi |\vec{r}|^4} J' dS \quad (8.5)$$

Тепловой поток, который поступает из точки  $\bar{x}$ , зависит от излучаемого потока  $J'$ , проектируемого на точку  $\bar{x}$ . Проекцию можно рассчитать с использованием нормальных векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$  вдоль вектора  $\vec{r}$ , расположенного

по направлению из точки  $\bar{x}$  в точку  $\bar{x}'$ . Коэффициент  $F_{amb}$  рассчитывается через интеграл по окружающей поверхности  $S'$ , который в свою очередь обозначен ниже как  $F'$ . Этот коэффициент определяется выражением

$$F_{amb} = 1 - F' = 1 - \int_{S'} \frac{(-\bar{n}' \cdot \bar{r})(\bar{n} \cdot \bar{r})}{\pi |\bar{r}|^4} dS. \quad (8.6)$$

Подставив два последних выражения в (8.4), получаем окончательное выражение для падающего потока.

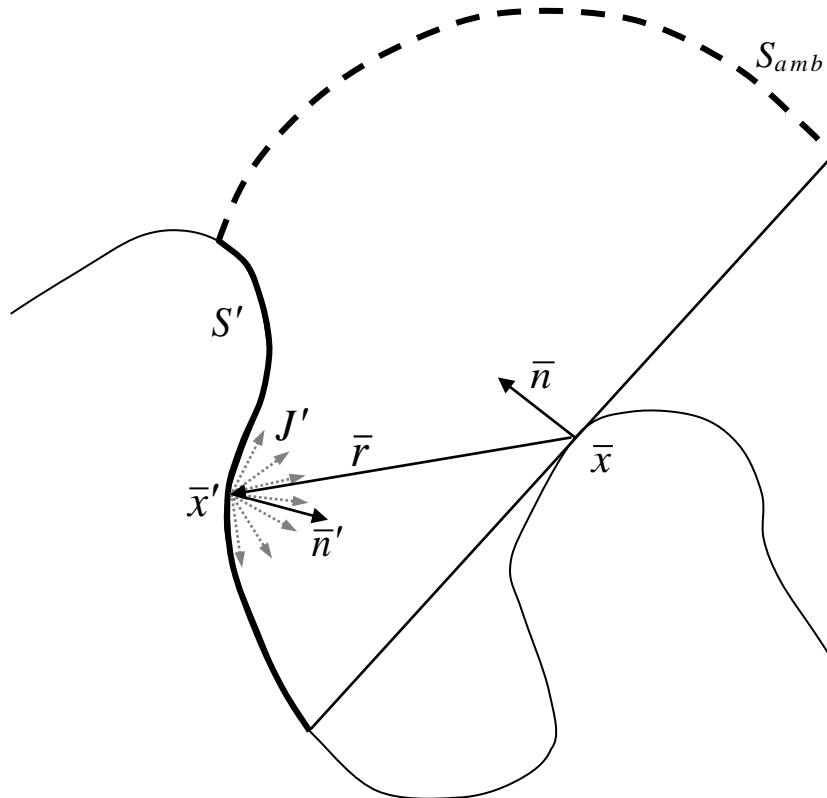


Рис. 8.2. Расчетная геометрическая схема для вывода уравнения излучения в системе поверхность-поверхность

Полученные выражения относятся к трехмерному случаю. В случае 2D конечные выражения для суммарного падающего лучистого потока  $G$  и коэффициента  $F_{amb}$  имеют вид

$$G_m = \int_{S'_\perp} \frac{(-\bar{n} \cdot \bar{r}_\perp)(\bar{n} \cdot \bar{r}_\perp)}{2|\bar{r}_\perp|^3} J' dS_\perp,$$

$$F_{amb} = 1 - \int_{S'_\perp} \frac{(-\bar{n}' \cdot \bar{r}_\perp)(\bar{n} \cdot \bar{r}_\perp)}{2|\bar{r}_\perp|} dS_\perp,$$

где интеграл по  $S_{\perp}'$  предусматривает интегрирование вдоль геометрических границ.

#### Расчет излучаемой тепловой радиации

Выше были рассмотрены выражения для лучистого потока  $G$ , приходящего в произвольную точку поверхности  $x$ . Рассмотрим теперь лучистый поток, исходящий из этой точки

$$J = \gamma G + \varepsilon \sigma T^4. \quad (8.7)$$

Подставляя полученное ранее выражение (8.4) для  $G$  в уравнение (8.7), получаем следующее выражение для исходящего потока. Общее выражение имеет вид

$$J = \gamma(G_m + F_{amb} \sigma T_{amb}^4) + \varepsilon \sigma T^4.$$

Исходя из предположения об абсолютно черном теле, получаем следующее выражение

$$J = (1 - \varepsilon)(G_m + F_{amb} \sigma T_{amb}^4) + \varepsilon \sigma T_{amb}^4.$$

Данное выражение используется в приложении **General Heat Transfer** для расчета исходящего лучистого потока. Оно применимо к границам в системе поверхность-поверхность. В соответствии с этим выражением составляется система линейных уравнений относительно  $J$ , которая решается параллельно с уравнением для температуры  $T$ .

## 8.5. Решение задач теплопередачи в системе COMSOL Mutiphysics

### 1. Доступные виды расчетов

Расчет задач теплопередачи может быть осуществлен в режимах  $1D$ ,  $2D$ ,  $3D$ , а также осесимметричных (ОС) режимах  $1D$ ,  $2D$  с использованием цилиндрических координат (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Виды тепловых расчетов

Виды теплопередачи	1D	ОС 1D	2D	ОС 2D	3D
Теплопроводность (по умолчанию)	x	x	x	x	x
Конвекция	x	x	x	x	x
Излучение (поверхность-окружающая среда)	x	x	x	x	x
Излучение (поверхность-поверхность)	x	-	x	-	x

Кроме этих режимов существуют также некоторые другие, они здесь рассматриваться не будут.

Базовый модуль COMSOL Multiphysics позволяет производить расчеты передачи тепла за счет теплопроводности, а также за счет теплопроводности и конвекции во всех пространственных размерностях, а за счет излучения – только в одномерном режиме.

## 2. Режим теплопроводности

Кроме теплопроводности в этом режиме расчетов можно учитывать также эффекты конвекции и излучения гранями и границами. Режим теплопроводности подходит для моделирования теплопередачи в твердых телах. Для выбора этого режима следует в навигаторе моделей выбрать **Heat Transfer** и затем **Conduction**.

### *Формулировка дифференциальных уравнений в частных производных*

Математической моделью передачи тепла за счет проводимости является следующее уравнение теплопередачи

$$\delta_{ts} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q,$$

где  $\delta_{ts}$  - коэффициент временной шкалы;  $\rho$  - плотность;  $C$  – теплоемкость;  $k$  – тензор теплопроводности;  $Q$  – характеристика источника тепла или теплоотвода.

Для стационарной задачи температура не меняется во времени и первое слагаемое исчезает.

В определенных случаях здесь возможно также учитывать поперечную конвекцию или излучение в 1D плоских или осесимметричных задачах и 2D плоских задачах. Это достигается дополнительным введением в правую часть двух слагаемых

$$\delta_{ts} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q + \frac{h_{trans}}{dA} (T_{ext} - T) + \frac{C_{trans}}{dA} (T_{ambtrans}^4 - T^4),$$

где  $h_{trans}$  – коэффициент конвективной теплопередачи через поперечное сечение;  $T_{ext}$  – внешняя температура на боковых сторонах;  $C_{trans}$  – константа, определяемая пользователем;  $T_{ambtrans}$  – внешняя окружающая температура;  $dA$  – размерность 1D или 2D-областей.

Если решается задача с поперечной (трансверсальной) конвекцией или излучением, уравнение должно быть модифицировано для учета области  $dA$ . Для всех практических случаев использование этой возможности является редким, поэтому величины  $C_{trans}$  и  $T_{ambtrans}$  принимаются равными нулю.



Установки параметров подобластей

Тепловые параметры подобластей перечислены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Тепловые параметры подобластей

Параметр	Переменная	Описание
$\delta_{ts}$	$D_{ts}$	Коэффициент временной шкалы
$\rho$	$rho$	Плотность
$C_p$	$C$	Теплоемкость
$k$	$k$	Коэффициент теплопроводности
$\underline{k}$	$\underline{k}$	Тензор коэффициента теплопроводности
$k_{ij}$	$kx_ix_j$	Компоненты тензора коэффициента теплопроводности
$Q$	$Q$	Источник тепла
$h_{trans}$	$h_{trans}$	Трансверсальный коэффициент конвективной теплопередачи
$T_{ext}$	$T_{ext}$	Трансверсальная внешняя температура
$C_{trans}$	$C_{trans}$	Константа, определяемая пользователем
$T_{ambtrans}$	$T_{ambtrans}$	Трансверсальная окружающая температура

Коэффициент временной шкалы  $\delta_{ts}$  обычно выбирается равным 1, при этом отсчет ведется в секундах. Чтобы время задавать в минутах, он устанавливается равным 1/60.

Плотность  $\rho$  вводится как количество массы на единицу объема.

Теплоемкость  $C$  характеризует количество тепловой энергии, необходимое для нагрева единицы массы на единицу температуры.

Коэффициент теплопроводности  $k$  характеризует соотношение между вектором плотности теплового потока  $q$  и температурным градиентом температуры  $\nabla T$  в законе Фурье

$$\vec{q} = -k\nabla T.$$

В расчет эта величина вводится как мощность, деленная на единицы длины и температуры.

Тепловой источник  $Q$  описывает генерацию или поглощение тепла в области. Эта величина вводится с положительным или отрицательным знаками в

зависимости от подогрева или поглощения тепла как мощность на единицу объема (Вт/м<sup>3</sup> в единицах системы СИ).

### Виды граничных условий

Доступны следующие виды граничных условий, приведенные в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Виды граничных условий при тепловых расчетах

Граничные условия	Описание
$\vec{n} \cdot (k\nabla T) = q_0 + h(T_{inf} - T) + C_{const}(T_{amb}^4 - T^4)$	Тепловой поток (условие Неймана)
$\vec{n} \cdot (k\nabla T) = 0$	Тепловая изоляция или симметрия
$T = T_0$	Заданная температура (условие Дирихле)
$T = 0$	Температура, равная нулю

Рассмотрим эти условия более подробно.

