

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Б. Беликов, В.В. Симонян

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

*Учебное пособие*

2-е издание

Москва 2016

УДК 621.311.22  
ББК 31.37+38.728  
Б43

**Р е ц е н з е н т ы:**

доктор технических наук, профессор *В.Н. Баранов*,  
ФГБОУ ВПО «Государственный университет по землеустройству» (ГУЗ);  
кандидат технических наук, профессор *И.И. Ранов*, НИУ МГСУ

**Беликов, А.Б.**

Б43 Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А.Б. Беликов, В.В. Симонян ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. 2-е изд. Москва : НИУ МГСУ, 2016. 432 с.

ISBN 978-7264-1255-9

Рассмотрены основные вопросы теории погрешностей, необходимые при обработке геодезических результатов измерений. Приведены сведения по теории вероятностей и математической статистике, положенные в основу изложения курса. Рассмотрены варианты обработки результатов традиционных методов измерений, а также GPS-измерений. Приведены общие сведения по методу наименьших квадратов. Отдельно рассмотрен вопрос применения метода наименьших квадратов к уравниванию геодезических сетей и построению эмпирических формул.

Для аспирантов, обучающихся по направлению 21.06.01 Геология, разведка и разработка полезных ископаемых по программе «Геодезия в строительстве».

**УДК 621.311.22**  
**ББК 31.37+38.728**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из 6 разделов. В конце каждого раздела приводятся решения типовых примеров, задачи и вопросы для самоконтроля.

В основу изложения раздела «Теория погрешностей» положен учебник профессора Ю.В. Кемница «Теория ошибок измерений», «Недра», Москва, 1967 год. Однако в раздел пришлось внести ряд изменений и дополнений.

Раздел «Теория погрешностей» в настоящее время излагается на основе дисциплин «Теория вероятностей» и «Математическая статистика». Поэтому представляется уместным поместить в начале разделы «Справочные сведения из теории вероятностей» (Раздел I) и «Справочные сведения из математической статистики» (Раздел II). Целый ряд понятий, таких как «математическое ожидание», «дисперсия», «оценка параметра» и прочие, связанных с указанными математическими дисциплинами, вводится без каких-либо дополнительных пояснений или определений.

Объединены разделы «Математическая обработка ряда равноточных результатов измерений» и «Математическая обработка ряда неравноточных результатов измерений», традиционно помещаемых раздельно во всех учебниках по теории погрешностей. При совместном рассмотрении этих разделов равноточные измерения рассматриваются как частный случай неравноточных измерений, и все формулы для этого случая легко вытекают из общего случая.

В предлагаемом учебном пособии свойства случайных погрешностей сформулированы в виде аксиом. Доказательства теорем теории погрешностей результатов геодезических измерений выполнены на базе соответствующих положений математической статистики. Приведены примеры использования методов теории погрешностей и дисперсионного анализа при исследовании геодезических приборов. Уточнены в соответствии с ГОСТами многие определения. Рассмотрены некоторые приемы априорной оценки точности.

Дополнительно введен раздел «Теория погрешностей зависимых результатов измерений» с примерами обработки GPS-измерений и раздел по основополагающим принципам метода наименьших квадратов в применении к уравниванию геодезических сетей и составлению эмпирических формул.

Авторы выражают большую благодарность всем, кто в той или иной форме принял участие в создании настоящего учебного пособия. Прежде всего это заведующий кафедрой геодезии и геоинформатики ГУЗа профессор Владимир Николаевич Баранов и профессор кафедры геодезии и геоинформатики ГУЗа Михаил Исаакович Перский, сделавшие много замечаний и предложений, учет которых значительно повлиял на качество пособия.

\*\*\*

Александр Борисович Беликов был видным ученым в области геодезии, землеустройства и кадастров, профессором Государственного университета по землеустройству.

Имея огромный опыт преподавания таких дисциплин, как теория вероятностей, математическая статистика и теория погрешностей измерений, А.Б. Беликов решил отразить его в учебном пособии, позволяющем в целом лучше освоить материал данных курсов.

К сожалению, Александр Борисович не успел в полной мере это осуществить. Являясь его учеником, я посчитал своим долгом продолжить эту работу и подготовить учебное пособие к изданию.

Доц., к.т.н. В.В.Симонян

# Раздел I. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

### 1.1. Основные понятия

Исходным пунктом построения теории вероятностей как любой теоретической науки являются экспериментальные факты, на основе которых формируются соответствующие абстрактные понятия. Чтобы разобраться в таких фактах, введем некоторые термины и определения.

Будем называть *опытом* любую реализацию некоего фиксированного комплекса условий  $S$ , который должен строго повторяться при повторении одного и того же опыта.

Результаты опыта можно характеризовать качественно и количественно.

Качественная характеристика опыта состоит в регистрации какого-нибудь факта. Любой такой факт называется *событием*. При этом говорят, что «событие появилось (произошло)» или «событие не появилось (не произошло)» в результате опыта. Будем обозначать события прописными латинскими буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Два события  $A$  и  $B$  называют *равными* ( $A = B$ ), если осуществление одного из них, неважно, какого, влечет за собой наступление другого.

События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если осуществление одного из них, неважно, какого, исключает наступление другого. События  $A$  и  $B$  будут *совместными*, если осуществление одного из них, неважно, какого, не исключает наступление другого.

Событие  $\bar{A}$  называется противоположным (дополнительным) событию  $A$ , если его осуществление означает неосуществление события  $A$ .

Объединением (суммой) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , означающее осуществление хотя бы одного из событий  $A$  и  $B$ .  $C$  помощью специального знака объединения  $\cup$  можно написать  $C = A \cup B$ . Объединяться может и большее число событий, например, объединением событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будет событие

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Совмещением (пересечением, произведением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , означающее наступление и события  $A$ , и события  $B$ .  $C$  помощью знака совмещения  $\cap$  можно написать  $C = A \cap B$ . Совмещаться может и большее число событий, например, совмещением событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будет событие

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Разностью событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , означающее, что происходит событие  $A$ , но не происходит событие  $B$ . Это обычно записывают как  $C = A \setminus B$ .

Если при испытании событие  $A$  должно наступить обязательно, с неизбежностью, то такое событие называют *достоверным*. В противоположном случае, когда событие  $A$  при испытании не должно осуществиться, оно называется *невозможным*.

Событие будет *случайным*, если при испытании оно может наступить, но может и не наступить. Ясно, что случайное событие занимает промежуточное положение между событиями достоверным и невозможным.

Анализируя комплекс условий  $S$ , осуществляемый при проведении испытаний, можно выделить так называемое *множество  $\Omega$  элементарных исходов*  $\omega$ . Это множество включает в себя единственно возможные и попарно несовместные элементарные исходы. Например, пусть испытание состоит в фиксации числа очков, выпавших на грани игральной кости. Здесь множество  $\Omega$  состоит из 6 единственно возможных и несовместимых элементарных исходов, соответствующих граням кости, помеченным в соответствии с цифрами 1, 2, ..., 6.

Рассмотрим некоторое случайное событие  $A$ , которое при испытании, порождающем множеством элементарных исходов  $\Omega$ ,

может наступить лишь в случае, когда реализуется какой-либо элементарный исход  $\omega$ , принадлежащий подмножеству  $\Omega_A$  множества  $\Omega$  ( $\omega \in \Omega_A \subseteq \Omega$ ). Например, пусть событие  $A$  заключается в выпадении на грани игральной кости четного числа очков. Тогда  $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$ , и реализация любого из трех элементарных исходов, являющихся элементами этого множества, влечет за собой наступление случайного события  $A$ . В подобных случаях случайное событие  $A$  можно формально отождествить с множеством  $\Omega_A$ , т.е. записать, что  $A = \Omega_A$ .

Если  $A = \Omega$ , то событие  $A$  будет достоверным. Если же  $A = \emptyset$ , где  $\emptyset$  — символ пустого множества, то событие  $A$  будет невозможным.

Говорят, что случайное событие  $A$  влечет за собой наступление события  $B$ , когда  $A$  содержится в  $B$ , т.е.  $A \subseteq B$ . Например, пусть событие  $A$  есть выпадение на грани игральной кости 2 очков, а событие  $B$  — выпадение на грани не менее 4 очков. Тогда  $A \subset B$ .

## 1.2. Частота и вероятность случайного события

Пусть при неизменном комплексе условий  $S$  проведена серия из  $n$  испытаний и при каждом из них фиксировалось появление или не появление случайного события  $A$ . Допустим, что случайное событие  $A$  осуществилось при этом  $m$  раз. Тогда говорят, что частота этого события равна  $A$ , а частота

$$H(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Пусть при неизменном комплексе условий  $S$  осуществлено значительное число таких серий испытаний достаточно большой длины и при этом оказалось, что частоты  $H(A)$ , вычисленные для всех серий испытаний, будут числами, близкими одно к другому. Тогда говорят, что случайное событие  $A$  обладает *устойчивой частотой* (или просто *устойчивой частотой*). Число, около которого колеблется устойчивая частота, называется *вероятностью* случайного события  $A$  и обозначается через  $P(A)$ .

Вероятность численно выражает степень объективной возможности наступления случайного события и является абстрактным отражением его устойчивой частоты. Соотношение между  $H(A)$  и  $P(A)$  аналогично соотношению между физическими объектами

и их математическим образом. Например, между физическими точками (прямыми), поставленными или проведенными на доске мелом или на бумаге карандашом, и их абстрактными геометрическими образами — математическими точками (прямыми). Как операции с абстрактными геометрическими образами отражают свойства реального физического пространства, так и операции с вероятностями случайных событий должны отражать свойства устойчивых частот этих случайных событий. Поэтому  $H(A)$  часто называют *статической вероятностью* в отличие от близкой к ней величины — математической вероятности  $P(A)$ .

Из самого определения  $H(A)$ , задаваемого формулой (1.1), следует, что  $0 \leq H(A) \leq 1$ . Поэтому и на  $P(A)$  целесообразно наложить условие

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

Если событие достоверно, то при всех испытаниях оно неизбежно осуществится, и потому согласно (1.1) его частота будет равна 1.

Поэтому полагают

$$P(\Omega) = 1. \quad (1.3)$$

Если случайные события  $A$  и  $B$  несовместные, то при надлежаще исполненной серии испытаний можно подсчитать, что  $H(A \cup B) = H(A) + H(B)$ . Потому для несовместных случайных событий  $A$  и  $B$  принимают, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1.4)$$

Наложенные требования (1.2) — (1.4) на вероятности случайных событий можно рассматривать как систему аксиом, лежащих в основе теории вероятностей.

С помощью приведенных аксиом можно доказать следующие положения.

1. Вероятность случайного события  $\bar{A}$ , противоположного событию  $A$ , равна дополнению  $P(A)$  до единицы, т.е.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.5)$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(\emptyset) = 0. \quad (1.6)$$

3. Вероятность разности событий  $A$  и  $B$  равна

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B). \quad (1.7)$$

4. Если случайные события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно несовместны, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.8)$$

5. Если случайные события  $A$  и  $B$  совместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.9)$$

### 1.3. Классическое определение вероятности

Пусть при данном комплексе условий конечное множество  $\Omega$  состоит из  $n$  равновероятных элементарных исходов  $\omega$ . Далее положим, что случайное событие  $A$  наступает тогда, когда из всех  $n$  элементарных исходов реализуется любой из  $m$  элементарных исходов, принадлежащих множеству  $\Omega_A \subset \Omega$ . Элементы множества  $\Omega_A$  называют элементарными исходами, благоприятствующими наступлению события  $A$ . Тогда вероятность наступления события  $A$  определится как отношение

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.10)$$

т.е. будет равна отношению числа благоприятствующих элементарных исходов к общему числу единственно возможных равновероятных элементарных исходов.

Например, событие  $A$  есть выпадение четной цифры при бросании игральной кости. Если кость представляет собой правильный куб с изотропным распределением массы в его теле, то существует уверенность, что при ее бросании может с одинаковой возможностью выпасть любая из цифр от 1 до 6. Тогда полагаем  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $n = 6$ ,  $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$ ,  $m = 3$ , и поэтому  $P(A) = 1/2$ .

Так определялась вероятность случайного события с момента возникновения теории вероятности как науки. В дальнейшем оказалось, что такое определение вероятности недостаточно общее, и потому формула (1.10) не всегда применима. Действительно, решающим этапом в применении этой формулы является анализ комплекса условий, приводящий к выделению множеств  $\Omega$  и  $\Omega_A$ .

Однако этот анализ не всегда приводит к желаемым результатам. В примере с игральной костью такое выделение множеств  $\Omega$  и  $\Omega_A$  не удастся провести, если распределение масс в ее теле не будет изотропно и центр тяжести кости будет смещен относительно геометрического центра. Несмотря на это, классическое определение вероятности при решении практических задач часто позволяет получать приемлемые результаты.

## 1.4. Связь между случайными событиями. Условная вероятность

Случайные события  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если осуществление одного из них никак не повлияет на то, что появится или нет второе; в противном случае они будут *зависимыми*.

Пусть  $P(A)$  и  $P(B)$  — вероятности осуществления случайных событий  $A$  и  $B$ , посчитанные еще до испытания; их называют *безусловными*. Если события  $A$  и  $B$  зависимы и, например, событие  $A$  уже произошло, то вероятность наступления события  $B$  уже изменится; обозначим ее через  $P(B/A)$ . Эту вероятность называют *условной*, и обозначение  $P(B/A)$  читают так: вероятность события  $B$ , рассчитанная при условии, что событие  $A$  произошло.

Проводя испытания над зависимыми случайными событиями и вычисляя частоты их появления, можно установить закономерности, которые в абстрактной форме найдут отражение в виде формул:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ и } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (1.11)$$

которые и определяют условные вероятности зависимых случайных событий.

Из (1.11) вытекает правило подсчета вероятности совмещения двух зависимых случайных событий:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A) = P(B) P(A/B). \quad (1.12)$$

Для того чтобы два события  $A$  и  $B$  были независимы, необходимо и достаточно, чтобы вероятность их совмещения была произведением их безусловных вероятностей, т.е.

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \quad (1.13)$$

Условные вероятности обладают следующими свойствами.

1.  $0 \leq P(A/B) \leq 1$ .
2. Если  $A$  и  $B$  несовместны, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A/B) = 0$ .
3.  $P(\Omega/A) = 1$ .
4.  $P(A/A) = 1$ .
5. Если  $B \cap C = \emptyset$ , то  $P(B \cup C/A) = P(B/A) + P(C/A)$ .
6. Если  $B \subseteq A$ , то  $P(A/B) = 1$ .

Если случайные события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно несовместимы, а  $B$  — некоторое произвольное случайное событие, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i / B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i / B). \quad (1.14)$$

Если совмещаются случайные события, число которых более двух, то формула (1.12) принимает более обобщенный вид

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2) \dots P(A_n / A_1A_2 \dots A_{n-1}), \quad (1.15)$$

где под  $P(A_n / A_1A_2 \dots A_{n-1})$  следует понимать условную вероятность события  $A_n$ , вычисленную в предположении, что события  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  уже произошли.

При расчетах вероятностей случайных событий большое значение имеет такая схема.

Пусть  $A$  — некоторое случайное событие,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — попарно несовместимые случайные события, т.е.

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j),$$

такие, что  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , и известны безусловные вероятности  $P(B_i)$  и условные вероятности  $P(A/B_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда справедливы следующие две формулы:

**формула полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i); \quad (1.16)$$

**формула Байеса**

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.17)$$

## 1.5. Схемы повторения испытаний

**Схема Бернулли.** Пусть в неизменном комплексе условий  $S$  проводится серия из  $n$  независимых испытаний и в результате каждого испытания фиксируется появление некоторого случайного события  $A$ . При этом положим, что вероятность осуществления события  $A$  при каждом отдельном испытании остается неизменной и равной  $p$ . Тогда вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит ровно  $k$  раз, будет равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.18)$$

где  $q = 1 - p$  — вероятность события  $\bar{A}$ .

Здесь предполагается, что число испытаний  $n$  фиксировано.

При увеличении  $k$  от 0 до  $n$  вероятность  $P_n(k)$  сначала монотонно возрастает, а достигнув некоторого максимального значения  $P_n(k_0)$ , далее монотонно убывает. Число  $k_0$  называется наимвероятнейшим числом наступления случайного события  $A$ . Оно может быть найдено с помощью неравенств

$$np - q \leq k_0 \leq np + q \quad (1.19)$$

как единственное целое число, заключенное в указанных пределах.

Если число испытаний  $n$  велико, а вероятность  $p$ , наоборот, мала и произведение  $\lambda = np$  не мало, но и не велико, то в таком случае может быть использована приближенная формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (1.20)$$

Если же число  $n$  велико и не мала вероятность  $p$ , то можно воспользоваться другим приближением, вытекающим из так называемой локальной теоремы Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k), \quad (1.21)$$

где  $\varphi(x_k)$  по заранее вычисленной величине

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad (1.22)$$

выбирается из помещенной в Приложении 1 таблицы значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.23)$$

**Полиномиальная схема.** В схеме испытаний Бернулли при каждом испытании было два возможных исхода: либо событие  $A$  наступит, либо, наоборот, не наступит. В рассматриваемой схеме испытаний возможны  $r > 2$  исходов  $B_1, B_2, \dots, B_r$  соответственно с вероятностями  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), причем

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1. \quad (1.24)$$

Тогда вероятность того, что при  $n$  независимых испытаниях исход  $B_1$  наступит  $k_1$  раз, исход  $B_2$  —  $k_2$  раз, ..., исход  $B_r$  —  $k_r$  раз, причем

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n, \quad (1.25)$$

будет равна

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}. \quad (1.26)$$

Название рассматриваемой схемы испытаний объясняется тем, что правая часть равенства (1.26) есть общий член разложения  $n$ -й степени полинома, стоящего в левой части равенства (1.24). При  $r = 2$  полиномиальная схема обращается в схему Бернулли.

В случае использования формулы (1.26) при больших  $n$  приходится вычислять  $n!$ , что прямым путем затруднительно. Для этого можно воспользоваться приближенной формулой Стирлинга  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+0,5} e^{-n}$ .

**Схема Пуассона.** Пусть в неизменном комплексе условий  $S$  проводится достаточно большая серия испытаний  $n$  независимых испытаний. В результате каждого испытания фиксируется, произошло или нет некоторое событие  $A$ . Но теперь, в отличие от схемы Бернулли, будем считать, что при каждом испытании вероятность осуществления события  $A$  не остается постоянной, а от испытания к испытанию уменьшается в соответствии с формулой

$$p = \frac{\lambda}{n}, \quad (1.27)$$

где  $\lambda$  — некоторая константа.

Тогда вероятность, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит  $k$  раз, будет равна

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.28)$$

## 1.6. Примеры решения типовых задач

### Пример 1.1

В ящике имеется  $a$  синих и  $b$  красных шаров. Вычислить вероятность того, что наугад вынутый шар окажется красным.

*Решение*

Пусть  $A$  — событие, состоящее в том, что вынут красный шар. Пространство элементарных исходов состоит из  $a+b$  событий, каждое из которых заключается в вытаскивании одного из шаров. Событию  $A$  соответствует  $b$  благоприятных исходов, следовательно

$$P(A) = \frac{b}{a+b}.$$

### Пример 1.2

В партии из  $n$  изделий  $k$  бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу  $m$  изделий ровно  $l$  изделий окажется бракованными.

*Решение*

Число возможных способов выбрать  $m$  изделий из  $n$  равно  $C_n^m$ . Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа  $k$  бракованных изделий взято ровно  $l$ , что можно сделать  $C_k^l$  способами, а остальные  $m-l$  изделий не бракованные. Они должны быть выбраны из оставшихся  $n-k$  стандартных деталей. Число вариантов такого отбора равно  $C_{n-k}^{m-l}$ . Общее число благоприятных исходов в этом случае будет равно произведению двух рассмотренных уже вариантов отбора  $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$ , так как каждому возможному выбору бракованных изделий может соответствовать  $C_{n-k}^{m-l}$  вариантов выбо-

ра стандартных деталей. Тогда искомая вероятность будет равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу воз-

можных исходов, т.е. верно равенство  $p = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$ .

## 1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает четное число очков.

1.2. Замок с «секретом» имеет пять дисков, каждый из которых разделен на 6 дисков с нанесенными цифрами от 0 до 5. Замок открывается при определенном положении цифр относительно указателей. Определить вероятность того, что при произвольной установке цифр на дисках относительно указателей замок откроется.

1.3. В партии из 1000 деталей 10 бракованных. Наудачу выбирают 40 деталей. Определить вероятность того, что среди выбранных деталей будет ровно 4 бракованных.

1.4. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

1.5. При измерении 20 линий теодолитного хода в 3 из них были допущены грубые промахи. Наудачу выбраны 5 линий. Какова вероятность того, что 2 из них содержат грубые промахи.

1.6. Точка  $A$  появляется внутри эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Найти веро-

ятность того, что она окажется внутри эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2$  ( $|k| < 1$ ),

считая, что вероятность появления точки в некоторой области пропорциональна площади этой области и не зависит от места ее расположения внутри начального эллипса.

1.7. Имеется  $2n$  невязок в треугольниках сети триангуляции. Все невязки произвольно разбивают на две группы одинакового объема. Найти вероятность того, что две самые большие по абсолютной величине невязки окажутся: а) в одной группе; б) в разных группах. Как проконтролировать правильность вычисления искомых вероятностей?

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется случайным событием?
2. Какие бывают виды случайных событий?
3. Что такое вероятность случайного события? Каково классическое определение вероятности и в чем его ограниченность?
4. Что называют условной вероятностью?
5. Какой вид имеет формула полной вероятности?
6. Как вычислить вероятность появления ровно  $k$  событий при  $n$  испытаниях, если вероятность появления этого события в одном испытании равна  $p$ ?

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### 2.1. Основные понятия.

#### Функция и плотность распределения

*Случайной величиной* называют такую переменную, значения которой могут меняться в зависимости от случая. Она вполне определена, если, во-первых, известно множество ее возможных значений, или, как часто говорят, множество ее реализаций, во-вторых, известны вероятности, с которыми она принимает свои возможные значения.

Итак, *случайной величиной называют переменную, каждое возможное значение которой появляется с определенной вероятностью.*

Различают два основных вида случайных величин: *случайные дискретные величины*, реализации которых отличаются друг от друга на конечные интервалы, и *случайные непрерывные величины*, реализации которых могут принимать все значения в заданных конечных или бесконечных промежутках.

Пусть случайная величина  $X$  дискретна. Тогда ее закон распределения вероятностей может быть задан, например, табл. 2.1.

Таблица 2.1

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

В верхней строке приведены возможные реализации  $x_i$  случайной величины  $X$ , в нижней — вероятности  $p_i$  этих реализаций, причем должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (2.1)$$

В данном случае приведен пример случайной дискретной величины с конечным множеством реализаций. Но существуют случайные дискретные величины с бесконечными, но счетными множествами реализаций. Бесконечное множество считается счетным, если все его элементы можно занумеровать натуральными числами. Уже в этом случае не всегда удастся задать случайную величину в виде табл. 2.1, а при случайной непрерывной величине табличный метод ее задания вообще невозможен.

Попытаемся реализовать иной метод задания случайной величины, который мог бы полностью описать любую случайную величину.

Пусть имеется произвольная случайная величина  $X$ . Зафиксируем произвольное число  $x_i$  и рассмотрим случайное событие  $A_p$ , состоящее в том, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее фиксированного  $x_p$ , т.е.  $A_i: X < x_i$ . Пусть вероятность этого события равна  $F(x_i) = P(X < x_i) = p_i$ . Разумеется, что при изменении  $x_i$  меняется величина  $F(x_i)$ , т.е. эта величина есть функция от  $x$ . Тогда запишем

$$F(x) = P(X < x). \quad (2.2)$$

Назовем выражение (2.2) *функцией распределения вероятностей случайной величины  $X$* , или просто *функцией распределения*. Она представляет собой *вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее фиксированного  $x$* . Геометрически это факт можно истолковать так:  $F(x)$  есть вероятность того, что *случайная величина  $X$  примет значение левее точки  $x$* .

Такой метод задания случайной величины является универсальным и пригоден для задания случайных величин любого вида.

Функция распределения случайной величины, принимающей значения на интервале  $(a, b)$ , обладает следующими свойствами.

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ , так как ее значения являются вероятностями;

$$2. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ 1 & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

3. Свойство монотонного возрастания:  $F(x_2) \geq F(x_1)$ , если  $x_2 > x_1$ .

Пример графика функции распределения дискретной случайной величины приведен на рис. 2.1, а, а непрерывной случайной величины — на рис. 2.1, б.

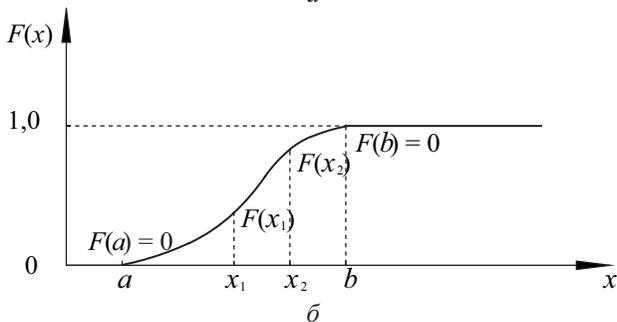
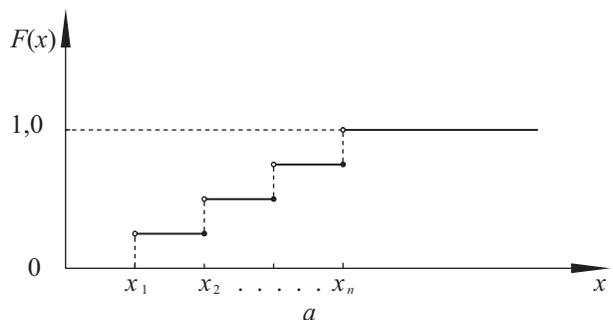


Рис. 2.1

С помощью функции распределения вероятность попадания случайной величины  $X$  в некоторый интервал от  $x_1$  до  $x_2$  выражается формулой

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad (2.3)$$

из которой, в частности, легко усмотреть, что вероятность попадания случайной непрерывной величины «в точку» равна нулю. Иначе говоря, в отличие от случайной дискретной величины, для случайной непрерывной величины бессмысленный вопрос о веро-

ятности, что она станет равной такому-то числу; эта вероятность всегда равна нулю.

Заметим, что множество возможных реализаций случайной непрерывной величины может быть и всей числовой осью, т.е.  $a \rightarrow -\infty$ ;  $b \rightarrow \infty$ .

Если функция распределения  $F(x)$  дифференцируема, то ее первая производная  $f(x)$ , называется *плотностью распределения случайной величины  $X$* . Она также используется для задания закона распределения вероятностей последней. Имеем

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x). \tag{2.4}$$

Как первая производная от  $F(x)$ , эта функция обладает следующими свойствами:

$$1) f(x) \geq 0; \quad 2) \int_a^b f(x) dx = 1. \tag{2.5}$$

Из первого свойства вытекает, что плотность распределения есть всегда неотрицательная функция; из второго — что площадь под кривой, изображающей эту функцию на графике, равна единице.

В качестве примера рассмотрим кривую, изображенную на рис. 2.2. В данном случае  $a = 0$ , а  $b \rightarrow \infty$ , т.е. множество реализаций этой величины является все множество неотрицательных действительных чисел.

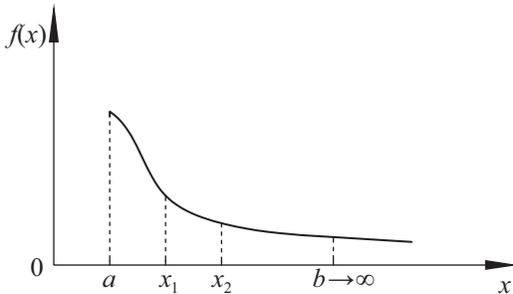


Рис. 2.2

С помощью плотности распределения формуле (2.3) можно придать такой вид

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (a \leq x_1 \leq x_2 \leq b). \quad (2.6)$$

Для случайной величины, график плотности которой показана на рис. 2.2, интеграл, стоящий в правой части равенства (2.6), равен площади заштрихованной части и соответствует вероятности попадания случайной величины в интервал  $(x_1, x_2)$ .

С помощью плотности распределения вероятность попадания случайной величины в бесконечно малый интервал от  $x$  до  $x+dx$

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x) dx, \quad (2.7)$$

откуда усматриваем, что плотность распределения имеет размерность, обратную размерности самой случайной величины  $X$ , так как величина  $f(x)dx$ , называемая обычно элементом вероятности, отвлеченная.

Для случайной непрерывной величины функцию  $F(x)$  часто называют *интегральным законом распределения*, а функцию  $f(x)$  — *дифференциальным законом распределения*.

Заметим, что на основании свойства 2 функции распределения случайной величины, преследуя однообразие записей, пределы интегрирования в (2.5) обычно формально распространяют до  $-\infty$

и  $+\infty$ , записывая эту формулу в виде  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

Аналогично функцию распределения вместо

$$F(x) = \int_a^x f(z) dz \quad (a < x < b)$$

записывают в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz. \quad (2.8)$$

Несмотря на то, что такая формальная запись удобна и мы в дальнейшем ее будем использовать, надо иметь в виду, что при последующем интегрировании эта замена пределов может привести

к недоразумениям, если не учесть действительные пределы изменения случайной величины.

Рассмотрим некоторые математические операции со случайной величиной  $X$ .

*Постоянную* величину  $C$  можно рассматривать как величину случайную с единственной реализацией  $C$ , появляющейся в каждом опыте с вероятностью 1.

*Произведением* случайной величины  $X$  на постоянную величину  $C$  называют новую случайную величину

$$Y = CX, \quad (2.9)$$

все возможные значения которой равны значениям исходной случайной величины  $X$ , умноженным на постоянную  $C$  с теми же самыми вероятностями.

Две случайные величины будут независимыми, если любая реализация одной случайной величины (любой) не меняет закона распределения другой.

Под произведением двух независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  понимают третью случайную величину

$$Z = XY, \quad (2.10)$$

реализации которой могут быть получены как всевозможные произведения реализаций двух исходных случайных величин с вероятностями, равными произведениям вероятностей этих реализаций.

## 2.2. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения вероятностей полностью описывает случайную величину, но часто используются упрощенные приемы ее описания, одним из которых является *способ числовых характеристик*. Каждая числовая характеристика описывает лишь одну сторону, одно свойство случайной величины, и это осуществляется существенно проще, чем использование самого закона распределения. Зная закон распределения случайной величины, можно вычислить любую ее числовую характеристику.

**Числовые характеристики положения.** Пусть случайная дискретная величина  $X$  обладает законом распределения, заданным в

табл. 2.1. Под *математическим ожиданием* этой случайной величины будем понимать средневзвешенное по вероятности значение ее реализаций, т.е.

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (2.11)$$

где  $M(X)$  — символ математического ожидания.

Учитывая формулу (2.1), для математического ожидания случайной дискретной величины получаем

$$M(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i. \quad (2.12)$$

Для случайной величины непрерывного типа, естественно, математическое ожидание выразится не конечной, а интегральной суммой:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.13)$$

Математическое ожидание на числовой оси выражается точкой, вокруг которой тем или иным образом, зависящим от характера случайной величины, группируют точки, изображающие ее отдельные реализации.

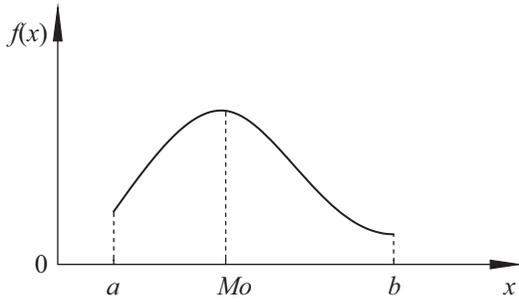
Математическое ожидание можно рассматривать как величину, так и как математическую операцию по нахождению этой величины.

Иногда вместо математического ожидания используют другие, так называемые числовые характеристики положения, например, *моду* ( $M_o$ ) и *медиану* ( $M_e$ ).

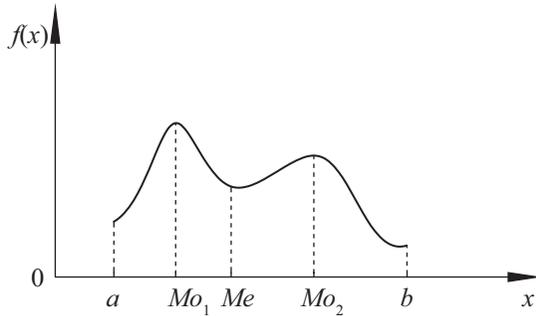
Для случайной дискретной величины под модой понимают ее вероятнейшее значение, т.е. реализацию с максимальной вероятностью.

Для случайной величины непрерывного типа моде соответствует реализация, обеспечивающая максимум плотности распределения:

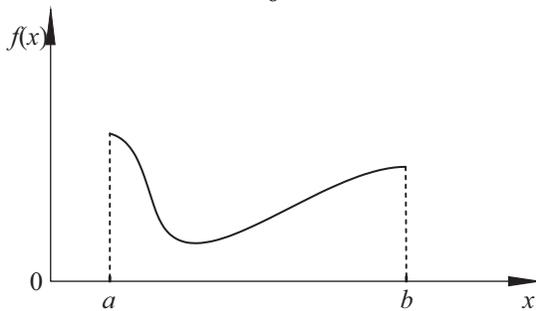
$$f(M_o) = \max.$$



*a*



*б*



*в*

Рис. 2.3

Если случайная величина имеет плотность распределения с единственным максимумом, то такое распределение называют *унимодальным* (рис. 2.3, *a*); в противном случае, при наличии у плотности более одного максимума, распределение называют *полимодальным* (рис. 2.3, *б*). Может случиться, что плотность распределения максимумов не имеет, а минимум у нее есть. Тог-

да говорят об *антимодальном* распределении (рис. 2.3, в). На этом же рисунке представлено значение математического ожидания  $M(X)$ .

Под медианой случайной дискретной величины понимается такая ее реализация, относительно которой бóльшие и меньшие реализации распределяются поровну.

Для случайной непрерывной величины медиана определяется из уравнения

$$F(Me) = \frac{1}{2}.$$

В данном случае медиана изображается на числовой оси точкой, ордината которой делит площадь под кривой плотности распределения на две части. На рис. 2.3, б эти части выделены штриховкой разного наклона.

Ясно, что мода и медиана, как и математическое ожидание, являются так называемыми внутренними средними из реализаций случайной величины.

**Числовые характеристики разброса.** Наиболее часто употребляемой характеристикой разброса случайной величины относительно ее математического ожидания является *дисперсия* случайной величины  $D(X)$ . Дисперсия случайной дискретной величины выражается суммой

$$D(X) = \sum_{i=1}^n p_i [x_i - M(X)]^2, \quad (2.14)$$

а непрерывной — интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx. \quad (2.15)$$

Для обоих случаев дисперсию можно выразить любой из двух следующих формул:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2, \\ D(X) &= M(X^2) - M^2(X). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Дисперсия есть характеристика разброса, рассеивания отдельных реализаций случайной величины вокруг ее математического

ожидания. Размерность дисперсии равна квадрату размерности самой случайной величины, что в практических приложениях не всегда удобно. Поэтому часто в качестве характеристики рассеивания применяют величину  $\sigma = +\sqrt{D(X)}$ , называемую *стандартом*, или *среднеквадратическим отклонением*.

**Моменты случайных величин.** *Моментами порядка  $\nu$  относительно точки  $C$*  называют величины, рассчитываемые по формулам:

$$\alpha_{\nu} = \sum_{i=1}^n p_i (x - C)^{\nu}, \quad (2.17)$$

$$\alpha_{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - C)^{\nu} f(x) dx.$$

Положив в (2.17)  $C = 0$ , приходим к так называемым *начальным моментам порядка  $\nu$* :

$$\alpha_{\nu} = M(X^{\nu}) \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (2.18)$$

Приняв теперь в (2.17)  $C = M(X)$ , приходим к *центральному моменту порядка  $\nu$* , которые для дискретного и непрерывного случаев можно представить общей формулой

$$\mu_{\nu} = M\left\{[X - M(X)]^{\nu}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (2.19)$$

Легко видеть, что математическое ожидание есть первый начальный момент, дисперсия — второй центральный момент, а первый центральный момент всегда равен нулю.

Часто используют еще две числовые характеристики случайных величин:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (2.20)$$

называемую *асимметрией*, или *коэффициентом асимметрии*, и

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \quad (2.21)$$

называемую *эксцессом*, или *коэффициентом эксцесса*.

Для различных случайных величин асимметрия и эксцесс, если в конкретных случаях они существуют, могут изменяться в пределах:

$$-\infty < \gamma < \infty; \quad -2 < \varepsilon < \infty. \quad (2.22)$$

### 2.3. Примеры случайных дискретных величин

*Биномиальное распределение.* В схеме испытаний Бернулли число  $k$  наступления события  $A$  при  $n$  независимых испытаниях, при которых  $P(A) = p = \text{const}$ , является случайным, и потому его можно рассматривать как случайную величину, закон распределения которой может быть описан формулой (1.18). Этот закон зависит от двух параметров  $n$  и  $p$ . Числовые характеристики этой случайной величины будут следующими:

$$\begin{aligned} M(X) &= np; \\ D(X) &= npq; \\ \sigma(X) &= \sqrt{npq}; \\ \mu_3 &= npq(q-p); \\ \mu_4 &= 3n^2 p^2 q^2 + npq(1-6pq); \\ \gamma &= \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}; \\ \varepsilon &= \frac{1-6pq}{npq}. \end{aligned}$$

Мода этого распределения  $M_0 = k$  определяется из неравенств (1.19).

В симметричном случае, когда  $p = q = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{n}{2}; \\ D(X) &= \frac{n}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \frac{\sqrt{n}}{2}; \\ \mu_3 &= 0; \\ \mu_4 &= \frac{n(3n-2)}{16}; \\ \gamma &= 0; \\ \varepsilon &= -\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

*Распределение Пуассона.* Если случайная величина  $k$  распределена по закону, описываемому формулой (1.20), то говорят, что она обладает распределением Пуассона. Закон распределения этой случайной величины зависит от одного параметра  $\lambda$ . Для данной случайной величины:

$$\begin{aligned}M(X) &= D(X) = \lambda; \\ \sigma(X) &= \sqrt{\lambda}; \\ \mu_3 &= \lambda; \\ \mu_4 &= \lambda(1 + 3\lambda); \\ \gamma &= \lambda^{-\frac{1}{2}}; \\ \varepsilon &= \lambda^{-1}.\end{aligned}$$

Распределение Пуассона находит значительное число приложений, основанных на следующей геометрической интерпретации.

Пусть в некоторой области  $\Omega$  (одно-, двух-, трехмерной) независимо друг от друга появляется очень большое число  $N$  случай-

ных точек так, что их плотность  $\lambda = \frac{N}{\Omega}$  для любой подобласти

$M\omega = k$  постоянна. Тогда вероятность того, что в  $\omega \subset \Omega$  появится  $k$  точек, будет равна

$$p(k, \lambda\omega) = \frac{(\lambda\omega)^k}{k!} e^{-\lambda\omega} \quad (k = 0, 1, 2 \dots). \quad (2.23)$$

Здесь под  $\omega$  понимают либо длину, либо площадь, либо объем.  
 В этом случае числовые характеристики случайной величины  $k$  будут равны:

$$M(k) = D(k) = \lambda\omega;$$

$$\sigma(k) = \sqrt{\lambda\omega};$$

$$\mu_3 = \lambda\omega;$$

$$\mu_4 = \lambda\omega(1 + 3\lambda\omega);$$

$$\gamma = (\lambda\omega)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\varepsilon = (\lambda\omega)^{-1}.$$

## 2.4. Примеры случайных непрерывных величин

*Равномерное распределение.* Случайная величина называется равномерно распределенной в интервале  $a \leq X \leq b$ , если плотность ее распределения в этом интервале постоянна, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x \leq a \text{ и } x \geq b. \end{cases} \quad (2.24)$$

График этой функции имеет вид, представленный на рис. 2.4, а.

Функция распределения этой случайной величины выражается формулой

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.25)$$

и имеет график, приведенный на рис. 2.4, б.

Основные числовые характеристики этой случайной величины следующие:

$$M(X) = \frac{a+b}{2};$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(X) = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}};$$

начальные моменты

$$\alpha_v = \frac{b^{v+1} - a^{v+1}}{(v+1)(b-a)} \quad (v=1, 2, \dots);$$

центральные моменты

$$\mu_v = \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2^v(b-a)} & \text{при } v=2k, \\ 0 & \text{при } v=2k+1, \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots);$$

асимметрия и эксцесс соответственно будут равны

$$\gamma = 0 \text{ и } \varepsilon = -1,2.$$

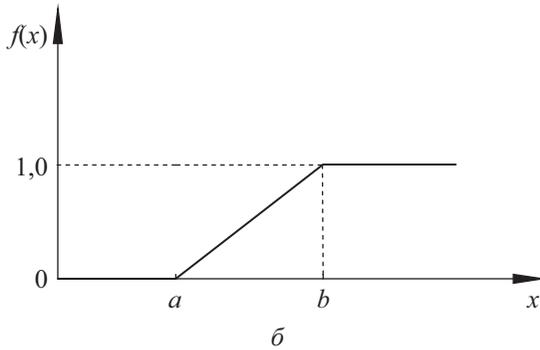
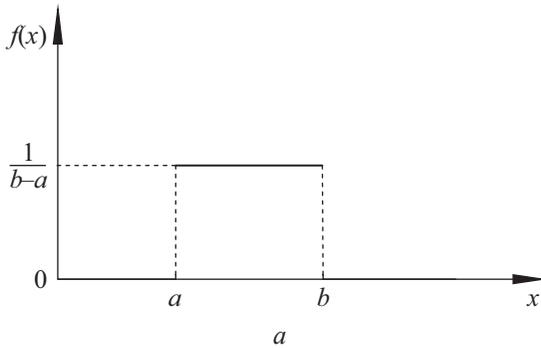


Рис. 2.4

Особый интерес представляет симметричный случай, когда

$$-a = b = \delta.$$

Тогда функции плотности и распределения выразятся формулами:

$$f(x) = \frac{1}{2\delta};$$

$$F(x) = \frac{x + \delta}{2\delta}; \quad (-\delta \leq x \leq +\delta),$$

а числовые характеристики будут:

$$M(X) = 0;$$

$$D(X) = \frac{\delta^2}{3};$$

$$\delta(X) = \frac{\delta}{\sqrt{3}};$$

начальные и центральные моменты

$$\alpha_v = \mu_r = \begin{cases} \frac{\delta^v}{v+1} & \text{при } v = 2k, \\ 0 & \text{при } v = 2k+1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

асимметрия и эксцесс останутся прежними.

*Закон распределения Коши.* Случайная величина распределена по закону Коши, если обладает плотностью распределения вида

$$f(x) = \frac{h}{\pi(1+h^2x^2)} \quad (h > 0; \quad -\infty < x < +\infty). \quad (2.26)$$

Функция распределения ее соответственно

$$F(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctgh} x \quad (h > 0; \quad -\infty < x < +\infty).$$

Этот закон распределения зависит от одного параметра  $h > 0$ . Математическое ожидание и все начальные и центральные нечетные моменты равны нулю, а дисперсия и все начальные и цен-

тральные моменты четных порядков не существуют; грубо говоря, они бесконечны.

Следовательно, асимметрия этого распределения равна нулю, а эксцесс не имеет смысла. Распределение симметрично, т.е.  $f(x) = f(-x)$ , и потому  $Mo = Me = 0$ .

*Нормально распределенная случайная величина.* Случайная величина называется нормально распределенной, если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.27)$$

и функция распределения, соответственно, выражается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.28)$$

Для этих функций общеприняты стандартные обозначения  $n(x, a, \sigma)$  и  $N(x, a, \sigma)$ . Этот закон распределения вероятностей зависит от двух параметров:  $a$  и  $\sigma$ .

Плотность нормального распределения изображается на графике кривой (рис. 2.5), для которой ось абсцисс является асимптотой. Кривая имеет единственный максимум в точке  $a$  и симметрична относительно ординаты, проведенной в этой точке, т.е.  $f(x - a) = f(-x + a)$ . В точках  $a - 2\sigma$  и  $a + 2\sigma$  кривая имеет точки перегиба.

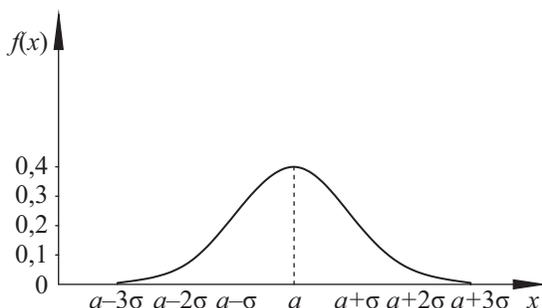


Рис. 2.5

Основные числовые характеристики нормально распределенной случайной величины имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} M(X) &= Mo = Me = a; \\ D(X) &= \sigma^2; \\ \gamma &= 0; \\ \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.29)$$

Центральные моменты выражаются следующей общей формулой:

$$m_v = \begin{cases} (v-1)!! & \text{при } n = 2k, \\ 0 & \text{при } n = 2k+1, \end{cases} \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.30)$$

Поскольку интеграл в (2.28) не выражается в элементарных функциях, для вычисления вероятностей возникает необходимость в его табулировании. Однако непосредственное осуществление этого неудобно, так как требует построения таблиц с тремя входами: по  $x$ ,  $a$  и  $\sigma$ . Поэтому используется такой прием. В (2.28) вводится новая переменная интегрирования

$$t = \frac{x-a}{\sigma}, \quad (2.31)$$

и тогда интеграл предстает в виде

$$F(x) = \Phi(t),$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.32)$$

Но это уже функция одного аргумента  $t$ , и она легко табулируется.

Теперь формуле (2.3) для случая нормально распределенной случайной величины  $X$  можно придать вид

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \quad (2.33)$$

или также равносильную форму

$$P(a + t_1\sigma < X < a + t_2\sigma) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad (2.34)$$

где

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}; \quad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Кроме таблиц функции (2.32), для тех же целей существуют таблицы так называемой функции Лапласа

$$\Phi_{\text{л}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (0 < t < \infty). \quad (2.35)$$

и удвоенной функции Лапласа

$$\Phi_{2\text{л}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi_{\text{л}}(t). \quad (2.36)$$

Связь между функциями (2.32), (2.35) и (2.36) выражается равенствами:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \Phi_{\text{л}}(t) = \frac{1 + \Phi_{2\text{л}}(t)}{2},$$

что позволяет совершать переход от одних таблиц к другим.

Но функция (2.32) имеет, кроме того, следующий вероятностный смысл. Введем вместо исходной нормально распределенной

случайной величины  $X$  новую,  $T = \frac{X - a}{\sigma}$ , которую называют цен-

трированным математическим ожиданием и нормированным среднеквадратическим отклонением случайной величиной. Оказывается, что функцией распределения вероятностей этой случайной величины является именно функция (2.32), т.е.

$$P\{T < t\} = \Phi(t). \quad (2.37)$$

Плотность распределения случайной величины  $T = \frac{X - a}{\sigma}$  имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.38)$$

Основные числовые характеристики случайной величины

$T = \frac{X - a}{\sigma}$  таковы: математическое ожидание, мода и медиана рав-

ны нулю; дисперсия и среднеквадратические отклонения равны единице; асимметрия и эксцесс нулевые; нечетные центральные моменты все равны нулю, а четные равны  $(\nu - 1)!!$  ( $\nu = 2, 4, \dots$ ).

Следовательно, в стандартных обозначениях можно записать

$$\varphi(t) = n(t, 0, 1).$$

На рис. 2.6 приведен график плотности распределения (2.38) центрированной нормированной случайной величины. Изображающая ее кривая симметрична относительно оси ординат, следовательно:

1.  $\varphi(t) = \varphi(-t)$ ;
2. Имеет перегибы в точках  $t = \pm 2$ ;  
единственный максимум в начале координат;  
ось абсцисс в роли асимптоты.

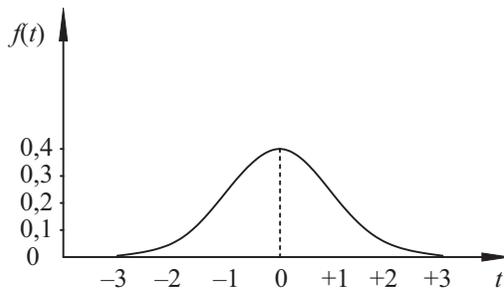


Рис. 2.6

$\chi^2$  — **распределение**. Пусть  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ) множество независимых случайных величин, подчиненных одному и тому же нормальному закону с математическим ожиданием  $a$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ . Тогда случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2 \quad (0 < \chi^2 < \infty) \quad (2.39)$$

обладает распределением с плотностью

$$k_\nu(x) = \frac{x^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (2.40)$$

где параметр  $\nu$  называют числом степеней свободы. Графики плотности распределения этой случайной величины для различных чисел степеней свободы приведены на рис. 2.7. При  $\nu \leq 2$  функция (2.39) монотонно убывает, а при  $\nu > 2$  имеет единственный максимум в точке  $\nu - 2$ .

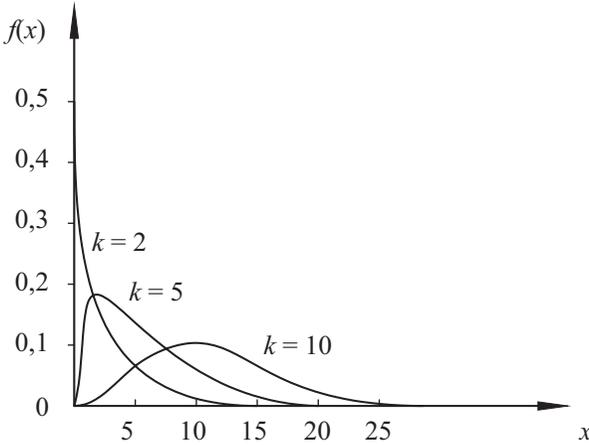


Рис. 2.7

**Распределение Стьюдента.** Пусть  $X_0, X_1, \dots, X_\nu$  — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же нормальному закону с плотностью  $n(x, a, \sigma)$ . Тогда случайная величина

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}} \quad (-\infty < T < +\infty) \quad (2.41)$$

будет распределена по закону с плотностью

$$S_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(1+x^2)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2.42)$$

Это распределение иногда называют  $\gamma$ -распределением; оно симметрично, т.е.  $S_\nu(x) = S_\nu(-x)$ , унимодально, имеет все моменты порядка не выше числа степеней свободы без единицы  $(\nu-1)$ . На рис. 2.8 дан график плотности распределения при различных значениях числа степеней свободы.

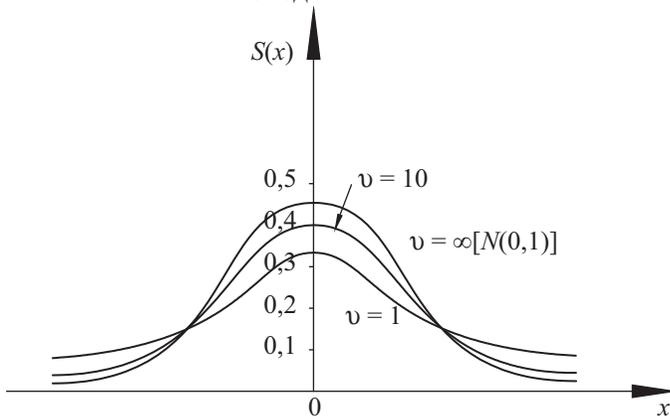


Рис. 2.8

**$F$ -распределение.** Если  $\chi_{\nu_1}^2$  и  $\chi_{\nu_2}^2$  независимые случайные величины вида (2.39) соответственно с числами степеней свободы  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , то случайная величина

$$F = \frac{\nu_2 \chi_{\nu_1}^2}{\nu_1 \chi_{\nu_2}^2} \quad (0 < F < \infty) \quad (2.43)$$

имеет плотность распределения

$$f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} x^{\frac{\nu_1-2}{2}} (\nu_2 + \nu_1 x)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}, \quad (0 < F < \infty). \quad (2.44)$$

Это распределение унимодально. На рис. 2.9 приведены графики плотности распределения при некоторых соотношениях  $v_1$  и  $v_2$ .

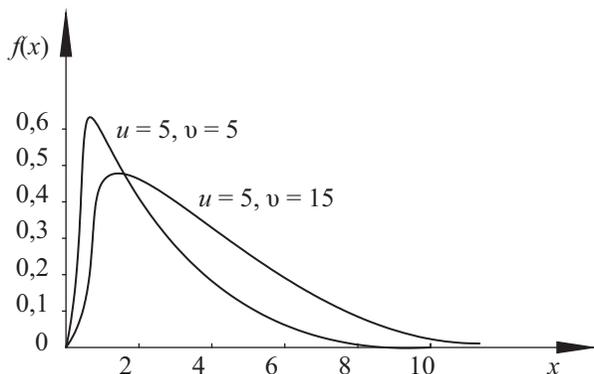


Рис. 2.9

В формулах (2.40), (2.42) и (2.44) использована так называемая гамма-функция  $\Gamma(p)$ , которая относится к классу специальных функций и для всех действительных  $p$  определяется интегралом

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (p > 0).$$

Приведем некоторые ее свойства.

1. Для всех действительных  $p > 0$   $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ .
2. Если  $p$  — положительное целое число, то  $\Gamma(p+1) = p!$
3. Справедливы равенства:  $\Gamma(0) = \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ;  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

## 2.5. Центральная предельная теорема Ляпунова

Если элементы последовательности  $X_1, X_2, \dots, X_n$  случайных величин взаимно независимы и для них выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \beta_{3i}}{\left(\sum_{i=1}^n \mu_{2i}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (2.45)$$

где  $\mu_{2i}$  — второй центральный и  $\beta_{3i}$  — третий абсолютный центральный моменты случайной величины  $X_p$  то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\bar{X} - M(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (2.46)$$

Смысл приведенной теоремы заключается в следующем. Если случайная величина  $X$  представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то  $X$  имеет распределение, близкое к нормальному, причем тем более близкое, чем большее число слагаемых ее формирует.

Теорема объясняет, почему нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей.

Кроме того, надо иметь в виду, что нормальный закон является предельным для целого ряда других законов распределения, например, для биномиального, когда число испытаний  $n \rightarrow \infty$ , Пуассона при  $\lambda \rightarrow \infty$ , для распределений  $\chi^2$  и Стьюдента, когда их числа степеней свободы неограниченно растут.

## 2.6. Закон больших чисел

**Неравенство Чебышева.** Если случайная величина  $X$  имеет математическое ожидание и дисперсию, то

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0), \quad (2.47)$$

т. е. вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания не превысит величину  $\varepsilon > 0$ , выражается указанным соотношением.

**Закон больших чисел в форме Чебышева.** Если  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — попарно независимые случайные величины, имеющие дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной, т.е.

$$D(X_i) < C < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то каково бы ни было постоянное  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (2.48)$$

Из теоремы Чебышева вытекают следующие частные случаи.

1. **Теорема Бернулли.** Пусть  $k$  — число наступлений события  $A$  при  $n$  независимых испытаниях, проводимых при неизменном комплексе условий, и  $p$  — есть вероятность наступления события  $A$  в каждом испытании. Тогда каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (2.49)$$

2. Если последовательность попарно независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  такова, что

$$M(X_i) = a \text{ и } D(X_i) < C < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (2.50)$$

Теорема Чебышева играет значительную роль в практике. Случайная величина может в результате опыта принимать любое для себя значение. При этом полученное в результате опыта значение случайной величины может отклоняться от математического ожидания на значительную величину, и предсказать это отклонение не представляется возможным.

Рассмотрим частные случаи этой теоремы.

В теореме Бернулли рассматривается поведение частоты  $\left( \frac{k}{n} \right)$

появления события  $A$  при увеличении числа опытов. В опыте с малым числом реализаций  $n$  частость может изменяться от нуля до единицы. Однако при увеличении числа опытов частость утрачивает случайный характер. *Вероятность того, что частость появления события  $A$  с увеличением числа опытов как угодно мало будет отличаться от величины  $p$ , стремится к единице.* Величина  $p$  и есть вероятность появления события  $A$ . Таким образом, теорема Бернулли утверждает, что полученная в результате большого числа

опытов частоты практически становится величиной неслучайной, близкой к теоретической вероятности случайного события.

Рассмотрим второй частный случай теоремы Чебышева. Он рассматривает поведение среднеарифметического  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  большого числа  $n$

реализаций  $x_i$  случайной величины  $X$  при увеличении  $n$ . Оказывается, что при увеличении числа реализаций случайной величины их среднеарифметическое теряет элемент случайности и начинает вести себя как величина неслучайная. *Вероятность того, что среднеарифметическое будет как угодно мало отличаться от математического ожидания, с увеличением числа реализаций будет стремиться к единице. Таким образом, это событие становится практически достоверным.*

Теорема Чебышева рассматривает более общий случай, когда имеется несколько случайных величин и рассматривается среднеарифметическое из единственных реализаций каждой случайной величины. Если увеличивать число случайных величин, то вероятность того, что их среднеарифметическое будет как угодно близко к среднеарифметическому их математических ожиданий, стремится к единице. Последняя является величиной неслучайной как функция неслучайных величин. Таким образом, среднеарифметическое из реализаций различных случайных величин утрачивает случайный характер, приближаясь к некоторой неслучайной величине.

Теорема и второе ее следствие действуют при достаточно жестких ограничениях: дисперсии случайных величин должны быть ограничены.

Приведенные законы носят название «Законы больших чисел», ибо показывают поведение некоторых функций случайных величин при увеличении числа опытов.

## 2.7. Решение типовых задач

### Пример 2.1

Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения:

$X$	-1	0	+1	+2
$p$	0,2	0,3	0,1	0,4

Построить многоугольник распределения и график функции распределения. Рассчитать математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

*Решение*

1. Для построения многоугольника распределения в точке с абсциссой  $x_i$  откладывают ординату  $p_{x_i}$  (рис. 2.10).

2. Для построения графика функции распределения в точках  $x_i$  откладывают накопленные вероятности, причем в последней точке  $x_4$  ордината должна быть равна 1 (рис. 2.11).

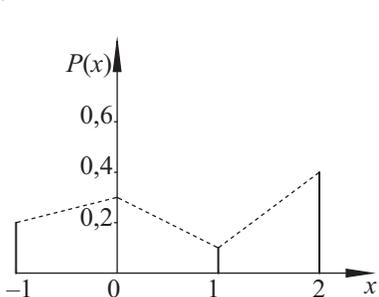


Рис. 2.10

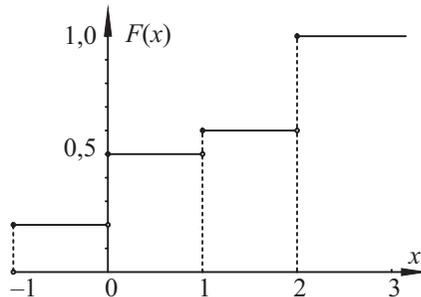


Рис. 2.11

3. Применив формулу  $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ , находят математическое ожидание  $M(X) = (-1) \cdot 0,2 + 0,3 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,4 = 0,7$ .

4. Для нахождения дисперсии пользуются формулой  $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ . При этом имеем

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,4 = 1,9;$$

$$M^2(X) = 0,49.$$

Тогда  $D(x) = 1,9 - 0,49 = 1,41$ .

**Пример 2.2.**

Случайная величина  $X$  задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1. Коэффициент  $a$ .
2. Функцию распределения  $F(x)$ .
3. Математическое ожидание и дисперсию.
4. Вероятность попадания случайной величины  $X$  в промежуток от  $1/4$  до  $1/2$ .
5. Построить графики функции и плотности распределения.

*Решение*

1. Так как  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ , то  $\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 ax^2 dx + \int_1^{+\infty} 0dx = 1$ . Первый и последний интегралы равны нулю, следовательно,  $\int_0^1 ax^2 dx = 1$ . От-

сюда  $a = \frac{1}{\int_0^1 x^2 dx}$ . Но  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ . Тогда  $a = 3$

и

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ } x > 1. \end{cases}$$

2. При  $x < 0$  и  $x > 1$   $f(x) = 0$ , поэтому функция распределения  $F(x)$  будет изменяться только внутри интервала  $(0,1)$ , принимая значения  $F(x) = 0$  левее точки  $x = 0$  и  $F(x) = 1$  правее точки  $x = 1$ .

При  $0 \leq x \leq 1$   $f(x) = 3x^2$ , следовательно,  $F(x) = \int_0^x 3z^2 dz = z^3 \Big|_0^x = x^3$ .

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3.  $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ . Следует отметить, что при расчетах числовых характеристик случайных величин необходимо рассматри-

вать интеграл только в тех пределах, где плотность определения отлична от нуля. В нашем случае

$$M(x) = \int_0^1 x^3 x^2 dx = 3 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4};$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x);$$

$$M(x^2) = \int_0^1 x^2 3x^2 dx = 3 \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Тогда  $D(x) = 3/5 - 9/16 = 3/80$ .

$$4. P\left\{\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right\} = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}.$$

5. Графики функции и плотности распределения приведены на рис. 2.12 и рис. 2.13

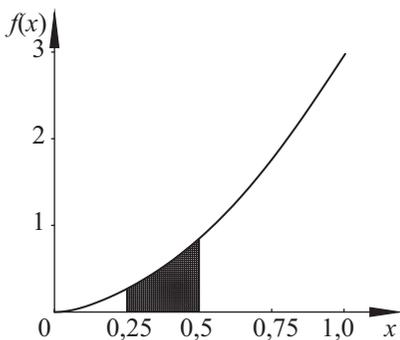


Рис. 2.12

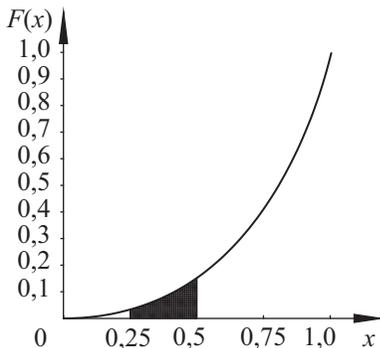


Рис. 2.13

### Пример 2.3

Случайная величина  $X$  задана функцией распределения вида

$$F(x) = a \cdot \operatorname{arctg} e^x \quad (-\infty; \infty).$$

Найти:

1. Коэффициент  $a$ .
2. Плотность распределения.
3. Математическое ожидание случайной величины  $X$ .

4. Вероятность того, что случайная величина  $X$  отрицательное значение.

5. Построить графики функции и плотности распределения.

*Решение*

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \operatorname{arctg} e^x = a \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} e^x = a \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\text{Следовательно, } a = \frac{2}{\pi}.$$

$$2. f(x) = F'(x) = \frac{2}{\pi} (\operatorname{arctg} e^x)' = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^x + e^{-x}};$$

$$3. M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{x}{e^x + e^{-x}} dx = 0. \text{ Это следует из того, что подынтегральная функция нечетная, а интеграл от нечетной функции, взятый в пределах, равных по величине, но противоположных по знаку, равен нулю.}$$

гравальная функция нечетная, а интеграл от нечетной функции, взятый в пределах, равных по величине, но противоположных по знаку, равен нулю.

$$4. P\{-\infty < x < 0\} = \int_{-\infty}^0 \frac{2}{\pi} \frac{x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^x \Big|_{-\infty}^0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2},$$

что и следовало ожидать, ибо плотность распределения — функция четная, и кривая плотности распределения симметрична относительно оси  $OY$ .

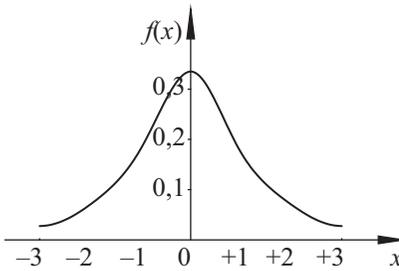


Рис. 2.14

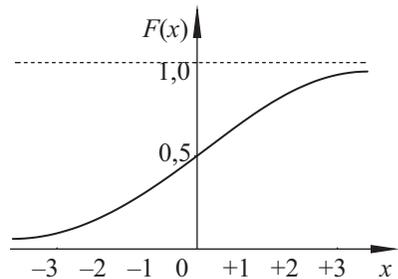


Рис. 2.15

## 2.8. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Случайная дискретная величина  $X$  задана законом распределения:

a)

$X$	0	2	4	6
$p$	0,2	0,1	0,4	0,3

б)

$X$	10	15	20
$p$	0,1	0,8	0,1

в)

$X$	1	3	5	7	9
$p$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить многоугольник распределения и функцию распределения.

2.2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной дискретной величины, принимающей следующие значения с вероятностями:

a)

$X$	1	2	3	4	5	6
$p$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

б)

$X$	1	3	5	7	9
$p$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.3. Найти математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

2.4. Случайная величина  $X$  определена на всей числовой оси функцией распределения вида  $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$ . Найти вероятность

попадания случайной величины в интервал  $(-1; +1)$ .

2.5. Функция распределения случайной непрерывной величины  $X$  имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения  $f(x)$ . Построить графики плотности и функции распределения.

2.6. Задана плотность распределения случайной величины  $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины. Построить график плотности и функции распределения.

2.7. Плотность распределения  $f(x)$  случайной величины  $X$  задана на всей числовой оси выражением  $f(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}$ . Найти параметр  $C$ .

2.8. Функция распределения случайной непрерывной величины  $X$  имеет вид  $F(x) = a + b \arctg x$ . Найти параметры  $a$  и  $b$ .

2.9. Случайная величина  $X$  задана плотностью распределения, имеющей вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.10. Функция распределения случайной непрерывной величины  $X$  имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

2.11. Функция распределения случайной непрерывной величины  $X$  имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ a(1 - \cos 2x) & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

2.12. Обрабатывая опыт, экспериментатор получил распределение изучаемой величины в виде:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ \frac{3-x}{3} & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 0 & \text{вне этих интервалов.} \end{cases}$$

Необходимо доказать, что он ошибся.

2.13. Случайная непрерывная величина распределена равномерно в интервале:

- а)  $(-0,5; +0,5)$ ,
- б)  $(0; +6)$ ,
- в)  $(-10; 0)$ ,
- г)  $(+3; +6)$ ,
- д)  $(-4; +2)$ .

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины. Рассчитать асимметрию и эксцесс.

2.14. Цена деления мерной ленты равна 10 см. При некоторых измерениях отсчет по ленте округляют до целого дециметра. Найти вероятность того, что при отсчете по ленте будет сделана погрешность, превышающая 2 см.

2.15. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляются до целого деления. Найти вероятность того, что погрешность округления будет: а) меньше 0,03; б) больше 0,06.

2.16. Случайная величина  $X$  распределена нормально с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma^2 = 1$ . Найти вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значения, меньшие, чем: а) 0; б) 2,34; в)  $-1,17$ .

2.17. Случайная величина  $X$  распределена нормально с параметрами  $a = 3$  и  $\sigma^2 = 16$ . Найти вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значения, меньшие чем: а) 5,21; б) 3,0; в) 0; г)  $-1,12$ .

2.18. Случайная величина  $X$  распределена нормально с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma^2 = 1$ . Найти вероятность следующих событий:

1.  $P\{|x| < 0,5\}$ ;
2.  $P\{|x| < 1, 0\}$ ;
3.  $P\{|x| < 2,5\}$ ;
4.  $P\{|x| < 3,0\}$ .

2.19. Случайная величина  $X$  распределена нормально с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma^2 = 1$ . Найти вероятность следующих событий:

1.  $P\{-1,25 < x < + 0,15\}$ ;
2.  $P\{-2,13 < x < + 1,72\}$ ;
3.  $P\{+2,10 < x < + 3,05\}$ .

2.20. Случайная величина  $X$  распределена нормально с параметрами  $a = 1,7$  и  $\sigma^2 = 6,3$ . Найти вероятность следующих событий:

1.  $P\{-1,25 < x < + 0,15\}$ ;
2.  $P\{-2,13 < x < + 1,72\}$ ;
3.  $P\{+2,10 < x < + 3,05\}$ .

## Темы и вопросы для самопроверки

1. Определение случайной величины.
2. Виды случайных величин.
3. Методы задания случайной дискретной величины.
4. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Особенности графика функции распределения.
5. Вычисление вероятности попадания случайной величины в заданный интервал через функцию распределения (иллюстрировать чертежом).
6. Плотность распределения, ее свойства. Вычисление вероятности попадания случайной величины в заданный интервал с помощью плотности распределения (иллюстрировать чертежом).

7. Дать определение и написать формулы вычисления следующих числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, моменты, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, асимметрия, эксцесс.

8. Понятие центрированной нормированной случайной величины. Числовые характеристики центрированной нормированной случайной величины.

9. Привести формулы функции и плотности равномерного распределения случайной величины.

10. Привести формулы функции и плотности нормального распределения случайной величины.

11. Привести формулы вычисления основных числовых характеристик случайной величины, имеющей равномерное распределение.

12. Привести формулы вычисления основных числовых характеристик случайной величины, имеющей нормальное распределение.

13. Понятие функции Лапласа. Вычисление вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал с использованием таблиц Лапласа.

14. Как получается случайная величина, имеющая  $\chi^2$ -распределение?

15. Как получается случайная величина, имеющая распределение Стьюдента?

16. Как получается случайная величина, имеющая  $F$ -распределение (распределение Фишера — Снедекора)?

17. В чем состоит смысл центральной предельной теоремы Ляпунова?

18. Сформулируйте теорему Чебышева и ее следствия. Почему эти положения определяются как «Закон больших чисел»?

### **3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

#### **3.1. Двумерная случайная величина**

*Двумерной случайной величиной* ( $X_1, X_2$ ) называют систему из двух случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ . Двумерная случайная величина дискретна, если дискретны составляющие ее одномерные случай-

ные величины; ее реализация задается не одним, а двумя числами  $x_{1i}$  и  $x_{2j}$ , и потому ее закон распределения вероятностей может быть задан таблицей с двумя входами или формулой

$$P\{X_1 = x_{1i}; X_2 = x_{2j}\} = p_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (3.1)$$

причем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (3.2)$$

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины непрерывного типа, т.е. когда обе составляющие являются случайными непрерывными величинами, называется вероятность одновременного осуществления неравенств  $X_1 < x_{1i}$  и  $X_2 < x_{2i}$ :

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1; X_2 < x_2\}, \quad (3.3)$$

т.е. вероятность попадания случайной точки  $(X_1, X_2)$  в заштрихованную на рис. 3.1 область.

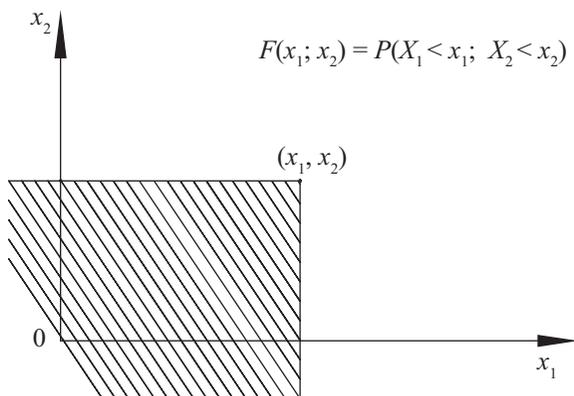


Рис. 3.1

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. При  $x_1' < x_1''$   $F(x_1', x_2) \leq F(x_1'', x_2)$  и при  $x_2' < x_2'' \Rightarrow F(x_1, x_2') \leq F(x_1, x_2'')$ .

2.  $F(x_1, \infty) = F_1(x_1)$ ;  $F(\infty, x_2) = F_2(x_2)$ , где  $F_1(x_1)$  и  $F_2(x_2)$  — так называемые функции маргинальных распределений случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ .

3.  $F(\infty, \infty) = 1$ .

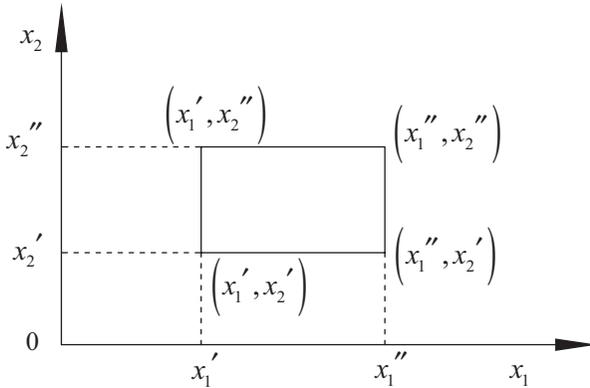


Рис. 3.2

Вероятность попадания случайной точки  $(X_1, X_2)$  в прямоугольник (рис. 3.2) выражается формулой

$$P\{x_1' < X_1 < x_1''; x_2' < X_2 < x_2''\} = \\ = \left[ F(x_1'', x_2'') - F(x_1', x_2'') \right] - \left[ F(x_1'', x_2') - F(x_1', x_2') \right]. \quad (3.4)$$

Плотность распределения  $f(x_1, x_2)$  непрерывной двумерной случайной величины связана с ее функцией распределения соотношениями:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3.5)$$

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (3.6)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$f(x_1, x_2) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1.$$

Вероятность попадания случайной точки  $(X_1, X_2)$  в произвольную область выражается формулой

$$P\{(X_1, X_2) \subset \Omega\} = \iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (3.7)$$

где двойной интеграл распространяется на область  $\Omega$ .

Если через  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$  обозначить плотности маргинальных распределений случайных величин  $X_1, X_2$ , то их можно найти по формулам

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2; \quad f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1. \quad (3.8)$$

Если случайные величины независимы, то

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (3.9)$$

в противном случае, когда они зависимы:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 / x_2) dx_2; \quad f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 / x_2) dx_1, \quad (3.10)$$

где  $f(x_1/x_2)$  и  $f(x_2/x_1)$  — плотности условных вероятностей.

Отсюда вытекают формулы, позволяющие находить условные плотности распределения случайных величин:

$$f_1(x_1 / x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}; \quad f_2(x_2 / x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь числовые характеристики двумерных случайных величин.

*Начальным моментом* порядка  $\nu, k$  системы  $(X_1, X_2)$  называется математическое ожидание произведения  $X_1^\nu$  и  $X_2^k$ :

$$\alpha_{\nu, k} = M(X_1^\nu X_2^k) \quad (\nu, k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.12)$$

а *центральный момент* порядка  $\nu, k$  системы  $(X_1, X_2)$  называется величина

$$\mu_{\nu, k} = M\{[X_1 - M(X_1)]^\nu [X_2 - M(X_2)]^k\} \quad (\nu, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

Для случайных дискретных величин эти моменты выражаются соответственно формулами:

$$\alpha_{v,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{1i}^v x_{2j}^k p_{ij},$$

$$\mu_{v,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_{1i} - M(X_1)]^v [x_{2j} - M(X_2)]^k p_{ij},$$

где  $p_{ij}$  выражается формулой (3.1);

для случайных непрерывных величин — соответственно формулами:

$$\alpha_{v,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^v x_2^k f(x_1 x_2) dx_1 dx_2,$$

$$\mu_{v,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - M(X_1)]^v [x_2 - M(X_2)]^k f(x_1 x_2) dx_1 dx_2.$$

Ясно, что математические ожидания и дисперсии составляющих случайных величин выражаются через эти моменты в виде:

$$M(X_1) = \alpha_{1,0}; \quad M(X_2) = \alpha_{2,0}; \quad D(X_1) = \mu_{2,0}; \quad D(X_2) = \mu_{0,2}.$$

Особую роль играет в описании системы  $(X_1, X_2)$  момент  $\mu_{1,1}$ , которому в силу его особой важности дано специальное название — *корреляционный момент* — и специальное обозначение

$$K_{1,2} = M\{[X_1 - M(X_1)][X_2 - M(X_2)]\}. \quad (3.14)$$

Для случайных дискретных величин служит формула

$$K_{1,2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{1i} - \alpha_{1,0})(x_{2j} - \alpha_{0,1}) p_{ij},$$

а для непрерывных — формула

$$K_{1,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \alpha_{1,0})(x_2 - \alpha_{0,1}) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

$K_{11}$  и  $K_{22}$ , как следует из (3.14), есть дисперсии случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ . В самом деле,

$$K_{11} = M\{[X_1 - M(X_1)][X_1 - M(X_1)]\} = M[X_1 - M(X_1)]^2 = D(X_1). \quad (3.15)$$

Аналогично можно показать, что  $K_{22} = D(X_2)$ .

Кроме корреляционного момента, часто используют безразмерную величину

$$r_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (3.16)$$

называемую *коэффициентом корреляции*.

Система  $(X_1, X_2)$  называется *двумерной нормально распределенной случайной величиной*, если плотность ее распределения выражается формулой

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r_{12}^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2r_{12} \left( \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Этот закон распределения вероятностей зависит от пяти параметров:

$$M(X_1) = a_1; \quad M(X_2) = a_2; \quad \sigma_1 = \sqrt{D(X_1)}; \quad \sigma_2 = \sqrt{D(X_2)}; \quad r_{12}.$$

Плотности маргинальных распределений случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  выражаются формулами:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}}; \quad (-\infty < x_1 < +\infty; -\infty < x_2 < +\infty).$$

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Коэффициент корреляции (3.16) обладает следующими свойствами.

1. Если  $r_{12} = \pm 1$ , то зависимость между случайными величинами  $X_1$  и  $X_2$  функциональная.

2.  $-1 \leq r_{12} \leq +1$ .

3. Чем ближе по модулю  $r_{12}$  к единице, тем теснее зависимость между  $X_1$  и  $X_2$ .

4. Если  $r_{12} = 0$ , то говорят, что  $X_1$  и  $X_2$  не коррелируют, понимая под этим зависимость между  $X_1$  и  $X_2$ , характеризуемую коэффициентом корреляции, или корреляционным моментом. Однако это еще не означает вообще отсутствие какой-либо зависимости между  $X_1$  и  $X_2$ .

5. Если  $X_1$  и  $X_2$  обладают плотностью совместного распределения (3.17), то  $r_{12} = 0$  означает полную независимость  $X_1$  и  $X_2$ . При других законах распределения вероятностей двумерной случайной величины равенство нулю коэффициента корреляции означает отсутствие, как уже было отмечено, лишь корреляции между  $X_1$  и  $X_2$ .

Действительно, при  $r_{12} = 0$  плотность (3.17), учитывая формулы плотностей маргинальных распределений, будет удовлетворять условию (3.9) полной независимости случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , так как примет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Плотности условных распределений системы  $X_1$  и  $X_2$  выражаются формулами:

$$f(x_1 / x_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - r_{12}^2)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_{12}^2)} \left[ \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} - r_{12} \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right]^2 \right\}; \quad (3.18)$$

$$f(x_2 / x_1) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - r_{12}^2)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_{12}^2)} \left[ \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} - r_{12} \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right]^2 \right\},$$

а соответствующие им условные математические ожидания имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M(X_1 / x_2) &= a_1 + r_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - a_2); \\
 M(X_2 / x_1) &= a_2 + r_{12} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - a_1).
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Условные же дисперсии оказываются для двумерного нормального распределения вероятностей величинами постоянными:

$$D(X_1 / x_2) = \sigma_1^2 (1 - r_{12}^2); \quad D(X_2 / x_1) = \sigma_2^2 (1 - r_{12}^2).$$

Уравнения (3.19) называются *уравнениями регрессии* соответственно  $X_1$  на  $X_2$  и  $X_2$  на  $X_1$ . Они показывают, как изменяется математическое ожидание одной из случайных величин системы в зависимости от изменения другой. В частности, из этих уравнений вытекает, что если коэффициент корреляции положителен, то при росте одной из случайных величин условное математическое ожидание другой также возрастает; при отрицательном коэффициенте корреляции, наоборот, математическое ожидание другой величины будет уменьшаться.

Если в (3.18) зафиксировать в показателе степени основания натуральных логарифмов величину квадратных скобок, положив ее, например, равной постоянной  $C^2$ :

$$\left( \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2r_{12} \left( \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right)^2 = C^2,$$

то окажется, что полученное уравнение в прямоугольной системе координат изобразится эллипсом, во всех точках которого плотность распределения (3.18) будет постоянной. Такой эллипс называют *эллипсом рассеивания*. Его ориентировка определяется уравнением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2r_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}. \tag{3.20}$$

Придавая параметру  $C$  произвольные значения, получим семейство подобных, одинаково ориентированных эллипсов с общим центром в точке  $(a_1, a_2)$ .

### 3.2. Многомерный случайный вектор

Обобщим рассмотренные понятия на случайные величины любой размерности более 2.

Под  $n$ -мерным случайным вектором (матрицей-столбцом) понимается вектор, составляющими которого являются случайные величины, т.е.

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T.$$

Простейшими числовыми характеристиками случайного вектора являются: математическое ожидание, равное вектору математических ожиданий составляющих случайного вектора

$$M(X) = \{M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)\}^T,$$

и корреляционная матрица

$$K = \left\{ \begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{array} \right\} \quad (K_{ij} = K_{ji}).$$

Эта матрица симметрична, положительно определена, по ее главной диагонали стоят дисперсии составляющих случайного вектора, т.е.  $K_{ii} = D(X_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Под функцией распределения случайного вектора понимается вероятность одновременного выполнения неравенств  $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$ :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}. \quad (3.21)$$

Она обладает рядом свойств, аналогичных свойствам функции (3.3), например:

$$F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0, \quad F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1.$$

Плотность распределения случайного вектора, составляющие которого будем считать случайными непрерывными величинами, связана его функцией распределения соотношениями:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \geq 0, \quad (3.22)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3.23)$$

Вероятность попадания случайной точки  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  — конца случайного вектора, в произвольную  $n$ -мерную область  $D$  выражается  $n$ -кратным интегралом

$$P\{X \subset D\} = \int \dots \int_{(D)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

распространенным на всю эту область.

Если случайный вектор  $X$  расчленим на два подвектора:  $q$ -мерный вектор  $X^{(q)}$  и  $(n-q)$ -мерный вектор  $X^{(n-q)}$ , т.е.

$$X = \left\{ \begin{array}{l} X^{(q)} \\ X^{(n-q)} \end{array} \right\} \quad (q = 1, 2, \dots, n),$$

тогда можно говорить о законах распределения вероятностей этих подвекторов. Их функции распределения

$$F_q(x_1, x_2, \dots, x_q) = F(x_1, x_2, \dots, x_q, -\infty, \dots, -\infty);$$

$$F_{n-q}(x_{q=1}, x_{q=2}, \dots, x_n) = F(-\infty, \dots, -\infty, x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n).$$

Эти функции распределения, называемые частными, обобщают ранее рассмотренные функции маргинальных распределений. В частности, положив  $q = 1$ , получим

$$F_1(x_1) = F(x_1, -\infty, \dots, -\infty).$$

Если в случайном векторе менять порядок его составляющих, то таким же путем можно получить и функции всех остальных маргинальных распределений.

Аналогичные преобразования можно проводить и с плотностями распределений. Например, условная плотность распределения подвектора  $X^{(q)}$  при условии, что подвектор  $X^{(n-q)}$  принял значение  $x^{(n-q)}$ , может быть записана в виде

$$f_q(x_1, x_2, \dots, x_q / x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{n-q}(x_{q+1}, \dots, x_n)}.$$

Важнейшим для практики является случай, когда случайный вектор  $X$  распределен нормально. Это имеет место, если его плотность распределения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{|K|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^T K^{-1}(x-a)}, \quad (3.24)$$

где  $|K|$  — определитель корреляционной матрицы вектора  $X$ ;  $K^{-1}$  — матрица, ей обратная;

$$x^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T; \\ a^T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T = M(X^T).$$

По указанному только что «рецепту» можно найти любые маргинальные, частные и соответствующие им условные плотности распределений.

### 3.3. Примеры решения типовых задач

#### Пример 3.1

Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, имеют одинаковые математические ожидания, равные  $a$ , и дисперсии, равные  $\sigma^2$ . Получены новые случайные величины  $Y_1 = X_1 + X_2$  и  $Y_2 = X_1 + 2X_2$ . Найти коэффициент корреляции  $r_{Y_1 Y_2}$ .

*Решение*

Коэффициент корреляции определяют по формуле

$$r_{Y_1 Y_2} = \frac{M(Y_1 Y_2) - M(Y_1)M(Y_2)}{\sqrt{D(Y_1)D(Y_2)}}.$$

Для этого необходимо вычислить следующие величины.

$$1. M(Y_1 Y_2) = M[(X_1 + X_2)(X_1 + 2X_2)] = M(X_1^2 + 3X_1 X_2 + 2X_2^2) = \\ = M(X_1^2) + 3M(X_1 X_2) + 2M(X_2^2).$$

По условию  $X_1$  и  $X_2$  — независимые случайные величины, следовательно,

$$M(X_1 X_2) = M(X_1)M(X_2).$$

Тогда  $M(Y_1 Y_2) = M(X_1^2) + 2M(X_2^2) + 3a^2$ .

$$2. M(Y_1)M(Y_2) = M(X_1 + X_2)M(X_1 + 2X_2) = [M(X_1) + M(X_2)][M(X_1) + 2M(X_2)] = 2a \cdot 3a = 6a^2.$$

3.  $D(Y_1) = D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$  в силу независимости величин  $X_1$  и  $X_2$ . Окончательно  $D(Y_1) = 2\sigma^2$ .

$$4. D(Y_2) = D(X_1 + 2X_2) = D(X_1) + D(2X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 5\sigma^2.$$

$$5. r_{Y_1 Y_2} = \frac{M(X_1^2) + 2M(X_2^2) + 3a^2 - 6a^2}{\sqrt{10}\sigma^2} = \frac{[M(X_1^2) - a^2] + 2[M(X_2^2) - a^2]}{\sigma^2 \sqrt{10}} = \frac{\sigma^2 + 2\sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{10}} = +\frac{3}{\sqrt{10}} = +0,95.$$

Итак,  $r_{Y_1 Y_2} = +0,95$ .

### 3.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Случайные величины  $X$  и  $Y$  связаны соотношением  $\alpha X + \beta Y = \gamma$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — постоянные величины. Найти коэффициент корреляции  $r_{XY}$ .

2. Случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы, имеют равные математические ожидания  $M(X_i) = a$  и равные дисперсии  $D(X_i) = \sigma^2$ . Получена новая случайная величина  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Найти коэффициент корреляции  $r_{X_i Y}$ .

3. Случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы, имеют равные математические ожидания  $M(X_i) = a$  и равные дисперсии  $D(X_i) = \sigma^2$ . Найти коэффициент корреляции между среднеарифметическим этих случайных величин и  $X_1$ .

4. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, одинаково распределены с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Найти коэффициент корреляции между суммой и разностью этих величин.

5. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, одинаково распределены с математическим ожиданием  $a$  и дисперсиями  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$ . Найти коэффициент корреляции между суммой и разностью этих величин.

6. На пункте триангуляции  $A$  (рис. 3.3) равноточно и независимо друг от друга измерены три направления  $X_1, X_2$  и  $X_3$ . Вычислены углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти коэффициент корреляции  $r_{\alpha\beta}$ , если дисперсия измерения каждого направления равна  $\sigma^2$ , а математические ожидания значений этих направлений соответственно равны  $a_1, a_2$  и  $a_3$ .

