

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**УХТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**А.И. КОБРУНОВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ  
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

УХТА 2007

УДК 550 830

К 55

Кобрунов, А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных [Текст]: учеб. пособие / А.И. Кобрунов. – Ухта: УГТУ, 2007. - 286 с.: ил.

ISBN 978-588179-470-5

Учебное пособие является междисциплинарным в том отношении, что обеспечивает углубленное изучение целого ряда дисциплин при подготовке бакалавров, специалистов, магистров и аспирантов. Оно обеспечивает изучение дисциплин «Теоретические основы решения обратных задач геофизики», «Теоретические основы обработки геофизической информации», углубленное изучение интерпретационных разделов геофизических спецкурсов и, прежде всего, «Гравиразведка», «Магниторазведка», «Комплексная интерпретация», а также разделов, связанных с современным математическим аппаратом геофизики. Приложения к учебному пособию будут полезны при изучении математического цикла дисциплин при подготовке геофизиков.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по специальностям 130201 «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых» и 130202 «Геофизические методы исследования скважин», специализирующихся на вопросах теории интерпретации геофизических данных. Предполагается его активное использование при подготовке курсовых, дипломных работ, а также магистерских диссертаций по программе 130121 «Автоматизированные методы обработки и интерпретации геолого-геофизической информации». Оно будет полезно при подготовке аспирантов по специальностям 25.00.10 «Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых», 25.00.16 «Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр» и 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» с приложениями в области геофизики.

В учебном пособии рассмотрены информационные и интерпретационные модели анализа геофизических данных, математические постановки задач, обеспечивающих разные информационные уровни интерпретационного процесса в геофизике а также принципы и методы их решения. Рассматриваются методы решения некорректных задач геофизики в условиях максимально полного учета особенностей и специфики геофизических задач и геофизических данных. Более подробно изложены современная теория и методы построения сложных плотностных моделей геологических сред с использованием гравиметрических данных.

Рецензенты: зав. кафедрой разведочной геофизики и компьютерных систем РГУНГ им. И.М. Губкина, доктор технических наук, профессор С.А. Серкерев; зав. кафедрой ядерно-радиометрических методов и геоинформатики МГГРУ, доктор физ.-мат. наук, профессор А.А. Никитин.

© Ухтинский государственный технический университет, 2007

© Кобрунов А.И., 2007

ISBN 978-5-88179-470-5

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие .....</b>	<b>5</b>
<b>Список использованных обозначений.....</b>	<b>12</b>
<b>Введение.....</b>	<b>16</b>
<b>Глава 1. МОДЕЛЬ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ .....</b>	<b>20</b>
Введение.....	20
1.1. Информационная модель геофизических исследований.....	21
1.2. Интерпретационная модель геофизических исследований.....	26
1.3. Модели и их свойства .....	31
1.4. Задачи геофизической интерпретации .....	34
<b>ГЛАВА 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ.....</b>	<b>39</b>
2.1. Разведочная гравиметрия .....	39
2.1.1. Плотностная (физическая) модель.....	39
2.1.2. Структурная модель.....	42
2.1.3. Двухмерные аналоги уравнений.....	43
2.1.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Интеграл Пуассона .....	44
2.2. Вычислительная томография .....	45
2.3. Сейсмические методы.....	49
2.3.1. Волновые уравнения .....	49
2.3.2. Лучевая теория сейсмических волн.....	56
2.3.3. Сейсмическая томография на временных задержках .....	58
2.4. Электрические методы на постоянном токе.....	59
2.5. Динамика движений вещества .....	60
2.6. Современная геодинамика.....	63
<b>ГЛАВА 3. НЕКОРРЕКТНОСТЬ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ.....</b>	<b>66</b>
3.1. Условия корректности в геофизических задачах.....	66
3.2. Аппроксимационные модели и принцип квазирешений.....	73
3.3. Свойства аппроксимационных моделей .....	75
<b>ГЛАВА 4. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ.....</b>	<b>85</b>
4.1. Основные понятия и принципы .....	85
4.2. Квазиобращение .....	89
4.2.1. Конечномерный случай .....	90
4.2.2. Бесконечномерный случай .....	92
4.3. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.....	93
4.3.1. Основы общей теории.....	93
4.3.2. Винеровская фильтрация.....	97
4.3.3. Регуляризация дифференцирования.....	99
4.4. Построение квазирешений .....	99
4.5. Итерационная регуляризация.....	100
4.6. Выводы .....	101
<b>ГЛАВА 5. КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ .....</b>	<b>103</b>
5.1. Вариационные принципы и проблема критериев .....	103
5.2. Критерии оптимальности типа нормы .....	111
5.3. Экстремальные классы единственности для интегральных критериев оптимальности .....	118
5.4. Экстремальные классы для интегральных операторов в равномерной метрике .....	121
5.5. Построение решений на экстремальных классах.....	125
5.6. Нелинейные задачи .....	127
5.6.1. Характеристика экстремальных классов для нелинейных задач.....	127
5.6.2. Итерационные методы построения решений на экстремальных классах.....	130
5.7. Составные критерии оптимальности.....	135

<b>ГЛАВА 6. ЭВОЛЮЦИОННО-ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ.....</b>	<b>142</b>
6.1. Общие рассуждения.....	142
6.2. Динамика движения вещества .....	150
6.3. Динамика структурных моделей .....	156
<b>ГЛАВА 7. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ.....</b>	<b>159</b>
7.1. Аналитические свойства оператора прямой задачи гравиметрии для распределения плотности .....	159
7.2. Экстремальные классы для распределения плотности.....	170
7.3. Конструирование решений на экстремальных классах распределений плотности.....	184
7.3.1. Построение решений в спектральной форме.....	185
7.3.2. Построение решений на основе итерационных процессов .....	188
7.4. Экстремальные классы в задачах структурной гравиметрии .....	189
7.5. Конструирование решений на экстремальных классах для плотностных границ.....	195
7.5.1. Спектральная форма решения обратной задачи структурной гравиметрии на экстремальных классах .....	196
7.5.2. Вычислительная схема с использованием спектральной формы решения обратной задачи структурной гравиметрии на экстремальных классах.....	197
7.5.3. Итерационные методы решения обратной задачи структурной гравиметрии на экстремальных классах .....	200
7.6. Алгоритм эволюционно-динамического продолжения .....	202
Библиографические замечания .....	202
<b>Послесловие .....</b>	<b>204</b>
<b>Приложение 1. Конечномерные линейные пространства .....</b>	<b>206</b>
Вводные сведения .....	206
Множества.....	205
Нормы.....	206
Операторы .....	208
Алгебра матриц.....	210
Типы матриц .....	210
Норма матриц .....	210
Собственные числа и собственные элементы .....	211
Экстремальные свойства собственных чисел.....	213
Разложение единицы.....	214
Разложение решений по собственным элементам .....	214
<b>Приложение 2. Функциональный анализ. Линейные операторы. Экстремальные задачи (вводный конспект).....</b>	<b>218</b>
2.1. Множества.....	218
2.2. Топология* .....	220
2.3. Элементы функционального анализа .....	224
2.4. Операторы .....	231
2.5. Примеры функциональных пространств .....	235
2.6. Экстремальные задачи .....	239
2.7. Библиографические замечания .....	247
<b>Приложение 3. Непрерывные группы и их представления* .....</b>	<b>248</b>
<b>Приложение 4. Вариационные подходы и геометрические принципы характеристики локально неоднородных сред* .....</b>	<b>262</b>
4.1. Принцип наименьшего действия .....	262
4.2. Эффективные параметры неоднородности среды .....	269
4.3. Искривленные многообразия (пространства с афинной связностью) .....	275
4.4. Конструирование уравнений поля в пространствах с нарушенной симметрией.....	281

**Имей мужество пользоваться  
собственным умом!  
Эммануил Кант**

## Предисловие

Девиз, вынесенный в эпиграф, отражает стиль учебного пособия, направленного, прежде всего, на решение задачи геофизического просвещения. Но что это такое? Следуя Иммануилу Канту – немецкому философу XVIII в., – *просвещение – это выход человека из состояния несовишеннолетия, в котором он находится по собственной вине. Несовершенноелетие – это неспособность пользоваться своим рассудком без руководства со стороны кого-то другого. Несовершенноелетие по собственной вине имеет причиной не недостаток рассудка, а недостаток мужества пользоваться им без руководства со стороны кого-то другого.* Геофизическое просвещение – типичный пример такого свойства просвещения. Это привитие умения не просто следовать рекомендованным технологиям, приемам и способам, а выработка мужества пользоваться собственным умом в оценке и конструировании методов и технологий. В данном случае – методов и технологий извлечения информации из геофизических данных.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по специальностям «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых» и «Геофизические методы исследования скважин», специализирующихся на вопросах теории интерпретации геофизических данных. Оно будет полезно также инженерам-геофизикам и научным работникам как краткий обзор математических моделей и постановок задач извлечения информации из геофизических данных. Спецификой материала, собранного в учебном пособии, является рассмотрение недоопределенных обратных задач геофизики и связанных с этим особенностей. Акцент делается не на вычислительных и технологических проблемах, связанных с решением соответствующих уравнений, а, прежде всего, на смысловых, содержательных вопросах. Важнейший из них состоит в выработке постановки обратных задач адекватной задачам геолого-геофизической интерпретации, смыслу, содержанию и форме реально имеющейся информации об изучаемом объекте. Другой особенностью учебного пособия служит возможность его использования как своего рода трамплина для самостоятельных научных исследований. Читатель вплотную подводится к «границе изученного». Это делает пособие полезным для аспирантов не только геофизических специальностей, но и специальности «Прикладная математика и математическое моделирование», выбравших в качестве приложения геофизические методы. В настоящее время уровень развития стандартных и специализированных общедоступных математических библиотек таков, что решить практически любую из реально возникающих обратных задач на уже достигнутых вычислительных мощностях не составляет существенных проблем. Дальнейшее наращивание вычислительных мощностей и развитие программного обеспечения будет делать эту задачу все более рутинной и просто реализуемой. В этой связи акцент в изучении методов интерпретации должен быть сделан на глубоком осмыслении постановок обратных задач, их системной организации, встраивании процедур анализа полей в интегрированные методы комплексной интерпретации, в том числе и с использованием информации о генезисе изучаемых объектов. Настоящее учебное пособие посвящено указанным вопросам и призвано восполнить имеющийся сегодня пробел в учебной литературе по математическим основам теории интерпретации геофизических данных.

Специфика рассматриваемого предмета такова, что она требует активного и постоянного использования математической символики, математических понятий и методов. Следует помнить, что язык математики – это, прежде всего, язык. Язык, позволяющий недвусмысленно и точно выражать свои мысли. Нет другого способа точно сказать о том, что задано, как установлены связи и что следует найти. Здесь то чаще всего и скрыта основная трудность. Недостаточный объем математической подготовки, отсутствие в учебных планах важнейших разделов математики, на которых «стоит» теория и методы решения обратных задач – основы математической теории интерпретации, приводит к существенным трудностям. Студенты готовы очень

внимательно слушать о принципах интегрированного анализа геолого-геофизических данных, о совместной интерпретации сейсмо-гравиметрических материалов на основе решения обратных задач. Но как только дело доходит до записи волновых уравнений для неоднородных сред и краевых задач для уравнений эллиптического типа, все становится сложнее. Но есть и еще одна проблема – если можно выразиться, проблема второго этажа. Она касается уже не боящихся математической символики аспирантов, студентов и магистрантов. Модные и доступные вычислительные приемы, позволяющие быстро и просто провести преобразование над полем, создают, в купе с красивыми средствами визуализации, иллюзию простоты решаемой задачи. Например, выполнив вейвлет-преобразование или красиво звучащую, например «адаптивную в живом окне», фильтрацию, получим распределение источников поля или, на худой конец, распределение его эффективных параметров. Далее этот результат передается «на вход» геологического осмысления и строятся просто сногшибающие выводы. Но есть фундаментальные результаты более глубокого этажа, характеризующие эффекты неединственности и доказывающие бесполезность таких простых решений. Шапочное владение новыми информационными и компьютерными технологиями не отменяет действие фундаментальных законов извлечения информации из физических полей. Их надо знать. К сожалению, в учебной литературе они отражены крайне слабо, и сама эта литература уже стала библиографической редкостью. Настоящее учебное пособие нацелено в том числе и на эту проблематику.

Теперь о том, как следует читать настоящее пособие. Если читатель считает, что он достаточно владеет математическим аппаратом, ему следует убедиться в этом, просмотрев приложения 1-2, и приступить к чтению собственно разделов основной части. В противном случае, рекомендую после того, как будет проработано введение, прочитать приложение 1. После этого смело можно читать главы 1 и 2. Перед главой 3 следует прочитать приложение 2, возможно опуская те его части, которые помечены звездочкой. Они приведены для полноты и носят «внутренний характер». Это значит, что они нужны для более четкой формулировки других утверждений, которые уже активно используются. Особо важны разделы «Линейные операторы», «Дифференцирование». Перед чтением главы 5 следует вернуться к приложению 2 и внимательно еще раз вспомнить вопросы теории оптимизации – раздел «Экстремальные задачи». Перед чтением главы 6 следует ознакомиться с приложением 3. Что же касается приложения 4, это самостоятельный раздел, не используемый в основной части и направленный на «приглашение к сотрудничеству». Он направлен на развитие идей, связанных с построением эффективных моделей, и может служить основой для выполнения самостоятельных научных исследований. Это хорошая тема для выполнения курсовых, дипломных работ, подготовки магистерских диссертаций.

**ГЛОССАРИЙ**

Аддитивная группа.....	221	Детерминированные связи.....	34
Аддитивное преобразование .....	226	Деформационная компонента эволюции. ....	151
Активная часть аппроксимационной конструкции.....	78	Дивергентная компонента.....	148
Алгебр Ли группы Ли .....	250	Дивергентная компонента эволюции .....	151
Алгебра.....	222	Дивергентное преобразование.....	153
Алгебра Ли пространственных вращений.....	253	Дилатационные преобразования .....	152
Алгебра матриц.....	209	Дилатация .....	50
Аналоги операторов Лапласа и Даламбера .....	279	Динамика движения вещества.....	149
Аппаратная функция.....	85	Динамика структурных моделей.....	155
Аппроксимационная модель поля .....	33	Динамические модели .....	32
Аппроксимационная содержательность.....	75	Дискретная модель .....	33
Аппроксимационные модели .....	31	Дискретная модель поля .....	33
Априорная информация.....	113	Действие (для поля).....	262
Атрибуты поля.....	33	Евклидово пространство .....	206
Афинная связность.....	275	Единственность решения.....	69
База $\gamma$ топологии .....	219	Задача Дирихле .....	44
Базисные элементы .....	207	Задача о наилучшем приближении .....	242
Бесконечные числовых последовательностей.....	237	Задачи геофизической интерпретации .....	34
Бинарная операция .....	221	Задачи детального описания.....	37
Вариационные параметризации.....	111	Задачи расчленения .....	37
Везде разрешимое уравнение.....	232	Закон Гука .....	49
Вектор деформации.....	49	Закон Дарси.....	61
Взаимно-непрерывное отображение .....	221	Закон преобразования афинных объектов связности .....	276
Взаимно-однозначное отображение .....	220	Закон сохранения импульса.....	265
Винеровская фильтрация.....	97	Закон сохранения энергии системы.....	266
Волновое уравнение для потенциала .....	280	Закон трансформации лагранжиана.....	269
Волновое уравнение.....	52	Законом Мариотта .....	61
Вполне непрерывный оператор .....	233	Замкнутые множества .....	219
Вполне упорядоченное множество.....	218	Замкнутый оператор.....	230
Выпуклая комбинация .....	207	Замыкание.....	219
Выпуклая оболочка множества.....	222	Замыкания множества .....	225
Вычислительная схема решения ОЗСГ на экстремальных классах .....	196	Идеальная редукция .....	86
Гармонические решения для ОЗГ.....	182	Идеальный класс.....	119
Генераторы.....	250	Идеальный экстремальный класс.....	125
Генераторы группы Ли .....	250	Идеальный экстремальный класс распределений плотности в пространстве $L_p(V)$ .....	171
Генераторы группы трансляций .....	253	Изоморфные группы .....	252
Геодезические.....	278	Импульсы .....	264
Геодинамические параметры .....	157	интегрированная интерпретация.....	37
Геологический объект.....	23	Интегрированная интерпретация.....	141
Геолого-геофизические связи .....	23	Интерпретационная модель .....	21, 26
Гильбертово пространство .....	234	Интерпретация .....	20, 28
График оператора.....	230	Интерпретация переменной скорости (нарушение симметрии).....	283
Группа.....	247	Инфинитезимальное преобразование.....	249
Группа Ли.....	249	Информационная модель .....	26
Двухмерные аналоги решений ОЗСГ на экстремальных классах .....	198	Информационная модель .....	21
Денудации процесс .....	63	Итерационная регуляризация .....	100

Итерационные методы решения ОЗСГ на экстремальных классах .....	199	Локальное нарушение симметрии.....	269
Итерационный процесс.....	77	Лучевая теория.....	56
Итерационный процесс минимизации невязки.....	186	Матрица Гесса.....	264
Калибровочное поле симметрии.....	271	Матрица Невырожденная .....	210
Калибровочно-эквивалентные объекты связанности .....	272	Матрица Нормальная .....	210
Калибровочные поля для волнового уравнения .....	282	Матрица Симметричная.....	210
Калибровочные преобразования.....	272	Матрица Уитарная.....	210
Квазиобращение .....	91	Матрица Эмитова .....	210
Квазирешение .....	74	Матрица Ортогональная .....	210
Квантор всеобщности .....	217	Матрица положительно полуопределенная.....	210
Квантор существования.....	218	Метод комплексных минимальных корректив.....	142
Кинетическая энергия .....	261	Метод Маккварта.....	133
Класс единственности.....	73	Метод минимальных корректив.....	141
Класс смежности .....	71	Метод последовательных приближений .	216
Класс эквивалентности .....	73	Метод простой итерации.....	216
Классы смежности.....	232	Метод регуляризации Тихонова.....	93
Ковариантное дифференцирование.....	277	Метод эволюционно-динамического продолжения .....	144, 157
Ковариантные векторы .....	275	Метод Лаврентьева.....	92
Коммутационное соотношение.....	251	Методы эволюционно-динамического продолжения для СГ.....	201
Компактное множество.....	226	Метрика .....	224
Компактное пространство .....	226	Метрический тензор .....	279
Комплексная интерпретация .....	38	Метрическое пространство.....	224
Комплексные модели .....	33	Множества.....	217
Конструирование решений ОЗСГ на экстремальных классах .....	194	Множество второй категории.....	219
Контравариантные векторы.....	275	Множество выпуклое .....	222
Корректно разрешимое уравнение .....	232	Множество нигде неплотное .....	219
Коэффициент вязкости .....	62	Множество сильно выпуклое .....	222
Коэффициент Ламэ.....	51	Множество первой категории.....	219
Коэффициент поглощения.....	255	Модели поля.....	33
Коэффициент Пуассона .....	51	Модели среды.....	31
Критериальные методы решения обратных задач .....	111	Модели физических полей.....	25
Критериальный подход.....	111	Модели эффективного параметра .....	32
Критерий оптимальности .....	105	Моделирование .....	25
Лагранжева плотность .....	239	Моделирования динамики развития.....	143
Лагранжева плотность для волнового уравнения .....	267	Модель .....	20
Лагранжева плотность для уравнения Лапласа .....	266	Модель вязких течений .....	62
Линеаризация.....	72	Модель геофизического метода .....	25
Линейная система.....	221	Модель поглощения .....	45
Линейное векторное пространство .....	221	Модель связей.....	34
Линейное векторное пространство $N$ -мерное.....	205	Модель эволюции структурных элементов.....	146
Линейное метрическое пространство.....	224	Модуль всестороннего сжатия .....	51
Линейное нормированное пространство.....	225	Модуль непрерывности.....	68
Линейное подпространство .....	221, 222	Модуль Юнга .....	51
Линейный оператор из ЛНП в ЛНП .....	208	Мультипликативная операция.....	222
		Наблюдаемые .....	25
		Нарушение симметрии для уравнения Лапласа .....	283
		Невязка.....	74



Некорректность ОЗГ .....	168	Ошибка данных .....	88
Неоднородность среды (нарушение симметрии) .....	268	Параметр регуляции .....	92
Непрерывная группа .....	247, 249	Параметр релаксации .....	125
Непрерывное преобразование .....	220	Параметр релаксации для ОЗГ .....	187
Непрерывность оператора прямой задачи гравиметрии .....	159	Параметр релаксации для ОЗСГ .....	200
Неравенство Гельдера .....	206	Плоская волна .....	55
Неравенство треугольника .....	206	Плотно разрешимое уравнение .....	232
Неравенство Юнга .....	237	Плотностная граница .....	42
Неравенство выпуклости для $A_{II}$ .....	162	Плотностная модель .....	39
Норма .....	225	Погрешность алгоритма .....	89
Норма матриц .....	210	Подгруппа $O(4)$ .....	248
Нормальная разрешь .....	242	Подгруппа $SO(4)$ .....	248
Нормальное множество .....	220	Подгруппа $T(4)$ .....	248
Нормы линейного пространства $R^N$ .....	206	Подгруппа трехмерных вращений .....	250
Нулевое приближение .....	106	Полное нормированное пространство .....	225
Нулевое приближение .....	110	Полный класс .....	119
Область определения .....	220	Положительный оператор .....	92
Обработка геофизических данных .....	28	Полугруппа .....	249
Обработка геофизических данных .....	28	Поперечные смещения .....	52
Обратная задача .....	43, 66	Построение изображений .....	35
Обратные задачи .....	29	Построение решений ОЗГ .....	184
Обратные задачи комплексной интерпретации .....	135	в спектральной форме .....	184
Обращение физико-геологических зависимостей .....	29	Построение решений ОЗГ на основе итерационных процессов .....	187
Обращение физико-геологических зависимостей .....	29	Построение содержательных моделей .....	36
Объект связности, калибровочно-эквивалентный нулю .....	276	Почти идеальный класс .....	119
Объекты связности .....	270	Почти идеальный экстремальный класс .....	125
Ограниченное преобразование .....	227	Почти идеальный экстремальный класс распределений плотности в пространстве $L_p(V)$ .....	171
Однозначно разрешимое уравнение .....	232	Правило Лагранжа .....	240, 241
Однородная среда (определение через симметрии) .....	268	Правило суммирования .....	209
Однородное преобразование .....	227	Правило суммирования Эйнштейна .....	248
Окрестность .....	220	Предкомпактное множество .....	226
Окрестность .....	225	Представление группы .....	252
Оператор кривизны для волнового уравнения (пример) .....	282	Преобразование производных (симметрии) .....	269
Оператор проектирования .....	74	Преобразования дилатации .....	253
Оператор редукции .....	85	Преобразования Радона .....	47
Операторы кривизны .....	273	Приближенные данные задачи .....	88
Операция эквивалентного перераспределения .....	172	Принцип двойственности .....	218
Определитель матрицы .....	210	Принцип наименьшего действия .....	261
Оптимальность по порядку .....	89	Принцип невязки .....	96
Оптимальный метод .....	89	Принцип обобщенной невязки .....	96
Ортогональное дополнение .....	230	Принцип Ферма .....	57
Отделимое множество .....	220	Проблема параметризации .....	103
Относительно компактное множество .....	226	Продольные смещения .....	52
		Производная Фреше .....	240
		Производящий оператор .....	249
		Прообраз .....	220
		Пространства Банаха( банаховы пространства) .....	225
		Пространства с афинной связностью .....	274

Пространство $L_p(V)$ .....	235	Спектральная форма решения ОЗСГ на экстремальных классах .....	195
Равномерно выпуклые пространства.....	236	Спектральный радиус.....	212
Разложение единицы.....	214	Спектры гармонических решений ОЗГ ...	167
Разложение решений по собственным элементам.....	214	Стабилизирующий функционал.....	94
Разложения единицы.....	92	Статистические связи.....	34
Размерность линейного векторного пространства .....	205	Структурная геодинамическая модель.....	62
Расширение оператора.....	230	Структурная модель .....	42
Расширенная обратная задача .....	66	Структурно-плотностная модель .....	42
Регуляризатор операции дифференцирования.....	99	Структурные константы алгебры Ли.....	251
Регуляризованные приближения .....	86	Существование решения.....	68
Регуляризирующее семейство.....	88	Сходящаяся последовательность .....	225
Регуляризирующий алгоритм.....	88	Тензор .....	275
Реконструкции плотностного распределения.....	109	Тензор деформаций .....	50
Рефлексивное пространство .....	228	Тензор напряжений .....	50
Решение ОЗГ в $\mathfrak{K}((E_0 K^*, K, C)$ .....	181	Тензор Римана-Кристоффеля.....	278
Решение ОЗГ из $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$ .....	178	Тензор Ричи.....	278
Сбалансированные модели (принцип) .....	141	Теорема Банаха-Алаоглу.....	229
Сдвига преобразования.....	153	Теорема Бэра-Хаусдорфа.....	225
Сдвиговая компонента эволюции.....	151	Теорема двойственности.....	244
Сейсмическая томография.....	58	Теорема Новикова .....	166
Сильная топология .....	228	Теорема о гомеоморфизме.....	226
Символ Кронекера.....	248	Теорема о ядре .....	233
Система уравнений Эйлера (для движения).....	263	Теорема Рисса о выпуклости.....	236
Скобка Пуассона .....	251	Теорема Рисса .....	227
Скоростная модель среды.....	57	Теорема Шура .....	212
Скорость распространения поперечных волн.....	53	Тождество Якоби .....	251
Скорость распространения продольных волн.....	53	Томография .....	45
Скрытая эквивалентность.....	68	Топологическая аддитивная группа.....	221
Слабая топология .....	228	Топологическое пространство.....	219
Слабо вполне непрерывный оператор.....	233	Удельная теплопроводность.....	60
Слабозамкнутый оператор.....	233	Удлиненная производная.....	271
Слабо непрерывный оператор.....	233	Упорядоченное множество .....	218
Смысл выражения $e^{-At}$ .....	256	Уравнение непрерывности.....	61
Собственные числа.....	211	Уравнение поля смещений .....	52
Современная геодинамика.....	63	Уравнение Эйлера.....	240
Содержательные модели.....	32	Уравнения движения в гамильтоновой форме .....	265
Соответствие экстремальных классов в $S$ и $L_2$ .....	181	Уравнения Навье-Стокса .....	61
Сопряженное пространство.....	227	Уравнения поля в среде с локально нарушенной симметрией.....	274
Сопряженный оператор .....	231	Уравнения Фредгольма.....	60
Сопряженный оператор для конечного множества точек.....	167	Уравнения Эйконала .....	56
Составные критерии оптимальности.....	135	Условие калибровки .....	149
Спектральная норма.....	213	Условия корректности по Адамару .....	68
		Условия корректности.....	66
		Условно-корректная задача .....	85
		Устойчивость квазирешений.....	74
		Устойчивость решения.....	70
		Фактор пространства .....	71, 232
		Физическая модель .....	23
		Фильтр Рамачандрана и Лакшминараянана.....	48

Формально эквивалентные модели .....	33	Экстремальные классы.....	110
Фундаментальная последовательность .....	225	Экстремальные классы в задачах	
Функция Гамильтона .....	264	структурной гравиметрии .....	188
Функция Лагранжа .....	129	Экстремальные классы	
Функция правдоподобия.....	105	для распределения .....	169
Характеристика $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$		Экстремальные классы ОЗГ в равномерной	
для СГ .....	190	метрике .....	176
Характеристика экстремального класса		Экстремальные классы ОЗГ в Соболевских	
$\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$ СГ .....	191	пространствах.....	174
Частично упорядоченное множество .....	218	Экстремальные классы ОЗГ, связанные с	
Частные решения ОЗГ.....	183	оператором Лапласа .....	173
Число обусловленности .....	215	Экстремальные свойства собственных	
Эволюционирующие границы		чисел.....	213
(уравнение).....	147	Экстремальный класс .....	112, 118
Эволюционно-динамический анализ.....	38	Экстремальный класс (простейшее	
Эволюционно-динамическое		определение) .....	107
продолжение .....	145	Экстремальный класс ОЗГ – $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$	177
Эволюционные уравнения.....	254	Экстремальный класс ОЗГ в $L_1$ .....	175
Эволюционный оператор.....	255	Эталонирующие преобразования.....	26
Эволюционный параметр .....	147	Эффективные модели.....	32
Эвристические связи .....	34	Эффективные параметры	
Эквивалентное перераспределение .....	172	неоднородности среды .....	268
Экспонента от оператора .....	150	Эффекты скрытой эквивалентности .....	36
Экстремальные классы СГ		Эффекты эквивалентности .....	36
$\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$ .....	190	Ядро оператора .....	227
Экстремальные задачи .....	238		

## Список использованных обозначений

Все обозначения определяются там, где они впервые используются. Однако для удобства наведения справок ниже приводится их основная сводка. Определение понятий в тексте помечено курсивом.

В каждом разделе геофизики и математической физики при введении обозначений есть свои традиции. В теории упругости  $\sigma$  обозначают упругую константу, в электротехнике – проводимость, а в гравиметрии – плотность. Ту же плотность в теории распространения волн обозначают  $\sigma$ , а скорость – символом  $V$ . Но этим символом обозначают и область определения функции пространственных переменных, также как и сами пространственные переменные обозначают перечнем координат, символами с индексами и просто буквой  $v$ . Поскольку в этом пособии собраны сведения из различных разделов и предполагается, что читатель более подробные сведения будет получать из специальной литературы, где сильны упоминавшиеся специфические традиции в обозначениях, мы их по возможности придерживаемся. При этом каждый раз, где это может привести к разночтениям, это оговаривается, что позволяет избежать путаницы.

Пространственные координаты чаще всего обозначаются символами  $x, y, z$  либо  $x_1, x_2, x_3$ . Для обозначения всей совокупности пространственных переменных используется либо символ  $v$ , либо  $\mathbf{x}$ , либо  $x$ . Все определяется текущими потребностями, удобствами письма и каждый раз оговаривается. Для времени используются обозначения  $t$  либо  $x_0$ .

$\gamma$  – гравитационная постоянная =  $6,674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ ;

$\in$  – принадлежит;

$\bar{\in}$  – не принадлежит;

$\cap$  – пересечение;

$\bigcap_{i=1}^n B_i$  – пересечение множеств  $B_i, I = 1 + n$ ;

$\subset$  – включение;

$/$  – дополнение;

$\forall$  – квантор всеобщности;

$\exists$  – квантор существования;

$\overline{M}$  – замыкание множества  $M$  (если не оговорено противное);

$\text{Im } A$  – множество значений отображения  $A$ ;

$A(N)$  – образ множества  $N$  при отображении  $A$ ;

$DA$  – область определения отображения  $A$ ;

$\text{Ker } A$  – ядро отображения  $A$ : ( $\text{Ker } A = \{x \in DA : Ax = 0\}$ );

$\Omega_y(A) = \{x \in D(A) : Ax = y\}$  – класс эквивалентности для отображения  $A$ ;

$A'(x)$  – производная Фреше оператора  $A(x)$  в точке  $x$ ;

$I$  – единичный оператор. Иногда используется запись  $E$ . В последнем случае это связано с традициями обозначений в теории матрицы;

$\oplus$  – прямая сумма;

$\sup_{x \in M} \{f(x)\}$  – верхняя грань значений выражения  $f(x)$  по всем  $x$ , принадлежащим множеству  $M$ ;

$\sup_{x \in M} \text{vrai} |f(x)|$  – существенная верхняя грань (верхняя грань по множеству  $M$ , за исключением

подмножества меры нуль);

$\inf_{x \in M} \{f(x)\}$  – нижняя грань значений выражения  $f(x)$  по всем  $x$ , принадлежащим множеству  $M$ ;

$X^*$  – сопряженное к  $X$  пространство;

$\langle x^* | x \rangle_x$  – значение линейного ограниченного функционала, определяемого элементом  $x^*$  из

двойственного к  $X$  пространства на элементе  $x \in X$ ;

$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ;

$[\mathbf{x} | \mathbf{y}]$  – векторное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ;

$\|x\|_X$  – норма элемента  $x$  в пространстве  $X$ ;

$N^\perp$  – аннулятор множества  $N$  (ортогональное дополнение в случае гильбертова пространства);

$[X \rightarrow Y]$  – множество линейных замкнутых операторов из  $X$  в  $Y$ ;

$A^*$  – оператор, сопряженный к  $A$ ;

$A^{-1}$  – обратный к  $A$  оператор;

$\omega(A, M, X, Y) = \sup_{x_1, x_2 \in M} \frac{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X}$  – модуль непрерывности оператора  $A$ , действующего

из  $M \subseteq X$  в  $Y$ ;

$\omega(A^{-1}, M, X, Y) = \sup_{x_1, x_2 \in M} \frac{\|x_1 - x_2\|_X}{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y}$  – модуль непрерывности обратного оператора к  $A$  в норме

пространств  $X, Y$  на множестве  $M$ ;

$L_2(V)$  – гильбертово пространство функций  $f(\mathbf{v})$ , ( $\mathbf{v} \in V$  – пространственная переменная) с нормой;

$$\|f(\mathbf{v})\|_{L_2(V)} = \|f(\mathbf{v})\|_2 = \left[ \int_V |f(\mathbf{v})|^2 d\mathbf{v} \right]^{1/2};$$

$C(V)$  – множество непрерывных в  $V$  функций с нормой:

$$\|f(\mathbf{v})\|_{C(V)} = \sup_{\mathbf{v} \in V} |f(\mathbf{v})|;$$

$C^r(V)$  – множество функций в  $V$ , непрерывных вместе со всеми своими частными производными до порядка  $r$  и с конечной нормой, определенной соотношением:

$$\|f(\mathbf{v})\|_{C^r(V)} = \sup_{\mathbf{v} \in V} \sum_{k=0}^n \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} f(\mathbf{v}) \right|, \mathbf{v} = \{x, y, z\};$$

$\sum_{(k)}$  – суммирование по всевозможным комбинациям индексов  $k$ , таких что:  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ ;

$k_1 + k_2 + k_3 = k$ ;

$C_0^\infty(V)$  – множество бесконечно дифференцируемых и непрерывных вместе со всеми своими производными функций, равных нулю, на границе области  $V$ ;

$L_p(V)$  – множество функций в  $V$  с конечной нормой:

$$\|f(\mathbf{v})\|_{L_p(V)} = \|f(\mathbf{v})\|_p = \left[ \int_V |f(\mathbf{v})|^p d\mathbf{v} \right]^{1/p};$$

$$\|f(\mathbf{v})\|_\infty = \|f(\mathbf{v})\|_{L_\infty} = \sup_{\mathbf{v} \in V} |f(\mathbf{v})|;$$

$$\|f(\mathbf{v})\|_1 = \|f(\mathbf{v})\|_{L_1(V)} = \int_V |f(\mathbf{v})| d\mathbf{v};$$

$\|A\|_{p,q}$  – норма оператора  $A$ , действующего из  $L_p$  в  $L_q$ ;

$X \setminus M$  – фактор-пространство пространства  $X$  по подпространству  $M$ ;

$[X]$  – классы смежности (элементы фактор-пространства);

$sign$  – функция знака:

$$sign f(x) = \begin{cases} 1: f(x) > 0, \\ 0: f(x) = 0, \\ -1: f(x) < 0; \end{cases}$$

$E_\sigma$  – разложение единицы оператора  $A$ ;

$E_\sigma$  представляет собой для каждого значения параметра  $\sigma$  оператор проектирования на подпространство, образованное из собственных функций, соответствующих собственным значениям, не превосходящим величины  $\sigma$ . Если  $A$  – линейный, ограниченный, самосопряженный и положительный оператор, то:

$$Af(x) = \int_0^{\|A\|} \sigma \cdot dE_\sigma(x);$$

$W^r(v)$  – соболевское пространство образованное пополнением  $C_0(V)$  по норме:

$$\left\{ \int \sum_{V=0}^r \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} f(V) \right|^p dV \right\}^{1/p};$$

$l_p^n$  – множество числовых последовательностей длины  $n$  с нормой:

$$\|\vec{a}\|_{l_p^n} = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p};$$

$$R^n = l_2^n;$$

$l_p$  – множество последовательностей  $\{a_i\}$  из бесконечного числа элементов, сходящихся относительно нормы

$$\|\vec{a}\|_{l_p} = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} < \infty;$$

$P_Y(N, y)$  – операция проектирования элемента  $y \in Y$  на множество  $N \subseteq Y$  в норме пространства  $Y$ ;

$P(N, y)$  – то же, что и  $P_Y(N, y)$  при ясном из контекста виде пространства  $Y$ ;

$P_X(N, M)$  – образ множества  $M$  при проектировании на множество  $N$  в норме пространства  $X$ ;

$P(N, M)$  – то же, что и  $P_X(N, M)$  при ясном из контекста виде пространства  $X$ ;

$P_V(f(x))$  – оператор проектирования функции  $f(x)$ , имеющей носитель  $V_1$ , на функцию с носителем  $V \subseteq V_1$ ;

$mes(V)$  – мера множества  $V$  (площадь, объем);

$E_-$  – область нижнего полупространства ( $z > 0$ );

$E_0$  – горизонтальная плоскость  $z = 0$ ;

$E_+$  – верхнее полупространство ( $z < 0$ );

$\Pi$  – горизонтальная полоса в  $E_-$ ;

$\mathfrak{K}(A, F, X)$  – экстремальный класс. Символ используется для обозначения полных или идеальных экстремальных классов;

$\mathfrak{K}(A, F, X)$  – почти идеальный экстремальный класс;

$\mathfrak{K}(*, F, X)$  – идеальные экстремальные классы распределения плотности;

$\mathfrak{K}(*, F, X)$  – почти идеальные экстремальные классы распределения плотности;

$\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, Z)$  – экстремальные классы для плотностных границ;

$\chi_M(x)$  – характеристическая функция множества  $M$ :

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in M, \\ \infty & \text{при } x \notin M. \end{cases}$$

$[f(x, y, z)]_{x,y}^\wedge$  – прямое преобразование Фурье функции  $f(x, y, z)$  по переменным  $x, y$ ;

$[f(\omega, \nu)]_{\omega, \nu}^{-}$  – обратное преобразование Фурье функции  $f(\omega, \nu)$  по переменным  $\omega, \nu$ .

Если функция  $\phi(\mathbf{x})$  зависит от координат  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ , то для  $\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}$  используется сокращенная запись  $\phi(\mathbf{x})_{,i}$ .

$\Delta$  – оператора Лапласа, имеющий в прямоугольной декартовой системе координат вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$\nabla$  – оператор векторного дифференцирования;

$$\nabla f(x) = i \frac{\partial}{\partial x} f(x) + j \frac{\partial}{\partial y} f(x) + k \frac{\partial}{\partial z} f(x) = \text{grad } f(x).$$

ОЗ – обратная задача;

ОЗГ – обратная задача гравиметрии;

ФГМ – физико-геологическая модель;

СГ – структурная гравиметрия;

ОЗСГ – обратные задачи структурной гравиметрии.

## Введение

Интерпретация геофизических данных насковозь пронизана понятием модели. Это понятие столь часто и по разному поводу используется, что потеряло свое однозначное определение. Модель понимается как наше представление об окружающем мире, и смысл, вкладываемый в это понятие, столь же разнообразен, как и окружающий мир. В этом определении самое важное, видимо, то, что всякое представление о каком-либо предмете – это всего лишь субъективная модель этого предмета. Отсюда и вывод – познание невозможно вне введения моделей. Но для количественных определений такая широта вредна. Необходимо соответственно рассматриваемым задачам сузить это понятие, выявив его конструктивные и важные для построения математической теории интерпретации геофизических данных компоненты. Понятие модели может относиться к изучаемой среде, геофизическому полю, с помощью которого эта среда изучается, и, наконец, связи между средой и полем. Извлечение информации из геофизических данных есть тоже модель. Но эта модель особого сорта. Она отражает используемый метод и характер извлекаемой информации. Конкретизация понятия модели относится к объекту описания. Описывается среда, дается описание поля и связи между моделями среды и поля, дается описание процессу извлечения информации. Далее, свойство модели – это, конечно, ее более простой, чем реальность, характер. Да и сама реальность, доступная размышлению над ней, – это также всего лишь модель. В этой связи для каждой из объектных моделей могут быть введены многочисленные конкретизации, отображающие желаемую для изучения объекта сторону. Модели вводятся для того, чтобы изучить конкретные свойства. Когда они изучены, следует без сожаления переходить к новой модели, отражающей иные свойства, но неизбежно также неполной. Однако в методах интерпретации геофизических данных используемые модели – это не философские понятия. Они носят конкретный конструктивный характер и часто определяют самую возможность постановки интерпретационных задач и их математические свойства. Более того, сам процесс извлечения информации из геофизических данных – это процесс взаимной увязки моделей среды, поля и связей. Поэтому он основан на информационной модели геофизики и является моделью извлечения информации. Задачам реконструкции тех либо иных моделей среды по имеющимся моделям поля и связям между ними соответствуют конкретные интерпретационные уровни – модели извлечения информации из геолого-геофизических данных. В этой ситуации различным задачам геофизической интерпретации сопоставляются преобразования из конкретных уровней информационной модели геофизики.

Постановка интерпретационных задач состоит в определении моделей для изучаемой среды, модели для имеющегося поля и модели связи между этими объектами. Далее следует по двум последним моделям выделить элемент из первой. Это общая формулировка, и она имеет многочисленные свои характерные черты в конкретных задачах. При этом различие в формах записи конкретных соотношений связи, типе используемых моделей оставляет неизменными эти элементы интерпретационной модели. Для каждого из метода задача геофизической интерпретации имеет свой математический образ: задано поле  $u(s)$  из класса возможных, определен класс моделей для характеристики свойств среды – это множество  $M$ , и конкретный элемент этого множества, конкретизирующий изучаемый объект, обозначается  $x$ . Задано правило  $A$ , связывающее элементы из  $M$  и  $u(s)$ . Это правило записывается так:  $Ax = u(s)$ . Следует по известному  $u(s)$  и «оператору»  $A$  реконструировать  $x \in M$ . Такова общая задача. Она возникает при обработке данных, она же возникает и при реконструкции содержательных физико-геологических моделей. Однако за этой общностью стоят существенные особенности при переходе к конкретным – содержательным вопросам. Один из этих вопросов состоит вот в чем. Модель для характеристики среды вводилась для того, чтобы с ее помощью описать, аппроксимировать изучаемый объект, и это означает, что в  $M$  есть подходящий для этого эле-



мент. Будет ли «похож» на него тот, который найден в результате реконструкции, и что означает «похож»? Ответ далеко не очевиден.

Без существенных изменений задача реконструкции элемента  $x \in M$  по условию  $Ax = u(s)$  возникает и в физике при обработке экспериментальных данных и имеет различные названия. Она называется обратной задачей, задачей редукции измерений. Эта задача относится к числу задач обработки данных, в отличие от интерпретационных задач, где проявляются более тонкие и сложно контролируемые эффекты. Ей посвящена обширная литература. Главная проблема, связанная с ее решением, состоит в том, что из-за ошибок во входных данных и субъективизма в выборе моделей ее решение может просто не существовать. Далее это решение может оказаться не единственным. И это последнее – характерная черта интерпретационных задач геофизики. Но даже если удастся обойти эти две трудности, может случиться так (и случается чаще всего), что небольшие погрешности в исходных данных влекут за собой несоизмеримо большие ошибки в результате реконструкции. Это явление называется неустойчивостью решения, а все в целом (несуществование, неединственность, неустойчивость) и каждое по отдельности – некорректностью. Что касается существования, то эта трудность обходится проще всего. Достигается это просто заменой в какой-то мере формального требования  $Ax = u(s)$  на более мягкое – осмысленное с физической точки зрения: разность между  $u(s)$  и  $Ax$  для искомого элемента должна достигать наименьшего возможного значения. Этот результат уже нельзя назвать решением в строгом смысле. Он служит квазирешением – т.е. почти решением. Это лучшее, что можно сделать, и мы это делаем. Возникает теперь другой вопрос – вопрос о единственности и устойчивости обратной задачи. Поскольку связи между моделями среды и поля определены операторами  $A$ , а последние в качестве своего фундамента имеют уравнения математической физики, то исследование свойств корректности постановки обратных задач включает в себя исследование свойств устойчивой и однозначной разрешимости соответствующих уравнений математической физики. Именно включают в себя, а не исчерпываются этим. Оказывается, что даже в таком идеализированном случае уравнений математической физики, идеально определенных данных обратные задачи оказываются и неустойчивыми, и чаще всего имеющими неединственное решение. Таково положение дел в физике при обработке экспериментальных данных, для которых и развиты в основном методы решения некорректных задач. Однако интерпретационные задачи геофизики имеют свою особую специфику. Здесь есть принципиальные отличия от задач физики, да и от задач геофизики, связанных с обработкой данных. Этой особенностью служит, с одной стороны, неединственность их решения в достаточно общей постановке и сложноформализуемая дополнительная информация об искомом решении, призванная компенсировать эффект неединственности, – с другой. При этом неединственность решения проистекает не только из неединственности решений соответствующих фундаментальных уравнений, что характерно и для уравнений математической физики. Таковы, например, обратные задачи теории потенциала. Она возникает также и из специфики соотношений между масштабами изучаемых объектов и допустимыми масштабами и характером систем наблюдений даже при условии, что соответствующие фундаментальные уравнения однозначно разрешимы, если разрешимы вообще. Мы не можем уйти от дискретного характера измерений в относительно небольшом числе точек на небольшой базе, определенной измерительной установкой. Соотношение объект изучения – измерительный прибор оказывается принципиально отличным от того, что формулируется в теоремах единственности, где должны быть заданы непрерывные данных «от минус до плюс бесконечности». Мы не в состоянии точно учесть влияние целого ряда факторов, своих для каждого метода, но одинаково фатальных для свойств решаемой задачи. Таковы влияние рельефа, незнания физических параметров поверхностных участков. Все это влечет дополнительную неопределенность в решении задач реконструкции модели среды и делает еще более определяющим, выдвигает на передний план влияние на свойства решений особенностей используемых моделей и принципов, положенных в основу реконструкции. Одним из наиболее значимых отрицательных эффектов, возникающих в связи с неединственностью решений исходной задачи, служит *эффект скрытой эквивалентности*. Это специфический для геофизики эффект, и его надо обязательно учитывать при осмыслении ре-

зультатов. О нем уже упоминалось, и суть его состоит в том, что получаемое единственное и, возможно, даже устойчивое квазирешение на  $M$  может оказаться приближением не к тому, под что строился класс  $M$ , а к чему-то эквивалентному по полю, но бессмысленному по своим содержательным, прежде всего, физико-геологическим свойствам. Это может произойти и происходит за счет того, что  $M$  позволяет этот эффективный, эквивалентный элемент аппроксимировать (т.е. приблизить) еще лучше, чем тот, на который мы рассчитывали. Это может быть совершенно неожиданным и побочным эффектом. Но самое печальное состоит в том, что в значительном числе случаев этот эффект не контролируем.

Решение интерпретационных геофизических задач происходит в условиях «проклятия эквивалентности» – эквивалентности явной или скрытой. В этой ситуации не менее важным, чем формирование модельных представлений, является использование принципов извлечения информации. Принцип квазирешений на множестве, обладающем свойством единственности решения, имеет в качестве ограничения возможные эффекты скрытой эквивалентности. Недостаточность принципа квазирешений для интерпретационных геофизических задач вынуждает к введению иных подходов. Важнейшие из них состоят в дополнительном введении критериев, характеризующих свойства допустимых моделей с точки зрения их соответствия имеющимся комплексам геолого-геофизических сведений об изучаемом объекте. Эта последняя информация может быть двух видов.

Во-первых, это система предпочтений (термин В.Н. Страхова), отражающая информацию относительно состояния изучаемого объекта. Эта система предпочтений имеет вид критерия оптимальности – вычисляемого значения качества той либо иной модели. Например, в качестве такого критерия может выступать критерий максимума меры подобия между изучаемым объектом и некоторыми эталонами. Другим критерием может служить требование минимальности корректив, которые следует внести в некоторую заданную, известную модель среды. Этот критерий легко обобщается на случай, когда коррективы допустимо вводить только в выделенных частях модели, а на допустимых коррективах определена система «предпочтений». Эти методы имеют одно общее начало – критериальный принцип доопределения в постановке обратных задач. Конечно, каждый вид критерия оптимальности порождает свои свойства в решении также, как отсутствие критерия порождает эффект скрытой эквивалентности. Однако эти свойства определены, и процесс управляем. Вопросы этого направления разбираются в гл. 5.

Иной вид информации о модели, выражающий ее приемлемость или неприемлемость, – это эволюционно-динамическая информация. Она представляет собой совокупность предположений и гипотез о схеме формирования изучаемого объекта. Отражает его генезис и выражается в виде принятия эволюционных законов, которым подчинена модель – современное состояние есть конечное значение в этой эволюционной цепочке. Оно должно быть введено из нее при соответствующем подборе геодинамических параметров, управляющих процессом эволюции. Эти последние параметры могут быть связаны с моделями наблюдаемых физических полей, и вся система оказывается вполне определенной. По сути, это та же упоминавшаяся выше система предпочтений, но порожденная соответствием реконструируемой модели явно сформулированным эволюционным законам формирования и развития изучаемого геологического объекта. Конечно, говоря о формулируемых эволюционных законах, следует учитывать два обстоятельства. Во-первых, сами законы носят приближенный характер. Во-вторых, даже в приближенном исполнении они пригодны лишь на определенной стадии развития объекта. Однако этот эволюционно-динамический принцип вплотную смыкает формализованные процедуры решения обратных геофизических задач и задач геологической интерпретации и тем самым обеспечивает включение в процесс решения обратных задач традиционно используемых геологом приемов. Геодинамические параметры, определяющие конкретный сценарий развития системы, известны весьма приближенно. С содержательной точки зрения включение эволюционно-динамических принципов в постановку обратных задач состоит в доопределении геодинамических параметров, контролирующей эволюцию системы условием пошагового уменьшения невязки между измеренным и моделируемым от эволюционирующей системы геофизическим полем. Результатом эволюции такой системы от некоторого начального положения оказывается модель среды, удовлетворяющая современному состоянию – заданным геофизическим полям.

Показательной задачей, хорошо демонстрирующей описываемые приемы, служит задача реконструкции плотностных моделей. Она интересна сама по себе, так как плотностная модель среды является важной компонентой физико-геологической модели. Но есть и другие причины обращения к этой задаче. Математически эквивалентной постановке обратных задач гравиметрии служат задачи расчета напряженного состояния в массивах горных пород по данным наблюдаемых деформаций на дневной поверхности. В приближении Пуассона те же задачи возникают в магнитометрии, и к ним сводятся многие задачи электроразведки (естественное поле, поле постоянных токов). По сути, причиной тому служит распространенность в физических приложениях систем и полей, подчиняющихся эллиптическим уравнениям и, в частности, уравнению Пуассона. Решение обратных задач гравиметрии – весьма распространенная тема, и автору многократно доводилось слушать доклады начинающих исследователей, достаточно «просто расправляющихся» с этой задачей за счет использования современных мощных вычислительных средств. Однако есть фундаментальные проблемы, связанные с ее решением, обесценивающие получаемые скороспелые результаты. К сожалению, решение этих проблем, их анализ приведен в научной литературе двадцатитридцатилетней давности. Именно тогда свойства этой задачи были исследованы со всей основательностью и сделаны выводы о том, как недопустимо и как следует решать эту задачу. Эта литература оказывается скрытой завесой времени от современных молодых научных работников. Свойства задачи с тех пор не менялись и повторно их публиковать нет смысла. В учебной литературе это направление также не нашло должного отражения потому, что математическим проблемам при решении обратных задач геофизики посвящено крайне мало учебной литературы. По этой причине в гл. 7 кратко рассмотрена аналитическая теория гравиметрии как пример приложения описанной ранее теории.

Отдельно остановимся на Приложении 4, которое, по сути, есть обоснование нового направления исследований и приглашение заинтересовавшихся к участию в этих изысканиях. Основной задачей этих исследований служит создание методов построения эффективных моделей на основе трансформаций полей. Эффективные модели призваны отражать в некоторой интегрированной форме неоднородности среды, когда построение содержательных моделей затруднено.

Понятие однородности самым тесным образом связано с понятием симметрии. Однородность есть неизменность, инвариантность свойств среды при переходе от одной ее точки к другой – симметрия относительно координатных преобразований. Нарушение этой симметрии ассоциируется с неоднородностями, присущими среде. Изучение неоднородностей состоит в том, чтобы связать параметры неоднородности среды с наблюдаемым аномальным геофизическим полем. Для этого необходимо построить уравнения поля, в которые входили бы как параметры среды параметры нарушения симметрии. Так сконструированная параметризация и будет эффективной параметризацией среды.

Для построения уравнений, описывающих поведение поля в пространствах с локально нарушенной симметрией, следует неоднородности среды выразить через калибровочные компоненты, входящие в выражения для удлинённых производных и связанных с ними оператор кривизны.

# Глава 1. Модель геофизических исследований

## Введение

Интерпретация геофизических данных представляет собой завершающий и наиболее ответственный этап геофизических работ. Он направлен на максимально полное определение параметров изучаемого геологического объекта по измеренным геофизическим полям. Это может быть предварительная оценка параметров либо уточнение уже имеющихся данных. Это может быть определение либо оценка, с той либо иной достоверностью, некоторых осмысленных – содержательных величин таких, например, как глубины залегания, углы наклона структурных элементов. Такая информация необходима для формирования окончательных геологических построений. Это может быть и более неопределенное – «размытое» построение некоторых изображений, дающих представление об общих характеристиках изучаемого объекта. Например, построение трансформант поля для получения первых представлений о диапирах. Говоря об интерпретации, следует особо оговаривать ту задачу, которая решается. Если по геофизическим данным делается попытка реконструкции геологической модели среды, то речь идет о геологической интерпретации – геологическом истолковании данных. Однако, чаще всего реконструкции подвергается физическая модель и определению подлежат физические параметры. В этом случае следует говорить о геофизической интерпретации. Решение и той и другой задачи составляет содержание реконструкции физико-геологической модели среды и геолого-геофизической интерпретации данных. Диапазон конкретно возникающих задач и их разновидностей, особенностей и условий исключительно широк. Однако все они могут быть сведены в единую и

достаточно наглядную схему. Эта схема называется интерпретационной моделью геофизических исследований. Она основана на активном использовании понятий моделей среды, поля, связей между ними. Объекты – будь то геологические образования, физические поля или процессы, происходящие в недрах, могут изучаться лишь в той мере, в которой они представлены своими моделями. Модель представляет собой язык, на котором описываются и устанавливаются свойства объекта. Этот язык – язык математики, и рассматриваемые нами модели – это математические модели. Такое условие необходимо для того, чтобы в конечном итоге обеспечить возможность расчетов и количественной реконструкции величин параметров, присущих изучаемым объектам. Модель включает в себя параметры и связи. Параметры используются для описания свойств объекта. Связи определяют соотношения как между параметрами внутри одной модели, так и параметрами моделей других объектов из числа включенных в процесс изучения.



Рис. 1.1. Модель

ношения как между параметрами внутри одной модели, так и параметрами моделей других объектов из числа включенных в процесс изучения. В такой постановке сам объект (см. рис. 1) это некоторая скрытая сущность, которая представлена своей моделью – языком описания, параметрами и связями, в него входящими. Один и тот же объект может описываться различными моделями, также как одна и та же модель может относиться к различным по сути и даже природе объектам. Эта условность моделей по отношению к объектам, всегда более сложным и более полным, должна использоваться не для критики той либо иной модели за ее неполноту, а для ее включения в набор других, дополняющих и подчеркивающих иные свойства объекта моделей. Понятие модели – всеобъемлющее и всепроникающее. Но иногда, из соображений стилистики, мы опускаем это слово, когда и так понятно, что речь идет именно о модели. Совершенных и абсолютно полных моделей не существует. Для более полной характеристики объекта следует пользоваться системой моделей, каждая из которых отражает свои, специфические характеристики и в сравнении с другими отражает эти характеристики наиболее полно.

Интерпретационная модель геофизических исследований основана на ее информационной модели, представляющей собой систему взаимоувязанных объектов – используемых моделей среды, поля и связи между ними. Интерпретационная модель описывает процесс извлечения информации из геофизических данных и позволяет, с одной стороны, определить место каждого приема и метода в общем интерпретационном процессе – очертить его назначение, круг решаемых задач. С другой стороны, подобная классификация позволяет вычленить приемы и методы решения различного рода интерпретационных задач, обеспечив возможность решения новых уже отлаженными и развитыми средствами.

Во многих случаях эти приемы оказываются весьма близкими и подразделяются на небольшое число средств, направленных на решение определенного класса задач. Это технологические приемы. Таковы, например: методы решения некорректных задач, типа уравнений Фредгольма первого рода; методы анализа сигналов с целью аппроксимации, сжатия, оценивания, борьбы с помехами (связанные между собой вопросы); методы решения больших и сверхбольших систем линейных уравнений; методы линеаризации и др. Этот вычислительный математический инструмент создавался, прежде всего, для решения задач интерпретации физического эксперимента с его особенностями соотношения масштабов регистрирующих установок и изучаемого объекта, а также подлежащих определению параметров.

Особенностью именно геофизических измерений служит то, что измерительная аппаратура несравненно меньше размерами, чем изучаемый объект, с одной стороны, и этот объект не может быть вычленен из окружающей среды и желаемым образом подготовлен к измерению, с другой. Геофизические измерения всегда относятся к фрагменту – части объекта, находящейся во взаимодействии с другими частями, которое (взаимодействие) либо неизвестно, либо неконтролируемо, либо пренебрегаемо. Отсюда следуют особая роль дискретности измерений и связанные с этим проблемы. Они состоят в неоднозначности интерпретации, приближенном и весьма условном характере используемых уравнений связей между интерпретируемым полем реконструируемыми параметрами. В этой связи процесс реконструкции параметров среды должен сопровождаться очерчиванием тех условий, ограничений и области применимости для моделей связи, которые приняты в схемах реконструкции, и эти особенности модели должны учитываться при геологической и геолого-геофизической интерпретации данных. Отсюда, в частности, следует и то, что интерпретация данных одного и того же метода может быть основана на разных, а иногда и принципиально разных законах связи, положенных в основу. В этой ситуации следует не удивляться различиям и отвергать результаты, а, понимая их природу, использовать различия для получения информации о других свойствах объекта, отражаемых в иных его моделях – «объективизации» результатов интерпретации.

## 1.1. Информационная модель геофизических исследований

Информационная модель геофизических исследований представляет собой схему информационной зависимости между изучаемыми объектами, их моделями. Это своего рода граф, по которому информация об исходном – изучаемом объекте, трансформируясь и многоступенчато фильтруясь, доходит до того вида, который геофизик принимает за исходный, приступая к реконструкции модели изучаемого объекта. Эти взаимозависимости устанавливаются между моделями, объектами разного иерархического уровня. Информационная модель складывается из объектов двух типов: иерархически структурированные компоненты – объекты информационной модели и связи между ними. Иерархически структурированные компоненты (сверху вниз) информационной модели состоят из: геологической модели; физической модели; модели физических полей и наблюдаемых. Взаимозависимость между ними установлена: геолого-геофизическими связями; уравнениями математической физики; эталонирующими преобразованиями.

Схематично информационная модель может быть изображена так, как это показано на рис. 2. Следует иметь в виду, что любая схема продвижения информации от исходного объекта к наблюдателю весьма условна и отражает лишь общие закономерности, и именно поэтому это информационная модель, а не описание реального преобразования информации.

# ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ОБЪЕКТ



Геолого - геофизические связи

Физическая модель геологической среды



Уравнения математической физики

Модели физических полей



Эталонирующие преобразования

Наблюдаемые



Рис. 1.2. Информационная модель геофизических исследований

**Геологический объект** – предмет изучения в геологии. Это исходное и наиболее общее понятие. При изучении геологического объекта в целом необходимо охарактеризовать его компоненты – более узкие предметные области: тектонические, стратиграфические, литологические, геоморфологические, геодинамические и многие другие взаимосвязанные между собой свойства. Именно они, являясь самостоятельными объектами изучения, в целом со своими взаимосвязями образуют то большое и не вполне определенное понятие, которое называется «геологический объект». Строго говоря, компоненты геологического объекта должны называться его моделями – стратиграфической, динамической, литолого-фациальной и так далее. Но каждая из этих моделей весьма сложна, допускает множественность языков описания (т.е. моделей во введенном выше понимании), присущих этому языку параметров, характеризующих модель (в узком понимании), и связей между ними и параметрами других моделей. Именно поэтому эти укрупненные, но конкретные характеристики геологического объекта, являясь его моделями, сами служат объектами для следующего, более низкого этажа информационной модели.

Геологический объект, равно как и его компоненты (литологические, стратиграфические и другие), недоступен для непосредственного изучения геофизическими методами. Информация о них поступает только в той мере, в которой они связаны с физической моделью геологической среды – физическими параметрами. Следует понимать, что изменение литологической разновидности горных пород может отражаться в наблюдаемых физических полях – гравитационном, магнитном, волновом – лишь в той мере, в которой это изменение приводит к изменениям в физических свойствах пород, слагающих геологический объект – плотности, магнитной восприимчивости, скорости распространения упругих колебаний. Если различные литологические разности обладают тождественными физическими свойствами (из диапазона рассматриваемых), то они не различимы геофизическими полями и тождественны с точки зрения принятого комплекса геофизических методов. В этой связи следующим объектным этажом информационной модели служат физические модели геологической среды.

**Физическая модель геологической среды** – это модели свойств, непосредственно отражающихся в изучаемых физических полях. Также как для геологического объекта, определение которого осуществляется через предметные компоненты, так и для физической модели выделяются модели его содержательных свойств – плотностные, скоростные, геоэлектрические и так далее. Следует понимать, что физическое свойство, например плотность, на этом этапе информационной модели – это физический объект, а взаимоувязанные способ его описания – язык, используемые для этой цели параметры и их взаимосвязь определяют плотностную модель. Плотностных моделей, как и прочих других, может быть много. Они отличаются по языку описания и, как следствие, используемым параметрам, связям с другими параметрами. Например, в качестве плотностной модели может выступать функция пространственных переменных, значение которой в каждой точке есть плотность, присущая изучаемой среде в этой же точке. Другой плотностной моделью может выступать структурная модель, в которой используются границы раздела заданных сред, а параметрами служат значения глубин залегания границ в данной точке. Иная плотностная модель возникает при рассмотрении распределения некоторого интегрированного параметра, для которого указана его связь с гравитационным полем. И хотя этот параметр не является плотностью в ее обычном понимании, он характеризует именно плотностную модель.