#### Тепловой поток

В случае поступления в систему теплового потока условие имеет вид

$$\vec{n} \cdot (k\nabla T) = q_0 + h(T_{inf} - T) + C_{const}(T_{amb}^4 - T^4),$$

где правая часть характеризует тепловой поток, которым система обменивается с окружающей средой.

В COMSOL Multiphysics применяется только одно обобщенное граничное условие для теплового потока, используемое как для общего теплового потока, так и для теплового потока за счет конвекции и излучения. При этом тепловой поток  $q$  интерпретируется по направлению снаружи внутрь, а конвекция и излучение - по направлению изнутри наружу.

Величину  $q$  задают для того, чтобы определить тепловой поток, проникающий в рассматриваемую область. Например, любой электрический нагреватель может быть хорошо описан с помощью этого условия, и можно не указывать его геометрию. Величина  $q$  определяется как единица мощности на единицу площади (Вт/м<sup>2</sup> при использовании единиц системы СИ). Хотя такая размерность непосредственно применима для режима 3D, единицы глубины и площади могут использоваться также в двумерных 2D и одномерных 1D приложениях, соответственно.

Слагаемое  $h(T_{inf} - T)$  моделирует конвективный тепловой обмен с окружающей средой, где  $h$  – коэффициент теплопередачи, а  $T_{inf}$  означает температуру среды, окружающей тело. Величина  $h$  зависит от геометрии и условий омывающего потока.

Слагаемое  $C_{const} (T_{amb}^4 - T^4)$  моделирует передачу тепла окружающей среде излучением. Здесь  $T_{amb}$  – температура излучения окружающей среды, которая может отличаться от  $T_{inf}$ .  $C_{const}$  это произведение поверхностного коэффициента излучения  $\varepsilon$  на постоянную Стефана-Больцмана  $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) с той же самой размерностью, что и размерность постоянной Стефана-Больцмана

$$C_{const} = \varepsilon \sigma .$$

#### Теплоизоляция или симметрия

Рассматриваемое условие имеет вид

$$\vec{n} \cdot (k \nabla T) = 0 .$$

Это условие определяет, в каких местах область хорошо изолирована, либо сокращает размер модели за счет использования преимуществ симметрии. Интуитивно ощущается, это уравнение говорит о том, что градиент вдоль границы должен быть равен нулю. Кроме того, температура на одной стороне границы должна быть равна температуре на другой стороне границы. Так как нет разницы температур на границе, тепло не должно пересекать ее.

#### Тонкий теплоизолирующий слой

Можно использовать граничное условие теплоизолирующего слоя в виде

$$\vec{n} \cdot (k_1 \nabla T_1 - k_2 \nabla T_2) = \frac{k}{d} (T_1 - T_2) ,$$

для того, чтобы моделировать материал, обладающий теплоизолирующими свойствами. Слой имеет толщину  $d$  и теплопроводность  $k$ . Это граничное условие имеет смысл только на границах между отдельными частями в сборке.

Граничные условия могут быть установлены в диалоговом окне **Boundary Settings**. Используемые при этом переменные и их описание приведены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Переменные, описывающие тепловые процессы

Параметр	Переменная	Описание
q0	$q$	Внутренний тепловой поток
h	$h$	Коэффициент конвективной теплопередачи
Tinf	$T_{inf}$	Температура окружающей среды
Const	$Const$	Постоянная излучения: произведение коэффициента излучения на постоянную Стефана-Больцмана
Tamb	$T_{amb}$	Температура излучающей окружающей среды
T0	$T_0$	Предварительно заданная температура

В разделе **Conduction** (Проводимость) применены следующие переменные, используемые в уравнениях областей, границ и для постобработки.

Таблица 8.5

Переменные, используемые в уравнениях областей, границ и для постобработки

Переменная	Область/Тип S - subdomain (подобласть); B – boundary (граница)	Описание	Выражение
T	S/B	Температура	$T$
gradT, Txi	S/V	Градиент температуры	$ \nabla T , \frac{\partial T}{\partial x_i}$
flux	S	Тепловой поток	$ -k\nabla T $
nflux_T	B	Нормальный тепловой поток	$\vec{n} \cdot (-k\nabla T)$
fluxxi	V	Тепловой поток, $x_i$ компонента	$\sum_j -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$
Dts	S	Коэффициент временной шкалы	$\delta_{ts}$
rho	S	Плотность	$\rho$
C	S	Теплоемкость	$C_p$
k, kxixj	S	Теплопроводность	$k, k_{ij}$
Q	S	Тепловой источник	$Q$
htrans	S	Конвективный коэффициент теплопередачи	$h_{trans}$
Text	S	Внешняя температура	$T_{ext}$
Ctrans	S	Константа, определяемая пользователем	$C_{trans}$
Tambtrans	S	Внешняя температура	$T_{ambtrans}$
T0	B	Предварительно заданная температура	$T_0$
h	B	Конвективный коэффициент теплопередачи	$h$
Tinf	B	Температура окружающей среды	$T_{inf}$
Const	B	Постоянная излучения: произведение коэффициента излучения на постоянную Стефана-Больцмана	$Const$
Tamb	B	Температура излучающей окружающей среды	$T_{amb}$

### 3. Конвекция

Одним из наиболее общих граничных условий при моделировании теплопередачи является конвективное охлаждение или нагрев за счет того, что флюид омывает поверхность естественным путем или принудительно. Далее будем говорить об охлаждении, но подразумевать при этом оба возможных процесса – охлаждение или нагрев. Принципиально существуют две возможности моделирования этих процессов:

- использование коэффициентов теплопередачи на поверхности, омываемой при конвекции;
- расширение модели для описания потоков и теплопередачи во флюиде.

**Первый** способ является очень мощным и эффективным. В дополнение к этому режим приложения **General Heat Transfer** предоставляет пользователю встроенные функции для использования коэффициентов, описывающих теплопередачу. Для большинства инженерных задач использование этих коэффициентов является точным и численно эффективным модельным приближением. Моделирование охлаждения или нагрева может осуществляться путем задания теплового потока флюида, пропорционального разности температур вдоль фиктивного теплового слоя. Тепловой поток может быть описан в терминах коэффициента теплопередачи  $h$  в соответствии с уравнением

$$-\vec{n} \cdot (-k\nabla T) = h(T_{\text{inf}} - T).$$

**Второе** приближение, которое предполагает учет течения флюида и перенос тепла в модели, может быть полезным в определенных случаях, когда, например, из-за особенностей геометрии коэффициенты в значительной степени меняются в зависимости от места на поверхности, или же если интерес представляет температура флюида. В таких случаях граничные условия на поверхности раздела непрерывны и не испытывают разрывов. Однако сложность модели существенно возрастает, если необходимо рассчитать поле течения флюида либо его температурное поле. Кроме того, существенно возрастают требования к объему оперативной памяти, а время расчета значительно увеличивается.

В дальнейшем сосредоточим основное внимание на первом из упомянутых выше двух способов, который для описания конвективной теплопередачи использует коэффициенты.

Основная трудность в использовании коэффициентов теплопередачи – это расчет или задание значений коэффициента  $h$ . Этот коэффициент зависит от самого флюида, его свойств, температуры поверхности, а также в случае принудительной конвекции – от скорости движения флюида. Кроме того, на величину этого коэффициента влияет геометрическая конфигурация. Для облегчения выбора этого коэффициента в разделе **General Heat Transfer** имеется библиотека, доступная через меню **Physics>Boundary Settings**.

После того, как значение  $h$  выбрано из библиотеки, программное обеспечение устанавливает соответствующие величины в ячейках значений коэффициентов. Для получения достоверных результатов необходимо установить корректные вызовы для соответствующих подпрограмм задачи конвекции, в особенности параметр шкалы длины  $L$ . Для этого рассмотрим основные положения коэффициентной теории теплопередачи.

Конвективное охлаждение или нагрев целесообразно разделить на четыре основные категории в зависимости от условий течения флюида (естественное или принудительное) и от типа геометрии (внутренний или внешний конвективный поток), что проиллюстрировано на рис. 8.3.

Сюда следует также добавить случаи ламинарного или турбулентного течения флюида, что в итоге дает восемь видов конвекции, как это показано на рис. 8.3.

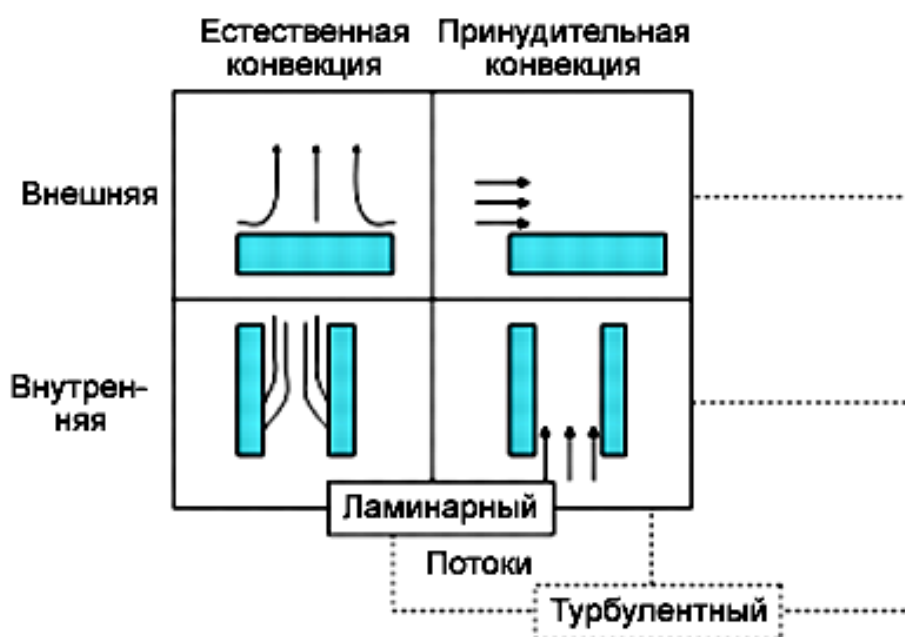


Рис. 8.3. Категории конвективного теплообмена

Для каждого вида конвекции существуют определенные соотношения, изложенные в соответствующей литературе. Для большинства случаев уравнения, описывающие каждый процесс, в зависимости от формы отличаются друг от друга в значительной степени. Справочники по теплопередаче в основном содержат большое количество эмпирических и теоретических зависимостей для коэффициентов  $h$ . Библиотека модуля теплопередачи системы COMSOL Multiphysics содержит набор таких формул. При этом используются выражения, базирующиеся на следующих безразмерных параметрах:

- число Нуссельта  $Nu_L(Re, Pr, Ra) = hk/L$ ;
- число Рейнольдса  $Re_L = \rho UL/\eta$ ;
- число Прандтля  $Pr = \rho C_p/\eta$ ;
- число Рэлея  $Ra = GrPr = \rho^2 g \beta C_p \Delta T L^3 / k \eta^2$ ,

где  $h$  – коэффициент теплопередачи;  $L$  – характерная длина;  $\Delta T$  – разница температур поверхности и флюида;  $g$  – гравитационная постоянная (ускорение свободного падения).