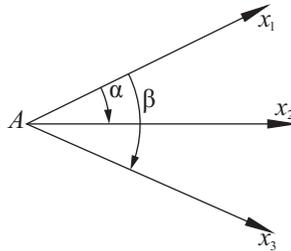


Рис. 3.3

7. Определить коэффициент корреляции между углом наклона и местом нуля, если значения отсчетов при круге право и круге лево независимы и получены с одинаковыми дисперсиями.

8. По условиям предыдущей задачи определить коэффициент корреляции между местом нуля и отсчетом при круге право.

9. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  линейно зависимы, при этом коэффициент корреляции равен  $r_{X_1 X_2}$ . Дисперсии этих величин соответственно равны  $D(X_1) = \sigma_1^2$  и  $D(X_2) = \sigma_2^2$ . Найти дисперсию суммы и разности этих величин.

## Темы и вопросы для самопроверки

1. Что называют двумерной случайной величиной?
2. Что называют функцией распределения двумерной случайной величины и как ее можно трактовать?
3. Как вычислить вероятность попадания случайной точки в заданный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, если задана функция распределения?
4. Опишите свойства функции распределения двумерной случайной величины.
5. Как вычислить плотность двумерного распределения по заданной функции распределения?

6. Как вычислить вероятность попадания случайной точки в произвольную область по заданной плотности двумерного распределения?

7. Что называют функцией и плотностью маргинального распределения?

8. Как выразить плотность двумерного распределения через плотности маргинальных распределений при условии независимости случайных составляющих?

9. Что называют начальными и центральными моментами двумерной случайной величины?

10. Что называют корреляционным моментом (ковариацией) двумерной случайной величины? Приведите формулу для расчета ковариации.

11. Как вычисляют коэффициент корреляции?

12. Пределы изменения коэффициента корреляции.

13. Напишите формулу плотности двумерного нормального распределения и поясните смысл параметров, входящих в формулу.

14. Какие элементы стоят на главной диагонали ковариационной матрицы?

## 4. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### 4.1. Свойства математических ожиданий

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной, т.е.  $M(C) = C$ .

2. Постоянную можно выносить за знак математического ожидания:  $M(CX) = CM(X)$ .

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:  $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$ .

4. Математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс их корреляционный момент:  $M(X_1 X_2) = M(X_1)M(X_2) + K_{12}$ .

На основании этих свойств легко получают следующие обобщающие формулы:

$$M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n M(X_i), \quad (4.1)$$

$$M\left(C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = C_0 + \sum_{i=1}^n C_i M(X_i), \quad (4.2)$$

и при условии некоррелированности сомножителей

$$M\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n M(X_i) \quad (K_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j). \quad (4.3)$$

Кроме того, математическое ожидание дифференцируемой функции можно найти по следующей приближенной формуле:

$$M(Y) = g[M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \right)_M D(X_i) + \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_M K_{ij}, \quad (4.4)$$

причем индекс  $M$  у частных производных означает, что в них после дифференцирования функции  $g$  случайные величины надо заменить их математическими ожиданиями.

В подавляющем большинстве практических случаев в приближенной формуле (4.4) можно ограничиваться первым членом правой части равенства:

$$M(Y) = g[M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)]. \quad (4.5)$$

## 4.2. Свойства дисперсий

1. Дисперсия постоянной равна нулю

$$D(C) = 0. \quad (4.6)$$

2. Постоянную можно выносить за знак дисперсии, возведя в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X). \quad (4.7)$$

3. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенный корреляционный момент слагаемых:

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) + 2K_{12}. \quad (4.8)$$

4. Если сомножители независимы, то дисперсия произведения:

$$D(X_1 X_2) = D(X_1)D(X_2) + M^2(X_1)D(X_2) + M^2(X_2)D(X_1). \quad (4.9)$$

На основании формул (4.6)—(4.9) можно получить следующие обобщающие формулы:

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}, \quad (4.10)$$

$$D\left(C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n C_i^2 D(X_i) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i C_j K_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i C_j K_{ij}. \quad (4.11)$$

Если аргументы не коррелированы, то эти формулы принимают более простой вид:

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) \quad (K_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j). \quad (4.12)$$

Введем центрированную случайную величину  $X = X - M(X)$ . Ее математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна дисперсии исходной случайной величины. Поэтому формула (4.9) для центрированных сомножителей принимает вид

$$D(X_1 X_2) = D(X_1)D(X_2) \quad (4.13)$$

и получает такое естественное обобщение

$$D\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n D(X_i), \quad (4.14)$$

однако надо помнить, что здесь имеются в виду независимые аргументы.

### 4.3. Свойства третьих центральных моментов

Обозначим центральный момент  $\nu$ -го порядка случайной величины  $X$  через  $\mu_\nu(X)$ . Основные свойства третьих центральных моментов формулируются следующим образом.

1. Третий центральный момент постоянной равен нулю:

$$\mu_3(C) = 0. \quad (4.15)$$

2. Постоянную можно выносить за знак третьего центрального момента, возведя ее в куб:

$$\mu_3(CX) = C^3 \mu_3(X). \quad (4.16)$$

3. Если слагаемые случайные величины *независимы*, то третий центральный момент их суммы равен сумме центральных моментов слагаемых того же порядка:

$$\mu_3(X_1 + X_2) = \mu_3(X_1) + \mu_3(X_2). \quad (4.17)$$

Из этих основных свойств третьих центральных моментов независимых случайных величин вытекает следующая формула третьего центрального момента линейной функции:

$$\mu_3 \left( C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i \right) = \sum C_i^3 \mu_3(X_i), \quad (4.18)$$

из которой следует и формула для подсчета асимметрии линейной функции независимых аргументов

$$\gamma \left( C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i \right) = \frac{\sum_{i=1}^n C_i^3 \sigma_i^3 \gamma(X_i)}{\left( \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_i^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.19)$$

где  $\gamma(X_i)$  — асимметрии аргументов;  $\sigma_i$  — их стандарты.

#### 4.4. Свойства четвертых центральных моментов

1. Четвертый центральный момент постоянной равен нулю:

$$\mu_4(C) = C. \quad (4.20)$$

2. Постоянную можно выносить за знак четвертого центрального момента, возведя ее в биквадрат:

$$\mu_4(CX) = C^4 \mu_4(X). \quad (4.21)$$

3. Если слагаемые случайные величины *независимы*, то четвертый центральный момент их суммы можно выразить формулой

$$\mu_4(X_1 + X_2) = \mu_4(X_1) + \mu_4(X_2) + 6D(X_1)D(X_2). \quad (4.22)$$

Из свойств четвертых центральных моментов вытекает следующая формула четвертого центрального момента линейной функции независимых случайных аргументов:

$$\mu_4 \left( C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n C_i^4 \mu_4(X_i) + \sum_{i < j} C_i^2 C_j^2 D(X_i) D(X_j), \quad (4.23)$$

из которой следует формула для подсчета эксцесса линейной функции независимых аргументов:

$$\varepsilon \left( C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i \right) = \frac{\sum_{i=1}^n C_i^4 \sigma_i^4 \varepsilon(X_i)}{\left( \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_i^2 \right)^2}. \quad (4.24)$$

#### 4.5. Свойства корреляционной матрицы случайного вектора

Пусть  $n$ -мерные случайные векторы  $X$  и  $Y$ , обладающие корреляционными матрицами соответственно  $K_X$  и  $K_Y$ , между собой не коррелируют, т.е. любая составляющая одного из них не коррелирует ни с какой составляющей другого. Тогда корреляционная матрица  $K_{X+Y}$  суммы  $X+Y$  этих векторов будет равна сумме корреляционных матриц слагаемых, т.е.

$$K_{X+Y} = K_X + K_Y. \quad (4.25)$$

Допустим теперь, что случайный  $n$ -мерный вектор  $X$ , обладающий корреляционной матрицей  $K_X$ , подвергнут с помощью неособенной матрицы  $A$  линейному преобразованию

$$Y = A \cdot X. \quad (4.26)$$

Тогда вектор  $\vec{Y}$  будет иметь следующую корреляционную матрицу

$$K_Y = A K_X A^T. \quad (4.27)$$

## Темы и вопросы для самопроверки

1. Чему равно математическое ожидание суммы случайных величин? При каких условиях это правило действует?
2. Чему равно математическое ожидание постоянной величины?
3. При каких условиях математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий?
4. Чему равна дисперсия постоянной величины?
5. Можно ли выносить постоянную величину за знак дисперсии, и если да, то как?
6. При каких условиях дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий?
7. Как вычислить дисперсию произведения двух независимых центрированных случайных величин?
8. Как вычислить асимметрию линейной функции независимых случайных величин?
9. Как вычислить эксцесс линейной функции независимых случайных величин?
10. Как вычислить ковариационную матрицу суммы двух некоррелируемых векторов одной размерности?
11. Вектор  $\vec{Z}$  имеет ковариационную матрицу  $\mathbf{K}_Z$ . Из вектора  $\vec{Z}$  линейным преобразованием  $B$  получен вектор  $\vec{U}$ . Вычислить ковариационную матрицу  $\mathbf{K}_U$  вектора  $\vec{U}$ .

# Раздел II . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

## 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

### 5.1. Понятие генеральной совокупности

Пусть имеется совокупность однородных объектов, подлежащих изучению по какому-либо качественному или количественному признаку (характеристикам объекта). При этом характеристики объекта могут быть представлены в числовом виде. Совокупность числовых характеристик объектов, явлений, подлежащая изучению, называется *генеральной совокупностью*. Обычно генеральные совокупности обозначаются прописными буквами латинского алфавита. Например, генеральная совокупность  $X$  или генеральная совокупность  $Y$ . Любая из числовых характеристик, входящих в генеральную совокупность  $X$ , называется *элементом генеральной совокупности* и обозначается строчными буквами латинского алфавита с нижним индексом. Например,  $x_1$  или  $x_7$  есть элементы генеральной совокупности  $X$ , а  $y_3$  и  $y_k$  — есть элементы генеральной совокупности  $Y$ .

Принадлежность элемента  $x_i$  генеральной совокупности  $X$  может быть представлена символом  $x_i \in X$ .

Число элементов  $N$  генеральной совокупности определяет ее *мощность*. Генеральные совокупности по мощности могут быть *конечными* и *бесконечными*.

Среди всех элементов генеральной совокупности можно выбрать минимальный  $x_{\min}$  и максимальный элементы  $x_{\max}$ . Тогда разность между ними  $R = x_{\max} - x_{\min}$  будет представлять собой *размах генеральной совокупности*.

Генеральными могут быть совокупности как реально существующие, так и теоретически возможные. К первым может быть отнесена совокупность любых числовых характеристик (например, длина либо масса) изделия из партии деталей, выпускаемых за определенный промежуток времени. Примером второй группы генеральных совокупностей может служить совокупность возможных результатов измерений какой-либо физической величины, полученных при заранее определенных условиях.

Для изучения генеральной совокупности можно применить сплошное обследование, когда изучается каждый элемент совокупности. Тогда выводы относительно исходной совокупности делаются по данным сплошного обследования. Они полностью отражают изучаемые свойства генеральной совокупности. Однако такого рода обследования носят крайне редкий характер и могут применяться только в случаях достаточно ограниченных конечных совокупностей при наличии дешевых и быстрых методов определения элементов совокупности, не связанных с уничтожением исследуемых объектов.

## 5.2. Выборка из генеральной совокупности

Наиболее распространенным методом исследования свойств генеральных совокупностей является так называемый *выборочный метод исследования*, основанный на изучении характеристик ограниченного числа элементов совокупности. Часть элементов генеральной совокупности, подлежащих изучению, называется *выборкой из генеральной совокупности*, или просто *выборкой*. Обычно выборки из генеральной совокупности  $X$  обозначают строчными буквами латинского алфавита с верхним индексом, соответствующим номеру выборки. Например,  $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$  есть вторая выборка из генеральной совокупности  $X$  с числом элементов выборки  $n$ . Число элементов  $n$ , входящих в выборку, определяет *объем выборки*, который всегда конечен независимо от вида исходной генеральной совокупности. Если речь идет о произвольной выборке из генеральной совокупности, то тогда ее обозначают как  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Если обратиться к предыдущим примерам генеральных совокупностей, то выборкой в первом случае будет совокупность числовых характеристик деталей, отобранных для обследования по интересующему признаку. Для второго случая выборкой будет выступать любая совокупность конечного числа результатов измерений, выполненных при заданных условиях.

Ранее генеральную совокупность  $X$  уже определили как множество числовых характеристик (чисел), что позволяет рассматривать ее как случайную величину  $X$ . Тогда каждый элемент совокупности  $x$  выступает как реализация данной случайной величины, и вероятности появления любого из этих элементов в результате опыта (выборки) одинаковые. Если разбить размах генеральной совокупности на бесконечно малые отрезки, то число элементов, попавших в каждый из элементарных отрезков, в общем случае не будет одинаковым, т.е. при равновероятном появлении любого элемента генеральной совокупности закон распределения случайной величины  $X$  может быть совершенно произвольным.

Рассматривая генеральную совокупность как случайную величину, можно ставить вопрос о законе ее распределения и о числовых ее характеристиках, в том числе математическом ожидании, дисперсии и др.

Выборка из генеральной совокупности представляет собою ее часть, а следовательно, также может рассматриваться как случайная величина, а элементы выборки — ее реализации.

Для того чтобы по выборке можно было достаточно уверенно судить обо всей генеральной совокупности, необходимо, чтобы выборка правильно представляла всю генеральную совокупность, т.е. выборка должна быть *репрезентативной*, что значит — представительной. Примером нерепрезентативной выборки может служить следующий. Пусть проводится выборочная перепись населения и выборщик проводит ее в рабочие часы будних дней. Тогда, очевидно, что в число переписанных жителей попадет значительная часть неработающего населения, в то время как работающая его часть будет практически в этой выборке отсутствовать.

Репрезентативная выборка должна правильно представлять пропорции различных составляющих генеральной совокупности. Условие репрезентативности выборки может быть осуществлено

в том случае, если элементы выборки отбираются случайным образом, но при этом выполняется условие равновероятности появления в выборке любого из элементов генеральной совокупности.

Следует отметить некоторые особенности любой выборки из генеральной совокупности:

1. *Элементы выборки принадлежат генеральной совокупности, в связи с чем выборка отражает общие свойства генеральной совокупности.*

2. *Элементы выборки получены методом случайного отбора, поэтому каждая выборка имеет свои индивидуальные особенности, отличающие ее как от любой другой выборки того же объема, так и от всей генеральной совокупности.*

В связи с тем, что выборка случайна, любая ее функция является также величиной случайной.

### **5.3. Основные задачи математической статистики**

Главной задачей математической статистики является изучение свойств генеральной совокупности по выборке, при этом могут решаться следующие конкретные задачи.

1. Построение оценок параметров генеральной совокупности и изучение их свойств.

2. Оценка законов распределения генеральной совокупности.

3. Проверка статистических гипотез.

Решение поставленных задач будет рассмотрено в последующих главах.

### **Темы и вопросы для самопроверки**

1. Понятие генеральной совокупности. Примеры конечной и бесконечной генеральных совокупностей.

2. Что такое выборка из генеральной совокупности и чем определяется ее объем?

3. Что означает «репрезентативная выборка»?

4. Как соотносятся генеральная совокупность и выборка из нее?

5. Основные задачи, решаемые математической статистикой.

## 6. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

### 6.1. Общие сведения

Одной из основных задач математической статистики является оценка неизвестных параметров генеральной совокупности по элементам выборки.

*Параметром*  $K$  генеральной совокупности  $X$  в дальнейшем будем называть любую числовую характеристику данной генеральной совокупности как величины случайной.

*Оценкой параметра* генеральной совокупности называется приближенное значение  $k$  параметра  $K$ , получаемое по элементам выборки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  из соотношения  $k = f(x)$ .

*Построить оценку параметра*  $K$  — это значит подобрать вид функции  $f(x)$ , по которой по элементам выборки будет вычислено значение  $k$ .

Для любого параметра генеральной совокупности можно построить целую серию оценок, т.е. подобрать несколько функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ , по которым может быть рассчитана оценка  $k = f(x)$ . Для получения оценок параметра  $k$  проведена серия опытов, в результате которых получены  $t$  выборок  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)}$ , каждая объемом  $n$ . Для каждой функции  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) с использованием элементов выборок  $x^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, t$ ) вычислим значение оценки параметра  $k_{ij} = f_i(x^{(j)})$ . В результате этих действий получим матрицу значений оценок параметра  $K$ :

$$k = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1t} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rt} \end{vmatrix}.$$

Каждая совокупность  $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{it})$ , представляет собой набор оценок параметра, вычисленных по одной и той же формуле  $k_i = f_i(x)$ , но по разным выборкам. Совокупность  $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{it})$  как функция элементов выборки являются совокупностью реализаций случайной величины. Задачей математической статистики

является выбор наилучшей оценки  $f_i(x)$  из серии всех возможных. Для выбора наилучшей оценки необходимо определить те вероятностные свойства оценок, по которым этот отбор осуществляется.

*Наилучшей оценкой параметра  $K$*  называется оценка, обладающая следующими свойствами:

1. Свойство несмещенности.
2. Свойство состоятельности.
3. Свойство эффективности.

Для нахождения наилучшей оценки параметра  $K$  из возможного множества функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_t(x)$  необходимо выбрать такую функцию, которая обладает всеми перечисленными свойствами.

Остановимся более подробно на каждом из указанных свойств.

#### 1. Свойство несмещенности

Пусть для параметра  $K$  построены серии значений оценки  $k_{ij} = f_i(x^{(j)})$  при некоторых фиксированных значениях объема выборки  $n_1, \dots, n_p, \dots, n_t$ . Примем  $k_{ij}$  как реализацию некоторой случайной величины  $k_i$ , где  $i = 1 \dots t$ . Если математическое ожидание этой случайной величины равно  $K$  при любых фиксированных значениях объема выборки  $n$ , то в этом случае оценка параметра  $K$  является *несмещенной*.

$$M(k_i) = K \Rightarrow k_i = f_i(x) \text{ — несмещенная оценка.} \quad (6.1)$$

Если математическое ожидание оценки параметра не совпадает со значением параметра  $K$  и отличается от него на величину  $M(k_i) - K = h_i$ , то оценка называется смещенной, а величина  $h$  — смещением оценки.

#### 2. Свойство состоятельности

Пусть  $k_i^{(n_1)}$  оценка параметра  $K$ , вычисленная по выборке  $x$  объема  $n_1$ . Затем оценка  $k_i^{(n_2)}$  того же параметра получена по выборке объема  $n_2 > n_1$ . Естественно потребовать от наилучшей оценки, что при увеличении объема выборки  $n$  в вероятностном смысле она стремилась к параметру  $K$ , т.е. выполнялось следующее соотношение при любом  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|k_i^{(n)} - K| < \varepsilon\} = 1. \quad (6.2)$$

Свойство (6.2) равносильно требованию уменьшения разброса  $R_i$  оценки  $k_i$  параметра  $K$  при увеличении объема выборки, т.е.

уменьшение дисперсии оценки параметра  $D(k_i)$ . При выполнении этого свойства должно выполняться соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(k_i) = 0. \quad (6.3)$$

Если выполняется соотношение (6.2) или (6.3) для оценки  $k_i = f_i(x)$ , то такая оценка называется *состоятельной*.

### 3. Свойство эффективности

Как уже указывалось, для одного параметра  $K$  можно построить целый ряд оценок, в том числе обладающих первыми двумя свойствами. В классе несмещенных и состоятельных оценок наилучшей будет та, которая обладает наименьшим разбросом  $R_{эф} < R_r$ , т.е. наименьшей дисперсией:

$$D(k_{эф}) = \min. \quad (6.4)$$

## 6.2. Методы построения оценок

Наиболее распространенным методом построения оценок параметров является метод средних величин. Существует несколько определений средних величин, среди которых следует остановиться на определении:

Средняя нескольких величин является результатом действий, выполненных по определенному правилу над данными величинами, и представляет собой одну из данных величин, которая не больше и не меньше всех остальных (средняя действительная), либо какую-нибудь новую величину, промежуточную между наименьшей и наибольшей из данных величин (счетная средняя).

*Счетная средняя*, или *аналитическая средняя* выражена посредством математической формулы, которая определяет, какие операции должны быть проведены над членами данного ряда. Если обозначить счетную среднюю через  $\bar{k}_r$ , то она может быть получена из соотношения

$$\bar{k}_i = \varphi(x), \quad (6.5)$$

где  $\varphi(x)$  — вид математической зависимости.

*Средняя действительная, неаналитическая (позиционная)* не выражается посредством математических формул, оперирующих с членами ряда, а зависит от порядкового места, занимаемого члена-

ми ряда в монотонной (возрастающей или убывающей) последовательности, получаемой из данной совокупности

### 6.3. Оценка математического ожидания

Пусть имеется выборка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  из генеральной совокупности  $X$ , математическое ожидание которой  $M(x) = a$ , а дисперсия  $D(x) = \sigma^2$ . По выборке необходимо найти оценку математического ожидания данной генеральной совокупности, т.е. необходимо оценить центр, относительно которого разбросаны возможные значения  $X$ .

Таких оценок можно построить достаточно, в том числе:

1. *Среднеарифметическое*, вычисляемое по формуле

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}. \quad (6.6)$$

2. *Среднее ранжированного ряда*. Ранжированный ряд можно получить из исходного ряда, расположив его элементы в порядке возрастания. Будем обозначать ранжированный ряд следующим образом:  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ . Тогда в качестве оценки  $\hat{x}$  будет вы-

ступать  $x^{(i)}$ , где  $i = \frac{n}{2} + 0,5$ , когда  $n$  — четное, или  $\hat{x} = \frac{x^{\binom{n-1}{2}} + x^{\binom{n+1}{2}}}{2}$ ,

когда  $n$  нечетное.

3. *Среднее из крайних ранжированного ряда*  $\hat{x} = \frac{x^{(1)} + x^{(n)}}{2}$ .

4. *Любая линейная функция* элементов выборки вида  $\hat{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  при условии  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ .

Из всех возможных оценок параметра  $X$  необходимо выбрать такую, которая обладает свойствами наилучшей оценки.

Такой оценкой является среднеарифметическое. Покажем, что для этой функции выборки выполняются все свойства наилучшей оценки:

1. *Свойство несмещенности*

Здесь требуется доказать, что математическое ожидание оценки равно генеральной средней.

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{[x]}{n}\right) = \frac{1}{n}M([x]) = \frac{1}{n}(M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n)),$$

но  $M(x_i) = a$ . Тогда  $M(\bar{x}) = \frac{1}{n}na = a$ , что и требовалось доказать.

## 2. Свойство состоятельности

Здесь необходимо доказать, что при ограниченных в совокупности дисперсиях всех элементов выборки  $D(\lambda_i) = \sigma_i^2 \leq C^2$  с увеличением объема выборки среднеарифметическое по вероятности сходится к истинному значению этой физической величины, т.е. имеет место положение  $\bar{\lambda} \Rightarrow L$ .

### Доказательство

Для доказательства применим неравенство Чебышева к случайной величине  $\bar{x} - a$ . Для этого необходимо вычислить, кроме математического ожидания, и дисперсию  $D(\bar{x})$  случайной величины  $\bar{x}$  при условии независимости элементов выборки:

$$D(\bar{x}) = D\left(\frac{[x]}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D([x]) = \frac{1}{n^2}(D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)) = \frac{1}{n^2}[D(x)].$$

Но по условию  $D(x) = \sigma^2$ , тогда  $D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}[\sigma^2] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ . В

соответствии с (6.3) вычислим предел  $D(\bar{x})$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0, \text{ что и требовалось доказать.}$$

В процессе доказательства свойства состоятельности среднеарифметического была получена формула дисперсии этой величины. Выделим ее:

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (6.7)$$

т.е. дисперсия среднего арифметического обратно пропорциональна объему выборки.

## 3. Свойство эффективности

Это свойство предполагает, что из всех возможных оценок наи-

лучшая имеет минимальную дисперсию. Дисперсия среднеарифметического выражается через (6.7). Вычислим дисперсию произвольной функции вида

$$\hat{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (\text{а})$$

при условии

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1. \quad (\text{б})$$

Функции, приведенные в примерах 2 и 3, на стр. 74 здесь нет смысла рассматривать, так как они не обладают свойствами состоятельности и несмещенности, в то время как на основании теоремы Гаусса – Маркова функции класса (а) при условии (б) состоятельные и несмещенные оценки генеральной средней.

Любую функцию вида (а) можно представить в форме

$$\hat{x} = \frac{1 + \omega_1}{n} x_1 + \frac{1 + \omega_2}{n} x_2 + \dots + \frac{1 + \omega_n}{n} x_n.$$

Для выполнения условия (б) на величины  $\omega$  необходимо наложить условие  $[\omega] = 0$ .

Вычислим дисперсию величины  $\hat{x}$ .

$$\begin{aligned} D(\hat{x}) &= D\left[\frac{1 + \omega}{n} x\right] = \frac{[(1 + \omega)^2]}{n^2} D[x] = \frac{[(1 + 2\omega + \omega^2)] n \sigma^2}{n^2} = \\ &= \frac{(n + 2[\omega] + [\omega^2]) \sigma^2}{n} = \left(1 + [\omega^2]\right) \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Сравнивая (6.7) с последним выражением, приходим к выводу, что  $D(\bar{x}) < D(\hat{x})$  при любом наборе  $\omega$ , кроме случая, когда все  $\omega = 0$ , и функция (а) представляет собой среднеарифметическую.

## 6.4. Оценка дисперсии и среднеквадратического отклонения

Далее будем рассматривать некоторые оценки параметров, причем без доказательства их свойств.

Пусть имеется выборка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  из генеральной совокупности  $X$ , математическое ожидание которой  $M(x) = a$ , а дисперсия  $D(x) = \sigma^2$ .

Оценка дисперсии и среднеквадратического отклонения при известном математическом ожидании. При известном математическом ожидании  $M(x) = a$  наилучшая оценка дисперсии может быть получена по формуле

$$m_0^2 = \frac{[(x-a)^2]}{n}. \quad (6.8)$$

Она обладает всеми свойствами наилучших оценок. Ее математическое ожидание равно  $M(m_0^2) = \sigma^2$ , а дисперсия  $D(m_0^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$ .

В этом случае оценка среднеквадратического отклонения (СКО) вычисляется по формуле

$$m_0 = \sqrt{\frac{[(x-a)^2]}{n}}. \quad (6.9)$$

Математическое ожидание оценки равно  $M(m_0) \approx \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}$ , а дисперсия  $D(m_0) \approx \frac{\sigma^2}{2n}$ . Отсюда вытекает, что оценка несколько

смещена, причем величина смещения уменьшается с увеличением объема выборки. Величина смещения оценки  $m_0$  (в процентах) в зависимости от объема выборки представлена в табл. 6.1.

Среднеквадратическая погрешность оценки  $m_0$  хорошо аппроксимируется формулой  $m_{m_0} = \frac{m_0}{\sqrt{2n}}$ . Ее можно выразить также в процентах от самой величины  $m_0 - \frac{m_{m_0}}{m_0} \% = \frac{100}{\sqrt{2n}}$ , что также отображено в табл. 6.1.

Таблица 6.1

$n$	2	5	10	25	100
$\frac{h}{\sigma}$	11	5	2,5	1	0,3
$\frac{m_{m_0}}{m_0}$	50	32	22	14	7

Как видно из табл. 6.1, величина смещения оценки при любых объемах выборки не превосходит ее среднеквадратической ошибки, поэтому ее нет смысла учитывать.

*Оценка дисперсии и среднеквадратического отклонения при неизвестном математическом ожидании.* При неизвестном математическом ожидании  $M(x) = a$  наилучшая оценка дисперсии может быть получена по формуле

$$m^2 = \frac{[(x - \bar{x})^2]}{n}, \quad (6.10)$$

где  $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$  — оценка неизвестного математического ожидания.

Оценка (6.10) обладает всеми свойствами наилучших оценок. Ее математическое ожидание равно  $M(m^2) = \sigma^2$ , а дисперсия

$$D(m^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

В этом случае оценка СКО вычисляется по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[(x - \bar{x})^2]}{n-1}}. \quad (6.11)$$

Эта оценка состоятельна, эффективна, но так же как и оценка (6.9), несколько смещена. Математическое ожидание оценки равно

$$M(m) \approx \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{2(n-1)}}, \text{ а дисперсия } D(m) \approx \frac{\sigma^2}{2(n-1)}, \text{ причем величина}$$

смещения с увеличением объема выборки также уменьшается. Величина смещения оценки  $m$  (в процентах) зависит от объема выборки, но, в отличие от значений табл. 6.1, в первой строке должны быть записаны величины  $n - 1$ .

Среднеквадратическая погрешность оценки  $m$  хорошо аппроксимируется формулой  $m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$ .

*Оценка среднеквадратического отклонения по размаху выборки.* По выборке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  из генеральной совокупности  $X$ , математическое ожидание которой  $M(x) = a$ , а дисперсия  $D(x) = \sigma^2$ ,

можно построить оценку среднеквадратического отклонения по формуле

$$\hat{m} = \frac{R_n}{d_n}, \quad (6.12)$$

где  $R_n = x_{\max} - x_{\min}$  — размах выборки объема  $n$ , а  $d_n$  — коэффициент, зависящий от объема выборки. Математическое ожидание

этой оценки  $M(\hat{m}) = M\left(\frac{R_n}{d_n}\right) = \sigma$ . Следовательно, данная оценка

является несмещенной.

Дисперсия оценки  $D(\hat{m}) = \sigma^2 k^2$ , где параметр  $k$  является функцией объема выборки  $n$ . Эффективность оценки  $\hat{m}$  по отношению к оценке  $m$  несколько ниже. В табл. 6.2 приведено соотношение объемов выборок, дающих оценки с одинаковыми дисперсиями. В первой строке таблицы содержится объем выборки, по которой рассчитывалась оценка  $m$ , а во второй — объем выборки, по которой необходимо получить оценку  $m$  с такой же дисперсией:

Таблица 6.2

$n_m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$n_{\hat{m}}$	2	4	5	6	7	8	9	11	12	14	16	18	20

Таким образом, видим, что оценку  $\hat{m}$  есть смысл применять, если объем выборки  $n \leq 10$ . В этом случае вычисление оценки СКО по размаху имеет практически ту же точность, что и наилучшая оценка  $m$ , но в вычислительном аспекте расчет оценки СКО по размаху значительно проще. В табл. 6.3. приведены значения  $d_n$ , с помощью которых проводится вычисление оценки СКО по величине размаха.

Таблица 6.3

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
$d_n$	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08	3,41

## 6.5. Оценка моментов

При оценке моментов как центральных, так и начальных, в основном, используется метод среднеарифметического. Так, оценка любого начального момента порядка  $k$  может быть получена по формуле

$$\bar{v}_k = \frac{[x^k]}{n}, \quad (6.13)$$

где  $n$  — объем выборки.

Для оценок центральных моментов порядка  $k$  используют формулы

$$\bar{\mu}_k = \frac{[(x - \bar{x})^k]}{n}. \quad (6.14)$$

Вычисление оценок целого ряда параметров распределений обычно производится с использованием оценок моментов, используя при этом теоретические формулы расчета этих параметров. Так, оценки асимметрии и эксцесса могут быть получены соответственно по формулам:

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{\mu}_3}{m^3}; \quad (6.15)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\mu}_4}{m^4} - 3. \quad (6.16)$$

Следует отметить, что такого рода оценки состоятельны, но достаточно часто малоэффективны. Однако достоинством этого метода является его простота.

## 6.6. Выборочный коэффициент корреляции

Пусть имеется двумерная генеральная совокупность  $XU$ , для которой необходимо найти оценку коэффициента корреляции  $\rho_{xy}$ . Для вычисления выборочного коэффициента корреляции необходимо иметь выборку, состоящую из  $n$  пар  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть рассчитан по формуле

$$\rho_{xy} = \frac{\bar{\mu}_{12}}{m_x m_y}, \quad (6.17)$$

где  $\bar{\mu}_{12}$  — оценка первого смешанного центрального момента, вычисляемая по формуле

$$\bar{\mu}_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); \quad (6.18)$$

$m_x$  — оценка дисперсии составляющей  $X$ ;

$m_y$  — оценка дисперсии составляющей  $Y$ .

Приведенная оценка (6.17) является состоятельной, т.е. при  $n \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к соответствующему теоретическому значению  $r_{xy}$ .

## 6.7. Примеры решения типовых задач

### Пример 6.1

Задан ряд невязок (в секундах) в треугольниках триангуляции II класса общим объемом 50 (табл. 6.4).

Таблица 6.4

-1,81	-1,82	+2,32	0	-0,70
+1,51	+0,61	-1,29	-2,64	+0,04
+0,01	+0,11	+1,56	-1,09	+2,78
-0,35	-0,01	+1,64	-0,77	-1,26
-0,52	-0,69	+1,02	-1,58	+1,78
+0,16	+0,64	+0,42	+0,99	-2,08
-0,55	+0,64	-0,09	+0,56	-0,35
-2,55	-0,76	+1,05	-1,51	+2,71
+0,70	-0,40	+2,22	-1,14	-0,17
-0,31	-0,01	+0,21	+1,32	-0,85

Рассматривая этот ряд невязок как выборку из некоторой генеральной совокупности ошибок суммы измеренных углов треугольников триангуляции, необходимо рассчитать точечные оценки математического ожидания, дисперсии, СКО, асимметрии и эксцесса. Решение выполнить по предварительно группированным данным.

### Решение

В качестве границ интервалов групп здесь принимают следующие значения:  $-3,50''$ ;  $-2,50''$ ;  $-1,50''$ ;  $-0,50''$ ;  $+0,50''$ ;  $+1,50''$ ;  $+2,50''$ ;  $+3,50''$ . Тогда центрами интервалов будут значения:  $-3,00''$ ;  $-2,00''$ ;  $-1,00''$ ;  $0''$ ;  $+1,00''$ ;  $+2,00''$ ;  $+3,00''$ . Все расчеты сведены в табл. 6.5.

После заполнения таблицы приступают к вычислению оценок по следующим формулам.

#### 1. Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{[nz]}{n} = \frac{4,00}{50} = -0,08.$$

#### 2. Дисперсия

$$m^2 = \frac{[n(z - \bar{x})^2]}{n - 1} = \frac{99,68}{49} = 2,03.$$

#### 3. Среднеквадратическое отклонение

$$m = \sqrt{\frac{[n(z - \bar{x})^2]}{n - 1}}.$$

#### 4. Третий центральный момент

$$\bar{\mu}_3 = \frac{[n(z - \bar{x})^3]}{n} = +\frac{13,7}{50} = +0,27.$$

#### 5. Асимметрия

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{\mu}_3}{m^3} = +\frac{0,27}{2,88} = +0,09.$$

#### 6. Четвертый центральный момент

$$\bar{\mu}_4 = \frac{[n(z - \bar{x})^4]}{n} = \frac{521,2}{50} = 10,4.$$

#### 7. Эксцесс

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{\mu}_4}{m^4} - 3 = \frac{10,4}{4,12} - 3 = -0,47.$$

Таблица 6.5

## Вычисление оценок параметров

№	Граница интервала	Сортировка $n_i$	Центр интервала $z_i$	$z_i n_i$	$z_i - \bar{x}$	$(z_i - \bar{x})n_i$	$(z_i - \bar{x})^2 n_i$	$(z_i - \bar{x})^3 n_i$	$(z_i - \bar{x})^4 n_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-3,50								
1	-2,50	2	-3,00	-6,00	-2,92	-5,84	17,05	-49,8	145,0
2	-1,50	6	-2,00	-12,00	-1,92	-11,52	22,12	-42,5	81,5
3	-0,50	11	-1,00	-11,00	-0,92	-10,12	9,31	-8,6	7,9
4	+0,50	15	0	0	+0,08	+1,20	0,10	-0,1	0
5	+1,50	9	+1,00	+9,00	+1,08	+9,72	10,50	+11,3	12,2
6	+2,50	5	+2,00	+10,00	+2,08	+10,40	21,63	+45,0	94,6
7	+3,50	2	+3,00	+6,00	+3,08	+6,16	18,97	+58,4	180,0
$\Sigma$		50		-4,00		0	99,68	+13,7	521,2

## 6.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Выборка их генеральной совокупности задана таблицей:

$x$	2	3	5	7
$n$	7	10	11	2

Найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения.

2. По данным задачи 1 найти оценки асимметрии и эксцесса.

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Понятие параметра генеральной совокупности и его оценки.
2. Что значит построить оценку параметра?
3. Что понимают под наилучшей оценкой параметра?
4. В чем заключаются свойства несмещенности, состоятельности и эффективности?
5. Различные варианты оценки математического ожидания. Наилучшая оценка математического ожидания.
6. Оценка дисперсии и СКО при известном математическом ожидании.
7. Оценка дисперсии и СКО при неизвестном математическом ожидании.
8. Оценка СКО по размаху выборки.
9. Оценка моментов.
10. Выборочный коэффициент корреляции.

## 7. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ

### 7.1. Общие положения

Рассмотренные ранее методы построения оценок неизвестных параметров генеральной совокупности по ограниченной выборке дают так называемые *точечные оценки*. Как уже было указано, любая функция элементов выборки является лишь частным значением некоторой случайной величины, в связи с чем мы не располагаем никакими сведениями о степени ее приближения к истинному значению оцениваемого параметра.

Чтобы получить представление о качестве оценки, т.е. о степени ее приближения к истинному значению оцениваемого параметра, желательно было бы указать некоторый интервал, построенный вокруг значения точечной оценки, который с достаточно большой вероятностью покрывал истинное значение искомого параметра.

Положим, что  $\theta$  — истинное значение оцениваемого параметра,  $\bar{\theta}$  — оценка параметра, полученная по элементам выборки. Если удастся показать, что выполняется равенство

$$P(\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta) = 1 - \alpha, \quad (7.1)$$

то в этом случае интервал  $(\bar{\theta} - \delta; \bar{\theta} + \delta)$  называют доверительным интервалом, отвечающим доверительной вероятности  $P = 1 - \alpha$ . При этом  $\alpha$  называют *уровнем значимости*.

Границы доверительного интервала  $(\bar{\theta} - \delta; \bar{\theta} + \delta)$  являются функциями элементов выборки, т.е. *величинами случайными*, поэтому равенство (7.1) следует понимать так:

*Доверительный интервал  $(\bar{\theta} - \delta; \bar{\theta} + \delta)$  с вероятностью  $P = 1 - \alpha$  покрывает неизвестное значение  $\theta$ .*

Чем меньше будет значение величины  $\delta$ , т.е. чем уже будет величина интервала при заданном уровне значимости  $\alpha$ , тем *точнее будет оценка  $\bar{\theta}$* . Увеличивая уровень значимости  $\alpha$ , т.е. уменьшая доверительную вероятность  $P = 1 - \alpha$ , тем самым сужаем величину доверительного интервала. Казалось бы, что этим приемом повышается точность оценки, но при этом уменьшается ее *надежность*, т.е. вероятность, с которой доверительный интервал покрывает неизвестное значение оцениваемого параметра  $\theta$ .

Построение доверительных интервалов естественно увеличивает информативность полученной оценки. Однако повышение информативности может быть получено либо исходя из каких-то ранее известных сведений о генеральной совокупности, либо на основе дополнительных исследований.

Существенной информацией о генеральной совокупности является знание закона ее распределения.

Рассматриваемые далее методы построения доверительных интервалов основаны на том, что исследуемая генеральная совокупность *имеет нормальное распределение*.

## 7.2. Доверительный интервал для математического ожидания

**Построение доверительного интервала для математического ожидания при известной дисперсии.** Пусть имеется выборка объема  $n$  из нормально распределенной генеральной совокупности  $X(X \subset N(a, \sigma^2))$  с известной дисперсией  $\sigma^2$  и неизвестным математическим ожиданием  $a$ . В качестве оценки математического ожидания будем рассматривать среднеарифметическое.

Примем без доказательства, что если генеральная совокупность распределена нормально, то и среднеарифметическое, полученное по элементам выборки, также имеет нормальное распределение (впрочем, это следует из центральной предельной теоремы). Параметры распределения среднеарифметического следующие: математическое ожидание  $M(\bar{x}) = a$ , а дисперсия

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Величина  $t = \frac{\bar{x} - a}{\sigma / \sqrt{n}}$  является централизованной нормированной

случайной величиной, имеющей нормальное распределение  $N(0, 1)$ . При известном распределении величины  $t$  можно определить вероятность ее попадания в заданный интервал  $(-t; t)$ . Тогда

$$P\left(-t < \frac{\bar{x} - a}{\sigma / \sqrt{n}} < t\right) = F(t) - F(-t) = 2F(t) - 1 = 2\Phi(t) - 1 = 1 - \alpha = \gamma,$$

где  $\Phi(t)$  — функция Лапласа.

Тогда неравенство  $-t < \frac{\bar{x} - a}{\sigma / \sqrt{n}} < t$  выполняется с вероятностью

$\gamma = 1 - \alpha$ . После преобразования получаем доверительный интервал

$$\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (7.2)$$

который с вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  покрывает неизвестное значение математического ожидания  $a$ .

Параметр  $t$  находят по таблицам функции Лапласа из соотношения  $\Phi(t) = \frac{1 - \alpha}{2}$ .

**Построение доверительного интервала для математического ожидания при неизвестной дисперсии.** Как уже было указано ранее, генеральная совокупность  $X$  имеет нормальное распределение, т.е.  $X \subset N(a, \sigma^2)$ , но ее дисперсия  $\sigma^2$  неизвестна. В этом случае по выборке объема  $n$  строят оценки математического ожидания

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} \text{ и среднеквадратического отклонения } m = \sqrt{\frac{[(x - \bar{x})^2]}{n - 1}}.$$

Можно доказать что величина  $t_\gamma = \frac{\bar{x} - a}{m / \sqrt{n}}$  имеет распределение

Стьюдента с  $k = n - 1$  степенями свободы. Плотность распределения Стьюдента  $S(t, n)$  есть четная функция, поэтому вероятность

выполнения неравенства  $\left| \frac{\bar{x} - a}{m / \sqrt{n}} \right| < t_\gamma$  может быть подсчитана по формуле

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{m / \sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} S(t, n) dt = 1 - \alpha = \gamma,$$

или

$$P(\bar{x} - t_\gamma m / \sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma m / \sqrt{n}) = 1 - \alpha = \gamma.$$

Таким образом, пользуясь таблицами распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости  $\alpha = 1 - \gamma$  и числу степеней свободы  $k = n - 1$  можно получить величину  $t_\gamma$ . Используя последнюю, строим доверительный интервал

$$(\bar{x} - t_\gamma m / \sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma m / \sqrt{n}), \quad (7.3)$$

который с вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  покрывает неизвестный параметр  $a$ .

### 7.3. Доверительный интервал для дисперсии

Пусть имеется выборка  $x$  из нормально распределенной генеральной совокупности  $X$ . По выборке строят оценку дисперсии

$$m^2 = \frac{[(x - \bar{x})^2]}{n - 1}. \text{ Известно, что величина } \chi^2 = \frac{(n - 1)m^2}{\sigma^2} \text{ имеет } \chi^2$$

распределение с числом степеней свободы  $k = n - 1$ .

Тогда для этой величины можно рассчитать вероятность попадания в интервал  $(\chi_1^2; \chi_2^2)$  (рис. 7.1), которая будет равна

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{(n - 1)m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = 1 - \alpha = \gamma.$$

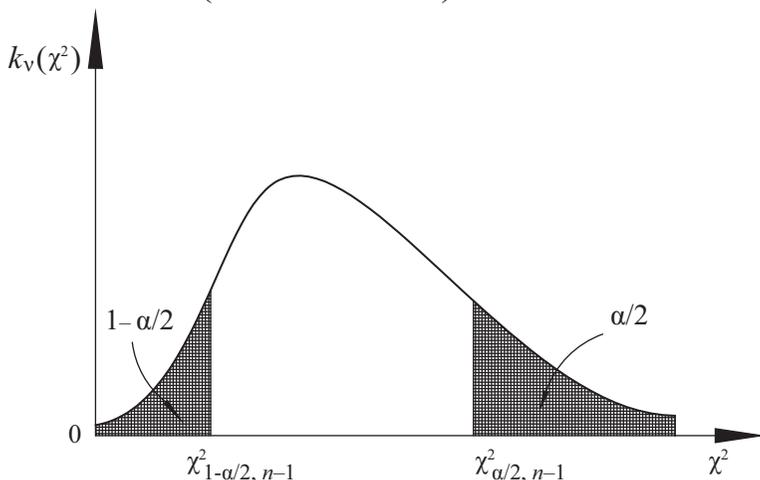


Рис. 7.1

Выбираем  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\chi_1^2 \Rightarrow \int_0^{\chi_1^2} f(x) dx = \frac{\alpha}{2};$$

$$\chi_2^2 \Rightarrow \int_0^{\chi_2^2} f(x) dx = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

где  $f(x)$  — плотность  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  распределения.

Величины  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  выбирают из таблиц распределения  $\chi^2$  с учетом уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $k$ .

Тогда неравенство  $\chi_1^2 < \frac{(n-1)m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$  будет выполняться с вероятностью  $1 - \alpha$ . После преобразования неравенств получаем

$$m^2 \frac{(n-1)}{\chi_2^2} < \sigma^2 < m^2 \frac{(n-1)}{\chi_1^2}. \quad (7.4)$$

Последние неравенства определяют доверительный интервал, который с вероятностью  $1 - \alpha$  покрывает неизвестное значение дисперсии.

#### **7.4. Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения**

При тех же условиях, которые оговорены ранее, проведем рассуждения по поводу построения доверительного интервала для СКО. Повторив все выводы предыдущего изложения, извлечем квадратный корень из всех частей неравенств (7.4). Тогда получим

$$m \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_2^2}} < \sigma < m \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_1^2}}. \quad (7.5)$$

Последние неравенства определяют доверительный интервал, который с вероятностью  $1 - \alpha$  покрывает неизвестное значение СКО.

#### **7.5. Доверительный интервал для выборочного коэффициента корреляции**

В случае, когда двумерная случайная величина имеет нормальное распределение, построить доверительный интервал для выборочного коэффициента корреляции  $\rho_{xy}$ .

При больших  $n$  ( $n > 100$ ) выборочный коэффициент корреляции имеет распределение, близкое к нормальному с параметрами

$$M(\rho_{xy}) = r_{xy} \text{ и } \sigma_\rho = \frac{1 - \rho_{xy}^2}{\sqrt{n}}. \text{ Для построения доверительного интерва-}$$

ла по таблицам нормального распределения находят число  $t$ , отвечающее уравнению  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha$  при выбранном уровне значимости  $\alpha$ .

Тогда доверительный интервал для коэффициента корреляции будет иметь вид

$$\rho_{xy} - t \frac{1 - \rho_{xy}^2}{\sqrt{n}} < r_{xy} < \rho_{xy} + t \frac{1 - \rho_{xy}^2}{\sqrt{n}}. \quad (7.6)$$

Последние неравенства определяют доверительный интервал, который с вероятностью  $1 - \alpha$  накрывает неизвестное значение коэффициента корреляции.

## 7.6. Примеры решения типовых задач

### Пример 7.1

По условиям примера 6.1 построить доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и СКО при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

*Решение*

Из решения примера 6.1 имеем  $\bar{x} = -0,08$ ,  $m^2 = 2,03$  и  $m = 1,42$ .

1. Для расчета доверительных границ математического ожидания из таблиц распределения Стьюдента находим  $t_q$ . При этом следует учитывать, что число степеней свободы  $\nu = n - 1 = 49$ , а уровень значимости  $\alpha$  задан равным 0,05. Величину  $t_q$  можно выбрать из таблиц (Приложение 4) по двухсторонней критической области. Находим, что  $t_q = 2,01$ . Доверительные границы находим по следующим формулам:

$$C_1 = \bar{x} - t_q \frac{m}{\sqrt{n}} = -0,08 - 2,01 \frac{1,42}{\sqrt{50}} = -0,48;$$

$$C_2 = \bar{x} + t_q \frac{m}{\sqrt{n}} = -0,08 + 2,01 \frac{1,42}{\sqrt{50}} = +0,32.$$

Доверительный интервал математического ожидания имеет вид:

$$-0,48 < M(X) < +0,32.$$

2. Для нахождения доверительных границ дисперсии по вероятностям  $P_2 = 1 - \alpha / 2 = 0,975$  и  $P_1 = \alpha / 2 = 0,025$  и по числу степеней свободы  $\nu = n - 1 = 49$  определяют по таблицам критических точек распределения  $\chi^2$  (Приложение 3) величины  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$ , которые оказываются равными 31,6 и 70,2. Расчет границ доверительного интервала дисперсии проводят по формулам

$$C_1 = m^2 \frac{n-1}{\chi_2^2} = 1,42;$$

$$C_2 = m^2 \frac{n-1}{\chi_1^2} = 3,15.$$

Тогда доверительный интервал для дисперсии может быть представлен в виде

$$1,42 < D(X) < 3,15.$$

3. Используя данные расчетов п. 2, по формулам

$$C_1 = m \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}} = 1,19;$$

$$C_2 = m \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}} = 1,78$$

получают доверительные границы СКО. Доверительный интервал для СКО имеет вид

$$1,19 < \sigma < 1,78.$$

## 7.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Выборка из нормальной генеральной совокупности задана таблицей:

$x$	2	3	5	7
$n$	7	10	11	2

Найти доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и СКО при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

2. По выборке объема  $n = 10$  вычислены оценки математического ожидания  $\bar{x} = 42,3$  и среднеквадратического отклонения  $m = 5,0$ . Построить доверительный интервал для математического ожидания при уровне значимости  $\alpha = 0,01$ .

3. По выборке объема  $n = 25$  из нормально распределенной генеральной совокупности вычислена оценка СКО  $m = 0,8$ . Построить доверительный интервал для СКО при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

### **Темы и вопросы для самопроверки**

1. Что такое доверительный интервал?
2. Чем определяются точность и надежность интервальной оценки параметра?
3. При каких условиях возможно построение доверительного интервала?
4. Как осуществить построение доверительного интервала для математического ожидания при известной и при неизвестной дисперсии?
5. Построение доверительного интервала для дисперсии.
6. Построение доверительного интервала для СКО.
7. Доверительный интервал для выборочного коэффициента корреляции.

## **8. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ**

### **8.1. Общие положения по проверке статистических гипотез**

Гипотеза (с греческого *hypothesis* 'основание, предположение') — научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления и требующее проверки на опыте.

В математической статистике — это предположение, выдвигаемое относительно свойств генеральной совокупности, проверяемое по свойствам, получаемым из выборки этой генеральной совокупности.

Пусть сделано предположение относительно генеральной совокупности  $X$ , что она обладает свойством  $A$  которое может быть

представлено в числовом виде как  $K$ . Это предположение называют нулевой гипотезой и обозначают следующим образом:

$H_0$ :  $X$  обладает свойством  $A$ , которое имеет числовое выражение  $K$ .

В противовес нулевой гипотезе может быть выдвинута конкурирующая гипотеза:

$H_1$ :  $X$  обладает свойством  $B$ , которое имеет числовое выражение  $L$ .

Конкурирующих гипотез может быть выдвинуто несколько.

Рассмотрим простейший случай — наличие только нулевой гипотезы.

$$H_0 : X \rightarrow A \Rightarrow K.$$

Для исследования поставленной гипотезы сделана выборка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  объема  $n$ .

Как указывалось ранее, справедливо следующее:

1. Элементы выборки принадлежат генеральной совокупности, в связи с чем выборка отражает общие свойства генеральной совокупности.

2. Элементы выборки получены методом случайного отбора, поэтому каждая выборка имеет свои индивидуальные особенности, отличающие ее как от любой другой выборки того же объема, так и от всей генеральной совокупности.

Если у генеральной совокупности  $X$  предполагается выполнение свойства  $A$ , численно выражаемого как  $K$ , то это свойство у выборки  $x$  проявится как  $a$ , численно выражаемое как  $k$ . В связи с указанными соотношениями между генеральной совокупностью и выборкой следует предположить, что при выполнении нулевой гипотезы расхождения между  $K$  и  $k$  будут носить случайный характер и, следовательно, будут незначимыми.

В противном случае, если нулевая гипотеза неверна и генеральная совокупность не обладает свойством  $A$ , то расхождения между гипотетическим  $K$  и полученным из опыта  $k$  будут значимыми (достаточно большими). Для решения вопроса о значимости расхождения между  $K$  и  $k$ , т.е. для ответа на вопрос о принятии или непринятии выдвинутой гипотезы необходимо построить меру расхождения между  $K$  и  $k$ , которую назовем критерием и обо-

значим как  $D = D(K, k)$ . Величина  $D$  как функция элементов выборки является величиной случайной. Одной из важнейших задач математической статистики является выбор таких критериев (мер расхождения между  $K$  и  $k$ , распределение которых известно. Если нулевая гипотеза верна, то можно рассчитать предельное (критическое) значение критерия, которое он может принимать вследствие случайных колебаний величины  $k_\alpha$  с определенным *уровнем значимости*  $\alpha$ , т.е. с вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ , что показано на рис. 8.1.



Рис. 8.1

Если значения критерия попадают в *область принятия гипотезы* (рис. 8.1, *а, б, в*), то говорят, что данные опыта не противоречат выдвинутой гипотезе. В противном случае утверждают, что опытные данные не соответствуют выдвинутой гипотезе. *Критической областью* называют все множество значений критерия, при которых гипотеза отвергается. *Критическими точками* называют точки  $k_\alpha$  (см. рис. 8.1), отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Следует отметить, что любые статистические выводы не являются абсолютными, так как они в любом случае делаются с определенной вероятностью, не равной единице. В связи с этим при рассмотрении статистических гипотез возможны ошибки разного рода. Смысл их приведен в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Решение, принятое после опыта	Фактическое состояние	
	Гипотеза верна	Гипотеза неверна
Гипотеза принята	Верное решение	Ошибка второго рода
Гипотеза отвергнута	Ошибка первого рода	Верное решение

Ошибка первого рода может быть допущена с вероятностью, равной уровню значимости  $\alpha$ .

*Мощностью критерия* называют вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза (принятие верного решения, если исходная гипотеза неверна). Пусть вероятность ошибки второго рода (принятие неверной гипотезы) равна  $\beta$ , тогда мощность критерия будет равна  $1 - \beta$ . Из этого вытекает, что чем выше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Следует отметить, что сравнение двух величин всегда проводится на основе либо их разности, либо отношения. Если две величины равны, то их разность нулевая, а отношение равно единице. На этом принципе строятся все рассматриваемые далее критерии.

## 8.2. Сравнение двух средних

Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности  $X$  и  $Y$ . Предполагается, что их математические ожидания равны, т.е. нулевая гипотеза может быть представлена в виде

$$H_0 : M(X) = M(Y).$$

В качестве конкурирующей гипотезы представим следующую:

$$H_1 : M(X) \neq M(Y).$$

В этом случае целесообразно рассмотреть два варианта.

1. Дисперсии генеральных совокупностей известны.
2. Дисперсии генеральных совокупностей неизвестны.

В любом из рассматриваемых случаев необходимо получить выборки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ , где  $n$  и  $l$  — соответственно объемы выборок из первой и второй генеральных совокупностей. Далее рассмотрим решения каждого из представленных вариантов.

**Дисперсии известны.** Здесь рассмотрим случай, когда известны дисперсии  $D(X)$  и  $D(Y)$  генеральных совокупностей  $X$  и  $Y$ .

По элементам двух выборок  $x$  и  $y$  вычислим величину

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/l}}, \quad (8.1)$$

где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — оценки математических ожиданий рассматриваемых генеральных совокупностей.

Если гипотеза верна, т.е. математические ожидания исследуемых генеральных совокупностей равны, то оценки их математических ожиданий  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  должны быть близкими друг к другу и их разность должна незначительно отличаться от нуля, что можно утверждать и о величине  $t$ . Но за счет случайных колебаний элементов выборок возможно расхождение между оценками математических ожиданий. В связи с этим и величина  $t$  может отклоняться от нуля. Зная закон ее распределения, можно рассчитать для выбранного уровня значимости  $\alpha$  предельные (критические) значения, в пределах которых величина  $t$  может изменяться за счет случайных колебаний.

При нормальном распределении исходных совокупностей  $X$  и  $Y$  случайная величина  $t$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(0; 1)$ , т.е. является величиной центрированной и нормированной. Тогда при выбранном уровне значимости  $\alpha$  наибольшая мощность критерия достигается тогда, когда критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна  $\alpha/2$  (рис. 8.2)

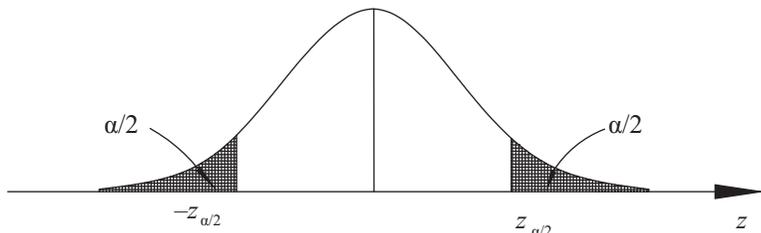


Рис. 8.2

В этом случае критическими точками будут являться величины  $t_{\text{кр}}$  и  $-t_{\text{кр}}$ . Для нахождения величины  $t_{\text{кр}}$  воспользуемся функцией

$$\text{Лапласа } P(0 < t < t_{\text{кр}}) = \Phi(t_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Вычислив по опытным данным величину  $t$  и выбрав из таблиц функции Лапласа величину  $t_{\text{кр}}$ , сравним их. При выполнении неравенства вида  $|t| < t_{\text{кр}}$  принимаем нулевую гипотезу, т.е. считаем, что опытные данные не противоречат предположению о равенстве математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей. В противном случае, при  $|t| > t_{\text{кр}}$  принимаем альтернативную гипотезу, т.е. утверждаем, что равенство математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей не подтверждается опытными данными.

Если объемы выборок  $n$  и  $l$  равны, формуле (8.1) можно придать вид

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n}}{\sqrt{D(X) + D(Y)}}. \quad (8.2)$$

Если равны и дисперсии генеральных совокупностей  $X$  и  $Y$ , т.е.  $D(X) = D(Y) = \sigma^2$  то формула (8.2) принимает вид

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (8.3)$$

**Дисперсии неизвестны.** Пусть генеральные совокупности  $X$  и  $Y$  распределены нормально и имеют неизвестные, но равные между собой дисперсии  $D(X) = D(Y) = \sigma^2$  (равенство дисперсий предварительно должно быть проверено по методике, описанной далее).

В качестве критерия проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий  $H_0 : M(X) = M(Y)$  по элементам выборок  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$  вычисляют величину

$$t_q = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{(n-1)m_x^2 + (l-1)m_y^2}} \sqrt{\frac{nl(n+l-2)}{n+l}}, \quad (8.4)$$

где  $m_x^2$  и  $m_y^2$  — оценки дисперсий исследуемых генеральных совокупностей.

Если в качестве конкурирующей выставляется гипотеза  $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ , то критическую область строят так же, как и в предыдущем случае. Это значит, что попадания критерия в правую и в левую критические области должны быть равновероятны (вероятность  $\alpha/2$ ).

Доказывается, что величина  $t_q$  имеет распределение Стьюдента с  $k = n + l - 2$  степенями свободы. Распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, следовательно, критические точки отличаются только знаком. Исходя из этого, по таблицам распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область) находят по заданному уровню значимости  $\alpha$  и по числу степеней свободы  $k$  правую критическую точку  $t_q^{\text{кр}}$ . Далее сравнивают величины  $t_q^{\text{кр}}$  и  $t_q$ . Если выполняется неравенство вида  $|t_q| < t_q^{\text{кр}}$ , то принимается нулевая гипотеза. В этом случае полагают, что опытные данные не противоречат предположению о равенстве математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей, и расхождение между выборочными средними незначимо.

В противном случае, при  $|t_q| > t_q^{\text{кр}}$  принимают альтернативную гипотезу, т.е. утверждают, что равенство математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей не подтверждается опытными данными. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

### 8.3. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней

**Дисперсия генеральной совокупности известна.** Пусть генеральная совокупность  $X$  распределена нормально, ее дисперсия известна и равна  $D(x) = \sigma^2$ . Математическое ожидание неизвестно, но есть основание предполагать, что оно равно  $a$ . В этом случае нулевая гипотеза формулируется следующим образом:

$$H_0 : M(X) = a.$$

В качестве критерия проверки выдвинутой гипотезы по выборке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  объема  $n$  строят величину

$$u = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}. \quad (8.5)$$

Эта величина распределена нормально с параметрами  $(0, 1)$ . При конкурирующей гипотезе  $H_0 : M(X) \neq a$  находят по таблицам функции Лапласа критическое значение  $u_{\text{кр}}$  из соотношения

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Далее выполняют сравнение величин  $u_{\text{кр}}$  и  $u$ . Если выполняется неравенство вида  $|u| < u_{\text{кр}}$ , то принимают нулевую гипотезу. В этом случае считают, что опытные данные не противоречат предположению о равенстве математического ожидания исследуемой генеральной совокупности величине  $a$ , и расхождение между выборочным средним и величиной  $a$  незначимо.

В противном случае, при  $|u| > u_{\text{кр}}$  принимают альтернативную гипотезу, т.е. утверждают, что равенство математического ожидания исследуемой генеральной совокупности величине  $a$  не подтверждается опытными данными. Другими словами, выборочное среднее значимо отличается от величины  $a$ .

**Дисперсия генеральной совокупности неизвестна.** Пусть генеральная совокупность  $X$  распределена нормально, ее дисперсия неизвестна. Математическое ожидание также неизвестно, но есть основание предполагать, что оно равно  $a$ . В этом случае нулевая гипотеза формулируется следующим образом:

$$H_1 : M(X) = a.$$

В качестве критерия проверки выдвинутой гипотезы по выборке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  объема  $n$  строят величину

$$u_q = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{m}, \quad (8.6)$$

где  $m$  — оценка СКО генеральной совокупности.

Величина  $u_q$  распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы  $k = n - 1$ . При конкурирующей гипотезе

$$H_1 : M(X) \neq a$$

находят по таблицам распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область) по заданному уровню значимости  $\alpha$  и по числу степеней свободы  $k$  правую критическую точку  $u_{кр}$ .

Далее выполняют сравнение величин  $u_{кр}$  и  $u$  аналогично, когда известна дисперсия генеральной совокупности.

#### 8.4. Критерий Аббе

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с одинаковыми, но неизвестными дисперсиями. Критерий Аббе предназначен для проверки гипотезы равенства средних

$$M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n)$$

против альтернативы

$$|M(X_{i+1}) - M(X_i)| > 0$$

для всех значений  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Для проверки выдвинутой гипотезы равенства математических ожиданий проводится выборка по одному элементу из каждой генеральной совокупности  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В упрощенном варианте критерий Аббе представляет собой величину

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} - 1, \quad (8.7)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ . Далее сравнивают полученную величину с величиной  $\frac{2}{\sqrt{n}}$ . Если выполняется неравенство вида

$$|q| < \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad (8.8)$$

то считают, что результаты опыта не противоречат выдвинутой гипотезе о равенстве математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей. Если же справедливо неравенство противоположного смысла, то принимается альтернативная гипотеза.

## 8.5. Сравнение дисперсий

**Критерий Фишера — Снедекора.** Пусть генеральные совокупности  $X$  и  $Y$  распределены нормально. Требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий генеральных совокупностей, которую можно представить в виде  $H_0 : D(X) = D(Y)$ .

По выборкам  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2})$  вычисляют величину

$$F = \frac{m_6^2}{m_m^2}, \quad (8.9)$$

где  $m_6^2$  — бóльшая по величине оценка дисперсии;  $m_m^2$  — меньшая по величине оценка дисперсии.

Величина  $F$  имеет распределение Фишера — Снедекора со степенями свободы  $k_1 = n_6 - 1$  и  $k_2 = n_m - 1$ . В этом случае  $n_6$  — объем той выборки, по которой получена бóльшая оценка дисперсии, а  $n_m$  — объем выборки, по которой получена меньшая по величине оценка дисперсии. Для простоты рассуждений положим, что  $m_x^2 > m_y^2$ . Тогда в качестве конкурирующей гипотезы формулируем следующую:  $H_1 : D(X) > D(Y)$ . В этом случае строим односто-

ронную критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия  $F$  в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:  $P[F > F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha$ .

Критическую точку  $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$  находят по таблицам распределения Фишера — Снедекора. Если  $F < F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$ , нет оснований отвергать нулевую гипотезу. В противном случае, при  $F > F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$  нулевая гипотеза отвергается. Другими словами, дисперсия первой совокупности значимо больше дисперсии второй.

**Критерий Бартлетта.** Пусть имеется несколько генеральных совокупностей  $X_1, X_2, \dots, X_t$ , имеющих нормальное распределение. Требуется проверить гипотезу о равенстве дисперсий рассматриваемых совокупностей. Рассматриваемую гипотезу обычно называют *гипотезой об однородности дисперсий* и записывают в виде  $H_0 : D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_t)$ .

Для проверки гипотезы получены выборки из каждой совокупности с объемами, соответственно равными  $n_1, n_2, \dots, n_t$ . По выборкам вычислены оценки дисперсий для каждой генеральной совокупности  $m_1^2, m_2^2, \dots, m_t^2$ . При этом каждая из оценок имеет число

степеней свободы  $k_i = n_i - 1$ . Обозначим через  $\bar{m}^2 = \left( \sum_{i=1}^t k_i m_i^2 \right) / k$ ,

где  $k = \sum_{i=1}^t k_i$  — усредненное значение оценок дисперсий.

В качестве критерия проверки гипотезы об однородности дисперсий вычисляют величину

$$B = \frac{2,303 \left[ k \lg \bar{m}^2 - \sum_{i=1}^t k_i \lg m_i^2 \right]}{1 + \frac{1}{3(t-1)} \left[ \sum_{i=1}^t \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right]}. \quad (8.10)$$

Автором критерия установлено, что величина  $B$  имеет распределение, близкое к распределению  $\chi^2$  с числом степеней свободы, равным  $t - 1$ . Здесь следует строить правостороннюю критическую область, чтобы вероятность попадания критерия  $B$  в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна

принятому уровню значимости:  $P[B > \chi_{\text{кр}}^2(\alpha; t-1)] = \alpha$ . Критическую точку  $\chi_{\text{кр}}^2$  находят по таблицам  $\chi^2$ -распределения по уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $t-1$ .

Если  $B < \chi_{\text{кр}}^2$ , нет оснований отвергать нулевую гипотезу. В противном случае, при  $B > \chi_{\text{кр}}^2$  нулевая гипотеза отвергается. Другими словами, дисперсии совокупностей значимо различаются друг от друга.

**Критерий Кочрена.** Этот критерий решает ту же самую задачу, что и критерий Бартлетта, но при условии, что объемы выборок из всех совокупностей одинаковы, т.е.  $n_1 = n_2 = \dots, n_t = n$ . В этом случае также вычисляют оценки дисперсий для каждой генеральной совокупности  $m_1^2, m_2^2, \dots, m_t^2$ , а далее — величину критерия

$$G = \frac{m_{\text{max}}^2}{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_t^2}. \quad (8.11)$$

Распределение величины  $G$  зависит только от числа степеней свободы  $k = n-1$  и от числа исследуемых совокупностей  $t$ .

Автором критерия установлено, что величина  $G$  имеет распределение, близкое к распределению  $\chi^2$  с числом степеней свободы, равным  $t-1$ . Здесь следует строить правостороннюю критическую область, чтобы вероятность попадания критерия  $G$  в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:  $P[G > \chi_{\text{кр}}^2(\alpha; t-1)] = \alpha$ . Критическую точку  $\chi_{\text{кр}}^2$  находят по таблицам  $\chi^2$ -распределения по уровню значимости  $\alpha$  и по числу степеней свободы  $t-1$ .

Если  $G < \chi_{\text{кр}}^2$ , нет оснований отвергать нулевую гипотезу. В противном случае, при  $G > \chi_{\text{кр}}^2$  нулевая гипотеза отвергается. Другими словами, дисперсия совокупностей значимо различается друг от друга.

## 8.6. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Рассматривается двумерная случайная величина  $XU$ . Из данной совокупности извлечена выборка из  $n$  пар  $x_i, y_i (i = 1, \dots, n)$ . По элементам выборки вычислена оценка  $r$  коэффициента корреляции  $\rho$ , значение которого оказалось отличным от нуля. Поскольку выборка случайна, значение оценки коэффициента корреляции  $\rho$  может отличаться от нуля даже в случае, если фактическое значение коэф-

фициента корреляции генеральной совокупности  $\rho = 0$ . В связи с этим возникает задача проверки при заданном уровне значимости  $\alpha$  нулевой гипотезы  $H_0 : \rho = 0$  при конкурирующей гипотезе  $H_1 : \rho \neq 0$ .

Если нулевая гипотеза отвергается, это значит, что выборочный коэффициент корреляции  $r$  значимо отличается от нуля, а случайные величины  $X$  и  $Y$  коррелированы, т.е. связаны линейной зависимостью.

Если нулевая гипотеза принимается, то выборочный коэффициент корреляции  $\rho$  незначим, а  $X$  и  $Y$  не коррелированы, т.е. не связаны линейной зависимостью.

В качестве проверки нулевой гипотезы принимаем случайную величину

$$T = \frac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}. \quad (8.12)$$

Величина  $T$  имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы  $k = n - 2$ . Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид  $H_1 : \rho \neq 0$ , то критическая область двусторонняя. Из таблиц распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область) по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k = n - 2$  выбирают критическое значение  $t_{\text{кр}}$  и сравнивают с измеренным значением  $T$ .

Если  $|T| < t_{\text{кр}}$ , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу и следует признать, что  $X$  и  $Y$  не коррелированы, т.е. не связаны линейной зависимостью.

Если  $|T| > t_{\text{кр}}$ , то нулевая гипотеза отвергается и признается, что  $X$  и  $Y$  коррелированы, т.е. связаны линейной зависимостью.

При достаточно большом объеме выборки (более сотни пар) величина  $T$  имеет распределение, близкое к нормальному. Тогда выбор критического значения  $t_{\text{кр}}$  может быть выполнен по таблицам нормального распределения. В силу этого значимость выборочного коэффициента корреляции  $r$  может быть определена с помощью

неравенства  $|\rho| > \frac{t_{\text{кр}}(1-r^2)}{\sqrt{n}}$ . При выполнении неравенства противо-

положного смысла принимается нулевая гипотеза, т.е. коэффициент корреляции признается незначимым.

## 8.7. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Имеется генеральная совокупность  $X$ , относительно которой сделано предположение, что она имеет нормальное распределение, т.е. выдвинута нулевая гипотеза что  $H_0: X \subset N(a, \sigma^2)$ . Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n$ . По элементам выборки необходимо проверить выдвинутую гипотезу.

Существует целый ряд критериев, позволяющих решить поставленную задачу. Рассмотрим некоторые из них:

**Критерий Пирсона (критерий  $\chi^2$ ).** Рассматриваемый критерий основан на сравнении теоретического и практического числа попаданий элементов выборки в заданные интервалы. Для расчетов, связанных с применением критерия  $\chi^2$ , необходимо всю область возможного изменения величины  $X$  разбить на конечное число  $k$  интервалов  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ . При этом первый интервал будет иметь левую границу  $-\infty$ , а последний — правую границу  $+\infty$ . Остальные границы интервалов будут числами конечными.

Все элементы выборки должны быть рассортированы по выбранным интервалам  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ . При этом, естественно, будет сохраняться условие  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ , где  $m_i$  — число попаданий элементов выборки в  $i$ -й интервал.

Предполагая нормальное распределение генеральной совокупности  $X$ , можно рассчитать теоретическое число попаданий в каждый из выбранных интервалов. Вероятность попадания элемента выборки в любой из интервалов по правилам теории вероятностей определяется равенством

$$P(x_j \subset \Delta_i) = \Phi\left(\frac{t_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t_i - a}{\sigma}\right) = p_i, \quad (8.13)$$

где  $t_i$  и  $t_{i+1}$  — границы интервала  $\Delta_i$ ;  $a$  и  $\sigma$  — соответственно математическое ожидание и СКО генеральной совокупности  $X$ .

Для вероятностей должно выполняться условие  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ .

Зная вероятности  $p_r$ , можно рассчитать теоретическое число попаданий  $n_i$  элементов выборки в каждый интервал  $\Delta_r$ , при этом должно выполняться равенство  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Сравнение эмпирического числа попаданий  $m_i$  элементов в  $i$ -й

интервал с теоретическим числом  $n_i$  дает представление о соответствии опытных данных выдвинутой гипотезе.

В качестве критерия сравнения Пирсоном предложена величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - m_i)^2}{n_i}, \quad (8.14)$$

имеющая распределение  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $\nu = k - 1 - r$ . Здесь  $k$  — число интервалов;  $r$  — число параметров распределения исследуемой генеральной совокупности, которое необходимо оценить по данной выборке.

Для вычисления вероятности попадания элемента выборки в интервал  $\Delta_i$  (8.13) необходимо знать математическое ожидание и СКО генеральной совокупности. Если они не известны, то по выборке должны быть вычислены их оценки, которые и будут использованы для расчета вероятностей. В таком случае  $r = 3$ , а число степеней свободы  $\nu = k - 3$ .

Критическое значение  $\chi_{\text{кр}}^2$  выбирают из таблиц  $\chi^2$ -распределения по выбранному уровню значимости  $\alpha$  и по числу степеней свободы  $\nu = k - 3$ .

Область принятия нулевой гипотезы будет определяться неравенством  $\chi^2 < \chi_{\text{кр}}^2$ . При выполнении неравенства такого вида нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

В противном случае, т.е. при выполнении неравенства вида  $\chi^2 > \chi_{\text{кр}}^2$ , нулевая гипотеза не принимается.

**Проверка гипотезы об однородности двух выборок по критерию Вилкоксона.** Пусть имеются две генеральных совокупности  $X$  и  $Y$ , относительно которых сделано предположение о том, что у них одно и то же распределение. Таким образом, нулевая гипотеза имеет вид:  $H_0 : F(X) = F(Y)$ .

Для проверки этой гипотезы получены две выборки  $x_n$  и  $y_m$  соответственно с объемами  $n$  и  $m$ . Составим из этих выборок общий ранжированный ряд вида:  $y_{(1)}, y_{(2)}, x_{(3)}, y_{(4)}, \dots, x_{(n+m)}$ , где индекс в скобках указывает порядковый номер элемента в ранжированном ряду. Затем для каждого  $x_{(i)}$  подсчитывают, сколько ему предшествует элементов  $y$ . Это число называется инверсией  $x_{(i)}$ . Для всех  $x_{(i)}$  подсчитывают общее число инверсий  $U_x$ . Контроль вычислений проводится по формуле

$$U_x = \sum_{i=1}^n r_{x_i} - \frac{n(n+1)}{2}, \quad (8.15)$$

где  $r_{x_i}$  — порядковые номера членов  $x$  ранжированного ряда.

Аналогично вычисляют величину  $U_y$  с контролем по формуле

$$U_y = \sum_{i=1}^m r_{y_i} - \frac{m(m+1)}{2}. \quad (8.16)$$

Окончательный контроль вычислений осуществляют по формуле

$$U_x + U_y = nm. \quad (8.17)$$

Если удовлетворяются неравенства вида

$$U_x < U_q; \quad U_y < U_q,$$

где  $U_q$  — некоторое критическое значение, выбранное по уровню значимости  $q$ , то нулевая гипотеза признается не противоречащей выборке.

В противном случае, при осуществлении хотя бы одного неравенства вида

$$U_x > U_q; \quad U_y > U_q$$

нулевая гипотеза отвергается.

При  $n + m > 20$  указанное критическое значение  $U_q$  распределено практически нормально, поэтому для его расчета применимо выражение

$$U_q = \frac{nm-1}{2} + u_q \sqrt{\frac{nm}{12}(n+m+1)}, \quad (8.18)$$

где  $u_q$  — квантиль нормального распределения, соответствующая уровню значимости  $q$ .

Если принять  $q = 0,05$ , то выражение (8.16) приобретет вид

$$U_{0,05} = \frac{nm-1}{2} + 1,65 \sqrt{\frac{nm}{12}(n+m+1)}. \quad (8.19)$$

В процессе применения указанного критерия возможна ситуация, когда между неравными членами ранжированного ряда  $x_{(i)}$  и  $y_{(i+k+1)}$  попадает  $k$  равных между собой членов вариационного ряда.

Тогда каждому из них присваивается один общий номер, равный среднеарифметическому из всех  $k$  номеров.

## 8.8. Примеры решения типовых задач

### Пример 8.1

По данным примера 6.1 проверить гипотезу о нормальном распределении невязок в треугольниках триангуляции II класса.

#### Решение

Первым шагом решения задачи по проверке статистических гипотез о законе распределения является группировка исходных данных. Рекомендуется так подбирать границы интервалов, чтобы число попаданий в каждый интервал было не менее 5. Руководствуясь этим правилом и используя результаты группировки, выполненные при решении примера 6.1, в качестве границ интервалов выберем следующие значения:  $-\infty$ ;  $-1,05''$ ;  $-0,50''$ ;  $+0,50''$ ;  $+1,50''$ ;  $+\infty$ . Тогда числа попаданий в каждый интервал будут соответственно равны 8; 11; 15; 9; 7. Для расчета теоретического числа попаданий в каждый обозначенный интервал, соответствующего нормальному распределению, необходимо рассчитать центрированные нормированные границы интервалов. Центрирование границ проводят с помощью оценки СКО  $\bar{x} = -0,08$ , а нормирование — с помощью оценки СКО  $m = 1,42$ . Окончательный расчет центрированных нормированных значений границ интервалов выполняют по формуле

$$t_i = \frac{z_i - \bar{x}}{m},$$

где  $z_i$  — выбранное значение границы интервала;  $t_i$  — центрированное нормированное значение той же границы интервала.

По центрированным нормированным значениям границ интервалов из таблиц (Приложение 2) находят значение функции нормального распределения. Затем по формуле  $p_i = F(t_{i+1}) - F(t_i)$  находят вероятность попадания в  $i$ -й интервал, а по формуле  $n'_i = np_i$  — теоретическое число попаданий в тот же интервал. Контроль вычислений —  $[n'_i] = n$ . Для подсчета меры расхождения практического и теоретического числа попаданий вычисляют для

каждого интервала величины  $\frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{n'_i}$ . Их сумма дает величину расхождения  $\chi^2_{\text{расч}} = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{n'_i}$ , где  $l$  — число групп. Все вычисления проводят в табл. 8.2.

Таблица 8.2

№	Граница интервала	Центрированная нормированная граница интервала	$F(t_i)$	$p_i$	$n'_i = np_i$	$n_i$	$\frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{n'_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\infty$	$-\infty$	0				
				0,1587	7,94	8	0,003
2	-1,50	-1,00	0,1587				
				0,2234	11,47	11	0,003
3	-0,50	-0,30	0,3821				
				0,2770	13,85	15	0,095
4	+0,50	+0,41	0,6591				
				0,2074	10,37	9	0,181
5	+1,50	+1,11	0,8665				
				0,1335	6,67	7	0,016
6	$+\infty$	$+\infty$	1,0000				
$\Sigma$				1,0000	50,00	50	0,298

В результате проведенных вычислений получена общая расчетная мера расхождения практического и теоретического числа попаданий  $\chi^2_{\text{расч}}$ , которая оказалась равной 0,298.

Окончательное решение вопроса о согласованности опытных данных с выдвигаемой гипотезой нормального рас-

пределения угловых невязок принимается по результатам сравнения расчетной меры расхождения с предельно возможной. Предельно возможное значение меры расхождения (критическое значение)  $\chi_{\text{кр}}^2$  находят по таблицам (Приложение 3) по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и по числу степеней свободы  $\nu = l - c - 1$ . В приведенной формуле  $l$  — число интервалов группировки, в данном случае равное 5;  $c$  — число ранее определенных параметров, которые использовались при расчетах в табл. 8.2. При расчетах центрированных нормированных значений границ интервалов были использованы ранее вычисленные значения оценок математического ожидания  $\bar{x}$  и СКО  $m$ . Следовательно, в данном случае  $c = 2$ . Тогда число степеней свободы также равно 2.

Значение  $\chi_{\text{кр}}^2$ , выбранное из таблиц, равно 6,0. В этом случае  $\chi_{\text{расч}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$ , что дает право сделать вывод о хорошем согласовании результатов опыта с выдвинутой гипотезой о нормальном распределении невязок в треугольниках триангуляции II класса.

### **Пример 8.2**

По данным примера 6.1 при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить гипотезу о нулевом математическом ожидании невязок в треугольниках триангуляции II класса.

#### *Решение*

Из решения примера 6.1 получено:  $\bar{x} = -0,08$ ;  $m = 1,42$ ;  $n = 50$ . По формуле

$$t_q^{\text{расч}} = \frac{(\bar{x} - a)}{m} \sqrt{n} = -0,40,$$

где  $a$  — гипотетическое значение математического ожидания, рассчитывают величину критерия. По таблицам распределения Стьюдента (Приложение 4) при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  (двусторонняя критическая область) и числу степеней свободы  $\nu = 49$  находят  $t_q^{\text{кр}} = 2,01$ . Поскольку выполняется неравенство  $|t_q^{\text{расч}}| < t_q^{\text{кр}}$ , можно делать вывод о хорошем согласовании опытных данных с гипотезой о нулевом математическом ожидании невязок в треугольниках триангуляции II класса.

### Пример 8.3

По данным примера 6.1 построить гистограмму и график плотности нормального распределения.

*Решение*

В качестве точек, для которых определяют значение плотности нормального распределения, используют границы интервалов группировки, принятые при решении примера 6.1, а также точку с абсциссой  $\bar{x} = -0,08$ . Предварительно выполняют центрирование и нормирование абсцисс указанных точек с использованием формулы

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{m},$$

где  $x_i$  — значение абсциссы;  $t_i$  — центрированное, нормированное значение абсциссы;  $\bar{x}$  — оценка математического ожидания;  $m$  — оценка СКО.

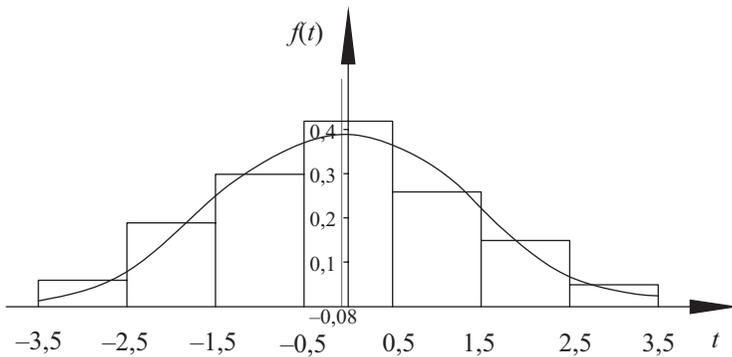


Рис. 8.3

Для построения гистограммы сортированной выборки для каждого интервала рассчитывают значение ординаты по формуле

$$h_i = \frac{n_i m}{n \Delta z_i},$$

где  $n$  — общий объем выборки;  $n_i$  — число элементов выборки, попавших в  $i$ -й интервал;  $\Delta z_i$  — ширина  $i$ -го интервала.

Все вычисления располагают в табл. 8.3.

Таблица 8.3

№	Абсцисса	Абсцисса центрированная нормированная	$F(t)$	$n$	$h$
1	2	3	4	5	6
0	-3,50	-2,41	0,0219		
				2	0,0568
1	-2,50	-1,70	0,0940		
				6	0,1704
2	-1,50	-1,00	0,2420		
				11	0,3124
3	-0,50	-0,30	0,3814		
				15	0,4260
4	+0,50	+0,41	0,3668		
				9	0,2556
5	+1,50	+1,11	0,2155		
				5	0,1420
6	+2,50	+1,81	0,0775		
				2	0,0568
7	+3,50	+2,52	0,0167		
8	-0,08	0	0,3989		
$\Sigma$				50	1,4200

После выполнения всех вычислений проводят контроль с использованием формулы

$$\frac{\sum h_i \Delta z_i}{m} = 1.$$

Построение всех графиков выполняют на одном чертеже (рис. 8.3.).

### 8.9. Задачи для самостоятельного решения

1. По двум выборкам объемами  $n_1 = 60$  и  $n_2 = 50$ , извлеченными из двух нормальных генеральных совокупностей, вычис-

лены оценки математических ожиданий, значения которых оказались равными  $\bar{x}_1 = 1250$  и  $\bar{x}_2 = 1275$ . Дисперсии генеральных совокупностей известны и равны  $D(X_1) = 120$  и  $D(X_2) = 150$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий рассматриваемых генеральных совокупностей.

2. Для нормальной генеральной совокупности  $X$  выдвигается гипотеза о равенстве нулю ее математического ожидания. Проверить при уровне значимости  $\alpha = 0,01$  выдвинутую гипотезу, если по выборке объема  $n = 15$  получены оценки математического ожидания  $\bar{x} = 1,36$  и СКО  $m = 0,75$ .

3. Имеются две нормальные генеральные совокупности  $X_1$  и  $X_2$ . По двум независимым выборкам объема  $n_1 = 14$  и  $n_2 = 18$  найдены оценки СКО  $m_1 = 3,38$  и  $m_2 = 2,57$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить нулевую гипотезу  $H : D(X_1) = D(X_2)$  при конкурирующей гипотезе  $H : D(X_1) \neq D(X_2)$ .

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Общие принципы проверки статистических гипотез.
2. Что собой представляет «критерий» при проверке статистических гипотез?
3. На чем и как строится гипотеза сравнения двух средних при известных и неизвестных дисперсиях?
4. Как сравнивают выборочную среднюю с гипотетической?
5. В чем заключается идея критерия Аббе?
6. При каких условиях возможно проводить сравнение дисперсий по критерию Фишера — Снедекора ( $F$ -критерий)?
7. При каких условиях можно применять для сравнения дисперсий критерии Бартлетта и Кочрена?
8. Как строится проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции?
9. Как строится проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности с помощью критерия Пирсона (критерий  $\chi^2$ )?
10. В чем заключается идея Вилкоксона?

## 9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ, РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗЫ

### 9.1. Общие положения

В теории и практике большую роль играет исследование зависимости и взаимосвязей между объективно существующими явлениями и процессами. Для исследования интенсивности, вида и формы причинно-следственных отношений между явлениями широко применяется корреляционный, регрессионный и дисперсионный анализ.

Различают два типа зависимостей между явлениями: функциональную и стохастическую.

Функциональная связь  $y = f(x)$ : для каждой независимой переменной  $X$  существует вполне определенное значение зависимой переменной  $Y$ .

*Статистической (стохастической, вероятностной) зависимостью* называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой.

Статистическая зависимость отражает закономерности только в массовых явлениях.

Статистическую зависимость называют *корреляционной*, если при изменении значений одной величины меняется среднее значение другой.

При сравнении функциональной и корреляционной зависимостей следует иметь в виду, что при функциональной зависимости, зная  $X$ , можно вычислить величину  $Y$ . При корреляционной зависимости устанавливается лишь тенденция изменения  $Y$  при изменении  $X$ .