**Геолого-геофизические связи** – это заданные отображения геологических моделей в физические. Собственно их присутствие делает возможным постановку вопроса о геологическом истолковании геофизических данных. Эти связи носят весьма разнообразный характер. Чаще всего это корреляционно-регрессионные зависимости между геологическими и геофизическими данными, петрофизические связи, установленные в лабораториях, экспертные заключения о принадлежности объекта, характеризующегося заданными свойствами определенному классу. Объективно дело должно выглядеть так, чтобы каждой геологической модели однозначно соответствовали конкретные физические модели. Практически возникающая ситуация, когда одному и тому же набору геологических параметров  $T = \{t^1, t^2, \dots, t^L\}$  соответствуют различные

значения физических параметров  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$ , приводит к общей зависимости вида:  $G(T, X) = 0$ .

Геологическому объекту обязательно присущи конкретные физические свойства, которые и делают его объективной реальностью. Однако несовершенство наших знаний приводит к тому, что используемые модели геолого-геофизических связей носят весьма расплывчатый, неопределенный характер и далеки от полных, исчерпывающих заключений. Так, например, попытка найти упругие свойства горных пород, исходя из их геологической модели, сталкиваются с серией проблем разномасштабности. Суть их состоит в следующем.

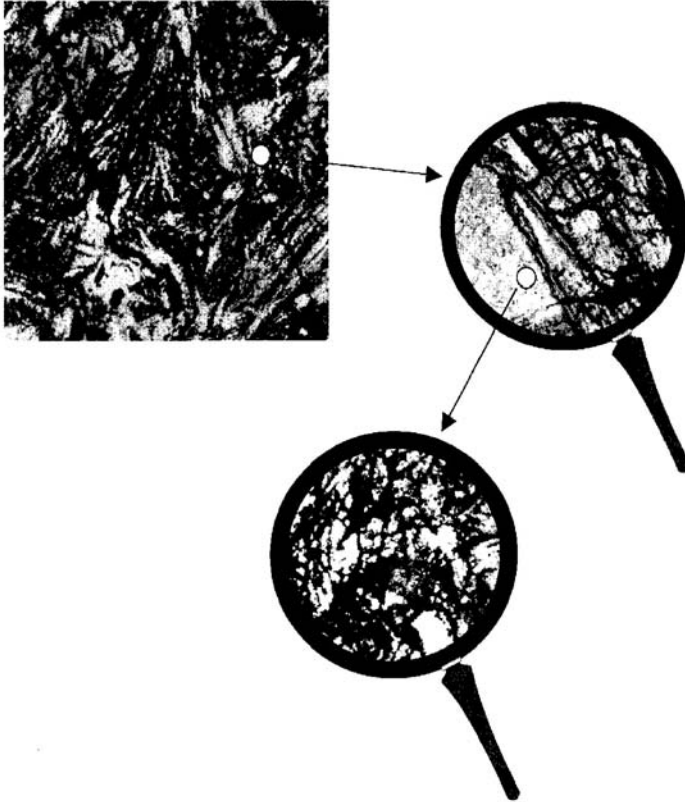


Рис.1.3. Фрактальная структура горных пород

Горные породы представляют собой сложные гетерогенные образования (рис. 3). Схематично их можно представить как совокупность гранул – зерен, относительно однородных по размеру, тем либо иным способом неплотно упакованных в пространстве пустоты, между которыми заполнены, вообще говоря, более равнофазным и более мелким по гранулометрическому составу веществом, куда включаются каверны, трещины, поры, заполненные флюидами, газами. В свою очередь, как гранулы, так и заполнитель могут представлять на следующем уровне масштаба такую же гетерогенную конгломератоподную среду из зерен и наполнителя и так далее до следующего масштаба рассмотрений. Таким образом, можно представить себе фракталоподобное строение горных пород.

Понятно, что усредненные свойства породы на каждом из масштабов будут не только различны, но принципиально различны. Зерна полевого шпата имеют совершенно иные физические характеристики, чем свойства скрепляющего его в песчанике цемента, а свойства печатника в целом оказываются еще иными. Также как гранит и гнейс имеют отличные свойства от свойств слагающих их элементов, и размер зернистости – один из факторов, влияющих на все физико-механические свойства. Необходимо учитывать, что физические свойства, которые по традиции, перекочевавшей из проблем механики сплошных сред, относятся к единице объема, а далее при построении дифференциальных уравнений движения относятся к точке в горной механике и зависят, помимо всего прочего, и от масштаба рассмотрений. Метровый куб гранита в своих проявляющихся, наблюдаемых свойствах совершенно иное, чем сантиметровый образец или километровые массивы. Также непросто рассчитать и скорость распространения упругих колебаний в сильно неоднородных, сложнопостроенных средах. На микроуровне иных чем соржнопостроенные, геологических объектов нет. Другой характерный пример дают уравнения для расчета электрических свойств горных пород, выводимые из рассмотрения породы как системы зерен, заданной формы и размеров, с определенной упаковкой (пористостью, проницаемостью зерен). Задавая литологический состав зерен с известными электрическими свойствами, характер и свойства цемента, характером (однофазный, многофазный), заполняя поры флюидами разной литологии (нефть, газ, вода) и минерализации, рассчитать макроэлектрические параметры очень непросто. Они также будут, помимо всего прочего, чувствительны к масштабам рассмотрений. Однако для конкретно геологических условий и масштабов те же связи, найденные методами корреляцион-



но-регрессионного анализа, носят достаточно простой, наглядный и конструктивный характер. Надо лишь не забывать об ограниченности области применения этих моделей и условиях их применения. Именно поэтому следует говорить не о самих связях, а об их моделях с ограниченной областью применимости.

**Модели физических полей** – это те объекты, которые доступны для наблюдения. И хотя измеряются чаще всего не сами поля, а лишь некоторые связанные с ними величины, этот объект занимает особо важное место. Моделью физического поля предопределена сущность используемого геофизического метода. Для гравиразведки – это чаще всего вертикальная производная гравитационного потенциала, для сейсморазведки по методу отраженных волн – это преимущественно кинематика – времена прихода отраженных волн. Для магниторазведки это может быть поле  $\Delta T$  в одних случаях и векторное поле горизонтальной и вертикальной компонент напряженности в других. Содержательный смысл модели физического поля определен используемым уравнением математической физики, которое устанавливает связь между физической моделью и моделью поля.

**Уравнения математической физики** – это условное название моделей тех связей, которые используются для расчета физических полей по известным физическим моделям. Они установлены для всех практически используемых в геофизике рациональных физических полей и имеют вид дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. Эта связь может быть определена в виде отображения “среды в поле” – распределения физических параметров в соответствующие им физические поля. Также как и для моделей геолого-геофизических связей истинные, правильные уравнения в определенных случаях могут быть чрезмерно сложны (например распространение волн в неоднородных средах) или даже неизвестны (уравнения переноса в мутных, рассеивающих средах). В этой связи используют упрощенные модели уравнений, и мера упрощения может оказаться неадекватной природе вещей. Например, используя в качестве упрощенной зависимости в гравиразведке корреляционную связь между глубиной залегания плотностной границы и величиной вертикальной производной гравитационного потенциала, мы тем самым выходим за границу природы вещей, поскольку такая связь неестественна, не отражает свойства гравитационного поля. Расчет физического поля на основе решения уравнения математической физики – исключительно важная и распространенная операция, имеющая специальное название – **моделирование**.

Модели физического поля, физические модели среды и уравнения математической физики образуют единый конгломерат – модель геофизического метода и в совокупности своей позволяют однозначно рассчитать модель поля по известной модели среды, т.е. решить прямую задачу. Модели физического поля – это те объекты, для которых строится процесс реконструкции модели физических параметров и, возможно, моделей геологических сред. Однако реально измеряемые – наблюдаемые величины могут отличаться, а иногда и весьма существенно, от теоретических, расчетных моделей физического поля. В этой связи их следует выделить в отдельный – низший этаж информационной модели.

**Наблюдаемые** представляют собой те параметры, которые реально измеряются геофизическим методом вместо соответствующих, желаемых – теоретических моделей физического поля. Природа наблюдаемых и их взаимосвязь с моделями физических полей весьма разнообразны. Это влияние калибровки приборов, как это происходит в методах радиоактивного каротажа, аппаратные влияния, связанные с передаточной функцией приборов, зоны малых скоростей, как это происходит в методах сейсморазведки и, прежде всего, в модификациях с невзрывными источниками возбуждения, дискретность самих измерений и эффекты, с этим связанные (появление зеркальных частот и т.д.). Это эффекты разновысотности и дискретности измерений на ограниченной базе наблюдений вместо непрерывно всюду заданного поля в гравиразведке и магниторазведке. Различия между моделями физического поля и наблюдаемыми могут включать в себя и более тонкие эффекты несовершенства теоретических представлений. Так, принимая, что измеряется аномальная компонента вертикальной производной гравитационного потенциала, и строя на этой основе методику расчета аномалии, допускается погрешность (пусть небольшая, но она есть), состоящая в том, что даже без учета всего прочего реально на измерительный прибор – гравиметр влияет не вертикальная, а отличающаяся от нее

нормальная компонента поля – по направлению нормали к уровенной поверхности силы тяжести, а не по вертикали, а отсюда следуют и поправки к способам вычислений аномалии. Перечень подобного рода отличий между наблюдаемой и моделью физического поля легко может быть продолжен за счет того, что наблюдаемые данные осложнены погрешностями разной природы. Это погрешности аддитивные – зашумление данных ошибками различной природы и интенсивности, погрешности аппаратные – мультипликативные, искажающие исходные данные, порой до полной неузнаваемости, способом, известным либо неопределенным. Таким образом, понятие наблюдаемая – это собирательный образ того отличия между тем, что мы реально имеем в качестве исходных данных, и тем, что бы мы хотели в их качестве иметь – под какую информацию строятся интерпретационные процедуры. В последнем примере, прежде чем строить интерпретационные процедуры, следует разобраться с тем, каким искажающим факторам подверглось поле, как его по возможности очистить от этих искажений, выделив полезные, интерпретируемые компоненты. Совокупность тех преобразований, которым подверглось исходное теоретическое поле до того вида, который дан в наблюдаемых, называется эталонирующим преобразованием.

**Эталонирующие преобразования** – это те преобразования, которые следует произвести с моделью физического поля, для того чтобы оно стало адекватным результатам измерений. Также как и для моделей геолого-геофизических связей, истинные, правильные уравнения для эталонирующих преобразований могут быть чрезмерно сложны или даже неизвестны. В этой связи используют упрощенные модели уравнений, следующие из представлений, положенных в основу модели регистрации сигналов. Если обозначить физическую модель поля  $u(s)$ , а наблю-

даемую обозначить  $\bar{u}(s_j)$ , где  $s_j$  – точка, в которой производится измерение, то можно предложить, например, следующую модель эталонирующего преобразования. На первом этапе поле  $u(s)$  подвергается мультипликативным, искажающим преобразованиям с помощью аппаратной функции  $K(s) : u(s) * K(s)$ . После этого на результат накладывается аддитивная помеха  $N(s) : u(s) * K(s) + N(s)$  и далее от полученного результата вычисляется система функционалов  $\Omega_j(u(s) * K(s) + N(s))$ , значения которых и принимаются в качестве величины наблюдаемых в точках  $s_j$ . Действие функционала может состоять, например, в расчете среднего значения  $u(s) * K(s) + N(s)$  в некоторой окрестности точки  $s_j$  с весами, зависящими от удаления усредняемых значений от точки усреднения. Однако сказанное – это только лишь поясняющий пример того, как может выглядеть модель эталонирующих преобразований. К эталонирующим преобразованиям может быть применен термин «редукция» в том понимании, что он учитывает реальные геолого-геофизические условия проведения работ и влияние на результат реального измерения большого числа искажающих геологических факторов, не входящих в уравнения математической физики. Эти искажающие факторы должны быть учтены при сопоставлении результатов моделирования с наблюдаемыми физическими полями.

Таким образом, информационная модель представляет собой систему взаимосвязанных моделей: геологической; физической; полевой и модели наблюдаемой. На верхнем этаже находится изучаемая геологическая модель, а точнее, система таких моделей, а на нижнем – информация, прошедшая ряд преобразований, об этом объекте, выраженная в наблюдаемых. Реконструировать по наблюдаемым параметры моделей физической и геологической – в этом суть интерпретационного процесса.

## 1.2. Интерпретационная модель геофизических исследований

Процесс интерпретации исходных геофизических данных – наблюдаемых – это процесс движения от низшего информационного уровня к высшему с использованием связей между разноуровневыми моделями объектов, составляющих информационную модель. Этот процесс

складывается из системы последовательных переходов от наблюдаемых к физическим полям, от них далее к физическим моделям и, в конечном итоге, к геологической модели. Каждый из этих переходов сопровождается процедурами решения задач реконструкции параметров верхнего информационного уровня по параметрам нижнего и заданным связям (рис. 4).

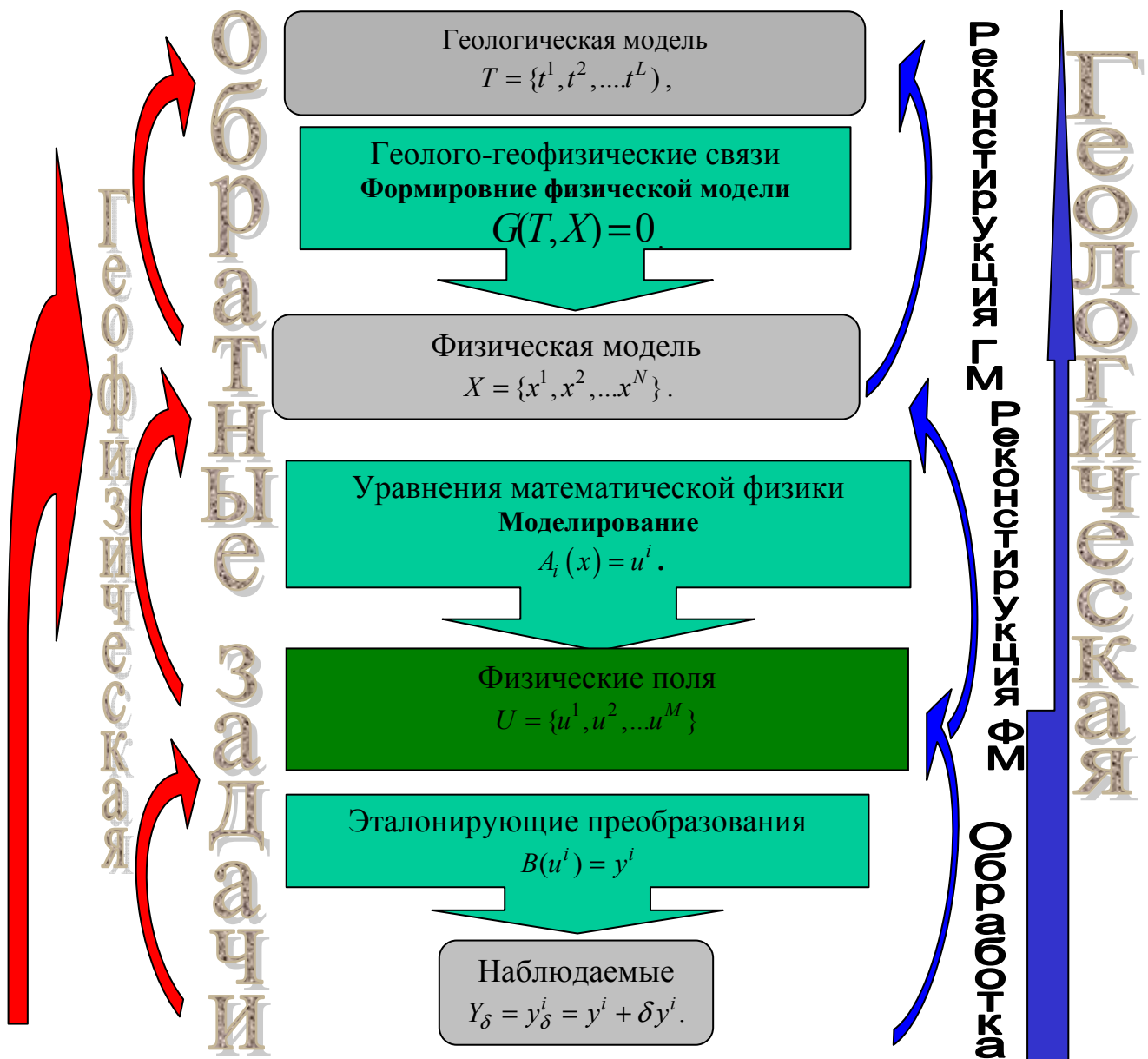


Рис. 1.4. Интерпретационная модель геофизических исследований

На одном конце информационной модели геофизики находятся геологические параметры  $T$ , подлежащие определению, а на другом – наблюдаемые  $y^i, i = 1, \dots, M$ , которые измерены, кроме того, с ошибкой  $\delta y^i$ , так что реально задано:  $y_\delta^i = y^i + \delta y^i$ .  $\delta y^i$  – это символическая запись погрешностей, осложняющих некоторые точно заданные данные и наличие которых неизбежно ведет к погрешностям в реконструкции как физической, так и геологической модели. Они выделяются из состава величин, входящих в наблюдаемые, для того, чтобы подчеркнуть дальнейшее поэтапное влияние погрешностей, возникающих при продвижении в процессе реконструкции геологической модели.

Интерпретация результатов геофизических наблюдений состоит в переходе от наблюдаемых  $y_{\delta}^i$  к геологическим параметрам  $T : y_{\delta}^i \Rightarrow T$ . Этот переход осуществляется поэтапно с помощью процедур, являющихся элементами интерпретационной модели. Они имеют содержательный смысл:

- обработка (реконструкция физических полей);
- реконструкция физических моделей;
- реконструкция геологических моделей.

Элементарные процедуры группируются в схемы геофизической и геологической интерпретации. Процедура они реализуются операциями, обратными к установленным связям, и составляют содержание постановок обратных задач. Набор элементов и процедур, обеспечивающий переход от нижних этажей информационной модели к верхним, и сопутствующие ему оценки возникающих погрешностей составляют содержание интерпретационной модели геофизики.

В соответствии с построенной информационной моделью этот переход предполагает:

1. Переход от наблюдаемых  $y_{\delta}^i$  к физическим полям  $U = \{u^1, u^2, \dots, u^M\} : y_{\delta}^i \Rightarrow u_{\delta}^i$ . Этот этап называется **обработкой геофизических данных** и реализуется оператором обработки  $B_{\delta}^{-1}(y_{\delta}^i)$ :

$$B_{\delta}^{-1}(y_{\delta}^i) = B^{-1}(y_{\delta}^i) + \delta B^{-1}(y_{\delta}^i). \quad (1.1)$$

Этот оператор применяется к исходным данным и включает в себя две компоненты. Первая  $B^{-1}$  – это некоторая операция, строго обратная к точному (но возможно неизвестному точно) эталонирующему преобразованию.  $B^{-1}B = I$  – единичное преобразование:  $B^{-1}B(Y) = Y$ .

Вторая компонента  $\delta B^{-1}$  ответственна за погрешности, связанные с отличием реально используемых процедур расчета от требуемых. Целью операции обработки является исключение разного рода погрешностей: аппаратных, калибровочных, а также приведение наблюдаемых к виду и форме, пригодных для последующего использования при восстановлении физических параметров – модели физического поля. В частности, оператор обработки может конструироваться из принципов компенсации мультипликативных (искажающих) и аддитивных помех. Характер обработки зависит и от того, какие модельные представления о характере физического поля, физических параметрах и их взаимосвязи на последующих этапах предстоит использовать. Процедура операция обработки – это решение обратной задачи для эталонирующего преобразования. Содержательно – это приближенная реконструкция модели физического поля, подлежащего последующему анализу.

Запись (1) является символической и предназначена для пояснения характера возникающих в процессе реконструкции моделей погрешностей. В линейном приближении к процедурам обработки можно записать:

$$\begin{aligned} u_{\delta}^i &= u^i + \delta u^i = B_{\delta}^{-1}(y^i + \delta y^i) = B^{-1}(y^i + \delta y^i) + (\delta B^{-1})(y^i + \delta y^i) = \\ &= B^{-1}(y^i) + B^{-1}(\delta y^i) + (\delta B^{-1})(y^i) + (\delta B^{-1})(\delta y^i). \end{aligned}$$

Откуда:

$$\delta u^i = B^{-1}(\delta y^i) + (\delta B^{-1})(y^i) + (\delta B^{-1})(\delta y^i). \quad (1.2)$$

Таким образом, погрешность, возникающая в результате применения процедур обработки в подлежащих интерпретации физических полях, складывается как из исходных погрешностей в наблюдаемых  $\delta y^i$ , так и погрешности процедур обработки, которые переводят в разряд погрешности точные компоненты наблюдаемых  $(\delta B^{-1})(y^i)$  и увеличивают исходные погрешности наблюдаемых  $(\delta B^{-1})(\delta y^i)$ .

2. Переход от найденных приближений к модели физических полей  $u_\delta^i$  к физическим параметрам  $x^i$ , которые также будут неизбежно осложнены погрешностями:  $U_\delta \Rightarrow X_\delta$ . Этот переход называется решением обратных задач геофизики и реализуется с помощью операторов  $(A_i^\delta)^{-1}$ , приближенного к точному обратному  $A_i$ . Оператор  $(A_i^\delta)^{-1}$  также складывается из компонент – некоторого, неизвестного точного обратного  $(A_i)^{-1}$  и погрешности  $\delta(A_i)^{-1}$ , ответственной за неточное знание и неумение правильно вычислять оператор, обратный к уравнениям математической физики:

$$x_\delta^i = (A_i^\delta)^{-1} (u_\delta^i) = A_i^{-1} (u_\delta^i) + \delta A_i^{-1} (u_\delta^i) \quad (1.3)$$

Использование записи  $(A_i)^{-1}$  достаточно условно, поскольку в строгом смысле обратного к  $A_i$  может просто не существовать либо он может быть неограниченным – невычисляемым оператором. Эту запись можно понимать в том смысле, что для некоторых характерных для данной геолого-геофизической ситуации точных данных – физических полей  $u^i$  и физических параметров  $x^i$ , таких что  $A_i(x^i) = u^i : A_i^{-1}(u^i) = (x^i)$ . Тогда  $\delta(A_i)^{-1}$  представляет собой совокупную погрешность, связанную с использованием приближенного оператора решения обратной задачи. Это многокомпонентная величина, включающая в себя погрешности, связанные с заменой точных формул решения прямой задачи их приближенными аналогами, использованием специальных алгоритмов для обеспечения устойчивости решения, степени соответствия используемой модели физических параметров их реальному распределению. В реальных ситуациях величина  $\delta(A_i)^{-1}$  может быть весьма значительной и самым фатальным образом влиять на результат решения обратной задачи.

Также как это было сделано выше для процедур обработки в линейном приближении к операторам прямых задач, можно записать:

$$\begin{aligned} x_\delta^i &= x^i + \delta x^i = (A_i^\delta)^{-1} (u^i + \delta u^i) + \delta(A_i)^{-1} (u^i + \delta u^i) = \\ &= A_i^{-1} (u^i) + A_i^{-1} (\delta u^i) + \delta A_i^{-1} (u^i) + \delta(A_i)^{-1} (\delta u^i) = \\ &= x^i + A_i^{-1} (\delta u^i) + \delta A_i^{-1} (u^i) + \delta(A_i)^{-1} (\delta u^i) / \\ \delta x^i &= A_i^{-1} (\delta u^i) + \delta A_i^{-1} (u^i) + \delta(A_i)^{-1} (\delta u^i). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Последовательное применение процедур обработки и решения обратных задач называется геофизической интерпретацией данных. Целью геофизической интерпретации служит восстановление физических параметров геологических объектов. Как видно из формулы (4), погрешности реконструкции физических параметров резко возрастают.

3. Переход от физических параметров  $X_\delta$  к геологическим  $T : X_\delta \Rightarrow T_\delta$ . Этот этап называется обращением физико-геологических зависимостей и состоит в расчете с использованием приближенной зависимости  $T_\delta = G_\delta^{-1}(X_\delta)$ . Для простоты изложения предполагается, что уравнение  $G(T, X) = 0$ , определяющее петрофизические связи может быть разрешено относительно параметров  $X, T$  и представлено в форме  $X = G(T)$ . Это, конечно, очень сильное допущение, но для текущих демонстрационных целей оно вполне допустимо. Следуя уже дважды описанной схеме, легко получаем:  $t_\delta^i = t^i + \delta t^i$ , где

$$\delta t^i = T_i^{-1} (\delta x^i) + \delta T_i^{-1} (x^i) + \delta(T_i)^{-1} (\delta x^i).$$

Подставляя в последнее выражение вместо  $\delta x^i$  выражение (4), далее заменяя  $\delta u^i$  на его значение в соответствии с (1.2), получим состав компонент, влияющих на погрешность в построении геологической модели. Исходная погрешность в наблюдаемых разрастается, «как снежный ком».

Переход от наблюдаемых к геологическим параметрам называется геологической интерпретацией геофизических данных. Она включает в себя последовательность:

- обработку геофизических данных;
- решение обратных задач геофизики;
- обращение физико-геологических зависимостей.

В интерпретационной геофизической модели ее элементы не являются полностью независимыми. Они образуют единое взаимосвязанное целое. Способ, характер и погрешность измерения наблюдаемых в значительной степени определяет последующие используемые процедуры обработки. Найденные физические поля, а точнее – интерпретируемые его компоненты, полученные в результате обработки, определяют последующие постановки обратных задач геофизики. Характер определяемых физических параметров предопределяет и допустимые процедуры нахождения геологических параметров. Таким образом, окончательная погрешность реконструкции геологической модели складывается из комбинации погрешностей на всех этапах реконструкции параметров.

Погрешность измерений  $\delta y^i$  представляет собой первичную погрешность в результатах измерений как аппаратного, так и методического происхождения. Ее снижение осуществляется, во-первых, совершенствованием аппаратной базы, повышением ее точности, чувствительности, во-вторых, наращиванием кратности наблюдений, в-третьих, совершенствованием методических приемов производства полевых работ. Сюда, например, относится повышение детальности геофизической съемки, переход от профильных к площадным наблюдениям (переход от двумерной к трехмерной сейсморазведке). Эти погрешности передаются обрабатывающим процедурам и могут быть в значительной степени погашены ими. Так происходит, например, при подавлении нерегулярных компонент волнового поля интерференционными системами. Однако снижение этой погрешности само по себе, даже при полном сведении ее к нулю, не избавляет от погрешностей в последующих этапах. Оно может быть эффективным лишь тогда, когда сопровождается повышением точности всех последующих этапов геологической интерпретации.

Погрешность обрабатывающих процедур ( $\delta B^{-1}$ ) не только трансформирует погрешности в наблюдаемых, но и переводит в разряд погрешностей сами наблюдаемые. Большое число примеров погрешностей в обрабатывающих процедурах дает сейсморазведка. Ошибки в коррекции статики, выборе параметров фильтрации, величин скоростей миграционных преобразований может привести к полной перестройке волновой картины относительно истинной. Значительные погрешности в обрабатывающих процедурах содержатся и при обработке данных геофизических исследований скважин. Сюда относятся недоучет влияния скважины, промытой зоны и многое другое. Минимизация погрешностей обрабатывающих процедур чаще всего осуществляется на этапе опытно-методических работ. Это одна из их основных задач. Главной целью использования обрабатывающих процедур служит формирование из наблюдаемых параметров физического поля, соответствующих последующей модели, положенной в основу методов решения обратных задач и обращения физико-геологических зависимостей. В этой связи снижение погрешностей обрабатывающих процедур будет иметь смысл лишь в том случае, когда оно согласовано с точностью последующих процедур получения из обработанного поля физических и геологических параметров изучаемого объекта.

Погрешность оператора решения обратной задачи ( $\delta A_i^{-1}$ ) является наиболее значимой. Она проявляется не только из погрешностей вычислений, но в главном состоит в эффектах, могущих привести к бессодержательности с геологической точки зрения самого получаемого решения даже при отсутствии собственно вычислительных погрешностей. Это погрешности иного рода – погрешности, связанные с эффектами эквивалентности, в том числе и скрытой эк-

вивалентности. Они связаны с ошибками в модельных представлениях, положенных в основу процедур решения обратных задач. Описание и анализ такого рода эффектов приводится в разделах 1.4.3 и 3.3.

Погрешность, допускаемая при формировании и использовании физико-геологических зависимостей, определяется, во-первых, соответствием геолого-геофизической ситуации, при которой эти зависимости были получены той, для которой они используются, а во-вторых, собственно погрешностью прогноза. Общей закономерностью является увеличение точности прогноза при использовании большего числа определенных физических параметров. С увеличением числа используемых и известных физических параметров снижается влияние на точность прогноза неучтенных геолого-геофизических факторов.

Приведенная интерпретационная модель основана на объективных взаимосвязях между различными компонентами геофизических данных, нашедших отражение в информационной модели геофизики. Неучет ее, попытка “забежать вперед”, “перескочить” отдельные элементы при построении процедур интерпретации геофизических данных, например, при попытке геологической интерпретации непосредственно компонент, полученных после обработки наблюдаемых, без перехода к физическим параметрам, неизбежно приведет к искажению и потере объективной информации, заложенной в геофизических данных.

### 1.3. Модели и их свойства

В зависимости от описываемых классов объектов выделяют три типа моделей – модели, относящиеся к описанию среды, модели, относящиеся к описанию поля, и модели связей между моделями среды и поля. К первому типу относятся геологические и физические модели. Ко второму – модели физического поля и наблюдаемой, к третьему – геолого-геофизические связи, уравнения математической физики и эталонирующие преобразования.

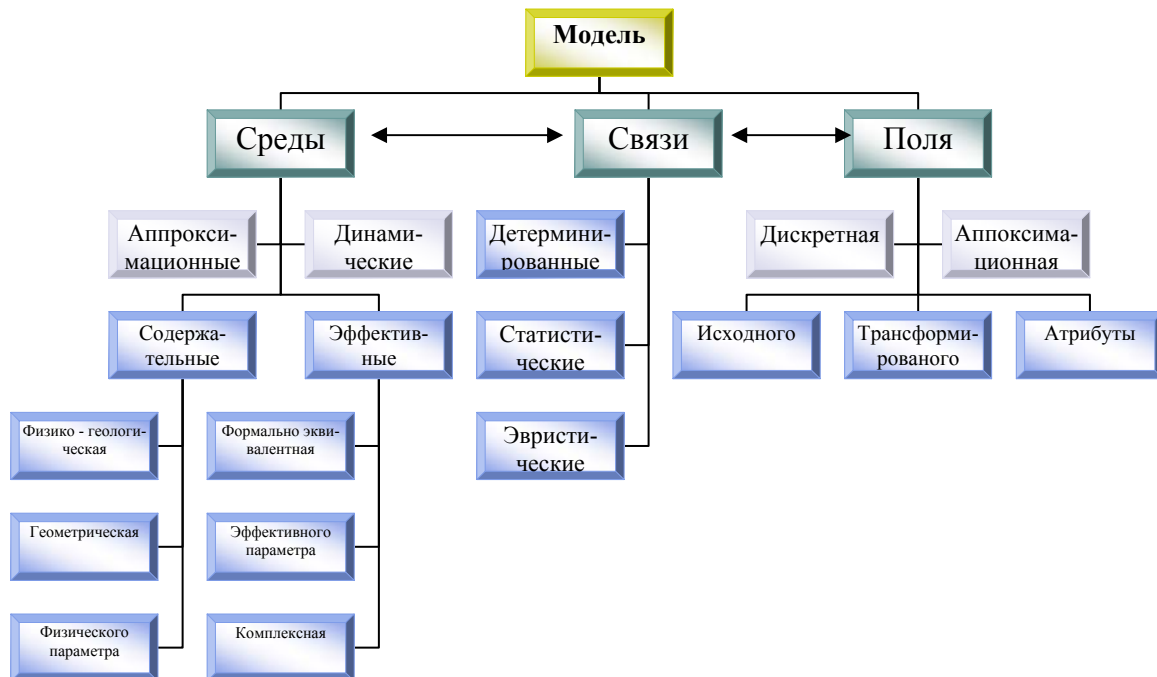


Рис. 1.5. Типы моделей

**1.3.1. Модели среды** по своему назначению подразделяются на аппроксимационные и динамические.

**Аппроксимационные модели**, как это следует из названия, предназначены для аппроксимации среды набором элементарных объектов из заданного класса. Этот класс обозначаем  $M$ . Чаще всего в качестве аппроксимирующих элементов выступают элементарные геометрические объекты. Например, это система призм, уступов, многоугольников, предназначенных для ап-

проксимации плотностной модели геологического объекта. Каждый элемент аппроксимирующей системы имеет свои параметры – размеры, глубину залегания, плотность, если речь идет о плотностной модели. Перечень этих параметров составляет параметризацию модели, а ограничения, накладываемые на их значения в связи с дополнительной информацией, в том числе и в связи с другими моделями, требованиями согласованности с геофизическими полями, образуют систему связей. Важной характеристикой аппроксимационной модели служит погрешность аппроксимации множеством  $M$  элемента  $\xi : \varepsilon(M, \xi) = \min_{m \in M} \|\xi - m\|$ . Элемент  $\xi$  принадлежит неко-

торой более общей модели  $M_0$ , например распределению плотности как функции координат. Если заранее известно, что изучаемый объект принадлежит некоторому множеству  $\Xi$ , то  $\max_{\eta \in \Xi} \varepsilon(M, \eta) = \varepsilon(M, \Xi)$  характеризует аппроксимационную способность  $M$  для описания  $\Xi$ .

**Динамические модели** предназначены для характеристики процессов, происходящих в изучаемой среде. Типичным примером такого рода моделей служат тектонофизические модели, системы палеореконокструкций, следующих из рассмотрений обратных задач геодинамики, модели переноса вещества в термогравитационных и термохимических мантийных конвекциях. Динамические модели определяются заданием уравнений, которым подчиняется процесс, и системой параметров, его характеризующих, например распределениями напряжений, физико-механическими свойствами среды. Типичным примером динамической модели служит уравнение Навье-Стокса, характеризующего вязкое течение жидкости (например Ньютоновой и несжимаемой), и его частные случаи – приближение Буссинеска и др. Параметрами служат система внешних сил, коэффициенты вязкости, плотность. Наряду с однофазными движениями могут быть рассмотрены многофазные, подчиняющиеся более сложным уравнениям, следующим из законов фазовых превращений. Динамические модели имеют своей целью с той либо иной степенью точности описать эволюцию рассматриваемой геосистемы, прежде всего с позиций механики сплошных сред. Однако чаще всего удается с большей либо меньшей долей подобия описать лишь фрагменты этой эволюции и оправдать выдвижение гипотез о развитии и формировании современного вида системы.

Модели среды по характеру используемых параметров подразделяются на содержательные и эффективные.

**Содержательные модели** наиболее ясные и пригодные для физико-геологических выводов. Они имеют своей целью описание объекта в традиционных физических или геологических терминах. Сюда относятся: конкретные *физические параметры*, такие как плотность, упругие параметры, электрические, магнитные свойства и многое другое; *физико-геологические* параметры, такие как литологические возрастные (стратиграфические), емкостные, коллекторские; *геометрические параметры* используемых моделей, характеризующие взаиморасположение компонент модели. Вопрос о перечне параметров в содержательных моделях чаще всего тривиален, поскольку он предопределен видом выбранной физико-геологической модели. Однако весьма существенен вопрос о связях между параметрами и их проявлениями в физических полях.

**Эффективные модели** вводятся и используются чаще всего для построения и изучения содержательных физико-геологических моделей. Среди эффективных моделей выделяются модели эффективного параметра, формально эквивалентные, и комплексные модели.

*Модели эффективного параметра* представляют собой результат применения эвристических, чаще всего нелинейных преобразований к наблюдаемым или физическим полям. Результат такого преобразования дает распределение некоторой величины, для которой экспериментально установлены случаи связи между особенностями ее пространственного распределения и некоторыми элементами физико-геологической модели среды. Наиболее яркими представителями этих приемов служат метод полного нормированного градиента В.М. Березкина, метод яркого пятна при решении задач выделения аномальных зон в геологической модели. Эффективный параметр не имеет размерность конкретного физического параметра, а даже если и имеет, то рассчитанное от него с помощью уравнений математической физики поле не соответствует исходному. Это принципиально важное свойство эффективных



моделей. Этот параметр подобен изображению объекта в инфракрасном диапазоне излучения – несет о нем полезную информацию, но отличается от того, что видно в обычном – видимом диапазоне спектра. Эту аналогию можно продолжить, считая модели эффективного параметра некоторыми специального вида изображениями реальной среды, возможно и в некотором «экзотическом» свете.

*Формально эквивалентные модели* представляют собой особый класс моделей среды. Как уже указывалось при обсуждении интерпретационной модели, характерной чертой обратных задач геофизики является неоднозначность их решения. Это фундаментальное свойство, называемое эквивалентностью, состоит в том, что одному и тому же полю соответствует бесконечно много распределений физического параметра, различающихся существенно между собой, но эквивалентных по полю. Это формально эквивалентные модели. Их бесконечно много, даже в том случае, если конкретная вычислительная технология построения распределения физического параметра приводит лишь к одному решению. Это может достигаться особенностями алгоритма либо выбором аппроксимирующей модели. Технология, приводящая к построению единственного решения, не сопровождающаяся тщательным геолого-геофизическим осмыслением и увязкой принципов, приводящих к выделению единственного решения, приводит к формально эквивалентной модели. Получаемая в результате решения обратной задачи формально эквивалентная модель ни в коем случае не должна рассматриваться как итоговая, но должна быть рассмотрена как трансформация поля в распределение параметра с размерностью физического свойства, результат расчета поля от которого приводит к исходному полю. Формально эквивалентная модель, в отличие от модели эффективного параметра, даже визуально может не напоминать «истинную» и отличаться от нее принципиально во всех отношениях, кроме эквивалентности по полю.

*Комплексные модели* представляют собой симбиоз различных моделей, приведенных к единому параметру (правильно говорить об интегрированной модели) либо систему содержательных и эффективных моделей.

**1.3.2. Модели поля** в содержательном отношении определены связями, положенными в основу интерпретационной модели между средой и полем. Что же касается формы, то модель поля может быть *дискретной*, что включает в себя описание поля в виде дискретных массивов значений, либо *аппроксимационной*.

*Дискретная* модель – это простейшая модель, требующая уточнения лишь в том, что означают дискретные отсчеты и куда они отнесены. Параметрами этой модели служат область задания значений, координаты точек.

*Аппроксимационная* модель поля – это способ его описания с помощью некоторого набора элементарных объектов, например элементарных полей. Исходное поле, заданное массивом своих значений, заменяется набором элементарных объектов с небольшим числом параметров – меньшим, чем число элементов массива, но так, что эта совокупность аппроксимирует исходные значения с точностью, не хуже заданной. Этим приемом достигается решение трех задач: сжатие информации – описание большого числа элементов с помощью небольшого числа параметров; анализ структуры поля по распределению значений параметров аппроксимирующих элементарных полей (это может быть полезным для формирования модели среды); фильтрация и борьба с помехами.

Приведенные способы описания поля могут быть применены для описания собственно модели физического поля или наблюдаемой, некоторой трансформанты – преобразования поля, которое используется в уравнениях связи и в последующих процедурах реконструкции моделей среды либо атрибутов.

Атрибуты поля – понятие, более всего используемое в сейсморазведке [1]. К атрибутам поля относятся специального типа наблюдаемые, пересчитываемые в параметры модели среды по заданным экспериментально зависимостям. Это собирательное понятие. Для сложных многокомпонентных наблюдаемых атрибуты – это выделенные характеристики поля или его трансформант, которые составляют лишь часть наблюдаемых, используемых далее в специализированной для этих атрибутов технологии анализа. Цель этого анализа – оценка некоторых параметров введенной эффективной модели среды. Именно для характеристики этой части

используется понятие атрибут с последующим его наименованием, например атрибуты преобразования Гильберта.

**1.3.3. Модель связей** представляет собой стержень конструируемого интерпретационного процесса. Эти связи определяют суть процедур обработки, решения обратных задач и реконструкции модели среды – содержательной либо эффективной. Связи могут быть *детерминированными, статистическими и эвристическими*.

*Детерминированные связи* имеют вид интегральных, дифференциальных уравнений. Это связи между физическими моделями среды и моделями физического поля – уравнения математической физики. Они составляют вычислительную основу при реконструкции физических моделей и построении формально эквивалентных моделей.

*Статистические связи* основаны на выявленных корреляционно-регрессионных зависимостях между параметрами среды и, чаще всего, атрибутами поля. Статистические связи используются для построения моделей эффективного параметра, а при дополнительных условиях проверки и корректировки результата моделированием могут использоваться и для получения содержательных моделей.

*Эвристические связи* дают широкий простор для конструирования эффективных моделей среды. Типичным и, по видимому, непревзойденным по эффективности примером эвристических связей служит метод полного нормированного градиента В.М. Березкина. Он основан на том, что эффективный параметр, называемый полным нормированным градиентом гравитационного поля, отображает характеристики среды. Эта эвристическая связь основана на экспериментально установленном факте, состоящем в том, что экстремумы полного нормированного градиента пространственно приурочены к аномальным зонам в изучаемой физико-геологической модели среды.

Другими примерами эвристических преобразований могут служить многочисленные процедуры параметрической фильтрации поля, основанные на таком же постулируемом предположении.

## 1.4. Задачи геофизической интерпретации

Процедуры геофизической интерпретации, как указывалось выше, включают в себя обработку данных и реконструкцию физической модели в рамках зафиксированных моделей среды, модели поля и модели связи между ними. Реализуются эти этапы посредством специализированных процедур решения обратных задач, о которых речь пойдет ниже. Однако, такое расчленение этапов не всегда явно обнаруживается, прослеживается. Грани между ними оказываются размытыми в ситуациях, когда от геофизических данных требуют формирования лишь самых общих представлений об изучаемой среде и самых предварительных выводов об особенностях ее строения. Они начинают четче прорисовываться при повышении требований к результативности геофизической интерпретации и в полном объеме прослеживаются и играют ключевую роль при детальном анализе, имеющем целью максимально полное извлечение физико-геологической информации из комплекса геолого-геофизических данных. В этой связи остановимся на характеристике содержательных задач, решаемых в процессе геофизической интерпретации. Таких задач выделяется три. Это задачи обнаружения и локализации аномальных объектов; построение их изображений и построение содержательных моделей среды. Рассмотрим подробнее перечисленные задачи.

**1.4.1. Обнаружение и локализация** аномальных объектов – исторически первая задача, возникшая в практике геофизических работ. Под аномальными объектами понимаются объекты или участки изучаемой среды, отличающиеся по своим свойствам от окружающей среды так, что это отличие проявляется в регистрируемых физических полях и (или) наблюдаемых. Сама эта задача состоит в собственно *выделении и обнаружении* факта наличия аномального объекта и его *локализации*, т.е. оценке **пространственного** расположения и принятия решения о значениях общих параметров, характеризующих объект – глубины залегания, размерах, воз-

можно, формы. С целью решения первой из указанных задач необходимо максимально подчеркнуть – выделить компоненты наблюдаемой, характерные для аномального объекта, и затуманить, стереть все остальное, отнеся это к шумам, регулярным и нерегулярным помехам.



Рис. 1.6. Классификация задач геофизической интерпретации

Для достижения этой цели необходимо применить процедуры обработки над наблюдаемыми, которые в рамках принятых предположений о свойствах полезного сигнала – собственно изучаемой аномалии и его отличиях от всего остального обеспечивают наиболее рельефное его выделение. Например, максимизируют отношение сигнал/помеха, хотя это и не является обязательным. Надежное принятие решения о наличии аномального объекта не обязательно должно основываться на критерии максимума отношения сигнал/помеха. Более эффективными могут оказаться критерии косвенных оценок, основанные на взаимных влияниях параметров и корреляции многих факторов. *Принятие решений* о характере объекта сопровождается оценкой *его параметров* – вторая из подзадач, характерная для локализации обнаруженного аномального объекта. При ее решении используется достаточно грубая аппроксимационная, содержательная модель среды. В качестве примера можно привести задачи гравиметрии, в которых этот этап состоит, например, в уподоблении реального объекта некоторому телу правильной геометрической формы – цилиндру, шару, уступу, пирамиде, и последующему расчету параметров этого идеализированного объекта по «очищенной» предварительными процедурами обработки гравитационной аномалии. Также и в сейсморазведке вычисляются параметры плоской отражающей границы раздела по предварительно выделенному процедурами обработки в волновом поле годографу.

**1.4.2. Построение изображений** – это особый класс задач геофизической интерпретации. На протяжении всего периода развития интерпретационного обеспечения геофизических методов параллельно развивались два подхода к извлечению информации из геофизических

данных. Их весьма условно можно подразделить на геофизическую интроскопию и геофизическую интродетрию.

Понятие геофизической интродетрии объединяет методы преобразования геофизических данных, позволяющие определить численные значения содержательных физических параметров, характеризующих физическую модель геологического объекта. Соответственно используется аппроксимационная содержательная физико-геологическая модель, например плотности, скорости распространения упругих волн и так далее. К геофизической интродетрии относятся методы решения обратных задач, рассматриваемые далее, позволяющие реконструировать значения параметров выбранной модели. Они позволяют найти характерные для выбранной модели и максимально близко соответствующие наблюдаемым геофизическим данным значения физических параметров. Однако эффективность такого рода методов в ряде случаев ограничена необходимостью знания требуемой содержательной параметризации, обеспечивающей единственность восстановления значений параметров (решения обратной задачи). Ошибки в выборе параметризации, а, по сути, рабочей геологической гипотезы, ведут к их усугублению на этапе решения обратных задач – об этом говорилось выше. В подобных ситуациях желательно «увидеть» объект, даже если параметры, в которых реализуется это видение, несодержательны и допускают произвол в толковании. Это необходимо для формирования последующих геологических гипотез и введения содержательных моделей и их параметризаций. Таковы задачи изучения локальных неоднородностей внутри изучаемых объектов, например зон дробления в условиях солянокупольной тектоники или терригенных образований в рифовых структурах. Сюда относится и изучение нетрадиционных ловушек нефти и газа – тектонически и литологически экранированных залежей. Эти подходы реализуются в методах геофизической интроскопии, которые объединяют методы преобразования геофизических полей, направленных на построение изображений изучаемых сред – реконструкцию их эффективных моделей. Отличие от принципов геофизической интродетрии состоит в том, что физический смысл параметра, в терминах которого строится изображение геологической среды, может быть неопределен либо носить условный, эффективный характер. В современных условиях, характеризующихся изучением сложнопостроенных сред, введение эффективных моделей среды для построения их изображений сред с целью последующего уточнения геологических гипотез и формирования содержательных моделей стало настоятельной необходимостью. Этот этап является предварительным для построения уточненных моделей и целесообразен при решении всего спектра задач геофизической интерпретации. Однако не следует и переоценивать его результативность для последующей реконструкции содержательной физико-геологической модели и геологической интерпретации. Это именно обеспечивающий промежуточный интерпретационный прием.

**1.4.3. Построение содержательных моделей** – это наиболее важная цель геофизической интерпретации. В зависимости от меры дробности используемой аппроксимационной модели изменяется ее аппроксимационная способность (см. 1.3.1). Желание улучшить, ближе к действительности реконструировать физическую модель среды ведет к использованию моделей  $M_i$  с большей размерностью и улучшенными аппроксимационными способностям  $\varepsilon(M_i, \Xi)$  для описания широкого класса объектов  $\Xi$ . При движении в этом направлении на определенном этапе  $n$  используемая аппроксимационная модель  $M_n$  оказывается столь широкой, что по заданному физическому полю нельзя однозначно реконструировать элемент из  $M_j, j \geq n$ . Это явление называется эквивалентностью, и оно состоит как в том, что на  $M_j$  как существуют тождественные по физическому полю элементы, так и возникают более тонкие эффекты скрытой эквивалентности. Эффекты скрытой эквивалентности при повышении дробности аппроксимационных конструкций проявляются еще до того, как возникли эффекты эквивалентности, и состоят в том, что найденный при реконструкции элемент, будучи единственным в заданном модельном классе  $M_i$  ( $i < n$ ) на самом деле приближенно описывает не ту реальность, под которую строился класс  $M_i$ , а некоторую ему эквивалентную по физическому полю, но не имеющую содержательного смысла. Для того чтобы пояснить сказанное, приведем некоторые формальные выкладки.

Пусть  $A$  оператор, отображающий элементы пространства  $X$  (например распределения плотности) в элементы пространства  $Y$  (например гравитационные поля). Собственно, это оператор суть некоторое уравнение математической физики, реализующее связь между физической моделью среды и физическим полем. Пусть  $M$  – модельный класс, который с точностью  $\varepsilon_1$  позволяет аппроксимировать элементом  $m_1$  реальное распределение плотности  $\sigma_1$  (для его аппроксимации и строился класс  $M$ ). Это означает, что:

$$\begin{aligned} \|\sigma_1 - m_1\|_X &\leq \varepsilon_1 \\ m_1 &\in M \end{aligned}$$

Предполагается, что  $M$  – класс, обладающий относительно оператора  $A$  свойством единственности: если  $m_1, m_2 \in M$ , то из  $Am_1 = Am_2$  следует  $m_1 = m_2$ .

Если  $u \in Y$  – заданное физическое поле и  $A\sigma_1 = u$ , то задача реконструкции на  $M$  состоит, например, в следующем:

$$\begin{aligned} \|Am - u\|_X &\rightarrow \min \\ m &\in M \end{aligned}$$

Таково содержание аппроксимационного подхода в поиске физической модели на выделенном модельном классе. В результате ее решения будет получен элемент  $m_2$ , служащий аппроксимацией на классе эквивалентности  $\Omega_u(A) = \{\sigma \in X : A\sigma = u\}$  элемента:

$$\sigma_2 : \|\sigma_2 - m_2\|_X = \inf_{\substack{\sigma \in \Omega_u(A) \\ m \in M}} \|\sigma - m\|_X = \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1.$$

Эффект скрытой эквивалентности состоит в возможном не совпадении, а в практически значимых, поддающихся анализу случаях, фатально принципиальных различиях между  $\sigma_1, \sigma_2; m_1, m_2$ .

*Задачи расчленения* состоят в реконструкции моделей среды с использованием аппроксимационных моделей с мерой дробности и, соответственно, способностью аппроксимации до проявления эффектов скрытой и, тем более, явной эквивалентностью. Чаще всего, это задачи описания изучаемого объекта набором небольшого числа элементарных геометрических объектов. Задача, таким образом, состоит в нахождении составляющих, из которых сложен изучаемый объект, при не слишком высоком числе этих составляющих. Как правило, сюда не входят задачи изучения некоторых внутренних локальных неоднородностей и тем более задачи нахождения распределения параметров внутри объекта.

*Задачи детального описания*, наоборот, направлены на изучение моделей сред, заведомо находящихся за чертой эквивалентности и, тем более, чертой скрытой эквивалентности. Типичным примером такой задачи служит изучение зон локальных неоднородностей, построение распределение физического параметра внутри изучаемого объекта. При этом речь идет не о построении серии формальных эквивалентных моделей, а о тщательном анализе, направленном на выделение из теоретически эквивалентных моделей наиболее приближенной к реальности. Из такого определения задач, а, точнее, их основного свойства вытекает, что решаться они могут только с использованием всего комплекса дополнительных к геофизическому полю данных. Можно выделить два подхода к такому комплексному использованию данных для реконструкции по физическому полю содержательной модели, соответствующей ее детальному описанию. Первая – это *пассивная форма* использования комплекса дополнительных к физическому полю данных. Она соответствует ситуации, когда реконструируется содержательная модель среды по одному физическому полю, а все дополнительные данные об изучаемой модели используются в проинтерпретированной относительно изучаемых параметров модели форме. Эти данные, представляющие систему ограничений, условий, критериев выбора можно свести к единой форме – критерию оптимальности, определяющему систему предпочтений, принципов отбора «правильного» решения из теоретически допустимого множества эквивалентных. Такой подход называется *интегрированной интерпретацией*. Его результатом служит одна содержательная модель, оптимальным образом учитывающая весь комплекс дополнительных данных. Эти ин-

тегрированные дополнительные данные отнесены к параметрам изучаемой модели, и именно поэтому подход называется интегрированной интерпретацией. Другой подход составляет содержание *активной формы* использования комплекса данных. Его суть состоит в том, что предполагается наличие не одного, а нескольких (например двух) физических полей, каждому из которых следует сопоставить свою содержательную модель. Что же касается всех дополнительных данных, то они делятся на два класса. К первому относятся персонализированные данные о каждой из изучаемых моделей отдельно. Ко второму относится информация о взаимосвязи между параметрами самих реконструируемых моделей. Например, такой информацией может служить требование, состоящее в том, что для «правильных моделей» их должным образом нормированные аналоги менее всего друг от друга уклоняются в определенном, заранее заданном смысле. Например, для «правильных моделей» достигается максимум корреляционного отношения или минимум нормы взаимного отклонения их нормированных аналогов. Нормирование здесь нужно для того, чтобы учесть различия в единицах измерения параметров. Результатом такого подхода служит система содержательных моделей, каждая из которых с заданной точностью соответствует своему физическому полю, а в своей совокупности они образуют оптимальный комплекс относительно введенных критериев взаимосвязи и данных о каждой из моделей. Такой подход, приводящий к построению системы, комплекса моделей, называется *комплексной интерпретацией*.

**1.4.4. Эволюционно-динамический анализ** – одна из наиболее сложных, многокомпонентных и нерешенных задач геофизической интерпретации.

Построение геофизических моделей геологических сред должно быть согласовано с законами и принципами механики сплошных сред. Во-первых, речь идет о механической устойчивости предполагаемых конструкций на масштабах времен, равных времени образования этих конструкций. Требование механической устойчивости означает также и баланс всех сил, действующих на каждый из элементов среды. Принцип построения сбалансированных моделей относится и ко всем геофизическим полям. Второе обстоятельство связано со следующим. Каждая структура и каждое образование имеют свой генезис – свое происхождение. В формировании структуры принимало участие множество сил, как внешних – тектонические движения структур более высокого порядка, катастрофические события, так и внутренних, диктуемых законами механики сплошных сред, – взаимодействие элементов структуры между собой и окружающими образованиями, что, впрочем, входит составной частью в законы механики сплошных сред. Картину геологического строения можно считать завершенной только тогда, когда, помимо согласования со всеми наблюдаемыми физическими полями, она количественно проанализирована с механико-геологических позиций, является непротиворечивой, устойчивой на своих геологических масштабах времени, выяснен ее количественный генезис – породившая ее динамика сил и соответствующая ей динамика перемещений. Процесс построения моделей геологической среды, таким образом, рассматривается как эволюция динамической системы, а найденная модель – как продукт этой эволюции. Исследования подобного рода составляют содержание эволюционно-динамического анализа геолого-геофизических данных.

К одной из частных задач эволюционно-динамического анализа относится также задача изучения движений поверхности Земли в результате действия длительных нагрузок и изменения физико-механических свойств горных пород, произошедшее, например, в результате деятельности человека: добыча нефти, газа и т.д. Математические модели этих задач основаны на законах механики сплошных сред и чаще всего предназначены для того, чтобы произвести оценку возможных последствий длительной техногенной нагрузки в виде проседания, оползней, техногенных землетрясений.

#### Литература

1. Ампилов Ю.П. Сейсмическая интерпретация. Опыт и проблемы. – М.: Геоинформарк, 2004, – 277 с.

## ГЛАВА 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В настоящей главе рассматриваются некоторые из постановок прямых задач – законов, определяющих отображение параметров физической модели среды в соответствующее физическое поле. Это ключевые вопросы в конструкции интерпретационных процедур. Большое разнообразие частных ситуаций, тем не менее, допускает общие формулировки и выделение общих проблемных вопросов при анализе и разработке процедур решения обратных задач. В настоящей главе собраны некоторые наиболее распространенные уравнения, которые служат примером предшествующим и будущим общим рассмотрением. Каждый раз мы обращаем особое внимание на эти общие проблемы и формулировки. Приведенное не может служить учебником по соответствующим разделам геофизики, но основные постановочные вопросы рассмотрены с достаточной полнотой. Перечень примеров, несомненно, может быть увеличен, однако он подобран так, чтобы охватить наиболее важные типичные ситуации и необходимое для конструирования алгоритмов.

### 2.1. Разведочная гравиметрия

Горные породы различаются между собой по плотности. Это одна из наиболее информативных их физических характеристик. Плотность  $\sigma$  горных пород, являющаяся функцией пространственных координат, зависит от химического состава и фазового состояния вещества, напряжения и температуры. Частично эти параметры отражают историю формирования вещества, частично определены процессами, происходившими в последующем развитии объектов, в которых это вещество участвовало, частично современными условиями и происходящими процессами. Таким образом, знание плотностных свойств горных пород позволяет не только делать заключения о генезисе изучаемых объектов, но и изучать процессы, происходившие в Земле. Однако, что самое главное для задач прикладного характера, информация о плотности – важнейшая компонента данных для принятия решений о наличии и характере распределения полезных ископаемых. В этой связи реконструируемая плотностная модель среды, во-первых, позволяет изучать характерные черты геометрической модели геологического объекта, во-вторых, получить информацию о ее динамической модели и тем самым обеспечить прогнозирование перспективных площадей на детальный поиск и разведку месторождений. Наконец, по значениям плотности возможен собственно прогноз зон, перспективных на наличие полезных ископаемых. Совокупность тех зависимостей, которые определяют значения плотности по параметрам геологической модели (возраст, динамо-тектонические условия, условия метаморфизма) через перечисленные выше химические параметры, параметры фазового состояния (пористость как отношение объемов твердой фазы к остальным, характер флюидонасыщения, соотношение объемов различных флюидов и т.д.), параметры температурного режима, определяют геолого-геофизические связи. Эти же факторы определяют и другие физические свойства, такие как скорость распространения упругих волн, магнитная восприимчивость, теплопроводность, электрические свойства. Плотность горных пород оказывается связанной с перечисленными и многими другими физическими параметрами, чем определена взаимосвязь между ними. В силу сложности эти взаимосвязи носят экспериментальный и по этой причине локальный характер. Однако их наличие – объективный фактор, делающий плотностную модель среды одной из наиболее информативной для обеспечения геологической интерпретации – реконструкции геологической модели.

Изучение плотностных неоднородностей в Земной коре составляет предмет разведочной гравиметрии. Локальные неоднородности распределения масс в Земной коре вызывают гравитационными аномалиями. Регистрируя их, можно ставить задачу нахождения этих плотностных неоднородностей.

**2.1.1. Плотностная (физическая) модель** геологической среды представляет собой функцию, значение которой в каждой точке равно плотности геологической среды в этой точке. Плотность измеряется в  $\text{г/см}^3$ . Однако изучать абсолютные значения плотности неудобно, поскольку в этом случае придется рассматривать всю Землю целиком. В этой связи предпо-

лагается, что имеется некоторая фоновая плотность  $\sigma_0$ , характерная для всей среды вне изучаемого объема. Отличия от фонового значения наблюдаются только в этом объеме. Эти отличия, представляющие собой разность между значениями плотности в точках изучаемого объема и фоновым значением плотности, и есть изучаемая плотностная неоднородность. Для ее описания введем прямоугольную систему координат  $XYZ$ , расположив плоскость  $XOY$  касательно к дневной поверхности и направив ось  $OZ$  вниз к массам (рис. 2.1).

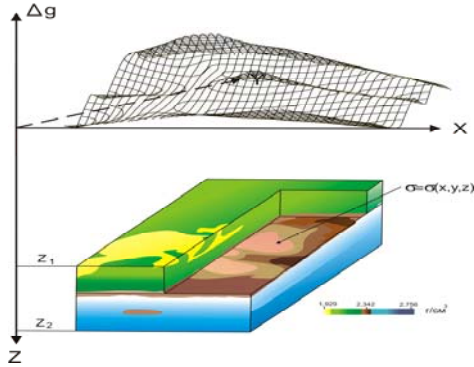


Рис. 2.1

которых есть разрывы первого рода. Если область  $V$  ограничена, то этого достаточно, чтобы можно было рассматривать эту функцию как элемент любого из пространств  $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ . В том же случае, если область  $V$  неограничена, например, представляет собой бесконечную горизонтальную полосу, ограниченную двумя значениями глубин по вертикали ( $z_1, z_2$ ), то для принадлежности введенной плотностной модели функциональному пространству  $L_p$  следует вести соответствующие условия интегрируемости, что, однако, не имеет никаких ощутимых физических следствий. Таким образом, параметризацией плотностной модели служит некоторое пространство функций. Обозначим его  $X$ . Это, в частности, может быть пространство функций, интегрируемых в области с заданной степенью ( $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ ). Несмотря на общность введенной физической модели среды, она все же содержит ряд существенных ограничений. Сюда относятся, например, предположение об отсутствии аномальных масс вне области  $V$ , рассмотрение плотности как изолированного физического параметра вне связи с другими, на-

конец, предположение о том, что все массы расположены в нижнем полупространстве.

Из приведенной модели среды достаточно легко построить множество других – частных по вводимой параметризации, используя принцип проектирования.

