

105-летию
Национального горного университета
ПОСВЯЩАЕТСЯ

**Министерство образования и науки Украины
Национальный горный университет**

ШАШЕНКО А.Н., СДВИЖКОВА Е.А., КУЖЕЛЬ С.В.

МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Монография

**Донецк
2004**

ББК 33.1
Ш 32
УДК 622.831.3.02:539.2.8

Ш 32 **Шашенко А.Н., Сдвижкова Е.А., Кужель С.В.**

Масштабный эффект в горных породах: Монография. Донецк: Издательство «Норд-Пресс», 2004. - 126 с.

ISBN

Монографія присвячена вирішенню проблеми міцності структурно-неоднорідних масивів гірських порід. Розглянуті стохастичні моделі породного масиву навколо виробок. На їх основі отримані рішення задач по визначенню коефіцієнту структурного послаблення реальних породних масивів. Виконано аналіз імовірнісних законів розподілу межі міцності гірських порід на одноосьовий стиск.

Книга може бути корисною для студентів та аспірантів гірничих спеціальностей, працівників науково-дослідних і проектних установ

Монография посвящена решению проблемы прочности структурно-неоднородных массивов горных пород. Рассмотрены стохастические модели породного массива в окрестности выработок. На их основе получены решения задач по определению коэффициента структурного ослабления реальных породных массивов. Выполнен анализ вероятностных законов распределения предела прочности горных пород на одноосное сжатие.

Книга может быть полезной для студентов и аспирантов горных специальностей, работников научно-исследовательских и проектных организаций.

The book is devoted to the solution of a problem of structural - inhomogeneous rock compression strength. The stochastic models of rock massif located near developments are considered. On the basis of above mentioned models the problem of determining structural weakening coefficient in the real rock massif is solved. The analysis of the probability laws of real rock massif compression strength has been done.

The book can be useful to the students and post-graduate students of mining specialties, research workers and designers.

ББК 33.1

Рецензенты:

Б.М. Усаченко, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом механики горных пород ИГТМ НАН Украины им. С.Н. Полякова (г. Днепропетровск),

В.В. Левит, доктор технических наук, профессор кафедры строительства шахт и подземных сооружений Донецкого Национального технического университета (г. Донецк).

Рекомендована к печати Ученым Советом
Национального горного университета
(протокол № 5 от 29 июня 2004 г).

ISBN

© Национальный горный университет, 2004

© Шашенко А.Н, Сдвижкова Е.А., Кужель С.В. 2004

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
------------------	---

Глава 1

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ДЕФЕКТНОЙ СТРУКТУРОЙ	9
1.1. О подобии деформирования твердых тел.....	9
1.2. Неоднородность горных пород.....	10
1.3. Гипотезы о природе масштабного эффекта	18
1.4. Коэффициент структурного ослабления как количественная оценка масштабного эффекта в горных породах	23
1.5. Аналитические исследования масштабного эффекта	27

Глава 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СТРУКТУРНОГО ОСЛАБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	34
2.1. Вероятностно-статистическая модель прочности породного массива	34
2.2. Исследование влияния макродефектов на распределение прочности структурных элементов массива	45
2.2.1. Учет наличия элементов, содержащих макродефекты, при определении характеристик выборки	51
2.2.2. Исследование влияния структурных неоднородностей на величину дисперсии прочности структурных элементов массива	55
2.2.3. Влияние наличия в выборке элементов, нарушенных макродефектами, на вероятностное распределение прочности структурных элементов породного массива.....	58
2.3. Исследование влияния параметров трещиноватости на вид распределения прочности структурных элементов	64
2.3.1. Исследование влияния угла наклона трещин	64
2.3.2. Исследование влияния изменчивости расстояния между трещинами на вид распределения прочности структурных элементов	73

Глава 3

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЧНОСТИ ПОРОДНОГО МАССИВА С УЧЕТОМ МАКРОДЕФЕКТОВ.....	79
3.1. Обоснование закона распределения прочности породного массива с учетом влияния макродефектов	79

3.1.1. Границы применимости логнормального закона распределения, его свойства и связь с другими распределениями	86
3.2. Определение коэффициента структурного ослабления на основе гипотезы о логарифмически нормальном распределении прочности структурных элементов породного массива	91
ВЫВОДЫ	96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	98
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	99
ПРИЛОЖЕНИЯ	111
Приложение А	112
Приложение Б.....	116
Приложение В	119

Предисловие

При конструировании деталей механизмов и машин, зданий и сооружений инженеры неизбежно сталкиваются с проблемой прочности, которая предполагает поиск компромисса между силовыми воздействиями на объект, его физико-механическими свойствами, размерами, назначением, понесенными затратами. По этому поводу написаны сотни книг и статей, в физике определилось самостоятельное направление – механика разрушения.

В процессе многолетних исследований было установлено, что прочность геометрически подобных объектов не остается постоянной. Это явление было названо масштабным эффектом, а причины его вызывающие – масштабными факторами. Особенно сильно масштабный эффект проявляется в том случае, если материал изучаемого объекта является структурно неоднородным. К таким материалам относятся, прежде всего, массивы горных пород, в которых сооружаются выработки различного назначения, в том числе и долговременного использования. Породные массивы содержат неоднородности структуры различных размеров, трещины и текстурные особенности, которые в совокупности оказывают на него ослабляющее влияние с точки зрения прочности. Впервые для горных пород определение масштабного эффекта в развернутом виде было сформулировано М.И. Койфманом *.

Оно выглядит следующим образом: «Масштабный эффект – это принципиальные закономерности, а также конкретные для различных пород и углей количественные зависимости, характеризующие изменение в зависимости от линейных размеров (площади сечения, объема) образцов горных пород или частей горного массива механических свойств реальных, всегда в той или иной степени неоднородных, трещиноватых и пористых пород

* Койфман М.И. Главный масштабный эффект в горных породах и углях. - В кн. Проблемы механизации горных работ. - М.: Изд-во АН СССР, 1963. - С.39-56.

и углей со всеми присущими им природными структурными дефектами и поверхностными изменениями».

Изучением проблемы масштабного эффекта горном деле в разное время занимались М.М. Протодяконов, М.И. Койфман, С.Е. Чирков, Е.И. Ильницкая, Б.В. Матвеев, Ф.П. Бублик, Я.А. Бич, Г.Н. Кузнецов, Г.Л. Фисенко, Я.И. Шпигельбурд и ряд других ученых. Ими, собственно, и была заложена основа важного направления в геомеханике, связанного с определением прочности породной среды.

В настоящей монографии обобщены результаты теоретических исследований масштабного эффекта сотрудниками Национального горного университета, которые были выполнены на протяжении последних двадцати лет. Авторы сочли необходимым предоставить их на рассмотрение научной общественности, понимая, что только открытая дискуссия по изучаемой проблеме может определить эффективные направления дальнейших исследований.

Все конструктивные замечания и предложения по поводу материала, содержащегося в книге, будут авторами приняты с благодарностью по адресу: 49000, Национальный горный университет, пр. К. Маркса, 19, г. Днепропетровск, Украина.

Глава 1

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ДЕФЕКТНОЙ СТРУКТУРОЙ

1.1. О подобии деформирования твердых тел

При решении задач геомеханики, исследованиях устойчивости выработок, расчетах крепи первостепенное значение имеют оценки предельного состояния породного массива, которые зависят от основного показателя – прочности горных пород на одноосное сжатие. Испытания образцов пород производятся в соответствии с существующим стандартом [1]. Переход от результатов таких испытаний к прочности пород массива является сложной задачей. Объясняется это тем, что образцы горных пород имеют ограниченные размеры и не воспроизводят всей сложности структурного строения и тектонических нарушений, имеющих в больших породных массивах. Эта задача связана с масштабным эффектом и является предметом серьезных исследований в механике горных пород.

Закон подобия деформирования твердых тел впервые был установлен В.П. Кирпичевым в 1874 г. на основе теоретических исследований закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния при нагружении геометрически подобных объектов [2, 3].

Подобным называют такое деформирование, при котором отношением линейных деформаций геометрически подобных тел равно отношению их линейных размеров.

Из закона подобия следует, что отношение необходимых усилий для создания таких деформаций должно равняться квадрату линейных соотношений.

Учение В.П. Кирпичева о пропорциональности механических изменений в геометрически подобных телах было развито впоследствии в работах Барба и Фр. Кика [3].

Н.Н. Давиденковым было выполнено подробное исследование условий, при которых должен выполняться закон В.П. Кирпичева [4].

Примерно в это же время И. Баушингер, анализируя результаты испытаний на прочность образцов песчаника, самостоятельно приходит к выводу, что «геометрически подобные тела из одинакового материала в одинаковых условиях при одинаковых напряжениях имеют одинаковое временное сопротивление» [5].

Установление закона подобия деформирования при нагружении геометрически подобных твердых тел имело большое значение при выполнении практических расчетов на прочность элементов сложных конструкций, позволяя использовать удельные характеристики материала, такие, например, как предел прочности на одноосное сжатие, растяжение, сдвиг и т.п.

Непременным условием, которое должно обеспечивать подобное деформирование, является идеальная однородность и изотропность материала сравниваемых геометрически подобных тел. Реальные же материалы и среды, с которыми сталкивается человек в своей деятельности, чаще всего обладают определенной неоднородностью внутреннего строения (структуры). В связи с этим и некоторыми другими причинами практический опыт получения удельных характеристик различных материалов на геометрически подобных образцах показал, что наряду с фактами, подтверждающими закон подобия, имеет место и существенное отклонение от него. Особенно велико оно при испытаниях горных пород, обладающих значительной неоднородностью структуры.

1.2. Неоднородность горных пород

Состояние породного массива определяется совокупностью внутренних свойств: плотности, влажности, внутренней энергии, теплопроводности и внешних условий: величины объемных и поверхностных сил, температуры, времени и характера приложения нагрузок. В зависимости от этих условий горные породы разнятся между собой условиями залегания, составом, структу-

рой, механическим состоянием. Сложный характер неоднородности горных пород связан как с неоднородностью исходного материала, так и с его последующими преобразованиями. Поэтому считается, что горная порода это среда, неоднородная по структуре, текстуре и свойствам среда [6].

Неоднородность горных пород проявляется посредством изменчивости их физических свойств и вещественного состава в пространстве. Эти изменения могут создавать анизотропию, образовывать физические границы раздела, вызывать случайные вариации значений и изучаемых параметров физических полей.

Имеется много форм нарушений породного массива, связанных с генезисом пород, последующими дислокациями (дизъюнктивными и пликативными), интрузиями и денудацией [7]. Наиболее важными из них являются слоистость, микро- и макротрещиноватость, наличие зон дробления, рассланцевания, даек, включений, изменений элементов залегания (например, углов падения, мощности), непостоянство сил связей по контактам между различными породами и прочее.

Для оценки степени неоднородности породных массивов используют формальное описание с помощью геометризации их элементов, а также применяют качественные характеристики неоднородности. Такой подход позволяет классифицировать естественные неоднородности горных пород (массивов) и представить их следующими порядками или уровнями:

1. **Микроскопический:** среда рассматривается на уровне кристаллов, размер элементов неоднородностей составляет $10^{-8} - 10^{-5}$ м;
2. **Субмакроскопический:** среда рассматривается на уровне элементарного объема литологической разности, размер элементов неоднородностей составляет $10^{-5} - 10^{-2}$ м;
3. **Макроскопический:** среда рассматривается на структурном уровне, размер элементов неоднородностей составляют $10^{-2} - 10^1$ м;
4. **Мегаскопический:** среда рассматривается как сложноструктурное образование, обладающее текстурой и находящиеся под действием гра-

витационных и тектонических сил, размер элементов неоднородностей составляет более 1,0 м.

Очевидно, что понятие неоднородности относительно. В зависимости от геометрических размеров рассматриваемой области массива и уровня силового воздействия на эту область может быть весомым тот или иной порядок неоднородности. В частности, при решении некоторых задач, связанных с оценкой устойчивости горных выработок, область воздействия эксперимента такова, что неоднородностями первого и второго порядков можно пренебречь и ввести допущение о его квазиоднородности на этом уровне. По отношению к неоднородностям первого и второго порядков такое допущение спорно и требует серьезного обоснования в зависимости от целей исследований.

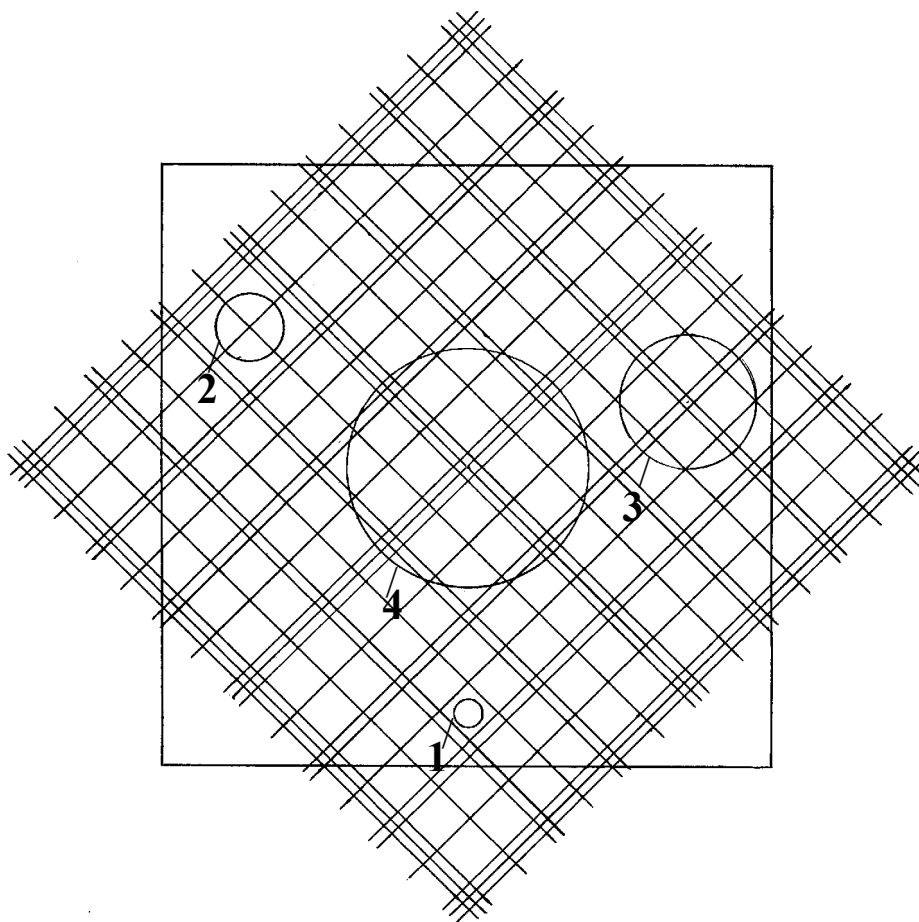


Рис. 1.1. Уровни неоднородности в породных массивах:
1 – микроскопический; 2 – субмакроскопический;
3 – макроскопический; 4 – мегаскопический.

К основным геологическим факторам, определяющим поведение вмещающих пород и угольного пласта и влияющим на устойчивость горных выработок, относятся: слоистость и расслоение пород, трещиноватость пород и угольного пласта, тектонические нарушения, обводненность массивов, литологический состав вмещающих пород и их физико-химические свойства, мощность, угол наклона и текстура угольного пласта, его физико-механические свойства. Степень влияния перечисленных факторов на устойчивость породных обнажений различна. Также различен и уровень изученности этого влияния. Последнее обстоятельство связано с различной возможностью проведения исследований в натурных условиях, постановки лабораторных экспериментов, выполнения аналитических исследований.

Устойчивость кровли в угольных шахтах зависит от мощности пластовой отдельности, которая тесно связана со слоистостью. По ней отходят крупные слои породы, которые затем подвергаются дальнейшему расслоению. Слоистость следует отнести к неоднородностям третьего и четвертого уровней. Влияние слоистости на устойчивость горных выработок достаточно хорошо изучено. Разработаны общая классификация горных пород по слоистости и, в частности, классификация слоистых пород кровли угольных пластов по их строению [7], учитывающая характер обрушения пород слоя.

Гораздо менее изучено влияние на устойчивость выработок трещиноватости пород и углей, которую также следует отнести к неоднородностям первого и второго порядков в зависимости от размеров трещин и области их распространения. Трещины, наблюдаемые в горных породах, принято делить по генетическому признаку на три типа:

естественные (прирожденные, первичные) - возникающие в процессе формирования породных толщ;

тектонические - образовавшиеся в результате горообразовательных процессов;

искусственные - появляющиеся в процессе осуществления подготовительных и очистных работ в шахтах, буровзрывных работ и образования заколов, а также вследствие других причин.

Из имеющихся генетических классификаций трещин наиболее универсальной является классификация, предложенная В.В. Белоусовым. Несколько измененная для более удобного практического использования, эта классификация выглядит следующим образом [8].

1. Нетектонические трещины:

- первичные (естественные, прирожденные) трещины;
- трещины выветривания;
- трещины оползней, обвалов и провалов;
- трещины расширения пород при разгрузке;
- искусственные трещины.

2. Тектонические трещины:

- трещины с разрывом сплошности пород;
- кливаж.

Из нетектонических трещин основное значение имеют первичные (естественные, прирожденные), как повсеместно распространенные и определяющие строение породного массива. При повсеместном распространении первичных трещин в осадочных породах наиболее четко они выражены в областях с горизонтальным залеганием. Первичные трещины не пересекают сколько-нибудь мощные слои пород, а тесно связаны с отдельными литологически однородными слоями. По отношению к слоистости прирожденные трещины могут располагаться различно, но преимущественно они являются нормальносекущими трещинами отрыва. В совокупности такие трещины ограничивают блоки (отдельности) в форме различных многогранников. В мергелях и глинах эти трещины могут образовывать и более сложные контуры.

По своим морфологическим признакам и положению в пространстве естественные трещины подразделяются на три вида:

- основные;

- торцевые;
- параллельные напластованию пород.

Основная трещиноватость имеет субмеридианальное простирание, торцевая – субширотное. Угол между этими основными направлениями трещин колеблется от 60 до 90 градусов. Основные трещины чаще бывают перпендикулярными или почти перпендикулярными к плоскости наложения пород (85 – 90°). Торцевые имеют большее отклонение от перпендикулярности и достигают 60°. Наибольшее практическое значение имеет основная, наиболее ярко выраженная, приуроченная трещиноватость, по которой породы легко распадаются. Направление основных трещин отличается значительной выдержанностью. Торцевая трещиноватость проявляется обычно слабо и имеет второстепенное значение. Расположение торцевых и основных трещин в породе определяет форму пластовой отдельности.

Тектонические трещины развиваются в горных породах под влиянием тектонических сил, проявляющихся в земной коре в процессе ее эволюции. Возникающие при этом деформации почти всегда сопровождаются развитием в горных породах трещин, образующихся как на сравнительно малых площадях, так и на огромных пространствах [9]. Отличие их от нетектонических трещин заключается, прежде всего, в том, что тектонические трещины обладают большей выдержанностью в ориентировке и развиваются сравнительно одинаково в различных по составу породах. В областях, претерпевших тектонические нарушения, направления основной и торцевой приуроченной трещиноватости несколько отличаются от субмеридианального и субширотного направления. Тектонические трещины наклонены к плоскостям напластования под разными углами; этим они отличаются от трещин приуроченных (естественных). Поверхности тектонических трещин обычно покрыты бороздами скольжения, так как очень часто они являются плоскостями смещения пород.

Создавая дополнительные плоскости ослабления, тектонические трещины при значительном их развитии вызывают аварийные обрушения кровли в рабочем пространстве. Тектоническая трещиноватость бывает представлена

обычно двумя системами трещин, наклоненных в разные стороны и взаимно-перпендикулярных. Направление тектонических трещин совпадает с направлением основных разрывных нарушений данного района. Тектонические явления содействуют раскрытию ранее скрытых естественных трещин. При тектонических подвижках может происходить сдвигание блоков друг относительно друга. Различают тектонические трещины с разрывом сплошности (трещины отрыва, трещины скалывания) и кливаж.

Кливаж в породах и углях (от французского *clivage* - делимость) представляет собой особую структурную форму породного массива. Под этим термином понимают способность породы или угля разделяться по плоскостям, несовпадающим с первичной текстурой пород (для осадочных пород не совпадающим со слоистостью). Кливаж является разновидностью трещиноватости. Он проявляется в виде параллельных едва заметных плоскостей ослабления в пласте угля, а также во вмещающих породах кровли и почвы.

Кливаж различными исследователями понимается неодинаково как по морфологическим признакам, так и по происхождению, что обусловлено большим разнообразием классификации этого явления. Различают кливаж первичный и вторичный.

Первичный кливаж в горных породах возникает под влиянием внутренних причин, зависящих от вещества самой породы, от внутреннего сокращения ее объема в процессе литификации и метаморфизма. В осадочных породах первичный кливаж выражается обычно в образовании двух перпендикулярных друг другу и к наложению систем параллельных трещин.

Вторичный кливаж является результатом деформации горных пород под влиянием внешних, в основном тектонических, воздействий. Вследствие различной направленности возникающих при этом напряжений трещины кливажа располагаются под различными углами к первичным текстурным элементам породы (в осадочных породах – к слоистости). Расстояние между соседними плоскостями кливажа зависит от мощности и прочности породных слоев, и составляют от нескольких миллиметров до нескольких метров (обычно 10-30 см).

Каждая отдельная трещина характеризуется длиной, шириной, извилистостью стенок, а также положением трещины в пространстве, которое в геологии принято обозначать углом падения и азимутом направления падения. Трещины различаются также наличием или отсутствием в них заполнителей, в соответствии с чем они подразделяются на открытые (зияющие) и заполненные.

По раскрытости или мощности заполнения выделяются трещины видимые невооруженным глазом (открытые, закрытые и «волосные») и микротрещины. Ширина открытых трещин или мощность их заполнения определяется непосредственными замерами, ширину закрытых трещин можно считать равной $0,8 \dots 0,5$ мм, «волосных» – $0,5 \dots 0,2$ мм.

Заполнитель в трещинах может быть представлен рыхлыми отложениями типа песчано-глинистых грунтов либо образованиями, отличающимися от пород массива по минералогическому составу, но сходными с ними по структуре и физическим свойствам.

Частота трещин зависит от мощности и состава пласта. Например, чем меньше мощность пластов и прочность пород, тем чаще трещины. По данным многих исследователей [10] в карбонатных породах многих районов в пластах мощностью от 0,5 до 2,0 м эта связь прямолинейна. М.В. Рац [11] считает ее параболической.

В зависимости от того как трещины ориентированы различают упорядоченную (одно-, двухсистемную) и неупорядоченную трещиноватость. Пересекаясь, трещины разбивают породный массив с некоторым характерным размером H на отдельные структурные блоки со средним размером $h_{cp.}$. Отношение $H/h_{cp.}$ называется интенсивностью трещиноватости. Кроме того, для количественной оценки трещиноватости используют линейный, площадной и объемный коэффициенты интенсивности трещиноватости. Они представляют собой соответственно отношение единицы длины, площади, объема к среднему расстоянию между соседними трещинами $l_{cp.}$, к площади $S_{cp.}$ и объему структурного блока $V_{cp.}$.

М.В. Рац приводит слова известного математика Г.П. Покровского, еще

в 30-е годы начавшего развивать статистическое направление в механике грунтов, и указывавшего что «...система совершенно устойчивая с точки зрения теории идеально однородных тел кажется неустойчивой с точки зрения статистической теории неоднородного тела».

Согласно принципам статистической механики, развиваемой в работах Дж. Гиббса [12], микроструктура массива образуется в результате сложных физико-химических процессов, для ранней стадии которых характерно равновесие и строгое соблюдение соотношений между компонентами, фазами и степенями свободы. Однако эти равновесные состояния неодинаково реализуются в каждой точке породной среды, что порождает статистическую совокупность ее свойств и признаков.

Таким образом, неоднородность является естественным свойством горных пород.

1.3. Гипотезы о природе масштабного эффекта

Неоднородность реальных твердых тел, в том числе и горных пород, является главной причиной того, что по отношению к ним наблюдается существенное отклонение от закона подобия. Это невыполнение является следствием геометрических размеров деформируемых твердых тел, и в связи с этим, причины, его вызывающие, называют масштабным фактором, а само явление - масштабным эффектом.

Известен масштабный эффект давно. Еще в 1907 г. Дэниэлс и Мур [13] показали, что с увеличением линейных размеров образцов антрацита прочность их существенно снижается. Первой аналитической работой, объясняющей масштабный эффект, имевший место в опытах со стеклом, была работа А. Гриффитса [14], появившаяся в 1921 г. Позднее в 1933 г. А.П. Александров и С.Н. Журков [15] также, экспериментируя подобно А. Гриффитсу со стеклянными нитями, наиболее полно исследовали зависимость их удельной прочности от диаметра. Было показано, что с увеличением диаметра средняя прочность

нитей уменьшается с одновременным уменьшением разброса данных.

Работами А.Ф. Иоффе и его учеников [16] было установлена интересная и важная особенность: масштабный эффект существенно проявляется при деформировании материалов, склонных к хрупкому разрушению, и значительно менее выражен при испытаниях материалов, разрушающихся вязко.

Обширные исследования проявлений масштабного эффекта по отношению к металлам были выполнены В.В. Чечулиным [3], а применительно к углям – С.Е. Чирковым [17]. В последней работе отмечается, что все исследователи масштабного эффекта в углях приходят к единому выводу: увеличение размеров испытываемых образцов приводит к существенному снижению их прочности.

Результаты же испытаний горных пород и некоторых иных материалов, выполненных, различными авторами на геометрически подобных образцах далеко не столь однозначны. По итогам их можно разделить на четыре группы:

1. С увеличением размеров образцов относительная прочность их падает [15, 18, 19 и др.];
2. С увеличением размеров образцов относительная прочность их растет [20-22];
3. С увеличением размеров образцов до определенного предела относительная прочность их растет, а затем асимптотически падает до некоторой постоянной величины [23];
4. С изменением размеров образцов прочность их остается постоянной [24, 25, 26].

Результаты второй группы опытов были получены при испытаниях образцов каменной соли, обладающей существенной вязкостью. Они требуют, видимо особого анализа и трактовки. Испытания других литологических разновидностей не показали однозначного увеличения относительной прочности с увеличением размеров образцов. Результаты опытов, отнесенные к четвертой группе, немногочисленны и резко отличаются от большинства известных аналогичных исследований.

Анализируя результаты своих опытов и известных в литературе,

М.И. Койфман в 1959 г. предложил различать масштабные эффекты первого и второго рода.

Масштабный эффект первого рода, или объемный, связан со структурной неоднородностью испытываемого материала, наличием случайно распределенных по объему дефектов.

Масштабный эффект второго рода, или поверхностный, связан с качеством обработки поверхности испытываемых образцов и степенью разрушения (деструкции) приповерхностного слоя.

Масштабный эффект первого рода М.И. Койфман назвал главным [27]. Поверхностный масштабный эффект существенно сказывается при испытаниях образцов малых размеров. В зависимости от характера поверхностных дефектов он может в одних случаях усилить главный масштабный эффект, а в других - уменьшить. При переходе же от образца к массиву основным является главный масштабный эффект.

Интересная классификация проявлений масштабного эффекта предложена М.В. Рацем [11, 28]. В горных породах выделяются неоднородности четырех порядков в зависимости от размеров исследуемой области (от 10^{-6} до 10^6 см). Масштабный эффект проявляется в том, что все моменты вероятностного распределения конкретного признака изменяются с изменением размеров области воздействия. В соответствии с этим выделяются масштабные эффекты I, II и III рода, которые характеризуются, соответственно, распределениям Вейбулла, логарифмически нормальным и нормальным. Масштабный эффект I рода соответствует тому, который имеет место при испытаниях породных образцов разных размеров.

Одна из первых гипотез, объясняющих природу масштабного эффекта, принадлежит А.П. Александрову и С.Н. Журкову [15]. Реальные твердые тела всегда содержат внутренние дефекты в виде вакансий, дислокации, трещин, включений микрообъемов разной прочности, распределенных по объему случайным образом. Чем больше объем тела, тем больше в нем дефектов, тем ниже его прочность.

Особенно отчетливо статистическая природа прочности твердых тел отражена в работе В. Вейбулла [29].

Гипотезы, объясняющие масштабный эффект с позиций наиболее слабого звена, получили названий статистических. Согласно статистической гипотезе всегда существует закономерный разброс экспериментально определяемых значений прочности, причем, чем мельче образцы, тем меньше вариация значений прочности.

Имеются и иные объяснения природы масштабного эффекта. Так, например, А. Уэлс и Н.Н. Давиденков [30] высказали предположение, что причина снижения прочности крупных образцов заключается в том, что система «испытательная машина-образец» накапливает больше упругой энергии, чем при разрушении образцов малого размера.

И.А. Одинг [31] объяснил масштабный эффект неодинаковой технологией изготовления образцов разного размера.

В.В. Лавров [32], производя опыты со льдом, пришел к выводу, что причина снижения прочности крупных образцов кроется в наличии микротрещин, которых всегда больше в большем объеме.