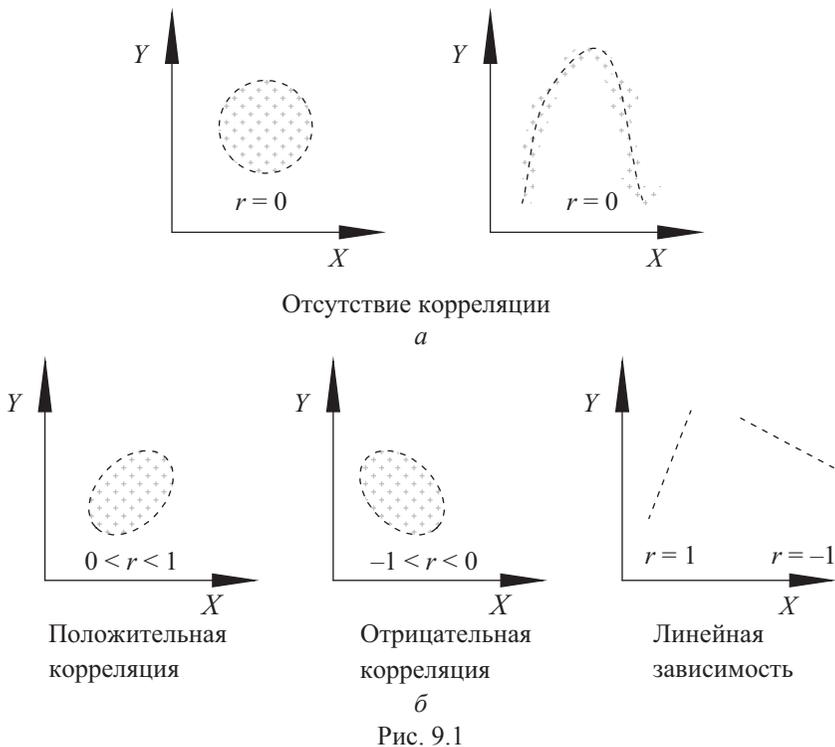
### 9.2. Корреляционный анализ

*Корреляционная зависимость* между переменными величинами — это функциональная зависимость, которая существует между значениями одной из них и групповыми средними другой. Корреляционная связь чаще всего характеризуется *выборочным коэффициентом корреляции*

$$\rho_{xy} = \frac{[xy] - \frac{[x] \cdot [y]}{n}}{\sqrt{\left([x^2] - \frac{[x]^2}{n}\right) \left([y^2] - \frac{[y]^2}{n}\right)}}, \quad (9.1)$$

где  $x_i, y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — элементы выборки.

Выборочный коэффициент корреляции характеризует степень линейной функциональной зависимости между случайными величинами  $X$  и  $Y$ .



Выборочный коэффициент корреляции имеет следующие свойства:

1.  $-1 \leq \rho \leq 1$ ;
2. Если  $\rho \neq 1$ , то между величинами  $X$  и  $Y$  существует функциональная линейная зависимость (рис. 9.1, *a*);
3. Если  $\rho = 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированы, что не означает независимости вообще. Пример такой связи пред-

ставлен на рис. 9.1, б. В этом случае величины некоррелированы, но их зависимость может быть описана параболой;

4. Если величины  $X$  и  $Y$  образуют систему нормально распределенных случайных величин, то из некоррелируемости ( $\rho = 0$ ) случайных величин следует их независимость;

5. Коэффициенты корреляции  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$  совпадают.

Для проверки значимости выборочного коэффициента корреляции проверяют нулевую гипотезу о равенстве коэффициента корреляции нулю. Для этой цели вычисляют величину

$$\rho_{xy}^{\text{расч}} = t \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n}}, \quad (9.2)$$

где  $t$  — величина, выбираемая из таблиц нормального распределения по уровню значимости  $\alpha = 0,05$ .

Если выполняется неравенство вида

$$|\rho_{xy}| < \rho_{xy}^{\text{расч}}, \quad (9.3)$$

то гипотеза равенства нулю коэффициента корреляции принимается, т.е. величины  $X$  и  $Y$  признаются некоррелированными. При выполнении неравенства противоположного смысла коэффициент корреляции признается значимым.

Если рассматривается зависимость случайной величины  $X_1$  от случайных величин  $X_2$  и  $X_3$ , то показателем такой зависимости может служить величина, называемая *множественным коэффициентом корреляции*. Эта величина рассчитывается по формуле

$$\bar{R}_{1,23} = \sqrt{\frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1 - \rho_{23}^2}}, \quad (9.4)$$

где  $\rho_{ij}$  парные коэффициенты корреляции между случайными величинами  $X_i$  и  $X_j$ .

Множественный коэффициент корреляции изменяется в пределах  $0 \leq \bar{R}_{1,23} \leq 1$ .

Иногда используют величину

$$D = \bar{R}^2 \quad (9.5)$$

— *множественный коэффициент детерминации*, характеризующий долю зависимости переменной  $X_1$  от случайных величин  $X_2$  и  $X_3$ .

Если  $\bar{R}_{1,23} = 1$ , то  $X_1$  однозначно определяется функциональной линейной зависимостью от  $X_2$  и  $X_3$ :

$$X_1 = C_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3. \quad (9.6)$$

Использование коэффициентов корреляции  $r_{ij}$  и  $R_{1,23}$  предполагает нормальное распределения изучаемых случайных величин.

Как уже отмечалось, коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между переменными. В нелинейной связи коэффициент корреляции может оказаться незначимым. В этом случае для оценки силы нелинейной связи может быть использовано *корреляционное отношение*, которое представляет собой отношение межгруппового СКО  $\delta_y$  переменной  $Y$  к ее общему СКО  $\delta_y$ :

$$\eta_{yx} = \frac{\delta_y}{\sigma_y}, \quad (9.7)$$

где межгрупповая дисперсия определяется по формуле

$$\delta_y^2 = \frac{[(\bar{y}_i - \bar{y})^2 n_i]}{n}. \quad (9.8)$$

Корреляционное отношение обладает следующими свойствами:

1.  $0 \leq \eta_{yx} \leq 1$ .
2. Если  $\eta_{yx} = 0$ , то корреляционная связь отсутствует.
3. Если  $\eta_{yx} = 1$ , то переменные связаны функционально.
4. Для линейной зависимости  $X$  и  $Y$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство  $|r_{xy}| = \eta_{yx}$ .
5.  $0 \leq |r_{xy}| \leq \eta_{yx} \leq 1$ .

### 9.3. Регрессионный анализ

Регрессионный анализ – один из основных методов, позволяющих аналитически представить связь между изучаемыми переменными. Если корреляционный анализ позволяет установить существование или отсутствие связи между изучаемыми явлениями, то регрессионный анализ рассматривает методы построения соответствующих зависимостей.

Регрессионный анализ — целый ряд методов построения вида зависимости. Рассмотрим некоторые из них:

**Линейная регрессия.** Предполагается, что переменная  $Y$  связана с переменной  $X$  линейной зависимостью вида

$$Y = C_0 + C_1 X. \quad (9.9)$$

Ставится задача нахождения оценок величин  $C_0$  и  $C_1$  по результатам опыта. Выборка содержит  $n$  пар измеренных значений переменных  $X$  и  $Y$ . Тогда уравнение регрессии будет иметь вид:

$$\hat{y} = \bar{y} + r_{xy} \frac{m_y}{m_x} (x - \bar{x}), \quad (9.10)$$

где  $r_{xy}$  — оценка парного коэффициента корреляции;  $m_x$  и  $m_y$  — оценки СКО переменных  $X$  и  $Y$ ;  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — среднеарифметические элементы выборки переменных  $X$  и  $Y$ ;  $\hat{y}$  — оценка условного математического ожидания случайной величины  $Y$  при изменении величины  $X$ .

Последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\hat{y} = c_0 + c_1 x, \quad (9.11)$$

где  $c_0 = \bar{y} - r_{xy} \frac{m_y}{m_x} \bar{x}$  и  $c_1 = r_{xy} \frac{m_y}{m_x}$ .

Значимость коэффициентов регрессии  $\hat{y} = c_0 + c_1 x$  при уровне значимости  $\alpha$  проверяется следующим образом.

1. Для  $c_0$  вычисляют величину

$$t_{\text{расч}} = \frac{|c_0|}{m \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{[(x - \bar{x})^2]}}},$$

где  $m = \sqrt{\frac{[(y - \hat{y})^2]}{n - 1}}$ .

Величину  $t_{\text{расч}}$  сравнивают с величиной  $t_{\alpha, \nu}$ , выбираемой из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы  $\nu = n - 2$  и уровню значимости  $\alpha$ . При выполнении неравенства вида  $t_{\alpha, \nu} \geq |t_{\text{расч}}|$  принимается гипотеза  $H_0 : c_0 = 0$ , т.е. свободный член уравнения регрессии незначим и уравнению можно придать вид

$$\hat{y} = c_1 x. \quad (9.12)$$

При выполнении неравенства противоположного смысла гипотеза равенства свободного члена уравнения регрессии отвергается и уравнение записывают в форме (9.11).

2. Для  $c_1$  вычисляют величину

$$t_{\text{расч}} = \frac{|c_1|}{m} \sqrt{[(x - \bar{x})^2]},$$

которую сравнивают с величиной  $t_{\alpha, \nu}$ , выбираемой из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы  $\nu = n - 2$  и уровню значимости  $\alpha$ . При выполнении неравенства вида  $t_{\alpha, \nu} \geq |t_{\text{расч}}|$  принимают гипотезу  $H_0 : c_0 = 0$ , т.е. коэффициент уравнения регрессии незначим и уравнению можно придать вид

$$\hat{y} = c_0. \quad (9.13)$$

При выполнении неравенства противоположного смысла гипотеза равенства коэффициента уравнения регрессии отвергается и уравнение записывают в форме (9.12).

Таблица 9.1

### Виды уравнений регрессии

№	Вид уравнения регрессии	Вид нормальных уравнений
1	$y = a + bx$	$n \cdot a + [x] \cdot b = [y]$ $[x] \cdot a + [x^2] \cdot b = [xy]$
2	$\lg y = a + bx$ , или $y = 10^{a + b \lg x}$	$n \cdot a + [x] \cdot b = [\lg y]$ $[x] \cdot a + [x^2] \cdot b = [x \lg y]$
3	$y = a + b \lg x$	$n \cdot a + [\lg x] \cdot b = y$ $[\lg x] \cdot a + [(\lg x)^2] \cdot b = [y \lg x]$
4	$\lg y = a + b \lg x$ , или $y = 10^{a + b \lg x}$	$n \cdot a + [\lg x] \cdot b = [\lg y]$ $[\lg x] \cdot a + [(\lg x)^2] \cdot b = [\lg y \lg x]$
5	$\lg y = \lg a + x \lg b$ , или $y = ab^x$	$n \cdot \lg a + [x] \cdot b = [\lg y]$ $[x] \cdot a + [(x)^2] \cdot b = [\lg x \lg y]$
6	$y = a + bx + cx^2$	$n \cdot a + [x] \cdot b + [x^2] \cdot c = [y]$ $[x] \cdot a + [x^2] \cdot b + [x^3] \cdot c = [xy]$ $[x^2] \cdot a + [x^3] \cdot b + [x^4] \cdot c = [x^2y]$
7	$y = ab^x c^{x^2}$ , или $\lg y = \lg a + x \lg b + x^2 \lg c$	$n \cdot \lg a + [x] \cdot \lg b + [x^2] \cdot \lg c = [\lg y]$ $[x] \cdot \lg a + [x^2] \cdot \lg b + [x^3] \cdot \lg c = [x \lg y]$ $[x^2] \cdot \lg a + [x^3] \cdot \lg b + [x^4] \cdot \lg c = [x^2 \lg y]$

**Криволинейная регрессия.** Весьма часто на практике можно встретить явления, связь между которыми представляет собой нелинейную функцию. В этом случае по результатам опытов строится график эмпирических точек. По графику подбирают вид кривой, наиболее полно отражающей вид зависимости между переменными. В табл. 9.1 приведен ряд наиболее часто используемых видов зависимостей и вид уравнений (нормальные уравнения), решением которых находят неизвестные параметры ( $a, b, c$ ) уравнения регрессии. Методы составления и решения нормальных уравнений, а также оценка значимости полученных параметров представленных уравнений регрессии рассматриваются в разделе VI «Определение параметров эмпирических формул».

#### 9.4. Однофакторный дисперсионный анализ

Пусть имеется несколько нормально распределенных генеральных совокупностей  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . При этом известно, что дисперсии этих совокупностей равны между собой, хотя и остаются неизвестными, т.е.  $D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_k) = \sigma^2$ . Требуется проверить нулевую гипотезу  $H_0 : M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_k)$ . Для решения поставленной задачи пользуются методом, который в математической статистике известен как дисперсионный анализ, разработанный английским статистиком Р. Фишером.

На практике дисперсионный анализ применяют, чтобы установить, оказывает ли существенное влияние некоторый качественный фактор на формирование каждой из исследуемых генеральных совокупностей  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , что в конечном счете приводит к изменению математических ожиданий этих генеральных совокупностей.

Сущность дисперсионного анализа состоит в следующем.

Если качественный фактор одинаково воздействует на все генеральные совокупности, то, следовательно, математические ожидания последних должны быть равными между собой. В противном случае, когда такое воздействие неодинаково, формируются генеральные совокупности с различными математическими ожиданиями. Рассмотрим объединенную генеральную совокупность  $X$ . Очевидно, что в случае равенства математических ожиданий исходных генеральных совокупностей и на основании условия равенства дисперсий исходных генеральных совокупностей вновь полученная

генеральная совокупность будет иметь математическое ожидание  $M(X) = M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_k)$  и дисперсию, равную дисперсиям исходных генеральных совокупностей  $D(X) = \sigma^2$ . При смешении генеральных совокупностей с разными математическими ожиданиями естественно ожидать увеличения разброса, т.е. увеличения дисперсии во вновь образованной генеральной совокупности. Увеличение дисперсии будет служить индикатором различного воздействия качественного фактора на исследуемые генеральные совокупности. Эта идея заложена в основу дисперсионного анализа.

Для проверки сформулированной нулевой гипотезы о равенстве математических ожиданий из каждой генеральной совокупности  $X_i$  получают выборку  $x_i$  объема  $n$ . Элементу выборки присваивают название  $x_{ij}$ , где  $i$  — номер генеральной совокупности, изменяющейся от 1 до  $k$ ,  $a, j$  — номер элемента в группе, изменяющийся от 1 до  $n$ .

По элементам выборки рассчитывают оценку дисперсии каждой генеральной совокупности по известной формуле

$$m_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n-1}, \quad (9.14)$$

где  $\bar{x}_i$  — оценка математического ожидания генеральной совокупности  $X_i$ .

Учитывая, что дисперсии всех выборок равны между собой, вычисляют оценку  $\sigma^2$  по разбросу внутри групп, равную среднему арифметическому из полученных значений  $m_i^2$  по формуле

$$m_{\text{груп}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^2}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{k(n-1)}.$$

Оценка дисперсии смешанной генеральной совокупности  $X$  может быть получена по формуле

$$m_{\text{общ}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}{kn-1}, \quad (9.15)$$

где  $\bar{x}$  — оценка математического ожидания  $X$ .

Кроме указанных оценок, вычисляют оценку дисперсии как характеристику разброса групповых средних  $\bar{x}_i$  относительно  $\bar{x}$  из соотношения

$$m_{\text{межгр}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{k-1}. \quad (9.16)$$

Доказывается, что для приведенных оценок выполняется следующее равенство

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \quad (9.17)$$

которое используется для контроля вычислений.

Если выполняется нулевая гипотеза, т.е. влияние качественного фактора одинаково для всех генеральных совокупностей, что означает равенство математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей, то общая и групповая оценки, а также межгрупповая оценка, умноженная на  $n$ , оценивают одну и ту же дисперсию. Теперь достаточно одним из известных критериев проверить гипотезу о равенстве дисперсий по трем вычисленным оценкам, что даст ответ на вопрос о равенстве математических ожиданий исследуемых генеральных совокупностей. При этом необходимо учитывать, что каждая из полученных оценок имеет распределение  $\chi^2$  с числом степеней свободы, соответственно равным  $v_{\text{общ}} = kn - 1$ ,  $v_{\text{груп}} = k(n - 1)$  и  $v_{\text{межгр}} = k - 1$ . При этом выполняется соотношение  $v_{\text{общ}} = v_{\text{груп}} + v_{\text{межгр}}$ .

Таким образом, порядок применения дисперсионного анализа может быть представлен следующим образом.

1. По результатам наблюдений формируют матрицу элементов

$$\text{выборки } x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляют средние групповые  $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}$ .

3. Вычисляют общую среднюю  $\bar{x} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r x_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$ .

4. По формуле  $m_i^2 = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$ , где  $i = 1, 2, \dots, k$ , вычисляют оценки групповых дисперсий.

5. Используя значения элементов выборки и групповых средних, с помощью критерия Мизеса решают вопрос о нормальном распределении исследуемых генеральных совокупностей.

6. С помощью критерия Кочрена решают вопрос о равенстве групповых дисперсий.

7. Вычисляют три суммы:

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2;$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2;$$

$$\Sigma_3 = n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

с контролем по формуле  $\Sigma_1 = \Sigma_2 + \Sigma_3$ .

8. Используя суммы, вычисляют оценки дисперсии по формулам:

$$m_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{kn-1} \Sigma_1; \quad (9.18)$$

$$m_{\text{груп}}^2 = \frac{1}{k(n-1)} \Sigma_2; \quad (9.19)$$

$$m_{\text{межгр}}^2 = \frac{1}{k-1} \Sigma_3. \quad (9.20)$$

9. С применением критерия Фишера — Снедекора решают вопрос о наличии расхождений между математическими ожиданиями генеральных совокупностей. Выполнение неравенства вида  $F \geq F_q^{(v_2; v_1)}$  свидетельствует о таких расхождениях.

10. При отсутствии расхождений, т.е. при выполнении неравенства вида  $F < F_q^{(v_2; v_1)}$  все три величины (9.18), (9.19) и (9.20) оценивают одну и ту же дисперсию и статистически равны. В качестве окончательной обычно принимают общую оценку (9.18).

### 9.5. Оценка автокорреляционной функции рядов результатов наблюдений

Пусть измерения составили  $t$  рядов результатов измерений  $l_j(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, t$ ), которые можно считать  $t$  реализациями некоторой случайной последовательности  $l(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Представим реализации этой последовательности в виде табл. 9.2.

Таблица 9.2

Реализации случайной последовательности

$l_j(i)$	$i$			
	1	2	...	$n$
$l_1(i)$	$l_1(1)$	$l_1(2)$	...	$l_1(n)$
$l_2(i)$	$l_2(1)$	$l_2(2)$	...	$l_2(n)$
...	...	...	...	...
$l_t(i)$	$l_t(1)$	$l_t(2)$	...	$l_t(n)$
$\bar{M}_t(i)$	$\bar{M}_t(1)$	$\bar{M}_t(2)$	...	$\bar{M}_t(n)$

Строки этой таблицы представляют названные реализации, а столбцы — сечения этих реализаций.

Для отыскания оценок математических ожиданий  $\bar{M}_t(i)$  случайной последовательности  $l(i)$  берут среднеарифметические по столбцам (сечениям):

$$\bar{M}_t(i) = \frac{1}{t} [L_j(i)]. \quad (9.21)$$

Значения этих величин записаны в последней строке табл. 9.2.

Аналогично оценки дисперсии случайной последовательности вычисляют как последовательность дисперсий сечений

$$\bar{D}_t(i) = \frac{1}{t-1} [(l_j(i) - \bar{M}_t(i))^2]. \quad (9.22)$$

Оценки автокорреляционных моментов, т.е. отдельных значений автокорреляционной функции, определяют по формуле

$$\bar{K}_l(i, i + \tau) = \frac{1}{t-1} \left\{ \left[ L_j(i) - \bar{M}_l(i) \right] \left[ L_j(i + \tau) - \bar{M}_l(i + \tau) \right] \right\}. \quad (9.23)$$

где  $\tau$  любое положительное число, удовлетворяющее условию  $\tau \leq n - i$ .

Естественно, что при  $\tau = 0$  оценка автокорреляционного момента совпадает с оценкой дисперсии  $i$ -го сечения, т.е.

$$\bar{K}_l(i, i) = \bar{D}_l(i). \quad (9.24)$$

Кроме того, выполняется равенство

$$\bar{K}_l(i, i + \tau) = \bar{K}_l(i + \tau, i). \quad (9.25)$$

Таким образом, может быть построена *ковариационная матрица*

$$K_l = \begin{bmatrix} \bar{K}_l(1,1) & \bar{K}_l(1,2) & \dots & \bar{K}_l(1,n) \\ \bar{K}_l(2,1) & \bar{K}_l(2,2) & \dots & \bar{K}_l(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{K}_l(n,1) & \bar{K}_l(n,2) & \dots & \bar{K}_l(n,n) \end{bmatrix}. \quad (9.26)$$

От этой матрицы можно перейти к *нормированной ковариационной матрице* или *корреляционной матрице*

$$\rho_l = \begin{bmatrix} 1 & \rho_l(1,2) & \dots & \rho_l(1,n) \\ \rho_l(2,1) & 1 & \dots & \rho_l(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_l(n,1) & \rho_l(n,2) & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.27)$$

где

$$\rho_l(i, i + \tau) = \frac{\bar{K}_l(i, i + \tau)}{\sqrt{\bar{K}_l(i, i) \cdot \bar{K}_l(i + \tau, i + \tau)}}. \quad (9.28)$$

Если исследуемая случайная последовательность стационарна, то полученную автокорреляционную функцию необходимо превратить в функцию одного аргумента. Наиболее простой прием приведения автокорреляционной функции к одному аргументу состоит в вычислении осредненного значения парного коэффициента корреляции для одного и того же значения аргумента  $\tau$ :

$$\rho_l(\tau) = \frac{1}{n - \tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} \rho_l(i, i + \tau). \quad (9.29)$$

Здесь фактически производится осреднение элементов матрицы  $K_p$ , стоящих на одной диагонали, параллельной главной диагонали.

В результате указанной операции функция  $\rho_l(\tau)$  может быть записана в виде ряда, представленного в табл. 9.3.

Таблица 9.3

**Осредненные значения автокорреляционной функции**

$\tau$	0	1	2	...	$n - 1$
$\rho_l(\tau)$	1	$\rho_l(1)$	$\rho_l(2)$	...	$\rho_l(n - 1)$

Далее необходимо оценить значимость полученных значений автокорреляционной функции. Воспользуемся приближенным решением указанной задачи.

Для оценки надежности коэффициента корреляции можно применить приближенную формулу

$$P \left\{ |\rho| < 2 \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{t - 1}} \right\} \approx 0,95, \quad (9.30)$$

где  $t$  — число наблюдаемых пар, по которым вычислялся коэффициент корреляции.

Поскольку элементы нормированной автокорреляционной функции получены осреднением из  $n - \tau$  значений, приближенно можно считать, что среднеквадратическая погрешность осредненной величины будет в  $\sqrt{n - \tau}$  меньше среднеквадратической погрешности отдельного значения. В связи с этим критерию значимости величины  $\rho_l(\tau)$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  можно придать вид

$$|\rho_l(\tau)| > 2 \frac{1 - \rho_l^2(\tau)}{\sqrt{(t - 1)(n - \tau)}}. \quad (9.31)$$

Если какой-либо из элементов автокорреляционной функции отвечает неравенству противоположного смысла, то его следует признать незначимым и принять равным нулю.

Такой прием нельзя считать теоретически строгим, но он вполне приемлем для практики.

## 9.6. Примеры решения типовых задач

### Пример 9.1

На геодезическом пункте одновременно выполнялись измерения угла двумя теодолитами, из которых один был установлен на сигнале, а другой — на штативе под сигналом. При этом получены результаты:

Станция	№ наблюдений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал, 57°21'40"	3,21	2,21	2,11	2,49	3,19	3,29	4,41	2,67	0,75	2,20
Штатив, 57°21'40"	5,10	4,02	3,22	2,57	3,62	4,93	6,53	4,59	2,84	3,46

Вычислить оценку коэффициента корреляции между наблюдениями на сигнале и на штативе и построить уравнение регрессии значения угла, измеренного на штативе, в зависимости от значения угла, полученного на сигнале.

*Решение*

Оценка коэффициента корреляции может быть получена по формуле

$$\rho_{xy} = \frac{[xy] - \frac{[x][y]}{n}}{\sqrt{\left([x^2] - \frac{[x]^2}{n}\right) \left([y^2] - \frac{[y]^2}{n}\right)}}$$

Вычисления сведены в табл. 9.4, причем предварительно были уменьшены все значения углов на 57°21'40".

Подставив полученные значения в формулу, получают

$$\rho_{xy} = \frac{117,00 - \frac{26,53 \cdot 40,86}{10}}{\sqrt{\left(78,82 - \frac{26,53^2}{10}\right) \left(180,19 - \frac{40,86^2}{10}\right)}} = +0,81.$$

## Вычисление коэффициента корреляции

№	X	Y	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>	XY	$\tilde{Y}$
1	2	3	4	5	6	7
1	3,21	5,10	10,30	26,01	16,37	4,65
2	2,21	4,02	4,88	16,16	8,88	3,64
3	2,11	3,22	4,45	10,37	6,79	3,54
4	2,49	2,57	6,20	6,60	6,40	3,92
5	3,19	3,62	10,18	13,10	11,55	4,63
6	3,29	4,93	10,82	24,30	16,22	4,73
7	4,41	6,53	19,45	42,64	28,80	5,86
8	2,67	4,59	7,13	21,07	12,26	4,11
9	0,75	2,82	0,56	7,95	2,12	2,16
10	2,20	3,46	4,84	11,97	7,61	3,63
[ ]	26,53	40,86	78,82	180,17	117,00	

Для проверки значимости сравнивают вычисленное значение  $\rho_{xy}$  с величиной  $\rho_{xy}^{\text{расч}} = t\sigma_{\rho}$ , где  $t$  — величина, выбираемая из таблиц нормального распределения по уровню значимости  $\alpha = 0,05$ , а

$\sigma_{\rho}$  — СКО величины  $\rho$ , вычисляемое по формуле  $\sigma_{\rho} = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$ .

Сравнение  $\rho_{xy}$  с  $\rho_{xy}^{\text{расч}}$  приводит к выводу, что коэффициент корреляции значим.

Далее осуществляют проверку значимости величины  $\bar{y} = c_0$ . Для этого вычисляют величину

$$t_{\text{расч}} = \frac{|c_0|}{m_y \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{[(x-\bar{x})^2]}}} = \frac{4,09}{1,21 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{2,65^2}{8,44}}} = 3,50$$

и сравнивают ее с табличной  $t_q$ , выбираемой из таблиц распределения Стьюдента по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и по числу степеней свободы  $\nu = n - 2 = 8$ . Получено  $t_q = 2,31 < t_{\text{расч}} = 3,50$ , следовательно, величина  $\bar{y} = c_0$  значима, и уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y}_x = \bar{y} + \rho_{xy} \frac{m_y}{m_x} (x - \bar{x}),$$

где

$$\bar{y} = \frac{[y]}{n} = 4,09;$$

$$m_y = \sqrt{\frac{[y^2] - \frac{[y]^2}{n}}{n-1}} = 1,21;$$

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = 2,65;$$

$$m_x = \sqrt{\frac{[x^2] - \frac{[x]^2}{n}}{n-1}} = 0,97.$$

Подставляя вычисленные значения в формулу, получают

$$\tilde{y}_x = 4,09 + 0,81 \frac{1,21}{0,97} (x - 2,65),$$

или окончательно

$$\tilde{y}_x = 1,41 + 1,01 x.$$

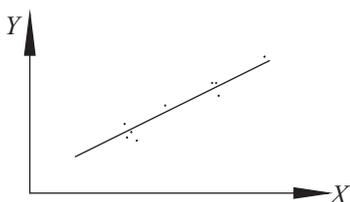


Рис. 9.2

Значения  $\tilde{y}_x$  для всех заданных значений  $x_i$  представлены в столбце 7 табл. 9.3.

По результатам расчетов строят график уравнения регрессии (рис. 9.2).

## 9.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Выборочный коэффициент корреляции оказался равным  $\rho_{xy} = 0,51$ . Значение коэффициента получено по 50 парам опытных данных. Установить значимость полученного в результате опытов коэффициента корреляции.

2. На опыте изучалась зависимость величины  $Y$  от  $X_1$  и  $X_2$ . Получен ряд из  $n = 12$  троек наблюдений. По опытными данным вычислены следующие коэффициенты корреляции:  $\rho_{y_1} = +0,46$ ;  $\rho_{y_2} = +0,51$ ;  $\rho_{12} = +0,17$ ; По этим данным определить значимость парных коэффициентов корреляции, вычислить коэффициент множественной корреляции и вычислить коэффициент детерминации. Сформулировать соответствующие выводы.

3. В результате опыта по  $n = 16$  парам наблюдений вычислены:  $\rho_{xy} = +0,68$ ;  $\bar{x} = 3,61$ ;  $\bar{y} = 4,36$ ;  $m_x = 0,57$  и  $m_y = 0,94$ . По этим данным построить линейное уравнение регрессии и определить значимость вычисленных параметров уравнения.

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Виды связей между величинами.
2. Каковы основные задачи корреляционного анализа?
3. Как вычислить выборочный коэффициент корреляции, имея ряд парных наблюдений аргумента и функции?
4. Каковы свойства коэффициента корреляции?
5. Как проверить значимость выборочного коэффициента корреляции?
6. Что показывает и как вычисляется множественный коэффициент корреляции?
7. Понятие множественного коэффициента детерминации.
8. Что собой представляет и как вычисляется корреляционное отношение?
9. Свойства корреляционного отношения.
10. Общая идея регрессионного анализа.
11. Сущность дисперсионного анализа.
12. Общий вид линейного уравнения регрессии и смысл входящих в уравнение параметров.
13. Как, имея несколько рядов наблюдений случайной последовательности, вычислить элементы выборочной ковариационной матрицы?
14. Какие элементы стоят на главной диагонали нормированной ковариационной матрицы?
15. Какие элементы стоят вне главной диагонали нормированной ковариационной матрицы?

## Раздел III. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

### 10. ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

#### 10.1. Основные определения

Окружающий нас мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в определенных взаимоотношениях. Областью деятельности геодезии является измерение — процесс получения информации, адекватно отображающей свойства объектов материального мира.

*Свойство объекта (предмета)* — философская категория, выражающая такую сторону объекта (предмета), которая обуславливает его общность или различие с другими объектами (предметами).

Любой материальный объект, как правило, характеризуется совокупностью свойств. В связи с этим возникает необходимость идентифицировать свойства, присвоив им наименования.

Именованное свойство объекта (предмета) называется *физической величиной (величиной)*.

*Физическая величина\** — одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общего в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Примером физической величины может служить длина какого-либо объекта, его ширина или высота, масса, срок службы. Любое из этих свойств присуще целому ряду объектов. Этим свойством могут обладать очень многие объекты (предметы) ма-

---

\* Определения даются по [6].

териального мира. Но в количественном отношении, т.е. в степени проявления этого свойства, каждый предмет индивидуален. Он (предмет) имеет свою, строго определенную на данный момент времени протяженность в пространстве, свою массу, свой возраст, т.е. он имеет свой определенный размер физической величины.

*Размер физической величины\** — количественная определенность физической величины, присущая конкретному объекту, системе, явлению или процессу.

*Значение физической величины\** — выражение размера физической величины в виде некоторого числа принятых для него единиц.

*Числовое значение физической величины\** — отвлеченное число, входящее в значение величины.

*Истинное значение физической величины\** — значение физической величины, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношениях соответствующую физическую величину.

*Примечание.* Истинное значение физической величины может быть соотнесено с понятием абсолютной истины. Оно может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений.

*Действительное значение физической величины* — значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

*Измерение физической величины\** — совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающего нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

*Примечание.* От термина «измерение» происходит термин «измерить», которым широко пользуются на практике. Все же нередко применяют такие термины как «мерить», «обмерить», «замерить», «примерить», не вписывающихся в систему метрологических терминов. Их применять не следует.

*Измерительная задача\** заключается в определении значения физической величины посредством ее измерения с требуемой точностью в данных условиях измерений.

*Принцип измерения\** — теоретическое положение, лежащее в основе получения результата измерения.

*Метод измерения\** — прием или совокупность приемов, позволяющих получить результат измерения в соответствии с реализуемым принципом измерения.

*Объект измерения\** — тело (физическая система, процесс, явление и т.п.), характеризующее одной или несколькими измеряемыми физическими величинами.

*Средство измерения\** — техническое устройство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящие и (или) хранящие единицу физической величины, размер которой принимают неизменным (в пределах установленной погрешности) в пределах известного интервала времени, получение в процессе измерения оценки свойства объекта.

*Результат измерения\** — значение величины, полученное посредством ее измерения.

Любой процесс измерения происходит при наличии пяти *составляющих (факторов) измерения*:

1. Объект измерения — что измеряется.
2. Субъект измерения — кто измеряет.
3. Средство измерения — чем измеряется.
4. Метод измерения — как измеряется.
5. Внешняя среда — где измеряется.

В процессе измерения конкретное содержание и состояние факторов измерения определяют *условия измерений*.

Два комплекса условий будем считать одинаковыми, если в обоих случаях:

1. Объекты измерения были одного и того же рода и за время измерений колебались в одних и тех же пределах.
2. Субъекты измерения были одинаковой квалификации.
3. Применялись средства измерения одного и того же класса точности.
4. Измерения проводились по одной и той же методике.
5. Внешняя среда, в которой проводились измерения, характеризовалась одними и теми же значениями показателей.

## 10.2. Классификация измерений

Измерения могут быть классифицированы по следующим признакам.

### 1. По физическому исполнению:

— прямые измерения, в которых значение измеряемой величины получают *непосредственным* сравнением с физической величиной того же рода. Примером прямых измерений служит измерение длины линии рулеткой либо мерной лентой;

— косвенные, в которых значение измеряемой величины получают из вычислений, где в качестве исходных используют результаты других прямых измерений. Примером может служить измерение длины линии светодальномером. В этом случае непосредственно измеряется время  $t$  прохождения светового сигнала от дальномера до отражателя и обратно, а затем вычисляется в счетном устройстве

прибора длина линии как  $S = \frac{1}{2}vt$ , где  $v$  — скорость света.

### 2. По роду:

— однородные измерения, которые выполняют для однородных физических величин. Примером может служить геометрическое нивелирование, где измеряют отрезки от земной поверхности до горизонтального визирного луча нивелира.

— разнородные, т.е. все прочие по отношению к однородным. Примером может служить определение превышения методом тригонометрического нивелирования, где измеряют линии (горизонтальные проложения или наклонные дальности) и углы наклона.

### 3. По количеству:

— необходимые измерения доставляют только по одному значению каждой измеряемой величины;

— дополнительные, или избыточные измерения производятся для получения нескольких значений измеряемой величины (измеряемых величин) в целях контроля, исключения грубых погрешностей или повышения качества результатов измерений.

### 4. По точности:

— равноточные измерения, выполняемые в одинаковых условиях, т.е. объекты одного и того же рода измеряют исполнители одинаковой квалификации, приборами одного класса, по единой методике, в до-

статочны близких по характеру условиях внешней среды. В качестве примера равноточных измерений могут служить измерения угла несколькими приемами. Здесь результаты измерений каждым приемом равноточные, поскольку выполнены все ранее указанные ограничения;

— неравноточные измерения, выполняемые в случаях, когда по крайней мере одна из составляющих процесса измерения значительно отличается от аналогичной составляющей других измерений.

В качестве примера неравноточных измерений могут служить измерения углов в триангуляции разных классов.

#### 5. По связям:

— если выполняются два измерения в различных условиях, т.е. измеряются два разных объекта разными исполнителями различными мерными средствами по различным методикам в разных внешних средах, то нет оснований предполагать, что такие условия будут однообразно отражаться на результатах этих измерений, и поэтому, естественно, можно считать результаты таких измерений *независимыми*;

— в противном случае, когда наблюдается общность условий измерений, результаты измерений могут иметь общие свойства. В этом случае можно говорить о *зависимых результатах измерений*.

Наглядные примеры, иллюстрирующие независимые либо зависимые измерения, привести трудно. Выявление зависимости (независимости) измерений представляет собой трудоемкий вычислительный процесс. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен далее.

#### 6. По времени исполнения

Все измерения производятся не мгновенно, а растянуты во времени. Моментом выполнения измерения будем считать середину временного интервала проведения измерения. В связи с этим можно выделить:

— синхронные измерения, для которых моменты измерений совпадают или отличаются на незначительную величину. Примером синхронных измерений могут служить GPS-измерения, выполняемые двумя приемниками, расположенными на двух различных точках, при проведении измерений в дифференциальном режиме;

— измерения, сдвинутые по времени, для которых моменты измерений отличаются на значительную величину.

### *7. По месту исполнения*

Все измерения проводятся на участках земной поверхности, имеющих определенную протяженность. В качестве места исполнения работ будем считать центр тяжести данного участка. В связи с этим можно выделить:

- сосредоточенные измерения, места выполнения которых расположены близко друг от друга;
- рассредоточенные измерения, места выполнения которых расположены далеко друг от друга.

В связи с изложенным необходимо сделать несколько замечаний.

1. Понятия «близко», «далеко», «одновременно», «значительно» могут принимать определенные значения при рассмотрении конкретных условий измерений, т.е. они носят относительный характер.

2. Классическая теория погрешностей оперировала только с первыми четырьмя типами измерений, не учитывая зависимость, синхронность (сдвинутость по времени) и сосредоточенность (рассредоточенность) по месту исполнения. Современные методы измерений, в первую очередь — электронные, требуют учета этих ранее не исследовавшихся сторон измерений.

### **Темы и вопросы для самопроверки**

1. Что такое физическая величина?
2. Что такое определение размера физической величины.
3. Понятие истинного значения физической величины.
4. Что такое измерение физической величины?
5. Что такое результат измерения?
6. Каково основное различие между прямыми и косвенными измерениями?
7. К какому виду измерений — к прямым или косвенным — следует отнести определение превышения методом тригонометрического нивелирования?
8. Факторы, при наличии которых всегда протекает любой процесс измерения.
9. Что следует понимать под условиями измерений?
10. Чем отличаются равноточные измерения от неравноточных?

## 11. ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 11.1. Двойственный характер процесса измерений

Рассматривая процесс измерения, постоянно приходится сталкиваться с понятием «величина». Однако само это понятие несет в себе двойственный характер. С одной стороны, теория измерений исходит из того, что объект измерения описывается «идеальной» математической моделью. Структура такой модели включает в себя сугубо математические (абстрактные) понятия, такие, например, как «точки», «прямые», «плоскости» и т.д. Оперируя этими понятиями, можно построить систему математических отношений между величинами, являющимися элементами соответствующей математической модели, что дает возможность получения конечной цели измерения — *числового результата измерения*. В этом случае говорят, что разработан *принцип измерения*. Здесь приходится иметь дело с «математической величиной».

Обратимся к примеру определения превышения методом тригонометрического нивелирования. Считая, что превышение  $h$  между двумя *точками* на небольших расстояниях есть *отрезок* отвесной линии между горизонтальными *плоскостями*, проходящими через эти *точки*, на основании известных математических соотношений можно получить

$$h = S \cdot \operatorname{tg} v,$$

где  $S$  — горизонтальное проложение;  $v$  — угол наклона.

Здесь представлена простейшая математическая модель, на основе которой можно осуществить определение искомого превышения, в этом контексте — величину математическую, выражаемую через другие математические величины при помощи математических соотношений. Для получения этой математической модели использованы математические понятия, которые в приведенном ранее тексте выделены курсивом.

С другой стороны, процесс измерения есть экспериментальная процедура, имеющая дело с взаимодействием реальных «физических величин», ограниченных реальными физическими «точками», «прямыми», «плоскостями», что вызывает *неопределенность* как самого

объекта измерения, так и всех прочих участвующих в процессе измерения составляющих. Обращаясь к предыдущему примеру, но уже с позиции практического определения превышения, следует отметить, что на местности не удастся найти «математические» точки, между которыми превышение определяется. В качестве последних будут выступать либо колья, либо какие-то другие геодезические знаки; на местности не увидим «горизонтальную плоскость», а будем пытаться с помощью мерного прибора строить ее физическое подобие, и т.д.

Оперируя в рамках понятия «математическая величина», можно рассуждать о возможности «абсолютно точного» сравнения любых двух размеров величин. В этом случае нет оснований вести речь о погрешностях в результатах измерений.

В рамках физической (экспериментальной) теории измерений исходят из постулата о неизбежности погрешностей измерений, который имеет эмпирическое, практическое обоснование. Это обнаруживается тем, что при повторных измерениях в одних и тех же условиях (измеряется одна и та же величина одним и тем же исполнителем, тем же измерительным средством, по одной и той же программе и при тех же условиях внешней среды) получают результаты, разнящиеся между собой.

Рассмотрим пример из [7]. Здесь приведены результаты девятикратного измерения одного и того же угла при одинаковых условиях:  $72^{\circ}13'38,3''$ ;  $72^{\circ}13'44,6''$ ;  $72^{\circ}13'33,7''$ ;  $72^{\circ}13'41,1''$ ;  $72^{\circ}13'43,0''$ ;  $72^{\circ}13'36,2''$ ;  $72^{\circ}13'39,9''$ ;  $72^{\circ}13'37,8''$ ;  $72^{\circ}13'40,3''$ .

Все результаты измерений объективно отражают свойство, присущее измеряемому углу, определенное ранее как *размер физической величины*. Это выражается в единстве градусных и минутных значений и очень небольшом расхождении значений секунд. Но в то же время каждый из результатов измерения имеет свою индивидуальную особенность, связанную с погрешностью этого результата измерений, что выражено в изменчивости секундных значений угла.

## 11.2. Погрешности результатов измерений

Рассмотренный в п. 11.1 пример указывает на то, что каждый результат измерения как отражает в себе объективно существую-

щие свойства измеряемой величины, так и содержит особенности данной серии измерений и индивидуальные особенности каждого конкретного измерения. Эти индивидуальные особенности и отличают каждый результат повторного измерения от всех прочих.

Указанный эмпирический факт служит основой для формулировки следующей аксиомы теории погрешностей:

**Аксиома 1 (Аксиома отображения):**

*Каждый результат измерения любой физической величины представляет собой сумму двух составляющих:*

*первая объективно отражает свойства измеряемой физической величины и представляет собой истинное значение измеряемой величины;*

*вторая — истинная погрешность конкретного результата измерения, — несет в себе особенности данного конкретного измерения и, в общем случае, меняется от измерения к измерению, что может быть представлено соотношением*

$$\lambda_i = L + \varepsilon_i, \quad (11.1)$$

где  $\lambda_i$  — результат  $i$ -го измерения;  $L$  — истинное значение измеряемой величины;  $\varepsilon_i$  — истинная погрешность  $i$ -го результата измерения.

В результате измерения получают значение  $\lambda_i$ , а истинное значение измеряемой величины  $L$ , так же как и истинная погрешность результата измерения  $\varepsilon_i$ , остаются неизвестными.

В теоретическом плане погрешность результата измерения  $\lambda_i$  есть разность (11.2) между этим результатом измерения и истинным (действительным) значением  $L$  измеренной физической величины, т.е.

$$\varepsilon_i = \lambda_i - L. \quad (11.2)$$

### **11.3. Аддитивная гипотеза строения погрешности результата измерения**

Одной из основных задач физической теории измерений является изучение источников и характера погрешностей в тех или иных физических измерениях. Возможны различные подходы к построению модели погрешности измерений. В данном случае рассматри-

вается так называемая аддитивная (суммарная) модель построения погрешности измерения. Суть ее заключается в следующем.

Полная погрешность результата измерения представляет собой сумму так называемых *элементарных погрешностей*. При этом каждый из факторов измерений порождает свою группу элементарных погрешностей.

1. Элементарные погрешности объекта измерений связаны с *неопределенностью* самого объекта измерений и его *изменчивостью* в процессе самого измерения. Как уже было отмечено ранее, объекты геодезических измерений ограничены физическими «точками», «прямыми», «плоскостями» и определить их «абсолютные» границы не представляется возможным. Неопределенность границ объекта измерения является одной из причин расхождений в результатах повторных измерений, ибо в каждом отдельном измерении исполнитель по-иному оценивает границу объекта. Неопределенность границ объекта измерения связана не только с «геометрией» объекта. Так, невозможно определить «абсолютные» границы временного интервала. Аналогичные рассуждения вполне возможно провести относительно прочих, негеометрических свойств, подлежащих измерению.

«Все течет, все изменяется». Не остаются неизменными и объекты измерения. Эти изменения при определенных условиях могут отражаться на результатах повторных измерений.

2. Элементарные погрешности субъекта измерения в геодезической литературе известны как «личные» погрешности. Все они связаны с ограниченными возможностями органов чувств наблюдателя. Широко известно геодезистам понятие «критический угол зрения», т.е. минимальный угол, под которым две точки с расстояния наилучшего зрения (30—35 см) видны как не сливающиеся. Подобные «критические» пороги присущи всем другим органам чувств человека, что не может не оказывать влияние на процесс измерения и не отражаться на его результатах.

3. Погрешности средств измерений обусловлены погрешностями изготовления, установки и настройки мерного прибора и возникают в связи с:

а) несоблюдением необходимых для данного прибора геометрических условий, таких как перпендикулярность или параллельность осей и прочее;

б) наличием механических особенностей сочленения отдельных узлов прибора, таких как люфт, трение, деформации, вибрации и др.;

в) несовершенство оптических составляющих прибора, таких как дисторсии, аберрации и пр.;

г) несовершенства в электронных узлах приборов, таких как «задержки» сигналов в цепях, возникновение «шумов» и пр.

Перечень источников приборных погрешностей может быть значительно расширен, в том числе и за счет упрощения модели прибора по отношению к тем математическим соотношениям, которые определяют данную схему измерений. Последнее замечание может быть отнесено, в том числе, и к целой серии аналоговых фотограмметрических приборов старшего поколения.

4. Методические погрешности обычно связаны с ограничениями, накладываемыми на процесс измерения различными техническими инструкциями, определяющими процесс измерения. В любых инструкциях всегда оговаривается некоторый предел возможных отклонений от теоретических положений, определяемых исходными математическими соотношениями.

5. Погрешности, порождаемые внешней средой, связаны с постоянным ее изменением как во времени, так и в пространстве, и ее влиянием на процесс измерения. Это прежде всего различного рода рефракции, влияющие на прохождение оптических лучей; «шумовые» помехи, накладывающиеся на электромагнитные сигналы измерительных приборов при их прохождении через ионосферу, стратосферу и атмосферу, и пр. Кроме того, внешняя среда оказывает определенное воздействие на технические средства измерения, тем самым меняет их характеристики и порождает новые приборные ошибки. Внешняя среда, воздействуя на исполнителя, также определенным образом меняет «личные» ошибки наблюдателя.

Такой подход к строению погрешности результата измерения является вполне оправданным с позиций практики измерений.

Заканчивая обзор элементарных погрешностей, необходимо отметить следующее: в практике часто бывает трудно строго ограничить класс элементарных погрешностей, чтобы однозначно можно было отнести конкретную элементарную погрешность к тому или иному классу. Это связано, во-первых, с тем, что факторы изме-

рений взаимодействуют между собой в процессе измерений, а с другой стороны, любая классификация есть научная абстракция, призванная помочь вскрыть и изучить физические свойства изучаемого объекта.

## 11.4. Систематические и случайные погрешности

В п. 11.3 полная погрешность рассматривалась как сумма элементарных погрешностей, каждая из которых имела свой вполне определенный источник. Однако можно рассматривать полную погрешность как состоящую из нескольких частей, различных по характеру действия. В этом аспекте элементарные погрешности могут быть разделены на две группы: *систематические элементарные погрешности* и *случайные элементарные погрешности*.

*Систематические элементарные погрешности* порождаются главными, существенными, необходимыми связями между факторами измерений и возникают всякий раз при данных условиях измерений.

*Случайными элементарными погрешностями* являются такие, которые порождаются не главными, не существенными, а второстепенными связями между факторами измерений. При данных условиях измерений эти погрешности могут быть большими или меньшими, положительными или отрицательными.

Однако следует иметь в виду, что не существует четкой, раз и навсегда установленной границы между этими двумя группами элементарных погрешностей. По своей сущности эти две группы погрешностей не могут иметь четкого различия. В одних условиях измерений некоторые элементарные погрешности могут выступать как случайные, а в других — как систематические.

Иногда считают, что если природа элементарной погрешности выявлена, т.е., установлен закон между причиной (фактором измерения) и следствием (элементарной погрешности), то ее следует отнести к разряду систематических. Но это не совсем так. Можно в некоторых случаях установить математическое соотношение, связывающее определенный фактор измерения или его составляющую с величиной порождаемой им погрешности, но она может быть столь незначительной, что ее влияние не является главным,

существенным, определяющим при данных условиях измерения. Эта элементарная погрешность может «утонуть» в море других, более существенных, главных, определяющих элементарных погрешностей.

Пусть измеряют углы теодолитом. При этом совершенно определено можно выявить действие элементарной погрешности, связанной с центрированием прибора. При некоторых условиях измерений, как, например, при измерении угла в триангуляции второго класса по соответствующей программе и соответствующим прибором, исполнителем высокой квалификации, установка прибора была проведена внецентренно. Погрешность, связанная с внецентренной установкой прибора, в этом примере является главной, определяющей в процессе измерения. Ее влияние перекрывает все остальные элементарные погрешности. Эта погрешность с необходимостью будет входить в каждый результат измерения, сколько бы их ни проводили, искажая каждый из них на вполне определенную величину, несопоставимую по своему значению с другими элементарными погрешностями. В этом случае можно и необходимо рассчитать по известным правилам величину погрешности, вызванной внецентренной установкой прибора, и ввести соответствующую поправку в результат измерения.

Но совершенно иная картина возникает в том случае, когда измеряют углы при проложении теодолитного хода технической точности и когда центрирование прибора выполняется в соответствии с требованиями инструкций. Можно рассчитать величину воздействия внецентренной установки прибора, но в этом случае соответствующая элементарная погрешность при измерении конкретного угла не будет главной, определяющей, существенной. Ее расчет и введение соответствующей поправки не изменит существенно результат измерения, не окажет воздействие на качество окончательной продукции. В связи с этим указанная элементарная погрешность не может быть отнесена к разряду систематических элементарных погрешностей.

Элементарная погрешность будет случайной или систематической в зависимости от того, в каких условиях она возникает, а не от того, известна или неизвестна закономерность, связывающая ее с возникающей причиной.

Согласно гипотезе аддитивного строения погрешности результата измерения систематические элементарные погрешности формируют систематическую часть  $\theta$ , а случайные элементарные погрешности — случайную часть  $\Delta$  полной погрешности  $\varepsilon$ . При этом верно равенство

$$\varepsilon = \theta + \Delta. \quad (11.3)$$

Если принять, что от измерения к измерению систематическая часть общей погрешности  $\theta$  (*систематическая погрешность*) остается неизменной, а случайная часть  $\Delta$  (*случайная погрешность*) общей погрешности  $\varepsilon$  меняется от измерения к измерению, то формуле (11.3) можно придать вид

$$\varepsilon_i = \theta + \Delta_i. \quad (11.4)$$

Систематическую погрешность  $\theta$  можно представить себе состоящей из двух частей: постоянной  $\bar{\theta}$  и переменной  $\tilde{\theta}$ , т.е.

$$\theta = \bar{\theta} + \tilde{\theta}.$$

Как постоянная, так и переменная систематические погрешности порождаются суммарным действием элементарных систематических погрешностей.

Кроме перечисленных групп погрешностей, иногда в результатах измерений могут появиться так называемые *грубые погрешности*, которые резко отклоняют результаты измерений от истинного значения измеряемых величин. Поэтому результаты измерений, содержащие грубые погрешности, должны быть обязательно исключены из обработки. Наиболее действенным методом обнаружения грубых погрешностей является сопоставление результатов избыточных измерений. Причиной возникновения грубых погрешностей может оказаться любой из пяти факторов измерения, но условно отнесем грубые погрешности к категории личных, так как субъект измерения должен своевременно принять меры к выявлению и устранению результатов измерений, содержащих грубые погрешности.

Описанная гипотеза аддитивной структуры погрешности результата измерения может быть для наглядности представлена схемой, изображенной на рис. 11.1.

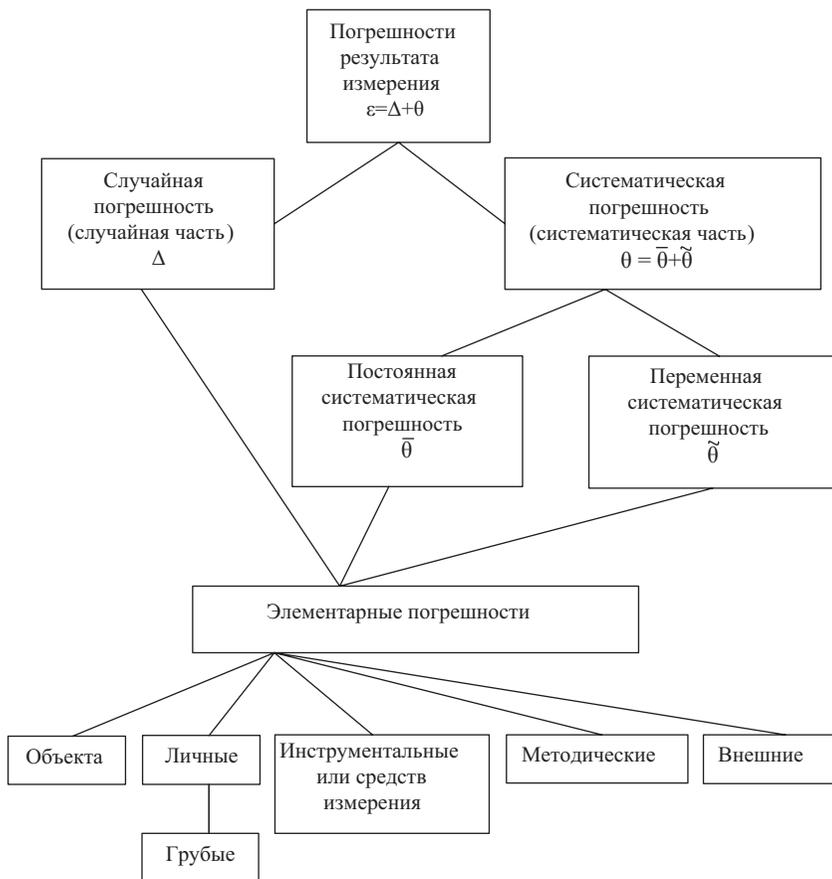


Рис. 11.1

## 11.5. Результат измерения и его погрешность как случайная величина

Опыт показывает, что результаты повторных измерений изменяются от одного измерения к другому, т.е. не остаются постоянными.

Рассмотрим ряд результатов повторных измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , полученных в одних и тех же условиях.

Отобразим структуру каждого результата измерений на числовой оси (рис. 11.2), где  $L$  — истинное значение измеряемой величины;  $M(\lambda)$  — центр, относительно которого рассеяны результаты

измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ;  $\varepsilon_i$  — истинная погрешность результата  $i$ -го измерения;  $\Delta_i$  — случайная погрешность результата  $i$ -го измерения;  $\theta$  — систематическая погрешность данного ряда измерений (систематический сдвиг).

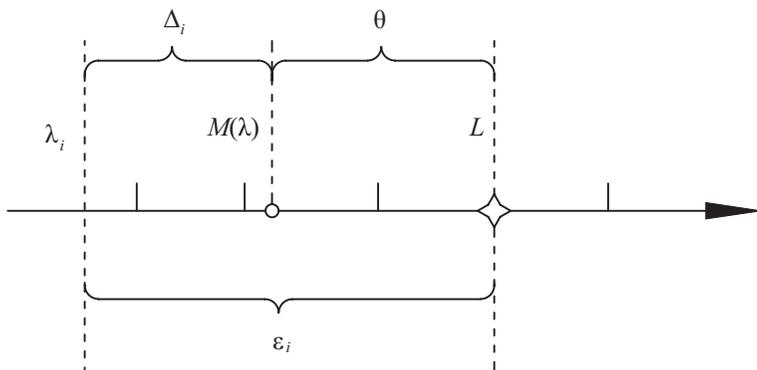


Рис. 11.2

При этом будут верны соотношения (11.1) и (11.4), а также

$$\lambda_i = M(\lambda) + \Delta_i. \quad (11.5)$$

Опыт показывает, что положительные и отрицательные  $\Delta_i$  встречаются одинаково часто, причем меньшие по величине погрешности встречаются чаще, нежели бóльшие. В связи с этим можно ставить вопрос о вероятности попадания случайной погрешности в любой заданный интервал, что дает основание рассматривать случайную погрешность как случайную величину  $\Delta$ , а ряд  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  как ряд реализаций этой случайной величины. Тогда полная погрешность есть случайная величина  $\varepsilon$ , а ряд  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  — реализация этой случайной величины; и результат измерения есть случайная величина  $\lambda$ , а ряд  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ряд реализаций этой случайной величины.

Тогда можно принять, что

$$M(\lambda) = L + \theta, \quad (11.6)$$

т.е. математическое ожидание результата измерений равно истинному значению измеряемой величины плюс систематический сдвиг.

Из (11.6) следует, что систематические погрешности являются той причиной, которая стоит на пути к познанию величины  $L$ .

Следовательно, необходимо более тщательно исследовать наличие систематических погрешностей в результатах измерений в целях их дальнейшего исключения.

Как уже было отмечено ранее, положительные и отрицательные случайные погрешности встречаются одинаково часто, что позволяет сформулировать аксиому 2 теории ошибок:

**Аксиома 2 (Аксиома компенсации)**

*Математическое ожидание случайной погрешности равно нулю:*

$$M(\Delta) = 0. \quad (11.7)$$

Из (11.3) и (11.7) вытекает, что математическое ожидание полной погрешности равно систематическому сдвигу:

$$M(\varepsilon) = \theta. \quad (11.8)$$

**Аксиома 3 (Аксиома рассеивания)**

*Если ряд измерений проводится в одних и тех же условиях, то для случайных погрешностей имеет место равенство*

$$M(\Delta^2) = D(\Delta) = \sigma^2, \quad (11.9)$$

*где величина  $\sigma^2$  есть дисперсия данного ряда измерений, зависящая от условий измерений.*

Из аксиомы 3 вытекает, что такую же дисперсию имеют полная погрешность  $\varepsilon$  и результат измерения  $\lambda$ , т.е.

$$D(\Delta) = D(\varepsilon) = D(\lambda) = \sigma^2, \quad (11.10)$$

так как все они отличаются между собой на постоянные величины.

Приведенные соотношения справедливы при любых законах распределения погрешности результата измерения, а величины  $\sigma^2$  и  $\theta$  зависят только от условий измерения.

В рамках **классической теории погрешностей** необходимо сформулировать еще одну аксиому.

**Аксиома 4 (Аксиома независимости)**

*Результаты измерений являются величинами независимыми:*

$$M(\Delta_i \Delta_j) = 0,$$

*т.е. математическое ожидание произведения случайных погрешностей двух рядов измерений равно нулю.*

## 11.6. Числовые характеристики точности измерения

Как уже было указано ранее, точность измерений определяется условиями, в которых эти измерения выполняются. Говоря о точности одного, отдельно взятого, результата измерения, всегда понимают условия, определяющие получение какого угодно числа измерений с заданной точностью. Точность определяет возможные отклонения результатов измерений от истинного значения измеряемой величины: чем меньше возможные отклонения от истинного значения измеряемой величины, тем выше точность этих измерений, и наоборот.

Отклонения результатов измерений от истинного значения измеряемой величины по своему происхождению могут быть связаны с различными причинами. Одни из них порождают систематические сдвиги, общие для всей серии измерений, выполненной в данных условиях измерения. Другие, воздействуя по-разному на каждый результат измерения, определяют разброс измерений, выполненных в конкретных условиях, относительно какого-то центра. В связи с этим возникает необходимость вводить, как минимум, две характеристики точности измерений: характеристику общего сдвига и характеристику разброса. Такими характеристиками являются следующие.

1. Общее уклонение ряда измерений от истинного значения измеряемой величины, характеризуемое систематическим сдвигом  $\theta$ .

2. Разброс результатов измерений относительно математического ожидания  $M(\lambda)$ , характеризующийся *среднеквадратическим отклонением*  $\sigma$ .

В качестве полной характеристики отклонения результатов измерений от истинного часто используют предельную погрешность результата измерения

$$\Delta_{\text{пр}} = \theta \pm t\sigma. \quad (11.11)$$

При отсутствии систематических погрешностей

$$\Delta_{\text{пр}} = \pm t\sigma. \quad (11.12)$$

Значение параметра  $t$  связано с законом распределения погрешностей и с задаваемой вероятностью появления предельной погрешности.

## 11.7. Закон распределения результатов измерений и их погрешностей

Используя аддитивную гипотезу строения полной погрешности результата измерения и основываясь на центральной предельной теореме Ляпунова (п. 2.5), можно сформулировать пятую аксиому теории погрешностей результатов геодезических измерений:

### *Аксиома 5 (Аксиома распределения)*

*Полная погрешность результата измерения имеет нормальное распределение.*

Приняв это положение, можно записать выражение для плотности распределения результатов измерений и их погрешностей (они имеют одно и то же распределение, так как отличаются друг от друга на постоянные величины). Плотность нормального распределения в общем случае имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (11.13)$$

Тогда плотность распределения результатов измерений выражается соотношением

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lambda-L-\theta)^2}{2\sigma^2}}. \quad (11.14)$$

Плотность распределения полной погрешности

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\epsilon-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad (11.15)$$

и для случайной погрешности

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}. \quad (11.16)$$

Если задаться определенной вероятностью, то, опираясь на знание закона распределения погрешностей, можно рассчитать величину интервала, в который попадут результаты измерений с заданной вероятностью. Примем, что систематический сдвиг отсутствует ( $\theta = 0$ ). Тогда интервал можно представить в виде  $(-t\sigma; +t\sigma)$ , где параметр  $t$  находят при известном законе распределения по-

грешностей результатов измерений по заданной вероятности. Для нормального распределения имеем следующие соотношения, которые иллюстрируются рис.11.3.

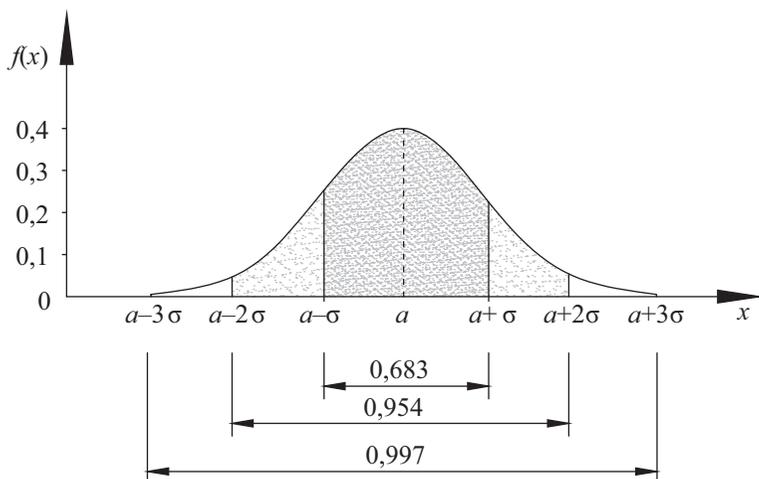


Рис.11.3

$t$	$P( \Delta  \leq \pm t\sigma)$
1	0,683
2	0,954
2,5	0,988
3	0,997

В геодезической практике предельные погрешности рассчитывают при  $t = 2; 2,5; 3$ .

### 11.8. Оценки числовых характеристик точности измерений

Обычно в практике неизвестны значения среднеквадратического отклонения  $\sigma$  и систематического сдвига  $\theta$ . Поэтому для характеристики точности используют их оценки, т.е. приближенные значения, получаемые по результатам измерений. В геодезической практике оценку среднеквадратического отклонения  $\sigma$  обычно называют среднеквадратической погрешностью (СКП)

$m$ , а систематического сдвига — систематической погрешностью, оставляя за ней то же обозначение, что и за систематическим сдвигом —  $\theta$ .

Величины  $m$  и  $\theta$  как оценки характеристик точности зависят от условий измерений и характеризуют условия измерений. В то же время как любые другие оценки они являются величинами случайными, и в этом смысле зависят от числа измерения, по которым они рассчитаны. Чем большее число результатов измерений использовано для их расчета, тем более надежно они получены. Для величин  $m$  и  $\theta$  как величин случайных могут быть рассчитаны характеристики их надежности:

$m_m$  — СКП среднеквадратической погрешности;

$m_\theta$  — СКП систематической погрешности.

Обычно эти величины используют для правильного округления величин  $m$  и  $\theta$ .

Для расчета  $m_m$  обычно используют формулу

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2\nu}}, \quad (11.17)$$

где  $\nu$  — число степеней свободы.

Формулы для вычисления  $m_\theta$  зависят от конкретных методов вычисления  $\theta$  и далее будут приведены особо для каждого конкретного случая.

Одной из задач теории погрешностей результатов измерений является разработка методов вычисления оценок числовых характеристик точности  $m$  и  $\theta$  в различных геодезических операциях.

## **11.9. Основные задачи, решаемые при помощи теории погрешностей результатов измерений**

Обычно измерения организуют так, чтобы можно было получить, кроме необходимых, и дополнительные результаты. В этом случае получают не одно, а несколько отличающихся друг от друга приближенных значений измеряемой физической величины. Какое из них принять в качестве наилучшего, наиболее точного приближения к истинному значению измеряемой величины? Или, может быть, по этим результатам следует получить чисто вычислитель-

ным путем новое, более точное приближение? Ответ на эти вопросы составляют первую задачу теории погрешностей результатов измерений, которую назовем *задачей уравнивания* результатов измерений и сформулируем так:

*Теория погрешностей разрабатывает правила вычислений (при наличии дополнительных измерений) наиболее точных приближений к истинным значениям измеренных физических величин.*

Для правильного использования полученных результатов измерений и вычисленных по ним наиболее точных приближений к измеренным физическим величинам весьма важно знать, с какой точностью эти результаты измерений и вычислений были получены. Не имея представления о точности, нельзя утверждать, насколько полно выполненные результаты измерений отражают количественную сторону окружающей действительности, насколько хорошо они удовлетворяют производственным и научным требованиям. Из этого вытекает вторая задача теории погрешностей измерений, которую назовем *задачей апостериорной* (после опытной, т.е. после выполнения измерений) *оценки точности* и сформулируем ее так:

*Теория погрешностей разрабатывает правила оценки точности полученных результатов измерений и их функций.*

Необходимым условием решения этой задачи, как и предыдущей, является наличие дополнительных измерений.

Для того чтобы измерения давали возможность получать результаты с необходимой точностью при минимальных затратах, необходимо уметь соответствующим образом планировать эти измерения. Указанное соображение приводит к третьей задаче теории погрешностей — *задаче априорной* (до опытной, т.е. до проведения измерений) *оценки точности*, которую сформулируем так:

*Теория погрешностей разрабатывает правила планирования измерений и вычислений так, чтобы они давали результаты с наименьшими затратами средств и времени при достаточной для существа дела точности.*

Из характера указанных трех основных задач теории погрешностей измерений следует вывод об огромном ее значении для геодезии. Разработка методики измерений и средств измерений, рационализация существующих методов измерений и производственных

процессов, оценка точности получаемых результатов измерений и технически грамотное использование последних возможно лишь при соответствующем их анализе средствами теории погрешностей. Это осуществляется посредством научных и инженерных расчетов, основанных на математическом аппарате, составляющем важнейшее содержание теории погрешностей измерений.

### 11.10. Оценка точности результатов измерений по истинным (действительным) погрешностям

Пусть имеется ряд результатов измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  одной и той же физической величины, полученных в одинаковых условиях (равноточные измерения). Истинное (действительное) значение этой величины известно и равно  $L$ . По формуле (11.2) можно получить ряд  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  действительных погрешностей результатов измерений. Здесь правомерно рассмотреть два варианта. В первом будем предполагать, что систематические погрешности отсутствуют. Тогда будут верны равенства  $\varepsilon_1 = \Delta_1, \varepsilon_2 = \Delta_2, \dots, \varepsilon_n = \Delta_n$ , т.е. полные погрешности результатов измерений равны случайным погрешностям этих измерений. В этом случае в качестве оценки разброса может быть применена формула СКП:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \quad (11.18)$$

Тогда ее надежность составляет

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \quad (11.19)$$

Этими формулами исчерпывается первый вариант оценки точности по истинным (действительным) погрешностям.

Во втором варианте не предполагается отсутствие систематических погрешностей. В связи с этим необходимо найти оценку систематического сдвига, характеристику разброса и оценить значимость выявленной систематической погрешности.

Приближенное значение систематического сдвига — оценка систематической погрешности — может быть получена из следующего соображения: в соответствии с формулой (11.6) математическим

ожиданием полной погрешности результата измерения является систематическая часть полной погрешности, т.е. систематическая погрешность. Наилучшее приближение к математическому ожиданию можно получить по формуле среднего арифметического, т.е. наилучшая оценка систематического сдвига будет иметь вид

$$\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad (11.20)$$

где  $[ ]$  — символ суммы Гаусса, означающий суммирование однородных элементов, отличающихся изменяющимися от 1 до  $n$

индексами. Символ Гаусса эквивалентен символу  $\sum_{i=1}^n$ , где  $n$  — число суммируемых величин. Для (11.20) в соответствии с правилом раскрытия символа Гаусса имеем  $[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ .

Оценка СКО есть СКП) и может быть получена по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[\bar{\Delta}^2]}{n-1}}, \quad (11.21)$$

где  $\bar{\Delta}_i = \varepsilon_i - \bar{\theta}$  — оценка истинной погрешности  $i$ -го результата измерения.

Оценка надежности СКП вычисляется по формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (11.22)$$

Для проверки значимости систематического сдвига выдвигаем нулевую гипотезу  $H_0: \theta = 0$ .

Проверку гипотезы выполняем с помощью критерия

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < |\bar{\theta}|, \text{ который представляет собой ни что иное как пре-$$

дельно возможное значение  $\bar{\theta}$ , вызванное случайными факторами.  $t_q$  выбираем из таблиц распределения Стьюдента по уровню значимости  $\alpha$  и по числу степеней свободы  $\nu = n - 1$ .

В случае, если выполняется неравенство вида  $|\bar{\theta}| < \Delta_{\text{пр}\bar{\theta}}$ , следует признать, что  $\bar{\theta}$  сформировано случайными факторами, и систематические погрешности в данном ряду не обнаружены. При выпол-

нении неравенства противоположного смысла говорят о наличии систематических погрешностей в данном ряду измерений.

Для правильного округления величины  $\bar{\theta}$  в случае ее значимости вычисляем величину ее погрешности  $m_{\bar{\theta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$ .

Оценку СКО  $\sigma$  можно получить при малом объеме выборки ( $n \leq 10$ ) по величине размаха. Ее вычисляем по формуле

$$\hat{m} = \frac{R}{d_n}, \quad (11.23)$$

где  $R_n = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$  — размах выборки объема  $n$ , а  $d_n$  — коэффициент, зависящий от объема выборки. Значения коэффициентов  $d_n$  даны в табл. 6.3.

## 11.11. Примеры решения типовых задач

### Пример 11.1

Линия теодолитного хода измерена мерной лентой пять раз. При этом получены результаты: 217,24; 217,31; 217,28; 217,23; 217,20 м. Эта же линия измерена светодальномером, что дало результат 217,216 м. Найти оценку систематической погрешности, СКП измерения линии мерной лентой, если результат измерения линии светодальномером принят за действительный. Проверить значимость вычисленной систематической погрешности и рассчитать надежность получения СКП.

*Решение*

Все расчеты сведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

№	$\lambda$ , м	$\varepsilon$ , см	$\bar{\Delta}$ , см	$\bar{\Delta}^2$
1	217,24	+ 2,4	- 1,2	1,44
2	217,31	+ 9,4	+ 5,8	33,64
3	217,28	+ 6,4	+ 2,8	7,84
4	217,23	+ 1,4	- 2,2	4,84
5	217,20	- 1,6	- 5,2	27,04
[ ]		+ 18,0	0	74,80

Оценка систематической погрешности получает значение

$$\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n} = +\frac{18,0}{5} = +3,6 \text{ см.}$$

Среднеквадратическая погрешность:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{74,80}{4}} = 4,3 \text{ см} \approx 4 \text{ см.}$$

Оценка надежности СКП

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4,3}{\sqrt{8}} = 1,5 \text{ см.}$$

Из последнего вытекает, что величине  $m$  следует оставлять только одну значащую цифру, т.е. СКП одного измерения линии теодолитного хода мерной лентой равна  $m = 4$  см.

Для решения вопроса о значимости  $\bar{\theta}$  рассчитывают величину

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = \frac{t_q m}{\sqrt{n}}. \text{ Значение } t_q \text{ выбирают из таблиц распределения Стью-$$

дента по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и числу степеней свободы  $\nu = n - 1 = 4$ . В данном случае оно оказывается равным  $t_q = 2,78$ .

Тогда  $\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = \frac{2,78 \cdot 4}{\sqrt{5}} = 4,97 > 3,6$ , из чего следует, что систематиче-

ские погрешности в данных измерениях не обнаружены.

Повторно оценку СКО можно получить по формуле (11.23)

$$\hat{m} = \frac{R}{d_n}.$$

Размах выборки  $R_n = \lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}} = 217,31 - 217,20 = 0,11$  м. Из табл. 6.3 выбираем значение  $d_n$ , соответствующее объему выборки

$n = 5$ , которое составило  $d_n = 2,33$ . Тогда  $\hat{m} = \frac{R}{d_n} = \frac{11}{2,33} = 4,72$  см, что

хорошо согласуется с величиной  $m = 4,3$  см. Учитывая, что дисперсия величины  $\hat{m}$  не меньше, чем дисперсия величины  $m$ , первую можно округлить до одной значащей цифры, т.е. окончательно  $\hat{m} = 5$  см.

## 11.12. Задачи для самостоятельного решения

1. Превышение между точками  $A$  и  $B$  было определено по программе нивелирования второго класса и оказалось равным 12,847 м. Кроме того, превышение  $h_{AB}$  многократно определялось нивелиром технического класса точности, что дало следующие результаты: 12,870, 12,842, 12,833, 12,861, 12,831, 12,864. Найти оценку систематической погрешности, СКП и предельную погрешность определения превышения нивелира технической точности. Проверить значимость систематической погрешности.

2. При измерении величины, действительное значение которой известно, был получен ряд погрешностей: +6; -8; -4; -13; +7; +2; 0; +5; +4; -3. Найти оценку систематической погрешности, СКП и предельную погрешность. Проверить значимость систематической погрешности.

### Темы и вопросы для самопроверки

1. В чем заключается двойственность характера процесса измерения?

2. Сформулируйте аксиому 1 (Аксиома отображения).

3. В чем состоит сущность аддитивной гипотезы строения полной погрешности результата измерения?

4. Приведите примеры погрешностей, порождаемых каждым фактором результата измерения?

5. Каково основное различие между систематическими и случайными погрешностями?

6. В чем заключается смысл аксиомы 2 (Аксиома компенсации)?

7. Как формулируется аксиома 3 (Аксиома рассеивания)?

8. Какие характеристики точности необходимо вводить для описания качества измерения и почему?

9. Что является характеристикой разброса результатов измерений?

10. Почему можно предполагать, что истинные погрешности результатов измерений имеют нормальное распределение?

11. Как вычисляют предельную погрешность результатов измерений?

12. Что такое грубая погрешность?

13. Что такое оценка числовых характеристик точности результатов измерений?
14. Что характеризует СКП результата измерения?
15. В чем различие между СКО и СКП?
16. Что характеризует СКП среднеквадратической погрешности и для чего ее вычисляют?
17. Перечислите основные задачи, решаемые с помощью теории погрешностей.
18. Напишите формулы, по которым оценивают точность по истинным (действительным) погрешностям.

## **12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

### **12.1. Основные теоремы**

Пусть непосредственно измерены некоторые величины, точность которых известна. Далее по измеренным величинам проводим вычисление новых величин. Возникает задача вычисления их характеристик точности.

Например, по измеренным стороне и двум углам треугольника необходимо вычислить две другие стороны и оценить их точность, если известны характеристики точности измерения линии и углов этого треугольника.

Решение поставленной задачи выполняется на основании следующих теорем.

#### ***Теорема 1***

*Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ряд результатов независимых измерений. Результаты измерений, полученные в таких условиях, которые обеспечивают точность, характеризующуюся, соответственно, систематическими погрешностями  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  и дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ . По этим результатам измерений получена их линейная функция вида  $y = C_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n$ , где все  $C_i$  ( $i = 0, n$ ) — теоретические постоянные. Тогда систематическая погрешность и дисперсия этой функции могут быть вычислены, соответственно, по формулам*

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \dots + C_n\theta_n, \quad (12.1)$$

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2. \quad (12.2)$$

*Доказательство*

Пусть  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — истинные значения измеряемых величин, а  $Y$  — истинное значение их линейной функции. Тогда будет верно соотношение

$$Y = C_0 + C_1L_1 + C_2L_2 + \dots + C_nL_n. \quad (а)$$

Вычисленное по результатам измерений значение функции

$$y = C_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n. \quad (б)$$

Для расчета погрешности линейной функции из равенства (б) вычитаем равенство (а) и получаем

$$y - Y = C_0 + C_1(\lambda_1 - L_1) + \dots + C_n(\lambda_n - L_n). \quad (в)$$

В соответствии с аксиомой 1 имеем

$$\varepsilon_i = \lambda_i - L_i. \quad (г)$$

Принимая  $y - Y = \varepsilon_y$  как погрешность функции, формуле (в) с учетом (г) можно придать вид

$$\varepsilon_y = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n. \quad (д)$$

От погрешностей результатов измерений перейдем к их математическим ожиданиям

$$M(\varepsilon_y) = M(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n). \quad (е)$$

Учитывая свойства математического ожидания и принимая во внимание, что  $M(\varepsilon_y) = \theta_y$  и  $M(\varepsilon_i) = \theta_i$ , равенству (д) можно придать вид (12.1):

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \dots + C_n\theta_n.$$

Вычислим дисперсию левой и правой частей равенства (д):

$$D(\varepsilon_y) = D(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n). \quad (ж)$$

Учитывая свойства дисперсии и принимая во внимание, что случайные величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  независимы, а также что  $D(\varepsilon_y) = \sigma_y^2$  и

$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ , равенству (ж) можно придать вид (12.2), что полностью доказывает Теорему 1.

### **Теорема 2**

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ряд *результатов независимых измерений*, полученный в таких условиях, которые обеспечивают точность, характеризующуюся, соответственно, систематическими погрешностями  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  и дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ . По этим результатам измерений получена их дифференцируемая функция вида  $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Тогда систематическая погрешность и дисперсия этой функции могут быть вычислены, соответственно, по формулам

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \theta_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \theta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \theta_n; \quad (12.3)$$

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \sigma_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \sigma_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \sigma_n \right)^2. \quad (12.4)$$

### *Доказательство*

Пусть  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — истинные значения измеряемых величин, а  $Y$  — истинное значение их функции. Тогда будет верно равенство

$$Y = f(L_1, L_2, \dots, L_n). \quad (a)$$

Вычисленное по результатам измерений значение функции

$$y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (б)$$

Для расчета погрешности функции из равенства (б) вычитаем равенство (a) и получаем

$$y - Y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - f(L_1, L_2, \dots, L_n). \quad (в)$$

Рассматривая погрешности измерений как приращения аргументов, равенству (в) можно придать вид

$$y - Y = f(L_1 + \varepsilon_1, \dots, L_n + \varepsilon_n) - f(L_1, \dots, L_n) = \Delta y. \quad (г)$$

Заменим полное приращение функции  $\Delta y$  полным дифференциалом функции  $\hat{\Delta} y$ , которые отличаются друг от друга на величину более высокого порядка малости, чем приращения аргументов (погрешности измерений):

$$\Delta y \approx \partial y = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \varepsilon_n. \quad (\text{д})$$

Полагая приращение функции  $\Delta y$  истинной погрешностью функции, получаем

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \varepsilon_n. \quad (\text{е})$$

Таким образом, равенством (е) удалось представить погрешность функции как линейную комбинацию *независимых* погрешностей результатов измерений.

Применив к равенству (е) Теорему 1, получим искомые равенства (12.3) и (12.4), что полностью доказывает Теорему 2.

#### *Примечание*

Теоремы 1 и 2 доказаны для теоретических характеристик точности  $\theta$  и  $\sigma^2$ . Однако в практике геодезических действий приходится иметь дело с их оценками  $\bar{\theta}$  и  $m^2$ . Тогда формулам (12.1)—(12.4) можно придать вид:

$$\bar{\theta}_y = C_1 \bar{\theta}_1 + C_2 \bar{\theta}_2 + \dots + C_n \bar{\theta}_n; \quad (12.5)$$

$$m_y^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \dots + C_n^2 m_n^2; \quad (12.6)$$

$$\bar{\theta}_y = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \bar{\theta}_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \bar{\theta}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \bar{\theta}_n; \quad (12.7)$$

$$m_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} m_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} m_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} m_n \right)^2. \quad (12.8)$$

## 12.2. Накапливание погрешностей в основных геодезических действиях

Теоремы 1 и 2 позволяют решить вопрос о выявлении законов накапливания погрешностей в основных геодезических операциях.

**Передача дирекционного угла по ходу в  $n$  поворотных точках.** Пусть проложен теодолитный ход (рис. 12.1). Углы хода  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  измеряли независимо друг от друга в одинаковых условиях, обеспечивающих получение их с систематическими погрешностями  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_\beta$  и среднеквадратическими погрешностями

ми  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_\beta$ . Необходимо рассчитать систематическую  $\theta_{\alpha_{CD}}$  и среднеквадратическую  $m_{\alpha_{CD}}$  погрешности дирекционного угла последней линии рассматриваемого хода. При этом будем считать, что значение исходного дирекционного угла  $\alpha_{AB}$  линии  $AB$  получено в условиях, обеспечивающих его определение с погрешностями, пренебрежимо малыми по сравнению с погрешностями измерений, т.е. практически можно считать  $\alpha_{AB}$  величиной безошибочной.

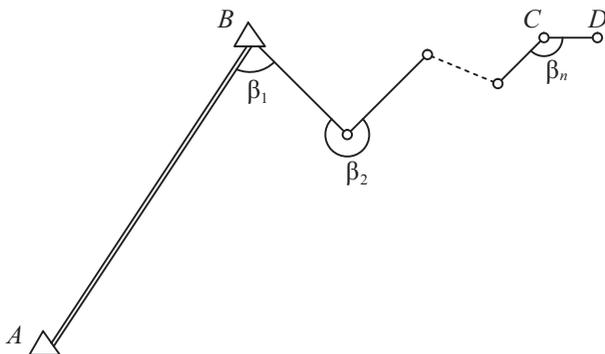


Рис. 12.1

Для определения погрешности дирекционного угла линии  $CD$  прежде всего необходимо представить этот дирекционный угол как функцию исходных и измеренных величин. Поскольку измерены правые по ходу углы, искомый дирекционный угол может быть представлен в виде

$$\alpha_{CD} = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n.$$

Учитывая, что  $\alpha_{AB}$  — величина безошибочная, как и  $180^\circ \cdot n$ , можно записать:  $\alpha_{CD} = C_0 - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n$ .

Здесь все коэффициенты перед результатами измерений ( $C_i$ ) равны  $-1$ .

Тогда на основании Теоремы 1 для систематической погрешности дирекционного угла последней линии хода может быть получено выражение

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -\theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_n,$$

или

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -n \cdot \theta_\beta. \quad (12.9)$$

На основании Теоремы 1 для квадрата СКП дирекционного угла последней линии хода можно записать

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2, \text{ или } m_{\alpha_{CD}}^2 = m_{\beta}^2 \cdot n.$$

Тогда СКП дирекционного угла будет иметь вид

$$m_{\alpha_{CD}} = m_{\beta} \sqrt{n}. \quad (12.10)$$

Окончательно можно сделать вывод, что *при передаче дирекционных углов систематические погрешности накапливаются пропорционально числу измеренных углов, а случайные — пропорционально корню квадратному из числа углов.*

**Накапливание погрешностей в сумме углов полигона.** В многоугольнике измерены все внутренние углы  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Точность их измерений характеризуется систематическими погрешностями  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_{\beta}$  и СКП  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{\beta}$ .

Необходимо определить систематическую и среднеквадратическую погрешности суммы  $\sum_{i=1}^n \beta_i = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$  углов многоугольника.

На основании Теоремы 1 имеем

$$\theta_{\sum \beta} = n \cdot \theta_{\beta}; \quad (12.11)$$

$$m_{\sum \beta} = m_{\beta} \sqrt{n}. \quad (12.12)$$

*Сумма углов многоугольника имеет систематическую погрешность, в  $n$  раз большую, а среднеквадратическую погрешность — в корень из  $n$  раз большую, чем в измеренных углах.*

**Накапливание погрешностей в среднем арифметическом из  $n$  равноточных измерений угла.** Один и тот же угол измерен  $n$  раз, и при этом получены результаты  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , характеризующиеся систематическими погрешностями  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_{\beta}$  и СКП  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{\beta}$ . Необходимо вычислить систематическую и среднеквадратическую погрешности среднеарифметического

$\bar{\beta} = \frac{1}{n}\beta_1 + \frac{1}{n}\beta_2 + \dots + \frac{1}{n}\beta_n$  этих результатов измерений. В данном

примере все коэффициенты  $C_i = \frac{1}{n}$ . Тогда систематическая погрешность среднеарифметического

$$\theta_{\bar{\beta}} = \theta_{\beta}. \quad (12.13)$$

Таким образом, *систематическая погрешность среднеарифметического остается такой же, как и систематическая погрешность единичного измерения*. Из этого вытекает, что при наличии систематических погрешностей в результатах измерений повышение точности невозможно без их исключения.

Для квадрата СКП получаем выражение

$$m_{\bar{\beta}}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{n}, \quad (12.14)$$

а для СКП:

$$m_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{n}}. \quad (12.15)$$

*Среднеквадратические погрешности среднеарифметического в корень из  $n$  раз меньше по сравнению со среднеквадратической погрешностью единичного измерения*.

Этот вывод можно полностью отнести не только к угловым измерениям, но и к другим равноточным измерениям любого рода.

**Передача высот по ходу в  $n$  станций.** Пусть проложен нивелирный ход из  $n$  станций. Превышения на станциях нивелирного хода измерялись независимо друг от друга. Измерения проводились в одинаковых условиях, обеспечивающих получение их с систематическими погрешностями  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_{\text{ст}}$  и СКП  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{\text{ст}}$ . Необходимо рассчитать систематическую  $\theta_{H_B}$  и среднеквадратическую  $m_{H_B}$  погрешности высоты конечной точки хода  $B$ . При этом будем считать, что значение высоты начальной точки хода  $H_A$  получено в условиях, обеспечивающих ее определение с погрешностями, пренебрежимо малыми по сравнению с погрешностями измерений, т.е. практически можно считать  $H_A$  величиной безошибочной.