Пусть  $M$  – некоторая аппроксимационная модель и  $m$  – ее элементы. Например, в качестве  $M$  выступает сетка, разбивающая область  $V$  – прямоугольную призму в  $E_-$ , на ячейки числом  $N \times K \times L$ . Элементом  $m \in M$ , служит множество значений плотности в ячейках сетки  $\sigma_{ilk}, i = 1 \dots N; l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, K$ . Это новая параметризация, параметрами которой служат величины  $\sigma_{ilk}$ . Основываясь на  $M$ , легко построить ее подмножества следующим приемом. Определим оператор про-

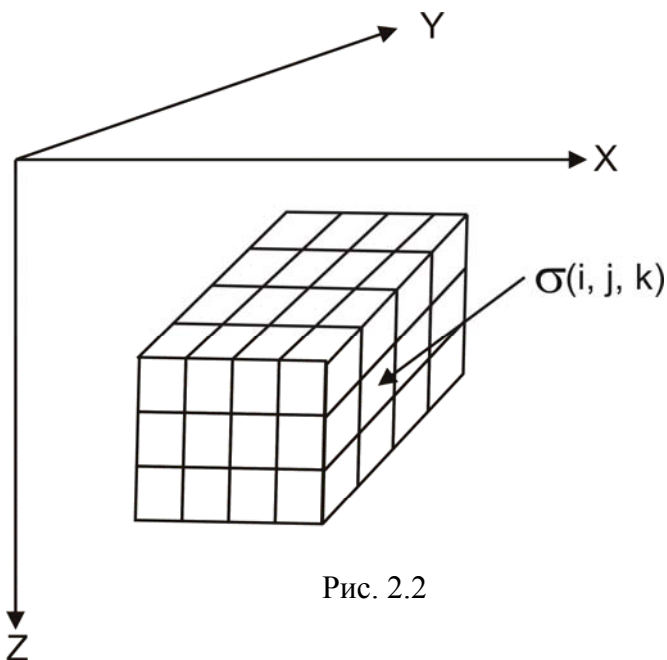


Рис. 2.2



ектирования  $P_X(M, \sigma)$  произвольного плотностного распределения  $\sigma(x, y, z)$  из  $X$  на  $M$  правилом:

$$m = P_X(M, \sigma) : \|m - \sigma\|_X = \min_{\eta \in M} \|\eta - \sigma\|_X \quad (2.1)$$

Если  $\sigma$  пробегает множество  $\Sigma$  элементов из  $X$ , то соответствующие проекции образуют некоторое подмножество в  $M$ . Оно обозначается  $M(\Sigma)$ . Следовательно, образом многообразия  $\Sigma$  при проектировании на  $M$  в норме пространства  $X$  служит  $M(\Sigma) = P_X(M, \Sigma)$ . Это подмножество в  $M$ . В приведенном определении пространство  $X$  «работает» как множество, которому принадлежат все рассматриваемые элементы, но самое важное то, по какому правилу вычисляется норма в определении оператора проектирования. Если из контекста ясно, о какой норме идет речь, то этот символ  $X$  в (2.1) опускаем.

Моделью физического поля служит вертикальная производная гравитационного потенциала  $u_z(x_0, y_0, z_0)$ , заданного в точке  $x_0, y_0, z_0$ , находящейся вне области  $V$ . Исходя из закона тяготения, она рассчитывается по формуле:

$$\iiint_V \frac{\sigma(x, y, z)(z - z_0)dv}{\left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^{3/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0, z_0)}{\gamma}, \quad (2.2)$$

$\gamma$  – гравитационная постоянная.

Это пример. В качестве модели физического поля может быть с равным успехом взята любая комбинация производных любого порядка от (2) по переменным  $\{x_0, y_0, z_0\}$ . Выражение (2) более предпочтительней лишь по той причине, что при некоторых допущениях, в частности предположении, что направление нормали к Земле совпадает с вертикальной координатой,  $u_z(x_0, y_0, z_0)$  ассоциируется с наиболее часто используемой и измеряемой аномалией силы тяжести  $\Delta g(x_0, y_0, z_0)$ . Соотношение (2) либо ему аналогичное сокращенно будем записывать:

$$A(\sigma) = u.$$

$$\sigma \in X.$$

Для произвольной модели  $M$  это уравнение имеет вид:

$$A(P_X(M, \sigma)) = u$$

или

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= u, \\ \sigma &\in M. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Прямым вычислением легко проверяется, что функция  $u_z(x_0, y_0, z_0)$  в (2) является гармонической всюду вне области  $V$ , т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} u(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} u(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} u(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$\Delta u(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Внутри этой области она удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} u(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} u(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} u(x_0, y_0, z_0) = -4\pi\sigma(x, y, z),$$

$$\Delta u(x_0, y_0, z_0) = -4\pi\sigma(x, y, z).$$

Поскольку вне области  $V : \sigma(x, y, z) = 0$ , то уравнение Пуассона автоматически трансформируется в уравнение Лапласа.

### 2.1.2. Структурная модель.

Частный случай – структурно-плотностная модель среды. Это геометрическая плотностная модель, параметрами которой служат конфигурации плотностных границ. Она схематично изображена на рис. 3.

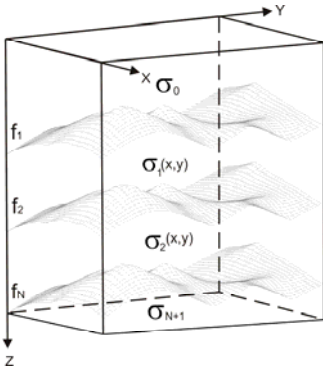


Рис. 2.3. Принятые обозначения для элементов структурной модели

В горизонтальной полосе  $\Pi$ , ограниченной в области  $E_+$  вертикальными координатами  $(z_1, z_2)$ , расположено  $N$  слоев, ограниченных  $N+1$  плотностной границей. Каждый слой имеет плотность, которая известна и может быть переменной по латерали, за исключением плотности  $\sigma_{N+1}$  слоя, лежащего ниже последней границы (номер  $N$ ). Эта плотность считается известной, постоянной и равной введенной ранее фоновой плотности. Границы, ограничивающие пласты, представляют собой однозначные функции пространственных координат. Вне некоторой цилиндрической области  $V$ , горизонтальное основание которой (проекция на плоскость  $E_0$ ) есть  $S$ , а боковая поверхность –  $D$ , границы выходят на асимптоты. Точный смысл понятию асимптот в данных модель-

ных представлениях можно придать следующим предположением. Плотность вне  $V$  постоянна вдоль каждого луча, выходящего из любой точки на  $D$  ортогонально этой поверхности. Главным предметом изучения в этой модели служат плотностные границы. Влияние объектов вне области  $V$  учитывается соответствующими процедурами редуцирования. В частности, асимптотическое поведение границ вне  $D$  рассчитывается и их гравитационное влияние моделируется. Будем считать, что плотностные границы описываются функциями  $z_i = f_i(x, y)$ ,  $i=0, 1, \dots, N$ , и плотность пласта, заключенного между границей с номером  $i-1$  и границей с номером  $i$ , есть  $\sigma_i(x, y)$  (здесь  $i$  меняется от 1 до  $N$ ). В связи с тем, что в практике интерпретации гравитационных полей принято работать с аномальными эффектами и избыточными (относительно некоторого уровня) плотностями, можно считать, что плотность объектов ниже границы с номером  $N$  равна нулю, что означает  $\sigma_{N+1} = 0$ . Это означает, что все плотности посчитаны в отношении к плотности нижележащей среды. Кроме того, считаем, что  $\sigma_0 = 0$ , что является идеализацией. На практике эти условия легко обходятся введением дополнительной верхней и нижней горизонтальных границ. Принимая поверхность рельефа определенной уравнением  $z_0 = \psi(x_0, y_0)$ , связь между вертикальной производной гравитационного потенциала и параметрами модели среды в области  $V$  легко получается расстановкой пределов интегрирования в (2):

$$\sum_{i=1}^N \iint_S \int_{f_{i-1}(x,y)}^{f_i(x,y)} \sigma_i \frac{\{z - \psi(x_0, y_0)\} dx dy dz}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z - \psi(x_0, y_0))^2]^{3/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}.$$

Интегрируя последнее выражение и расставляя пределы интегрирования, получим:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \iint_S \frac{\sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_{i-1}(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} - \iint_S \frac{dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} \right] = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}.$$

Перегруппировав суммирование, легко получим:

$$\sum_{i=0}^N \iint_S \frac{\Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}, \quad (2.4)$$

$$\Delta \sigma_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i, \sigma_0 = \sigma_{N+1} = 0..$$

Соотношение (4) – типичный пример записи общего выражения (3) для введенной геометрической плотностной модели среды. В силу его особой значимости для него вводится специальное обозначение:

$A(\mathbf{f}(s)) = u$ , подчеркивающее геометрический характер модели и наличие границ как основных параметров модели.

Соотношения (2-4) представляют собой уравнения связи между вводимыми параметризациями плотностной модели среды и моделью поля. На основе этих соотношений могут быть получены другие уравнения связей с другими моделями поля. Так, например, могут быть построены уравнения, связывающие плотностные модели среды и величины полного нормированного градиента в области вне источников поля либо высшими производными гравитационного потенциала. Эти соотношения представляют собой существенные идеализации и поэтому имеют дополнительное специальное название – операторы прямой задачи – общее название решений соответствующих уравнений математической физики. В частности, (1) – операторы прямой задачи гравиразведки в классе распределений плотности, а (4) – в классе плотностных границ. Чтобы эти соотношения включить в интерпретационный процесс, необходимо от них перейти к наблюдаемым. Этот этап, в соответствии с интерпретационной моделью, соответствует эталонирующим преобразованиям. Они состоят, в частности, в учете влияния масс, расположенных вне области  $V$ , включая гравитационное влияние асимптотически продолженных границ, ненулевых значений плотностей  $\sigma_0$  и  $\sigma_{N+1}$  в структурной модели, вообще говоря, несовпадение вертикальной и нормальной составляющих поля, влияние многих и многих других факторов, изучаемых в курсе «Гравиразведка». После того как с наблюдаемыми  $Y$  выполнены процедуры обработки и найдены соответствующие физические поля – правые части в (3), в частности в (4), можно ставить задачу реконструкции физической модели по найденной модели физического поля. Это суть постановка обратной задачи для соответствующего уравнения математической физики. Ее формальная запись такова – по заданному  $u$  и уравнению (3) необходимо реконструировать  $m \in M$  так, чтобы выполнялось условие:

$$A(m) = u, \quad m \in M. \quad (2.5)$$

Запись (5), равно как чаще всего ей эквивалентную (3), следует рассматривать как формальную. Прежде всего, ниоткуда не следует, что для данного конкретного  $u$  ее решение существует. Наоборот, чаще всего решения этой задачи как раз-то и не существует. Это связано с целой серией фактов. Во-первых, в процессе построения модели физического поля из наблюдаемых неизбежно допускались ошибки, которые могли «вывести результат» за пределы области допустимого. Во-вторых, при создании аппроксимационной модели легко можно было «не угадать», так что реальное распределение «лежит где-то в стороне» от сконструированного модельного класса. Наконец, сами наблюдаемые осложнены ошибками. Все это означает, что на  $M$  просто не окажется элемента, строго удовлетворяющего (5). Может оказаться, что такого элемента не существует и с заданной точностью, хотя наилучший в определенном смысле, конечно, существует. Но вслед за этим возникает и другой вопрос. Если этот наилучший существует, то один ли он и какое отношение имеет к реальности? Это очень непростые вопросы, требующие специального предметного рассмотрения. Очень важно то, что эти вопросы внеметодные – они общие для обратных задач во многих их постановках и для различных геофизических методов. При этом именно в геофизике, в отличие от общих методов интерпретации физического эксперимента, они имеют особо актуальное значение и своеобразное звучание.

### 2.1.3. Двухмерные аналоги уравнений

При решении задач разведочной гравиметрии зачастую бывает удобно предполагать, что свойства модели среды постоянны вдоль одной из горизонтальных осей, например  $Y$ . В этом случае и модель физического поля не зависит от соответствующей координаты (что, собственно, и является признаком выполнения этого условия). Полное представление о среде и поле в этом случае дает сечение изучаемого объекта любой из вертикальных плоскостей, ортогональных оси  $OY$ . Это условие называется гипотезой двухмерности. Трехмерная область  $V$ , в которой распределены источники, представляет собой цилиндрическую область с сечением  $S$ , и аналогом соотношения (2) служит:

$$A\sigma(s) = \iint_S \frac{(z - z_0)\sigma(x, z) dx dz}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} = \frac{u_z(x_0, z_0)}{2\gamma}, \quad (2.2a)$$

Для структурных плотностных моделей, в которой проекция области  $S$  на ось  $Ox$  есть интервал  $(a, b)$ , аналогом соотношения (4) будет:

$$A(\mathbf{f}(x)) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[ (x - x_0)^2 + (f_i(x) - z_0)^2 \right] dx = \frac{u_z(x_0, z_0)}{\gamma}, \quad (2.4a)$$

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i+1}.$$

Несколько вольно эти соотношения называют «двумерными аналогами» соотношений (2, 4). Операторное соотношение (3) и формальная постановка обратной задачи для двухмерного случая остаются неизменными.

#### 2.1.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Интеграл Пуассона

Уравнению Лапласа удовлетворяет не только потенциал гравитационного поля вне области, содержащий источники, но и все его производные вместе с их линейными комбинациями. Этому уравнению в свободном пространстве, т.е. в области, где отсутствуют источники, удовлетворяют и многие другие геофизические поля – компоненты напряженности магнитного поля, естественного электрического, теплового для установившегося температурного режима поля при постоянных электропроводности и теплопроводности среды. Уравнение Лапласа – это фундаментальное внеточечное уравнение в геофизике, а функции, ему удовлетворяющие, называются *гармоническими*.

Задачей Дирихле для уравнения Лапласа называется задача нахождения значений гармонической функции внутри области по ее граничным – краевым значениям на границе области. Ее также называют задачей аналитического продолжения потенциального поля. Это устоявшееся, но не совсем удачное название. Формально краевая задача Дирихле записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{v}) &= 0, \\ \mathbf{v} &\in V, \\ u|_{\Gamma} &= u_0. \end{aligned}$$

$\Gamma$  – граница области  $V$ .

На самом деле для однозначности ее решения необходимо добавление еще дополнительных условий. Однако в некоторых частных случаях достаточно простейших из них.

Частным случаем этой задачи является задача Дирихле для полупространства. Формулируется она следующим образом. Пусть плоскость  $E_0(z = 0)$  разбивает все пространство на нижнее  $E_-(z > 0)$ , в котором сконцентрированы все источники поля, и верхнее  $E_+(z \leq 0)$ , в котором источники заведомо отсутствуют. Гармоническая в области  $E_+$  функция  $u(x, y, z)$  задана своими краевыми значениями на  $E_0$ :  $u(x, y, 0)$ . Считаем, что  $u(x, y, 0)$  непрерывна на  $E_0$  и стремится к нулю на бесконечности. Тогда значения  $u_z(x, y, z)$  в любой точке области  $E_+$  находятся по  $u(x, y, 0)$  с помощью известного интеграла Пуассона, дающего решение задачи Дирихле для полупространства:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{u(x, y, 0) z_0 dx dy}{\left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2 \right]^{3/2}} = u(x_0, y_0, z_0). \quad (2.6)$$

В двухмерном случае интеграл Пуассона имеет вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x, 0) z_0 dx}{\left[ (x - x_0)^2 + z_0^2 \right]^{1/2}} = u(x_0, z_0). \quad (2.6a)$$

Каждое из приведенных соотношений может быть также, как и ранее, записано в операторной форме:

$$Au = y. \quad (2.7)$$

Расчет интеграла Пуассона как для двухмерного, так и для трехмерного случаев является типичной задачей из области решения уравнений математической физики. Она не содержит «подводных камней». Она имеет решение, это решение единственно и устойчиво зависит от начальных данных во всех имеющих смысл нормах. Степень гладкости продолженного поля, т.е.  $u(x_0, y_0, z_0)$  для (6) всегда выше, чем степень гладкости краевых значений  $u(x, y, 0)$ . Мы пока обращаемся к интуитивному пониманию смысла гладкости. Однако, эта задача может рассматриваться и как обратная задача – нахождения по известному  $u(x_0, y_0, z_0)$  или  $u(x_0, z_0)$  на некотором множестве в  $E_+$  значения этих функций на  $E_0$ . В операторной постановке (7) это соответствует расчету величины  $u$  под знаком оператора  $A$  по заданной правой части  $y$ . При попытке решения этой обратной задачи возникает целый «букет» неприятностей, которые почти очевидны. Они начинаются с того, что совсем не факт, что решение будет существовать для конкретных данных. И уже совершенно очевиден факт, что гладкость результата будет ниже и даже катастрофически ниже гладкости исходных данных. Решение будет неустойчиво, разваливаться от малейших вариаций исходных данных. Это проявление тех же эффектов, предупреждение о которых было сделано выше

## 2.2. Вычислительная томография

Слово томография происходит от греческого слова «τομος», что означает срез, долька. Задача томографии состоит в изучении физических характеристик среды по регистрируемым аномальным эффектам, связанным с прохождением излучения через вещество. Например, поглощением с коэффициентом поглощения  $\mu(x, y, z)$  или задержками пробега в связи с изменением скорости движения. Рассмотрим в качестве физической модели среды модель поглощения, описываемую как функцию  $\mu(x, y, z)$  пространственных координат  $(x, y, z)$ . Если в точке  $x = \{x_1, y_1, z_1\}$  расположен источник излучения интенсивностью  $I(x)$ , излучение распространяется из  $x$  в  $y = \{x, y, z\}$  по кривой  $L(x, y)$ , то интенсивность излучения  $I(y)$  в точке  $y$  в рамках линейной модели поглощения удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dI(l)}{dl} = -\mu(l)I(l), \quad (2.8)$$

где  $l$  – текущая точка на кривой, вдоль которой распространяется излучение. Решение этого уравнения:  $I(x, y) = I(x) \cdot \exp\left\{-\int_{L(x,y)} \mu(l)dl\right\}$  представляет собой фундаментальное уравнение, свя-

зывающее модель среды – распределение коэффициента поглощения  $\mu(x, y, z)$  и модель поля – интенсивность излучения  $I(x, y)$  в точках регистрации  $y = \{x, y, z\}$ . В частности:

$$\int_{L(x,y)} \mu(l)dl = p(x, y),$$

где  $p(x, y) = \ln\left(\frac{I(x)}{I(x, y)}\right)$ .

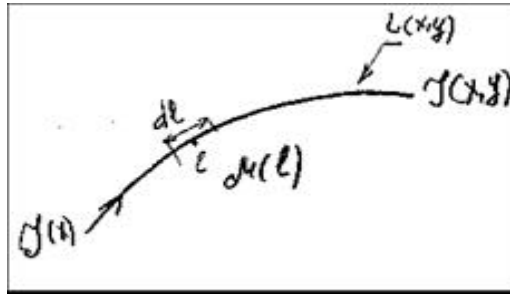


Рис. 2.3 Движение вдоль луча

Если теперь множество точек  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ , в которых возбуждается излучение, пробегает некоторое многообразие  $G_1$ , а множество детекторов  $\mathbf{y} = \{x, y, z\}$  излучения находится на многообразии  $G_2$ , то  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – это множество интегралов коэффициента поглощения  $\mu(x, y, z)$  вдоль линий  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

В зависимости от того, как взаимно расположены источники и приемники излучения  $G_1$  и  $G_2$ , возникает та либо иная схема сканирования. В приложениях рентгеновской диагностики – это параллельная или веерная схема, однако в задачах геофизики она чаще всего продиктована внешними, слабо контролируруемыми факторами и зачастую определяется не требованиями условий разрешимости задачи реконструкции коэффициента поглощения, а обстоятельствами возможности проведения измерения. Выписанное уравнение (8) и его решение описывают лишь часть, да и то простейшую, процессов, происходящих с излучением при прохождении его в веществе. Сам закон поглощения может быть значительно сложнее, но что самое важное, поглощение сопровождается рассеянием излучения, а это более сложный вопрос.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

Пусть ставится задача изучения объекта в сечении плоскостью  $XOY$  и пусть линии  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  прямые, не зависящие от свойств коэффициента поглощения.  $\mathbf{x} = \{x, y\}$ ,  $\mathbf{y} = \{x, y\}$ . Предполагается следующая схема измерения. Детектор и источник проходят дискретно вдоль объекта, образуя параллельную систему линий  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . После покрытия всего объекта система источник-детектор поворачивается относительно исходного положения на угол  $\omega$ , после чего процесс параллельного сканирования повторяется.

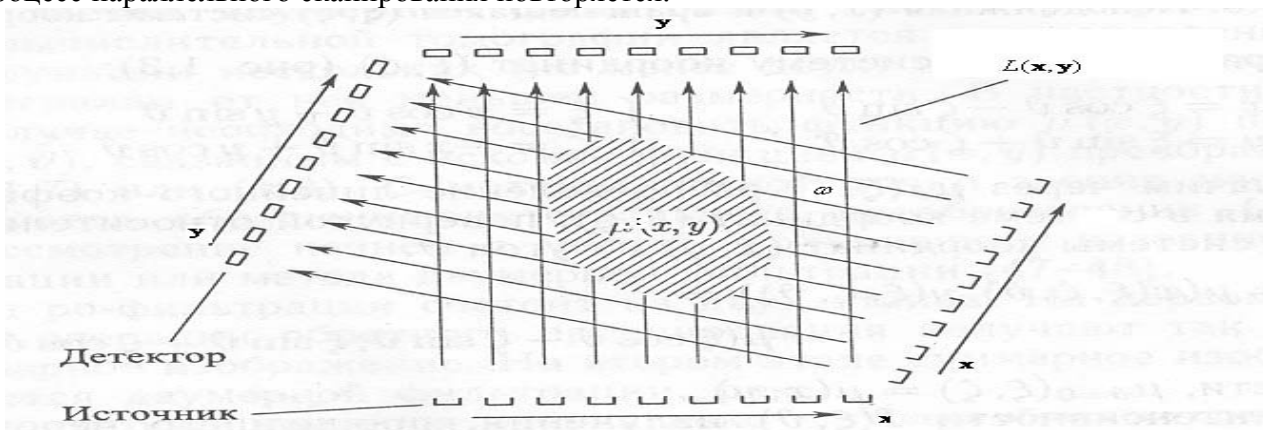


Рис. 2.4. Схема установки сканирования [1]

Так продолжается до тех пор, пока вся система источник-детектор не повернется относительно первоначального уровня на угол  $180^\circ$ . Для описания такой параллельно вращающейся системы сканирования введем вращающуюся относительно исходной систему координат:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \omega - \zeta \sin \omega & \xi &= x \cos \omega + y \sin \omega \\ y &= \xi \sin \omega + \zeta \cos \omega & \zeta &= -x \sin \omega + y \cos \omega \end{aligned}$$

Тогда проекция  $p$  оказывается функцией новых координат:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi \cos \omega - \zeta \sin \omega, \xi \sin \omega + \zeta \cos \omega) d\zeta = p(\xi, \omega). \quad (2.9)$$

Последнее соотношение называется преобразованием Радона. Оно было введено И. Радонем в 1917 году. Реконструкция коэффициента поглощения таким образом оказывается задачей обращения преобразования Радона. В силу естественных физических ограничений на условия сканирующей аппаратуры проекция задана не везде, где хотелось бы, и, кроме того, с погрешностями, имеющими весьма разнообразную природу. В этой связи возникает проблема существования и единственности обратного преобразования на приближенных данных. Для того чтобы представить себе эту задачу следует найти ее решение в «теоретическом» идеализированном случае. Приведем соответствующие результаты, отсылая за подробностями к работам [1, 2].

От проекции  $p(\xi, \omega)$  перейдем к изображению  $g(x, y)$  по следующему правилу (*обратные проекции*):

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x \cos \omega + y \sin \omega, \omega) d\omega.$$

Тогда связь между коэффициентом поглощения и  $\mu(x, y)$  и изображением  $g(x, y)$  установлена соотношением:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(x_0, y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} dx_0 dy_0 = g(x, y). \quad (2.10)$$

В последнем соотношении заданной величиной – моделью физического поля служит изображение и  $g(x, y)$ , получаемое после обработки (правило обратной проекции) измеренных проекций  $p(\xi, \omega)$ . Требуемая реконструкции модель поглощения  $\mu(x, y)$  связана с  $g(x, y)$  уравнением (10). Уже из приведенного соотношения видно, что изображение и поглощение связаны между собой сингулярной зависимостью и процедуры вычисления будут сталкиваться с практическими проявлениями этих сингулярностей – обращением в ноль знаменателей, обращением в бесконечность или неразумно большие величины результата расчетов. Более наглядно возникающие проблемы иллюстрируются использованием другого, более конструктивного приема анализа уравнения (9), который называется методом *фильтрованных обратных проекций*. Этот метод основан на том, что заданные наблюдаемые проекции  $p(\xi, \omega)$  подвергаются фильтрации с подбираемым ядром  $h(\xi)$ :

$$f(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi_0, \omega) h(\xi - \xi_0) d\xi_0,$$

так что искомая функция поглощения  $\mu(x, y)$  вычисляется по правилу обратных проекций, аналогичному введенному выше:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x \cos \omega + y \sin \omega, \omega) d\omega.$$

Можно показать (это выполнено в работе С.А. Терещенко, которой следуем и далее), что:

$$h(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| e^{i\chi\xi} d\chi.$$

Последний интеграл является расходящимся. Здесь явно проявляется проблема некорректности в вычислениях. Приближенное вычисление может быть осуществлено, например, за счет введения конечных пределов интегрирования:

$$h_1(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\chi_0}^{+\chi_0} \chi |e^{i\chi\xi} d\chi = \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\chi_0\xi)}{\chi_0\xi} - \frac{2 \sin^2(\frac{\chi_0\xi}{2})}{(\chi_0\xi)^2} \right].$$

Функция  $h_1(\xi)$  отличается от  $h(\xi)$ , и это отличие связано с отбрасыванием спектральных характеристик  $h(\xi)$ , находящихся вне интервала  $[-\chi_0, \chi_0]$ .

Поскольку реальные измерения  $p$  заданы дискретно с шагом  $\Delta\xi : p(n \cdot \Delta\xi, \omega), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то таким же образом будет определена и функция ядра приближенного фильтра:  $h_1(\xi_n) = h_1(n \cdot \Delta\xi)$ . В соответствии с теоремой Котельникова непрерывная функция  $\varphi(x)$ , имеющая ненулевой спектр на интервале  $[-\chi, +\chi]$ , точно представима своими дискретными отсчетами:

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi\left(\frac{\pi \cdot n}{\chi_0}\right) \frac{\sin\left(\chi_0\left(x - \frac{\pi \cdot n}{\chi_0}\right)\right)}{\chi_0\left(x - \frac{\pi \cdot n}{\chi_0}\right)}.$$

Тогда отсчеты должны сниматься с дискретностью  $\Delta\xi = \frac{\pi}{\chi_0}$ :

$$h_1(n \cdot \Delta\xi) = \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\chi_0 n \cdot \Delta\xi)}{\chi_0 n \cdot \Delta\xi} - \frac{2 \sin^2(\frac{\chi_0 n \cdot \Delta\xi}{2})}{(\chi_0 n \cdot \Delta\xi)^2} \right] = \begin{cases} \frac{\chi_0^2}{4\pi} & (n = 0) \\ 0 & (n = 2 \cdot k; k = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ -\frac{\chi_0^2}{\pi^3} \cdot n^2 & (n = 2k + 1; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

Полученное выражение определяет ядро дискретного фильтра для вычисления обратных проекций и последующей реконструкции коэффициента поглощения в виде дискретного ряда Фурье. Этот фильтр называется фильтром Рамачандрана и Лакшминараянана.

Другим частным, но исключительно важным для геофизических приложений случаем служит ситуация, при которой в уравнении

$$\int_{L(x,y)} \mu(l) dl = p(x,y)$$

траектория  $L(x,y)$  распространения излучения или, иначе, сигнала зависит от самого коэффициента  $\mu(x,y,z)$ . Если принять известным некоторое начальное приближение к функции  $\mu(x,y,z) - \mu_0(x,y,z)$ , для которой известны траектории движения  $L_0(x,y)$ , то приближенно можно записать:

$$\int_{L_0(x,y)} \Delta\mu(l) dl = p(x,y) - \int_{L_0(x,y)} \mu(l) dl.$$

В правой части последнего равенства стоит известная функция, а определению подлежит приращение  $\Delta\mu(x) = \mu(x) - \mu_0(x)$ . Приведенное соотношение является базовым для ультразвуковой, акустической и сейсмической томографии. При этом соответствующие параметры просто по-иному называются – функции медленности, показатель преломления, временные задержки.



## 2.3. Сейсмические методы

Уравнения распространения сейсмических волн – это уравнения распространения волн малых смещений относительно точки равновесия в идеально упругой изотропной среде. Они легко получаются из закона сохранения импульса, дополненного уравнениями состояния, связывающими компоненты тензора напряжений и деформаций элемента объема. Эти уравнения состояния называются законом Гука. Сами по себе они носят весьма приближенный характер, поскольку не учитывают вязкопластические, релаксационные свойства среды. Основаны на линейных идеализированных законах. Например, идеализация состоит в предположении, что на растяжение среда работает так же, как и на сжатие. Этих допущений столь много и они носят столь неочевидный характер, что получаемые уравнения распространения волн скорее носят характер наводящих соображений на описание событий реальности, эффективных законов, а вводимые скоростные параметры должны восприниматься скорее как эффективные параметры среды. На основе волновых уравнений, описывающих распространение деформаций и напряжений в среде, может быть построена лучевая теория распространения возмущений, которая характеризует «геометрию» процесса распространения волн. Лучевая теория является основой, на которой конструируются вычислительные схемы расчета времен прихода сейсмических колебаний – это наблюдаемые, зависящие от известных параметров скоростной модели среды.

### 2.3.1. Волновые уравнения

Рассмотрим процессы, происходящие при деформации элементарного объема, для определенности куба в трехмерном пространстве.

Под действием сил элементарный объем претерпевает деформации, в результате которых точка  $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$  переходит в точку  $\mathbf{x}'$ . Напомним, что здесь и далее, как это принято в физической литературе, переменная, индексированная латинской буквой, например  $j$ , означает компоненты этой переменной по координатным осям  $x^j$ . Причем, пока не имеет значения, используется верхний или нижний индекс. Кроме того, по дважды повторяющемуся индексу проводится суммирование по всем его значениям. Так что выражение  $\frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k$  следует

понимать как  $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k$ . Вектор деформации равен  $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ . Ребра элементарного куба до деформации были  $dx^i$ . После деформации –  $dx'^i = dx^i + du^i$ . Элемент длины между точками до деформации был равен

$$dl = [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]^{1/2}.$$

После деформации этот элемент длины стал:

$$dl' = \left[ \sum_{i=1}^3 (dx^i + du^i)^2 \right]^{1/2},$$

поскольку

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k,$$

то

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k dx^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial x^l} x^k dx^l.$$

Второй член можно переписать в более симметричном виде:

$$\left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right).$$

Тогда окончательно  $dl'^2 = dl^2 + 2e^{ik} dx^i dx^k$ , где:

$$e^{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right).$$

Величина  $e^{jk}$  называется тензором деформаций. По определению он симметричен. В том случае, когда рассматриваются малые деформации, членом  $\frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^i}$  можно пренебречь, поскольку он, будучи произведением малых величин, есть величина большого порядка малости. Тогда имеем:

$$e^{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right).$$

Найдем теперь величину смещения  $\mathbf{du}$ : Пусть  $W = \{w^1; w^2; w^3\} = \{w^x; w^y; w^z\}$ :

$$w^x = \frac{\partial u^z}{\partial y} - \frac{\partial u^y}{\partial z};$$

$$w^y = \frac{\partial u^x}{\partial z} - \frac{\partial u^z}{\partial x};$$

$$w^z = \frac{\partial u^y}{\partial x} - \frac{\partial u^x}{\partial y};$$

Простым вычислением проверяется справедливость такого равенства:

$$du^i = e^{ik} dx^k + q^k$$

$$\mathbf{q} = \{q^1; q^2; q^3\}; \quad \mathbf{q} = [\text{rot } \mathbf{u} \mid \mathbf{dx}]$$

Здесь  $\mathbf{q}$  – векторное произведение векторов  $\text{rot } \mathbf{u}$  и  $\mathbf{dx}$ :

$$q^1 = w^2 dx^3 - w^3 dx^2;$$

$$q^2 = w^3 dx^1 - w^1 dx^3;$$

$$q^3 = w^1 dx^2 - w^2 dx^1;$$

Вектор  $\mathbf{g}$  описывает вращения, претерпеваемые при деформациях. В него не входят диагональные компоненты тензора деформаций, и, следовательно, компоненты  $e^{ii}$  описывают растяжения – сжатия.

Величина объемного сжатия-растяжения описывается с помощью параметра, называемого дилатацией  $Q$ . Дилатация характеризует относительное изменение объема и численно равна:

$$Q = \text{div } \mathbf{u} = e^{ij} \delta(i, j) = e^{11} + e^{22} + e^{33}.$$

Закон Гука устанавливает связь между компонентами тензора деформации и тензора напряжений. Предполагая эту связь линейной, получим:

$$\tau^{ij} = c_{iklj} e^{kj}.$$

Таким образом, в рамках линейного приближения связи между деформациями и напряжениями следует эту связь задать в виде четырехмерной (четырёхиндексной) матрицы, каждый индекс которой меняется от 1 до 3. Коэффициентов этой матрицы оказывается 81. Однако, учитывая симметрию тензоров деформаций и напряжений, число этих независимых компонент снижается до 36.

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений в среде без анизотропии, т.е. в среде, где свойства среды могут быть переменными по координатам, но не зависят от того, из какого направления данная координата рассматривается, описываются с помощью двух упругих констант, одна из которых ответственна за продольные деформации, другая – за деформацию сдвигового типа.

Используют три системы упругих параметров  $\{\lambda, \mu\}; \{\sigma, E\}; \{\kappa, \mu\}$ .

Здесь  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламэ,  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $k$  – модуль всестороннего сжатия, устанавливающий связь между дилатацией и давлением:

$$P = -kQ.$$

Связь между этими параметрами приведена в таблице 1.

Таблица 1

$\lambda$	$\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$	$k - \frac{2}{3}\mu$
$\mu$	$\frac{E}{2(1+\sigma)}$	$\mu$
$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$E$	$\frac{3k\mu}{k+\mu} \frac{1}{3}$
$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\sigma$	$\frac{3k-2\mu}{2(3k+\mu)}$
$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{E}{1-2\sigma}$	$k$

В рамках идеально упругой изотропной модели среды закон Гука, устанавливающий связь между компонентами тензора деформаций и напряжений, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau^{xx} &= \lambda Q + 2\mu e^{xx}; & \tau^{xy} &= \mu e^{xy}; \\ \tau^{yy} &= \lambda Q + 2\mu e^{yy}; & \tau^{xz} &= \mu e^{xz}; \\ \tau^{zz} &= \lambda Q + 2\mu e^{zz}; & \tau^{yz} &= \mu e^{yz}; \end{aligned} \quad (11)$$

Можно выразить тензор деформаций через тензор напряжений, что даст следующую форму закона Гука для нормальных компонент:

$$\begin{aligned} e^{xx} &= \frac{1}{E} \tau^{xx} - \frac{\sigma}{E} (\tau^{yy} + \tau^{zz}); \\ e^{yy} &= \frac{1}{E} \tau^{yy} - \frac{\sigma}{E} (\tau^{xx} + \tau^{zz}); \\ e^{zz} &= \frac{1}{E} \tau^{zz} - \frac{\sigma}{E} (\tau^{yy} + \tau^{xx}); \end{aligned} \quad (2.12)$$

Влияние естественных физических условий на величину упругих констант состоит в том, что  $\lambda > 0$ ;  $0 \leq \sigma \leq 0.5$ .

Приведенные упругие константы в сформулированных законах «работают» как на растяжение, так и на сжатие. В реальных средах, однако, наблюдается эффект разномодульности, состоящий в том, что упругие константы, измеренные на растяжении, отличаются от соответствующих констант, измеренных на сжатии. Так, для зернистого графита модуль Юнга, измеренный при растяжении, на 20% меньше модуля упругости, измеренного при сжатии. Для чугуна модуль Юнга при сжатии на 20% выше, чем при растяжении. Для бронзы аналогичные цифры составляют 10%. Для стали – 5%.

Пусть  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  – вектор смещения точки  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . Закон сохранения импульса приводит к уравнению равновесия:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^j} \tau^{ij} + g_i, \quad (2.13)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$\mathbf{g}$  – объемные силы, действующие на элемент среды. Считая, что плотность  $\rho$  не меняется со временем, и подставляя в уравнение (13) закон Гука в форме (11), выражающий напряжения

через деформации, а вместо компонент тензора деформаций – его выражения через вектор смещений, получим:

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} + \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + [\nabla\mu | \operatorname{rot} \mathbf{u}] + 2 \langle \nabla\mu | \nabla \rangle \mathbf{u} + \mathbf{g} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} \quad (2.14)$$

Формула (14) представляет собой записанную в векторной форме систему из трех уравнений для трех компонент вектора смещений. Это уравнение называют волновым или уравнением поля смещений. Следует обратить внимание, во-первых, на исключительную сложность этих уравнений, а во-вторых, на то обстоятельство, что в него входят производные от параметров упругости. В случае разрыва в этих функциях и обращения производных в бесконечность это уравнение требует уточнения. Разрыв в значении параметров упругости – дело обычное в используемых геофизических моделях геологических сред. Разрывными значениями характеризуются все слоистые среды. В случае однородной среды все пространственные производные от упругих констант обращаются в ноль, и уравнение для поля смещений примет вид:

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Учитывая, что  $\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ , получим:

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.16)$$

Поле смещений, как любое поле, можно разложить на потенциальную и вихревую компоненты. Тогда можно записать:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s$ , где  $\mathbf{u}_p = \operatorname{grad} \phi$ ;  $\mathbf{u}_s = \operatorname{rot} \mathbf{f}$ .  $\phi$  и  $\mathbf{f}$  – соответственно, скалярный и векторный потенциалы.

Весь процесс смещения можно представить в виде суперпозиции двух компонент: компоненты, связанной с изменением объемов, которую называют продольными смещениями, и компоненты, связанной с вращениями, которую называют поперечными смещениями или сдвигами. Расщепление полного поля смещения на потенциальную и вихревую части как раз и соответствует выделению продольной и поперечной компонент. Покажем это.

Из условия потенциальности для  $\mathbf{u}_p = \{u_{px}; u_{py}; u_{pz}\}$  следует:

$$\omega_z = \frac{\partial u_{py}}{\partial x} - \frac{\partial u_{px}}{\partial y} = 0;$$

$$\omega_x = \frac{\partial u_{pz}}{\partial y} - \frac{\partial u_{py}}{\partial z} = 0;$$

$$\omega_y = \frac{\partial u_{px}}{\partial z} - \frac{\partial u_{pz}}{\partial x} = 0.$$

Но последнее означает, что сдвигов-вращений в компоненте  $\mathbf{u}_p$  нет. Деформации порождают только изменение объема вдоль распространения возмущений.

Далее для компоненты  $\mathbf{u}_s$  имеем:  $\operatorname{div} \mathbf{u}_s = 0$ . Но последнее означает, что тензор деформаций, соответствующий смещениям  $\mathbf{u}_s$ , имеет нулевые диагональные элементы. Отсюда приходим к выводу о том, что смещения, порожденные полем  $\mathbf{u}_s$ , не сопровождаются изменением объема. Следовательно, это чистые сдвиги.

Поскольку  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ ;  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$  и  $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ , получим после подстановки представления поля смещений в виде потенциальной и вихревой части:

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad} \Delta \phi - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{f} + \mathbf{g} = \rho \frac{\partial^2 (\operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \mathbf{f})}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Положим, что внешние силы отсутствуют и колебания в среде распространяются свободно. Тогда  $\mathbf{g} = 0$ , и уравнение (17) распадается на два:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\text{grad } \Delta\phi &= \rho \frac{\partial^2 \text{grad } \phi}{\partial t^2}; \\ -\mu \text{rot rot rot } \mathbf{f} &= \rho \frac{\partial^2 \text{rot } \mathbf{f}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Т.к.  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ , а  $\text{div rot} = 0$ , то последнее уравнение переписывается:

$$\mu \text{rot } \Delta \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \text{rot } \mathbf{f}}{\partial t^2}.$$

Тогда окончательно для скалярного и векторного потенциалов поля смещений получим следующие уравнения:

$$\Delta\phi = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi; \quad (2.18)$$

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

Здесь  $V_p = \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right]^{1/2}$  – параметр, который называется скоростью распространения продольных волн.

$V_s = [\mu / \rho]^{1/2}$  называется скоростью распространения поперечных волн<sup>1</sup>. Уравнение (19) – это система из трех уравнений для каждой из компонент векторного потенциала  $\mathbf{f}$ .

Уравнению вида (18) удовлетворяет и дилатация  $Q$ . Это легко показать. Для этого надо вычислить  $\text{div}$  от правой и левой части этого уравнения. Поскольку  $Q = \text{div } \mathbf{u}$ , а  $\text{div}(\text{rot}) \equiv 0$ , получим для дилатации уравнение

$$\Delta Q = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q. \quad (2.20)$$

Таким образом, в однородной среде происходит расщепление движения на две составляющие: расширение-сжатие, распространяющееся со скоростью  $V_p$ , и сдвиговые деформации, распространяющиеся с меньшей скоростью  $V_s$ . Первый тип движения называется продольными, а второй – поперечными волнами. В средах, в которых  $\mu = 0$ , а сюда относятся жидкости, поперечные волны отсутствуют. Физически это означает отсутствие упругости в жидкости по отношению к сдвиговым деформациям. В случае неоднородных сред о существовании расщепления движений на независимые продольное и поперечное на основании анализа уравнения (16) сделать нельзя. В этой связи искусственное введение переменной скорости в уравнения (18, 19) строго говоря, необоснованно и является эвристическим приемом. Однако, этот прием зачастую оправдан экспериментально. В этой связи представляется интересным вопрос о том, какого сорта неоднородности в среде следует рассматривать для того, чтобы введение переменной скорости распространения волн было теоретически обоснованным. Этот вопрос, в частности, рассматривается в приложении 4.

При получении волновых уравнений (16) закон сохранения импульса был дополнен уравнением состояния в форме исключения компонент тензора напряжений с помощью компо-

<sup>1</sup> Легко видеть, что уравнение типа (18) действительно описывает процесс распространения волны со скоростью  $V_p$ . Действительно, если  $\psi(t)$  – некоторая функция, дважды дифференцируемая по  $t$ , а  $R$  – расстояние от начала координат до заданной точки  $x, y, z$ , то функция  $\phi(R, t) = \psi(t - R/V_p) / R$  удовлетворяет уравнению (18). Не трудно видеть, что эта функция описывает распространение сферической волны, а параметр  $V_p$  играет роль скорости. Функция  $\psi(t)$  описывает профиль волны – характер исходного возбуждения в начале координат.

нент тензора деформаций. Однако это же уравнение можно использовать и для обратной замены. С помощью такого приема можно получить уравнения движения не для компонент деформаций, а для компонент тензора напряжений в неоднородной среде. Причем в этом случае уравнения, описывающие волновой процесс распространения компонент тензора напряжений в среде, не будут содержать производных от параметров упругости среды.

Перепишем уравнение равновесия в форме:

$$\rho \frac{\partial u^x}{\partial t} - \operatorname{div} \tau^x = g^x, \quad (2.21-a)$$

$$\rho \frac{\partial u^y}{\partial t} - \operatorname{div} \tau^y = g^y, \quad (2.21-b)$$

$$\rho \frac{\partial u^z}{\partial t} - \operatorname{div} \tau^z = g^z. \quad (2.21-c)$$

Здесь:

$$\tau^x = \{\tau^{xx}, \tau^{xy}, \tau^{xz}\}, \tau^y = \{\tau^{yx}, \tau^{yy}, \tau^{yz}\}, \tau^z = \{\tau^{zx}, \tau^{zy}, \tau^{zz}\}.$$

Предположим, что  $\mathbf{g} = 0$ , а плотность слабо меняется при изменении пространственных координат так, что ее производные можно считать нулевыми. Тогда, дифференцируя первое уравнение последней системой по  $x$ , второе – по  $y$ , третье – по  $z$ , а величины

$$\frac{\partial u^x}{\partial x} = e^{xx}, \quad \frac{\partial u^y}{\partial z} = e^{yz}, \quad \frac{\partial u^z}{\partial z} = e^{zz}$$

заменяя через закон Гука (12) на компоненты тензора напряжений, получим три уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \tau^x = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tau^{xx} - \sigma(\tau^{yy} + \tau^{zz})); \quad (2.22-a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \tau^y = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tau^{yy} - \sigma(\tau^{xx} + \tau^{zz})); \quad (2.22-b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \tau^z = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tau^{zz} - \sigma(\tau^{yy} + \tau^{xx})); \quad (2.22-c)$$

Далее, дифференцируя (21-a) по  $y$ , (21-b) – по  $x$ , складывая результаты и исключая с помощью закона Гука в форме (2.12) величину  $e^{xy}$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \tau^x + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \tau^y = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tau^{xy}; \quad (2.22-d)$$

Аналогичным приемом получим еще два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \tau^z + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \tau^x = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tau^{xz}; \quad (2.22-e)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \tau^y + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \tau^z = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tau^{yz}; \quad (2.22-f)$$

Уравнения (22) представляют собой шесть уравнений относительно шести независимых компонент тензора напряжений. Эти уравнения распадаются на 2 группы. Первая группа – уравнения (22-a-c) – ответственна преимущественно за перенос диагональных компонент тензора напряжений. Вторая – (22-d-f) – характеризует преимущественный перенос недиагональных компонент. В этих уравнениях, а они относятся к неоднородным средам (изотропным, идеально упругим), не содержится производных от параметров среды, а сами эти уравнения, как это легко видеть, обладают высокой степенью симметрии.

Коэффициенты, стоящие при второй производной в правой части уравнений (22-d-f) ассоциируются с величиной, обратной к квадрату скорости распространения касательных напряжений. Эта скорость в точности равна скорости распространения поперечных волн  $V_S$ . Однако, в эту систему входят и нормальные компоненты тензора напряжений. Покажем, что в предель-

ном случае уравнения (22-а-с) дают описание распространению продольной волны напряжений с традиционной скоростью распространения продольной волны для деформаций.

Плоской волной называется волновой процесс, компоненты которого зависят лишь от одной пространственной координаты, вдоль которой и происходит распространение волны. Ортогонально этому направлению все параметры волнового процесса постоянны. Рассмотрим плоскую волну в неограниченной среде, распространяющуюся в направлении оси ОХ. Тогда все производные по  $z, y$  в уравнениях (22-а-с) обращаются в ноль, и само уравнение приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tau^{xx} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tau^{xx} - \sigma(\tau^{yy} + \tau^{zz})), \\ \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tau^{yy} - \sigma(\tau^{xx} + \tau^{zz})) &= 0 \\ \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tau^{zz} - \sigma(\tau^{yy} + \tau^{xx})) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Из последних двух уравнений, принимая во внимание естественные физические ограничения на характер поведения тензора напряжений со временем<sup>2</sup>, получаем:

$$\begin{aligned} \tau^{yy} &= \sigma(\tau^{xx} + \tau^{zz}); \\ \tau^{zz} &= \sigma(\tau^{yy} + \tau^{xx}), \end{aligned}$$

откуда

$$\tau^{yy} = \frac{\sigma}{1-\sigma} \tau^{xx} = \tau^{zz}.$$

Подставляя найденные выражения нормальных компонент в первое уравнение системы (23), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tau^{xx} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tau^{xx} \left( 1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma} \right).$$

Тогда окончательно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tau^{xx} = \frac{\rho}{E} \left( \frac{(1+\sigma) \cdot (1-2\sigma)}{1-\sigma} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tau^{xx}.$$

Переходя от системы упругих констант  $E, \sigma$  к системе параметров Ламе, получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tau^{xx} = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tau^{xx}.$$

Где  $V_p = \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right]^{1/2}$  – скорость распространения продольных волн.

Таким образом, приходим к выводу о распространении давления, связанного с нормальными компонентами тензора напряжений со скоростью продольной волны.

Анализ уравнений динамики напряжений позволяет нарисовать следующую качественную картину распространения волн в неоднородных средах. В неоднородной среде, как и в однородной, происходит распространение продольной волны со скоростью  $V_p$ . Однако в отличие от однородного случая, продольная волна в неоднородной среде порождает в каждой точке поперечные волны, которые далее распространяются со своей скоростью  $V_s$ , вызывая вновь вторичные продольные волны со скоростью  $V_p$ . Таким образом, в неоднородной среде распространяется целый пакет возмущений, передний фронт которого связан с продольной волной, задний – с поперечной, а в области между ними присутствует смесь продольных и по-

<sup>2</sup> В начальный момент времени среда находилась в свободном ненапряженном состоянии. После завершения процесса распространения среда вновь будет находиться в ненапряженном состоянии.

перечных колебаний. Расчленение этого пакета волн на чисто продольную и чисто поперечную волну происходит в однородных средах, где нет вторичных волн.

### 2.3.2. Лучевая теория сейсмических волн

Вернемся к уравнению равновесия:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \tau^{ij} + g_i, \\ i = 1, 2, 3$$

Используя связь между давлением и дилатацией для гидростатических давлений (среда представляет собой газ либо жидкость и волны – акустические):  $P = k \partial_j u_j$  получим:

$$\rho \partial_{tt} u^i = -\partial_i P + g_i.$$

Использовано обозначение:  $\partial_k, \partial_{k,j} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}$ .

В отсутствие внешних сил дифференциальное уравнение распространения акустических волн примет вид:

$$\partial_{tt} P = k \partial_i \left[ \frac{1}{\rho} \partial_i P \right].$$

Рассмотрим поле давления в виде:  $P(r, t) = A(r) \delta[t - \theta(r)]$ , где  $\delta(x)$  – дельта Функция Дирака. Его спектр по временной координате  $p(r, \omega) = A(r) e^{i\omega\theta(r)}$ .

*Волновые фронты* – это поверхности равной фазы  $\theta(r) = t$  – постоянные значения времени пробега  $\theta(r)$ . Лучи – нормали к волновым фронтам. Таким образом,  $\theta$  определяет геометрию лучей,  $A$  – уменьшение энергии волны. Подставляя в уравнение распространения акустических волн выражение для спектра давления, сохраняя только члены с  $\omega$  и  $\omega^2$  (высокочастотное приближение), после деления на  $\omega^2$  получим

$$-A e^{i\omega\theta} = k \left[ \partial_i \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{iA \partial_i \theta}{\omega} + \frac{1}{\rho} \frac{iA \partial_{tt} \theta}{\omega} + \frac{2}{\rho} \frac{i \partial_i A \partial_i \theta}{\omega} - \frac{1}{\rho} (\partial_i \theta)^2 A \right] e^{i\omega\theta}.$$

Устремляя  $\omega$  к бесконечности, после сокращений находим:

$$(\partial_i \theta)^2 = \frac{\rho}{k} = \frac{1}{c^2}. \quad (2.24)$$

Последнее уравнение называют *уравнением Эйконала*, определяющим положение волнового фронта  $\theta$ . Уравнения Эйконала определяют кинематику волнового поля. Из него следует, что  $c \nabla \theta$  – единичный вектор. Он перпендикулярен к волновому фронту и, следовательно, по определению параллелен лучу. Величина  $c$  имеет смысл скорости распространения возмущения. Приведенная форма уравнения Эйконала позволяет найти положение волнового фронта, однако удобнее иметь уравнение, описывающее геометрию лучей.

Пусть  $d\mathbf{r}$  – касательная к лучу с элементом длины, обозначаемым  $ds$ . Тогда тот же единичный вектор  $c \nabla \theta$  можно записать как  $d\mathbf{r}/ds$ :

$$\nabla \theta = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

С другой стороны,  $\mathbf{n} \cdot \nabla \theta = d\theta/ds = 1/c$  и  $d(\nabla \theta)/ds = \nabla(d\theta/ds)$ , откуда получаем дифференциальное уравнение второго порядка для лучей:

$$\nabla \left( \frac{1}{c} \right) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right]. \quad (2.25)$$

Для численной реализации удобно преобразовать (25) в систему уравнений первого порядка. Обозначив  $p_i = \frac{1}{c} \frac{dx_i}{ds}$ , получим:



$$p_i = \frac{1}{c} \frac{dx_i}{ds}, \quad (2.26)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{c} \right).$$

Рассмотрим кинематику волнового поля в более общем, чем акустический, случае.

Полагая  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})\delta(t - \theta(\mathbf{r}))$ :  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{i\omega\theta(\mathbf{r})}$ , подставляя это выражение в (14), деля все на  $\omega^2$ , устремляя  $\omega \rightarrow \infty$ , получим после сокращения членов:

$$-\rho A_i = -(\lambda + \mu)\partial_i\theta\partial_j\theta A_j - \mu(\partial_j\theta)^2 A_i,$$

или в векторных обозначениях:

$$-\rho\mathbf{A} + (\lambda + \mu)\nabla\theta(\nabla\theta \cdot \mathbf{A}) + \mu|\nabla\theta|^2\mathbf{A} = 0.$$

Последнее уравнение содержит три члена, два из которых направлены вдоль  $\mathbf{A}$ , а один – вдоль  $\nabla\theta$ . Очевидно, это уравнение можно удовлетворить только в том случае, если все ненулевые компоненты параллельны. Это будет выполнено в том случае, когда:

$$\mathbf{A} = \text{const} \cdot \nabla\theta \rightarrow |\nabla\theta|^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{V_p^2}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla\theta = 0 \rightarrow |\nabla\theta|^2 = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{V_s^2}.$$

Полученные уравнения – это уравнения Эйконала, полностью аналогичны друг другу и уравнению (24). Различия состоят лишь в выражении для скорости через упругие константы. Формальное совпадение всех уравнений, отличающихся лишь выражением для скорости, гарантирует для любой упругой среды универсальность методик построения лучей.

Рассмотренные модели среды без симметрии (обычно называемых *горизонтально-неоднородными* моделями Земли) и соответствующие им системы дифференциальных уравнений необходимо решать численными методами. Поскольку в реальных исследованиях обычно используются большие объемы данных, очень важна эффективность численных алгоритмов расчета лучей. Однако эти алгоритмы реализуемы и определяют отображение скоростных параметров модели  $V(\mathbf{x})$  в наблюдаемые параметры времен  $T(s)$  прихода соответствующих волн в точки наблюдения  $s$ , распространяющихся вдоль лучей. Это алгоритмически определенное отображение можно записать:

$$A(V(\mathbf{x})) = T(s).$$

Таким образом, скоростная модель среды, заданная в виде той либо иной параметризации скоростной функции  $V(\mathbf{x})$ , отображается с помощью лучевых уравнений, а это уравнения математической физики, в физическое поле – поле времен. Отображение называется кинематическим уравнением. Наблюдаемые – это времена прихода волн от заданной системы источников в заданную систему приемников возбуждения. Может быть поставлена обратная задача – реконструкции скоростного закона по заданному полю времен. Это обратная кинематическая задача сейсморазведки. Ее свойства могут быть сопоставлены со свойствами задачи томографии при неполных данных.

Для процедур вычисления может быть полезен эквивалент построенных уравнений для сейсмического луча – *принцип Ферма*, утверждающий, что геометрия сейсмического лучевого пути такова, что время пробега между двумя точками стационарно (чаще всего минимально). Покажем это. Время пробега  $dt$  вдоль отрезка луча  $d\mathbf{r}$  равно:

$$dt = \frac{|d\mathbf{r}|}{c}.$$

Для возмущенной лучевой траектории  $d\mathbf{r}$  перейдет в  $d\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , а скорость изменится до  $c + \delta c$ . Изменение времени пробега вдоль элементарного интервала равно:

$$dt + \delta dt = \frac{d\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}}{c + \delta c} = \left| d\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \right| \left[ \frac{1}{c} + \delta \left( \frac{1}{c} \right) \right].$$

Далее  $|d\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}| = |d\mathbf{r}| + \frac{d\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} = \mathbf{n} \cdot (d\mathbf{r} + d\delta\mathbf{r})$ . Отсюда с точностью до членов первого порядка

малости:  $\delta dt = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{n} \cdot d\delta\mathbf{r} + \delta \cdot \left( \frac{1}{c} \right) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}$ . Полное возмущение  $\delta T$  времени пробега по лучу между

двумя фиксированными точками  $A$  и  $B$  находится интегрированием:

$$\delta T = \int_A^B \delta \left( \frac{1}{c} \right) \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot d\delta\mathbf{r} = \int_A^B \delta \left( \frac{1}{c} \right) \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds + \int_A^B \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(s)}{ds} ds.$$

Первое подынтегральное выражение можно представить, как  $\delta(1/c) = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla(1/c)$ . Второй интеграл берется по частям. Поскольку  $\delta\mathbf{r} = 0$  в точках  $A$  и  $B$  и  $\mathbf{n} = d\mathbf{r}/ds$ , то:

$$\delta T = \int_a^b \delta\mathbf{r} \left[ \nabla \left( \frac{1}{c} \right) - \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \mathbf{n} \right) \right] ds.$$

Для произвольного  $\delta\mathbf{r}$   $\delta T = 0$ , откуда  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla \left( \frac{1}{c} \right)$ , что совпадает с уравнением луча (25).

Таким образом, время пробега вдоль луча стационарно по отношению к малым возмущениям лучевой траектории, что и доказывает принцип Ферма.

### 2.3.3. Сейсмическая томография на временных задержках

Время пробега луча – функция скорости  $c(\mathbf{r})$  и геометрии лучевой траектории. Можно ставить задачу реконструкции скоростного закона  $c(\mathbf{r})$ , по множеству измерений времени на поверхности Земли:

$$T_i = \int_{L_i} \frac{ds}{c(\mathbf{r})}, \quad (2.28)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Особенностью этой задачи служит то, что неизвестная скоростная функция  $c(\mathbf{r})$  в неявном виде присутствует и в определении лучевой траектории  $S_i$ . Это приводит к существенной нелинейности задачи реконструкции  $c(\mathbf{r})$ . В значительном числе случаев известно нулевое приближение  $c_0(\mathbf{r})$  к скоростному закону  $c(\mathbf{r})$  и следует уточнить поправки к нулевому приближению так, чтобы наблюдаемые времена прихода и рассчитанные были близки друг к другу. Исходя из скоростного закона  $c_0(\mathbf{r})$ , можно рассчитать траектории лучей  $L_i^0$  в модели нулевого приближения. Обозначим время, предсказываемое начальной моделью,  $T_i^0$ :

$$T_i^0 = \int_{L_i^0} \frac{ds}{c_0(\mathbf{r})}.$$

Здесь  $L_i^0$  – траектория луча в начальной модели. Определим время задержки как

$$\delta T_i = T_i - T_i^0 = \int_{L_i} \frac{ds}{c(\mathbf{r})} - \int_{L_i^0} \frac{ds}{c_0(\mathbf{r})} \approx \int_{L_i^0} \left( \frac{1}{c(\mathbf{r})} - \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} \right) ds,$$

или

$$\delta T_i = - \int_{L_i^0} \frac{\delta c(\mathbf{r})}{c_0(\mathbf{r})} ds, \quad (2.29)$$

$$\delta c(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) - c_0(\mathbf{r})$$

Задача (29) представляет собой задачу сейсмической томографии. Измерены временные задержки. Задана начальная модель, следует реконструировать поправочные слагаемые к модели начального приближения. Это уравнение можно формально записать в виде отображения с помощью линейного оператора  $A$  пространства функций поправок  $\delta c(\mathbf{r})$  в пространство временных задержек  $\delta T$ :

$$A\delta c(\mathbf{r}) = \delta T \quad (2.30)$$

Это операторная запись соотношения (30). Уравнение (29) практически повторяет уже приведенные уравнения в 2.2 для задач ультразвуковой и акустической томографии. Однако спецификой сейсмических задач служит неполнота данных – невозможность получить временные задержки по всем необходимым траекториям. Это делает невозможным использование методов интегральных преобразований для обращения уравнения (29). Основными оказываются алгебраические методы. Их суть состоит в следующем.

Разобьем область  $V$ , в которой происходит процесс распространения волн, на элементарные ячейки  $\Delta V_j$ , которые пронумеруем индексом  $j$ . Сделаем это таким образом, чтобы в пределах каждого из  $\Delta V_j$  функция  $\frac{\delta c(\mathbf{r})}{c_0(\mathbf{r})}$  принимала постоянное значение, равное  $\mu_j$ . Обозначим

длину луча, имеющего нумерацию  $i$ , проходящего через объем  $\Delta V_j$  через  $a_{ij}$ . Тогда конечномерная модель задачи характеризуется системой уравнений:  $A\boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}$ , где  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_j, j = 1, \dots, N\}$ ,  $\mathbf{y} = \{\delta T_i, i = 1, \dots, M\}$ . Особенность матрицы  $A$  и, как следствие, свойства задачи восстановления модели распределения медленности состоят в том, что она:

- 1) имеет большую размерность:  $M = 500 - 1500$ ,  $N = 300 - 1000$ ;
- 2) сильно разрежена и имеет ленточную структуру;
- 3) плохо обусловлена, что проявляется в практической неединственности решения и его сильной зависимости от осцилляций во входных данных.

Эти особенности требуют развития специальных приемов вычисления.

## 2.4. Электрические методы на постоянном токе

Горные породы различаются между собой проводимостью  $\sigma$ , которую следует рассматривать как функцию координат  $\{x, y, z\}$ .

Если обозначить  $U(x_0, y_0, z_0)$  – потенциал электрического поля в некоторой точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , а  $g(x, y, z)$  и  $\sigma(x, y, z)$  – распределение источников электрического поля и проводимости как функции координат в объема среды  $V$ , то связь между этими компонентами определится уравнением:

$$\text{div} \sigma(\text{grad} U) = -g. \quad (2.31)$$

Уравнение (31) – основное уравнение, которое описывает электрическое поле постоянного тока.

Из него легко получаем:

$$\sigma \Delta U + \langle \text{grad} \sigma | \text{grad} U \rangle = -g(x, y, z). \quad (2.32)$$

Обозначим  $\mu(x, y, z) = \langle \text{grad} \sigma | \text{grad} U \rangle + g(x, y, z)$ .

Тогда для потенциала можно записать:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu(x, y, z)}{\sigma R} dx dy dz = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\langle \text{grad} \sigma | \text{grad} U \rangle + g(x, y, z)}{\sigma R} dx dy dz.$$

Или

$$U(x_0, y_0, z_0) - \beta(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\langle \text{grad} \sigma | \text{grad} U \rangle}{\sigma R} dv,$$

$$\text{где } \beta(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{g(x, y, z)}{\sigma R} dv.$$

Это уравнение Фредгольма второго рода, решение которого относительно  $U$  по заданным физическим параметрам модели среды:  $g(x, y, z)$  и  $\sigma(x, y, z)$ , можно условно записать в форме:

$$A(\sigma, g) = U. \quad (2.33)$$

Отличие уравнения Фредгольма второго рода от уравнения первого рода по форме состоит в том, что функция  $U(x_0, y_0, z_0)$ , входящая в это уравнение, присутствует как во внешнем члене, так и под знаком интеграла. Это обстоятельство имеет далеко идущие математические последствия. Физические последствия связаны с тем, что эффект неоднородности среды оказывается аналогичен возникновению дополнительных – вторичных, связанных с неоднородностями, источников поля. Причем эти дополнительные источники зависят от градиента поля и градиента проводимости. Чем более неоднородна среда, тем больше градиенты этих величин и тем более проявляется эффект вторичных источников. Поле  $U$  реально задано вне области  $V$ . Задача реконструкции модели среды состоит в этом случае в нахождении по заданному вне области  $V$  полю (либо связанным с ним трансформацией) распределения проводимости внутри области  $V$ .