Б.В. Матвеев связал масштабный эффект со структурой и видом напряженного состояния деформированного твердого тела. Им рассмотрен ряд статистических задач, в которых функция вероятности разрушения структурных элементов принимается по В. Вейбуллу [33]. Сам процесс разрушения зависит от вида напряженного состояния и от склонности материала к хрупкому или вязкому разрушению. Рассматривая часто встречающийся в геомеханике случай объемного сжатия хрупкого тела, Б.В. Матвеев существенно опирается на работу Л.Г. Седракияна [34]. Конечные формулы подтверждают выявленную экспериментально тенденцию снижения прочности при испытаниях крупных образцов.

Более общие аналитические работы, направленные на оценку масштабного эффекта в твердых телах со статистической точки зрения, были выполнены С.Д. Волковым [35] и В.В. Болотиным [36]. В них отмечается, что масштаб-

ный эффект имеет место во всех материалах при любых напряженных состояниях, но особенно ярко он выражен для хрупких материалов, находящихся в условиях объемного сжатия.

Г.П. Черепанов [37], исходя из анализа размерностей, показал, что наличие в неоднородном хрупком материале с гипотетически дефектами поверхностной энергии разрушения приводит к зависимости прочности от размера структурного элемента как на квантовомеханическом, так и на макроуровне. Зависимость эта однозначна: увеличение объема испытываемого материала всегда ведет к снижению его относительной прочности.

А.Н. Полипов [38], также используя энергетический подход, объясняет масштабный эффект тем, что упругая энергия, накапливаемая в теле, пропорциональна объему, а разрушение материала происходит по некоторой поверхности и работа разрушения пропорциональна площади сечения; это неизбежно приводит к зависимости относительной прочности от абсолютных: размеров тела. Поскольку волны напряжений и деформаций, а, следовательно, и энергия, не могут распространяться в материале со скоростью, большей скорости упругих волн, то при некоторой критической длине образца должна исчезнуть зависимость прочности от размеров тела.

Подводя итоги исследованиям, посвященным объяснению природы масштабного эффекта, можно отметить следующие важные положения:

- теоретические и лабораторные исследования в подавляющем своем большинстве показывают, что с увеличением объема прочность твердых тел падает;
- масштабный эффект существенно зависит от структуры материала и вида напряженного состояния.

1.4. Коэффициент структурного ослабления как количественная оценка масштабного эффекта в горных породах

Горные породы в окрестности капитальных и подготовительных подземных выработок находятся в состоянии неравнокомпонентного всестороннего сжатия. Их разрушение в этих условиях протекает, как правило, хрупко, за исключением литологических разностей, содержащих большое количество увлажненных глинистых частиц. Кроме того, массив в зависимости от генезиса имеет определенную структуру и текстуру, разбит системами случайно ориентированных трещин соответствующей степени раскрытия, разные участки его имеют различную степень обводненности и т.д. Эти обстоятельства приводят к тому, что прочностные характеристики горных пород в образце и массиве имеют существенное отличие. Это отличие в геомеханике оценивается коэффициентом структурного ослабления - k_c , который равен отношению значения удельной прочностной характеристики в массиве к ее значению, полученному при испытании образцов стандартных линейных размеров. Как правило, это отношение предела прочности на одноосное сжатие в массиве R_m к среднему пределов прочности образцов горной породы $\overline{R_c}$, то есть

$$k_c = \frac{R_m}{\overline{R_c}}.$$

Поскольку с этой характеристикой связан уровень предельных напряжений и параметры упругопластического состояния породного массива вокруг выработок, то установление объективного значения коэффициента структурного ослабления представляет собой важную и сложную задачу, связанную с рациональным, проектированием подземных сооружений.

В зависимости от применяемых методов исследования, направленные на установление объективного значения k_c , проводились и проводятся в нескольких направлениях.

Прежде всего следует отметить фундаментальные аналитические работы А.П. Александрова и С.Н. Журкова [15], В. Вейбулла [29], Л.Г. Седракяна [34], С.Д. Волкова [35], Т.А. Канторовой и И.И. Френкеля [39, 40], В.В. Болотина [36] и некоторых других авторов, основанные на статистическом объяснении природы прочности твердых тел. Конечные формулы, отличаясь степенью сложности, отражают качественную картину снижения прочности образцов большого размера. Количественная же оценка степени снижения прочности затруднительна ввиду отличия исходных идеализированных физических моделей от реальных массивов горных пород.

Большое число исследований основано на методах статистического анализа результатов испытаний горных пород, отобранных при проходке горных выработок, а также их физических моделей, создаваемых в лабораториях. В этом направлении выполнены работы М.М. Протодяконова, М.И. Койфмана и С.Б. Чиркова [41,42,43], М.В. Раца [11,28,44], Г.П. Фисенко [45-47], Д.Н. Кима [48,49], Г.Т. Рубца [50-53], Ю.И. Мартынова [54], В.Т. Глушко [55]. Учет ослабляющего действия дефектов производится в этом случае путем введения поправочных коэффициентов, выбор которых затруднителен.

Работы В.В. Ржевского и Г.Н. Новика [56], Л.В. Шаумян [57], С.В. Ветрова [58], О.С. Алферова [59] направлены на установление корреляционной связи между прочностью породы в образце и массиве и скоростью распространения упругих волн. Это направление весьма перспективно, поскольку оно позволяет учесть на основе одного комплексного показателя, каким является скорость продольной акустической волны, всю природную неоднородность массива. Исследованиями могут быть охвачены блоки очень больших размеров в десятки, сотни метров. Отсутствие серьезных аналитических описаний поведения упругой волны в существенно неоднородном теле, связанное с математической сложностью описания этого процесса, пока сдерживает широкое использование корреляционного метода.

Целый ряд работ по оценке прочностных свойств породного массива основан на непосредственных испытаниях крупных блоков в местах их естест-

венного залегания – «in situ» [60, 61-64]. Этот наиболее простой с точки зрения методологии подход сопряжен со сложностью и трудоемкостью выполнения экспериментальных работ и отсутствием серийно выпускаемого оборудования для оконтуривания блоков и их нагружения. Результаты же, получаемые при его осуществлении, наиболее близки к конкретным горно-геологическим условиям.

Существует также сравнительно небольшое количество исследований, в которых коэффициент структурного ослабления определяется путем анализа процесса разрушения массива при достаточно точно известных обстоятельствах. Этот метод получил название метода обратных расчетов. Коэффициент структурного ослабления в данном случае требует осторожной оценки, поскольку метод учитывает не только неучтенные в исходной модели структурные особенности среды, но неизбежно отражает и все логические несовершенства модели, особенно в части функциональной зависимости между входящими в конечную формулу параметрами. К этому направлению относятся работы А.В. Кондратова и А.А. Баряха [65], Г.П. Фисенко [66], Г.Т. Нестеренко и др. [67].

На этапе проектирования горных предприятий и их структурных элементов (выработок) весьма полезными могут быть эмпирические формулы, связывающие прочность образца с прочностью пород в массиве, например, [68] Достаточно полный обзор работ этого направления выполнен в [69]. Учет геологического строения массива в этом случае производится путем введения целого ряда коэффициентов, имеющих существенный разброс. Последнее обстоятельство приводит к тому, что, варьируя значения коэффициентов, можно получить значение искомой величины, изменяющейся в широких пределах. В работе [69] приводятся значения коэффициентов структурного ослабления, полученные по данным ВНИМИ, на основе анализа результатов натурных наблюдений, испытаний и обратных расчетов.

Для углевмещающих пород по оценкам большинства авторов [70-74 и др.] величина коэффициента структурного ослабления составляет 0,2-0,6.

Интересно отметить, что оценивая прочность стержневой системы со случайно распределенной прочностью отдельных элементов, Б.В. Матвеев получил для случая объемного сжатия значение коэффициента структурного ослабления равное 0,369-0,428 [74].

В США и ряде других стран широко применяется методика оценки трещиноватости горных пород по показателю качества породы RQD (Rock Quality Designation), который определяется как произведение величины выхода керна, выраженного в процентах (Z), на отношение суммарной длины ненарушенных кусков керна, каждый из которых имеет длину не менее 10 см ($\sum l_i$), ко всей длине исследуемого интервала (L), т.е. $RQD = Z (\sum l_i / L)$.

Если, например, из исследуемой скважины с интервалом 9 м извлечен керн общей длиной 8 м, а суммарная длина ненарушенных кусков керна (каждый длиной 10 см и более) составляет 7 м, то $RQD = 78\%$. На основе показателя качества RQD составлены графики, таблицы, определяющие характер условий проведения выработок, тип и стоимость крепления [74].

В отличие от показателя RQD методы Дира и Хансаги [75,76], незначительно отличаясь друг от друга, позволяют определять коэффициент структурного ослабления, учитывая при этом число образцов, диаметр и длину керна. Заметим, что и метод RQD, и метод Хансаги и Дира не имеют под собой никакого аналитического обоснования. По сути дела это способ получения некоторой величины меньше единицы, которая годится только для качественной оценки горных пород по степени их нарушенности.

Коэффициент структурного ослабления является очень важной характеристикой массива. На стадии проектирования именно с этой величиной связан прогноз возможной области предельного состояния пород в окрестности выработки, а, следовательно, и нагрузки на крепь, поскольку, как было показано выше, именно предел прочности на сжатие фигурирует в качестве основной физической константы в критериальных соотношениях наиболее распространенных феноменологических теорий прочности. Поэтому величина коэффициента структурного ослабления должна быть достаточно обоснована, включая в

себя как объективные предпосылки формирования физической константы, так и субъективные, присущие конкретным горно-геологическим условиям.

1.5. Аналитические исследования масштабного эффекта

Аналитическое описание отличия прочности системы (агрегата) от прочности его структурных элементов дано в работах, основанных на статистических теориях прочности. Так, опираясь на асимптотическое выражение В. Вейбулла для плотности распределения наименьших значений прочности (прочности дефектов) в некотором объеме, В.В. Болотин [77] получил следующую формулу для математического ожидания прочности тела, имеющего заданный объем V :

$$\bar{R} = \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{g(R)}{V_0}\right] dR. \quad (1)$$

Здесь функция $g(R)$ определяет некоторую область, в которой функция напряжений $R\varphi(x, y, z)$, определенная во всей рассматриваемой области пространства, превышает минимальную прочность дефекта s_0 :

$$g(R) = \int_{R\varphi(x, y, z) > s_0} \left[\frac{R\varphi(x, y, z) - s_0}{s_c} \right]^{\alpha} dV, \quad (2)$$

где $s_0 = aR_c$ — минимальная прочность дефекта; $s_c = b\bar{R}_c / \Gamma^{(1+1/\alpha)}$ — параметр, имеющий размерность напряжений; R_c — средний предел прочности эталонного образца; a, b, α — коэффициенты статистического представления, определяемые на основании испытания образцов различного объема.

Интеграл (2) представляет собой некоторый приведенный объем V^* . После ряда преобразований выражение для математического ожидания прочности тела принимает вид:

$$\bar{R} = b\bar{R}_c \left(\frac{V_0}{V^*} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3)$$

где V_0 - эталонный объем испытываемого образца.

Величина $b\left(\frac{V_0}{V^*}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ представляет собой, по сути, коэффициент структур-

ного ослабления. Применительно к горному массиву сложно трактовать понятие приведенного объема. Массив изначально напряжен, т.е. если положить прочность дефекта равной нулю, в любой точке тела (массива) напряжения будут превосходить прочность дефекта, т.е. V^* будет стремиться к бесконечности. Следовательно, прочность всего тела, т.е. массива, будет стремиться к нулю. Этот результат абсурден, и, очевидно, не должен рассматриваться. Но если даже положить прочность дефектного элемента некоторой константой, отличной от нуля, область, где действующие напряжения превосходят минимальную прочностную характеристику, согласно известным решениям [78-81] будет сопоставима с размерами обнажения, но во много раз превышать величину эталонного образца. Отношение $\frac{V_0}{V^*}$ опять таки будет близким к нулю.

Уравнения, полученные В.В. Болотиным, хорошо описывают масштабный эффект для тел ограниченных объемов и широко используются в машиностроении. Однако автоматическое перенесение их в геомеханику не дает желаемых результатов.

Большой вклад в развитие статистических теорий прочности внесли труды Л.Г. Седракияна [34], следуя которым, породную среду следует рассмотреть как конструкцию, состоящую из отдельных параллельно работающих элементов различной прочности. При разрушении одного из них нагрузка перераспределяется между уцелевшими элементами. Пусть на конструкцию действует нагрузка

$$P = nR_c. \quad (4)$$

Элементы с пределом прочности, меньшим R_c , разрушаются. Число этих элементов n_R . Вероятность встречи такого элемента в конструкции по классическому определению вероятности равна:

$$P(R) = \frac{n_R}{n}. \quad (5)$$

При известной функции распределения предела прочности элементов $F(R)$ вероятность того, что элемент имеет прочность, меньшую R_c , равна

$$P(R < R_m) = P(R_m). \quad (6)$$

Тогда

$$n_R = nF(R_m). \quad (7)$$

Число неразрушенных элементов составит $n(1 - F(R_c))$. Значения напряжений в уцелевших элементах после перераспределения нагрузки между ними возрастает и станет равным

$$nR_m / n(1 - F(R_c)). \quad (8)$$

Теперь разрушатся элементы, предел прочности которых хотя и больше R_c , но меньше последнего выражения. После разрушения этой группы элементов нагрузка передается на еще меньшее количество элементов. Процесс постепенного разрушения элементов прекратится, когда напряжения в уцелевших элементах станут меньше предела их прочности. Значения напряжения в уцелевшем элементе обозначим R . Число разрушенных элементов, соответствующее устойчивому состоянию конструкции равно $nF(R)$. Число уцелевших элементов определится выражением $n(1 - F(R))$. С другой стороны

$$R = P / n(1 - F(R)) = nR_m / n(1 - F(R)). \quad (9)$$

Отсюда

$$R_m = R(1 - F(R)) \quad (10)$$

или

$$R_m = R \left[1 - \int_0^R P(R) dR \right], \quad (11)$$

где $P(R)$ - плотность распределения прочности элементов.

Соотношение (11) дает связь между средним напряжением R_m и местным напряжением R . Значение предела прочности конструкции равно макси-

мальному значению R_m , определенному из (11). Таким образом, предел прочности породного массива в варианте Л.Г. Седракияна определится выражением

$$R_m = \max(R(1 - F(R))). \quad (12)$$

Конкретный вид выражения (12) зависит от выбора функции распределения прочности структурных элементов массива, в отношении которой могут выдвигаться различные гипотезы. Например, авторы [82] связывая масштабный эффект со структурой и видом напряженного состояния деформированного твердого тела, рассмотрели ряд статистических задач, в которых функция вероятности разрушения принимается по В. Вейбуллу [89]. Разрушение структурного элемента можно рассматривать как «отказ» системы, связанный с выходом из строя наиболее слабого звена. Распределение Вейбулла получено именно как распределение крайних значений в выборке и широко используется в статистических моделях, связанных с надежностью систем, например, как распределение времени безотказной работы системы.

Интегральная функция плотности распределения Вейбулла имеет вид:

$$F(R) = \int_0^R P(R) dR = 1 - \exp(-(R/\sigma_0)^\xi), \quad (13)$$

где ξ, σ_0 - параметры распределения.

Тогда средняя прочность системы (массива) в соответствии с выражением (12) равна:

$$R_m = \max\{R \cdot \exp(-(R/\sigma_0)^\xi)\}.$$

Минимизируя выражение в фигурных скобках получим:

$$R_m = \sigma_0 \exp(-1/\xi) \xi^{-1/\xi}. \quad (14)$$

Выражение (14) определяет прочность пород в массиве с учетом случайно распределенных дефектов. Используя его можно получить коэффициент структурного ослабления. Лабораторные образцы пород можно рассматривать как структурные элементы системы. Их средняя прочность в соответствии с принятой гипотезой равна математическому ожиданию случайной величины, распределенной по закону Вейбулла.

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Вейбулла выражаются через параметры распределения следующим образом [86]:

$$M(R) = \sigma_0 \Gamma(1/\xi + 1)$$

$$D = \sigma_0^2 \left\{ \Gamma(2/\xi + 1) - [\Gamma(1/\xi + 1)]^2 \right\},$$

где $\Gamma(t)$ - гамма-функция [85]

Тогда коэффициент структурного ослабления равен:

$$k_c = R_m / M(R) = \frac{\exp(-1/\xi) \xi^{-1/\xi}}{\Gamma(1/\xi + 1)}.$$

Полученное выражение определяет коэффициент структурного ослабления массива только в зависимости от параметра формы ν кривой распределения Вейбулла. С одной стороны, простота в математическом плане является достоинством полученной зависимости, но с другой – снижает эффективность величины k_c как характеристики объекта: степень снижения прочности системы по отношению к прочности ее элементов зависит только от параметра, физическая сущность которого не очевидна.

В работе А.Н. Шашенко [83] также используется подход Л.Г. Седракина для определения средней прочности массива. Однако в отношении распределения прочности структурных элементов им выдвинута гипотеза о нормальном законе распределения.

Интегральная функция нормального распределения имеет вид [84]:

$$F(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^R \exp\left(-(R-a)^2 / 2\sigma^2\right) dR,$$

где a, σ - параметры распределения, соответственно равные математическому ожиданию и среднеквадратическому отклонению случайной величины.

Путем замены переменной эту функцию приводят к нормированному виду и выражают через табулированные в справочниках так называемые интегралы вероятностей [84]. Поскольку в данном случае идет речь о величине, принимающей только положительные значения, автор счел возможным использовать в качестве функции распределения интеграл:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R-a}{\sqrt{2}\sigma}} \exp(-t^2) dt, \quad (15)$$

где t - параметр, определяемый выражением:

$$t = \frac{R-a}{\sqrt{2}\sigma}. \quad (16)$$

Продифференцировав выражение (11) с учетом (15) по t и приравняв его к нулю, получим уравнение

$$\sqrt{2}\pi(1 - \operatorname{erf} t^*) - (\sqrt{2}t^* + \frac{1}{\eta}) \exp(-t^{*2}) = 0, \quad (17)$$

где t^* - решение уравнения (17), η - коэффициент вариации прочности, равный σ/a . Интеграл вероятностей (2.33) табулирован в [85]. Решая уравнение (17) методом приближений, получим зависимость $t^*=f(\eta)$. С ошибкой, не превышающей 8 %, эта кривая может быть представлена в аналитическом виде

$$t^* = -0,5\eta^{0,5} \exp(-0,25\eta). \quad (18)$$

При $t = t^*$ заменим в выражении (16) R на R_m и получим

$$t^* = \frac{R_m - a}{2\sigma}. \quad (19)$$

Приравнивая правые части уравнений (17) и (19) получим выражение для определения средней прочности массива на одноосное сжатие

$$R_m = [1 - \sqrt{0,5\eta} \exp(-0,25\eta)]a. \quad (20)$$

Полученное выражение для средней прочности массива использовалось для определения коэффициента структурного ослабления.

Поскольку математическое ожидание нормально распределенной величины равно параметру a , формула для определения коэффициента структурного ослабления, в случае принятия гипотезы о нормальном распределении прочности структурных элементов, имеет вид:

$$k_c = \frac{R_M}{a} = 1 - \sqrt{0,5\eta} \exp(-0,25\eta). \quad (21)$$

Полученная зависимость связывает коэффициент структурного ослабления с реальной характеристикой – вариацией значений прочности относительно своего среднего. Для идеально однородной среды $\eta=0$ и коэффициент структурного ослабления равен единице. По мере увеличения вариации данных, то есть с ростом неоднородности среды величина k_c уменьшается.

Исследуем подробнее поведение функции (21). Предел функции при $\eta \rightarrow \infty$, найденный по правилу Лопиталя, равен единице. Это значит, что в области своего определения функция (21) должна иметь экстремум. Действительно, исследование первой производной показывает, что при $\eta=2$ имеет место минимум, значение которого составляет 0,39. То есть, в соответствии с формулой (21) коэффициент структурного ослабления не может быть ниже значения $k_c=0,39$ даже при сколь угодно больших значениях относительной вариации прочности. Очевидно, что этот факт не соответствует реальности. Выше упоминалось, что для углевмещающих пород величина коэффициента структурного ослабления может принимать значения 0,2...0,6. Значения коэффициента структурного ослабления, получаемые из выражения (21), завышены, поскольку автором искусственно исключена из рассмотрения вероятность появления отрицательных величин путем использования функции Лапласа, ограниченной слева, в то время как график плотности распределения вероятностей в соответствии с законом Гаусса простирается и в отрицательную область, что должно быть учтено при интегрировании. Эта ошибка тем больше, чем выше неоднородность рассматриваемого объекта, т.е. чем выше значение дисперсии случайной выборки.

Завершая обзор работ, посвященных количественной оценке масштабного эффекта в горных породах, следует отметить, что на настоящий момент по сути дела нет общепринятой методики определения коэффициента структурного ослабления, в основе которой лежала бы адекватная физическая модель, учитывающая основные ослабляющие микро- и макродефекты, структуру и тектоническую нарушенность породных массивов, а также особенности их нагружения.

Глава 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СТРУКТУРНОГО ОСЛАБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Вероятностно-статистическая модель прочности породного массива

Следуя статистическим теориям прочности [34,36], породный массив можно представить как некоторый агрегат, состоящий из структурных элементов. В силу неоднородности породной среды прочность структурных элементов является случайной величиной и подчиняется тому или иному закону распределения вероятностей с функцией распределения $F(R)$.

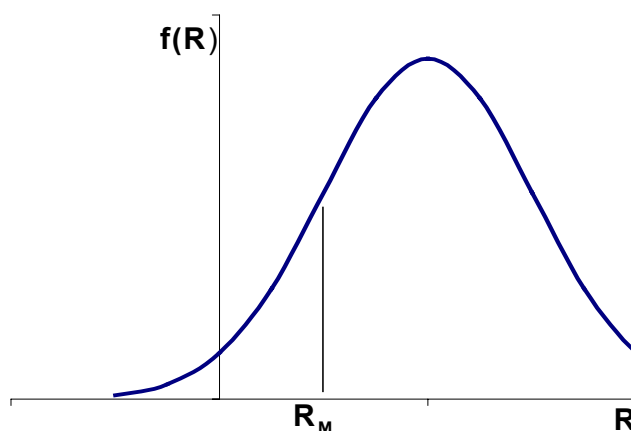


Рис.2.1. Гипотетическое распределение прочности структурных элементов массива.

Отличие прочности массива (агрегата) R_m от математического ожидания прочности структурных элементов $M(R)$ оценивается коэффициентом структурного ослабления, равным

$$k_c = \frac{R_m}{M(R)}. \quad (22)$$

Прочность массива должна оцениваться такой величиной R_m , чтобы прочность его структурных элементов, в т.ч. лабораторных образцов, с заданной надежностью были не меньше этого значения. Вероятность такого события определяется выражением

$$p(R \geq R_m) = 1 - F(R_m), \quad (23)$$

Разрешим это неравенство относительно величины R_m :

$$R_m = \arg F(1 - P). \quad (24)$$

где $\arg F(1 - P)$ - аргумент функции $F(R)$ при ее значении равном $1 - P$.

Тогда коэффициент структурного ослабления определяется выражением:

$$k_c = \frac{\arg F(1 - P)}{M(R)}, \quad (25)$$

конкретный вид которого зависит от выбора функции распределения вероятностей $F(R)$ случайной величины R - прочности структурных элементов.

Как правило, выбор закона распределения осуществляют исходя из физической сути случайной величины и анализа статистической информации. Чаще всего, особенно в случае, когда объем такой информации невелик, исследователи в качестве вероятностной модели исследуемого количественного признака выбирают нормальный закон распределения. При этом руководствуются центральной предельной теоремой и законом больших чисел, из которых следует вывод: если варьирование случайной величины происходит под воздействием большого числа независимых факторов, причем влияние каждого из них незначительно по сравнению с совокупным воздействием других факторов, то распределение случайной величины подчиняется нормальному закону. Поскольку условия, определяющие нормальное распределение, встречаются часто, последнее получило широкое распространение. Достоинством нормального распределения является и то, что его параметры имеют ясный физический смысл.

Действительно, плотность распределения случайной величины, подчиненной закону Гаусса, имеет вид:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(R-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (26)$$

где a - математическое ожидание величины R ; σ - ее среднеквадратическое отклонение.

Получим величину коэффициента структурного ослабления в предположении, что прочность структурных элементов массива распределена по нормальному закону. В этом случае неравенство (2) принимает вид

$$P(R \geq R_m) = 1 - F_0\left(\frac{R_m - a}{\sigma}\right), \quad (27)$$

где

$$F_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (28)$$

нормированная функция нормального распределения.

Разрешим уравнение (27) относительно величины R_m :

$$F_0\left(\frac{R_m - a}{\sigma}\right) = 1 - P,$$

$$\frac{R_m - a}{\sigma} = \arg F_0(1 - P),$$

где $t = \arg F_0(1 - P)$ - аргумент функции (28) при ее значении $F_0(t)$, равном $1 - P$.

Далее получим:

$$R_m = \sigma \cdot \arg F_0(1 - P) + a.$$

Учитывая, что $M(R) = a$, разделив обе части полученного выражения на величину a , получим:

$$k_c = \frac{\sigma}{a} \cdot \arg F_0 \cdot (1 - P) + 1.$$

Здесь $\frac{\sigma}{a} = \eta$ - относительная вариация прочности структурных элементов.

Окончательно выражение для коэффициента структурного ослабления принимает вид:

$$k_c = \eta \cdot \arg F_0 \cdot (1 - P) + 1 \quad . \quad (29)$$

Итак, мы получили коэффициент структурного ослабления как величину, зависящую, во-первых, от относительной вариации η , которая по сути характеризует степень неоднородности среды; во-вторых - от вероятности P , которая характеризует собой уровень значимости объекта.

Определим, например, расчетное значение прочности на одноосное сжатие алевролита, если по данным испытаний среднее значение прочности лабораторных образцов $\bar{R}_c$ составляет 40 МПа, относительная вариация значений составляет 30 %.

Из равенства (22) следует, что:

$$R_{расч} = R_m = \bar{R}_c \cdot k_c \quad .$$

Зададимся вероятностью $P=0,95$. Определим значение аргумента t нормированной нормальной функции $F_0(t)$ при ее значении, равном $1 - 0,95 = 0,05$. По таблице 1 Приложения А определяем, что значению

интегральной функции $F_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, равном $F_0(t) = 0,05$

соответствует значение аргумента $t = -1,64$. То есть $\arg F_0(0,05) = -1,64$. Тогда коэффициент структурного ослабления равен:

$$k_c = 0,3 \cdot (-1,64) + 1 = 0,508 \quad .$$

Таким образом, расчетное значение прочности равно:

$$R_{расч} = 0,508 \cdot 40 = 21 \text{ МПа}.$$

Анализируя график зависимости (29) (рис. 2.2) заметим, что при $\eta > 0,4$, коэффициент структурного ослабления может принимать отрицательные значения, что, естественно, противоречит физической сути данной величины. Очевидно, что это недостаток вероятностной модели. Действительно,

интегрирование кривой плотности нормального распределения автоматически предполагает наличие отрицательных значений величины x в пределах $-\infty < x < 0$. Именно количественная оценка в виде коэффициента структурного ослабления показывает недостаток нормального распределения: предел прочности на одноосное сжатие не может иметь отрицательных значений. Исходная вероятностная модель, привлекающая своей простотой, неадекватна рассматриваемому объекту и требует замены на более совершенную. Такой более универсальной вероятностной моделью является нормальный усеченный закон распределения [97].

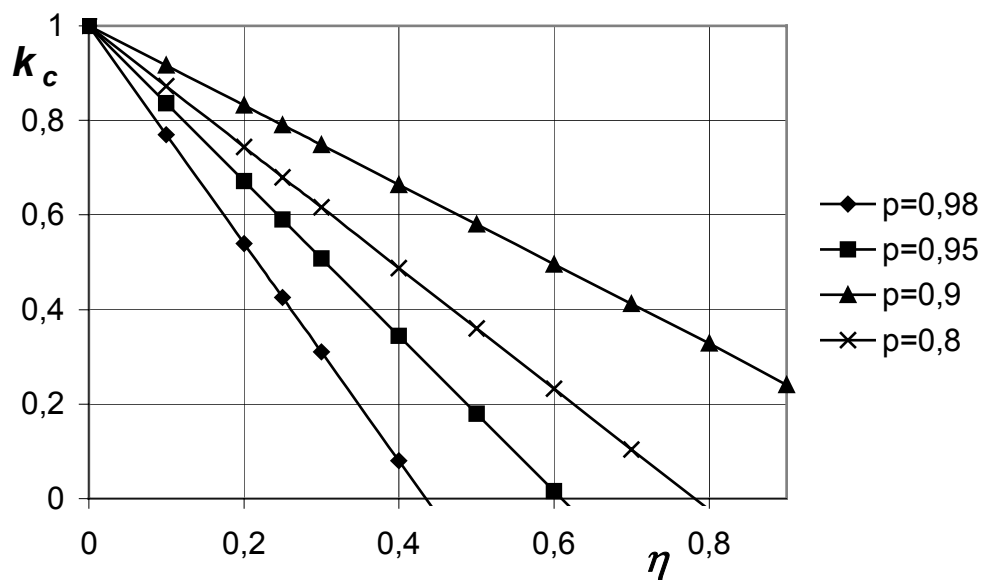


Рис.2.2. Зависимость коэффициента структурного ослабления от вариации прочности структурных элементов в предположении нормального закона распределения их прочности

Дифференциальный закон распределения усеченного нормального закона имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1; \\ A \left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma \right]^{-1} \exp \left[- (x - x_0)^2 (2\sigma^2)^{-1} \right], & x_1 < x < x_2; \\ 0, & x_2 < x < \infty. \end{cases} \quad (30)$$

где x_0 , σ - соответственно первый и второй моменты статистического распределения.