Для определения погрешностей высоты точки  $B$  прежде всего необходимо представить ее как функцию исходных и измеренных величин. Искомая высота точки  $B$  может быть представлена в виде  $H_B = H_A + h_1 + h_2 + \dots + h_n$ .

Учитывая, что  $H_A$  — величина безошибочная, и принимая во внимание, что все  $C_i = 1$ , на основании Теоремы 1 для систематической погрешности высоты последней точки хода можно записать

$$\theta_{H_B} = \theta_{\text{ст}} n, \quad (12.16)$$

а для квадрата СКП высоты последней точки хода можно записать

$$m_{H_B}^2 = m_{\text{ст}}^2 n.$$

Тогда СКП будет иметь вид

$$m_{H_B} = m_{\text{ст}} \sqrt{n}. \quad (12.17)$$

Окончательно можно сделать вывод, что при передаче высот точек систематические погрешности накапливаются пропорционально числу измеренных превышений, а случайные — пропорционально корню квадратному из их числа.

При нивелировании в равнинной местности расстояние между рейками остается примерно одинаковым, поэтому общее число станций в нивелирном ходе может быть представлено в виде

$$n = \frac{L}{l_{\text{cp}}},$$

где  $L$  — длина нивелирного хода;  $l_{\text{cp}}$  — среднее расстояние между рейками в нивелирном ходе.

Тогда выражениям (12.16) и (12.17) можно придать вид:

$$\theta_{H_B} = \theta_{\text{ст}} \frac{L}{l_{\text{cp}}}; \quad (\text{а})$$

$$m_{H_B} = m_{\text{ст}} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l_{\text{cp}}}}. \quad (\text{б})$$

Введем обозначения:

$$\tau_{h_{\text{км}}} = \frac{\theta_{\text{ср}}}{l_{\text{ср}}}; \quad (\text{в})$$

$$\mu_{h_{\text{км}}} = \frac{m_{\text{ср}}}{\sqrt{l_{\text{ср}}}}. \quad (\text{г})$$

Окончательно выражениям (12.16) и (12.17) можно придать вид

$$\theta_{H_B} = \tau_{h_{\text{км}}} L; \quad (12.18)$$

$$m_{H_B} = \mu_{h_{\text{км}}} \sqrt{L}. \quad (12.19)$$

Величины  $\tau_{h_{\text{км}}}$  и  $\mu_{h_{\text{км}}}$  представляют собой соответственно систематическую и среднеквадратическую погрешности превышения, полученного по ходу длиной в 1 км. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно в выражения (12.18) и (12.19) подставить значение  $L = 1$  км. Иногда эти величины, соответственно, называют *коэффициент систематического* и *коэффициент случайного влияния в геометрическом нивелировании*, или *километрическая систематическая погрешность* и *километрическая СКП нивелирования*.

Как видно из приведенных соотношений, закон накапливания систематических и случайных погрешностей не меняется при использовании различных характеристик нивелирных ходов, будь то длина хода либо число станций в ходе: *систематические погрешности накапливаются пропорционально количественной характеристике хода, а случайные — пропорционально корню квадратному из количественной характеристики хода*.

**Линейные измерения.** В настоящее время существуют принципиально два типа линейных измерений:

- измерение с использованием мерного прибора, непосредственно укладываемого в створе измеряемой линии. К этому типу измерений необходимо отнести измерения, выполняемые рулеткой, мерной лентой или проволокой.

- измерение косвенное, связанное с измерением времени прохождения сигнала от прибора до отражателя и обратно. К измерениям этого типа относятся измерения свето- или радиодальномерами.

Оба этих типа измерений отличаются друг от друга характером накопления погрешностей, и поэтому каждый из них должен быть рассмотрен отдельно.

**Непосредственное измерение линий.** Процесс измерения линии лентой (провоолокой, рулеткой) по своей структуре очень близок к геометрическому нивелированию. И в первом, и во втором случаях окончательный результат получается как сумма отдельных элементов. Это могут быть превышения на станциях нивелирного хода либо длины отрезков между штативами при измерении длины линии провоолокой или же длины отрезков между шпильками при измерении линии лентой. Одинаковый характер процессов измерений определяет однотипный характер накопления погрешностей измерений, и для линии  $S$ , измеренной лентой  $l$  и вычисленной из соотношения  $S = ln$ , систематическая и среднеквадратическая погрешности могут быть рассчитаны по формулам:

$$\theta_s = \theta_l n; \quad (12.20)$$

$$m_s = m_l \sqrt{n}, \quad (12.21)$$

где  $\theta_l$  — систематическая погрешность одного уложения ленты;  $m_l$  — СКП одного уложения ленты;  $n$  — число уложений ленты в створе измеряемой линии.

Как и в нивелирных работах, погрешности измерения линий можно представить с использованием длины линии. Для этого в формулах (12.20) и (12.21) вместо  $n$  необходимо подставить его выражение через  $S$ . Тогда будем иметь

$$\theta_s = \theta_l \frac{S}{l}; \quad (a)$$

$$m_s = m_l \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{l}}. \quad (б)$$

Введем обозначения:

$$\tau_s = \frac{\theta_l}{l}; \quad (в)$$

$$\mu_s = \frac{m_l}{\sqrt{l}}. \quad (г)$$

Окончательно выражениям (12.20) и (12.21) можно придать вид

$$\theta_s = \tau_s S; \quad (12.22)$$

$$m_s = \mu_s \sqrt{S}. \quad (12.23)$$

Величины  $\tau_s$  и  $\mu_s$  представляют собой систематическую и среднеквадратическую погрешности измерения линии длиной в 1 м. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно в выражения (12.22) и (12.23) подставить значение  $S = 1$  м. Иногда эти величины называют, соответственно, *коэффициентом систематического* и *коэффициентом случайного влияния в линейных измерениях*.

**Измерение линий свето- и радиодальномерами.** Физическая основа линейных измерений этого типа в значительной степени отличается от рассмотренных ранее. В предыдущем случае измерение выполнялось непосредственно методом «наращивания», когда окончательный результат являлся суммой отдельных элементарных частей, непосредственно измеряемых.

В свето- и радиодальномерных измерениях фиксируется тем или иным методом время прохождения сигнала от прибора до отражателя и обратно. Поэтому точность окончательного результата в значительной степени зависит от точности измерения отрезка времени, что далеко не всегда связано с величиной этого отрезка, т.е. с длиной измеряемой линии. В связи с этим, как показывает практика свето- и радиодальномерных измерений, для конкретного типа приборов в очень широком диапазоне изменения длин линий эти измерения можно считать равноточными. Достаточно хорошие показатели точности можно получить по паспортным данным прибора.

Если возникают сомнения по качеству паспортных данных прибора, необходимо провести серию испытаний прибора, при этом можно пользоваться методами, изложенными в пп. 17.4—17.5.

### 12.3. Примеры решения типовых задач

#### Пример 12.1

Вычислить СКП превышения, полученного на станции геометрического нивелирования, если СКП отсчета по рейке равно 1 мм. Здесь следует учесть, что превышение на станции определялось по методике, принятой для технического нивелирования.

### Решение

При решении задач подобного типа прежде всего необходимо составить функцию, связывающую оцениваемую величину с измеренными величинами.

В рассматриваемой задаче необходимо оценить точность превышения, полученного на станции геометрического нивелирования. Известно, что такое превышение рассчитывают как среднеарифметическое из превышений, получаемых по «черной» и «красной» сторонам реек. Превышения вычисляют как разность отсчетов по задней и передней рейкам. Тогда искомое превышение может быть рассчитано по формуле

$$h = \frac{(v_3^ч - v_n^ч) + (v_3^к - v_n^к)}{2},$$

или

$$h = \frac{1}{2}v_3^ч - \frac{1}{2}v_n^ч + \frac{1}{2}v_3^к - \frac{1}{2}v_n^к.$$

Это соотношение представляет собой линейную функцию независимых результатов измерений — отсчетов. Для расчета СКП превышения в этом случае применима формула

$$m_y^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \dots + C_n^2 m_n^2,$$

при этом коэффициенты, соответственно, равны

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая, что СКП отсчетов равны между собой, окончательно получаем

$$m_h = \sqrt{\frac{1}{4}m_0^2 + \frac{1}{4}m_0^2 + \frac{1}{4}m_0^2 + \frac{1}{4}m_0^2} = m_0 = 1 \text{ мм.}$$

### Пример 12.2

Километрическая СКП геометрического нивелирования равна 8 мм. Вычислить предельное значение разности между превышениями, полученными в прямом и обратном направлениях по ходу длиной 15 км.

### Решение

В задаче необходимо найти предельную погрешность разности между двумя превышениями. В этом случае оцениваемая величина имеет вид

$$d = h_{\text{пр}} - h_{\text{обр}}.$$

СКП такой функции

$$m_d = \sqrt{m_{h_{\text{пр}}}^2 + m_{h_{\text{обр}}}^2}.$$

Прямое и обратное превышения получены в одинаковых условиях, так как длины ходов и методика нивелирования в обоих случаях одинаковые. Следовательно, эти превышения имеют одинаковые СКП, т.е.  $m_h = m_{h_{\text{пр}}} = m_{h_{\text{обр}}}$ . Тогда  $m_d = m_h \sqrt{2}$ . Но СКП превышения, полученного по ходу в  $L$  км, определяется из формулы  $m_h = \mu_{h_{\text{км}}} \sqrt{L}$ .

$$\text{Тогда } m_d = \mu_{h_{\text{км}}} \sqrt{2L}.$$

Предельная погрешность связана с СКП соотношением

$$\Delta_{\text{пред}} = 2,5m_d.$$

$$\text{Окончательно получим } \Delta_{\text{пред}} = 2,5\mu_{h_{\text{км}}} \sqrt{2L}.$$

По условию задачи необходимо найти предельное расхождение разности превышений. Но теоретическое значение разности равно нулю, следовательно, фактическое значение разности совпадает с ее погрешностью. Тогда

$$d = \Delta_d = 2,5\mu_{h_{\text{км}}} \sqrt{2L} = 20 \cdot \sqrt{30} = 110 \text{ мм.}$$

### Пример 12.3

Рассчитать СКП места нуля вертикального круга теодолита и СКП угла наклона, если СКП отсчета при одном положении вертикального круга равно  $m_0 = 0,7'$ .

### Решение

Вначале рассмотрим вычисление СКП М0. Для некоторых типов вертикальных кругов М0 вычисляют по формуле

$$M_0 = \frac{Л + П + 180^\circ}{2}.$$

Для других типов вертикальных кругов формулы расчета  $M_0$  отличаются от приведенной либо знаком слагаемых, либо постоянным слагаемым, что не влияет на оценку точности определения  $M_0$ . То же относится к вычислению угла наклона и его погрешности.

Тогда СКП  $M_0$  может быть получена из соотношения

$$m_{M_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}m_o\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m_o\right)^2} = \frac{m_o}{\sqrt{2}} = \frac{0,7'}{\sqrt{2}} = 0,5'.$$

Угол наклона для того же типа вертикального круга может быть рассчитан по следующим формулам:

$$1) v = L - M_0; \quad 2) v = M_0 - \Pi - 180^\circ; \quad 3) v = \frac{L - \Pi - 180^\circ}{2}.$$

Воспользуемся для расчета СКП угла наклона первым соотношением. Тогда получим

$$m_v = \sqrt{m_o^2 + m_{M_0}^2} = \sqrt{m_o^2 + \frac{m_o^2}{2}} = m_o \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,7'.$$

Расчет с использованием второго соотношения приводит к такому же результату. Из третьего соотношения получаем

$$m_v = \sqrt{\left(\frac{1}{2}m_o\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m_o\right)^2} = \frac{m_o}{\sqrt{2}} = 0,5'.$$

Результаты вычислений показывают, что для одной и той же величины (угла наклона) получены различные значения СКП, чего не может быть. Такое несоответствие связано с тем, что по первым двум формулам расчет СКП *вести нельзя, так как нарушается условие независимости аргументов*. В данном случае сама величина  $M_0$  является функцией отсчетов при двух положениях вертикального круга. Следовательно, только последний результат может

быть признан правильным, и  $m_v = m_{M_0} = \frac{m_o}{\sqrt{2}} = 0,5'$ .

#### Пример 12.4

Вычислить приращения координат и их СКП по линии длиной 250,17 м, имеющей дирекционный угол  $\alpha = 63^\circ 27'$ , если  $m_s = 0,08$  м и  $m_\alpha = 2'$ .

*Решение*

Известно, что приращения координат рассчитывают по формулам  $\Delta X = S \cos \alpha$  и  $\Delta Y = S \sin \alpha$ , и для данного случая это дает результаты  $\Delta X = 111,83$  м и  $\Delta Y = 223,79$  м. СКП приращений координат могут быть получены из соотношений:

$$m_{\Delta X} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S} m_S\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha} m_\alpha\right)^2};$$
$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S} m_S\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha} m_\alpha\right)^2},$$

где  $\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S}$ ;  $\frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha}$ ;  $\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S}$ ;  $\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha}$  — частные производные  $\Delta X$  и  $\Delta Y$ , соответственно, по аргументам  $S$  и  $\alpha$ .

Но

$$\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha} = -S \sin \alpha = -\Delta Y;$$
$$\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S} = \sin \alpha; \quad \frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha} = S \cos \alpha = \Delta X.$$

Тогда

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(m_S \cos \alpha)^2 + (-\Delta Y \cdot m_\alpha)^2};$$
$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(m_S \sin \alpha)^2 + (\Delta X \cdot m_\alpha)^2}.$$

При вычислениях величина  $m_\alpha$  должна быть представлена в радианной мере, но в условии задачи она задается в градусной мере. С учетом этого предыдущие формулы примут вид

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(m_S \cos \alpha)^2 + \left(-\Delta Y \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2};$$
$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(m_S \sin \alpha)^2 + \left(\Delta X \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2}.$$

Подставив соответствующие значения величин, получаем

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(0,08 \cdot 0,454)^2 + \left(\frac{2 \cdot 224}{3440}\right)^2} = 0,14 \text{ м};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(0,08 \cdot 0,891)^2 + \left(\frac{2 \cdot 112}{3440}\right)^2} = 0,08 \text{ м}.$$

Окончательно

$$\Delta X = 111,83 \text{ м}; \quad m_{\Delta X} = 0,14 \text{ м};$$

$$\Delta Y = 223,79 \text{ м}; \quad m_{\Delta Y} = 0,08 \text{ м}.$$

## 12.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить предельную погрешность в сумме углов полигона, имеющего 12 вершин, если известно, что СКП измерения каждого угла равна  $m_{\beta} = 0,5'$ .

2. При проложении теодолитного хода по границам землепользования предполагается измерить 25 углов. Каких предельных размеров может достичь угловая невязка в этом ходе, если СКП измерения одного угла равна  $m_{\beta} = 0,5'$ ?

3. СКП измерения угла одним полным приемом равна  $m_{\beta} = 0,5'$ . Каких размеров может достигнуть разность результатов двукратного измерения угла с такой точностью? Какова СКП среднего этих результатов измерений?

4. Полигонометрический ход имеет 16 сторон. Дирекционный угол исходной стороны определен с СКП  $m_{\alpha} = 10''$ , а углы в ходе измерялись с СКП  $m_{\beta} = 15''$ . Найти СКП дирекционного угла последней линии хода.

5. Вычислить предельное значение разности превышений, полученных в прямом и в обратном направлениях по ходу геометрического нивелирования длиной 5 км, если СКП определения на станции равна 1 мм и если на каждый километр хода приходится 5 станций.

6. Коэффициент случайного влияния при линейных измерениях равен 0,004. Каких размеров может достичь разность двойного измерения линии длиной 225 м?

7. Коэффициент случайного влияния при линейных измерениях равен 0,004. С какой точностью будет получен средний результат четырехкратного измерения линии длиной 225 м?

8. Два угла в треугольнике предполагается измерить равноточно. С какой СКП их следует измерить, чтобы третий угол треугольника, полученный из вычислений, имел предельную погрешность 4'?

9. Между точками  $A$  и  $B$ , расположенными друг от друга на расстоянии 10 км, проложены прямой и обратный нивелирные ходы. При этом СКП измерения превышения по ходу в 1 км в прямом и в обратном ходах одна и та же и равна 8 мм. Вычислить, каких размеров может достичь разность измеренных превышений, а также СКП среднеарифметического этих превышений.

10. Радиус окружности определен графически с СКП  $m_R = 0,01$  см. Длина его оказалась равной 10 см. Найти СКП длины окружности и площади круга, вычисленных по этому радиусу.

11. Вывести формулу СКП площади треугольника с основанием  $a$  и высотой  $h$ , если их СКП соответственно равны  $m_a$  и  $m_h$ .

12. По проекту был вынесен в натуру прямоугольный участок со сторонами 225 и 400 м. Чему равна предельная погрешность площади этого участка, обусловленная погрешностями отложения в натуре мерной лентой сторон поля, если коэффициент случайного влияния при линейных измерениях  $\mu_s = 0,005$ ?

13. По плану масштаба 1:5000 измерены две стороны прямоугольного участка. Измерения выполнялись линейкой с миллиметровыми делениями. Найти площадь этого участка и его СКП, если его стороны равны 10,45 и 19,85 см, СКП совмещения нулевого штриха линейки с одним концом стороны поля равна 0,3 мм, а СКП отсчета по линейке другого конца стороны — 0,5 мм. Ответ выразить в гектарах.

14. Найти СКП сближения меридианов, вычисляемого по формуле  $\gamma = \Delta\lambda \cdot \sin \varphi$ , если широта пункта  $\varphi = 55^\circ 41' 45''$  определена с СКП  $m_\varphi = 5''$ , а разность долгот осевого меридиана и меридиана данного пункта  $\Delta\lambda = 2^\circ 03'$  определена с СКП  $m_{\Delta\lambda} = 1''$ .

15. Найти СКП площади треугольника со сторонами 206,52 и 186,47 м, если коэффициент случайного влияния в линейных измерениях оказался равным  $\mu_s = 0,005$ , а угол между сторонами, равный  $45^\circ 21'$ , измерен с СКП  $m_\beta = 0,5'$ .

16. Вычислить угол наклона местности и его СКП, если превышение равно  $h = 25,00$  м, горизонтальное проложение  $S = 750$  м, а их СКП соответственно равны  $m_h = 0,05$  м и  $m_S = 0,5$  м.

17. Найти СКП вычисления синуса и тангенса угла  $\beta = 63^\circ 17,6'$ , если СКП его измерения равна  $m_\beta = 0,5'$ .

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Где при доказательстве Теорем 1 и 2 используют условие независимости результатов измерений?

2. Как накапливаются систематические погрешности при передаче дирекционных углов?

3. Как накапливаются случайные погрешности при передаче дирекционных углов?

4. Измерены две величины, затем вычислены их сумма и разность. Как соотносятся их СКП?

5. Что общего в законе накапливания случайных погрешностей при передаче дирекционного угла и передаче высот методом геометрического нивелирования?

6. Как ведут себя случайные и систематические погрешности при вычислении среднеарифметического ряда равноточных измерений одной величины?

7. Линия хода измеряется мерной лентой. Как накапливаются систематические и случайные погрешности при таком измерении?

8. Два результата измерений одной величины содержат одинаковые систематические погрешности и характеризуются одним и тем же СКО. Чему будут равны систематическая погрешность и СКО разности этих результатов измерений?

9. Что такое «коэффициент случайного влияния» в геометрическом нивелировании?

10. Что такое «коэффициент случайного влияния» в линейных измерениях?

11. Почему в тригонометрическом нивелировании ограничивают колебания места нуля?

12. Если суммируют равноточные слагаемые, то как накапливаются в этом случае систематические и случайные погрешности?

## 13. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 13.1. Определение веса результата измерения

*Вес является характеристикой относительной точности результата измерения и рассчитывается как величина, обратно пропорциональная квадрату СКО (дисперсии) результата измерения.*

Пусть имеем ряд измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , каждое из которых характеризуется, соответственно, дисперсией  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ . Тогда вес  $i$ -го результата измерения может быть рассчитан по формуле

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}. \quad (13.1)$$

Поскольку вес — относительная характеристика точности, понятие веса неприменимо к одному отдельно взятому измерению. Можно приписать любой вес результату единичного измерения, но этот факт еще ни о чем не свидетельствует. Вес показывает, во сколько раз разброс одного измерения больше или меньше другого. Но здесь необходимо помнить, что под разбросом одного измерения следует понимать разброс серии измерений, выполняемых в одинаковых условиях. Тогда чем больше вес одного результата измерения, тем точнее это измерение по сравнению с другими.

Выбирая различные значения  $k$  в (13.1), тем самым увеличиваем (уменьшаем) в одно и то же число раз веса всех результатов измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , но при этом *остается неизменным соотношение весов* отдельных результатов измерений.

Можно вывести следующие соотношения:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2} \Rightarrow k = p_i \cdot \sigma_i^2; \quad p_j = \frac{k}{\sigma_j^2} \Rightarrow k = p_j \cdot \sigma_j^2. \quad (13.2)$$

Из последних равенств следует, что

$$p_i \cdot \sigma_i^2 = p_j \cdot \sigma_j^2. \quad (13.3)$$

Равенство (13.3) позволяет выполнить расчет любой неизвестной четвертой величины, например:

$$p_i = p_j \cdot \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}; \quad \sigma_i = \sigma_j \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}. \quad (13.4)$$

Выберем  $k$  так, чтобы вес одного из измерений  $p_j = 1$ . Тогда на основании формулы (13.3) получаем

$$k = 1 \cdot \sigma_j^2 = \sigma_j^2.$$

Дисперсию величины, обладающей единичным весом, обычно обозначают  $\sigma_0^2$ . Тогда  $k = \sigma_j^2 = \sigma_0^2$ , и верно соотношение

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}. \quad (13.5)$$

В геодезической практике величину  $\sigma_0$  называют «СКО единицы веса», понимая под этим «среднеквадратическое отклонение величины, вес которой равен единице».

Как следует из формулы (13.5), *выбор величины  $k$  определяет выбор величины с единичным весом.*

Оценку СКО единицы веса обычно обозначают  $\mu$  и называют «СКП единицы веса».

Обычно в практике СКО остаются неизвестными, и тогда для расчета весов используют их оценки, т.е. СКП. В этом случае формула (13.1) принимает вид

$$p_i = \frac{k}{m_i^2} = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}. \quad (13.6)$$

### Пример 13.1

Пусть имеются две величины, характеризуемые СКО  $\sigma_1 = 30''$  и  $\sigma_2 = 1''$ . Рассчитать веса измерений.

*Решение*

Примем для расчета весов  $k = 400$ . Тогда веса заданных величин будут

$$p_1 = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}; \quad p_2 = \frac{400}{1} = 400,$$

а в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает угол, точность измерения которого характеризуется СКО, равным  $20''$ , что вытекает из следующих соображений:  $k = \sigma_0^2 \Rightarrow \sigma_0 = \sqrt{k} = 20''$ .

## 13.2. Оценка относительной точности функций результатов измерений

Иногда в практике геодезических работ возникает необходимость рассчитать вес функции результатов измерений. Решение поставленной задачи может быть проведено на основании следующих двух теорем.

### Теорема 3

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — результаты независимых измерений, полученные с весами, соответственно равными  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Тогда линейная функция этих результатов измерений  $y = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n$ , где все  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — теоретические постоянные, имеющие обратный вес, вычисляемый по формуле

$$\frac{1}{p_y} = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \dots + \frac{C_n^2}{p_n}. \quad (13.7)$$

### Доказательство

На основании Теоремы 1 для заданной функции  $y = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n$  можно записать выражение дисперсии

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2. \quad (a)$$

Из определения веса следует, что

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \text{ или } \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i}. \quad (б)$$

Подставив выражение (б) в (а), получаем

$$\frac{k}{p_y} = \frac{kC_1^2}{p_1} + \frac{kC_2^2}{p_2} + \dots + \frac{kC_n^2}{p_n}. \quad (в)$$

Сократив на величину  $k$  обе части равенства (в), получаем искомого равенство (13.7), что и доказывает Теорему 3.

### Теорема 4

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — результаты независимых измерений, полученные с весами, соответственно, равными  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Тогда дифференцируемая функция этих результатов измерений  $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  имеет обратный вес, вычисляемый по формуле

$$p_y^{-1} = \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \right)^2 p_1^{-1} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \right)^2 p_n^{-1}. \quad (13.8)$$

*Доказательство*

На основании Теоремы 2 для заданной функции  $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  можно записать выражение дисперсии

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \right)^2 \sigma_n^2. \quad (a)$$

Из определения веса следует, что

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \text{ или } \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i} = k \cdot p_i^{-1}. \quad (б)$$

Подставив выражение (б) в (а), получаем

$$k \cdot p_y^{-1} = k \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \right)^2 \cdot p_1^{-1} + \dots + k \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \right)^2 \cdot p_n^{-1}. \quad (в)$$

Сократив на величину  $k$  обе части равенства (в), получаем искомое равенство (13.8), что и доказывает Теорему 4.

### 13.3. Расчет весов в основных геодезических действиях

**Угломерные работы.** Рассмотрим процесс передачи дирекционного угла на  $n$ -ю линию хода. Пусть равноточно измерены правые углы  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  в теодолитном ходе. Необходимо вычислить вес  $n$ -й линии хода при условии, что дирекционный угол  $\alpha_{AB}$  исходной линии  $AB$  получен с погрешностями, пренебрежимо малыми по сравнению с погрешностями измерения углов хода.

Условие равноточности измерения углов хода позволяет приписать всем измеренным значениям углов один и тот же вес, в частности, равный единице, т.е.  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p_\beta = 1$ .

Дирекционный угол последней линии теодолитного хода вычисляем по известной формуле

$$\alpha_n = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n. \quad (13.9)$$

Тогда на основании Теоремы 3 записываем выражение обратного веса дирекционного угла последней линии хода. Необходимо

учесть, что слагаемое  $\alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n$  в предыдущей формуле есть безошибочная величина с нулевой дисперсией и, следовательно, с нулевым обратным весом. На основании этого имеем

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} + \dots + \frac{(-1)^2}{1} = n.$$

Тогда

$$p_{\alpha_n} = \frac{1}{n} \text{ при } p_\beta = 1. \quad (13.10)$$

Воспользовавшись соответствующим свойством весов, умножим в равенствах (13.9) все веса на одно и то же число  $k > 0$  и получим

$$p_{\alpha_n} = \frac{k}{n} \text{ при } p_\beta = k. \quad (13.11)$$

*В этом случае в качестве величины, обладающей единичным весом, будет выступать дирекционный угол, полученный по ходу в  $k$  поворотных точек, в чем легко убедиться, если в формуле (13.11) вместо  $n$  подставить  $k$ .*

Таким образом, получаем, что *выбор коэффициента  $k$  определяет выбор величины, вес которой равен единице.*

Следует отметить, что полученные выводы не меняются, если в ходе измеряются левые углы. В этом случае происходит смена знака в коэффициентах  $C_i$  в формуле обратного веса, но окончательный результат не меняется, поскольку при вычислении обратного веса функции все  $C_i$  возводятся в квадрат. Аналогично можно рассчитать вес суммы углов замкнутого многоугольника и вес угловой невязки в сумме углов теодолитного хода:

$$\sum \beta_{\text{пр}} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n; \quad (13.12)$$

$$f_\beta = \sum \beta_{\text{пр}} - \sum \beta_{\text{теор}} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - \sum \beta_{\text{теор}}.$$

Последние выражения отличаются от функции (13.9) только на постоянные слагаемые, которые не влияют на вычисление весов.

Проделав те же вычисления, что и для функции (13.9), получаем выражения для веса суммы углов и угловой невязки в той же форме:

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum\beta} = p_{f_\beta} = \frac{1}{n} \text{ при } p_\beta = 1, \quad (13.13)$$

или

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum\beta} = p_{f_\beta} = \frac{k}{n} \text{ при } p_\beta = k. \quad (13.14)$$

**Линейные измерения.** Пусть на местности мерной лентой измерено  $n$  линий и получены результаты  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Необходимо вычислить веса результатов измерений этих линий при условии, что все измерения выполнялись с одним и тем же коэффициентом случайного влияния  $\mu_s = \mu$ .

Дисперсии измерений этих линий на основании формулы (12.19) будут, соответственно, равны  $\sigma_1^2 = \mu^2 \cdot S_1, \sigma_2^2 = \mu^2 \cdot S_2, \dots, \sigma_n^2 = \mu^2 \cdot S_n$ . Если принять в качестве дисперсии единичного веса величину  $\sigma_0^2 = C \cdot \mu^2$ , то веса измеренных значений линий будут соответственно равны

$$p_1 = \frac{C}{S_1}; p_2 = \frac{C}{S_2}, \dots, p_n = \frac{C}{S_n}, \quad (13.15)$$

т.е. *вес измеренного мерной лентой значения линии будет обратно пропорционален длине этой линии.* При этом в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает результат измерения линии длиной  $C$  метров, в чем легко убедиться, подставив соответствующее значение длины линии в формулу веса линии.

Этот вывод может быть распространен на результаты измерения линий проволоками или рулетками. Однако указанная методика расчета весов измеренных значений длин линий не может быть использована при радио- и светодальномерных измерениях.

*Примечание.* Вычисление весов измеренных значений линий как величин, обратно пропорциональных их длине, возможно только при условии, что значения измерений всех линий получены по одной и той же методике, т.е. при одном и том же значении  $\mu_s$ .

**Расчет весов в геометрическом нивелировании на пересеченной местности.** По нескольким ходам геометрического нивелирования получены превышения  $h_1, h_2, \dots, h_N$ , причем число станций в каждом из ходов оказалось равным  $n_1, n_2, \dots, n_N$ . Необходимо

рассчитать веса этих превышений при условии, что превышения на всех станциях измерялись равномерно.

Пусть  $m_{\text{ст}}^2$  — дисперсия измерения превышения на станции. Дисперсию единичного веса представим в виде  $\mu_0^2 = C \cdot m_{\text{ст}}^2$ , где  $C > 0$  — произвольная постоянная величина. Дисперсии превышений по ходам на основании формулы (12.7) можно представить в виде

$$m_i^2 = m_{\text{ст}}^2 \cdot n_i \quad (i = 1 \dots N).$$

Тогда веса превышений по ходам на основании (13.6) могут быть рассчитаны из соотношений

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot m_{\text{ст}}^2}{m_{\text{ст}}^2 \cdot n_i} = \frac{C}{n_i}. \quad (13.16)$$

Из предыдущего следует, что *вес превышения по ходу геометрического нивелирования в пересеченной местности определяется как величина, обратно пропорциональная числу станций.* При этом в качестве величины, обладающей единичным весом, *выступает превышение, полученное по ходу в C станций.* Как и во всех предыдущих случаях, выбор коэффициента пропорциональности определяет величину с единичным весом.

**Расчет весов в геометрическом нивелировании на равнинной местности.** Пусть по нескольким ходам геометрического нивелирования, проложенным в равнинной местности, получены превышения  $h_1, h_2, \dots, h_N$ . Длины ходов соответственно равны  $L_1, L_2, \dots, L_n$  км. Полагаем, что во всех ходах нивелирование производилось в одинаковых условиях, т.е. с одинаковыми СКП нивелирования на 1 км хода  $\mu_{h_{\text{км}}}$ . Тогда дисперсию единичного веса можно представить в виде  $\mu_0^2 = C \cdot \mu_{h_{\text{км}}}^2$ , где  $C > 0$  — произвольная постоянная величина. Дисперсии превышений по ходам можно представить в виде

$$m_i^2 = \mu_{h_{\text{км}}}^2 \cdot L_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

а тогда веса превышений по ходам могут быть получены из соотношений

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot \mu_{h_{\text{км}}}^2}{\mu_{h_{\text{км}}}^2 \cdot L_i} = \frac{C}{L_i}. \quad (13.17)$$

Из предыдущего следует, что *вес превышения по ходу геометрического нивелирования в равнинной местности определяется как величина, обратно пропорциональная длине хода*. При этом в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает превышение, полученное по ходу длиной в  $S$  километров. Как и во всех предыдущих случаях, выбор коэффициента пропорциональности определяет величину с единичным весом.

### 13.4. Примеры решения типовых задач

#### Пример 13.1

Результатам измерения углов соответствуют СКО  $0,5'$ ;  $0,7'$ ;  $1,0'$ . Вычислить их веса, если известно, что среднеквадратическое отклонение единицы веса равно  $1,5'$ .

*Решение*

Известно, что  $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ , где  $\sigma_0$  — СКО единицы веса, а  $\sigma_i$  — СКО

$i$ -го результата измерения. Тогда

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} = \frac{2,25}{0,25} = 9; \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} = \frac{2,25}{0,49} = 4,5; \quad p_3 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_3^2} = \frac{2,25}{1,00} = 2,25.$$

#### Пример 13.2

Вычислить веса превышений по ходам геометрического нивелирования соответственно длиной 10, 20, 30 км.

*Решение*

Веса в геометрическом нивелировании рассчитывают по формуле  $p_i = \frac{k}{L_i}$ , где  $L_i$  — длина  $i$ -го хода. Примем  $k = 15$ , тогда получим:

$$p_1 = \frac{15}{10} = 1,5; \quad p_2 = \frac{15}{20} = 0,75; \quad p_3 = \frac{15}{30} = 0,5.$$

При этом в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает превышение по ходу длиной в  $k = 15$  км.

### Пример 13.3

С плана графически взяты прямоугольные координаты  $x_1, y_1$  начала и  $x_2, y_2$  конца некоторого отрезка, после чего была вычислена его длина  $S$ . Принимая, что все четыре координаты были получены равноточно, вычислить вес длины этого отрезка. Сравнить полученное значение веса с весом значения непосредственного измерения линии по карте, если такое измерение выполняется с той же точностью, что и измерение любой из координат конца отрезка.

*Решение*

Длина отрезка определяется соотношением

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Учитывая, что все четыре координаты получены равноточно, им можно приписать одинаковый вес, т.е. записать, что  $p_{x_1} = p_{x_2} = p_{y_1} = p_{y_2} = 1$ .

Величина  $S$  является нелинейной функцией координат, и для решения поставленной задачи необходимо вычислить частные производные  $S$  по всем координатам. Они имеют вид

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{s}.$$

Подставляя значения частных производных в формулу (13.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_s} &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} = \\ &= 2 \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{s^2} = 2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $p_s = \frac{1}{2}$ .

Если принять, что измерение отрезка по карте выполняется с той же точностью, что и измерение любой координаты, то приходим к выводу, что получение длины  $S$  непосредственно с плана будет иметь вес, равный единице, т.е. в два раза больший, чем ее косвенное вычисление через измеренные координаты.

### 13.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Веса результатов измерений горизонтальных углов соответственно равны 0,5; 1,0; 1,5; 2,0. Вычислить их среднеквадратические отклонения, если известно, что СКО единицы веса равно 10".

2. Приняв веса результатов измерений каждого из 10 углов теодолитного хода равными 2, вычислить вес суммы всех углов.

3. Найти вес невязки в сумме углов треугольника, если все углы измерены равноточно.

4. Чему равен вес угла, измеренного тремя приемами, если вес угла, измеренного одним приемом, равен единице?

5. Два угла треугольника измерены равноточно, а третий получен из вычислений. Найти вес третьего угла.

6. В треугольнике один угол получен из 6 приемов, второй — из 18, а третий получен из вычислений. Найти вес третьего угла, если вес измеренного одним приемом угла принят за единицу.

7. Подсчитать вес высоты репера, полученного по ходу геометрического нивелирования длиной 16 км, если вес превышения, полученного по ходу в 1 км, принят за единицу.

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Что такое вес результата измерения?

2. Имеет ли смысл назначать вес единичному результату измерения? Если да, то почему? Если нет, то тоже почему?

3. Почему при расчете весов коэффициент пропорциональности должен быть больше нуля?

4. Могут ли веса принимать отрицательные значения?

5. Даны два однородных измерения с разными весами. Что можно сказать об их точности?

6. Что понимают под выражением «СКО единичного веса»?

7. По какой формуле можно рассчитать вес результата измерения, если заданы СКП результата измерения и СКП единичного веса?

8. Какие ограничения на результаты измерений и почему введены в формулировку Теорем 3 и 4?

9. Как изменяются веса при передаче дирекционных углов?
10. Чему равен вес суммы равноточных слагаемых?
11. Дан ряд измерений со своими весами. Вычислена дифференцируемая функция этих результатов измерений. Как рассчитать вес этой функции?
12. Как рассчитать веса превышений, полученных в ходах геометрического нивелирования, прокладываемых в пересеченной и в равнинной местности?
13. Что больше — вес суммы или вес разности двух результатов измерений?

## **14. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ**

### **14.1. Уравнивание ряда результатов измерений одной и той же величины**

Пусть имеется ряд  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  *независимых* измерений одной и той же физической величины  $L$ , истинное значение которой неизвестно. Все измерения велись в различных условиях, и результаты измерений, соответственно, характеризуются весами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . На основании этих данных необходимо решить две задачи:

*Задача уравнивания.* Уравнивание есть процесс нахождения наилучшего в каком-либо смысле приближения к истинному значению.

*Задача апостериорной оценки точности.* Апостериорная (*a'posterio* — от лат. *после опыта*) оценка точности — это оценка точности по результатам измерений. В случае математической обработки ряда измерений одной и той же физической величины апостериорная оценка точности предполагает вычисление характеристик точности полевых измерений и характеристику точности уравненного значения измеряемой величины.

Принципы, рассмотренные в разделе II «Справочные сведения из математической статистики», определяют наилучшее приближение к истинному значению как величину, обладающую следующими тремя свойствами:

1. Свойство состоятельности.
2. Свойство несмещенности.
3. Свойство эффективности.

Для решения поставленной задачи требуется построить такую функцию результатов измерений  $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , которая обладала бы всеми указанными свойствами. В случае неравноточных измерений такими свойствами обладает общая арифметическая середина (средневзвешенное)

$$\bar{\lambda} = \frac{[p\lambda]}{[p]} = \frac{p_1\lambda_1}{[p]} + \frac{p_2\lambda_2}{[p]} + \dots + \frac{p_n\lambda_n}{[p]}. \quad (14.1)$$

Докажем, что средневзвешенное обладает всеми свойствами наилучших оценок.

*1. Свойство состоятельности*

Здесь необходимо доказать, что при:

- отсутствии систематических ошибок в результатах измерений;
- ограниченных в совокупности дисперсиях всех результатов измерений  $D(\lambda_i) = \sigma_i^2 \leq C^2$

с увеличением объема выборки (увеличением числа измерений заданной физической величины) средневзвешенное по вероятности сходится к истинному значению этой физической величины, т.е. имеет место равенство  $\bar{\lambda} \Rightarrow L$ .

*Доказательство*

Для доказательства применим неравенство Чебышева к случайной величине  $\bar{\lambda} - L$ . Для этого необходимо вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\bar{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} M(\bar{\lambda}) &= M\left(\frac{[p\lambda]}{[p]}\right) = M\left(\frac{p_1}{[p]}\lambda_1 + \frac{p_2}{[p]}\lambda_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]}\lambda_n\right) = M\left(\frac{p_1}{[p]}\lambda_1\right) + \\ &+ M\left(\frac{p_2}{[p]}\lambda_2\right) + \dots + M\left(\frac{p_n}{[p]}\lambda_n\right) = \frac{p_1}{[p]}M(\lambda_1) + \frac{p_2}{[p]}M(\lambda_2) + \dots + \\ &+ \frac{p_n}{[p]}M(\lambda_n) = \frac{p_1}{[p]}L + \frac{p_2}{[p]}L + \dots + \frac{p_n}{[p]}L = L; \\ M(\bar{\lambda}) &= L. \end{aligned} \quad (14.2)$$

*Математическое ожидание общей арифметической середины результатов измерений при отсутствии систематических погрешностей в последних равно истинному значению измеряемой величины.*

Из этого положения вытекает следующее:

*Математическое ожидание общей арифметической середины случайных погрешностей результатов неравноточных измерений равно нулю.*

$$\begin{aligned} M(\bar{\lambda}) - L &= M\left(\frac{[p\lambda]}{[p]}\right) - L = \\ &= M\left(\frac{[p(L + \Delta)]}{[p]}\right) - L = M\left(\frac{[p\Delta]}{[p]}\right) + L - L = 0, \quad (14.3) \end{aligned}$$

т.е.

$$M\left(\frac{[p\Delta]}{[p]}\right) = M(\bar{\Delta}) = 0.$$

Это положение является обобщением аксиомы 2 (аксиомы компенсации) на случай неравноточных измерений.

Для вычисления дисперсии величины  $\bar{\lambda}$  предварительно вычислим ее вес, полагая, что веса всех результатов измерений вы-

числялись по формуле  $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ , где  $\sigma_0^2$  — дисперсия единичного веса.

На основании Теоремы 3 имеем

$$\frac{1}{p_{\bar{\lambda}}} = \frac{\left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \dots + \frac{\left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2}{p_n} = \frac{p_1}{[p]^2} + \frac{p_2}{[p]^2} + \dots + \frac{p_n}{[p]^2} = \frac{1}{[p]}.$$

Тогда

$$p_{\bar{\lambda}} = [p]. \quad (14.4)$$

*Вес общей арифметической середины (средневзвешенного) равен сумме весов отдельных результатов измерений.*

Тогда дисперсия общей арифметической середины может быть найдена из соотношения

$$\sigma_{\bar{\lambda}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{[p]}. \quad (14.5)$$

Следует отметить, что  $[p] \rightarrow \infty$  при увеличении числа измерений ( $n \rightarrow \infty$ ), так как дисперсии всех результатов измерений по условию ограничены и, следовательно, веса всех результатов измерений строго больше нуля ( $p_i > 0$ ).

Применим неравенство Чебышева к выражению  $\bar{\lambda} - L$ :

$$P\{|\bar{\lambda} - L| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\bar{\lambda} - L)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_0^2}{[p]\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Следовательно  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{\lambda} - L| \geq \varepsilon\} = 0$ . Таким образом, действительно  $\bar{\lambda} \Rightarrow L$ , что и требовалось доказать. На основании последнего можно доказать, что

$$\bar{\Delta} = \frac{[p\Delta]}{[p]} \Rightarrow 0. \quad (14.6)$$

Это следует из того, что  $\bar{\lambda}$  можно представить в виде

$$\bar{\lambda} = L + \bar{\Delta} = L + \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

## 2. Свойство несмещенности

В соответствии с принципами математической статистики свойство несмещенности выражается равенством  $M(\bar{\lambda}) = L$ . Это значит, что при условии отсутствия систематических погрешностей в результатах измерений средневзвешенное также будет свободно от систематических ошибок, что и было доказано при доказательстве свойства состоятельности.

Следует отметить, что свойству состоятельности и несмещенности отвечает целый класс функций вида

$$y = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n \quad (a)$$

при условии

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1. \quad (б)$$

Это положение известно в специальной литературе как теорема Гаусса — Маркова.

### 3. Свойство эффективности

Из всех функций вида (а), отвечающих условию (б), общая арифметическая середина обладает максимальным весом.

#### Доказательство

Как известно из предыдущего, вес общей арифметической середины равен сумме весов усредняемых результатов измерений, т.е. верно равенство  $p_{\bar{\lambda}} = [p]$ .

Вычислим вес любой другой функции вида (а), представив ее в форме  $y = \frac{p_1 + \omega_1}{[p]} \lambda_1 + \frac{p_2 + \omega_2}{[p]} \lambda_2 + \dots + \frac{p_n + \omega_n}{[p]} \lambda_n$ . Для выполнения условия (б) необходимо, чтобы выполнялось равенство  $[\omega] = 0$ . Тогда обратный вес функции  $y$  на основании Теоремы 3 может быть представлен в виде

$$\frac{1}{p_y} = \frac{\left(\frac{p_1 + \omega_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2 + \omega_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \dots + \frac{\left(\frac{p_n + \omega_n}{[p]}\right)^2}{p_n}.$$

Преобразуем каждое из  $n$  слагаемых предыдущего выражения:

$$\frac{\left(\frac{p_i + \omega_i}{[p]}\right)^2}{p_i} = \frac{p_i^2 + 2p_i\omega_i + \omega_i^2}{p_i[p]} = \frac{p_i + 2\omega_i + \frac{\omega_i^2}{p_i}}{[p]}.$$

Проведя суммирование, получим

$$\frac{1}{p_y} = \frac{[p] + 2[\omega] + \left[\frac{\omega^2}{p}\right]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]} + 2\frac{[\omega]}{[p]^2} + \left[\frac{\omega^2}{p}\right].$$

Первое слагаемое представляет собой обратный вес средневзвешенного, второе слагаемое по условию равно нулю, а третье — при любых  $\omega$  больше нуля, т.е. последнее равенство можно

представить в виде  $\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_{\bar{\lambda}}} + C$ , где  $C > 0$ . Из последнего следует,

что при любых  $\omega$ , отвечающих условию  $[\omega] = 0, p_y < p_{\bar{\lambda}}$ , что и требовалось доказать.

Уравненное значение  $\bar{\lambda}$  порождает систему поправок  $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , вычисляемых по формуле

$$V_i = \bar{\lambda} - \lambda_i. \quad (14.7)$$

В некоторых литературных источниках эти поправки называют вероятнейшими. Относительно указанных поправок можно сформулировать два свойства:

1. Система поправок обладает свойством  $[pV] = 0$ .

*Доказательство*

$$[pV] = [p(\bar{\lambda} - \lambda)] = \bar{\lambda}[p] - [p\lambda].$$

$$\text{Но } \bar{\lambda} = \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

$$\text{Тогда имеем } [pV] = \frac{[p\lambda]}{[p]}[p] - [p\lambda] = [p\lambda] - [p\lambda] = 0, \text{ или } [pV] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Иногда приходится пользоваться не величиной  $\bar{\lambda}$ , а ее округленным значением  $\bar{\lambda}_{\text{np}}$ , отличающимся от расчетного на величину  $\omega = \bar{\lambda}_{\text{np}} - \bar{\lambda}$ . Приближенное значение  $\bar{\lambda}_{\text{np}}$  порождает систему поправок  $V'_i$ , для которых будет выполняться равенство  $[pV'] = \omega[p]$ . Покажем это:

$$V'_i = \bar{\lambda}_{\text{np}} - \lambda_i \quad (i = 1 \dots n).$$

Умножим последние равенства на соответствующие веса и сложим. При этом получим

$$p[V'] = \bar{\lambda}_{\text{np}}[p] - [p\lambda] = \bar{\lambda}_{\text{np}}[p] - \bar{\lambda}[p] = \omega[p],$$

что и требовалось доказать.

2. Система поправок обладает свойством  $[pV^2] = \min$ .

*Доказательство*

Рассмотрим произвольную функцию результатов измерений  $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , которая порождает систему поправок  $V'_i = y - \lambda_i$ ,

или  $V'_i = y - \bar{\lambda} + V_i$ . Возведем последние равенства в квадрат, умножим на соответствующие веса и сложим. В результате получим

$$[pV''^2] = (y - L)^2 [p] + 2(y - L)[pV] + [pV^2].$$

Но

$$[pV] = 0, \text{ а } (y - L)^2 [p] > 0 \text{ и } [pV''^2] = [pV^2] + (y - L)^2 [p],$$

откуда следует

$$[pV''^2] > [pV^2],$$

что и требовалось доказать.

## 14.2. Уравнивание ряда равноточных измерений одной и той же величины

Пусть имеется ряд равноточных измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  одной и той же физической величины  $L$ , истинное значение которой неизвестно. Требуется провести математическую обработку этого ряда результатов измерений.

В указанном случае можно воспользоваться результатами рассуждений в 14.1, приняв данный ряд как частный случай предыдущего при условии, что все веса измерений одинаковые. Им всем можно придать любые, но одинаковые, значения. Наиболее целесообразно придать всем весам ряда измерений значение, равное единице. Тогда в качестве наилучшего приближения следует, как и

ранее, рассматривать величину  $\bar{\lambda} = \frac{[p\lambda]}{[p]}$ . При условии, что все  $p_i = 1$ ,  $[p\lambda] = [\lambda]$ , а  $[p] = n$ . И окончательно  $\bar{\lambda} = \frac{[\lambda]}{n}$ , т.е. *среднеариф-*

*метическое (простая арифметическая середина)* является наилучшим приближением к истинному значению многократно равноточно измеренной величины. Как частный случай общей арифметической середины среднеарифметическое обладает всеми свойствами наилучшей оценки, т.е. является:

- 1) состоятельной;
- 2) несмещенной;

3) эффективной оценкой истинного значения измеряемой величины (доказательства приведены в п. 6.3). Кроме трех основных свойств, среднеарифметическое имеет и два дополнительных свойства;

4)  $[V] = 0$ . Для приближенного значения  $\bar{\lambda}_{\text{пр}}$ , порождающего систему поправок  $V'_i$ , будет верно равенство  $[V'] = \omega \cdot n$ , где  $\omega = \bar{\lambda}_{\text{пр}} - \bar{\lambda}$ ;

5)  $[V^2] = \min$ .

Ранее получено, что вес общей арифметической середины равен сумме весов. При условии равенства весов всех результатов измерений единице *вес среднего арифметического равен числу усредняемых результатов измерений*, т.е. верно равенство  $p_{\bar{x}} = n$ .

### 14.3. Апостериорная оценка точности при обработке рядов измерений одной и той же величины

Основной задачей здесь является нахождение наилучшей оценки дисперсии единичного веса. Предварительно необходимо доказать несколько вспомогательных положений, которые оформим в виде лемм.

**Лемма 1.** Пусть имеется ряд случайных погрешностей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  результатов измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  с весами, соответственно равными  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Если каждую погрешность умножить на корень из своего веса, то все элементы вновь полученного ряда

$$\Delta'_1 = \sqrt{p_1} \Delta_1, \Delta'_2 = \sqrt{p_2} \Delta_2, \dots, \Delta'_n = \sqrt{p_n} \Delta_n$$

будут иметь единичные веса и, соответственно, одну и ту же дисперсию.

*Доказательство*

Рассматривая  $\Delta'_i = \sqrt{p_i} \Delta_i$  как линейную функцию  $\Delta_i$ , рассчитаем вес этой величины. Как было показано ранее, вес случайной погрешности результата измерения равен весу самого результата измерения. Тогда на основании Теоремы 3 можно записать

$$\frac{1}{P_{\Delta'_i}} = \frac{(\sqrt{P_i})^2}{P_i} = \frac{P_i}{P_i} = 1, \text{ что и требовалось доказать.}$$

**Лемма 2.** Пусть имеется ряд  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  измерений одной и той же физической величины  $L$ , истинное значение которой известно. Веса результатов измерений соответственно равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . При отсутствии систематических погрешностей в результатах измерений наилучшей оценкой дисперсии единичного

веса  $\sigma_0^2$  является величина  $\bar{\mu}^2 = \frac{[p\Delta^2]}{n}$ .

#### Доказательство

Истинная погрешность результата измерения определяется в соответствии с (11.1) по формуле  $\varepsilon_i = \lambda_i - L$ . Но по условию систематические погрешности отсутствуют, т.е.  $\theta_i = 0$ . Следовательно, случайная погрешность результата измерения будет определяться соотношением  $\Delta_i = \lambda_i - L$ . Вес погрешности результата измерения совпадает с весом самого результата измерения. Это вытекает из того, что истинное значение результата измерения безошибочно, имеет нулевую дисперсию, а следовательно, и нулевой обратный вес. В формулах это будет иметь вид:

$$\frac{1}{p_{\Delta_i}} = \frac{1}{p_{\lambda_i}} + \frac{1}{p_L}, \text{ но } \frac{1}{p_L} = 0, \text{ тогда } \frac{1}{p_{\Delta_i}} = \frac{1}{p_{\lambda_i}} = \frac{1}{p_i}.$$

По результатам измерений и истинному значению измеряемой величины получаем ряд случайных погрешностей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , которым соответствуют веса  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . От этого ряда погрешностей можно перейти к новому ряду, предварительно умножив каждую погрешность исходного ряда на корень квадратный из ее веса. На основании Леммы 1 вновь полученный ряд погрешностей  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$  имеет веса, равные единице. Новый ряд можно рассматривать как ряд отклонений элементов выборки из генеральной совокупности с известным математическим ожиданием от самого математического ожидания. По этим отклонениям может быть найдена наилучшая оценка дисперсии исследуемой генеральной совокупности по формуле

$$\bar{\mu}^2 = \frac{[(X - a)^2]}{n} = \frac{[(\Delta')^2]}{n}.$$

Учитывая, что  $\Delta'_i = \sqrt{p_i} \Delta_i$ , предыдущему выражению можно придать вид

$$\bar{\mu}^2 = \frac{[p\Delta^2]}{n}, \quad (14.8)$$

что и требовалось доказать.

Тогда наилучшая оценка дисперсии  $\bar{\mu}^2$  обладает следующими свойствами:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[p\Delta^2]}{n} = \sigma_0^2.$$

$$2. M(\bar{\mu}^2) = \sigma_0^2.$$

$$3. D(\bar{\mu}^2) = \min.$$

**Лемма 3.** Пусть имеется ряд  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  измерений одной и той же физической величины  $L$ , веса результатов измерений, соответственно, равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а дисперсия единичного веса равна  $\sigma_0^2$ . Тогда дисперсия общей арифметической середины этих

результатов измерений  $\sigma_{\bar{\lambda}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{[p]}$ .

*Доказательство*

Согласно соотношениям (13.5) имеем  $\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$ . Но вес общей

арифметической середины равен сумме весов усредняемых результатов измерений, т.е.  $p_{\bar{\lambda}} = [p]$ .

Тогда получаем  $\sigma_{\bar{\lambda}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{[p]}$ , что и требовалось доказать.

Теперь сформулируем основную теорему в п. 14.3:

### **Теорема 5**

Пусть имеется ряд  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  измерений одной и той же физической величины  $L$ , истинное значение которой неизвестно. Веса результатов измерений, соответственно, равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . При отсутствии систематических погрешностей наилучшей оценкой

дисперсии единичного веса  $\sigma_0^2$  является величина  $\mu^2 = \frac{[pV^2]}{n-1}$ .

### Доказательство

Известно, что  $\varepsilon_i = \lambda_i - L$ . При отсутствии систематических погрешностей ( $\theta_i = 0$ ) полная погрешность результата измерения совпадает со случайной погрешностью, т.е.  $\Delta_i = \lambda_i - L$ . К правой части последнего равенства прибавим и из нее вычтем общую арифметическую середину  $\Delta_i = (\lambda_i - \bar{\lambda}) - (L - \bar{\lambda})$ . Но первая скобка есть ни что иное как вероятнейшая поправка с противоположным знаком, а вторая — полная погрешность общей арифметической середины, т.е. верны соотношения  $-V_i = \lambda_i - \bar{\lambda}$  и  $\varepsilon_{\bar{\lambda}} = -(L - \bar{\lambda})$ . На основании второго свойства общей арифметической середины (свойство несмещенности) систематическая погрешность общей арифметической середины равна нулю ( $\theta_{\bar{\lambda}} = 0$ ). Тогда полная погрешность общей арифметической середины  $\varepsilon_{\bar{\lambda}}$  равна случайной ее части  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ , т.е.  $\varepsilon_{\bar{\lambda}} = \Delta_{\bar{\lambda}}$ , и случайные погрешности результатов измерений  $\Delta_i = \Delta_{\bar{\lambda}} - V_i$ . Возведем обе части последних равенств в квадрат, умножим на соответствующие веса и сложим. При этом получим

$$[p\Delta^2] = \Delta_{\bar{\lambda}}^2 [p] - 2\Delta_{\bar{\lambda}} [pV] + [pV^2].$$

Но  $[pV] = 0$ , тогда  $[pV^2] = [p\Delta^2] - \Delta_{\bar{\lambda}}^2 [p]$ .

Разделим обе части последнего равенства на  $(n-1)$ , а правую часть разделим и умножим на  $n$ . При этом получим

$$\frac{[pV^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1} \left( \frac{[p\Delta^2]}{n} - \Delta_{\bar{\lambda}}^2 \frac{[p]}{n} \right).$$

Учитывая обозначения, принятые в Лемме 2 и в формулировке настоящей теоремы, последнему равенству придадим вид

$$\mu^2 = \frac{n}{n-1} \left( \bar{\mu}^2 - \Delta_{\bar{\lambda}}^2 \frac{[p]}{n} \right). \quad (a)$$

Представив оценку дисперсии единичного веса в такой форме, докажем ее состоятельность и несмещенность.

### 1. Свойство состоятельности

Для доказательства этого свойства необходимо доказать, что  $\mu^2 \Rightarrow \sigma_0^2$ . Однако сходимость по вероятности следует из наличия обычного предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^2 = \sigma_0^2$ . В данном случае проще доказать наличие такого предела.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} \left( \bar{\mu}^2 - \Delta_\lambda^2 \frac{[p]}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_\lambda^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[p]}{n} \right). \end{aligned}$$

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}^2 = \sigma_0^2 \text{ (на основании Леммы 2);}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_\lambda^2 = 0 \text{ (на основании свойства состоятельности общей}$$

арифметической середины);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[p]}{n} < C, \text{ что следует из ограниченности весов результатов}$$

измерений ( $p_i < C$ ) и ограниченности их суммы ( $[p] < C \cdot n$ ).

Учитывая все указанное, окончательно можно записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^2 = \sigma_0^2,$$

что доказывает состоятельность оценки дисперсии единичного веса

$$\mu^2 = \frac{[pV^2]}{n-1}.$$

### 2. Свойство несмещенности

Для доказательства этого свойства необходимо подтвердить, что математическое ожидание оценки дисперсии единичного веса имеет математическое ожидание, равное дисперсии единичного веса, т.е.

$$M(\mu^2) = M\left(\frac{[pV^2]}{n-1}\right) = \sigma_0^2.$$

Для подсчета математического ожидания  $\mu^2$  воспользуемся представлением (а) оценки дисперсии единичного веса

$$\mu^2 = \frac{n}{n-1} \left( \bar{\mu}^2 - \Delta_{\bar{\lambda}}^2 \frac{[p]}{n} \right). \quad (б)$$

Рассчитаем математическое ожидание от левой и правой частей равенства (б).

$$M(\mu^2) = M\left\{ \frac{n}{n-1} \left( \bar{\mu}^2 - \Delta_{\bar{\lambda}}^2 \frac{[p]}{n} \right) \right\} = \frac{n}{n-1} \left\{ M(\bar{\mu}^2) - \frac{[p]}{n} M(\Delta_{\bar{\lambda}}^2) \right\}.$$

Но

$M(\bar{\mu}^2) = \sigma_0^2$  на основании Леммы 2;

$M(\Delta_{\bar{\lambda}}^2) = D(\bar{\lambda})$ , что вытекает из

$D(\bar{\lambda}) = D(\Delta_{\bar{\lambda}}) = M(\Delta_{\bar{\lambda}}^2) - M^2(\Delta_{\bar{\lambda}})$ , но на основании свойства состоятельности общей арифметической середины  $M(\Delta_{\bar{\lambda}}) = 0$ .

Тогда  $M(\Delta_{\bar{\lambda}}^2) = D(\bar{\lambda})$ .

На основании Леммы 3 дисперсия общей арифметической середины равна  $D(\bar{\lambda}) = \frac{\sigma_0^2}{[p]}$ .

Учитывая все изложенное, можно записать:

$$M(\mu^2) = \frac{n}{n-1} \left( \sigma_0^2 - \frac{\sigma_0^2}{n} \right) = \sigma_0^2 \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} = \sigma_0^2,$$

что и требовалось доказать.

В случае равнооточных измерений одной и той же величины в качестве оценки СКО одного измерения  $\sigma$  может быть получена

величина  $\hat{m} = \frac{R_n}{d_n}$ , где  $R_n = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$  есть размах выборки объема

$n$ , а  $d_n$  — коэффициент, зависящий от объема выборки. Значение коэффициента  $d_n$  выбирают из табл. 6.3.

## 14.4. Порядок математической обработки рядов результатов измерений одной и той же величины

Этапы обработки рядов равноточных и неравноточных измерений приведены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

### Обработка рядов результатов измерений

Равноточные измерения	Неравноточные измерения
Исходные данные	
Результаты измерений	
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$	$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
Веса результатов измерений	
$p_1, p_2, \dots, p_n = 1$	$p_1, p_2, \dots, p_n$
Уравнивание	
$\bar{\lambda} = \frac{[\lambda]}{n}$	$\bar{\lambda} = \frac{[p\lambda]}{[p]}$
Вычисление поправок	
$V_i = \bar{\lambda} - \lambda_i$	
Контроль уравнивания	
$[V] = 0$	$[pV] = 0$
при наличии ошибки округления $\omega = \lambda_{\text{кр}} - \bar{\lambda}$	
$[V'] = \omega \cdot n$	$[pV'] = \omega[p]$
<b>Апостериорная оценка точности</b>	
СКП единицы веса	
$\mu = m_{\text{изм}} = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} \text{ или}$ $m_{\text{изм}} = \hat{m} = \frac{R_n}{d_n} = \frac{\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}}{d_n}$	$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-1}}$
Ошибка СКП единицы веса	
$m_{m_{\text{изм}}} = \frac{m_{\text{изм}}}{\sqrt{2(n-1)}}$	$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$

Равноточные измерения	Неравноточные измерения
Вес наилучшего приближения	
$p_{\bar{\lambda}} = n$	$p_{\bar{\lambda}} = n$
СКП наилучшего приближения	
$m_{\bar{\lambda}} = \frac{m_{\text{изм}}}{\sqrt{n}}$	$m_{\bar{\lambda}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$
СКП любого результата измерения	
$m_i = m_{\text{изм}}$	$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$
Предельные погрешности любого результата измерения	
$\Delta_{\text{пр}\lambda_i} = t \cdot m_{\text{изм}}$	$\Delta_{\text{пр}\lambda_i} = t \cdot m_i$
Предельные погрешности наилучшего приближения	
$\Delta_{\text{пр}\bar{\lambda}} = t \cdot m_{\bar{\lambda}}$	$\Delta_{\text{пр}\bar{\lambda}} = t \cdot m_{\bar{\lambda}}$

## 14. 5. Примеры решения типовых задач

### Пример 14.1

Линия теодолитного хода измерена пять раз. При этом получены результаты, м: 217,24; 217,31; 217,38; 217,23; 217,20. Произвести математическую обработку этого ряда результатов измерений.

#### Решение

В результате математической обработки ряда равноточных измерений необходимо получить следующее:

1. Наилучшее приближение к истинному значению измеряемой величины (уравненное значение). В качестве наилучшего приближения в случае равноточных измерений выступает среднеарифметическое, вычисляемое по формуле

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = l_0 + \frac{[\delta l]}{n},$$

где  $\bar{l}$  — уравненное значение измеряемой величины;  $l_i$  — результат  $i$ -го измерения;  $l_0$  — приближенное значение измеряемой величины;  $\delta l_i$  — уклонение  $i$ -го результата измерения от приближенно-го;  $n$  — число измерений.

2. Оценка точности результатов непосредственных измерений (СКП результата измерения), выполняемая по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[V]^2}{n-1}},$$

где  $V_i$  — вероятнейшие поправки, вычисляемые по формуле  $V_i = \bar{l} - l_i$ . Кроме этого, оцениваем надежность СКП измерения для правильного ее округления, вычисляя среднеквадратическую погрешность СКП результата измерения по формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

3. Повторная оценка точности единичного измерения по формуле

$$\hat{m} = \frac{R_n}{d_n} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{d_n}.$$

4. Оценка точности уравненного значения (СКП уравненного значения) по формуле

$$m_{\bar{l}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Контроль вычислений по формулам

$$[V] = \omega n, \quad [V^2] = [\delta l^2] - \frac{[\delta l]^2}{n}.$$

где  $\omega$  — погрешность округления уравненного значения.

Все вычисления сводим в табл. 14.2.

Примем в качестве приближенного значения  $l_0$  минимальное значение результата измерения 217,20 м.

Уравненное значение измеряемой величины

$$\bar{l} = 217,20 + \frac{36}{5} = 217,272 \text{ м.}$$

Округленное уравненное значение измеряемой величины  $\bar{l}_{\text{ок}} = 217,27$ , при этом погрешность округления  $\omega = -0,002 \text{ м} = -0,2 \text{ см}$ .

## Пример обработки ряда результатов равноточных измерений

№	$L_i, м$	$\delta l_i, см$	$v_i, см$	$v_i^2$	$\delta^2 l_i$
1	217,24	+ 4	+ 3	9	16
2	217,31	+ 11	-4	16	121
3	217,38	+ 18	-11	121	324
4	217,23	+ 3	+ 4	16	9
5	217,20	0	+ 7	49	0
		+ 36	-1	211	470

СКП результата измерения  $m = \sqrt{\frac{211}{4}} = 7,26$  см.

Оценка надежности СКП измерения  $m_m = \frac{7,26}{\sqrt{8}} = 2,6$  см.

Следовательно, в величине  $m$  следует оставить только одну значащую цифру, т.е.  $m = 7$  см.

Для повторного вычисления оценки точности результата измерения вычисляем размах

$$R = 217,38 - 217,20 = 0,18 \text{ см.}$$

Далее из табл. 6.3 выбираем значение  $d_n = 2,33$  для  $n = 5$  и вычисляем величину  $\hat{m} = \frac{0,18}{2,33} = 0,77$  м.

Учитывая, что величина ошибки  $\hat{m}$  не менее величины ошибки  $m$ ,  $\hat{m}$  следует округлить до одной значащей цифры, т.е.  $\hat{m} = 8$  см, что хорошо согласуется с величиной  $m$ .

СКП урванного значения  $m_T = \frac{7}{\sqrt{5}} = 3$  см.  
Контроль вычислений

$$[V] = \omega \cdot n = -1;$$

$$[V^2] = 470 - \frac{36^2}{5} = 210,8.$$

### Пример 14.2

На репер по четырем ходам геометрического нивелирования различной длины передана высота, при этом получены результаты:

№	$H_i$ , м	$L_i$ , км
1	134,178	5
2	134,211	4
3	134,188	5
4	134,195	6

Произвести математическую обработку этого ряда результатов измерений.

#### Решение

Как и в предыдущей задаче, прежде всего здесь необходимо найти уравнинное значение измеряемой величины. Однако в отличие от ранее рассмотренного случая результаты измерений высоты репера неравноточные, так как длины ходов неодинаковые. В связи с этим в качестве уравнинного значения будет выступать средневзвешенное, вычисляемое по формуле

$$\bar{H} = \frac{[pH]}{[p]} = H_0 + \frac{[p\delta H]}{[p]},$$

где  $\bar{H}$  — уравнинное значение высоты репера;  $H_i$  — измеренное значение высоты репера по  $i$ -му ходу;  $p_i$  — вес  $i$ -го измерения;  $H_0$  — приближенное значение высоты репера;  $\delta H_i$  — уклонение  $i$ -го результата измерения от приближенного.

Расчет весов в данном случае выполняем по формуле

$$p_i = \frac{k}{L_i},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности;  $L_i$  — длина  $i$ -го хода.

Если принять  $k = 7$ , то в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает превышение, полученное по ходу в 7 км.

Оценка точности включает следующее.

1. Вычисление СКП единичного веса, т.е. превышения, полученного по ходу в 7 км

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-1}},$$

и оценка ее надежности

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

2. Вычисление СКП уравненного значения по формуле

$$m_{\bar{p}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}},$$

где  $[p] = p_{\bar{p}}$  — вес уравненного значения высоты репера.

3. Оценка точности любого результата измерения, осуществляемая по формуле

$$m_{H_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}.$$

Контроль вычислений:

$$[pV] = \omega \cdot [p],$$

где  $\omega$  — погрешность округления уравненного значения;

$$[pV^2] = [p\delta^2 H] - \frac{[p\delta H]}{[p]}.$$

Все вычисления сводим в табл. 14.3.

Таблица 14.3

**Пример обработки ряда результатов неравноточных измерений**

№	$H_i$ , м	$L_i$ , м	$p_i = \frac{k}{L_i}$ $k = 7$	$\delta H_i$ , мм	$p_i \delta H_i$ , мм	$v_i$ , мм	$p_i v_i$ , мм	$p_i v_i^2$	$p_i \delta H_i^2$
1	134,172	8	0,88	0	0	+23	+20,2	465	0
2	134,211	4	1,75	+39	+68,2	-16	-28,0	448	2660
3	134,188	5	1,40	+16	+22,4	+7	+9,8	69	358
4	134,195	6	1,17	+23	+26,9	0	0	0	619
	[ ]	—	5,20	—	+117,5		+2,0	982	3637

Примем в качестве приближенного значения  $H_0$  минимальное значение результата измерения 134,172 м.

Уравненное значение измеряемой величины:

$$\bar{H} = 134,172 + \frac{117,5}{5,20} = 134,1946 \text{ м.}$$

Округленное уравненное значение измеряемой величины  $\bar{H}_{\text{ок}} = 134,195$  м, при этом погрешность округления  $\omega = +0,0004$  м = + 0,4 мм.

$$\text{СКП единицы веса } \mu = \sqrt{\frac{982}{3}} = 18,09 \text{ мм.}$$

$$\text{Оценка надежности СКП единицы веса } m_{\mu} = \frac{18,09}{\sqrt{6}} = 7 \text{ мм.}$$

Следовательно, в величине  $\mu$  следует оставить только одну значащую цифру, т.е.  $\mu = 20$  мм.

$$\text{Вес уравненного значения } p_{\bar{H}} = [p] = 5,20.$$

$$\text{СКП уравненного значения } m_{\bar{H}} = \frac{20}{\sqrt{5,20}} = 8 \text{ мм.}$$

$$\text{СКП превышения по первому ходу } m_{H_1} = \frac{20}{\sqrt{0,88}} = 21 \text{ мм.}$$

СКП превышения, полученного по ходу в 1 км, можно вычислить по формуле  $\mu_{h_{\text{км}}} = \frac{\mu}{\sqrt{k}} = \frac{20}{\sqrt{7}} = 7$  мм.

Контроль вычислений:

$$[pV] = \omega \cdot [p] = +2,0;$$

$$[pV^2] = 3637 - \frac{117,5^2}{5,20} = 982.$$

## 14. 6. Задачи для самостоятельного решения

1. Произвести математическую обработку 4-кратного измерения линии, м: 372,13; 372,25; 372,10; 372,18. Измерения равноточные.

2. Произвести математическую обработку равноточных измерений площади контура планиметром, га: 26,31; 26,28; 26,32; 26,26; 26,30.

3. Один и тот же угол измерен равноточно 4 раза. Это дало результаты:  $60^{\circ} 41'$ ;  $60^{\circ} 40'$ ;  $60^{\circ} 42'$ ;  $60^{\circ} 40'$ . Выполнить математическую обработку этого ряда результатов измерений.

4. Один и тот же угол измерен различным числом приемов, что дало результаты:

№ пп.	Углы	Приемы
1	$54^{\circ} 12' 18''$	5
2	22	3
3	20	2

Выполнить математическую обработку этого ряда измерений.

5. По трем угломерным ходам с различным числом поворотных точек был передан дирекционный угол на узловую линию. Выполнить математическую обработку этого ряда результатов измерений.

№ пп.	Дирекционные углы	Кол-во поворотных точек
1	$314^{\circ} 16,5'$	4
2	20,0	8
3	21,0	6

6. По трем ходам различной длины передана высота на узловой репер, что дало результаты:

№ пп.	Высота репера, м	Длина хода, км
1	286,571	8,6
2	591	6,2
3	558	4,5

Выполнить математическую обработку этого ряда результатов измерений.

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Какие задачи приходится решать при математической обработке рядов измерений?

2. Что включает в себя задача уравнивания результатов измерений одной величины и по каким формулам задача решается?
3. Какими свойствами обладает общая арифметическая середина?
4. Как осуществляется контроль уравнивания при математической обработке рядов измерений?
5. Как рассчитывается вес общей арифметической середины?
6. Можно ли считать, что среднее арифметическое является частным случаем общей арифметической середины?
7. Что произойдет с рядом истинных погрешностей, если каждую умножить на корень из ее веса?
8. По какой формуле можно рассчитать СКП единичного веса при наличии ряда истинных погрешностей, веса которых известны?
9. По какой формуле можно вычислить СКП общей арифметической середины, если известна СКП единичного веса?
10. Как вычисляют поправки из уравнивания и каким свойством они обладают?
11. Как формулируются Леммы 1—3?
12. Как оценить надежность СКП общей арифметической середины?

## **15. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ**

### **15.1. Общие принципы**

**Понятие об условных уравнениях.** *Под условным уравнением понимается любое математическое соотношение, связывающее истинные значения измеряемых величин, т.е.  $f(L_1, L_2, \dots, L_n) = 0$  — общий вид условного уравнения.*

Условные уравнения возникают только в том случае, если имеются дополнительные (избыточные) измерения, причем число условных уравнений, возникающих в системе, равно числу избыточных измерений.

Примеры условных уравнений.

Пример 1. В треугольнике измерены все углы. Условное уравнение имеет вид  $L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ = 0$ .

Пример 2. Измерено  $n$  превышений между двумя точками с известными высотами  $H_A$  и  $H_B$ . Условное уравнение имеет вид  $L_1 + L_2 + \dots + L_n - (H_B - H_A) = 0$ .

Пример 3. В теодолитном ходе, проложенном между двумя исходными сторонами, измерены все углы и линии. В этом случае имеются три избыточных измерения, которые порождают три условных уравнения вида:

$$1. \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i - (\alpha_{\text{кон}} - \alpha_{\text{нач}}) - 180^\circ \cdot n = 0;$$

$$2. \sum_{i=1}^n S_i \cos \alpha_i - (X_{\text{кон}} - X_{\text{нач}}) = 0;$$

$$3. \sum_{i=1}^n S_i \sin \alpha_i - (Y_{\text{кон}} - Y_{\text{нач}}) = 0.$$

Если в условное уравнение вместо истинных значений измеряемых величин подставить результаты измерений, то в правой части появляется величина, в общем случае отличная от нуля, которая называется *свободным членом условного уравнения*, или *невязкой*, т.е.  $f_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = W_i$ .

*Свойства невязок*

1. Невязка является истинной погрешностью, так как ее теоретическое значение равно нулю.

2. Невязка является функцией результатов измерений, следовательно, можно говорить о весе невязки.

3. Невязка возникает вследствие появления погрешностей в результатах измерений, поэтому будем считать, что систематические части погрешностей измерений порождают систематическую часть невязки, а случайные погрешности измерений — случайную часть невязки. В связи с этим можно считать, что  $W = \Delta_W + \theta_W$ , т.е. невязка состоит из двух частей — случайной и систематической.

Последнее свойство невязок заставляет при оценке точности по невязкам условных уравнений следовать различными путями в зависимости от того, известно что-либо о систематических погрешно-

стях или нет. Если априори известно, что систематические погрешности в результатах измерений отсутствуют, то это значительно упрощает процесс оценки точности. Назовем такой вариант *первым*.

Если априори ничего не известно о наличии или отсутствии систематических погрешностей в результатах измерений, то здесь при оценке точности приходится решать более сложную задачу. Назовем такой вариант *вторым*.

**Первый вариант оценки точности по невязкам условных уравнений.** В данном случае известно, что систематические погрешности в результатах измерений отсутствуют ( $\theta_i = 0$ ). Тогда и невязки являются результатом воздействия только случайных погрешностей и свободны от систематических погрешностей, т.е.  $W_i = \Delta_{w_i}$ . В этом случае невязки обладают всеми свойствами случайных погрешностей.

Пусть имеется ряд невязок  $W_1, W_2, \dots, W_N$  с весами, соответственно равными  $p_{W_1}, p_{W_2}, \dots, p_{W_N}$ . Для получения наилучшей оценки дисперсии единичного веса может быть использована на осно-

вании Леммы 2 величина  $\bar{\mu}^2 = \frac{[p\Delta^2]}{n}$ . Для рассматриваемого случая наилучшая оценка принимает вид

$$\bar{\mu}^2 = \frac{[p_W W^2]}{N}. \quad (15.1)$$

**Второй вариант оценки точности по невязкам условных уравнений.** В этом случае нет дополнительных сведений о характере систематических погрешностей результатов измерений, и для проведения оценки точности необходимо сделать некоторые предположения о законе накапливания систематических погрешностей в невязках условных уравнений.

Пусть имеется ряд невязок  $W_1, W_2, \dots, W_N$ , которым соответствуют веса  $p_{W_1}, p_{W_2}, \dots, p_{W_N}$ . Предположим, что невязки можно представить в виде

$$W_i = \Delta_{W_i} + a_i \theta \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (a)$$

где  $a_i$  — коэффициент, зависящий от вида условных уравнений;  $\theta$  — систематическая погрешность данного ряда измерений.

Исходя из этих предположений, необходимо найти оценку систематической ошибки  $\theta$ , а также оценку дисперсии единичного веса.

Разделив каждую невязку  $W_i$  на  $a_i$ , получим

$$\frac{W_i}{a_i} = \frac{\Delta_{W_i}}{a_i} + \theta. \quad (б)$$

Введем обозначения:

$$W'_i = \frac{W_i}{a_i}; \quad \Delta_i = \frac{\Delta_{W_i}}{a_i}.$$

Тогда выражению (а) можно придать вид

$$W'_i = \Delta_i + \theta. \quad (в)$$

Вычислим вес  $p_{W'_i}$ , учитывая, что  $W'_i = \frac{W_i}{a_i}$ . На основании Теоремы 3 имеем

$$\frac{1}{p_{W'_i}} = \frac{\left(\frac{1}{a_i}\right)^2}{p_{W_i}} = \frac{1}{a_i^2 p_{W_i}}.$$

Из последнего следует, что

$$p_{W'_i} = a_i^2 p_{W_i}.$$

Рассмотрим новый ряд приведенных невязок  $W'_1, W'_2, \dots, W'_N$ , которым соответствуют веса  $p_{W'_1}, p_{W'_2}, \dots, p_{W'_N}$ .

Образует средневзвешенную приведенную невязку

$$\bar{W}' = \frac{[p_{W'} W']}{[p_{W'}]} = \frac{[p_{W'} (\Delta + \theta)]}{[p_{W'}]} = \frac{[p_{W'} \Delta]}{[p_{W'}]} + \theta.$$

Известно, что средневзвешенное случайных погрешностей имеет нулевое математическое ожидание и по вероятности сходится к нулю, т.е. имеют место равенства

$$\bar{\Delta} = \frac{[p\Delta]}{[p]} \Rightarrow 0; \quad (г)$$

$$M(\bar{\Delta}) = M\left(\frac{[p\Delta]}{[p]}\right) = 0. \quad (д)$$

Из предыдущих равенств следует, что при  $N \rightarrow \infty \bar{W}' \Rightarrow \theta$  и ее математическое ожидание  $M(\bar{W}') = \theta$ . Следовательно, величина  $\bar{W}'$  является состоятельной и несмещенной оценкой систематического сдвига  $\theta$ , таким образом

$$\bar{\theta} = \bar{W}' = \frac{[p_{w'} W']}{[p_{w'}]} = \frac{\left[ p_w a^2 \frac{W}{a} \right]}{[p_w a^2]} = \frac{[p_w a W]}{[p_w a^2]}.$$

Окончательно

$$\bar{\theta} = \frac{[p_w a W]}{[p_w a^2]}. \quad (15.2)$$

Для получения характеристики разброса необходимо получить оценку дисперсии единицы веса. В соответствии с Теоремой 5 наилучшей оценкой дисперсии единичного веса можно получить по формуле  $\mu^2 = \frac{[pV^2]}{n-1}$ . Вычислим поправки для рассматриваемого

случая:  $V_i = \bar{W}' - W'_i$ . При этом в качестве весов будут выступать величины  $p_{w'_i}$ . Возведем поправки в квадрат, умножим на соответствующие веса и сложим. Тогда получим

$$\begin{aligned} [pV^2] &= [p_{w'} (\bar{W}' - W')^2] = \left[ p_w a^2 \left( \bar{\theta} - \frac{W}{a} \right)^2 \right] = \\ &= [p_w a^2] \bar{\theta}^2 - 2\bar{\theta} [p_w a W] + [p_w W^2]. \end{aligned}$$

Слагаемые  $[p_w a^2] \bar{\theta}^2 - 2\bar{\theta} [p_w a W]$  преобразуются в  $-[p_w a^2] \bar{\theta}^2$ . Тогда

$$[pV^2] = [p_w W^2] - [p_w a^2] \bar{\theta}^2,$$

и оценка дисперсии единицы веса имеет вид

$$\mu^2 = \frac{[p_w W^2] - [p_w a^2] \bar{\theta}^2}{N-1}. \quad (15.3)$$

Для решения вопроса о значимости найденной систематической погрешности используем критерий, который строится из расчета

сравнения оценки систематической погрешности с ее предельной погрешностью, которая рассчитывается по формуле

$$\Delta_{\theta}^{\text{сп}} = \frac{t_q \mu}{\sqrt{[p_w a^2]}}, \quad (15.4)$$

где  $[p_w a^2]$  — вес общей арифметической середины;  $t_q$  — коэффициент, выбираемый из таблиц распределения Стьюдента по выбранному уровню значимости  $\alpha$  и по числу степеней свободы  $\nu = N - 1$ .

Если вычисленное значение оценки систематического сдвига по модулю будет больше, чем его предельная погрешность, то можно считать, что систематические погрешности в данном ряду измерений присутствуют. В противном случае считают, что систематические погрешности в данном ряду измерений не обнаружены.

Если сравнить формулу (15.1) из первого варианта с формулой (15.3) из второго варианта, то следует сделать вывод о том, что во втором варианте из суммы квадратов невязок удалено влияние систематических погрешностей. Если это влияние существенно, т.е. значим систематический сдвиг, то оценка СКП единицы веса во втором случае будет значимо меньше. Первый вариант решения задачи в таком случае будет давать искаженное значение оценки дисперсии единицы веса. Поэтому второй вариант оценки точности по невязкам условных уравнений является более целесообразным, так как при наличии систематических погрешностей они с большой степенью вероятности будут выявлены.

## 15.2. Оценка точности угловых измерений по невязкам в полигонах и ходах

Проведены равноточные измерения углов в системе из  $N$  полигонов и ходов, имеющих соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_N$  углов каждый. При этом получены невязки  $W_1, W_2, \dots, W_N$ . Необходимо провести оценку точности этих измерений.

### *Первый вариант*

Сделано предположение об отсутствии систематических погрешностей в этих измерениях ( $\theta_{\beta_i} = 0$ ). Тогда невязки в каждом из полигонов и ходов будут образованы только случайными погрешностями.

Принимая веса измерений углов равными единице (все измерения равноточные), рассчитаем веса невязок по каждому ходу. В соответствии с формулой (13.13) вес угловой невязки  $i$ -го хода может

быть рассчитан по формуле  $p_{w_i} = \frac{1}{n_i}$ . Тогда СКП единичного веса,

т.е. СКП измерения любого угла, вычисляем по формуле

$$\mu = m_{\beta} = \sqrt{\frac{[p_w W^2]}{N}}. \quad (15.5)$$

СКП самой СКП измерения одного угла может быть получена из соотношения

$$m_{m_{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{2N}}. \quad (15.6)$$

Рассматривая триангуляцию как частный случай системы полигонов, в которой все  $n_i = 3$ , можно для СКП измерения углов в триангуляции записать выражение

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{[W^2]}{3N}}. \quad (15.7)$$

Эта формуле в геодезической литературе носит название формулы Ферреро, или международной формулы оценки точности угловых измерений в триангуляции.

#### *Второй вариант*

В данном случае ставится задача не только вычислить оценку дисперсии единичного веса, или найти СКП измерения одного угла, но и исследовать наличие (отсутствие) систематических погрешностей. При этом, как и в первом варианте, предполагается, что все углы измерены равноточно, и дополнительно делается предположение, что каждая из невязок формируется следующим образом:

$$W_i = \Delta_{w_i} + n_i \cdot \theta_{\beta},$$

т.е. выносится предположение, что одна и та же систематическая погрешность входит в каждый измеренный угол. В этом случае,

как и в первом варианте,  $p_{w_i} = \frac{1}{n_i}$ , и при этом  $a_i = n_i$ . Тогда оценка

систематического сдвига (систематическая погрешность измерения одного угла) в соответствии с формулой (15.2) принимает вид

$$\bar{\theta}_\beta = \frac{[p_w a W]}{[p_w a^2]} = \frac{\left[ \frac{1}{n} n W \right]}{\left[ \frac{1}{n} n^2 \right]} = \frac{[W]}{[n]},$$

или окончательно

$$\bar{\theta}_\beta = \frac{[W]}{[n]}. \quad (15.8)$$

В соответствии с формулой (15.3) оценка дисперсии единичного веса принимает вид

$$\mu^2 = m_\beta^2 = \frac{[p_w W^2] - [p_w a^2] \cdot \bar{\theta}^2}{N-1} = \frac{\left[ \frac{W^2}{n} \right] - [n] \bar{\theta}^2}{N-1}.$$

СКП измерения одного угла тогда будет равна

$$m_\beta = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{n} \right] - [n] \cdot \bar{\theta}^2}{N-1}}, \quad (15.9)$$

а ее погрешность

$$m_{m_\beta} = \frac{m_\beta}{\sqrt{2(N-1)}}. \quad (15.10)$$

Систематические погрешности считаются значимыми при условии выполнения неравенства вида

$$|\bar{\theta}| \geq \frac{t_q m_\beta}{\sqrt{[n]}}. \quad (15.11)$$

В формуле (15.9) второе слагаемое в числителе освобождает сумму квадратов невязок от влияния систематических погрешностей, и величина  $m_\beta$  характеризует только случайный разброс.

### 15.3. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Пересеченная местность

Характер действия погрешностей здесь в точности повторяет предыдущий случай с оценкой точности угловых измерений по невязкам в полигонах и ходах. В связи с этим без особых пояснений приведем расчетные формулы.

*Первый вариант.* Расчет весов невязок выполняется по формуле

$$p_{W_i} = \frac{1}{n_i}. \quad (15.12)$$

При этом в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает превышение, полученное на станции.

СКП измерения превышения на станции

$$m_{h_{ст}} = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{n} \right]}{N}}. \quad (15.13)$$

Погрешность вычисления СКП превышения на станции

$$m_{m_h} = \frac{m_{h_{ст}}}{\sqrt{2N}}. \quad (15.14)$$

*Второй вариант.* Расчет весов выполняется по формуле (15.12).

Невязки в полигонах и ходах формируются по закону

$$W_i = \Delta_{W_i} + n_i \cdot \theta_{h_{ст}}.$$

Оценка систематической погрешности может быть получена по формуле

$$\bar{\theta}_{h_{ст}} = \frac{[W]}{[n]}. \quad (15.15)$$

СКП измерения превышения на станции определяется по формуле

$$m_{h_{ст}} = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{n} \right] - [n] \cdot \bar{\theta}_{h_{ст}}^2}{N - 1}}, \quad (15.16)$$

а ее погрешность

$$m_{m_h} = \frac{m_{h_{\text{ст}}}}{\sqrt{2(N-1)}}. \quad (15.17)$$

Систематические погрешности считаются значимыми при условии выполнения неравенства вида

$$|\bar{\theta}_{h_{\text{ст}}}| \geq \frac{t_q m_{h_{\text{ст}}}}{\sqrt{[n]}}. \quad (15.18)$$

#### 15.4. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Равнинная местность

*Первый вариант.* По  $N$  нивелирным ходам, имеющим, соответственно, длины  $L_1, L_2, \dots, L_N$  километров, вычислены невязки. Они оказались равными  $W_1, W_2, \dots, W_N$ . В предположении того, что систематические погрешности отсутствуют, необходимо рассчитать СКП превышения с единичным весом. В соответствии с формулой (13.17) веса невязок нивелирных ходов можно рассчитать как

$$p_{W_i} = \frac{1}{L_i}. \quad (15.19)$$

Тогда в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает превышение, полученное по ходу в 1 км. СКП такого превышения вычисляется по формуле

$$\mu_{h_{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{L} \right]}{N}}, \quad (15.20)$$

а среднеквадратическую погрешность СКП — по формуле

$$m_{\mu_n} = \frac{\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{2N}}. \quad (15.21)$$

*Второй вариант.* Пусть неизменными остаются исходные данные первого варианта, но по поводу систематических погрешностей априори ничего не известно. Примем в качестве модели следующий закон формирования невязок по ходам геометрического нивелирования

$$W_i = \Delta_{W_i} + \tau_{h_{\text{км}}} \cdot L_i, \quad (15.22)$$

где  $\tau_{h_{\text{км}}}$  — систематическая погрешность превышения, полученно-го по ходу в 1 км (коэффициент систематического влияния в нивелировании).