Уравнения, содержащие эти безразмерные числа, включают также параметры, характеризующие свойства флюида:  $\rho$  – плотность;  $U$  – скорость перемещения масс;  $\eta$  – вязкость;  $C$  – теплоемкость;  $\beta$  – коэффициент температурного расширения. В библиотеке коэффициент  $h$  базируется на числе Нуссельта и определяется функцией свойств материала, температуры, скорости течения и геометрии.

Для естественной конвекции число Нуссельта определяется как

$$Nu = C'(Gr Pr)^n .$$

Параметр  $C'$  зависит от геометрии поверхности. Степень  $n$  имеет типичную величину 0,25 для ламинарного и 0,33 для турбулентного течения. Соотношение Нуссельта для принудительной конвекции меняется в значительной степени и не имеет определенной формулы.

Различают два вида числа Нуссельта – среднее  $\overline{Nu}_L$  и локальное  $Nu$ . Среднее представляет собой интегральную форму этого числа. Оно базируется на усреднении по всей длине охлаждаемой поверхности и соответствует среднему значению коэффициента теплопередачи  $h$ . Локальные числа Нуссельта характеризуют значения коэффициента теплопередачи, зависящие от расположения рассматриваемой точки. В этом случае переменная  $L$  в соответствующем выражении для числа Нуссельта заменяется величиной  $y$ , т. е. расстоянием вдоль грани (или расстоянием от первой точки контакта вдоль направления течения). Оба значения представлены в библиотеке.

## 8.6. Пример тепловых расчетов в системе COMSOL Multiphysics

В качестве примера будет рассмотрен расчет изменений температуры и температурного градиента во времени при нагревании образца горной породы в печи.

Моделирование ведется в базовом модуле COMSOL Multiphysics. Модель осесимметричная. Расчет производится для гранитоидной породы при коэффициенте теплопроводности  $\lambda = 3,0$  Вт/(м·К), плотности  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>, теплоемкости  $c_p = 750$  Дж/(кг·К). Диаметр образца 40 мм, высота 20 мм. Нагревание осуществляется при непосредственном контакте нагревающего устройства с боковыми стенками образца за счет теплопроводности. При этом будет задано линейное во времени увеличение температуры. Расчет производится в осесимметричной постановке задачи в следующей последовательности.

### 1. Установка расчетных параметров

В меню **New** выбираются следующие параметры:

- **Axial symmetry (2D)**
- **Application Modes >> COMSOL Multiphysics >> Heat Transfer >> Conduction >> Transient analysis.**

## 2. Черчение модели

Осесимметричная модель состоит из одного элемента и представляет собой квадрат высотой 0,02 м и шириной также 0,02 м, левый нижний угол которой расположен в точке с координатами  $r = 0$  м;  $z = -0,02$  м.

## 3. Ввод исходных параметров

Константы вводятся в меню **Options >> Constants...** в соответствии со следующими данными

Tmin	300 [K]	Начальная температура
Tmax	1300 [K]	Конечная температура
te	10*60 [s]	Время нагрева

Комментарии в правом столбце вводятся оператором на любом языке.

В данном случае время нагрева от минимальной **Tmin** до максимальной **Tmax** температуры составляет 10 минут. Чтобы задать другое время, в последнюю строчку следует ввести соответствующее значение, а в дальнейшем при установке времени расчета (см. ниже) в качестве максимального значения следует также указать эту величину в секундах.

Выражения вводятся в меню **Options >> Expressions >> Global Expressions** в соответствии со следующими данными

Tt	$(T_{max}-T_{min})*t/te+T_{min}$	Изменение температуры во времени
----	----------------------------------	----------------------------------

Параметры подобластей вводятся в меню **Physics >> Subdomain Settings** на вкладке **Physics**


Обозначение	Величина	Размерность	Название (англ.)	Название (русск.)
$\delta_{ts}$	1	-	Time scaling coefficient	Временной коэффициент
k (isotropic)	3	W/(m·K)	Thermal conductivity	Теплопроводность
$\rho$	2600	kg/m <sup>3</sup>	Density	Плотность
Cp	750	J/(kg·K)	Heat capacity at constant pressure	Теплоемкость при постоянном давлении
Q	0	W/m <sup>3</sup>	Heat source	Удельная мощность теплового ис-



И в том же окне на вкладке **Init** вводится начальное значение температуры  $T_{min}$ .

Граничные условия вводятся в меню **Physics>>Boundary Settings** на вкладке **Coefficients**.

На правой границе задается температура **Temperature  $Tt$** , а формула для ее расчета была уже введена ранее в разделе **Expressions**.

Параметры расчета (начальное и конечное значения моментов времени расчета, а также шаг) вводятся в окне **Solver Parameters**, вызываемом в меню **Solve>>Solver Parameters**, по нажатию кнопки **F11** или кнопки  на панели. В этом окне на вкладке **General** следует ввести диапазон времени и шаг расчета, в данном случае 0:5:600, что означает от 0 с до 600 с с шагом 5 с. При моделировании нагревания за другой промежуток времени следует изменить эту величину в этом окне и в окне **Constants** (Константы), описанном выше. На вкладке **Time stepping** в окне **Time stepping taken by solver** вместо **Free** следует ввести **Strict**, чтобы производить расчет по заданным значениям времени. Остальные значения оставляются неизменными.

Построение сетки и расчет осуществляются нажатием кнопки  на панели.

Рассмотрим результаты моделирования тепловых процессов.

На рис. 8.4 в визуальной форме представлены результаты расчета распределения температур внутри образца при нагревании наружной стенки за время  $t_e = 600$  с. Изображение в оригинале цветное, в черно-белой печати оно представлено оттенками серого.

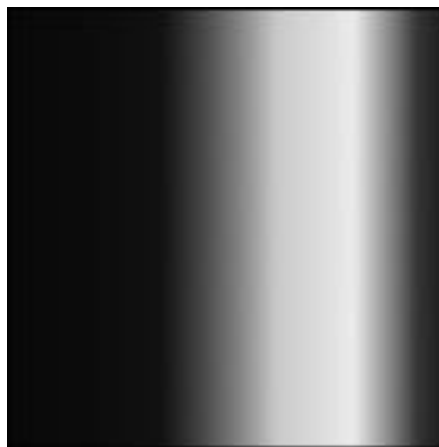


Рис. 8.4. Распределение температур внутри образца при нагревании наружной (правой) стенки, другие поверхности изолированы

Температура на правой стенке максимальна и к центру снижается.

Рассмотрим, как влияет скорость нагрева на разницу температур в различных точках внутри образца, а также как температура и температурный градиент изменяются во времени. Построение графиков зависимостей различных параметров от времени осуществляется в меню **Postprocessing>>Cross Section Plot Parameters...** на вкладке **Point**. В окошке **Predefined quantities** устанавливается интересующий параметр (например, **Temperature** или **Temperature gradient**), а в окошке **Coordinates** устанавливается одно или несколько значений координат точек, для которых производится расчет.

На рис. 8.5 приведены графики зависимостей температуры внутри образца от времени нагрева в

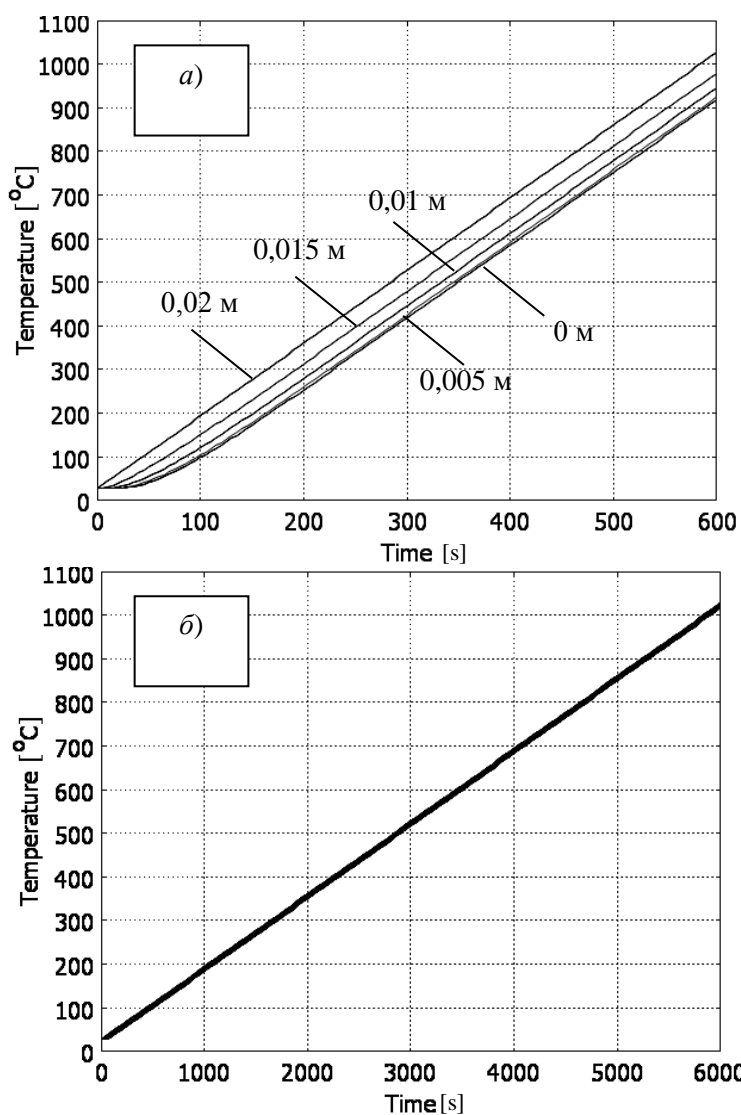


Рис. 8.5. Графики зависимостей температуры внутри образца от времени нагрева в точках с координатами  $r = 0,02; 0,015; 0,010; 0,05, 0$  м; разница температур снаружи на боковой поверхности и внутри в центре образца доходит до  $110$  °С при нагревании за время  $t_e = 600$  с (а) и не превышает  $20$  °С при  $t_e = 6000$  с (б)