Параметр A в уравнении (30) определяется из условия

$$A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1, \quad (31)$$

где

$$u = \frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}.$$

Среднее значение прочности и дисперсии находятся из выражений

$$M(x) = x_0 + B\sigma, \quad (32)$$

$$D = \sigma^2 \left\{ 1 - B^2 - A \left[\begin{aligned} &(x_2 - x_0)\sigma^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(x_1 - x_0)^2 / 2\sigma^2\right] - \\ &-(x_1 - x_0)\sigma^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(x_1 - x_0)^2 / 2\sigma^2\right] \end{aligned} \right] \right\}. \quad (33)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{(x_i - x_0)/\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du &= \Phi[(x_i - x_0)/\sigma], \\ \exp\left[-(x_i - x_0)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right] &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} f[(x_i - x_0)\sigma^{-1}]. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда величины A , B , D определяются выражениями

$$\begin{aligned} A &= 1 / \left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right], \\ B &= f\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) - f\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) / \left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right], \\ D &= \sigma^2 \left\{ 1 - B^2 - A \left[\frac{x_1 - x_0}{\sigma} f\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) f\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Решим задачу об оценке прочности породного массива для такого усеченного нормального закона распределения. Прочность массива, как и в

предыдущем случае, оценивается величиной x с такой надежностью, чтобы при расчетах она с вероятностью p не принимала значений меньше x_m . Вероятность того, что случайная величина x не окажется ниже значения x_m , равна:

$$p(x_m < x < x_2) = 1 - A(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{(x_1-x_0)/\sigma}^{(x_m-x_0)/\sigma} \exp(-u^2/2) du.$$

С учетом обозначений (34) и (35) получим

$$p = 1 - \left[\Phi\left(\frac{x_m - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right] / \left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right].$$

Решим последнее равенство относительно x_m - основной характеристики прочности массива:

$$x_m = x_0 + \sigma \arg \Phi \left[(1-p) \Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma}\right) + p \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right) \right].$$

Полученная формула прочности породного массива должна определиться относительно статистических характеристик для усеченного нормального закона распределения, т.е. в формуле (36) вместо x_0 необходимо взять величину $M(x)$ из (32), а вместо σ соответственно $\sqrt{D}$ из (35). Получим

$$x_m = m + \sqrt{D} \arg \Phi \left[(1-p) \Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{D}}\right) + p \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{D}}\right) \right]. \quad (36)$$

Поделив все члены выражения (37) на математическое ожидание $M(x)$, найдем формулу для определения коэффициента структурного ослабления:

$$k_c = 1 + \eta \arg \Phi \left[(1-p) \Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{D}}\right) + p \Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{D}}\right) \right]. \quad (37)$$

Таким образом, получены формулы, позволяющие определить расчетную прочность породного массива и коэффициент структурного ослабления, показывающий, насколько необходимо уменьшить прочность горной породы, найденную при испытании выборки образцов как

математическое ожидание усеченного нормального закона, чтобы иметь расчетное значение прочности. Уровень надежности полученных оценок определяется заданием вероятности p , которая зависит от технической или производственной значимости проектируемого объекта. На рис. 2.3 приведены графики, показывающие, как зависит ошибка, возникающая при использовании нормального закона распределения вместо усеченного нормального закона, более адекватно описывающего реальный породный массив. Из графиков следует, что в зависимости от уровня надежности, при коэффициенте вариации, не превышающем 0,2-0,3 ошибка составляет 10-13% и в этих условиях можно применять нормальный закон распределения и вытекающие из него более простые зависимости. При более же высоком уровне неоднородности породного массива ошибка становится существенной и следует использовать зависимости (37), (38), полученные на основе усеченного нормального закона распределения.

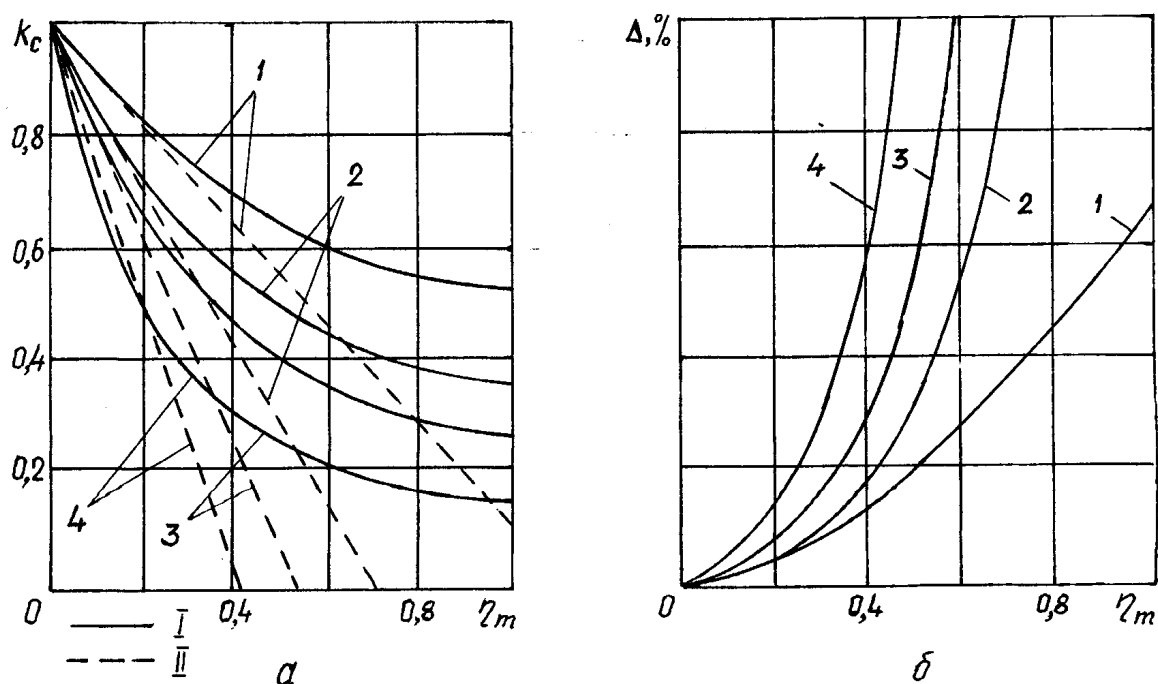


Рис.2.3. Зависимость коэффициента структурного ослабления (а) и относительной ошибки вычисления (б) от относительной вариации прочности и уровня надежности вероятности (p): I – нормальный закон распределения; II – усеченный нормальный закон распределения; 1,2,3,4 – $p=0,8; 0,9; 0,95; 0,99$ соответственно.

Практическое использование усеченного нормального распределения связано только с одним неудобством: для определения параметров теоретического распределения кроме средней выборочной и выборочной дисперсии (именно эти величины приводят исследователи как результат статистической обработки стандартных испытаний образцов) необходимо располагать крайними выборочными значениями x_1 и x_2 , которые будучи полученными только из одной серии испытаний не являются несмещенными оценками своих теоретических аналогов

Нормальный закон распределения удовлетворительно описывает только те величины, вариация которых не превышает 33 % (это вытекает из правила «трех сигм»). Как правило, для результатов лабораторного опробования образцов большой разброс данных не характерен. Обычно вариация прочности образцов не превосходит 30-35%, а статистическое распределение, построенное по выборке близко к нормальному.

Так, большой объем испытаний образцов для углевмещающих пород Донбасса был выполнен в лабораториях Национального горного университета. Гистограммы относительных частот значений прочности образцов пород приведены в Приложении Б.

Для статистических данных были определены эмпирические начальные и центральные моменты распределения:

$$m_k = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^n R_i^k, \quad (38)$$

$$\mu_k = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^n (R_i - m_1)^k, \quad (39)$$

где n_B - объем выборки, k - порядок момента.

С центральными моментами второго, третьего и четвертого порядков связаны нормированные показатели асимметрии β_1 и эксцесса β_2 :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}. \quad (40)$$

Обобщенные результаты обработки статистических данных в виде квадрата показателя асимметрии β_1 и показателя островершинности β_2 , сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1.

Параметры статистического распределения

Марки углей	Вмещающие породы	Параметры распределения	
		β_1^2	β_2
Д-ДГ	Аргиллит	0,261	3,099
	Алевролит	0,336	2,970
	Песчаник	0,213	2,421
Г-ГЖ	Аргиллит	0,637	2,623
	Алевролит	0,545	2,875
	Песчаник	0,470	3,123
Ж, КЖ, ОС	Аргиллит	1,043	5,029
	Алевролит	0,336	2,970
	Песчаник	0,514	3,003

В [86] подбор распределений по экспериментальным данным рекомендуется осуществлять с помощью графика Пирсона, на котором в осях координат β_1^2 , β_2 построены кривые, соответствующие различным теоретическим распределениям. В работе [51] этот график дополнен точками и кривыми, представляющими распределения: параболическое, логистическое, Берра, Максвелла, Релея, Гумбеля, Бернштейна и Фреше. Распределения, имеющие только два параметра (положения и масштаба), изображаются на графике точкой. К ним относятся распределения: равномерное, параболическое, нормальное, Максвелла, Релея, логистическое, минимальных и максимальных значений Гумбеля. Кривые с тремя параметрами (третий – параметр формы) изображены линиями $\beta_1^2 = \varphi(\beta_2)$. К ним относятся распределения: минимальных и максимальных значений Вейбулла, гамма, Бернштейна, логарифмически нормальное (Гальтона), Берра, минимальных и максимальных значений Фреше.

Бета-распределение, имеющее два параметра формы, занимает на этом графике определенную область.

Точки с координатами (β_1^2, β_2) , полученные как результат обработки испытаний образцов, нанесены на график Пирсона (рис. 2.4).

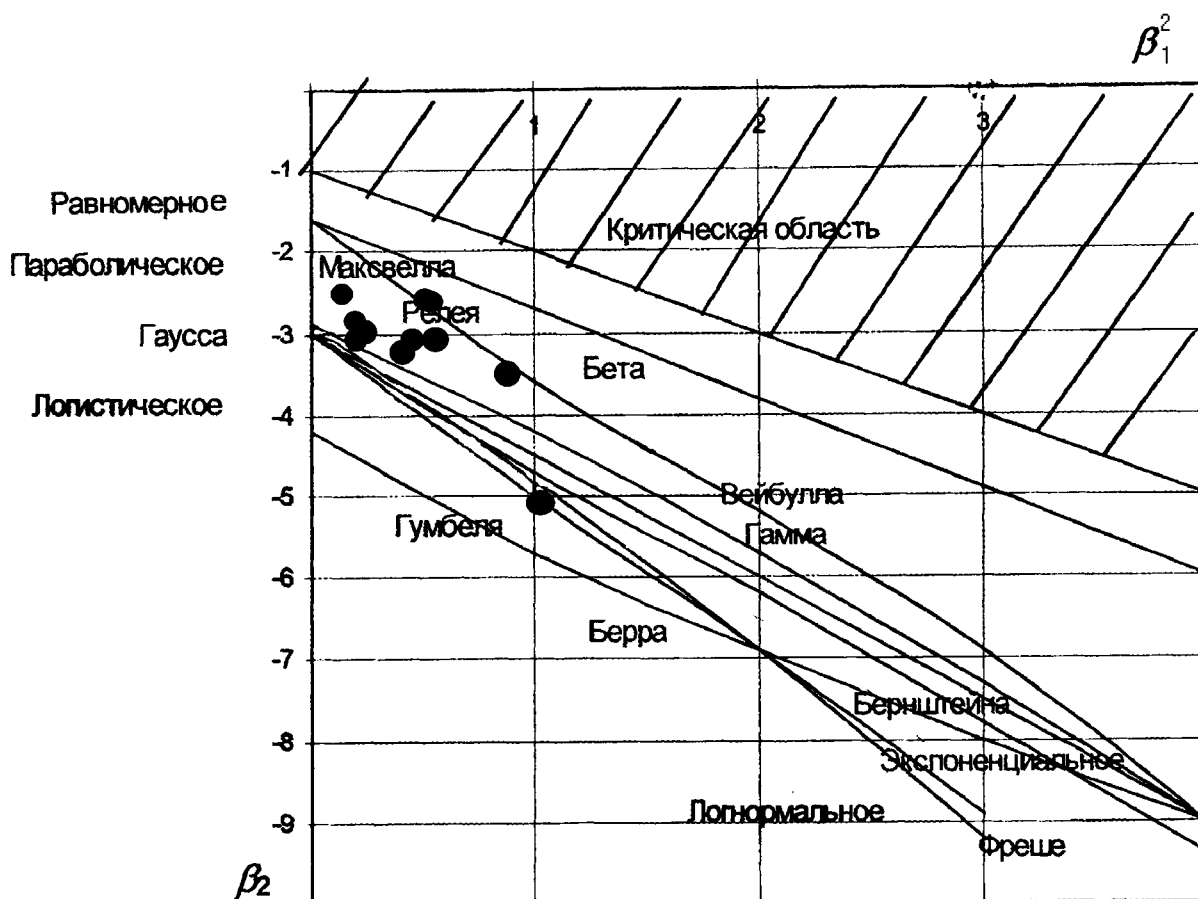


Рис. 2.4. График Пирсона для различных распределений случайных величин

Видно, что большинство эмпирических точек группируются в некоторой области, близко расположенной к точке, соответствующей нормальному распределению (для нормального распределения $\beta_1^2=0$, $\beta_2=3$). На этом основании можно выдвинуть гипотезу о распределении прочности образцов на одноосное сжатие по нормальному закону.

При этом, очевидно, что кривая Гаусса не вполне отвечает физической природе тех величин, которые по своей сути не могут быть отрицательными. В [87] отмечается, что теоретически хорошо обоснованный нормальный закон

распределения является скорее исключением, чем правилом, которому следуют природные явления.

Исследуя прочность структурных элементов породного массива, реальными «представителями» которых являются образцы, изготовленные из отобранных проб, следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

Действительно ли выборка, полученная как результат опробования образцов горной породы, отражает природу генеральной совокупности? Выполняется ли основное требование, предъявляемое к выборке – равенство шансов для всех элементов генеральной совокупности попасть в выборку?

Известно, что горной породе присуща естественная трещиноватость. При изготовлении образцов те из них, которые пересечены трещиной, разрушаются до начала испытаний. Таким образом, структурные элементы, содержащие макродефекты, в обычных испытаниях не участвуют, но как реально существующие должны быть включены в статистику опробования. Очевидно, наличие нарушенных элементов, то есть элементов, прочность которых значительно ниже прочности ненарушенных элементов, изменит все характеристики выборки, а, следовательно, все моменты распределения, для которых характеристики выборки являются точечными оценками. Соответственно изменится и закон распределения прочности структурных элементов. Исследуем тенденцию этих изменений.

2.2. Исследование влияния макродефектов на распределение прочности структурных элементов массива

Роль естественных трещин в изменении механической характеристики массива горных пород являлась предметом многолетних исследований коллективов ученых разных стран. В СССР широкие работы в этом направлении проводились в Донецком политехническом институте - Г.Н. Кузнецовым и в др. организациях [88, 89]

М.М. Протодяконов, указывая на различие между прочностью лабораторных образцов и прочностью массива, в качестве основной причины рассматривал именно трещиноватость пород и углей [90].

Г.Л. Фисенко [91] отмечает, что при изучении механических свойств массивов горных пород как среды, в которой проводятся горные выработки, т.е. создаются полости, необходимо различать поверхности ослабления:

а) большой протяженности, по которым происходит скольжение одной части деформируемого массива относительно другой, являющиеся поверхностями разрыва сплошности массива, и

б) небольшой протяженности, расположенной ступенчато относительно друг друга и образующие системы определенным образом ориентированных трещин.

При деформировании больших областей массива (линейные размеры которых на порядок больше линейных размеров блоков, ограниченных смежными трещинами) структурные ослабления небольшой протяженности не являются поверхностями скольжения и разрыва непрерывности деформаций и смещений, а являются лишь элементами структуры массивов горных пород, снижающими прочность (или сопротивление сдвигу) массива горных пород.

В [91] отмечается, что определение характеристик сопротивления сдвигу по поверхности ослабления первого типа не представляет особых трудностей: для определения сцепления проводятся натурные испытания призм больших размеров с наиболее простой схемой приложения сдвигающих сил. Большой объем таких экспериментов был выполнен во ВНИМИ [92], что позволило сделать общие выводы о величинах сцепления и углах внутреннего трения по контактам слоев осадочных пород и выраженным зеркалами скольжения. Для дислоцированных пород сцепление по контактам составляет $1...3 \text{ т/м}^2$, для слабодислоцированных пород – 18 т/м^2 , по контактам слоев метаморфизованных пород, по тектоническим нарушениям и неровным тектоническим трещинам – $5...10 \text{ т/м}^2$. Углы внутреннего трения по контактам

слоев, в зависимости от степени шероховатости и неровности, изменяются от 9^0 до 31^0 .

Определение сопротивления сдвигу в массиве, ослабленном ступенчато расположенными системами трещин, является более сложной задачей, так как на его величину оказывает влияние множество факторов: неоднородность отдельных блоков по прочности, размер испытываемых призм, ориентировка трещин к направлению наибольшего напряжения. Отличие сцепления такой структурной модели массива от сцепления монолитной породы оценивается коэффициентом структурного ослабления k_c , который может быть определен из выражения

$$k_c = \frac{1}{1 + a \ln(H / l)} \quad (41)$$

Здесь H – высота призмы, l –размер блока.

В табл. 2.2 приведены значения коэффициентов структурного ослабления для сопротивления сдвигу (по испытаниям ВНИМИ) для прочных и средней прочности пород при их интенсивной трещиноватости. При проведении одиночных выработок в слаботрещиноватых породах, например, в мощных слоях известняков, песчаников или алевролитов, коэффициент структурного ослабления для сцепления значительно больше.

В [92] приводится классификация ВНИМИ, в которой суммированы немногочисленные данные о прочности на одноосное сжатие массивов, ослабленных одной и более системами трещин. Отличие прочности таких структурно нарушенных массивов от прочности монолитной породы также оценивается коэффициентом структурного ослабления (табл. 2.3).

В СНиП [93] приведены значения коэффициента структурного ослабления в зависимости от расстояния между трещинами (табл. 2.4)

Таблица 2.2

Значения коэффициента структурного ослабления трещиноватых пород при изменении предела прочности на сжатие ($M_{\text{сж}}$)

10	10...20	20...35	35...75	75...200	200...350	350...700	>700
0,68	0,63	0,59	0,32	0,26	0,126	0,107	0,068
0,64	0,43	0,44	0,29	0,24	0,126	0,07	0,05
0,62	0,42	0,42	0,26	0,21	0,083	0,060	0,036
0,58	0,32	0,34	0,22	0,15	0,070	0,052	0,030
0,50	0,28	0,34	0,18	0,11	0,045	0,050	0,022
0,48	0,27	0,30	0,17	0,085	0,036	0,045	0,019
0,45	0,27	0,26	0,15	0,077	0,030	0,042	0,013
0,40	0,26	0,23	0,13		0,038	0,030	0,013
0,36	0,23	0,15			0,029	0,019	

Таблица 2.3

Коэффициент структурного ослабления пород в зависимости от мощности слоев

Породы	Характерные классификационные признаки	Коэффициент ослабления
Неослабленные	А) вполне монолитные слои мощностью более 1м Б) слои мощностью более 1м, имеющие не более одной системы трещин, расположенных друг от друга на расстоянии, большем радиуса выработки	1,0
Умеренно ослабленные	А) слои мощностью от 0,5 до 1,0 м Б) имеется не более двух систем трещин, отстоящих друг от друга на расстоянии не менее 0,5 радиуса выработки	0,7
Существенно ослабленные	А) слои мощностью 0,5 м Б) имеется три и более систем трещин с расстоянием между трещинами менее 0,5 радиуса выработки	0,3

**Коэффициент структурного ослабления в зависимости от расстояния
между трещинами [93]**

Среднее расстояние между поверхностями ослабления пород, м	Коэффициент k_c
Более 1,5	0,9
От 1,5 до 1	0,8
От 1 до 0,5	0,6
От 0,5 до 0,1	0,4
Менее 0,1	0,2

Большинство исследователей, отмечают ослабляющее влияние на прочность массива систем трещин, особенно косесекущих, однако количественно это влияние почти не описано. Это связано со сложностью отбора проб и получения из нее образцов с заданным падением трещин.

В лаборатории механики горных пород НГУ испытывались модели из песчано-цементной смеси, имитирующие структурные элементы твердого тела, ослабленного системой трещин. Плоскости ослабления моделировались слоями воощенной бумаги по аналогии с опытами М. Hayashi [94] по сжатию гипсовых моделей с различным числом прерывистых и сплошных трещин. Испытания проводились на прессе ПГ-50. Было испытано 20 партий образцов кубической формы с длиной ребра 25 см, по 10 образцов в каждой партии, содержащих 1...4 плоскости ослабления, расположенные под углом $\theta = 0^0, 10^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ к оси нагружения.

Результаты испытаний указывают на уменьшение прочности образцов с увеличением числа трещин. Наиболее четко эта тенденция прослеживается при изменении числа трещин от нуля (монолитный образец) до трех. Для четырех трещин указанная закономерность нарушается. Во всех случаях за исключением положения плоскости ослабления под углом 60^0 наблюдалось некоторое повышение разрушающей нагрузки по сравнению с вариантами двух и трех плоскостей.

В отношении влияния на прочность образца угла наклона трещины к оси нагружения следует вполне определенный вывод: плоскости ослабления, расположенные под углом $\theta = 30^0, 45^0, 60^0$ к оси нагружения снижают прочность образца в 2-5 раз в зависимости от числа моделируемых плоскостей (рис. 2.5).

Приведенные данные дают скорее качественную, чем количественную оценку явления. Тем не менее, их анализ подтверждает предположения о влиянии на прочность твердых тел плоскостей ослабления, причем влияние это связано с расстоянием между плоскостями ослабления и их ориентацией их по отношению к оси нагружения.

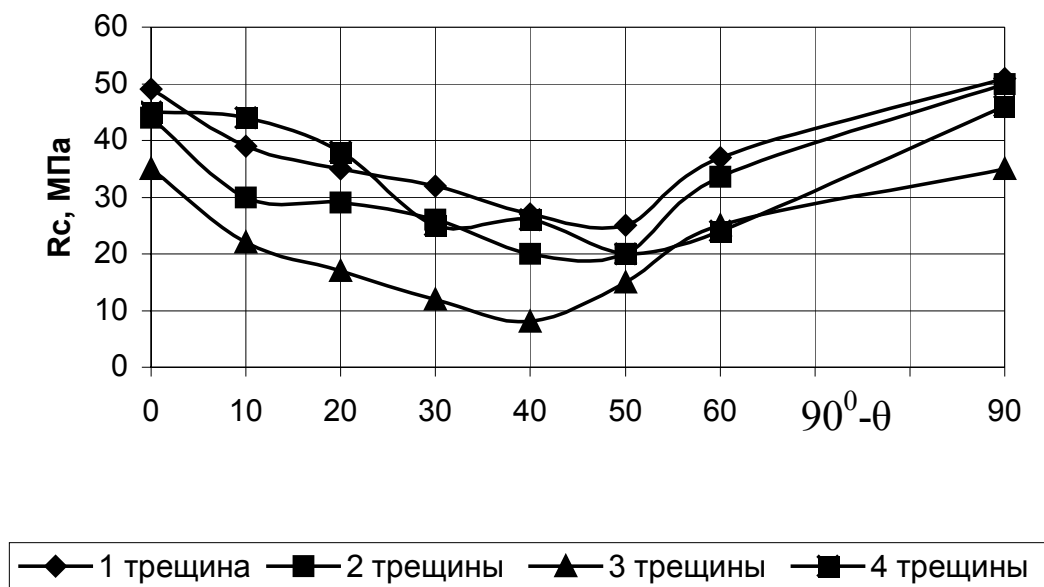


Рис.2.5 Изменение прочности образцов из цементно-песчаной смеси в зависимости от числа моделируемых трещин

Исследуем теперь, как изменятся характеристики выборки из генеральной совокупности, если учесть, что среди структурных элементов есть такие, прочность которых намного ниже прочности тех образцов, которые испытывались в лабораторных условиях.

2.2.1 Учет наличия элементов, содержащих макродефекты, при определении характеристик выборки

Для решения поставленной задачи рассмотрим неоднородный породный массив, содержащий несколько систем трещин (рис. 2.6). Пусть в этом массиве в произвольном направлении проходится горная выработка. Выделим вдоль продольной ее оси блок длиной L_1 , шириной L_2 и высотой L_3 . Блок имеет такие размеры, что все системы трещин, независимо от их ориентировки по отношению к оси x (L_{ij}), пересекут его стороны. При этом среднее расстояние между трещинами, подсчитанное по длинам L_i , равно l_{mi} , а соответствующая интенсивность трещиноватости составит $q_{mi} = l_{mi}^{-1}$.

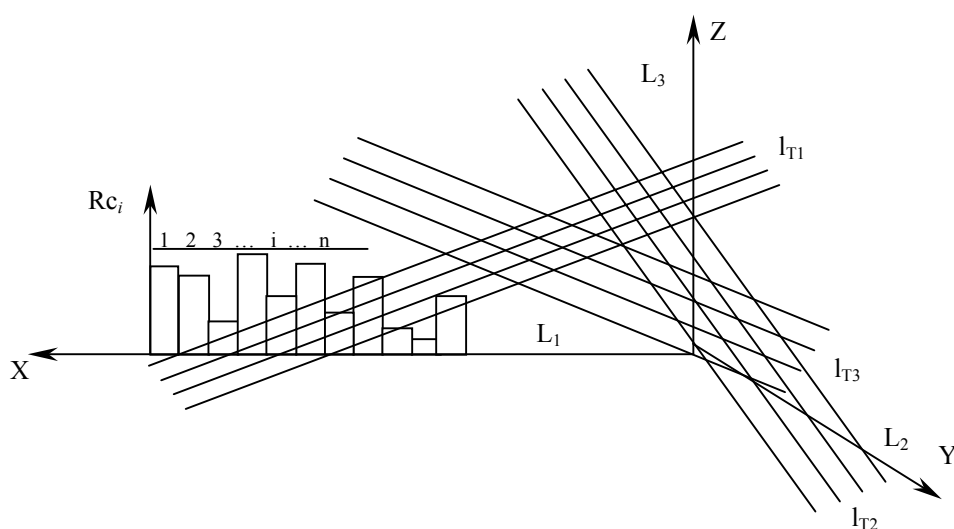


Рис.2.6. Расчетная схема к решению задачи о структурно-механическом ослаблении породного массива.

При идеальной обработке из этого блока могут быть изготовлено n образцов с линейным размером l_0 . ($l_0 \ll L_i$). Результаты испытаний этих образцов на сжатие представляли бы выборку из генеральной совокупности значений прочности структурных элементов. Однако, испытаниям подвергаются не все образцы, а лишь та часть, количеством n_0 , которая не содержит макродефекты и реально может быть изготовлена. Таким образом, будет получена совокупность значений прочности R_i ($i = 1 \dots n_0$), для которых среднее значение равно:

$$m_1 = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} R_i. \quad (42)$$

Однако, в генеральной совокупности в соответствии с принятой гипотезой, содержатся структурные элементы, прочность которых значительно меньше прочности ненарушенных образцов и оценивается некоторой функцией снижения прочности $f(\alpha)$. Их присутствие должно быть отражено и в выборке из генеральной совокупности. Таким образом, к исходной совокупности из n_g образцов должны быть добавлены n_m нарушенных образцов, прочность которых равна

$$R_{i_m} = f(\alpha) R_i \quad (i = 1 \dots n_m). \quad (43)$$

Статистическая обработка должна выполняться для нового, «исправленного», вариационного ряда из $n = n_m + n_g$ данных.

Следует отметить, что в поставленной задаче вместо исследуемого предела прочности на одноосное сжатие может фигурировать любая другая физико-механическая характеристика породного массива: плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, скорость распределения упругих волн и др. Суть и ход рассуждений от этого принципиально не меняются.

Определим параметры статистического распределения для такого ряда. Среднее значение прочности (начальный момент первого порядка) равно:

$$m_1' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i + \sum_{i=1}^{n_m} R_{i_m}}{n_g + n_m}. \quad (44)$$

Обозначим

$$n_g/n_m = \nu, \quad (45)$$

тогда $\frac{1}{n_g + n_m} = \frac{\nu}{n_g(\nu + 1)}$, а выражение (44) с учетом (45) примет вид

$$m_1' = \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i}{n_g} + \frac{\sum_{i=1}^{n_m} R_{i_m}}{n_g} \right) = \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i}{n_g} + \frac{\sum_{i=1}^{n_m} R_i f(\alpha)}{n_g} \right) = \frac{\nu}{1 + \nu} \left(m_1 + \frac{1}{\nu} f(\alpha) m_1 \right) = m_1 \frac{\nu + f(\alpha)}{\nu + 1}.$$

Из (45) найдем, что величина ν может быть представлена в виде:

$$\nu = l_m / l_0, \quad (46)$$

и тогда она может быть легко определена экспериментально. Здесь l_m и l_0 - среднее расстояние между трещинами и характерный размер образца соответственно.