То же самое уравнение возникает при описании установившегося теплового режима в предположении, что удельная теплопроводность  $\lambda(x, y, z)$  – скаляр и не зависит от температуры (следовательно, среда изотропна по тепловым параметрам). Внешние источники тепла (теплогенерация)  $q(x, y, z)$  не перемещаются и не меняют своих параметров в зависимости от поступившего теплового потока (температура в точках среды –  $T(x, y, z)$ ):

$$\text{div} \lambda(\text{grad} T) = -q.$$

Однако на самом деле при изучении тепловых потоков приходится предполагать зависимость удельной теплопроводности от температуры и давления, которое, в свою очередь, влияет на энергетические характеристики системы, внося в нее существенные нелинейности.

Например, допустима зависимость  $\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + c \cdot T}$ . Теплопроводность в зависимости от термобарических условий ( $P, T$ ) (которые чаще всего неизвестны), может изменяться в несколько раз, что ведет к рассмотрению результатов моделирования тепловых полей и попыток реконструкции параметров модели среды лишь как оценочных либо, что будет правильной, как эффективных параметров и эффективных моделей.

## 2.5. Динамика движений вещества

В отличие от предшествующих уравнений для физического поля, связывающих параметры модели среды и параметры физического поля, компоненты или трансформации которого наблюдаются, уравнения динамики и, прежде всего, геодинамики определяют модели трансформаций физических параметров при тех либо иных процессах. Наблюдаемыми здесь служат современное состояние физической модели, а реконструкции, в зависимости от решаемой задачи, подлежат либо параметры предшествовавшей модели при известных особенностях законов движения (например параметров вязкости), либо параметры законов движения при гипотезах о характере предыдущих моделей. Есть и еще один, для нас наиболее важный аспект применения законов движения. Это могут быть естественные ограничения на допустимые вариации параметров начальной физической модели в процессе ее реконструкции по наблюдаемым геофизического поля. Это круг вопросов, относящийся к эволюционно-динамическим принципам интерпретации геофизических данных.

Основным законом, контролирующим движение вещества, служит закон сохранения массы, или уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (2.34)$$

Здесь  $\sigma(\mathbf{x})$  – плотность,  $\mathbf{v}$  – скорость течения, имеющая компонентами  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

**Рассмотрим движение флюидов в пористых средах.** Для пористых сред закон сохранения имеет близкую форму. Пористая среда характеризуется коэффициентом пористости  $K_{II}$ , который представляет собой отношение объема пор к общему объему среды в пределе, стремящегося к нулю. Коэффициент пористости является характеристикой среды и, вообще говоря, функцией координат. Закон сохранения массы в этом случае примет вид:

$$K_{II} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (2.35)$$

При этом следует иметь в виду, что скорость фильтрации и физическая скорость  $V_f$  потока жидкости не одно и то же. Они связаны между собой соотношением  $\mathbf{v} = K_{II} V_f$ . Для получения уравнения движения жидкости в пористой среде приведенный закон необходимо дополнить уравнениями состояния. Они основаны на целом ряде физических допущений.

1. *Закон Дарси.* В рамках теории линейной фильтрации, описывающей стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости  $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ , связь между скоростью фильтрации и давлением  $P(x, y, z)$  задается условием:

$$\mathbf{v} = -K_{III} \operatorname{grad} P(x, y, z).$$

Здесь  $K_{III}$  – коэффициент проницаемости.

2. *Текущая жидкость слабо сжимаема.* Это означает, что соотношение между плотностью и давлением определяется соотношением:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot [1 + C(P - P_0)],$$

где  $C$  – коэффициент сжимаемости;  $P_0$  и  $\sigma_0$  – исходные давления и плотность, приложенные в начальный момент времени и зависящие только от пространственных координат;  $P$  – текущее давление;  $\sigma$  – плотность, возникшая за счет этого давления. Коэффициент сжимаемости мал в сравнении с единицей и, в результате,  $\sigma V$  мало отличается от  $\sigma_0 V$ . Тогда из закона сохранения массы с учетом закона Дарси после небольших преобразований получаем:

$$C K_{II} \frac{\partial P}{\partial t} - \operatorname{div} K_{III} \operatorname{grad} P = 0. \quad (2.36)$$

3. *Изотермическое течение идеального газа.*

Уравнение состояния, задающее связь между плотностью и давлением, в этом случае описывается законом Мариотта:

$$P = Q \sigma,$$

где  $Q$  – не зависящая ни от координат, ни от времени константа. Воспользуемся законом сохранения массы и законом Дарси. После подстановок и сокращения на  $Q$  получим уравнение газодинамики:

$$K_{II} \frac{\partial P}{\partial t} - \operatorname{div}(K_{III} \cdot P \cdot \operatorname{grad} P) = 0. \quad (2.37)$$

Отметим, что в отличие от рассмотренных ранее уравнений уравнение газодинамики нелинейно относительно давления.

**Уравнения движения вязкой среды** – это одна из важнейших геодинамических моделей развития геологических сред. Как всякая модель, она пригодна лишь для описания определенных этапов развития – в данном случае эволюционных. В нее не попадают катастрофические события типа формирования глубинных разломов. Но тем не менее диапазон ее применимости достаточно широк.

Уравнение движения вязкой среды получается из законов динамики и задается уравнениями Навье-Стокса:

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v_1 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} + \sigma(\mathbf{x}) W_x, \\
\sigma(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v_2 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} + \sigma(\mathbf{x}) W_y, \\
\sigma(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_3}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v_3 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} + \sigma(\mathbf{x}) W_z.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Здесь  $P$  – давление,  $\mathbf{W} = \{W_x, W_y, W_z\}$  – вектор массовых сил, а компоненты симметричны относительно тензора вязких напряжений  $\tau$ , связаны с коэффициентом вязкости  $\eta$  и вектором скорости  $\mathbf{v}$  соотношениями:

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial v_1}{\partial x}, \tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial v_2}{\partial y}, \tau_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_3}{\partial z}, \\
\tau_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right), \tau_{xz} = \eta \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \eta \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Пренебрегая инерционными (содержащими вторые производные по времени) членами (поскольку течения эти медленны) и рассматривая в качестве массовых сил силы гравитации, из уравнений Навье-Стокса получим:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \eta \left( \frac{\partial}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) + g \sigma \delta_{ij}$$

Из этих уравнений видно, что вязкость является определяющим фактором, влияющим на величину скорости перемещений. При моделировании динамики развития геологических объектов она определяется из внешних условий – экспериментов, сопоставления скоростей распространения продольных и поперечных сейсмических волн. Однако распределение этого параметра, оказывая решающее значение на определяемые из уравнений Навье-Стокса скорости перемещений, крайне ненадежно определяется из экспериментальных данных.

Эволюция геологической среды в рамках модели вязких течений – это геодинамические модели сплошной, неструктурированной среды. Она опирается на рассмотрении каждой точки среды как самостоятельно движущейся с той либо иной скоростью. Из этих элементарных движений складываются закономерности движения всего потока. Однако особый интерес представляют более узкие геометрические модели по аналогии с рассмотренными при изучении плотностных моделей в гравиразведке.

*Структурные геодинамические модели* и уравнения, описывающие их эволюцию, рассматривались в работах В.П. Мясникова, В.О. Михайлова (обзор библиографии вопроса приведены в [7]), которым мы в основном следуем. В геодинамической модели, в общем виде представляющей собой эволюцию поля скоростей, понятие внутренних границ определяется как поверхности, через которые отсутствует поток масс. Тогда полная производная по времени для частиц, расположенных на этой поверхности, равна нулю, а последняя, в свою очередь, складывается из пространственной нормальной и частной по времени производных к границам. Это приводит к уравнению равновесия. Дополнительный учет членов, ответственных за денудацию (разрушение, размыв) и осадконакопление в процессе эволюции границ (временной интервал, при котором они служили поверхностью для соответствующих процессов), приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}(s,t)}{\partial t} &= \mathbf{W}(s,t) - \langle \mathbf{V}(s,t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s,t)) \rangle + F(\mathbf{f}(s,t)) + \Psi, \\
\mathbf{f}(s,t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s),
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$\mathbf{f}(s,t) = \{f_0(s,t), f_1(s,t), \dots, f_N(s,t)\}$  – многокомпонентная функция, описывающая эволюцию системы из  $N+1$  геодинамической границы, такой, что в каждый момент времени  $t$  глубина границы с номером  $i$  в точке  $s = \{x, y\}$  равна  $f_i(s,t)$ .

Здесь управляющие геодинамические параметры:  $\mathbf{W}(s, t)$  – вертикальные составляющие скорости перемещений;  $\mathbf{V}(s, t)$  – векторы горизонтальных составляющих скоростей перемещений;  $F(\mathbf{f}(s, t))$  – оператор, ответственный за модель денудации рельефа. В работах [3, 4] он предлагается пропорциональным лапласиану от уравнения границы с коэффициентом пропорциональности, называемым скоростью размыва, что оправдано для структур с характерным временем развития  $10^6$  лет и более;  $\Psi$  – сложная функция, ответственная за дивергентную компоненту в эволюции системы и определяемая особенностями процессов осадконакопления и метаморфизма. Она зависит от большого числа факторов, включая реологические свойства пород. Попытка полностью реконструировать все законы, определяющие эту компоненту, наталкивается на серьезные проблемы, связанные с отсутствием ясных и обоснованных законов, управляющих процессом ее формирования. Однако именно в силу сложности, равнозначной многофакторности этой компоненты, среди факторов которой нельзя выделить главные, ее следует рассматривать как отдельное аддитивное слагаемое, определяемое по результатам соответствия моделирования динамических процессов и сопоставления результатов с наблюдаемыми физическими полями.

Анализ модели формирования структур показывает [7], что любая произвольная по рельефу слоев структура может быть получена за счет чисто вертикальных движений с включением дивергентного члена, а при дополнительно заданных внутренних напряжениях сочетанием дивергентных членов, вертикальных и горизонтальных движений, притом бесконечным множеством способов. Это означает, что процесс денудации может быть включен в дивергентный член, ответственный за характер осадконакопления и метаморфизма, и по характеру своего влияния на поведение модели в рамках (2.39) объединен с вертикальной компонентой действующих нагрузок. В этом случае может быть введена интегрированная математическая модель эволюции структур:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(s, t)}{\partial t} &= \Omega(s, t) - \langle \mathbf{V}(s, t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s, t)) \rangle \\ \Omega(s, t) &= \mathbf{W}(s, t) + F(\mathbf{f}(s, t)) + \Psi \\ \mathbf{f}(s, t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s). \end{aligned} \quad (2.40)$$

## 2.6. Современная геодинамика

Раздел написан по материалам монографии Ю.О. Кузьмина, В.С. Жукова [8].

Наряду с глобальными геодинамическими процессами, происходившими на протяжении всей истории развития Земли, фрагментированными территориально и по характеру происходящих процессов в тех либо иных пространственно-временных масштабах [9], происходили и происходят современные движения поверхности Земли. Первые привели к формированию современных геологических структур и объектов, изучаемых геофизическими методами. Вторые имеют сложную природу и многообразие причин, их вызывающих. Они регистрируются многократным проведением нивелировочных работ и измеряются в значениях горизонтальных градиентов движений – мм/км в год.

На фоне региональных современных движений, регистрируемых вдоль линий Государственной сети и составляющих первые единицы  $\Delta h$  (м/км в год), наблюдаются существенно более интенсивные локальные аномалии как вертикальных, так и горизонтальных движений. Типичный пример в зоне сейсмической активности такого мониторинга приведен на рис. 2.5 (взято из монографии [8]). На этом и многих других примерах выявлено, что интенсивные локальные аномалии вертикальных и горизонтальных движений земной поверхности приурочены к зонам разломов. Их характеристики в главном совпадают как в сейсмоактивных, так и асейсмичных разломных зонах. Однако интенсивность деформаций выше в сейсмоактивных зонах. Их амплитуда составляет 50-70 мм/год. Они короткопериодичны (0,1-1 год), хорошо локализованы (0,1-1 км). Такого сорта аномалии определены как суперинтенсивные деформации (СД), характерные для зон разломов. Приуроченность СД к разломам очевидно связана с тем, что с точки зрения механики сплошных сред разломы – это зоны ло-

кальных аномальных физико-механических характеристик геологической среды. В силу повышенной трещиноватости и пониженных прочностных свойств именно эти зоны более подвержены движениям при приложении внешних усилий. Наличие в геологической среде разломов и разрывных нарушений приводит к формированию локального поля деформаций в окрестности включений. Это поле деформаций сложным образом зависит от соотношения упругих констант относительных изменений объемных упругих модулей ( $\alpha = \mathcal{K} / k$ ), коэффициента Пуассона  $\sigma$ , модуля сдвига среды  $\mu$ , величины тектонического напряжения – изостатического давления  $P$ . Введя коэффициент  $\Phi = \frac{\alpha \cdot (1 - 2\sigma)P}{6\pi\mu}$ , можно записать следующее выражение для компонент вектора смещений:

$$U_z(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_V \frac{\Phi(x, y, z) \cdot (z - \zeta) dv}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}};$$

$$U_x(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_V \frac{\Phi(x, y, z) \cdot (x - \xi) dv}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}};$$

$$U_y(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_V \frac{\Phi(x, y, z) \cdot (y - \eta) dv}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}.$$

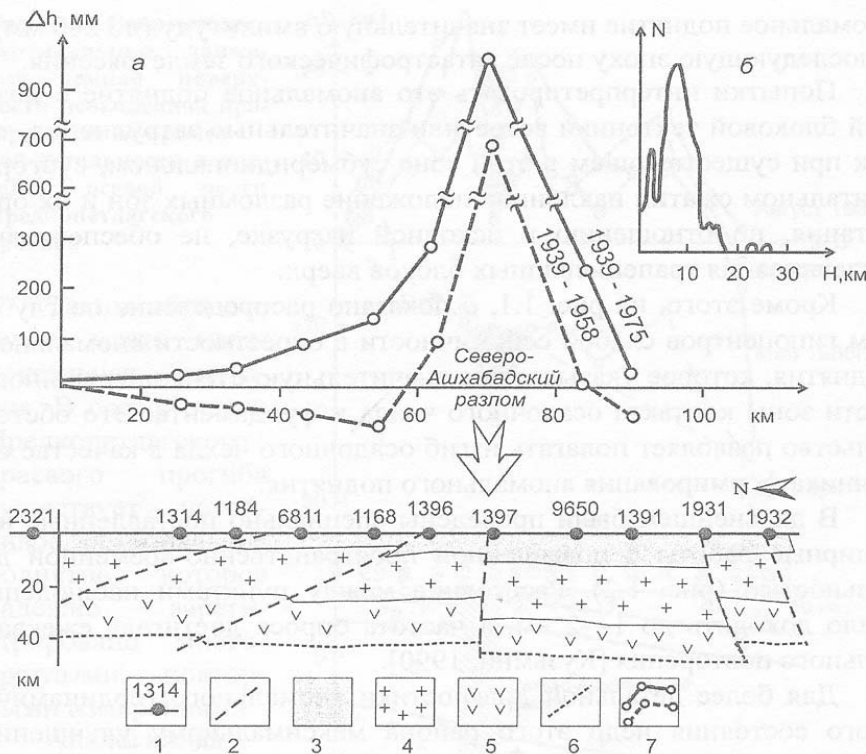


Рис. 2.5. Современные вертикальные движения земной поверхности  $\Delta h$  по профилю Ашхабад-Бахардок (а) и распределение сейсмической активности  $N$  на глубине  $H$  в пределах Ашхабадского геодинамического полигона (б)

Условные обозначения: 1 – местоположение и номера пунктов нивелирования; 2 – глубинные разломы; 3 – осадочный слой; 4 – гранитный слой; 5 – базальтовый слой; 6 – поверхность Мохоровичича; 7 – кривые вертикальных движений

Таким образом, формулы расчета компонент  $\{U_x, U_y, U_z\}$  вектора смещений  $\mathbf{U}$ , которые являются моделью поля по эффективному параметру среды  $\Phi$ , зависящему от упругих констант и приложенных напряжений, аналогичны модели взаимодействия для компонент гравитационного поля. В этой связи возможна постановка задачи реконструкции модели среды по заданным результатам геодезического мониторинга – вектора смещений  $\mathbf{U}$ . По сути своей эта задача означает нахождение поля напряжений в горных массивах по измеренным уклонениям



нивелировочных данных со временем или, что то же самое, по известным деформациям на дневной поверхности.

### Выводы

Единство задач извлечения информации из геофизических данных состоит в том, что задана наблюдаемая либо уже подготовленная процедурами обработки компонента  $u$  физического поля – его атрибуты, оператор  $A$ , отображающий параметры модели среды  $x \in M$  в эти данные, считающиеся известными. Задача состоит в нахождении параметров модели среды по заданным данным и заданному оператору. Это задача условно может быть записана в виде  $Ax = u$ .

Это операторное уравнение первого рода. В разных методах и на разных стадиях обработка, решение обратных геофизических задач, решение задач геофизической интерпретации, компоненты задачи  $\{A, M, u\}$  могут быть различны, и принимать совершенно разные формы. Однако неизменным остается возможность ее общего представления в виде операторного уравнения первого рода и необходимость создания корректных методов его решения.

Литература, приводимая в списке для настоящей главы, ни в коей мере не служит перечнем требуемых для изучения содержательных задач учебников. Мы считаем, что учебники по сейсморазведке, гравиразведке и другим методам – уже изучены и есть. Приводимый список относится к частным вопросам и особенностям.

### Литература

1. Терещенко С.А. Методы вычислительной томографии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 320 с.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. – М.: Мир, 1990. – 288 с.
3. Gerveny V, Molotkov I.A., Psenkik I. Ray method in seismology. Praha: Univerzita Karlova, 1977. – P. 214.
4. Гольдин С.В. Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. – М.: Недра, 1979. – 380 с.
5. Сейсмическая томография / Под ред. Г. Нолета. – М.: Мир, 1990. – 416 с.
6. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л.Лионс. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
7. Геодинамические модели и их применение при совместной интерпретации геологических и геофизических данных (обзор) / В.О. Михайлов и др. // Физика Земли. – 2007. – №16. – С. 4-15.
8. Кузьмин Ю.О. Современная геодинамика и вариации физических свойств горных пород / Ю.О. Кузьмин, В.С. Жуков. – М.: Изд-во МГГУ, 2004. – 262 с.
9. Аглонов С.В. Геодинамика: учебник. – СПб.: Изд-во С-Петербур. ун-та, 2001. – 360 с.

## ГЛАВА 3. НЕКОРРЕКТНОСТЬ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ

### 3.1. Условия корректности в геофизических задачах

В символическом виде обратная задача геофизики записывается в виде:

$$\begin{cases} Ax = y; \\ x \in M, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $M$  – модель изучаемой среды, включающая в себя ее параметризацию;  $y$  – заданное физическое поле – результат обработки (возможно, тривиальной) наблюдаемой  $u$ ;  $A$  – оператор прямой задачи – соответствующее уравнение математической физики, определяющее отображение параметров модели среды в параметры физического поля;  $x$  – искомый элемент из класса моделей:  $x \in M$ . Именно в такой форме записывались рассмотренные в предыдущем разделе конкретные задачи геофизики. В форме (1) записывались как задачи, в которых элементы  $x$  рассматривались как некоторые функции – элементы функциональных пространств, так и ситуации, в которых  $x$  – элементы, характеризующиеся конечным числом параметров, а операторы  $A$  представляют собой некоторые матрицы. Оператор  $A$  имеет некоторую естественную область определения  $D(A)$ , которую можно рассматривать как соответствующее функциональное пространство, а модель  $M \subseteq X$  является сужением этой области определения. Отвлекаясь пока что от весьма существенного для приложений вопроса о принципах выбора множества  $M$ , оператор  $A$  будем рассматривать действующим из функционального пространства  $X$  в функциональное пространство  $Y$ . Это означает, что  $M \subseteq X$  и  $\text{Im} A \subseteq Y$ . Пространства  $X$  и  $Y$  могут быть произвольными метрическими пространствами, но в приложениях чаще всего достаточно Гильбертовых с квадратичной нормой.

Задача:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ DA = X, \text{Im} A \subseteq Y. \end{cases} \quad (3.2)$$

называется расширением задачи (1) или, иначе расширенной обратной задачей. Соответственно (1) это сужение (2) на множество  $M$  и, может быть записана в форме:

$$\begin{aligned} Ax &= y \\ x &\in P_X(M, x) \end{aligned} \quad (3.2-а)$$

Для одной и той же задачи (1) может быть построено бесконечно много возможных расширений, но, как правило, вид их предопределен физическим смыслом задачи.

Приведем пример расширения обратной задачи.

Предположим, что решается вопрос об изучении распределения горизонтальных плотностных неоднородностей в пласте по выделенному от него аномальному гравитационному полю (для простоты рассмотрим двумерный случай) (рис. 1).

Пусть пласт разделен вертикальными прямыми на совокупность из  $N$  блоков. Плотность в каждом из них является искомой. Пусть  $V_i$  – область  $i$ -го блока. Пусть  $u_z^i(x_j)$  – гравитационное действие в

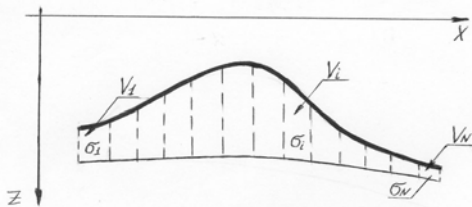


Рис. 3.1. Аппроксимационная модель

точке  $x_j$   $i$ -го блока, имеющего единичную плотность:

$$u_z^i(x_j) = 2\gamma \iint_{V_i} \frac{z dx dz}{(x - x_j)^2 + z^2}.$$

Пусть далее наблюдаемая  $\Delta g(x_j)$  задана в точках  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Тогда задача реконструкции значений плотности в ячейках сетки записывается так:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i u_z^i(x_j) = \Delta g(x_j); \quad (3.3)$$

$$j = 1, \dots, k,$$

или в матричной форме:

$$A\sigma = \Delta g, \quad (3.4)$$

где:  $A$  – матрица, элементы которой  $a_{ij} = u_z^i(x_j)$ ;  $\sigma$  – вектор искомых параметров модели, представляющих собой значения плотностей в выделенных блоках;  $\Delta g$  – вектор наблюдаемых величин. Если  $V$  – область, занимаемая изучаемым пластом ( $V = \bigcup_{i=1}^N V_i$ ), то задача реконструкции

горизонтально неоднородной среды может быть в более общей форме сформулирована еще и следующим способом. Пусть  $\sigma(x)$  – функция плотности, зависящая только от горизонтальных координат. Множество всех таких функций в  $V$  образует подпространство  $L_2'(V)$  в пространстве всех квадратично интегрируемых в  $V$  функций  $L_2(V)$ . Связь между распределением плотности из  $L_2'(V_1)$  и соответствующей ему вертикальной производной гравитационного потенциала задана соотношением, следующим из (2.2-а):

$$2\gamma \iint_{V_1} \frac{\sigma(x)z dx dz}{(x-x_0)^2 + z^2} = u_z(x_0); \quad (3.5)$$

$$\sigma(x) \in X = L_2'(V).$$

Если  $\sigma(x) \in L_2'(V_1)$ , то  $u_z(x_0) \in L_2(E_0)$ <sup>3</sup>, и в качестве пространства  $Y$  можно принять  $L_2(-\infty; +\infty)$ . Задача (5), где в качестве  $X$  выбрано  $L_2'(V_1)$ , а в качестве  $Y$  –  $L_2(-\infty; +\infty)$ , есть расширение задачи (3). Формально иным будет расширение, если в качестве  $Y$  принять  $C(E_0)$ , а в качестве  $X$  –  $L_p'(V_1)$ . Однако это формальное расширение, не влекущее за собой каких-либо конструктивных результатов. Конструктивное расширение задачи (5) и тем более (3) может быть получено следующим образом.

Рассмотрим в качестве  $X$  – совокупность всех квадратично интегрируемых в  $V$  функций  $\sigma(x, z)$ . Тогда расширением (5) (и тем более (3)) будет задача реконструкции плотностного распределения:

$$2\gamma \iint_V \frac{\sigma(x, z)z dx dz}{(x-x_0)^2 + z^2} = u_z(x_0) \quad (3.6)$$

$$\sigma(x, z) \in X = L_2(V).$$

Последнее расширение особенно интересно в связи с тем, что в отличие от задачи (5), имеющей единственное решение, (6) уже такового не имеет. Решение если есть, то оно не единственно – их бесконечно много. Это весьма характерное для обратных геофизических задач обстоятельство. Оно состоит в том, что чаще всего обратные задачи геофизики допускают некоторое очевидное расширение, в котором решение не единственно. Более того, это расширение вполне естественно, и сужение до задач с единственным решением ассоциируется с некоторым искусственным, натянутым приемом. Но самое важное состоит в том, что сам факт его существования оказывает влияние на все аспекты как теории, так и конструирования схем решения суженных задач. Задача (6) – это одно из естественных расширений задачи (3) и у него совершенно иные фундаментальные свойства.

<sup>3</sup> Это следует как частный случай из неравенства Гельдера (Подробнее см. прил. 2) для операторов (2.2, 2.2-а).

В процессе перехода от (6) к (3) и им аналогичных сужений в более общем случае произвольных обратных задач первоначально присущие им свойства неединственности теряются. Задача «беднеет», ее особые свойства, присущие ей эффекты размываются, становятся незаметными, но их влияние даже в упрощенной форме проявляется, становясь менее очевидным, скрытым, слабоуправляемым. Проявление эффектов эквивалентности, присущих общей задаче, в задачах, искусственно суженных до имеющих единственное решение, называется скрытой эквивалентностью. Это специфический для геофизики эффект, проявляющийся в геологической содержательности получаемых решений, соответствии тем ожиданиям, «под которые» используемый аппроксимационный модельный класс строился. Эквивалентность, присущая исходной задаче с неединственным решением при сужении задачи, приобретает новые формы. Они проявляются в виде скрытых, не поддающихся контролю эффектов, влияние которых может существенно нарушить содержательность получаемых результатов, о которых речь шла в 1.4. Эта тема, ключевая для геофизики, отличающая ее от других задач, будет продолжена. Анализ подобного рода эффектов и форм их проявления в сужениях задач совершенно необходим. С этой целью необходимо максимально полно изучить расширенную задачу, где за счет использования аппарата анализа в функциональных пространствах эти эффекты можно более полно изучить. Лишь после этого следует переходить к сужению задачи, рассмотрению ее конечномерных аналогов и изучению свойств этой – упрощенной задачи. Здесь ситуация напоминает ту, которая возникает при рассмотрении сингулярных интегральных уравнений, например преобразования Гильберта или Радона. Если их сразу перевести в конечномерную форму – преобразовать к виду системы линейных уравнений, то весьма затруднительно получить формулы обращения. Наоборот, ситуация проясняется при рассмотрении бесконечного случая. Именно в этой связи совершенно необходимо рассмотрению окончательной конечномерной, малоразмерной задачи предвдывать максимально полный анализа на корректность расширенной, бесконечномерной задачи.

Вернемся к символической записи обратной задачи (1) и определим основные понятия корректности.

Задача:

$$\begin{aligned} Ax &= y \\ x &\in M \subseteq X, y \in Y. \end{aligned} \quad (3.7)$$

называется корректной, если:

1.  $\forall y \in Y, \exists x \in M : Ax = y$ . (существование)
2. Если из  $x_1, x_2 \in M$  и  $Ax_1 = Ax_2$  следует  $x_1 = x_2$ . (единственность)
3.  $\sup_{x_1, x_2 \in M} \frac{\|x_1 - x_2\|_X}{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y} = \omega(A^{-1}, M, X, Y) < \infty$ . (устойчивость)

Условие 1 читается следующим образом: для любого  $y \in Y$  найдется  $x \in M$ , такие, что  $Ax = y$ .

Величина  $\omega(A^{-1}, M, X, Y)$  называется *модулем непрерывности обратного оператора* к  $A$  в норме пространств  $X, Y$  на множестве  $M$ . *Модулем непрерывности* (исходного) оператора  $A$ , действующего из  $M \subseteq X$  в  $Y$ , называется:

$$\sup_{x_1, x_2 \in M} \frac{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} = \omega(A, M, X, Y) < \infty.$$

Приведенные условия называются условиями корректности по Адамару. Их нельзя рассматривать совершенно изолированно. Характеризуя различные аспекты одной и той же задачи, они тесно связаны между собой.

*Существование.* С физической точки зрения, ясно, что если реально измерено физическое поле, то существуют и источники, его породившие. Однако такое упрощенное решение вопроса о существовании источников поля вовсе не решает вопроса о существовании решения

уравнения (7) не только при произвольном  $y \in Y$ , но и при конкретно заданном. Дело в том, что:

1. реально существующее распределение изучаемого параметра может оказаться более сложным и многокомпонентным, чем это «предусмотрено» при формировании аппроксимационной модели  $M$ . На  $M$  просто нет соответствующего элемента;

2. конкретно заданное поле  $y$  неизбежно осложнено ошибками. Сюда относятся собственно ошибки измерений и обработки поля, а также ошибки квантования, возникающие при подготовке наблюдаемой для ввода в ЭВМ. Подобрать модель из  $M$ , которая включала бы в себя строго все компоненты, включая и эффекты от ошибок, чаще всего невозможно, да и неразумно. Но в условиях, когда заведомо неизвестно что связано с ошибкой, а что с полезной компонентой, да и что такое полезная компонента вообще, бессмысленно требовать строгой, точной разрешимости уравнения (7);

3. оператор  $A$  неизбежно осложнен ошибками. Сюда относится возможная замена сложного закона более простым, но приближенным (например замена детерминированного закона его статистическим приближением), ошибки приближенного расчета прямого эффекта.

Таким образом, если  $\text{Im } A \subset Y$ , то указанные факторы могут привести к тому, что реально заданная наблюдаемая  $y$  не принадлежит  $\text{Im } A$ , и в этом случае уравнение (7) в строгом смысле решения не имеет. Но если  $\text{Im } A = Y$  либо  $\overline{\text{Im } A} = Y$ , то уравнение (7) разрешимо точно либо с любой наперед заданной точностью.

*Единственность* решения обратных геофизических задач – наиболее, если так можно выразиться, тонкое их свойство. Большинство обратных геофизических задач при своей достаточно общей постановке если и имеют решение, то оно не единственно. Их единственность достигается искусственным сужением задачи на выбранный, чаще всего аппроксимационный модельный класс  $M$ . Его выбор определяется геофизиком. При этом имеются две противоположные тенденции. С одной стороны, множество  $M$  желательно сделать как можно шире для того, чтобы повысить его аппроксимационные возможности (см. 1.3) на более широком множестве элементов. Это делает его более универсальным и пригодным в «непредсказуемых» ситуациях, позволяет лучше аппроксимировать некоторым его (искомым) элементом реальное распределение физического параметра. С другой стороны, возможность расширения задачи ограничена тем, что при достижении определенного уровня этого расширения может случиться, что решение на  $M$  уже не единственно. Но прежде чем это произойдет, резко возрастает неустойчивость определения параметров того либо иного элемента из  $M$ . Расширение множества  $M$  приводит к увеличению числа параметров, посредством которых описывается тот либо иной элемент из  $M$ . Очевидно следующее утверждение:

Пусть  $M_1 \subseteq M_2$ . Тогда: из единственности решения уравнения (7) на  $M_2$  следует единственность его решения на  $M_1$  и  $\omega(A^{-1}, M_1, X, Y) \leq \omega(A^{-1}, M_2, X, Y)$ .

Таким образом, при выборе аппроксимационного модельного класса и числа характеризующих его параметров необходимо держаться некоторого, не всегда ясного оптимума. Различие же геологических ситуаций вынуждает рассматривать множество аппроксимационных классов моделей, для каждого из которых следует доказать свою теорему единственности. Содержание последней состоит в том, что в ней формируются условия и ограничения на множество  $M$ , при которых обратная задача на этом множестве если имеет решение, то оно единственно. На самом деле доказательством теоремы единственности проблема единственности не решается. Она лишь переходит в иную плоскость. Из проблемы существования многих решений трансформируется в проблему адекватности получаемого единственного решения реальности.

Доказательство теорем единственности для тех либо иных модельных классов является, как правило, сложной задачей, выполнимой лишь при некоторых упрощающих предположениях. Для примера см. теорему 7 настоящего раздела. Прежде всего это относится к предположениям о способе задания наблюдаемых. Так, в задачах гравиметрии и магнитометрии к таким предположениям относится то, что поле задано всюду на некоторой плоскости или даже задана нормальная производная потенциала на границе регулярной области, охватывающей возмущающие массы. Практически отсутствуют теоремы, учитывающие дискретность задания по-

ля, а также наличие погрешностей в его задании. Таким образом, в вопросе о единственности решения обратной задачи есть три аспекта. Первый – это формально математическая единственность – однозначная разрешимость уравнения (7) на множестве  $M$ . Второй – единственность реально решаемой задачи, учитывающая приближенность задания наблюдаемой, оператора. Третий – проблема адекватности получаемого единственного решения реальности или тому, «в надежде на поучение которого» модельный класс  $M$  конструировался. Этот третий аспект является основным для интерпретационного процесса.

*Устойчивость* характеризует степень изменения решения при изменении входных данных. Она характеризуется модулем непрерывности обратного к  $A$  оператора:  $\omega(A^{-1}, M, X, Y)$ . Эта величина ассоциируется с нормой обратного к  $A$  оператора действующего из  $X$  в  $Y$ , суженного на множество  $M$ . Чем меньше эта величина, тем более устойчиво решение по отношению к изменению исходных данных – физических полей. Если наличие небольших погрешностей в правой части уравнения  $Ax = y$  приводит к коренной перестройке решения, то такое решение вряд ли представляет существенный интерес, хотя и может оказаться полезным для оценки некоторых интегральных характеристик решения.

Устойчивость, непрерывность того либо иного оператора существенно зависит от вводимой топологии. Так, например, при решении многих обратных задач необходимо дифференцировать наблюдаемую. Такая процедура возникает при интерпретации данных сейсморазведки, когда необходимо вычислить градиенты годографа, связанные со скоростью (кажущейся) распространения сейсмических волн. Такая же ситуация возникает и при трансформации гравитационных и магнитных полей (расчет высших производных потенциала). Дифференцирование непрерывно из  $C^1$  в  $C$  либо  $L_2$ , но не является таковым из  $L_2$  в  $C$ . Однако и в этом вопросе следует различать две стороны – формально математическую и содержательную. Если модуль непрерывности обратного оператора равен некоторому большому, но конечному числу (например 100, 1000), то с формально математической точки зрения задача устойчива. Но с содержательной точки зрения в этом случае влияние погрешностей в наблюдаемой на результат решения будет столь велико, что решение может оказаться непригодным для геологических выводов и в вычислительном отношении должно рассматриваться как неустойчивое. Другой предельный случай – когда это число очень мало (например 0,01, 0,001). В этом случае не только помеха, но и полезная компонента уже будут мало сказываться на решении. Ясно, что и такое решение может оказаться непригодным для целей интерпретации. Для характеристики задачи в целом используется обусловленность задачи:  $D = \omega(A, M, X, Y) \cdot \omega(A^{-1}, M, X, Y)$ .

Следует признать, что с позиций приведенного определения корректности обратные задачи геофизики по большей части некорректны во всех смыслах. В них не выполнено первое условие корректности, и в строгом смысле решения не существует. В них не выполнено второе условие, и решение, даже если оно существует, неединственно. Наконец, обратные задачи геофизики по большей части неустойчивы.

Наиболее развитыми являются теория и методы решения линейных некорректных задач, в которых не выполнено третье условие – они неустойчивы. Для такого класса задач введен даже специальный термин – условно корректные, или корректные, по Тихонову, задачи. Центральным вопросом при их рассмотрении является свойство устойчивости или, что почти то же самое, непрерывности, ограниченности обратного оператора на тех либо иных сужениях исходной задачи. В этой связи в теории условно корректных задач усиленно используются математические результаты, касающиеся свойств непрерывности преобразований – теорема о гомеоморфизме и близкие результаты. Основная идея решения неустойчивых задач состоит в том, чтобы заменить исходную задачу с неограниченным обратным оператором на другую – приближенную, но с ограниченным. Собственно, вся теория регуляризации, направленная на решение неустойчивых задач, как раз и состоит в изучении свойств непрерывности малых вариаций к исходной задаче. При этом требуется еще, чтобы эти малые вариации не уводили ре-

зультат слишком далеко от некоторого предполагаемого истинного решения, существование которого при некоторых точных данных – физических полях предполагается<sup>4</sup>.

Условия существования решений (разрешимости уравнения) и их устойчивости связаны между собой. Условие разрешимости для любого  $y \in Y$  означает, что множество значений оператора  $A$  совпадает со всем Банаховым пространством  $Y$ . Но для линейных ограниченных операторов, действующих в паре пространств  $X, Y$  ( $A: X \rightarrow Y$ ), из последнего условия следует ограниченность обратного к  $A$  оператора, т.е. устойчивость обратной задачи. Точнее, справедлив такой результат.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – линейный ограниченный взаимно-однозначный оператор из  $X$  в  $Y$ , где  $X, Y$  – банаховы пространства. Для того чтобы  $\|A^{-1}\| < \infty$ , необходимо и достаточно:  $\text{Im } A = \overline{\text{Im } A}$ .

Приведенный результат есть очевидное следствие теоремы 2 из. Прил. 2.4. Действительно, ограниченное преобразование есть одновременно и замкнутое. Банахово пространство есть множество второй категории в себе, и все условия указанной теоремы выполнены.

Следующая модификация того же результата может оказаться более полезной.

*Следствие.* Если  $A$  – замкнутый взаимно-однозначный оператор из  $X$  в  $Y$ ,  $\overline{DA} = X$  и  $\text{Im } A$  содержит внутреннюю точку, то  $\overline{\text{Im } A} = \text{Im } A$  и  $\|A^{-1}\| < \infty$ . Этот результат становится очевидным, если заметить, что множество, имеющее внутреннюю точку, есть множество второй категории (Прил. 2). Необходимо обратить внимание на то, что хотя в формулировке теоремы 1 и следствия из нее присутствовало требование единственности решения обратной задачи, эти условия на самом деле изначально, в полной формулировке независимы. Смещение эффектов неединственности и неустойчивости и возникновение ситуации, при которой неустойчивость становится практическим проявлением неединственности, при вычислениях происходят большей частью от неверного сужения задачи. Чтобы показать это, проведем следующие рассуждения.

Для линейного ограниченного оператора определим *фактор пространство пространства  $X$  по ядру оператора  $A: X^f = X / \text{Ker } A$* . Оно состоит из классов (смежности), содержащих вместе со всяким элементом  $x$  и все элементы  $x + \xi$ , где  $\xi \in \text{Ker } A: (A\xi = 0)$ . Совокупность элементов, образующих этот класс смежности обозначим  $\Xi(x)$ . Норму элемента  $\eta \in X^f$  определим равенством:  $\|\eta\|_{X^f} = \min_{\chi \in \Xi(x)} \|\chi\|_X$ . Тогда  $X^f$  есть обычное Банахово пространство, и оператор  $A$  взаимнооднозначен из  $X^f$  в  $Y$ . В такой формулировке задача нахождения класса смежности, соответствующего заданному полю:

$$\begin{cases} Ax = y; \\ x \in X^f, \end{cases}$$

или, что эквивалентно, решение задачи:

$$\begin{cases} Ax = y; \\ \|x\|_X \rightarrow \min, \end{cases}$$

попадает под условия теоремы 1. Условие единственности подобным приемом «разведено» с условием устойчивости. Они оказались независимыми, самостоятельными и не сводимыми один к одному. К сожалению, однако, этот результат носит более академический, чем конструктивный характер. Из него можно вывести много красивых следствий о свойствах плотности области значений операторов в тех либо иных функциональных пространствах. Эти результаты

<sup>4</sup> С точки зрения логики задачи, здесь есть существенная проблема. Она состоит в том, что, заменяя неустойчивую задачу  $A$  ее устойчивым приближением  $A'$ , мы гарантированы в устойчивости результата при вариации входных данных для  $A'$ , а не для  $A$ . Такая ситуация может быть чревата катастрофическими последствиями в случае, например, если по результату решения стоит стратегия управления системой, свойства которой неустойчивы – определены оператором  $A$ . Более подробно эти вопросы рассмотрены в: Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 224 с.

дают понимание причины многих эффектов, но, чаще всего, не дают конструктивных способов решения некорректных задач.

Наиболее полно теория некорректных задач развита для случаев линейного оператора прямой задачи. В то же время многие задачи, а, возможно, и их большая часть являются нелинейными. Арсенал средств анализа и решения последних существенно уже. Основным приемом их рассмотрения служит линеаризация. Пример линеаризации исходной нелинейной задачи уже был приведен – это рассмотренные в гл. 2 методы сейсмической томографии. По большей части нелинейными оказываются все задачи с использованием геометрических структурных моделей. Здесь линеаризация – необходимый элемент. Сущность приемов линеаризации состоит в том, что рассматриваются в качестве искомым физических параметров их приращения относительно некоторого известного уровня (переменного). Например, рассматриваются приращения горизонтов относительно заданного уровня – нулевого приближения. Тогда уравнения относительно этих приращений оказываются с точностью до членов меньшего порядка малости, чем эти приращения, линейными – это уравнения дифференциалов. Вот эти линеаризованные уравнения и рассматриваются. При необходимости процесс линеаризации повторяется в окрестности нового – уточненного распределения параметров, и весь процесс нахождения нового приращения выполняется заново. Конечно, процесс линеаризации вносит свои погрешности, которые в условиях некорректности (неустойчивости) могут играть чрезмерно большую роль. Однако, ничего иного, по всей видимости, делать не остается. Общие рекомендации по процедурам линеаризации, конечно, могут быть даны, однако этому мы предпочтем рассмотрение конкретных задач.

Вопросы, связанные с существованием, единственностью, устойчивостью решения обратных задач, являются основой, составляющей предмет Теория некорректных задач в геофизике. Они тесно переплетаются с другими, такими как повышение интерпретационных возможностей геофизических методов, оценка точности получаемого решения.

Традиционно в геофизике сложилось мнение, согласно которому задачи, имеющие неединственное решение, если так можно выразиться, – «недоработанные» задачи. Иными словами, необходимо сначала надлежащим сужением модельного класса эти задачи свести к задачам с единственным решением и уж затем решать эту новую полученную задачу. Точно так же принято считать, что обязательно должна быть оценена точность полученного решения. Вплоть до признания бесполезным какого-либо результата, если точность его не оценена. Несомненно, если в задаче выполнимо первое и второе, то это преимущество. Однако следует всегда иметь в виду, что изначальная формулировка обратных задач, их, если так можно сказать, полная формулировка приводит к задачам, имеющим неединственное и неустойчивое решение. В этом случае может оказаться, что единственность достигается в ущерб геологической содержательности, а точность будет тем выше, чем дальше решение находится от реального объекта, чем «грубее» аппроксимация найденным решением реального объекта.

Представим себе, например, что изучается изолированная гравитационная аномалия и решается для неё обратная задача для точечного источника. Иными словами, ищется полная масса и координаты центра тяжести тела. Точность решения будет весьма высока (за счет того, что модельный класс узок). Но найденный таким образом шар (если плотность известна), как правило, будет весьма далек от реального объекта. Полученная высокая точность решения обратной задачи ничего общего не имеет с точностью по существу, с точностью построения физического объекта. Чтобы повысить последнюю, следует расширить модельный класс, а это автоматически приведет к ухудшению точности решения обратной задачи, поскольку задача приближается к неустойчивой. Дальнейшее повышение соответствия выбранного модельного класса реальной среде последовательно приводит к задачам неустойчивым, в которых вообще нельзя говорить о точности решения, и задачам неединственным (с неединственным решением), в которых такое понятие становится совершенно бессодержательным. Таким образом, можно говорить о точности определения параметров моделей в заданном модельном классе. Эта внутренняя точность используемой технологии извлечения информации – некоторая кажущаяся, эффективная точность. Но ни в коем случае эту точность нельзя без оговорок переносить на точность по существу – точность реконструкции физической модели и, тем более, геологических построений. Точно так же, обеспечив надлежащим сужением модельного класса



единственность решения обратной задачи, не следует забывать, что достигаемая в этом случае единственность – это всего лишь единственность математической задачи, а не единственность по существу.

### 3.2. Аппроксимационные модели и принцип квазирешений

Обратные задачи геофизики, состоящие в реконструкции физической модели среды по физическим полям или наблюдаемым, естественным образом формулируются как задачи, решение которых не единственно. Выбор сужения для обеспечения единственности – это искусственный прием, направленный на получение конструктивных результатов. Сужение задачи, введение узких аппроксимационных модельных классов направлено на обеспечение единственности, но это же неизбежно ведет к ошибкам в аппроксимации, а зачастую и к потере содержательности результата.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} Ax = y; \\ x \in X, y \in Y, \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $X, Y$  – банаховы пространства. Считаем, что для нее не выполнено ни одно из условий корректности по Адамару. Следует так переформулировать (8), чтобы решение ее существовало при любой правой части, было единственным и устойчивым к ошибкам как во входных данных (наблюдаемой), так и в операторе  $A$ .

*Определение 1.* Классом эквивалентности для элемента  $y \in \text{Im } A$  называется множество  $\Omega_y(A) = \{x \in D(A) : Ax = y\}$ .

Все множество  $D(A)$  разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности (ср. с построением фактор-пространства выше и в прил. 2.4). Если  $A$  – линейный ограниченный оператор, то  $\text{Ker } A$  – замкнутое линейное подпространство в  $X$ , и построенные классы эквивалентности есть ни что иное, как классы смежности фактор-пространства  $X / \text{Ker } A$ .

*Определение 2.* Классом единственности для оператора  $A$  называется такое подмножество  $M$  в  $DA$ , что из условий  $m_1, m_2 \in M$  и  $Am_1 = Am_2$  следует  $m_1 = m_2$ .

Следующее свойство класса единственности непосредственно следует из определения.

Перечисление класса единственности с каждым из классов эквивалентности  $\Omega_y(A)$  содержит не более одного элемента.

**Теорема 2.** Пусть  $M$  – компакт, являющийся классом единственности. Тогда из условий  $m_1, m_2 \in M$  и  $\|Am_1 - Am_2\|_y \leq \delta$  следует:  $\|m_1 - m_2\|_x \leq \varepsilon$  и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon / \delta = \omega(A^{-1}, M, X, Y) = R < \infty$ .

*Доказательство.* В соответствии с теоремой о гомеоморфизме (прил. 2.3), взаимно-однозначный и непрерывный оператор, определенный на компакте, имеет ограниченный обратный. Это означает, что обратный к оператору  $A$ , суженному на  $M$  (оператор  $A(P_X(M, x)) = Am; m = P_X(M, x)$ ), переводит каждое ограниченное множество в снова ограниченное, и из конечности  $\|Am_1 - Am_2\|_y$  следует конечность  $\|m_1 - m_2\|_x$  для любых  $m_1, m_2 \in M$ . Но это эквивалентно тому, что:

$$\lim_{\|Am_1 - Am_2\|_y \rightarrow 0} \frac{\|m_1 - m_2\|_x}{\|Am_1 - Am_2\|_y} \leq \Theta = \omega(A^{-1}, M, X, Y).$$

Отсюда и следует требуемое утверждение.

По сути, конструктивная часть утверждения состоит в том, что обратная задача, соответствующая сужению ограниченного оператора (вполне достаточно только замкнутого) на класс единственности, являющийся компактом (например любое ограниченное замкнутое подмножество конечномерного пространства), имеет устойчивое решение. Однако эта устойчивость, как это уже подчеркивалось выше, может носить формальный характер.

*Определение 3.* Квазирешением уравнения  $Ax = y$  на множестве  $M$  называется элемент  $\bar{x} \in M$ , минимизирующий на  $M$  невязку<sup>5</sup>:

$$\|A\bar{x} - y\|_Y = \inf_{x \in M} \|Ax - y\|_Y. \quad (3.9)$$

Приведенное определение дает одновременно и конструктивный способ построения квазирешения, состоящий в минимизации невязки. Для этого могут быть использованы как прямые, численные методы минимизации, так и аналитические приемы (см. гл.4, 4.2).

Пусть образ множества  $M$  при отображении  $A$  есть  $N = \text{Im}(A(P_X(M, x)))$ , и пусть  $N$  – сильно выпуклое, замкнутое в  $Y$  множество. Тогда для элемента  $y$ , вообще говоря, не принадлежащего  $N$ , существует его проекция  $\bar{y} = P_Y(N, y)$  на  $N$ :

$$\|\bar{y} - y\|_Y = \min_{\xi \in N} \|\xi - y\|_Y.$$

Квазирешение на элементе (заданном физическом поле  $y$ ) можно представить себе не как прообраз  $y$ , который (прообраз, если он существует) не принадлежит, вообще говоря,  $M$ , а как прообраз проекции  $\bar{y}$  элемента  $y$  на  $N$ , который уже не только существует (поскольку  $\bar{y} \in \text{Im} A(P_X(M, x))$  по определению), но и принадлежит  $M$ . Таким образом, условия на множество  $M$  и оператор  $A$ , обеспечивающие:

- а) взаимно – однозначность и взаимно – непрерывность оператора  $A$ , суженного на  $M$ ;
- б) существование и единственность проекции произвольного элемента  $y \in Y$  на  $N = \text{Im}(A(P_X(M, m)))$ ,

являются достаточными для того, чтобы задача поиска квазирешения была корректной по Адамару.

Непрерывность оператора проектирования  $\bar{y} = P_Y(N, y)$  обеспечивается следующей теоремой.

**Теорема 3<sup>6</sup>.** Оператор проектирования в нормированном пространстве (на самом деле достаточно, чтобы пространство было только метрическим) на произвольное множество  $N$  является равномерно непрерывным по переменной  $y$ .

Приведенный результат означает следующее:

$$\forall y_1, y_2 \in Y : \|P_Y(N, y_1) - P_Y(N, y_2)\|_Y \leq R \|y_1 - y_2\|_Y,$$

где  $R$  – некоторая константа. Его смысл очевиден и состоит в утверждении, что расстояние между проекциями двух элементов непрерывно зависит от расстояния между самими этими элементами.

Для того чтобы быть уверенным в том, что квазирешение единственно, мало того, чтобы  $A$  на  $M$  был взаимно-однозначен. Следует обеспечить еще единственность проекции произвольного элемента  $y \in Y$  на  $N$ . Это будет выполнено, например, если  $N$  сильно выпукло в  $Y$ .

Приведем несколько результатов, обеспечивающих выполнение условий корректности для задачи поиска квазирешения. Эти результаты следуют из приведенных в Прил. 2 общих свойств решений экстремальных задач.

**Теорема 4.** Если  $A$  – линейный, непрерывный и взаимно-однозначный оператор, множество  $M$  – выпукло и компактно, а норма в  $Y$  строго выпукла, то для любого  $y \in Y$  квазирешение  $\bar{x}$  задачи  $Ax = y$  на  $M$  существует, единственно и непрерывно зависит от  $y$ .

Доказательство. Если  $M$  – выпуклый компакт, то таков же и  $N$  – его образ при непрерывном отображении  $A$ . Следовательно,  $\bar{y} = P_Y(N, y)$  при любом  $y \in Y$  существует и единственен. Непрерывность  $A^{-1}$  на  $N$  следует теперь из теоремы о гомеоморфизме.

Устойчивость квазирешений имеет место и в том случае, когда  $M$  – лишь ограниченно – компактно (локально – компактно). Напомним, что множество называется ограниченно – компактным, если всякое его ограниченное подмножество относительно компактно. Ограниченно –

<sup>5</sup> Если множество  $M$  замкнуто, то нижняя грань достигается и есть минимум. Обратим внимание на то, что в определении участвуют произвольные Банаховы пространства  $X$  и  $Y$ .

<sup>6</sup> См. Математическое прил. 2.

компактным множеством в банаховом пространстве является алгебраическая сумма  $M = L + K$ , где  $K$  – компакт,  $L$  – конечномерное пространство.

**Теорема 5.** Пусть  $A$  – линейный непрерывный оператор из  $X$  в  $Y$ , взаимно-однозначный на множестве  $M = K + L$ , где  $K$  – компакт, а  $L$  – конечномерное подпространство в  $X$ . Пусть, кроме того,  $K$  – выпукло, а норма в  $Y$  – сильно выпукла. Тогда квазирешение на  $M$  существует, единственно, и обратный оператор  $A^{-1}$  равномерно непрерывен на  $N = \text{Im}(A(P_X(M, m)))$ .

Доказательство. Поскольку  $L$  – конечномерное подпространство в  $X$ , а  $K$  – компакт, то и образ  $N$  множества  $M$  при отображении  $A$  также будет ограниченно – компактным, состоящим из алгебраической суммы компакта и конечномерного подпространства. В этом случае существует единственная (непрерывная) проекция элемента  $y \in Y$  на  $N$ , и достаточно убедиться в непрерывности  $A^{-1}$  на  $N$ . Последнее эквивалентно непрерывности в нуле оператора  $A^{-1}$  на множестве  $N' = N = A(K) - A(K + L)$ <sup>7</sup>. Поскольку алгебраическая разность компактов есть компакт, то требуемое вытекает из теоремы 4.

Приведенные результаты являются фрагментом теории некорректных задач – методов квазирешений. Но даже эти неполные результаты хорошо иллюстрируют дух теории, основная цель которой состоит в том, чтобы обеспечить устойчивость решения обратных задач при наличии ошибок во входных данных. Способ достижения этой цели – замена точного оператора приближенным (например надлежащим его сужением) и доказательство соответствующей теоремы устойчивости. Выделение же класса единственности, формирование модельных представлений, определяя содержательную сторону метода, оказывается преимущественно вне поля рассмотрений теории некорректных задач.

### 3.3. Свойства аппроксимационных моделей

Аппроксимационные модели конструируются так, чтобы обеспечить высокую точность подбора одним из своих элементов изучаемого объекта. Это требование называется аппроксимационной содержательностью относительно реконструируемой модели<sup>8</sup>. Гипотеза аппроксимационной содержательности выбираемой модели  $M$  есть выражение априорных знаний об изучаемой среде. Оно состоит в предположении о возможности хорошо подобрать сконструированным аппроксимационным модельным классом изучаемую среду. Для того чтобы далее иметь возможность конструировать квазирешение, надо дополнительно предположить, что этот модельный класс есть класс единственности. Казалось бы, дальнейшее дело простое – чисто технологическое. Выбрав аппроксимационно-содержательный модельный класс для изучаемой модели среды, являющийся одновременно классом единственности для оператора  $A$ , и построив квазирешение с помощью какого-либо из методов минимизации, мы вправе надеяться на то, что получаемое квазирешение и есть приближение к изучаемой модели среды. Однако такой «прямой» путь содержит в себе неприятные эффекты, типа рассмотренной в 1.4.3 скрытой эквивалентности. Здесь мы продолжим эти рассуждения.

Выбор аппроксимационного модельного класса  $M$ , а это необходимая компонента построения квазирешений в содержательном отношении, является центральным вопросом и предопределяет свойства получаемого решения. Он должен осуществляться так, чтобы решение обратной задачи было единственным и устойчивым. Второе, более важное в содержательном отношении требование состоит в аппроксимационной содержательности  $M$  относительно изучаемой физико-геологической модели среды. Поскольку об искомом решении – реальной физико-геологической модели среды заранее что-то известно, то определением аппроксимационной содержательности служит возможность аппроксимации некоторым ее элементом  $m_1$  истин-

<sup>7</sup> Напомним, что  $A(K)$  обозначает образ  $K$  при отображении  $A$ . Это сокращенная запись выражения  $\text{Im } A(P_X(K, \cdot))$ .

<sup>8</sup> Не путать с классом содержательных физико-геологических моделей среды – моделей распределения физического параметра; геометрической и др. из п. 1.3.

ного распределения искомого физического параметра  $x_1$ . Это можно записать следующим образом: для достаточно малого  $\varepsilon_1 > 0$  существует элемент  $m_1 \in M$  и

$$\|m_1 - x_1\| = \min_{\xi \in M} \|\xi - x_1\| \leq \varepsilon_1. \quad (3.10)$$

Пусть далее одним из методов минимизации найдено квазирешение  $m_2$  на  $M$  ( $M$  – класс единственности, поэтому выбор метода минимизации относится чисто к технологическим вопросам). Однако, вообще говоря, ниоткуда не следует, что  $m_2$  служит приближением к  $x_1$ . В этом состоит ошибка, зачастую допускаемая интерпретаторами, которые, считая, что если на выбранном ими классе моделей решение существует и единственно, а сам класс позволяет хорошо аппроксимировать реальную геологическую ситуацию, то построение квазирешений и есть приближение к истинному распределению искомого параметра. На самом деле найденное квазирешение  $m_2$  может быть аппроксимацией к совершенно иному, зачастую весьма «экзотическому» элементу  $x_2$  из класса эквивалентности  $\Omega_y(A) = \{x \in D(A) : Ax = y\}$ , содержащего и  $x_1$ .

Оценим, прежде всего, возможное отклонение  $x_1$  от  $x_2$ .

**Теорема 6.** Пусть  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $X$  в  $Y$ , где  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства. Пусть далее:

$$\varepsilon_2 = \|m_2 - x_2\| = \min_{\xi \in \Omega_y(A)} \|m_2 - \xi\|,$$

$M$  – ограничено-компактно, и модуль непрерывности обратного к  $A$  на  $M$  оператора конечен:

$$\sup_{x_1, x_2 \in M} \frac{\|x_1 - x_2\|_X}{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y} = \omega(A^{-1}, M, X, Y) < \infty.$$

Тогда:

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(1 + \omega(A^{-1}, M, X, Y) \cdot \|A\|\right),$$

где  $\varepsilon_1$  определено соотношением (10).

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|_X &\leq \|x_1 - m_1\|_X + \|m_1 - m_2\|_X + \|m_2 - x_2\|_X. \\ \|m_1 - m_2\|_X &\leq \omega(A^{-1}, M, X, Y) \cdot \|Am_1 - Am_2\|_Y \leq \\ &\leq \omega(A^{-1}, M, X, Y) \cdot \left\{ \|A(m_1 - x_1)\|_Y + \|A(x_1 - x_2)\|_Y + \|A(x_2 - m_2)\|_Y \right\} \end{aligned}$$

Поскольку  $x_1, x_2 \in \Omega_y(A)$ , то  $Ax_1 = Ax_2$  и

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \omega(A, M) \|A\| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат о том, что, вообще говоря, не совпадают модель ( $x_1$ ), под которую подстраивался аппроксимационный класс, и модель ( $x_2$ ) из класса эквивалентных ( $x_1$ ), которую реально аппроксимирует получаемое квазирешение, весьма настораживает. Он делает необходимым более тщательный анализ возможных негативных свойств, отличающих элемент  $x_2$  от  $x_1$ . Эту задачу можно решить только в упрощающих дело предположениях, а отрицательные эффекты проследить на еще более частных примерах. Уяснение этих особенностей в более простых случаях позволяет предположить и их существование в более сложных, не поддающихся общему анализу ситуациях либо, по крайней мере, иметь в виду возможность проявления выявленных эффектов при интерпретации результатов решения обратных задач. В общих ситуациях такого рода эффекты следует предполагать.

Пусть  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $L_2(V)$  в  $L_2$ , имеющий полную в  $L_2$  область значений, а в  $M$  – линейное подпространство в  $L_2(V)$ , являющееся классом единственности для  $A$ . Рассмотрим квазирешение как решение задачи<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|_{L_2} &\rightarrow \min, \\ x &\in M, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть  $N$  – образ  $M$  при отображении  $A$ :  $N = \text{Im } A(M)$ . Как следует из доказательства теоремы 4, задача:

$$\begin{aligned} \|n - y\|_{L_2} &\rightarrow \min, \\ n &\in N \end{aligned} \quad (3.12)$$

имеет единственное решение  $\bar{n}$  и, следовательно, (11) также имеет одно решение  $\bar{m}$ :  $A\bar{m} = \bar{n}$ . В соответствии с теоремой двойственности (прил. 2.4)  $\bar{n} \in N$  определено требованием:

$$\langle \bar{n} - y | n \rangle = 0, \quad \forall n \in N.$$

Это необходимое и достаточное условие. Тогда для  $\bar{m}$ :

$$\langle A\bar{m} - y | Am \rangle = 0 \quad \forall m \in M.$$

Для проекции элемента  $x$  в пространстве  $L_2$  на множество  $M$  введем сокращенное обозначение  $P_M x$  – это ортогональный проектор, являющийся линейным *самосопряженным* оператором. Проекцией на  $M$  некоторого множества, например  $\Xi$ , обозначим  $P_M(\Xi)$  или  $\text{Im}(P_M(\Xi))$ . Тогда:

$$\langle AP_M \bar{x} - y | AP_M x \rangle = 0, \quad \forall x \in L_2.$$

Отсюда получаем уравнение Эйлера для  $\bar{m} = P_M \bar{x}$ :

$$\begin{aligned} P_M^* A^* (AP_M \bar{x} - y) &= 0; \text{ или:} \\ P_M A^* (AP_M \bar{x} - y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Решение задачи (11) с необходимостью и достаточностью удовлетворяет уравнению (13). Далее рассмотрим градиентные методы решения этого уравнения. Они наиболее распространены, а в силу единственности решения (13) свойства решения не должны зависеть от использованного метода. Введем итерационный процесс<sup>10</sup>:

$$x^{n+1} = x^n + \alpha_n P_M A^* (Ax^n - y) \quad (3.14)$$

где  $\alpha_n$  – некоторая последовательность чисел, обеспечивающая его сходимость. Далее будет показано, что такая последовательность действительно существует. Но если последовательность  $x^n$  сходится, то предельный элемент  $\bar{x}$  удовлетворяет уравнению (13) и тем самым служит решением задачи (11). В силу единственности решения последней никаких других, кроме как предельных, для (14) решений задачи (11) не существует.

Покажем теперь, что последовательность  $\alpha_n$  действительно можно выбрать так, чтобы процесс (14) сошелся.

Пусть  $\bar{x}$  есть решение задачи (11), существование и единственность которого уже доказаны. Тогда для  $g^n = \bar{x} - x^n$  из (14) получаем:

$$\|g^{n+1}\|_{L_2} = \|g^n - \alpha_n P_M A^* (AP_M x^n - y)\|_{L_2}.$$

С другой стороны, вместо  $y$  в (11) и во всех последующих формулах можно использовать его проекцию  $\bar{n}$  на  $N = \text{Im } A(M)$ . Это следует из того, что  $\bar{n} = A\bar{x}$ . Тогда:

<sup>9</sup> Это частный случай (9) при  $Y = L_2$ .