образца от времени нагрева в точках с координатами  $r = 0,02; 0,015; 0,010; 0,05, 0$  м;  $z = -0,01$  м при линейном увеличении температуры на боковой поверхности. Разница температур снаружи и внутри в центре образца доходит до  $110$  °С при нагревании за время  $t_e = 600$  с со скоростью  $100$  °С/мин (рис. 8.5, а) и не превышает  $20$  °С и  $t_e = 6000$  с со скоростью  $10$  °С/мин (рис. 8.5, б). На последнем рисунке различие температур практически незаметно. Указанное различие определяет температурный градиент, который зависит от скорости нагревания. При аналогичных расчетах с несколькими значениями скоростей нагревания может быть получена зависимость от этой величины разницы температур, а также температурного градиента и определено значение скорости нагревания, выше которой эти величины становятся значимыми. Это значение должно быть определено при выборе скорости нагрева для исключения чрезмерных термических напряжений при нагреве материалов или горных пород при обжиге или их

испытаниях. Слишком большая скорость нагрева может привести к образованию трещин и разрушению породы. Более подробно расчет таких напряжений будет описан ниже.

Для иллюстрации влияния скорости нагрева на температурный градиент на рис. 8.6 представлены графики зависимости этого параметра от времени для различных точек в образце. Наибольший градиент отмечается на боковой поверхности, а наименьший (равный нулю) – в центре образца.

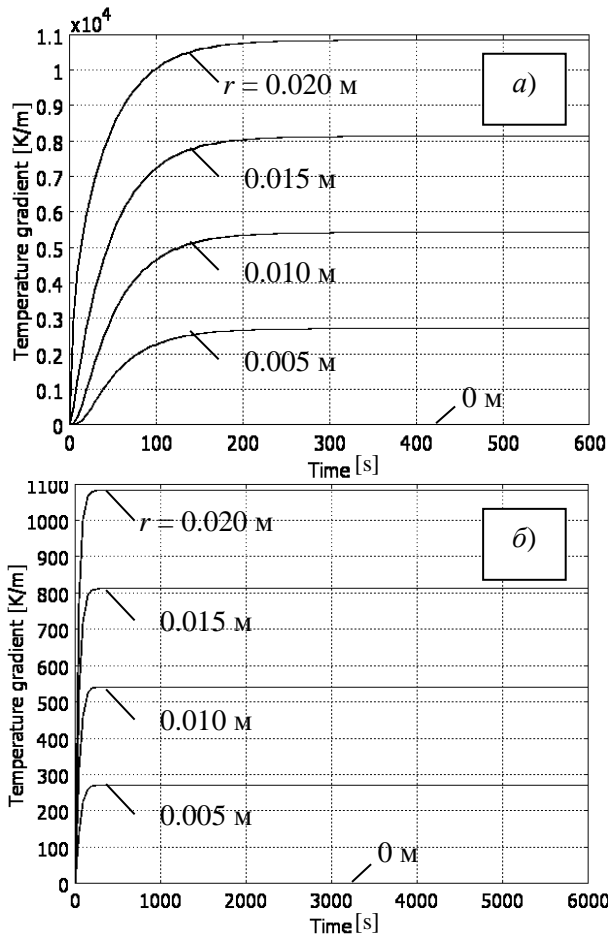


Рис. 8.6. Зависимости от времени температурного градиента при нагревании со скоростью 100 К/мин (а) и 10 К/мин (б) для точек, находящихся на различном расстоянии  $r$  от оси образца при  $\lambda = 3$  Вт/(м·К)

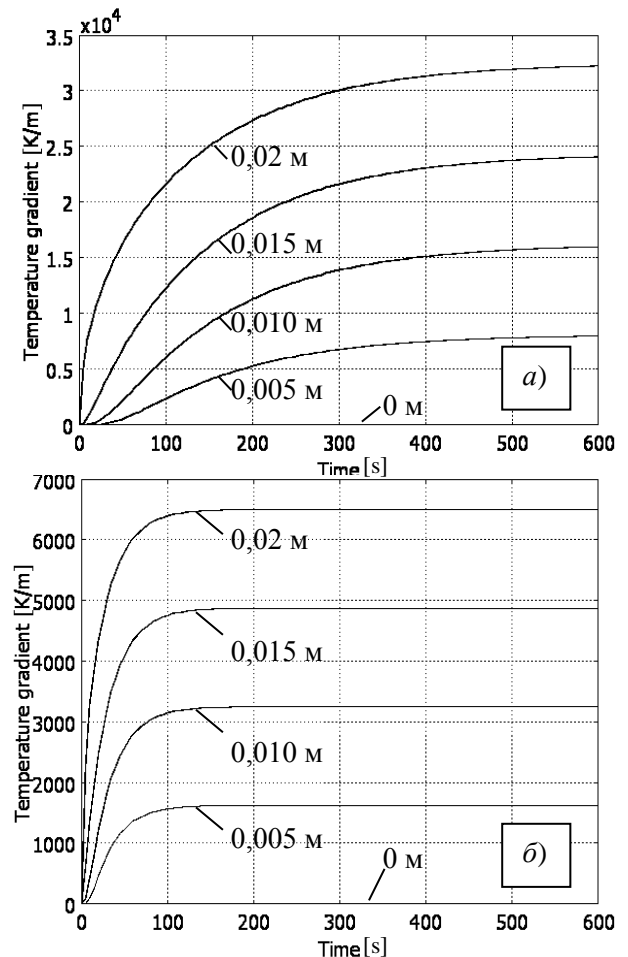


Рис. 8.7. Изменение температурного градиента во времени при теплопроводности  $\lambda = 1$  (а) и 5 Вт/(м·К) (б) в точках, находящихся на различном расстоянии  $r$  от центра образца

При нагреве за 10 мин (скорость 10 град/мин) температурный градиент на боковой поверхности образца доходит почти до 11000 К/м. При нагреве за 100 мин (скорость 10 град/мин) температурный градиент не превышает 1100 К/м, т. е. более, чем в 10 раз меньше.

Из графиков, приведенных на рис. 8.6, также следует, что в случае увеличения температуры нагрева по линейному закону при одном и том же значении теплопроводности температурный градиент увеличивается от 0 и достигает стационарного участка за время около 200 с, причем, как при быстром, так и при более медленном нагреве.

Рассмотрим теперь влияние теплопроводности  $\lambda$  на температурный градиент. Для этого зададимся рядом значений из диапазона, характерного для горных пород и минералов  $\lambda = 1; 3; 5$  Вт/(м·К). Расчет, как и раньше, производится для  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_p = 750$  Дж/(кг·К) при скорости нагревания 100 °С/мин до температуры 1000 °С, что соответствует времени нагрева 10 мин.

На рис. 8.7 представлены графики зависимостей температурного градиента от времени при теплопроводности  $\lambda = 1$  Вт/(м·К) (рис. 8.7, а) и 5 Вт/(м·К) (рис. 8.7, б).

Как и в предыдущем случае, из этих графиков следует, что максимальный температурный градиент наблюдается на внешней поверхности образца, через которую осуществляется нагревание. При уменьшении теплопроводности температурный градиент и время достижения 95%-ного уровня увеличиваются. Результаты расчетов приведены в табл. 8.6. Эти данные могут быть использованы для аппроксимации и получения регрессионных зависимостей температурного градиента и времени достижения его максимальных значений в зависимости от теплопроводности.

Таблица 8.6

Влияние коэффициента теплопроводности  $\lambda$  на максимальное значение температурного градиента и время достижения 95%-ного уровня при скорости нагревания 10 °С/мин.

$\lambda$ , Вт/(м·К)	Разность температур снаружи и внутри, К	Максимальный температурный градиент, К/м	Время до- стижения 95%-ного уровня, с
1	310	35000	450
3	110	11000	200
5	70	6500	100

Полученные значения позволяют построить графики изменения разности температур, максимального градиента температур и времени достижения стационарного участка нагрева. Эти зависимости могут быть также аппроксимированы полиномами или другими функциями и в дальнейшем использоваться при расчетах. К недостатку можно отнести то, что эти данные получены для конкретных условий, однако при соответствующей постановке задачи здесь возможен переход и к обобщенным результатам, позволяющим использовать их гораздо шире.

Рассмотренная задача является достаточно простой, а результаты, полученные в ней, можно получить и более простыми средствами при расчете по

известным формулам. Однако освоение такой простой задачи позволит производить различные расчеты тепловых характеристик и для структур со сложными формой, строением и свойствами, что затруднительно сделать другими методами.