Следует отметить, что величина ν по своей физической природе не может быть меньше единицы. При расстоянии между трещинами меньше l_0 из такой среды невозможно изготовить образцы стандартных размеров. Кроме того, после определенного уровня нарушенности среда принимает свойства скорее сыпучей, чем сплошной среды. Такой среде соответствует дисперсия значений прочности, близкая к нулю и коэффициент структурного ослабления, близкий к единице. Таким образом, исследуемая вероятностно-статистическая модель породной среды со случайно распределенными дефектами в виде трещин имеет ограничения: она отражает свойства породного массива, структура которого занимает промежуточное положение между сыпучей средой (модель однородного на микроскопическом уровне тела) и сплошной нетрещиноватой средой (модель сплошного неоднородного на субмакроскопическом уровне тела). Об этом следует помнить, анализируя полученные результаты.

Начальные моменты первого порядка для исходного и «исправленного» (дополненного нарушенными элементами) статистического ряда связаны соотношением:

$$m'_1 = K_1 m_1, \quad (47)$$

где

$$K_1 = \frac{\nu + f(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}. \quad (48)$$

Важнейшим параметром статистического распределения является дисперсия, характеризующая разброс данных относительно среднего.

Дисперсия представляет собой центральный момент второго порядка, который, как известно, связан с начальными моментами первого и второго порядков:

$$D' = \mu_2' = m_2' - (m_1')^2. \quad (49)$$

Момент первого порядка определяется формулой (47). Найдем момент второго порядка для «исправленного» ряда:

$$\begin{aligned} m_2' &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i^2 + \sum_{i=1}^{n_m} (R_i f(\alpha))^2}{n_g + n_m} = \\ &= \frac{\nu}{1 + \nu} \left(m_2 + \frac{1}{\nu} f^2(\alpha) m_2 \right) = K_2 m_2 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\text{где} \quad K_2 = \frac{\nu + f^2(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^2(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}.$$

Можно показать, что все начальные моменты k -го порядка «исправленного» и исходного ряда связаны соотношением:

$$m_k' = K_k m_k, \quad (51)$$

$$\text{где} \quad K_k = \frac{\nu + f^k(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^k(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}. \quad (52)$$

В частном случае, если полагать прочность нарушенных элементов равной нулю, коэффициент влияния трещин одинаков для всех начальных моментов:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots K_k = K = \frac{\frac{l_m}{l_0}}{\frac{l_m}{l_0} + 1} = \frac{l_m}{l_m + l_0}. \quad (53)$$

Величина K изменяется в пределах от 0,5 ($l_m = l_0$ - сильно трещиноватая среда) до 1,0 ($l_m \rightarrow \infty$ - нетрещиноватая среда)

Таким образом, дисперсия «исправленного» вариационного ряда равна:

$$D' = \mu'_2 = K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2. \quad (54)$$

В физическом отношении дисперсия характеризует степень неоднородности среды. Поэтому влияние на ее величину структурных неоднородностей представляет особый интерес.

2.2.2 Исследование влияния структурных неоднородностей на величину дисперсии прочности структурных элементов массива

Рассмотрим этот вопрос для случая, когда $f(\alpha) = 0$, т.е. в предположении, что прочность дефектных элементов близка нулю, как это сделано в [108,109].

Выражение (54) удовлетворяет граничным условиям: при $\nu = 0$, $D'=0$ - массив разрушен, механически однороден и может быть приравнен к сыпучей среде; при отсутствии трещин ($\nu \rightarrow \infty$) получим выражение для дисперсии опробования монолитного массива:

$$D = m_2 - m_1^2.$$

Коэффициент вариации обычного опробования (без учета нарушенных образцов) определяется формулой:

$$\eta = \frac{\sqrt{D}}{m_1}.$$

Введем обозначение

$$A_k = m_k / m_1^k, \quad (55)$$

тогда
$$\eta^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2} = A_2 - 1,$$

откуда
$$A_2 = \eta^2 + 1.$$

Выражение (51) с учетом последнего равенства принимает вид:

$$D' = m_1^2 \frac{\nu}{1+\nu} \left(A_2 - \frac{\nu}{1+\nu} \right) = m_1^2 f(A_2, \nu), \quad (56)$$

где $f(A_2, \nu)$ - функция влияния структурно - механических неоднородностей на величину дисперсии. Для идеальной однородной среды $A_2 = 1$, для реальной же породной среды, как показывает анализ, величина A_2 составляет 1,1-1,5.

На рис.2.7 показаны графики функции $f(A_2, \nu)$ в зависимости от значений A_2 и ν . Представленные кривые имеют явно выраженные максимумы. До определенного значения $\nu = \nu^*$ дисперсия возрастает, затем плавно снижается по мере увеличения расстояния между трещинами.

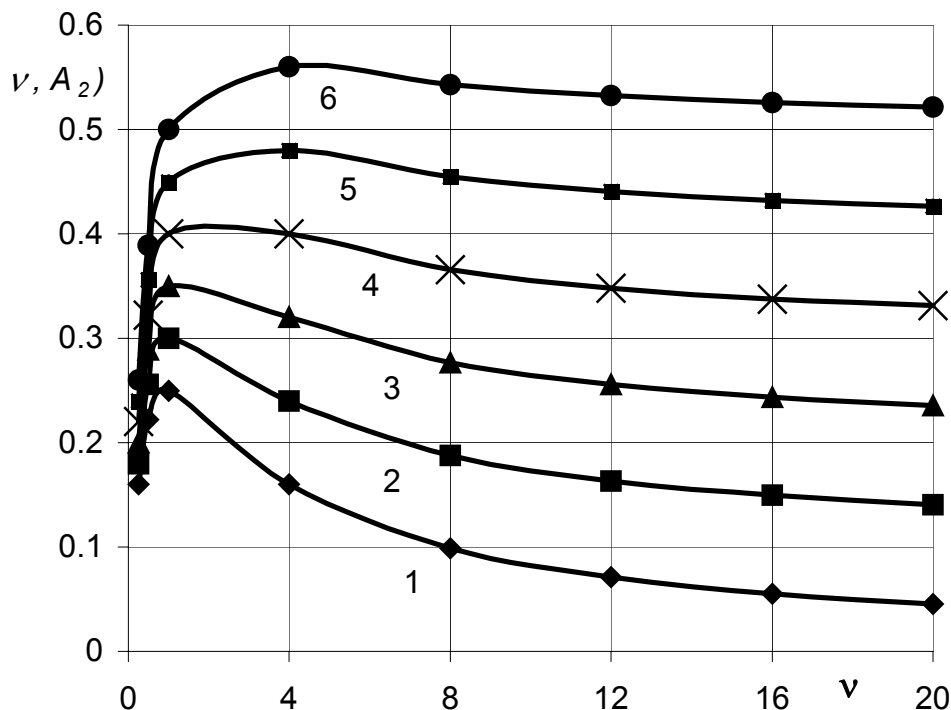


Рис. 2.7. Изменение дисперсии выборки, включающей нарушенные образцы, в зависимости от расстояния между трещинами и вариацией реального опробования: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – при $A_2=1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

Исследуем функцию $f(A_2, \nu)$ на экстремум и получим то предельное значение ν^* , после которого в породной среде наступают значительные качественные изменения:

$$\nu^* = A_2(2 - A_2)^{-1} \quad (57)$$

При $\nu < \nu^*$ среда обладает таким высоким уровнем разрушенности, что может быть приравнена к сыпучей среде с некоторыми усредненными свойствами. Дисперсия такой среды как и квазиоднородной, близка к нулю. По сути, выражение (57) определяет границы применимости рассматриваемой вероятностно-статистической модели: графики и справа и слева стремятся к нулю.

Из (54), с учетом (55), получим выражение для относительной вариации «исправленного» вариационного ряда, т.е. для вариации прочности структурно неоднородного массива. В предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю ($f(\alpha)=0$) выражение для относительной вариации прочности будет иметь вид:

$$\eta' = \frac{\sqrt{D'}}{m'_1} = \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu} A_2 - 1} = \sqrt{\frac{l_m + l_0}{l_m} (\eta^2 + 1) - 1}. \quad (58)$$

В таком виде коэффициент вариации отражает не только внутреннюю структурную неоднородность массива, характеризующую вариацией прочности при обычном опробовании, но и механическое его ослабление системами трещин. На рис. 2.8 показаны графики значения коэффициента вариации η' в зависимости от плотности трещин ν и степени внутренней неоднородности породной среды $A_2 = f(\eta)$.

Если полагать, что дефектные элементы все-таки обладают некоторой прочностью ($f(\alpha) \neq 0$) относительная вариация «исправленного» ряда будет определяться выражением:

$$\eta' = \frac{\sqrt{D'}}{m'_1} = \sqrt{\frac{K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2}{K_1^2 m_1^2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2} (\eta^2 + 1) - 1} \quad (59)$$

Исследуем теперь, как влияет наличие нарушенных элементов в выборке на вероятностное распределение прочности структурных элементов.

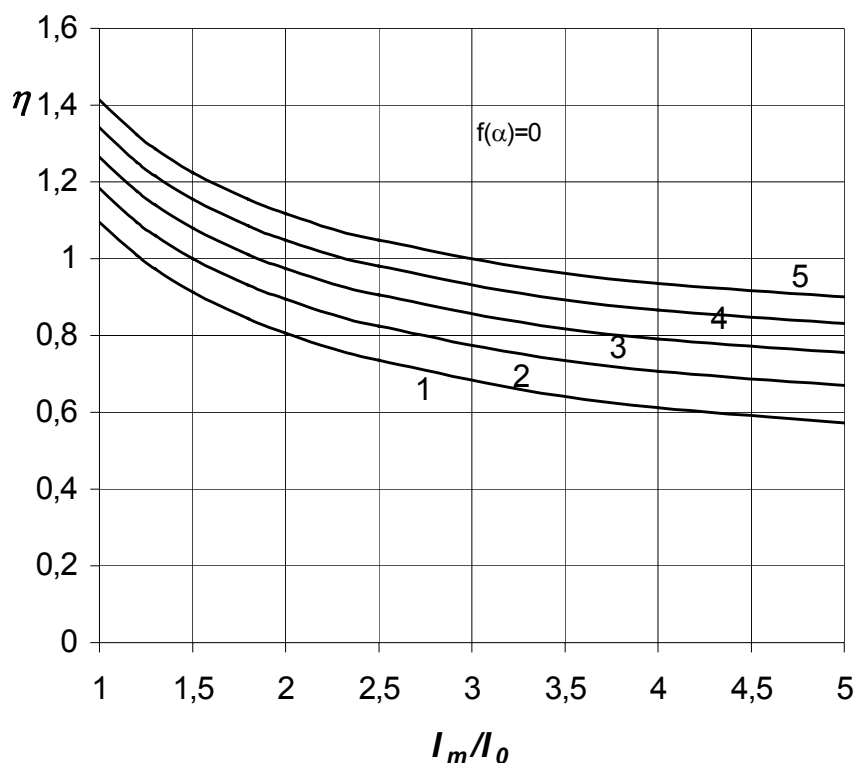


Рис. 2.8 Зависимость коэффициента вариации трещиноватого массива от расстояния между трещинами и степенью неоднородности среды в предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю: 1, 2, 3, 4, 5 – при $A_2 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

2.2.3 Влияние наличия в выборке элементов, нарушенных макродефектами, на вероятностное распределение прочности структурных элементов породного массива

Выше указывалось, что подбор распределения для эмпирических данных может быть осуществлен с помощью диаграммы Пирсона, на которой представлены теоретические распределения в зависимости от характерных для них значений асимметрии и эксцесса. Последние определяются центральными моментами третьего и четвертого порядков (формулы (41)). В свою очередь центральные моменты могут быть выражены через начальные:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= m_2 - m_1^2 \\
 \mu_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \\
 \mu_4 &= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4
 \end{aligned} \tag{60}$$

Для нормального распределения все начальные моменты нечетных порядков равны нулю. Отсюда получаются известные соотношения [84]:

$$\beta_1^2 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0; \quad (61)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3. \quad (62)$$

Определим из этих условий, как должны соотноситься между собой моменты симметричного (нормального) распределения. Из второго уравнения (60) и условия (61) получим, что

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 0,$$

или
$$\frac{m_3}{m_1^3} = 3 \frac{m_2}{m_1^2} - 2. \quad (63)$$

Для случая, когда $m_1 \neq 0$ можно использовать обозначение (52) и преобразовать (63) к виду:

$$A_3 = 3A_2 - 2. \quad (64)$$

Из третьего уравнения (60) и условия (62) получим:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4}{m_2 - m_1^2} = 3. \quad (65)$$

При $m_1 \neq 0$ вынося общий множитель m_1^4 в числителе и знаменателе дроби и используя (55) преобразуем последнее уравнение к виду:

$$\frac{A_4 - 4A_3 + 6A_2 - 3}{(A_2 - 1)^2} = 3,$$

откуда при $A_2 \neq 1$, получим:

$$A_4 = 3A_2 - 2. \quad (66)$$

Уравнения (63), (65), либо полученные из них (64) и (66) образуют систему, которой должны удовлетворять моменты распределения, для того чтобы оно было нормальным.

Например, если математическое ожидание нормального распределения равно нулю ($m_1 = 0$), то при любом значении m_2 получим, что $m_3 = 0$, а $m_4 = 3m_2^2$.

Пусть математическое ожидание отлично от нуля, например, $m_1 = 1$, и известно, что $A_2 = 2$. Тогда из (64) следует, что $A_3 = 4$, а из (63) $A_2 = 10$. Соответственно для начальных моментов получим: $m_2 = 2$; $m_3 = 4$; $m_4 = 10$.

При таких значениях моментов распределение обладает асимметрией и эксцессом, удовлетворяющими уравнениям (61), (62), т.е. является нормальным. Проанализируем, как изменится это распределение, если будет учтено, что в статистическую совокупность, для которой оно построено, добавятся элементы со значительно меньшей прочностью.

Как было показано выше, начальные моменты обычного вариационного ряда (m_k) и «исправленного» (m'_k) связаны соотношением (51).

Тогда выражения (60) для центральных моментов примут вид [109]:

$$\begin{aligned}\mu'_2 &= K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2; \\ \mu'_3 &= K_3 m_3 - 3K_1 K_2 m_2 m_1 + 2K_1^3 m_1^3; \\ \mu'_4 &= K_4 m_4 - 4K_3 K_1 m_3 m_1 + 6K_2 K_1^2 m_2 m_1^2 - 3K_1^4 m_1^4.\end{aligned}\tag{67}$$

Как видим присутствие элементов, нарушенных макродефектами, меняет все моменты распределения, в том числе и те, которые определяют собой асимметрию и эксцесс. С учетом соотношений (60) и (52) показатель асимметрии можно выразить через относительные величины:

$$\beta_1^2 = \frac{(A_3 - 3A_2 + 2)^2}{(A_2 - 1)^3}.$$

Для «исправленного» ряда, в который внесены элементы с макродефектами, получим

$$A_2' = \frac{K_2 m_2}{K_1^2 m_1^2} = \frac{K_2}{K_1^2} A_2 ; \quad A_3' = \frac{K_3 m_2}{K_1^3 m_1^2} = \frac{K_3}{K_1^3} A_3 ; \quad A_4' = \frac{K_2 m_2}{K_1^2 m_1^2} = \frac{K_4}{K_1^4} A_4 .$$

Тогда

$$\beta_1^{2'} = \frac{\left(\frac{K_3}{K_1^3} A_3 - 3 \frac{K_2}{K_1^2} A_2 + 2 \right)^2}{\left(\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1 \right)^3} .$$

Аналогично получим выражение для показателя эксцесса

$$\beta_2' = \frac{\frac{K_4}{K_1^4} A_4 - 4 \frac{K_3}{K_1^3} A_3 + 6 \frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 3}{\left(\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1 \right)^2} .$$

Если исходное распределение симметрично, то с учетом (64) и (66) получим, что показатели асимметрии и эксцесса «исправленного» зависят только от относительной величины A_2 , которая связана с вариацией значений случайной величины ($A_2 = \eta^2 + 1$).

Исследуем, как влияет наличие макродефектов на закон распределения прочности структурных элементов массива. Как и в предыдущей задаче для простоты изложения будем полагать, что прочность дефектных элементов близка нулю. В этом случае коэффициент влияния трещин определяется формулой (53).

Определим для рассмотренного выше примера моменты «исправленного ряда» по формулам (67) для различных значений расстояния между трещинами, и подсчитаем соответствующие коэффициенты асимметрии и эксцесса (табл.2.5).

Таблица 2.5

Значения «исправленных» показателей асимметрии и эксцесса для исходного распределения с параметром $A_2=2$

$\frac{l_m}{l_0}$	ν	β_1^2	β_2
1,0	0,5	1,33	4,11
1,5	0,6	0,76	3,46
2	0,66	0,5	3,19
2,5	0,71	0,36	3,05
3	0,75	0,27	2,92
10	0,9	0,09	2,97

Из таблицы видно, что с уменьшением расстояния между трещинами l_m , т.е. с ростом интенсивности трещин, значения асимметрии и эксцесса увеличиваются. Точки с координатами (β_1^2, β_2) , нанесенные на график Пирсона, с увеличением плотности трещин все более удаляются от точки, соответствующей нормальному закону (рис.2.9). Траектория движения точки для заданного значения A_2 проходит вблизи линий, соответствующих гамма-распределению и распределению Вейбулла. При других сочетаниях моментов симметричного распределения (например, при $A_2 = 3$) значения асимметрии и эксцесса таковы, что движение точки осуществляется вблизи линии логарифмически нормального распределения (табл.2.6).

Таблица 2.6

Значения «исправленных» показателей асимметрии и эксцесса для исходного распределения с параметром $A_2=3$

$\frac{l_m}{l_0}$	ν	β_1^2	β_2
1,0	0,5	1,15	4,83
1,5	0,6	0,65	4,05
2	0,66	0,42	3,69
2,5	0,71	0,30	3,50
3	0,75	0,22	3,38
10	0,9	0,03	3,05

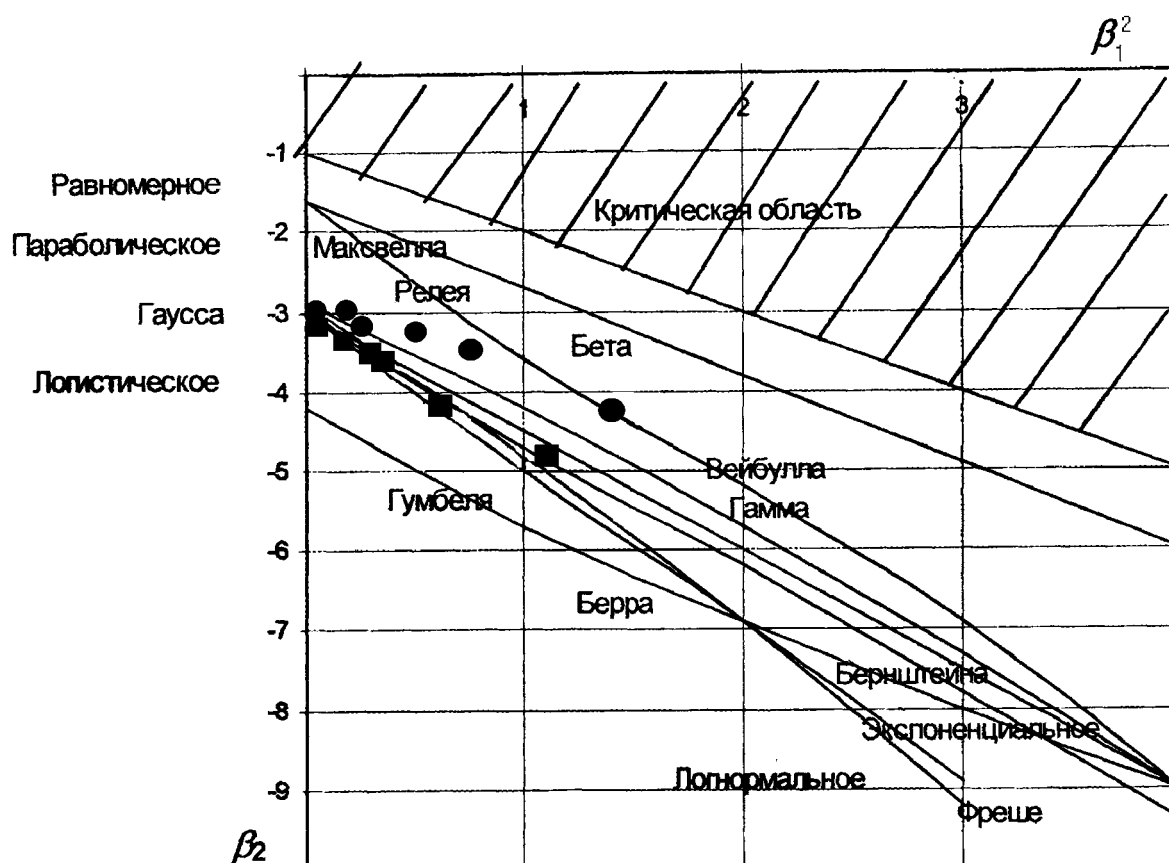


Рис.2.9. Диаграмма Пирсона с точками для статистических распределений, в которые условно внесены элементы с макродефектами:

●- точки, соответствующие исходному ряду с соотношением начальных моментов $A_2=2$;

□- точки, соответствующие исходному ряду с соотношением начальных моментов : $A_2=3$.

Искусственное внесение элементов с нулевой прочностью в статистический ряд меняет значения асимметрии и эксцесса, а следовательно и вид распределения. Из рис. 2.9 видно, что с уменьшением расстояния между трещинами отклонение от симметричного распределения становится все более значительным. Формально, для приведенного примера при $\frac{l_m}{l_0} < 1$ распределение становится близким к экспоненциальному закону. Однако это противоречит физической сути задачи, свидетельствуя о глубоких

качественных изменениях в среде, где элементы с нулевой прочностью становятся преобладающими, а сама среда по своим свойствам приближается к однородной сыпучей. Очевидно, что если полагать прочность дефектных элементов равной нулю, случай $\frac{l_m}{l_0} < 1$ следует исключить из рассмотрения.

Таким образом, наличие трещин в реальном породном массиве не только оказывает влияние на статистические оценки исследуемого количественного признака, но и меняет закон распределения вероятностей всех его механических параметров. Вид «исправленного» распределения зависит от соотношений начальных моментов исходного статистического распределения, полученного как результат опробования ненарушенных структурных элементов. Степень отклонения прочности элементов от симметричного распределения определяется расстоянием между трещинами. Исследуем теперь, как повлияет на это отклонение угол наклона трещин к оси нагружения.

2.3. Исследование влияния параметров трещиноватости на вид распределения прочности структурных элементов

2.3.1. Исследование влияния угла наклона трещин

Приведенные выше результаты получены в предположении, что прочность дефектных образцов породы (структурных элементов массива) близка нулю. Между тем и имеющиеся в литературе данные и результаты экспериментов, описанных в п. 2.2, говорят о том, что образец, нарушенный трещинами, частично сохраняет свою несущую способность, что можно охарактеризовать функцией снижения прочности $f(\alpha) = \frac{q}{R_c}(\alpha)$, равной отношению разрушающей нагрузки к пределу прочности на сжатие монолитного образца, не нарушенного макротрещинами. Эта функция может быть получена на основе обработки результатов наблюдений.

Однако, экспериментальные данные в силу погрешностей измерительных приборов, несовершенства технологии изготовления образцов и условий заземления на их торцах, а также в силу других причин, являются величинами случайными, и для получения их оценок с высокой достоверностью требуется большое количество опытов, проведение которых в лабораторных условиях достаточно трудоемко. Указанных недостатков физического моделирования лишено математическое моделирование. Последнее, хотя и предполагает известную идеализацию объекта, позволяет исключить влияние случайных малозначимых факторов и получить количественные оценки изучаемого процесса, обусловленные действием тех фундаментальных законов, которые положены в основу математической модели. Поэтому влияние ориентации плоскостей ослабления на процесс разрушения структурного элемента массива исследовался путем математического моделирования.

Структурный элемент массива можно представить как квадратный блок, весом которого можно пренебречь, покоящийся на поверхности полуплоскости. Блок пересекает трещина, расположенная под углом α к горизонтальной оси. Задача моделируется путем погружения системы в неограниченную упругую плоскость. Решение выполнялось методом граничных элементов [110]. Оконтуривание блока и части полуплоскости, имитирующей основание, на котором находится блок, т.е. выделение их из бесконечной среды осуществлялось граничными элементами в рамках метода разрывных смещений.

Решение выполнялось при следующих граничных условиях: на боковых гранях блока равны нулю нормальные напряжения, на верхней грани блока задана равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , такая же нагрузка с противоположным знаком задана на нижней грани. Кроме того, на нижней и верхней гранях равны нулю горизонтальные перемещения (рис. 2.10).

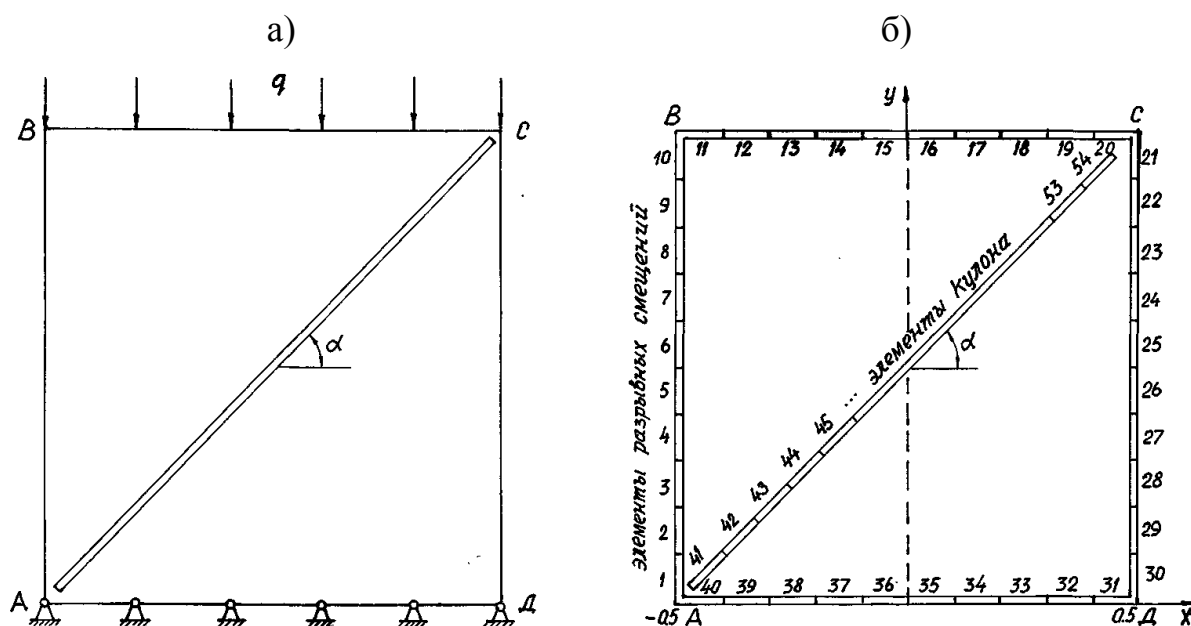


Рис.2.10 Расчетная схема задачи:
а) физическая модель; б) гранично-элементная модель

Состояние блока как структурного элемента массива оценивается величиной условных зон разрушения, под которыми понимается совокупность точек, в которых не выполняются предельные соотношения между компонентами тензора напряжений в соответствии с принятым критерием прочности. Условие разрушения для горных пород, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, достаточно хорошо описывается критерием прочности, предложенным Л.Я. Парчевским и А.Н. Шашенко [111]:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - R_c^2 \psi - (1 - \psi) R_c (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (68)$$

где $\psi = R_p / R_c$; R_p, R_c - пределы прочности пород соответственно на растяжение и сжатие.

Появление отдельных точек, в которых выполняется равенство (68) еще не свидетельствует о разрушении блока как структурного элемента массива. Если же такими точками охвачена область, сопоставимая с размерами самого блока, можно утверждать, что материал его претерпевает необратимые деформации и структурный элемент теряет способность сопротивляться нагрузке.

При моделировании процесса разрушения вертикальная нагрузка задавалась в долях от предполагаемого предела прочности материала блока на одноосное сжатие. На каждом этапе нагружения выполнялась оценка напряженно-деформированного состояния блока в соответствии с выбранной теорией прочности, и определялся уровень разрушающей нагрузки, вызывающей переход материала блока в стадию неупругого деформирования. Предполагалось, что характер распространения условных зон разрушения связан с поведением ослабляющего элемента - трещины. В вычислительной процедуре трещина может моделироваться и как «зияющая», нарушающая сплошность, с помощью элементов разрывных смещений, и как заполненная достаточно связным материалом, способным к упругим деформациям. Тогда заполненная трещина может моделироваться как упругий контакт специальными контактными (пластовыми) элементами.