<sup>10</sup> Очень важно то, что  $M$  – линейное подпространство. Если это не так, то (14) следует записывать в форме  $x^{n+1} = P_M(x^n + \alpha_n A^*(Ax^n - y))$ .

$$\begin{aligned} \|g^{n+1}\|_{L_2} &= \|g^n - \alpha_n P_M A^* A g^n\|_{L_2} = \|g^n\|_{L_2}^2 - \\ &- 2\alpha_n \langle g^n | A^* A g^n \rangle + \alpha_n^2 \|A^* A g^n\|_{L_2}^2 \leq \\ &\leq \|g^n\|^2 \left( 1 - 2\alpha_n \|A^* A\| + \alpha_n^2 \|A^* A g^n\|^2 \right). \end{aligned}$$

Процесс (14) будет сходиться, если последовательность  $\|g^n\|$  монотонно убывает. Это означает, что для:

$$\beta = \left( 1 - 2\alpha_n \|A^* A\| + \alpha_n^2 \|A^* A g^n\|^2 \right), \quad (3.15)$$

достаточно выполнение неравенства  $0 < \beta < 1$ . Нетрудно убедиться, что корни уравнения (15) для  $\beta \in (0,1)$  вещественны. Следовательно, последовательность  $\alpha_n$ , обеспечивающая сходимость процесса (14), действительно существует.

Начав процесс с нулевого приближения  $x^0$ , которое может множеству  $M$  и не принадлежать, из (14) легко получаем:

$$x^{n+1} = x^0 + P_M A^* \sum_{i=1}^n \alpha_n (A P_M x^i - y), \quad (3.16)$$

После перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , имеем:

$$\bar{x} = x^0 + g, \quad (3.17)$$

где  $g$  – некоторый элемент из  $\overline{P_M \text{Im } A^*}$  – проекции на  $M$  замыкания множества значений сопряженного оператора<sup>11</sup>. Таким образом, отличие найденного квазирешения от принятого нулевого приближения будет на элемент из  $\overline{P_M \text{Im } A^*}$ . В частности, можно положить нулевое приближение равным нулю, и тогда предельный элемент, т.е. квазирешение, оказывается проекцией на аппроксимационный модельный класс  $M$  элемента из  $\overline{\text{Im } A^*}$ . Слово замыкание и соответствующий символ над знаком множества значений сопряженного оператора могут быть опущены, но взамен решение рассматриваться не точно, а с «любой наперед заданной точностью». В качестве  $A^*$  в (17) может быть взят либо сопряженный к оператору  $A$ , определенному на  $M$ , либо любое из расширений на подмножество  $X_i \supseteq M$ . Проекция на множество  $M$  множества значений, сопряженного к произвольному расширению оператора  $A$  на  $X_i \supseteq M$  всегда одна и та же. Действительно, если  $A_i$  – произвольное расширение  $A$  с  $M$  на  $X_i \supseteq M$ , то искомая проекция –  $P_M (\text{Im } A_i^*)$ . Но в силу самосопряженности  $P_M$ :

$$P_M (\text{Im } A_i^*) = P_M^* (\text{Im } A_i^*) = \text{Im} (P_M^* A_i^*) = \text{Im} (A_i P_M)^* = P_M (\text{Im } A^*).$$

Если через  $M'$  обозначить класс всех проекций множества  $\text{Im } A^*$  на  $M$ , то  $M'$  есть подмножество в  $M$ . В обозначениях п. 2.1.1:  $M' = P_X (M, (\text{Im } A^*)) = \text{Im} (P_{L_2(V)} (M, \text{Im } A^*))$ . Это подмножество суть активная часть множества  $M$  в том смысле, что элементы из  $M'$  могут быть получены в качестве “добавки” к нулевому приближению до решения в процессе реализации итерационного процесса (13). При этом само нулевое приближение этой активной части может и не принадлежать, даже если принадлежит множеству  $M$ . Элементы же из  $M$ , не принадлежащие  $M'$ , вне зависимости от того, хорошо или плохо они аппроксимируют реальную геологическую ситуацию, не могут быть получены в качестве квазирешения этим итерационным процессом. Этих элементов как бы не существует – они недоступны в этой реализации вычис-

<sup>11</sup> Замыкание формально необходимо, поскольку рассматривается предел последовательности из  $\text{Im } A_i^*$ . Фактически это лишь дань строгости, поскольку, во-первых, используется конечное число итераций, а во-вторых, конечная точность входных данных делает бессмысленным достижение абсолютно точного результата, каким является теоретически предельный элемент.

лительной схемы. Если все  $M$  может быть представлено в виде  $M = P_M \text{Im } A^*$ , то  $M$  в целом активен. В качестве решения достижимы все его элементы. Анализ конструкции на активность представляет собой конструктивный способ доказательства теорем единственности.

**Теорема 7.** Пусть  $M$  – аппроксимационный модельный класс, операция проектирования на  $M$  множества  $\text{Im } A^*$  однозначна и  $M' = P_M(\text{Im } A^*)$ . Тогда  $M'$  – класс единственности для оператора  $A$ <sup>12</sup>.

Доказательство. Для случая, когда оператор  $A$  – линеен и ограничен,  $M$  – линейное подпространство и для проектирования используется пространство  $L_2(V)$ , из условия

$M' = P_M(\overline{\text{Im } A^*}) = \overline{\text{Im}(P_M A^*)}$ , в силу теоремы о ядре ( $\overline{\text{Im}(A^*)} = (\text{Ker } A)^\perp$ ), следует<sup>13</sup>:  $M' = (\text{Ker } A P_M)^\perp$  и, следовательно,  $M'$  – класс единственности, поскольку состоит из элементов, ортогональных к ядру оператора  $A$ , суженного на множество  $M$ . В случае, когда  $M$  не является линейным подпространством, оно может быть рассмотрено как подмножество некоторого другого линейного подпространства  $L$  и  $L' = P_L(\text{Im } A^*)$  есть класс единственности. Но каждое подмножество класса единственности есть снова класс единственности. Тогда требуется следовать из  $M' \subseteq L'$ .

Важное значение свойство активности приобретает и в вычислительном отношении в связи с рассмотрением обратных задач, расширение которых имеет многозначное решение.

Дело в том, что не все элементы из  $P_M(\text{Im } A^*)$ , одинаково, достижимы для градиентных методов. Представляются возможными ситуации, когда нереально получение в качестве решений элементов из  $P_M(\overline{\text{Im } A^* / \text{Im } A^*})$ . Последние могут быть весьма экзотическими математическими конструкциями. Поэтому активной, вычислительно достижимой частью аппроксимационной конструкции  $M$  служит некоторое подмножество в  $P_M(\overline{\text{Im } A^*})$ . Например, в качестве такого может выступать  $P_M(G)$ , где  $G$  – образованное достаточно регулярными элементами из  $\text{Im } A^*$ :

$$G = \{g \in \text{Im } A^* : g = A^* \varphi, \varphi \in C_0^\infty\}$$

Таким образом, оказывается, что условия активности аппроксимационной конструкции по сути своей более жестки, чем требования единственности. Наличие неактивной части в используемой аппроксимационной модели есть эффект скрытой эквивалентности. Он состоит в том, что на аппроксимационно-содержательном классе единственности элементы, получаемые в качестве квазирешения по итерационным схемам типа (13) или другими аналогичными приемами, заведомо принадлежат определенной – только активной ее части, обладают специфическими аналитическими свойствами, связанными с аналитическими свойствами сопряженного оператора. Причем появление этих эффектов тем более вероятно, чем более широкий, универсальный аппроксимационный класс используется. Собственно суть эффектов скрытой эквивалентности выражена соотношением (17). Но их смысл и характер наглядно демонстрируются на примерах, которые будут приведены далее. Явление скрытой эквивалентности, связанное с несовпадением используемой аппроксимационной конструкции и ее активной части, может быть прослежено и для более общих ситуаций.

Пусть  $M$  – замкнутое выпуклое множество в  $L_2(V)$ ,  $F, A$  – линейные ограниченные операторы,  $F$  имеет нулевое ядро  $\text{Im } A \subseteq DF$ ,  $\text{Im } F \subseteq L_p$ . Рассмотрим обобщающую (11) задачу нахождения квазирешения<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} \|F[Ax - y]\|_{L_p} &\rightarrow \min, \\ x \in M, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned} \tag{3.18}$$

<sup>12</sup> Важно отметить, что этот класс единственности согласован с той моделью поля (например дискретные значения), которая используется в операторе  $A$ .

<sup>13</sup> Учтены линейность и самосопряженность оператора проектирования.

<sup>14</sup> Тем не менее, это частный случай (9).

Обобщение состоит в том, что, во-первых,  $M$  – это не линейное многообразие, а лишь замкнутое выпуклое множество. Оно может быть образовано из линейного многообразия введением ограничений типа неравенств на значение изучаемого физического параметра. Во-вторых, обобщение касается минимизируемой невязки. Здесь главное – это введение оператора  $F$ , трансформирующего функцию невязки  $[Ax - y]$  и лишь после этого минимизирующего эту трансформацию. Например, в качестве такого оператора может выступать умножение функции невязки на весовую функцию, имеющую смысл в каждой точке оценки достоверности наблюдений в данной точке. Это могут быть и другие трансформации, подчеркивающие требующие минимизации свойства функции невязки. Так, минимизации может подлежать не сама функция невязки, а линейная комбинация ее производных до определенного заранее порядка. Тем не менее, задача (18) остается задачей построения квазирешения и частным случаем (9).

Решение задачи (18) существует и единственно. Это следует из равномерной выпуклости нормы в  $L_p$ , замкнутости и выпуклости образа  $N^F$  множества  $M$  при отображении  $FA: N^F = \text{Im}(FA(M))$  (см. доказательство теоремы 4 прил. 2.6).

Поскольку задача:

$$\begin{aligned} \|n - Fy\|_{L_p} &\rightarrow \min; \\ n &\in N^F \end{aligned} \quad (3.19)$$

имеет одно и только одно решение  $\bar{n}$ , то решение задачи (18) представимо в виде  $\bar{m} = A^{-1}F^{-1}\bar{n}$ . Для решения (19) воспользуемся теоремой двойственности (Прил. 2.6), в соответствии с которой в сопряженном к  $L_p$  пространстве  $L_q: 1/p + 1/q = 1$  должен найтись элемент  $f$  такой, что:

$$\begin{aligned} a) \|f\|_{L_q} &\leq 1; \\ б) \langle f | \bar{n} - Fy \rangle &= \|\bar{n} - Fy\|_{L_p}; \\ в) \langle f | \bar{n} - n \rangle &\geq 0, \forall n \in N^F. \end{aligned}$$

Если в качестве  $f$  выбрать:

$$f = \frac{|\bar{n} - Fy|^{p-1} \text{sign}^p(\bar{n} - Fy)}{\|(\bar{n} - Fy)^{p-1}\|_{L_q}},$$

то условия  $a$  и  $б$  окажутся выполненными. Условие  $в$  можно переписать:

$$\langle (\bar{n} - Fy)^{p-1} \text{sign}^p(\bar{n} - Fy) | \bar{n} - n \rangle \geq 0, \forall n \in N^F.$$

(здесь учтено, что  $\|(\bar{n} - Fy)^{p-1}\|_{L_q} > 0$ ) или, вводя операторы  $A$  и  $F$ :

$$\langle (F(A\bar{m} - y))^{p-1} \text{sign}^p(F(A\bar{m} - y)) | FA(\bar{m} - m) \rangle \geq 0, \forall m \in M,$$

что дает:

$$\langle A^* F^* (F(A\bar{m} - y))^{p-1} \text{sign}^p(F(A\bar{m} - y)) | \bar{m} - m \rangle \geq 0, \forall m \in M, \quad (3.20)$$

Для любого  $\alpha \geq 0$  из (20) имеем:

$$\langle \bar{m} - \bar{m} + \alpha A^* F^* (F(A\bar{m} - y))^{p-1} \text{sign}^p(F(A\bar{m} - y)) | \bar{m} - m \rangle \geq 0, \forall m \in M.$$

Но последнее условие есть необходимое и достаточное условие того, чтобы элемент  $\bar{m}$  был проекцией элемента

$$\bar{m} - \alpha A^* F^* (F(A\bar{m} - y))^{p-1} \text{sign}^p(F(A\bar{m} - y))$$

на множество  $M$  в метрике  $L_2$ . Вводя этот проектор и обозначая его (так же, как и выше)  $P_M$ , получим:

$$\bar{m} = P_M(\bar{m} - \alpha A^* F^* (F(A\bar{m} - y))^{p-1} \text{sign}^p(F(A\bar{m} - y))). \quad (3.21)$$

Каждое решение задачи (18) удовлетворяет уравнению (21), поскольку последнее есть необходимое и достаточное условие на  $\bar{m}$ . Введем теперь, как и выше, итерационный процесс:



$$m^{n+1} = P_M (m^n - \alpha A^* F^* (F(A\bar{m} - y))^{p-1} \text{sign}^p (F(A\bar{m} - y))). \quad (3.22)$$

Повторяя относительно (22) приведенные ранее рассуждения (относительно градиентного итерационного процесса (16)), можно показать, что существует последовательность параметров релаксации  $\alpha_n$ , обеспечивающая его сходимость.

Если вместо оператора  $A$  использовать его расширение  $A_i$  на  $X_i \subset L_2$ , то (22) можно переписать:

$$m^{n+1} = P_M (m^n - \alpha_n P_M A^* F^* ((F(A_i P_M m^n - y))^{p-1} \text{sign}^p (F(A_i P_M m^n - y))),$$

где

$$A = A_i P_M; \text{Im } A^* = P_M \text{Im } A_i^*$$

Итак, нулевое приближение в процессе итераций по градиентному методу претерпевает следующие трансформации.

На начальном этапе к нему добавляется некоторый элемент из  $\text{Im } A^*$ , и результат проектируется на  $M$ . Полученный новый элемент рассматривается как нулевое приближение на следующем шаге, и процесс повторяется. При фиксированном нулевом приближении, если  $P_M (\text{Im } A_i^*) \subset M$ , не все элементы из  $M$  могут быть получены таким образом. Мы вновь приходим к понятию активной части аппроксимационной модели. В данном случае множество  $P_M \text{Im } A_i^*$  будет активным подмножеством в  $M$  и, если это же подмножество является аппроксимационно-содержательным, то построенный метод нахождения квазирешения эффективен.

Представляется важным отметить то обстоятельство, что активная часть используемой аппроксимационной конструкции имеет один и тот же вид при использовании различного вида невязок:

$$\|F[Ax - y]\|_{L_p}.$$

Так, было показано, что это имеет место при  $Y = L_p$  и линейном ограниченном операторе  $F$ . Если дополнительно потребовать, чтобы  $M$  было компактом, то условие на  $F$  можно ослабить, ограничившись требованием замкнутости (и линейности)  $F$  ( $\text{Im } A \subseteq DF$ ). В последний случай включаются и формулы вычисления невязок, учитывающие совпадение не только самих полей, но и их производных.

Условие активности аппроксимационно-содержательной части модельного класса, используемого для поиска квазирешений обратной задачи итерационными методами градиентного типа, является весьма существенным. Если заранее неизвестно, является ли аппроксимационно-содержательной именно ее активная часть, то полученный результат может быть бессмысленным в геологическом отношении даже в том случае, если на самой конструкции существуют элементы, хорошо аппроксимирующие реальную среду. Эти элементы могут оказаться «в тени» – за пределами активной части используемого модельного класса. Проиллюстрируем эффекты, которые могут возникнуть из-за недоучета свойства активности, на примере обратной задачи гравиметрии. Впрочем, приводимый ниже пример в своей аналитической части равно справедлив и для задач магниторазведки, а в принципиальном плане отражает и более общие случаи.

Пусть в области  $V$  нижнего полупространства имеется некоторый изолированный объект постоянной плотности либо близкий к нему. Разобьем область  $V$  на ряд подобластей  $V_i$ , в своей

совокупности покрывающих все  $V : \left( V = \bigcap_i V_i \right)$ . Эту конструкцию обозначим  $M$ . Ее элементами

служат плотностные модели, образованные приписыванием ячейкам конкретных значений плотности (см. п. 2.1.1). Будем подбирать значения плотностей в ячейках этой построенной сетки из условия минимума невязки:

$$\|y_p - y\|_{L_2} \rightarrow \min, \quad (3.23)$$

где,  $y_p$  – рассчитанный гравитационный эффект от той либо иной комбинации плотностей в ячейках,  $y$  – интерпретируемый гравитационный эффект. Эта задача полностью аналогична рас-

смотренной выше (11), так как  $y_p = Ax$ ,  $x \in M$ . Здесь  $A$  – оператор прямой задачи гравиметрии, обеспечивающий вычисление соответствующего гравитационного эффекта от элементов модельного класса  $M$ , либо любое из его расширений, в частности расширение на  $L_2(V)$ . В соответствии с (17) для квазирешения  $\bar{\sigma}$  задачи (23) выполнено условие:

$\bar{\sigma} = \sigma_0 + g$ ,  $g \in P_M(\text{Im } A^*)$ ,  $\sigma_0$  – используемое нулевое приближение. Учитывая, что выбранная конструкция  $M$  – класс единственности и линейное подпространство, решение задачи (23) не зависит от  $\sigma_0$ , и можно считать его равным нулю. Далее  $\text{Im } A^*$  имеет вид<sup>15</sup>

$$A^* \varphi = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_0, y_0) z dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Нетрудно заметить, что это множество гармонических во всем нижнем полупространстве  $E_-$  функций. Если выполнена гипотеза двумерности, то

$$A^* \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_0) z dz_0}{(x-x_0)^2 + z^2}$$

и так же, как и для трехмерного случая  $\text{Im } A^*$ , имеет своими значениями гармонические в плоскости  $\{x, z\}$  функции.

Так, например, на рис. 2 изображен гравитирующий объект – прямоугольник с избыточной плотностью  $0,6 \text{ г/см}^3$ , расположенный внутри охватывающей прямоугольной области  $V$ .

В качестве аппроксимационной модели выбрана сетка размером  $5 \times 5$ , образующая в двухмерном случае класс  $M$ . Счет – поиск квазирешений осуществлялся для сеток  $3 \times 3$ ;  $5 \times 5$ ;  $10 \times 10$ .

Казалось бы, можно ожидать в квазирешении концентрации масс в центре, где действительно имеется возмущающий объект. На интуитивном уровне представляется, что выбранная конструкция содержательна, а малое число искомым параметров (например для сетки  $3 \times 3$ ) позволяет надеяться, что выбранная модель – класс единственности. Однако на самом деле, если сетка содержит хотя бы одну внутреннюю ячейку, а это происходит уже в случае  $3 \times 3$ , принятая модель не является в целом активной и ее активная часть существенно меньше, чем вся конструкция. Более того, не активной оказывается именно ее наиболее содержательная часть, относящаяся к описанию локализованных источников. Анализ последовательности решений для всех этих разновидностей сетки показал, что эти решения (квазирешения) сходятся, и их предел схематично изображен на рис. 3 в виде изолиний.

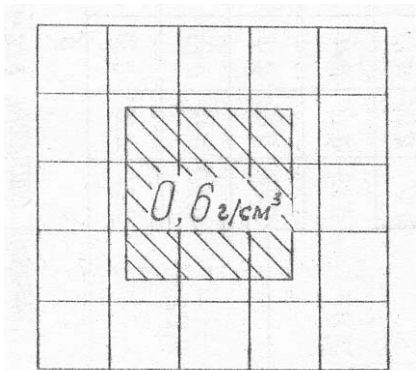


Рис. 3.2. Аппроксимационная модель.  
Тест

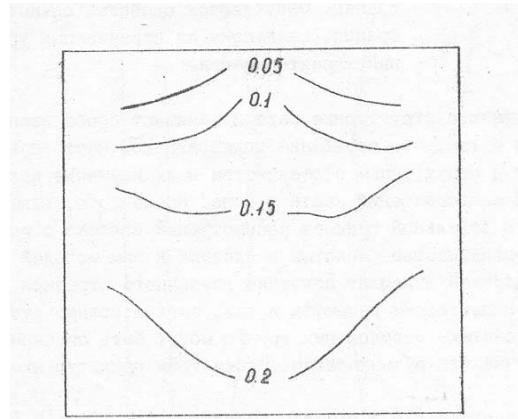


Рис. 3.3. Предел последовательности квазирешений

Визуально мало что общего есть у полученной в качестве предела элемента из  $\text{Im } A^*$  с исходным «истинным» объектом. Это хорошо демонстрируется сопоставлением этих рисунков (рис. 3.4).

<sup>15</sup> Для расширения  $A$  на все  $L_2(V)$ ,  $A^*$  действует, например, из  $L_2(E_0)$  в  $L_2(V)$ :

$$\langle A\sigma(v) | \varphi(s_0) \rangle_{L_2(E_0)} = \int_{E_0} \int_V A\sigma(v) dv \varphi(s_0) ds_0 = \int_V \int_{E_0} A\sigma(v) \varphi(s_0) ds_0 dv = \langle \sigma(v) | A^* \varphi(s_0) \rangle_{L_2(V)}$$

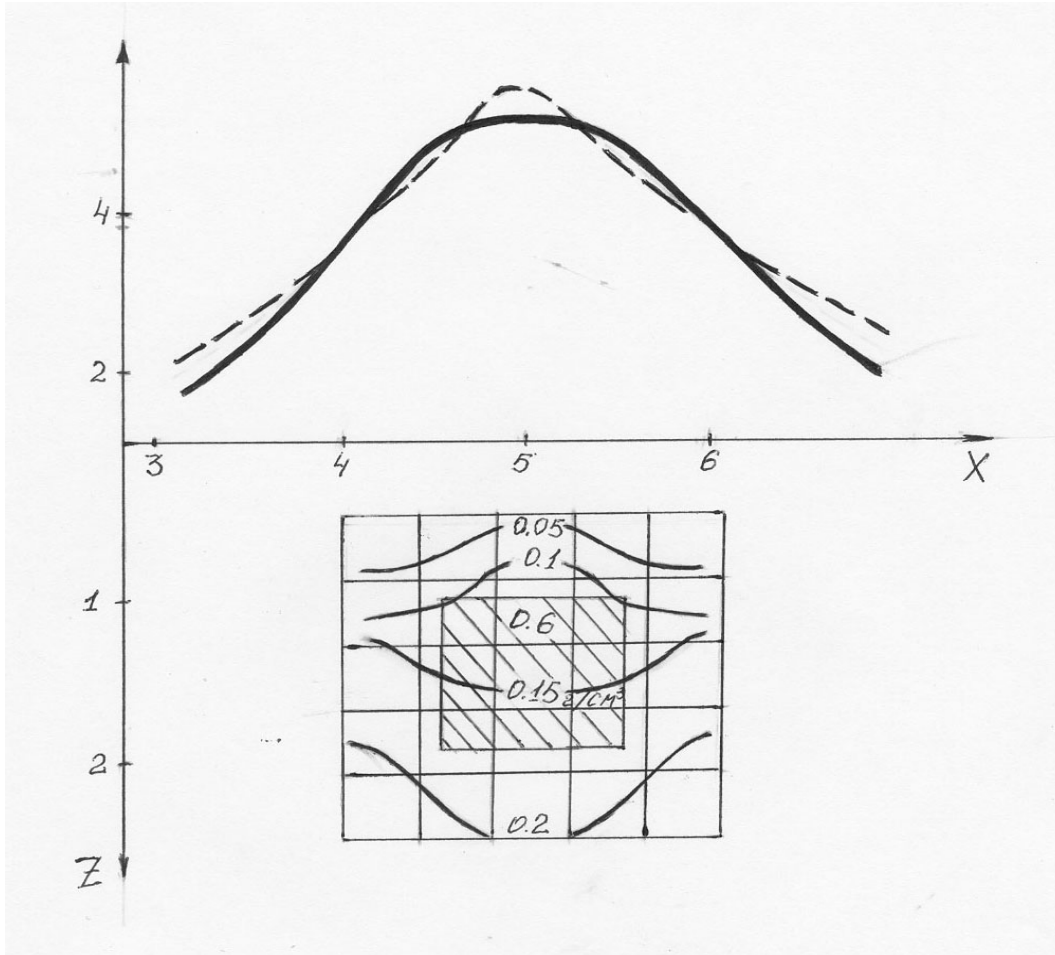


Рис. 3.2. Сеточная модель.

Пунктиром и сплошной линией приведены сопоставления «исходного» и подобранного для сетки 5x5 полей

Таким образом, как в двух-, так и трехмерном случаях  $\bar{\sigma}$  есть проекция на  $M$  гармонической функции, и активная часть  $M$  есть множество этих проекций. Рассмотрим, как выглядят эти проекции.

**Теорема 8.** Пусть  $\sigma(\mathbf{v})$  – произвольное распределение плотности в  $V$  и  $P_{L_p}(M)$  – проектор из  $L_p(V)$  на  $M$ :  $1 < p < \infty$ :

$$\bar{\sigma}(\mathbf{v}) = P_M \sigma(\mathbf{v}) : \|\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{v})\|_{L_p} = \min_{\xi \in M} \|\xi - \sigma(\mathbf{v})\|_{L_p}. \quad (3.24)$$

Для того чтобы значения плотности  $\bar{\sigma}_i$  в ячейках сетки  $V_i$ ,  $i = 1 \dots N$  определяли элемент  $\bar{\sigma}(\mathbf{v})$ , необходимо и достаточно:

$$\int_{V_i} [\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \bar{\sigma}_i]^{p-1} \text{sign}^p [\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \bar{\sigma}_i] d\mathbf{v} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Следствие. При  $p = 2$ ,  $P_{L_p}(M) = P_M$ :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\text{mes} V_i} \iiint_{V_i} \bar{\sigma}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

т.е. значение плотности  $\bar{\sigma}_i$  в ячейке  $V_i$  есть среднее по  $V_i$  от  $\bar{\sigma}(\mathbf{v})$ .

Доказательство. Применяя теорему двойственности (прил. 2.6) к задаче (24), получим, что существует

$$f(\mathbf{v}) \in L_p(V); \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1:$$

$$a) \|f(\mathbf{v})\|_{L_{p^*}} \leq 1;$$

$$b) \langle \bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{v}) | f(\mathbf{v}) \rangle = \|\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{v})\|_{L_p};$$

$$c) \langle f(\mathbf{v}) | \xi(\mathbf{v}) \rangle = 0, \forall \xi(\mathbf{v}) \in M.$$

Из (a) и (b) следует

$$f(\mathbf{v}) = \frac{(\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{v}))^{p-1} \text{sign}^p(\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{v}))}{\left\| (\bar{\sigma}(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{v}))^{p-1} \right\|_{L_p}^*}.$$

Тогда из (c):

$$\sum_{i=1}^N \int_{V_i} (\bar{\sigma}_i - \sigma(\mathbf{v}))^{p-1} \text{sign}^p(\bar{\sigma}_i - \sigma(\mathbf{v})) d\mathbf{v} \cdot c_i = 0,$$

где

$$\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}^1 \in I_2^N,$$

$c_i$  – есть значение  $\xi(\mathbf{v})$  в  $V_i$  и, следовательно:

$$\iiint_{V_i} (\bar{\sigma} - \sigma(\mathbf{v}))^{p-1} \text{sign}^p(\bar{\sigma} - \sigma(\mathbf{v})) d\mathbf{v} = 0, \forall i = 1, \dots, N.$$

Теорема доказана.

Таким образом, в качестве квазирешения будет получена комбинация плотностей в ячейках, значение каждой из которых есть средняя по  $V_i$  одной и той же гармонической функции. Но известно, что гармонические функции принимают свои максимальные и минимальные значения на границе области (в данном случае  $\partial V$ ) и не могут иметь экстремумов в центре областей (во внутренней точке). Это свойство, называемое принципом максимума модуля для гармонической функции, будет наследоваться и в средних значениях по ячейкам, откуда следует, что максимальные по модулю значения плотности будут в решении наблюдаться только для ячеек, расположенных на краю области  $V$ . Если же ячейка является внутренней для сетки, то комбинация распределения значений плотности, при которых во внутренних ячейках достигается локальный максимум (по абсолютной величине) вычислительно недостижим. Теоретически она требует использования таких элементов из замыкания множества гармонических в  $V$  функций, для которых нет функций  $\varphi$  с разумными аналитическими свойствами, описываемых формулой:

$$A^* \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_0) z dx_0}{(x - x_0)^2 + z^2}$$

Такого рода комбинации являются дополнениями вычислительно активной части конструкции и недостижимы для получения их в качестве квазирешения. Но именно такие комбинации являются геологически содержательной частью аппроксимационной конструкции при поиске локализованных источников.

Следует, однако, иметь в виду, что главная проблема здесь состоит не в том, что наследуются свойства гармонического решения. От этого свойства можно избавиться использованием иных, не градиентных подходов решения задачи (18). Но возникнут иные свойства, наследуемые особенностями вычислительных приемов. Они спрятаны, неуправляемы в рамках аппроксимационного подхода – поиска квазирешения, и именно в этом их основная опасность.

# ГЛАВА 4. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

## 4.1. Основные понятия и принципы

Условно-корректной называется задача, решение которой для набора данных  $y$  из множества  $N \subseteq \text{Im } A$  существует и единственно. Ее формальная запись

$$\begin{aligned} Ax &= y; \\ x &\in X, y \in N \subset Y, \end{aligned} \quad (4.1)$$

включает в себя:  $A$  – оператор, действующий из заданного функционального пространства  $X$  в подмножество функционального пространства  $Y$ . По известному элементу  $y$  требуется найти элемент  $x \in DA \subseteq X$ . Обратный к  $A$  оператор не имеет ограниченного обратного. Для того чтобы можно было оперировать понятиями нормы или модуля непрерывности обратного оператора, пространства  $X$  и  $Y$  должны быть метрическими, в частности Банаховыми. Теория и методы решения условно корректных задач достаточно развиты [1-4]. Потребность в создании методов их решения существует в физике. Она возникла при интерпретации результатов физического эксперимента и, прежде всего, учета искажающих влияний измерительного канала. Эта же задача в геофизике определена в гл. 1 как задача обработки наблюдаемых с целью редукции данных – наблюдаемых к физическим полям или их аналогам, пригодным для постановки обратных задач с целью реконструкции моделей среды. Используем введенные ранее обозначения:  $x$  – это подлежащая определению и измеряемая с помощью аппаратуры модель физического поля  $u(s)$ ;  $A$  – оператор, реализующий мультипликативное искажение с помощью аппаратной функции  $K(s)$  по правилу  $K(s) * u(s)$ . В такой записи  $y$  – некоторая идеализированная наблюдаемая  $y(s)$ , которая реально осложнена аддитивной помехой  $N(s)$  так, что реально имеется  $y_{\delta}(s) = y(s) + N(s)$ . Практически рассматриваемой моделью результатов измерений или, что то же самое, эталонирующих преобразований в содержательных обозначениях служит:

$$K(s) * u(s) = y(s) + N(s). \quad (4.2)$$

Элементы  $u(s)$  и  $y(s)$  принадлежат известным нормированным пространствам  $X$  и  $Y$  соответственно. Конкретная реализация погрешности  $N(s)$  неизвестна, но она также считается некоторым элементом  $Y$ . По своей сути, погрешность – это то, что неизвестно. Для ее компенсации и учета необходимо вводить некоторые предположения, и это, как всякие предположения о случайных величинах, суть предположения о ее статистических свойствах. К таковым относятся предположения о виде закона распределения либо его моментах, корреляционных функциях, спектральном составе и пр. Например, может быть введено предположение о том, что  $N(s)$  есть одна реализация эргодичного случайного процесса, обладающего свойствами белого шума – абсолютно некоррелированного процесса с нормальным распределением, нулевым средним и заданной величиной дисперсии. Совокупность статистических гипотез о том объекте, реализацией которого служит  $N(s)$ , обозначим  $\Sigma$ , а вся модель (2) обозначается  $(K, \Sigma)$ . Задача состоит в том, чтобы построить оператор  $R$  таким образом, чтобы, применив его к задаче (2), получить в каком-то смысле наилучшее приближение к  $u(s)$ :  $R(y(s) + N(s)) = u_{\delta}(s)$ . Понятие наилучшего приближения требует конкретизации. Например, следует говорить лишь об определенном множестве  $M \subset X$ , на котором оператор  $R$  оптимален, и характере оптимальности, например, обеспечивает наилучшее в квадратичном смысле приближение  $u_{\delta}(s)$  к  $u(s)$  на  $M \subset X$ . Построение оператора  $R$ , который называется редукцией, во-первых, должно использовать статистические свойства помехи, в частности, ес-

тественным представляется требование, состоящее в том, что расчетная невязка  $N_{\delta}(s) = K(s) * R(y_{\delta}) - y_{\delta}$  должна укладываться в статистическую гипотезу  $\Sigma$ . Во-вторых, оно должно сопровождаться той либо иной формой введения априорной информации об искомом решении. Идеальная редукция – это та, для которой  $R(K * u(s)) = u(s)$ . Однако термин «идеальная» в данном контексте неадекватен действительности. Идеальная редукция, если она существует для всего  $X$ , совпадает с вычислением значений обратного оператора. Это задача неустойчивая, и, как уже говорилось, мало толку от такого вычисления. Следует так конструировать редукцию, чтобы она, учитывая приближенность данных, давала согласованный с погрешностью устойчивый результат и этот результат стремился к точному по мере стремления погрешности, к нулю. Такого типа приближенные, сходящиеся к точному значению редукции, называются регуляризованными приближениями к решению. Более строгие определения приводятся ниже. Рассмотрим теперь в качестве примеров некоторые характерные аппаратные функции  $K(s)$ .

Интеграл Пуассона (2.6-2.6-а), преобразование Радона (2.9-10) доставляют примеры «аппаратных» функций  $K(s)$ . Большое число примеров аппаратных функций можно найти в спектроскопии, где они называются иногда функциями щели (slit function). Эти функции конструируются как возможный отклик  $dy(s_0)$  передающей системы в точке  $s_0$  всего канала передачи информации на элементарный входной сигнал  $du(s)$ :  $dy(s_0) = K(s_0 - s)du(s)$  и зависят от некоторого параметра  $\gamma$ , характеризующего меру сглаживания, которую претерпел входной сигнал. Кроме того, из закона сохранения энергии следует, что должно выполняться условие нормировки:  $\int K(s)ds = I$ .

$$1. \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{s^2 + \gamma^2};$$

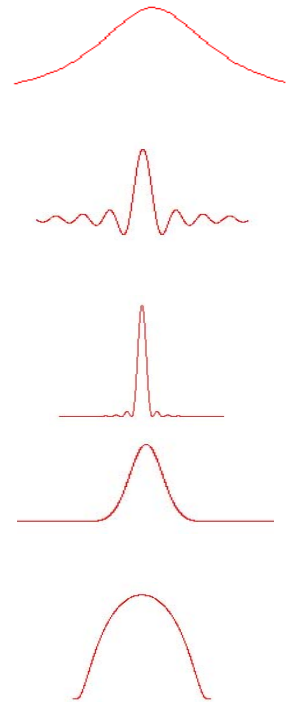
$$2. \frac{\sin(s/\gamma)}{(\pi \cdot s)};$$

$$3. \frac{\gamma^2 \cdot \sin^2(s/\gamma)}{(\pi \cdot s)^2};$$

$$4. \frac{\exp(-s^2/4\gamma)}{2\sqrt{\pi \cdot \gamma}};$$

$$5. K_{\gamma}(s) = \begin{cases} C_{\gamma} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - |s|^2}\right), & |s| < \gamma, \\ 0, & |s| \geq \gamma, \quad s \in R^n; \end{cases}$$

$$6. K_{\gamma}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} & |s|/\gamma \leq 1/2; \\ 0 & |s|/\gamma > 1/2. \end{cases}$$



(4.3)

Все они обладают сглаживающими свойствами, и потому интуитивно очевидно, что идеальная реконструкция ведет к возрастанию присущих результату измерений осцилляций, связанных с погрешностями измерений –  $N(s)$ . Какую из аппаратных функций использовать – часто дело субъективных предпочтений и в той либо иной степени убедительных аргументов в пользу преимущественных процессов, происходящих с сигналом при его прохождении по каналу, сопровождаемым размыванием, потерей резкости. Например, использование аппаратной функции (6) из (3) соответствует тому, что сигнал при прохождении канала усредняется с радиусом осреднения  $\gamma/2$ . Тогда задача (2) соответствует попытке реконструкции входного сигнала по его усредненным и зашумленным значениям. В аппаратной функции (1) из системы (3) легко увидеть ядро интеграла Пуассона, в котором роль параметра  $\gamma$  играет высота  $h$  продолжения поля. Причем все функции 1-6 при стремлении параметра  $\gamma$  к нулю стремятся дельта функции Дирака и порождают единичное – тождественное преобразование. Поэтому на качественном уровне этот параметр можно уподобить некоторой эффективной «длине» канала, которую прошел распространяющейся по нему сигнал. Задача анализа данных может в таком случае состоять в расчете этой «эффективной длины», которая ассоциируется с интегральными свойствами канала, включающего в себя и изучаемую среду, по которому распространялся сигнал. Заданными служат выходной сигнал, предполагаемый входной (или его свойства, по достижении которых считается, что реконструкция входного завершена) и видом аппаратной – передаточная функция, например из класса (3). Новые аппаратные функции можно генерировать и подбирать сверткой приведенных, что соответствует объединению механизмов прохождения сигнала по разным каналам – использование составных каналов. В результате задача (1) и ее частный случай (2) являются весьма общими и имеют большое число разнообразных и интересных приложений. Следует обратить внимание и еще на то обстоятельство, что все аппаратные функции 1-5 похожи друг на друга при том, что аргументы и обоснование введения каждого из них весьма различны. Относительно небольшими возмущениями можно одну из них свести к другой, что в условиях их приближенности задания и последующей необходимости введения поправок для обеспечения устойчивых редуций делает их результативно близкими друг к другу.

Среди большого числа частных схем устойчивого решения задачи (1) (относительно  $x$ ) можно выделить присутствующие в них две главные идеи.

Первая из них состоит в том, что оператор  $A$  заменяется другим, близким к нему оператором  $A_h$ , но таким, что  $A_h^{-1}$  уже ограничен. В качестве оператора редуции  $R$  принимается  $A_h^{-1}$ . Следует понимать, что близость  $A$  и  $A_h$  еще не означает, что для заданного  $y$  элементы  $x$  и  $x_\delta$  такие, что  $A_h x_\delta = y$ ;  $Ax = y$  близки друг к другу. Тем более они могут весьма существенно различаться, если одно из уравнений рассматривается при приближенных, а второе – при точных данных (правых частях). Выявление таких условий, при которых эта близость имеет место, составляет один из главных предметов теории условно корректных задач. Методы, основанные на этой идее, называются методами квазиобращения.

Другая идея состоит в том, что оператор  $A$  рассматривается лишь на некотором подмножестве  $M$  области определения  $DA$  и таком, что  $A^{-1}$  непрерывен на  $N = A(M)$ . Это будет иметь место, например, тогда, когда  $X, Y$  – банаховы пространства и  $M$  – компакт. К этой группе относятся методы: регуляризации, рассмотренные методы квазирешений, связанные с ними методы приближенного вычисления значения неограниченного оператора. Четкой границы между этими подходами и различными методами внутри них нет. В большинстве реальных случаев они сводятся друг к другу так, что один и тот же метод может рассматриваться с точки зрения любой из этих идей. Различие трактовок и выбор одной из них по усмотрению подчеркивает наличие некоторой субъективности в принципах решения. Возможным это становится благодаря тому, что правая часть в (1) уже в постановочном плане рассматривается как осложненная ошибками. Следующие рассуждения поясняют сказанное.

Пусть множество  $M$ , среди элементов которого ищется решение, имеет вид:

$$M = \{x : \Omega(x) \leq r\},$$

где  $r$  – заданное число;  $\Omega(x)$  – некоторый функционал над  $X$ . Например, таким образом может быть задано множество функций, имеющих ограниченную первую производную или ее полную вариацию на некотором множестве. Если  $y$  задано с ошибкой, то следует минимизировать величину невязки  $\|Ax - y\|_Y$  при условии, что  $\{\Omega(x) \leq r\}$ . Правило Лагранжа дает для этой задачи на условный минимум такую рекомендацию:

$$\|Ax - y\|_Y + \alpha \cdot \Omega(x) \rightarrow \min, \quad (4.4)$$

где  $\alpha$  – число, называемое множителем Лагранжа, как-то связанное с величиной  $r$ . Уравнение Эйлера для (4) можно, с одной стороны, рассматривать как уравнение для решения в рамках второй идеи – оно из нее и было получено. Но оно же является и возмущением исходного уравнения до оператора с непрерывным обратным (если уравнение Эйлера непрерывно разрешимо) – в рамках первой идеи.

Элемент  $y$  всегда осложнен некоторой погрешностью  $\delta y$ , которая подчинена статистике  $\Sigma$  и является конкретной реализацией или просто иным обозначением введенной выше для модели (2) функции ошибок  $N(s)$ . Это реально заданная правая часть  $y_\delta = y + \delta y$ , из которой выделить «точную» часть невозможно. Так же с погрешностью задан и оператор  $A$ . Природа этой погрешности может быть самой разнообразной. Например, подбирая модель прохождения сигнала по каналу – аппаратную функцию, приходится делать многочисленные упрощающие предположения. Подобранная аппаратная функция будет иметь эффективный, эвристический характер (см. 1.3). Другой пример – аппроксимация. При расчетах интегралов приходится вводить целую серию предположений, которые накапливаются в результирующие ошибки при расчетах на ЭВМ. Все это означает, что реально вместо оператора  $A$  используется оператор  $A_h$ , и лучшее, что мы о нем можем сказать, это то, что параметром  $h$  контролируется точность подгонки  $A_h$  под  $A$ . Реально используемый оператор  $A_h$  находится в  $h$  окрестности точного –  $A$ . Пара  $\{y_\delta, A_h\}$  называется приближенными данными задачи, а пара  $(y, A)$  – ее точными данными. Таким образом для линейного оператора  $A$  параметры погрешности определены условием:

$$\begin{aligned} \|y - y_\delta\|_Y &\leq \delta, \\ \|A - A_h\| &\leq h. \end{aligned}$$

При этом  $DA = DA_h = X$ .

Ошибкой данных называется величина  $\Delta = \{\delta, h\}$ . Предполагается, что точным данным соответствует некоторое точное (гипотетическое) решение задачи (1). Необходимо приближенным данным  $\{y_\delta, A_h\}$  поставить в соответствие по некоторому правилу  $R$  – устойчивым образом элемент  $x_\Delta$  так, чтобы  $x_\Delta$  и  $x$  были в требуемом смысле близки друг другу. Правило редукции  $R$  зависит, таким образом, не только от входных данных и вида оператора  $A_h$ , но и от  $\Delta = \{\delta, h\}$ , которые являются параметрами семейства операторов редукции. Основу теории регуляризации составляют понятия регуляризующего алгоритма (оператора) и семейства регуляризующих операторов. Приведем соответствующие определения.

Обозначим  $\mathfrak{R}[X \rightarrow Y]$  множество замкнутых линейных операторов из  $X$  в  $Y$ . В частности, по определению  $A_h, A \in \mathfrak{R}[X \rightarrow Y]$ .

*Определения.*

1. Оператор  $R\{y_\delta, A_h\}$ , определенный на паре элементов  $\{y_\delta, A_h\}$ , действующий из  $Y \times \mathfrak{R}[X \rightarrow Y]$  в  $X$ , называется регуляризующим алгоритмом (оператором) для задачи (1) в точке  $\{y_\delta, A_h\}$ , если:

а)  $R\{y_\delta, A_h\}$  определен для всех  $\{y_\delta, A_h\}$ , являющихся приближенными данными задачи с заданными величинами  $\delta, h$ ; и  $\|R\{y_\delta, A_h\}\|_X < \infty$ ;



$$\text{б) } \lim_{\Delta=\{\delta,h\}\rightarrow 0} \|x - R(y_\delta, A_h)\|_X \rightarrow 0; \quad (4.5)$$

2. Если  $R\{y_\delta, A_h\}$  – регуляризирующий алгоритм (оператор) для всех  $\{y_\delta, A_h\}$  из некоторого множества данных  $\mathfrak{K} = N \times \mathfrak{S}; N \subseteq Y; \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}[X \rightarrow Y]$ , то  $R\{y_\delta, A_h\}$  называется регуляризирующим алгоритмом на множестве  $\mathfrak{S}$ . Если оператор  $A_h$  фиксирован, то при тех же условиях  $R\{y_\delta, A_h\}$  называется регуляризирующим алгоритмом на  $N$ .

Последовательность регуляризирующих алгоритмов, параметризованных числовым параметром, зависящим от погрешности во входных данных, должна давать результат, стремящийся к точным значениям при величинах погрешности, стремящейся к нулю. Пусть  $\alpha$  – числовой или векторный параметр, пробегающий некоторое множество  $Q$ . Параметрическое семейство операторов  $R_\alpha$  называется регуляризирующим для задачи (1) в точке  $(y, A): Ax = y$ ; (точные данные), если:

а)  $\forall \alpha \in Q$ ,  $R_\alpha$  определен для любых  $\{y_\delta, A_h\}$  таких, что:

$y_\delta \in Y: (\|y_\delta - y\| \leq \delta); A_h \in \mathfrak{R}[X \rightarrow Y]: (\|A_h - A\| \leq h); \text{Im } R_\alpha \subseteq X$  и  $R_\alpha$  является регуляризирующим алгоритмом;

б) существует зависимость  $\alpha(\Delta)$  такая, что:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \alpha(\Delta) \rightarrow 0$ ;

$$\lim_{\alpha(\Delta) \rightarrow 0} \|R_\alpha(y_\delta, A_h) - x\|_X \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Таким образом, семейство регуляризирующих операторов – это такое их семейство, которое, будучи применено к входным данным, приводит к решению, сходящемуся по мере уменьшения погрешности данных к гипотетическому точному решению. Это требование аналогично введенному выше (5), но учитывает то, что величина погрешности параметризует используемый регуляризирующий алгоритм.

Однако следует еще учесть, что таких регуляризирующих алгоритмов и семейств может быть много и все эти операторы  $R_\alpha$ , будучи применены к различным данным, дают разную погрешность. Желательно, чтобы не только последовательность решений сходилась, но и эта погрешность была минимальной для каждого элемента из семейства, по сравнению с другими аналогичными семействами (по свойствам сходимости). Для этой цели вводится понятие оптимальных и оптимальных по порядку алгоритмов.

Погрешностью алгоритма  $R_\alpha$  на классе  $M$  называется величина:

$$\Delta(R_\alpha) = \sup_{x, y_\delta, A} \{ \|R_\alpha(y_\delta, A_h) - x\|; x \in M; \|Ax - y_\delta\| \leq \delta; \|A - A_h\| \leq h \}.$$

В приведенном определении погрешность – это максимум того, что получается в разнице между точным и регуляризованным приближением при различных (а не фиксированных)  $x, A_h, y_\delta$  из множеств, определенных условиями окрестности. Метод  $R_\alpha$  называется оптимальным, если величина доставляемой им погрешности  $\Delta(R_\alpha)$  минимальна среди всех других алгоритмов:  $\Delta(R_\alpha) = \inf(\Delta(R_\alpha); (R_\alpha \in \mathfrak{K} \subseteq Y \times \mathfrak{R}[X \rightarrow Y])$ . Строгой оптимальности трудно добиться, поэтому используется более слабое условие – оптимальности по порядку. Алгоритм  $R_\alpha$  оптимален по порядку, если существует постоянная  $k$ , что  $\Delta(R_\alpha) \leq k \cdot \Delta(R_\alpha)$ .

## 4.2. Квазиобращение

Пусть  $A$  – линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства  $X$  в себя. Это существенное условие, ограничивающее область задач, которые могут решаться с помощью процедур квазиобращения. Предположим, что  $A$  – взаимно однозначен, самосопря-

женен, но  $A^{-1}$  – неограничен. Если условие самосопряженности не выполняется, исходный оператор  $A$  можно умножить на ему сопряженный  $A^*$ , перейдя к рассмотрению новой задачи с уже самосопряженным оператором  $AA^*$ . При этом уравнение  $Ax = y$  заменяется на  $A^*Ax = A^*y$ . Считаем далее, что такая замена, если в этом была необходимость, выполнена. Положим далее, что приближенные данные задачи (1)  $\{y_\delta, A_h\}$  и ошибка данных –  $\{\delta, h\}$ .

#### 4.2.1. Конечномерный случай

Пусть  $A$  – вещественная, симметричная положительная матрица размерности  $N \times N$ . Тогда  $A$  имеет полную систему из  $N$  ортогональных собственных векторов  $g_i$  и соответствующую им систему собственных чисел  $\lambda_i$  (с учетом их кратности). Для решения  $x$  задачи

$$Ax = y \quad (4.7)$$

положим  $x = \sum_i \alpha_i \cdot g_i$ , где  $\alpha_i$  – неизвестные коэффициенты. Подставляя представление для  $x$  в (7), умножая скалярно результат на собственный вектор  $g_k$  и учитывая свойство ортогональности собственных векторов, легко получим:

$$\alpha_k = \frac{\langle y | g_k \rangle}{\lambda_k},$$

и

$$x = \sum_{i=1}^N \frac{\langle y | g_i \rangle}{\lambda_i} g_i. \quad (4.8)$$

В представлении (8) хорошо видны проблемы, возникающие при решении неустойчивых задач. Неустойчивость задачи эквивалентна большой величине  $\|A^{-1}\|$ , что соответствует малой величине наименьших из собственных значений –  $\lambda_1$  и в целом малости величин  $\lambda_i$  для некоторого множества индексов. Существенное значение имеют лишь оставшиеся индексы, образующие подмножество  $J$ . Если расчеты делаются с идеальной точностью и также точно заданы: данные  $y$ , компонентные матрицы  $A$ , то при малой величине  $\lambda_i$  одновременно того же порядка малости окажутся и величины  $\langle y | g_j \rangle$ . Но фактически за счет разноплановости, несогласованности ошибок, присутствующих в разных элементах исходных данных, этого не произойдет. Произойдет, если так можно выразиться, «разбаланс» в малости величин  $\langle y | g_i \rangle$  и  $\lambda_i$ . Это, в свою очередь, приведет к тому, что при некоторых  $\lambda_i$  вклад в решение компоненты  $\langle y_\delta | g_i \rangle g_i / \lambda_i$  окажется неоправданно большим. Точным выражением для нее служит  $\langle y | g_i \rangle g_i / \lambda_i$ , а за счет ошибки в правой части (8) будем иметь  $(\langle y | g_i \rangle + \langle \delta y | g_i \rangle) g_i / \lambda_i$ . Очень малой величине  $\lambda_i$  будет соответствовать согласованно малая величина  $\langle y | g_i \rangle$ . Однако член  $\langle \delta y | g_i \rangle / \lambda_i$ , за счет малости  $\lambda_i$  и конечности  $\langle \delta y | g_i \rangle$ , может оказаться сколь угодно большим. Тогда вклад от величины  $\langle \delta y | g_i \rangle / \lambda_i$  будет значительно большим, чем  $\langle y | g_i \rangle / \lambda_i$ .

Итак, наличие малых собственных значений (конечно, в каждой конкретной задаче и конкретных данных вопрос о том, когда  $\lambda_i$  уже чересчур мало, а когда еще не очень, решается индивидуально) приводит к неоправданно большому вкладу в решение компонент  $g_i$  из набора собственных векторов с малыми собственными числами. Эта компонента оказывается столь большой, что «затушевывает» все остальное. Описанная ситуация типична. С небольшими вариациями она возникает при решении большинства неустойчивых задач. Однако формы борьбы с ней зависят от конкретных условий. Наилучшим выходом из создавшейся ситуации (без привлечения каких-либо еще сведений о решении) является определение по наблюдаемой  $y_\delta$ , исходя из (1), только части решения, точнее, тех компонент, которые определяются устойчиво. В

этом и состоит один – первый из рассматриваемых подходов в теории решения некорректных (неустойчивых задач), который называется квазиобращением.

Заменим матрицу  $A$  близкой к ней, по такой, что в ней уже нет малых собственных значений. Например, в представлении (8) исключим первые суммы до величины  $j-1$  и запишем

$$x_\delta = \sum_{i=j}^N \frac{\langle y | g_i \rangle}{\lambda_i} g_i. \quad (4.9)$$

Последнее означает, что матрица  $A$  заменена другой –  $A_h$ , определенной на подпространстве  $R^{N-j}$  в  $R^N$ , ортогональном к собственным векторам  $g_1, g_2, \dots, g_{j-1}$ . Оценка уклонения  $A$  от  $A_h$  дает (из определения нормы оператора):

$$\|A - A_h\| = \left\{ \max_{\|x\|=1} \langle (A - A_h)x | x \rangle = \max_{\|x\|=1} \langle Ax | x \rangle = \lambda_j; \langle x | g_i \rangle = 0, i \in (0, 1, \dots, j-1) \right\}. \quad (4.10)$$

Итак, отображение  $A_h$  определено на подпространстве в  $R^N$ , образованном из множества индексов  $J$ , и уклоняется от  $A$  (определенном на всем  $R^N$ ) на величину, не превосходящую максимального из отброшенных собственных значений. Эта величина должна быть равной или быть меньше априори заданной оценки погрешности  $h$ , с которой задан оператор  $A$ . Физически такой подход к регуляризации означает отказ от восстановления компонент модели, слабо выражающихся в поле, и восстановление с максимальной точностью устойчиво определяемых компонент. Однако такой подход к некорректным задачам требует разделения исходной задачи на две части: устойчивую и неустойчивую. В данном случае это разделение – решение проблемы на собственное значение и, в общем-то, субъективный анализ значимости отбрасываемых компонент. Это весьма трудная в вычислительном и смысловом отношениях проблема.

В рамках рассматриваемого примера, если матрица  $A$  симметрична и положительна, можно другим образом регуляризовать задачу. Второй подход состоит в следующем. Добавим в знаменатель сумм в (8) некоторое малое положительное число:

$$x = \sum_{i=1}^N \frac{\langle y | g_i \rangle}{\lambda_i + \alpha} g_i. \quad (4.11)$$

Если величина  $\alpha$  достаточно мала (а малость ее должна быть согласована с малостью погрешности данных), то, не меняя существенно члены суммы в (8), где участвуют большие собственные значения  $\lambda_1$ , существенно уменьшается вклад членов с малыми собственными значениями. Здесь важно, чтобы собственные числа были величинами положительными. Иначе в знаменателе может оказаться ноль либо еще меньшее, чем изначально, значение. Описанный прием может быть обобщен и не требует решения проблемы на собственные значения. Действительно, если оператор  $A$  приведен к диагональному виду, то эквивалентным описанному приему является замена оператора  $A$  на  $A + \alpha I$ . В более общем случае можно говорить о замене оператора  $A$  на  $A + \alpha B$ , где  $B$  – некоторый оператор со специальными, необходимыми для решаемой задачи свойствами. Оба из описанных приема трактуются в рамках уже описанной единой схемы.

Оператор  $A$  заменяется близким к нему (в  $h$ -окрестности), но имеющим ограниченный обратный. На заданном элементе ищется значение оператора, обратного к этому приближенно. Именно эта схема называется квазиобращением [2].

### 4.2.2. Бесконечномерный случай

Описанные выше приемы, относящиеся к конечномерному случаю, могут быть распространены на бесконечномерный. Следующие результаты, приводящиеся без доказательств, характеризуют метод М.М. Лаврентьева решения неустойчивых задач. Ограничением применимости метода служат условия положительности ( $\langle Ax | x \rangle > 0$ , при  $x \neq 0$ ) и самосопряженности ( $A^* = A$ ). Доказательство приводится в [3, 63].

Пусть  $A, A_h$  – линейные самосопряженные положительные операторы, действующие на гильбертовом пространстве  $X$ .  $\{y, A\}$  и  $\{y_\delta, A_h\}$ , соответственно, – точные и приближенные данные задачи (7) а  $\Delta = (\delta, h)$  – ошибка данных. Пусть  $A^{-1}$  существует (т.е.  $A$  – взаимнооднозначно). Тогда уравнение

$$A_h x + \alpha \cdot Ix = y_\delta, \quad (4.12)$$

где  $I$  – единичный оператор, разрешимо для любых  $A_h, y_\delta$ ,  $\alpha > 0$  и его решение –  $x_\Delta^\alpha$  сходится к решению задачи (7) с точными данными при связи  $\alpha = \alpha(\delta, h)$  и  $\Delta$  такой, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (h + \delta) / \alpha(\delta, h) \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

Таким образом, семейство операторов

$$R^\alpha(A_h, y_\delta) = (A_h + \alpha I)^{-1},$$

параметризованное числом  $\alpha$ , для которого выполняется требование (13), есть регуляризующее семейство, а  $x_\Delta^\alpha$  – регуляризованное семейство приближенных решений. Параметр  $\alpha = \alpha(\delta, h)$  называется параметром регуляризации. Выбор величины параметра регуляризации  $\alpha$  по правилу (13) объясняется следующим неравенством:

$$\|x - x_\Delta^\alpha\| \leq (h + \delta) / \alpha,$$

так что при  $\alpha \rightarrow 0$  имеем  $x_\Delta^\alpha \rightarrow x$ .

При отсутствии ошибок в операторе  $A_h$  метод М.М. Лаврентьева при некоторых дополнительных условиях оказывается оптимальным по порядку на множестве  $M = \{x : x = By, \|y\| \leq r\}$ , где  $B$  – линейен, ограничен, действует из  $X$  в  $X$ . В том случае, когда в операторе имеются погрешности и используется  $A_h$ , необходимо вводить двухсторонние оценки для возникающих погрешностей при использовании процедуры регуляризации по Лаврентьеву [2, 141]. Если множество  $M$ , как и выше, имеет вид  $M_r = \{x : x = By, \|y\| \leq r\}$ , но оператор  $B$  дополнительно коммутирует как с  $A$ , так и  $A_h$ , то двухсторонняя оценка погрешности  $\Delta(R^\alpha)$  для метода Лаврентьева выражается через модуль непрерывности обратного к  $A$  оператора на подмножестве в  $M_r$  с условием невязки  $\|Ax\| \leq \tau$ :  $\omega(A^{-1}, M_r, \tau) = \sup_{x \in M_r} \{\|x\|_X; \|Ax\|_Y \leq \tau\}$ <sup>16</sup> [3, 139]:

$$\omega(A^{-1}, M_r, \tau) \leq \Delta(R^\alpha) \leq \delta / \alpha + \omega(A^{-1}, M_r, \alpha \cdot \|B\| \cdot r).$$

Обобщение на бесконечномерный случай первого из описанных выше приемов регуляризации задачи для матрицы требует введения понятия разложения единицы  $dE_\sigma$  для самосопряженного положительного оператора  $A_h$  – со спектром, целиком заполняющим отрезок  $[0, \|A_h\|]$ . Это аналог системы собственных функций, образующих собственные подпространства

так, что  $A_h x = \int_0^{\|A_h\|} dE_\sigma x$  и функция  $g(\cdot)$  от оператора считается по формуле

<sup>16</sup> Это определение повторяет стандартное для линейного случая, но подчеркивает, что рассматриваются только невязки из  $\tau$  окрестности и опущены как очевидные символы норм пространств.

$g(A_h)x = \int_0^{\|A_h\|} g(\sigma) dE_\sigma x$ . В этом случае аналогом соотношения (4), определяющего регуляризованный, оператор служит:

$$R_\alpha^h y_\delta = \int_\alpha^{\|A_h\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma y_\delta; 0 \leq \alpha \leq \|A_h\|, \quad (4.14)$$

$E_\sigma$  – разложение единицы, порожденное оператором  $A_h$ .

Если  $g(Q)$  – строго возрастающая, непрерывная и равная нулю в нуле функция,  $B = g(A_h)$

$$M_r = \{x : x = By; \|y\| \leq r\}$$

и  $\alpha$  подчинено условию  $r \cdot g(\alpha) = (r - g(A_h \|h\| + \delta)) / \alpha$ , то (14) – семейство регуляризирующих операторов.

Описанные подходы требуют самосопряженности и положительности оператора  $A_h$ . Если указанное условие не выполнено, то можно перейти к уравнению с самосопряженным положительным оператором путем умножения оператора  $A_h$  на сопряженный –  $A_h^*$ :

$$A_h^* A_h x = A^* y_\delta = B_h x.$$

Оператор  $B_h = A_h^* A_h$  уже удовлетворяет требуемым условиям. Однако такой путь имеет тот недостаток, что для неустойчивой задачи домножение оператора на сопряженный приводит к еще большему ухудшению свойств устойчивости. Это происходит потому, что при умножении операторов их собственные числа умножаются, и малое собственное число после умножения само на себя становится еще меньше. Таким образом, при умножении оператора на свой сопряженный на первом этапе свойства устойчивости еще более ухудшаются, а лишь далее положение исправляется. Такой путь следует применять тогда, когда свойства оператора не допускают применения иных алгоритмов регуляризации.

### 4.3. Метод регуляризации А.Н. Тихонова

#### 4.3.1. Основы общей теории

Метод регуляризации А.Н. Тихонова включает в себя большую группу схем решения задачи (1), отличительной особенностью которых является использование стабилизирующего функционала.

Наличие погрешности  $\delta y$  в наблюдаемой  $y_\delta$  делает естественным выбор искомого решения  $x$  среди элементов, удовлетворяющих неравенству

$$\|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta. \quad (4.15)$$

Для устойчивого выделения единственного элемента из допустимых, с точки зрения (15), следует ввести принцип отбора. В качестве такого можно принять требование минимума заданного функционала  $\Omega(x)$ . Задача нахождения приближенного решения (1) оказывается, таким образом, следующей:

$$\begin{cases} \|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta; \\ \Omega(x) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (4.16)$$

Если оператор  $A$ , функционал  $\Omega(x)$  таковы, что приемлем принцип Лагранжа, то из (16) получаем:

$$\|Ax - y_\delta\|_Y + \alpha \Omega(x) \rightarrow \min, \quad (4.17)$$

где  $\alpha$  – параметр, который надо выбрать, например, из требования того, чтобы для найденной экстремали  $x_\alpha$  для (17) выполнялось неравенство:

$$\|Ax_\alpha - y_\delta\|_Y \leq \delta.$$

Функционал  $\Omega(x)$  называют стабилизирующим, поскольку его назначение – обеспечить устойчивость нахождения решения задачи  $Ax = y$ .