Веса невязок, как и в первом варианте, будут рассчитываться по формуле

$$p_{W_i} = \frac{1}{L_i}. \quad (15.23)$$

В качестве величины, обладающей единичным весом, выступает превышение, полученное по ходу в 1 км.

Тогда оценка систематической погрешности может быть вычислена по формуле

$$\bar{\tau}_{h_{\text{км}}} = \frac{[W]}{[L]}. \quad (15.24)$$

СКП превышения по ходу в 1 км рассчитывается по формуле

$$\mu_{h_{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{L} \right] - [L] \cdot \bar{\tau}_{h_{\text{км}}}^2}{N-1}}, \quad (15.25)$$

а ее погрешность

$$m_{\mu_h} = \frac{\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{2(N-1)}}. \quad (15.26)$$

Значимость систематической погрешности признается при выполнении неравенства вида

$$\left| \bar{\tau}_{h_{\text{км}}} \right| \geq \frac{t_q \mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{[L]}}. \quad (15.27)$$

**Некоторые обобщения.** Если модель формирования невязок условных уравнений связана с накоплением систематических погрешностей пропорционально количественным характеристикам ходов и полигонов, то, основываясь на предыдущих рассуждениях, можно привести общие формулы оценки точности по невязкам в полигонах и ходах.

Пусть  $K_i$  — количественная характеристика  $i$ -го хода. Тогда вес невязки по этому ходу будет рассчитываться по формуле

$$p_{W_i} = \frac{1}{K_i}. \quad (15.28)$$

Оценка систематической погрешности может быть вычислена из соотношения

$$\bar{\theta} = \frac{[W]}{[K]} = \frac{[W]}{[1/p_w]}, \quad (15.29)$$

и СКП единичного веса — по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_w W^2] - [K] \cdot \bar{\theta}^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{[p_w W^2] - [1/p_w] \cdot \bar{\theta}^2}{N-1}}. \quad (15.30)$$

Значимой систематической погрешность признается при выполнении неравенства вида

$$|\bar{\theta}| \geq \frac{t_q \mu}{\sqrt{[K]}} = \frac{t_q \mu}{\sqrt{[1/p_w]}}. \quad (15.31)$$

## 15.5. Примеры решения типовых задач

### Пример 15.1

Вычислить СКП измерения угла по невязкам в полигонах и ходах.

№ пп.	$W_i$ , мин	$n_i$ , число углов	$\frac{W_i^2}{n}$
1	+ 1,8'	18	0,18
2	- 2,4	30	0,19
3	- 2,5	25	0,25
4	+ 3,0	14	0,64
5	- 3,2	25	0,41
[ ]			1,67

*Решение*

Расчет СКП измеренного угла проведем по формуле

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{n} \right]}{N}},$$

где  $W$  — невязки в ходах;  $n$  — число углов в ходах;  $N$  — общее число ходов.

Вычислив для каждого хода величину  $\frac{W_i^2}{n_i}$  и просуммировав их, окончательно получаем

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{1,67}{5}} = 0,577'.$$

Вычислив надежность  $m_{\beta}$  по формуле

$$m_{m_{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{2N}} = \frac{0,577'}{\sqrt{10}} = 0,18'$$

и правильно округлив значение  $m_{\beta}$ , окончательно получаем  $m_{\beta} = 0,6'$ .

**Пример 15.2**

Дан ряд невязок в нивелирных ходах, а также длины этих ходов. Произвести оценку точности нивелирования и исследовать систематические погрешности.

№	$W_p$ , мм	$L_p$ , км	$\frac{W_i^2}{L_i}$
1	+ 16	4	64
2	+ 24	6	96
3	- 42	14	126
4	- 36	5	259
5	+13	6	28
	- 25	35	573

*Решение*

Систематическую погрешность нивелирования на 1 км хода вы-

числяем по формуле  $\bar{\theta}_{h_{км}} = \frac{[W]}{[L]}$ .

Оценку точности измерений, т.е. определение СКП нивелиро-

$$\text{вания по ходу в 1 км, выполняем по формуле } \mu_{h_{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\left[ \frac{W^2}{L} \right] - \bar{\theta}_{h_{\text{км}}}^2 [L]}{N-1}},$$

$$\text{а надежность ее определения — по формуле } m_{\mu_h} = \frac{\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{2(N-1)}}.$$

Оценку значимости систематической погрешности осуществляем сравнением модуля вычисленной систематической погрешности с величиной

$$\frac{2\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{[L]}}.$$

Выполнив все вычисления, получаем

$$\bar{\theta}_{h_{\text{км}}} = -\frac{25}{35} = -0,71 \text{ мм/км};$$

$$\mu_{h_{\text{км}}} = \sqrt{\frac{573-18}{4}} = 11,8 \text{ мм};$$

$$m_{\mu_h} = \frac{11,8}{\sqrt{8}} = 4 \text{ мм}.$$

Окончательно, округлив значение  $\mu_{h_{\text{км}}}$ , имеем

$$\mu_{h_{\text{км}}} = 12 \text{ мм};$$

$$\frac{2\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{[L]}} = 4 \text{ мм}.$$

Сравнивая последнюю с модулем систематической погрешности, делаем вывод о том, что  $|\bar{\theta}_{h_{\text{км}}}| < \frac{2\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{[L]}}$ , а следовательно, систематические погрешности в данных измерениях не обнаружены.

## 15.6. Задачи для самостоятельного решения

1. По невязкам в треугольниках триангуляции выполнить оценку точности угловых измерений и исследовать систематические погрешности:

№ треугольника	Невязка	№ треугольника	Невязка
1	+ 10"	5	+ 2
2	- 9	6	- 8
3	- 5	7	+ 6
4	+ 2	8	+ 6

2. В таблице приведены невязки в полигонах геометрического нивелирования и периметры полигонов:

№ полигона	Периметр полигона, км	Невязка, мм
1	6	+ 18
2	12	- 14
3	8	+ 24
4	10	+ 30
5	15	+ 34

Выполнить оценку точности геометрического нивелирования и исследовать систематические погрешности.

3. Выполнить оценку точности угловых измерений по невязкам в полигонах и ходах и исследовать систематические погрешности угловых измерений:

№ полигона	Число углов в полигоне	Невязка
1	20	- 2,5□
2	24	+ 4,8
3	10	- 0,5
4	31	- 2,8
5	15	+ 3,0
6	28	+ 5,2

4. В таблице приведены невязки в полигонах геометрического нивелирования и число станций в полигонах:

№ полигона	Число станций в полигоне	Невязка, мм
1	26	– 38
2	53	– 41
3	62	+ 48
4	22	+ 28
5	16	– 19

Выполнить оценку точности геометрического нивелирования и исследовать систематические погрешности.

### **Вопросы и задания для самопроверки**

1. Что называется условным уравнением?
2. Приведите пример условного уравнения нелинейного вида.
3. Что такое невязка и как она вычисляется?
4. Каковы свойства невязок?
5. Что понимают под первым и вторым вариантами оценки точности по невязкам условных уравнений и в чем их различие?
6. Какую формулу, используемую для оценки точности измерения углов в триангуляции, называют международной?
7. По каким формулам ведут оценку точности нивелирования при наличии невязок в полигонах и ходах?

## **16. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

### **16.1. Общие положения**

Весьма часто в геодезической практике приходится выполнять измерения одной и той же физической величины дважды. Примером тому могут служить измерение угла при двух положениях круга; определение превышения на станции геометрического нивелирования, полученного по двум сторонам реек или при двух горизонтах прибора; измерение линии в прямом и в обратном направлениях. При достаточном числе однородных парных измерений вполне возможно их использовать для оценки точности выполненных измерений.

Пусть имеется  $N$  пар измерений однородных физических величин, причем измерения внутри пар равноточные, а между парами — неравноточные:

$$\begin{aligned} \lambda'_1; \lambda''_1 & p_1; \\ \lambda'_2; \lambda''_2 & p_2; \\ \dots\dots\dots; \\ \lambda'_N; \lambda''_N & p_N. \end{aligned}$$

Каждой паре измерений соответствует условное уравнение вида

$$L_i - L_i = 0.$$

Подставим в эти условные уравнения результаты измерений. Тогда в правой части каждого из них получим невязку, которую обозначим  $d_i$ . Вычислим веса полученных невязок. Из Теоремы 3 имеем

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i} \Rightarrow p_{d_i} = \frac{p_i}{2}.$$

В итоге получено, что *вес разности двух равноточных измерений в два раза меньше веса каждого из результатов измерений.*

Далее все рассуждения строим, как и в 15.4, т.е. рассматриваем два варианта.

*Первый вариант.* В этом случае предполагается, что систематические погрешности отсутствуют. По крайней мере, систематические погрешности отсутствуют в разностях  $d_i$ . Тогда СКП величины с единичным весом будет рассчитываться по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{N}} = \sqrt{\frac{[p d^2]}{2N}}. \quad (16.1)$$

Двойка в знаменателе последней формулы появилась из-за того, что под знаком суммы стоят веса результатов измерений, а не веса невязок (разностей).

*Второй вариант.* Как и ранее, при решении задачи во втором варианте априори не выдвигаются какие-либо предположения о величине систематических погрешностей. Принимая предыдущие

исходные данные, полагая, что веса каждого из измерений в парах равны  $p_i$ , а вес разности равен  $p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$ , и используя формулы

(15.29)—(15.31), получаем следующее.

Оценка систематического сдвига, приходящаяся на измерение с единичным весом, вычисляется с учетом (15.29) по формуле

$$\bar{\theta} = \frac{[d]}{[1/p_d]} = \frac{[d]}{2[1/p]}. \quad (16.2)$$

СКП единичного веса на основании (15.30) вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2] - \frac{[d]^2}{[1/p_d]}}{N-1}} = \sqrt{\frac{[p d^2] - \frac{[d]^2}{[1/p]}}{2(N-1)}}. \quad (16.3)$$

Систематическая погрешность признается значимой, если выполняется неравенство

$$|\bar{\theta}| \geq \frac{t_q \mu}{\sqrt{[1/p_d]}} = \frac{t_q \mu}{\sqrt{2[1/p]}}. \quad (16.4)$$

## 16.2. Исследование коллимационной погрешности прибора

При исследовании теодолита была выполнена серия измерений  $n$  направлений при двух положениях круга, при этом получены результаты

$$П_1, П_2, \dots, П_n;$$

$$Л_1, Л_2, \dots, Л_n.$$

По каждой паре вычислены разности  $d_i = Л_i - П_i$ , которые представляют собой удвоенную коллимационную погрешность, отягощенную случайными отклонениями. Все направления независимо от их номера или положения круга получены с одинаковой точно-

стью, т.е. можно принять, что  $p_{\Pi_i} = p_{\Pi_i} = 1$ , а  $p_{d_i} = \frac{1}{2}$ . Тогда наилучшая оценка коллимационной погрешности  $\bar{C} = \frac{[d]}{2n}$ , а СКП измерения одного направления при одном положении круга

$$\mu = m_{\text{напр}} = \sqrt{\frac{[d^2] - \frac{[d]^2}{n}}{2(n-1)}}.$$

Коллимационная погрешность принимается значимой, если выполняется неравенство вида

$$|\bar{C}| \geq \frac{t_q m_{\text{напр}}}{\sqrt{2n}}.$$

### 16.3. Оценка точности угловых измерений по разностям в полуприемах

Этот прием оценки точности угловых измерений может быть применен при проложении теодолитных ходов технической точности.

Пусть измерено  $n$  углов при двух положениях круга, и при этом получены результаты

$$\beta_{\Pi_1}, \beta_{\Pi_2}, \dots, \beta_{\Pi_n};$$

$$\beta_{\text{Л}_1}, \beta_{\text{Л}_2}, \dots, \beta_{\text{Л}_n}.$$

Здесь все измерения равноточные. Следовательно, все измерения имеют вес, равный единице, т.е.  $p_{\Pi_i} = p_{\text{Л}_i} = 1$ . В случае измерения углов в теодолитных ходах технической точности нет оснований считать, что имеются значительные систематические погрешности при измерениях при двух положениях круга. Поэтому здесь вполне достаточно ограничиться первым вариантом оценки точности.

СКП единицы веса, т.е. СКП измерения угла одним полуприемом (п/п) может быть рассчитана по формуле

$$\mu = m_{n/n} = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (16.5)$$

а СКП измерения угла полным приемом — по формуле

$$m_{\beta} = \frac{m_{n/n}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (16.6)$$

Здесь следует сделать одно замечание. Оценку точности измерения углов можно выполнить в нескольких вариантах. При проложении системы ходов и полигонов оценка точности может быть выполнена по невязкам в полигонах и ходах. Кроме того, оценка точности может быть выполнена по разностям измерений при различных положениях круга на каждой станции. Несмотря на то, что оценка точности проводится по данным одних и тех же измерений, результаты оказываются, как правило, неодинаковыми. Как показывает практика, СКП измерения угла полным приемом, полученная по невязкам в полигонах и ходах, обычно в 1,5—2 раза больше, чем вычисленная по разностям двух измерений. И это не случайно. СКП, вычисленная по невязкам в полигонах и ходах, включает практически влияние всех источников погрешностей угловых измерений, в том числе погрешностей центрирования прибора, установки визирных целей, погрешностей, связанных с влиянием внешней среды, приборных и личных погрешностей исполнителя. При оценке точности по разностям двойных измерений целый ряд погрешностей, являясь случайным по происхождению, входит в каждое из измерений угла полуприемом, а следовательно, исключаются из разности. Так, в разность не входят погрешности центрирования прибора и установки визирных целей, в значительной степени компенсируются погрешности, связанные с влиянием внешней среды. В частности это относится к погрешностям, связанным с рефракцией. Поэтому оценка точности по невязкам в полигонах и ходах является более объективной, в большей степени отражающей весь процесс измерения угла. Оценка точности угловых измерений по разностям двух измерений, в основном, отражает качество работы самого прибора и исполнителя.

## 16.4. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Непосредственное измерение линий

Имеются пары измерений  $S'_1, S''_1, S'_2, S''_2, \dots, S'_N, S''_N$ , каждая из которых обладает, соответственно, весом  $p_i = \frac{1}{S_i}$ , где  $S_i$  — любое из измерений  $i$ -й пары.

Тогда в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает результат однократного измерения линии длиной в 1 м.

Если систематические погрешности отсутствуют ( $\theta = 0$ ), то СКП однократного измерения линии длиной в 1 м будет вычисляться по формуле

$$\mu_s = \sqrt{\frac{[d^2/S]}{2N}}, \quad (16.7)$$

а оценка ее надежности  $m_{\mu_s}$  — по формуле

$$m_{\mu_s} = \frac{\mu_s}{\sqrt{2N}}. \quad (16.8)$$

Теперь остановимся на вопросе исследования систематических погрешностей при измерении линий лентой. Отметим, что если каждое из измерений в паре содержит одинаковые систематические погрешности, то разность будет свободна от влияния систематики. При вычислении разности в любом случае происходит частичная компенсация. В связи с этим при обнаружении значимых систематических погрешностей следует говорить об «остаточных систематических погрешностях». В качестве характеристики последних введем величину

$$\tau = 2\theta = \frac{[d]}{[S]}, \quad (16.9)$$

где  $\theta$  — коэффициент остаточного систематического влияния, т.е. систематическая погрешность в разности двойного измерения линии длиной в 1 м.

Тогда СКП однократного измерения линии длиной в 1 м будет рассчитываться по формуле

$$\mu_s = \sqrt{\frac{[d^2 / S] - \tau^2 [S]}{2(N-1)}}. \quad (16.10)$$

Систематические влияния значимы, если выполняется неравенство вида

$$|\tau| > \frac{t_q \mu_s}{\sqrt{2[S]}}. \quad (16.11)$$

### **16.5. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Измерение линий свето- и радиодальномерами**

При выполнении полевых работ проведены измерения  $N$  линий в прямом и в обратном направлениях. Как уже было отмечено ранее, в достаточно широком диапазоне изменения длин линий измерение их следует признать равноточными. В данном случае имеется ряд пар измерений  $S'_1, S''_1, S'_2, S''_2, \dots, S'_N, S''_N$ , каждое из которых обладает единичным весом, т.е.  $p_i = 1$ . Если все измерения проводились одним и тем же прибором, то нет оснований предполагать, что «прямые» и «обратные» измерения будут иметь какие-либо систематические сдвиги. Поэтому в данном случае СКП измерения линии в одном направлении может быть рассчитано по формуле

$$\mu = m_s = \sqrt{\frac{[d^2]}{2N}}. \quad (16.12)$$

Двойка в знаменателе появилась в связи с тем, что разность  $d_i = S'_i - S''_i$  имеет вес, в два раза меньший, чем любой из результатов измерений, т.е.  $p_{d_i} = \frac{p_i}{2} = \frac{1}{2}$ .

### **16.6. Оценка точности нивелирования по разностям двойных измерений на станции**

Имеется  $N$  пар превышений  $h'_1, h''_1, h'_2, h''_2, \dots, h'_N, h''_N$ , причем каждая пара получена на одной из нивелирных станций. Здесь все измерения следует признать равноточными. В этом случае следует придать всем измерениям вес, равный единице, т.е. счи-

тать, что  $p_{h'_i} = p_{h''_i} = 1$ . В случае измерения превышений в нивелирных ходах технической точности нет оснований предполагать наличие значительных расхождений между двумя измерениями вследствие каких-либо систематических погрешностей. Поэтому здесь вполне достаточно ограничиться первым вариантом оценки точности.

СКО единицы веса, т.е. СКП измерения превышения по одной стороне рейки может быть рассчитана по формуле

$$\mu = m_h = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (16.13)$$

а СКП измерения превышения на станции — по формуле

$$m_{h_{ст}} = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (16.14)$$

### 16.7. Оценка точности нивелирования по разностям прямого и обратного превышений

Проложено  $N$  нивелирных ходов в прямом и в обратном направлениях. При этом получены результаты  $h'_1, h''_1, h'_2, h''_2, \dots, h'_N, h''_N$ . Длины ходов оказались равными  $L_1, L_2, \dots, L_N$ . Тогда каждому измеренному превышению (прямому либо обратному) можно приписать вес, равный  $p_i = \frac{1}{L_i}$ . В этом случае в качестве величины, обла-

дающей единичным весом, выступает результат измеренного превышения по одиночному ходу длиной в 1 км.

Если систематические погрешности отсутствуют ( $\theta = 0$ ), то СКП однократного измерения превышения по ходу в 1 км будет вычисляться по формуле

$$\mu_{h_{км}} = \sqrt{\frac{[d^2 / L]}{2N}}, \quad (16.15)$$

где  $d_i = h'_i - h''_i$ .

Оценка ее надежности  $m_{\mu_{h_{км}}}$  может быть рассчитана по формуле

$$m_{\mu_{h_{\text{км}}}} = \frac{\mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{2N}}. \quad (16.16)$$

Теперь остановимся на вопросе исследования систематических погрешностей при измерении превышений в прямом и в обратном направлениях. Отметим, что если каждое из измерений в паре содержит одинаковые систематические погрешности, то разность будет свободна от влияния таких систематических погрешностей. При вычислении разности в любом случае происходит частичная компенсация систематики. В связи с этим при обнаружении значимых систематических погрешностей следует говорить об «остаточных систематических погрешностях». В качестве характеристики последних введем величину

$$\tau = 2\theta = \frac{[d]}{[L]} \quad (16.17)$$

— коэффициент остаточного систематического влияния, т.е. систематическая погрешность в разности двойного измерения превышения по ходу длиной в 1 км.

Тогда СКП однократного измерения превышения по ходу длиной в 1 км будет рассчитываться по формуле

$$\mu_s = \sqrt{\frac{[d^2/L] - \tau^2 [L]}{2(N-1)}}. \quad (16.18)$$

Систематические влияния значимы, если выполняется неравенство вида

$$|\tau| > \frac{t_q \mu_{h_{\text{км}}}}{\sqrt{2[L]}}. \quad (16.19)$$

## 16.8. Примеры решения типовых задач

### Пример 16.1

Выполнить оценку точности угловых измерений по разностям двойных измерений (круг право КП и круг лево КЛ) направлений, измеренных теодолитом Т-30.

№ пп.	КП	КЛ	$d = \text{КП} - \text{КЛ}$	$d^2$
1	16°16'	13'	+ 3'	9
2	29 32	30	+ 2	4
3	44 46	45	+ 1	1
4	75 52	50	+ 2	4
5	116 21	19	+ 2	4
6	133 27	25	+ 2	4
7	141 14	11	+ 3	9
8	179 39	36	+ 3	9
[ ]			+ 18	44

### Решение

СКП измерения направления одним полуприемом получаем по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[d^2] - \tau^2 N}{2(N-1)}},$$

где  $\tau$  — двойная коллимационная погрешность,  $\tau = 2c = \frac{[d]}{N}$ .

СКП измерения направления полным приемом вычисляем по формуле  $m_{\beta} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$ , а ее надежность — по формуле  $m_{m_{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{2(N-1)}}$ .

Для решения вопроса о значимости коллимационной погрешности вычисляем величину  $\frac{3\mu}{\sqrt{N}}$  и сравниваем ее с модулем двойной коллимационной погрешности. Выполнив все вычисления, получаем  $\tau = +\frac{18}{8} = +2,2$ ;  $\mu = \sqrt{\frac{44-39}{14}} = 0,61'$ ;  $m_{\beta} = \frac{0,61'}{\sqrt{2}} = 0,43'$ ;  
 $m_{m_{\beta}} = \frac{0,43'}{\sqrt{14}} = 0,11'$ .

$$\text{Окончательно: } m_{\beta} = 0,4'; \quad \frac{3\mu}{\sqrt{N}} = \frac{3 \cdot 0,61'}{\sqrt{8}} = 0,64'.$$

Сравнивая полученную величину с величиной  $\tau$ , приходим к выводу о значимости коллимационной погрешности.

### Пример 16.2

Выполнить оценку точности линейных измерений по десяти разностям двойных измерений линий. Исследовать систематические погрешности

№ линии	$S'$ , м	$S''$ , м	$d$ , м	$\frac{d^2}{S}$
1	161,75	161,80	$-5 \cdot 10^{-2}$	$0,154 \cdot 10^{-4}$
2	217,24	217,32	$-8 \cdot 10^{-2}$	$0,295 \cdot 10^{-4}$
3	201,66	201,60	$+6 \cdot 10^{-2}$	$0,179 \cdot 10^{-4}$
4	175,49	175,49	$-4 \cdot 10^{-2}$	$0,091 \cdot 10^{-4}$
5	298,44	298,51	$-7 \cdot 10^{-2}$	$0,164 \cdot 10^{-4}$
6	363,14	363,10	$+4 \cdot 10^{-2}$	$0,044 \cdot 10^{-4}$
7	279,38	279,45	$-7 \cdot 10^{-2}$	$0,175 \cdot 10^{-4}$
8	112,75	112,78	$-3 \cdot 10^{-2}$	$0,080 \cdot 10^{-4}$
9	147,25	147,31	$-6 \cdot 10^{-2}$	$0,244 \cdot 10^{-4}$
10	220,12	220,20	$-8 \cdot 10^{-2}$	$0,291 \cdot 10^{-4}$
[ ]	2177		-0,38	$1,737 \cdot 10^{-4}$

#### Решение

Коэффициент случайного влияния в линейных измерениях, т.е. СКП измерения линии длиной в 1 м, вычисляем по формуле

$$\mu_s = \sqrt{\frac{\left[ \frac{d^2}{S} \right] - [S] \tau_s^2}{2(N-1)}},$$

где  $d_i = S'_i - S''_i$ ;  $\tau_s = \frac{[d]}{[S]}$  — коэффициент остаточного систематического влияния.

Оценку надежности величины  $\mu_s$  вычисляем по формуле

$m_{\mu_s} = \frac{\mu_s}{\sqrt{2(N-1)}}$ . Значимость систематической погрешности  $\tau_s$

определяем ее сравнением с величиной  $\frac{3\mu_s}{\sqrt{[S]}}$ . Выполнив все вычисления, получаем

$$\tau_s = -\frac{0,38}{2177} = -0,000174;$$

$$\mu_s = \sqrt{\frac{1,74 - 0,218 \cdot (1,74)^2}{19}} \cdot 10^{-2} = 0,0024 \text{ м};$$

$$m_{\mu_s} = \frac{0,0024}{\sqrt{18}} = 0,0006 \text{ м}.$$

$$\text{Окончательно: } \mu_s = 0,002 \text{ м}, \frac{3\mu}{\sqrt{[S]}} = \frac{3 \cdot 0,002}{\sqrt{2177}} = 0,00015.$$

Сравнивая последнюю величину с  $\tau_s$ , приходим к выводу о наличии остаточной систематической погрешности в разностях двойных измерений.

## 16.9. Задачи для самостоятельного решения

1. В таблице приведены значения углов, полученные в полуприемах.

№ угла	КП	КЛ
1	243° 15,0'	243° 15,5'
2	112 36,0	112 35,0
3	83 50,5	83 51,5
4	137 12,0	137 12,5
5	210 31,5	210 30,5

Оценить точность угловых измерений.

2. В таблице приведены результаты двойного измерения линии лентой

№ линии	Результаты измерений, м	
	Прямо	Обратно
1	215,75	215,65
2	184,19	184,16
3	154,27	154,35
4	341,82	341,54
5	243,14	243,12

Оценить точность линейных измерений и исследовать систематические погрешности.

3. В таблице приведены результаты двойного нивелирования и число станций в ходах. Оценить точность нивелирования и исследовать систематические погрешности.

№ хода	Превышение, м		Число станций в ходе
	Прямо	Обратно	
1	- 1,671	+ 1,680	26
2	+ 8,344	- 8,320	44
3	+ 5,973	- 5,980	21
4	- 0,669	+ 0,702	39
5	+0,127	- 0,140	25

### Вопросы для самопроверки

1. Какое условное уравнение возникает при двукратном измерении одной величины?

2. Оценку точности угловых измерений можно выполнить по разностям двойных измерений в полуприемах, а также по невязкам в полигонах и ходах. Какая из них наиболее объективно отражает качество угловых измерений в теодолитных ходах?

3. Как определить значимость коллимационной погрешности теодолита?

4. Почему при вычислении систематической погрешности по разностям двойных линейных измерений мы говорим об «остаточном коэффициенте систематического влияния»?

5. По какой формуле оценивают точность геометрического нивелирования по разностям превышений, полученных из прямого и обратного ходов?

## 17. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

### 17.1. Критерий определения слабодействующих и превалирующих источников погрешностей

Рассмотрим функцию  $y = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_n\lambda_n$  результатов независимых измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , точность которых характеризует-

ся СКП, соответственно равными  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Тогда на основании Теоремы 1 СКП функции определится соотношением

$$m_y = \sqrt{c_1^2 m_1^2 + c_2^2 m_2^2 + \dots + c_n^2 m_n^2}. \quad (17.1)$$

Каждое из слагаемых подкоренной суммы отражает влияние в среднем какого-либо источника в образовании полной погрешности функции  $y$ . Может оказаться, что некоторые из  $n$  слагаемых заметно превалируют над остальными, иначе говоря, может оказаться, что некоторые источники, порождающие погрешность функции, действуют гораздо сильнее остальных. Анализ погрешности функции  $y$  значительно упростился бы, если бы можно было пренебречь слабодействующими источниками погрешностей, т.е. в формуле (17.1) под корнем отбросить соответствующие члены и сосредоточить все внимание на превалирующих источниках погрешностей. Установление критерия, когда это можно делать без ущерба для существа дела, и является конечной целью анализа.

Представим выражение (17.1) в виде

$$m_y = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (17.2)$$

где  $A^2 = c_1^2 m_1^2 + c_2^2 m_2^2 + \dots + c_k^2 m_k^2$  — сумма первых  $k$  слагаемых, действие которых на погрешность функции будем считать превалирующим, а  $B^2 = c_{k+1}^2 m_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 m_{k+2}^2 + \dots + c_n^2 m_n^2$  — сумма остальных  $n - k$  членов, отражающих слабодействующие источники.

При сделанном допущении, очевидно, имеет место неравенство  $A > B$ . Если пренебречь слагаемыми, входящими в  $B$ , т.е. принять  $B = 0$ , получим для СКП функции  $y$  значение

$$m'_y = \sqrt{c_1^2 m_1^2 + c_2^2 m_2^2 + \dots + c_k^2 m_k^2}. \quad (17.3)$$

Здесь штрих при  $m_y$  означает, что эта величина получена с некоторым искажением. Будем измерять величину этого искажения с относительной ошибкой

$$q = \frac{m_y - m'_y}{m_y} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{A} = \sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2} - 1.$$

Последнее соотношение выражает зависимость между отношением  $\frac{B}{A}$  и относительной ошибкой  $q$  СКП функции  $y$ , вычисленной

по формуле (17.3) вместо формулы (17.1).

Известно, что точность определения СКП зависит от объема ряда результатов измерений, по которым она вычисляется, и характеризуется в среднем относительной погрешностью порядка  $1:\sqrt{2n}$ . Естественно потребовать, чтобы относительная погрешность  $q$  была меньше этой величины, т.е. выполнялось неравенство

$$q < \frac{1}{\sqrt{2n}}. \text{ Из последнего следует, что } n < \frac{1}{2q^2}.$$

В табл. 17.1 приведены числовые значения  $\frac{B}{A}$ ,  $q$  и  $n = \frac{1}{2q^2}$ .

Данным, приведенным в указанной таблице, можно дать следующее толкование. Если в конкретных условиях вместо формулы

(17.1) была применена формула (17.3), причем отношение  $\frac{B}{A}$  было

меньше указанного в табл. 17.1, например  $1/2$ , то это значит, что такая замена точной формулы приближенной приводит к относительной погрешности, не превосходящей  $0,12$ . Такая относительная погрешность равносильна той, которую содержала бы  $m_y$ , если бы последняя была вычислена по ряду результатов измерений, содержащему число членов, приведенное в соответствующей графе табл. 17.1, т.е. по 36 измерениям.

Таблица 17.1

**Относительная погрешность определения СКП**

$\frac{B}{A}$	$q$	$n = \frac{1}{2q^2}$
1/2	0,12	36
1/3	0,05	171
1/4	0,03	529
1/5	0,02	1275

В геодезической практике число  $n$  бывает, как правило, небольшим и почти всегда меньшим 36. Поэтому допустимое значение

отношения  $\frac{B}{A}$  можно было бы принять не превосходящим  $\frac{1}{2}$ . Одна-

ко, принимая некоторый «запас прочности», потребуем, чтобы это отношение не превосходило  $\frac{1}{3}$ . В этом случае  $q$  не превзойдет 5 %.

Такая относительная погрешность равносильна той, которую содержала бы  $m_y$ , если бы она была вычислена по 171 измерению.

Итак, приходим к выводу, что если

$$\frac{B}{A} \leq \frac{1}{3}, \quad (17.4)$$

то замена вычисления СКП  $m_y$  функции  $y$  вместо формулы (17.1) по формуле (17.3) приведет к погрешности, существенно меньшей, чем погрешность вычисления СКП по ограниченному числу результатов измерений. Но поскольку последние в практике геодезических измерений бывает редко больше 36, то неравенство (17.4) может служить *критерием ничтожности влияния источников погрешностей*.

Если вместо функции  $y = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_n\lambda_n$  пришлось бы рассматривать функцию нелинейного вида, то в этом случае все приведенные рассуждения можно было бы повторить, применив критерий (17.4) к соответствующей формуле, вытекающей из Теоремы 2. Для этого достаточно заменить постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$  соответствующими частными производными.

## 17.2. Об искажении СКП систематическими погрешностями

Пусть имеется ряд результатов измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  одной и той же физической величины. При этом  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  полные погрешности этих результатов измерений, состоящие из постоянной для данного ряда систематической погрешности  $\theta$  и случайных погрешностей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ .

Нередко возникает необходимость воспользоваться формулой (11.18) СКП, представляя в ней полные погрешности результатов

измерений, т.е.  $m' = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$ .

Очевидно, что в этом случае СКП будет искажена систематическими погрешностями. Именно поэтому в последней формуле СКП отмечена штрихом, указывающим, что она искажена. Рассмотрим величину этого искажения.

Выражая, согласно (11.4), полную погрешность  $\varepsilon$  через ее слагаемые, напишем

$$\varepsilon_i = \theta + \Delta_i.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат и вычислим математическое ожидание от обеих частей равенства

$$M(\varepsilon^2) = M(\theta + \Delta)^2.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства, учитывая, что систематическая погрешность является постоянной во всем ряду измерений:

$$M(\theta + \Delta)^2 = M(\theta^2 + 2\theta \cdot \Delta + \Delta^2) = \theta^2 + 2\theta M(\Delta) + M(\Delta^2).$$

На основании Аксиом 2 и 3 теории погрешностей имеем

$$2\theta M(\Delta) = 0 \text{ и } M(\Delta^2) = \sigma^2.$$

Окончательно получаем  $M(\varepsilon^2) = \theta^2 + \sigma^2$ .

Переходя от истинных значений показателей точности к их оценкам, имеем

$$m' = \sqrt{m^2 + \theta^2}. \quad (17.5)$$

Если применить здесь критерий ничтожности погрешности (17.4), то можно полагать, что оценка точности, выполненная по формуле (11.18), практически не будет искажена систематическими погрешностями, если выполняется неравенство

$$\frac{m}{\theta} > 3. \quad (17.6)$$

### 17.3. Априорная оценка точности

Часто при проектировании измерений возникает задача получения каких-либо величин с заданной наперед точностью. Для этого требуется провести расчет необходимой точности выполнения из-

мерения до начала измерений. Такую оценку точности в геодезии называют априорной.

Рассмотрим решение задачи априорной оценки точности на некоторых конкретных примерах.

### Пример 17.1

С какой точностью необходимо измерить радиус  $R$  круга, чтобы вычисленная площадь круга имела СКП не более  $q$ ?

*Решение*

Площадь круга вычисляют по формуле  $P = \pi R^2$ . СКП площади круга на основании Теоремы 2 может быть вычислена по формуле  $m_p = 2\pi R m_R$ , а предельная погрешность — по формуле  $\Delta_{\text{пред}} = 6\pi R m_R$ . Но по условию  $\Delta_{\text{пред}} = 6\pi R m_R \leq q$ . Из этого следует,

$$\text{что } m_R \leq \frac{q}{6\pi R}.$$

В этом простейшем случае используется *непосредственное определение* СКП измерений.

### Пример 17.2

С какой точностью необходимо измерить высоту  $h$  и основание  $a$  треугольника, чтобы вычисленная площадь этого треугольника имела СКП не более  $q$ ?

*Решение*

Как и в предыдущем примере, выразим значение площади через измеряемые величины  $P = \frac{1}{2}ah$ . СКП площади

$$m_p = \sqrt{\left(\frac{1}{2}hm_a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}am_h\right)^2} \leq q.$$

Тогда  $\left(\frac{1}{2}hm_a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}am_h\right)^2 \leq q^2$ . В этом случае задача не имеет

единственного решения, поэтому необходимо наложить какие-либо дополнительные ограничения. Здесь возможны два принципа.

1. *Принцип равных влияний*, который заключается в том, что каждое из измерений вносит равные по величине части в общую погрешность искомой величины. В этом случае получаем два неравенства:

$\left(\frac{1}{2}hm_a\right)^2 \leq 0,5q^2$  и  $\left(\frac{1}{2}am_h\right)^2 \leq 0,5q^2$ , решая которые, находим:

$$m_a \leq \frac{1,4q}{h} \text{ и } m_h \leq \frac{1,4q}{a}.$$

2. *Принцип равноточности.* Этот принцип может быть применен, когда измеряются однородные величины, близкие по размеру. На примере данной задачи принимаем, что  $m_a = m_h = m$ . Тогда СКП площади треугольника принимает вид

$$m_P = m \sqrt{\left(\frac{1}{2}h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} \leq q \text{ и } m \leq \frac{2q}{\sqrt{(a^2 + h^2)}}.$$

Выбор принципа вычисления зависит от конкретных условий, т.е. от имеющихся в наличии приборов, размеров измеряемых величин, удобства выполнения работ. Отметим только, что при  $a = h$  оба принципа дают один и тот же результат.

### Пример 17.3

С какой точностью необходимо измерить угол наклона  $\nu$  и горизонтальное проложение  $S$ , чтобы получить превышение с предельной погрешностью не более  $q$ ?

*Решение*

Превышение вычисляют по формуле  $h = S \cdot \operatorname{tg} \nu$ , а его предельную погрешность  $\Delta_{\text{пред}} = 3 \sqrt{(\operatorname{tg} \nu \cdot m_s)^2 + \left(\frac{S}{\cos^2 \nu} m_\nu\right)^2} \leq q$ . В этом случае необходимо руководствоваться принципом равного влияния. Тогда будем иметь  $(\operatorname{tg} \nu m_s)^2 \leq \frac{1}{9} 0,5q^2$  и  $\left(\frac{S}{\cos^2 \nu} m_\nu\right)^2 \leq \frac{1}{9} 0,5q^2$ , что дает возможность получить искомые величины

$$m_s \leq \frac{0,7q}{3 \operatorname{tg} \nu}; \quad m_\nu \leq \frac{0,7q \rho \cos^2 \nu}{3S}.$$

### Пример 17.4

С какой точностью необходимо измерить угол  $\alpha$  и две стороны  $a$  и  $b$  треугольника, чтобы его площадь  $P$  была получена с СКП, не превышающей  $q$ ?

### Решение

Площадь треугольника и его СКП определяют, соответственно, по формулам  $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$  и

$$m_p = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b \sin \alpha m_a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a \sin \alpha m_b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ab \cos \alpha m_a\right)^2} \leq q.$$

В этом случае для решения поставленной задачи целесообразно применить одновременно оба принципа: равного влияния и равноточности. Первый принцип применяется для всех слагаемых, а второй — для однородных слагаемых. Тогда

$$m_a = m_b = m \text{ и}$$

$$\left(\frac{1}{2}b \sin \alpha m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a \sin \alpha m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}ab \cos \alpha m_a\right)^2 \leq \frac{1}{3}q^2.$$

В этом случае получается некоторая неопределенность, связанная с первыми двумя равенствами, которые выполняются только при условии  $a = b$ . Здесь не будет большой ошибки, если расчет ведется по минимальному значению измеряемых сторон. Примем,

что  $a \leq b$ . Тогда  $\frac{1}{2}a \sin \alpha m \leq \frac{1}{\sqrt{3}}q$  и  $\frac{1}{2}ab \cos \alpha m_a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}q$ . Из последних неравенств получаем  $m \leq \frac{2q}{\sqrt{3}a \sin \alpha}$  и  $m_a \leq \frac{2qp}{\sqrt{3}ab \cos \alpha}$ .

### Пример 17.4

С какой точностью необходимо измерить превышение  $h$  и расстояние  $S$ , чтобы вычислить уклон  $i$  с погрешностью  $m_i < q$ ?

### Решение

Уклон вычисляется по формуле

$$i = \frac{h}{S},$$

а его СКП — по формуле

$$m_i = \sqrt{\frac{1}{S^2}m_h^2 + \frac{h^2}{S^4}m_S^2}.$$

На практике второе слагаемое существенно меньше. Тогда,

пользуясь *критерием ничтожности влияния*, можно пренебречь вторым слагаемым в подкоренном выражении. В этом случае имеем

$$m_i = \sqrt{\frac{1}{S^2} m_h^2}, \text{ или } \sqrt{\frac{1}{S^2} m_h^2} < q.$$

Окончательно получаем  $m_h < qS$ .

#### 17.4. Применение методов теории погрешностей при исследовании приборов

В некоторых пособиях [1] указывается, что СКП измерения угла на основании известных формул теории погрешностей уменьшается пропорционально корню квадратному из числа приемов измерения данного угла.

Однако в [4] приводится несколько иная зависимость, которая может быть представлена формулой вида

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{m_1^2}{n} + m_2^2}, \quad (17.7)$$

где  $m_1$  — СКП измерения одним приемом, характеризующая разброс случайных погрешностей от приема к приему. Назовем ее характеристикой «внутренней точности» измерения угла;  $n$  — число приемов;  $m_2$  — СКП измерения угла, характеризующая случайные погрешности, величины которых остаются практически неизменными от приема к приему, но варьируют от угла к углу. Назовем ее характеристикой «внешней точности» измерения угла.

Величина  $m_1$  может быть определена многократным измерением одного и того же угла. Для ее вычисления может быть использована известная формула Бесселя:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad (17.8)$$

где  $v_i = \bar{\lambda} - \lambda_i$ ;  $\bar{\lambda} = \frac{[\lambda]}{n}$ ,  $n$  — число приемов, с которым измерен данный угол.

При определении  $m_1$  следует выполнять измерение угла при неизменной центрировке, неизменных визирных целях и в наиболее короткие сроки, обеспечивающие неизменность внешних условий.

Величина  $m_2$  обычно связана с погрешностями в центрировании прибора и визирных целей, с боковой рефракцией и с другими погрешностями, связанными с влиянием внешней среды. Значение  $m_2$  может быть определено только косвенно, с использованием невязок в треугольниках, которые характеризуют полную погрешность измерения угла.

В цитируемом издании [4] приводятся следующие результаты исследования теодолита Т2 при измерении углов в триангуляции 1 разряда:

$$m_1 = 3,0''; n = 3; m_{\beta} = 5,0''.$$

Величина  $m_2$  может быть получена из соотношения

$$m_2 = \sqrt{5,0^2 - 3,0^2/n} = 4,7'',$$

т.е. практически «внешняя точность» измерения угла определяет в данных условиях общую точность угловых измерений. При любом сколь угодно большом числе приемов общая СКП измерения угла не может стать менее 4,7''.

Следует учесть, что при измерении углов в сетях триангуляции (и не только триангуляции), особенно в сетях специального назначения, большое влияние на точность измерения углов могут оказывать погрешности, определяющие «внешнюю точность», и тогда в каждом конкретном случае необходимо определять обе составляющие точности угловых измерений. Для решения этой задачи может быть предложена следующая методика.

На первом этапе, как это было указано ранее, выполняется серия наблюдений одного угла при одной установке прибора и визирных целей. Для этих целей выбирают наиболее «типичный угол», т.е. такой, который наиболее полно вбирал бы в себя все особенности измерений в данной сети.

В короткое время, не более двух-трех часов, производятся измерения этого угла по принятой методике. При этом измерения должны быть выполнены не менее чем 20—25 приемами, что вполне возможно сделать за указанный промежуток времени. Такое число

приемов обеспечивает получение величины  $m_1$  с погрешностью не более 15 %. Затем измеряют все углы сети с тем числом приемов, которое определено соответствующими нормативами. Невязки во всех треугольниках вычисляют по нарастающему числу приемов, т.е. сначала вычисляют невязки с использованием только результатов измерений первыми приемами, затем — по средним результатам из первых двух приемов, и т.д. Последние невязки подсчитывают по средним результатам из всех приемов. В таком случае представляется возможным получить целый ряд значений величины  $m_\beta$ , соответствующих различному числу приемов, что позволяет провести более тонкий анализ угловых измерений.

Приведем несколько примеров экспериментальных исследований точности угловых измерений по предложенной методике.

Первый опыт был проведен при построении триангуляции на учебном полигоне Государственного университета по землеустройству «Чкаловское» [2]. Длина сторон треугольников колебалась от 0,35 до 0,9 км. Измерения выполнялись теодолитом Theo-010 шестью приемами. Для получения характеристик «внутренней точности» измерения угла был измерен угол со сторонами примерно 0,6 км 25 приемами. При этом величина  $m_1$  оказалась равной 2,0". Построенная сеть содержала 47 треугольников. Величины СКП измерения угла, соответствующие различному числу приемов, вычислялись по формуле Ферреро:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3N}}.$$

В последней формуле  $N = 47$  — число треугольников в сети.

Полученные значения  $m_\beta$  и  $m_2$  приведены в табл. 17.2, при этом

величина  $m_2$  вычислялась по формуле  $m_2 = \sqrt{m_\beta^2 - m_1^2/n}$ , где  $n$  — число приемов.

Как видно из приведенной таблицы, величина  $m_2$  — некомпенсируемая часть полной погрешности измерения угла, является весьма значительной и соизмерима с точностью самого прибора.

Аналогичный опыт был поставлен на производственном объекте при построении сети триангуляции 4 класса со сторонами примерно 2 км. Сеть состояла из 16 треугольников, а измерения

выполнялись тем же теодолитом с числом приемов  $n = 9$ . Значение  $m_1$  было получено по измерениям одного из углов сети также 25 приемами и оказалось равным  $2,0''$ . Результаты вычислений значений  $m_\beta$  и  $m_2$  приведены в табл. 17.3.

Таблица 17.2

**Зависимость СКП измерения угла от числа приемов (первый опыт)**

Число приемов	1	2	3	4	5	6
$m_\beta^2$	8,84	6,77	6,29	5,78	5,66	5,51
$m_\beta$	3,0	2,6	2,5	2,4	2,4	2,4
$m_2$	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2

Таблица 17.3

**Зависимость СКП измерения угла от числа приемов (второй опыт)**

Число приемов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m_\beta^2$	5,83	4,94	3,40	3,76	4,08	3,71	3,68	3,73	3,72
$m_\beta$	2,4	2,2	1,8	1,9	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9
$m_2$	1,9	1,7	1,4	1,7	1,8	1,7	1,8	1,8	1,8

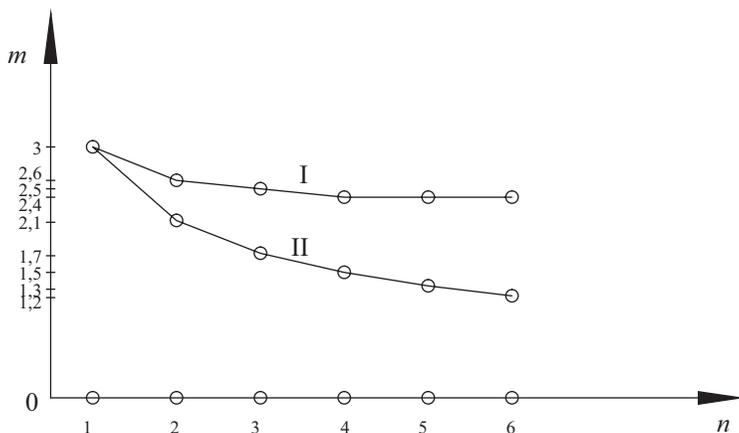


Рис. 17.1. Результаты первого опыта: I — данные опытов; II — данные расчетов по формуле  $m_n = m_\beta / \sqrt{n}$

По данным эксперимента построены графики изменения СКП измерения угла с изменением числа приемов (рис. 17.1 и 17.2). Там же представлены кривые, соответствующие известному соотношению между СКП среднего арифметического и числом приемов, по которым оно получено  $m_{\bar{p}} = m_p / \sqrt{n}$ .

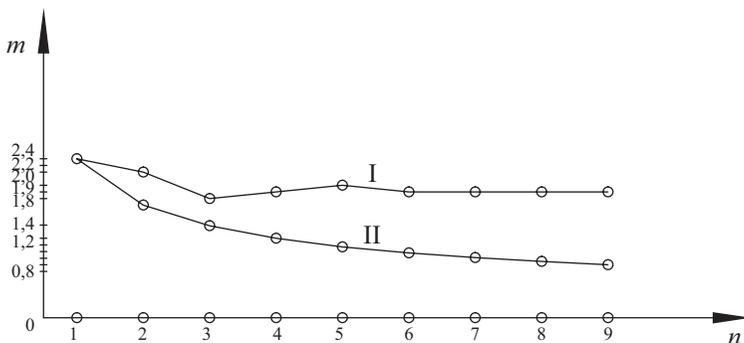


Рис.17.2. Результаты второго опыта: I — данные опытов;  
II — данные расчетов по формуле  $m_n = m_p / \sqrt{n}$

Как видно из представленных экспериментальных данных, точность угловых измерений в триангуляции не определяется числом выполненных приемов, если измерения производились в достаточно короткий срок без перецентрировки прибора и визирных целей. В этом случае значительное влияние оказывают неизменяющиеся от приема к приему погрешности измерения одного угла, которые, в конечном счете, и определяют окончательную точность угловых измерений.

Такие исследования, выполняемые на конкретных сетях, позволяют, с одной стороны, подобрать оптимальное для каждого конкретного случая число приемов, а с другой — подобрать методы, уменьшающие составляющую  $m_2$ .

Существуют и более тонкие методы исследования погрешностей угловых измерений, основанные на применении методов дисперсионного анализа, что будет показано далее.

## 17.5. Использование дисперсионного анализа при исследовании приборов

Результаты расчетов, приведенные в п. 17.4, показывают, что при увеличении числа приемов наблюдений СКП измерения углов не уменьшаются строго пропорционально корню квадратному из числа приемов. Следовательно, общая погрешность результата измерения угла содержит как компенсируемую, так и некомпенсируемую части.

Исходя из изложенного, можно принять, что невязки треугольников содержат информацию как о случайных (компенсируемых) погрешностях, так и о систематических погрешностях, некомпенсируемых при повторных наблюдениях каждого угла, но компенсируемых во всей системе треугольников.

Поэтому примем, что полную дисперсию невязок  $\sigma_w^2$  можно представить в виде

$$\sigma_w^2 = \sigma_{w_\Delta}^2 + \sigma_{w_0}^2,$$

где  $\sigma_{w_\Delta}^2$  — часть дисперсии невязок, характеризующая составляющую погрешностей, компенсируемых при повторных наблюдениях одного угла;  $\sigma_{w_0}^2$  — часть дисперсии невязок, характеризующая систематическую составляющую, некомпенсируемую при повторных наблюдениях одного угла.

Для проверки гипотезы о наличии систематических погрешностей, постоянных для каждого угла, но переменных между ними, предлагается использовать метод, суть которого сводится к следующему.

Пусть в сети триангуляции из  $N$  треугольников каждый из углов измерялся  $n$  приемами. На основе результатов измерений можно получить систему невязок  $w_{ij}$ , где  $i$  — номер треугольника, в котором рассчитывается невязка, а  $j$  — номер приема наблюдений, по которым невязка рассчитана. Полученные невязки можно представить в виде матрицы

$$W = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N1} & w_{N2} & \dots & w_{Nn} \end{vmatrix}.$$

Невязки  $w_{ij}$  равнозначны, так как получены по результатам равнозначных измерений. Оценку дисперсии невязок  $w_{ij}$  можно получить по трем различными формулам:

$$m_{w_1}^2 = \frac{1}{Nn-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w})^2; \quad (17.9)$$

$$m_{w_2}^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w}_i)^2; \quad (17.10)$$

$$m_{w_3}^2 = \frac{n}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{w}_i - \bar{w})^2, \quad (17.11)$$

где  $\bar{w}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{ij}$  — значения средней групповой невязки  $i$ -го треугольника из  $n$  приемов;

$\bar{w} = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{w}_i$  — общее среднее значение невязок.

Величина  $m_{w_1}^2$  является оценкой общей дисперсии невязок  $\sigma_{w_{\beta}}^2 = \sigma_{w_{\Delta}}^2 + \sigma_{w_{\theta}}^2$ ; величина  $m_{w_2}^2$  характеризует рассеяние невязок, полученных из отдельных  $j$ -х приемов в каждой  $i$ -й группе, вокруг средних групповых  $\bar{w}_i$  (т.е. рассеяние внутри групп) и оценивает случайную составляющую  $\sigma_{w_{\Delta}}^2$ , свободную от влияния систематических погрешностей.

Величина  $m_{w_3}^2$  показывает рассеяние всех невязок  $w_{ij}$  относительно  $\bar{w}$  и оценивает величину  $\sigma_{w_{\Delta}}^2 + n\sigma_{w_{\theta}}^2$ , т.е. отражает влияние систематической погрешности.

Если исходная совокупность невязок  $W$  не содержит переменных систематических погрешностей ( $\sigma_{w_{\theta}}^2 = 0$ ), то все три величины, вычисляемые по формулам (17.9), (17.10) и (17.11), являются несмещенными оценками дисперсии  $\sigma_{w_{\beta}}^2 = \sigma_{w_{\Delta}}^2$  совокупности  $W$ . В

этом случае отношение  $F = \frac{m_{w_3}^2}{m_{w_2}^2}$  оценивает единицу, хотя его выбо-

рочное значение может варьировать. Напротив, когда результаты наблюдений содержат систематические погрешности, это отношение оценивает величину

$$F = \frac{\sigma_{w_{\Delta}}^2 + n\sigma_{w_{\theta}}^2}{\sigma_{w_{\Delta}}^2}.$$

Поэтому критерием обнаружения систематических погрешностей служит неравенство

$$F \geq F_q^{(v_2; v_1)}, \quad (17.12)$$

где  $F_q^{(v_2; v_1)}$  — критическое значение распределения Фишера — Снедекора (Приложение 5), определяемое для заданного уровня значимости  $q$  и соответствующего числа степеней свободы  $v_2 = N - 1$  и  $v_1 = N(n - 1)$ .

Контроль вычисления оценок (17.9)—(17.11) основан на теореме дисперсионного анализа о разбиении суммы квадратов отклонений от общего среднего и осуществляется по формуле

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w})^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w}_i)^2 + n \sum_{i=1}^N (\bar{w}_i - \bar{w})^2. \quad (17.13)$$

Такой метод проверки гипотезы наличия систематических погрешностей является верным при условии нормального распределения невязок и равенства групповых дисперсий.

Для проверки выборочного распределения невязок целесообразно использовать критерий Пирсона (критерий  $\chi^2$ ).

Проверка гипотезы равенства групповых дисперсий

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_N^2 \quad (17.14)$$

может быть осуществлена с помощью критерия Бартлетта (8.10), а при одинаковом числе приемов для всех углов треугольников — критерием Кочрена (8.11)

$$G = \frac{m_{w_i(\max)}^2}{\sum_{i=1}^N m_{w_i}^2} \leq G_q^{(N;n)}, \quad (17.15)$$

где критическое значение  $G_q^{(N;n)}$  выбирают из таблиц «Критические точки распределения Кочрена» (Приложение 5).

Таким образом, выявление систематических погрешностей выполняется в следующем порядке:

1. По результатам измерений формируют матрицу невязок  $W$ .

2. Вычисляют средние групповые невязки  $\bar{w}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{ij}$ .

3. Вычисляют общую среднюю невязку  $\bar{w} = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{w}_i$ .

4. По формуле  $m_i^2 = \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w}_i)^2$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , вычисляют

оценки групповых дисперсий.

5. Используя значения невязок и средних невязок, с помощью критерия  $\chi^2$  решают вопрос о нормальном распределении невязок.

6. С помощью критерия Кочрена решают вопрос о равенстве групповых дисперсий.

7. По невязкам и средним невязкам вычисляют три суммы

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w})^2; \quad (17.16)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (w_{ij} - \bar{w}_i)^2; \quad (17.17)$$

$$\Sigma_3 = n \sum_{i=1}^N (\bar{w}_i - \bar{w})^2 \quad (17.18)$$

с контролем по формуле  $\Sigma_1 = \Sigma_2 + \Sigma_3$ .

8. Используя суммы (17.16)—(17.18), вычисляют оценки дисперсии (17.9), (17.10) и (17.11) по формулам

$$m_{w_1}^2 = \frac{1}{N(n-1)} \Sigma_1; \quad (17.19)$$

$$m_{w_2}^2 = \frac{1}{N(n-1)} \Sigma_2; \quad (17.20)$$

$$m_{w_3}^2 = \frac{1}{N-1} \Sigma_3. \quad (17.21)$$

9. С помощью критерия Фишера — Снедекора решают вопрос о наличии систематических погрешностей. Выполнение неравенства вида  $F \geq F_q^{(v_2; v_1)}$  свидетельствует о наличии систематических погрешностей.

10. При наличии систематических погрешностей вычисляют оценку полной дисперсии невязок и ее случайную и систематическую составляющие:

$$m_w^2 = m_{w_1}^2; \quad (17.22)$$

$$m_{w_\Delta}^2 = m_{w_2}^2; \quad (17.23)$$

$$m_{w_\theta}^2 = \frac{1}{n}(m_{w_3}^2 - m_{w_2}^2); \quad (17.24)$$

$$m_{w_0}^2 = (m_w^2 - m_{w_2}^2). \quad (17.25)$$

Оценки (17.24) и (17.25) могут несколько отличаться друг от друга, поэтому в качестве окончательной берут среднеарифметическое.

11. При отсутствии систематических погрешностей все три величины (17.22)—(17.25) оценивают одну и ту же дисперсию и статистически равны. В качестве окончательной обычно берут общую оценку (17.24).

12. От оценок дисперсий невязок переходят к оценкам дисперсий углов:

$$m_\beta^2 = \frac{1}{3}m_w^2; \quad (17.26)$$

$$m_{\beta_\Delta}^2 = \frac{1}{3}m_{w_\Delta}^2; \quad (17.27)$$

$$m_{\beta_\theta}^2 = \frac{1}{3}m_{w_\theta}^2. \quad (17.28)$$

По этой методике были обработаны ряды невязок для указанных в предыдущем параграфе объектов. Проверка гипотезы выборочного распределения показала, что для угловых невязок оно с большой вероятностью аппроксимируется нормальным законом для обоих объектов.

Проверка гипотезы (17.15) дала результаты, представленные в табл. 17.4.

Таким образом, гипотеза равенства дисперсий групповых невязок подтвердилась для каждого объекта наблюдений.

Вычисление сумм квадратов отклонений невязок по формулам (17.16)—(17.18) дало следующие результаты (табл. 17.5).

Таблица 17.4

№ объекта	$G = \frac{m_{w_i(\max)}^2}{\sum_{i=1}^N m_{w_i}^2}$	$(v_2; v_1)$	$G_q^{(N;n)}$ при $q = 0,05$
I	$24,9/387 = 0,064$	(47; 6)	0,088
II	$21,4/125 = 0,170$	(16; 9)	0,175

Таблица 17.5

№ объекта	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	$\Sigma_3$
I	6 277	1 934	4 342
II	2 624	1 063	1 562

Оценки дисперсий, рассчитанные по формулам (17.19)—(17.21), имеют значения, показанные в табл. 17.6.

Таблица 17.6

№ объекта	$m_{w_1}^2$	$m_{w_2}^2$	$m_{w_3}^2$
I	22,34	8,23	94,39
II	17,26	7,84	97,65

Критерий Фишера — Снедекора дает результаты, показанные в табл. 17.7.

Таблица 17.7

№ объекта	$F = \frac{m_{w_3}^2}{m_{w_2}^2}$	$(v_2; v_1)$	$F_q^{(v_2; v_1)}$ при $q = 0,05$
I	$94,39/8,23 = 11,5$	(46; 235)	1,5
II	$97,65/7,84 = 12,46$	(15; 128)	2,1

Полученные результаты свидетельствуют о наличии систематических погрешностей как в первой, так и во второй схемах наблюдений.

Тогда оценку дисперсий наблюдений угла одним приемом можно рассчитать в соответствии с формулами (17.26)—(17.28), как показано в табл. 17.8.

Таблица 17.8

№ объекта	$m_{\beta}^2$	$m_{\beta_{\Delta}}^2$	$m_{\beta_0}^2$
I	7,4	2,7	4,7
II	5,8	2,6	3,2

По этим данным можно вычислить СКП измерения угла различным числом приемов по формуле  $m_{\beta/n} = \sqrt{\frac{m_{\beta_{\Delta}}^2}{n} + m_{\beta_0}^2}$  (табл. 17.9).

Таблица 17.9

№ объекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,3	—	—	—
II	2,4	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9

Полученные данные хорошо согласуются с данными, приведенными в табл. 17.2 и 17.3.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. СКП результата измерения угла на пункте не уменьшается пропорционально квадратному корню из числа приемов в связи с наличием систематической (некомпенсируемой) части в каждом отдельном наблюдении. Поэтому число повторных наблюдений, выполняемых на пункте с одной установки прибора, можно разумно сократить.

2. Систематические погрешности, порождаемые влиянием центрировок, редуций, внешней среды, средств измерения и других источников, остаются постоянными на одном пункте, но меняются от пункта к пункту. Величина переменных систематических погрешностей соизмерима с классом точности угломерных приборов.

3. Для повышения точности угловых измерений в сетях с короткими сторонами следует ослаблять влияние погрешностей центрировок и редуций перецентрировкой прибора и визирных марок между повторными наблюдениями (приемами).

4. При проектировании и рекогносцировке геодезических сетей следует обратить внимание на удаленность визирного луча от препятствий, порождающих боковую рефракцию.

## Темы и вопросы для самопроверки

1. Два источника формируют полную погрешность результата измерения. При каких соотношениях СКП этих источников погрешностей можно считать один из них слабодействующим?

2. Полные погрешности результатов измерений содержат как случайные, так и систематические погрешности. При каких условиях можно пренебречь систематическими погрешностями при расчете СКП измерений?

3. Что собою представляет априорная оценка точности результатов измерений?

4. Какие принципы можно закладывать в априорную оценку точности?

5. Приведите примеры априорной оценки точности с применением различных принципов.

6. Возможно ли методику, изложенную в п. 17.4, применить для исследования нивелиров? Если можно, то опишите схему исследования с приложением необходимых формул.

7. При каких условиях допустимо применение дисперсионного анализа?

8. Что пытаются выявить методом дисперсионного анализа при исследовании угловых измерений в триангуляции?

## **Раздел IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

### **18. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

#### **18.1. Общие соображения**

Классическая теория погрешностей исходит из постулата о независимости результатов измерений, и все формулы оценки точности базируются на этом положении. Однако далеко не всегда это может быть оправдано. Естественно, что учет зависимости между отдельными результатами измерений требует применения иных, более общих теоретических положений и предполагает выполнение более значительного объема вычислений. В связи с этим возникает задача выявления тех случаев, когда учет зависимости целесообразен, несмотря на дополнительные вычислительные работы, и тех случаев, когда зависимостью между отдельными результатами измерений можно пренебречь.

В подавляющем большинстве случаев при изложении теории математической обработки результатов геодезических измерений за исходный предмет исследования принимается некоторый абстрактный ряд равноточных или неравноточных измерений, априори принимаемый состоящим из независимых членов. Такая модель измерений лежит в основе классической теории ошибок.

Однако многие примеры из практики геодезических измерений указывают на то, что последнее допущение не всегда правомерно.

С формальной позиции зависимыми результатами измерений следует считать такие, вероятность появления которых зависит от того, какие конкретные значения получили предыдущие результаты измерений.

Рассмотрим два результата измерения  $l_{x_i} = x_i$  и  $l_{y_i} = y_i$  как реализацию системы случайных величин  $(X, Y)$  с плотностью распределения  $f(x, y)$ . Если выполняется равенство

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y), \quad (18.1)$$

где  $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$  и  $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$  — плотности маргинальных распределений случайных величин  $l_x$  и  $l_y$ , то случайные величины *независимы*.

Равенству (18.1) равносильно равенство

$$f_y(y/x) = f_y(y), \quad (18.2)$$

т.е. в случае независимости случайных величин  $X$  и  $Y$  плотность условного распределения случайной величины  $Y$  будет равна плотности ее маргинального распределения. В случае, когда имеет место неравенство

$$f_y(y/x) \neq f_y(y), \quad (18.3)$$

случайные величины  $X$  и  $Y$  будут *зависимыми*.

Однако на практике такое решение задачи по выявлению зависимости между двумя рядами измерений может вызвать значительные трудности, так как априори плотность совместного распределения двумерной случайной величины  $(X, Y)$  остается неизвестной. Тогда можно рассмотреть более простую задачу по изучению изменения математического ожидания случайной величины  $Y$  в зависимости от значений  $x$ , принимаемых случайной величиной  $X$ . Такое упрощенное выражение зависимости обычно называют *корреляцией*  $Y$  от  $X$ .

Условное математическое ожидание случайной величины  $Y$

$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_y(Y/x)dy \quad (18.4)$$

есть некоторая функция  $\varphi(x)$  от реализаций  $x$  случайной величины  $X$ , т.е.

$$M(Y/x) = \varphi(x), \quad (18.5)$$

называемой *уравнением регрессии*.

Если линия регрессии прямая, то такой случай называют *линейной корреляцией* случайной величины  $Y$  на  $X$ . В противном случае говорят о *нелинейной корреляции*.

В отношении практики измерений естественный интерес вызывают причины возникновения зависимости в различных результатах измерений.

В работе [3] рассматриваются три основных типа зависимости (корреляции) результатов измерений:

1. Физическая корреляция;
2. Математическая корреляция;
3. Нормативная корреляция.

Рассмотрим только первую из них.

## 18.2. Математические модели возникновения физической корреляции

Можно предположить несколько схем возникновения зависимости результатов измерений.

**Схема 1.** Предположим, что выполняются *синхронные измерения* двух однородных физических величин  $X$  и  $Y$ , истинные значения которых, соответственно, равны  $L_X$  и  $L_Y$ . Под синхронными измерениями будем понимать такие, при которых одному и тому же моменту времени  $t_i$  соответствует пара измерений  $l_{x_i} = x_i$  и  $l_{y_i} = y_i$  этих величин.

Каждую пару синхронных наблюдений можно представить в виде:

$$\begin{aligned}x_i &= l_{x_i} = L_X + \Delta_{x_i}; \\y_i &= l_{y_i} = L_Y + \Delta_{y_i},\end{aligned}\tag{18.6}$$

где  $\Delta_{x_i}$  и  $\Delta_{y_i}$  — случайные погрешности рассматриваемой пары.

В результате воздействия общих факторов, имеющих место при синхронных наблюдениях, случайные ошибки  $\Delta_{x_i}$  и  $\Delta_{y_i}$  будут содержать общую составляющую  $\Delta_i$ . Кроме того, каждая случайная погрешность  $\Delta_{x_i}$  и  $\Delta_{y_i}$  будет иметь свои индивидуальные части  $\delta_{x_i}$  и  $\delta_{y_i}$ , обусловленные особенностями каждого индивидуального измерения.

Наложим на величины  $\Delta_i$ ,  $\delta_{x_i}$  и  $\delta_{y_i}$  некоторые, вполне допустимые ограничения.

1. Индивидуальные и общие погрешности взаимно независимы, т.е. имеют место равенства

$$M(\Delta\delta_x) = M(\Delta\delta_y) = M(\delta_x\delta_y) = 0. \quad (18.7)$$

2. Все погрешности являются величинами случайными, с нулевым математическим ожиданием (отсутствуют систематические погрешности)

$$M(\Delta) = M(\delta_x) = M(\delta_y) = 0. \quad (18.8)$$

3. Дисперсии, соответственно, равны  $\sigma_\Delta^2$ ,  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$ .

В этом случае дисперсии результатов синхронных измерений будут иметь вид:

$$\sigma_{l_x}^2 = \sigma_\Delta^2 + \sigma_x^2;$$

$$\sigma_{l_y}^2 = \sigma_\Delta^2 + \sigma_y^2.$$

Коэффициент корреляции вычисляют по известной из теории вероятностей формуле

$$r_{1,2} = \frac{\text{cov}(l_1, l_2)}{\sqrt{D(l_1)D(l_2)}}. \quad (18.9)$$

При заданных условиях можно рассчитать ковариацию (корреляционный момент) системы случайных величин  $(X, Y)$ :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \text{cov}(l_x, l_y) = \text{cov}(L_x + \Delta + \delta_x; L_y + \Delta + \delta_y) = \\ &= M\left\{(L_x + \Delta + \delta_x)(L_y + \Delta + \delta_y)\right\} - M(L_x + \Delta + \delta_x)M(L_y + \\ &+ \Delta + \delta_y) = M(L_x L_y + L_x \Delta + L_x \delta_y + L_y \Delta + \Delta \Delta + \Delta \delta_y + L_y \delta_x + \\ &+ \Delta \delta_x + \delta_x \delta_y) - L_x L_y = L_x L_y + L_x M(\Delta) + L_x M(\delta_y) + L_y M(\Delta) + \\ &+ L_y M(\Delta) + M(\Delta^2) + M(\Delta \delta_y) + L_y M(\delta_x) + M(\Delta \delta_x) + M(\delta_x \delta_y) - \\ &\quad - L_x L_y = M(\Delta^2), \end{aligned}$$

т.е.  $\text{cov}(l_x, l_y) = M(\Delta^2)$ . По определению дисперсии имеем  $\sigma_\Delta^2 = M(\Delta^2) - M^2(\Delta)$ . Но на основании (18.8) имеем  $M(\Delta) = 0$ . Следовательно, окончательно получаем

$$\text{cov}(l_x, l_y) = \sigma_\Delta^2.$$

Таким образом, ковариация двух результатов синхронных измерений равна дисперсии общей части погрешностей этих измерений.

Рассчитаем коэффициент корреляции  $r_{xy}$  результатов измерений:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(l_x l_y)}{\sqrt{(\sigma_\Delta^2 + \sigma_x^2)(\sigma_\Delta^2 + \sigma_y^2)}} = \frac{\sigma_\Delta^2}{\sqrt{(\sigma_\Delta^2 + \sigma_x^2)(\sigma_\Delta^2 + \sigma_y^2)}}. \quad (18.10)$$

При условии равнозначности синхронных измерений, т.е. при  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$  полные дисперсии результатов измерений будут представлены в форме  $\sigma_{l_x}^2 = \sigma_{l_y}^2 = \sigma_\Delta^2 + \sigma^2 = \sigma_l^2$ , а выражение (18.10) принимает вид

$$r_{xy} = \frac{\sigma_\Delta^2}{\sigma_l^2}. \quad (18.11)$$

Предположим, что СКО частных и общей составляющих связаны соотношением

$$\sigma_\Delta = K\sigma. \quad (18.12)$$

Тогда коэффициент корреляции может быть представлен в форме

$$r_{xy} = \frac{K^2}{1 + K^2}. \quad (18.13)$$

Таблица 18.1

**Общая погрешность и коэффициент корреляции**

№	$K$	$r$	$q$	№	$K$	$r$	$q$
1	0	0	0	11	10	0,990	90,9
2	0,1	0,0099	9,9	12	20	0,9975	95,2
3	0,25	0,06	20,0	13	30	0,9989	96,8
4	0,5	0,2	33,3	14	40	0,9994	97,6
5	0,75	0,36	42,9	15	50	0,9996	98,0
6	1	0,5	50,0	16	60	0,99972	98,4
7	2	0,8	66,6	17	70	0,99980	98,6
8	3	0,9	75,0	18	80	0,99984	98,8
9	4	0,941	80,0	19	90	0,99988	98,9
10	5	0,961	83,3	20	100	0,99990	99,0

Зная коэффициент корреляции, можно рассчитать процент  $q$  общей части погрешности синхронных измерений в полной погрешности:

$$q = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_l} 100 \% = \frac{K}{1 + K} 100 \%. \quad (18.14)$$

В табл. 18.1 приведены значения коэффициента корреляции и доли общей части погрешности, выраженной в процентах, в зависимости от выбранного значения коэффициента  $K$ .

Примером таких измерений могут служить синхронные наблюдения двумя приемниками GPS.

**Схема 2.** В этой схеме рассмотрим пару величин как функции результатов независимых равноточных измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_3}, \lambda_{k_4}, \dots, \lambda_{k_5}$

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} + \dots + \lambda_{k_3} \text{ и} \\ y_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k_1} + \lambda_{k_4} + \dots + \lambda_{k_5}. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Примем, что дисперсия  $\lambda_i$  равна  $D(\lambda_i) = \sigma_{\lambda}^2$ . Каждая из рассматриваемых функций  $y_1$  и  $y_2$  содержит группу общих слагаемых  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1})$ .

При таких условиях

$$\begin{aligned} D(y_1) &= k_1 D(\lambda) + (k_3 - k_2) D(\lambda) = \sigma_{\lambda}^2 (k_1 + k_3 - k_2); \\ D(y_2) &= k_1 D(\lambda) + (k_5 - k_4) D(\lambda) = \sigma_{\lambda}^2 (k_1 + k_5 - k_4); \\ \text{cov}(y_1, y_2) &= k_1 D(\lambda) = \sigma_{\lambda}^2 k_1. \end{aligned} \quad (18.16)$$

Тогда коэффициент корреляции

$$r_{1,2} = \frac{k_1}{\sqrt{(k_1 + k_3 - k_2)(k_1 + k_5 - k_4)}}. \quad (18.17)$$

По сути, формула (18.17) полностью соответствует формуле (18.10), т.е. коэффициент корреляции равен отношению общей части дисперсии двух величин (функций) к корню квадратному из произведения дисперсий каждой величины (функции).

### 18.3. Случайный вектор и его числовые характеристики

Рассмотрим вектор  $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$ , где  $X_i$  — случайные величины,

$i = 1, \dots, n$ . Такой вектор называется случайным. Ему соответству-

ет неслучайный вектор  $\vec{M}(X) = \begin{pmatrix} M(X_1) \\ M(X_2) \\ \dots \\ M(X_n) \end{pmatrix}$ , называемый вектором

математических ожиданий.

Вектору  $\vec{X}$  можно сопоставить несколько квадратных матриц.

#### 1. Ковариационная матрица

$$\mathbf{K}_X = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \text{cov}(X_i X_j) = \mathbf{M}(X_i X_j) - \mathbf{M}(X_i)\mathbf{M}(X_j) = \\ &= \mathbf{M}\left\{[(X_i) - \mathbf{M}(X_i)][(X_j) - \mathbf{M}(X_j)]\right\} \end{aligned}$$

— ковариация случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ .

Матрица  $\mathbf{K}_X$  симметрична относительно главной диагонали, так как  $K_{ij} = K_{ji}$ .

Но  $K_{ii} = \text{cov}(X_i X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = D(X_i)$ , т.е. на главной диагонали ковариационной матрицы стоят дисперсии элементов вектора  $\vec{X}$ .

В матричной форме ковариационную матрицу вектора  $\vec{X}$  можно представить в виде

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{M}\left\{[X - \mathbf{M}(X)][X - \mathbf{M}(X)]^T\right\}. \quad (18.18)$$

Поскольку ковариационная матрица  $\mathbf{K}_X$  представляет собой произведение матрицы на транспонированную, она имеет определитель Грама, т.е. ее определитель отличен от нуля и, следовательно, существует матрица  $\mathbf{K}^{-1}$ , обратная к матрице  $\mathbf{K}$ , т.е.  $\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{E}$ .

## 2. Матрица коэффициентов корреляции

Также из теории вероятностей известно соотношение

$$r_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i X_j)}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (18.19)$$

где  $r_{ij}$  — коэффициент корреляции случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ ;  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  — СКО случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ .

Тогда можно представить матрицу коэффициентов корреляции

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где на главной диагонали которой стоят единицы, а на месте  $(ij)$  — коэффициент корреляции  $r_{ij}$  случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ . Эта матрица также симметрична относительно главной диагонали, так как

$$r_{ij} = r_{ji}.$$

## 3. Диагональная матрица весов

Матрица весов

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix},$$

где  $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$  — вес случайной величины  $X_i$ , а  $\sigma_0^2$  — дисперсия величины с единичным весом.

## 4. Диагональная матрица обратных весов

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}.$$

5. Диагональная матрица

$$\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{bmatrix}.$$

Для всех представленных матриц можно записать следующие соотношения:

1.  $\mathbf{K} = \bar{\sigma}^T \mathbf{R} \sigma;$
2.  $\sigma = \sigma_0 \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}};$
3.  $K = \sigma_0^2 \left( \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \right);$
4.  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}.$

(18.20)

Следует отметить, что в равенстве (18.20(3)) на главной диагонали матрицы  $\left( \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \right)$  стоят обратные веса вектора  $\bar{\mathbf{X}}$ .

Если элементы матрицы  $\mathbf{X}$  — независимые случайные величины, то  $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ , так как все  $r_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

В этом случае ковариационная матрица имеет вид

$$\mathbf{K} = \sigma_0^2 \left( \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{E} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \right) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Если элементы вектора равноточны, т.е.  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица, то

$$\mathbf{K} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_0^2 \end{bmatrix}. \quad (18.21)$$

#### 18.4. Оценка точности функций зависимых результатов измерений

Оценка точности линейной функции зависимых результатов измерений может быть проведена в соответствии с Теоремой 6, являющейся обобщением Теоремы 1 на случай зависимых результатов измерений.

##### Теорема 6

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ряд результатов измерений. Результаты измерений, полученные в таких условиях, которые обеспечивают точность, характеризующуюся, соответственно, систематическими погрешностями  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  и корреляционной матрицей  $\mathbf{R}$ . По этим результатам измерений получена их линейная функция вида  $y = C_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n$ , где все  $C_i$  ( $i = 0, n$ ) — теоретические постоянные. Тогда систематическая погрешность и дисперсия этой функции могут быть вычислены, соответственно, по формулам

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \dots + C_n\theta_n; \quad (18.22)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} C_i C_j \sigma_i \sigma_j r_{ij}. \quad (18.23)$$

### Доказательство

Доказательство проведем аналогично доказательству Теоремы 1.

Пусть  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — истинные значения измеряемых величин, а  $Y$  — истинное значение их линейной функции. Тогда будет верно равенство

$$Y = C_0 + C_1L_1 + C_2L_2 + \dots + C_nL_n. \quad (\text{а})$$

По результатам измерений функция  $Y$  принимает значение

$$y = C_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n. \quad (\text{б})$$

Для расчета погрешности линейной функции из равенства (б) вычитаем равенство (а) и получаем

$$y - Y = C_0 + C_1(\lambda_1 - L_1) + \dots + C_n(\lambda_n - L_n). \quad (\text{в})$$

В соответствии с Аксиомой 1 имеем

$$\varepsilon_i = \lambda_i - L_i. \quad (\text{г})$$

Принимая  $y - Y = \varepsilon_y$  как погрешность функции, формуле (в) с учетом (г) можно придать вид

$$\varepsilon_y = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n. \quad (\text{д})$$

От погрешностей результатов измерений перейдем к их математическим ожиданиям:

$$M(\varepsilon_y) = M(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n). \quad (\text{е})$$

Учитывая свойства математического ожидания (4.1), (4.2) и принимая во внимание, что  $M(\varepsilon_y) = \theta_y$  и  $M(\varepsilon_i) = \theta_i$ , равенству (д) можно придать вид (12.1).

Как видно из последней формулы, *зависимость результатов измерений не оказывает влияние на систематическую погрешность функции.*

Вычислим дисперсию левой и правой частей равенства (д):

$$D(\varepsilon_y) = D(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n). \quad (\text{ж})$$

Учитывая свойства дисперсии (4.7), (4.8), (4.9) и принимая во внимание, что  $D(\varepsilon_y) = \sigma_y^2$  и  $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ , равенству (ж) можно придать вид (18.23), что полностью доказывает Теорему 6.

Для нелинейной дифференцируемой функции также можно сформулировать аналогичную Теорему 7.

### Теорема 7

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ряд *результатов независимых измерений*, полученный в таких условиях, которые обеспечивают точность, характеризующуюся, соответственно, систематическими погрешностями  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  и матрицей коэффициентов корреляции  $\mathbf{R}$ . По этим результатам измерений получена их дифференцируемая функция вида  $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Тогда систематическая погрешность и дисперсия этой функции могут быть вычислены, соответственно, по формулам

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \theta_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \theta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \theta_n; \quad (18.24)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \sigma_i \right)^2 + 2 \sum \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \sigma_i \sigma_j r_{ij}. \quad (18.25)$$

Доказательство этой теоремы здесь не приводится.

Обобщением Теоремы 6 для дисперсии является известная теорема теории вероятностей, которую представим здесь в виде Теоремы 8.

### Теорема 8

Пусть вектор  $\bar{Y}$  получен линейным преобразованием  $\mathbf{B}$  из вектора  $\bar{X}$ , имеющего ковариационную матрицу  $\mathbf{K}_X$ . Тогда ковариационная матрица вектора  $\bar{Y}$  может быть получена из соотношения

$$\mathbf{K}_Y = \mathbf{B} \mathbf{K}_X \mathbf{B}^T. \quad (18.26)$$

#### Доказательство

Математическое ожидание вектора  $\bar{Y}$  выражается соотношением к математическому ожиданию вектора  $\bar{X}$  как  $\mathbf{M}(Y) = \mathbf{B} \mathbf{M}(X) + \mathbf{B}_0$ .

Ковариационная матрица вектора  $\bar{Y}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_Y &= \left\{ \mathbf{M} \left[ \mathbf{Y} - \mathbf{M}(Y) \right] \left[ \mathbf{Y} - \mathbf{M}(Y) \right]^T \right\} = \mathbf{M} \left\{ \left[ \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{B}_0 - \mathbf{B} \mathbf{M}(X) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{B}_0 \right] \left[ \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{B}_0 - \mathbf{B} \mathbf{M}(X) - \mathbf{B}_0 \right]^T \right\} = \mathbf{M} \left\{ \left[ \mathbf{B} \mathbf{X} - \mathbf{B} \mathbf{M}(X) \right] \left[ \mathbf{B} \mathbf{X} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{B} \mathbf{M}(X) \right]^T \right\} = \mathbf{M} \left\{ \mathbf{B} \left[ \mathbf{X} - \mathbf{M}(X) \right] \mathbf{B}^T \left[ \mathbf{X} - \mathbf{M}(X) \right]^T \right\} = \\ &= \mathbf{B} \mathbf{M} \left\{ \left[ \mathbf{X} - \mathbf{M}(X) \right] \mathbf{B}^T \left[ \mathbf{X} - \mathbf{M}(X) \right]^T \right\} = \mathbf{B} \mathbf{K}_X \mathbf{B}^T, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Сделаем некоторые пояснения к Теореме 8:

Пусть вектор  $\vec{X}$  имеет размерность  $(n \times 1)$ . Линейное преобразование вектора  $\vec{X}$  в вектор  $\vec{Y}$  размерностью  $(t \times 1)$  задается матрицей  $\mathbf{B}$  размерностью  $(t \times n)$ . Это преобразование в матричной форме имеет вид

$$\vec{Y} = \mathbf{B}\vec{X} + \mathbf{B}_0.$$

В развернутом виде это выглядит так:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + b_{10}; \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n + b_{20}; \\ &\dots\dots\dots \\ y_t &= b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \dots + b_{tn}x_n + b_{t0}. \end{aligned}$$

При таком преобразовании вектор  $\vec{Y}$  будет иметь ковариационную матрицу, вычисляемую по формуле (18.26).

Следует отметить, что столбец свободных членов  $\mathbf{B}_0$  не влияет на вид ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_Y$ .

### 18.5. Обработка ряда зависимых результатов измерений одной величины

Рассмотрим вариант обработки рядов зависимых результатов измерений одной физической величины. Пусть задан вектор результатов измерений  $\vec{\lambda} = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , имеющий матрицу коэффициентов корреляции  $\mathbf{R}_\lambda$  и весовую матрицу  $\mathbf{P}$ .

Известно [3], что наилучшей оценкой истинного значения  $L$  будет величина, рассчитываемая по формуле

$$\bar{\lambda} = \frac{\vec{S}^T \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \vec{\lambda}}{\vec{S}^T \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \vec{S}}, \quad (18.27)$$

где  $\vec{S}$  — столбец-сумматор, имеющий вид  $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Апостериорная оценка точности включает в себя вычисление следующих величин.

1. Квадрата среднеквадратической погрешности единицы веса

$$\mu^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}}{n-1}. \quad (18.28)$$

2. Веса уравненного значения измеряемой величины

$$p_{\bar{\lambda}} = [\pi], \quad (18.29)$$

где  $[\pi] = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n$ , причем  $\pi_i$  представляет собой сумму элементов матрицы  $\mathbf{R}^{-1}$ , расположенных в  $i$ -й строке.

3. Среднеквадратической погрешности уравненного значения

$$m_{\bar{\lambda}} = \mu \sqrt{1/p_{\bar{\lambda}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[\pi]}}. \quad (18.30)$$

4. Среднеквадратических погрешностей результатов непосредственных измерений

$$m_i = \mu \sqrt{1/p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (18.31)$$

Следует отметить, что формуле (18.27) можно придать вид

$$\bar{\lambda} = \frac{[\pi\lambda]}{[\pi]} = \frac{\pi_1}{[\pi]} \lambda_1 + \frac{\pi_2}{[\pi]} \lambda_2 + \dots + \frac{\pi_n}{[\pi]} \lambda_n, \quad (18.32)$$

т.е.  $\pi_i$  можно рассматривать как «вес»  $i$ -го результата измерения, который показывает не фактическую относительную точность этого результата, а степень его влияния на формирование наилучшего приближения  $\bar{\lambda}$ .

## 18.6. Примеры решения типовых задач

### Пример 18.1

Проведены два равноточных синхронных измерения. Выяснили, что коэффициент корреляции между результатами измерений равен  $r_{xy} = 0,95$ . Вычислить, какую долю в полной погрешности каждого результата измерений составляет общая погрешность.

*Решение*

В табл. 18.1 находим, что коэффициенту корреляции  $r_{xy} = 0,941$

соответствует  $q = 80\%$ , а коэффициенту корреляции  $r_{xy} = 0,961$  — величина  $q = 83,3\%$ . Проведя интерполяцию, находим, что коэффициенту корреляции  $r_{xy} = 0,95$  соответствует  $q = 81,6\%$ , т.е. общая доля погрешности результатов синхронных измерений составила  $81,6\%$  от полной погрешности каждого результата измерений.

### Пример 18.2

Два результата равноточных измерений, полученные с СКП  $m = 5$  м, имеют коэффициент корреляции  $r_{xy} = 0,95$ . Вычислить СКП разности этих результатов измерений. Сравнить с вычислениями для таких же независимых измерений.

*Решение*

Составим функцию, для которой необходимо вычислить СКП:  $y = \lambda_1 - \lambda_2$ .

В соответствии с Теоремой 6 СКП функции будет вычисляться по формуле

$$m_y = \sqrt{C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + 2C_1 C_2 r_{1,2} m_1 m_2}.$$

В примере  $C_1 = 1$  и  $C_2 = -1$ . Учитывая это, получаем

$$m_y = \sqrt{1^2 \cdot 5^2 + (-1)^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 0,95 \cdot 5 \cdot 5} = 1,58 \text{ м.}$$

Если результаты измерений независимы, то СКП разности будет в соответствии с Теоремой 1

$$m_y = \sqrt{C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2} = \sqrt{1^2 \cdot 5^2 + (-1)^2 \cdot 5^2} = 7,07 \text{ м.}$$

Расхождения связаны с тем, что в разности общая часть погрешности ликвидируется. Как видно из примера 18.1, общая часть составляет более  $80\%$  полной погрешности каждого результата измерений. В этом случае зависимость результатов измерений уменьшает погрешность разности.