В реальных условиях трещины, как правило, заполнены глинистым материалом, обладающим гораздо меньшим сцеплением, чем горная порода. Под действием внешних сил по поверхностям ослабления может происходить скольжение частей массива относительно друг друга или разрыв сплошности. Математическая модель деформирования структурного элемента, содержащего трещину, должна отражать возможность неупругого деформирования материала – заполнителя трещины, то есть содержать ограничивающее соотношение между нормальными и касательными напряжениями, передающимися через контакт. В качестве такого соотношения удобнее всего использовать условие Кулона – Мора:

$$\tau = c + \sigma_n \operatorname{tg} \rho .$$

Здесь τ - напряжение сдвига, σ_n - нормальное напряжение, ρ и c - соответственно угол внутреннего трения и сцепления материала- заполнителя трещин. В [110] подробно описана вычислительная процедура, учитывающая скольжение вдоль трещины и раскрытие контакта.

В данной задаче каждая грань блока представлена 10-ю граничными элементами разрывных смещений. Трещина с углом наклона α к горизонтальной оси моделировалась 14-ю контактными элементами, допускающими неупругие деформации. Грани блока полагались единичной длины, вертикальная нагрузка q задавалась в долях от предела прочности на сжатие R_c . Модуль упругости E составлял 10^5 единиц напряжений, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$, нормальная и касательная жесткости упругого контакта выбирались из расчета, что ширина трещины составляет 10^{-6} единиц длины. Характеристики материала трещины принимались равными $c=0$, $\rho=30^0$.

Вычислительный эксперимент начинался с моделирования монолитного образца (блока), не ослабленного трещиной, с целью подтверждения правильности постановки задачи и разработанного алгоритма. Характер расположения точек, напряжения в которых не удовлетворяют условию прочности, совпадает с представлениями о разрушении твердого тела в соответствии с теорией Кулона – Мора. Из рис. 2.10. видно, что совокупности этих точек образуют линии, ориентированные к направлению приложения нагрузки под углом, близким к $\pm 40^0$. В [108] показана связь между параметрами криволинейной огибающей предельных кругов Мора и прямолинейной. Это позволяет определить угол внутреннего трения в зависимости от коэффициента хрупкости пород ψ , и величины вертикальной составляющей горного давления γH :

$$\rho^* = \frac{1 - \psi}{2 \sqrt{\psi + 2(1 - \psi) \frac{\gamma H}{R_c}}}.$$

При $\psi = 0.1$ и $q = R_c$ величина параметра огибающей кругов Мора ρ^* будет равна 18^0 . Тогда площадки скольжения составят с направлением наибольшего главного напряжения углы:

$$\varphi = \pm \left(45^0 - \frac{\rho^*}{2} \right) = 36^0,$$

что совпадает с полученной картиной напряженного состояния блока.

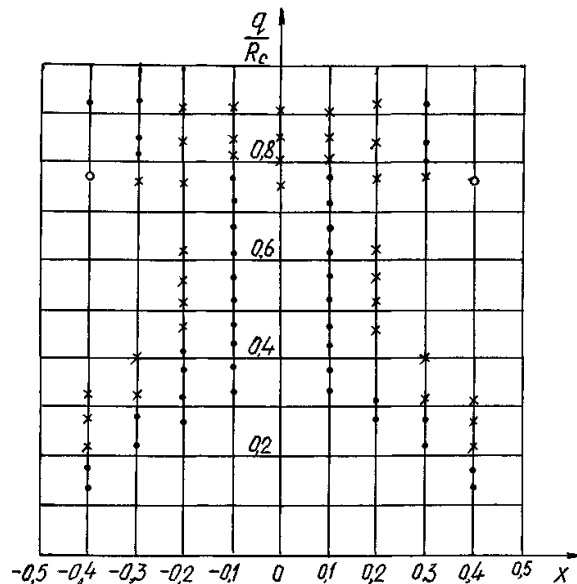


Рис. 2.11. Характер расположения точек разрушения при $q = R_c$ в отсутствие трещины.

Дальнейшие расчеты связаны с моделированием трещин под различными углами α к горизонтальной оси. При $\alpha=30^\circ$ точки разрушения появляются уже при нагрузке, составляющей $0,3 R_c$, распространяясь от краевых частей блока к его центру. Приращение нагрузки на величину $0,05 R_c$, то есть увеличение ее до значения $q=0,35 R_c$ вызывает рост области неупругих деформаций до размеров, сопоставимых с размерами блока. Эту стадию будем характеризовать, как неспособность структурного элемента далее воспринимать нагрузку.

Характер расположения точек разрушения показан на рис. 2.12 для вариантов расчета, выполненного при α , равном 45° и 90° .

Трещина, расположенная под углом $\alpha=45^\circ$, ослабляет структурный элемент в столь же значительной мере. Первые неупругие деформации появляются при $q=0,35 R_c$, при $q=0,4 R_c$ структурный элемент в большей своей части охвачен зоной разрушения. Трещины, расположенные под углами, близкими к 0° и 90° оказывают на прочность элемента гораздо меньшее влияние. Нормальносекущая трещина, т. е. расположенная под углом $\alpha=90^\circ$, снижает значение разрушающей нагрузки до величины $q=0,85 R_c$.

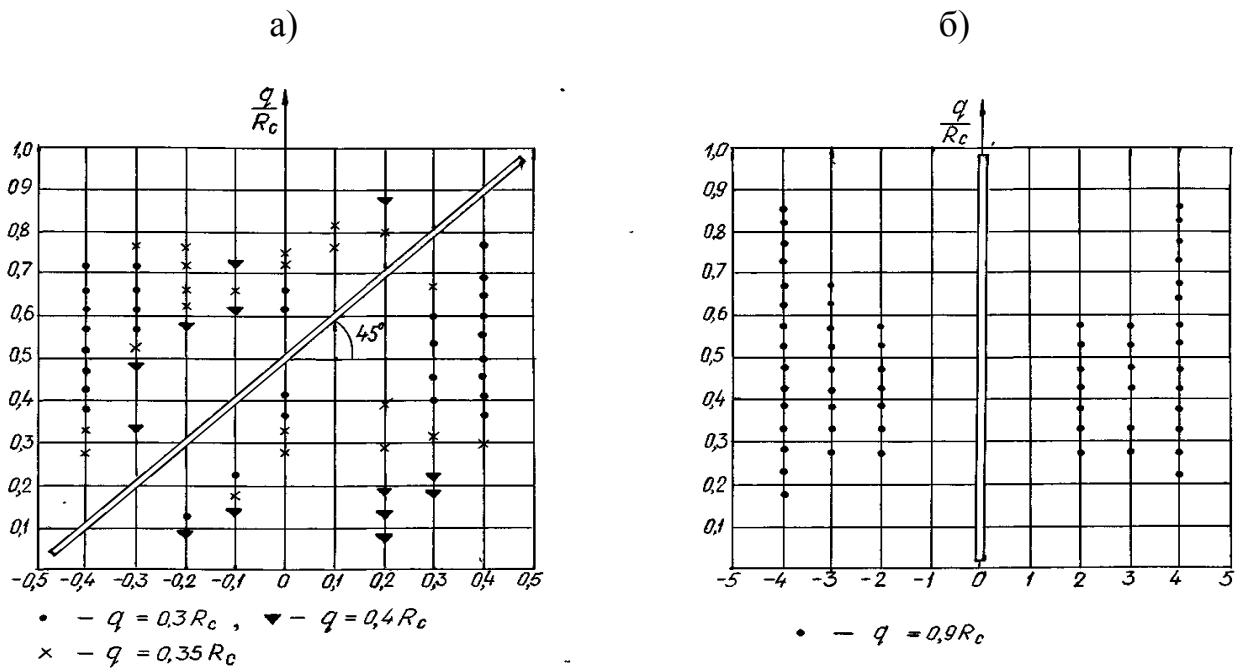


Рис. 2.12 Характер расположения точек разрушения в образце:
а) $\alpha = 45^\circ$; б) $\alpha = 90^\circ$

Кривую на рис.2.13, характеризующую снижение прочности структурного элемента в зависимости от угла наклона плоскости ослабления, можно аппроксимировать параболической зависимостью вида :

$$\frac{q}{R_c}(\alpha) = -3 \cdot 10^{-6} \alpha^3 + 7 \cdot 10^{-4} \alpha^2 - 0,0386 \alpha + 0,9359 \quad (69)$$

Функция (69) имеет явно выраженный минимум при $\alpha = 35^\circ$.

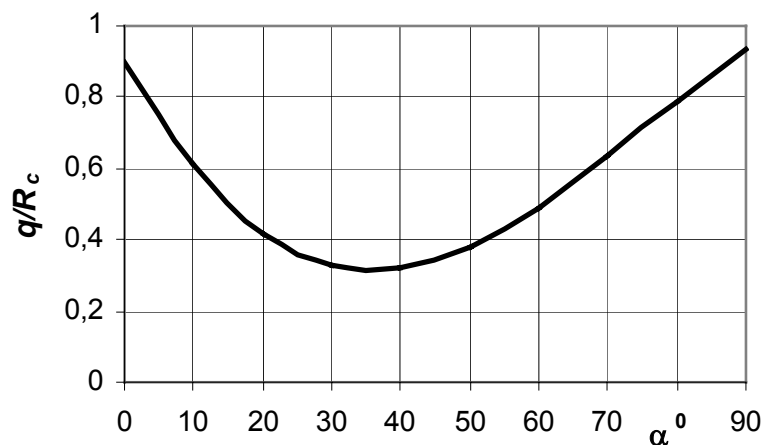


Рис.2.13. Зависимость разрушающей нагрузки от угла наклона трещины.

Функция снижения прочности $\frac{q}{R_c}(\alpha)$ характеризует собой

закономерные изменения прочности структурных элементов в зависимости от ориентации трещин. Используем полученную зависимость для моделирования статистической совокупности, содержащей дефектные элементы, нарушенные трещинами. Относительная вариация прочности в данном случае определяется по формуле (59) с учетом зависимости (69).

На рис. 2.14 приведена зависимость относительной вариации от расстояния между трещинами при $f(\alpha)=0,3$.

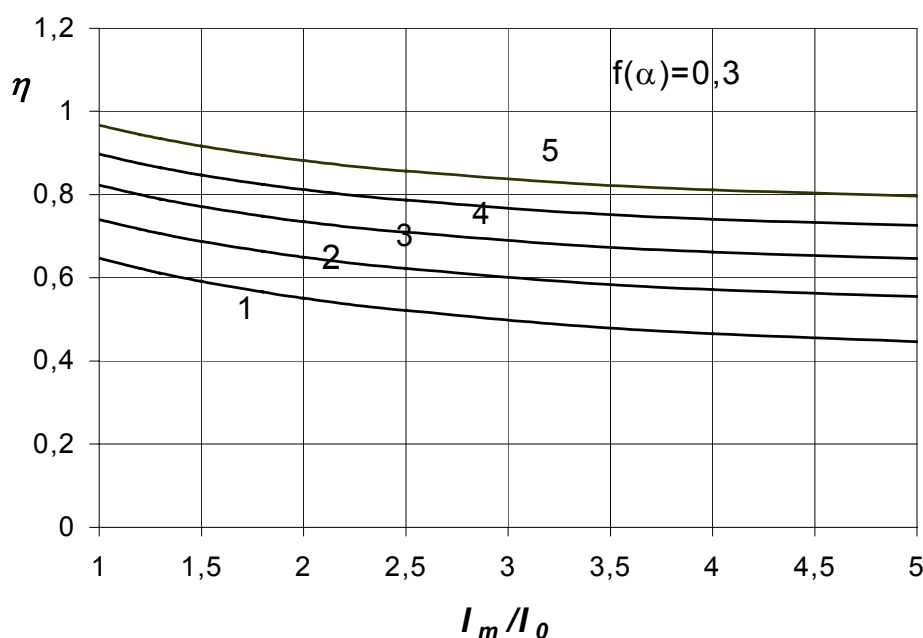


Рис. 2.14. Зависимость коэффициента вариации трещиноватого массива от расстояния между трещинами и степенью неоднородности среды, в предположении, что дефектные элементы частично сохраняют несущую способность: 1, 2, 3, 4, 5 – при $A_2 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

Видно, что при сохранении нарушенными элементами частичной несущей способности вариация прочности не так велика, как в случае полного разрушения дефектных элементов.

Определим центральные моменты (67) и связанные с ними показатели асимметрии и эксцесса учитывая, что элементы, нарушенные трещиной

сохраняют некоторую несущую способность. В этом случае коэффициенты влияния трещин определяются формулой (52), где $f(\alpha) = \frac{q}{R_c}(\alpha)$ и определяется формулой (69).

В качестве примера рассмотрим ранее исследованный исходный ряд с соотношением моментов: $A_2 = 3$. Предположение о том, что дефектные элементы частично сохраняют несущую способность влияет на величины асимметрии и эксцесса. В наибольшей степени структурный элемент ослабляет кососекущая трещина, составляющая с горизонтальной гранью элемента углы $30-45^\circ$ ($f(\alpha) = 0,3$). Для такого значения функции снижения прочности асимметрия и эксцесс распределения также значительно отклоняются от характеристик нормального закона, как и при расчете моментов в предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю (рис.2.15).

Особенно существенно это отклонение при значениях $\frac{l_m}{l_0} \approx 1$. С увеличением $f(\alpha)$, т.е. при положении трещин, близком к нормальносекущему, отклонение от симметричного распределения уменьшается.

Все рассуждения, приведенные выше, выполнены в предположении, что для генеральной совокупности известно расстояние между прирожденными трещинами. Между тем имеющиеся в литературе сведения о значениях этой величины свидетельствуют о ее значительной изменчивости. Расстояние между трещинами следует рассматривать как случайную величину и при оценке прочности массива учитывать не только ее математическое ожидание, но и возможный разброс значений относительно среднего.

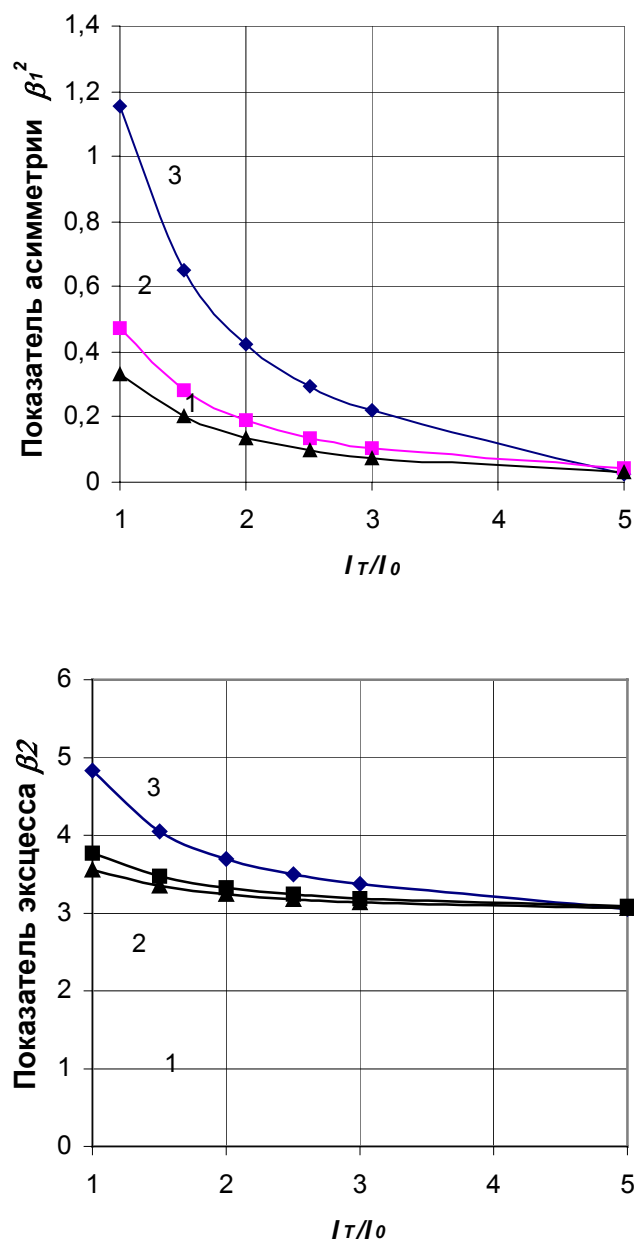


Рис.2.15 Зависимость показателей асимметрии и эксцесса от расстояния между трещинами при частичном сохранении образцами несущей способности: 1, 2, 3 - $f(\alpha) = 0; 0,3; 0,4$ соответственно.

2.3.2. Исследование влияния изменчивости расстояния между трещинами на вид распределения прочности структурных элементов

В математическом отношении трещина представляет собой поверхность раздела, по которой претерпевает разрыв вектор смещений. След этой поверхности на плоскости – прямая L , с общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B - координаты нормального вектора прямой.

Разделив обе его части на нормирующий множитель $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим нормальное уравнение прямой

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - l = 0,$$

где $\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - направляющие косинусы прямой, l - расстояние от прямой до начала координат. Если через начало координат провести прямую, параллельную прямой L , то l будет равно расстоянию между прямыми. Таким образом уравнение

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - nl = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где l - расстояние между трещинами, определяет систему трещин на плоскости (рис.2.16).

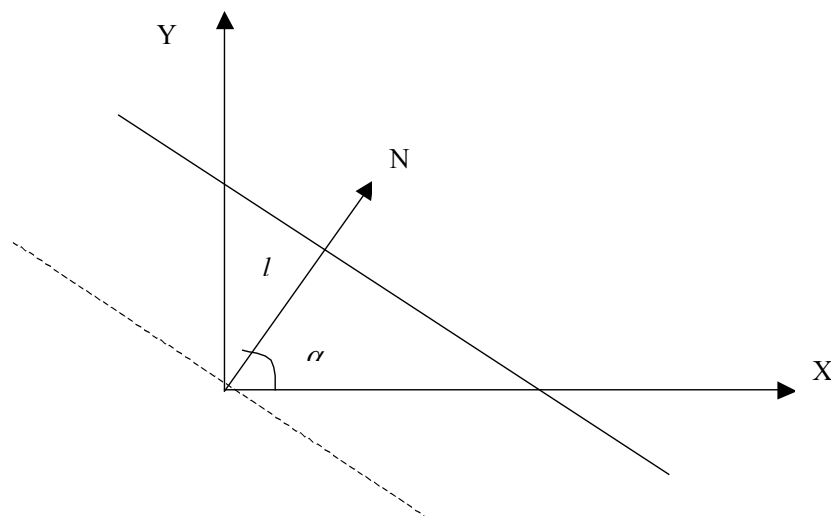


Рис. 2.16. К определению расстояния между трещинами на плоскости.

М.В. Гзовский [112] предлагал при изучении тектонических разрывов использовать современные знания о физических условиях их возникновения. В частности, закономерности возникновения элементарных поверхностей механического разрушения нужно рассматривать с учетом того, что процесс разрушения развивается длительно и непрерывно совместно с упругим и пластическим деформированием, параллельно с процессом заживления разрывов. Важным следствием образования тектонического разрыва является

изменение первичного напряженного состояния вблизи него. Отсюда следует, что место положения каждой трещины определенного порядка зависит от положения смежных с ней трещин.

Особого внимания в этой связи заслуживает подход, основанный на применении законов фрактальной геометрии. Он предполагает оценку исследуемого объекта на основе рассмотрения его как совокупности самоподобных множеств, организация которых зависит как от детерминированных, так и от случайных факторов.

Таким образом, расстояние между трещинами является основным параметром трещиноватости. Эта величина формировалась под воздействием большого числа случайных событий и сама является случайной. Но как результат проявления массовых случайных событий подчиняется определенному закону распределения вероятностей.

Большой объем статистической информации о величине расстояний между трещинами был собран С.А. Батугиным [113]. Для построения эмпирических распределений результаты измерений отбирались с однородных по трещиноватости участков на горнодобывающих предприятиях Кузбасса. Из рис. 2.17 видно, что распределение величины имеет асимметричный характер. Автор отмечает, что по критерию Пирсона при 5% уровне значимости не отвергаются несколько статистических гипотез (что характерно для выборок небольшого объема). Однако, исходя из физической природы данной случайной величины, следует в качестве вероятностной модели распределения расстояния между трещинами принять закон Релея.

Действительно, закон Релея выведен как статистическая модель расстояния между двумя точками плоскости. Если X и Y - нормальные независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и равными среднеквадратическими отклонениями σ , то величина

$$l = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

распределена по закону Релея с плотностью [84]:

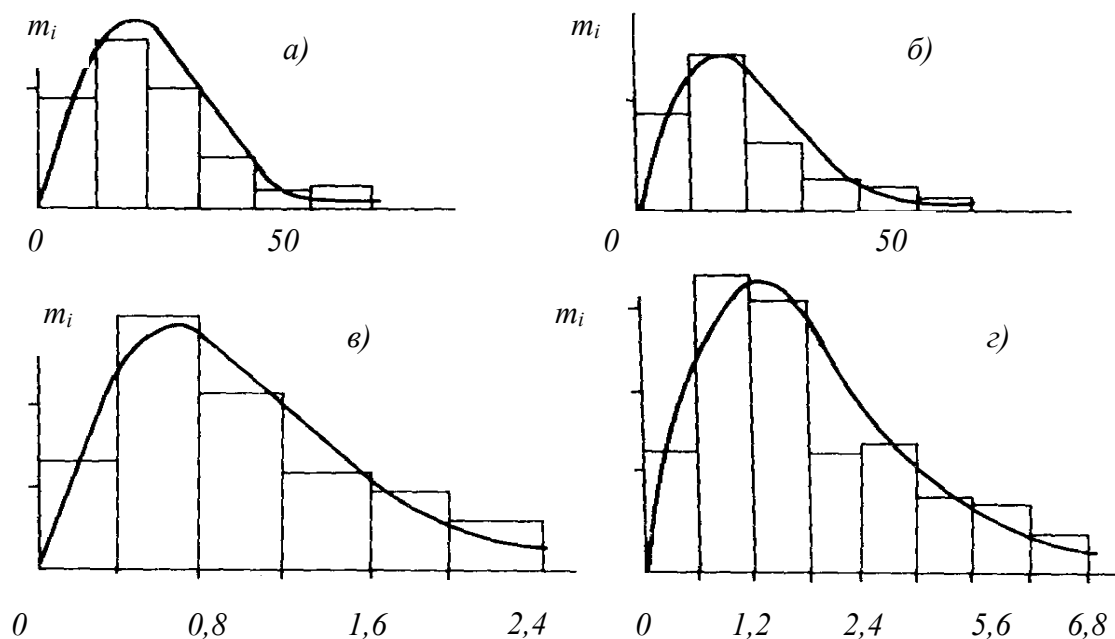


Рис.2.17. Распределение расстояний между трещинами в породах Таштогольского железорудного месторождения [113]

$$f(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0, \sigma > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (70)$$

Это распределение содержит только параметр масштаба σ , с которым математическое ожидание m связано очень простой зависимостью

$$\sigma = 0,52m. \quad (71)$$

По данным С.А. Батугина для обследованных им типов пород (песчаников, сланцев) характерна относительная вариация расстояний между трещинами, составляющая 50-55%. Указывается, что соотношение (71) удовлетворительно соблюдается для всех обследованных систем трещин.

Следуя выбранной статистической модели, определим вероятность того, что расстояние между трещинами некоторой системы будет не менее некоторого критического значения l^* :

$$p(l \geq l^*) = 1 - \int_0^{l^*} \frac{x}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \exp\left(-\frac{l^{*2}}{2\sigma^2}\right).$$

Разрешив это уравнение относительно l^* , получим:

$$l^{*2} = -2\sigma^2 \ln p .$$

С учетом (71) значение l^* будет равно

$$l^* = \sigma \sqrt{-2 \ln p} = 0,52m \sqrt{-2 \ln p} . \quad (72)$$

Например, с вероятностью $p = 0,65$ все значения l будут не меньше величины

$$l^* = m - \sigma = m - 0,52m = 0,48m .$$

С учетом полученных соотношений при определении коэффициента влияния трещин в формуле (52) следует учесть, что

$$\frac{l_m}{l_0} = \frac{m}{l_0} 0,52 \sqrt{-2 \ln p} . \quad (73)$$

В табл.2.7 приведены значения β_1^2, β_2 , полученные для различных значений $\frac{m}{l_0}$ в предположении, что расстояния между трещинами не меньше значения $l^* = m - \sigma$. Расчеты выполнены при $f(\alpha) = 0,3$ и $A_2 = 2$.

Таблица 2.7.

Значения показателей асимметрии и эксцесса «исправленного» вариационного ряда с учетом случайного распределения расстояний между трещинами

$\frac{m}{l_0}$	ν	β_1^2	β_2
1,0	0,5	1,60	5,91
1,5	0,6	1,07	4,88
2,0	0,66	0,77	4,33
2,5	0,71	0,58	4,01
3,0	0,75	0,48	3,78
10	0,9	0,13	3,12

При среднем расстоянии между трещинами, меньшем размеров образца, точки на плоскости β_1^2, β_2 близки к гамма-распределению. Но по мере

приближения соотношения $\frac{m}{l_0}$ к единице распределение стремится к логарифмически нормальному, что в наибольшей степени отвечает физической сути исследуемой случайной величины – прочности структурных элементов на сжатие.

Таким образом, вид распределения случайной величины – предела прочности структурных элементов породного массива зависит от среднего расстояния между прирожденными трещинами преобладающей системы, разброса значений этих расстояний и угла наклона трещин к оси нагружения. Количественно это отражается на показателях асимметрии и эксцесса статистического распределения, служащими ориентиром для выбора статистической модели исследуемого количественного признака. При этом следует отметить, что в общем случае форма распределения не определяется однозначно показателями асимметрии и эксцесса. Поэтому гипотезы о законе распределения случайных величин, в частности механических характеристик горных пород, следует выдвигать, не только анализируя их моменты распределения и вид эмпирических гистограмм частот, но и исходя из физической сути этих величин. В Приложении Б приведена сводка непрерывных распределений, наиболее часто используемых для описания различных случайных величин, в том числе и механических характеристик материалов.

Вернемся к вопросу о том, как вид функции вероятностного распределения прочности структурных элементов определяет в соответствии с равенством (24) значение прочности породного массива в целом.

Глава 3

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЧНОСТИ ПОРОДНОГО МАССИВА С УЧЕТОМ МАКРОДЕФЕКТОВ

3.1. Обоснование закона распределения прочности породного массива с учетом влияния макродефектов

В разделе 2.1 на основе решения неравенства (24) получено выражение для коэффициента структурного ослабления (22) в предположении, что прочность структурных элементов распределена по нормальному закону и $F(R)$ - интегральная функция нормального распределения.

В соответствии с (29) основной величиной, служащей для количественной оценки структурного ослабления, является относительная вариация прочности структурных элементов. В разделе 2 показано, что реальная вариация прочности структурных элементов, характерная для всей генеральной совокупности, намного значительнее той, что получается в результате обработки выборки. Причина такого несоответствия – наличие в генеральной совокупности дефектных элементов, прочность которых меньше прочности ненарушенных элементов. В соответствии с полученными формулами (59) и (56), вариация прочности определяется расстоянием между трещинами l_m и углом наклона трещины α к горизонтальной оси. С учетом того, что расстояние между трещинами также является величиной случайной и характеризуется определенным разбросом относительно своего математического ожидания m , объединяя формулы (59), (52) и (73) получим систему уравнений для определения вариации прочности породного массива:

$$\eta' = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2}(\eta^2 + 1) - 1},$$

$$K_1 = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1},$$

$$K_2 = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^2(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}, \quad (74)$$

$$\frac{l_m}{l_0} = \frac{m}{l_0} 0,52 \sqrt{-2 \ln p}.$$

На рис. 3.1 показано изменение относительной вариации прочности в зависимости от определяющих ее факторов. Из графиков видно, что если по данным лабораторных испытаний получена относительная вариация прочности образцов в пределах 25-30 %, то реальная вариация для генеральной совокупности – породного массива в пределах изучаемой литологической разности – с учетом естественной трещиноватости составляет 50-80 %. При такой значительной вариации гипотеза о нормальном распределении прочности структурных элементов совершенно неприемлема. Об этом же говорят значения асимметрии и эксцесса, также определяемых с учетом макродефектов по формулам (40) с учетом (60). Таким образом, в качестве вероятностной модели исследуемого признака следует принять соответствующее этим значениям несимметричное распределение, более адекватное реальной статистической совокупности.

Г.Т. Рубцом [50-53] изучено 129 эмпирических распределений прочностных характеристик осадочных, метаморфических и магматических горных пород по статистическим данным, полученным в лаборатории отдела механики горных пород ИГТМ АН Украины, в геологических трестах и экспедициях министерств геологии и угольной промышленности Украины. Анализ распределений позволил осуществить их приближенную классификацию (табл. 3.1) по значениям показателей асимметрии и эксцесса, определяемых по выборке в соответствии с (41).