Если, например, в качестве оператора  $A$  выступает интеграл Пуассона (задача редукции с ядром 1 из (3)), то принципом отбора решений из класса допустимых может служить требование наибольшей гладкости решения.

В содержательной записи (15), если  $Y = L_p(E_0)$ , для этого случая примет вид:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_z(x_0, -\gamma) \gamma dx_0}{(x-x_0)^2 + \gamma^2} - u_z^\delta(x) \right]^p dx \right\}^{1/p} \leq \delta \quad (4.18)$$

Неравенству (18) удовлетворяют как гладкие, так и резко осциллирующие функции  $u_z(x_0, -\gamma)$ . Отбор среди них более гладких можно формализовать критерием:

$$\Omega(u_z(x_0, -\gamma)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ u_z^2(x_0, -\gamma) + \left( \frac{\partial u_z(x_0, -\gamma)}{\partial x_0} \right)^2 \right] dx_0 \rightarrow \min,$$

что и служит примером для (16).

Постановка (17) как способ регуляризации может быть получена и с других позиций. Предположим, что множество  $M$ , среди элементов которого ищется приближенное решение задачи

$$Ax = y, \quad (4.19)$$

описано так:

$$M = \{x \in X : \Omega(x) \leq C\}.$$

Даже в том случае, если правая часть в (19) известна точно, в силу того, что решение (19) множеству  $M$  не принадлежит, решение задачи  $Ax = y$ ;  $x \in M$ , вообще говоря, не существует. Поэтому переформулируем ее так:

$$\begin{cases} \|Ax - y_\delta\| \rightarrow \min; \\ \Omega(x) \leq C. \end{cases} \quad (4.20)$$

Если оператор  $A$  и функционал  $\Omega^*$  таковы, что к (20) приемлемо правило Лагранжа, то от (20) переходим к (17) с некоторым  $\alpha > 0$ .

Таким образом, к задаче (17) приводит как требование минимизации стабилизирующего функционала при заданном уровне невязки, так и минимизации невязки при заданном уровне значения стабилизирующего функционала  $\Omega(x)$ , определяющего множество (например, компактное), на котором ищется решение (19).

В приведенных рассуждениях ничего не меняется, если вместо точного оператора  $A$  задано его приближение  $A_h$ .

Обозначим  $R_\alpha(A_h, y_\delta)$  – оператор из  $Y \times \mathfrak{R}[X \rightarrow Y]$ , который доставляет решение задаче (17) ( $A = A_h$ ). Метод регуляризации А.Н. Тихонова состоит в таком выборе функционала  $\Omega^*$  и правила нахождения  $\alpha$ , в зависимости от  $\Delta = \{\delta, h\}$ , чтобы  $R_\alpha(A_h, y_\delta)$  было регуляризирующим семейством операторов для (19). Способов такого выбора много. Приведем некоторые, наиболее характерные из них.

Пусть, как и ранее, точечные данные задачи (19) –  $\{y, A\}$ , приближенные –  $\{y_\delta, A_h\}$ ;  $L$  – линейный оператор, действующий из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $V$ , и для некоторого  $K > 0$  и всех  $x \in D(L) \cap X \cap D(A)$  выполнено неравенство

$$K\|x\| \leq \|Lx\|. \quad (4.21)$$

В качестве метода регуляризации рассмотрим оператор  $R_\alpha(A_h, y_\delta)$ , доставляющий данным  $\{y_\delta, A_h\}$  решение задачи:

$$\inf \left( \|A_h - y_\delta\|^p + \alpha \|Lx\|^q, x \in DA \right) \quad (4.22)$$

где  $p, q$  – целые положительные числа и  $\alpha > 0$ .

Следующий результат характеризует алгоритм (22) как регуляризующий.

Если  $A, A_h, L$  – линейные, замкнутые операторы;  $X, Y$  – рефлексивные пространства;  $V$  – равномерно выпукло, выполнено условие (21) для оператора  $L$  и  $(A_h, y_\delta)$  – приближенные данные, то (22) разрешимо единственным образом, а последовательность решений этой задачи – экстремальных  $x_{\alpha(\Delta)}$  – сходится к решению задачи  $Ax = y$  с точными данными ( $A, A_h$  предполагаются взаимно-однозначными) по норме  $\|x\|_X + \|Lx\|_V + \|Ax\|_Y$  при связи  $\alpha$  с  $\Delta$  такой, что:

$$\lim_{\alpha(\Delta) \rightarrow 0} (h + \delta)^q / \alpha(\Delta) \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

Таким образом, алгоритм (22) определяет семейство регуляризующих операторов для задачи  $Ax = y$  при выборе  $\alpha(\Delta)$  по правилу, обеспечивающему выполнение требования (23).

Требования, наложенные на оператор,  $L$  будут, например, выполнены, если  $L=I$  и  $X=L_2$  либо  $x = W_2^r$ . Смысл этих требований состоит в том, что оператор  $L$ , действующий из  $X$  в  $V$ , должен иметь ограниченный обратный из  $V$  в  $X$ . Однако оказывается, что алгоритм (22) является регуляризующим и тогда, когда требование (21) не выполнено, но множество

$$M = \{x : \|Lx\| \leq r\}$$

компактно в  $X$ .

Действительно, обращаясь к постановке (20), приходим к необходимости решить задачу:

$$\begin{aligned} \|A_h - y_\delta\|_Y &\rightarrow 0; \\ x &\in M, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где  $M$  – выпуклый компакт. Если  $A$  – линеен, взаимно-непрерывен,  $Y$  – равномерно выпукло (можно ослабить требования на  $Y$ ), то задача (24) эквивалентна обращению оператора  $A_h$  на образе компактного множества  $M$  при отображении  $A_h$ . Но, по теореме о гомеоморфизме (Прил. 2),  $A_h^{-1}$ , будет непрерывным на  $A_h(M)$ . Точнее, справедлив такой результат.

Пусть, как и ранее,  $\{y, A\}$  и  $\{y_\delta, A_h\}$  – соответственно, точные и приближенные данные задачи (1).  $A, A_h$  – линейные замкнутые операторы, имеющие обратные (т.е. взаимно-однозначные),  $X$  – банахово пространство,  $Y$  и  $V$  – рефлексивны. Если линейный, взаимно-однозначный оператор  $L$  таков, что для любого  $r > 0$  множество  $M = \{x : \|Lx\| \leq r\}$  компактно, то задача (4.22) разрешима единственным образом, и последовательность ее решений  $x_\Delta$  сходится к точному решению (1) по норме пространства  $X$  при связи  $\alpha = \alpha(\Delta)$  такой, что

$$\lim_{\alpha(\Delta) \rightarrow 0} (h + \delta)^q / \alpha(\Delta) \leq C > 0. \quad (4.25)$$

Условия (23) и (25) обеспечивают регуляризующие свойства алгоритма  $R_\alpha(A_h, y_\delta)$ , определенного как решение (22), но еще не позволяют однозначно выбрать величину параметра регуляризации. Один из результатов, позволяющих это сделать, состоит в следующем.

Если все рассматриваемые пространства гильбертовы и  $L^{-1}$  в (22) линеен, взаимно-однозначен и вполне непрерывен, то при выборе  $\alpha$  в (22) из условия

$$\alpha = 4 \left( \|L^{-1}\| h + \delta/r \right)^2, \quad (4.26)$$

алгоритм  $R_\alpha(A_h, y_\delta)$  (22) является оптимальным по порядку на множестве

$$M = \{x : x = L^{-1}g; \|g\| \leq r\}.$$

Условия оптимальности существенно снижают произвол в выборе параметра регуляризации. Однако доказывать эти свойства можно лишь в относительно простых ситуациях. Выделение оптимальных (по точности) и оптимальных по порядку алгоритмов требует априорного формирования множества  $M$ , на котором выделяемый алгоритм является оптимальным. Однако конструкция этого множества в большинстве случаев такова (случаи, когда что-то удается доказать), что его введение в большей мере имеет формально-математический характер. Отсюда снижается и ценность самих принципов оптимальности, поскольку они гарантируют оптимальность на формально введенных множествах. Таким образом, оптимальность формальная, доказываемая, не является таковой по существу задачи. Поэтому требования оптимальности при конструкции способов выбора параметра регуляризации отходят на второй план, а на первый выступают физически содержательные принципы его работы. Простейший из них состоит в том, чтобы было выполнено равенство:

$$\|Ax_\alpha - y_\delta\| = \delta, \quad (4.27)$$

где  $x_\alpha$  – решение задачи (22). По мере увеличения параметра регуляризации погрешность, получаемая по контролируемой (27) невязке, возрастает, но одновременно возрастает и требование регулярности, заложенное в стабилизирующем функционале. Необходимо добиться компромисса. Надо выделить наиболее устойчивое решение, не выходящее за пределы допустимой невязки. Выбор  $\alpha$  из этого условия называется принципом невязки. Алгоритмическое дело сводится к перебору значений параметра  $\alpha$  от больших значений к меньшим на некотором множестве и выбору такого  $\alpha_{opt}$ , когда впервые выполняется неравенство:

$$\|Ax_\alpha - y_\delta\| \leq \delta. \quad (4.28)$$

Однако здесь не учитывается погрешность в задании самого оператора. Эта погрешность вводит свою дополнительную часть в суммарную невязку, и эту часть также надо учитывать. В том случае, когда оператор  $A$  известен с ошибкой, т.е. задан  $A_h$ , следует вместо (28) пользоваться правилом обобщенной невязки:

$$\begin{aligned} \|A_h x_\alpha - y_\delta\| &= \|(A + A_h - A)x_\alpha - y_\delta\| = \\ &= \|(A + A_h - A)x_\alpha - Ax_\alpha - \delta y\| \leq \|A_h - A\| \cdot \|x_\alpha\| + \|\delta y\| = h \cdot \|x_\alpha\| + \delta, \end{aligned}$$

алгоритмически дело опять сводится к методу невязки, роль которой в данном случае играет не  $\delta$ , а обобщенная невязка  $h\|x_\alpha\| + \delta$ . Алгоритмически вопрос выбора оптимального параметра регуляризации решается перебором величины  $\alpha$  и получением соответствующих регуляризованных приближений от больших значений  $\alpha$  к меньшим и остановки тогда, когда впервые будет выполнено неравенство

$$\|A_h x_\alpha - y_\delta\| \leq h \cdot \|x_\alpha\| + \delta \quad (4.29)$$

Это значение принимается за оптимальное. В описанных алгоритмах для того, чтобы выбрать параметр регуляризации, требуется знать уровень погрешностей  $\Delta = \{\delta, h\}$ . Если эти погрешности неизвестны, то можно воспользоваться следующим приемом, основанным на рассмотрении «динамики» изменения решения в зависимости от параметра регуляризации. Если  $x(\alpha)$  есть решение задачи (22) при произвольном  $\alpha$ , то зависимость величины параметра регуляризации от погрешности можно считать такой, что при отсутствии погрешностей  $\alpha = 0$ . Тогда точное решение есть  $x(\alpha)|_{\alpha=0} = x_0$ . Разложим  $x_0$  в окрестности  $x(\alpha)$  по степеням  $\alpha$

$$x(\alpha) = x_0 + \alpha \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha} + \dots + \frac{1}{n!} \alpha^n \frac{\partial^n x(\alpha)}{\partial \alpha^n} + \dots$$

Тогда  $\alpha \left\| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\|$  характеризует линейную часть отличия точного решения от приближенного  $\|x_0 - x(\alpha)\| \approx \alpha \left\| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\|$ . Требуя, чтобы это отличие было минимальным, приходим к правилу выбора  $\alpha$ :



$$\alpha \left\| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\| \rightarrow \min . \quad (4.30)$$

Это правило называется квазиоптимальным способом выбора параметра регуляризации. Приведенные способы выбора параметра регуляризации являются, если так можно выразиться, эталонными. В каждой конкретной задаче их придется модифицировать, приспособлять к условиям задачи. В некоторых случаях и параметр регуляризации, и вид стабилизирующего функционала могут быть найдены из данных самой задачи. Типичный тому пример – Винеровская фильтрация.

### 4.3.2. Винеровская фильтрация

Рассмотрим задачу редукции (2), которая есть решение уравнения в свертках:

$$Au(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s-s_0)u(s_0)ds_0 = y(s), \quad (4.31)$$

при заданных  $(K, \Sigma)$  роль ядра  $K(s)$  может играть какая-либо из аппаратных функций в (3). Статистические свойства  $\Sigma$  будут уточнены ниже. (31) представляет собой типичную некорректную задачу и имеет физическую трактовку как обратная фильтрация, редукция, обработка с целью перехода от наблюдаемых к физическим полям. Решать задачу (31) будем по схеме (22), предполагая, что все рассматриваемые пространства есть гильбертовы с нормой, вычисляемой по правилу  $L_2$ .

$$\begin{aligned} & \|Au(s) - y(s)\|^2 + \alpha \|Lu(s)\|^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(s-s_0)u(s_0)ds_0 - y(s) \right\}^2 ds + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |Lu(s)|^2 ds \rightarrow \min . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Уравнение Эйлера для (32) имеет вид:

$$A^*(Au_\alpha(s) - y(s)) + \alpha L^* Lu_\alpha(s) = 0 . \quad (4.33)$$

Применим к (33) преобразование Фурье и, считая, что спектр  $L^* Lu(s)$  равен  $M(w)u(w)$ , получим<sup>17</sup>:

$$K^*(w)K(w)u_\alpha(w) - K^*(w)y(w) + \alpha M(w)u_\alpha(w) = 0 .$$

Тогда:

$$u_\alpha(w) = \frac{K^*(w)y(w)}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} . \quad (4.34)$$

Здесь, как обычно,  $K(w), y(w), u(w)$  – спектры функций  $K(s), y(s), u(s)$  соответственно и  $*$  – знак сопряжения (в данном случае комплексного). Оценим уклонение точного решения (31) –  $u(s)$ , соответствующего точной правой части  $y(s)$ , от полученного приближенного  $u_\alpha(s)$  по (34), соответствующего имеющейся приближенной правой части в (31)  $y_\delta(s) = y(s) + \delta(s)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{K^*(w)y_\delta(w)}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} - u(w) \right\} e^{-iws} dw = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{K^*[y(w) + \delta(w)]}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} - u(w) \right\} e^{-iws} dw = \end{aligned}$$

<sup>17</sup>  $L$  суть оператор свертки с ядром  $L(s)$  и  $M(w) = |L(w)|^2$ ,  $L(w)$  – спектр  $L(s)$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{|K(w)|^2 u(w) + K^*(w) \delta(w)}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} - u(w) \right\} e^{-iws} dw = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{-\alpha M(w) u(w)}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} + \frac{K^*(w) \delta(w)}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} \right\} e^{-iws} dw.
\end{aligned}$$

Предположим, что статистические свойства  $\Sigma$  задачи (31) состоят в предположении о том, что  $u(s)$ ,  $\delta(s)$  есть реализация стационарных случайных процессов, некоррелированных между собой.  $N(w)$ ,  $S(w)$  – соответствующие спектральные плотности этих процессов. Кроме того, будем считать процессы эргодичными. Последнее означает, что осреднение по ансамблю для этих процессов может быть заменено осреднением по параметру  $s$ . Тогда, обозначая операцию вычисления среднего черточкой сверху над осредняемой функцией, получим:

$$\begin{aligned}
&\overline{|u_\alpha(s) - u(s)|^2} = \\
&\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\alpha M(w) u(w) + K^*(w) \delta(w)}{|K(w)|^2 + \alpha M(w)} e^{-iws} dw \times} \\
&\times \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\alpha M(w') u(w') + K^*(w') \delta(w')}{|K(w')|^2 + \alpha M(w')} e^{-i w' s} dw'}. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

В соответствии с введенными статистическими предположениями  $\Sigma$ :  $\overline{\delta(w)} = 0$ ;

$$\overline{u(w) \cdot u(w')} = N(w) \varepsilon(w, w'); \quad \overline{\delta(w) \delta(w')} = S(w) \varepsilon(w, w'),$$

где  $\varepsilon(w, w')$  – дельта функция Дирака. Она равна нулю при  $w \neq w'$ , а интеграл от нее на плоскости  $w, w'$  равен единице в любой окрестности  $w = w'$ . Учитывая, что  $M(w)$  и  $|K(w)|^2$  – четные, из (35) получаем

$$\begin{aligned}
&\overline{|u_\alpha(s) - u(s)|^2} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 M(w) M(w') \overline{u(w) u(w')} + K^*(w) K^*(w') \overline{\delta(w) \delta(w')}}{\left[ |K(w)|^2 + \alpha M(w) \right] \left[ |K(w')|^2 + \alpha M(w') \right]} \times \\
&\quad \times \exp[-i(w + w')s] dw dw' = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 M^2(w) N(w) + |K(w)|^2 S(w)}{\left[ |K(w)|^2 + \alpha M(w) \right]^2} dw.
\end{aligned}$$

Требуя минимума последнего выражения по  $M(w)$ , т.е. минимизируя  $\overline{|u_\alpha(s) - u(s)|^2}$ , получим

$$M(w) = \frac{1}{\alpha} \frac{S(w)}{N(w)},$$

откуда и из (34):

$$u_\alpha(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^*(w) y(w)}{|K(w)|^2 + \frac{S(w)}{N(w)}} e^{-i w \tau} dw. \quad (4.36)$$

Таким образом, найденное решение, являясь оптимальным, не зависит явно от параметра регуляризации  $\alpha$ . Параметр регуляризации, как и компонента  $L$  стабилизирующего функцио-

нала  $L^*Lu(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(w)}{N(w)} x(w) e^{-iws} dw$ , получены из предполагаемой статистики  $\Sigma$  задачи, выраженной в информации о спектральных плотностях  $N(w)$ ,  $S(w)$  для  $u(s)$ ,  $\delta(s)$  соответственно и требования минимальности погрешности  $\left| \overline{u_\alpha(s) - u(s)} \right|^2$ .

Полученное решение называется оптимальным по Винеру.

### 4.3.3. Регуляризация дифференцирования

Процедура вычисления производной – распространенная операция в практике анализа геофизических данных. Она относится к числу неустойчивых процедур, поскольку небольшие по амплитуде вариации могут дать значительные отклонения в производной. Рассмотрим оптимальную регуляризацию процедуры дифференцирования в пространстве  $C(-\infty, +\infty)$  [3, 164].

Предположим, что точечные данные задачи дифференцирования есть:

$$\left\{ f(x), \frac{d}{dx} \right\},$$

где  $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ .

Вместо точных данных имеется приближенная функция:  $f_\delta(x)$  и:

$$\|f(x) - f_\delta(x)\|_C \leq \delta.$$

Множество  $M$ , на котором ищется оптимальный регуляризатор, определим условием:

$$M = \left\{ f(x) \in C^2(-\infty, +\infty); \left\| \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right\|_C \leq m \right\}.$$

Тогда оптимальный регуляризатор операции дифференцирования функции  $f_\delta(x)$  на множестве  $M$  есть

$$R_\alpha f(x) = \frac{f_\delta(x - \alpha) - f_\delta(x + \alpha)}{2\alpha},$$

где  $\alpha(\delta, m) = \sqrt{\frac{2\delta}{m}}$ .

При решении задач геофизики процедура дифференцирования встречается часто. Приведенное правило дает оптимальный способ ее решения, если известна оценка для второй производной от дифференцируемой функции. Следует отметить, что эта оценка, по существу, исключает из рассмотрения быстро осциллирующие функции, для дифференцирования которых следует применять иные приемы, например предварительное сглаживание.

## 4.4. Построение квазирешений

Эквивалентной для (16) формулировкой метода регуляризации А.Н. Тихонова приводящей к задаче (17) служит задача минимизации невязки  $\|Ax - y_\delta\|_Y$  на множестве  $M = \{x : \Omega(x) \leq r\}$ <sup>18</sup>.

Именно так формулируются и методы построения квазирешений уравнения  $Ax = y$  на множестве  $M$  (3.9):

<sup>18</sup> Эта эквивалентность, строго говоря, требует выполнения условий применения правила множителей Лагранжа к задаче на условный экстремум (см. прил. 2). Но невыполнение этих условий следует отнести, скорее, к экзотическим ситуациям.

$$\begin{aligned} \|Ax - y_\delta\|_Y &\rightarrow \min; \\ x \in M : \Omega(x) &\leq r. \end{aligned} \quad (4.37)$$

которые приводят, в силу принципа Лагранжа, к задаче на безусловный экстремум (17):  $\|Ax - y_\delta\|_Y + \alpha\Omega(x) \rightarrow \min$ . Это весьма характерное обстоятельство – внутреннее единство различных подходов к регуляризации. Единственное дополнение, которое дополнительно к гл. 3 необходимо сделать сейчас, – это предположение, что оператор  $A$  осложнен ошибками и задан  $A_h : \|A - A_h\| \leq h$ . Таким образом, задача (37) заменится на:

$$\begin{aligned} \|A_h x - y_\delta\|_Y &\rightarrow \min; \\ x \in M : \Omega(x) &\leq r. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Предполагается, что при отсутствии погрешностей точное решение  $x$  принадлежит известному множеству  $M$  и, кроме того,  $A$  и  $A_h$  взаимно-однозначны на  $M$ .

Следующий результат является главным для характеристики этого случая [3, 65-69].

Пусть  $A, A_h$  – линейные замкнутые взаимно-однозначные на  $M$  операторы;  $M$  – выпуклое компактное множество, и  $Y$  – сильно выпуклое рефлексивное пространство. Тогда алгоритм (38) является регуляризирующим, и последовательность регуляризованных приближений  $x_\Delta$  как решений задачи (38) (которые существуют и единственны) сходится к решению задачи  $Ax = y$  при точных входных данных  $(A, y)$  при  $\Delta = \{h, \delta\} \rightarrow 0$ .

## 4.5. Итерационная регуляризация

Решение уравнения

$$Ax = y, \quad (4.39)$$

может быть осуществлено методом итераций, и этот достаточно простой прием в определенных ситуациях служит регуляризирующим алгоритмом. Простейшая итерационная схема

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n (y - Ax^n), \quad (4.40)$$

сходится к точному решению задачи (39) [3] при любом выборе  $x^0$ , если:  $A$  – самосопряженный, положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве  $X$ ;  $A^{-1}$  существует и, кроме того,  $0 < \lambda_n \leq 2\bar{\lambda}$ , где  $\bar{\lambda}$  – наибольшее собственное число оператора  $A$ . Если  $y$  задано с погрешностью  $\delta$  (задано  $y_\delta$ ) и процессе остановлен на шаге  $N$ , то обозначим полученный при итерации элемент  $x_\delta^N$ . Если предположить, что при точных данных  $y$  – аналогичное –  $N$ -ое приближение есть  $x^N$  то, в силу неравенства треугольника  $\|x_T - x_\delta^N\| \leq \|x_T - x^N\| + \|x^N - x_\delta^N\|$ , где  $x_T$  – гипотетическое точное решение (39) при точных данных.

При  $N \rightarrow \infty$  в силу сходимости итерационного процесса  $\|x_T - x^N\| \rightarrow 0$ , и, следовательно, алгоритм (40) будет регуляризирующим тогда, когда  $\|x^N - x_\delta^N\| \rightarrow 0$ .

Перепишем схему (40) для точных и приближенных данных:

$$\begin{cases} x_\delta^N = (I - \lambda_N A)x_\delta^{N-1} + \lambda_N y_\delta; \\ x^N = (I - \lambda_N A)x^{N-1} + \lambda_N y. \end{cases}$$

Кроме того, будем считать для простоты  $x_\delta^0 = x^0$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned}
\|x_\delta^1 - x^1\| &= \lambda_1 \|y - y_\delta\| \leq \lambda_1 \delta; \\
\|x_\delta^2 - x^2\| &\leq \lambda_1 \delta + \lambda_2 \delta \|I - \lambda_2 A\| = \delta(\lambda_1 + \lambda_2 \|I - \lambda_2 A\|); \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
\|x_\delta^N - x^N\| &\leq \delta \sum_{k=0}^{N(\delta)-1} \lambda_k \|I - \lambda_k A_k\|^k
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Если выбрать  $N$ -число итераций так, чтобы  $N=N(\delta)$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) = \infty; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{k=0}^{N(\delta)-1} \lambda_k \|I - \lambda_k A_k\|^k \rightarrow 0,$$

то  $x_\delta^N \rightarrow x^N$ , и алгоритм (40) является регуляризирующим. Последовательность  $x_\delta^N$  является регуляризованной последовательностью приближений.

Нетрудно заметить, что величина  $C(n) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \|I - \lambda_k A_k\|^k$  как функция номера итерации  $n$  является возрастающей. Отсюда, в частности, следует вывод, что при заданном уровне погрешности  $\delta$  в правой части (39) увеличивать число итераций выше уровня  $N(\delta)$ , обеспечивающего достижение заданной невязки неоправданно. Начиная с номера  $N(\delta)$ , это приведет не к улучшению, а к ухудшению свойств решения, т.е. его удалению решения с приближенными данными от точного. Поэтому число итераций в процессе (40) должно быть регламентировано реально имеющейся оценкой погрешности в правой части уравнения (39). Возрастание функции  $C(n)$  приводит и к рекомендации по выбору этого числа требуемых итераций. Итерационный процесс (40) должен быть прерван, когда достигнута заданная невязка. В частности, при точно заданном операторе  $A$  выполнено неравенство:

$$\|Ax_\delta^N - y_\delta\| \leq \delta.$$

В этом состоит реализация выбора числа итераций по принципу невязки. Роль параметра регуляризации играет величина, обратная к номеру итерационного процесса. В том случае, когда оператор  $A$  задан с погрешностью  $h$ , следует воспользоваться уже описанным выше принципом обобщенной невязки.

Применимость простейшей итерационной схемы (40) ограничена требованием самосопряженности и положительной определенностью оператора  $A$ . В том случае, когда этот оператор не является самосопряженным и положительным, умножая на сопряженные к нему правую и левую части уравнения (39), приходим к итерационной процедуре:

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n A^*(y - Ax^n).$$

Все рассуждения о сходимости для (40) дословно повторяют приведенные выше с заменой оператора  $A$  на  $A^*A$ . При этом оценка (41) примет вид:

$$\|x_\delta^N - x^N\| \leq \sum_{k=0}^{N_\delta-1} \lambda_k \|I - \lambda_k A^*A\|^k.$$

## 4.6. Выводы

Приведенные конспективно результаты по методам решения некорректных задач не охватывают даже малой части того, что сделано полезного сегодня в этом направлении. Однако изложенного все же вполне достаточно, чтобы усвоить идеологию подхода, построить принципиальную схему регуляризации для широкого круга задач, а самое главное – понять, как рабо-

тают те либо иные реализованные процедуры. Для дальнейшего, углубленного ознакомления с предметом рекомендую, например, книги [1-4]. В геофизических приложениях и, в частности гравимагнитометрии развитию методов решения неустойчивых задач посвящено исключительно много работ В.Н. Страхова. Приведем одну из них, наиболее позднюю на момент написания этих строк [5]. В приведенной в ней библиографии легко отследить остальные работы. Особенностью рассмотрений служит предположение о том, что помеха и полезный сигнал ортогональны. Его введение позволяет построить эффективные алгоритмы решения некорректных задач, однако само оно, как всякое предположение, имеет свой круг применимости.

Следующее обстоятельство является общим при рассмотрении неустойчивых задач описанными методами. Предполагается, что задача

$$\begin{aligned} Ax &= y; \\ x &\in M, \end{aligned} \tag{4.42}$$

при некоторых точных данных имеет одно и только решение  $x$ . Способы конструирования регуляризирующих алгоритмов состоят в приближенном расчете по приближенным данным  $(A_h, y_\delta)$  некоторого элемента  $x_\Delta$ , такого, что при  $\Delta = \{h, \delta\} \rightarrow 0, x_\Delta \rightarrow x$ . Еще раз подчеркнем, что  $x$  – это решение (42), соответствующее точным данным  $y$  (отвлечемся от погрешностей в операторе  $A$  и предположим, что все они сконцентрированы в  $y_\delta$ ). Существование этого точного элемента предполагает, что  $x \in M$ , и последнее обстоятельство является принципиальным. С самого начала  $M$  – это конструкция для приближенного описания объекта и, предполагая  $x \in M$ , мы искажаем смысл понятия точно правой части  $y$  в (42).

Если на  $M$  решение (42) неединственно, то схема регуляризации вообще нуждается в доработке. Представим, что условие единственности на  $M$  выполнено, но существует множество  $X \supseteq M$ , и на  $X$  решение уравнения (42) неединственно. Реальное, точное решение принадлежит  $X$ , но лишь приближенно (хотя и с высокой точностью) описывается некоторым элементом из  $M$ . Спрашивается, какой смысл приобретают понятия «точная правая часть» в (42) и «точное решение» в этой распространенной в приложениях ситуации. Найдя единственное квазирешение на  $M$ , соответствующее реальным входным данным, и получив в результате элемент, лежащий в  $\varepsilon$ -окрестности гипотетического «точного» решения, соответствующего гипотетической «точной» правой части, мы ничего определенного не можем сказать о его близости к реальному и, следовательно, о степени соответствия полученного квазирешения реальной среде.

Сказанное еще раз повторяет тот вывод, к которому мы пришли в гл. 3, состоящей в том, что к применению формальных схем регуляризации к задачам, имеющим расширение до неединственных, следует относиться исключительно осторожно. Следует для таких задач развивать свои, учитывающие неоднозначность исходных постановок методы.

#### Литература

1. Тиханов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
2. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев и др. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
3. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов и др. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Латтес Р., Лионс Ж-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336 с.
5. Страхов В.Н. О центральной вычислительной задаче гравиметрии, магнитометрии, геодезии и геоинформатики // В сб. «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 34-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского». – М.: ИФЗ РАН, 2007. – С. 239-262.

# ГЛАВА 5. КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

## 5.1. Вариационные принципы и проблема критериев

Подход к решению обратных задач геофизики, основанный на принципах квазирешений на аппроксимационно-содержательных классах единственности, сталкивается не только с проблемами скрытой эквивалентности, обсуждавшимися в предшествующих разделах. Другой весьма существенной проблемой служит проблема параметризации выбранной аппроксимационной модели, модели наблюдаемой и соответствующего физического поля. Суть вопроса состоит в том, что система параметров наблюдаемой и система параметров аппроксимационной модели независимы между собой. В силу удачного стечения обстоятельств или применением специальных приемов обработки они могут оказаться согласованными. Однако изначально – это не связанные между собой параметризации. Параметризация модели наблюдаемой предопределена условиями наблюдения, а параметризация содержательной аппроксимационной модели (конструкции) определена особенностями субъективно выбранной конструкции. На этапе конструирования квазирешения соответствующее уравнение умножается на сопряженный оператор (см. п. 3.2), чем достигается согласование размерности входных и искомым параметров. Однако этот технический прием не отражает естественное требование того, чтобы в задаче изначально были согласованы искомые и заданные величины. Сказанное означает, что процесс введения априорной информации об изучаемой модели в виде содержательных аппроксимаций обладает недостатками, является односторонним, не учитывающим весьма важных свойств задачи реконструкции модели среды по физическим полям. Эта односторонность проявляется в том, что при таком подходе возможны ситуации, при которых в сформулированной задаче как теряется информация (не все существенные параметры наблюдаемой активно используются), так и, наоборот, делается попытка восстановить параметры при отсутствии соответствующей информации в наблюдаемой. Но самое неприятное состоит в том, что весьма затруднительно до проведения вычислительных процедур по реконструкции параметров модели определить, какая из этих трех ситуаций реализуется: информация теряется; информация согласована; информации недостаточно. Альтернативный использованию аппроксимационно-содержательных моделей среды является путь доопределения задачи требованием оптимальности элементов модели среды в своем классе эквивалентности. Приведем пример такого доопределения и одновременно проследим основные узловые моменты такого подхода.

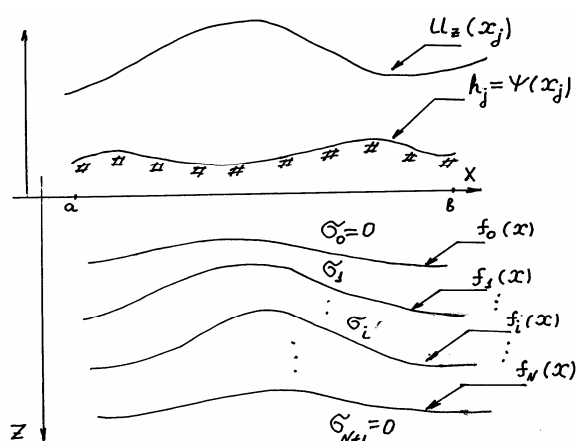


Рис. 5.1. Структурная модель

Пусть требуется реконструировать структурную плотностную модель среды по заданному гравитационному полю. Для простоты рассмотрим двумерную задачу – рис. 1. Система из  $N$  пластов с заданными значениями плотности  $\sigma_i$  ограничена  $N+1$  границей, каждая из которых описывается однозначной функцией  $z = f_i(x)$ . Особенность модели задачи состоит в том, что гравитационное поле  $u_z(x_j)$  задано в дискретном множестве точек  $\{x_j, h_j\}$  на рельефе, описываемом функцией  $h_j = \psi(x_j)$ . Вне интервала  $[a, b]$  границы продолжают горизонтальными прямыми линиями. Гравитационный эффект зон вне профиля  $[a, b]$  в точках  $\{x_j, h_j\}$  рассчитан и равен  $u_z^\phi(x_j, h_j)$ .

Связь между введенной моделью среды и значениями вертикальной производной гравитационного потенциала в «точках наблюдения» определена условием (см. п. 2.1.4):

$$A(\mathbf{f}(x), \psi(x_j)) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta \sigma_i \ln \left[ (x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx = \frac{u_z(x_j, h_j) - u_z^{\phi}(x_j, h_j)}{\gamma} = \Delta u_z(x_j); \quad (5.1)$$

$$\Delta \sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i+1}; \quad \sigma_0 = \sigma_{N+1} = 0; \quad \mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \quad h_j = \psi(x_j), \quad j = 1, \dots, M.$$

Ясно, что такой случай задания поля менее информативен, чем если бы поле было задано всюду на дневной поверхности  $E_0: \psi(x) \equiv 0$ . Оператор (1) в этом, последнем случае записываем  $A(\mathbf{f}(x)) = \Delta u_z(x_0)$ . Реконструировать  $N+1$  функцию  $f_i(x), i = 0, \dots, N$  по «известной» одной  $\Delta u_z(x_0)$  – задача явно недоопределенная. Рассмотрим, какого сорта информация об изучаемой модели среды, помимо уже введенной – задано число границ и значения плотности между ними, может быть в распоряжении интерпретатора. Прежде всего обратимся к источнику этой информации. Им, как правило, служат данные бурения, данные других геофизических методов и некоторые общие соображения о генезисе и эволюции изучаемого участка. Бурением вскрыты горизонты и имеется достоверная информация о глубинах залегания границ в этих точках. Проведенная сейсморазведка в других участках характеризовалась различным качеством материала и с разной степенью достоверности на различных участках позволила определить глубину залегания границ. В зонах с хорошим качеством материала (здесь влияет много факторов) достоверность построения выше, с плохим – ниже. В промежуточных между бурением и другими геофизическими результатами, которые лишь корреляционно, косвенно связаны с изучаемыми плотностными границами (которые сами являются определенной идеализацией), использована интерполяция на основе знания о характерных углах залегания границ, а эта информация почерпнута из геолого-тектонического анализа. Как можно объединить эту разнородную, разноплановую информацию об изучаемой модели среды. Таким объединяющим началом может служить ранжированность. Возможно, считать, что комплекс внешней, априорной информации о глубине залегания границы с номером  $i$  в точке  $x$  в принципе позволяет ранжировать возможные глубины залегания границ – указать систему предпочтений – на каких глубинах более вероятно, а на каких менее нахождение этой границы. Подчеркнем, что речь

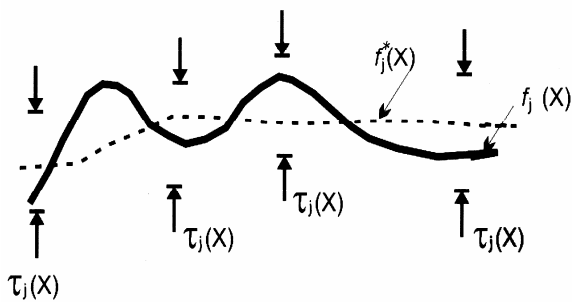


Рис. 5.2. Параметры критерия оптимальности

идет о выделенной точке профиля и глубинах залегания конкретной границы в этой точке (рис. 2). Таким образом, можно предположить, что для каждой точки профиля возможные глубины залегания границ образуют вполне упорядоченное множество: для каждой двух произвольно взятых глубин можно указать, какая из них более предпочтительна или они имеют одинаковый ранг – в том числе ранг недопустимой глубины (например на дневной поверхности или выше нее). Такой ранжировке может быть поставлено в соответствие распределение вероятности  $P_i(x, z)$ , которое для

выделенной точки  $x$  определяет вероятность того (плотность вероятности), что граница с номером  $i$  в этой точке залегает на глубине  $z$ . Пока не следует утруждать себя выработкой техники ранжирования и конструированием вероятностных законов. Это будет достаточно унифицировано в дальнейшем. В настоящем разделе речь идет об иллюстрации принципиальных позиций. Важно то, что такая вероятность может быть сконструирована как исчерпывающее выражение всего комплекса данных о глубинах залегания границы в данной точке. Для того чтобы перейти от вероятности в точке профиля к вероятности границы целиком, следует проинтегрировать вероятностный закон  $P_i(x, z)$  по  $x$ . Таким образом, для произвольного «претендента» на функцию  $\xi(x)$ , описывающую положение границы с номером  $i$ , можно вычислить интегрированную вероятность – достоверность, ранг этого претендента:



$P_i(\xi) = \int_a^b P_i(x, \xi(x)) dx$ . Однако реально имеются  $N + 1$  граница и, следовательно, вероятностный

закон, выражающий информацию о глубинах залегания в данной точке профиля, должен включать данные обо всех  $N + 1$  границах. Это значит, что он должен быть многомерным. Конкретно –  $N + 1$  мерным. Следовательно, существует функция  $P(x, \mathbf{z}), \mathbf{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_N\}$ , которая для каждой точки  $x$  профиля  $[a, b]$  и  $N + 1$  значений  $z_i = \xi_i(x)$  оценивает вероятность того, что все границы залегают на глубинах  $z_i = \xi_i(x)$ . Граница с номером 0 залегают на глубине  $z_0$ , граница с номером 1 – на глубине  $z_1$ , граница с номером  $i$  – на глубине  $z_i$ . Для того чтобы перейти от вероятности в точке профиля к вероятности системы границ целиком, следует проинтегрировать вероятностный закон  $P(x, \mathbf{z})$  по  $x$ . То, что в результате получится, называется функцией правдоподобия. Таким образом, для произвольного «претендента» на систему из  $N + 1$  функций  $\xi(x) = \{\xi_i(x), i = 0 \dots N\}$ , описывающую положение всех границ, можно вычислить интегрированную вероятность – достоверность, ранг этого претендента – его правдоподобие:

$$P(\xi) = \int_a^b P(x, \xi(x)) dx. \quad (5.2)$$

Задачу реконструкции структурной плотностной модели (1) можно доопределить требованием:

$$P(\xi) = \int_a^b P(x, \xi(x)) dx \rightarrow \max.$$

Это означает, что среди всех эквивалентных по гравитационному эффекту с учетом условий задания поля систем границ следует выбрать ту единственную систему, которая наиболее вероятна, с точки зрения имеющейся априорной информации, выраженной в виде принятого вероятностного закона. Вероятностный закон (2) служит своего рода вместилищем априорной разнородной информации. Таким образом, мы приходим к задаче:

$$A(\mathbf{f}(x), \psi(x_j)) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta \sigma_i \ln \left[ (x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx = \Delta u_z(x_j);$$

$$\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0 \dots N\}; \quad h_j = \psi(x_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (5.3)$$

$$\int_a^b P(x, \mathbf{f}(x)) dx \rightarrow \max.$$

Функционал (2) называется критерием оптимальности, и постановка (3) соответствует нахождению того единственного элемента из класса эквивалентных по гравитационному полю, который оптимален относительно введенного критерия оптимальности.

Постановку (3) можно пояснить и несколько по-иному. Система уравнений в (3) не может быть однозначно решена относительно искомым границ. Поэтому вместо попыток решить эту задачу переходим к другой – задаче минимизации заданного критерия. Что же касается уравнений, то они рассматриваются как дополнительные условия к этой задаче минимизации.

Для дальнейшей иллюстрации примем для простоты, что глубины залегания границ независимы между собой. В этом случае имеются (могут быть сконструированы)  $N + 1$  функции

$P_i(x, z) i = 0, 1, \dots, N$  и  $P(x, \mathbf{f}(x)) = \prod_{i=0}^N P_i(x, f_i(x))$ . Еще одно упрощение состоит в том, что веро-

ятностные законы примем нормальными так, что  $P_i(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_i(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right]}$ . Здесь

$f_i^*(x)$  – оценка среднего значения, оценка стандарта – среднеквадратичного отклонения. Тогда:

$$P(x, \mathbf{f}(x)) = \prod_{i=0}^N P_i(x, f_i(x)) = \prod_{i=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_i(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right]}. \quad (5.4)$$

Величины  $f_i^*(x)$  имеют смысл оценок среднего для возможных глубин залегания границы или нулевого приближения к глубине залегания.  $\tau_i(x)$  – априорная оценка среднеквадратичной погрешности построения нулевого приближения. Нетрудно понять, что максимизация выражения:

$$\int_a^b \prod_{i=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_i(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right]} dx \text{ эквивалентна минимизации:}$$

$$\int_a^b \left[ \frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right] dx, \text{ и задача (3) приобретает более частный вид:}$$

$$A(\mathbf{f}(x), \psi(x_j)) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[ (x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx = \Delta u_z(x_j); \quad (5.5)$$

$$\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \quad h_j = \psi(x_j), j = 1, \dots, M..$$

$$\int_a^b \left[ \frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right] dx \rightarrow \min. \quad (5.6)$$

Это задача на условный минимум, в которой условиями служат  $M$  уравнений, обеспечивающие требование того, чтобы все сравниваемые по критерию оптимальности (6) границы принадлежали одному классу эквивалентности с учетом параметризации наблюдаемых  $M$  компонент гравитационного поля  $\Delta u_z(x_j)$ . Для ее решения воспользуемся принципом Лагранжа (см. прил. 2.6), в соответствии с которым должны найтись числа  $\lambda_j$ , такие, что экстремаль задачи (5.5-5.6) на условный минимум совпадает с экстремалью задачи на безусловный минимум:

$$\int_a^b \left[ \frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right] dx + \sum_{j=0}^M \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[ (x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx \rightarrow \min. \quad (5.7)$$

Применимость принципа Лагранжа требует, чтобы оператор  $A(\mathbf{f}(x), \psi(\mathbf{x}))$ , определенный в (5), был непрерывно дифференцируем, а его производная (Фреше) регулярна в окрестности точки экстремума – решения  $\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}$  задачи (7). Производная этого оператора имеет вид:

$$A'(\mathbf{f}(x), \psi(x_j))\zeta(x) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \frac{(f_i(x) - h_j) \cdot \zeta_i(x)}{\left[ (x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right]} dx = \Delta u_z(x_j); \quad (5.8)$$

$$\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \quad \zeta(x) = \{\zeta_i(x), i = 0, \dots, N\}.$$

Она представляет собой линейный непрерывный оператор из  $L_2^{N+1}(a,b)$  в  $R^M$  и отображает функцию  $\zeta(x) = \{\zeta_i(x), i = 0, \dots, N\}$  в набор значений, имеющий параметризацию наблюдаемой. Его непрерывная дифференцируемость очевидна, а что касается регулярности, то это более тонкое свойство, которое будет обсуждаться ниже. Пока мы будем предполагать регулярность этого оператора. Варьируя (7) в предположении его экстремума, получим уравнение Эйлера как необходимое условие минимума:

$$f_i(x) = f_i^*(x) + \Delta\sigma_i\tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \left[ \frac{(f_i(x) - h_j)}{(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2} \right]; \quad (5.9)$$

$$i = 0, \dots, N.$$

Эта система ровно из такого числа уравнений, сколько искомого границ. Эти уравнения доопределяют систему (1). Уравнения (9) служат не чем иным как параметризацией искомого границ, параметры которой согласованы с параметризацией наблюдаемой. Их столько же и они определены в тех же точках, в которых задана наблюдаемая. Система из  $M$  уравнений (1) служит для того, чтобы определить эти параметры, которых ровно столько же, сколько и чисел  $\lambda_j$ , после чего все  $N+1$  границы находятся из (9). Таким образом, введение критерия оптимальности доопределяет исходно неопределенную задачу, обеспечивает описание класса единственности за счет формирования параметризации, согласованной с наблюдаемой, причем делает это автоматически и параметризация выражает оптимальный принцип отбора из класса эквивалентности, основанный на выражении априорной информации о среде. Меняя нулевые приближения и оценки среднеквадратичной погрешности в представлении (9), можно «настроить» класс единственности (9) на заданный элемент. Эти параметры -  $\mathbf{f}^*(x) = \{f_i^*(x), i = 0, \dots, N\}$  и  $\mathbf{\tau}(x) = \{\tau_i(x), i = 0, \dots, N\}$  служат «рулями», позволяющими осуществлять «навигацию по классам эквивалентности» до получения наилучшего решения. Теперь, после того как формирование класса единственности завершено, следует найти решение уравнения (1) на множестве, имеющем представление (9). Делать это необходимо с учетом приближенности исходных данных, и последняя задача традиционна для уже рассмотренных методов решения некорректных задач. В частности, можно воспользоваться приемами итерационной регуляризации, сконструировав следующий итерационный процесс для решения (1) на множестве (9):

$$f_i^{n+1}(x) = f_i^n(x) + \alpha_n \cdot \Delta\sigma_i\tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \varphi_j^n \cdot \left[ \frac{(f_i^n(x) - h_j)}{(x - x_j)^2 + (f_i^n(x) - h_j)^2} \right]; \quad (5.10)$$

$$f_i^0(x) = f_i^*(x)$$

$$i = 0, \dots, N.$$

$$\varphi_j^n = A(\mathbf{f}^n(x), \psi(x_j)) - \Delta u_z(x_j)$$

Далее будет показано, что если оператор (8) регулярен, то существует такая последовательность чисел  $\alpha_n$ , называемых параметром релаксации, что процесс (10) монотонно сходится к решению задачи (1,9). Подведем некоторые итоги. Введение вариационного принципа позволило сформировать критерий оптимальности, выражающий унифицированным образом разнородную и разноточную информацию об изучаемом объекте, построить экстремальный класс (9), параметризующий класс единственности, оптимальный для сформированного критерия и согласованный с параметризацией наблюдаемой. Полученный результат конструктивен, поскольку указан способ выделения единственного элемента, отвечающего конкретной наблюдаемой на построенном экстремальном классе. Априорная информация концентрирована в виде критерия оптимальности (6) и включает в себя нулевое приближение  $\mathbf{f}^*(x) = \{f_i^*(x), i = 0, \dots, N\}$  и оценку среднеквадратичной погрешности его построения -  $\mathbf{\tau}(x) = \{\tau_i(x), i = 0, \dots, N\}$ . Ее можно легко менять, управляя свойствами получаемого результата, не меняя технологической схемы

построения решения, и тем самым оперативно уточнять и подстраивать параметры критерия оптимальности.

Приведенная схема анализа и решения недоопределенных обратных задач геофизики несомненно является преимущественной в сравнении с методами построения квазирешений на аппроксимационно-содержательных классах. Однако есть одно обстоятельство, которое требует особых исследований в описанном подходе. Оно образно может быть выражено следующим тезисом: «рули должны работать правильно». В приведенных рассуждениях этими рулями служит критерий оптимальности и входящие в его конструкцию нулевые приближения  $\mathbf{f}^*(x) = \{f_i^*(x), i = 0, \dots, N\}$  и оценки погрешности их построения  $\mathbf{T}(x) = \{\tau_i(x), i = 0, \dots, N\}$ . Из соотношения (9) нетрудно видеть, что величины  $f_i(x) - f_i^*(x)$  в правой части (9) при  $\mathbf{T}(x) = 1: \{\tau_i(x) = 1, i = 0, \dots, N\}$  резко убывают по мере возрастания  $f_i(x)$ . Точнее говоря, если оператор  $A(\mathbf{f}(x), \Psi(x_j))$  регулярен как в окрестности  $\mathbf{f}(x)$ , что предполагается, так и в окрестности  $\mathbf{f}^*(x)$ , что также, как правило, выполнено, то для любой последовательности чисел  $\lambda_j$  в (9) найдется такая последовательность чисел  $\lambda_j^*$ , что:

$$\Delta\sigma_i\tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \left[ \frac{(f_i(x) - h_j)}{(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2} \right] = \Delta\sigma_i\tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \lambda_j^* \cdot \left[ \frac{(f_i^*(x) - h_j)}{(x - x_j)^2 + (f_i^*(x) - h_j)^2} \right].$$

Тогда (9) переписывается:

$$f_i(x) = f_i^*(x) + \Delta\sigma_i\tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \lambda_j^* \left[ \frac{(f_i^*(x) - h_j)}{(x - x_j)^2 + (f_i^*(x) - h_j)^2} \right];$$

$$i = 0, \dots, N.$$

Таким образом, по мере перехода к более глубоко залегающим границам – увеличению  $f_i^*(x)$  при равной достоверности построения всех компонент нулевого приближения  $\mathbf{T}(x) = 1: \{\tau_i(x) = 1, i = 0, \dots, N\}$  отличие в получаемых границах от нулевого приближения будет резко убывать. Таким образом, разноглубинные компоненты модели ведут себя по-разному, а это не было заложено в критерии оптимальности. Это обстоятельство хорошо становится понятным, если заметить, что величины:

$$\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))}{\Delta\sigma_i \cdot \tau_i^2(x)}$$

есть краевые значения на искомым границах одной и той же гармонической функции:

$$\sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \left[ \frac{(z - h_j)}{(x - x_j)^2 + (z - h_j)^2} \right],$$

$$i = 0, \dots, N.$$

резко убывающей с возрастанием  $z$ . Это проявление внутренних свойств рассматриваемой задачи. Интуитивно ожидается, что равнодостоверные компоненты модели по мере согласования с полем должны и равноварьироваться. Следовательно, результат решения в (10) ведет себя по своим свойствам, не так как это ожидается от критерия, что объясняется вышеописанными внутренними свойствами задачи. Это также своего рода проявление скрытой эквивалентности, как и в методах, использующих аппроксимационно-содержательные модельные классы, за тем лишь существенным исключением, что здесь эти эффекты прослеживаемы и управляемы. Следует изучить эти эффекты и тем самым выработать адекватные правила формирования критерия оптимальности, свойства получаемых решений.

Для того чтобы выявить суть проблемы еще более рельефно, рассмотрим другую частную задачу – реконструкции плотностного распределения в заданной области, используя принципы отбора оптимального решения, аналогичные вышеиспользованным. Для простоты также ограничимся плоской задачей.

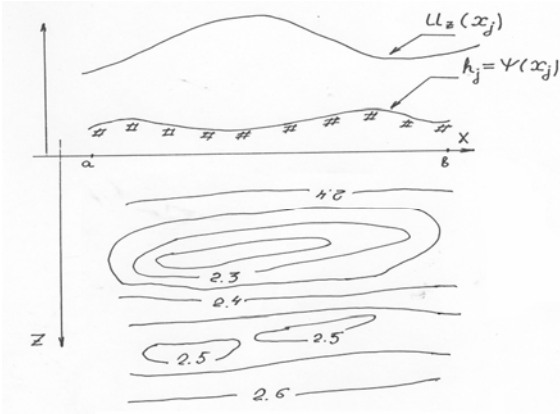


Рис. 5.3. Модель распределения плотности

В области  $S$  нижнего полупространства распределены массы с плотностью  $\sigma(x, z)$  (рис. 3). Как и в предшествующем случае, поле задано в  $M$  точках  $\{x_j, h_j\}$  на рельефе, описываемом функцией  $h_j = \psi(x_j)$ . Связь распределения плотности и вертикальной производной гравитационного потенциала будет иметь вид (см. п. 2.2)

$$A\sigma(s) = \iint_S \frac{(z - h_j)\sigma(x, z) dx dz}{(x - x_j)^2 + (z - h_j)^2} = \frac{u_z(x_j)}{\gamma}, \quad (5.11)$$

Считая, что в каждой точке  $(x, z)$  области  $S$  задано нулевое приближение  $\sigma^*(x, z)$  и отклонение значений в этой точке нулевого приближения от искомого распределения есть нормально распределенная величина с нулевым средним и оценкой среднеквадратичной погрешности, равной в этой точке величине  $\tau(x, z)$ , приходим к критерию оптимальности, эквивалентному максимуму правдоподобия:

$$\iint_S \frac{[\sigma(x, z) - \sigma^*(x, z)]^2}{\tau^2(x, z)} dx dz \rightarrow \min. \quad (5.12)$$

Также как и в (5-7) задача (11-12) суть вариационная задача на условный минимум, в которой условиями служат  $M$  уравнений. Они обеспечивают требование того, чтобы все сравниваемые по критерию оптимальности (12) плотностные распределения принадлежали одному классу эквивалентности. Как раз тому, который соответствует наблюдаемым компонентам гравитационного поля  $\Delta u_z(x_j)$ . Для ее решения, как и выше, воспользуемся принципом Лагранжа. В соответствии с ним должны найтись числа  $\lambda_j$  такие, что экстремаль задачи (5-6) на условный минимум совпадает с экстремалью задачи на безусловный минимум:

$$\iint_S \frac{[\sigma(x, z) - \sigma^*(x, z)]^2}{\tau^2(x, z)} dx dz + \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \iint_S \frac{(z - h_j)\sigma(x, z) dx dz}{(x - x_j)^2 + (z - h_j)^2} \rightarrow \min. \quad (5.13)$$

Необходимым и достаточным условием тому, чтобы распределение плотности  $\sigma(x, z)$  было решением этой задачи, служит (см. прил. 2.6):

$$\sigma(x, z) = \sigma^*(x, z) + \tau^2(x, z) \cdot \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \frac{(z - h_j)}{(x - x_j)^2 + (z - h_j)^2}. \quad (5.14)$$

(14) – это просто уравнение Эйлера для (13), также как (9) – это уравнение Эйлера для (7). Но в отличие от рассмотренной выше задачи, (13) – это необходимые и достаточные условия. Это связано с линейностью и ограниченностью оператора (11). В него входят параметры  $\lambda_j$ , которых ровно столько, сколько уравнений в (11). Подстановка (14) в (11) позволяет однозначно найти эти параметры, после чего из (14) однозначно вычисляется искомое распределение плотности. Таким образом, (14) – это согласованная с характером задания – наблюдаемой параметризация модели среды, следующая из введенного критерия оптимальности. Как и выше, введение критерия оптимальности доопределяет исходно неопределенную задачу, обеспечивает описание класса единственности за счет формирования параметризации, согласованной с наблюдаемой, причем делает это автоматически, и параметризация выражает оптимальный принцип отбора из класса эквивалентности, основанный на выражении априорной информации о среде.

Легко заметить особые аналитические свойства, присущие решению вида (14). Если предположить, что нулевое приближение  $\sigma^*(x, z)$  к искомой плотностной модели построено равно достоверно во всех точках области  $S$ , то это означает, что  $\tau(x, z) = const$ . Тогда величина уклонения искомого решения от нулевого приближения оказывается гармонической функцией:

$$\sigma(x, z) - \sigma^*(x, z) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \frac{(z - h_j)}{(x - x_j)^2 + (z - h_j)^2}. \quad (5.15)$$

Такое специальное свойство получаемого решения ведет к заключению о том, что это – формально эквивалентная модель. Это расходится с ожиданиями того, что в условиях «равноточности» исходных построений для разных глубин следует ожидать «равноуклонения» от нулевого приближения на тех же глубинах.

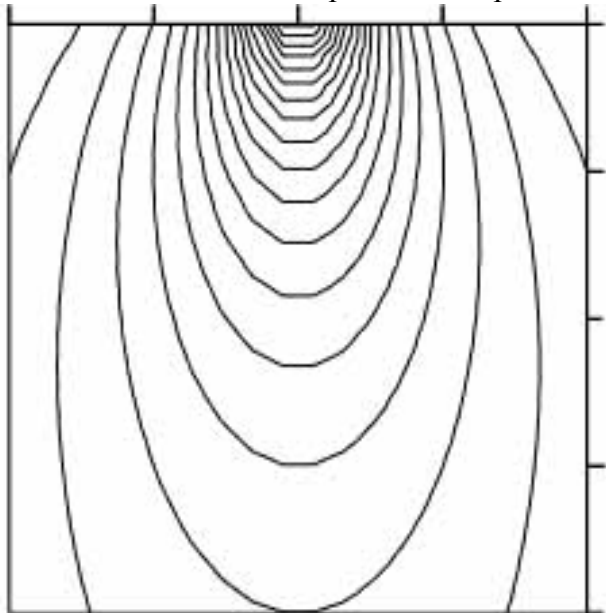


Рис. 5.4. Изолинии гармонической плотности

Этого не происходит. Типичный график гармонической функции приведен на рис. 4 и наглядно демонстрирует это обстоятельство. В предположении равенства нулю нулевого приближения именно такого сорта распределения следует ожидать в качестве решений, наименее уклоняющихся от нуля.

Свойства гармонических функций таковы, что получение некоторых внутренних локализаций невозможно. Таким образом, критерии максимальной близости в смысле наименьших квадратов не соответствуют по свойствам получаемых решений ожиданиям в получении некоторых небольших содержательных поправок к известному нулевому приближению. Причин этому много. Их можно найти, например, в том, что и значения глубин залегания границ, и значения

плотностей в разных точках не являются независимыми, и потому интегральный критерий максимума правдоподобия должен быть видоизменен.

Сказанное позволяет сделать выводы.

1. Введение критериев оптимальности позволяет доопределить исходно недоопределенные задачи и выработать классы оптимальных моделей, которые называются экстремальными классами, параметризованные согласованно с параметризацией моделей.

2. Экстремальные классы являются максимально широкими классами единственности для конкретной параметризации, наблюдаемой в том смысле, что используют все значения наблюдаемой.

3. Параметры – нулевое приближение и оценка достоверности его построения, входящие в квадратичный критерий оптимальности (6) и (12) – позволяют «настроить» экстремальный класс на требуемые свойства решений.

4. Необходимо исследование свойств экстремальных классов для правильной методики формирования параметров критериев оптимальности. Здесь следует понимать, что значение имеет не кажущаяся убедительность аргументов в пользу выбора того либо иного критерия оптимальности – его управляющих параметров, а соответствие результатов параметрам, заложенным в критериях. Только так можно перейти к получению содержательных, а не эффективных – формально эквивалентных моделей. Управляющие параметры – рули должны работать предсказуемо.

## 5.2. Критерии оптимальности типа нормы

Рассмотрим теперь обобщающую (11-12) задачу. Обобщение распространим как на вид решаемого уравнения, так и на характер используемого для этой цели критерия оптимальности в рамках вариационного принципа доопределения задачи.

Пусть имеется операторное уравнение с замкнутым оператором:

$$Ax = y. \quad (5.16)$$

Действующим из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$  и  $y \in \text{Im } A$ . Пусть, далее, класс эквивалентности  $\Omega_y(A) = \{x \in D(A) : Ax = y\}$ <sup>19</sup> содержит более одного элемента. Дальнейшие рассмотрения связаны с задачей:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ J(x) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (5.17)$$

где  $J(*)$  – сильновыпуклый на  $\Omega_y$  функционал, являющийся выражением априорной информации об искомом решении уравнения (16). Постановку (17) называем *критериальным подходом* к решению обратной задачи, а методы решения этой задачи – *критериальными методами* решения обратных задач. Если  $\Omega_y$  содержит один элемент, то задача (17) оказывается эквивалентной решению операторного уравнения (16), для чего применимы уже изложенные ранее методы решения некорректных задач. Чем шире множество  $\Omega_y$ , тем в большей мере свойства решения (17) определены видом выбранного функционала  $I(*)$ .

### 5.2.1. Вариационные параметризации и квазирешения

Постановкой (17) может быть учтена принадлежность искомого решения заданному классу модельному классу. Действительно, пусть  $M$  – класс моделей, на котором ищется решение задачи (16). Положим:

$$J(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in M \\ \infty & \text{при } x \notin M \end{cases} \quad (5.18)$$

При таком выборе критерия оптимальности задача (17) оказывается эквивалентной поиску решения на  $M$ , которое следует искать как квазирешение. Однако необходимо учитывать приближенность задания исходных данных, в чем, собственно, и состоит идея построения квазирешения – нахождение элемента из модельного класса, минимизирующего невязку. Покажем, что «реалистичные» постановки обратных задач, учитывающих приближенность данных, могут быть сформулированы с использованием (17).

Поскольку наблюдаемая  $y$  задана с ошибками, подчиненными некоторому вероятному закону, вид которого нас пока не интересует, то реально следует говорить не о требовании равенства  $Ax = y$ , а о выполнении условия:  $P(Ax - u) \rightarrow \min$ , где  $P$  – некоторый функционал на  $Y$ . Тем более, это условие надо использовать еще и потому, что из-за ошибок в наблюдаемой следует предполагать, что  $y \notin \text{Im } A$ . Таким образом, «реалистичная», учитывающая приближенность входных данных постановка задачи (17) такова:

$$\begin{cases} P(Ax - u) \rightarrow \min, \\ J(x) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (5.19)$$

Два принципа оптимальности в (19) отражают принципиально разные оптимизируемые компоненты. Оптимальность  $J(x) \rightarrow \min$  относится к параметрам модели среды. Она отражает тот факт, что искомый элемент в классе себе эквивалентных по полю обладал свойством опти-

<sup>19</sup> Множество  $\Omega_y(A)$  обозначаем также  $\Omega_y$ , тогда, когда это не приводит к недоразумениям.

мальности  $J(x) \rightarrow \min$ . Оптимальность  $P(Ax - u) \rightarrow \min$  относится к качеству подбора поля. Она требует, чтобы в классе элементов из оптимальных по  $I(x)$  элементов, соответствующих различным полям, был отобран такой, поле от которого удовлетворяет критерию  $P(Ax - u) \rightarrow \min$ . Это принципиально разные критерии, и смешивать их ни в коем случае нельзя. Для того чтобы согласовать два принципа оптимальности в (19), построим такую конструкцию. Зафиксируем некоторый элемент  $y^1 \in \text{Im } A$  и решим задачу (17), получив некоторый элемент  $x^1$ . Если ее решение существует и единственно, что происходит, например, при сильной выпуклости  $J(x)$  на  $\Omega_y$ , то  $x^1$  – это единственный элемент, соответствующий  $y^1 \in \text{Im } A$ .