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 8**

1. Перечислите и охарактеризуйте механизмы теплопередачи в среде.
2. Какое уравнение описывает теплопередачу за счет теплопроводности? Охарактеризуйте величины, входящие в него.
3. Как в уравнениях помимо теплопроводности учитывается также теплопередача за счет конвекции?
4. Что такое вектор теплового потока, как он определяется при передаче тепла путем теплопроводности и конвекции и как - в случае только теплопроводности?
5. Какие параметры задаются на границах при условии Дирихле и Неймана?
6. Какими параметрами, влияющими на процессы излучения и восприятия тепла, характеризуются точки поверхности тел?
7. Сколько и какие виды теплопередачи за счет излучения могут быть учтены в системе COMSOL Mutiphysics?
8. Какими уравнениями описывается теплопередача от поверхности в окружающую среду и от одной поверхности к другой поверхности?
9. Какие виды тепловых расчетов доступны в системе COMSOL Mutiphysics в базовом модуле и приложении General Heat Transfer?
10. Перечислите этапы тепловых расчетов с указанием тех величин, которые используются на каждом этапе.
11. Проиллюстрируйте последовательность действий при проведении простейших тепловых расчетов на конкретном примере.
12. Каким образом могут быть интерпретированы результаты тепловых расчетов?

## **9. МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

### **9.1. Общие сведения о мультифизическом моделировании**

Достоинством программного пакета COMSOL Multiphysics является возможность проведения мультифизических расчетов, т. е. расчетов с использованием нескольких физических законов. Такой режим обычно устанавливается в начале формирования модели. При этом после указания размерности модели в задачу вводятся по мере необходимости друг за другом соответствующие физические законы. Мультифизический характер расчетов может быть осуществлен и позже, например, после отработки расчетов по одному из законов добавляется следующий.

Мультифизические расчеты могут быть произведены как с использованием только базового модуля, так и с привлечением дополнительных модулей, что в определенных случаях будет упрощать решение задачи.

При таких расчетах важно обеспечить связь между переменными, используемыми в различных физических законах. При использовании только базового модуля такая связь устанавливается путем дополнительного введения переменных одних законов в расчетные формулы, используемые в других законах. Так будет сделано в примере, рассмотренном ниже. Этот путь более сложный, но позволяет обходиться без дополнительных модулей, использование которых требует соответствующих финансовых затрат. Использование дополнительных модулей позволит сократить время на решение и в итоге за счет сокращения времени получить свой выигрыш. Поэтому в каждом конкретном случае следует выбирать оптимальный вариант – решать задачу только в базовой комплектации системы COMSOL Multiphysics или привлечь дополнительные модули.

### **9.2. Расчет термических напряжений в образце горной породы при его нагревании**

#### **9.2.1. Общие сведения о модели**

В качестве примера таких задач рассмотрим расширение задачи о расчете температурного градиента, рассмотренной выше. Увеличение температуры вызывает расширение твердых тел. При существовании температурного градиента области с различной температурой, находящиеся рядом, будут расширяться с разной степенью, что приведет к возникновению механических напряжений. Произведем расчет максимальных сжимающих и растягивающих напряжений при линейном во времени увеличении температуры.

Заметим, что процедура ввода данных здесь будет несколько отличаться от рассмотренной выше задачи, связанной с использованием только тепловых расчетов.

### 9.2.2. Постановка задачи

Рассмотрим расчет напряжений, возникающих в образце горной породы, имеющем форму параллелепипеда, при его нагревании с линейно возрастающей температурой на боковых гранях от 0 °С до 1000 °С.

Изменение температуры задается формулой

$$T_{tim} = (T_{\max} - T_{\min}) \cdot t / t_e + T_{\min}, \quad (9.1)$$

где  $T_{tim}$  – температура, изменяющаяся линейно от времени;  $T_{\max}$ ,  $T_{\min}$  – максимальное и минимальное значения температуры. Для нашего примера примем их равными  $T_{\min} = 273,15 \text{ К} = 0 \text{ °С}$ ,  $T_{\max} = 1273,15 \text{ К} = 1000 \text{ °С}$ ;  $t$ ,  $t_e$  – текущее время и время эксперимента. Параметру  $t_e$  будем давать различные значения, задающие различную скорость нагрева, например, при  $t_e = 600 \text{ с} = 10 \text{ мин}$ . скорость нагрева составит  $100 \text{ °С /мин}$ , при  $t_e = 6000 \text{ с}$  она будет равна  $10 \text{ °С /мин}$ .

Образец будет иметь форму параллелепипеда с размерами поперечного сечения  $20 \times 20 \text{ мм}$  и высотой  $10 \text{ мм}$ . Для моделирования будет использоваться двумерный  $2D$ -режим, при этом будет отдельно задана глубина модели, равная  $20 \text{ мм}$ . Тепловые и упругие характеристики геоматериала будут приведены ниже при вводе их в соответствующие окна системы COMSOL Multiphysics.

Заметим еще раз, что здесь данная задача решается в базовом модуле и не требует подключения других дополнительных модулей.

### 9.2.3. Описание модели

#### Уравнения

Мультифизическая модель объединяет уравнения расчета плоских деформаций **Plane Strain** в разделе структурной механики **Structural Mechanics** и теплопередачи в разделе **Heat Transfer**. Системные переменные следующие:

$u$  - перемещения вдоль оси  $x$ ;

$v$  - перемещения вдоль оси  $y$ ;

$T$  – температура.

Механические процессы протекают гораздо быстрее, чем тепловые, поэтому их длительностью в данном случае можно пренебречь, и в задачах структурной механики будет рассматриваться статическая модель. В свою очередь зависимость от времени тепловых процессов будет описываться уравнением теплопередачи с учетом переходных процессов. Это допущение хорошо себя зарекомендовало, оно позволяет существенно сократить время расчетов при моделировании. Поведение моделируемой конструкции описывается системой дифференциальных и алгебраических уравнений следующего вида.

1. *Законы механики.* В основы расчетов заложен принцип виртуальной работы, который для плоского напряженного состояния описывается уравнением

$$\delta W = \int_V \left( -\varepsilon_{xtest} \sigma_x - \varepsilon_{ytest} \sigma_y - 2\varepsilon_{xytest} \tau_{xy} + \vec{u}_{test}^t \vec{F}_V \right) dV + \int_S \vec{u}_{test}^t \vec{F}_S ds = 0,$$

где  $W$  – общая накопленная энергия,  $\delta W$  - ее приращения, буквами  $\varepsilon$  с соответствующими коэффициентами обозначены деформации, а буквами  $\sigma$  - напряжения, буквами  $F$  обозначены векторы сил. Соотношение между напряжениями и деформациями с учетом теплового расширения материала имеет вид

$$\sigma = D\varepsilon_{el} + \sigma_0 = D(\varepsilon - \alpha T),$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного теплового расширения;  $\varepsilon_{el}$  - упругие деформации;  $\sigma_0$  - начальные напряжения;  $T$  – изменения температуры;  $D$  представляет собой матрицу размера 6 x 6, для изотропного материала она имеет вид

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Это соотношение будет в дальнейшем использовано для связи термической и механической частей задачи.

2. *Тепловые законы.* Для расчета переходного теплового режима используется уравнение теплопроводности в виде

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (k \nabla T) = Q(t),$$

где  $\rho$  - плотность;  $C_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $T(x, y, z, t)$  - температура в точке с координатами  $x, y, z$ ;  $t$  – время;  $k$  – коэффициент теплопроводности (теплопроводность);  $\nabla T$  - градиент температуры;  $Q(t)$  - тепловые источники (плотность теплового потока).



### Свойства материала

Поскольку здесь рассматривается мультифизическая задача с привлечением двух разделов физики, исходными для расчетов служат величины, используемые в механике и теплотехнике. В табл. 9.1 приведен перечень свойств некоторых пород с обозначениями, принятыми в COMSOL Multiphysics.

Таблица 9.1

Обозначения и типовые значения свойств горных пород

Физический параметр, единицы измерения	Обозначение		Обобщенные значения для некоторых горных пород [5, 6, 7 и др.]						
	В формулах	В Comsol Multiphysics	Базальт	Гранит	Гипс	Доломит	Известняк	Мрамор	Кварцит
Теплопроводность, Вт/(м·К)	$k$	k_mat	0,44-3,5	1,1-3,9	0,35	1,6-6,5	0,64-4,4	1,6-4,0	2,7-7,6
Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	$C_p$	c_mat	0,85-1,49	0,65-1,3	0,32-1,06	0,93	1,06	0,92	1,0
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	$\rho$	rho_mat	2,6-3,25	3,15-4,3	2,31-2,33	2,84	2,68-2,76	2,6-2,84	2,4-2,7
Модуль упругости (деформации) $10^4$ , МПа	$E$	E_mat	до 9,7	до 6,0	2-15	2,1-16,5	1,3-8,5	3,9-9,2	6,0-10,0
Коэффициент Пуассона	$\nu$	nu_mat	0,22-0,3	0,23-0,26	0,3	0,22-0,29	0,24-0,29	0,28-0,3	0,115
Температурный коэффициент линейного расширения, $10^{-6}$ , К <sup>-1</sup>	$\alpha$	al_mat	8-10	5,2-8,5	22	7-10	5,4-7,4	11-15	11-13
Тепловые источники, Вт	$Q(t)$	heat	Задаются в зависимости от задачи						

### Граничные условия

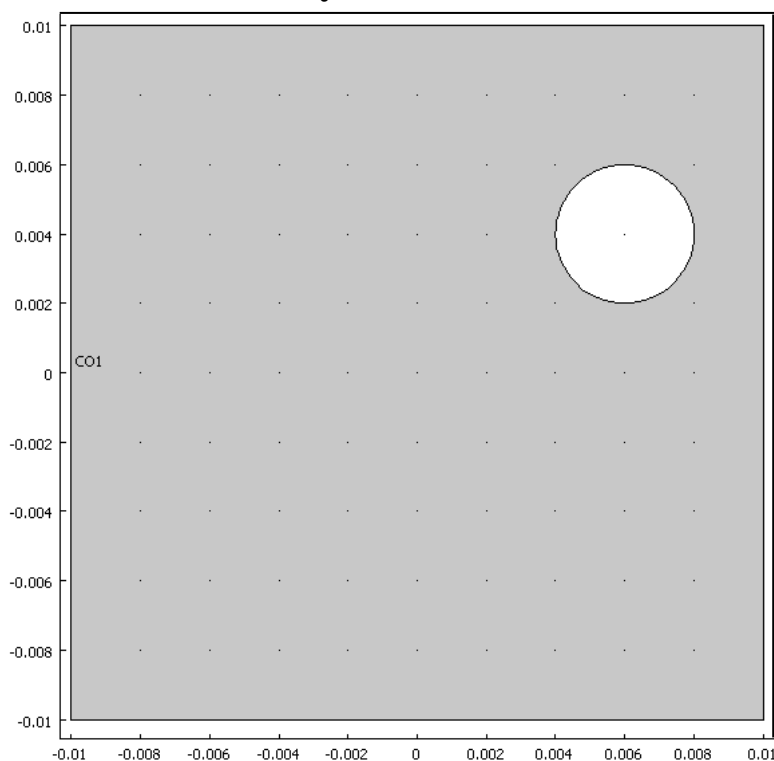
В простейшем случае может быть задано изменение температуры на определенных границах, например, как это сделано выше с помощью формулы (9.1). На других границах устанавливается тепловая изоляция. В более сложных задачах задается тепловой поток на границах, параметры конвекции или излучения.