### Пример 18.3

Для условий примера 18.2 вычислить СКП суммы результатов измерений.

*Решение*

Составим функцию, для которой необходимо вычислить СКП:  $y = \lambda_1 + \lambda_2$ .

В соответствии с Теоремой 6 СКП функции будет вычисляться по формуле

$$m_y = \sqrt{C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + 2C_1 C_2 r_{1,2} m_1 m_2}.$$

В примере  $C_1 = 1$  и  $C_2 = +1$ . Учитывая это, получаем

$$m_y = \sqrt{1^2 \cdot 5^2 + 1^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,95 \cdot 5 \cdot 5} = 9,97 \text{ м.}$$

Если результаты измерений независимы, то СКП разности в соответствии с Теоремой 1 составит

$$m_y = \sqrt{C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2} = \sqrt{1^2 \cdot 5^2 + (-1)^2 \cdot 5^2} = 7,07 \text{ м.}$$

В случае суммирования зависимых слагаемых общие погрешности суммируются при положительном коэффициенте корреляции, и окончательное значение СКП возрастает. Для независимых величин СКП суммы и разности равны.

#### Пример 18.4

В [5] проф. В.В. Данилов приводит пример произведенных им высокоточных измерений углов треугольника 12 приемами. По классической формуле теории погрешностей

$$m_{\bar{\chi}} = \sqrt{\frac{[V^2]}{n(n-1)}},$$

где  $V_i$  — уклонение  $i$ -го результата измерений от среднеарифметического, были подсчитаны СКП для каждого среднего значения из трех углов треугольника. Они оказались, соответственно, равными 0,24"; 0,40" и 0,28". По вычисленным СКП углов была рассчитана предельно допустимая невязка в треугольнике

$$f_{\beta_{\text{дон}}} = \Delta_{\Sigma\beta}^{\text{доп}} = 3\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = 1,63''.$$

Фактическая невязка треугольника оказалась равной +2,72", что значительно превосходило вычисленное допустимое значение.

Проведенные проф. В.В. Даниловым теоретические расчеты не дали результатов, которые могли бы оправдать столь значительное расхождение результатов измерений с расчетными данными. Ему пришлось заявить, что «... вопрос остается, таким образом, совершенно невыясненным». Проф. А.С. Чеботаревым эта проблема, ввиду ее значимости для практики высокоточных геодезических измерений, названа «Проблемой одного треугольника».

Таблица 18.2

+1,85	-1,69	+1,54	-1,13	+1,23	-1,08	+0,98	-0,77	+0,62	-0,46	+0,31	-0,15
-1,69	+3,38	-3,08	+2,77	-2,46	+2,13	-1,85	+1,54	-1,23	+0,92	-0,62	+0,31
+1,54	-3,08	+4,61	-4,15	+3,69	-3,23	+2,77	-2,31	+1,85	-1,38	+0,92	-0,46
-1,13	+2,77	-4,15	+5,54	-4,92	+4,31	-3,69	+3,08	-2,46	+1,85	-1,23	+0,62
+1,23	-2,46	+3,69	-4,92	+6,15	-5,38	+4,62	-3,85	+3,08	-2,31	+1,54	-0,77
-1,08	+2,13	-3,08	+4,31	-5,38	+6,46	-5,54	+4,62	-3,69	+2,77	-1,85	+0,98
+0,98	-1,85	+2,77	-3,69	+4,62	-5,54	+6,46	-5,38	+4,31	-3,23	+2,13	-1,08
-0,77	+1,54	-2,31	+3,08	-3,85	+4,62	-5,38	+6,15	-4,92	+3,69	-2,46	+1,23
+0,62	-1,23	+1,85	-2,46	+3,08	-3,69	+4,31	-4,92	+5,54	-4,15	+2,77	-1,13
-0,46	+0,92	-1,38	+1,85	-2,31	+2,77	-3,23	+3,69	-4,15	+4,61	-3,08	+1,54
+0,31	-0,62	+0,92	-1,23	+1,54	-1,85	+2,13	-2,46	+2,77	-3,08	+3,38	-1,69
-0,15	+0,31	-0,46	+0,62	-0,77	+0,98	-1,08	+1,23	-1,13	+1,54	-1,69	+1,85

$$\mathbf{R}_\lambda^{-1} =$$

Таблица 18.3

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\pi_i$	+0,94	+0,14	+0,77	+0,34	+0,62	+0,46	+0,46	+0,62	+0,34	+0,77	+0,14	+0,94

Необходимо провести обработку приведенных рядов измерений, предположив наличие корреляции в рядах результатов измерений.

### *Решение*

Выдвинем предположение, что общность факторов измерений для каждого из измеренных углов сделала результаты этих измерений зависимыми. Для подтверждения этого факта были рассчитаны оценки автокорреляционной функции. При этом во всех трех рядах  $r_{i,i+1}$  (коэффициент корреляции между соседними результатами измерений) оказались примерно одинаковыми и равными +0,5. Все последующие коэффициенты корреляции оказались незначимыми.

В таком случае матрица коэффициентов корреляции для каждого ряда измерений принимает трехдиагональный вид

$$\mathbf{R}_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & \dots & 0 \\ 0,5 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная матрице коэффициентов корреляции, будет симметрична относительно главной и побочной диагоналей (табл. 18.2).

Суммируя элементы каждой строки, получаем значения  $\pi_i$ . Эти величины приведены в табл. 18.3.

Вес окончательного значения каждого из измеренных углов  $p_{\lambda} = [\pi] = 6,54$ . По расчетам с использованием формул классической теории погрешностей, которыми пользовался проф. В.В. Данилов, вес окончательного значения каждого из углов равен числу приемов, т.е. 12, что почти в два раза превышает фактическое его значение.

Далее был выполнен расчет величин  $\mathbf{V}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}$ ,  $\mu^2$  и  $M$  для каждого из углов, что дало результаты, представленные в табл. 18.4.

По результатам эксперимента вычислена предельная погрешность суммы углов, оказавшаяся равной 3,82", в отличие от расчетов проф. В.В. Данилова, приводящих к значению той же величины 1,63". Из этого следует, что полученная в треугольнике невязка

+2,72" вполне согласуется с фактической точностью измерения углов треугольника.

Таблица 18.4

№ угла	Результаты расчетов проф. В.В. Данилова			Результаты эксперимента		
	$V^T V$	$\mu^2$	$M$	$V^T R^{-1} V$	$\mu^2$	$M$
1	21,54	1,96	0,40	37,81	3,44	0,73
2	7,71	0,70	0,24	46,20	4,20	0,80
3	10,32	0,94	0,28	34,24	2,93	0,67

Здесь следует особо подчеркнуть, что использование формул классической теории погрешностей, не учитывающих зависимости в результатах многократных измерений одной и той же величины, проводимых в достаточно короткий промежуток времени, может существенно искажать оценку точности. В приведенном примере СКП как одного приема, так и, особенно, среднеарифметического *занижены* в несколько раз. В геодезической практике это особо опасный случай, когда вычисленные значения СКП оказываются *меньше* фактических.

## 18.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить, какой процент составляет общая часть погрешности в двух синхронных измерениях, если коэффициент корреляции оказался равным  $r = 0,75$ .

2. Вычислить коэффициент корреляции между двумя синхронными наблюдениями, если общая часть погрешности измерений составляет 75 %.

3. Две величины измерены равноточно с СКП, равными 4,0. Коэффициент корреляции оказался равным  $r = 0,75$ . Вычислить СКП суммы и разности этих измерений и сравнить результаты с аналогичными измерениями, дающими независимые результаты. Дать необходимые пояснения.

4. Величина измерена несколько раз и при этом получены следующие результаты: 241,715; 241,719; 241,726; 241,737. Корреляционная матрица этих измерений имеет трехдиагональный вид

$$\mathbf{R}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & \dots & 0 \\ 0,6 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Провести математическую обработку этого ряда результатов равноточных зависимых измерений и сравнить окончательные результаты с результатами обработки этого ряда как независимого.

### Вопросы и задания для самопроверки

1. Опишите математическую модель возникновения корреляции при синхронных измерениях.
2. Чему равна ковариация двух рядов синхронных измерений?
3. Как вычислить процент общей части погрешности в двух рядах синхронных измерений, зная коэффициент корреляции между этими рядами?
4. Перечислите характеристики случайного вектора.
5. Какие величины стоят на главной диагонали ковариационной матрицы случайного вектора?
6. При каком условии Теорема 6 переходит в Теорему 1?
7. Как известно, для двух независимых результатов измерений СКП суммы и разности равны между собой. Почему это положение не выполняется для зависимых результатов измерений?
8. Как получить ковариационную матрицу вектора, являющегося линейной комбинацией другого вектора с известной ковариационной матрицей?
9. Напишите формулы обработки рядов зависимых равноточных измерений одной величины.
10. При каких условиях формула для вычисления наилучшего приближения к истинному значению ряда неравноточных зависимых измерений одной величины переходит в формулу общей арифметической середины? Распишите этот переход.
11. Если не учитывать зависимость в рядах измерений одной величины, то к каким последствиям это может привести?

# 19. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ

## 19.1. Общие положения

Будем считать, что на двух пунктах выполнены синхронные измерения двумя приемниками GPS.

Каждую пару синхронных измерений можно представить в виде:

$$x_i = L_x + \Delta_{x_i};$$

$$y_i = L_y + \Delta_{y_i},$$

где  $\Delta_{x_i}$  и  $\Delta_{y_i}$  — случайные погрешности рассматриваемой пары.

В результате воздействия общих факторов, имеющих место при синхронных наблюдениях, случайные ошибки  $\Delta_{x_i}$  и  $\Delta_{y_i}$  будут содержать общую составляющую  $\Delta_i$ . Кроме того, каждая случайная погрешность  $\Delta_{x_i}$  и  $\Delta_{y_i}$  будет иметь свои индивидуальные части  $\delta_{x_i}$  и  $\delta_{y_i}$ , обусловленные особенностями каждого индивидуального измерения.

В этом случае дисперсии результатов синхронных измерений будут иметь вид

$$\sigma_x^2 = \sigma_\Delta^2 + \sigma_1^2;$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_\Delta^2 + \sigma_2^2,$$

а коэффициент корреляции в соответствии с (18.10) будет пред-

ставлен в форме  $r_{xy} = \frac{\sigma_\Delta^2}{\sigma_x \sigma_y}$ .

Если по результатам измерений провести вычисление коэффициента корреляции, то, воспользовавшись данными табл. 18.1, можно определить как составляющую общей погрешности в каждой паре результатов измерений, так и составляющие частной погрешности.

Из предыдущей главы следует, что оценка точности произвольной линейной функции  $u$  двух зависимых результатов измерений вида

$$u = c_x \lambda_x + c_y \lambda_y$$

может быть осуществлена в соответствии с соотношением

$$\sigma_u^2 = c_x^2 \sigma_x^2 + c_y^2 \sigma_y^2 + 2c_x c_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y,$$

где  $\sigma_u^2$  — дисперсия линейной функции результатов измерений;  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$  — дисперсии результатов измерений;  $r_{xy}$  — коэффициент корреляции, характеризующий зависимость рассматриваемых результатов измерений.

При работе в дифференциальном режиме вычисляют приращение координат на базисе, т.е.

$$\Delta\lambda = \lambda_x - \lambda_y.$$

В этом случае дисперсия приращений  $\sigma_{\Delta\lambda}^2$  при  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -1$  будет иметь вид

$$\sigma_{\Delta\lambda}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy} \sigma_x \sigma_y.$$

Если в последнюю формулу подставить выражение коэффициента корреляции (18.10), то можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta\lambda}^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy} \sigma_x \sigma_y = \\ &= \sigma_{\Delta}^2 + \sigma_1^2 + \sigma_{\Delta}^2 + \sigma_2^2 - 2 \frac{\sigma_{\Delta}^2}{\sigma_x \sigma_y} \sigma_x \sigma_y = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \end{aligned}$$

или окончательно

$$\sigma_{\Delta\lambda}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \quad (19.1)$$

При равноточных частных влияниях, т.е. при  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  формуле (19.1) можно придать вид

$$\sigma_{\Delta\lambda}^2 = 2\sigma^2. \quad (19.2)$$

Таким образом, погрешность дифференциального режима будет определяться только частными составляющими погрешности каждого из приемников. Этот факт и позволяет при дифференциальном режиме наблюдений получать результаты с меньшей погрешностью, чем в абсолютном. *Чем меньше доля частных погрешностей и чем выше коэффициент корреляции между абсолютными определениями двух приемников при прочих равных условиях, тем ниже погрешность дифференциальных измерений.*

На основании приведенных рассуждений предлагается для характеристики погрешностей GPS-измерений в дифференциальном режиме использовать не только среднеквадратические ошибки каждого из рядов измерений и СКП разностей этих измерений, но также и коэффициент корреляции, который дает возможность оценить общую долю погрешностей в каждом из рядов измерений. Эта статистическая числовая характеристика рядов GPS-измерений оказывается чувствительной и показательной по отношению к ряду особенностей GPS-измерений. Она дает возможность эффективно выявлять по результатам измерений частные признаки каждой конкретной серии GPS-измерений, выполняемых в дифференциальном режиме.

Как показывает опыт GPS-измерений в различных условиях, доля общей части погрешностей измерений двух синхронно работающих приемников очень велика и при отсутствии внешних помех составляет более 97 % от полной погрешности, т.е. коэффициент корреляции принимает значения, большие 0,999. В случаях, когда на одной из станций либо на двух станциях одновременно начинают действовать дополнительные источники погрешностей (помехи), уменьшающих долю общей погрешности в полной погрешности, это сразу отражается на значении коэффициента корреляции. В этом случае его величина начинает уменьшаться.

Указанный факт позволяет использовать коэффициент корреляции результатов измерений двух синхронно работающих приемников как *индикатор* наличия (или отсутствия) воздействия *дополнительных помех* на один или на два приемника одновременно.

## **19.2. Использование коэффициента корреляции для оценки качества работы GPS-приемников в дифференциальном режиме по разным созвездиям\***

Рассмотрим возможность использования корреляции результатов измерений в дифференциальном режиме в случае, когда решение навигационной задачи на двух станциях производится по различным созвездиям.

---

\* Данные, приведенные в 19.2, заимствованы из диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук П.А. Беликова «Экспериментальные метрологические исследования аппаратуры пользователей КНС в полете». М., 1996.

Таблица 19.1

№	Тип GPS-приемника	СКП абсолютного режима $x/y/h$ , м	Размах $x/y/h$ , м	Число слотов/ PDOP	Коэффициент корреляции координат $x/y/h$	СКП дифференциального режима $x/y/h$ , м	Число измерений/интервал записи сообщений, с	Режим	Расстояние, м	Место и дата проведения эксперимента
1	Z-12	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	P-12	5.6/4.9/13	26/22/46	6/3	0.9931/0.9951/0.9962	0.70/0.50/1.15	2001/10	S/A-OFF	11.4	Астрахань, 25 авг. 1993 г.
	P-12	5.3/4.8/13	25/21/47	6/3						
2	Z-12	16/12/20	84/45/72	6/2	0.9997/0.9997/0.9992	0.44/0.31/1.03	186/10	S/A-ON	1974	Ливан, сент. 1995 г.
	Z-12	16/12/21	83/45/75	6/2						
3	Z-12	19/19/40	81/95/175	6/3	0.9996/0.9996/0.9990	0.57/0.51/1.81	760/5	S/A-ON	3836	Ливан, сент. 1995 г.
	Z-12	19/19/41	81/95/173	6/3						
4	Z-12	20/12/50	79/50/187	7/2	0.9999/0.9998/0.9998	0.34/0.26/0.94	219/10	S/A-ON	5504	Ливан, сент. 1995 г.
	Z-12	20/12/50	80/50/187	7/2						
5	P-12	16/14/26	78/59/18	6-7/3	0.9991/0.9994/0.9983	0.67/0.48/1.53	2623/10	S/A-ON	11740	Менделеево, апрель 1993 г.
	P-12	16/14/26	77/59/121	6-7/3						
6	Z-12	19/17/40	85/65/185	7/2	0.9991/0.9995/0.9996	0.91/0.56/1.01	327/10	S/A-ON	21657	Краснодар, авг. 1995 г.
	Z-12	19/17/40	85/65/183	7/2						
7	Z-12	26/15/57	130/86/243	6-7/2	0.9997/0.9994/0.9998	0.68/0.51/1.03	658/10	S/A-ON	44632	Шарья, авг. 1994 г.
	Z-12	26/15/58	130/86/245	6-7/2						
8	Z-12	15/16/51	84/65/194	6-7/4	0.9945/0.9991/0.9991	1.67/0.68/2.21	112/30	S/A-ON	161033	Москва — Алексин, 1995 г.
	Z-12	16/16/50	84/67/194	6-7/4						
9	Z-12	25/7.0/47	91/31/176	9/2	0.9990/0.9927/0.9994	2.31/0.85/1.87	440/5	S/A-ON	240800	Горький — Мангурово, июль 1994 г.
	Z-12	23/7.0/47	86/31/178	9/2						
10	Z-12	26/14/44	83/50/152	8/2	0.9969/0.9760/0.9990	2.69/3.08/2.59	115/10	S/A-ON	516097	Москва — Мангурово, июль 1994 г.
	Z-12	24/14/46	79/50/159	8/2						

Таблица 19.2

№	Тип GPS-приемника	СКП абсолютного режима $x/y/h$ , м	Размах $x/y/h$ , м	Число спутников/РДОР	Коэффициент корреляции координат $x/y/h$	СКП дифференциального режима $x/y/h$ , м	Число измерений/интервал записи сообщений, с	Режим	Расстояние, м	Место и дата проведения эксперимента
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	P-12	9.8/6.5/21	60/39/111	6-8/3	0.9963/0.9944/0.9973	0.85/0.69/1.59	7963/1	S/A-OFF	11.4	Астрахань, 25 авг. 1993 г.
	P-12	9.8/6.5/20	59/39/108	6-8/3						
2	Z-12	22/18/48	156/107/280	5-8/4	0.9814/0.9772/0.9768	4.30/4.13/12.46	2173/10	S/A-ON	1974	Ливан, сент. 1995 г.
	Z-12	22/19/54	156/113/329	5-7/4						
3	Z-12	19/17/38	96/98/212	5-8/3	0.9948/0.9958/0.9845	1.91/1.58/6.64	2408/5	S/A-ON	3836	Ливан, сент. 1995 г.
	Z-12	19/17/37	95/97/215	5-8/3						
4	Z-12	18/16/64	79/79/304	5-7/5	0.9691/0.9674/0.9603	4.56/4.06/18.45	419/10	S/A-ON	5504	Ливан, сент. 1995 г.
	Z-12	19/15/57	80/72/251	5-7/5						
5	P-12	21/19/34	96/112/166	5-7/3	0.9976/0.9972/0.9959	1.42/1.40/3.18	7899/1	S/A-ON	11740	Менделеево, апрель 1993 г.
	P-12	21/19/35	97/113/164	5-7/3						
6	Z-12	19/24/46	134/139/238	5-7/3	0.9952/0.9900/0.9741	5.12/3.42/10.38	1082/10	S/A-ON	21657	Краснодар, авг. 1995 г.
	Z-12	19/24/45	120/144/236	6-8/3						
7	Z-12	24/16/54	141/117/323	5-9/4	0.9636/0.9706/0.9740	6.63/3.99/13.49	2465/10	S/A-ON	44632	Шарья, авг. 1994 г.
	Z-12	25/16/58	139/116/367	5-9/4						
8	Z-12	21/17/48	140/108/341	4-8/4	0.9632/0.9930/0.9743	6.01/1.98/10.39	1260/30	S/A-ON	161033	Москва — Алексин, 1995 г.
	Z-12	22/17/48	152/108/322	4-7/4						
9	Z-12	23/13/39	216/65/240	6-9/4	0.7488/0.9637/0.9558	15.63/3.55/11.54	2809/5	S/A-ON	240800	Горький — Мантурово, июль 1994 г.
	Z-12	20/13/38	118/65/246	6-10/3						
10	Z-12	23/19/38	145/13/259	6-9/4	0.8091/0.9752/0.8633	14.23/4.21/21.29	1488/10	S/A-ON	516097	Москва — Мантурово, июль 1994 г.
	Z-12	23/18/42	122/105/234	6-10/4						

В табл. 19.1 и 19.2 приведены результаты обработки одних и тех же измерений. В табл. 19.1 использованы наблюдения, в которых навигационная задача каждым приемником решалась по одним и тем же созвездиям, а в табл. 19.2 приведены результаты, полученные с использованием всего объема накопленных измерений, т.е. с включением интервалов времени, когда навигационная задача каждым приемником решалась по разным созвездиям спутников.

Несмотря на то, что число измерений в результатах измерений табл. 19.2 значительно больше, выполнение измерений по неодинаковым созвездиям приводит к значительному увеличению погрешности определения приращений координат. Такие изменения могут характеризоваться более чем десятикратным увеличением СКП, как, например, по опыту наблюдений, проведенных в Ливане на линии длиной 5,5 км (строка 4, столбец 10 в табл. 19.1 и 19.2). Этот факт также фиксируется изменением коэффициента корреляции. Его значение в приведенном примере уменьшается от значения 0,9999 до значения 0,97.

Следовательно, коэффициент корреляции может выполнять роль индикатора работы по неэквивалентным созвездиям спутников в дифференциальном режиме и применяться для оценки эффективности программных средств обработки кодовых измерений в моменты изменения рабочих созвездий на одной из станций («дребезг» созвездий).

### **19.3. Использование коэффициента корреляции для определения совместимости различных типов GPS-приемников**

В практике дифференциальных кодовых GPS-измерений возникают ситуации, в которых возможно использование приемников различных фирм либо приемников различных типов. Решение задачи совместимости приемников для работы в дифференциальном режиме может быть осуществлено с использованием коэффициента корреляции, вычисленного по синхронным наблюдениям двух приемников в статическом режиме, при условии отсутствия воздействия других видов помех на каждый тестируемый приемник. Значение коэффициента корреляции будет указывать на совмести-

Таблица 19.3

№ пп.	Тип GPS-приемника	СКП абсолютного режима $x/y/h$ , м	Размах $x/y/h$ , м	Число спутников/ PDOP	Коэффициент корреляции координат $x/y/h$	СКП дифференциального режима $x/y/h$ , м	Число измерений/интервал записи сообщений, с	Режим	Расстояние между станциями, м	Место экспедиции
1	Z-12 4000SSE	20 / 23 / 60 20 / 23 / 64	77 / 90 / 204 76 / 84 / 230	5 6 / 3 6 / 3	0.9966 / 0.9830 / 0.9936	1.66 / 4.19 / 8.10	326 / 10	S/A-ON	8.4	НИИГА, ноябрь 1995 г.
2	Z-12 3DF-24	9.1 / 13 / 22 11 / 14 / 24	40 / 47 / 78 47 / 53 / 80	6 / 2 6 / 2	0.8532 / 0.9888 / 0.9855	5.73 / 2.41 / 4.31	516 / 1	S/A-ON	26.2	НИИГА, март 1995 г.
3	Z-12 P-12	12 / 7.0 / 30 8.4 / 10 / 17	51 / 24 / 108 42 / 38 / 68	8 / 2 8 / 2	0.8313 / 0.7016 / 0.8098	6.97 / 6.88 / 19.51	72 / 10	S/A-ON	18.9	Алексин, декабрь 1995 г.
4	P-12 D-12	7.8 / 6.5 / 53 7.9 / 6.3 / 53	29 / 25 / 184 29 / 25 / 181	7 / 3 7 / 3	0.9968 / 0.9942 / 0.9997	0.62 / 0.71 / 1.43	135 / 10	S/A-ON	774	Чудово, май 1993 г.

Примечание:

**Z-12** — 12-канальный двухчастотный кодово-фазовый навигационно-геодезический GPS-приемник с У-декодером, фирма Ashtech;

**4000SSI** — 12-канальный двухчастотный кодово-фазовый навигационно-геодезический GPS-приемник с У-декодером, фирма Trimble;

**3DF-24** — 24-канальный (4 приемника в одном корпусе по 6 каналов в каждом) одноканальный кодово-фазовый навигационный GPS-приемник для определения в реальном времени значений углов крена, курса и тангажа по фазовым измерениям, фирма Ashtech;

**P-12** — 12-канальный двухчастотный кодово-фазовый навигационно-геодезический GPS-приемник, фирма Ashtech;

**D-12 («Dimension»)** — 12-канальный одноканальный кодово-фазовый навигационно-геодезический GPS-приемник, фирма Ashtech.

мость или несовместимость различных приемных систем, используемых в каждом конкретном случае.

Проведены работы с кодовыми приемниками различного класса и различных фирм. Результаты обработки совместных измерений приведены в табл. 19.3.

По экспериментальным данным можно сделать вывод, что пары приемников типа Z-12 и 3DF-24, Z-12 и P-12, изготовленные одной фирмой, но в разное время, имеют разный алгоритм решения навигационной задачи и практически непригодны для использования в дифференциальном кодовом режиме. Коэффициенты корреляции, характеризующие их совместную работу, имеют значения менее 0,9, а СКП определения приращений координат — более 5 м, что значительно отличается от показателей этих приемников при работе с однотипными в дифференциальном режиме.

Проведение аналогичных экспериментов с GPS-приемниками различных типов, например, Z-12 фирмы Ashtech и 4000SSI фирмы Trimble дают более совместимые результаты. Коэффициенты корреляции достигают величины 0,98, а СКП приращений координат определяются величинами менее 5 м.

Пара приемников P-12 и Dimension (D-12) характеризуются еще более высоким коэффициентом корреляции (0,99), что свидетельствует о близких алгоритмах решения навигационной задачи по C/A-коду на частоте L1 и высокой совместимости, достаточной для использования этих типов приемников в дифференциальном кодовом режиме.

При использовании в паре различных типов приемной GPS-аппаратуры необходимо предварительно установить эту пару в местах, обеспечивающих их работу без дополнительных помех, и далее провести наблюдения и пост-процессорную обработку с вычислением коэффициента корреляции. Значение этого коэффициента используется для оценки совместимости пары приемников различных типов.

#### **19.4. Использование коэффициента корреляции для выявления эффекта многолучевости**

Одним из существенных источников погрешностей при работе GPS-приемников в дифференциальном режиме является многолуче-

вость, т.е. воздействие на антенну прямого и переотраженного сигнала. Рассмотрим возможность обнаружения этого явления по результатам пост-процессорной обработки накопленных измерений.

Как указано ранее, целый ряд факторов может оказывать влияние на снижение точности приращений координат, определенных дифференциальным методом. К этим факторам могут быть отнесены несовместимость приемников разного класса, решение навигационной задачи по различным созвездиям спутников и т.д.

Поэтому для выявления эффекта многолучевости необходимо построить эксперимент таким образом, чтобы исключить (или уменьшить) влияние ранее перечисленных факторов.

В качестве многолучевости, как и в предыдущих экспериментах, используем значение коэффициента корреляции в качестве показателя доли общей составляющей в полной погрешности результатов измерений.

Для иллюстрации наличия эффекта многолучевости в табл. 19.4 представлены 10 серий наблюдений, каждое из которых выполнено парами синхронных измерений однотипными GPS-приемниками в режиме включенного селективного доступа (S/A-ON) по одинаковым созвездиям.

Во всех наблюдениях один или оба приемника устанавливали под металлическими геодезическими сигналами (пирамидами) высотой от 6 до 25 м. При этом независимо от расстояний между станциями происходит значительное изменение коэффициента корреляции. Его значение может уменьшаться до 0,97, что указывает на возрастание частных составляющих погрешности измерений, доходящих до 10 % от полной погрешности. Такое возрастание связано с приемом как прямого, так и переотраженного от металлических элементов геодезических пирамид спутникового сигнала.

Естественно предположить, что такого эффекта и следовало ожидать, работая вблизи или под металлическими конструкциями (объектами). Однако предложенная методика позволяет не только констатировать наличие многолучевости, но и давать количественную оценку влияния данного рода помех. Если принять, как это подтверждается многочисленными экспериментами, что при отсутствии дополнительных внешних воздействий коэффициент корреляции характеризуется величиной 0,999, то любое его

Таблица 19.4

№	Тип GPS-приемника	СКП абсолютного режима $x/y/h$ , м	Размах $x/y/h$ , м	Число спутников/PDOP	Коэффициент корреляции координат $x/y/h$	СКП дифференциального режима $x/y/h$ , м	Число измерений/интервал записи сообщений, с	Режим	Расстояние между станциями, м	Условия проведения эксперимента
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	P-12	8.0 / 13 / 24	38 / 62 /	5-6 / 4	0.9956 /	0.75 / 0.93	192 / 10	S/A-OFF	899	Антенна 2-го приемника в 40 м от металлического сигнала $h = 60$ м
	P-12	8.1 / 13 / 24	102 38 / 62 / 105	5-6 / 4	0.9974 / 0.9970	/ 1.89				
2	P-12	21 / 11 / 26	85 / 42 / 82	7 / 2	0.9993 /	0.81 / 0.32	135 / 10	S/A-ON	931	Антенны двух приемников под триангуляционным пунктом $h = 6$ м
	P-12	21 / 11 / 26	86 / 43 / 83	7 / 2	0.9996 / 0.9976	/ 1.80				
3	Z-12	24 / 18 / 58	120 / 77 /	6-7 / 2	0.9981 /	1.49 / 0.67	202 / 30	S/A-ON	2419	Антенна 2-го приемника на металлической трубе
	Z-12	24 / 18 / 58	322 121 / 77 / 317	6-7 / 2	0.9993 / 0.9991	/ 2.59				
4	P-12	14 / 14 / 25	51 / 45 / 99	5 / 5	0.9891 /	2.09 / 1.31	90 / 10	S/A-ON	3750	Антенна 2-го приемника под триангуляционным пунктом $h = 25$ м
	P-12	14 / 13 / 26	49 / 42 / 94	5 / 5	0.9964 / 0.9730	/ 5.91				
5	P-12	16 / 15 / 26	55 / 40 / 81	6 / 3	0.9938 /	1.78 / 1.47	75 / 10	S/A-ON	6376	Антенны двух приемников под триангуляционным пунктом $h = 25$ м
	P-12	16 / 16 / 28	57 / 43 / 87	6 / 3	0.9971 / 0.9827	/ 5.46				

Окончание табл. 19.4

№	Тип GPS-приемника	СКП абсолютного режима $x/y/h$ , м	Размах $x/y/h$ , м	Число спутников/PDOP	Коэффициент корреляции координат $x/y/h$	СКП дифференциального режима $x/y/h$ , м	Число измерений/интервал записи сообщений, с	Режим	Расстояние между станциями, м	Условия проведения эксперимента
6	P-12 P-12	29 / 19 / 78 29 / 19 / 79	108 / 74 / 266 111 / 72 / 279	5 / 4 5 / 4	0.9990 / 0.9966 / 0.9963	1.37 / 1.57 / 6.79	162 / 10	S/A-ON	10895	Антенны двух приемников под триангуляционным пунктом $h = 8$ м и $h = 25$ м
7	P-12 P12	19 / 14 / 55 19 / 14 / 54	70 / 57 / 196 70 / 54 / 199	6 / 3 6 / 3	0.9971 / 0.9977 / 0.9983	1.49 / 0.96 / 3.44	124 / 10	S/A-ON	14678	Антенны двух приемников под триангуляционным пунктом
8	Z-12 Z-12	21 / 9.5 / 43 21 / 9.4 / 44	82 / 37 / 132 80 / 34 / 137	7 / 2 7 / 2	0.9986 / 0.9952 / 0.9991	1.12 / 0.92 / 2.01	105 / 10	S/A-ON	15659	Антенна 2-го приемника под триангуляционным пунктом $h = 6$ м
9	Z-12 Z-12	22 / 10 / 54 17 / 10 / 46	65 / 30 / 148 52 / 30 / 132	6 / 3 6 / 3	0.9858 / 0.9945 / 0.9606	6.02 / 1.07 / 16.01	138 / 10	S/A-ON	20786	Антенна 2-го приемника под триангуляционным пунктом $h = 25$ м
10	Z-12 Z-12	22 / 21 / 42 23 / 21 / 44	96 / 63 / 175 102 / 63 / 183	5 / 4 5 / 4	0.9934 / 0.9990 / 0.9874	2.88 / 0.95 / 7.06	113 / 10	S/A-ON	29671	Антенна 2-го приемника под триангуляционным пунктом $h = 6$ м

уменьшение связано с наличием дополнительных внешних помех. При  $r = 0,999$  частный компонент погрешности составляет не более 3 % от общей части. Уменьшение коэффициента корреляции свидетельствует о возрастании процента частной составляющей. При этом могут происходить изменения либо всех трех значений коэффициентов корреляции ( $r_x, r_y, r_h$ ), либо не всех. Уменьшение хотя бы одного из трех значений коэффициентов корреляции будет указывать на наличие эффекта многолучевости.

## Вопросы и задачи для самопроверки

1. Как осуществить проверку на совместимость работы двух GPS-приемников?
2. Как проверить влияние «дребезга звезд» при работе приемников в дифференциальном режиме?
3. Два приемника одной и той же марки проработали в дифференциальном режиме по одним и тем же созвездиям. При пост-процессорной обработке оказалось, что коэффициент корреляции этих измерений оказался равным  $r = 0,789$ . Что можно сказать по поводу данных рядов синхронных измерений?
4. Как осуществить проверку на наличие или отсутствие «многолучевости» при работе GPS-приемников на двух заданных точках?
5. Что является причиной «многолучевости»?
6. Почему коэффициент корреляции двух синхронных наблюдений GPS-приемников можно использовать в качестве критерия качества работы на станциях?

## 20. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 20.1. Передача дирекционного угла

Осуществляется передача дирекционного угла по измеренным (неуравненным) углам. В этом случае дирекционный угол вычисляют по известной формуле

$$\alpha_K = \alpha_0 + 180^\circ \cdot K - \beta_1 - \dots - \beta_K.$$

Рассчитаем коэффициент корреляции между вычисленными дирекционными углами  $K_1$  и  $K_2$  линий хода, применяя формулу (18.17).

Дисперсии дирекционных углов пропорциональны номеру линий хода:  $D(\alpha_{K_1}) = K_1 \cdot \sigma_\beta^2$ ,  $D(\alpha_{K_2}) = K_2 \cdot \sigma_\beta^2$ , а ковариация равна дисперсии общей части:  $\text{cov}(\alpha_{K_1}; \alpha_{K_2}) = K_1 \cdot \sigma_\beta^2 = D(\alpha_{K_1})$ .

Тогда

$$r_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{K_1}{\sqrt{K_1 \cdot K_2}} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}. \quad (20.1)$$

В данном случае зависимость возникает в связи с тем, что при вычислении дирекционных углов были использованы одни и те же углы хода. При этом коэффициент корреляции тем ближе к единице, чем больше общих углов учувствовало в расчетах, т.е. чем длиннее передача и чем ближе расположены друг к другу рассматриваемые стороны, тем выше зависимость между дирекционными углами.

По аналогичной схеме можно провести расчет коэффициента корреляции в случае, если ход прокладывается между твердыми сторонами либо прокладывается замкнутый ход и имеется возможность осуществить уравнивание углов хода. В этом случае невязка вычисляется по формуле

$$W = \sum_{i=1}^n \beta_i - \sum \beta_{\text{теор}},$$

где  $n$  – число углов в ходе.

Дирекционный угол  $K$ -й линии с учетом поправок в углы можно вычислить по формуле

$$\alpha_K = \alpha_0 + 180^\circ \cdot K - \frac{n-K}{n} \sum_{i=1}^K \beta_i - \frac{K}{n} \sum_{i=K+1}^n \beta_i.$$

Если выполнить аналогичные предыдущей задаче действия, то для коэффициента корреляции дирекционных углов  $K_1$  и  $K_2$  линий хода получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
D(\alpha_{K_1}) &= \frac{K_1}{n}(n - K_1)\sigma_0^2; \\
D(\alpha_{K_2}) &= \frac{K_2}{n}(n - K_2)\sigma_0^2; \\
\text{cov}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{K_1}{n}(n - K_2)\sigma_0^2.
\end{aligned} \tag{20.2}$$

Тогда

$$r_{\alpha_1, \alpha_2}^{\text{yp}} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \sqrt{\frac{n - K_2}{n - K_1}} = r_{\alpha_1, \alpha_2} \sqrt{\frac{n - K_2}{n - K_1}}. \tag{20.3}$$

Сравнивая формулы (20.1) и (20.3), приходим к выводу, что уравнивание в этом случае несколько увеличивает зависимость между вычисленными дирекционными углами.

Задачу о зависимости дирекционных углов можно решить и с использованием Теоремы 8.

Можно представить дирекционные углы как линейную комбинацию независимых результатов измерений углов. Тогда имеем

$$\alpha = \mathbf{A}\tilde{\beta} + A_0, \tag{20.4}$$

где матрица преобразования

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \tag{20.5}$$

По условию измеренные углы равноточны и независимы, следовательно, вектор  $\tilde{\beta}$  имеет единичную матрицу весов

$$\mathbf{P}_{\tilde{\beta}} = \mathbf{E}$$

и корреляционную матрицу

$$\mathbf{K}_{\tilde{\beta}} = \sigma_0^2 \mathbf{E}.$$

Применив Теорему 8 к рассматриваемой задаче, получим в случае неуровненных углов следующее выражение ковариационной матрицы дирекционных углов:

$$\mathbf{K}_{\alpha} = \sigma_0^2 \mathbf{A} \mathbf{E} \mathbf{A}^T = \sigma_0^2 \mathbf{A} \mathbf{A}^T. \tag{20.6}$$

Непосредственные вычисления дают следующий результат:

$$\mathbf{K}_\alpha = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_\alpha = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 \end{bmatrix}. \quad (20.7)$$

Если учесть, что по главной диагонали матрицы  $\mathbf{Q}_\alpha$  стоят обратные веса вычисленных по ходу дирекционных углов, можно получить матрицу коэффициентов корреляции

$$\mathbf{r}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & r_{1,2} & \dots & r_{1,n-1} \\ r_{2,1} & 1 & \dots & r_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (20.8)$$

$$\text{где } r_{ij} = \frac{i}{\sqrt{ij}} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{j}} \text{ при } i < j. \quad (20.9)$$

Как видим, формулы (20.1) и (20.9) полностью совпадают. Естественно возникает вопрос о получении по такой методике коэффициентов корреляции между дирекционными углами из уравнения в случае либо замкнутого хода, либо опирающегося на два исходных дирекционных угла. Здесь можно предложить следующую процедуру.

Рассмотрим вычисление дирекционных углов в противоположном направлении. В этом случае тот же вектор  $\alpha$  будет получен из соотношения

$$\alpha = \mathbf{A}^{o6} \bar{\beta} + A_0^{o6}, \quad (20.10)$$

где матрица преобразования

$$\mathbf{A}^{o6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (20.11)$$

Тогда весовая матрица дирекционных углов, полученных по обратному ходу, будет иметь вид

$$\mathbf{Q}^{\text{об}} = \begin{bmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ n-2 & n-2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (20.12)$$

Таким образом, каждый дирекционный угол получен дважды: из прямого и из обратного ходов. При этом полученные значения независимы друг от друга, так как вычислены по разным углам.

В качестве окончательного (уравненного) значения дирекционного угла любой линии хода следует взять среднее взвешенное из двух полученных значений. Обратные веса каждого значения пары

известны. Для  $i$ -го дирекционного угла из прямого хода  $\frac{1}{p_i^{\text{пр}}} = i$ , а для обратного  $\frac{1}{p_i^{\text{обр}}} = n - i$ .

Окончательное значение дирекционного угла  $i$ -й линии

$$\bar{\alpha}_i = \frac{n-i}{n} \alpha_i^{\text{пр}} + \frac{i}{n} \alpha_i^{\text{обр}} \quad (20.13)$$

с весом  $p_{\bar{\alpha}} = \frac{n}{i(n-i)}$ .

Обозначим

$$\frac{n-i}{n} = c_i^{\text{пр}} \text{ и } \frac{i}{n} = c_i^{\text{обр}}. \quad (20.14)$$

Тогда формуле (20.13) можно придать вид

$$\bar{\alpha}_i = c_i^{\text{пр}} \alpha_i^{\text{пр}} + c_i^{\text{обр}} \alpha_i^{\text{обр}}. \quad (20.15)$$

Для решения вопроса о виде весовой матрицы  $\mathbf{Q}_{\alpha}$  рассмотрим совокупный вектор

$$\boldsymbol{\alpha}^{\text{cov}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\text{np}} \\ \dots \\ \alpha_{n-1}^{\text{np}} \\ \alpha_1^{\text{обп}} \\ \dots \\ \alpha_{n-1}^{\text{обп}} \end{pmatrix}. \quad (20.16)$$

Он получен линейным преобразованием вектора измеренных углов с помощью матрицы преобразования

$$\mathbf{A}^{\text{cov}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (20.17)$$

Тогда весовая матрица вектора  $\alpha^{\text{cov}}$  может быть получена из соотношения

$$\mathbf{Q}_\alpha^{\text{cov}} = \mathbf{A}^{\text{cov}} \mathbf{Q}_\beta (\mathbf{A}^{\text{cov}})^T, \quad (20.18)$$

или с учетом того, что  $\mathbf{Q}_\beta = \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{Q}_\alpha^{\text{cov}} = \mathbf{A}^{\text{cov}} (\mathbf{A}^{\text{cov}})^T. \quad (20.19)$$

После несложных преобразований получаем

$$\mathbf{Q}_\alpha^{\text{cov}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 3 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n-2 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & -(n-2) & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (20.20)$$

Из вектора  $\vec{\alpha}^{\text{cov}}$  линейным преобразованием

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1^{\text{np}} & 0 & \dots & 0 & c_1^{\text{обп}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^{\text{np}} & \dots & 0 & 0 & c_2^{\text{обп}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1}^{\text{np}} & 0 & 0 & \dots & c_{n-1}^{\text{обп}} \end{bmatrix} \quad (20.21)$$

может быть получен вектор уравненных значений дирекционных углов

$$\vec{\alpha} = \mathbf{C}\vec{\alpha}^{\text{cov}}. \quad (20.22)$$

Тогда весовая матрица  $\mathbf{Q}_{\vec{\alpha}}$  может быть получена из соотношения

$$\mathbf{Q}_{\vec{\alpha}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}_{\alpha}^{\text{cov}}\mathbf{C}^T. \quad (20.23)$$

В результате преобразований получаем

$$\mathbf{Q}_{\vec{\alpha}} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & \frac{n-2}{n} & \dots & 1 \\ \frac{n-2}{n} & \frac{2(n-2)}{n} & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}. \quad (20.24)$$

Любой элемент матрицы  $\mathbf{Q}_{\vec{\alpha}}$  может быть получен по формуле

$$Q_{ij} = \frac{i(n-j)}{n} \text{ при } i \leq j \quad (20.25)$$

и

$$Q_{ij} = \frac{j(n-i)}{n} \text{ при } i > j. \quad (20.26)$$

С учетом значений весов уравненных дирекционных углов (20.24) можно перейти к коэффициентам корреляции

$$r_{ij} = \sqrt{\frac{i(n-j)}{j(n-i)}}, \quad (20.27)$$

что полностью соответствует формуле (20.3).

«Встречный» метод уравнивания, примененный для уравнивания дирекционных углов, полностью соответствует в простейших случаях методу наименьших квадратов, но позволяет получать корреляционную или весовую матрицу без процедуры обращения матриц.

Все полученные соотношения и алгоритмы вполне могут быть использованы при вычислении коэффициентов корреляции между высотами точек, полученными по ходам геометрического нивелирования, где в качестве числовых характеристик могут выступать как число станций по ходу, так и длина хода в километрах.

## 20.2. Получение корреляционной матрицы координат точек теодолитного хода

Попытаемся применить описанный алгоритм для получения корреляционной матрицы координат точек теодолитного хода. Построение общих формул в достаточно простом виде, оценивающих коэффициенты корреляции координат любых точек хода, не представляется возможным. Здесь будет дан общий прием, который достаточно просто реализуется на ЭВМ для хода произвольной конфигурации с любым числом точек.

Прежде всего представим координаты любой точки  $i$  хода как линейную функцию исходных и измеренных величин. Пусть выполнены измерения по ходу (рис. 20.1).

В рассматриваемой системе измерены  $N + 2$  угла и  $N + 1$  линии, при этом все измерения независимы и проводились электронным тахеометром, обеспечивая получение углов и линий с СКП, соответственно,  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_S$ .

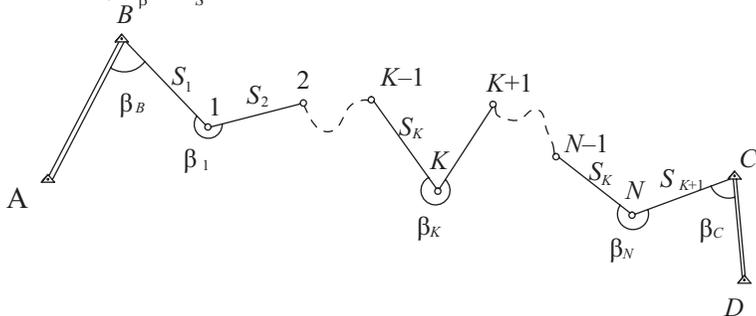


Рис. 20.1. Схема теодолитного хода

Координаты любой точки с номером  $K$  вычисляются по прямому ходу от исходной стороны  $AB$  по формулам:

$$X_K = X_B + \sum_{i=1}^K S_i \cos \alpha_i^{\text{np}};$$

$$Y_K = Y_B + \sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i^{\text{np}}.$$

Линеаризация последних соотношений приводит к следующему:

$$X_K = X_B + \sum_{i=1}^K S_i^0 (\cos \alpha_i^{\text{np}})_0 + \sum_{i=1}^K (\cos \alpha_i^{\text{np}})_0 \delta S_i - \sum_{i=1}^K S_i^0 (\sin \alpha_i^{\text{np}})_0 \delta \alpha_i;$$

$$Y_K = Y_B + \sum_{i=1}^K S_i^0 (\sin \alpha_i^{\text{np}})_0 + \sum_{i=1}^K (\sin \alpha_i^{\text{np}})_0 \delta S_i + \sum_{i=1}^K S_i^0 (\cos \alpha_i^{\text{np}})_0 \delta \alpha_i^{\text{np}},$$

где  $S_i^0$  — измеренное значение  $i$ -й линии хода;  $\alpha_i^{\text{np}}$  — приближенное значение дирекционного угла  $i$ -й линии хода, полученное по измеренным углам в прямом направлении;  $\delta S_i$ ,  $\delta \alpha_i^{\text{np}}$  — погрешности в длине и дирекционном угле прямого хода.

В случае обратного хода для координат той же точки с номером  $K$  имеем следующие соотношения:

$$X_K = X_C + \sum_{i=N+1}^K S_i^0 (\cos \alpha_i^{\text{обп}})_0 + \sum_{i=N+1}^K (\cos \alpha_i^{\text{обп}})_0 \delta S_i - \sum_{i=N+1}^K S_i^0 (\sin \alpha_i^{\text{обп}})_0 \delta \alpha_i;$$

$$Y_K = Y_C + \sum_{i=N+1}^K S_i^0 (\sin \alpha_i^{\text{обп}})_0 + \sum_{i=N+1}^K (\sin \alpha_i^{\text{обп}})_0 \delta S_i + \sum_{i=N+1}^K S_i^0 (\cos \alpha_i^{\text{обп}})_0 \delta \alpha_i^{\text{обп}}.$$

Совокупная матрица перехода от измеренных линий и углов к координатам точек хода, полученных в прямом и обратном направлениях, представлена в табл. 20.1.

Используя совокупную матрицу, можно получить координаты любой точки хода как в прямом, так и обратном направлениях из соотношения

$$\begin{bmatrix} X^{\text{np}} \\ Y^{\text{np}} \\ X^{\text{обп}} \\ Y^{\text{обп}} \end{bmatrix} = A^{\text{сов}} \begin{pmatrix} S_1 \\ \dots \\ S_{N+1} \\ \beta_B \\ \dots \\ \beta_C \end{pmatrix}. \quad (20.28)$$

Таблица 20.1

$X, Y$	$S_1$	$S_2$	...	$S_N$	$S_{N+1}$	$\beta_B$	$\beta_1$	$\beta_2$	...	$\beta_{N-1}$	$\beta_N$	$\beta_C$
$X_1^{\text{np}}$	$\cos \alpha_1^{\text{np}}$	0	...	0	0	$\frac{Y_1 - Y_B}{\rho}$	0	0	...	0	0	0
$X_2^{\text{np}}$	$\cos \alpha_1^{\text{np}}$	$\cos \alpha_2^{\text{np}}$	...	0	0	$\frac{Y_2 - Y_B}{\rho}$	$\frac{Y_2 - Y_1}{\rho}$	0	...	0	0	0
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$X_{N-1}^{\text{np}}$	$\cos \alpha_1^{\text{np}}$	$\cos \alpha_2^{\text{np}}$	...	0	0	$\frac{Y_{N-1} - Y_B}{\rho}$	$\frac{Y_{N-1} - Y_1}{\rho}$	$\frac{Y_{N-1} - Y_2}{\rho}$	...	0	0	0
$X_2^{\text{np}}$	$\cos \alpha_1^{\text{np}}$	$\cos \alpha_2^{\text{np}}$	...	$\cos \alpha_N^{\text{np}}$	0	$\frac{Y_2 - Y_B}{\rho}$	$\frac{Y_2 - Y_1}{\rho}$	$\frac{Y_2 - Y_2}{\rho}$	...	$\frac{Y_N - Y_{N-1}}{\rho}$	0	0
$Y_1^{\text{np}}$	$\sin \alpha_1^{\text{np}}$	0	...	0	0	$\frac{X_B - X_1}{\rho}$	0	0	...	0	0	0
$Y_2^{\text{np}}$	$\sin \alpha_1^{\text{np}}$	$\sin \alpha_2^{\text{np}}$	...	0	0	$\frac{X_B - X_2}{\rho}$	$\frac{X_1 - X_2}{\rho}$	0	...	0	0	0
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$Y_{N-1}^{\text{np}}$	$\sin \alpha_1^{\text{np}}$	$\sin \alpha_2^{\text{np}}$	...	0	0	$\frac{X_B - X_{N-1}}{\rho}$	$\frac{X_1 - X_{N-1}}{\rho}$	$\frac{X_2 - X_{N-1}}{\rho}$	...	0	0	0
$Y_2^{\text{np}}$	$\sin \alpha_1^{\text{np}}$	$\sin \alpha_2^{\text{np}}$	...	$\sin \alpha_N^{\text{np}}$	0	$\frac{X_B - X_N}{\rho}$	$\frac{X_1 - X_N}{\rho}$	$\frac{X_2 - X_N}{\rho}$	...	$\frac{X_{N-1} - X_N}{\rho}$	0	0

Окончание табл. 20.1

$X, Y$	$S_1$	$S_2$	...	$S_N$	$S_{N+1}$	$\beta_B$	$\beta_1$	$\beta_2$	...	$\beta_{N-1}$	$\beta_N$	$\beta_C$
$X_1^{\text{обр}}$	0	$\cos \alpha_2^{\text{обр}}$	...	$\cos \alpha_N^{\text{обр}}$	$\cos \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	$\frac{Y_2 - Y_1}{\rho}$	...	$\frac{Y_{N-1} - Y_1}{\rho}$	$\frac{Y_N - Y_1}{\rho}$	$\frac{Y_C - Y_1}{\rho}$
$X_2^{\text{обр}}$	0	0	...	$\cos \alpha_N^{\text{обр}}$	$\cos \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	0	...	$\frac{Y_{N-1} - Y_2}{\rho}$	$\frac{Y_N - Y_2}{\rho}$	$\frac{Y_C - Y_2}{\rho}$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$X_{N-1}^{\text{обр}}$	0	0	...	$\cos \alpha_N^{\text{обр}}$	$\cos \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	0	...	0	$\frac{Y_N - Y_{N-1}}{\rho}$	$\frac{Y_C - Y_{N-1}}{\rho}$
$X_2^{\text{обр}}$	0	0	...	0	$\sin \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	0	...	0	0	$\frac{Y_C - Y_N}{\rho}$
$Y_1^{\text{обр}}$	0	$\sin \alpha_2^{\text{обр}}$	...	$\sin \alpha_N^{\text{обр}}$	$\sin \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	$\frac{X_1 - X_2}{\rho}$	...	$\frac{X_1 - X_{N-1}}{\rho}$	$\frac{X_1 - X_N}{\rho}$	$\frac{X_1 - X_C}{\rho}$
$Y_2^{\text{обр}}$	0	0	...	$\sin \alpha_N^{\text{обр}}$	$\sin \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	0	...	$\frac{X_2 - X_{N-1}}{\rho}$	$\frac{X_2 - X_N}{\rho}$	$\frac{X_2 - X_C}{\rho}$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$Y_{N-1}^{\text{обр}}$	0	0	...	$\sin \alpha_N^{\text{обр}}$	$\sin \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	0	...	0	$\frac{X_{N-1} - X_N}{\rho}$	$\frac{X_{N-1} - X_C}{\rho}$
$Y_2^{\text{обр}}$	0	0	...	0	$\sin \alpha_{N+1}^{\text{обр}}$	0	0	0	...	0	0	$\frac{X_N - X_C}{\rho}$

Вектору измеренных величин соответствует корреляционная матрица

$$\mathbf{K}_\lambda = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_S^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_\beta^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}. \quad (20.29)$$

Здесь уместно следующее замечание.

Если СКП измерения углов  $\sigma_\beta$  выражена в секундах, а СКП измерения расстояний  $\sigma_S$  — в сантиметрах, то при вычислении элементов матрицы  $\mathbf{A}^{\text{сов}}$  вида  $\frac{X_i - X_j}{\rho}$  или  $\frac{Y_i - Y_j}{\rho}$  следует величину  $\rho$  брать равной 206,3, а координаты — в метрах. Тогда поправки в расстояния будут получены в сантиметрах, а в углы — в секундах.

Далее получают ковариационную матрицу  $\mathbf{K}_\lambda$  из соотношения

$$\mathbf{K}_{XY}^{\text{выч}} = \mathbf{A}^{\text{сов}} \mathbf{K}_\lambda (\mathbf{A}^{\text{сов}})^T. \quad (20.30)$$

На главной диагонали матрицы  $\mathbf{K}_{XY}^{\text{выч}}$  стоят дисперсии  $D_{X_i}^{\text{np}}$ ,  $D_{Y_i}^{\text{np}}$ ,  $D_{X_i}^{\text{обр}}$  и  $D_{Y_i}^{\text{обр}}$ .

Используя значения дисперсий, составляют матрицу перехода от вычисленных координат к уравненным координатам. Здесь эле-

менты вектора  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_X^{\text{np}} \\ C_Y^{\text{np}} \\ C_X^{\text{обр}} \\ C_Y^{\text{обр}} \end{pmatrix}$  получают в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} C_X^{\text{np}} &= \frac{D_X^{\text{обр}}}{D_X^{\text{np}} + D_X^{\text{обр}}}; & C_Y^{\text{np}} &= \frac{D_Y^{\text{обр}}}{D_Y^{\text{np}} + D_Y^{\text{обр}}}; \\ C_X^{\text{обр}} &= \frac{D_X^{\text{np}}}{D_X^{\text{np}} + D_X^{\text{обр}}}; & C_Y^{\text{обр}} &= \frac{D_Y^{\text{np}}}{D_Y^{\text{np}} + D_Y^{\text{обр}}}. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Вектор урвненных значений координат точек хода получают из соотношения

$$\begin{pmatrix} X^{yp} \\ Y^{yp} \end{pmatrix} = C! \begin{pmatrix} X^{np} \\ Y^{np} \\ X^{обр} \\ Y^{обр} \end{pmatrix}, \quad (20.32)$$

а его ковариационную матрицу — по формуле

$$\mathbf{K}_{XY}^{yp} = \mathbf{C}\mathbf{K}_{XY}^{выч}\mathbf{C}^T. \quad (20.33)$$

Рассмотренный алгоритм легко реализуется на ЭВМ.

Имея ковариационную матрицу урвненных значений координат  $\mathbf{K}_{XY}^{yp}$ , можно легко реализовать строгое решение по оценке точности любых функций координат, используя при этом численные методы.

### 20.3. Учет зависимости между координатами точек теодолитного хода при вычислении площади полигона

Рассмотрим достаточно распространенную задачу оценки точности определения площади полигона, координаты вершин которого получены проложением теодолитного хода.

Площадь  $n$ -угольника определяется по известной формуле

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i(Y_{i+1} - Y_{i-1}), \quad (20.34)$$

а СКП площади, в соответствии с классической теорией погрешностей — по формуле

$$m_p = \frac{1}{2} m_t \sqrt{\sum_{i=1}^n S_{i-1, i+1}^2}, \quad (20.35)$$

где  $m_t$  — СКП определения любой из координат;  $S_{i-1, i+1}$  — диагональ, связывающая соседние точки с точкой  $i$ .

Представим выражение (20.34) в линеаризованном виде, перейдя от координат точек к поправкам

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_2 - Y_N \\ Y_3 - Y_1 \\ \dots \\ Y_1 - Y_{N-1} \\ X_N - X_2 \\ X_1 - X_3 \\ \dots \\ X_{N-1} - X_1 \end{bmatrix}^T \times \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \dots \\ \delta X_N \\ \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \dots \\ \delta Y_N \end{pmatrix} + \vec{P}_0 = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\delta} + \vec{P}_0. \quad (20.36)$$

Учитывая, что корреляционная матрица координат и поправок совпадают, можно вычислить корреляционную матрицу площади размерностью  $1 \times 1$ , т.е. вычислить СКП площади  $m_p$  по формуле

$$m_p = \sqrt{\mathbf{C}^T \mathbf{K}_{XY} \mathbf{C}}. \quad (20.37)$$

Если не учитывать зависимость координат, то матрице  $\mathbf{K}_{XY}$  следует придать вид:

$$\mathbf{K}_{XY} = \begin{bmatrix} m_{X_1}^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & m_{X_N}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{Y_1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & m_{Y_N}^2 \end{bmatrix}. \quad (20.38)$$

Если необходимо учесть зависимость координат точек, требуется провести по описанному ранее алгоритму вычисления и по формуле (20.33) получить значение  $\mathbf{K}_{XY}$ .

Предложенная методика была опробована на нескольких модельных полигонах.

В первом варианте была вычислена СКП площади правильного шестиугольника со сторонами, равными 200 м, в предположении, что углы и линии измерялись электронным тахеометром, соответ-

ственно, с СКП  $m_p = 5''$  и  $m_s = 2$  см. Вычисление СКП площади выполнено в предположении, что координаты независимы, а также с учетом их зависимости. В обоих случаях СКП площади оказались равными одной и той же величине.

Во втором варианте вычислялись площадь вытянутого шестиугольника со сторонами, равными 200 м, причем предполагалось, что измерения выполнены в тех же условиях, что и в предыдущем варианте. При этом оказалось, что фактическая СКП вычисленной площади, т.е. с учетом имеющейся зависимости координат, примерно в полтора раза меньше СКП, рассчитанной в предположении их независимости.

Даже два небольших примера показывают, что наличие корреляции может оказывать влияние на оценку точности вычисления площади полигона по координатам его вершин в зависимости от геометрии полигона.

## 20.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Осуществлена передача дирекционного угла по теодолитному ходу. Вычислить коэффициент корреляции между дирекционными углами 8 и 10-й линий хода при условии, что вычисления проводились по неуравненным углам.

2. Между двумя твердыми сторонами проложен теодолитный ход, в котором измерено 20 углов. Проведено уравнивание углов в ходе. Вычислить коэффициент корреляции между дирекционными углами 7 и 11-й линий хода и сравнить с результатом, полученным для дирекционных углов тех же линий, но вычисленных по неуравненным углам.

3. Проложен ход геометрического нивелирования. Вычислить коэффициент корреляции между значениями высот 4 и 9-й точек хода, полученными по неуравненным превышениям.

4. Между твердыми реперами проложен нивелирный ход с 23 станциями. По уравненным превышениям вычислены высоты всех точек хода. Необходимо вычислить коэффициент корреляции между значениями высот 4 и 17-й точек этого хода.

# **Раздел V. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

## **21. ПРИНЦИПЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

### **21.1. Задачи и принципы уравнивания геодезических построений**

Задача уравнивания геодезических сетей возникает только в том случае, когда в наличии имеются дополнительные (избыточные) измерения. Если в геодезической системе, имеющей  $t$  неизвестных величин, проведено  $t$  измерений, то в этом случае каждая неизвестная величина определяется однозначно, и задача уравнивания не возникает. Так, при определении планового положения знака методом прямой засечки достаточно измерить два угла на пунктах с известными координатами. Это дает возможность однозначно, но без контроля вычислить координаты определяемого пункта. Однако в геодезии в целях контроля и повышения точности выполняют дополнительные (избыточные) измерения. В этом случае появляется возможность получить искомые величины в нескольких вариантах. Возникает задача получения окончательного (результатирующего) значения определяемой величины, что и составляет содержание задачи уравнивания.

Рассмотрим решение задачи уравнивания на простейшем примере.

В треугольнике теодолитом ЗТ5КП измерены три угла, при этом получены результаты, приведенные в табл. 21.1.

Таблица 21.1

№ угла	Значение угла	Варианты поправок в углы		
		I	II	III
1	60°00,1'	- 0,1'	0	- 35,3'
2	60°00,1'	- 0,1'	0	+ 30,0'
3	60°00,1'	- 0,1'	- 0,3'	+ 5,0'
$\Sigma_{\text{пр}}$	180°00,3'	- 0,3'	- 0,3'	- 0,3'
$\Sigma_{\text{теор}}$	180°00,0'			
$w$	+ 0,3'			

В результате того, что все измерения сопровождаются погрешностями, фактическая сумма углов треугольника (сумма углов практическая) отличается от теоретической. Задача уравнивания заключается в том, чтобы найти такую систему поправок, которая вводила в соответствие теорию и практику.

В данном примере наиболее очевидной является система поправок  $(-0,1'; -0,1'; -0,1')$ , которая представлена в табл. 21.1 виде варианта I. Эта система ликвидирует невязку. Однако она не является единственно возможной. Приемлемой может быть признана и система, представленная в варианте II  $(0; 0; -0,3')$ . Она также ликвидирует невязку. Но и очевидно неприемлемая система III также ликвидирует полученную невязку. Она абсурдна, так как величины поправок значительно превышают возможные (предельные) ошибки для данных условий измерений.

Если рассматривать эту задачу в формальном отношении, то необходимо решить одно уравнение с тремя неизвестными:

$$V_1 + V_2 + V_3 + W = 0,$$

где  $V_i$  — поправка в  $i$ -й угол;  $W$  — невязка.

В алгебраическом отношении эта задача имеет бесчисленное число решений, но с позиций геодезической практики далеко не каждое решение может быть признано приемлемым.

Такие задачи в математике называют некорректными, и для их решения необходимо вводить дополнительные условия, которые позволяли бы получать единственное решение, удовлетворяющее поставленным условиям.

Решением указанной задачи для обеспечений нужд астрономии и геодезии с давних времен занимались весьма уважаемые и авторитетные математики. В конечном счете решение поставленной задачи сводится к нахождению в какой-то степени «малых в совокупности» поправок к результатам измерений.

Первая попытка ограничить абсолютные значения поправок была выражена условием

$$\sum_{i=1}^n |V_i| = \min,$$

т.е. стремлением минимизировать сумму модулей поправок к результатам измерений. Однако эта задача является весьма сложной, поскольку представленное ограничение является функцией, не всюду дифференцируемой, что весьма затрудняет нахождение ее минимума.

Логическим продолжением этой идеи, идеи нахождения «малых в совокупности поправок» является идея введения ограничения вида

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 = \min,$$

т.е. идея минимизации суммы квадратов поправок.

Первое опубликованное изложение этого метода дано в 1806 г. французским математиком Анри Лежандром в связи с вычислением параметров орбит комет по данным ограниченного числа астрономических наблюдений. Ему же принадлежит и название «метод наименьших квадратов». В своей работе Лежандр не дает каких-либо обоснований предложенному методу, кроме простоты его применения.

В 1809 г. выходит работа немецкого математика Карла Фридриха Гаусса «Теория движения небесных тел», в которой дано, независимо от Лежандра, более полное изложение метода наименьших квадратов. В этой работе Гаусс отмечает, что указанным методом он пользуется с 1794 г., в том числе для определения эфемерид (параметров орбиты) планеты Цецеры. В 1801 г. итальянский астроном Иосиф Пиацци открыл между Марсом и Юпитером новую планету, которой было присвоено имя Цецера, и провел серию наблюдений для вычисления параметров ее орбиты. Затем эта планета стала недоступной для на-

блюдений в связи с ее положением относительно Солнца. По накопленной сравнительно короткой, серии наблюдений Гаусс, используя метод наименьших квадратов, вычислил эфемериды Цецеры. Это позволило астрономам в рассчитанное Гауссом время в расчетной точке небесной сферы вновь отыскать эту планету. Астрономы были поражены той точностью, с которой Гаусс предсказал положение планеты.

В период с 1809 по 1821 г. Гаусс опубликовал серию работ по методу наименьших квадратов. В частности, введя понятие веса результата измерения, Гаусс выдвигает более общее требование

$$[pV^2] = \min.$$

В этих же работах Гауссом введен *символ суммы*

$$[a] = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

В 1812 г. выходит работа Лапласа «Аналитическая теория вероятностей», в которой сделана серьезная попытка дать вероятностное обоснование метода наименьших квадратов.

Наиболее полно это сделал в 1898 г. русский математик академик А.А. Марков в работе «Закон больших чисел и метод наименьших квадратов».

Гаусс неоднократно в своих работах возвращается к методу наименьших квадратов. В одной из них он отказывается от принципа  $[pV^2] = \min$ , считая его достаточно формальным. Он предполагает, что система поправок должна быть такой, которая обеспечивала бы получение урвненных значений неизвестных с *максимально возможными весами*, что равносильно получению искомым величин с *минимальными дисперсиями*. Этот принцип можно назвать принципом *наибольшего веса*.

Рассмотрим на простейшем примере реализацию принципа  $[pV^2] = \min$  и принципа  $p_x = \max$ .

### **Пример 21.1**

Имеется ряд измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  одной и той же величины  $X$ , истинное значение которой неизвестно. Веса результатов измерений, соответственно, равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Требуется найти такую оценку (приближенное значение)  $x$  этой величины, которая порождала бы систему поправок  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , отвечающую условию  $[pV^2] = \min$ .

*Решение*

Поправки  $V_i$  определяются из условия

$$V_i = x - \lambda_i.$$

Тогда квадратичная форма, подлежащая минимизации, имеет вид

$$\Phi = [pV^2] = [p(x - \lambda)^2].$$

Для получения экстремума этой функции необходимо найти первую производную функции  $\Phi$  по переменной  $x$  и приравнять ее к нулю.

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2[p(x - \lambda)] = 0.$$

Решая уравнение  $[p(x - \lambda)] = 0$  относительно  $x$ , находим

$$[p]x = [p\lambda]$$

и окончательно —

$$x = \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

**Важнейший результат.** Принцип наименьших квадратов в случае неравноточных измерений одной и той же величины приводит к уже известному результату — *общей арифметической середине*.

### **Пример 21.2**

По условиям примера 21.1 необходимо подобрать такую комбинацию (функцию) результатов измерений, которая обладает наибольшим из всех допустимых функций весом.

*Решение*

Из математической статистики известно, что из всех возможных оценок (приближенных значений) представляют интерес только наилучшие оценки, т.е. оценки, обладающие свойством несмещенности, состоятельности и эффективности.

На основании теоремы Гаусса — Маркова первыми двумя свойствами обладает целый класс функций вида

$$x = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n \quad (\text{a})$$

при условии

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1. \quad (\text{б})$$

Следовательно, необходимо в классе оценок (а) при условии (б) найти такую, которая бы обладала максимальным весом.

Следует сделать оговорку, что ряд измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  есть ряд независимых измерений, не содержащих постоянные для данного ряда систематические погрешности.

В этом случае обратный вес функции (а) может быть рассчитан по теореме об обратном весе линейной функции независимых результатов измерений (Теорема 3). Тогда имеем

$$\frac{1}{p_x} = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \dots + \frac{C_n^2}{p_n}.$$

Реализация принципа  $p_x = \max$  равносильна реализации принципа  $\frac{1}{p_x} = \min$ . В этом случае задача сводится к нахождению таких

коэффициентов  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , удовлетворяющих условию (б), при которых обратный вес принимает минимальное значение. Это соответствует минимальной дисперсии функции (а).

Решение поставленной задачи в математическом анализе известно как нахождение условного экстремума. Составим вспомогательную функцию

$$\Phi = \frac{1}{p_x} - 2K(C_1 + C_2 + \dots + C_n - 1),$$

или

$$\Phi = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \dots + \frac{C_n^2}{p_n} - 2K(C_1 + C_2 + \dots + C_n - 1),$$

где  $K$  — неопределенный множитель Лагранжа; в практике геодезических вычислений этот множитель называют коррелатой.

Для нахождения неизвестных  $C_i$ , минимизирующих функцию  $\Phi$ , необходимо все частные производные этой функции по  $C_i$  приравнять к нулю. В этом случае получаем  $n$  уравнений вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = \frac{2C_i}{p_i} - 2K = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

После преобразования получаем

$$C_i = Kp_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Присоединяя к этой группе из  $n$  уравнений условие, накладываемое на коэффициенты  $C_i$  (условие (б)), получаем систему из  $n + 1$  уравнений с  $n + 1$  неизвестными.

$$\begin{aligned} C_i &= Kp_i \quad (i = 1, n); \\ C_1 + C_2 + \dots + C_n &= 1. \end{aligned}$$

Подставив первые  $n$  уравнений в последнее, получаем

$$K(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = 1,$$

откуда имеем

$$K = \frac{1}{[p]}.$$

Тогда

$$C_i = \frac{p_i}{[p]}.$$

Таким образом, искомая функция  $x$  (наилучшее приближение к истинному значению неизвестной величины  $X$ ) будет иметь вид

$$x = \frac{p_1}{[p]} \lambda_1 + \frac{p_2}{[p]} \lambda_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]} \lambda_n = \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

**Вывод.** Принцип наибольшего веса (принцип наименьшей дисперсии) при отсутствии систематических погрешностей и независимости результатов измерений приводит к тому же решению, что и принцип минимума суммы квадратов поправок — к общей арифметической середине.

Этот вывод получен для самого простого случая — нахождения наилучшего приближения к истинному значению при многократном измерении одной и той же величины. Но можно доказать, что при тех же самых условиях (независимости результатов измерений и отсутствии систематических ошибок) оба принципа приводят к одному и тому же результату.

Учитывая, что метод наименьших квадратов значительно про-



Значение коэффициентов  $a_{ij}$  ( $i = 1, t; j = 1, n$ ) зависит от геометрии сети.

Рассмотрим вопрос составления параметрических уравнений связи на конкретном примере нивелирной сети.

Заданы высоты четырех исходных реперов  $A, B, C, D$ .

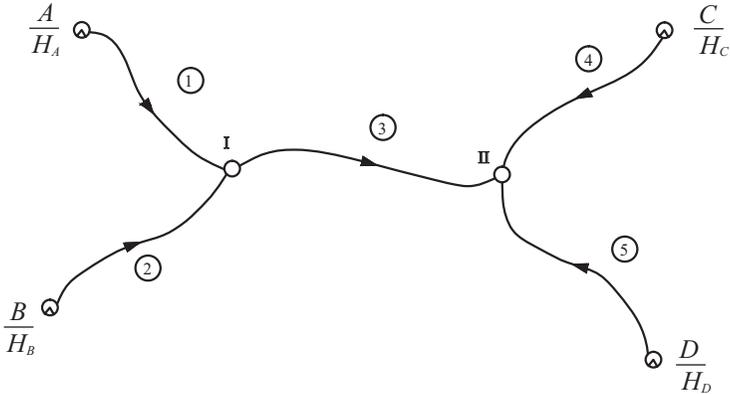


Рис. 21.1

Необходимо определить высоты точек I и II, для чего проложено пять ходов геометрического нивелирования. В этом случае число неизвестных величин  $t = 2$ , а число измеренных величин  $n = 5$ , при этом  $n > t$ .

Обозначим истинные значения искомым высот  $X_I$  и  $X_{II}$ , а истинные значения измеряемых величин (превышений по соответствующим ходам) через  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ . Исходя из вида данной сети, выразим истинные значения измеренных величин через истинные значения определяемых, т.е. составим параметрические уравнения связи, используя при этом высоты исходных реперов.

Преышения  $L_i$  связаны с высотами определяемых точек и исходных реперов следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1 &= +X_I && -H_A; \\ L_2 &= +X_I && -H_B; \\ L_3 &= -X_I && +X_{II}; \\ L_4 &= && +X_{II} -H_C; \\ L_5 &= && +X_{II} -H_D. \end{aligned}$$

Удобно представить систему коэффициентов параметрических уравнений связи в виде матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ +1 & 0 \\ -1 & +1 \\ 0 & +1 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

Элементы  $a_{0i}$  можно представить в виде столбца  $\mathbf{A}_0$ . В рассматриваемом случае

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -H_A \\ -H_B \\ 0 \\ -H_C \\ -H_D \end{bmatrix}.$$

В общем случае матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{t1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{t2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{tn} \end{bmatrix}.$$

Размерность матрицы  $\mathbf{A}$  —  $n \times t$ .

Столбец  $\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \dots \\ a_{0t} \end{bmatrix}$  имеет размерность  $n \times 1$ .

Тогда система параметрических уравнений связи в матричной форме будет иметь вид

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{A}_0, \quad (21.2)$$

где  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_n \end{bmatrix}$  — столбец истинных значений измеряемых величин с

размерностью  $n \times 1$ .

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_t \end{bmatrix}$  — столбец истинных значений определяемых величин

с размерностью  $t \times 1$ .

В результате полевых работ получен ряд результатов измерений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  с весами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Представим результаты измерений в виде матрицы-столбца

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

а веса — в виде диагональной матрицы порядка  $n$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Если бы были известны истинные значения измеряемых величин, то тогда можно вычислить истинные поправки  $\bar{V}_j = L_j - \lambda_j$ , которым можно придать вид:







строений всегда могут быть найдены наилучшие приближения  $x_1, x_2, \dots, x_t$  к истинным значениям искомым величин  $X_1, X_2, \dots, X_t$  с максимально возможными весами.

## 21.4. Уравнивание геодезических построений в случае нелинейных параметрических уравнений связи

Весьма часто при уравнивании геодезических построений приходится иметь дело с параметрическими уравнениями связи нелинейного вида. Так, например, при уравнивании триангуляции искомыми величинами являются координаты пунктов, а измеренными — углы либо направления. В этом случае необходимо представить измеряемые углы (направления) через искомые координаты. В этом случае параметрическое уравнение имеет вид

$$\beta_i = \arctg \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \arctg \frac{y_{k-1} - y_k}{x_{k-1} - x_k}.$$

Как известно, метод наименьших квадратов применим только к линейным уравнениям. Следовательно, возникает необходимость провести линеаризацию нелинейных параметрических уравнений связи. Для этой цели прежде всего требуется получить приближенные значения неизвестных. Эта процедура может быть выполнена вычислением искомым неизвестных по неуровненным результатам измерений.

Рассмотрим общий случай, когда параметрические уравнения связи имеют вид

$$L_i = \varphi_i(X_1, X_2, \dots, X_t),$$

где  $i$  изменяется от 1 до  $n$ .

Вычислим приближенные значения неизвестных  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_t^0$ . Тогда уравненные значения искомым величин могут быть представлены в виде

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, x_2 = x_2^0 + \delta x_2, \dots, x_t = x_t^0 + \delta x_t,$$

где  $\delta x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, t$ ) — поправки к искомым величинам, которые необходимо получить в результате уравнивания.

В этом случае параметрические уравнения поправок можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \varphi_1(x_1^0 + \delta x_1, \dots, x_t^0 + \delta x_t) - \lambda_1; \\
 V_2 &= \varphi_2(x_1^0 + \delta x_1, \dots, x_t^0 + \delta x_t) - \lambda_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 V_n &= \varphi_n(x_1^0 + \delta x_1, \dots, x_t^0 + \delta x_t) - \lambda_n.
 \end{aligned}
 \tag{21.12}$$

Левые части уравнений (21.12) разложим в точке с координатами  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_t^0$  в ряд Тейлора, ограничившись первыми членами разложения:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_t} \delta x_t + \varphi_1(x_1^0, \dots, x_t^0) - \lambda_1; \\
 V_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_t} \delta x_t + \varphi_2(x_1^0, \dots, x_t^0) - \lambda_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 V_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_t} \delta x_t + \varphi_n(x_1^0, \dots, x_t^0) - \lambda_n.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_0; \quad l_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_t^0) - \lambda_i.$$

Нулевой индекс у частных производных указывает на то, что они вычислены при нулевых значениях искомым величин. С учетом введенных обозначений уравнения поправок принимают вид:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{t1}x_t + a_{01} - l_1; \\
 V_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{t2}x_t + a_{02} - l_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 V_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{tn}x_t + a_{0n} - l_n,
 \end{aligned}
 \tag{21.13}$$

что полностью соответствует системе (21.5). В матричной форме выражения (21.13) могут быть представлены как

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{l}.
 \tag{21.14}$$

Здесь следует отметить, что равенства (21.13) и (21.14) являются приближенными, так как при разложении в ряд Тейлора ограни-

чились первыми членами разложения. В этом случае необходимо было бы проводить уравнивание системы в несколько приближений, на каждом этапе уточняя значения искомых величин и пере-вычисляя значения частных производных. Однако в геодезической практике нулевые приближения, полученные по результатам измерений, достаточно близки к уравненным значениям, т.е. поправки  $\delta x_i$  малы. Поэтому весь процесс достаточно проводить в один этап. В связи с этим выражения (21.13) и (21.14) представлены как точные равенства.

Далее процесс уравнивания проходит по стандартной схеме.

## 21.5. Порядок уравнивания геодезических построений параметрическим методом

На основе предыдущего может быть определен порядок уравнивания геодезических построений, т.е. порядок нахождения наилучших приближений к истинным значениям искомых величин.

1. По схеме сети проводят выбор независимых неизвестных, общее число которых равно  $t$ .

2. Далее составляют параметрические уравнения связи, которые определяют вид матрицы  $\mathbf{A}$  — матрицы параметрических уравнений связи. Для матрицы  $\mathbf{A}$  размерность  $n \times t$ , где  $n$  — число измеренных величин. При этом уравнивание возможно только в случае, когда  $n > t$ .

При наличии нелинейных параметрических уравнений связи проводят их линеаризацию, вычисляя частные производные этих функций по всем переменным.

3. Вычисляют веса результатов измерений и составляют диаго-

нальную матрицу  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}$ .

4. По результатам измерений вычисляют приближенные значения искомых величин  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_t^0$ . Тогда наилучшие приближе-

ния  $x_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ) могут быть представлены в виде  $x_i = x_i^0 + \partial x_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ), где  $\partial x_i$  — поправка к искомой неизвестной. При необходимости вычисляют по приближенным значениям неизвестных частные производные и свободные члены параметрических уравнений поправок. Линейные параметрические уравнения поправок в матричной форме будут иметь вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^0 + \partial \mathbf{x}) + \bar{\mathbf{Y}} = 0.$$

После некоторых преобразований получают

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \partial \mathbf{x} + \bar{\mathbf{I}}, \quad (21.15)$$

где  $\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{Y}}$ .

5. Составляют нормальные уравнения, которые с учетом (21.14) и (21.15) будут иметь вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \partial \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{I}} = 0. \quad (21.16)$$

6. Решают нормальные уравнения и находят поправки к искомым неизвестным  $\partial x$ .

7. Вычисляют искомые неизвестные  $x = x^0 + \partial x$ .

8. Вычисляют поправки к результатам измерений, используя соотношения (21.6), а далее — уравненные значения измеряемых величин  $\bar{\lambda} = \lambda + \mathbf{V}$ .

9. Выполняют контроль уравнивания, используя соотношения  $\bar{\lambda} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}_0$ .

## 21.6. Порядок составления нормальных уравнений с контролем по суммам

Составление нормальных уравнений выполняют в двулистной схеме (табл. 21.2 и 21.3). В листе А записывают коэффициенты исходной матрицы  $\mathbf{A}$  и столбец преобразованных свободных членов  $\bar{l}$ . Для выполнения последующих контрольных действий вводят вспомогательный столбец  $S$ , в котором записывают построчные суммы

$$S_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{ij} + l_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Таблица 21.2

## Лист А. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений

№ пп.	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$l$	$S$	$V$
1	$a_{11}$	$a_{21}$	$a_{31}$	$l_1$	$S_1$	$V_1$
2	$a_{12}$	$a_{22}$	$a_{32}$	$l_2$	$S_2$	$V_2$
...	...	...	...	...	...	...
$n$	$a_{1n}$	$a_{2n}$	$a_{3n}$	$l_n$	$S_n$	$V_n$
[ ]	$[a_1]$	$[a_2]$	$[a_3]$	$[l]$	$[S]$	$[V]$
	$[pa_1a_1]$	$[pa_1a_2]$	$[pa_1a_3]$	$[pa_1l]$	$[pa_1S]$	
		$[pa_2a_2]$	$[pa_2a_3]$	$[pa_2l]$	$[pa_2S]$	
			$[pa_3a_3]$	$[pa_3l]$	$[pa_3S]$	
				$[pll]$	$[plS]$	
					$[pSS]$	

В листе А резервируют столбец  $V$  для последующего вычисления поправок в результаты измерений. После заполнения первой части листа А ( $n + 1$  строка) переходят к заполнению листа Б. Следует учесть, что лист Б — отрывной.

Таблица 21.3

## Лист Б. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений

№ пп.	$pa_1$	$pa_2$	$pa_3$	$pl$	$pS$	$pV$
1	$p_1a_{11}$	$p_1a_{21}$	$p_1a_{31}$	$p_1l_1$	$p_1S_1$	$p_1V_1$
2	$p_2a_{12}$	$p_2a_{22}$	$p_2a_{32}$	$p_2l_2$	$p_2S_2$	$p_2V_2$
...	...	...	...	...	...	...
$n$	$p_n a_{1n}$	$p_n a_{2n}$	$p_n a_{3n}$	$p_n l_n$	$p_n S_n$	$p_n V_n$
[ ]	$[pa_1]$	$[pa_2]$	$[pa_3]$	$[pl]$	$[pS]$	$[pV]$

Элементы этого листа получают из соответствующих элементов листа А построчным умножением на веса  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Выполнив все записи и контрольные вычисления

$$p_j S_j = p_j a_{1j} + p_j a_{2j} + \dots + p_j a_{3j} + p_j l_j \quad (j=1, \dots, n),$$

переходят к вычислению коэффициентов нормальных уравнений. Для этой цели пристыковывают лист Б столбцом  $pa_1$  к столбцу  $a_1$  листа А и методом накапливания на калькуляторе вычисляют сумму произведений  $a_{11} \cdot p_1 a_{11} + a_{12} \cdot p_2 a_{12} + \dots + a_{1n} \cdot p_n a_{1n}$ , что в конечном счете есть первый коэффициент первого нормального уравнения  $[pa_1 a_1]$ , и его записывают в первой строке второй половины листа А в столбце  $a_1$ .

Сдвинув лист Б вправо на один столбец, аналогично вычисляют второй коэффициент первого нормального уравнения  $[pa_1 a_2]$ .

Продолжая подобные операции, вычисляют все оставшиеся коэффициенты первого нормального уравнения, а также свободный член  $[pa_1 l]$  и вспомогательную величину  $[pa_1 S]$ . После этого можно провести контроль вычислений коэффициентов первого нормального уравнения по формуле  $[pa_1 S] = [pa_1 a_1] + [pa_1 a_2] + \dots + [pa_1 a_n] + [pa_1 l]$ . (Контрольную формулу следует вывести самостоятельно).

Далее приступают к вычислению коэффициентов второго нормального уравнения. При этом следует учесть, что матрица коэффициентов нормальных уравнений симметрична относительно главной диагонали. В связи с этим начинать вычисления коэффициентов очередного уравнения необходимо с квадратичного. Во втором уравнении это коэффициент  $[pa_2 a_2]$ . Для этого пристыковывают лист Б столбцом  $pa_2$  к столбцу  $a_2$  листа А. Далее все действия выполняют в порядке, аналогичном описанному ранее. Контроль выполняют, используя соотношение

$$[pa_2 S] = [pa_1 a_2] + [pa_2 a_2] + \dots + [pa_2 a_n] + [pa_2 l],$$

при этом коэффициент  $[pa_1 a_2]$  берут из первой строки.

Вычисление всех последующих коэффициентов выполняют в том же самом порядке, начиная вычисления коэффициентов очередного уравнения с квадратичного коэффициента.

После вычисления коэффициентов последнего уравнения вычисляют величины  $[pll]$ ,  $[plS]$ ,  $[pSS]$ . Последнее контрольное соотношение имеет вид

$$[pSS] = [pa_1 S] + [pa_2 S] + \dots + [pa_n S] + [plS].$$

## 21.7. Задачи для самостоятельного решения

1. На рис. 21.1 приведена система ходов геометрического нивелирования. Составить параметрические уравнения связи, считая реперы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  исходными.

2. Преобразовать уравнения поправок

$$V_1 = x_1 \quad -30^\circ 16' 17'',$$

$$V_2 = +x_2 \quad -50^\circ 10' 19'',$$

$$V_3 = x_1 + x_2 \quad -80^\circ 26' 39'',$$

введя приближенные значения неизвестных.

3. Даны параметрические уравнения поправок

$$V_1 = x_1 + x_2 \quad -2,$$

$$V_2 = \quad + x_2 + x_3 + 1,$$

$$V_3 = x_1 \quad + x_3 + 3,$$

$$V_4 = x_1 - x_2.$$

Составить с контролем по суммам нормальные уравнения, учитывая, что были проведены равноточные измерения.

4. Даны параметрические уравнения поправок и веса результатов измерений

$$V_1 = 2x_1 - x_2 - 3, \quad p_1 = 0,8;$$

$$V_2 = x_1 + x_2 + 1, \quad p_2 = 1,2;$$

$$V_3 = x_1 + 2x_2 - 2, \quad p_3 = 1,4.$$

Составить (с контролем по суммам) нормальные уравнения.

5. Составить параметрические уравнения связи для построения, приведенного на рис. 21.1, считая что координаты пунктов  $A$  и  $B$  известны, а координаты пунктов  $C$  и  $D$  необходимо определить. На местности выполнены измерения углов, обозначенных на рисунке. Провести линеаризацию параметрических уравнений связи.

## Вопросы и задания для самопроверки

1. В каких случаях возникает задача уравнивания геодезических построений?

2. В чем состоит идея принципа наименьших квадратов и принципа наибольшего веса? Пояснить на примере обработки ряда неравноточных измерений одной и той же величины.

3. Дать определение параметрическим уравнениям связи. Как определяется общее число параметрических уравнений связи? Привести пример составления параметрических уравнений связи по схеме несложной нивелирной сети.