Выбрав новый элемент  $y^2 \in \text{Im } A$ , повторим при тех же условиях решение задачи (17) получив, таким образом другой единственный элемент  $x^2$ . Повторяя этот процесс для всех  $y \in \text{Im } A$ , получим множество  $\mathfrak{R}$  решений задачи (17) при всех  $y$  из  $\text{Im } A$ . Это множество называется *экстремальным классом* для оператора  $A$ , соответствующего функционалу  $J(x)$ . Поскольку функционал  $J(x)$  таков, что решение задачи (17) существует и единственно при каждом  $y \in \text{Im } A$ , то полученное множество  $\mathfrak{R}$  оказывается во взаимнооднозначном соответствии с  $\text{Im } A$  и образует класс единственности для уравнения  $Ax = y$ . Принадлежность элемента  $x$  множеству  $\mathfrak{R}$  автоматически означает, что элемент  $x$  в своем классе эквивалентности  $\Omega_{y=Ax}$  минимизирует функционал  $J(x)$ . Эквивалентной задаче (19) теперь служит задача:

$$\begin{cases} P(Ax - u) \rightarrow \min, \\ x \in \mathfrak{R} \end{cases} \quad (5.20)$$

Таким образом, оба принципа оптимальности в (19) согласованы. Для того чтобы решить задачу (17) в «реалистической» постановке, достаточно решить ее для всех  $y \in \text{Im } A$ , построив класс  $\mathfrak{R}$ , и далее решать задачу (20).

### 5.2.2. Вариационные параметризации и регуляризация

Методы регуляризации, к числу которых относятся и методы квазирешений, развиты в предположении, что не выполнены первое и третье условие корректности. Это означает, что если решение существует, то оно единственно. Рассмотрим связь между результатами решения обратной задачи методами регуляризации и вариационной параметризацией в форме (17) без предположения однозначной разрешимости уравнения (16).

Постановка обратной задачи в методах регуляризации А.Н. Тихонова выглядит так:

$$\inf_{x \in X} \{ \|Ax - u\|_Y + \alpha \|Fx\|_X \}; \quad (5.21)$$

$$\inf_{x \in X} \{ \|Fx\|_X : \|Ax - u\|_Y \leq \delta \}. \quad (5.22)$$

Здесь  $X, Y$  – соответствующие банаховы пространства,  $F$  – линейный оператор (см. 4.3). Предположим, что нижние грани в приводимых задачах достигаются и есть  $\bar{x}$  (для каждой из задач этот элемент свой). Легко убедиться в том, что найденный таким образом элемент принадлежит экстремальному классу  $\mathfrak{R}$ , порожденному задачей

$$\begin{cases} Ax = y, \\ \|Fx\|_X \rightarrow \min, \end{cases}$$

при  $y$ , пробегающем все  $\text{Im } A$ . Действительно, если  $\bar{x}$  есть решение какой-либо из задач (21) или (22) и  $A\bar{x} = \bar{y}$ , то  $\bar{x}$  есть и решение задачи:

$$\begin{cases} A\bar{x} = \bar{y}, \\ \|F\bar{x}\|_X \rightarrow \min. \end{cases}$$

В противном случае, нижняя грань в (21) либо (22) достигалась бы на другом элементе. Однако в (21) или (22) компоненты задачи –  $X, Y, F$  – выбираются так, чтобы обеспечить устой-



чивость решения, которое теоретически единственно. Именно свойства устойчивости, а не единственности отражены в конструкциях  $X, Y, F$ . Использование этих компонент одновременно и для отбора единственного решения из класса эквивалентных смешивает эти понятия, является противоестественным и, не позволяя целенаправленно использовать информацию для обеспечения единственности решения, ведет к построению формально эквивалентных, а не содержательных моделей. Отбор единственного из множества формально эквивалентных требует своих, иных принципов, которые нельзя смешивать с принципами для обеспечения устойчивости. В основе критериального подхода формирования классов единственности – вариационной параметризации, единственность решение обеспечивает требование минимума функционала  $J(x)$ . Этот функционал (включающий в себя параметры  $X, F$ , конкретизирующие его вид  $J(x) = \|Fx\|_X$ ) должен выбираться как выражение априорной информации о свойствах решения, позволяющей осуществить его отбор решения в классе себе эквивалентных. Его назначение – построить экстремальный класс единственности  $\mathfrak{X}$ . Лишь после того, как этот класс построен, можно использовать методы теории регуляризации для устойчивого нахождения элемента  $x$  из  $\mathfrak{X}$ , соответствующего заданному полю. Ясно, что такой подход является преимущественным, поскольку учитывает специфику обратных задач, имеющих неединственное решение. Он позволяет разделить критерии для формирования свойств единственности и устойчивости, не путая эти свойства. Этот подход позволяет сформировать классы единственности, соответствующие заданному принципу оптимальности, а для устойчивого нахождения решения в этом классе использовать свой критерий, несущий информации о требуемых характеристиках устойчивости.

Напомним результаты рассмотрений, приведенных в п. 3.2. и 4.4 в связи с изучением свойств квазирешений. Там было показано, что если  $M$  – линейное пространство и  $A$  – линейный ограниченный оператор, то квазирешение  $x$  задачи  $Ax = y$ , полученное градиентными средствами минимизации, определено условием:

$$\bar{x} = x_0 \in P_M(\overline{\text{Im } A_*}),$$

где  $x_0$  – принятое нулевое приближение. Но это условие представляет собой необходимое и достаточное условие того, что квазирешение есть решение задачи:

$$\begin{cases} AP_M x = y, \\ \|x - x_0\|_{L_2} \rightarrow \min \end{cases}$$

при некотором  $y \in \text{Im } A$  (доказательство см. ниже). Таким образом, построение квазирешения на линейном подпространстве  $M$  эквивалентно построению ближайшего из класса эквивалентности, соответствующего заданному полю элемента к принятому нулевому приближению  $x_0$  в норме пространства  $L_2$ . Реализуется принцип построения ближайшего к нулевому приближению в квадратичной метрике. И это решение суть гармоническая функция. Следовательно, рассматривая обратные задачи в условиях эквивалентности – имеющие, вообще говоря, неединственное решение, мы, так либо иначе, вводим принципы оптимальности. Но эти принципы фигурируют неявным образом, они заложены в алгоритме получения решения. На примере задачи гравиметрии в предыдущем разделе показаны их «экзотические» свойства. Поэтому в условиях эквивалентности, для получения содержательных решений, более оправданным является применение методов, позволяющих управлять этими принципами, используя их в активной форме.

### 5.2.3. Квадратичные критерии оптимальности<sup>20</sup>

Еще раз покажем, что использование критериев оптимальности  $J(x)$  – естественный язык выражения априорной информации об изучаемой модели среды. Для иллюстрации этого следует, прежде всего, определиться с термином «априорная информация». Дать ему полное определение весьма затруднительно. Лучше всего охарактеризовать некоторые, наиболее явные

<sup>20</sup> Приводимые ниже рассуждения обобщают и в какой-то мере повторяют приведенные обоснования критериев для задач гравиметрии в 5.1.

свойства априорной информации. Самое главное ее свойство состоит в том, что она характеризуется неопределенностью, не позволяющей однозначно найти параметры изучаемого объекта (в противном случае, обратная задача была бы тривиальной). Но неопределенность эта такова, что позволяет на множестве всех допустимых возможных распределений физического параметра установить отношение частичного упорядочения по степени соответствия того либо иного элемента имеющейся априорной информации. Это означает, что для любых двух допустимых элементов можно указать, какой из них более, а какой менее согласуется с априорной информацией, либо они ей соответствуют в одинаковой степени. Если теперь этому отношению порядка поставить в соответствие отношение порядка на вещественной прямой, то получим функционал  $J(x)$  на множестве  $X$ , обладающий тем свойством, что он принимает на элементе  $x$  тем большее значение, чем в большей мере элемент  $x$  соответствует имеющимся априорным данным. Таким образом, формулировка обратной задачи как выделения из класса эквивалентности элемента, максимизирующего этот функционал, оказывается естественной. В большинстве интересных для приложений случаев задачу на максимум можно свести к задаче на минимум, и именно так в дальнейшем и будем поступать.

Рассмотрим некоторые примеры. Первый из них повторяет и распространяет на более общий случай рассуждения, приведенные выше в связи с введением критериев для структурной задачи гравиметрии.

Предположим, что имеется некоторое нулевое приближение  $x_0(v)$  к искомому распределению физического параметра  $x(v)$  в среде. Символ  $v$  означает точку области  $V$  пространства, в которой изучается физическая модель среды. Среди всех элементов из класса эквивалентности, соответствующего заданной наблюдаемой, следует найти ближайший к  $x_0(v)$  в норме пространства  $X$ , например, в смысле наименьших квадратов. Это приводит к функционалу:

$$\|x(v) - x_0(v)\|_{L_2} \rightarrow \min. \quad (5.23)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы не только  $x(v)$ , но и его производные до порядка  $r$  были близки к соответствующим компонентам нулевого приближения, получим критерий оптимальности:

$$\|x(v) - x_0(v)\|_{W_2^r(V)} \rightarrow \min. \quad (5.24)$$

Более сложный и интересный для приложений пример таков.

Нулевое приближение  $x_0(v)$ , которое является, как правило, обязательной компонентной априорной информации, строится на основании комплекса разнородной геолого-геофизической информации. Разные компоненты этого комплекса, равно как и различные составляющие одной и той же компоненты, но относящиеся к различным по сложности строения участкам среды, различаются между собой по точности построения. Причем эта точность может быть оценена в терминах априорной оценки среднеквадратичной погрешности построения различных компонент нулевого приближения  $x_0(v)$ . Именно эти две составляющие – нулевое приближение и дифференцированная оценка точности его построения, в большей мере выражают объективную дополнительную информацию о  $x(v)$ , чем только принятие нулевого приближения. Приняв, что в точке  $v \in V$  отклонение нулевого приближения от истинного распределения искомого физического параметра можно рассматривать как одну реализацию нормально распределенной случайной величины с нулевым средним и оценкой стандарта  $\tau(v)$ , и воспользовавшись хорошо известным приемом перехода к функции правдоподобия (см. пример п. 5.1), получаем критерий для максимизации правдоподобия встречи распределения  $x(v)$  (с точки зрения компонент  $x_0(v)$  и  $\tau(v)$ ):

$$\iiint_V \left\{ \frac{x(v) - x_0(v)}{\tau(v)} \right\}^2 dv \rightarrow \min. \quad (5.25)$$

Проиллюстрируем этот прием.

Пусть модель среды параметризована вектором  $\bar{x} = (x^1, \dots, x^N)$ , и  $\bar{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^N)$  есть нулевое приближение к  $\bar{x}$ , а  $\bar{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^N)$  – оценка среднеквадратичной погрешности построения нулевого приближения. Точнее  $\tau^i$  оценивает среднеквадратичную погрешность построения  $x_0^i$ .

Следовательно, величину  $(x^i - x_0^i)$  можно считать распределенной по нормальному закону с нулевыми средним и среднеквадратичным отклонением  $\tau^i$ , тогда для любого значения  $x^i$  вероятность его наблюдения рассчитывается по формуле:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x^i - x_0^i)^2}{(\tau^i)^2}\right\}.$$

Считая, что все компоненты вектора  $\bar{x}$  как случайные величины являются независимыми<sup>21</sup>, получаем, что вероятность наблюдения вектора  $\bar{x}$  рассчитывается по формуле:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \prod_{i=1}^N \tau^i} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(x^i - x_0^i)^2}{(\tau^i)^2}\right\}. \quad (5.25-a)$$

Эта функция называется функцией правдоподобия для вектора  $\bar{x}$ . Чем больше значение функции правдоподобия на том либо ином элементе, тем более вероятно именно это значение компонент вектора  $\bar{x}$ . Следовательно, необходимо максимизировать функцию правдоподобия, и это обеспечит учет априорной информации о распределении значений компонент вектора  $\bar{x}$ . Нетрудно заметить, что ее максимизация эквивалентна минимизации функционала:

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x^i - x_0^i)^2}{(\tau^i)^2}. \quad (5.26)$$

Нетрудно заметить, что выражения (24), (25), (26) можно записать в единой форме:

$$\|F(x(v) - x_0(v))\|_X \rightarrow \min, \quad (5.27)$$

где  $F$  – некоторый линейный оператор, а  $X$  – функциональное пространство. Компоненты  $X$  (вид нормы) и вид оператора  $F$  в функционале (27) не являются независимыми. В обозримых для приложения случаях можно считать, что всегда найдется такой замкнутый оператор  $F$ , что минимизация (27) эквивалентна минимизации функционала:

$$\|F(x(v) - x_0(v))\|_{L_2(v)}. \quad (5.27-a)$$

Например, (24) сводится к предыдущему выражению, если  $F$  – оператор дифференцирования.

В примере (25)  $F$  – это оператор умножения на весовую функцию  $1/\tau^2(v)$  и  $X = L_2(V)$ . В примере (26)  $F$  – покомпонентное умножение на весовые множители  $\tau_i^2$ , а  $X \in I_2^N$ . В примере (24)  $F = I$ , а  $X = W_2'$ .

Замена переменных  $\xi(v) = x(v) - x_0(v)$  сводит задачу (27) к виду (с целью единообразия в (27) используем запись с  $F = F$ . Это всего лишь вопрос обозначений):

$$\begin{cases} A\xi(v) = y - Ax_0(v); \\ \|F\xi(v)\|_X \rightarrow \min; \\ x(v) = \xi(v) + x_0(v) \end{cases} \quad (5.28)$$

<sup>21</sup> Это весьма натянутое предположение. Но введение зависимости приведет к другим принципам, аналогичным рассмотренным далее – эволюционно-динамическим.

Задача (28) является главной для последующих рассмотрений. Основным является случай  $X = L_2, I_2^n$  ( $X = C$  рассматривается особо). Критерии оптимальности (26) и (27) при  $X = I_2^n$ , эквивалентны, поскольку сводятся друг к другу надлежащей заменой переменного. Действительно, далее будет показано, что решение  $\bar{x}$  задачи (28) (для случаев  $X = L_2$ ) имеет вид:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi . \quad (5.28^1)$$

Оператор  $F^*F$  – самосопряженный, положительный и, следовательно, имеет положительный и самосопряженный корень<sup>22</sup>  $\bar{F}$  (который может и не совпадать с  $F$ ). Тогда влияние на результат решения задачи (5.28) при  $X = L_2$  операторов  $F$  или  $\bar{F}$  одинаково. Следовательно, введение критериев оптимальности:

$$\|F(\bar{x} - \bar{x}_0)\|_{L_2} \rightarrow \min , \quad (5.28^2)$$

$$\|\bar{F}(\bar{x} - \bar{x}_0)\|_{L_2} \rightarrow \min \quad (5.28^3)$$

приводит к одному и тому же результату. В силу свойств оператора  $F$  (это матрица размерности  $n$ ) он может быть приведен к диагональному виду (прил. 1), и, следовательно, линейной заменой переменных (разложение по собственным векторам) задача (28) с критерием (28<sup>3</sup>) сводится к той же задаче с критерием (26), где величины  $\tau_i$  связаны с собственными значениями оператора  $F$ . Преобразование параметров  $\bar{x}$  такое, что критерий оптимальности (28<sup>3</sup>) приводится к диагональному виду (26), переводит вектор  $\bar{x}$  в новый вектор  $\bar{\eta}$ . Для последнего также может быть сконструирован оператор решения прямой задачи, и тем самым общая задача (28) при  $X = L_2$  сводится к той же задаче с критерием (26).

Для формирования критерия оптимальности более удобна форма (26), поскольку коэффициенты  $\tau_i$  имеют простой физический смысл:  $\tau_i$  – априорная оценка погрешности построения  $i$ -ой компоненты нулевого приближения. Однако и матрица  $F$  может формироваться из простых физических соображений, сходных с теми, что использовались для выбора коэффициентов  $\tau_i$ , но несколько более общих.

Действительно, выражение (25-а) для функции правдоподобия (исходя из которой и было найдено выражение (26)) получено, исходя из гипотезы о нормальном распределении ошибок (распределение Гаусса) и независимости компонент  $x^i - x_0^i$  и  $x^j - x_0^j$  при  $i \neq j$ . Последнее условие может быть ослаблено, если допустить (в рамках того же нормально закона) зависимость параметров модели. В этом случае необходимо дать априорную оценку степени зависимости компонент  $x^i - x_0^i$  и  $x^j - x_0^j$ . Последняя будет полностью определена, если задать матрицу моментов  $\lambda_{ij}$  (ковариационную матрицу):

$$\lambda_{ij} = \text{cov}(x^i - x_0^i; x^j - x_0^j) = M \left[ (x^i - x_0^i) \cdot (x^j - x_0^j) \right],$$

где  $M$  – знак вычисления математического ожидания. Величины  $\lambda_{ii}$  оказываются оценками дисперсий компонент  $x^i - x_0^i$ : ( $\lambda_{ii} = \tau_i^2$ ). Функция правдоподобия для вектора  $\bar{x}$  будет иметь вид:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\lambda_{ij}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \right],$$

<sup>22</sup> Для оператора  $F$  оператор  $F^*F$  является положительным и самосопряженным. С другой стороны, любой положительный и самосопряженный оператор  $B$  может быть рассмотрен как полученный таким образом. Однако одному и тому же оператору  $B$  может соответствовать много различных операторов  $F$ , через которые он представляется формулой  $B = F^*F$ . Однозначность будет достигнута, если дополнительно потребовать, чтобы  $F$  был сам положительным и самосопряженным. Этот-то оператор  $F$  и называется квадратным корнем оператора  $B$ . Здесь легко проследить аналогию с умножением и вычислением корня в комплексной области.

где  $\Lambda = [\Lambda_{ij}]$  – матрица, обратная к  $\lambda = [\lambda_{ij}]$ ,  $|\lambda_{ij}|$  – определитель матрицы  $\lambda$ . Максимизация записанной функции правдоподобия эквивалентна минимизации формы:

$$\langle \Lambda(\bar{x} - \bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j),$$

поскольку  $\Lambda$  – симметричная и положительно определенная матрица (что следует из аналогичных свойств матрицы моментов  $(\lambda_{ij})$ ), то существует ее квадратичный корень, также положительный и симметричный. Следовательно:

$$\langle \Lambda(\bar{x} - \bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) \rangle = \left\| \Lambda^{1/2}(\bar{x} - \bar{x}_0) \right\|_{L_2},$$

где  $\Lambda^{1/2}$  – квадратичный корень матрицы  $\Lambda$ . Таким образом, мы приходим к критерию оптимальности:

$$\left\| \Lambda^{1/2}(\bar{x} - \bar{x}_0) \right\|_{L_2} \rightarrow \min, \quad (5.28^4)$$

аналогичному по своей форме критерию (5.28<sup>3</sup>). Далее можно применить уже использовавшиеся ранее рассуждения о приводимости критерия (28<sup>4</sup>) к квадратичному виду.

На самом деле знание матрицы  $\Lambda^{1/2}$  или  $\Lambda$  не нужно. Достаточно знать матрицу элементов  $\lambda_{ij}$ , поскольку решение задачи:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= Y, \\ \left\| \Lambda^{1/2}(\bar{x} - \bar{x}_0) \right\|_{L_2} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

имеет вид:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + (\Lambda^{*1/2})^{-1} (\Lambda^{1/2})^{-1} A^{*} \varphi.$$

Далее  $\Lambda^{*1/2} = \Lambda^{1/2}$  и  $\Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} = \Lambda$  и, следовательно:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \lambda A^{*} \varphi.$$

Приведенное обобщение может оказаться полезным при решении не слишком многомерных задач. Практически, наиболее распространенной задачей является:

$$\begin{cases} A\bar{x} = y; \\ \sum_{i=1}^N \frac{(x^i - x_0^i)^2}{\tau_i^2} \rightarrow \min. \end{cases}$$

Таким образом, во многих случаях поиск оптимального элемента сводится к поиску наименее уклоняющегося от нуля в том либо ином смысле решения обратной задачи или, что тоже самое, к задаче аппроксимации нуля на классе эквивалентности. При выборе оператора  $F$  и функционального пространства  $X$  следует учесть описанные выше эффекты, связанные с наследованием специальных аналитических свойств решений при единичном критерии. Особо рельефно это было продемонстрировано на примере обратной задачи гравиметрии в классе распределений плотности. Прямой ввод весовой функции  $\tau(v)$  как оценки погрешности построения нулевого приближения неявным образом предполагает равноценность уклонения от нуля величины  $\bar{x}(v)$  при  $\tau(v)=1$ . Действительно, говоря о том, что  $\tau(v)$  оценивает среднеквадратичное уклонение от нуля величины  $\bar{x}(v)$ , мы не явно предполагаем, что при  $\tau(v)=1$  величина  $x(v)$  будет уклоняться от нуля равномерно во всех точках  $v \in V$  не в формально математическом, а в некотором интуитивно предполагаемом смысле. В то же время на самом деле  $x(v)$  при  $\tau(v)=1$  может вести себя самым «причудливым» образом. Так, в обратной задаче гравиметрии, когда  $x(v)$  – это распределение плотности, случаю  $\tau(v)=1$  соответствует гармоническая функция, имеющая максимальные и минимальные свои значения на границе области  $V$ . В то же время от требований минимальности уклонения квадратов интуитивно ожидается некоторое равно

небольшое отклонение распределения плотности от принятого нулевого приближения. Учесть такие специфические эффекты можно, например, следующим нестрогим способом.

Пусть случаю  $\tau_1(v)=1$  соответствует решение  $x_1(v)$ , а случаю  $\tau_2(v)-x_2(v)$ . Чтобы использование весовой функции приводило к результатам в решении, соответствующем тому смыслу, которые закладываются в  $\tau_2(v)$ , необходимо, чтобы  $\tau_2(v)/\tau_1(v) \cong x_2(v)/x_1(v)$ , где  $\cong$  – ориентировочная пропорциональность. Тогда в качестве  $\tau(v)$  можно принять  $\tau_2(v) \cdot \tau_1(v)/x_1(v)$ . Иными словами, если  $\tau_2(v)$  – оценка отклонения от нуля искомого решения, то для получения решения, соответствующего этой оценке, следует выбрать весовой множитель в (5.25):  $\tau_2(v) \cdot \tau_1(v)/x_1(v)$ .

Приведенные выше рассмотрения приобретают конкретный и точный смысл в конкретных задачах, поэтому их более подробное рассмотрение должно быть осуществлено при решении конкретных задач.

Дополнительной к приведенной компонентной информации об искомом решении является наличие совокупности ограничения на распределении искомого параметра. Эти ограничения определяют некоторый класс  $M$ , которому должно принадлежать искомое распределение. К ним относятся, например, следующие:

$$M = \{x(v) : x_1(v) \leq x(v) \leq x_2(v)\}, \quad (5.29)$$

где  $x_1(v)$  и  $x_2(v)$  – заданные функции. Либо  $M = \{x(v) : \text{Im } x(v) \in C\}$ , где  $C$  – заданное множество. Например, если ищется распределение плотности в нижнем полупространстве, то в качестве  $M$  выступает множество таких распределений плотности, которые принимает только заданный, дискретный ряд значений  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ . Для учета такого рода компонент априорной информации вводится функционал:

$$J_M(x(v)) = \begin{cases} \infty, \text{ при} & x(v) \notin M; \\ 0, \text{ при} & x(v) \in M, \end{cases} \quad (5.30)$$

и критерий оптимальности для выделения элемента  $x(v)$  из класса эквивалентности имеет вид

$$\|F(x(v) - x_0(v))\|_X + J_M(x(v)) \rightarrow \min. \quad (5.31)$$

Поскольку из физических соображений следует, что нулевое приближение априорно удовлетворяет вводимым ограничениям на искомое распределение, то  $x_0(v) \in M$ , и можно выполнить замену переменных:

$$\xi(v) = x(v) - x_0(v).$$

Критерий оптимальности перепишем в виде:

$$\|F\xi(v)\|_X + J_{M'}(\xi(v)) \rightarrow \min, \quad (5.32)$$

где  $M' : (\xi(v)) + x_0(v) \in M$ .

Функционал (5.31) является достаточно общим, поскольку структура множества  $M$  может быть весьма разнообразной.

### 5.3. Экстремальные классы единственности для интегральных критериев оптимальности

Пусть  $A, F$  – линейные операторы, действующие из банахова пространства  $X$  в банаховы пространства  $Y, Z$  соответственно (в частном случае пространства  $X$  и  $Z$  могут совпадать).

*Определение 1.* Экстремальным классом  $\mathfrak{R}(A, F, Z)$  называется совокупность решений задачи:

$$\begin{cases} Ax = y; \\ \|Fx\|_Z \rightarrow \min, \end{cases} \quad (5.33)$$

при  $y$ , пробегающем все  $\text{Im } A$ .

Существование решение в (33) не предполагается. Поэтому для некоторых  $y \in \text{Im } A$  в множестве  $\mathfrak{R}(A, F, Z)$  может не существовать соответствующих элементов. Кроме того, поскольку (33) в общем случае имеет неединственное решение, то между  $\text{Im } A$  и  $\mathfrak{R}(A, Z, F)$ , вообще говоря, нет взаимно-однозначного соответствия.

**Определение 2.** Если  $M$  – множество в  $D(A)$  такое, что для всех  $y \in \text{Im } A$  на  $M$  существует решение уравнения

$$Ax = y, \quad (5.34)$$

то  $M$  называется полным классом. Полный класс единственности для уравнения (34) называется идеальным классом. Если  $M$  – класс единственности и для любых  $y \in \text{Im } A$  и  $\varepsilon > 0$  существует решение неравенства:

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|_Y &< \varepsilon; \\ x &\in M, \end{aligned} \quad (5.35)$$

то  $M$  называется почти идеальным классом.

Ясно, что всякий идеальный класс есть одновременно и почти идеальный. С другой стороны, если оператор  $A$  непрерывен,  $M$  – идеальный класс, а  $G$  – плотное в нём подмножество, то  $G$  – почти идеален.

Понятие идеального и почти идеального класса важны с той точки зрения, что характеризуют интерпретационные возможности метода решения обратной задачи, использующего этот класс в качестве модельного. Если класс неполон, то метод решения обратной задачи не использует всей информации, заложенной в наблюдаемой  $y$ . Идеальные классы наиболее полно сочетают в себе максимальное использование всей информации заложенной в наблюдаемой, – и одновременно возможность реконструкции модели единственным образом. Для идеальных классов решение обратной задачи единственно и для каждой наблюдаемой может быть получено теоретически абсолютно точно. Для почти идеального класса – единственно, но лишь с любой наперед заданной точностью. Свойства решения на идеальных или почти идеальных экстремальных классах регулируются параметрами критерия оптимальности, выражающего экстремальный принцип.

**Теорема 1.** Пусть  $Z$  – равномерно выпуклое банахово пространство,  $A$  – линейен и ограничен из  $X$  в  $Y$  и  $\text{Ker } F \cap \text{Ker } A = 0$ ;  $F$  – ограничен и имеет ограниченный обратный. Тогда  $\mathfrak{R}(A, F, Z)$  – идеальный экстремальный класс.

**Доказательство.** В силу линейности и ограниченности  $A$  на  $X$ ,  $\text{Ker } A$  есть замкнутое подпространство в  $X$ . Таково же будет и множество  $\Omega_y$ , как сдвиг  $\text{Ker } A$ . Поскольку  $F$  – линейен и взаимно непрерывен из  $X$  в  $Z$ , то образ  $\Omega_y$  при отображении  $F$  – множество  $F(\Omega_y)$  есть также замкнутое пространство в  $Z$ . Тогда  $F(\Omega_y)$  есть сдвиг  $F(\text{Ker } A)$ , и решение задачи

$$\begin{aligned} \|t\|_Z &\rightarrow \min; \\ t &\in F(\Omega_y), \end{aligned}$$

существует и единственно. Обозначим это решение  $\bar{t}$ . Тогда элементу  $\bar{t}$  соответствует множество  $F^{-1}\bar{t}$ , и на этом множестве решение задачи  $Ax = y$ , существует (поскольку  $F^{-1}\bar{t}$  содержит хотя бы один элемент из  $\Omega_y$ ) и единственно, поскольку  $\text{Ker } F \cap \text{Ker } A = 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $X$  в  $Y$ , и область определения  $A^*$  плотна в  $Y$ .  $F$  – линейный геоморфизм из  $X$  в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ . Тогда совокупность  $x$ , являющихся решением задач,

$$F^* \{ (Fx)^{p-1} \text{sign}^p (Fx) \} = g, \quad (5.36)$$

где  $g \in \overline{(\text{Im } A^*)}$  есть идеальный экстремальный класс. Доказать следует, что  $\mathfrak{R}(A, L_p, F)$  состоит из всевозможных решений уравнения (36). Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} Ax = y \in \text{Im } A, \\ \|Fx\|_{L_p} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ее решение  $\bar{x}$  существует и единственно. Точно также существует и единственное решение  $\bar{\xi}$  задачи:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L_p} \rightarrow \min; \\ \xi \in F(\Omega_y), \end{aligned} \quad (5.38)$$

и  $\bar{x} = F^{-1}\bar{\xi}$ .

Из теоремы двойственности следуют необходимые и достаточные условия, характеризующие решение (38): в  $L_q$ , при  $1/q + 1/p = 1$  существует элемент  $f$  и

- а)  $\|f\|_{L_p} \leq 1$ ;
- б)  $\langle f | \bar{\xi} \rangle = \|\bar{\xi}\|_{L_p}$ ;
- в)  $\langle f | \xi \rangle = 0, \forall \xi \in F(\text{Ker } A)$ .

Условия (а) и (б) будут выполнены, если в качестве  $f \in L_q$  выбрать:

$$f = \frac{\bar{\xi}^{p-1} \text{sign}^p \bar{\xi}}{\|\bar{\xi}^{p-1}\|_{L_q}}.$$

Действительно, (а) выполнено, если  $\xi^{p-1} \in L_q$ .

Но:

$$\|\xi^{p-1}\|_{L_q} = \left( \int (|\xi|^{p-1})^q d\vartheta \right)^{1/q}.$$

Поскольку  $q = p/(p-1)$ , то:

$$\|\xi^{p-1}\|_{L_q} = \left\{ \|\xi\|_{L_p} \right\}^{1/q} > \infty. \quad \|\xi^{p-1}\|_{L_q} = (\|\xi\|_{L_p})^{1/q} < \infty.$$

Далее:

$$\langle f | \bar{\xi} \rangle = \frac{\int |\xi|^p d\vartheta}{(\|\bar{\xi}\|_{L_p})^{p/q}} = \frac{\|\xi\|_{L_p}^p}{\|\bar{\xi}\|_{L_p}^{p-1}} = \|\bar{\xi}\|_{L_p}.$$

Из условия (в) следует:

$$\langle (F\bar{x})^{p-1} \text{sign}^p (F\bar{x}) | Fx \rangle = 0, \forall x \in \text{Ker } A,$$

откуда:

$$F^*((F\bar{x})^{p-1} \text{sign}^p (F\bar{x})) \in \overline{\text{Im } A^*}.$$

Поскольку все приводимые условия являются необходимыми и достаточными, то этим и завершается доказательство.

Наиболее важный для приложений случай, это  $-p = 2$ . Экстремальный класс  $\mathfrak{X}(A, F, L_2)$  имеет представление:

$$F^*F\bar{x} \in \overline{\text{Im } A^*}, \quad (5.39)$$

или:

$$x \in F^{-1}F^{*-1}(\overline{\text{Im } A^*}),$$

и является линейным подпространством в  $X$ . Этим определяется его конструктивный аспект – на линейном пространстве строить решения линейных задач значительно проще, чем на каком-либо ином множестве. Множество  $\mathfrak{X}(A, F, L_2)$ , имеющее представление:

$$\mathfrak{X}(A, F, L_2) = \{x : x = F^{-1}FA^*\phi\}, \quad (5.40)$$



где  $\varphi \in DA^*$ , есть плотное в  $\mathfrak{K}(A, F, L_2)$  подмножество и поэтому является почти идеальным экстремальным классом. В дальнейшем для почти идеальных экстремальных классов используется символ  $\mathfrak{K}$ .

Если линейный замкнутый оператор  $F$  не является геоморфизмом, но  $ImF$  и  $DF$  плотны в  $Z$  и  $X$ , соответственно, и либо  $F$ , либо  $F^{-1}$  ограничены, а  $KerF = 0$ , то совокупность элементов  $x$ , удовлетворяющих одному из уравнений:

$$x = F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi$$

(5.41)

или

$$F^*Fx = A\varphi^*, \quad (5.42)$$

в предположении  $ImA^* \subset D(F^{-1}F^{*-1})$ , образует почти идеальный экстремальный класс  $\mathfrak{K}(A, L_2, F)$ .

Покажем это на примере представления (41). Разобьем доказательство на две части.

1) Класс (41) есть класс единственности.

Действительно, рассмотрим уравнение:

$$AF^{-1}F^{*-1}A^*\varphi = 0.$$

(5.43)

Поскольку из него следует  $F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi \in KerA$ , то для решения  $\bar{\varphi}$  из теоремы о ядре имеем:

$$\langle F^{-1}F^{*-1}A^*\bar{\varphi} | A^*\psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in DA^*.$$

Тогда:

$$\langle F^{*-1}A^*\bar{\varphi} | F^{-1}A^*\psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in DA^*.$$

Последнее в силу плотности области определения оператора  $A^*$  возможно лишь при  $\varphi = 0$ . Единственность доказана.

2) Уравнение  $Ax = y \in ImA$  на  $\mathfrak{K}(A, L_2, F)$  плотно разрешимо.

Действительно, рассмотрим задачу:

$$AF^{-1}F^{*-1}A^*\varphi = y$$

(5.44)

Как известно (см. прил. 2), уравнение плотно разрешимо, если сопряженное к нему уравнение однозначно разрешимо. Но сопряженный к (44) оператор имеет тот же вид:  $AF^{-1}F^{*-1}A^*$ . Его однозначная разрешимость показана выше, на предыдущем шаге.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} AF^{-1}\xi = y \in ImAF^{-1}; \\ \|\xi\|_{L_2} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Элемент  $\bar{\xi}$ , удовлетворяющий уравнению<sup>23</sup>

$$\bar{\xi} = F^{-1*}A^*\varphi,$$

является решением (45) при некотором  $y \in ImAF^{-1}$ . Положим, далее,  $x = F^{-1}\bar{\xi}$ . Тогда элемент  $x = F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi$  имеет минимальную величину  $\|Fx\|_{L_2}$  в своем классе эквивалентности.

## 5.4. Экстремальные классы для интегральных операторов в равномерной метрике

<sup>23</sup>  $(AF^{-1})^* = F^{-1*}A^*$ . Далее:  $F^{-1*} = F^{*-1}$ . Это следует из цепочки:

$$\langle F^{*-1}F^*\varphi | \zeta \rangle = \langle \varphi | \zeta \rangle = \langle \varphi | FF^{-1}\zeta \rangle = \langle F^*\varphi | F^{-1}\zeta \rangle = \langle F^{-1*}F^*\varphi | \zeta \rangle.$$

Критерии оптимальности, рассмотренные выше, не исчерпывают все интересные для приложений ситуации. Важными оказываются критерии, в которых минимизируется верхняя грань абсолютных значений. К таким критериям могут быть сведены требования максимизации функции взаимной корреляции между изучаемым распределением физического параметра и заданным к ней приближением. Минимизация верхней грани соответствует минимизации в равномерной метрике. Этот случай нерелексивных пространств и соответствующая вариационная задача, вообще говоря, не имеет единственного решения. Можно лишь надеяться охарактеризовать свойства одного из решений и тем самым получить конструктивное описание одной из ветвей экстремального класса  $\mathfrak{R}(A, F, C)$ . Сделать это можно лишь в некоторых частных случаях вида оператора  $A$ , но они охватывают многие интересные приложения.

Пусть область  $V$  есть горизонтальная полоса в нижнем полупространстве  $E_- = \{x, y, z : -\infty \leq x, y \leq \infty; z_1 \leq z \leq z_2\}$ . Пусть, далее,  $K(x, y, z)$  – функция из  $L_1(V) \cap C(V)$ , такая что при каждом  $z \in [z_1, z_2]$   $K(x, y, z) \in L_1(E_0) \cap C(E_0)$ ;  $E_0 = \{x, y : -\infty \leq x, y \leq \infty\}$ . Оператор  $A$  определен следующим образом:

$$A\xi = \iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \xi(x, y, z) K(x_0 - x, y_0 - y, z) dz dx dy = u(x_0, y_0). \quad (5.46)$$

Обозначим  $s_0 = \{x_0, y_0\}$  и рассмотрим задачу<sup>24</sup>:

$$\begin{aligned} A\xi(v) &= u(s_0); \\ \sup_{v \in V} |\xi(v)| &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.47)$$

В силу свойств функции  $K(x, y, z)$  оператор  $A$  непрерывен из  $L_p(V)$  в  $L_q(E_0)$  для  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Следовательно,  $A$  непрерывен из  $C(V)$  в  $C(E)$ , и, следовательно,  $\Omega_u = \{\xi : A\xi = u(s_0)\}$  есть сдвиг замкнутого в  $C(V)$  пространства  $\text{Ker} A$ . Тогда решение задачи (47) существует. Однако в силу того, что норма в  $C(V)$  не сильно выпукла, ее решение, вообще говоря, не единственно. Почти тривиален такой результат.

Множество  $\mathfrak{S}_u$  решений задачи (47) при  $u(s_0) \in \text{Im} A$  есть замкнутое выпуклое множество.

Доказательство. Замкнутость  $\mathfrak{S}_u$  очевидна, поскольку минимизируемый функционал непрерывен в  $C(V)$ . Следует доказать выпуклость  $\mathfrak{S}_u$ . Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – два решения задачи (47), доставляющие значение  $d$  функционалу  $\sup_{v \in V} |\xi(v)|$ . Тогда их выпуклая комбинация

$\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  есть также элемент из  $\Omega_u$ . В силу неравенства:

$$\|\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2\|_c \leq \alpha \|\xi_1\| + (1 - \alpha) \|\xi_2\| = d,$$

имеем  $\|\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2\|_c = d$ , поскольку в противоположном случае элемент  $\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2$  доставлял бы функционалу в (47) меньше, чем  $d$  значение, и, следовательно,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  не являлись бы решением задачи (47). Таким образом, любая выпуклая комбинация элементов из  $\mathfrak{S}_u$  есть снова элемент из  $\mathfrak{S}_u$ .

Существование, но возможная неединственность решения задачи (47) позволяет сделать вывод о том, что экстремальный класс  $\mathfrak{R}(A, C, F)$  есть полный, но не идеальный, поскольку не есть класс единственности. Поставим перед собой задачу выделения в  $\mathfrak{R}(A, C, F)$  подмножества, являющегося почти идеальным, которое будем отождествлять с  $\mathfrak{R}(A, F, C)$ . Прежде чем приступить к дальнейшим рассмотрениям, сделаем следующее замечание. Предположим, что следует решить более общую, чем (47), задачу:

<sup>24</sup> В отличие от предыдущих рассмотрений правая часть оператора  $A$  обозначена не символом  $y$ , а  $u$ . Это ничего не меняет, но удобнее, поскольку символ  $y$  задействован для обозначения одной из координат.

$$\begin{aligned} A\xi(v) &= u(s_0); \\ \sup_{v \in V} |F\xi(v)| &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.48)$$

где  $F$  – замкнутый оператор, отображающий  $C(V)$  в себя.

Тогда замена переменных  $\eta(v) = F\xi$  сводит ее к:

$$\begin{aligned} AF^{-1}\eta(v) &= u(s_0); \\ \sup_{v \in V} |\eta(v)| &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Если  $AF^{-1}$  удовлетворяет требованиям, наложенным ранее на оператор  $A$ , то, характеризуя элемент  $\eta(v)$  являющийся решением задачи (49), тем самым будет охарактеризован, и элемент  $\xi(v) = F^{-1}\eta(v)$ , являющийся решением (48) (необходимо, чтобы  $F^{-1}\eta(v)$  было определено и однозначно).

В соответствии с теоремой двойственности, для того чтобы элемент  $\bar{\xi}(v)$  был решением задачи (32), необходимо и достаточно, чтобы в сопряженном к  $C(V)$  пространстве  $C^*(V) = L_1(V)$  нашлся функционал  $\langle f | \cdot \rangle$  и:

$$\begin{aligned} \text{a) } \|f\|_{C^*} &\leq 1; \\ \text{b) } \langle f | \bar{\xi}(v) \rangle &= \|\bar{\xi}(v)\|_C; \\ \text{c) } \langle f | g \rangle &= 0 \quad \forall g \in \text{Ker} A. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Схема дальнейших рассуждений следующая. Мы намерены «угадать» вид множества решений задачи (48) при  $u \in \text{Im} A$ . Далее покажем, что для угаданного элемента могут быть выполнены условия (5.50<sup>a-c</sup>), что и будет служить доказательством тому, что «угаданный» элемент действительно служит решением задачи (5.48). Наконец, покажем, что на выделенном классе из «угаданных» элементов уравнение  $A\xi = u$  однозначно и плотно разрешимо, что и будет завершать доказательство того, что выделенное множество есть почти идеальный экстремальный подкласс (далее называем его классом) класса  $\mathfrak{K}(A, C, I)$ . Дополнительные условия на вид функции  $K(x, y, z)$  будут вводиться по мере надобности, и в конце мы резюмируем результат.

Предположим, что функция  $\bar{\xi}(v)$  не зависит от вертикальной координаты –  $z$  (это и есть «догадка»), т.е.  $\bar{\xi}(v) = \xi(s)$ , где  $s = (x, y)$ .

В силу теоремы о ядре, устанавливающей ортогональность ядра оператора и множества значений его сопряженного замкнутого в  $*$  – слабой топологии (см. прил. 2.4) условие (50<sup>c</sup>) дает выражение для  $f(v)$ :  $f(v)$  принадлежит  $*$  – слабому замыканию  $\text{Im} A^*$  в пространстве  $C^*(V)$ , где:

$$\text{Im} A^* = \iint_{E_0} \varphi(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0. \quad (5.51)$$

Здесь  $\varphi(s_0) \in L_1(E_0)$ . Это означает, что  $f(v)$  принадлежит множеству пределов последовательностей  $f^n(v)$  функций из  $\text{Im} A^*$  относительно сходимости в смысле:

$$\langle \tau(v) | f^n(v) \rangle \quad \text{для } \tau(v) \in C(V).$$

Пусть  $f^n(v)$  – последовательность элементов из  $\text{Im} A^*$ . Тогда:

$$\langle f^n(v) | \xi(s) \rangle = \iiint_V f^n(v) \cdot \xi(s) dv = \iint_{E_0} \xi(s) \int_{z_1}^{z_2} f^n(v) dz ds = \iint_{E_0} \xi(s) \cdot f^n(s) ds,$$

где  $f^n(s)$  – функция, полученная из  $f^n(v)$  интегрированием по координате  $z$ . Эту операцию сокращенно обозначим  $R$ :

$$f^n(s) = Rf^n(v) = \int_{z_1}^{z_2} f^n(v) dz.$$

Следует показать, что последовательности  $f^n(v)$  из  $\text{Im } A^*$  может быть поставлена в соответствие последовательность  $f^n(s) = Rf^n(v)$  такая, что для ее предельных элементов  $f(s)$  и  $f(v)$  из условия  $\|f(s)\|_{L_1(E_0)} \leq 1$  следует  $\|f(v)\|_{L_1(V)} \leq 1$ .

Если множество функций из  $C(V)$ , не зависящих от вертикальной координаты и образующих подпространство  $C(E_0)$  в  $C(V)$ , не имеет элементов, принадлежащих ядру оператора  $A$ , то образ  $\text{Im } A^*$  при отображении  $R$  плотен в  $L_1(E_0)$ . Действительно, если это не так, то в  $L_1(E_0)$  должен найтись элемент  $g(s)$  и

$$\iint_{E_0} g(s) R A^* \varphi(s) ds = 0 \quad \forall \varphi(s) \in L_1(E_0).$$

Но отсюда после подстановки выражения  $A^*$  из (51) получим:

$$\iint_{E_0} A g(s) \varphi(s) ds = 0 \quad \forall \varphi(s) \in L_1(E_0).$$

Последнее означает, что  $A g(s) = 0$ , что противоречит условию. В силу доказанной плотности в  $R(\text{Im } A^*)$  существует последовательность  $f^n(s)$ , сходящаяся к  $f(s)$  и

$$\|f(s)\|_{C^*(E_0) = L_1(E_0)} \leq 1;$$

$$\langle f(s) | \xi(s) \rangle = \|\xi(s)\|_{C(E_0)}.$$

Далее приведенное выше равенство  $\langle f^n(v) | \xi(s) \rangle = \iint_{E_0} \xi(s) f^n(s) ds$  гарантирует выполнение (50<sup>b</sup>). Следует теперь показать, что и для прообраза  $f(v)$  элемента  $f(s)$  выполнено и условие (50<sup>a</sup>). Нетрудно видеть, что  $\|R\| = 1$ . Следовательно,  $\|f(s)\|_{L_1(E_0)} \leq \|f(v)\|_{L_1(V)}$ . Необходимо доказать строгое равенство. Это будет выполнено в дополнительном предположении:  $K(x, y, z) \geq 0$ . Действительно, обозначим  $L_1^+(F_0)$  – множество в  $L_1 F_0$  неотрицательных функций, а  $L_1^-(E_0)$  – отрицательных. Ясно, что каждая из функций  $\varphi(s)$  может быть представлена в виде своих положительной  $\varphi^+(s) \in L_1^+(E_0)$  и отрицательной  $\varphi^-(s) \in L_1^-(E_0)$  компонент. Тогда:

$$\|f(v)\|_{L_1(V)} = \int_V \left| \iint_{E_0} \varphi(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0 \right| dx dy dz =$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \iint_{E_0} \iint_{E_0} (\varphi^+(x_0, y_0) - \varphi^-(x_0, y_0)) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0 dx dy dz =$$

$$\iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \iint_{E_0} (\varphi^+(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) - \varphi^-(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z)) dx_0 dy_0 dz dx dy =$$

$$\iint_{E_0} (Rf^+(v) - Rf^-(v)) ds = \|f(s)\|_{C^*(E_0) = L_1(E_0)}.$$

$$f^+(v) = \iint_{E_0} \varphi^+(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0;$$

$$f^-(v) = \iint_{E_0} \varphi^-(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0.$$

Последнее справедливо в силу положительности функции  $K(x, y, z) \geq 0$ .

Требуемое доказано. Предположение о независимости  $\bar{\xi}(v)$  от вертикальной координаты характеризует одно из решений задачи (47).

Резюмируем сказанное.

Пусть оператор  $A$  имеет вид (46), действует из  $C(V)$  в  $C(E_0)$ , является линейным, ограниченным и в  $C(E_0)$  имеет плотную область значений. Если  $K(x, y, z) \geq 0$  и класс функций из  $C(V)$ , не зависящих от вертикальной координаты, не входит в ядро операторов  $A$  и  $A^*$ , то множество функций, не зависящих от вертикальной координаты, есть почти идеальный экстремальный класс  $\mathfrak{K}(A, I, C)$ . Напомним, что  $I$  – единичный оператор.

То, что множество не зависящих от вертикальной координаты функций есть экстремальный подкласс класса  $\mathfrak{K}(A, I, C)$ , уже выяснено. Условие единственности решения уравнения  $A\xi(v) = u(s)$  на этом множестве входит в перечень ограничений на оператор  $A$ . Следует еще показать, что уравнение  $A\xi(v) = u(s)$  плотно разрешимо на  $\mathfrak{K}(A, I, C)$ .

Если это не так, то в  $C(E_0)$  существует элемент  $g(s)$ , и

$$\langle A\xi(s) | g(s) \rangle = 0 \quad \forall \xi(s) \in C(E_0).$$

Но тогда

$$\langle \xi(s) | A^* g(s) \rangle = 0 \quad \forall \xi(s) \in C(E_0),$$

откуда следует, что  $g(s) \in \text{Ker} A^*$ , что противоречит требованиям теоремы о том, что на  $C(E_0)$  уравнение  $A\xi(v) = u(s)$  однозначно разрешимо.

## 5.5. Построение решений на экстремальных классах

Идеальные и почти идеальные экстремальные классы относительно введенных критериев  $\|Fx\|_{L_2}$  охватывают большое число случаев. Они включают в себя и рассмотренный ранее случай  $\|x(v)\|_{C(V)} = \sup_{v \in V} |x(v)|$  для операторов, представимых в виде (46). Их особая значимость

состоит в том, что они образуют линейное подпространство в  $X$ . Это дает возможность конструктивного решения задачи о выделении элемента на экстремальном классе.

Почти идеальный экстремальный класс (5.41) имеющий представление  $x = F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi$ , позволяет с любой наперед заданной точностью решить задачу:

$$\|Ax - y\|_Y < \varepsilon;$$

$$x = F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi,$$

при условии  $y \in \text{Im } A$ . Для ее решения введем итерационный процесс:

$$x^{n+1} = x^n + \alpha_n F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi^n,$$

$$\varphi^n = (Ax^n) - y,$$

$$x^0 = 0,$$

$$n = 0, 1, \dots$$

(5.52)

Здесь  $\alpha_n$  – параметры релаксации, выбираемые так, чтобы обеспечить сходимость итерационного процесса. В предположении существования параметров релаксации итерационного

процесса (52), обеспечивающих его сходимость (позже будет показано, что такой выбор параметров возможен), легко получить:

$$x = \lim x^n = F^{-1} F^{*-1} A^* \sum a_n \varphi^n = F^{-1} F^{*-1} A^* \psi, \quad (5.53)$$

где  $\psi$  – некоторый элемент из области определения  $A^*$ . Таким образом, приходим к выводу о том, что итерационный процесс (52), при условии его сходимости, сходится к решению, имеющему представление (41), являющееся необходимым и достаточным для того, чтобы найденный элемент был решением исходной задачи

$$\begin{aligned} Ax &= y \in \text{Im } A, \\ \|Fx\|_{L_2} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь способ выбора параметра релаксации  $\alpha_n$ , обеспечивающего сходимость итерационного процесса (52).

Потребуем, чтобы выбор параметра релаксации обеспечивал максимальную скорость убывания невязки полей  $\varphi^n = (A(x^n) - y)$ . Легко понять, что:

$$Ax^{n+1} = Ax^n + a_n A(F^{-1} F^{*-1} A^* (A(x^n) - y)), \quad (5.54)$$

Тогда:

$$\varphi^{n+1} = Ax^{n+1} - y = \varphi^n + \alpha_n A(F^{-1} F^{*-1} A^* (x^n) (A(x^n) - y)).$$

Выберем в качестве  $Y$  гильбертово пространство  $L_2$ . Тогда:

$$\|\varphi^{n+1}\|^2 = \|\varphi^n\|^2 + \alpha_n \langle \varphi^n | A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n) \rangle + \alpha_n^2 \|A'(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n)\|^2.$$

Последнее равенство перепишем в виде  $\|\varphi^{n+1}\|^2 = q^n \|\varphi^n\|^2$ , где

$$q^n = \left\{ \begin{aligned} &1 + 2\alpha_n \frac{\|F^{*-1} A^* \varphi^n\|^2}{\|\varphi^n\|^2} + \\ &\alpha_n^2 \frac{\|A^* (F^{-1} F^{*-1} A^*) \varphi^n\|^2}{\|\varphi^n\|^2} \end{aligned} \right\}^{1/2}. \quad (5.55)$$

В выражении (55) функция  $q^n$  зависит от  $\alpha_n$ . Максимальная скорость сходимости будет обеспечена, если  $\alpha_n$  минимизирует эту функцию. Для нахождения минимума (экстремума) дифференцируем (55) по  $\alpha_n$ , результат приравняем к нулю и решаем соответствующее уравнение. В результате получим:

$$a_n = - \frac{\|F^{*-1} A^* \varphi^n\|^2}{\|A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n)\|^2}.$$

В эквивалентной форме:

$$a_n = - \frac{\langle \varphi^n | A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n) \rangle}{\|A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n)\|^2}. \quad (5.56)$$

Необходимо убедиться, что при выборе параметра релаксации  $\alpha_n$  по формуле (57) значение  $q_n$  лежит в интервале  $[0 - 1]$ . Этим будет обеспечено монотонное убывание невязки  $\|\varphi^n\|$  и тем самым сходимость итерационного процесса (52) по невязке. Подставив (56) в (55), получим:

$$q_n = \left\{ 1 - \frac{\|F^{*-1} A^* \varphi^n\|^4}{\|\varphi^n\|^2 \|A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n)\|^2} \right\}. \quad (5.57)$$

Числитель в последнем равенстве перепишем:  $\langle \varphi^n | AF^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n \rangle^2$ .

Отсюда, с учетом хорошо известного неравенства Шварца:

$$\begin{aligned} \|F^{*-1} A^* \varphi^n\|^4 &\leq \|\varphi^n\|^2 \|A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n)\|^2 \text{ и} \\ \|F^{*-1} A^* \varphi^n\|^4 / \|\varphi^n\|^2 \|A(F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi^n)\| &\leq 1. \\ q^n &\in [0,1]. \end{aligned}$$

Требуемое доказано – величина  $q_n$  вещественна, положительна и не превосходит единицы. Этим обеспечивается монотонность убывания невязки и сходимость итерационного процесса.

Рассмотрим предельные случаи. Если при некотором  $n$   $q^n = 0$ , то это значит, что  $\|\varphi^n\| = 0$  и процесс сошелся к точному решению  $A = y$ . Реально такое положение дел недостижимо. Всегда остается некомпенсированная невязка. Рассмотрим другой предельный случай –  $q^n = 1$ . Из (57) следует, что в этом случае  $\|F^{*-1} A^* \varphi^n\| = 0$ . В силу наложенного ранее условия об отсутствии нулевого пересечения у ядер операторов  $F^{*-1}$  и  $A^*$  отсюда вытекает  $A^* \varphi^n = 0$ , а в силу известной теоремы о ядре (см. Прил. 2.4) это означает ортогональность невязки возможному множеству значений оператора  $A$ ,  $\varphi^n \in (\text{Im } A)^\perp$ . В геофизических терминах этот результат означает то, что достигнутая невязка не может быть компенсирована в рамках введенных модельных представлений, и задача требует введения компонент модели более широких, чем используемые.

В реальных ситуациях поле задано с погрешностями, и количество выполняемых итераций необходимо согласовывать с точностью задания поля. На практике итерации продолжают до тех пор, пока процесс (52) либо не прекратил сходимость, что означает необходимость смены модельных представлений (например выбор более широкого модельного класса), либо не достигнута требуемая точность:  $\|\varphi^n\| \leq \delta$ . Условие приостановки итерационного процесса по достижении заданной невязки может быть обобщено и заменено обобщенной невязкой, включающей в себя и оценку погрешности оператора так, как это проделано в 4.3. Однако эти вопросы относятся к числу конкретно-методических для конкретных модификаций методов.

## 5.6. Нелинейные задачи

Касаясь использования критериальных принципов для доопределения решений нелинейных задач, следует выделить два круга вопросов. Во-первых, это собственно характеристика экстремальных классов, которая может быть выполнена в весьма ограничительных предположениях относительно свойств оператора  $A$ . Эти ограничения касаются, прежде всего, возможности использования принципов линеаризации задачи – приближенной ее заменой линейным аналогом. Однако после того как линеаризация выполнена, оказываются применимы все методы, изложенные для линейных задач. Во-вторых, это собственно конструктивные приемы построения решений на экстремальных классах. Здесь основой служат итерационные методы, которые применимы и для линейных задач. Однако есть свои особенности, которые касаются, прежде всего, выбора точки, в окрестности которой линеаризация выполняется.

### 5.6.1. Характеристика экстремальных классов для нелинейных задач

Рассматривая для нелинейного оператора  $A$ , отображающего банахово пространство  $X$  в банахово пространство  $Y$ , постановку, аналогичную (33):

$$\begin{cases} A(x) = y; \\ \|F(x - x_0)\|_Z \rightarrow \min, \end{cases} \quad (5.58)$$

при  $y$ , пробегающем все  $\text{Im } A$ , предполагая, что  $F$  – линейный замкнутый оператор с ядром, не имеющим общих элементов с  $\text{Ker } A'(x)$ .  $A'(x)$  – производная Фреше оператора  $A(x)$  в окрест-

ности решения  $\bar{x}$  задачи (58), а сам оператор  $A(x)$  регулярен в окрестности искомого решения, существование которого предполагается, легко получить в случае  $Z = L_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(\bar{x})\varphi; \\ \varphi &\in D(A^*(\bar{x})). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Это уравнение по своей форме аналогично уравнению (41), характеризующему почти идеальный экстремальный класс  $\mathfrak{K}(A, F, L_2)$  для линейного оператора  $A$ . Знак «\*», как и ранее, обозначает переход к сопряженному оператору. Уравнение (59) легко получается применением принципа Лагранжа (Прил. 2.6) к задаче (58). Однако оно является лишь необходимым (а не необходимым и достаточным) условием. Кроме того, процесс его получения предполагает непрерывность величины  $\|A(x)\|$  и регулярность оператора  $A$  в окрестности  $\bar{x}$ . Но самые большие трудности связаны не с этим. Дело в том, что искомый элемент  $\bar{x}$  входит не только в левую, но и в правую часть уравнений (59), что затрудняет расчет функции  $\varphi$ , поскольку она должна быть найдена из уравнения:

$$A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}F^{-1*}F(\bar{x})\varphi) = u. \quad (5.60)$$

Далеко не всегда ясно, как эти уравнения решать. Для того чтобы избежать всех этих проблем, воспользуемся приемом линеаризации. Однако, несмотря на линеаризацию, решать будем все же нелинейную задачу.

Пусть требуется решить уравнение

$$A(x) = y \in \text{Im } A(x), \quad (5.61)$$

причем заранее неизвестно, имеет ли это уравнение единственное решение либо нет.

Пусть задано нулевое приближение к решению –  $x_0$  и оператор  $A$  имеет непрерывную производную  $A'(x)$  в окрестности  $x_0$ . Если  $\bar{x}$  – искомое решение, то для  $h = x - x_0$  можно записать

$$A'(x_0)h = \bar{y}, \quad (5.62)$$

где  $\bar{y}$  – некоторый элемент, вообще говоря, неизвестный, такой, что для него одно из решений уравнения (62) обладает свойством:

$$A(x_0 + h) = y. \quad (5.63)$$

Поскольку решение уравнения (62), вообще говоря, неединственно, то следует предположить существование многих правых частей в (62) и соответствующих элементов  $h$  таких, что (63) выполнено. Для отбора необходимого  $h$  введем, как и ранее, критерий оптимальности в форме функционала:

$$\|Fh\|_X \rightarrow \min. \quad (5.64)$$

Поскольку оператор  $A'(x_0)$  линеен<sup>25</sup>, то можно к задаче

$$\begin{cases} A'(x_0)h = \bar{y}; \\ \|Fh\|_{L_2} \rightarrow \min, \end{cases} \quad (5.65)$$

применить результаты п. 5.3. В соответствии с ними оператору  $A'(x_0)$  и функционалу  $\|Fh\|_{L_2}$  соответствует экстремальный класс  $\mathfrak{K}(A'(x_0), F, L_2)$ , который при выполнении условий теоремы 2 п. 5.2 для оператора  $F$  является почти идеальным.

Рассмотрим случай, когда  $F$  линеен, замкнут, имеет ограниченный обратный, и его ядро состоит только из нуля. Тогда почти идеальный экстремальный класс  $\mathfrak{K}(A'(x_0), L_2, F)$  имеет представление

$$h = F^{-1}F^{*-1}A'^*(x_0)\varphi. \quad (5.66)$$

<sup>25</sup> Относительно  $h$ .



Здесь функция  $\varphi$ , называемая функцией Лагранжа, должна принадлежать области определения оператора  $A^*(x_0)$ . В достаточных для приложения случаях можно считать, что  $\varphi \in C \cap L_2$ .

Теперь следует решать задачу:

$$\begin{cases} A(x) = y; \\ x = x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi. \end{cases} \quad (5.67)$$

Поскольку ее решение может просто не существовать, перейдем к задаче минимизации  $\|A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi) - y\|_{L_2}^2 \rightarrow \min$ .

Обобщим ее, введя линейный ограниченный оператор  $\Phi$ , действующий из  $ImA$  в гильбертово пространство  $X$ . Потребуем минимального уклонения преобразования  $\Phi$  невязки – разности между наблюдаемой  $u$  и рассчитанным от искомого решения полем. Тогда получим:

$$\|\Phi(A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi) - y)\|_{L_2}^2 \rightarrow \min. \quad (5.68)$$

Или:

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)) | \Phi(A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)) \rangle - \\ & - 2 \langle \Phi(A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)) | \Phi y \rangle + \|\Phi y\|_{L_2}^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Для нахождения минимума подставим вместо  $\varphi$  величину  $\varphi + \alpha \cdot \eta$ , где  $\alpha$  – некоторое число, а  $\eta$  – вариация  $\varphi$ , продифференцируем последнее выражение по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  и приравняем результат к нулю:

$$\begin{aligned} & 2 \langle \Phi^* \Phi(A(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)) | A'(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi) \rangle \times \\ & \times F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\eta \rangle - 2 \langle \Phi^* \Phi A'(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi) \times \\ & \times F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\eta | y \rangle = 0, \quad \forall \eta \in L_2. \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} & \langle A'(x_0)F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)\Phi^* \Phi(A(x_0 + \\ & + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)) | \eta \rangle - \langle A'(x_0)F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0 + \\ & + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)\Phi^* \Phi y | \eta \rangle = 0. \end{aligned} \quad \forall \eta \in L_2$$

Тогда:

$$\begin{aligned} & A'(x_0)F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)\Phi^* \Phi(A(x_0 + \\ & + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi) - y) = 0. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Класс  $Im F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)$  является почти идеальным для уравнения

$$A(x_0)h = y. \quad (5.70)$$

Это означает, что уравнение (60) однозначно решается на множестве  $\aleph(A'(x_0), F, L_2)$ . Предположим, что уравнение (60) однозначно разрешимо и на множестве

$$h \in Im F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0 + h) = \aleph(A'(x), F, L_2),$$

что будет, например, выполнено при:

$$\overline{Im A^*(x_0)} = \overline{Im A^*(x_0 + h)} = \overline{Im A^*(x)}. \quad (5.71)$$

Тогда из (69) следует:

$$\begin{aligned} & F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi)\Phi^* \Phi(A(x_0 + \\ & + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi) - y) = 0. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что для искомого решения  $x$ :

$$x = x_0 + F^{-1}F^{*-1}A^*(x_0)\varphi,$$

имеем

$$F^{-1}F^{*-1}A'^*(x)\varphi(\Phi^*\Phi(A(x)-y))=0. \quad (5.72)$$

### 5.6.2. Итерационные методы построения решений на экстремальных классах

Для решения уравнения (72) построим итерационный процесс:

$$x^{n+1} = x^n + a_n F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)(\Phi^*\Phi(A(x^n)-y)), \quad (5.73)$$

где  $x^0 = x_0$  – заданное нулевое приближение,  $\alpha_n$  – последовательность чисел (называемых параметрами релаксации), обеспечивающая сходимость (73). Предположим, что нам удалось выбрать последовательность  $\alpha_n$  так, что последовательность  $x^n$  сходится. Тогда, если для всех  $\alpha_n$ :  $\overline{\text{Im } A'^*(x^n)} = \overline{\text{Im } A'^*(x_0)}$ , что включает в себя и введенное ранее предположение (51), то

$$x^{n+1} = x^n + F^{-1}F^{*-1} \sum_{i=1}^n a_i A'^*(x^i)(\Phi^*\Phi(A(x^i)-u)),$$

и, следовательно, для предельного элемента имеем:

$$\bar{x} = x^0 + g; \quad g \in F^{-1}F^{*-1}(\overline{\text{Im } A'^*(x_0)}).$$

Последнее означает, что определенный элемент  $\bar{x}$  принадлежит экстремальному классу (46) и тем самым обладает требуемыми свойствами оптимальности. С другой стороны, этот же элемент минимизирует невязку

$$\|\Phi(A(x)-u)\|_{L_2}, \quad (5.74)$$

и, следовательно, процесс (73), при условии его сходимости, решает задачу оптимального подбора относительно априори заданного критерия и минимизирующего невязку по полю в смысле (74).