### **9.2.4. Порядок формирования модели для мультифизического моделирования**

1. Войти в раздел **Model Navigator**, запустив **COMSOL Multiphysics** или нажав кнопку **New**, если программа уже запущена, выбрать требуемую размерность задачи, в данном случае **2D**. Затем следует добавить два раздела – тепловых и механических расчетов.

2. Добавить раздел тепловых расчетов из базового модуля. Для этого нажать кнопку **Multiphysics**, затем выбрать базовый модуль **Applications Mode >> COMSOL Multiphysics > Heat Transfer > Conduction**, а в этом разделе – **Transient analysis**. Нажать **Add**.

3. Добавить раздел структурной механики. Базовый модуль **COMSOL Multiphysics** не предоставляет возможности вводить непосредственно температурный коэффициент линейного расширения, поэтому в дальнейшем соответствующие выражения будут введены в формулы для вычисления напряжений. При этом для расчета будет использоваться также базовый модуль. Раздел структурной механики добавляется с помощью выбора меню **Applications Mode >> COMSOL Multiphysics >> Structural Mechanics Module >> Plane Strain >> Static analysis**, затем нажать **Add**. В данном случае механические



процессы протекают значительно быстрее, чем тепловые, поэтому для их расчета будет использоваться режим статического анализа. После этого следует нажать **OK** и перейти в основное окно программы **COMSOL Multiphysics**.

4. Начертить исследуемую фигуру. В данном случае это будет пластина квадратной формы размерами 20 x 20 мм с центром в точке с координатами  $x = 0$  мм,  $y = 0$  мм, в которой

Рис. 9.2. Чертеж пластины из известняка

сделано отверстие диаметром 4 мм с координатами центра  $x = 6$  мм,  $y = 5$  мм. Чертеж такой пластины показан на рис. 9.2.

5. В меню **Options>>Expressions>>Subdomen expressions...** ввести значения констант согласно таблице.

Name	Expression	Description
k_mat	2 [W/(m*K)]	Теплопроводность
C_mat	750 [J/(kg*K)]	Теплоемкость
rho_mat	2600 [kg/m^3]	Плотность
E_mat	2E9 [MPa]	Модуль Юнга
nu_mat	0.25	Коэффициент Пуассона
al_mat	4E-6 [1/K]	Темпер.коэфф.лин.расшир.

Правая колонка приведена здесь только для справки. Ввод указанных констант в данном разделе позволяет отдельно задавать параметры каждой из областей в том случае, когда исследуемый объект состоит из нескольких подобластей.

6. В меню **Options>>Expressions>>Scalar Expressions...** ввести выражения согласно таблице

Name	Expression	Description
dT	T-273.15	Разность температур
Ttim	(Tmax-Tmin)*t/te+Tmin	Изменение температуры
Tmax	1273.15 [K]	Начальная температура
Tmin	273.15 [K]	Конечная температура
te	10*60 [s]	Время нагрева

7. Установка расчетных параметров модели.

По умолчанию в системе, описывающей передачу тепла, установлена общая форма системы уравнений, позволяющая учитывать нелинейности. В то же время данная задача использует линейные соотношения между величинами. Линейная постановка задачи дает возможность использовать коэффициентную форму системы уравнений и сделать процесс вычисления проще. Это делается в меню **Physics>>Model Settings**, где на открывшейся вкладке в пункте **Equation system form** следует установить **Coefficient**. После этого следует нажать ОК.

8. Установка граничных условий в части структурной механики.

В меню **Multiphysics** следует установить режим **Plain Strain (pn)**, если он не был установлен ранее. В меню **Physics** следует открыть окно **Boundary Settings**, затем выбрать нижнюю границу 2 и на вкладке **Constraint** установить

флажок  $R_y$ , а его значение должно быть равно 0. Это создает опору нижней границе. После этого следует нажать **ОК**.

9. Установка граничных условий в тепловой части задачи.

В меню **Multiphysics** следует перейти в режим **Heat Transfer by Conduction (ht)**, после этого в диалоговом окне **Boundary Settings** меню **Physics** осуществить следующие установки, указанные в таблице ниже.

Границы	1, 4	2, 3, 5, 6, 7, 8
Boundary condition (граничное условие)	Temperature	Thermal insulation (теплоизоляция)
T0	Ttim	-

10. Установка параметров подобластей в части структурной механики.

В меню **Multiphysics** следует установить режим **Plain Strain (pn)**, а затем в меню **Physics** открыть окно **Subdomen settings** и ввести следующие значения параметров для единственной подобласти 1

Settings	All Subdomains
E	E_mat
$\nu$	nu_mat
$\rho$	0
thickness	1

Плотность в данном случае установлена равной нулю, чтобы исключить все динамические явления.

11. Установка параметров подобластей в тепловой части задачи.

В меню **Multiphysics** следует установить режим **Heat Transfer by Conduction (ht)**, а затем в меню **Physics** открыть окно **Subdomen Settings** и ввести следующие значения параметров для единственной подобласти 1.

Settings	All Subdomains
$\delta_{ts}$	1
k (isotropic)	k_mat
$\rho$	rho_mat
Cp	C_mat
Text	Ttim

Значения остальных параметров устанавливаются равными 0.

12. Ввод термических деформаций в выражения для напряжений для учета расширения модели при нагревании.

В меню **Physics** следует выбрать пункт **Equations System >> Subdomain Settings**, в открывшемся окне системы уравнений выбрать вкладку **Variables**. В открывшейся таблице приведены выражения для расчета различных величин. В общем списке следует найти перечисленные ниже величины и исправить выражения, удалив полностью имеющиеся и вставив приведенные ниже. При этом сомножители, выделенные жирным шрифтом, служат связками между термической и механической частями.

Для нормальных напряжений  $\sigma_x$ , обозначенных `sx_pn`

$$E\_pn*(1-nu\_pn)*(ex\_pn-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))+E\_pn*nu\_pn*(ey\_pn-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))+E\_pn*nu\_pn*(-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))$$

Для нормальных напряжений  $\sigma_y$ , обозначенных `sy_pn`

$$E\_pn*nu\_pn*(ex\_pn-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))+E\_pn*(1-nu\_pn)*(ey\_pn-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))+E\_pn*nu\_pn*(-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))$$

Для нормальных напряжений  $\sigma_z$ , обозначенных `sz_pn`

$$E\_pn*nu\_pn*(ex\_pn-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))+E\_pn*nu\_pn*(ey\_pn-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))+E\_pn*(1-nu\_pn)*(-al\_mat*dT)/((1+nu\_pn)*(1-2*nu\_pn))$$

После ввода этих выражений следует проверить их правильность.

13. Установка параметров сетки.

Параметры сетки могут быть выбраны стандартным образом по умолчанию, но при необходимости установлены другими. В данном случае следует установить максимально допустимую скорость роста размеров элементов при выходе из областей с малыми размерами деталей. Для этого в меню **Mesh>>Free Mesh Parameters...** на вкладке **Global** для параметра **Element grows rate** следует установить значение 1.7. Чем больше это значение, тем быстрее увеличиваются размеры элементов при движении из областей с малыми размерами деталей. Завершить установку следует нажатием кнопок **Remesh** и **OK**.

14. Установка параметров расчета сольвера.

Следует проверить, что в меню **Multiphysics** установлен режим **Heat Transfer by Conduction**. Затем, нажав кнопку **Solver Parameters**, в окошке параметра **Times** следует установить 0:1:600, т. е. начальное, шаг и конечное значения времени расчета. Кроме того, здесь следует задать параметры точности расчета **Relative tolerance** (Относительная погрешность) и **Absolute**

**tolerance** (Абсолютная погрешность), не превышающие величины относительных и абсолютных деформаций модели. Ориентировочные значения последних могут быть получены пробными расчетами с параметрами точности, установленными по умолчанию. В нашем случае следует установить  $1e-5$  для **Absolute tolerance** и  $1e-4$  для **Relative tolerance**.

На следующей вкладке в окошке **Time steps, taken by solver** следует установить **Strict** и после этого нажать **OK**, а затем нажать в меню кнопку **Solve** и тем самым произвести расчет.

#### 15. Постобработка и визуализация результатов расчетов.

В меню **Postprocessing** >> **Plot Parameters** следует установить флажок **Deformed shape**, затем перейти на вкладку **Deform**>>**Subdomain data** и в окошке **Deformation data** установить **Displacement** и после этого нажать **OK**. Будет получено изображение деформированного образца, показанное на рис. 9.3. В данной задаче кроме этого интерес представляют максимальное и минимальное значения горизонтального, вертикального и сдвигового напряжений. Их можно вывести в меню **Postprocessing** >> **Plot Parameters** на вкладке **Max/Min**, где нужно установить флажки **Max/min marker** и **Subdomain max/min data**. В окошке **Predefined quantities** выбирается интересующая величина. В нашем случае это максимальные и минимальные напряжения:

- **sx normal stress global sys** – нормальные напряжения в направлении x;
- **sy normal stress global sys** – нормальные напряжения в направлении y;
- **sxy shear stress global sys** – напряжения сдвига в плоскости xy.