4. Дать определение параметрическим уравнениям поправок. Привести пример параметрических уравнений поправок для сети, рассматриваемой в задаче 3.

5. Как преобразовать параметрические уравнения поправок путем введения приближенных значений неизвестных?

6. Каким образом можно получить приближенные значения искомых величин?

7. Провести вывод нормальных уравнений, основываясь на принципе наименьших квадратов.

8. Что и как делать, если параметрические уравнения связи имеют нелинейный вид?

9. Опишите порядок уравнивания геодезических построений параметрическим методом в случае линейных параметрических уравнений связи.

10. Опишите порядок уравнивания геодезических построений параметрическим методом в случае нелинейных параметрических уравнений связи.

11. Вывести контрольные формулы:

$$\begin{aligned}[pa_1S] &= [pa_1a_1] + [pa_1a_2] + \dots + [pa_1a_i] + [pa_1l], \\ [pa_2S] &= [pa_2a_2] + [pa_2a_2] + \dots + [pa_2a_i] + [pa_2l], \\ [pS_1S] &= [pa_1S] + [pa_1S] + \dots + [pa_iS] + [plS].\end{aligned}$$

12. В чем состоит заключительный контроль уравнивания параметрическим методом?

## 22. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 22.1. Общие соображения

Решить систему уравнений — значит найти такие числовые значения неизвестных величин, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель системы отличен от нуля.

Существует достаточно большое число различных методов решения систем линейных уравнений. Обычно все методы решения систем линейных уравнений делят на две большие группы:

1. Точные методы.
2. Итерационные методы, или методы приближений.

К точным методам относят такие, для которых заранее можно подсчитать число арифметических операций, необходимых для получения числовых значений неизвестных.

Итерационные методы, или методы приближений, предполагают первоначально получение каких-то приближенных, значений искомых величин, а затем их последовательное уточнение до получения неизвестных с необходимой, заранее заданной точностью. При этом число таких приближений, а следовательно, число арифметических операций подсчитать заранее невозможно.

### 22.2. Точные методы

**Метод Крамера.** Пусть задана система линейных уравнений

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{B},$$

где  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица порядка  $t$ ;  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_t \end{bmatrix}$  — столбец неизвестных;  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_t \end{bmatrix}$  — столбец свободных членов.

Решение системы уравнений достигается вычислением  $t + 1$  числа определителей, где  $D = |\mathbf{A}|$  — определитель системы, т.е. определитель, построенный на базе матрицы  $\mathbf{A}$  и вспомогательных определителей системы  $D_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ), получаемых из определителя системы  $D$  заменой его  $i$ -го столбца столбцом свободных членов  $\mathbf{B}$ . При этом знаки свободных членов должны соответствовать знакам в правой части уравнений.

Тогда окончательные значения неизвестных могут быть получены из соотношений

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, \dots, t).$$

Метод Крамера имеет скорее теоретическое, чем практическое значение, так как вычисление определителей порядка более чем третий требует значительных затрат времени и, кроме того, не обеспечивает контроль промежуточных действий.

**Метод исключения неизвестных.** Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если решения первой системы являются решениями второй, и наоборот — решение второй системы является решением первой.

В курсе линейной алгебры доказывается, что линейное преобразование любой системы линейных уравнений переводит ее в систему эквивалентную.

К линейным преобразованиям системы относят следующие операции:

1. Умножение любого уравнения системы на любое число, отличное от нуля.
2. Замена любого уравнения системы на новое уравнение, полученное из заменяемого, сложено с любым другим уравнением этой системы, умноженным на любое число, кроме нуля.

Методы исключения неизвестных основаны на преобразовании исходной системы с использованием линейных операций.

Рассмотрим процесс исключения неизвестных на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными. Пусть задана система уравнений, определитель которой отличен от нуля.

$$\left. \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{10} &= 0, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{20} &= 0, \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{30} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{— исходная система уравнений.}$$

Необходимо преобразовать исходную систему линейными преобразованиями в систему вида:

$$\left. \begin{aligned} B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3 + B_{10} &= 0, \\ B_{22}x_2 + B_{23}x_3 + B_{20} &= 0, \\ B_{33}x_3 + B_{30} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{— эквивалентная система уравнений.}$$

Линейные преобразования должны быть проведены так, чтобы во втором уравнении коэффициент перед первым неизвестным оказался равным нулю, а в третьем уравнении должны быть равными нулю коэффициенты перед первым и вторым неизвестными.

В таком случае представляется возможным провести вычислительные неизвестных по следующей схеме:

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{B_{30}}{B_{33}}; \\ x_2 &= -\frac{B_{23}}{B_{22}}x_3 - \frac{B_{20}}{B_{22}}; \\ x_1 &= -\frac{B_{12}}{B_{11}}x_2 - \frac{B_{13}}{B_{11}}x_3 - \frac{B_{10}}{B_{11}}. \end{aligned}$$

Последняя система носит название *элиминационной системы уравнений* (элиминация — исключение).

Процесс вычисления коэффициентов элиминационных уравнений называют прямым ходом решения системы линейных уравнений, а вычисление самих неизвестных — обратным ходом решения этой системы.

Существует целый ряд методов перехода от исходной системы уравнений к эквивалентной. Рассмотрим только один из них — метод Гаусса, приспособленный для решения систем нормальных уравнений, т.е. систем, имеющих определитель Грама.

**Метод Гаусса решения систем нормальных уравнений.** Этот метод рассмотрим также на примере трех уравнений с тремя неизвестными. Пусть задана система из трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_1a_3]x_3 + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_1a_2]x_1 + [pa_2a_2]x_2 + [pa_2a_3]x_3 + [pa_2l] &= 0, \\ [pa_1a_3]x_1 + [pa_2a_3]x_2 + [pa_3a_3]x_3 + [pa_3l] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

*Первый этап* преобразования исходной системы предполагает исключение первых неизвестных из второго и третьего уравнений. Исключить неизвестное из уравнения — это значит с помощью линейных преобразований приравнять к нулю коэффициент перед этим неизвестным.

Сначала делим все коэффициенты первого уравнения на  $-[pa_1a_1]$ , что всегда возможно, так как квадратичные коэффициенты системы нормальных уравнений всегда больше нуля. При этом получаем

$$-x_1 - \frac{[pa_1a_2]}{[pa_1a_1]}x_2 - \frac{[pa_1a_3]}{[pa_1a_1]}x_3 - \frac{[pa_1l]}{[pa_1a_1]} = 0. \quad (22.2)$$

Для исключения первого неизвестного из второго уравнения достаточно уравнение (22.2) умножить на  $[pa_1a_2]$  и полученное уравнение сложить со вторым уравнением системы (22.1).

В результате этих действий получаем

$$\left( [pa_2a_2] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_2]}{[pa_1a_1]} \right) x_2 + \left( [pa_2a_3] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_3]}{[pa_1a_1]} \right) x_3 + \left( [pa_2l] - \frac{[pa_1a_2][pa_1l]}{[pa_1a_1]} \right) = 0.$$

Гаусс предложил ввести следующие обозначения:

$$[pa_2a_2] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_2]}{[pa_1a_1]} = [pa_2a_2 \cdot 1];$$

$$[pa_2a_3] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_3]}{[pa_1a_1]} = [pa_2a_3 \cdot 1];$$

$$[pa_2l] - \frac{[pa_1a_2][pa_1l]}{[pa_1a_1]} = [pa_2l \cdot 1].$$

С учетом обозначений Гаусса второе преобразованное уравнение примет вид

$$[pa_2a_2 \cdot 1]x_2 + [pa_2a_3 \cdot 1]x_3 + [pa_2l \cdot 1] = 0. \quad (22.3)$$

Аналогично выполняется исключение первого неизвестного из третьего уравнения, но в этом случае уравнение (22.2) умножается на  $[pa_1a_3]$ . В результате преобразований получаем

$$\left( [pa_2a_3] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_3]}{[pa_1a_1]} \right) x_2 + \left( [pa_3a_3] - \frac{[pa_1a_3][pa_1a_3]}{[pa_1a_1]} \right) x_3 + \left( [pa_3l] - \frac{[pa_1a_3][pa_1l]}{[pa_1a_1]} \right) = 0.$$

Введем обозначения Гаусса:

$$[pa_2a_3] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_3]}{[pa_1a_1]} = [pa_2a_3 \cdot 1];$$

$$[pa_3a_3] - \frac{[pa_1a_3][pa_1a_3]}{[pa_1a_1]} = [pa_3a_3 \cdot 1];$$

$$[pa_3l] - \frac{[pa_1a_3][pa_1l]}{[pa_1a_1]} = [pa_3l \cdot 1].$$

С учетом этих обозначений третье уравнение принимает вид

$$[pa_2a_3 \cdot 1]x_2 + [pa_3a_3 \cdot 1]x_3 + [pa_3l \cdot 1] = 0. \quad (22.4)$$

В результате первого этапа преобразования исходная система преобразуется к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_1a_3]x_3 + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_2a_2 \cdot 1]x_2 + [pa_2a_3 \cdot 1]x_3 + [pa_2l \cdot 1] &= 0, \\ [pa_2a_3 \cdot 1]x_2 + [pa_3a_3 \cdot 1]x_3 + [pa_3l \cdot 1] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

Далее, на *втором этапе преобразования* необходимо исключить второе неизвестное из третьего уравнения системы (22.5). Для этого будем использовать второе уравнение системы (22.5), разделив его предварительно на  $-[pa_2a_2 \cdot 1]$ . Это возможно, так как  $[pa_2a_2 \cdot 1] > 0$ . Покажем это:

$$[pa_2a_2 \cdot 1] = [pa_2a_2] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_2]}{[pa_1a_1]}.$$

Рассмотрим второй главный минор определителя системы нормальных уравнений:

$$M_2 = \begin{vmatrix} [pa_1a_1] & [pa_1a_2] \\ [pa_1a_2] & [pa_2a_2] \end{vmatrix} = [pa_1a_1][pa_2a_2] - [pa_1a_2]^2.$$

Но второй главный минор определителя Грама больше нуля, следовательно

$$[pa_1a_1][pa_2a_2] - [pa_1a_2]^2 > 0.$$

Разделим последнее неравенство на  $[pa_1a_1] > 0$  и получим

$$[pa_2a_2] - \frac{[pa_1a_2][pa_1a_2]}{[pa_1a_1]} = [pa_2a_2 \cdot 1] > 0,$$

что и требовалось доказать.

Разделив второе уравнение системы (22.5) на  $-[pa_2a_2 \cdot 1]$ , получим

$$-x_2 - \frac{[pa_2a_3 \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]}x_3 - \frac{[pa_2l \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]} = 0. \quad (22.6)$$

Для исключения второго неизвестного в третьем уравнении системы (22.5) умножим уравнение (22.6) на  $[pa_2a_3 \cdot 1]$  и вычтем из третьего уравнения (22.5). Тогда получим

$$\begin{aligned} & + \left( [pa_3a_3 \cdot 1] - \frac{[pa_2a_3 \cdot 1][pa_2a_3 \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]} \right) x_3 + \\ & + \left( [pa_3l \cdot 1] - \frac{[pa_2a_3 \cdot 1][pa_2l \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]} \right) = 0. \end{aligned}$$

Введем по Гауссу обозначения:

$$\begin{aligned} [pa_3a_3 \cdot 1] - \frac{[pa_2a_3 \cdot 1][pa_2a_3 \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]} &= [pa_3a_3 \cdot 2]; \\ [pa_3l \cdot 1] - \frac{[pa_2a_3 \cdot 1][pa_2l \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]} &= [pa_3l \cdot 2]. \end{aligned}$$

Тогда преобразованное третье уравнение системы (22.5) будет иметь вид

$$[pa_3a_3 \cdot 2]x_3 + [pa_3l \cdot 2] = 0. \quad (22.7)$$

После второго этапа преобразования система (22.1) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_1a_3]x_3 + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_2a_2 \cdot 1]x_2 + [pa_2a_3 \cdot 1]x_3 + [pa_2l \cdot 1] &= 0, \\ [pa_3a_3 \cdot 2]x_3 + [pa_3l \cdot 2] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

Последняя система уравнений (22.8), системы уравнений (22.5) и (22.1) являются эквивалентными системами уравнений, так как они получены путем линейных преобразований.

Разделим уравнение (22.7) на  $-[pa_3a_3 \cdot 2]$ :

$$-x_3 - \frac{[pa_3l \cdot 2]}{[pa_3a_3 \cdot 2]} = 0. \quad (22.9)$$

Уравнения (22.9), (22.6) и (22.2) после несложных преобразований могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{[pa_1a_2]}{[pa_1a_1]}x_2 - \frac{[pa_1a_3]}{[pa_1a_1]}x_3 - \frac{[pa_1l]}{[pa_1a_1]}; \\ x_2 &= -\frac{[pa_2a_3 \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]}x_3 - \frac{[pa_2l \cdot 1]}{[pa_2a_2 \cdot 1]}; \\ x_3 &= -\frac{[pa_3l \cdot 2]}{[pa_3a_3 \cdot 2]}, \end{aligned} \quad (22.10)$$

называемому *элиминационными уравнениями*.

Следовательно, вычислив коэффициенты элиминационных уравнений, можно вычислить все искомые неизвестные. Для успешного вычисления коэффициентов элиминационных уравнений необходимо знать правило раскрытия любого символа, что определяется так называемым алгоритмом Гаусса.

Прежде чем сформулировать алгоритм Гаусса, необходимо договориться о следующих положениях.

1. При раскрытии символа по алгоритму Гаусса веса записываются по умолчанию.

2. Число, стоящее под знаком символа после точки, указывает номер этапа преобразования. Если символ не содержит никакого числа, это значит, что он получен на нулевом этапе преобразования, т.е. это коэффициент исходной системы нормальных уравнений.

Каждому этапу преобразования  $k$  соответствует свой квадратичный коэффициент вида  $[pa_{k+1}a_{k+1} \cdot k]$ .

Этап преобразования	Вид квадратичного коэффициента
0	$[pa_1a_1]$
1	$[pa_2a_2 \cdot 1]$
2	$[pa_3a_3 \cdot 2]$
.....	.....
$k$	$[pa_{k+1}a_{k+1} \cdot k]$

Приняв указанные правила, сформулируем алгоритм Гаусса раскрытия любого символа:

*Раскрываемый символ равен разности, где уменьшаемое — такой же символ, но с индексом преобразования на единицу меньше. Вычитаемое есть дробь, в знаменателе которой стоит квадратичный коэффициент, соответствующий этапу преобразования уменьшаемого, а в числителе — произведение двух символов с индексом преобразования уменьшаемого. Первые буквы в каждом из сомножителей выбирают из квадратичного коэффициента, а вторые — по одному из уменьшаемого.*

Пример:

$$[pa_6l \cdot 5] = [pa_6l \cdot 4] - \frac{[pa_5a_6 \cdot 4][pa_5l \cdot 4]}{[pa_5a_5 \cdot 4]}.$$

**Схема Гаусса решения систем нормальных уравнений.** Схема Гаусса имеет  $t + 3$  столбца и  $t + 1$  горизонтальный блок. Название столбцов:  $a_1; a_2; \dots; a_p; l; S$  и «Контроль».

В каждом из первых  $t$  блоков выполняют преобразования коэффициентов соответствующего исходного уравнения в коэффициенты сначала эквивалентного, а затем — элиминационного уравнения.

Каждый блок имеет строку исходного уравнения, безымянные строки, в которых записывают элементы, переводящие исходные коэффициенты в коэффициенты эквивалентных уравнений.

В каждом блоке с номером  $N$  должно быть  $N - 1$  безымянных строк.

Соответственно в первом блоке безымянных строк нет. После безымянных строк следует строка эквивалентного уравнения. В первом блоке нет преобразований, следовательно, строка исходного (первого) уравнения является в то же время строкой эквивалентного уравнения.

Каждый блок завершается строкой элиминационного уравнения (элиминационная строка), элементы которой получают из элементов предыдущей строки делением на квадратичный коэффициент и *сменой всех знаков на противоположные*.

Вычислением коэффициентов последней элиминационной строки в блоке с номером  $t$  заканчивается прямой ход решения системы нормальных уравнений.

Все контрольные формулы прямого хода решения систем нормальных уравнений представлены в табл. 22.1. Вывод этих формул предлагается выполнить самостоятельно.

Контроль обратного хода решения выполняется следующим образом.

В схеме Гаусса фактически параллельно ведется решение двух систем уравнений, отличающихся друг от друга только столбцами свободных членов.

Первая система — это исходная система (22.1)

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_1a_3]x_3 + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_2a_1]x_1 + [pa_2a_2]x_2 + [pa_2a_3]x_3 + [pa_2l] &= 0, \\ [pa_3a_1]x_1 + [pa_3a_2]x_2 + [pa_3a_3]x_3 + [pa_3l] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вторая, вспомогательная система:

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]x'_1 + [pa_1a_2]x'_2 + [pa_1a_3]x'_3 + [pa_1S] &= 0, \\ [pa_1a_2]x'_1 + [pa_2a_2]x'_2 + [pa_2a_3]x'_3 + [pa_2S] &= 0, \\ [pa_1a_3]x'_1 + [pa_2a_3]x'_2 + [pa_3a_3]x'_3 + [pa_3S] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.11)$$

со свободными членами  $[pa_1S]$ ,  $[pa_2S]$ ,  $[pa_3S]$  и неизвестными  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ .

Ранее показано, что

$$\left. \begin{aligned} [pa_1S] &= [pa_1a_1] + [pa_1a_2] + [pa_1a_3] + [pa_1l], \\ [pa_2S] &= [pa_1a_2] + [pa_2a_2] + [pa_2a_3] + [pa_2l], \\ [pa_3S] &= [pa_1a_3] + [pa_2a_3] + [pa_3a_3] + [pa_3l]. \end{aligned} \right\} \quad (22.12)$$

Подставив значения свободных членов (22.12) в уравнения (22.11) и приведя подобные члены по коэффициентам, получим

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1](x'_1 + 1) + [pa_1a_2](x'_2 + 1) + \\ \quad + [pa_1a_3](x'_3 + 1) + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_1a_2](x'_1 + 1) + [pa_2a_2](x'_2 + 1) + \\ \quad + [pa_2a_3](x'_3 + 1) + [pa_2l] &= 0, \\ [pa_1a_3](x'_1 + 1) + [pa_2a_3](x'_2 + 1) + \\ \quad + [pa_3a_3](x'_3 + 1) + [pa_3l] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.13)$$

Последняя система уравнений полностью соответствует по коэффициентам и свободным членам исходной системе (22.1), следовательно, имеет то же решение, т.е.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 + 1, \\ x_2 &= x'_2 + 1, \\ x_3 &= x'_3 + 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.14)$$

Следовательно, решив две системы уравнений (22.1) и (22.11) и получив набор неизвестных по каждой из них, проводят их сравнение. Из равенств (22.14) следует, что вычисления выполнены верно.

№	Строка	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$l$	$S$
1	2	3	4	5	6	7
1	$a_1$	$[pa_1 a_1]$	$[pa_1 a_2]$	$[pa_1 a_3]$	$[pa_1 l]$	$[pa_1 S]$
2	$\varepsilon_1$		$-\frac{[pa_1 a_2]}{[pa_1 a_1]}$	$-\frac{[pa_1 a_3]}{[pa_1 a_1]}$	$-\frac{[pa_1 l]}{[pa_1 a_1]}$	$-\frac{[pa_1 S]}{[pa_1 a_1]}$
3	$a_2$		$[pa_2 a_2]$	$[pa_2 a_3]$	$[pa_2 l]$	$[pa_2 S]$
4	—		$-\frac{[pa_1 a_2]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 a_2]$	$-\frac{[pa_1 a_2]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 a_3]$	$-\frac{[pa_1 a_2]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 l]$	$-\frac{[pa_1 a_2]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 S]$
5	$a_{2,1}$		$[pa_2 a_2 1]$	$[pa_2 a_3 1]$	$[pa_2 l 1]$	$[pa_2 S 1]$
6	$\varepsilon_2$			$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}$	$-\frac{[pa_2 l 1]}{[pa_2 a_2 1]}$	$-\frac{[pa_2 S 1]}{[pa_2 a_2 1]}$
7	$a_3$			$[pa_3 a_3]$	$[pa_3 l]$	$[pa_3 S]$
8	—			$-\frac{[pa_1 a_3]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 a_3]$	$-\frac{[pa_1 a_3]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 l]$	$-\frac{[pa_1 a_3]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 S]$
9	—			$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 a_3 1]$	$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 l 1]$	$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 S 1]$
10	$a_{3,2}$			$[pa_3 a_3 2]$	$[pa_3 l 2]$	$[pa_3 S 2]$
11	$\varepsilon_3$				$-\frac{[pa_3 l 2]}{[pa_3 a_3 2]}$	$-\frac{[pa_3 S 2]}{[pa_3 a_3 2]}$
12	$\delta x_i$	$\delta x_1$	$\delta x_2$	$\delta x_3$	$[pl]$	$[pS]$
13	$\delta x'_i$	$\delta x'_1$	$\delta x'_2$	$\delta x'_3$	$-\frac{[pa_1 a_3]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 l]$	$-\frac{[pa_1 a_3]}{[pa_1 a_1]}[pa_1 S]$
14		+1	+1	+1	$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 l 1]$	$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 S 1]$
15	$Q_1$	$Q_{11}$	$Q_{12}$	$Q_{13}$	$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 l 1]$	$-\frac{[pa_2 a_3 1]}{[pa_2 a_2 1]}[pa_2 S 1]$
16	$Q_2$	$Q_{21}$	$Q_{22}$	$Q_{23}$	$[plS3]$	$[pS3]$
17	$Q_3$	$Q_{31}$	$Q_{32}$	$Q_{33}$		



**Решение систем линейных уравнений с использованием обратной матрицы системы.** Пусть задана система линейных уравнений с квадратной матрицей  $A$ :

$$Ax + \vec{B} = \vec{0}.$$

При условии, что определитель матрицы заданной системы не равен нулю, существует матрица  $A^{-1}$ , обратная по отношению к исходной. Произведение матрицы  $A$  на матрицу  $A^{-1}$  есть единичная матрица  $E$ , т.е. верно соотношение  $AA^{-1} = E$ .

Представим исходную систему в виде  $Ax = -B$  и умножим слева обе части равенства на обратную матрицу  $A^{-1}$ . При этом получим  $A^{-1}Ax = -A^{-1}B$ , но с учетом предыдущего получаем

$$x = -A^{-1}\vec{B}.$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений можно получить, умножив слева столбец свободных членов, взятый со знаком в правой части уравнения, на матрицу, обратную матрице исходной системы.

В настоящее время такой метод решения систем линейных уравнений является наиболее распространенным для расчетов с использованием ЭВМ.

### **22.3. Итерационные методы решения систем нормальных уравнений (метод последовательных приближений)**

При решении уравнений итерационными методами необходимо выполнить следующие процедуры.

1. Подготовить уравнения к итерациям, т.е. необходимо представить каждое неизвестное в такой форме, по которой оно будет вычисляться на каждом очередном шаге.

2. Определить, как будут вычисляться нулевые (исходные) приближения.

3. Определить, при каких расхождениях неизвестных в двух последовательных приближениях можно закончить итерационный процесс.

4. Определить условия сходимости итерационного процесса.

Говорят, что итерационный процесс сходится, если одновременно существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad (i = 1, \dots, t),$$

где  $x_i^{(k)}$  — значение  $i$ -го неизвестного на  $k$ -м шаге.

**Метод Якоби.** Пусть задана система нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_1a_3]x_3 + [pa_1l] &= 0, \\ [pa_1a_2]x_1 + [pa_2a_2]x_2 + [pa_2a_3]x_3 + [pa_2l] &= 0, \\ [pa_1a_3]x_1 + [pa_2a_3]x_2 + [pa_3a_3]x_3 + [pa_3l] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.15)$$

Преобразуем исходные уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{[pa_1a_2]}{[pa_1a_1]}x_2^{(k)} - \frac{[pa_1a_3]}{[pa_1a_1]}x_3^{(k)} - \frac{[pa_1l]}{[pa_1a_1]}, \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{[pa_1a_2]}{[pa_2a_2]}x_1^{(k)} - \frac{[pa_2a_3]}{[pa_2a_2]}x_3^{(k)} - \frac{[pa_2l]}{[pa_2a_2]}, \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{[pa_1a_3]}{[pa_3a_3]}x_1^{(k)} - \frac{[pa_2a_3]}{[pa_3a_3]}x_2^{(k)} - \frac{[pa_3l]}{[pa_3a_3]}. \end{aligned} \quad (22.16)$$

Здесь  $x_i^{(k)}$  — значение  $i$ -го неизвестного, полученного в  $k$ -м приближении.

Начальные приближения в методе Якоби вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= -\frac{[pa_1l]}{[pa_1a_1]}, \\ x_2^{(0)} &= -\frac{[pa_2l]}{[pa_2a_2]}, \\ x_3^{(0)} &= -\frac{[pa_3l]}{[pa_3a_3]}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Как показывает опыт решения систем нормальных уравнений по методу Якоби, процесс сходимости здесь идет достаточно медленно, поэтому требуется большое число приближений.

Процесс является сходящимся, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
[pa_1a_1] &> [pa_1a_2] + [pa_2a_3]; \\
[pa_2a_2] &> [pa_1a_2] + [pa_2a_3]; \\
[pa_3a_3] &> [pa_1a_3] + [pa_2a_3].
\end{aligned}
\tag{22.18}$$

Процесс тем быстрее сходится, чем больше каждый квадратичный коэффициент остальных коэффициентов данного уравнения.

**Метод Гаусса.** Основным недостатком метода Якоби является то, что в нем не используется вся последняя информация. Так, если получено первое неизвестное в  $k + 1$  приближении, то для расчета второго неизвестного на этом же шаге используют не последнее значение первого неизвестного  $x_1^{(k+1)}$ , а предыдущее  $x_1^{(k)}$ . Это, естественно, замедляет процесс сходимости.

Указанный недостаток метода Якоби учтен в методе Гаусса. Приведенные уравнения здесь имеют вид:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\frac{[pa_1a_2]}{[pa_1a_1]}x_2^{(k)} - \frac{[pa_1a_3]}{[pa_1a_1]}x_3^{(k)} - \frac{[pa_1l]}{[pa_1a_1]}; \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{[pa_1a_2]}{[pa_2a_2]}x_1^{(k+1)} - \frac{[pa_2a_3]}{[pa_2a_2]}x_3^{(k)} - \frac{[pa_2l]}{[pa_2a_2]}; \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{[pa_1a_3]}{[pa_3a_3]}x_1^{(k+1)} - \frac{[pa_2a_3]}{[pa_3a_3]}x_2^{(k+1)} - \frac{[pa_3l]}{[pa_3a_3]}.
\end{aligned}
\tag{22.19}$$

Нулевые приближения в методе Гаусса вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
x_1^{(0)} &= -\frac{[pa_1l]}{[pa_1a_1]}; \\
x_2^{(0)} &= -\frac{[pa_1a_2]}{[pa_2a_2]}x_1^{(0)} - \frac{[pa_2l]}{[pa_2a_2]}; \\
x_3^{(0)} &= -\frac{[pa_1a_3]}{[pa_3a_3]}x_1^{(0)} - \frac{[pa_2a_3]}{[pa_3a_3]}x_2^{(0)} - \frac{[pa_3l]}{[pa_3a_3]}.
\end{aligned}
\tag{22.20}$$

Такой подход (использование при вычислениях последних значений неизвестных) обеспечивает значительно более быстрый процесс определения окончательных значений неизвестных.

Метод Гаусса сходится всегда при решении любых нормальных уравнений.

Процесс итераций (приближений) считается законченным, если одновременно выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} |x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}| &< \delta; \\ |x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}| &< \delta; \\ |x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)}| &< \delta, \end{aligned} \quad (22.21)$$

т.е. расхождения между значениями неизвестных, полученных в двух последних приближениях, не больше наперед заданной величины  $\delta$ .

## 22.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Раскрыть в соответствии с алгоритмом Гаусса символы

$$[pa_2a_3], [pa_3S \cdot 1], [pa_3a_3 \cdot 2], [plS \cdot 3], [pSS \cdot 4].$$

2. Можно ли считать системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 6 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 1 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 &= 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

системами нормальных уравнений?

3. Решить методом Крамера следующие системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 7 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

4. Решить по схеме Гаусса следующую систему нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

5. Задачу 4 решить методом приближений по методу Якоби и по методу Гаусса.

6. Задачу 4 решить методом обращения матрицы с применением ЭВМ. Сравнить результаты решения с решениями задач 4 и 5.

### **Вопросы и задания для самопроверки**

1. Что значит решить систему уравнений?
2. Почему «точные» методы решения систем уравнений получили свое название?
3. При каких условиях система из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными имеет единственное решение?
4. Что значит «линейное преобразование системы уравнений»?
5. Какие системы уравнений называют эквивалентными?
6. В чем заключается идея решения систем линейных уравнений методом исключения?
7. Сформулируйте правило Гаусса раскрытия символов.
8. Что обозначает число, стоящее в символе Гаусса после точки?
9. Из каких блоков строится схема Гаусса решения нормальных уравнений? Каково общее число таких блоков?
10. Что значит прямой и обратный ходы решения системы нормальных уравнений?
11. В чем заключаются контроли прямого хода решения системы нормальных уравнений по алгоритму Гаусса? Вывести соответствующие формулы.
12. В чем заключается контроль обратного хода решения системы нормальных уравнений по алгоритму Гаусса?

13. Как вычисляют неизвестные системы линейных уравнений, используя обратную матрицу?

14. Каков порядок решения систем линейных уравнений итерационными методами?

15. В чем состоит преимущество метода Гаусса перед методом Якоби решения систем линейных уравнений итерационными методами?

16. Что значит сходимость итерационного процесса?

17. При каких условиях сходится метод Якоби решения систем нормальных уравнений?

18. При каких условиях сходится метод Гаусса решения систем нормальных уравнений?

## **23. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ УРАВНИВАНИЯ**

### **23.1. Общие соображения**

Метод наименьших квадратов, как уже было отмечено, позволяет не только вычислить значения наилучших приближений к искомым неизвестным, но также дает возможность провести оценку точности как результатов непосредственных измерений, так и искомым величин и их функций.

При выполнении апостериорной оценки точности решают следующие задачи:

1. Нахождение наилучшей оценки дисперсии единичного веса  $\mu^2$ .
2. Нахождение обратных весов уравненных значений неизвестных и их СКП.
3. Нахождение обратных весов функций уравненных значений неизвестных и их СКП.

### **23.2. Вычисление величины $\mu^2$**

Наилучшей оценкой дисперсии единичного веса является величина, вычисляемая по формуле

$$\mu^2 = \frac{[pV^2]}{n-t}. \quad (23.1)$$

СКП единичного веса рассчитывают по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-t}}. \quad (23.2)$$

Надежность величины  $\mu$  рассчитывают по формуле

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-t)}}. \quad (23.3)$$

Для вычисления величины  $\mu^2$  необходимо найти величину  $[pV^2]$ . Существуют несколько методов ее вычисления:

1. Непосредственно, после вычисления поправок  $V_i$  в результаты измерений.

2. По формулам  $[pV^2] = [pll \cdot t] = [pIS \cdot t]$ .

3. По формуле  $[pV^2] = [pll] + [pa_1l]x_1 + [pa_2l]x_2 + \dots + [pa_rl]x_r$ .

Расчет по формулам п.2 выполняется в схеме Гаусса решения нормальных уравнений в дополнительном блоке  $(t+1)$  в столбцах  $l$  и  $S$ , а по формуле п.3 — после нахождения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_r$ .

Сходимость всех полученных значений  $[pV^2]$  является хорошим контролем выполненных вычислений.

### 23.3. Нахождение обратных весов уравненных значений неизвестных

Уравненные значения неизвестных получают из решения системы нормальных уравнений

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{l}} = 0, \quad (23.4)$$

где  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{N}$  — матрица нормальных уравнений.

Как уже было отмечено ранее, матрица нормальных уравнений имеет определитель Грама, следовательно существует обратная матрица  $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$  такая, что их произведение равно единичной матрице  $\mathbf{E}$ , т.е. верно равенство

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = \mathbf{E}. \quad (23.5)$$

Для нахождения вектора  $\bar{x}$  умножим слева правую и левую части уравнения (23.4) на матрицу  $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ . Тогда получим

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \bar{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{1}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot 0. \quad (23.6)$$

В правой части равенства (23.6) стоит произведение обратной матрицы на нулевую. Умножение любой матрицы на нулевую дает нулевую матрицу.

В левой части того же равенства необходимо раскрыть скобки и выполнить умножение слева каждого слагаемого. В результате получают

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \bar{x} + (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{1}) = 0.$$

Произведение матрицы на обратную дает единичную матрицу. Умножение любой матрицы на единичную ее не меняет. Тогда получают

$$\bar{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{1}. \quad (23.7)$$

Вектор  $\bar{x}$  можно рассматривать как линейную комбинацию вектора  $\bar{1}$ , а матрицу  $-(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \bar{\mathbf{B}}$  как матрицу линейного преобразования.

Вектор  $\bar{1}$  отличается от вектора результатов измерений  $\bar{\lambda}$  на постоянное слагаемое, независимое от результатов измерений. В са-

мом деле:  $\bar{1} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A} \bar{x}_0 - \bar{\lambda}$ . В связи с этим вектор  $\bar{1}$  имеет точно такую же ковариационную матрицу, что и вектор  $\bar{\lambda}$ .

Построим ковариационную матрицу  $\mathbf{K}_\lambda$  вектора  $\bar{\lambda}$ . По условиям задачи результаты измерений независимы, следовательно, корреляционная матрица вектора  $\bar{\lambda}$  есть  $\mathbf{K}_\lambda = \mathbf{E}$ .

Матрица весов вектора измерений известна и равна

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Известна также матрица обратных весов  $\mathbf{P}^{-1}$ . Тогда ковариационная матрица вектора результатов измерений примет вид

$$\mathbf{K}_\lambda = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}. \quad (23.8)$$

Ковариационную матрицу вектора уравненных значений неизвестных можно получить на основании приведенной ранее Теоремы 8:

$$\mathbf{K}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \left[ (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \right]^T. \quad (23.9)$$

Напомним некоторые правила алгебры матриц:

1. Скалярный множитель  $\sigma_0^2$  можно поставить в любой части произведения.

2. При транспонировании произведения сомножители транспонируются и меняются местами.

3. Транспонирование симметричной относительно главной диагонали матрицы не меняет ее.

4. Произведение матрицы на обратную есть единичная матрица, которую можно не ставить в произведении.

Учитывая все это, выражению (23.9) можно придать вид

$$\mathbf{K}_x = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \quad (23.10)$$

Итак, можно сделать вывод, что ковариационная матрица вектора уравненных значений неизвестных есть обратная матрица по отношению к матрице нормальных уравнений, умноженная на величину дисперсии единичного веса.

Введем обозначение

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{Q}, \quad (23.11)$$

и назовем матрицу  $\mathbf{Q}$  весовой матрицей вектора уравненных значений неизвестных. Тогда выражению (23.10) можно придать вид

$$\mathbf{K}_x = \sigma_0^2 \mathbf{Q}. \quad (23.12)$$

На главной диагонали матрицы  $\mathbf{Q}$  стоят *обратные веса уравненных значений неизвестных*, т.е.

$$\frac{1}{p_{x_1}} = Q_{11}, \quad \frac{1}{p_{x_2}} = Q_{22}, \quad \dots, \quad \frac{1}{p_{x_r}} = Q_{rr}. \quad (23.13)$$

Тогда СКП уравненных значений неизвестных и оценка их надежности могут быть получены по формулам

$$m_1 = \mu\sqrt{Q_{11}}, \quad m_{m_1} = \frac{m_1}{\sqrt{2(n-t)}}; \quad (23.14)$$

$$m_2 = \mu\sqrt{Q_{22}}, \quad m_{m_2} = \frac{m_2}{\sqrt{2(n-t)}}; \quad (23.15)$$

.....

$$m_t = \mu\sqrt{Q_{tt}}, \quad m_{m_t} = \frac{m_t}{\sqrt{2(n-t)}}. \quad (23.16)$$

### 23.4. Вычисление обратной матрицы нормальных уравнений в схеме Гаусса

Матрица  $\mathbf{Q}$ , обратная по отношению к матрице нормальных уравнений, квадратная и имеет тот же порядок  $t$ , что и исходная матрица.

Представим матрицу  $\mathbf{Q}$  в виде

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \dots & Q_{tt} \end{bmatrix}. \quad (23.17)$$

Произведение матрицы на обратную есть единичная матрица, следовательно, верно равенство

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = \mathbf{E}. \quad (23.18)$$

Выполняя умножение матриц (23.14), можно получить  $t$  уравнений с  $t$  неизвестными.

Рассмотрим эти системы для случая, когда  $t = 3$ .

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]Q_{11} + [pa_1a_2]Q_{12} + [pa_1a_3]Q_{13} &= 1, \\ [pa_1a_2]Q_{11} + [pa_2a_2]Q_{12} + [pa_2a_3]Q_{13} &= 0, \\ [pa_1a_3]Q_{11} + [pa_2a_3]Q_{12} + [pa_3a_3]Q_{13} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.19)$$

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]Q_{21} + [pa_1a_2]Q_{22} + [pa_1a_3]Q_{23} &= 0, \\ [pa_1a_2]Q_{21} + [pa_2a_2]Q_{22} + [pa_2a_3]Q_{23} &= 1, \\ [pa_1a_3]Q_{21} + [pa_2a_3]Q_{22} + [pa_3a_3]Q_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.20)$$

$$\left. \begin{aligned} [pa_1a_1]Q_{31} + [pa_1a_2]Q_{32} + [pa_1a_3]Q_{33} &= 0, \\ [pa_1a_2]Q_{31} + [pa_2a_2]Q_{32} + [pa_2a_3]Q_{33} &= 0, \\ [pa_1a_3]Q_{31} + [pa_2a_3]Q_{32} + [pa_3a_3]Q_{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (23.21)$$

Можно заметить, что системы уравнений (23.19), (23.20) и (23.21) имеют тот же самый определитель, что и исходная система нормальных уравнений (23.4), и отличаются от исходной только столбцами свободных членов. Следовательно, решение этих систем уравнений возможно производить параллельно с решением основной системы нормальных уравнений и вспомогательной системы в схеме Гаусса. С этой целью достаточно ввести для каждой из систем уравнений (23.19), (23.20) и (23.21) соответствующие столбцы свободных членов, обозначив их соответственно  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ . В этих столбцах следует выполнять те же вычислительные операции, что и в столбцах  $l$  и  $S$  (см. табл. 21.2, 21.3) прямого хода решения системы уравнений.

Для выполнения обратного хода, т.е. для непосредственного вычисления весовых коэффициентов проводят те же операции, что и при вычислении основных и вспомогательных элементов, но при этом используют соответствующие столбцы свободных членов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ .

Контроль вычисления весовых коэффициентов  $Q_{ij}$  состоит в следующем:

1. Квадратичные весовые коэффициенты  $Q_{ii} > 0$  для любого  $i = 1, \dots, t$ .

2. Матрица  $\mathbf{Q}$  является обратной матрицей по отношению к матрице нормальных уравнений — матрице, симметричной относительно главной диагонали. Следовательно, матрица  $\mathbf{Q}$  также симметрична относительно главной диагонали, т.е.  $Q_{ij} = Q_{ji}$ .

3. Если просуммировать левые и правые части уравнений (23.19), (23.20) и (23.21) и привести соответствующим образом подобные члены, то получается следующее контрольное равенство (при  $t = 3$ )

$$\begin{aligned} &([pa_1a_1] + [pa_1a_2] + [pa_1a_3])(Q_{11} + Q_{12} + Q_{13}) + \\ &+ ([pa_1a_2] + [pa_2a_2] + [pa_2a_3])(Q_{21} + Q_{22} + Q_{23}) + \\ &+ ([pa_1a_3] + [pa_2a_3] + [pa_3a_3])(Q_{31} + Q_{32} + Q_{33}) = 3. \end{aligned}$$

## 23.5. Вычисление обратных весов и СКП функций уравненных значений неизвестных

Пусть необходимо оценить точность нескольких функций результатов измерений

$$F_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \dots + f_{1t}x_t + f_{10};$$

.....

(23.22)

$$F_k = f_{k1}x_1 + f_{k2}x_2 + \dots + f_{kt}x_t + f_{k0},$$

или в матричной форме

$$\vec{F} = \mathbf{F}_x + \vec{f}_0. \quad (23.23)$$

Вектор  $\mathbf{F}$  получен линейным преобразованием  $f$  из вектора  $\vec{x}$ , ковариационная матрица которого известна и равна  $\mathbf{K}_x$ . На основании ранее приведенной теоремы можно рассчитать ковариационную матрицу вектора  $\vec{F}$

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{fK}_x\mathbf{f}^T = \sigma_0^2\mathbf{fQf}^T. \quad (23.24)$$

Учитывая, что на главной диагонали матрицы  $\mathbf{K}_F$  стоят обратные веса функций, для обратного веса произвольной функции  $F_i$  можно записать следующее выражение:

$$\frac{1}{P_{F_i}} = \sum_{i=1}^t f_{ii}^2 Q_{ii} + 2 \sum_{i \neq j} f_{ii} f_{jj} Q_{ij}. \quad (23.25)$$

Здесь следует обратить внимание на одну деталь формулы (23.25).

Первая группа слагаемых в представленной формуле в точности соответствует Теореме 3 для независимых результатов измерений. А вторая группа слагаемых учитывает зависимости, возникшие между искомыми величинами в процессе совместного уравнивания.

Зная веса функций, можно вычислить СКП функций по формуле

$$m_{F_i} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{F_i}}}. \quad (23.26)$$

После выполнения оценки точности составляют каталог определяемых элементов с указанием их точности.

## 23.6. Примеры решения типовых задач

### Пример 23.1

На схеме рис. 23.1 представлена система нивелирных ходов, опирающихся на три марки, высоты которых получены из нивелирования более высокого класса. В табл. 23.1 приведены измеренные значения превышений по ходам и длины ходов.

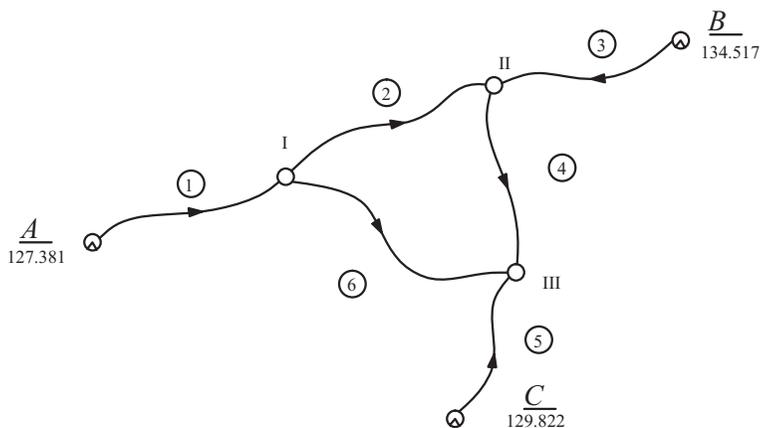


Рис.23.1

Таблица 23.1

№ хода	Измеренное превышение, м	Длина хода, км
1	+4,881	4,7
2	-4,132	6,2
3	-6,427	9,1
4	+2,588	5,3
5	+0,883	6,3
6	+1,611	8,6

Найти:

1. Уравненные значения высот реперов I, II, III.
2. СКП уравненных высот этих реперов.
3. СКП уравненного значения превышения по второму ходу.
4. СКП превышения, полученного по ходу длиной в 1 км.

*Решение*

*1. Выбор независимых неизвестных*

В качестве неизвестных в данном примере выбраны высоты определяемых реперов, т.е.

$$X_1 = H_I;$$

$$X_2 = H_{II};$$

$$X_3 = H_{III}.$$

Общее число неизвестных  $t = 3$ .

*2. Составление параметрических уравнений связи*

Общее число таких уравнений равно числу измеренных величин  $n = 6$ :

$$L_1 = +X_1 \qquad -H_A;$$

$$L_2 = -X_1 + X_2;$$

$$L_3 = \qquad +X_2 \qquad -H_B;$$

$$L_4 = \qquad -X_2 + X_3;$$

$$L_5 = \qquad \qquad +X_3 \qquad -H_C;$$

$$L_6 = +X_1 \qquad -X_3.$$

*3. Составление параметрических уравнений поправок*

Общее число таких уравнений также равно числу измеренных величин  $n = 6$ :

$$v_1 = +x_1 \qquad -H_A \quad -\lambda_1;$$

$$v_2 = -x_1 + x_2 \qquad -\lambda_2;$$

$$v_3 = \qquad +x_2 \qquad -H_B \quad -\lambda_3;$$

$$v_4 = \qquad -x_2 + x_3 \qquad -\lambda_4;$$

$$v_5 = \qquad \qquad +x_3 \quad -H_C \quad -\lambda_5;$$

$$v_6 = +x_1 \qquad -x_3 \qquad -\lambda_6.$$

*4. Выбор приближенных значений неизвестных*

В качестве приближенных значений неизвестных выбирают значения высот точек, полученные по одному из измеренных превышений. Здесь примем:

$$x_1^0 = H_A + \lambda_1 = 132,262 \text{ м};$$

$$x_2^0 = H_B + \lambda_3 = 128,090 \text{ м};$$

$$x_3^0 = H_C + \lambda_5 = 130,705 \text{ м}.$$

Тогда неизвестные величины  $x_1, x_2, x_3$  могут быть представлены через приближенные значения в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1^0 + \delta x_1 = 132,262 \text{ м} + \delta x_1; \\x_2 &= x_2^0 + \delta x_2 = 128,090 \text{ м} + \delta x_2; \\x_3 &= x_3^0 + \delta x_3 = 130,705 \text{ м} + \delta x_3,\end{aligned}$$

где  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  — поправки к неизвестным  $x_1, x_2, x_3$ .

### 5. Преобразование параметрических уравнений поправок

Подставим в параметрические уравнения поправок (п. 3) значения неизвестных, выраженные через приближенные значения и поправки к ним:

$$\begin{aligned}v_1 &= +\delta x_1 && +x_1^0 - H_A && -\lambda_1; \\v_2 &= -\delta x_1 + \delta x_2 && -x_1^0 + x_2^0 && -\lambda_2; \\v_3 &= +\delta x_2 && +x_2^0 - H_B && -\lambda_3; \\v_4 &= -\delta x_2 + \delta x_3 && -x_2^0 + x_3^0 && -\lambda_4; \\v_5 &= +\delta x_3 && +x_3^0 - H_C && -\lambda_5; \\v_6 &= +\delta x_1 - \delta x_3 && +x_1^0 - x_3^0 && -\lambda_6.\end{aligned}$$

Проведя вычисления, получаем свободные члены преобразованных параметрических уравнений поправок:

$$\begin{aligned}+x_1^0 - H_A - \lambda_1 &= l_1 = 0; \\-x_1^0 + x_2^0 - \lambda_2 &= l_2 = -40 \text{ мм}; \\+x_2^0 - H_B - \lambda_3 &= l_3 = 0; \\-x_2^0 + x_3^0 - \lambda_4 &= l_4 = +27 \text{ мм}; \\+x_3^0 - H_C - \lambda_5 &= l_5 = 0; \\+x_1^0 - x_3^0 - \lambda_6 &= l_6 = -54 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}v_1 &= +\delta x_1; \\v_2 &= -\delta x_1 + \delta x_2 && -40; \\v_3 &= +\delta x_2; \\v_4 &= -\delta x_2 + \delta x_3 && +27; \\v_5 &= +\delta x_3; \\v_6 &= \delta x_1 - \delta x_3 && -54.\end{aligned}$$

### 6. Расчет весов результатов измерений

Для превышений, полученных по ходам геометрического нивелирования, веса рассчитывают по формуле  $p_i = \frac{k}{L_i}$ . Приняв  $k = 10$ ,

получаем  $p_1 = 2,13$ ;  $p_2 = 1,61$ ;  $p_3 = 1,10$ ;  $p_4 = 1,89$ ;  $p_5 = 1,59$ ;  $p_6 = 1,16$ .

### 7. Составление нормальных уравнений

Составление нормальных уравнений выполняют в дуэлистной схеме (табл. 23.2 и 23.3).

Таблица 23.2

Лист А

№ пп.	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$l$	$S$	$V$
1	+1	0	0	0	+1	+2,13
2	-1	+1	0	-40	-40	-22,92
3	0	+1	0	0	+1	+19,21
4	0	-1	+1	+27	+27	-8,35
5	0	0	+1	0	+1	-16,14
6	+1	0	-1	-54	-54	-35,73
[ ]	+1	+1	+1	-67	-54	
	+4,90	-1,61 +4,60	-1,16 -1,89 +4,64	+1,76 -115,43 +113,67 +7336,37	+3,89 -114,33 +115,26 +7336,37 +7341,19	

Таблица 23.3

Лист Б

№ пп.	$pa_1$	$pa_2$	$pa_3$	$pl$	$pS$	$pV$
1	2,13	0	0	0	+2,13	4,54
2	-1,61	+1,61	0	-64,40	-64,40	-36,91
3	0	+1,10	0	0	+1,10	+21,13
4	0	-1,89	+1,89	+51,03	+51,03	-15,78
5	0	0	+1,59	0	+1,59	-25,66
6	+1,16	0	-1,16	-62,64	-62,64	-41,44
[ ]	+1,68	+0,82	+2,32	-76,01	-71,19	

Нормальные уравнения в числовой форме имеют вид:

$$\begin{aligned} +4,90\delta x_1 - 1,61\delta x_2 - 1,16\delta x_3 + 1,76 &= 0; \\ -1,61\delta x_1 + 4,60\delta x_2 - 1,89\delta x_3 - 115,43 &= 0; \\ -1,16\delta x_1 - 1,89\delta x_2 + 4,64\delta x_3 + 113,67 &= 0. \end{aligned}$$

#### 8. Решение нормальных уравнений

Нормальные уравнения решают в схеме Гаусса (см. табл. 22.1).

#### 9. Вычисление уравненных значений неизвестных

В схеме решения нормальных уравнений получены значения поправок к неизвестным  $\delta x_i$ :

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= +2,1318 \text{ мм}; \\ \delta x_2 &= +19,2072 \text{ мм}; \\ \delta x_3 &= -16,1408 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Тогда уравненные значения высот реперов получают значения

$$\begin{aligned} H_I &= x_1^0 + \delta x_1 = 132,262 + 0,002 = 132,264 \text{ м}; \\ H_{II} &= x_2^0 + \delta x_2 = 128,090 + 0,019 = 128,109 \text{ м}; \\ H_{III} &= x_3^0 + \delta x_3 = 130,205 - 0,016 = 130,689 \text{ м}. \end{aligned}$$

#### 10. Вычисление поправок к результатам измерений

Поправки в результаты измерений находят по преобразованным параметрическим уравнениям поправок с использованием полученных значений  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta x_3$ . Вычисления выполняют в листе А схемы составления нормальных уравнений (см. табл. 23.2).

По рассчитанным значениям поправок вычисляют уравненные значения измеренных величин по формуле

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + V_i.$$

При этом получают

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1 + V_1 = +4,881 + 0,002 = +4,883 \text{ м}; \\ \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2 + V_2 = -4,132 - 0,023 = -4,155 \text{ м}; \\ \bar{\lambda}_3 &= \lambda_3 + V_3 = -6,427 + 0,019 = -6,408 \text{ м}; \\ \bar{\lambda}_4 &= \lambda_4 + V_4 = +2,588 - 0,008 = +2,580 \text{ м}; \\ \bar{\lambda}_5 &= \lambda_5 + V_5 = +0,883 - 0,016 = +0,867 \text{ м}; \\ \bar{\lambda}_6 &= \lambda_6 + V_6 = +1,611 - 0,036 = +1,575 \text{ м}. \end{aligned}$$

## 11. Контроль уравнивания

Контролем уравнивания является точное соответствие уравненных значений превышений уравненным значениям высот определяемых точек

$$\bar{\lambda}_1 = H_I - H_A = +4,883 \text{ м}; \quad \bar{\lambda}_4 = H_{III} - H_{II} = +2,580 \text{ м};$$

$$\bar{\lambda}_2 = H_{II} - H_I = -4,155 \text{ м}; \quad \bar{\lambda}_5 = H_{III} - H_C = +0,867 \text{ м};$$

$$\bar{\lambda}_3 = H_{II} - H_B = -6,408 \text{ м}; \quad \bar{\lambda}_6 = H_I - H_{III} = +1,575 \text{ м}.$$

## 12. Вычисление среднеквадратической погрешности единицы веса

Расчет СКП единицы веса выполняют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-t}}.$$

Значение  $[pV^2]$  получают с контролем по нескольким формулам:

а)  $[pV^2] = [pll \cdot t] = [pls \cdot t]$ .

Эти вычисления выполнялись в схеме решения нормальных уравнений в столбцах 6 и 7 (дополнительный блок). При этом получены результаты  $[pV^2] = [pll \cdot 3] = [pls \cdot 3] = 3288,31$ .

б)  $[pV^2] = [pa_1l] \delta x_1 + [pa_2l] \delta x_2 + [pa_3l] \delta x_3 + [pll] = 3288,31$ .

в) Непосредственно по полученным значениям поправок в листах А и В получено значение  $[pV^2] = 3288,30$ .

## 13. Вычисление весовых коэффициентов

Весовые коэффициенты находят из решения систем весовых уравнений. Общее число систем уравнений равно  $t$ , причем каждая система имеет  $t$  уравнений.

Расчет весовых коэффициентов выполняют в схеме решения нормальных уравнений в столбцах 9—13 и заканчивают в столбцах 3—5 (строки 15—17).

Матрица весовых коэффициентов имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix},$$

и в числовом виде

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} +0,2876 & +0,1564 & +0,1356 \\ +0,1564 & +0,3461 & +0,1801 \\ +0,1356 & +0,1800 & +0,3227 \end{bmatrix}.$$

Контроль вычисления весовых коэффициентов осуществляется по формулам

1.  $Q_{ii} > 0$ .

2.  $Q_{ij} = Q_{ji}$ .

3.  $([pa_1S] - [pa_1l])(Q_{11} + Q_{12} + Q_{13}) + ([pa_2S] - [pa_2l])(Q_{21} + Q_{22} + Q_{23}) + ([pa_3S] - [pa_3l])(Q_{31} + Q_{32} + Q_{33}) = 3$ .

14. *Вычисление весов уравненных значений неизвестных*

$$\frac{1}{p_1} = Q_{11} = 0,2876; \quad \frac{1}{p_2} = Q_{22} = 0,3461; \quad \frac{1}{p_3} = Q_{33} = 0,3227.$$

15. *Составление весовых функций и вычисление весов функций уравненных значений неизвестных*

По условию задачи необходимо оценить точность уравненного значения превышения по второму ходу. В этом случае

$$F = h_2 = \bar{\lambda}_2 = \bar{H}_{II} - \bar{H}_I = x_1 - x_2,$$

или  $F = x_1 - x_2$ .

В этой функции  $f_1 = 1, f_2 = -1$  и  $f_3 = 0$ .

Тогда  $\frac{1}{p_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + 2f_1 f_2 Q_{12}$ .

Подставляя числовые значения, получают

$$\frac{1}{p_F} = 0,2876 + 0,3227 - 2 \cdot 0,1356 = 0,3391.$$

16. *Вычисление СКП уравненных значений неизвестных и их функций и СКП превышения по ходу в I км*

$$m_1 = \mu\sqrt{Q_{11}} = 33\sqrt{0,2876} = 17,8 \text{ мм} \approx 18 \text{ мм};$$

$$m_2 = \mu\sqrt{Q_{22}} = 33\sqrt{0,3461} = 19,5 \text{ мм} \approx 20 \text{ мм};$$

$$m_3 = \mu\sqrt{Q_{33}} = 33\sqrt{0,3227} = 18,8 \text{ мм} \approx 19 \text{ мм};$$

$$\mu_{\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{k}} = \frac{33}{\sqrt{10}} = 10,4 \text{ мм} \approx 10 \text{ мм}.$$

### 23.7. Задачи для самостоятельного решения

1. На пункте  $A$  (рис. 23.2) равноточно измерены углы

$$\angle 1 = 45^\circ 26' 32'';$$

$$\angle 2 = 98^\circ 05' 03'';$$

$$\angle 3 = 52^\circ 38' 28''.$$

Вычислить урвненные значения углов, СКП измерения угла и СКП урвненных значений углов.

2. На пункте  $A$  (см. рис. 23.2) равноточно измерено шесть углов:

$$\angle 1 = 36^\circ 15' 39''; \quad \angle 4 = 36^\circ 08' 30'';$$

$$\angle 2 = 72^\circ 24' 22''; \quad \angle 5 = 78^\circ 36' 15'';$$

$$\angle 3 = 114^\circ 51' 54''; \quad \angle 6 = 42^\circ 27' 40''.$$

Составить нормальные уравнения.

3. Даны нормальные уравнения:

$$6x_1 + 2x_2 - 7 = 0;$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3 = 0.$$

Найти с контролем весовые коэффициенты.

4. Даны нормальные уравнения:

$$3x_1 - x_2 - 2 = 0;$$

$$-x_1 + 4x_2 - 3 = 0.$$

Вычислить вес функции  $F = x_1 + 2x_2 - 4$ .

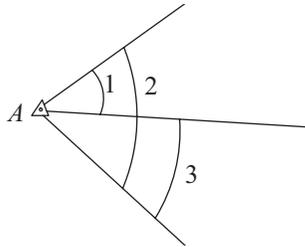


Рис. 23.2

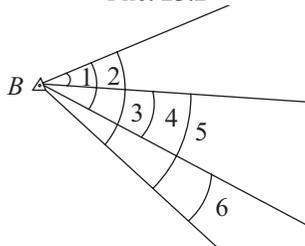


Рис. 23.3

5. Даны нормальные уравнения

$$3x_1 + 2x_2 - 5 = 0;$$

$$2x_1 + 6x_2 - 8 = 0.$$

Найти СКП функции  $F = 2x_1 - x_2 + 1$ , если известно, что  $[p\text{лл}] = 18$ , а число измерений  $n = 6$ .

6. Даны параметрические уравнения поправок:

$$V_1 = 2x_1 - x_2 - 3;$$

$$V_2 = x_1 + x_2 + 1;$$

$$V_3 = x_1 + 2x_2 - 2.$$

Найти вес функции  $F = x_1 - x_2$ , если известно, что измерения равноточные.

### Темы и вопросы для самопроверки

1. Вычисление СКП единичного веса в параметрическом методе. Контроль вычисления  $[pV^2]$ .
2. Порядок составления и решения весовых уравнений.
3. В каком отношении находятся матрица системы нормальных уравнений и матрица весовых коэффициентов?
4. Контрольные формулы вычисления весовых коэффициентов.
5. Что собой представляют диагональные элементы весовой матрицы?
6. Порядок составления весовой функции. Иллюстрировать на примере.
7. Формулы для вычисления СКП уравненных значений неизвестных и их функций.

## 24. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ МЕТОДОМ (МЕТОД УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ)

### 24.1. Основные определения и обозначения

Если имеется произвольное геодезическое построение с  $t$  неизвестными величинами, то достаточно для их определения прове-



$$\mathbf{B}\vec{\lambda} + \vec{B}_0 = \vec{W}. \quad (24.3)$$

Необходимо подобрать такую систему поправок, которая бы ликвидировала вектор невязок, т.е.

$$\mathbf{B}(\vec{\lambda} + \vec{V}) + \vec{B}_0 = 0. \quad (24.4)$$

Раскрыв скобки в (24.4) и учтя (24.3), получим

$$\mathbf{B}\vec{V} + \vec{W} = 0. \quad (24.5)$$

Последняя система уравнений называется *системой условных уравнений поправок*.

Система (24.5) имеет  $n$  неизвестных поправок и состоит из  $r$  уравнений, причем, естественно,  $n > r$ . В связи с этим система (24.5) имеет бесчисленное множество решений. Для однозначного решения системы на искомые поправки накладывают дополнительное условие  $[pV^2] = \min$ , или в матричной форме —  $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \vec{V} = \min$ , которое позволяет получить уравненные значения измеряемых величин с максимально возможным весом.

## 24.2. Вывод нормальных уравнений коррелат

Нахождение абсолютного экстремума функции  $F = [pV^2]$  не решает поставленную задачу, так как имеет тривиальное решение, при котором все поправки равны нулю. Такое решение не ликвидирует невязки в системе (24.4).

В математическом анализе известна задача нахождения экстремума заданной функции при наличии условий, накладываемых на искомые неизвестные. Это нахождение условного экстремума функции. Суть ее заключается в следующем.

Пусть задана функция  $F = f(x_1, \dots, x_n)$ , экстремум которой необходимо найти при условиях, что переменные  $x_1, \dots, x_n$  должны отвечать некоторым условиям вида  $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_r(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Для решения поставленной задачи необходимо составить вспомогательную функцию

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_n) + k_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + k_r \varphi_r(x_1, \dots, x_n),$$

где  $k_1, \dots, k_r$  — неопределенные множители Лагранжа.

Доказывается, что в этом случае нахождение условного экстремума функции  $F = f(x_1, \dots, x_n)$  имеет то же решение, что и нахождение абсолютного экстремума функции  $\Phi = f(x_1, \dots, x_n) + k_1\varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + k_r\varphi_r(x_1, \dots, x_n)$ . Приравнявая к нулю частные производные функции  $\Phi$  по всем переменным, получают систему из  $n$  уравнений. Решая полученную систему уравнений совместно с условными уравнениями, вычисляют неопределенные множители Лагранжа  $k_1, \dots, k_r$  и значения переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Этому набору переменных соответствует экстремальное значение функции  $F = f(x_1, \dots, x_n)$ , при этом выполняются все условные уравнения.

В случае уравнивания геодезических систем коррелятным методом составляют вспомогательную функцию вида

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} - 2 \bar{k}^T (\mathbf{B} \bar{V} + \bar{W}). \quad (24.6)$$

Здесь в качестве неопределенных множителей Лагранжа выступает вектор  $2\bar{k}$ . В геодезической практике величины  $k$  называют коррелатами (коррелятами), откуда и происходит название метода уравнивания.

Матрица частных производных функции (24.6) по вектору неизвестных поправок будет иметь вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2 \mathbf{V}^T \mathbf{P} - 2 \bar{k}^T \mathbf{B} = 0, \quad (24.7)$$

или

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} = \bar{k}^T \mathbf{B}.$$

Проведем транспонирование обеих частей последнего равенства.  $\mathbf{P}$  — диагональная матрица, следовательно, она не меняется при транспонировании. В результате имеем

$$\mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{B}^T \bar{k}. \quad (24.8)$$

Умножив слева обе части равенства (24.8) на матрицу обратных весов, получаем

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{k}.$$

Если ввести обозначения  $\mathbf{P}^{-1} = \pi$ , то последней системе уравнений можно придать вид

$$\mathbf{V} = \pi \mathbf{B}^T \vec{k}. \quad (24.9)$$

Система уравнений (24.9) называется *системой коррелятных уравнений поправок*.

Последняя система уравнений имеет  $(n + r)$  неизвестных ( $n$  неизвестных поправок и  $r$  неизвестных коррелат), а число уравнений в системе равно  $n$ . Но есть система условных уравнений поправок, состоящая из  $r$  уравнений. Объединенная система имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \pi \mathbf{B}^T \vec{k}; \\ \mathbf{B}\mathbf{V} + \vec{W} &= 0. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Подставив верхнее выражение в нижнее, получаем

$$\mathbf{B}\pi \mathbf{B}^T \vec{k} + \vec{W} = 0. \quad (24.11)$$

Система уравнений (24.11) называется *системой нормальных уравнений коррелат*.

Определитель системы (24.11)  $|\mathbf{B}\pi \mathbf{B}^T|$  обладает всеми свойствами определителя Грама, т.е. эта система имеет решение и при том — единственное.

Решение системы нормальных уравнений коррелат может быть осуществлено одним из представленных ранее методов. Решение нормальных уравнений коррелат по схеме Гаусса дано в табл. 24.1.

### 24.3. Вычисление поправок и уравненных значений результатов измерений. Контроль уравнивания

В результате решения системы нормальных уравнений коррелат получают неопределенные множители Лагранжа — коррелаты. Это решение можно представить в виде

$$\vec{k} = -(\mathbf{B}\pi \mathbf{B}^T)^{-1} \vec{W}. \quad (24.12)$$

В ручном варианте счета коррелаты можно вычислить в схеме Гаусса решения нормальных уравнений.

Имея коррелаты и используя коррелятные уравнения поправок, вычисляют поправки к результатам измерений  $\mathbf{V} = \pi \mathbf{B}^T \vec{k}$ .

После этого вычисляют уравненные значения результатов измерений



$$\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} + \bar{V}. \quad (24.13)$$

Контроль уравнивания выполняют подстановкой уравненных значений результатов измерений в условные уравнения. При этом в правой части должны быть получены нули:

$$\mathbf{B}\bar{\bar{\lambda}} + \mathbf{B}_0 = \bar{0}. \quad (24.14)$$

Далее могут быть вычислены все искомые величины геодезического построения. Это действие завершает процесс уравнивания коррелятным методом.

#### 24.4. Уравнивание коррелятным методом при нелинейных условных уравнениях

При уравнивании геодезических построений очень часто приходится иметь дело с нелинейными условными уравнениями. Примером таких уравнений могут служить условные уравнения координат, возникающие при уравнивании одиночного полигонометрического хода, положенного между двумя твердыми сторонами:

$$\sum_{i=0}^N S_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} - (X_N - X_0) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^N S_{i,i+1} \sin \alpha_{i,i+1} - (Y_N - Y_0) = 0,$$

где  $S_{i,i+1}$  — истинные значения измеряемых сторон хода;  $\alpha_{i,i+1}$  — истинные значения дирекционных углов сторон хода;  $X_0, Y_0$  и  $X_N, Y_N$  — соответственно координаты начальной и конечной точек хода.

В этом случае, как и в случае уравнивания параметрическим методом, необходимо проводить линеаризацию условных уравнений.

Рассмотрим общий случай, когда в системе имеются  $r$  условных уравнений вида

$$\varphi_j(L_1, L_2, \dots, L_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, r), \quad (24.15)$$

где  $L_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — истинные значения измеряемых величин.

Подставим в (24.15) вместо истинных значений  $L_i$  результаты измерений  $\lambda_i$ . При этом получим

$$\varphi_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = W_j. \quad (24.16)$$

Для ликвидации невязок  $W_j$  введем в результаты измерений поправки

$$\varphi_j(\lambda_1 + V_1, \lambda_2 + V_2, \dots, \lambda_n + V_n) = 0. \quad (24.17)$$

Разложим первые части уравнений (24.17) в точке с координатами  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  в ряд Тейлора, ограничившись первыми членами разложения

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_1}\right) V_1 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_2}\right) V_2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_n}\right) V_n + \varphi_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0. \quad (24.18)$$

Учитывая (24.16) и введя обозначения  $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_i}\right) = b_{ji}$ , выражениям (24.18) можно придать вид

$$b_{j1}V_1 + b_{j2}V_2 + \dots + b_{jn}V_n + W_j = 0, \quad (24.19)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{BV} + \vec{W} = \vec{0}. \quad (24.20)$$

Уравнение (24.20) соответствует уравнению (24.5), с той лишь разницей, что оно является приближенным в связи с тем, что при разложении в ряд Тейлора ограничились первыми членами разложения. Однако поправки в результаты измерений невелики, и поэтому практически можно считать равенство (24.20) точным, что дает возможность все дальнейшие операции проводить в том порядке, который определен для случая линейных условных уравнений, и выполнить уравнивание в один прием без дальнейшего уточнения.

## Вопросы и задания для самопроверки

1. Что называется условным уравнением? Приведите несколько примеров условных уравнений.
2. Как вычисляют невязки (свободные члены) условных уравнений?
3. Опишите переход от условных уравнений к условным уравнениям поправок.
4. Имеется система условных уравнений поправок. Необходимо вычислить поправки к результатам измерений. Почему приходится

ставить дополнительные условия для определения этих поправок? Как формулируется дополнительное условие и что оно дает?

5. Какой математический прием применяют при решении задачи нахождения минимума суммы квадратов поправок в коррелятном методе?

6. Что такое коррелаты?

7. Опишите структуру нормальных уравнений коррелат.

8. Как получить поправки в результаты измерений, если известны коррелаты?

9. Контроль уравнивания в коррелятном методе.

10. Как проводится уравнивание геодезических построений в случае нелинейных условных уравнений?

## 25. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В КОРРЕЛАТНОМ МЕТОДЕ

### 25.1. Вычисление СКП единичного веса

Апостериорная оценка точности в коррелятном методе предполагает следующие операции:

1. Вычисление СКП единичного веса.

2. Вычисление весов функций уравненных значений измеряемых величин.

3. Вычисление СКП функций уравненных значений измеряемых величин.

Рассмотрим каждый из перечисленных пунктов.

СКП единичного веса и ее надежность вычисляют по формулам:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{r}}; \quad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}}. \quad (25.1)$$

Величина  $[pV^2]$  вычисляется непосредственно по вычисленным поправка. Но следует иметь в виду, что в коррелятном методе используют обратные веса измеренных величин, в связи с чем для

вычисления лучше использовать выражение  $[pV^2] = \left[ \frac{V^2}{\pi} \right]$ .

Для контроля используем соотношение  $[pV^2] = -[kW]$ . Докажем справедливость этого равенства.

В матричной форме выражение  $[pV^2]$  имеет вид  $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}$ , а выражение  $[kW]$  — вид  $\mathbf{k}^T \mathbf{W}$ . Известно, что коррелятное уравнение поправок в матричной форме может быть представлено как  $\mathbf{V} = \pi \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{k}}$ . Тогда  $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{B} \pi^T \mathbf{P} \pi \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{k}}$ . Но  $\pi^T = \pi$ , так как матрица  $\pi$  диагональная. Кроме того, произведение  $\pi \mathbf{P}$  есть единичная матрица. Тогда  $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{B} \pi \mathbf{B}^T \mathbf{k}$ . Но  $\mathbf{B} \pi \mathbf{B}^T \mathbf{k} = -\bar{\mathbf{W}}$ , так как это система нормальных уравнений коррелят. Из последнего вытекает равенство

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = -\bar{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{W}}, \quad (25.2)$$

что и требовалось доказать.

## 25.2. Вычисление весов функций уравненных значений неизвестных

Пусть имеется совокупность функций уравненных значений измеряемых величин

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{f}_0, \quad (25.3)$$

или в развернутом виде

$$F_1 = f_{11} \bar{\lambda}_1 + \dots + f_{1n} \bar{\lambda}_n + f_{10};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_s = f_{s1} \bar{\lambda}_1 + \dots + f_{sn} \bar{\lambda}_n + f_{s0}.$$

Требуется определить обратные веса заданной группы функций.

В данном случае к функциям  $F$  неприменима Теорема 3 теории ошибок, так как неизвестны веса уравненных значений измеряемых величин. Кроме того, уравненные значения измеряемых величин зависимы, поскольку они получены из совместного уравнивания.

Для решения задачи о вычислении обратных весов функций  $F$  необходимо выразить эти функции через результаты непосредственных результатов измерений.

Представим вектор  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  через результаты измерений  $\lambda$ .

Вектор уравненных значений результатов измерений получен из (24.13):

$$\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} + \mathbf{V}.$$

Необходимо вектор поправок, полученный из (24.9), представить как линейную функцию непосредственных результатов измерений

$$\mathbf{V} = \pi \mathbf{B}^T \bar{k}.$$

Вектор коррелят  $\bar{k}$  получен из решения системы нормальных уравнений коррелят (24.12)

$$\bar{k} = -(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\bar{W}.$$

Вектор невязок получен из соотношения (24.3)

$$\mathbf{B}\lambda + \mathbf{B}_0 = \bar{W}.$$

Тогда корреляты можно представить в виде

$$\bar{k} = -(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{B}\bar{\lambda} + \mathbf{B}_0) = -(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\bar{\lambda} - (\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}_0, \quad (25.4)$$

а вектор поправок —

$$\bar{\mathbf{V}} = -\pi\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\bar{\lambda} - \pi\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}_0. \quad (25.5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} -\pi\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B} &= \mathbf{C}; \\ -\pi\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\pi\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}_0 &= \mathbf{C}_0. \end{aligned} \quad (25.6)$$

Из этого следует

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\lambda + \mathbf{C}_0,$$

при этом  $\mathbf{C}_0$  не зависит от результатов измерений.

Подставим последнее равенство в (24.13). Тогда получим

$$\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} + \mathbf{C}\bar{\lambda} + \mathbf{C}_0 = (\mathbf{E} + \mathbf{C})\bar{\lambda} + \mathbf{C}_0.$$

Таким образом, удалось выразить вектор уравненных значений результатов измерений через вектор результатов непосредственных измерений.

Известно, что вектор результатов измерений имеет ковариационную матрицу  $\mathbf{K}_\lambda = \sigma_0^2 \pi$ .

Воспользовавшись теоремой о ковариационной матрице вектора линейного преобразования, можно записать ковариационную матрицу вектора уравненных значений результатов измерений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\bar{\lambda}} &= (\mathbf{E} + \mathbf{C})\mathbf{K}_{\lambda}(\mathbf{E} + \mathbf{C})^T = (\mathbf{E}\mathbf{K}_{\lambda} + \mathbf{C}\mathbf{K}_{\lambda})(\mathbf{E} + \mathbf{C})^T = \mathbf{E}\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{E} + \\
&+ \mathbf{C}\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{C}^T = \mathbf{K}_{\lambda} + \mathbf{C}\mathbf{K}_{\lambda} + \mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{C}^T = \\
&= \sigma_0^2 (\boldsymbol{\pi} + \mathbf{C}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\boldsymbol{\pi}\mathbf{C}^T).
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (25.6) последнее равенство можно представить как

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\bar{\lambda}} &= \sigma_0^2 \left[ \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} + \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} \right] = \\
&= \sigma_0^2 \left[ \boldsymbol{\pi} - 2\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} \right].
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{K}_{\bar{\lambda}} = \sigma_0^2 \left[ \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} \right]. \quad (25.7)$$

Вместо неизвестной дисперсии единицы веса подставим в последнюю формулу ее оценку и получим

$$\mathbf{K}_{\bar{\lambda}} = \mu^2 \left[ \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi} \right]. \quad (25.8)$$

На главной диагонали матрицы  $\mathbf{K}_{\bar{\lambda}}$  стоят квадраты СКП уравненных значений измеренных величин.

Имея ковариационную матрицу вектора уравненных значений измеренных величин, можно получить ковариационную матрицу

функции  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{f}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{f}_0$ :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{F}} = \mathbf{f}\mathbf{K}_{\bar{\lambda}}\mathbf{f}^T = \mu^2 \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \boldsymbol{\pi}\mathbf{D})\mathbf{f}^T.$$

Раскрыв скобки в последнем выражении, окончательно получаем

$$\mathbf{K}_{\bar{\lambda}} = \mu^2 (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi}). \quad (25.9)$$

Доказано, что любой элемент матрицы  $(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T (\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\boldsymbol{\pi})$  может быть представлен в символах Гаусса в следующей форме:

$$\mathbf{K}_{F_{ij}} = \mu^2 [\pi f_i f_j \cdot r]. \quad (25.10)$$

Дисперсия произвольной функции  $F_i$  уравненных значений результатов измерений стоит на главной диагонали матрицы  $\mathbf{K}_{F_{ij}}$  и может быть представлена в символах Гаусса:

$$D_i = K_{ii} = \frac{\mu^2}{p_{F_i}} = \mu^2 [\pi f_i f_i \cdot r], \quad (25.11)$$

а обратный вес этой функции

$$\frac{1}{p_{F_i}} = [\pi f_i f_i \cdot r]. \quad (25.12)$$

### 25.3. Вычисление обратных весов функций уравненных значений неизвестных в схеме Гаусса решения систем нормальных уравнений

В соответствии с алгоритмом Гаусса символ (25.12) можно представить как

$$\frac{1}{p_{F_i}} = [\pi f_i f_i \cdot r] = [\pi f f] - \frac{[\pi b_1 f_i]^2}{[\pi b_1 b_1]} - \frac{[\pi b_2 f_i \cdot 1]^2}{[\pi b_2 b_2 \cdot 1]} - \dots - \frac{[\pi b_r f_i \cdot (r-1)]^2}{[\pi b_r b_r \cdot (r-1)]}.$$

Для вычисления обратного веса функции  $F_i$  необходимо:

1. Составить функции уравненных значений измеряемых величин, для которых предполагается вычислить СКП. Это даст возможность записать элементы матрицы  $\mathbf{F}$  размерностью  $(l \times n)$ .

2. В листах  $A$  и  $B$  ввести дополнительные столбцы, в каждом из которых записать соответствующие значения элементов матрицы  $\mathbf{F} f_{ij}$  ( $i = 1, \dots, l$ ;  $j = 1, \dots, n$ ).

3. Вычислить и записать в листе  $A$  величины  $[\pi b_1 f_i]$ ,  $[\pi b_2 f_i]$ , ...,  $[\pi b_r f_i]$ ,  $[\pi f_i f_i]$ . Для контроля вычислить вспомогательные величины  $[\pi f_i f_j]$ .

4. В схеме решения нормальных уравнений коррелат ввести дополнительные столбцы  $f_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ), в которых выполнить те же действия, что и в столбце  $W$ . В элиминационных строках этих

столбцов соответственно получают элементы  $-\frac{[\pi b_1 f_i]}{[\pi b_1 b_1]}$ ,  $-\frac{[\pi b_2 f_i \cdot 1]}{[\pi b_2 b_2 \cdot 1]}$ ,

...,  $-\frac{[\pi b_r f_i \cdot (r-1)]}{[\pi b_r b_r \cdot (r-1)]}$ , а строкой выше — элементы  $[\pi b_1 f_i]$ ,  $[\pi b_2 f_i \cdot 1]$ ,  
 ...,  $[\pi b_r f_i \cdot (r-1)]$ .

5. Во вспомогательном  $(r+1)$ -блоке схемы Гаусса в каждом дополнительном столбце записывают построчно величины

$$[\pi f_i f_i], -\frac{[\pi b_1 f_i]^2}{[\pi b_1 b_1]}, -\frac{[\pi b_2 f_i \cdot 1]^2}{[\pi b_2 b_2]}, \dots, -\frac{[\pi b_r f_i \cdot (r-1)]^2}{[\pi b_r b_r \cdot (r-1)]}.$$

Сумма всех этих элементов дает обратный вес  $\frac{1}{P_{F_i}}$  функции.

6. Для вычисления обратного веса любого уравненного значения результата измерения достаточно составить функцию вида  $F_i = \lambda_i$ , при этом вектор  $\vec{f}_i$  будет состоять из нулей и одной единицы, стоящей на  $i$ -м месте. Все последующие действия выполняют в порядке, описанном в пп. 2—5.

## 25.4. Примеры решения типовых задач

### Пример 25.1

На рис. 25.1 представлена система нивелирных ходов, опирающихся на три марки, высоты которых получены из нивелирования более высокого класса. В табл. 25.1 приведены измеренные значения превышений по ходам и длины ходов.

Таблица 25.1

#### Исходные данные

№ хода	Измеренное превышение $h$ , м	Длина хода $L$ , км
1	+4,881	4,7
2	-4,132	6,2
3	-6,427	9,1
4	+2,588	5,3
5	+0,883	6,3
6	+1,611	8,6

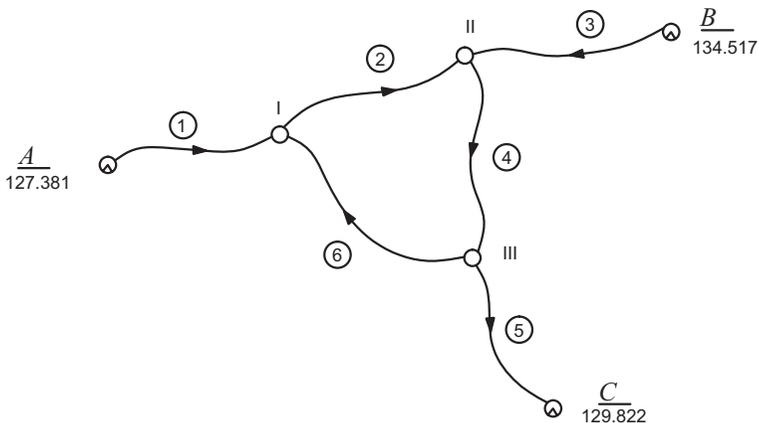


Рис. 25.1

Найти:

1. Уравненные значения высот реперов I, II, III.
2. СКП уравненных высот этих реперов.
3. СКП уравненного значения превышения по ходу II.
4. СКП превышения, полученного по ходу длиной в 1 км.

*Решение*

*1. Составление независимых условных уравнений*

Число независимых условных уравнений определяется соотношением

$$r = n - t,$$

где  $r$  — число независимых условных уравнений;  $n$  — число измеренных величин;  $t$  — число определяемых величин.

В данном случае  $n = 6$ ,  $t = 3$ , следовательно,  $r = 3$ . Тогда можно представить независимые условные уравнения в виде

$$\begin{array}{llll} L_1 & +L_2 & -L_3 & -(H_B - H_A) = 0; \\ L_1 & & -L_5 & -L_6 & -(H_C = H_A) = 0; \\ & +L_3 & +L_4 & -L_5 & -(H_C - H_B) = 0. \end{array}$$

Составление нормальных уравнений коррелят. Лист А

$\pi$	№ изме- рения	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$S'$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$\Sigma'$	$V$	$\frac{V}{\pi}$	$\frac{V^2}{\pi}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\pi_1$	1	$b_{11}$	$b_{21}$	$b_{31}$	$S_1$	$f_{11}$	$f_{21}$	$f_{31}$	$f_{41}$	$\Sigma'_1$	$V_1$	$\frac{V_1}{\pi_1}$	$\frac{V_1^2}{\pi_1}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\pi_n$	$n$	$b_{1n}$	$b_{2n}$	$b_{3n}$	$S_n$	$f_{1n}$	$f_{2n}$	$f_{3n}$	$f_{4n}$	$\Sigma'_n$	$V_{4n}$	$\frac{V_n}{\pi_n}$	$\frac{V_n^2}{\pi_n}$
[ ]		$[b_1]$	$[b_2]$	$[b_3]$	$[S]$	$[f_1]$	$[f_2]$	$[f_3]$	$[f_4]$	$[\Sigma]$	$[V]$	$[\frac{V}{\pi}]$	$[\frac{V^2}{\pi}]$
$W$		$W_1$	$W_2$	$W_3$									
$K$		$K_1$	$K_2$	$K_3$									
1		$[\pi b_1 b_1]$	$[\pi b_1 b_2]$	$[\pi b_1 b_3]$	$[\pi b_1 S']$	$[\pi b_1 f_1]$	$[\pi b_1 f_2]$	$[\pi b_1 f_3]$	$[\pi b_1 f_4]$	$[\pi b_1 \Sigma']$	$(5)+(6)+(7)+(8)+(9)=(10)$		
2			$[\pi b_2 b_2]$	$[\pi b_2 b_3]$	$[\pi b_2 S']$	$[\pi b_2 f_1]$	$[\pi b_2 f_2]$	$[\pi b_2 f_3]$	$[\pi b_2 f_4]$	$[\pi b_2 \Sigma']$	$(5)+(6)+(7)+(8)+(9)=(10)$		
3				$[\pi b_3 b_3]$	$[\pi b_3 S']$	$[\pi b_3 f_1]$	$[\pi b_3 f_2]$	$[\pi b_3 f_3]$	$[\pi b_3 f_4]$	$[\pi b_3 \Sigma']$	$(5)+(6)+(7)+(8)+(9)=(10)$		
4					$[\pi S' S']$	$[\pi S' f_1]$	$[\pi S' f_2]$	$[\pi S' f_3]$	$[\pi S' f_4]$	$[\pi S' \Sigma']$	$(5)+(6)+(7)+(8)+(9)=(10)$		
5						$[\pi f_1 f_1]$	$[\pi f_1 f_2]$	$[\pi f_1 f_3]$	$[\pi f_1 f_4]$	$[\pi f_1 \Sigma']$	$(6)_4+(6)_5+(7)+(8)+(9)=(10)$		
6							$[\pi f_2 f_2]$	$[\pi f_2 f_3]$	$[\pi f_2 f_4]$	$[\pi f_2 \Sigma']$	$(7)_4+(7)_5+(7)_6+(8)+(9)=(10)$		
7								$[\pi f_3 f_3]$	$[\pi f_3 f_4]$	$[\pi f_3 \Sigma']$	$(8)_4+(8)_5+(8)_6+(8)_7+(9)=(10)$		
8									$[\pi f_4 f_4]$	$[\pi f_4 \Sigma']$	$(9)_4+(9)_5+(9)_6+(9)_7+(9)=(10)$		
9										$[\pi \Sigma' \Sigma']$	$(10)_4+(10)_5+(10)_6+(10)_7+(10)_8=$ $=(10)_9$		

Контроль

## Числовой пример. Лист А

$\pi$	№ измерения	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$S'$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$\Sigma'$	$V$	$\frac{V}{\pi}$	$\frac{V^2}{\pi}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4,7	1	+1	+1		+2	+1				+3	+2,134	+0,454	0,969
6,2	2	+1			+1					+1	-22,909	-3,695	84,649
9,1	3	-1		+1	0		+1			+1	+19,228	+2,113	40,629
5,3	4			+1	+1					+1	-8,385	-1,582	13,264
6,3	5		-1	-1	-2			+1		-1	-16,172	-2,567	41,514
8,6	6		-1		-1				+1	0	-35,681	-4,149	148,042
[ ]		+1	-1		+1	+1	+1	+1	+1	+5			329,043
	<i>W</i>	+40	-54	-27									
	<i>K</i>	-3,695	+4,149	-1,582									
1		+20,0	+4,7	-9,1	+15,6	4,7	-9,1	0	0	+11,2		+112	
2			+19,6	+6,3	+30,6	+4,7	0	-6,3	-8,6	+20,4		+20,4	
3				20,7	17,9	0	+9,1	-6,3	0	+0,7		+20,7	
4					+64,1	+9,4	0	-12,6	-8,6	+52,3		+52,3	
5						4,7	0	0	0	+14,1		+14,1	
6							9,1	0	0	+9,1		+9,1	
7								+6,3	0	-6,3		-6,3	
8									+8,6	0		0	
9										+69,2		+69,2	

## 2. Вычисление невязок условных уравнений

Подставив в условные уравнения вместо истинных значений измеренных величин результаты измерений, получаем

$$+4,861 - 4,132 + 6,427 - 134,517 + 127,381 = +0,040 \text{ м;}$$

$$+4,881 - 0,883 - 1,611 - 129,822 + 127,381 = -0,054 \text{ м;}$$

$$-6,427 + 2,588 - 0,883 - 129,822 + 134,517 = -0,027 \text{ м.}$$

Лучше представить все невязки в миллиметрах, т.е.  $W_1 = +40 \text{ мм}$ ,  $W_2 = -54 \text{ мм}$  и  $W_3 = -27 \text{ мм}$ .

## 3. Составление условных уравнений поправок

$$V_1 + V_2 - V_3 + 40 = 0;$$

$$V_1 - V_5 - V_6 - 54 = 0;$$

$$+V_3 + V_4 - V_5 - 27 = 0.$$

## 4. Расчет обратных весов результатов измерений

Веса вычисляют по формуле  $p_i = \frac{k}{L_i}$ , где  $L_i$  — длина  $i$ -го хода.