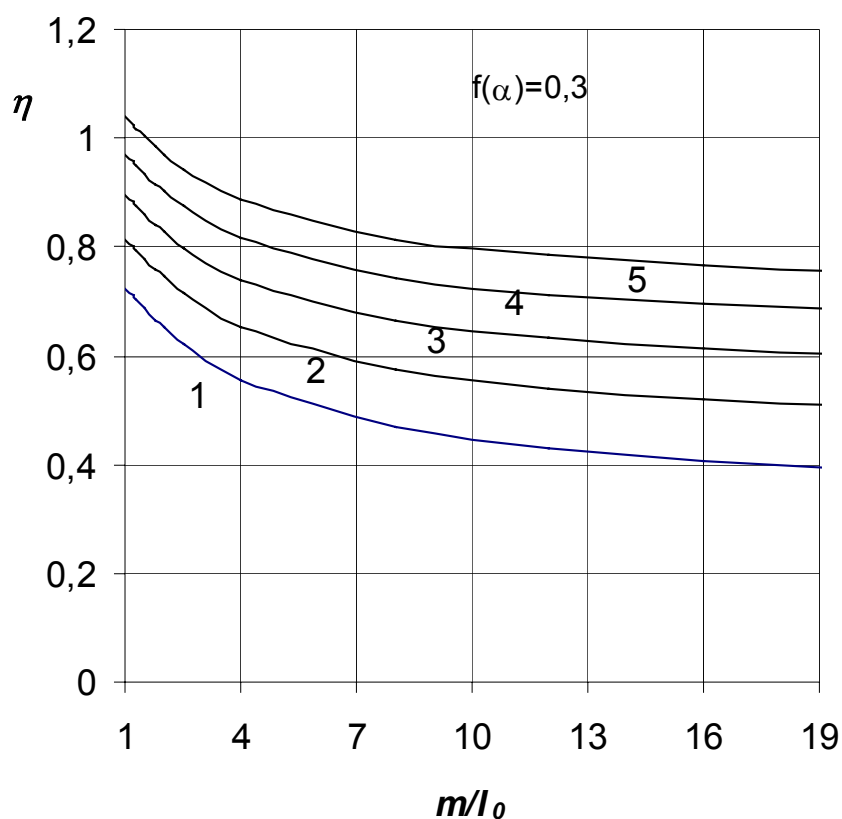


Рис.3.1. Зависимость относительной вариации прочности породного массива от расстояния между трещинами (для случая кососекущих трещин с $\alpha = 45^\circ$): 1, 2, 3, 4, 5– при $A_2 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

Таблица 3.1

Классификация распределений прочностных характеристик

Коэффициент эксцесса	Асимметрия				
	Левоасимметричные		Симметричные	Правоасимметричные	
	Сильно (-1,25... -0,75)	Умеренно (-0,75... -0,25)	(-0,25...0,25)	Умеренно (0,25...0,75)	Сильно (0,75...1,25)
Плоско-вершинные (1,5...2,5)	---	---	Равномерное Параболическое	---	---
Умеренно-вершинные (2,5...3,5)	---	Вейбулла Релея Максвелла Гамма Гальтона	Вейбулла Нормальное	Вейбулла Релея Максвелла Гамма Гальтона	---
Остро-вершинные (3,5...6,5)	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна Фреше Гумбеля	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна	Логистическое	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна Фреше Гумбеля

Обширные испытания по определению пределов прочности на растяжение образцов горных пород полуправильной формы стальными соосными клиньями для осадочных магнетических и метаморфических пород показали, что наиболее приемлемой статистической моделью для изменчивости прочности является логарифмически нормальное распределение [114]. Полученные в работе [115] данные прочностных испытаний пород Хибинских месторождений по своим статистическим характеристикам не противоречат модели логнормального распределения. В работе [116] приведены данные испытаний прочности 1248 образцов каменной соли. Проверкой было установлено, что среди трех предполагаемых законов (нормальный, Пирсона III типа, логарифмически нормальный) для описания изменчивости прочности каменной соли наиболее подходящей моделью является логарифмически нормальный закон, как более оправданный физически. Кроме того, проверка по критерию Пирсона показала, что теоретическое логнормальное распределение не противоречит эмпирическим данным с высоким уровнем надежности.

Проведенные в работе [117] исследования изменчивости физико-механических свойств горных пород более 45-ти полиметаллических месторождений Казахстана показали, что основные прочностные характеристики (предел прочности на сжатие, растяжение, коэффициент крепости, контактная прочность и сцепление) распределены в основном по закону с положительной асимметрией, что свидетельствует о существенном влиянии на механизм разрушения неоднородностей вещественного состава пород, их структурных особенностей и закономерностей распределения веществ в пространстве. Наиболее подходящими статистическими моделями для оценки распределения этих характеристик автор предлагает логарифмически нормальный закон, закон Вейбулла и гамма-распределение.

Логнормальное распределение вероятностей является довольно широко распространенной статистической моделью описания явлений и процессов в науках о земле [87]. Этому распределению следуют содержание элементов и минералов в изверженных горных породах [118, 119], размеры частиц

осадочных пород [120], размеры частиц при дроблении твердых тел сосредоточенной силой [121, 122], величины предельных разрушающих напряжений для некоторых типов пород [116] и другие горнотехнические характеристики.

Исследование законов распределения физических свойств горных пород, выполненные в работе [123], привели автора к выводу об универсальности логарифмически нормального закона, как основного статистического закона свойств горных пород.

Автора работы [87] распространенность логнормальной функции распределения в исследованиях многих ученых приводит к мысли о том, что оно является следствием некоторых фундаментальных статистико-термодинамических законов, управляющих распределением веществ. Доказательство этого утверждения приводится на основе рассмотрения флуктуационной модели Больцмана.

Остановимся на свойствах логнормального распределения, свидетельствующих о его предпочтительности перед другими распределениями. Семейство кривых Джонсона, частным случаем которых является логарифмически нормальное распределение, получено путем преобразования нормированной нормально распределенной величин. Преимущество такого преобразования заключается в том, что оценки процентилей эмпирических распределений можно получать, используя таблицы площадей под кривой нормального распределения, имеющиеся в любой справочной литературе.

Свойства логарифмически нормального распределения определяются во многом свойствами соответствующего нормального распределения. Кроме того, это распределение имеет важнейшую особенность: распределение произведения n независимых положительных случайных величин с логарифмически нормальными распределениями снова подчиняется этому распределению [124]. Для него имеет место аналог центральной предельной теоремы: распределение произведения независимых положительных случайных

величин при некоторых общих условиях стремится в пределе при неограниченном возрастании числа сомножителей к логарифмически нормальному закону.

Наличие этих свойств предполагает то, что логарифмически нормальное распределение применяется в самых различных областях – от экономики [125] до биологии [126] для описания процессов, в которых наблюдаемое значение составляет случайную долю предыдущего значения.

Применимость логарифмически нормального распределения для описания прочностных свойств материалов может быть физически обоснована с позиции т.н. модели Кэптейна [127]: пропорционального эффекта накопления повреждений в процессе нагружения испытываемых образцов. Пусть значения $l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n$ представляют собой последовательность размеров трещины, образующейся при нагружении образца, на различных этапах ее роста.

Когда трещина достигает критического значения l_n , образец разрушается. Будем считать, что увеличение размера трещины на каждом шаге $l_i - l_{i-1}$ пропорционально размеру l_{i-1} предыдущей трещины, т.е.

$$l_i - l_{i-1} = \delta_i l_{i-1}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n,$$

где l_0 - первоначальная величина трещины в образце (нарушения структуры, пустоты, породные включения и т.п.); $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ - независимые положительные случайные величины.

Из предыдущей формулы имеем:

$$l_i = (1 + \delta_i)(1 + \delta_{i-1}) \dots (1 + \delta_1) l_0.$$

Распределение окончательных размеров трещин l_n представляется в виде произведения независимых положительных случайных величин; если положить в предыдущем равенстве $i=n$, то получим, что

$$l_n = (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1}) \dots (1 + \delta_1) l_0. \quad (75)$$

Прологарифмировав это выражение, будем иметь

$$\ln(l_n) = \ln(1 + \delta_n) + \ln(1 + \delta_{n-1}) \dots + \ln(1 + \delta_1) + \ln(l_0). \quad (76)$$

При больших n , согласно центральной предельной теореме величина $\ln(l_n)$ имеет нормальное распределение, тогда конечные размеры трещин l_n распределены логарифмически нормально с плотностью:

$$f(l) = \frac{1}{\sigma_l l \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_l^2} (\ln l - \mu_l)^2\right), \quad l \geq 0. \quad (77)$$

Положим, что разрушающее напряжение x связано в первом приближении линейной зависимостью с размером трещины, предшествующей разрушению:

$$x = \alpha l + \varepsilon,$$

где α, ε - постоянные.

Выразим l через x и подставим в выражение для плотности распределения. Получим:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x (x - \varepsilon) \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} (\ln(x - \varepsilon) - \mu_x)^2\right), \quad x \geq 0, \quad (78)$$

где $\mu_x = \ln \alpha + \mu_l$ и $\sigma_x = \sigma_l$.

Выражение (78) есть плотность распределения логарифмически нормального закона с тремя параметрами μ_x , σ_x и ε . Аналогичный результат будет справедлив, если в качестве параметров $\{l_i\}$ рассматривать накопленную поврежденность, развивающуюся в процессе нагружения материала от начального ее состояния l_0 до финального l_n . Это может быть, например, количество разрушенных связей данной прочности в материале, рассматриваемых как случайные величины, и другие параметры процесса разрушения, представляемого как стохастический процесс деформирования, разрушения связей, перераспределения напряжений на уцелевшие связи и окончательного исчерпания образцом несущей способности.

Таким образом, в ситуациях близких к изложенным, с полным основанием можно использовать для оценки разброса прочностных характеристик материалов модель логарифмически нормального

распределения, как наиболее общую в теоретическом плане и подтвержденную эмпирически.

В разделе 3 показано, что чем меньше расстояние между трещинами, то есть чем плотнее трещиноватость, тем более несимметричное распределение вероятностей имеет прочность структурных элементов. И если по результатам лабораторных испытаний распределение прочности образцов можно было отнести к нормальному, то пересчет моментов распределения с учетом макродефектов показал, что распределение прочности элементов генеральной совокупности гораздо ближе к логарифмически нормальному.

3.1.1. Границы применимости логнормального закона распределения, его свойства и связь с другими распределениями

При нахождении параметров логарифмически нормального распределения возможны следующие два случая:

- 1) параметр ε , характеризующий центр распределения; известен;
- 2) параметр ε , характеризующий центр распределения; неизвестен и должен оцениваться на основе экспериментальных данных.

Поскольку ε - нижний предел случайной величины, он часто бывает известен из физических соображений. Например, при анализе испытаний прочности горных пород на сжатие в грубом приближении можно считать, что параметр $\varepsilon = 0$.

Логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами a и σ , т.е. плотность распределения случайной величины $y = \ln(x - \varepsilon)$ имеет вид:

$$f(y, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (79)$$

Параметры a и σ являются здесь соответственно математическим ожиданием $M(y)$ и дисперсией $D(y)$ нормального распределения.

Если величина ε неизвестна заранее и представляет существенный интерес для целей исследования, возникает необходимость оценивания этого параметра по экспериментальным данным.

Математическое ожидание и дисперсия логнормального распределения связаны с параметрами распределения следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 &= \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + a\right) \\ D &= \exp(\sigma^2 + 2a) \times [\exp(\sigma^2) - 1] \end{aligned} \quad (80)$$

Используя метод моментов, заключающийся в приравнении теоретических и эмпирических моментов одного порядка [84], получим:

$$\begin{cases} \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \varepsilon = m_1', \\ \exp(2a + \sigma^2)(e^{\sigma^2} - 1) = D'^*, \\ (e^{\sigma^2} - 1)^{1/2}(e^{\sigma^2} + 2) = \beta_1', \end{cases} \quad (81)$$

Решения уравнений (81) в явном виде записываются очень громоздко, однако можно составить на ЭВМ удобные таблицы, при помощи которых оценки параметров распределения находятся очень просто в каждом конкретном случае.

Действительно, последнее уравнение из (81) зависит только от одного неизвестного - σ . Путем замены переменной $t = (e^{\sigma^2} - 1)^{1/2}$ его можно привести к кубическому уравнению относительно t :

$$t^3 + 3t - A, \quad (82)$$

где $A = \beta_1'.$ (83)

Это уравнение решается в явном виде:

$$t^* = \sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1}} + \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1}}. \quad (84)$$

Зная корень уравнения t^* из (84) можно определить параметр

$$\sigma = \sqrt{\ln(1+t^2)}. \quad (85)$$

Параметр смещения определится из выражения

$$\varepsilon = m_1' - \frac{D^*}{t}. \quad (86)$$

Величина a запишется

$$a = \ln(m_1' - \varepsilon) - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (87)$$

Для упрощения вычислений, связанных с оценкой параметров, рассчитана таблица 3.2 для определения σ и $1/t$ в зависимости от величины выборочной асимметрии в интервале $A \in (0,05...200)$.

Таблица 3.2

Коэффициенты для оценки параметров логарифмически нормального распределения по большим выборкам

Асимметрия A	Параметр формы σ	Коэффициент $1/t$	Асимметрия A	Параметр формы σ	Коэффициент $1/t$
0,05	0,017	59,88	1,05	0,328	2,97
0,10	0,031	30,03	1,10	0,342	2,84
0,15	0,050	20,04	1,15	0,355	2,73
0,20	0,066	15,04	1,20	0,368	2,62
0,25	0,083	12,06	1,25	0,381	2,53
0,30	0,100	10,01	1,30	0,394	2,44
0,35	0,116	8,61	1,35	0,407	3,26
0,40	0,132	7,55	1,40	0,419	2,28
0,45	0,148	6,72	1,45	0,431	2,21
0,50	0,163	6,07	1,50	0,443	2,15
0,55	0,180	5,52	1,55	0,455	2,09
0,60	0,195	5,07	1,60	0,466	2,03
0,65	0,211	4,69	1,65	0,478	1,97
0,70	0,227	4,36	1,70	0,489	1,92
0,75	0,241	4,09	1,75	0,500	1,88
0,80	0,256	3,84	1,80	0,510	1,84
0,85	0,271	3,62	1,85	0,521	1,79
0,90	0,286	3,43	1,90	0,531	1,75
0,95	0,300	3,26	1,95	0,541	1,71
1,00	0,314	3,11	2,00	0,551	1,68

Из (80) следует, что

$$\eta^2 + 1 = \exp(\sigma^2). \quad (88)$$

По таблице 2.4 рассчитаем значения относительной вариации, соответствующих значениям асимметрии (табл. 3.3).

Таблица 3.3.

Зависимость коэффициентов вариации η от асимметрии A

A	0,25	0,5	0,75	1,00	1,25	1,50
η	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,47

Таблица позволяет по значениям асимметрии A определить ту верхнюю границу величины изменчивости η , при которой нижний параметр прочности ε не принимает отрицательного значения, что противоречит физическому смыслу прочности как положительной случайной величины. Таким образом, получим границы применимости логнормального распределения по коэффициентам вариации и асимметрии для тех случайных величин, которые из физических соображений не могут принимать отрицательных значений, например, предел прочности на одноосное сжатие.

Кривая, представляющая логнормальную модель на графике Пирсона выходит из точки для нормального распределения. Отсюда следует, что распределение Гаусса с точностью до моментов 4-го порядка является частным случаем логнормального закона, а при вариации $\eta < 0,3$ они становятся практически идентичны. Точки, представляющие распределения минимальных и максимальных значений Гумбеля, лежат на кривой, представляющей логнормальный закон. Именно поэтому для задач, в которых закон распределения экстремальных значений четко выражен с физической точки зрения, широкое применение находил логнормальный закон распределения [105, 113]. Это следует из того, что с точностью до моментов 4-го порядка распределение Гумбеля является частным случаем логнормального закона с отрицательной или положительной асимметрией. Кроме того, логнормальный закон близок к экспоненциальному, что позволяет использовать его для

описания величин, распределение которых отвечает экспоненциальному закону. В области асимметрии $A=1,0$ он близок к обобщенному логистическому распределению, которое в последнее время широко используется для анализа прочностных свойств материалов, и, в частности, углей и некоторых типов горных пород [34].

Логнормальное распределение для одной и той же асимметрии всегда более островершинно, чем гамма-распределение и распределение Вейбулла. При одних и тех же коэффициентах эксцесса положительная скошенность этих типов распределений всегда больше, чем у логнормального [114]. Но поскольку кривые, представляющие гамма-распределение и распределение Вейбулла, близки друг к другу, то при небольшом объеме статистического материала они в равной степени будут аппроксимировать эмпирические гистограммы и практически будут идентичны [115].

Логнормальное распределение рекомендуется применять для описания умеренно ($0,25 < \beta_1 < 0,75$) и сильно ($0,75 < \beta_1 < 1,25$) асимметричных эмпирических распределений прочности горных пород с коэффициентами эксцесса ($2,5 < \beta_2 < 3,5$) и ($3,5 < \beta_2 < 6,5$) соответственно.

Логнормальный закон обладает рядом полезных свойств [116], которые играют важную роль при оценке надежности механических конструкций, систем и подземных сооружений. Во многих задачах надежности приходится рассматривать отношение положительных случайных величин - "обобщенных" значений прочности и напряжений в условиях моделей "нагрузка-прочность" и применения так называемого недифференцированного коэффициента запаса прочности. Если рассматриваемые случайные величины имеют двухпараметрические логнормальные распределения, то отношение их будет распределено точно по логнормальному закону распределения. Для трехпараметрических логнормальных распределений отношение этих случайных величин будет распределено только приближенно логнормально. Оказывается, если не налагать на рассматриваемые случайные величины жестких требований, а потребовать только их представимости в виде

произведения достаточно большого числа сомножителей, то в пределе (по закону больших чисел) для отношения таких случайных величин получим асимптотически логарифмически нормальное распределение [117]. Наличие таких свойств у логнормального распределения позволяет его эффективно использовать в тех задачах надежности, где приходится оперировать с отношениями случайных величин, для которых отсутствует информация об их функциях распределения.

Исходя из изложенного выше, определим коэффициент структурного ослабления на основе гипотезы о логарифмически нормальном распределении прочности структурных элементов породного массива.

3.2. Определение коэффициента структурного ослабления на основе гипотезы о логарифмически нормальном распределении прочности структурных элементов породного массива

Предположим, что минимальное значение прочности структурных элементов рассматриваемой стохастической системы стремится к нулю и будем рассматривать двухпараметрическое логнормальное распределение. Такое предположение идет в запас прочности.

Логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами a и σ , т.е. плотность распределения случайной величины $y = \ln(x - \varepsilon)$ имеет вид:

$$f(y, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (89)$$

Из определения логнормального закона следует, что если величина R распределена логнормально с параметрами a и σ , то величина $z = \ln R$ распределена нормально с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ .

Вероятность того, что случайная величина z не окажется ниже некоторого предельного значения z_m , равна

$$p(z_m \prec z \prec \infty) = 1 - F[(z_m - \mu)/\sigma] .$$

Здесь функция $F(z)$ определяется относительно переменной $z = \ln R$ в соответствии с (28). Разрешим это уравнение относительно z_m :

$$z_m = a + \sigma \arg F(1 - p) .$$

Возвращаясь к случайной величине R , получим выражение для прочности массива:

$$R_m = \exp(a + \sigma \arg F(1 - p)) . \quad (90)$$

Коэффициент структурного ослабления, также как и во всех предыдущих случаях, выразим через относительную вариацию прочности структурных элементов η . Разделив обе части (90) на величину математического ожидания m , получим:

$$k_c = \exp(\sigma \arg F(1 - p) - \frac{\sigma^2}{2}) .$$

Учитывая, что $\eta^2 + 1 = \exp(\sigma^2)$ получим окончательно

$$k_c = \frac{\exp(\arg F(1 - p) \cdot \sqrt{\ln(\eta^2 + 1)})}{\sqrt{\eta^2 + 1}} . \quad (91)$$

Исследуем полученную зависимость. При $\eta=0$, т.е. при идеально однородной среде коэффициент структурного ослабления равен единице, и прочность массива совпадает с прочностью его структурных элементов (образцов). С увеличением коэффициента вариации, т.е. с ростом степени неоднородности среды, коэффициент структурного ослабления уменьшается, уменьшая тем самым прочность массива. При $\eta \rightarrow \infty$ функция (91) асимптотически приближается к нулю. Данные соотношения, а также характер изменения зависимости (91) (рис. 3.2) вполне соответствуют физической сути коэффициента структурного ослабления.

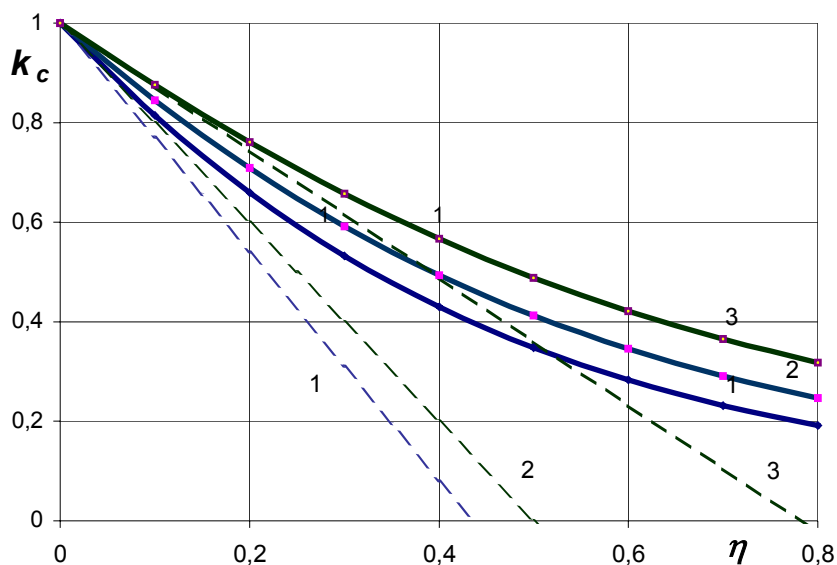


Рис.3.2. Зависимость коэффициента структурного от относительной вариации прочности и уровня надежности вероятности p): I – нормальный закон распределения; II – логарифмически нормальный закон распределения; 1- $p=0,99$; 2- $p=0,95$; 3- $p=0,9$ соответственно.

Количественная оценка отличия прочности массива от средней прочности породных образцов – коэффициент структурного ослабления k_c – выражена через относительную вариацию η , отражающую степень неоднородности среды. При определении коэффициента структурного ослабления по формуле (91) величина η должна быть вычислена по формуле (74), отражающей наличие в породной среде макродефектов.

На рис.3.3 показана зависимость коэффициента структурного ослабления от расстояния между трещинами и угла падения основной системы трещин. Там же показано (горизонтальные линии), насколько близко соответствуют значения коэффициента структурного ослабления, рекомендуемые в СНиП-II-94-80 [142], вычисленным по предлагаемым зависимостям. Совпадение достаточно близкое, с той разницей, что формула (91) позволяет для конкретных горно-геологических условий получить однозначно искомую величину. Пользуясь же существующим стандартом это сделать невозможно.

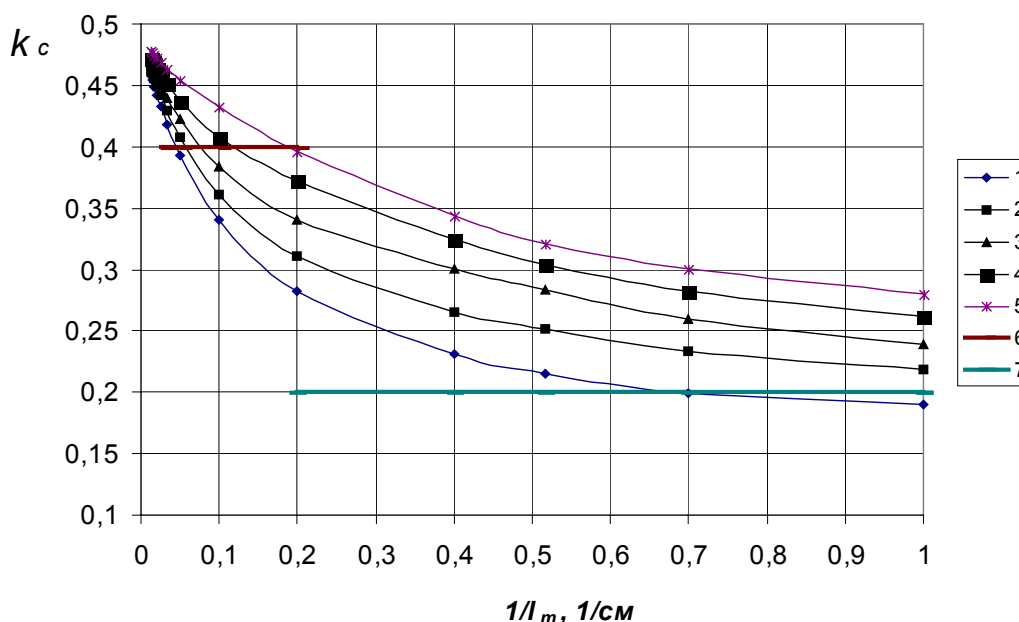


Рис.3.3. Зависимость коэффициента структурного ослабления от расстояния между трещинами угла падения основной системы трещин при относительной вариации $\eta_0=0,5$: 1 - $\alpha=20^\circ-45^\circ$; 2 - $\alpha=50^\circ-65^\circ$; 3 - $\alpha=70^\circ-75^\circ$; 4 - $\alpha=75^\circ-80^\circ$; 5 - $\alpha=85^\circ-90^\circ$; 6, 7 – рекомендации СНИП

Определим в качестве примера коэффициент структурного ослабления для следующих данных, полученных в результате лабораторных испытаний образцов: средняя прочность образцов $\bar{R}=40\text{МПа}$; коэффициент вариации $\eta^0=0,35$. Пусть по данным натурных наблюдений в массиве преобладают кососекущие трещины с углом падения $40-45^\circ$, среднее расстояние между которыми $m=0,1$ м. Такая густота трещин характерна для маломощных пород с небольшой прочностью, например для аргиллитов [128]. В соответствии с СНИП [93] при расстояниях между трещинами $0,5...0,1$ м величину k_c , согласно таблице 2.4, следует принять равной 0,4. Получим теперь эту величину на основе вероятностно-статистического подхода.

Исходя из значения относительной вариации, можно было бы выдвинуть гипотезу о нормальном распределении структурных элементов, и тогда, по формуле (29) при $p=0,95$ получим, что $k_c = 0,59$. Таким образом, без учета

наличия трещин значение коэффициента структурного ослабления получается завышенным по сравнению с значением, рекомендуемым СНиП.

Учтем теперь наличие макро дефектов по методике, изложенной выше.

При размере стандартного образца $l_0 = 0,05$ м получим, что $\frac{m}{l_0} = 2$.

Для кососекущих трещин функция снижения прочности в соответствии с (69) равна $f(\alpha) = 0,3$. Тогда относительная вариация для «исправленного» статистического ряда в соответствии с (74) или графиком 3.1 будет равна 0,8. При таком значении относительной вариации гипотеза о нормальном распределении должна быть отвергнута. Значения асимметрии и эксцесса свидетельствуют в пользу логарифмически нормального распределения. Тогда по формуле (91) получим, что $k_c = 0,25$. Эта величина на 37% меньше величины, рекомендованной СНиП. Соответственно меньшим будет и расчетное значение прочности массива на сжатие.

При расстоянии между трещинами, равном 0,5, в соответствии с СНиП величина коэффициента структурного ослабления будет такой же как и в предыдущих расчетах, т.е. $k_c = 0,4$. На основе вероятностного подхода для этого случая получим: $\frac{m}{l_0} = 10$; $\eta' = 0,55$; $k_c = 0,38$. Таким образом, в соответствии с СНиП уменьшение расстояния между трещинами от 0,5 м до 0,1 м не оказывает влияние на величину прочности породного массива. В соответствии с расчетом по предложенной методике эта величина уменьшается на 35%.

Выводы

При наличии макродефектов в породной среде распределение прочности пород на сжатие отклоняется от симметричного распределения в зависимости от плотности дефектов и их положения относительно оси нагружения структурных элементов массива.

Наиболее близко случайное распределение прочности в объеме породного массива с дефектами структуры в виде систем трещин описывается на основе логарифмически нормального закона.

Предложенная методика дает возможность более полного учета влияния трещин при определении основной величины, используемой в геомеханических расчетах - предела прочности на одноосное сжатие.

Дальнейшим направлением исследований является разработка способов учета в расчетах изменчивости различных свойств породного массива в соответствии с обоснованным законом распределения их вероятностей. В частности, представляет интерес исследование влияния изменчивости деформационных свойств вмещающих пород на величину смещений подземной выработки.

Для определения коэффициента структурного ослабления на основе вероятностно-статистической модели прочности трещиноватой породной среды необходимо иметь две величины: коэффициент вариации выборки и среднее расстояние между трещинами.

Коэффициент вариации выборки может быть получен в результате отбора, консервирования, изготовления и испытаний образцов горных пород в соответствии с принятыми стандартами. Выше было показано, что вариация прочности углевмещающих пород, определенная применительно к литологическим разностям в целом, достигает больших величин (50-70%). Однако большинство исследователей приходят к единому выводу: при тщательном изготовлении образцов рассеивание значений прочности вокруг

среднего значения не превышает 30%. При этом образцы должны быть привязаны к конкретному пласту и иметь одну фациальную принадлежность.