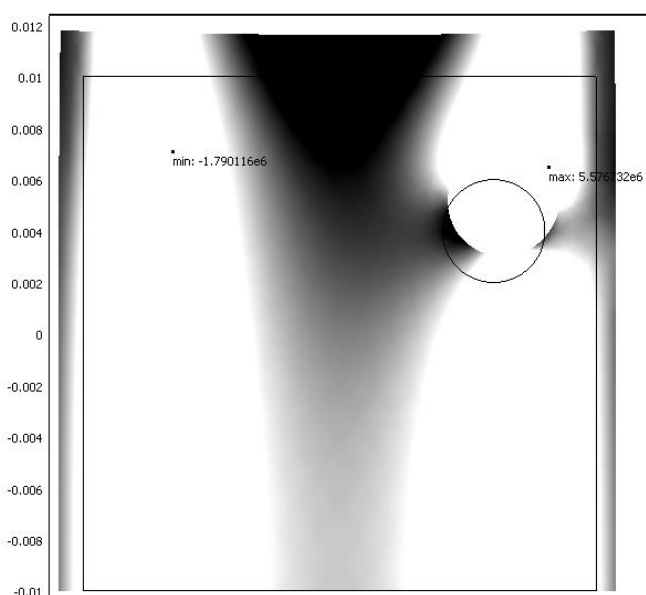


Рис. 9.3. Изображение деформированного при нагревании образца горной породы с указанием мест и значений максимальных и минимальных сдвиговых напряжений

#### 9.2.5. Результаты расчетов термических напряжений

Для примера на рис. 9.3 показано изображение образца горной породы, деформированного при нагревании, с указанием мест и значений максимальных и минимальных сдвиговых напряжений. Максимальное напряжение (сжимающее) в данном случае равно 5,5 МПа, а минимальное (растягивающее) -1,7 МПа. При большей скорости нагревания величина растягивающих напряжений будет возрастать и превысит предел прочности при растяжении, что приведет к образованию трещин и разрушению образца. В то же время сжимающие напряжения, несмотря на их большую

величину, к разрушению не приведут, поскольку предел прочности пород при сжатии по абсолютной величине гораздо больше, чем предел прочности при растяжении.

Следует заметить, что в нестационарном режиме в начале нагревания, когда меняется тепловое поле, места максимального и минимального напряжений будут смещаться.

Расчеты максимальных и минимальных напряжений могут быть полезны при определении скорости нагревания образцов породы, не приводящей к их разрушению, вызванному градиентом температуры.

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 9**

1. Что такое мультифизические расчеты, и в каких случаях приходится их использовать?
2. Проиллюстрируйте процесс ввода данных и расчета при мультифизическом моделировании на примере.
3. Укажите, в каком месте расчетов обеспечивается их мультифизический характер.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Постоянно возрастающие возможности компьютеров, связанные с привлечением, хранением, обработкой, визуализацией информации обусловили их широкое применение в различных направлениях научных исследований. Поэтому становится понятным, что в одной дисциплине невозможно осветить все аспекты их использования. В каждой новой задаче эти возможности могут быть задействованы по-своему. Учитывая практически необозримое количество таких задач, огромное количество направлений исследований, а также и неповторимую специфику каждой задачи, здесь предпринята попытка изложить наиболее необходимые элементы владения компьютерами, которые могли бы составить базовые знания и навыки, необходимые исследователю, ведущему свои изыскания в области изучения геосреды.

В данном учебнике рассмотрены объекты и процессы, с которыми приходится иметь дело в горном производстве. Это, в первую очередь, горные породы, а также различные методы их исследования. И компьютеры в таких исследованиях сегодня играют не последнюю роль.

Рассмотрение в данном курсе применения компьютеров в научных исследованиях геосред осуществляется на базе программного пакета MATLAB, который сегодня используется как во многих университетах мира, так и в профессиональных кругах исследователей различных направлений. Он доказал свою живучесть на протяжении уже не одного десятка лет, и это дает основание для уверенности, что обученным работе с ним студентам в будущем не придется резко менять свои навыки и обучаться другим программным платформам.

С этим программным продуктом связан и другой, описанный здесь, а именно - COMSOL Multiphysics, который исторически вырос из системы MATLAB и имеет соответствующий интерфейс взаимодействия с ней. Его применение также перспективно при изучении физических объектов и процессов горного производства.

При написании данного учебника был учтен опыт чтения лекций и проведения лабораторно-практических занятий со студентами физико-технического факультета Московского государственного горного университета.

Можно выразить уверенность, что изложенный материал даст молодым исследователям определенный импульс для начала овладения безграничными возможностями компьютерных технологий и последующего самостоятельного развития идей, знаний и навыков, полученных при изучении дисциплины.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П1. Список операторов и специальных символов системы MATLAB

#### Арифметические операторы

plus	Plus	+
uplus	Unary plus	+
minus	Minus	-
uminus	Unary minus	-
mtimes	Matrix multiply	*
times	Array multiply	.*
mpower	Matrix power	^
power	Array power	.^
mldivide	Backslash or left matrix divide	\
mrdivide	Slash or right matrix divide	/
ldivide	Left array divide	.\
rdivide	Right array divide	./
kron	Kronecker tensor product	kron

#### Операторы отношений

eq	Equal	==
ne	Not equal	~=
lt	Less than	<
gt	Greater than	>
le	Less than or equal	<=
ge	Greater than or equal	>=

#### Логические операторы

relop	Short-circuit logical AND	&&
relop	Short-circuit logical OR	
and	Element-wise logical AND	&
or	Element-wise logical OR	
not	Logical NOT	~
punct	Ignore function argument or output	~
xor	Logical EXCLUSIVE OR	
any	True if any element of vector is nonzero	
all	True if all elements of vector are nonzero	

Остальные операторы и специальные символы выводятся при подаче команды **help /**.

### П2. Список функций MATLAB для работы с матрицами

Более полную информацию можно получить, воспользовавшись командой **help** с добавлением имени соответствующей функции.

<b>Элементарные матрицы</b>	zeros - матрица нулей.
ones - матрица единиц.	eye - матрица идентичности.
repmat - копирование матрицы.	rand - равномерно распределенные случайные числа.
randn - случайные числа, распределенные по нормальному закону.	linspace - Linearly spaced vector.
logspace - Logarithmically spaced vector.	freqspace - Frequency spacing for frequency response.
meshgrid - X and Y arrays for 3-D plots.	: - Regularly spaced vector and index into matrix.
<b>Basic array information</b>	
size - Size of matrix.	length - Length of vector.
ndims - Number of dimensions.	numel - Number of elements.
disp - Display matrix or text.	isempty - True for empty matrix.
isequal - True if arrays are identical.	isnumeric - True for numeric arrays.
islogical - True for logical array.	logical - Convert numeric values to logical.
<b>Matrix manipulation</b>	
reshape - Change size.	diag - Diagonal matrices and diagonals of matrix.
blkdiag - Block diagonal concatenation.	tril - Extract lower triangular part.
triu - Extract upper triangular part.	fliplr - Flip matrix in left/right direction.
flipud - Flip matrix in up/down direction.	flipdim - Flip matrix along specified dimension.
rot90 - Rotate matrix 90 degrees.	: - Regularly spaced vector and index into matrix.
find - Find indices of nonzero elements.	end - Last index.
sub2ind - Linear index from multiple subscripts.	ind2sub - Multiple subscripts from linear index.
<b>Special variables and constants</b>	
ans - Most recent answer.	eps - Floating point relative accuracy.
realmax - Largest positive floating point number.	realmin - Smallest positive floating point number.
pi - 3.1415926535897....	i, j - Imaginary unit.
inf - Infinity.	NaN - Not-a-Number.
isnan - True for Not-a-Number.	isinf - True for infinite elements.
isfinite - True for finite elements.	why - Succinct answer.
<b>Specialized matrices</b>	
compan - Companion matrix.	gallery - Higham test matrices.
hadamard - Hadamard matrix.	hankel - Hankel matrix.
hilb - Hilbert matrix.	invhilb - Inverse Hilbert matrix.
magic - Magic square.	pascal - Pascal matrix.
rosser - Classic symmetric eigenvalue	toeplitz - Toeplitz matrix.

### ПЗ. СПИСОК ФУНКЦИЙ МАТЛАВ ДЛЯ РАБОТЫ С ФАЙЛАМИ ДАННЫХ

<b>File input/output.</b>	imwrite - Write image to graphics file.
File import/export functions.	dlmread - Read delimited text file.
dlmwrite - Write delimited text file.	load - Load workspace from MATLAB (MAT) file.
importdata - Load workspace variables disk file.	wk1read - Read spreadsheet (WK1) file.
wk1write - Write spreadsheet (WK1) file.	xlsread - Read spreadsheet (XLS) file.
	Image file import/export.
imfinfo - Return information about graphics file.	imread - Read image from graphics file.
<b>Audio file import/export.</b>	auread - Read NeXT/SUN (AU) sound file.
auwrite - Write NeXT/SUN (AU) sound file.	wavread - Read Microsoft WAVE (WAV) sound file.
wavwrite - Write Microsoft WAVE (WAV) sound file.	
<b>Video file import/export.</b>	aviread - Read movie (AVI) file.
aviinfo - Return information about AVI file.	avifile - Create a new AVI file.
movie2avi - Create AVI movie from MATLAB movie.	
<b>Formatted file I/O.</b>	fgetl - Read line from file, discard newline character.
fgets - Read line from file, keep newline character.	fprintf - Write formatted data to file.
fscanf - Read formatted data from file.	input - Prompt for user input.
textread - Read formatted data from text file.	
<b>String conversion.</b>	sprintf - Write formatted data to string.
sscanf - Read string under format control.	strread - Read formatted data from text string.
<b>File opening and closing.</b>	
fopen - Open file.	fclose - Close file.
<b>Binary file I/O.</b>	
fread - Read binary data from file.	fwrite - Write binary data to file.
<b>File positioning.</b>	ftell - Get file position indicator.
feof - Test for end-of-file.	ferror - Inquire file error status.
frewind - Rewind file.	fseek - Set file position indicator.
<b>File name handling.</b>	fileparts - Filename parts.
filesep - Directory separator for this platform.	fullfile - Build full filename from parts.
MATLABroot - Root directory of MATLAB installation.	mexext - MEX filename extension for this platform.
partialpath - Partial pathnames.	pathsep - Path separator for this platform.
prefdir - Preference directory name.	tempdir - Get temporary directory.