Тогда обратные веса вычисляют по формуле  $\pi_i = \frac{L_i}{k}$ . Приняв  $k = 1$ ,

получаем  $\pi_1 = 4,7$ ;  $\pi_2 = 6,2$ ;  $\pi_3 = 9,1$ ;  $\pi_4 = 5,3$ ;  $\pi_5 = 6,3$ ;  $\pi_6 = 8,6$ .

## 5. Составление нормальных уравнений коррелат

Составление нормальных уравнений коррелат выполняют в двулостной схеме (табл. 25.2 — общий вид листа *A* и табл. 25.3 и 25.4 — числовые примеры заполнения листов *A* и *B*).

### Лист В

Таблица 25.4

№ измерения	$\pi b_1$	$\pi b_2$	$\pi b_3$	$\pi S'$	$\pi f_1$	$\pi f_2$	$\pi f_3$	$\pi f_4$	$\pi \Sigma'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+4,7	+4,7		+9,4	+4,7				+14,1
2	+6,2			+6,2					+6,2
3	-9,1		+9,1	0		+9,1			+9,1
4			+5,3	+5,3					+5,3
5		-6,3	-6,3	-12,6			+6,3		-6,3
6		-8,6		-8,6				+8,6	0
[ ]	+1,8	-10,2	+8,1	-0,3	+4,7	+9,1	+6,3	+8,6	+28,4

Таблица 25.5

## Решение нормальных уравнений коррелят

№	Название	$b_1/k_1$	$b_2/k_2$	$b_3/k_3$	$W$	$S$	Конт- троль	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$\Sigma$	Конт- троль
1	$b_1$	+20,0	+4,9	-9,1	+40,0	+55,6	+55,6	+4,7	-9,1	0	0	+51,2	+51,2
2	$\varepsilon_1$		-0,235	+0,455	-2,000	-2,780	-2,780	-0,235	+0,455	0	0	-2,560	-2,560
3	$b_2$		+19,6	+6,3	-54,0	-23,4	-23,4	+4,7	0	-6,3	-8,6	-33,6	-33,6
4	-		-1,104	+2,138	-9,400	-13,066	-	-1,104	+2,138	0	0	-12,032	-
5	$b_{2,1}$		+18,496	+8,438	-63,400	-36,466	-36,466	+3,596	+2,138	-6,300	-8,600	-45,632	-45,632
6	$\varepsilon_2$			-0,456	+3,428	+1,972	+1,972	-0,194	-0,116	+0,341	+0,465	+2,471	+2,468
7	$b_3$			+20,7	-27,0	-9,1	-9,1	0	+9,1	-6,3	0	-6,3	-6,3
8	-			-4,140	+18,200	+25,298	-	+2,139	-4,140	0	0	+23,296	-
9	-			-3,848	+28,910	+16,628	-	-1,640	-0,975	+0,873	+3,922	+20,808	-
10	$b_{3,2}$			+12,712	+20,110	+32,822	+32,822	+0,499	+3,985	-3,427	+3,922	+37,804	+37,805
11	$\varepsilon_3$				-1,582	-2,582	-2,582	-0,039	-0,313	+0,270	-0,309	-2,974	-2,973
12	$k$		+4,149	-1,582				+4,7	+9,1	+6,3	+8,6		
13	$k'$		+3,149	-2,582				-1,104	-4,140	0	0		
			+1,000	+1,000				-0,698	-0,248	-2,148	-3,999		
								-0,019	-1,247	-0,925	-1,212		
								+2,879	+3,465	+3,227	+3,389		

Нормальные уравнения коррелат имеют вид:

$$\begin{aligned} +20,0k_1 + 4,7k_2 - 9,1k_3 + 40 &= 0; \\ + 4,7k_1 + 19,6k_2 + 6,3k_3 - 54 &= 0; \\ - 9,1k_1 + 6,3k_2 + 20,7k_3 - 27 &= 0. \end{aligned}$$

#### 6. Решение нормальных уравнений коррелат

Решение нормальных уравнений коррелат выполняется в схеме (табл. 25.5) В результате решения нормальных уравнений получают значения коррелат  $k_1 = -3,695$ ;  $k_2 = +4,149$ ;  $k_3 = -1,582$ .

#### 7. Вычисление поправок к результатам измерений

Вычисление поправок выполняют по формулам  $V_i = \pi_i(b_{i1}k_1 + b_{i2}k_2 + b_{i3}k_3)$ . Запись значений поправок ведут в листе А составления нормальных уравнений коррелат.

Поправки получают значения:  $V_1 = +2,13$  мм;  $V_2 = -22,91$  мм;  $V_3 = +19,23$  мм;  $V_4 = -8,39$  мм;  $V_5 = -16,17$  мм;  $V_6 = -35,68$  мм.

Полученные поправки должны удовлетворять условным уравнениям поправок:

$$\begin{aligned} + 2,13 - 22,91 - 19,23 &= -40,01 \text{ мм } (W_1 = +40 \text{ мм}); \\ + 2,13 + 16,17 + 35,68 &= +53,96 \text{ мм } (W_2 = -54 \text{ мм}); \\ + 19,23 - 8,39 + 16,17 &= +27,01 \text{ мм } (W_3 = -27 \text{ мм}). \end{aligned}$$

#### 8. Вычисление уравненных значений измеряемых величин и их функций

Уравненные значения измеряемых величин рассчитывают по формуле

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + V_i.$$

Тогда получают

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1 + V_1 = +4,881 + 0,002 = +4,883; \\ \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2 + V_2 = -4,132 - 0,023 = -4,155; \\ \bar{\lambda}_3 &= \lambda_3 + V_3 = -6,427 + 0,019 = -6,408; \\ \bar{\lambda}_4 &= \lambda_4 + V_4 = +2,588 - 0,008 = +2,580; \\ \bar{\lambda}_5 &= \lambda_5 + V_5 = +0,883 - 0,016 = +0,867; \\ \bar{\lambda}_6 &= \lambda_6 + V_6 = +1,611 - 0,036 = +1,575. \end{aligned}$$

Уравненные значения измеренных величин должны удовлетворять исходным условным уравнениям:

$$\begin{aligned} +4,883 - 4,155 + 6,408 - 134,517 + 127,381 &= 0; \\ +4,883 - 0,867 - 1,575 - 129,822 &= 127,381 = 0; \\ -6,408 + 2,580 - 0,867 - 129,822 + 134,517 &= 0. \end{aligned}$$

По уравненным значениям измеренных величин получают уравненные значения высот точек I, II, III:

$$\begin{aligned} H_I &= H_A + \bar{\lambda}_1 = 127,381 + 4,883 = 132,264 \text{ м}; \\ H_{II} &= H_B + \bar{\lambda}_2 = 134,517 - 6,408 = 128,109 \text{ м}; \\ H_{III} &= H_C + \bar{\lambda}_3 = 129,822 + 0,867 = 130,689 \text{ м}. \end{aligned}$$

9. Вычисление среднеквадратической погрешности единицы веса

Вычисление СКП единицы веса выполняют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{r}}. \text{ Значение } [pV^2] \text{ получают по формуле}$$

$$[pV^2] = \left[ \frac{V^2}{\pi} \right] = -[kW] = 329,13.$$

Непосредственно по полученным значениям поправок в листе А. При этом  $[pV^2] = \left[ \frac{V^2}{\pi} \right] = 329,04$ .

$$\text{Тогда } \mu = \sqrt{\frac{329}{3}} = 10,5 \text{ мм} \approx 10 \text{ мм}, \text{ а } m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} = \frac{10,5}{\sqrt{6}} = 4,2 \text{ мм}.$$

Поскольку обратные веса рассчитывались по формуле  $\pi_i = L_i$ , то  $\mu$  в данном случае характеризует точность определения превышения по ходу длиной 1 км.

10. Составление весовых функций

По условиям задачи необходимо вычислить СКП уравненных значений высот точек I, II, III и уравненного значения превышения по шестому ходу. Для этого необходимо составить четыре весовых функции

$$\begin{aligned} F_1 &= \bar{\lambda}_1 && +H_A; \\ F_2 &= \bar{\lambda}_3 && +H_B; \\ F_3 &= \bar{\lambda}_5 && +H_C; \\ F_4 &= \bar{\lambda}_6. \end{aligned}$$

В этом случае матрица  $\mathbf{f}$  имеет вид

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*11. Вычисление обратных весов функций уравненных значений измеренных величин*

Расчет обратных весов заданных функций выполняют по формуле

$$\frac{1}{p_{F_k}} = [\pi f_k f_k \cdot r].$$

Все вычисления проводят в схеме решения нормальных уравнений коррелят, соответственно — в столбцах  $f_1, f_2, \dots, f_k$ .

Вспомогательные величины  $[\pi b_{1k} f_k]$ ,  $[\pi b_{2k} f_k]$ ,  $[\pi b_{3k} f_k]$ ,  $[\pi f_k f_k]$  вычисляют в листе А схемы составления нормальных уравнений коррелят. В результате расчетов получают

$$\frac{1}{p_{F_1}} = 2,879; \quad \frac{1}{p_{F_2}} = 3,465; \quad \frac{1}{p_{F_3}} = 3,227; \quad \frac{1}{p_{F_4}} = 3,389.$$

*12. Вычисление СКП функций уравненных значений измеряемых величин*

$$m_1 = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{F_1}}} = 10\sqrt{2,879} = 17,8 \approx 18 \text{ мм};$$

$$m_2 = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{F_2}}} = 10\sqrt{3,465} = 19,5 \approx 20 \text{ мм};$$

$$m_3 = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{F_3}}} = 10\sqrt{3,227} = 18,9 \approx 19 \text{ мм};$$

$$m_4 = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{F_4}}} = 10\sqrt{3,389} = 19,3 \approx 19 \text{ мм}.$$

## 25. 5. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить независимые условные уравнения для систем нивелирных ходов, указанных на рис. 25.2, а и 25.2, б. Стрелками

показаны направления ходов. Репер  $A$  исходный, а все остальные репера определяемые.

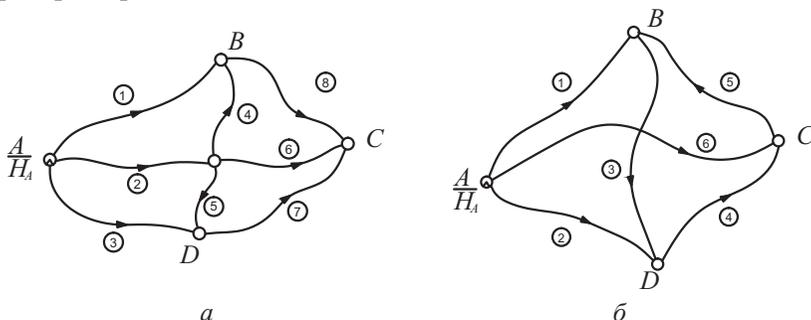


Рис. 25.2

2. Составить независимые условные уравнения для системы, изображенной на рис. 25.3, где пункты  $A$  и  $B$  исходные, а дугами указаны измеренные углы.

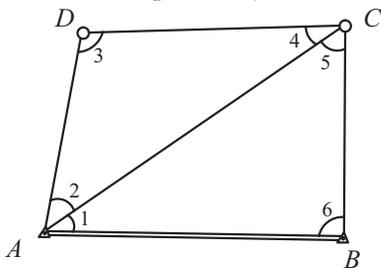


Рис. 25.3

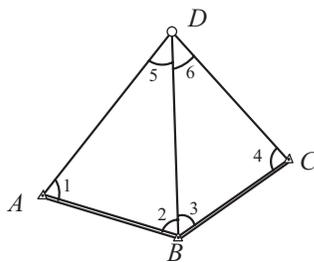


Рис. 25.4

3. Составить независимые условные уравнения для системы, изображенной на рис. 25.4. Здесь пункт  $D$  определяемый, а остальные исходные.

4. Даны условные уравнения

$$L_1 - 2L_2 + L_3 = 0;$$

$$2L_1 + L_2 - L_3 = 0$$

и соответствующие им невязки  $W_1 = -4$  и  $W_2 = 5$ . Считая, что измерения равноточные, составить условные уравнения поправок и с контролем по суммам нормальные уравнения.

5. Даны условные уравнения поправок

$$\begin{array}{cccccc} V_1 & +V_2 & +V_3 & +V_4 & & +3'' = 0; \\ V_1 & +V_2 & & & +V_5 & +V_6 & -2'' = 0. \end{array}$$

Найти поправки и СКП непосредственного измерения, считая, что измерения выполнены равноточно.

6. В условиях предыдущей задачи найти вес и СКП функции урвненных значений измеренных величин  $F = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3$ .

7. Даны условные уравнения

$$\begin{array}{ccc} L_1 & -2L_2 & +L_3 = 0; \\ 2L_1 & +L_2 & -L_3 = 0. \end{array}$$

Вычислить вес функции  $F = 2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 + 3\bar{\lambda}_3$ , если измерения равноточные.

8. Даны условные уравнения поправок

$$\begin{array}{cccc} V_1 & +V_2 & +V_3 & +2'' = 0; \\ V_1 & -V_2 & & +1'' = 0 \end{array}$$

и веса результатов измерений  $p_1 = 1,0$ ;  $p_2 = 0,5$ ;  $p_3 = 1,5$ . Найти поправки и СКП единицы веса.

9. В условиях предыдущей задачи вычислить СКП функции

$$F = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2.$$

10. Даны нормальные уравнения коррелат

$$\begin{array}{l} 5k_1 + 2k_2 + 3 = 0; \\ 2k_1 + 4k_2 - 2 = 0. \end{array}$$

Найти СКП единицы веса.

### Вопросы и темы для самопроверки

1. Вычисление СКП единицы веса в коррелятном методе.
2. Контроль вычисления  $[pV^2]$  в коррелятном методе.
3. Вычисление весов функции урвненных значений результатов измерений в коррелятном методе.
4. Как вычислить СКП любого урвненного значения результата измерения в коррелятном методе?

## Раздел VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

### 26. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

#### 26.1. Общие положения

При выполнении целого ряда исследовательских и производственных работ возникает задача выявления формы математической зависимости между явлениями  $X$  и  $Y$ .

Решение указанной задачи, исходя из ее сущности, может выполняться различными методами. В иных случаях форма зависимости может быть непосредственно представлена, исходя из физики явлений; иногда удается построить систему дифференциальных уравнений, решение которой приводит к получению вида зависимости между исследуемыми явлениями. Но тогда могут оставаться неизвестными некоторые числовые параметры, входящие в полученное уравнение. Задача исследователя — получение значений неизвестных параметров на основе опытных данных. Опыт должен быть поставлен так, чтобы в интересующем диапазоне изменения аргумента получить для  $n$  значений  $X$  соответствующие значения функции  $Y$ . Число опытных пар  $n$ , естественно, должно быть не менее числа неизвестных параметров  $t$ , т.е. должно выполняться неравенство вида  $n \geq t$ . При  $n = t$  задача определения неизвестных параметров сводится к решению  $t$  уравнений с  $t$  неизвестными. В этом случае не удастся провести оценку качества полученного уравнения. В связи с указанным необходимо при постановке опыта число наблюдений делать бóльшим, чем число определяемых параметров, т.е. должно выполняться неравенство вида  $n > t$ . При

таком варианте наблюдений получают переопределенную систему уравнений, в которой число уравнений превосходит число неизвестных. Решение такой системы должно выполняться при некотором дополнительном условии. Как уже отмечалось ранее, таким условием может быть условие  $[pV^2] = \min$ . В этом случае найденные числовые параметры обладают максимально возможными весами. Задачи такого типа назовем задачами определения параметров полуэмпирических формул.

В некоторых случаях не удается представить зависимость между явлениями в виде какого-либо уравнения, и перед исследователем стоит задача по результатам опыта подобрать уравнение, достаточно хорошо описывающее такую зависимость. Здесь, как и в первом случае, решение задачи может быть выполнено с применением принципа наименьших квадратов. Задачи такого типа будем называть задачами определения параметров эмпирических формул.

## 26.2. Общее решение задач по определению параметров полуэмпирических формул

Рассмотрим наиболее общий случай решения задачи определения параметров полуэмпирических формул. Задача формулируется следующим образом.

Из теоретических соображений была выявлена зависимость между явлениями  $X_1, \dots, X_k$  и  $Y$  в виде

$$Y = f(X_1, \dots, X_k, C_1, C_2, \dots, C_t), \quad (26.1)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_t$  — неизвестные параметры.

Для определения этих параметров был поставлен опыт, в результате которого определено  $n > t$  групп значений аргументов  $X_1, \dots, X_k$  и функции  $Y$ . Результаты опыта представлены в табл. 26.1.

Таблица 26.1

$X_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$
...	...	...	...	...
$X_k$	$x_{k1}$	$x_{k2}$	...	$x_{kn}$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

При этом значения аргументов  $x_{ji}$  ( $j = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n$ ) получены с точностью, характеризуемой весами, соответственно, равными  $p_{ji}$ , а значения функций — с весами  $p_{y1}$ .

Необходимо вычислить наилучшие значения параметров  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , оценить их точность и рассчитать точность получения значений функции для любого заданного значения аргумента.

Уравнение поправок представим в форме

$$y_i + V_{y_i} = f(x_{1i} + V_{1i}, \dots, x_{ki} + V_{ki}, c_1, c_2, \dots, c_i). \quad (26.2)$$

Если иметь приближенные значения искомых параметров  $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ , то уравнениям поправок можно придать вид

$$y_i + V_{y_i} = f(x_{1i} + V_{1i}, \dots, x_{ki} + V_{ki}, c_1^0 + \delta c_1, c_2^0 + \delta c_2, \dots, c_i^0 + \delta c_i). \quad (26.3)$$

Метод наименьших квадратов предполагает, что уравнения поправок имеют линейный вид. Для приведения последнего уравнения к линейному виду разложим правую часть последнего равенства в ряд Тейлора, ограничившись первыми членами разложения. Тогда получим

$$\begin{aligned} y_i + V_{y_i} = & \left( \frac{\partial f}{\partial c_1} \right)_i^{(0)} \delta c_1 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial c_i} \right)_i^{(0)} \delta c_i + \\ & + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_i^{(0)} V_{x_1} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_i^{(0)} V_{x_k} + f(c_1^0, \dots, c_i^0, x_1, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (26.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial c_1} \right)_i^{(0)} = a_{1i}; \dots, \left( \frac{\partial f}{\partial c_i} \right)_i^{(0)} = a_{ii}; \\ \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_i^{(0)} = b_{1i}; \dots, \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_i^{(0)} = b_{ki}; \\ f(c_1^0, \dots, c_i^0, x_1, \dots, x_k) - y_i = l_i. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Уравнения поправок с учетом введенных обозначений может быть представлено

$$V_{y_i} = a_i^{(0)} \delta c_1 + \dots + a_i^{(0)} \delta c_i + b_{1i}^{(0)} V_{1i} + \dots + b_{ki}^{(0)} V_{ki} + l_i. \quad (26.6)$$

Введем еще некоторые обозначения:

$$V_i = V_{y_i} - b_{li}^{(0)}V_{li} - \dots - b_{ki}^{(0)}V_{ki}. \quad (26.7)$$

В этом случае уравнение поправок записывают в форме

$$V_i = a_{li}\delta c_l + \dots + a_{ni}\delta c_n + l_i. \quad (26.8)$$

Введем матричную запись:

$$\mathbf{A}_{(n \times t)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{t1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{tn} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{l}}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{V}}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix}; \quad \delta \bar{\mathbf{c}}_{(t \times 1)} = \begin{bmatrix} \delta c_1 \\ \dots \\ \delta c_t \end{bmatrix}. \quad (26.9)$$

Уравнения поправок в матричной форме:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\delta \mathbf{c} + \bar{\mathbf{l}}. \quad (26.10)$$

Условию  $[pV^2] = \min$  соответствует система нормальных уравнений вида

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \delta \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{0}. \quad (26.11)$$

При этом веса поправок  $V_i$  вычисляют на основании Теоремы 3 по формуле

$$p_i = \left( \frac{1}{p_i} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{p_{y_i}} + \frac{b_{li}^2}{p_{li}} + \dots + \frac{b_{ki}^2}{p_{ki}} \right)^{-1}. \quad (26.12)$$

Решив систему нормальных уравнений, получаем поправки к искомому неизвестным  $\delta c$  и неизвестные параметры в первом приближении  $c^{(1)} = c^{(0)} + \delta c$ , а также поправки  $V$  в первом приближении. Решение о продолжении или прекращении процесса приближений решается после проведения оценки точности.

Прежде всего вычисляем СКП единицы веса по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{(n-t)}} \quad (26.13)$$

и ее надежность — по формуле

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-t)}}. \quad (26.14)$$

Далее получают любым доступным методом весовую матрицу  $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ , на главной диагонали которой расположены обратные веса искомым параметрам. Это дает возможность вычислить СКП и предельные погрешности искомым величин по формуле

$$m_{c_i} = \mu \sqrt{Q_{ii}}. \quad (26.15)$$

Если выполняются неравенства вида  $|\delta c_i| < 3m_{c_i}$  для всех  $i$ , то процесс приближений заканчивается и полученные в первом приближении искомые параметры принимаются за окончательные. В противном случае процесс приближений продолжается, пока не будут выполняться все неравенства вида  $|\delta c_i| < 3m_{c_i}$ .

Переходим к вычислению поправок в измеренных значениях аргументов и функции. Предлагается поправки вычислять по следующим формулам:

$$V_{y_i} = \frac{1}{p_{y_i}} p_i V_i; \quad V_{j_i} = -\frac{b_{ji}}{p_{ji}} p_i V_i. \quad (26.16)$$

Строго говоря, задачу по отысканию наилучшего приближения искомым параметрам необходимо определять из условия

$$[p_y V_y^2] + [p_1 V_1^2] + \dots + [p_k V_k^2] = \min. \quad (26.17)$$

Но в случае, когда поправки вычисляются по формулам (26.16), условию (26.17) соответствует условие  $[p V^2] = \min$ . Покажем это.

1. Возведем равенства (26.16) в квадрат

$$V_{y_i}^2 = \frac{1}{p_{y_i}^2} p_i^2 V_i^2; \quad V_{j_i}^2 = -\frac{b_{ji}^2}{p_{ji}^2} p_i^2 V_i^2. \quad (26.18)$$

2. Далее умножим поправки на соответствующие веса и сложим:

$$[p_y V_y^2] = \left[ \frac{p^2 V^2}{p_y} \right]; \quad [p_j V_j^2] = \left[ \frac{p^2 V^2 b_j^2}{p_j} \right]. \quad (26.19)$$

3. Теперь сложим левые и правые части равенств (26.19):

$$\begin{aligned} [p_y V_y^2] + [p_1 V_1^2] + \dots + [p_k V_k^2] &= \left[ \frac{p^2 V^2}{p_y} \right] + \\ + \left[ \frac{p^2 V^2 b_1^2}{p_1} \right] + \dots + \left[ \frac{p^2 V^2 b_k^2}{p_k} \right] &= \left[ p^2 V^2 \left( \frac{1}{p_y} + \sum_{j=1}^k \frac{b_j^2}{p_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

С учетом (26.17) приходим к выводу, что

$$\left[ p_y V_y^2 \right] + \left[ p_{x_1} V_{x_1}^2 \right] + \dots + \left[ p_{x_k} V_{x_k}^2 \right] = \left[ p V^2 \right]. \quad (26.20)$$

Таким образом, рассмотренный ранее ход решения задачи доставляет наилучшие значения искомых параметров полуэмпирических формул.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Что называют эмпирическими формулами?
2. В чем состоит различие эмпирической и полуэмпирической формул?
3. Для чего необходимо вычислять приближенные значения искомых параметров и как это выполняется?
4. В каких случаях и почему определение параметров полуэмпирических формул приходится выполнять несколькими приближениями?
5. Когда процесс приближений по определению параметров полуэмпирических формул может быть закончен?
6. Как вычисляют веса и СКП вычисленных значений параметров эмпирической формулы?
7. Как вычислить СКП значения функции, рассчитываемой по эмпирической формуле?

## **27. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ**

### **27.1. Определение параметров полуэмпирической формулы линейного вида**

Рассмотрим случай, когда полуэмпирическая формула линейна относительно искомых параметров, измерения значений функции выполнены в одинаковых условиях, т.е. равноточны, число аргументов равно одному, и значения аргументов получены практически безошибочно.

Пусть из теоретических соображений получена зависимость между явлениями  $X$  и  $Y$  в форме



$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}. \quad (27.7)$$

Решение последней системы доставляет значения искоемых параметров  $c_1, \dots, c_t$ .

Для проведения оценки точности составляем и решаем  $t$  систем весовых уравнений, каждая из которых содержит  $t$  неизвестных весовых коэффициентов, или, если решение выполняются на ЭВМ, проводим обращение матрицы  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  и получаем весовую матрицу

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{t1} & \dots & Q_{tt} \end{bmatrix}. \quad (27.8)$$

По формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-t}} \quad (27.9)$$

вычисляем СКП единицы веса, т.е. СКП измерений элементов вектора  $y$ , и оценку надежности величины  $\mu$

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-t)}}. \quad (27.10)$$

СКП найденных значений параметров и надежность СКП вычисляем по формулам

$$m_{c_j} = \mu \sqrt{Q_{jj}}; \quad m_{m_j} = \frac{m_{c_j}}{\sqrt{2(n-t)}}. \quad (27.11)$$

Значимость найденных параметров может определяться на основании неравенств

$$\text{а) } |c_j| < 3m_{c_j}; \quad \text{б) } |c_j| > 3m_{c_j}. \quad (27.12)$$

При выполнении неравенства вида а) можно считать параметр  $c_j$  незначимым и, соответственно, слагаемое с номером  $j$  можно исключить из формулы (27.4).

Теперь приступаем к оценке точности определения значений функции по полученному уравнению. СКП определения функции вычисляем по формуле

$$m_{y_i} = \mu \sqrt{\sum_{j=1}^t a_{ji}^2 Q_{jj} + 2 \sum_{l \neq h} a_{li} a_{hi} Q_{lh}}. \quad (27.13)$$

Предельные отклонения значений функции от рассчитанных по формуле могут быть получены из соотношения

$$\Delta_{y_i}^{\text{пред}} = 3m_{y_i}. \quad (27.14)$$

Далее может быть построен график полученной функциональной зависимости.

### Пример 27.1

Необходимо определить зависимость фактической величины потерь, связанных с холостыми заездами и поворотами тракторных агрегатов при выполнении полевых работ, с длиной рабочего гона агрегатов.

#### Решение

Для построения искомой зависимости посчитали, что процент холостых заездов является величиной постоянной для данного вида полевых работ, а потери на поворотах в процентах обратно пропорциональны длине рабочего гона агрегатов.

Тогда величину потерь можно представить в виде соотношения

$$Y = C_1 + C_2 \frac{1}{X}, \quad (27.15)$$

где  $C_1$  — потери (в процентах), связанные с холостыми заездами;

$\frac{C_2}{X}$  — процент потерь, связанный с разворотами тракторных агре-

гатов по отношению к рабочему ходу, выраженному в длине гона.

Для определения неизвестных параметров  $C_1$  и  $C_2$  был поставлен опыт, в результате которого при различных длинах гона фиксировался процент потерь времени. Данные опыта приведены в табл. 27.2.

Таблица 27.2

$X$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,3	1,6	1,9	2,2
$Y$	16,8	16,0	13,8	12,1	10,8	10,0	9,2	6,2	5,8	8,1	6,0	4,0	3,8	3,1

Длина гона определялась по карте и может быть принята безошибочной, определения процента потерь проводились по одной и той же методике и могут быть приняты как равнозначные.

Все вычисления сведем в табл. 27.3.

Таблица 27.3

№	$x$	$a_1$	$a_2 = \frac{1}{x}$	$y$	$y_{\text{расч}}$	$V = y_{\text{расч}} - y$	$m_{y_i}$	$\Delta_{y_i}^{\text{пред}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,4	1	2,500	16,8	18,80	+2,00	0,70	2,10
2	0,5	1	2,000	16,0	15,04	-0,96	0,49	1,47
3	0,6	1	1,666	13,8	12,53	-1,27	0,37	1,11
4	0,7	1	1,429	12,1	10,75	-1,35	0,32	0,96
5	0,7	1	1,429	10,8	10,75	-0,05	0,30	0,90
6	0,8	1	1,250	10,0	9,40	-0,60	0,30	0,90
7	0,9	1	1,111	9,0	8,36	-0,64	0,28	0,84
8	1,0	1	1,000	6,2	7,53	+1,23	0,30	0,90
9	1,0	1	1,000	5,8	7,53	+1,73	0,30	0,90
10	1,1	1	0,909	8,1	6,85	-1,25	0,37	1,11
11	1,3	1	0,769	6,0	5,80	-0,20	0,46	1,38
12	1,6	1	0,625	4,0	4,72	+0,72	0,53	1,59
13	1,9	1	0,526	3,8	3,97	+0,17	0,56	1,68
14	2,2	1	0,455	3,1	3,44	+0,34	0,58	1,74
<b>[ ]</b>		<b>14</b>	<b>16,669</b>	<b>125,5</b>		<b>-0,13</b>		

Далее вычисляем коэффициенты и свободные члены нормальных уравнений:

$$[a_1 a_1] = 14,00; [a_1 a_2] = 16,669; [a_1 y] = 125,5;$$

$$[a_2 a_2] = 24,1984; [a_2 y] = 182,10.$$

Решение системы доставляет следующие значения искомых параметров:

$$c_1 = 0,023; c_2 = 7,509.$$

После вычисления искомых значений параметров переходим к оценке точности.

1. Вычисляем СКП единицы веса и ее надежность по формулам (27.9) и (27.10)

$$\mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-t}} = \sqrt{\frac{15,90}{14-2}} = 1,15 \text{ и } m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-t)}} = \frac{1,15}{\sqrt{24}} = 0,23.$$

Следовательно, в величине  $\mu$  достаточно удерживать не более двух значащих цифр, т.е.  $\mu = 1,2$ . С такой СКП определяли процент

потерь на холостые заезды и развороты тракторных агрегатов, т.е. опытные данные (с первого по шестой) содержат не более двух значащих цифр, а все прочие — не более одной.

2. Вычисляем весовые коэффициенты. Результаты вычислений представим в виде матрицы  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40 & -0,27 \\ -0,27 & 0,23 \end{bmatrix}$ .

3. Вычисляем СКП найденных параметров по формулам (27.11):

$$m_{c_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 1,2\sqrt{0,40} = 0,756; \quad m_{m_1} = \frac{m_{c_1}}{\sqrt{2(n-t)}} = \frac{0,756}{\sqrt{24}} = 0,15;$$

$$m_{c_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 1,2\sqrt{0,23} = 0,575; \quad m_{m_2} = \frac{m_{c_2}}{\sqrt{2(n-t)}} = \frac{0,575}{\sqrt{24}} = 0,11.$$

Величины СКП содержат не более одной значащей цифры, следовательно, округленные их значения равны:

$$m_{c_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 1,2\sqrt{0,40} = 0,8;$$

$$m_{c_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 1,2\sqrt{0,23} = 0,6.$$

Теперь можно перейти к оценке значимости найденных параметров:

$$c_1 = 0,023 < 3m_{c_1} = 2,4;$$

$$c_2 = 7,509 < 3m_{c_2} = 1,8.$$

Из последних неравенств делаем вывод о незначимости параметра  $c_1$  и значимости параметра  $c_2$ , однако следует отметить, что параметр  $c_2$  содержит только одну верную цифру, но в окончательном ответе следует удержать одну запасную цифру. Таким образом, окончательное уравнение потерь будет иметь вид

$$y = \frac{7,5}{x}.$$

4. Вычисляем СКП определения функций по полученной формуле. Для этих целей используем соотношение (27.13).

$$m_{y_i} = \mu \sqrt{a_{1i}^2 Q_{11} + a_{2i}^2 Q_{22} + 2a_{1i} a_{2i}} = \mu \sqrt{Q_{11} + \frac{1}{x^2} Q_{22} + 2 \frac{1}{x} Q_{12}} =$$

$$= 1,2 \sqrt{0,40 + \frac{0,23}{x_i^2} - \frac{0,54}{x_i}}.$$

Предельные погрешности определения функции по полученному уравнению вычисляем по формуле

$$\Delta_{y_i}^{\text{пред}} = 3m_{y_i}.$$

Результаты расчетов представлены соответственно в столбцах 8 и 9 табл. 27.3. По данным расчетам построен график (рис. 27.1)

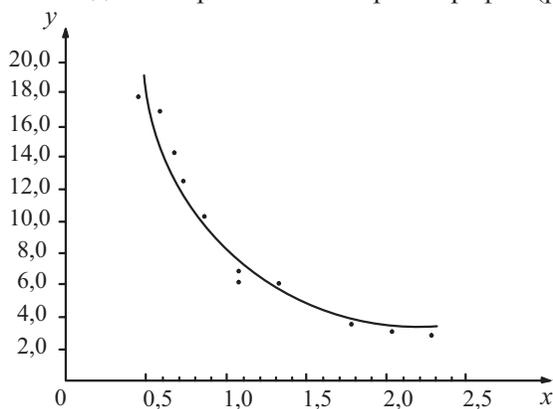


Рис. 27.1

## 27.2. Определение параметров полуэмпирической формулы нелинейного вида

Рассмотрим случай, когда функция нелинейна относительно определяемых параметров, имеется один аргумент, и его значения определялись практически безошибочно. Эту функцию можно представить в виде

$$Y = f(X, C_1, \dots, C_l). \quad (27.16)$$

Для определения неизвестных параметров проведен опыт, в результате которого получены следующие опытные данные, представленные в табл. 27.4.



Решив систему нормальных уравнений (27.22), находим в первом приближении параметры

$$c_j^1 = c_j^0 + \delta c_j. \quad (27.24)$$

Вопрос о продолжении процесса уточнения значений искомым параметров может быть решен после проведения оценки точности найденных параметров. Прежде всего вычисляем СКП единицы веса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-t}}, \quad (27.25)$$

где  $V_i$  вычисляем по формуле (27.21).

Далее вычисляем элементы весовой матрицы

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}. \quad (27.26)$$

Методы вычисления матрицы  $\mathbf{Q}$  зависят от наличия вычислительной техники.

Далее вычисляем СКП найденных параметров:

$$m_{c_j} = \mu \sqrt{Q_{jj}}, \quad (27.27)$$

а также их предельные погрешности:

$$\Delta_{c_j}^{\text{пред}} = 3m_{c_j}. \quad (27.28)$$

Если

$$|\delta c_j| < 3m_{c_j} \quad (27.29)$$

для всех ( $j = 1, \dots, n$ ), то процесс приближений заканчивается. В противном случае процесс продолжается, т.е. по формулам (27.20) вычисляем заново коэффициенты уравнений поправок, составляем и решаем нормальные уравнения и находим очередное приближение искомым параметров. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено неравенство (27.29).

После завершения процесса приближений, вычисляем СКП значений функции, получаемых по найденным значениям параметров:

$$m_{y_i} = \mu \sqrt{\sum_{j=1}^t a_{ji}^2 Q_{jj} + 2 \sum_{l \neq h} a_{li} a_{hi} Q_{lh}}, \quad (27.30)$$

где  $a_{ji}$  вычисляют по формулам (27.20).

### Пример 27.2

Экспериментатор, исследуя зависимость между явлениями  $X$  и  $Y$ , на основании некоторых теоретических предпосылок установил, что эти явления связаны соотношением вида

$$Y = k \operatorname{arctg} rX, \quad (27.31)$$

где  $k$  и  $r$  — неизвестные числовые параметры.

Для вычисления неизвестных параметров был поставлен эксперимент, в результате которого получена табл. 27.5 значений аргумента  $X$  и значений функции  $Y$ .

Таблица 27.5

$X$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0
$Y$	0,39	0,66	1,01	1,20	1,31	1,60	1,73

По этим данным необходимо вычислить наилучшие приближения параметров  $k$  и  $r$  и оценить их точность. Кроме того, необходимо вычислить СКП функции  $Y$  для всех значений аргумента  $X$ . Построить график, на котором показать предельно возможные отклонения эмпирических значений от расчетных.

*Решение*

Прежде всего, необходимо найти приближенные значения неизвестных параметров  $k_0$  и  $r_0$ .

Непосредственное нахождение  $k_0$  и  $r_0$  из уравнений

$$\begin{aligned} y_i &= k_0 \operatorname{arctg} r_0 x_i; \\ y_j &= k_0 \operatorname{arctg} r_0 x_j \end{aligned}$$

затруднительно. Поэтому для нахождения нулевых приближений параметров воспользуемся несколько иными числовыми методами.

Из математического анализа известно, что приращение функции может быть вычислено по формуле

$$\Delta y = y' \Delta x, \quad (27.32)$$

где  $y'$  — тангенс угла наклона касательной в некоторой точке, расположенной между точками с абсциссами  $x_i$  и  $x_i + \Delta x$ .

С некоторым приближением можно предположить, что эта точка находится в середине интервала  $(x_i; x_i + \Delta x)$ , т.е. имеет абсциссу  $x_i + 0,5\Delta x$ .

На основании изложенного, для данного случая можно записать

$$\Delta y \approx (y')'_{x+0,5\Delta x} \Delta x. \quad (27.33)$$

Возьмем два интервала с абсциссами (0,2—0,4) и (0,8—1,0). На этих интервалах функция имеет, соответственно, приращения  $\Delta y_{0,2-0,4} = 0,27$  и  $\Delta y_{0,8-1,0} = 0,11$ . Приращения аргумента на выбранных интервалах одинаковые и равны  $\Delta x = 0,2$ .

Для записи равенств вида (27.31) остается найти производную от функции  $y = k \operatorname{arctg} rx$  по аргументу  $x$ . Имеем

$$y'_x = \frac{kr}{1 + (kr)^2}.$$

Считаем, что для первого интервала средняя абсцисса равна  $x_1 + 0,5\Delta x = 0,3$ , а для второго  $x_2 + 0,5\Delta x = 0,9$ . Тогда для производных можно записать

$$y'_1 = \frac{kr}{1 + 0,095r^2}; \quad y'_2 = \frac{kr}{1 + 0,81r^2}.$$

Получаем два уравнения:

$$0,27 = \frac{k_0 r_0}{1 + 0,09r_0^2} \cdot 0,2;$$

$$0,11 = \frac{k_0 r_0}{1 + 0,81r_0^2} \cdot 0,2,$$

что приводит к уравнению

$$1,35(1 + 0,09r_0^2) = 0,55(1 + 0,81r_0^2),$$

или

$$0,324r_0^2 = 0,80,$$

откуда

$$r_0 = 1,57, \text{ а } k_0 = 1,05.$$

Далее будем уточнять полученные значения параметров. В соответствии с ранее принятыми обозначениями необходимо получить:

$$a_{i_i} = \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{0_i} = \operatorname{arctg} r_0 x_i;$$

$$a_{2i} = \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)_{0i} = \frac{k_0 x_i}{1 + (r_0 x_i)^2};$$

$$l_i = k_0 \arctg r_0 x_i - y_i.$$

Вычисление всех указанных величин сведем в табл. 27.6.

Таблица 27.6

№	$x$	$r_0 x$	$a_1 =$ $= \arctg r_0 x$	$a_2 = \frac{k_0 x}{1 + (r_0 x)^2}$	$y_{\text{расч}} =$ $= k_0 \arctg r_0 x$	$y_{\text{изм}}$	$l = y_{\text{расч}} - y_{\text{изм}}$
1	0,2	0,314	0,304	0,191	0,319	0,39	-0,071
2	0,4	0,628	0,561	0,301	0,589	0,66	-0,071
3	0,6	0,942	0,759	0,334	0,797	1,01	-0,213
4	0,8	1,256	0,898	0,326	0,943	1,20	-0,257
5	1,0	1,570	1,004	0,303	1,054	1,31	-0,256
6	1,5	2,356	1,169	0,249	1,227	1,60	-0,273
7	2,0	3,140	1,262	0,193	1,325	1,73	-0,005

$$[a_1 a_1] = 5,757; [a_1 a_2] = 1,602; [a_2 a_2] = 0,531;$$

$$[a_1 l] = -1,658; [a_2 l] = -0,436.$$

Нормальные уравнения в нулевом приближении имеют вид:

$$5,757 \partial k + 1,602 \partial r - 1,658 = 0;$$

$$1,602 \partial k + 0,531 \partial r - 0,436 = 0.$$

Решив эти уравнения, получаем  $\partial k = 0,373$ ;  $\partial r = -0,309$ , следовательно, неизвестные параметры в первом приближении, соответственно, будут равны  $k_1 = 1,423$  и  $r_1 = 1,261$ .

Далее проводим уточнение искомых параметров (табл. 27.7).

Таблица 27.7

№	$x$	$r_1 x$	$a_1 =$ $= \arctg r_1 x$	$a_2 = \frac{k_1 x}{1 + (r_1 x)^2}$	$y_{\text{расч}} =$ $= k_1 \arctg r_1 x$	$y_{\text{изм}}$	$l = y_{\text{расч}} - y_{\text{изм}}$
1	0,2	0,252	0,246	0,268	0,350	0,39	-0,040
2	0,4	0,504	0,467	0,454	0,664	0,66	+0,009
3	0,6	0,757	0,648	0,543	0,922	1,01	-0,088
4	0,8	1,009	0,790	0,564	1,124	1,20	-0,076
5	1,0	1,261	0,900	0,549	1,281	1,31	-0,929
6	1,5	1,892	1,084	0,466	1,542	1,60	-0,058
7	2,0	2,522	1,193	0,387	1,698	1,73	-0,032

$$[a_1 a_1] = 4,731; [a_1 a_2] = 2,536; [a_2 a_2] = 1,559;$$

$$[a_1 l] = -0,252; [a_2 l] = -0,155 .$$

Нормальные уравнения в первом приближении имеют вид:

$$4,731 \partial k + 2,536 \partial r - 0,252 = 0;$$

$$2,536 \partial k + 1,550 \partial r - 0,155 = 0.$$

Решив эти уравнения, получаем  $\partial k = -0,003$ ;  $\partial r = +0,104$ , следовательно, неизвестные параметры во втором приближении, соответственно, равны  $k_2 = 1,426$  и  $r_2 = 1,365$ .

Проводим подготовку к дальнейшему уточнению искомым параметров (табл. 27.8):

Таблица 27.8

№	$x$	$r_2 x$	$a_1 = \arctg r_2 x$	$a_2 = \frac{k_2 x}{1 + (r_2 x)^2}$	$y_{\text{расч}} = k_2 \arctg r_2 x$	$y_{\text{изм}}$	$l = y_{\text{расч}} - y_{\text{изм}}$
1	0,2	0,273	0,267	0,265	0,380	0,39	-0,010
2	0,4	0,546	0,500	0,439	0,713	0,66	+0,053
3	0,6	0,819	0,686	0,512	0,979	1,01	-0,031
4	0,8	1,092	0,829	0,520	1,183	1,20	-0,017
5	1,0	1,365	0,939	0,498	1,338	1,31	+0,028
6	1,5	1,989	1,105	0,412	1,576	1,60	-0,024
7	2,0	2,730	1,220	0,337	1,739	1,73	+0,009

$$[a_1 a_1] = 5,070; [a_1 a_2] = 2,407; [a_2 a_2] = 1,327;$$

$$[a_1 l] = -0,00077; [a_2 l] = +0,00297.$$

Нормальные уравнения во втором приближении имеют вид

$$5,070 \partial k + 2,407 \partial r - 0,00077 = 0;$$

$$2,407 \partial k + 1,327 \partial r + 0,00297 = 0.$$

Решив эти уравнения, получаем  $\partial k = +0,009$ ;  $\partial r = -0,018$ , следовательно, неизвестные параметры во втором приближении, соответственно, равны  $k_3 = 1,435$  и  $r_3 = 1,347$ .

Для решения вопроса о дальнейшем уточнении искомым параметров  $\partial k$  и  $\partial r$  проведем оценку точности найденных значений искомым величин.

В нашем случае  $[V^2] = 56 \cdot 10^{-3}$ .

$$\text{Соответственно } \mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-t}} = \sqrt{\frac{56 \cdot 10^{-3}}{5}} = 3,3 \cdot 10^{-2} = 0,033.$$

Из решения весовых уравнений

$$\begin{aligned} 5,070Q_{11} + 2,407Q_{12} &= 1; \\ 2,407Q_{11} + 1,327Q_{12} &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 5,070Q_{21} + 2,407Q_{22} &= 0; \\ 2,407Q_{21} + 1,327Q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

находим весовые коэффициенты  $Q_{11} = 1,42$ ;  $Q_{12} = Q_{21} = -2,58$ ;  $Q_{22} = 5,43$ .

Тогда  $m_k = \mu \sqrt{Q_{11}} = 0,033 \sqrt{1,42} = 0,04$  и  $m_r = \mu \sqrt{Q_{22}} = 0,033 \sqrt{5,43} = 0,08$ . Так как СКП найденных параметров превосходят поправки, полученные в последнем приближении, на этом можно процесс приближений закончить и окончательно, с учетом погрешностей определения параметров, искомому уравнению можно придать вид

$$y = 1,44 \operatorname{arctg} 1,35x.$$

СКП определения функции по полученному уравнению вычисляем по формуле

$$m_{y_i} = \mu \sqrt{1/p_{y_i}} = \mu \sqrt{a_{1i}^2 Q_{11} + 2a_{1i} a_{2i} Q_{12} + a_{2i}^2 Q_{22}}.$$

Далее приведены расчеты СКП функции и предельные отклонения опытных данных от расчетных (табл. 27.9).

Таблица 27.9

№	$x$	$a_1 = \operatorname{arctg} r_2 x$	$a_2 = \frac{k_2 x}{1 + (r_2 x)^2}$	$y_{\text{расч}} = k_2 \operatorname{arctg} r_2 x$	$\frac{1}{p_y}$	$m_y$	$\Delta_{\text{пред}} = 3m_y$
1	0,2	0,27	0,26	0,38	0,32	0,01	0,03
2	0,4	0,50	0,44	0,71	0,52	0,02	0,05
3	0,6	0,69	0,51	0,98	0,51	0,02	0,05
4	0,8	0,83	0,52	1,18	0,46	0,02	0,05
5	1,0	0,94	0,50	1,34	0,42	0,01	0,04
6	1,5	1,10	0,41	1,58	0,54	0,02	0,05
7	2,0	1,22	0,34	1,74	0,77	0,02	0,08

По полученному уравнению с учетом предельных отклонений строим график (рис. 27.2) соотношения между исследуемыми величинами  $X$  и  $Y$ .

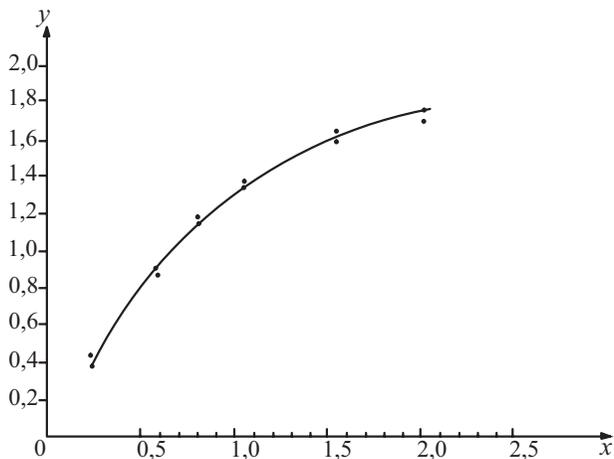


Рис. 27.2

### 27.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Установлено, что явления  $X$  и  $Y$  связаны зависимостью

$Y = a \ln \frac{X}{b}$ , где  $a$  и  $b$  — неизвестные параметры. Из серии опытов

по определению значений неизвестных параметров выбрано две пары (2;  $-2,09$ ) и (5;  $+0,67$ ). По этим данным вычислить нулевые приближения искомых параметров и подготовить вычислительную таблицу.

2. Явления  $X$  и  $Y$  связаны зависимостью  $y = a \arcsin bx$ . Из серии опытов по определению значений неизвестных параметров выбраны две пары (1;  $0,076$ ) и (4;  $0,304$ ). По этим данным вычислить нулевые приближения искомых параметров и подготовить вычислительную таблицу.

3. Подготовить вычислительные таблицы для расчета параметров эмпирических формул, если известны виды зависимостей между явлениями  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= a \arcsin bx; \text{ б) } y = a \sin bx; \text{ в) } y = a + bx^c; \\ \text{г) } y &= a \cos x^b; \text{ д) } y = a + b \operatorname{tg} x^c; \text{ е) } y = ab^x, \end{aligned}$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — неизвестные параметры.

## **28. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА**

### **28.1. Построение эмпирической формулы методом подбора**

В предыдущем разделе предполагалось, что вид функциональной зависимости между величинами  $X$  и  $Y$  известен, и решение задачи сводится к определению по результатам опыта неизвестных параметров этой зависимости.

Далее схематично рассмотрим основные приемы решения задачи, когда зависимость между аргументом  $X$  и функцией  $Y$  объективно существует, но вид этой зависимости  $Y=f(X)$  остается неизвестным.

Как и в предыдущих случаях, для установления вида этой зависимости были поставлены эксперименты, в результате которых для заданных значений аргументов получены соответствующие значения функции.

Совершенно очевидно, что поставленная задача по определению вида функциональной зависимости не может иметь однозначного решения. Здесь решение поставленной задачи может быть выполнено одним из следующих приемов.

Первый из них основывается на построении в выбранной системе координат эмпирических точек, координаты которых есть измеренные значения аргумента и функции. Используя эти точки, по возможности, ближе ко всей совокупности точек, проводят плавную кривую. Для дальнейшей работы необходимо иметь набор заранее построенных кривых, изображающих известные функциональные зависимости. Затем, руководствуясь имеющимся набором графиков кривых, подбирают тот из них, который наиболее походит на построенный по эмпирическим точкам график. Выбранному графику соответствует определенное уравнение, в

которое входят неизвестные числовые параметры. В дальнейшем задача сводится к определению неизвестных параметров выбранной зависимости по методике, описанной в гл. 27.

Рассмотрим конкретный пример построения такого вида эмпирической формулы.

### **Пример 28.1**

Для исследования влияния ошибок обобщения рельефа на положение горизонталей, проводимых на плане, составленном по результатам нивелирования по квадратам, был поставлен следующий эксперимент.

На участке местности была намечена сетка квадратов со сторонами 5 м, и из геометрического нивелирования определены высоты вершин квадратов. На этом же участке были построены сетки квадратов со сторонами, большими 5 м, высоты вершин которых также определяли из геометрического нивелирования. По этим данным строили планы с горизонталями. На эти планы наносили сетку квадратов со сторонами 5 м, и высоты вершин пятиметровых квадратов определяли по горизонталям плана. Принимая значения высот точек, полученных из геометрического нивелирования, за действительные, вычисляли СКП определения высот точек по горизонталям планов.

Таким образом получен экспериментальный ряд, представленный в табл. 28.1.

*Таблица 28.1*

Стороны квадратов $X$ , м	10	20	30	40	50	60
СКП определения высот точек по горизонталям $Y$ , см	8,2	8,8	11,0	12,8	13,8	14,7

Из приведенной таблицы видна ярко выраженная зависимость СКП определения высот точек по горизонталям плана от длины стороны квадрата. Требуется выразить эту зависимость формулой и по экспериментальным данным определить числовые параметры этой формулы.

#### *Решение*

По данным таблицы строим график эмпирических точек и проводим по возможности наиболее близко к эмпирическим точкам плавную кривую и сопоставляем (рис. 28.1) ее с графиком известных функций.

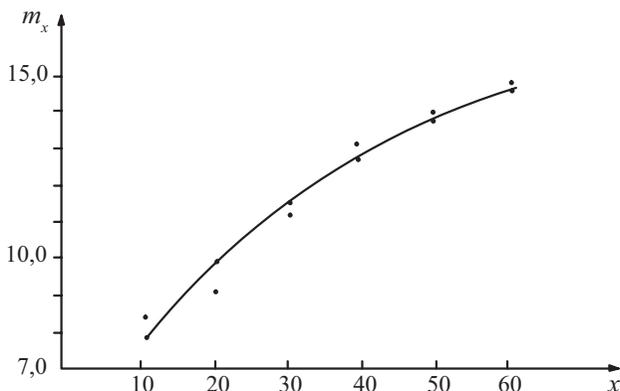


Рис. 28.1

В этом случае наиболее приемлемым уравнением является, на наш субъективный взгляд, уравнение вида

$$y = \alpha x^\beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры, подлежащие определению.

После субъективного выбора вида функциональной зависимости решение поставленной задачи полностью сводится к задаче определения параметров полуэмпирической формулы.

Не приводя всех вычислений, которые практически полностью повторяют вычисления гл. 27, дадим только некоторые промежуточные результаты: нулевые приближения для представленного уравнения  $\alpha_0 = +3,87$ ;  $\beta_0 = +0,326$ .

Задача решается в три цикла приближений. Нормальные уравнения в третьем цикле приближений имеют вид:

$$\begin{aligned} 85\delta\alpha + 97\delta\beta - 0,47 &= 0, \\ 97\delta\alpha + 11238\delta\beta - 5,83 &= 0. \end{aligned}$$

Окончательные значения искомых параметров:

$$\alpha = +3,11 \text{ и } \beta = +0,379, [V^2] = 1,47 \text{ и } m = 0,61.$$

Значение весовых коэффициентов?

$$Q_{11} = 0,645; Q_{12} = Q_{21} = -0,057; Q_{22} = 0,0049.$$

Тогда

$$m_{\alpha} = m\sqrt{Q_{11}} = 0,5, \quad m_{\beta} = m\sqrt{Q_{22}} = 0,04.$$

Учитывая значения СКП определенных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , приводим полученное уравнение к окончательному виду

$$y = 3,1 x^{0,38}.$$

В табл. 28.2 приведены расчетные значения функции по полученной эмпирической формуле, а на рис. 28.2 — график полученной зависимости.

Таблица 28.2

Стороны квадратов $X$ , м	10	20	30	40	50	60
СКП определения высот точек по горизонталям $Y$ , см	8,2	8,8	11,0	12,8	13,8	14,7
СКП определения высот, расчетное $Y$ , см	7,44	9,68	11,29	12,51	13,71	14,69

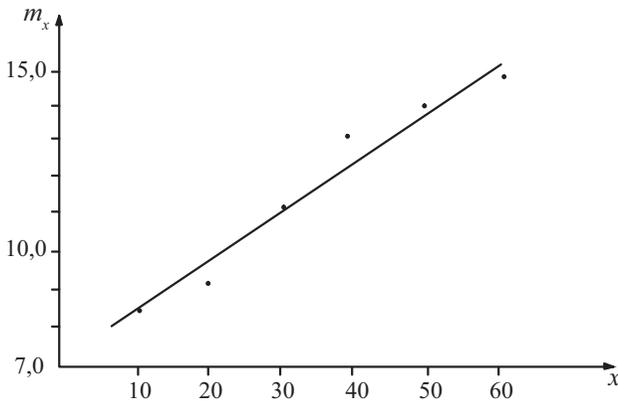


Рис. 28.2

Для решения вопроса о точности определения значений функции по построенному уравнению вычислим величину

$$m_{y_i} = m \sqrt{\frac{1}{p_{y_i}}},$$

где

$$\frac{1}{p_{y_i}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 Q_{11} + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 Q_{22} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right) Q_{12},$$

но

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{y}{\alpha} \text{ и } \frac{\partial y}{\partial \beta} = y \frac{\lg x}{M}, \text{ где } M = 0,4343.$$

Тогда получаем

$$m_{y_i} = m \cdot y_i \sqrt{\frac{Q_{11}}{\alpha^2} + \frac{Q_{22}}{M^2} \lg^2 x_i + 2 \frac{Q_{12}}{\alpha M} \lg x_i}.$$

Подставив числовые значения, имеем

$$m_{y_i} = y_i \sqrt{0,024 + 0,0097 \lg^2 x_i - 0,016 \lg x_i}.$$

В пределах изменения  $x$  от 10 до 60 м выражение

$$\sqrt{0,024 + 0,0097 \lg^2 x_i - 0,016 \lg x_i}$$

меняется от 0,14 до 0,15, поэтому окончательно среднеквадратической погрешности функции может быть придан вид

$$m_{y_i} = 0,15 y_i.$$

Таким образом, эмпирическая формула дает возможность получить значение функции с погрешностью порядка 15 % от значения самой функции. Эти погрешности обусловлены не только ошибками эксперимента, но и субъективностью выбора вида функциональной зависимости

## 28.2. Построение эмпирической формулы методом параболического интерполирования

Второй вариант решения задачи имеет принципиально иную структуру. В общем случае он заключается в представлении неизвестной функциональной зависимости  $Y = f(X)$  в виде уравнения

$$y = c_0 \Phi_0(x) + c_1 \Phi_1(x) + \dots + c_k \Phi_k(x), \quad (28.1)$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_k$  — подлежащие определению числовые параметры;  $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x)$  — заранее выбранные функции, принадлежащие определенному классу.

При этом, естественно, предполагается, что число  $(k + 1)$  меньше числа  $n$  опытных пар  $(x_i, y_i)$ .

Простейшим вариантом решения поставленной задачи является параболическое интерполирование, когда в качестве выбранных функций используют

$$\varphi_j(x) = x^j \quad (j = 0, \dots, k),$$

т.е. искомой функции придают вид

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k. \quad (28.2)$$

В этом случае также имеется определенный элемент субъективности, заключающийся в том, что необходимо определить, какую величину  $k$  следует принять в том или ином случае. Здесь следует сказать, что если выбрать величину  $k + 1$  равной числу опытных пар  $n$ , т.е. придать ей предельно возможное значение, эмпирическая кривая пройдет через все эмпирические точки. Это не значит, что вид эмпирической кривой идеально подобран. Не следует забывать, что опытные данные содержат погрешности измерений, следовательно, всегда имеется какая-то зона неопределенности. Если на график эмпирической кривой, проходящей через все опытные точки, нанести результаты новых опытов, то это совсем не значит, что они лягут строго на полученную кривую. Следует помнить, что любые результаты опыта содержат как объективные сведения о связи между исследуемыми явлениями, так и неизбежные погрешности опыта. Задача экспериментатора в данном случае состоит в том, чтобы правильно отразить объективную реальность с учетом возможных погрешностей проводимых опытов.

Здесь предлагается некоторый, возможно, приближенный, метод ограничений по выбору числа  $k$ .

Для подбора границ изменения величины  $k$  необходимо иметь представление о точности проведения опытных данных, т.е. знать СКП выполняемых в процессе опыта измерений.

Нахождение параметров  $c_j$  производится по методике, достаточно подробно изложенной в 27.2.

### **Пример 28.2**

По условиям примера 28.1 провести построение эмпирической формулы методом параболического интерполирования и выполнить оценку точности параметров и вычисления значений функции по полученным параметрам, а также построить график эмпирической формулы.

### Решение

Построение формулы методом параболического интерполирования проведем в несколько этапов, постепенно увеличивая число  $k$ . Естественно, начинать с уравнения  $y = c_0$  нецелесообразно, так как в этом случае эмпирическая формула представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс, что не соответствует опытными данным.

Рассмотрим уравнение вида  $y = c_0 + c_1x$  и определим неизвестные параметры  $c_0$  и  $c_1$ .

Уравнения поправок будут иметь вид:

$$V_i = c_0 + c_1x_i - y_i$$

Им соответствует система нормальных уравнений

$$\begin{aligned}nc_0 + [x]c_1 - [y] &= 0; \\ [x]c_0 + [x^2]c_1 - [xy] &= 0.\end{aligned}$$

В табл. 28.3 приведены расчеты коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений, а также поправок  $V_i$ . Для упрощения вычислений значения аргументов в таблице представлены в десятках метров.

Таблица 28.3

№	$x$	$x^2$	$y$	$xy$	$y_{расч}$	$V$
1	1	1	8,2	8,2	8,03	+0,17
2	2	4	8,8	17,6	9,44	-0,64
3	3	9	11,0	33,0	10,85	+0,15
4	4	16	12,8	51,2	12,26	+0,54
5	5	25	13,8	69,0	13,66	+0,14
6	6	36	14,7	88,2	15,07	-0,37
[ ]	21	91	69,3	267,2		

Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}6c_0 + 21c_1 - 69,3 &= 0; \\ 21c_0 + 91c_1 - 267,2 &= 0.\end{aligned}$$

Решив систему уравнений, получаем значение искомых параметров  $c_0 = 6,62$  и  $c_1 = 1,409$ . Тогда эмпирическая формула примет вид

$$y = 6,62 + 1,409 x.$$

Далее получаем расчетные значения функции и вычисляем поправки. Это дает нам возможность получить сумму квадратов поправок  $[V^2] = 0,909$  и СКП единичного веса, т.е. СКП измерения значений функции

$$\mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{0,909}{4}} = 0,47.$$

Обратив матрицу нормальных уравнений, получаем весовую матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,867 & -0,2 \\ -0,2 & 0,0571 \end{bmatrix}.$$

Далее вычисляем СКП найденных параметров:

$$m_0 = \mu \sqrt{Q_{11}} = 0,44;$$

$$m_1 = \mu \sqrt{Q_{22}} = 0,11.$$

Следовательно, окончательно эмпирической формуле можно придать вид, оставив у искомым параметров по одной запасной цифре:

$$y = 6,62 + 1,41 x.$$

Продолжим наши вычисления, остановившись на уравнении вида

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Эмпирической формуле такого вида будут соответствовать нормальные уравнения

$$nc_0 + [x]c_1 + [x^2]c_2 - [y] = 0;$$

$$[x]c_0 + [x^2]c_1 + [x^3]c_2 - [xy] = 0;$$

$$[x^2]c_0 + [x^3]c_1 + [x^4]c_2 - [x^2y] = 0.$$

Дополнив табл. 28.3 соответствующими столбцами, получим табл. 28.4.

Таблица 28.4

№	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$y$	$xy$	$x^2y$	$y_{расч}$	$V$
1	1	1	1	1	8,2	8,2	8,2	7,83	+0,37
2	2	4	8	16	8,8	17,6	35,2	9,48	-0,67
3	3	9	27	81	11,0	33,0	99,0	11,00	0
4	4	16	64	256	12,8	51,2	204,8	13,03	-0,23
5	5	25	125	625	13,8	69,0	345,0	13,70	+0,10
6	6	36	216	1296	14,7	88,2	529,2	14,87	-0,18
[ ]	21	91	441	2275	69,3	267,2	1221,4		

Система нормальных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} 6c_0 + 21c_1 + 91c_2 - 69,3 &= 0; \\ 21c_0 + 91c_1 + 441c_2 - 267,2 &= 0; \\ 91c_0 + 441c_1 + 2275c_2 - 1221,4 &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы доставляет значения искомым параметров  $c_0 = 6,069$ ,  $c_1 = 1,822$  и  $c_2 = -0,059$ . Тогда эмпирическая формула принимает вид

$$y = 6,069 + 1,822x - 0,059x^2.$$

Далее получаем расчетные значения функции и вычисляем поправки. Это дает возможность получить сумму квадратов поправок  $[V^2] = 0,680$  и СКП единичного веса, т.е. СКП измерения значений функции:

$$\mu = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-3}} = \sqrt{\frac{0,680}{3}} = 0,48.$$

Обратив матрицу нормальных уравнений, получаем весовую матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3,20 & -1,95 & 0,25 \\ -1,95 & 1,37 & -0,19 \\ 0,25 & -1,19 & 0,27 \end{bmatrix}.$$

Далее вычисляем СКП найденных параметров:

$$m_0 = \mu\sqrt{Q_{11}} = 1,07;$$

$$m_1 = \mu\sqrt{Q_{22}} = 0,70;$$

$$m_2 = \mu \sqrt{Q_{33}} = 0,09.$$

Как показывают вычисления СКП найденных параметров, коэффициент  $c_3 = -0,059$  является незначимым, так как выполняется неравенство вида  $|c_2| < 3m_2 = 0,27$ . Из этого можно сделать вывод, что предпринятая попытка уточнить эмпирическую формулу увеличением числа членов формулы не увенчалась успехом. Следовательно, при формировании эмпирической формулы достаточно ограничиться двумя первыми членами, т.е. окончательно использовать уравнение вида  $y = 6,62 + 1,41x$ . График функции представлен на рис. 28.3.

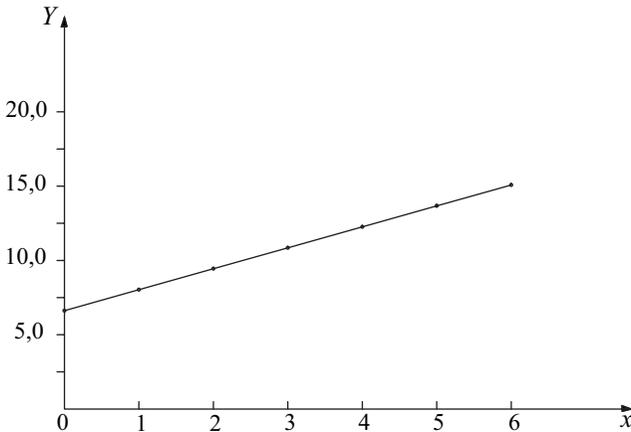


Рис. 28.3

Остается вычислить СКП определения функции по полученной формуле

$$m_{y_i} = \mu \sqrt{Q_{11} + x_i^2 Q_{22} + 2x_i Q_{12}}.$$

СКП вычисления значений функции по полученной эмпирической формуле приведены в табл. 28.5.

Таблица 28.5

$x$ , м	10	20	30	40	50	60
$m_y$ , см	0,72	0,54	0,42	0,42	0,54	0,72

## Задачи

1. В табл. 28.6 приведены данные о стоимости квартир и общей их площади на фиксированный момент времени.

Таблица 28.6

$Y$	13,8	14,0	13,8	22,0	21,5	24,0	22,5	24,0	20,9	27,5	35,0	28,0	32,0
$X$	33	36	40	48	53	55	60	63	70	70	75	80	95

Здесь  $X$  — общая площадь квартиры, кв.м;  $Y$  — рыночная стоимость квартиры, усл. ед.

Построить методом параболического интерполирования эмпирическую формулу, ограничившись при этом параболой 2-го порядка. Оценить качество полученных параметров эмпирической формулы и оценить их значимость. Записать окончательный вид полученной формулы и построить график.

2. В «Основах химии» Д.И.Менделеева приводятся данные о растворимости нитрата натрия  $\text{NaNO}_3$  в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворялось следующее число условных частей  $\text{NaNO}_3$  при соответствующих температурах (табл. 28.7).

Таблица 28.7

$t, ^\circ\text{C}$	0	4	10	15	21	29	36	51	68
Условные части	66,7	71,0	76,3	80,6	86,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Приняв температуру раствора за  $X$ , а объем растворенного  $\text{NaNO}_3$  за  $Y$ , построить методом параболического интерполирования эмпирическую формулу, ограничившись при этом параболой 2-го порядка. Оценить качество полученных параметров эмпирической формулы и их значимость. Записать окончательный вид полученной формулы и построить график.

## Вопросы для самопроверки

1. Что называют эмпирическими формулами?
2. Какие методы построения эмпирических формул известны?
3. Что представляет собой метод подбора эмпирической формулы?
4. Как осуществляется оценка точности определения параметров эмпирической формулы, полученной методом подбора?
5. В чем состоит идея параболического интерполирования?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторами поставлена задача составить учебное пособие для успешной подготовки к экзамену студентов всех форм обучения, обучающихся по специальности «Строительство». Наличие решения типовых задач, а также контрольные задачи и вопросы для самопроверки и закрепления материала по каждой главе будут способствовать как проверке знаний студентов по данной теме, так и повышению их уровня.

Темы, излагаемые в учебном пособии, являются базовыми при изучении курса по инженерной геодезии.

При изложении материала учитывалось, что студенты уже изучили курс геодезии в течение одного учебного года, прошли геодезическую практику и знакомы с простейшими методами геодезических измерений и их обработки. Предполагалось, что студенты знакомы с основами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, изучаемых по курсу высшей математики.

При написании учебного пособия авторы стремились изложить материал в доступной для студентов форме с рисунками и таблицами. На взгляд авторов, цель достигнута.

Авторы надеются, что использование учебного пособия будет способствовать успешной подготовке студентов к экзаменам и успешной их сдаче.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Баскакова В.В.* Крупномасштабные топографические съемки. М. : Недра, 1983.
2. *Беликов А.Б., Смирнов А.С.* Исследование точности угловых измерений. Совершенствование технологии геодезических, фотограмметрических и картографических работ для сельского хозяйства / Сб. научных трудов МИИЗа. М., 1987.
3. *Бурмистров Г.А.* Основы способа наименьших квадратов. М. : Госгеолтехиздат, 1963.
4. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высшая школа, 2003.
5. *Данилов В.В.* Отчет по исследованию точной полигонометрии за 1929 г. Труды ГИГиК. М. : Госкартгеодезия, 1932.
6. *Зедгинидзе Г.П., Гогсадзе Р.Ш.* Математические методы в измерительной технике. М. : Госстандарт, 1970.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

*Приложение 1*

Таблица значений функции  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>0,0</b>	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
<b>0,1</b>	3970	3965	3961	3956	3952	3945	3939	3932	3925	3918
<b>0,2</b>	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
<b>0,3</b>	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
<b>0,4</b>	3663	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
<b>0,5</b>	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
<b>0,6</b>	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
<b>0,7</b>	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
<b>0,8</b>	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2732	2709	2685
<b>0,9</b>	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
<b>1,0</b>	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
<b>1,1</b>	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
<b>1,2</b>	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
<b>1,3</b>	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
<b>1,4</b>	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
<b>1,5</b>	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
<b>1,6</b>	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
<b>1,7</b>	940	925	909	893	878	863	848	823	818	804
<b>1,8</b>	790	775	761	748	734	721	707	694	681	669
<b>1,9</b>	656	644	632	620	608	596	584	573	562	551
<b>2,0</b>	540	529	519	508	498	488	478	468	459	449
<b>2,1</b>	440	431	422	413	404	396	387	379	371	363
<b>2,2</b>	355	347	339	332	325	317	310	303	297	290
<b>2,3</b>	283	277	270	264	258	252	246	241	235	229
<b>2,4</b>	224	219	213	208	203	198	194	189	184	180
<b>2,5</b>	175	171	167	163	158	154	151	147	143	139
<b>2,6</b>	136	132	129	126	122	119	116	113	110	107
<b>2,7</b>	104	101	99	96	93	91	88	86	84	81
<b>2,8</b>	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61
<b>2,9</b>	60	58	56	55	53	51	50	48	47	46
<b>3,0</b>	44	43	42	40	39	38	37	36	35	34
<b>3,1</b>	33	32	31	30	29	28	27	26	25	25
<b>3,2</b>	24	23	22	22	21	20	20	19	18	18
<b>3,3</b>	17	17	16	16	15	15	14	14	13	13

Таблица значений функции  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,18	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2064	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3169	1,22	0,3883
0,27	0,1964	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,62	0,4956
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,64	0,4959
1,30	0,4032	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,66	0,4961

Окончание прил. 2

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,68	0,4963
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,70	0,4965
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,72	0,4967
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,74	0,4969
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,76	0,4971
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,78	0,4973
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,80	0,4974
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,82	0,4976
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,84	0,4977
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,86	0,4979
1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,88	0,4980
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,90	0,4981
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,92	0,4982
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,94	0,4984
1,45	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,96	0,4985
1,46	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,98	0,4986
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,00	0,49865
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,20	0,49931
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,40	0,49966
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,60	0,499841
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,80	0,499928
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	4,00	0,499968
1,54	0,4382	1,88	0,4699	2,44	0,4927	4,50	0,499997
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	5,00	0,499997
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934		
1,57	0,4418	1,91	0,4719	2,50	0,4938		
1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,52	0,4941		
1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,54	0,4945		
1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,56	0,4948		
1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,58	0,4951		
1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,60	0,4953		

Критические точки распределения  $\chi^2$ 

Число степеней свободы	Уровень значимости					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,36
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0
35	57,3	53,2	49,8	22,5	20,6	18,5
40	63,7	59,3	55,8	26,5	24,4	22,2
45	70,0	65,4	61,7	30,6	28,4	25,9
50	76,2	71,4	67,5	34,8	32,4	29,7
55	82,3	77,4	73,3	39,0	36,4	33,6
60	88,4	83,3	79,1	43,2	40,5	37,5
70	100,4	95,0	90,5	51,7	58,8	45,4
80	112,3	106,6	101,9	60,4	57,2	53,5
90	124,1	118,1	113,1	69,9	65,6	61,8
100	135,8	129,6	124,3	77,9	74,2	70,1

**Критические точки распределения Стьюдента**

Число степеней свободы	Уровень значимости (двусторонняя критическая область)					
	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,02</b>	<b>0,01</b>	<b>0,002</b>	<b>0,001</b>
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,00
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	312,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,90
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	1,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
80	1,67	1,99	2,38	2,64	3,21	3,43
100	1,66	1,98	2,37	2,63	3,19	3,40
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости (односторонняя критическая область)					

**Распределение Кочрена**

Уровень значимости  $\alpha = 0,05$

$k_1$	$m$										
	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	
2	0,906	0,872	0,853	0,833	0,816	0,801	0,788	0,734	0,660	0,581	
3	0,746	0,707	0,677	0,653	0,633	0,617	0,603	0,547	0,475	0,403	
4	0,629	0,590	0,560	0,536	0,518	0,502	0,488	0,437	0,372	0,309	
5	0,544	0,507	0,478	0,456	0,439	0,424	0,411	0,365	0,307	0,251	
6	0,480	0,445	0,418	0,398	0,382	0,368	0,357	0,314	0,261	0,212	
7	0,431	0,397	0,373	0,354	0,338	0,326	0,315	0,276	0,228	0,183	
8	0,391	0,360	0,336	0,319	0,304	0,293	0,283	0,246	0,202	0,162	
9	0,358	0,329	0,307	0,290	0,277	0,266	0,257	0,223	0,182	0,145	
10	0,331	0,303	0,282	0,267	0,254	0,244	0,235	0,203	0,166	0,131	
12	0,288	0,262	0,244	0,230	0,219	0,210	0,202	0,174	0,140	0,110	
15	0,242	0,220	0,203	0,191	0,182	0,174	0,167	0,143	0,114	0,089	
20	0,192	0,174	0,160	0,150	0,142	0,136	0,130	0,111	0,088	0,068	
40	0,108	0,097	0,089	0,082	0,078	0,075	0,071	0,060	0,046	0,035	
60	0,077	0,068	0,062	0,058	0,055	0,052	0,050	0,041	0,031	0,023	

$k_1$	Уровень значимости $\alpha = 0,01$													
	$m$													
	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144				
2	0,959	0,937	0,917	0,899	0,882	0,867	0,854	0,795	0,707	0,606				
3	0,834	0,793	0,761	0,734	0,711	0,691	0,674	0,606	0,515	0,423				
4	0,721	0,676	0,641	0,613	0,590	0,570	0,554	0,488	0,406	0,325				
5	0,633	0,588	0,553	0,526	0,504	0,485	0,470	0,409	0,335	0,264				
6	0,564	0,520	0,487	0,461	0,440	0,433	0,408	0,353	0,286	0,223				
7	0,508	0,466	0,435	0,411	0,391	0,375	0,362	0,311	0,249	0,193				
8	0,463	0,423	0,393	0,370	0,352	0,337	0,323	0,278	0,221	0,170				
9	0,425	0,387	0,359	0,338	0,321	0,307	0,295	0,251	0,199	0,152				
10	0,393	0,357	0,331	0,311	0,295	0,281	0,270	0,230	0,181	0,138				
12	0,343	0,310	0,286	0,268	0,254	0,242	0,232	0,196	0,154	0,116				
15	0,288	0,260	0,239	0,223	0,210	0,200	0,192	0,161	0,125	0,093				
20	0,229	0,205	0,188	0,175	0,165	0,157	0,150	0,125	0,096	0,071				
40	0,128	0,114	0,103	0,096	0,090	0,085	0,082	0,067	0,050	0,036				
60	0,090	0,080	0,072	0,067	0,063	0,059	0,057	0,046	0,034	0,0				

Критические точки  $F$ -распределения (распределение Фишера — Снедекора)

$k_2$	$k_1$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
<b>Раздел I . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....</b>	<b>5</b>
1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ....	5
1.1. Основные понятия . . . . .	5
1.2. Частость и вероятность случайного события . . . . .	7
1.3. Классическое определение вероятности . . . . .	9
1.4. Связь между случайными событиями. Условная вероятность . . . . .	10
1.5. Схемы повторения испытаний . . . . .	12
1.6. Примеры решения типовых задач . . . . .	14
1.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	15
2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ . . . . .	16
2.1. Основные понятия. Функция и плотность распределения . . . . .	16
2.2. Числовые характеристики случайных величин . . . . .	21
2.3. Примеры случайных дискретных величин . . . . .	26
2.4. Примеры случайных непрерывных величин. . . . .	28
2.5. Центральная предельная теорема Ляпунова . . . . .	37
2.6. Закон больших чисел. . . . .	38
2.7. Решение типовых задач . . . . .	40
2.8. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	44
3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН . . . . .	49
3.1. Двумерная случайная величина . . . . .	49
3.2. Многомерный случайный вектор . . . . .	57
3.3. Примеры решения типовых задач . . . . .	59
3.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	60
4. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. . . . .	62
4.1. Свойства математических ожиданий . . . . .	62
4.2. Свойства дисперсий. . . . .	63
4.3. Свойства третьих центральных моментов . . . . .	64
4.4. Свойства четвертых центральных моментов . . . . .	65
4.5. Свойства корреляционной матрицы случайного вектора . . . . .	66
<b>Раздел II . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ .....</b>	<b>68</b>
5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ....	68
5.1. Понятие генеральной совокупности . . . . .	68
5.2. Выборка из генеральной совокупности . . . . .	69
5.3. Основные задачи математической статистики . . . . .	71

6. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ .....	72
6.1. Общие сведения .....	72
6.2. Методы построения оценок .....	74
6.3. Оценка математического ожидания .....	75
6.4. Оценка дисперсии и среднеквадратического отклонения .....	77
6.5. Оценка моментов .....	81
6.6. Выборочный коэффициент корреляции .....	81
6.7. Примеры решения типовых задач .....	82
6.8. Задачи для самостоятельного решения .....	85
7. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ .....	85
7.1. Общие положения .....	85
7.2. Доверительный интервал для математического ожидания .....	87
7.3. Доверительный интервал для дисперсии .....	89
7.4. Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения .....	90
7.5. Доверительный интервал для выборочного коэффициента корреляции .....	90
7.6. Примеры решения типовых задач .....	91
7.7. Задачи для самостоятельного решения .....	92
8. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ .....	93
8.1. Общие положения по проверке статистических гипотез .....	93
8.2. Сравнение двух средних .....	97
8.3. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней .....	100
8.4. Критерий Аббе .....	101
8.5. Сравнение дисперсий .....	102
8.6. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции .....	104
8.7. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности .....	106
8.8. Примеры решения типовых задач .....	109
8.9. Задачи для самостоятельного решения .....	113
9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ, РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗЫ .....	115
9.1. Общие положения .....	115
9.2. Корреляционный анализ .....	115
9.3. Регрессионный анализ .....	118
9.4. Однофакторный дисперсионный анализ .....	121
9.5. Оценка автокорреляционной функции рядов результатов наблюдений .....	125
9.6. Примеры решения типовых задач .....	128
9.7. Задачи для самостоятельного решения .....	130

<b>Раздел III. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ</b> . . . . .	<b>132</b>
10. ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ . . . . .	132
10.1. Основные определения . . . . .	132
10.2. Классификация измерений . . . . .	135
11. ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .	138
11.1. Двойственный характер процесса измерений . . . . .	138
11.3. Аддитивная гипотеза строения погрешности результата измерения . . . . .	140
11.4. Систематические и случайные погрешности . . . . .	143
11.5. Результат измерения и его погрешность как случайная величина . . . . .	146
11.6. Числовые характеристики точности измерения . . . . .	149
11.7. Закон распределения результатов измерений и их погрешностей . . . . .	150
11.8. Оценки числовых характеристик точности измерений . . . . .	151
11.9. Основные задачи, решаемые при помощи теории погрешностей результатов измерений . . . . .	152
11.10. Оценка точности результатов измерений по истинным (действительным) погрешностям . . . . .	154
11.11. Примеры решения типовых задач . . . . .	156
11.12. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	158
12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .	159
12.1. Основные теоремы . . . . .	159
12.2. Накапливание погрешностей в основных геодезических действиях . . . . .	162
12.3. Примеры решения типовых задач . . . . .	169
12.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	174
13. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .	177
13.1. Определение веса результата измерения . . . . .	177
13.2. Оценка относительной точности функций результатов измерений . . . . .	179
13.3. Расчет весов в основных геодезических действиях . . . . .	180
13.4. Примеры решения типовых задач . . . . .	184
13.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	186
14. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕ- НИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ . . . . .	187
14.1. Уравнивание ряда результатов измерений одной и той же величины . . . . .	187
14.2. Уравнивание ряда равноточных измерений одной и той же величины . . . . .	193

14.3. Апостериорная оценка точности при обработке рядов измерений одной и той же величины . . . . .	194
14.4. Порядок математической обработки рядов результатов измерений одной и той же величины . . . . .	200
14. 5. Примеры решения типовых задач . . . . .	201
14. 6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	206
15. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .	208
15.1. Общие принципы . . . . .	208
15.2. Оценка точности угловых измерений по невязкам в полигонах и ходах . . . . .	213
15.3. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Пересеченная местность . . . . .	216
15.4. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Равнинная местность . . . . .	217
15.5. Примеры решения типовых задач . . . . .	219
15.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	222
16. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .	223
16.1. Общие положения . . . . .	223
16.2. Исследование коллимационной погрешности прибора . . . . .	225
16.3. Оценка точности угловых измерений по разностям в полуприемах . . . . .	226
16.4. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Непосредственное измерение линий . . . . .	228
16.5. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Измерение линий свето- и радиодальномерами . . . . .	229
16.6. Оценка точности нивелирования по разностям двойных измерений на станции . . . . .	229
16.7. Оценка точности нивелирования по разностям прямого и обратного превышений . . . . .	230
16.8. Примеры решения типовых задач . . . . .	231
16.9. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	234
17. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ . . . . .	235
17.1. Критерий определения слабодействующих и превалирующих источников погрешностей . . . . .	235
17.2. Об искажении СКП систематическими погрешностями . . . . .	238
17.3. Априорная оценка точности . . . . .	239
17.4. Применение методов теории погрешностей при исследовании приборов . . . . .	243

17.5. Использование дисперсионного анализа при исследовании приборов .....	248
<b>Раздел IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ.</b> .....	256
18. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	256
18.1. Общие соображения .....	256
18.2. Математические модели возникновения физической корреляции. ....	258
18.3. Случайный вектор и его числовые характеристики .....	262
18.4. Оценка точности функций зависимых результатов измерений. ....	265
18.5. Обработка ряда зависимых результатов измерений одной величины .....	268
18.6. Примеры решения типовых задач .....	269
18.7. Задачи для самостоятельного решения .....	274
19. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ .....	276
19.1. Общие положения .....	276
19.2. Использование коэффициента корреляции для оценки качества работы GPS-приемников в дифференциальном режиме по разным созвездиям .....	278
19.3. Использование коэффициента корреляции для определения совместимости различных типов GPS-приемников .....	281
19.4. Использование коэффициента корреляции для выявления эффекта многолучевости. ....	283
20. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	287
20.1. Передача дирекционного угла. ....	287
20.2. Получение корреляционной матрицы координат точек теодолитного хода .....	294
20.3. Учет зависимости между координатами точек теодолитного хода при вычислении площади полигона .....	299
20.4. Задачи для самостоятельного решения .....	301
<b>Раздел V. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.</b> .....	302
21. ПРИНЦИПЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ. ....	302
21.1. Задачи и принципы уравнивания геодезических построений. . . . .	302
21.2. Основные определения и обозначения .....	309

21.3. Вывод нормальных уравнений . . . . .	314
21.4. Уравнивание геодезических построений в случае нелинейных параметрических уравнений связи . . . . .	316
21.5. Порядок уравнивания геодезических построений параметрическим методом . . . . .	318
21.6. Порядок составления нормальных уравнений с контролем по суммам . . . . .	319
21.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	322
<b>22. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .</b>	<b>324</b>
22.1. Общие соображения . . . . .	324
22.2. Точные методы . . . . .	324
22.3. Итерационные методы решения систем нормальных уравнений (метод последовательных приближений) . . . . .	336
22.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	339
<b>23. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ УРАВНИВАНИЯ . . . . .</b>	<b>341</b>
23.1. Общие соображения . . . . .	341
23.2. Вычисление величины $\mu^2$ . . . . .	341
23.3. Нахождение обратных весов уравненных значений неизвестных . . . . .	342
23.4. Вычисление обратной матрицы нормальных уравнений в схеме Гаусса . . . . .	345
23.5. Вычисление обратных весов и СКП функций уравненных значений неизвестных . . . . .	347
23.6. Примеры решения типовых задач . . . . .	348
23.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	355
<b>24. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ МЕТОДОМ (МЕТОД УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ). . . . .</b>	<b>356</b>
24.1. Основные определения и обозначения . . . . .	356
24.2. Вывод нормальных уравнений коррелат . . . . .	358
24.3. Вычисление поправок и уравненных значений результатов измерений. Контроль уравнивания . . . . .	360
24.4. Уравнивание коррелатным методом при нелинейных условных уравнениях . . . . .	362
<b>25. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В КОРРЕЛАТНОМ МЕТОДЕ . . . . .</b>	<b>364</b>
25.1. Вычисление СКП единичного веса . . . . .	364
25.2. Вычисление весов функций уравненных значений неизвестных . . . . .	365
25.3. Вычисление обратных весов функций уравненных значений неизвестных в схеме Гаусса решения систем нормальных уравнений . . . . .	368

25.4. Примеры решения типовых задач .....	369
25. 5. Задачи для самостоятельного решения .....	377
<b>Раздел VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ .....</b>	<b>380</b>
26. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....	380
26.1. Общие положения .....	380
26.2. Общее решение задач по определению параметров полуэмпирических формул .....	381
27. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....	385
27.1. Определение параметров полуэмпирической формулы линейного вида .....	385
27.2. Определение параметров полуэмпирической формулы нелинейного вида .....	391
27.3. Задачи для самостоятельного решения .....	399
28. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА .....	400
28.1. Построение эмпирической формулы методом подбора .....	400
28.2. Построение эмпирической формулы методом параболического интерполирования .....	404
Заключение .....	411
Библиографический список .....	412
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	413

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

*Учебное издание*

**Беликов Александр Борисович,  
Симомян Владимир Викторович**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Редактор *В.В. Космин*  
Компьютерная верстка и правка *И.Д. Бочаровой*  
Дизайн обложки *Д.Л. Разумного*

Подписано в печать 04.01.2016 г. И-269. Формат 60×84/16.  
Уч.-изд. л. 23,5. Усл.-печ. л. 25,11. Тираж 300 экз. Заказ 389

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Национальный исследовательский  
Московский государственный строительный университет»  
(НИУ МГСУ).

129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.

Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.

E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru.

Отпечатано в типографии Издательства МИСИ – МГСУ.

Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44