Большую трудность представляет определение параметров трещинной тектоники: ориентировки трещин, их интенсивности и т.п. Работы такой направленности долгие годы выполнялись ПО "Укруглегеология" [129]. В результате этих работ, окончившихся в 1968 г., были исследованы системы трещин и определена их ориентировка. Впоследствии исследования были продолжены до последних лет. Для отдельных угольных районов в полярной системе координат Шмидта построены круговые диаграммы, позволяющие определить ориентировку трещин в пределах шахтных полей Донбасса. В 1982 г. вышел прогнозный каталог шахтопластов Донецкого бассейна, включающий сведения по горно-геологическим условиям выемки 1132 шахтопластов, разрабатываемых на 305 шахтах 24 производственных объединений [130]. Аналогичные каталоги составлены для шахтопластов Кузнецкого, Печорского и Подмосковского угольных бассейнов. Одной из геологических характеристик, приводимых в этих каталогах, является среднее расстояние между трещинами вмещающих пород и углей. Учет случайного разброса расстояния между трещинами относительно среднего показан в разделе 2.3.2.

Таким образом, уже на настоящий момент имеются систематизированные данные, позволяющие установить степень структурной ослабленности породного массива и ориентировку трещин в пространстве. Последнее обстоятельство может оказаться полезным при расположении выработок в породном массиве.

Заключение

Исследование реальной прочности сложноструктурного породного массива, содержащего дефекты структуры в виде систем трещин, является одной из наиболее сложных и самых интересных задач геомеханики. В тоже время, это и практически важная задача, на основе которой выполняется оценка устойчивости подземных выработок, определяются инженерные мероприятия по ее обеспечению и устанавливаются затраты, соответствующие назначению объекта.

В настоящей книге были рассмотрены вероятностно-статистические модели породной среды с точки зрения ее прочности. Предлагаемая методика позволяет обойтись минимальным количеством исходных данных, а глубокий анализ стохастической природы объекта и законов распределения прочности делает рассматриваемые модели достаточно адекватными и надежными. Все это в совокупности позволяет надеяться, что предлагаемые зависимости найдут применение при проектировании подземных выработок различного назначения и установленные закономерности помогут глубоко понять природу масштабного эффекта в горных породах.

Список литературы

1. ГОСТ 21153.0-75÷21153.7-75. Породы горные. Методы физических испытаний. Изд-е официальное. - М.: Изд-во стандартов, 1975. - 35 с.
2. Кирпичев В.П. О подобии при упругих явлениях // Записки Русского технического общества. - 1876. - № 3. - 162 с.
3. Чечулин Б.Б. Масштабный фактор и статистическая природа металлов. – М.: Metallurgizdat, 1963. - 120 с.
4. Давиденков Н.Н. Некоторые проблемы механики материалов. – М.: Газетно-журнальное изд-во, 1943.–312 с.
5. Bauschinger I. Mitt. ans d mech.-techn. Laboratorium D.Techn.Schule. – München, 1871, 1884, 1892.
6. Глушко В.Т., Ямщиков В.С., Яланский А.А. Геофизический контроль в шахтах и тоннелях. М.: Недра, 1987. – 288 с.
7. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. – М.: Недра, 1980. – 359 с.
8. Михайлов А.Е. Полевые методы изучения трещин в горных породах. – М.: Государственное научно-техническое издательство литературы по геологии и охране недр, 1956. – 131 с.
9. Васильев П.В., Малинин С.И. Влияние основных геологических факторов на поведение пород в горных выработках. - М.: Госгортехиздат, 1960. – 93 с.
10. Руководство по изучению геологического состояния шахтных полей при подземной разработке угольных месторождений. – Л.: ВНИМИ, 1967.
11. Рац М.В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. – М.: Наука, 1968. – 106 с.
12. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. – М.: Госгортехиздат, 1946. – 285 с.

13. Stuart F.A. Strength and Stability of pillars in coal mines // *Ichem, Metallurg and Mining Sas S. Afrika*, 1954. – № 9. – P. 118-124.
14. Griffith A.A. The Phenomenon of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, 1921. – V. 221. – P. 163-198.
15. Александров А.П., Журков С.Н., Явление хрупкого разрыва. – М.: ГТТИИ, 1933. – 51 с.
16. Иоффе А.Ф., Кирпичев М.В., Левитская А.И. Деформация и прочность кристаллов // *Журнал русского физико-химического общества*, 1924. – № 22. – С. 286-293.
17. Чирков С.Е. Влияние масштабного фактора на прочность углей. – М.: Наука, 1969. – 113 с.
18. Койфман М.И. О влиянии размеров на прочность горных пород // *Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением*. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 6-14.
19. Меликидзе И.Г. О влиянии формы и размеров образцов на их механические свойства // *Горный журнал*, 1959. – № 9. – С. 38-43.
20. Грисикова Н.П. Зависимость предела прочности на сжатие от величины и формы образцов // *Механические свойства горных пород*. – М.: Углетехиздат, 1959.
21. Ильницкая Е.И. Влияние масштабного фактора на прочностные свойства горных пород // *Физико-механические свойства, давление и разрушение горных пород*. – М.: Изд-во АН СССР, 1972. – С. 17-24.
22. Кунтыш М.Ф. Исследование методов определения основных физико-механических характеристик горных пород, используемых при решении задач горного давления. – Дисс... канд. техн. наук. – М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 1964. – 166 с.
23. Пеньков А.М. Вовилкин А.Л. Расчет опорных целиков при добыче каменной соли. – Киев, Изд-во АН УССР, 1958. – 218 с.

24. Theil A. O kryteriach zniszenia zespotow skalnych w switle polozoych badan metoda besposred nego szinania. – Pozpz. Hydrotechn., 1973. – Z. 32, S. 277-290.
25. Барон Л.И., Курбатов В.М. К вопросу о влиянии масштабного фактора при испытаниях горных пород на раздавливание // Научные исследования по разработке угольных и рудных месторождений. – М.: Госгортехиздат, 1959. – С. 128-136.
26. Stomatiu, Teodoresku. Recherches surla resistanse nux efforts mechanignes du sel gemme romain // Congress Int. mines, met., geologie applignes. Session, 1935. – V.213-217.
27. Койфман М.И. Главный масштабный эффект в горных породах и углях // Проблемы механизации горных работ. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – С. 39-56.
28. Рац М.В. Структурные модели в инженерной геологии. – М.: Недра, 1973. – 216 с.
29. Weibull W.A. A statistikal theory of strength of Materials. – Ing. Vetenskamps akad. Handl., 1939.– N 151. – P. 55-62.
30. Давиденков Н.Н. Некоторые проблемы прочности твердого тела. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959. – 232 с.
31. Одинг И.А. Допустимые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. – М.: Машгиз, 1947. – 184 с.
32. Лавров В.В. Природа масштабного эффекта у льда и прочность ледяного покрова. – ДАН СССР, 1958.– № 4. – С. 248-254.
33. Матвеев Б.В. О зависимости результатов механических испытаний горных пород от размеров их образцов // Вопросы разрушения и давления горных пород. – М.: Углетехиздат, 1955. – С. 132-139.
34. Седракян Л.Г. К статистической теории прочности. – Ереван, изд-во Ереванского института стройматериалов и сооружений, 1958. – 104 с.

35. Волков С.Д. О масштабном эффекте при сложном напряженном состоянии // Физика металлов и металловедение, 1956. Т. II, вып. 3. – С. 428-440.
36. Болотин В.В. изменчивость пределов прочности хрупких материалов и ее связь с масштабным эффектом // Строительная механика и расчет сооружений, 1960. – № 4. – С. 1-7.
37. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. - 640 с.
38. Полипов А.Н. объяснение масштабного эффекта на основе энергетического критерия разрушения // Механика твердого тела. - 1984. - № 1. - С. 106-110.
39. Канторова Т.А., Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // ЖТФ, 1941. – Вып. 2. – № 3. – С. 312-321.
40. Канторова Т.А., Тимошенко О.А. Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородно-напряженного состояния // ЖТФ, 1949. – Вып. 3. – № 19. – С. 218-224.
41. Протодяконов М.М., Чирков С.Б. Трещиноватость и прочность горных пород в массиве. – М.: Недра, 1964. – 67 с.
42. Глушко В.Т., Виноградов В.В. Разрушение горных пород и прогнозирование проявлений горного давления. – М.: Недра, 1980. - 214 с.
43. Чирков С.Е. Влияние масштабного фактора на прочность углей. – М.: Наука, 1969. - 113 с.
44. Рац М.В., Чернышев С.Н. Трещиноватость и свойства трещиноватых пород. – М.: Недра, 1970. – 160 с.
45. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок. – М.: Недра, 1976. - 272 с.

46. Фисенко Г.Л. Методы количественной оценки структурных ослаблений в связи с анализом их устойчивости // Современные проблемы механики горных пород. – Л.: Наука, 1972. – С. 21-29.
47. Фисенко Г.Л. Устойчивость бортов карьеров и отвалов. – М.: Недра, 1965. – 378 с.
48. Ким Д.Н. влияние структуры на сдвиговую прочность массива / Тр. ВНИМИ.– Сб. 72. – 1969. – С.568-585.
49. Ким Д.Н. Исследование структурного ослабления трещиноватых пород моделированием прочностных свойств в лабораторных условиях / Тр. ИГД УФ АН СССР. Свердловск. – Сб. 5. - 1963. – С. 97-105.
50. Рубец Г.Т. Статистический метод оценки прочности слабых и трещиноватых горных пород // Механика разрушения горных пород. – Фрунзе: Илим, 1980. – С. 214-222.
51. Рубец Г.Т. Исследование изменчивости прочностных характеристик при помощи логнормального распределения и методы оценки его параметров. // Механика и разрушение горных пород. – К.: Наукова думка, 1976. – Вып. 3. – С. 39-43.
52. Рубец Г.Т. Статистический метод оценки масштабного фактора при нормальном распределении прочности горных пород // Механика и разрушение горных пород. – К.: Наукова думка, 1974. – Вып. 2. – С. 11-16.
53. Рубец Г.Т. Статистическая оценка экстремальных значений прочности и нагрузки // Механика и разрушение горных пород. - К.: Наукова думка, 1977. – С.11-15.
54. Мартынов Ю.И. Вероятностный метод определения прочности трещиноватого массива // Технология добычи угля подземным способом. – К.: Наукова думка, 1968. – № 5. – С. 59-62.
55. Методические рекомендации по оценке масштабного фактора прочности горных пород вероятностно-статистическими методами / В.Т. Глушко,

- В.Г. Борисенко, Н.В. Хижняк и др. - Кривой Рог: Изд-во НИГРИ, 1977. - 36 с.
56. Ржевский В.В., Новик Г.Я. Основы физики горных пород. – М.: Недра, 1973. - 286 с.
57. Шаумян Л.В. Физико-механические свойства массивов скальных пород. – М.: Недра, 1972. – 118 с.
58. Ветров С.В. О параметрах сводов естественного равновесия, пролетах обнажений и устойчивости целиков в трещиноватых горных породах. // Физико-технические параметры горных пород. - М.: Наука, 1971. – С. 37-48.
59. Алферов О.С. К вопросу о взаимосвязи между тектоникой и интенсивностью выдавливания горных пород в подземные выработки // Сборник материалов по вопросам горного дела. - Днепропетровск: изд-во Днепропетровского горного института, 1964.
60. Jahns H. Messung der bebiegsfestigkeit in situ bei wachsendem Masstabverhältnisse // Proc., Jsb., Gongr. Int.Soc.Rock.Mech.– Lisabon, 1966.– Vol.1.– P. 477-482.
61. Рейхмус Д.Р. Корреляция экспериментальных зависимостей «сила-перемещение» с физическими свойствами горных пород при ударном бурении // Механика горных пород. – М.: Недра, 1966. – С.32-51.
62. Евдокимов П.Д., Санегин Д.Д. Прочность, сопротивляемость сдвигу и деформируемость оснований сооружений на скальных породах. – Л.: Энергия, 1964. - 169 с.
63. Прочностные и деформационные свойства сплошных руд Талнахского рудного узла. / В.Д. Палий, Ю.Д. Орлов, В.К. Иванов и др. / Тр. ВНИМИ. Л.: Изд-во ВНИМИ, 1974. – Сб. 91. - С. 139-145.
64. Биг Я.А., Бублик Ф.П. Об определении прочности пластов угля на сжатие / Тр. ВНИМИ. Л.: Изд-во ВНИМИ, 1963.– Сб. 50. – С. 45-53.

65. Кондратов А.В., Барях А.А. Исследование трещинообразования в скальном массиве вокруг горизонтальных горных выработок. - ФТПРПИ, 1983. – № 3. – С. 3-7.
66. Фисенко Г.П. Устойчивость бортов угольных карьеров. – М.: Углетехиздат, 1956. - 230 с.
67. Нестеренко Г.Г., Скозобцов Б.С., Твердовский Р.К. Способ оценки прочностных свойств в целиках. – ФТПРПИ. - 1971. – № 6. – С.111-113.
68. Амусин Б.З. Механические характеристики массива горных пород при аналитических расчетах горного давления в выработках. – ФТПРПИ. - 1979. – № 6. – С. 15-21.
69. Прочность и деформируемость горных пород / Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев и др. - М.: Недра, 1979. – 269 с.
70. Слесарев В.Д. Механика горных пород. – М.: Углетехиздат, 1948. - 303 с.
71. Костомаров Н.Е., Пушкарев В.И. К определению прочности массива горных пород // Колыма, 1975. – № 12. – С.9-12.
72. Костомаров Н.Е. Влияние прочности массива на размеры зоны неупругих деформаций пород вокруг одиночной выработки / Тр. ВНИМИ. – Л.: Изд-во ВНИМИ, 1977. – № 103. – С. 67-70.
73. Расчет нагрузки на крепи горизонтальных выработок / Е.В. Стрельцов, А.В. Шейко, В.Д. Резун, В.И. Александров // Проектирование и реконструкция угольных предприятий, 1973. - № 32. – С. 19-21.
74. Определение расчетного коэффициента крепости породы в массиве / Н.И. Глодковская и др. // Гидротехническое строительство, 1977.– № 1, С. 49-51.
75. Deere D.U. Technical description of rock cores for engineering purposes // Rock Mec.eng.Geol., 1963.– N 1. – P. 18-22.
76. Hansagi L. A method of determining the degree of fissuration of rock // Int. S. Rock. Mech. Sci., 1974. – V.11. – P. 379-388.
77. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. – М.: Наука, 1961. – 202 с.

78. Новикова Л.В., Калашников А.И., Лесников В.С. Распределение напряжений в массиве горных пород на участке сопряжения двух выработок // Изв. Вузов. Горный журнал, 1984. - №2. - С.25-27.
79. Новикова Л.В. Теоретические основы и методы расчета средств крепления и охраны подготовительных выработок марганцеворудных шахт. Автореферат дисс.... докт. техн. наук. - Днепропетровск, 1988. - 32 с.
80. Новикова Л.В., Сдвижкова Е.А., Кузьменко А.М., Приходько В.В. Определение шага посадки основной кровли из расчета трехмерного напряженного состояния породного массива // Днепропетр. горный ин-тут. - Днепропетровск, 1991. – 11 с. - Деп в УкрИНТЭИ 23.07.92, № 1125.
81. Новикова Л.В., Пономаренко П.И., Приходько В.В., Морозов И.Т. Метод граничных элементов в задачах горной геомеханики. - Днепропетровск: Наука и образование, 1997. – 256 с.
82. Прочность и деформируемость горных пород / Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев и др. - М. : Недра, 1979. - 269 с.
83. Шашенко А. Н. Устойчивость подземных выработок в неоднородном породном массиве. – Дис. ... д-ра техн. наук. – Днепропетровск, 1988. – 507 с.
84. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 572 с.
85. Бронштейн И.Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М. : Наука, 1981. – 718с.
86. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. - М.: Мир, 1969. – 388 с.
87. Карасев Б.В. Статистический подход к изучению природы и некоторые закономерности распределения вещества Земли // Пути познания Земли. - М.: Наука, 1971. - С. 131–151.
88. ДонУГИ. Исследования механических свойств горных пород. - М.: Углетехиздат, 1951. - 223 с.

89. Кузнецов Г.Н. Механические свойства горных пород. М.: Углетехиздат, 1951. - 223 с.
90. Протодяконов М.М. Методы оценки трещиноватости и прочности горных пород в массиве. - М: изд-во ИГД им. А.А. Скочинского, 1964. - 32 с.
91. Сдвижкова Е.А., Бабец Д.В. Оценка стоимостных затрат на поддержание горных выработок с привлечением метода группового учета аргументов // Науковий вісник НГАУ, № 4. – 2000. – С. 10-12.
92. Кузнецов С.Т., Воронин Н.С. Методическое пособие по изучению слоистости и прогнозу расслаиваемости осадочных пород. - Л.: изд-во ВНИМИ, 1967. – 84 с.
93. СНиП II – 94-80. Строительные нормы и правила. Ч. II. Нормы проектирования. Глава 94. Подземные горные выработки. - М.: Стройиздат, 1982. – 31 с.
94. Hayashi M. Strength and dilatancy of brittle jointed mass – The extreme value stochastics and anisotropic failure mechanism. - The 3rd interior symposium on rock mechanics in the Japan Society of civil Engineers. - Tokyo, 1965. – P. 32-38.
95. Михайлов А.Е. Полевые методы изучения трещин в горных породах. - Москва: Государственное научно-техническое издательство литературы по геологии и охране недр, 1956. – 131.
96. Чернышев С.Н. Трещиноватость горных пород и ее влияние на устойчивость откосов. – М.: Недра, 1985. – 210 с.
97. Машанов А.Ж., Машанов А.А. Основы геомеханики скально-трещиноватых пород. – Алма-Ата: Наука, 1985. – 190 с.
98. Мюллер Л.И. Инженерная геология. Механика скальных массивов. - М.: Мир, 1971. - 254 с.
99. Ванифатов Н.И. Кливаж и управление горным давлением. Уголь, 1953.– № 6.

100. Трофимов А.А. Некоторые неотложные задачи шахтной геологии Карагандинского бассейна // «Уголь», 1954. – № 9.
101. Прогнозирование и расчет проявлений горного давления / Грицко Г.И., Власенко В.В., Посохов Г.Е. и др / Под ред. Шемякина Е.И.- Новосибирск: «Наука», Сибирское отделение, 1980. - 117 с.
102. Васильев П.В., Малинин С.И. Влияние основных геологических факторов на поведение пород в горных выработках. – М.: Госгортехиздат, 1960. – 93 с.
103. Ушаков И.Н. Трещиноватость горного массива в Центральном районе Донбасса и точечный способ ее характеристики. Запис. ЛГИ, 1958. – Т. 36. – Вып. 1.
104. Орлов А.А. Исследование поведения пород кровли при применении стоек постоянного и нарастающего сопротивления // Сборник статей по вопросам горного давления и сдвижения горных пород. – Л.: ВНИМИ, 1959. - Сб. 36. – С. 145-159.
105. Колоколов О.В., Князев М.В., Доценко В.Н., Притыскач В.П. Влияние вектора напряжений и трещиноватости горных пород на выбор технологической схемы разработки // Изв. Вузов. Горный журнал. - 1990. - №2. – С. 21-23.
106. Шклярский М.Ф. Расчет устойчивости выработок, пройденных в трещиноватых породах // Методы изучения и способы управления горным давлением в подземных выработках. – Ленинград: ВНИМИ, 1987. – С. 17-22.
107. Руководство по экспресс-определению предела прочности на одноосное сжатие углевмещающих пород Донбасса по генетической принадлежности осадка и акустическим измерениям кернов разведочных скважин. – Днепропетровск, 1984.
108. Шашенко А.Н., Тулуб С.Б., Сдвижкова Е.А. Некоторые задачи статистической геомеханики. – К.: Пульсари, 2001. – 243 с.

109. Сдвижкова Е.А., Бабец Д.В. Влияние структурной неоднородности породного массива на статистическое распределение его физико-механических свойств // Науковий вісник НГУ, № 9. – 2003. – С. 95-98.
110. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир, 1987. – 326 с.
111. Шашенко А.Н., Сургай Н.С., Парчевский Л.Я. Методы теории вероятностей в геомеханике. - К.: Техника, 1994. – 209 с
112. Гзовский М.В. Основные вопросы тектонофизики и тектоника Байджансайского антиклинория. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. - 544 с.
113. Батугин С.А. Анизотропия массива горных пород. - Новосибирск: «Наука». Сибирское отделение, 1988. – 83 с.
114. Барон Л.И. Горно-технологическое породоведение. Предмет и способы исследований // М.: Наука, 1977. – 324 с.
115. Медведев Р.В. Статистическая интерпретация результатов прочностных испытаний горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1974. - № 4. - С. 29-34.
116. Матвиенко В.В. Закон распределения предела прочности на сжатие каменной соли месторождения Яр-Бишкадак // Труды ВНИИПромгаз, 1965. – Вып.1. – С. 63-69.
117. Катин К.П. Законы распределения физико-механических свойств скальных пород и их практическое использование // Совершенствование техники и технологии подземной добычи руд цветных металлов. – Усть-Каменогорск: ВНИИЦветмет, 1981. – С. 104-120.
118. Родионов Д.А. Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах // М.: Наука, 1964. – 102 с.
119. Прохоров Ю.В. К вопросу о логнормальном распределении в геохимических задачах // Теория вероятностей и ее применения, 1965. – № 1. - С. 184-187.
120. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. – М.: Мир, 1969. – 397 с.

121. Колмогоров А.Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. 1941. – Т. XXXI. – № 2. – С. 99-103.
122. Филиппов А.Ф. О распределении размеров частиц при дроблении // Теория вероятностей и ее применения. 1961. – № 6. – С. 209-218.
123. Турицын К.С. Основной статистический закон распределения физических свойств горных пород // Геофизические исследования при решении геологических задач в Восточной Сибири. Вып. 3. – М.: Недра, 1964. – С. 210-221.
124. Прохоров А.В. Логарифмически нормальное распределение // Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: Сов. энциклопедия, 1982. – С. 408.
125. Aitchison J., Brown J.A.C. The lognormal distribution & - Cambridge: Cambridge University Press, 1957. – 187 p.
126. Lognormal distributions & Theory and applications/Ed by E.L. Crow, K.Shimizu. - N.Y: Dekker, 1988. – 387 p.
127. Гнеденко Б.В. и др. Математические методы в теории надежности. - М.: Наука, 1965. – 524 с.
128. Руководство по изучению геологического состояния шахтных полей при подземной разработке угольных месторождений. – Л.: ВНИМИ, 1967.
129. Установление закономерностей проявления внезапных выбросов угля и газов в целях разработки методики прогнозов выбросоопасных зон на полях действующих и строящихся шахт Донбасса / В. С. Вереда, Б. К. Юрченко, В. Г. Суровцев, В. А. Ямпольский. – Донецк: ПО Укргеология, 1968. – 358 с.
130. Прогнозный каталог шахтопластов Донецкого угольного бассейна с характеристикой горно-геологических факторов и явлений // М. : ИГД им. А. А. Скочинского, 1982. – 500 с.

Приложения

Таблица 1. Значения нормированной интегральной функции нормального

распределения $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
-0.00	0.5000	-0.30	0.3821	-0.60	0.2743	-0.90	0.1841
-0.01	0.4960	-0.31	0.3783	-0.61	0.2709	-0.91	0.1814
-0.02	0.4920	-0.32	0.3745	-0.62	0.2676	-0.92	0.1788
-0.03	0.4880	-0.33	0.3707	-0.63	0.2643	-0.93	0.1762
-0.04	0.4840	-0.34	0.3669	-0.64	0.2611	-0.94	0.1736
-0.05	0.4801	-0.35	0.3632	-0.65	0.2578	-0.95	0.1711
-0.06	0.4761	-0.36	0.3594	-0.66	0.2546	-0.96	0.1685
-0.07	0.4721	-0.37	0.3557	-0.67	0.2514	-0.97	0.1660
-0.08	0.4681	-0.38	0.3520	-0.68	0.2483	-0.98	0.1635
-0.09	0.4641	-0.39	0.3483	-0.69	0.2451	-0.99	0.1611
-0.10	0.4602	-0.40	0.3446	-0.70	0.2420	-1.00	0.1587
-0.11	0.4562	-0.41	0.3409	-0.71	0.2389	-1.01	0.1562
-0.12	0.4522	-0.42	0.3372	-0.72	0.2358	-1.02	0.1539
-0.13	0.4483	-0.43	0.3336	-0.73	0.2327	-1.03	0.1515
-0.14	0.4443	-0.44	0.3300	-0.74	0.2296	-1.04	0.1492
-0.15	0.4404	-0.45	0.3264	-0.75	0.2266	-1.05	0.1469
-0.16	0.4364	-0.46	0.3228	-0.76	0.2236	-1.06	0.1446
-0.17	0.4325	-0.47	0.3192	-0.77	0.2206	-1.07	0.1423
-0.18	0.4286	-0.48	0.3156	-0.78	0.2177	-1.08	0.1401
-0.19	0.4247	-0.49	0.3121	-0.79	0.2148	-1.09	0.1379
-0.20	0.4207	-0.50	0.3085	-0.80	0.2119	-1.10	0.1357
-0.21	0.4168	-0.51	0.3050	-0.81	0.2090	-1.11	0.1335
-0.22	0.4129	-0.52	0.3015	-0.82	0.2061	-1.12	0.1314
-0.23	0.4090	-0.53	0.2981	-0.83	0.2033	-1.13	0.1292
-0.24	0.4052	-0.54	0.2946	-0.84	0.2005	-1.14	0.1271
-0.25	0.4013	-0.55	0.2912	-0.85	0.1977	-1.15	0.1251
-0.26	0.3974	-0.56	0.2877	-0.86	0.1949	-1.16	0.1230
-0.27	0.3936	-0.57	0.2843	-0.87	0.1922	-1.17	0.1210
-0.28	0.3897	-0.58	0.2810	-0.88	0.1894	-1.18	0.1190
-0.29	0.3859	-0.59	0.2776	-0.89	0.1867	-1.19	0.1170

x	$F0(x)$	x	$F0(x)$	x	$F0(x)$	x	$F0(x)$
-1.20	0.1151	-1.50	0.0668	-1.80	0.0359	-3.00	0.0013
-1.21	0.1131	-1.51	0.0655	-1.81	0.0351	-3.10	0.0010
-1.22	0.1112	-1.52	0.0643	-1.82	0.0344	-3.20	0.0007
-1.23	0.1093	-1.53	0.0630	-1.83	0.0336	-3.30	0.0005
-1.24	0.1075	-1.54	0.0618	-1.84	0.0329	-3.40	0.0003
-1.25	0.1056	-1.55	0.0606	-1.85	0.0322	-3.50	0.0002
-1.26	0.1038	-1.56	0.0594	-1.86	0.0314	-3.60	0.0002
-1.27	0.1020	-1.57	0.0582	-1.87	0.0307	-3.70	0.0001
-1.28	0.1003	-1.58	0.0571	-1.88	0.0301	-3.80	0.0001
-1.29	0.0985	-1.59	0.0559	-1.89	0.0294	-3.90	0.0000
-1.30	0.0968	-1.60	0.0548	-1.90	0.0287	0.00	0.5000
-1.31	0.0951	-1.61	0.0537	-1.91	0.0281	0.01	0.5040
-1.32	0.0934	-1.62	0.0526	-1.92	0.0274	0.02	0.5080
-1.33	0.0918	-1.63	0.0516	-1.93	0.0268	0.03	0.5120
-1.34	0.0901	-1.64	0.0505	-1.94	0.0262	0.04	0.5160
-1.35	0.0885	-1.65	0.0495	-1.95	0.0256	0.05	0.5199
-1.36	0.0869	-1.66	0.0485	-1.96	0.0250	0.06	0.5239
-1.37	0.0853	-1.67	0.0475	-1.97	0.0244	0.07	0.5279
-1.38	0.0838	-1.68	0.0465	-1.98	0.0239	0.08	0.5319
-1.39	0.0823	-1.69	0.0455	-1.99	0.0233	0.09	0.5359
-1.40	0.0808	-1.70	0.0446	-2.00	0.0228	0.10	0.5398
-1.41	0.0793	-1.71	0.0436	-2.10	0.0179	0.11	0.5438
-1.42	0.0778	-1.72	0.0427	-2.20	0.0139	0.12	0.5478
-1.43	0.0764	-1.73	0.0418	-2.30	0.0107	0.13	0.5517
-1.44	0.0749	-1.74	0.0409	-2.40	0.0082	0.14	0.5557
-1.45	0.0735	-1.75	0.0401	-2.50	0.0062	0.15	0.5596
-1.46	0.0721	-1.76	0.0392	-2.60	0.0047	0.16	0.5636
-1.47	0.0708	-1.77	0.0384	-2.70	0.0035	0.17	0.5675
-1.48	0.0694	-1.78	0.0375	-2.80	0.0026	0.18	0.5714
-1.49	0.0681	-1.79	0.0367	-2.90	0.0019	0.19	0.5753