<b>HDF library interface help.</b>	hdf - MEX-file interface to the HDF library.
hdfan - MATLAB Gateway to HDF multifile annotation interface.	hdfdf24 - MATLAB Gateway to HDF raster image interface.
hdfdf8 - MATLAB Gateway to HDF 8-bit raster image interface.	hdfh - MATLAB Gateway to HDF H interface.
hdfhd - MATLAB Gateway to HDF HD interface.	hdfhe - MATLAB Gateway to HDF HE interface.
hdfml - MATLAB-HDF gateway utilities.	hdfsd - MATLAB Gateway to HDF multifile scientific dataset interface.
hdfv - MATLAB Gateway to HDF V (Vgroup) interface.	hdfvf - MATLAB Gateway to HDF VF (Vdata) interface.
hdfvh - MATLAB Gateway to HDF VH (Vdata) interface.	hdfvs - MATLAB Gateway to HDF VS (Vdata) interface.
<b>HDF-EOS library interface help.</b>	hdfsw - MATLAB Gateway to HDF-EOS swath interface.
hdfgd - MATLAB Gateway to HDF-EOS grid interface.	hdfpt - MATLAB Gateway to HDF-EOS point interface.
<b>Serial port support.</b>	serial - Construct serial port object.
<b>Command window I/O.</b>	
clc - Clear command window.	disp - Display array.
home - Send cursor home.	input - Prompt for user input.
pause - Wait for user response.	
FIG file support for plotedit and printframes.	hgload - Loads a Handle Graphics object from a file.
hgsave - Saves an HG object heirarchy to a file.	
<b>Utilities.</b>	str2rng - Convert spreadsheet range string to numeric array.
wk1const - WK1 record type definitions.	wk1wrec - Write a WK1 record header.

#### **П4. Список функций MATLAB, используемых для аналогового и цифрового ввода/вывода данных в компьютер**

Список функций для работы с аналого-цифровым и цифро-аналоговым преобразователями при вводе и выводе сигналов. Подробная информация может быть получена из справочной системы MATLAB, как это описано в п. 5.2.

<b>Обозначение функции</b>	<b>Ее значение</b>
<b>Конструирование объекта работы с датчиками (ввод и вывод сигналов)</b>	
analoginput	Конструирование объекта ввода аналоговых сигналов (аналоговый вход)
analogoutput	Конструирование объекта вывода аналоговых сигналов (аналоговый выход)
digitalio	Конструирование объекта ввода/вывода цифровых сигналов (цифровой вход/выход)
<b>Получение установленных и установка новых характеристик объекта</b>	
daqdevice/get	Получение сведений о характеристиках объекта работы с датчиками
daqdevice/set	Установка характеристик объекта работы с датчиками
daqdevice/inspect	Открытие инспектора свойств и конфигурирование характеристик объекта сбора данных с датчиков
setverify	Установка и получение данных о характеристиках объекта сбора данных с датчиков
<b>Выполнение</b>	
daqdevice/start	Запуск работы объекта
stop	Остановка работы объекта и прекращение записи/пересылки
trigger	Ручная инициализация записи/пересылки работающего объекта
daqdevice/wait	Ожидание остановки объекта
<b>Функции аналогового ввода</b>	
addchannel	Добавление канала к аналоговому входу объекта
addmuxchannel	Добавление мультиплексированного канала к аналоговому входу объекта
flushdata	Удаление данных из движка
getdata	Возвращение зарегистрированных отсчетов данных
getsample	Мгновенная регистрация одного отсчета
muxchanidx	Возвращение индекса скана каналов
peekdata	Просмотр последних зарегистрированных данных
islogging	Определение, является ли объект зарегистрированными данными

<b>Функции аналого-вого вывода</b>	
addchannel	Добавление канала к аналоговому выходу объекта
putdata	Размещение в очереди отсчетов данных для вывода
putsample	Мгновенный вывод одного отсчета на объект
issending	Определение, является ли объект данными для вывода
<b>Функции цифрового ввода-вывода</b>	
addline	Добавление линии цифрового ввода/вывода
getvalue	Считывание величины сигнала на линии
putvalue	Запись сигнала в линию
<b>Функции общего назначения</b>	
binvec2dec	Преобразование двоичного вектора в десятичный формат
daq/private/clear	Удаление объекта из рабочего пространства
Daqcallback	Индикация информации о заданном событии
Daqfind	Нахождение указанного объекта сбора данных
daqmem	Размещение или индикация памяти для одного или нескольких устройств
daqread	Чтение файла данных модуля Data Acquisition Toolbox (.daq)
daqregister	Регистрация и удаление DLL адаптера
daqreset	Удаление и выгрузка всех объектов сбора данных и DLL
daqdevice/delete	Удаление объектов из движка
dec2binvec	Преобразование десятичного числа в двоичный вектор
ischannel	Определяет, является ли объект каналом?
isdioline	Определяет, является ли объект линией?
isvalid	Определяет, связан ли объект с аппаратным блоком?
isrunning	Определяет, запущен ли объект?
length	Определяет длину объекта сбора данных
daq/private/load	Загружает объект сбора данных с диска в рабочее пространство MATLAB
makenames	Генерация массива ячеек имен для обозначения каналов/линий
obj2mfile	Преобразование объекта сбора данных в код MATLAB
daq/private/save	Запись объектов сбора данных на диск
showdaqevents	Индикация обобщающей информации протокола событий
size	Определение размера объекта сбора данных

softscope	Графический интерфейс пользователя «Осциллограф для сбора данных»
<b>Информация и справка</b>	
daqhelp	Справка по атрибутам и функциям сбора данных
daqhwinfo	Информация об имеющихся аппаратных модулях
daqsupport	Техническая поддержка по сбору данных
propinfo	Информация об атрибутах объектов сбора данных
<b>Демонстрационные примеры сбора данных</b>	
demodaq_intro	Введение в инструментарий сбора данных
demodaq_save	Способы сохранения и загрузки объектов сбора данных
demodaq_callback	Введение в функции внешнего (обратного) вызова
daqtimerplot	Пример функции обратного вызова, которая строит график зарегистрированных данных
<b>Демонстрация аналогового ввода данных</b>	
daqrecord	Запись данных из указанного адаптера
demoai_channel	Введение в регистрацию аналоговых сигналов
demoai_fft	Быстрое преобразование Фурье сигнала на аналоговом входе
demoai_intro	Введение в объекты аналоговой регистрации
demoai_logging	Демонстрация записи данных
demoai_trig	Демонстрация применения непосредственного, ручного (по превышению порога) и программного запуска
daqscope	Пример осциллографа на базе инструментария Data Acquisition Toolbox
<b>Демонстрация аналогового вывода данных</b>	
daqplay	Вывод данных на заданный адаптер
daqsong	Вывод данных из файла HANDEL.MAT на звуковую карту
demoao_channel	Знакомство с каналами аналогового вывода
demoao_intro	Знакомство с объектами аналогового вывода.
demoao_trig	Демонстрация непосредственного и ручного запуска регистрации данных
daqfcngen	Пример функционального генератора на основе инструментария Data Acquisition Toolbox



<b>Демонстрация цифрового ввода- вывода</b>	
demodio_intro	Знакомство с объектами цифрового ввода/вывода
demodio_line	Знакомство с линиями цифрового ввода/вывода
diopanel	Демонстрация панели цифрового ввода/вывода

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**
- анализ  
виды, 140, 153
- В**
- валидация, 121  
верификация, 121
- З**
- задача  
обратная, 119  
прямая, 118  
затухание, 169  
горные породы, 143  
коэффициент, 142, 169  
Рэлеевское, 142
- И**
- излучение  
коэффициент, 175
- К**
- конвекция, 173, 184  
координаты  
система, 141, 153, 161
- М**
- метод  
конечных разностей, 114  
конечных элементов, 113  
моделирование, 112  
аналитическое, 112  
имитационное, 112  
компьютерное, 112  
мультифизическое, 122
- Н**
- напряжение  
по Мизесу, 138  
термическое, 194
- О**
- оператор  
Лапласа, 124  
набла, 124  
отражение  
коэффициент, 175
- П**
- поглощение  
коэффициент, 175
- С**
- свойства  
механические, 147  
сольвер, 134, 152, 167
- Т**
- теплоемкость, 172  
теплопередача  
механизмы, 172  
теплопроводность, 173, 179  
коэффициент, 172, 180
- У**
- уравнение  
волновое, 129, 131  
дифференциальное, 124, 128  
конвективно-диффузионное, 131  
конвекции-диффузии, 125  
Навье-Стокса, 173  
теплопередачи, 179  
уравнения  
дифференциальные классические,  
126  
Максвелла, 126  
Навье-Стокса, 125  
условие  
граничное Дирихле, 173, 181  
граничное Неймана, 174, 181

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Синицын С.В., Налютин Н.Ю. Верификация программного обеспечения: Учебное пособие. - М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 368 с.
2. ГОСТ Р ИСО 9000-2001. Группа Т59. Государственный стандарт Российской Федерации. Системы менеджмента качества. Основные положения и словарь. Дата введения 2001-08-31.
3. Comsol documentation: Справочная сопроводительная документация системы Comsol Multiphysics. [Электронный документ].
4. Бирюлин Г. В., Егоров В. И. Применение ЭВМ для решения задач теплопроводности: Учебное пособие.-СПб.:СПб ГУ ИТМО, 2006.- 77 с.
5. Физические величины: Справочник / А. П. Бабичев, И. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др. Под ред. Григорьева И. С., Мейлихова Е. З.-М.: Энергоатомиздат, 1991.-1232 с.
6. Теплофизические свойства горных пород / Бабаев В. В., Будымка В. Ф., Сергеева Т. А. и др. М.:Недра, 1987.-156 с.
7. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. Экспериментальная физика и механика горных пород.-СПб.:Наука, 2001.-343 с.