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
0.20	0.5793	0.50	0.6915	0.80	0.7881	1.10	0.8643
0.21	0.5832	0.51	0.6950	0.81	0.7910	1.11	0.8665
0.22	0.5871	0.52	0.6985	0.82	0.7939	1.12	0.8686
0.23	0.5910	0.53	0.7019	0.83	0.7967	1.13	0.8708
0.24	0.5948	0.54	0.7054	0.84	0.7995	1.14	0.8729
0.25	0.5987	0.55	0.7088	0.85	0.8023	1.15	0.8749
0.26	0.6026	0.56	0.7123	0.86	0.8051	1.16	0.8770
0.27	0.6064	0.57	0.7157	0.87	0.8078	1.17	0.8790
0.28	0.6103	0.58	0.7190	0.88	0.8106	1.18	0.8810
0.29	0.6141	0.59	0.7224	0.89	0.8133	1.19	0.8830
0.30	0.6179	0.60	0.7257	0.90	0.8159	1.20	0.8849
0.31	0.6217	0.61	0.7291	0.91	0.8186	1.21	0.8869
0.32	0.6255	0.62	0.7324	0.92	0.8212	1.22	0.8888
0.33	0.6293	0.63	0.7357	0.93	0.8238	1.23	0.8907
0.34	0.6331	0.64	0.7389	0.94	0.8264	1.24	0.8925
0.35	0.6368	0.65	0.7422	0.95	0.8289	1.25	0.8944
0.36	0.6406	0.66	0.7454	0.96	0.8315	1.26	0.8962
0.37	0.6443	0.67	0.7486	0.97	0.8340	1.27	0.8980
0.38	0.6480	0.68	0.7517	0.98	0.8365	1.28	0.8997
0.39	0.6517	0.69	0.7549	0.99	0.8389	1.29	0.9015
0.40	0.6554	0.70	0.7580	1.00	0.8413	1.30	0.9032
0.41	0.6591	0.71	0.7611	1.01	0.8438	1.31	0.9049
0.42	0.6628	0.72	0.7642	1.02	0.8461	1.32	0.9066
0.43	0.6664	0.73	0.7673	1.03	0.8485	1.33	0.9082
0.44	0.6700	0.74	0.7704	1.04	0.8508	1.34	0.9099
0.45	0.6736	0.75	0.7734	1.05	0.8531	1.35	0.9115
0.46	0.6772	0.76	0.7764	1.06	0.8554	1.36	0.9131
0.47	0.6808	0.77	0.7794	1.07	0.8577	1.37	0.9147
0.48	0.6844	0.78	0.7823	1.08	0.8599	1.38	0.9162
0.49	0.6879	0.79	0.7852	1.09	0.8621	1.39	0.9177

x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$	x	$F_0(x)$
1.40	0.9192	1.70	0.9554	2.00	0.9772
1.41	0.9207	1.71	0.9564	2.10	0.9821
1.42	0.9222	1.72	0.9573	2.20	0.9861
1.43	0.9236	1.73	0.9582	2.30	0.9893
1.44	0.9251	1.74	0.9591	2.40	0.9918
1.45	0.9265	1.75	0.9599	2.50	0.9938
1.46	0.9279	1.76	0.9608	2.60	0.9953
1.47	0.9292	1.77	0.9616	2.70	0.9965
1.48	0.9306	1.78	0.9625	2.80	0.9974
1.49	0.9319	1.79	0.9633	2.90	0.9981
1.50	0.9332	1.80	0.9641	3.00	0.9987
1.51	0.9345	1.81	0.9649	3.10	0.9990
1.52	0.9357	1.82	0.9656	3.20	0.9993
1.53	0.9370	1.83	0.9664	3.30	0.9995
1.54	0.9382	1.84	0.9671	3.40	0.9997
1.55	0.9394	1.85	0.9678	3.50	0.9998
1.56	0.9406	1.86	0.9686	3.60	0.9998
1.57	0.9418	1.87	0.9693	3.70	0.9999
1.58	0.9429	1.88	0.9699	3.80	0.9999
1.59	0.9441	1.89	0.9706	3.90	1.0000
1.60	0.9452	1.90	0.9713		
1.61	0.9463	1.91	0.9719		
1.62	0.9474	1.92	0.9726		
1.63	0.9484	1.93	0.9732		
1.64	0.9495	1.94	0.9738		
1.65	0.9505	1.95	0.9744		
1.66	0.9515	1.96	0.9750		
1.67	0.9525	1.97	0.9756		
1.68	0.9535	1.98	0.9761		
1.69	0.9545	1.99	0.9767		

Гистограммы частот пределов прочности на одноосное сжатие углевмещающих пород Донбасса

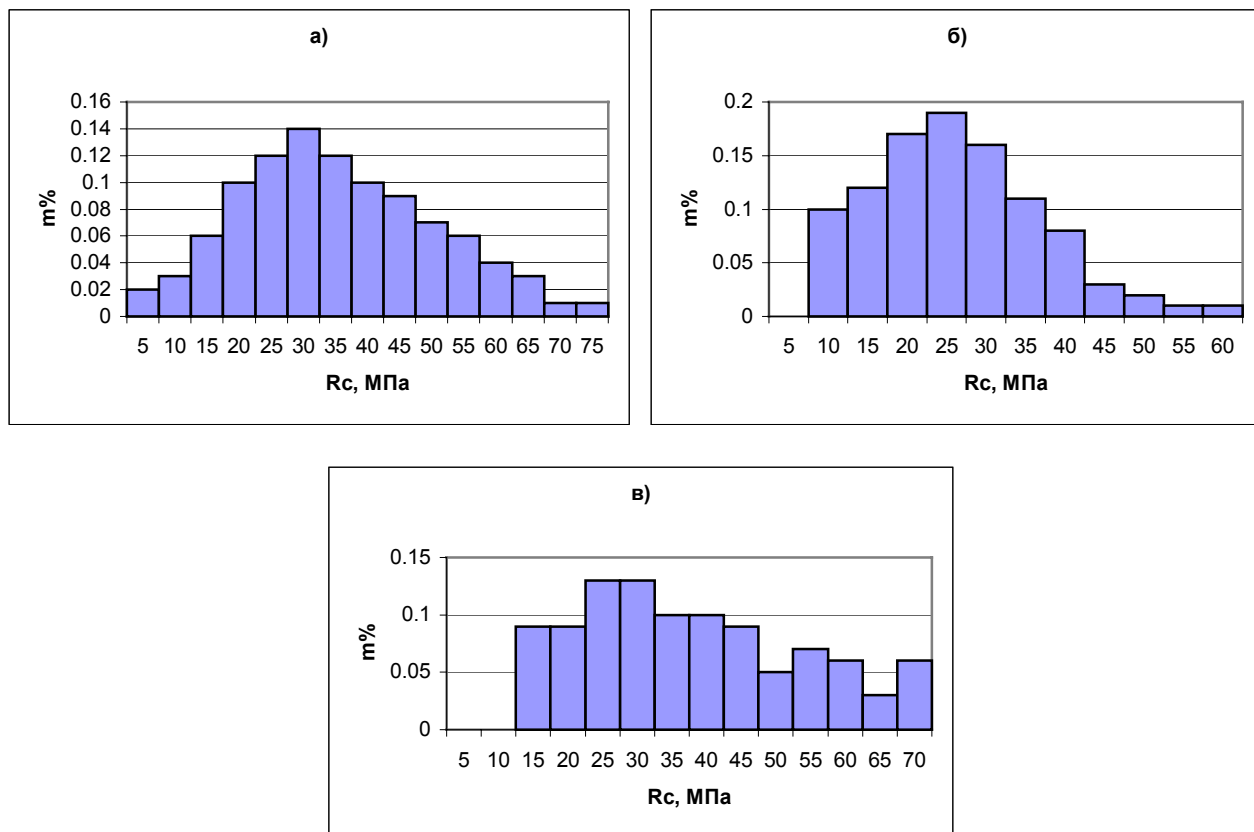


Рис. 1. Гистограммы значений предела прочности на одноосное сжатие пород, вмещающих угли марки Д-ДГ:
а) алевролиты; б) аргиллиты; в) песчаники.

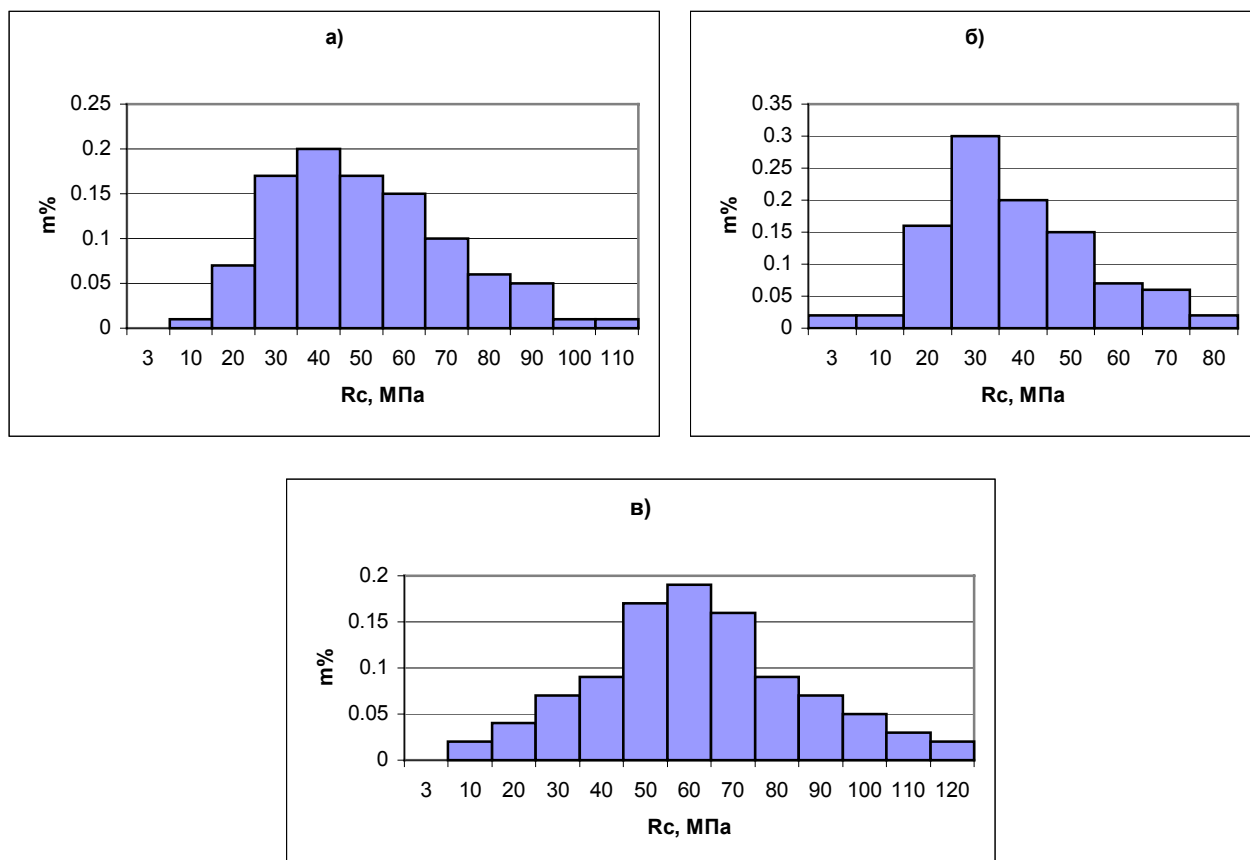


Рис. 2. Гистограммы значений предела прочности на одноосное сжатие пород, вмещающих угли марки Г-ГЖ:

а) алевролиты; б) аргиллиты; в) песчаники.

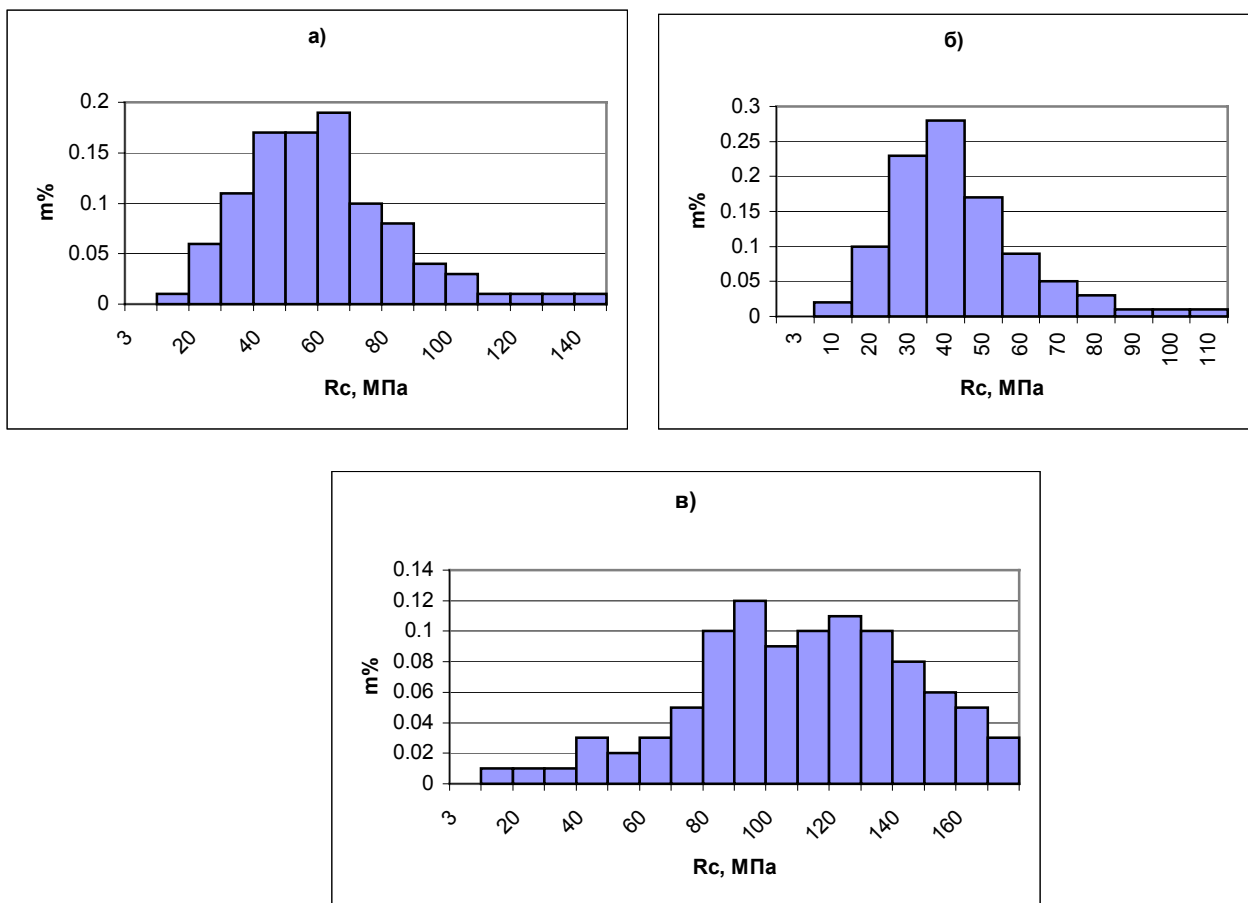
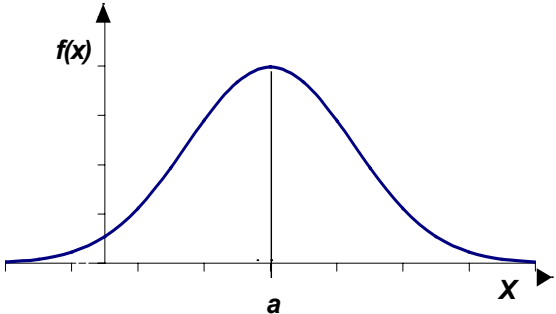
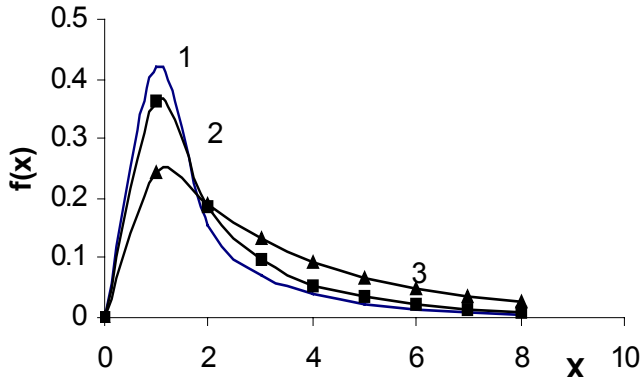
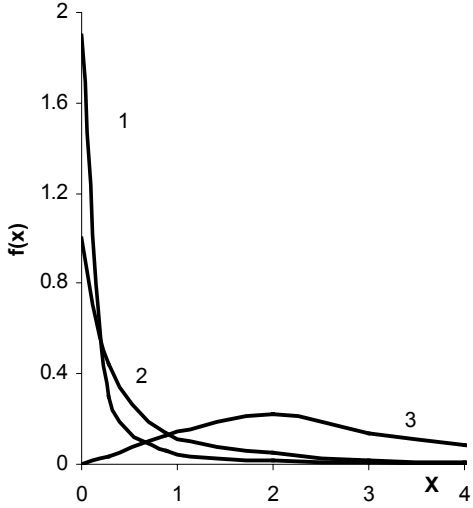
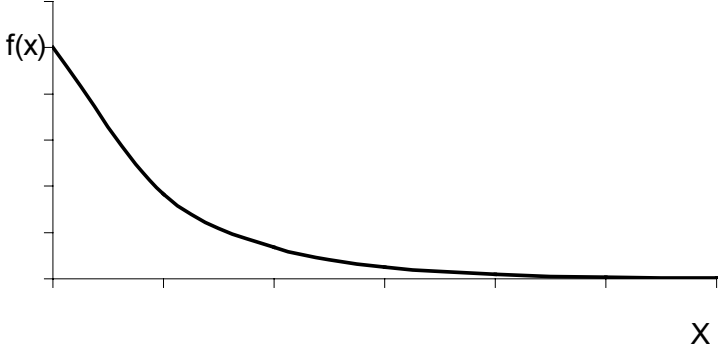
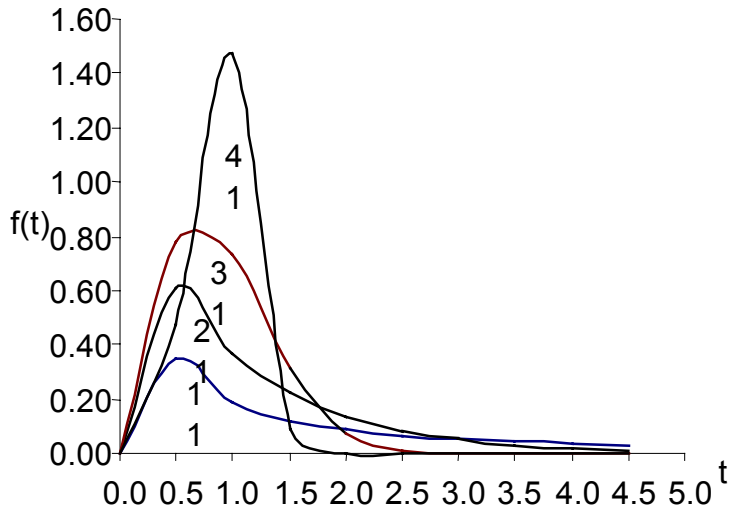


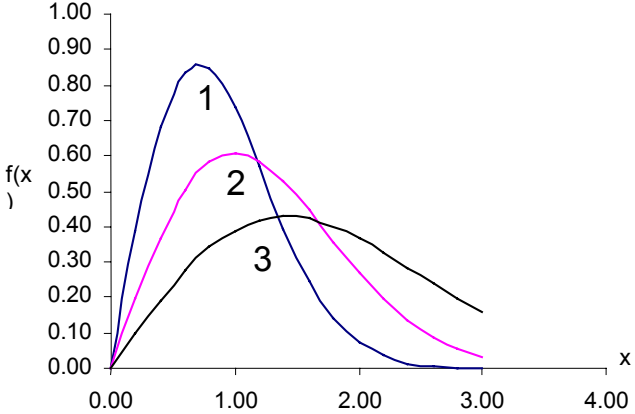
Рис. 3. Гистограммы значений предела прочности на одноосное сжатие пород, вмещающих угли марки Ж, КЖ, ОС:
а) алевролиты; б) аргиллиты; в) песчаники.

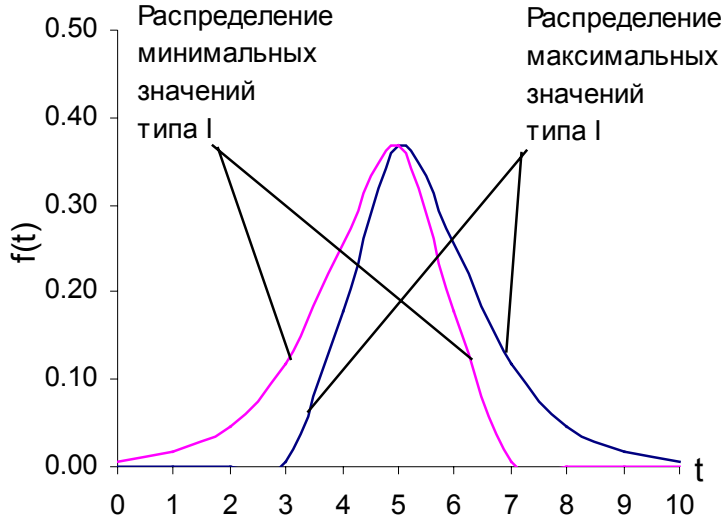
ТАБЛИЦА 1. СВОДКА НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

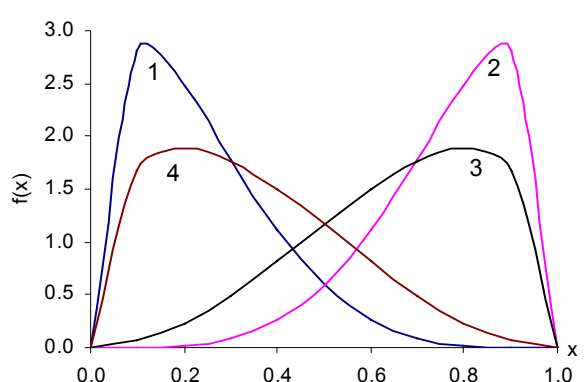
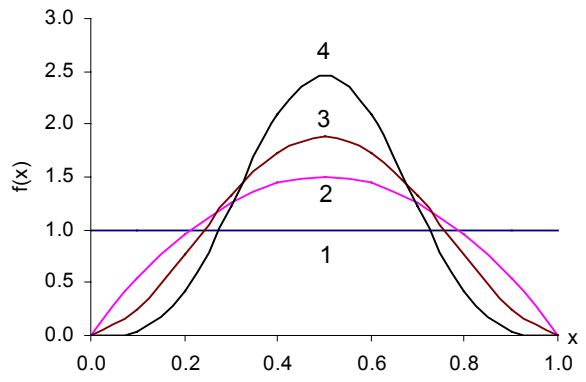
Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Нормальное (Гаусса) 	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < a < +\infty$ $\sigma > 0$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = a$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = \sigma^2$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = 0$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 3$
Логарифмически нормальное  1- $a = 0, \sigma^2 = 1$; 2- $a = 0,3, \sigma^2 = 1$; 3- $a = 1, \sigma^2 = 1$	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} (e^{\sigma^2} + 2)$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 3 + (w - 1)(w^3 + 3w^2 + 6w + 6),$ $w = e^{\sigma^2}$

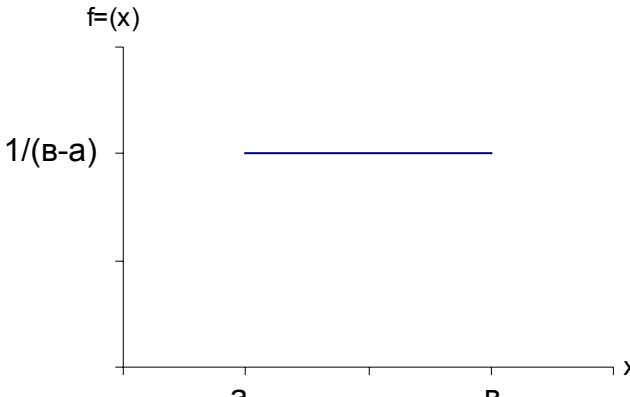
Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Гамма-распределение  1 - $\xi=0,5; \lambda=1$; 2 - $\xi=1; \lambda=1$; 3 - $\xi=3; \lambda=1$;	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} \cdot e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $\Gamma(\xi)$ - гамма-функция $\Gamma(\xi) = \int_0^\infty x^{\xi-1} e^{-x} dx$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \frac{\xi}{\lambda}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = \frac{\xi}{\lambda^2}$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\xi}}$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = \frac{3(\xi + 2)}{\xi}$
Экспоненциальное 	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\lambda > 0$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \frac{1}{\lambda}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = 2,0$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 9,0$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Вейбулла  1 – $\nu = 0,5$; $\sigma = 1$; 2 – $\nu = 1$; $\sigma = 1$; 3 – $\nu = 2$; $\sigma = 1$; 4 – $\nu = 4$; $\sigma = 1$;	$f(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\nu-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\nu} \right], & x \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $\nu > 0, \quad \sigma > 0$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \sigma_0 \Gamma(1/\xi + 1)$; Дисперсия: $D(x) = \mu_2 =$ $= \sigma_0^2 \left\{ \Gamma(2/\xi + 1) - \left[\Gamma(1/\xi + 1) \right]^2 \right\}$; Показатель асимметрии: * Показатель эксцесса: **
		$* - \beta_1 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\nu}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) + \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^3}{\left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}};$ $** - \beta_1 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{\nu}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{\nu}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) + 6\Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right)\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^2 - 3\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^4}{\left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\nu}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]^2 \right\}^2};$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Релея  1 – $\sigma^2 = 0,5$; 2 – $\sigma^2 = 1,0$; 3 – $\sigma^2 = 2,0$	$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sigma^2} \right) e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $\sigma > 0$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \frac{(\sigma^2 \pi)^{1/2}}{\sqrt{2}}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = 0,429 \sigma^2$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = 0,63$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 3,26$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Экстремальных значений 	Для максимальных значений: $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{\sigma} (x-a) - e^{-\left(\frac{1}{\sigma}\right)(x-a)} \right];$ Для минимальных значений: $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{1}{\sigma} (x-a) - e^{-\left(\frac{1}{\sigma}\right)(x-a)} \right],$ $-\infty < x < \infty$ $-\infty < a < \infty,$ $\sigma > 0$	Математическое ожидание: – для максимальных значений $M(x) = m_1 = a + 0,5776;$ – для минимальных значений $M(x) = m_1 = a - 0,5776;$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = 1,645\sigma^2$ Показатель асимметрии: – для максимальных значений $\beta_1 = 1,14;$ – для минимальных значений $\beta_1 = -1,14$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 5,4$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Бета-распределение  а) 1 – $\xi = 5,0$; $\gamma = 1,5$; 2 – $\xi = 1,5$; $\gamma = 5,0$; 3 – $\xi = 1,5$; $\gamma = 3,0$; 4 – $\xi = 3,0$; $\gamma = 1,5$;  б) 1 – $\xi = 1,0$; $\gamma = 1,0$; 2 – $\xi = 2,0$; $\gamma = 2,0$; 3 – $\xi = 3,0$; $\gamma = 3,0$; 4 – $\xi = 5,0$; $\gamma = 5,0$;	$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\xi + \gamma)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} (1-x)^{\xi-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $\xi > 0, \quad \gamma > 0$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \frac{\gamma}{\xi + \gamma}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = \frac{\xi\gamma}{(\xi + \gamma)^2 (\xi + \gamma + 1)}$ Показатель асимметрии: * Показатель эксцесса: **
		$* - \beta_1 = \frac{2(\xi - \gamma)(\gamma + \xi + 1)^{1/2}}{(\xi\gamma)^{1/2}(\gamma + \xi + 2)};$ $** - \beta_2 = \frac{3(\xi + \gamma + 1)[2(\gamma + \xi)^2 + \xi\gamma(\xi + \gamma - 6)]}{\xi\gamma(\xi + \gamma + 2)(\gamma + \xi + 3)}$

Название распределения	Плотность распределения	Числовые характеристики распределения
Равномерное 	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ a, b, где $a < b$	Математическое ожидание: $M(x) = m_1 = \frac{a+b}{2}$ Дисперсия: $D(x) = \mu_2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ Показатель асимметрии: $\beta_1 = 0$ Показатель эксцесса: $\beta_2 = 1,8$

Наукове видання

Шашенко Олександр Миколайович
Сдвижкова Олена Олександрівна
Кужель Сергій Вікторович

МАСШТАБНИЙ ЕФЕКТ В ГІРСЬКИХ ПОРОДАХ
(російською мовою)

Друкується за редакцією авторів

Підписано до друку 03.09.2004. Формат . Папір
Ум. друк. арк. Друк лазерний. Замовлення № . Тираж прим.

Підготовлено до друку
у Національному гірничому університеті
49027, м. Дніпропетровськ, просп. Карла Маркса, 19.

Типографія