Займемся теперь выбором последовательности  $\alpha_n$ . Для этого поступим способом, аналогичным приведенному в предыдущем разделе – способом минимальных невязок. Потребуем, чтобы последовательность  $\alpha_n$  выбиралась так, что для соответствующей по (73) последовательности  $x^n$  обеспечивалась максимальная скорость убывания величины:

$$\|\Phi(A(x)-u)\|_{L_2}.$$

Обозначим:  $\Phi(A(x^n)-y) \rightarrow g^n$ ;  $(A(x^n)-y) \rightarrow \Delta^n$ .

Поскольку:

$$A(x^{n+1}) = A(x^n) + A'(x^n)\alpha_n F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)(\Phi^*\Phi(A(x^n)-y) + r(x^n - x^{n-1})),$$

где  $r(\cdot)$  – величина второго порядка малости (относительно  $\|x^n - x^{n-1}\|$ ), то:

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n + \alpha_n A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*\Phi\Delta^*,$$

и

$$g^{n+1} = g^n + a_n \Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n.$$

Отсюда:

$$\|g^{n+1}\|^2 = \|g^n\|^2 + 2a_n \langle \Phi^*g^n | A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n \rangle + a_n^2 \|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2.$$

Тогда:

$$\|g^{n+1}\| = q^n \|g^n\|,$$

где

$$q^n = \left\{ 1 + 2a_n \frac{\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2}{\|g^n\|^2} + a_n^2 \frac{\|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2}{\|g^n\|^2} \right\}^{1/2}. \quad (5.75)$$

$q^n$  – есть функция  $\alpha_n$ , и для того чтобы обеспечить максимальную скорость убывания  $\|g^n\|$ , необходимо минимизировать  $q^n$  по  $\alpha_n$ . Продифференцируем (75) по  $a_n$ , и приравняем результат нулю. Получим:

$$a_n = - \frac{\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2}{\|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2}, \quad (5.76)$$

что можно переписать также и в эквивалентной форме:

$$a_n = - \frac{\langle \Phi^*g^n | A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n \rangle}{\|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2}.$$

Необходимо убедиться, что величина  $q^n$  при таком выборе  $a_n$  лежит в интервале (0,1). Этим обеспечивается монотонность убывания невязки. Подставив (76) в (75), получим:

$$\begin{aligned} q^n &= \left\{ 1 - 2 \frac{\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^4}{\|g^n\|^2 \|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^4}{\|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2 \|g^n\|^2} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ 1 - \frac{\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^4}{\|g^n\|^2 + \|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Числитель в (77) перепишем:

$$\langle g^n | \Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n \rangle^2.$$

Неравенство Шварца гласит:

$$\langle \psi | g \rangle \leq \| \psi \| \| g \|.$$

Тогда:

$$\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^4 \leq \|g^n\|^2 \|\Phi A'(x^n)F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\|^2.$$

Следовательно, величина  $q^n$  вещественна и имеет значения из интервала (0,1). Этим обеспечивается монотонное убывание невязки, определенной соотношением (74), при вычислении параметра релаксации по формуле (76).

Если при некотором  $n$   $q^{n-1} = 0$ , то невязка  $g^n = 0$  и, следовательно, итерационный процесс сошёлся, и для выделенного элемента  $x^n$  имеем  $\|\Phi(A(x^n) - y)\| = 0$ . Отсюда следует  $A(x) = 0$  (оператор  $\Phi$  взаимно-однозначен на  $\text{Im } A$ ). Рассмотрим другой предельный случай. Предположим, что невязка прекратила убывать. Следовательно,  $q^n = 1$  и

$$\|F^{*-1}A'^*(x^n)\Phi^*g^n\| = 0.$$

Поскольку  $\text{Im } A'^*(x^n) \cap \text{Ker } F^{*-1} = 0$ , то, следовательно,  $A'^*(x^n)\Phi^*g^n = 0$  и либо  $\Phi^*g^n = 0$ , либо  $\Phi^*g^n \in \text{Ker } A'^*(x^n)$ . В приложениях оператор  $\Phi$  имеет нулевое ядро. Например, в качестве  $\Phi$  может служить операция умножения на некоторую неотрицательную весовую функцию. Другой пример:  $\Phi = I + (\text{grad})^n$ , где  $I$  – единичный оператор. Здесь учитывается не только невязка, но и производные от невязки до фиксированного порядка.

Считая, что  $\text{Ker } \Phi = 0$  и  $\text{Ker } \Phi^* = 0$ , имеем, в силу теоремы о ядре,

$$\Phi^*g^n \in (\text{Im } A'(x^n))^\perp.$$

Иными словами, используемая трансформация достигнутой невязки  $\Delta^n$  ортогональна всему множеству значений оператора  $A'(x^n)$ . Если, например,  $\Phi = I$ , то такая ситуация может

свидетельствовать о том, что компонента  $\Delta^n$  не укладывается в рамки принятых модельных представлений о среде и не может быть учтена без пересмотра этих представлений и введения ее новых компонентов.

Для того чтобы решение, найденное как предел итерационного процесса (73), обладало свойствами оптимальности, постулированными постановкой обратной задачи (65), необходимо, чтобы  $h \in \text{Im } F^{-1} F^{*-1} A'^*(x_0)$ . В итерационном процессе, кроме того, предполагается  $\text{Im } A'^*(x^n) = \text{Im } A'^*(x_0)$  для всех  $x^n$  из некоторой окрестности  $x_0$ . Тогда, в силу теоремы о ядре, имеем:  $\text{Ker } A'(x) = \text{Ker } A'(x^n)$ . Такое условие в некоторых задачах, обладающих особо большой эквивалентностью, представляется чрезмерно ограничительным. Для того чтобы обеспечить выполнение условия  $h \in \text{Im } F^{-1} F^{*-1} A'^*(x_0)$  и тем самым требуемые свойства оптимальности решения, можно пользоваться модифицированным итерационным процессом:

$$x^{n+1} = x^n + a_n F^{-1} F^{*-1} A'^*(x_0) (\Phi^* \Phi(A(x^n) - y)). \quad (5.78)$$

Его отличие от основного состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса производная оператора рассматривается в одной и той же точке – принятом нулевом приближении. Параметр релаксации при этом вычисляется по модифицированному соотношению:

$$a_n = - \frac{\langle \Phi g^n | A'(x^n) F^{-1} F^{*-1} A'^*(x_0) \Phi^* \Phi(A(x^n) - y) \rangle}{\| \Phi A'(x^n) F^{-1} F^{*-1} A'^*(x_0) \Phi^* \Phi(A(x^n) - y) \|^2}. \quad (5.79)$$

Последняя формула получена заменой  $A'(x^n), A'^*(x^n)$  в (76) на  $A'(x^0), A'^*(x^0)$ . Все дальнейшие рассуждения повторяются дословно. Сходимость модифицированного процесса (78) будет происходить до тех пор, пока:

$$\Phi^* \Phi(A(x^n) - y) \in \overline{\text{Ker } A'(x^0)}.$$

В противном случае процесс прекращает сходиться. Выполнения условия

$$\Phi^* \Phi(A(x^n) - y) \in \text{Ker } A'(x^0)$$

также можно трактовать как несоответствие оставшейся невязки принятым представлениям о среде.

Описанный итерационный процесс приемлем и для решения линейных задач на экстремальных классах, в частности, решения задачи:

$$\begin{aligned} x &\in \mathfrak{X}(A, L_2, F); \\ \| \Phi(Ax - u) \|_{L_2} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

В этом случае он имеет вид:

$$x^{n+1} = x^n + a_n F^{-1} F^{*-1} A'^* g^n, \quad (5.80)$$

где

$$g^n = \Phi^* \Phi(Ax^n - y).$$

Как видно, соотношение (80) полностью повторяет (54). Обобщение состоит в введении оператора  $\Phi$ , контролирующего особые свойства невязки. Прекращение сходимости процесса означает:

$$\Phi^* \Phi(Ax^n - y) \in (\text{Im } A)^\perp.$$

Реально, итерационные процессы (73, 78) продолжаются ограниченное число шагов  $N$ , в результате чего достигается невязка по полю  $\Delta^n$ . Далее процесс прекращается. Для выбора числа этих шагов можно пользоваться принципом обобщенной невязки, уже описанным выше. Вкратце его применение сводится к следующему.

Если оператор  $A$  задан с ошибкой так, что реально используется оператор  $A_\varepsilon$ , и его отклонение от точного оценивается величиной  $\| A - A_\varepsilon \| \leq \varepsilon$ ,

$$\|A - A_\varepsilon\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\Phi\{A(x) - A_\varepsilon(x)\}\|,$$

И, кроме того, наблюдаемая  $y_\delta$  также задана с ошибкой и

$$\|\Phi(y_\delta - y)\| \leq \delta,$$

то в качестве критерия останова итерационного процесса может служить:

$$\|\Phi(A_\varepsilon(x^n - u_\delta))\| \leq \varepsilon \|x^n\| + \delta.$$

Действительно, с точностью до членов второго порядка  $A_\varepsilon \approx A + \Delta A$ ;  $y_\delta = y + \delta y$ .

$$\begin{aligned} \|\Phi(A_\varepsilon(x^n) - u_\delta)\| &\approx \|\Phi(Ax - y + \Delta Ax - \delta u)\| = \\ &= \|\Phi(\Delta Ax - \delta u)\| \leq \varepsilon \|x\| + \|\Phi \delta u\| = \varepsilon \|x\| + \delta. \end{aligned}$$

Обратим внимание на следующее, важное с вычислительной точки зрения, обстоятельство. Формула (76) для расчета параметра релаксации  $a_n$  кажется громоздкой. Однако в процессе вычислений по итерациям (73) все необходимые компоненты, входящие в (76), уже вычислены, и количество дополнительных расчетов для нахождения параметра релаксации  $a_n$  оказывается невелико.

Описанная итерационная схема не является обязательной для критериального подхода. Главным является то, что получаемое решение должно принадлежать множеству с представлением (66) либо, если не пользоваться линеаризацией для формирования принципов оптимальности, – множеству с представлением (59). Какая бы технология нахождения конкретного решения уравнения  $Ax = y$  не использовалась, если она приводит к решению, представленному в виде (59) либо (67) при  $\text{Im } A^*(x) = \text{Im } A^*(x^0)$ , то тем самым решена и задача (58). В некоторых случаях целесообразен эвристический подбор параметра релаксации на основании анализа динамики невязки. Эта схема основана на экстраполяции значения параметра релаксации на основе графика зависимости невязки от величины параметра релаксации, полученного на предыдущих шагах итерационного процесса.

Типичным примером другого типа алгоритмов для решения нелинейных уравнений является метод Маккварта [1]. Его сущность состоит в следующем.

Для заданного нулевого приближения  $x_0$  уравнение  $Ax = y$  заменяется на:

$$A'(x_0)h^1 = y - A(x_0); \quad (5.81)$$

где  $h^1$  – поправка к вектору  $x$  и  $x^1 = x^0 + h^1$ . Для согласования размерностей правой и левой частей уравнения (81) последнее умножается слева на сопряженную к  $A'(x_0)$  матрицу  $A'^*(x_0)$ :

$$A'^*(x_0)A'(x_0)h^1 = A'^*(x_0)(y - A(x_0)). \quad (5.82)$$

Поскольку матрица  $A'^*(\bar{x}_0)A'(\bar{x}_0)$  может оказаться плохо обусловленной или даже выраженной, то вводится регуляризирующий член, и уравнение (82) заменяется на:

$$[A'^*(x_0)A'(x_0) + \lambda I]h^1 = A'^*(x_0)(y - A(x_0)), \quad (5.83)$$

где  $\lambda$  – некоторый числовой параметр и  $I$  – единичная матрица. Уравнение (83) – система линейных уравнений. Решая ее относительно  $h^1$ , получим новое, исправленное значение  $x^1 = x^0 + h^1$ . Повторяя процесс далее, получим:  $x^{n+1} = x^n + h^{n+1}$  и для искомого решения:

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^n; \\ h^{n+1} &= [(A'^*(x^n)A'(x^n) + \lambda I)]^{-1} A'^*(x^n)(y - A(x_0)). \end{aligned} \quad (5.84)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  метод Маккварта асимптотически редуцируется к методу наименьших квадратов. При больших  $\lambda$  метод Маккварта аналогичен методу наискорейшего спуска. Выбор конкретного значения  $\lambda$  здесь представляет некоторые трудности, и, видимо, некоторой

универсальной рекомендации по этому вопросу дать нельзя. Для решения частных обратных задач, например обратных задач магнитотеллурического зондирования [2], разработаны методические рекомендации по выбору параметра  $\lambda$ , который меняется пошагово, в зависимости от поведения невязки. Выбору параметра  $\lambda$  можно дать трактовку в рамках идеологии теории регуляризации, поскольку добавочное слагаемое – член  $\lambda I$ , есть ни что иное, как регуляризирующее слагаемое. Однако нас в настоящее время интересует другой аспект вопроса. Перепишем систему (84) следующим образом:

$$h^{n+1} = \frac{1}{\lambda} A'^*(x^n) [y - A(x^n) - (A'^*(x^n)h^n)]$$

Последнее означает, что  $h^{n+1} \in \text{Im } A'^*(x^n)$  и, следовательно,  $h^{n+1}$  есть решение задачи:

$$\begin{aligned} A'(x^n)h &= y; \\ \|h\|_{L_2} &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Таким образом, решение Маккварта по своим экстремальным свойствам соответствует наименее уклоняющемуся от нуля в смысле  $\|Fh\|_{L_2}$  при  $F = I$ . Иными словами, принадлежит почти идеальному экстремальному классу  $\mathfrak{K}(A', I, L_2)$ . Теперь нетрудно модифицировать схему Маккварта так, чтобы получаемое решение обладало теми же экстремальными свойствами, что и в схеме (73) при произвольном операторе  $F$  (принадлежало экстремальному классу  $\mathfrak{K}(A', F, L_2)$ ):

$$h^{n+1} = [A'^*(x^n)A'(x^n) + \lambda \cdot F^*F]^{-1} A'^*(x^n)(y - A(x^n)). \quad (5.85)$$

Легко заметить, что:  $\lambda \cdot F^*Fh^{n+1} = A'^*(x^n)(y - A(x^n)) - A'^*(x^n)A'(x^n)h^{n+1}$ ,

$$h^{n+1} = \frac{1}{\lambda} F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)[y - A(x^n) - (A'(x^n)h^{n+1})] = F^{-1}F^{*-1}A'^*(x^n)\phi^n,$$

где  $\phi^n = \frac{1}{\lambda}[y - A(x^n) - (A'(x^n)h^{n+1})]$ .

Требуемое представление для  $h^{n+1}$  достигнуто.

Метод построения решения обратной задачи, основанный на использовании модифицированного метода Маккварта (85), требует на каждом шаге решения системы линейных уравнений. В том случае, когда это осуществимо (относительно небольшое число искомых параметров), и при правильном выборе  $\lambda$  этот метод оказывается преимущественным по точности решения (относительно невязки  $\|A(x^n) - y\|_{L_2}$  в сравнении с итерационным процессом (73)). Однако необходимость решения системы линейных уравнений оказывается весьма серьезным препятствием при поиске многомерных параметров. Так, например, при решении обратной задачи гравиразведки в классе плотных границ для профиля средней величины (60 км при масштабе съёмки 1:50000) и средней сложности (3 искомых контакта) такой подход требовал бы решения системы из 620 уравнений. Это трудоемкая задача, а необходимость её многократного решения затрудняет ситуацию. В конечном итоге, оказывается более выгодным осуществить дополнительные итерации в (73), чем повышать точность за счет решения больших систем уравнений. Описанная ситуация характерна для многих сегодняшних задач, поскольку желание повысить итерационные возможности геофизического метода приводит к увеличению числа искомых параметров.

## 5.7. Составные критерии оптимальности и обратные задачи комплексной интерпретации

Чем шире класс эквивалентности  $\Omega_y(A) = \{x \in D(A) : Ax = y\}$ , тем более решение задачи  $Ax = y$  в рамках критериального подхода зависит от принятого критерия оптимальности, или, иначе, от параметров  $F, \|\cdot\|_X$ , входящих в его выражение:

$$J(x) = \|F(x - x^0)\|_X \rightarrow \min.$$

Сам по себе этот факт – объективное обстоятельство, и даже может рассматриваться как явление положительное, поскольку позволяет управлять свойствами получаемого решения. Последнее верно, если имеется объективный способ анализа получаемых решений из экстремальных классов  $\mathfrak{K}(A, F, X)$ . Однако факт такого влияния имеет и серьёзные отрицательные стороны. Дело в том, что при выводе выражений для экстремальных классов  $\mathfrak{K}(A, F, X)$  на оператор  $F$ , норму пространства  $X$  накладывались чисто математические ограничения. Это ограничивало класс используемых критериев оптимальности. Это обстоятельство, а также влияние неизбежного субъективизма и погрешностей в формировании оператора  $F$  приводит к тому, что вместо необходимого вида  $F$  (который может быть и неизвестен) применяется другой –  $\tilde{F}$ , возможно, близкий к  $F$ , но не разный ему тождественно. Различие между решениями из  $\mathfrak{K}(A, F, X)$  и  $\mathfrak{K}(A, \tilde{F}, X)$  будет тем более, чем шире класс  $\Omega_y(A)$ . Поэтому, если имеется дополнительная информация, позволяющая сузить  $\Omega_y(A)$ , её необходимо использовать. Чаще всего такая информация носит характер ограничений на искомое решение и может быть формализована в виде задания некоторого множества  $M$ , которому должно принадлежать решение. При этом множество  $M$  не является классом единственности. Если это множество задано явно, например в виде ограничений типа неравенств на возможные значения искомого параметра, то введение этой информации в критерий оптимальности может быть осуществлено уже описанным ранее (см. 5.2.1) способом:

$$\|Fx\|_X + \chi_M(x) \rightarrow \min.$$

(5.86)

где

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in M, \\ \infty & \text{при } x \notin M. \end{cases}$$

Однако в значительном числе случаев такая формулировка выглядит идеалистичной. Суть дела состоит в том, что наблюдаемая  $y$  и информация, определяющая множество  $M$ , являются компонентами независимыми. Например, в качестве  $M$  может выступать класс эквивалентности для некоторого другого оператора  $A_2$  и другой наблюдаемой  $y_2$ . Это соответствует попытке найти общее решение для двух различных обратных задач относительно одной и той же содержательной модели среды. Существует целый ряд причин, включающих в себя несоответствие содержательных моделей в первой и второй задачах, наличие и независимость погрешностей (в том числе и систематических) в каждой из наблюдаемых, по которым решения задач не существует. Принципиальная ограниченность множества  $M$  может привести к тому, что  $M \cap \Omega_y(A)$  пусто и минимизация (86) на  $\Omega_y(A)$  является бессодержательной задачей. В этих случаях целесообразно искать два элемента  $x_1$  и  $x_2$  таких, что:

$$\begin{cases} J(x_1, x_2) \rightarrow \min; \\ x \in \Omega_y; x_2 \in M, \end{cases}$$

(5.87)

где  $J(*, *)$  – некоторый функционал, определяющий меру близости  $x_1$  и  $x_2$ . Например,  $J(*, *) = \|F(x_1 - x_2)\|_X$ . Положим, что имеется наблюдаемая  $y_2$  и  $M = \Omega_{y_2}(A_2)$ .

Пусть  $P_1(x_2, y_1)$  – оператор, ставящий в соответствие элементу  $x_2$  и наблюдаемой  $y_1 \in \text{Im } A_1$  решение задачи:

$$\begin{cases} A_1 x_1 = y_1; \\ \min_{x_1} (J(x_1, x_2)), \end{cases} \quad (5.88)$$

а  $P_2(x_1, y_2)$  – оператор, ставящий в соответствие элементам  $x_1$  и  $y_2$  (что эквивалентно задаче  $M$ ) решение задачи:

$$\begin{cases} A_2 x_2 = y_2; \\ \min_{x_2} (J(x_1, x_2)), \end{cases} \quad (5.89)$$

тогда, если пара  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  есть решения задачи:

$$\begin{cases} A_1 x_1 = y_1; \\ A_2 x_2 = y_2; \\ \min_{x_1, x_2} (J(x_1, x_2)), \end{cases} \quad (5.90)$$

то необходимым условием, которому удовлетворяется эта пара, является:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = P_1(\bar{x}_2, y_1); \\ \bar{x}_2 = P_2(\bar{x}_1, y_2). \end{cases}$$

(5.91)

Зафиксировав некоторый элемент  $x_2^0$ , рассмотрим итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = P_1(x_2^n, y_1); \\ x_2^{n+1} = P_2(x_1^{n+1}, y_2). \end{cases} \quad (5.92)$$

Из определения оператора  $P_2$  имеем:

$$J(x_1^{n+1}; x_2^{n+1}) \leq J(x_1^n; x_2^{n+1}), \quad (5.93)$$

а из определения  $P_1$ :

$$J(x_1^n; x_2^{n+1}) \leq J(x_1^n; x_2^n). \quad (5.94)$$

Соединяя эти два неравенства, получим:

$$J(x_1^{n+1}; x_2^{n+1}) \leq J(x_1^n; x_2^n). \quad (5.95)$$

Если для некоторого  $n = N$  (95) выполнено как равенство, то как равенства выполнены (94) и (93). Тогда, если операторы  $P_1(x_2, y_1), P_2(x_1, y_2)$  однозначны, то  $x_1^{N+1} = x_1^N, x_2^{N+1} = x_2^N$ , откуда

$$\begin{cases} x_1^N = P_1(x_2^N, y_1); \\ x_2^N = P_2(x_1^N, y_2). \end{cases}$$

Следовательно, итерационный процесс (92) является монотонно сходящимся к решению задачи (90), а если уравнение (91) является дополнительно достаточным условием для решения задачи (90), то процесс (92) доставляет и решение задаче (90). Однако сходимость последовательности  $a_n = J(x_1^n; x_2^n)$ . еще не влечет сходимости самих элементов  $x_1^n; x_2^n$  к некоторым элементам  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Соотношением (95) обеспечена сходимость по функционалу. При определенной конструкции  $J(*, *)$  сходимость по  $J(*, *)$  влечет и сходимость элементов  $x_1^n; x_2^n$  по норме, и в этих случаях процесс (92) полностью решает задачу (90).

Обращаясь к построению операторов  $P_1$  и  $P_2$  (88-89), легко видеть, что каждый из них есть ни что иное, как построение решения обратной задачи, оптимального относительно задан-



ного фиксированного критерия оптимальности. Отсюда следует вывод, что методы решения частных обратных задач, основанные на критериальном подходе, естественным образом объединяются итерационным процессом (92) в процедуру совместного решения обратных задач. Но именно такого рода совместные решения обратных задач реализуют процедуру комплексной интерпретации. Постановка обратной задачи комплексной интерпретации (90), реализуемая процессом (92), состоит в нахождении пары элементов, каждый из которых удовлетворяет своей наблюдаемой и в своих классах эквивалентности, выделяемая пара состоит из ближайших друг к другу элементов. Принципом комплексирования служит принцип максимальной близости друг к другу выделяемых элементов при условии, что каждый из них удовлетворяет своему полю. Совсем не обязательно, чтобы решение было одно и удовлетворяло обоим наблюдаемым. Такое положение дел – скорее, исключение, чем правило. Но пара элементов, являясь конкретно физическими моделям одного и того же объекта, должна состоять из элементов, которые в каком-то смысле близки друг к другу. Это достаточно общий и универсальный принцип комплексирования. В противном случае, если он не выполняется, теряется сам смысл использования нескольких методов для изучения *одного* объекта.

Дальнейшие рассмотрения связаны с конкретизацией вида функционала  $J(*, *)$ .

Пусть функционал  $J(x_1, x_2)$  имеет вид

$$\|F(x_1 - x_2)\|_X + \chi_M(x_2) \rightarrow \min. \quad (5.96)$$

и множество  $M = \{x \in X; \xi_1(v) \leq x(v) \leq \xi_2(v)\}$ , где  $\xi_1(v)$  и  $\xi_2(v)$  – заданные элементы.

Выберем в качестве  $X$  пространство  $L_p(V)$ ,  $1 < p < \infty$ , и пусть  $F$  линеен, непрерывен, и из условия  $x(v) \geq 0$  следует  $Fx(v) \geq 0$ . Обозначим  $\bar{x}_2 = P_2(x_1, M)$  решение задачи

$$\min_{x_2 \in M} \|F(x_1 - x_2)\|_{L_p}, \quad (5.97)$$

определенное условием:

$$\bar{x}_2(v) = P_2(x_1(v)) = \begin{cases} x_1(v) & \text{при } \xi_1(v) \leq x_1(v) \leq \xi_2(v) \\ \xi_1(v) & \text{при } x_1(v) < \xi_1(v); \\ \xi_2(v) & \text{при } x_1(v) > \xi_2(v). \end{cases} \quad (5.98)$$

Эта процедура представляет собой поточечное проектирование значений функции  $x_1(v)$  на множество  $M$ .

Доказательство. Пусть  $F(M)$  – образ множества  $M$  при отображении  $F$ .  $F(M)$  замкнуто и выпукло, так как  $F$  взаимно-непрерывен и линеен. Тогда (97) можно переписать:

$$\|\zeta - \eta\|_{L_p} \rightarrow \min.$$

(5.99)

$$\eta \in F(M); \zeta = Fx_1.$$

В соответствии с теоремой двойственности, для того чтобы элемент  $\bar{\eta} = F\bar{x}$  был решением задачи (99), необходимо и достаточно, чтобы в  $L_p$  нашелся элемент  $f(v)$  и:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \|f(v)\|_{L_p} \leq 1; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \\ \text{b)} \quad & \langle f(v) | \bar{\eta} - \zeta \rangle = \|\bar{\eta} - \zeta\|_{L_p}; \end{aligned}$$

(5.100)

$$\text{c)} \quad \langle f(v) | \eta - \zeta \rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in F(M).$$

Чтобы были выполнены условия (100<sup>a</sup>), (100<sup>b</sup>), достаточно положить:

$$f(v) = \frac{(\bar{\eta} - \zeta)^{p-1} \text{sign}^p(\bar{\eta} - \zeta)}{\|\bar{\eta} - \zeta\|_{L_p}^{p-1}}.$$

(5.101)

Остается проверить, что выполнено условие (100<sup>b</sup>) при выборе  $f(v)$  по правилу (101).

Подставляя (101) в (100<sup>b</sup>) и учитывая, что постоянный множитель роли не играет, получим:

$$\iint_V (F(\bar{x}_2(v) - x_1(v)))^{p-1} \text{sign}^p (F(\bar{x}_2(v) - x_1(v))) \cdot F(x_2(v) - x_1(v)) dv \geq 0$$

$$\forall x_2 \in (M). \quad (5.102)$$

Рассмотрим подынтегральное выражение. Пусть  $v \in V$  – произвольная точка области  $V$ . Возможны случаи:

- 1)  $x_1(v) \in M$ ;
- 2)  $x_1(v) < \xi_1(v)$ ;
- 3)  $x_1(v) > \xi_2(v)$ .

В первом, в соответствии с правилом (98), подынтегральное выражение равно нулю. Во втором случае  $\bar{x}_2(v) - x_1(v) = \xi_1(v) - x_1(v) > 0$ . Но тогда для любых  $x_2(v) \in M$  имеем  $x_2(v) - x_1(v) \geq 0$ , и, следовательно, подынтегральное выражение положительно, поскольку  $F$  сохраняет знак функции. В случае (3) имеем:  $\bar{x}_2(v) - x_1(v) < 0$ , и тогда  $x_2(v) - x_1(v) < 0$  для любого  $x_2(v) \in M$ . Снова оказывается, что подынтегральное выражение положительно. Поскольку точка  $v \in V$  была произвольной, то всюду в  $V$  подынтегральное выражение в (102) или, что то же самое, (100<sup>c</sup>) выполнено.

В приведенном случае оператор проектирования выглядит особенно просто, и учет ограничений типа неравенств при решении обратной задачи в рамках критериального подхода, в соответствии с (92) сводится к итеративному решению обратной задачи без ограничений и проектированию результата множества  $M$  по правилу (98).

Рассмотрим далее частный случай задачи (90).

$$\begin{cases} A_1 x_1 = y_1; \\ A_2 x_2 = y_2; \\ \|F(x_1 - x_2)\|_{L_p} \rightarrow \min. \end{cases} \quad (5.103)$$

Делая замену переменных  $\xi_1 = Fx_1$ ;  $\xi_2 = Fx_2$ , получаем:

$$\begin{cases} A_1 F^{-1} \xi_1 = y_1; \\ A_2 F^{-1} \xi_2 = y_2; \\ \|\xi_1 - \xi_2\|_{L_p} \rightarrow \min. \end{cases} \quad (5.104)$$

Ограничимся случаем  $p = 2$ . Будем предполагать далее, что  $D(A_1 F^{-1}) = D(A_2 F^{-1})$ .

Задача (104) легко сводится к следующей:

$$\begin{cases} A_1 F^{-1}(\xi_2 - \xi_1) = A_1 F^{-1} \xi_2 - y_1; \\ A_2 F^{-1}(\xi_2 - \xi_1) = y_2 - A_2 F^{-1} \xi_1; \\ \|\xi_2 - \xi_1\| \rightarrow \min, \end{cases} \quad (5.104^a)$$

или:

$$\begin{cases} A_1 F^{-1} \eta = u_1; \\ A_2 F^{-1} \eta = u_2; \\ \|\eta\| \rightarrow \min. \end{cases} \quad (5.104^b)$$

Здесь  $u_1 = A_1 F^{-1} \xi_2 - y_1$ ;  $u_2 = y_2 - A_2 F^{-1} \xi_1$ ;  $\eta = \xi_2 - \xi_1$ .

Обозначим  $B$  – линейный ограниченный оператор из  $L_2$  в  $Y \oplus Y$ , где  $Y \supseteq \text{Im } A_i F^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , определенный отношением:

$$B\eta = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 F^{-1} \eta \\ A_2 F^{-1} \eta \end{Bmatrix} = \mathbf{u}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \langle B\eta | \mathbf{u} \rangle &= \langle A_1 F^{-1} \eta | u_1 \rangle + \langle A_2 F^{-1} \eta | u_2 \rangle = \\ &= \langle \eta | F^{-1*} A_1^* u_1 \rangle + \langle \eta | F^{-1*} A_2^* u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Откуда приходим к выводу, что:

$$B^* \mathbf{u} = \begin{pmatrix} F^{-1*} A_1^* \\ F^{-1*} A_2^* \end{pmatrix} (u_1, u_2).$$

Применяя теперь к задаче (104<sup>b</sup>) результаты из п. 5.3, получаем:

$$\eta \in \overline{\text{Im } B^*}.$$

Характеризация почти идеального экстремального класса  $\mathfrak{K}(B, L_2, I)$  задана уравнением

$$\mathfrak{K}(B, I, L_2) = \eta \in L_2 : \eta = F^{-1*} (A_1^* \varphi_1 + A_2^* \varphi_2). \quad (5.105)$$

Однако уравнение (105) еще не позволяет найти  $\eta$ , поскольку для нахождения элементов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , входящих в описание  $\mathfrak{K}(B, I, L_2)$ , необходимо знание правых частей в (104<sup>b</sup>). Уравнение (105) важно с точки зрения того, что оно выражает необходимое и достаточное условие для  $\eta = \zeta_2 - \zeta_1$ , и поэтому:

$$x_2 - x_1 = F^{-1}(\zeta_2 - \zeta_1).$$

Зафиксируем элемент  $\bar{\zeta}_1 = F\bar{x}_1$  в (104). Тогда  $\bar{\zeta}_2$  есть решение задачи:

$$\begin{aligned} A_2 F^{-1} \zeta_2 &= u_2; \\ \|\zeta_1 - \zeta_2\| &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5.106)$$

и, следовательно,

$$\bar{\zeta}_2 = \zeta_1 + g_1; \quad g_1 \in \text{Im } F^{-1*} A_2^*. \quad (5.107)$$

Если зафиксирован элемент  $\bar{\zeta}_2$ , то  $\bar{\zeta}_1$  есть решение задачи:

$$\begin{aligned} A_1 F^{-1} \zeta_1 &= u_1; \\ \|\zeta_2 - \zeta_1\| &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5.108)$$

откуда:

$$\bar{\zeta}_1 = \zeta_2 + g_2; \quad g_2 \in \overline{\text{Im } F^{-1*} A_2^*}. \quad (5.109)$$

Поскольку  $\overline{\text{Im } F^{-1*} A_1^*}$  и  $\overline{\text{Im } F^{-1*} A_2^*}$  – суть линейные подпространства, то из (109) и (107) получаем:

$$\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1 \in \overline{\text{Im } F^{-1*} A_1^*} \cap \overline{\text{Im } F^{-1*} A_2^*}. \quad (5.110)$$

Рассмотрим возможные случаи, обозначая для простоты:  $A_1 F^{-1} = B_1; A_2 F^{-1} = B_2$ . Если

$$\overline{\text{Im } B_1^*} \cap \overline{\text{Im } B_2^*} = \emptyset$$

то, переходя к ортогональным дополнениям (Прил. 2.4), получим:

$$\text{Ker } B_1 \cup \text{Ker } B_2 = X. \quad (5.111)$$

Таким образом, условия  $\bar{\zeta}_2 = \bar{\zeta}_1 \quad \forall u_1, u_2$  и  $\text{Ker } B_1 \cup \text{Ker } B_2 = X$  эквивалентны. Однако из того, что  $\bar{\zeta}_2 = \bar{\zeta}_1$ , не следует выражение для решения задачи (104). Предположим, что дополнительно  $\text{Ker } B_1 \cup \text{Ker } B_2 = \emptyset$ . Последнее требование означает, что ядро оператора

$$B = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}$$

состоит только из нуля, и, следовательно, решение задачи

$$\begin{cases} B_1 \zeta = u_1 \in \text{Im } B_1; \\ B_2 \zeta = u_2 \in \text{Im } B_2, \end{cases} \quad (5.112)$$

на  $\text{Im } B_1 \oplus \text{Im } B_2$  существует и единственно. Единственность решения – факт очевидный. Показать надо существование решения при  $u_1 \in \text{Im } B_1$  и  $u_2 \in \text{Im } B_2$ . Если  $u_1 \in \text{Im } B_1$  и  $u_2 \in \text{Im } B_2$ , но решения задачи (112) не существует, то это эквивалентно тому, что не существует решения задачи

$$\begin{cases} B_1 x = 0; \\ B_2 x = \Delta u, \end{cases} \quad (5.113)$$

при некотором  $\Delta u \in \text{Im } B_2$ . Но произвольный вектор  $\zeta \in X$  представим в виде  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ , где  $\zeta_1 \in \text{Ker } B_1$  и  $\zeta_2 \in \text{Ker } B_2$  (в силу условия  $\text{Ker } B_1 \cup \text{Ker } B_2 = X$ ), причем компоненты  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  независимы, так как  $\text{Ker } B_1 \cap \text{Ker } B_2 = 0$ . Тогда  $\text{Im } B_2 = B_2(\text{Ker } B_1)$ , где  $B_2(\text{Ker } B_1)$  – образ множества  $\text{Ker } B_1$  при отображении  $B_2$ . По условию  $\Delta u \in \text{Im } B_2$  и, следовательно, в  $\text{Ker } B_1$  существует элемент  $\zeta$ , удовлетворяющий уравнениям (113).

Пусть теперь  $\text{Ker } B_1 \cup \text{Ker } B_2 \subseteq X$ , но  $\text{Ker } B_1 \cap \text{Ker } B_2 = 0$ . Тогда решение задачи (104) существует, единственно, но возможно, что  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . Доказать здесь следует лишь единственность решения (104). Пусть наряду с элементами  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{\zeta}_2$  решением является пара  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ . Поскольку  $\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2$  и  $\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2$  – суть элементы из  $\text{Im } B_1^* \cap \text{Im } B_2^*$ , то  $\Delta_1 - \Delta_2 \in \text{Im } B_1^* \cap \text{Im } B_2^*$ , где  $\Delta_1 = \bar{\zeta}_1 - \bar{\eta}_1$ ;  $\Delta_2 = \bar{\zeta}_2 - \bar{\eta}_2$ . Элементам из ядра оператора  $\{B_1, B_2\}$  соответствуют нулевые элементы из  $\text{Im } B_i^*, i=1,2$ . Тогда  $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$ .

Далее, в силу того, что  $\text{Ker } B_1 \cap \text{Ker } B_2 = 0$  и  $u_1 \in \text{Im } B_1$ , имеем  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , откуда  $\bar{\zeta}_1 = \bar{\eta}_1$ ;  $\bar{\zeta}_2 = \bar{\eta}_2$ . Подведем итог сказанному.

*Теорема.* Пусть  $\text{Ker } B_1 \cap \text{Ker } B_2 = 0$  и  $u_i \in \text{Im } B_i$ . Тогда решение задачи (104) существует и единственно. Если дополнительно  $\text{Ker } B_1 \cup \text{Ker } B_2 = X$ , то  $\bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta}_2$ . Решение задачи (103) достигается итерационным процессом (92):

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = P_1(x_2^n, y_1); \\ x_2^{n+1} = P_2(x_1^{n+1}, y_2). \end{cases} \quad (5.114)$$

Здесь  $P_1(F, x_2, y_1)$  – оператор, ставящий в соответствие элементам  $x_2; y_1; F; A_1$  решение задачи

$$\begin{cases} A_1 x_1 = y_1; \\ \|F(x_2 - x_1)\|_{L_2} \rightarrow \min, \end{cases}$$

$P_2(F, x_1, y_2)$  – оператор, ставящий в соответствие элементам  $x_2; y_1; F; A_2$  решение задачи

$$\begin{cases} A_2 x_2 = y_2; \\ \|F(x_2 - x_1)\|_{L_2} \rightarrow \min, \end{cases}$$

Его монотонная сходимость была доказана выше.

Приведенная общая формулировка и метод решения задачи – выделение пары элементов, каждый из которых принадлежит своему фиксированному множеству, и среди всех таких пар выделенная имеет ближайшие друг к другу элементы, более всего соответствует постановкам обратных задач комплексной интерпретации. Центральным принципом здесь является оптимизация отклонения искомого решения от фиксированного либо также искомого элемента. Последнее означает, по сути, совместное решение обратных задач на основе выделения пары

элементов, ближайших друг к другу, в заданном смысле из всех иных допустимых пар. Эта идея составляет ядро критериального подхода к анализу геофизической информации.

#### Литература

1. D.W.Marguardt: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters J. Soc. Indust. Appl. Math., 11(1963), 431 p.
2. Josef Pek, Vaelav Cerv: "Solutin of the one-dimensional inverse magnetotellutic problem", Studia geoph.et.geol. 23 – 1974 p. 349.

## ГЛАВА 6. ЭВОЛЮЦИОННО-ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

### 6.1. Общие рассмотрения

Использование критериев оптимальности как способа отбора единственного элемента из множества эквивалентных по заданному геофизическому полю составляет физико-математическую основу для постановки обратных задач интегрированной интерпретации. В этой постановке все иные, кроме заданного поля, данные выражены в виде критерия оптимальности, который реализует принцип построения сбалансированных моделей. Отсюда происходит термин «интегрированная интерпретация».

Принцип построения сбалансированных моделей достаточно универсален и очевиден. Он состоит в том, что реконструируемые физико-геологические модели, в конечном итоге, должны быть сбалансированы относительно всех имеющихся геофизических полей и геомеханических законов. Это означает, в частности, что реконструируемая физико-геологическая модель среды должна иметь соответствующие геофизическим полям содержательные физические модели. Моделируемые физические поля должны соответствовать наблюдаемому. Если моделируемое поле, например гравитационное, не совпадает в пределах требуемой точности с наблюдаемым, то плотностная модель самым решительным образом должна быть пересмотрена. Различные содержательные физические модели единой геологической среды должны быть согласованы между собой и отражать различные стороны одного и того же объекта. Если они не согласованы, противоречат друг другу, то следует от них отказаться и среди им эквивалентных по полю искать другие, согласованные между собой. Наконец, требование сбалансированности означает, что физико-геологические модели должны быть согласованы с эволюционно-динамическими позициями. Они должны иметь согласованные с геомеханическими законами параметры и отражать предполагаемую эволюционно-геодинамическую модель. Каждая структура и каждое образование имеют свой генезис – свое происхождение. В формировании структуры принимало участие множество сил, как внешних – тектонические движения структур более высокого порядка, катастрофические события, так и внутренних, диктуемых законами механики сплошных сред, – взаимодействие элементов структуры между собой и окружающими образованиями, что, впрочем, входит составной частью в законы механики сплошных сред. Картину геологического строения можно считать завершенной только тогда, когда, помимо согласования со всеми наблюдаемыми физическими полями, она количественно проанализирована с механико-геологических позиций, является непротиворечивой, устойчивой на своих геологических масштабах времени, выяснен ее количественный генезис – породившая ее динамика сил и соответствующая ей динамика перемещений. В этом и состоит принцип сбалансированных моделей в его широком понимании. Однако его конкретная реализация предполагает поэтапную, пометодную балансировку.

Использование введенных выше критериев оптимальности при реконструкции физически содержательной модели обеспечивает корректировку начальной модели – нулевого приближения, являющегося несбалансированной моделью, методом минимальных корректив (ММК) по введенному критерию. В этом методе следует выполнить минимальные движения модели нулевого приближения, относительно введенного критерия до ее сбалансированного по физическому полю аналога. Критерий оптимальности в этих методах определяет направление движения при трансформации начальной модели в процессе ее балансировки<sup>26</sup>. Например, направление балансировки начальной модели может определяться требованием минимальных энергетических потерь при трансформации модели из одного состояния к другому – сбалансированному. Именно такую трактовку можно придать процессам выделения оптимального ре-

<sup>26</sup> В аппроксимационных подходах это направление явно не определено, нерегулируемо, что и влечет за собой проявление эффектов скрытой эквивалентности.

шения из класса эквивалентных, которые реализованы с помощью итерационных процедур (например 5.73). Важно отметить то обстоятельство, что в процессе итераций (5.73) критерий оптимальности не изменяется и направление внесения корректив остается в пределах всей процедуры решения обратной задачи неизменным.

В том случае, когда изучаемая физико-геологическая модель должна быть сбалансирована по двум или более физическим полям, направление трансформации модели определено принципами согласованности, близости между собой различных физических моделей единой геологической среды. Например, если требуется, чтобы различные физические модели были наиболее близкими между собой в корреляционном смысле, то направление внесения корректив до получения наиболее согласованной системы моделей определяется критерием наилучшей корреляционной связи, и следующими отсюда квадратичными принципами. Этот процесс реализуется итерационной схемой (5.92) и называется методом комплексных минимальных корректив (МКМК). Он схематично иллюстрируется рис. 1, которым подчеркивается, что сбалансированная модель по комплексу полей на самом деле есть система сбалансированных моделей, каждая по своему физическому полю и взаимно увязанная между собой по принципу наилучшего взаимного согласования.

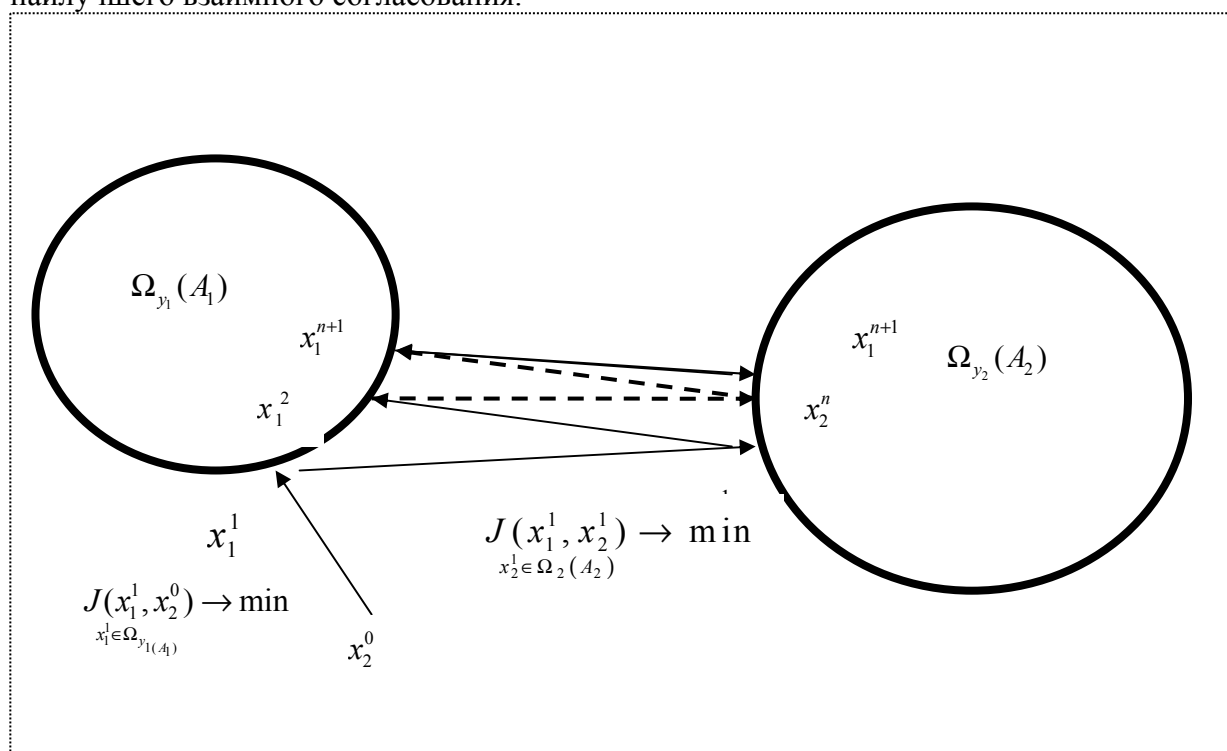


Рис. 6.1. Иллюстрация сходимости итерационного процесса для совместного решения двух обратных задач – метод комплексных минимальных корректив.  $x_2^0$  – начальное приближение к первой модели;  $x_i^j$  – очередное  $j$ -ое приближение к  $i$ -ой модели на различных этапах итерационного процесса;  $\Omega_{y_1}(A_1)$  – класс эквивалентных по полю  $y_1$  моделей для первого метода ( $A_1$ );  $\Omega_{y_2}(A_2)$  – класс эквивалентных по полю  $y_2$  моделей для второго метода ( $A_2$ ). Движение осуществляется по направлению, определенному видом критерия оптимальности  $J(*, *)$ .

Это система, вообще говоря, отличающихся между собой моделей. Балансировочные принципы обеспечивали их максимальную взаимную согласованность. Здесь также важно отметить, что критерий близости в процессе решения задачи внесения комплексных минимальных корректив не изменяется на протяжении решения задачи. Это проявляется в том, что параметры критерия оптимальности в итерационном процессе как (5.73), так и (5.92) не меняются от шага к шагу итерационного процесса. При этом сам критерий оптимальности как в ММК, так и МКМК вводится априори. По сути своей, результативность решения обратных задач в значительной степени определяется вводимыми явно, как в критериальных методах, или неявно, как в аппроксимационных, принципами балансировки, и это происходит в тем большей

мере, чем выше эквивалентность в общей формулировке для рассматриваемых обратных задач. Нуждается в уточнении сам термин «обратные задачи» – это специфика геофизики. Различие между физическими моделями, до решения обратной задачи и после нее, определено, возможно, в большей мере критериями оптимальности, являющимися выражением балансируемых правил, чем собственно информацией, заложенной в поле. Эта последняя информация характеризует меру разбалансированности и необходимость внесения дальнейших корректив по правилам балансировки, например, минимальных движений.

Направление трансформации модели от некоторого начального состояния к конечному – это его эволюция, подчиненная тому либо иному эволюционному принципу – минимальных энергетических затрат, наилучших корреляций и т.д. Однако эволюционно-динамические принципы трансформации физической модели, от несбалансированной в ее начальном состоянии к сбалансированной в конечном, могут быть введены из геодинамических законов развития изучаемого объекта.

Принцип моделирования динамики развития геологического объекта, например седиментационного бассейна, состоит в реконструкции и моделировании фрагментов его развития, исходя из некоторого начального положения к очередному, при заданных параметрах, определяющих динамику процесса. Геодинамические параметры могут быть заданы априори или уточняться в процессе моделирования. В первом случае такое моделирование основано на решении уравнений вязкого течения жидкости (уравнений движения Навье – Стокса), конвективных потоков, и одной из главных его целей служит построение генерализованной модели движений, приводящей к современному состоянию объекта, сравнительный анализ сценариев его развития. Для этого следует задать модель среды и перечень геодинамических параметров, определяющих эволюцию системы. Определяющим фактором, влияющим на величину скорости перемещений, служит вязкость. Она определяется из внешних условий – экспериментов, сопоставления скоростей распространения продольных и поперечных сейсмических волн. Однако распределение этого параметра определяется крайне ненадежно. Исключительная зависимость вязкости от слабо поддающихся измерению и учету и потому неконтролируемых внешних условий видна из материалов, приведенных на рис. 2.

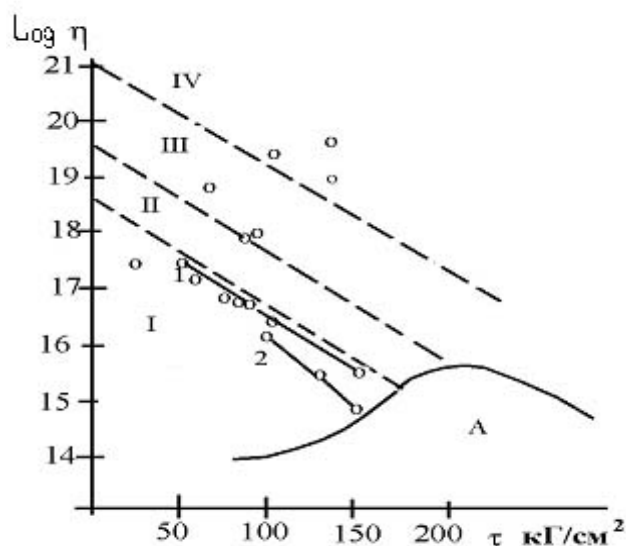


Рис. 6.2. Зависимость эффективной вязкости толщ горных пород  $\eta_3$  от интенсивности касательных напряжений  $\tau$  при атмосферном давлении и температуре  $20^0$  (по материалам Гзовского [3]).

I категория – толщ глины, солей, гипсов, тонкослоистых алевролитов-глинистых пород;

II категория – тонкослоистые известняково-мергелистые, песчано-глинистые, флишевые толщ;

III категория – слабослоистые песчаниковые, конгломератовые, карбонатные, вулканогенные, а также в прошлом сильно дислоцированные и слабо метаморфизованные песчано-глинистые толщ; IV категория – граниты и другие интрузивные породы (кроме ультраосновных), гнейсы, кристаллические сланцы. A – область условно-мгновенного разрушения. 1 и 2 – зависимость  $\eta$  от  $\tau$  для гипса при всестороннем давлении 1000 и 1 кг/см<sup>2</sup>

Как видно, незначительные изменения величин касательных напряжений, действующих на горную породу, приводит к изменению значений вязкости на порядки, что влечет за собой



существенное изменение скорости течений. Причем коэффициенты вязкости, характеризующие среду, сами зависят от напряжений, что еще более усугубляет неопределенность ситуации.

Второй путь (рис. 3) основан на уточнении геодинамических параметров, в частности, скорости течений на основе требования эволюции реконструируемой модели к сбалансированной, согласованной по геофизическому полю. Этот путь, который называется методом эволюционно-динамического продолжения, в равной степени следует отнести как к принципам сбалансированных моделей на основе геодинамических методов, так и принципам моделирования динамики развития объектов.

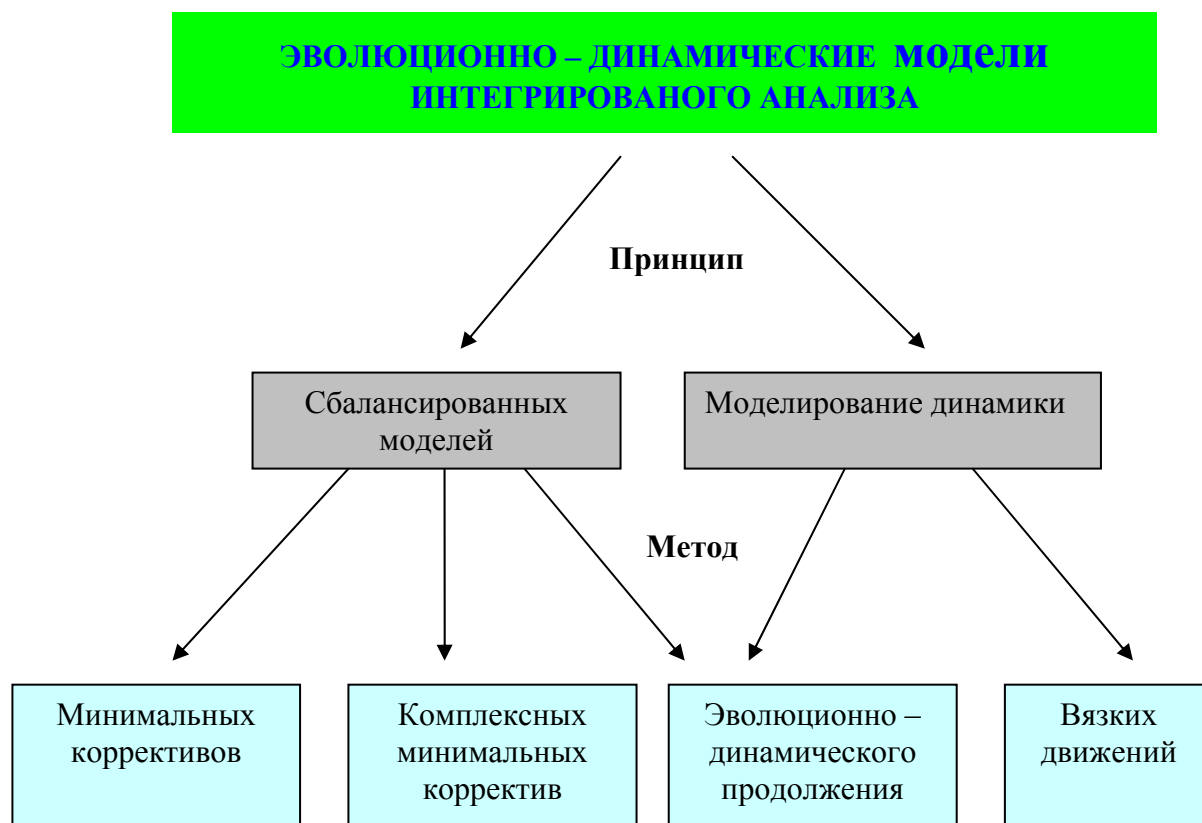


Рис. 6.3. Структура эволюционно-динамических моделей интегрированного анализа геолого-геофизических данных

Сущность метода эволюционно-динамического продолжения состоит в реконструкции физической модели геологического объекта на основе использования в качестве балансирующих принципов законов его эволюции, регулируемой геодинамическими параметрами от начального времени и начальной модели к настоящему (текущему) состоянию. Требования к геодинамическим параметрам и тем самым выбору сценария эволюции состоят в том, чтобы эволюционирующая модель вела к современным, наблюдаемым физическим полям. Такой подход позволяет соединить процесс реконструкции физической модели с созданием непротиворечивой модели его формирования. Причем управляющие процессом параметры, а это, прежде всего, распределение скоростей движения и характер внешних источников, конструируются как интегральные параметры, объединяющие в себе всю информацию о свойствах изучаемой среды. Таким образом, исходя из заданного начального распределения физического параметра и общих представлений о механизме его трансформации к современному состоянию, может быть смоделирован процесс эволюции.

Рассмотрим общие эволюционные уравнения для моделей распределения физического параметра и модели системы границ, разделяющих пласты с заданными свойствами внутри. Предварительно эти вопросы рассматривались в разделе 2.5.

Произвольная величина, имеющая распределение  $\theta(x, y, z, t)$ , движение которой происходит в зависимости от пространственных  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  и временной  $t$  координат, подчиняется основному кинетическому уравнению для любого элемента объема  $V$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \theta(\mathbf{x}, t) dv = \int_V \left( \frac{d}{dt} \theta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\theta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}) \right) dv.$$

Здесь  $\mathbf{v}(x, t) = \left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)$  – вектор скорости движений, зависящий как от пространственных координат, так и от времени  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ ,  $dv$  – элемент объема:  $dv = dx dy dz$ . Если величина  $\theta(x, y, z, t)$  в процессе движения сохраняется, то  $\frac{d}{dt} \int_V \theta(\mathbf{x}, t) dv = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\theta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0$ . В том случае, если в точке  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  в момент времени  $t$  величина  $\theta(x, y, z, t)$  изменяется и это изменение есть  $q(\mathbf{x}, t)$ , то закон сохранения для  $\theta(\mathbf{x}, t)$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\theta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = q(\mathbf{x}, t). \quad (6.1)$$

Величина  $q(\mathbf{x}, t)$ , входящая в уравнение (1), трактуется как положительные либо отрицательные внешние источники. Они обеспечивают динамику параметра  $\theta(\mathbf{x}, t)$  за счет внешнего притока либо оттока вещества. Например, рассматривая в качестве величины  $\theta(\mathbf{x}, t)$  распределение плотности  $\sigma(\mathbf{x}, t)$ , уравнение (1) примет вид закона сохранения:

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = q(\mathbf{x}, t). \quad (6.2)$$

Здесь  $q(\mathbf{x}, t)$  – внешние источники масс, ассоциирующиеся с процессами седиментации или притока извне (положительные значения), эрозией, размывом (отрицательные значения). Введение этого параметра достаточно условно. Его истинное значение и физический смысл состоит в том, чтобы в «конечной точке» эволюционирующей системы обеспечить то полное количество вещества, которое соответствует наблюдаемому полю, компенсировать дисбаланс полной массы, существующий в «начальной» модели. Эволюционно-динамическое продолжение заданной модели  $\theta_0(\mathbf{x})$  из начального положения в момент времени  $t = 0$   $\theta(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x})$  к конечному, соответствующему некоторому моменту времени  $T$ , должно подчиняться требованию, состоящему в том, чтобы окончательная модель была сбалансирована по физическому полю. Это значит, что:

$$\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{A}(\theta(\mathbf{x}, t)) = u(s), \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{A}(\theta(\mathbf{x}, t))$  – оператор решения прямой задачи для параметра  $\theta(\mathbf{x}, t)$ ,  $u(s)$  – заданное геофизическое поле – его современное состояние. Требование (3) означает, что окончательная, к моменту времени  $T$ , модель распределения  $\theta_0(\mathbf{x}, T)$  должна соответствовать интерпретируемому полю. Таким образом, объединяя сформулированные условия, получим задачу эволюционно-динамического продолжения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\theta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) &= q(\mathbf{x}, t); \\ \theta(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}); \\ \lim_{t \rightarrow T} \mathbf{A}(\theta(\mathbf{x}, t)) &= u(s). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Механизм эволюции величины  $\theta(x,t)$  контролируется величиной вектора скорости  $\mathbf{v} = \left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)$  и законом поступления или оттока вещества, контролируемым функцией для внешних источников  $q(x,t)$ , которые следует считать компенсационными параметрами. Если эти параметры заданы, то задача (4) переопределена. Условие (3) в ней излишне. Но эти геодинамические параметры реально никогда точно не известны. В лучшем случае известны достаточно грубые оценки для их возможных величин – направление, диапазон допустимых значений. Поэтому они должны подбираться и уточняться так, чтобы было выполнено условие (3). В результате задача (4) оказывается непротиворечивой.

Рассмотрим теперь модель эволюции структурных элементов. Эти модели – частный, но исключительно важный и распространенный тип рассмотренных выше моделей среды с пространственно распределенными параметрами. Также как и в задачах гравиметрии структурного типа, под структурными моделями понимается геометрическая модель среды, описываемая системой поверхностей, разделяющих некоторые моно- либо гетерогенные комплексы. Физические свойства внутри этих комплексов, например плотностные, скоростные, известны. Они могут быть постоянны либо переменны, но принципиально важно, что они заданы. Именно этим отличаются структурные задачи от общих задач реконструкции моделей с распределенными параметрами, в частности, рассмотренных выше моделей распределения параметра  $\theta(x,t)$  как функции пространственно-временных координат. Необходимо, как и для распределений  $\theta(x,t)$ , построить уравнения эволюционирующей системы границ так, чтобы, подчиняясь общим законам движения, контролируемым геодинамическими параметрами, они приводили к сбалансированным, относительно геофизического поля, результатам. Иллюстрация этого принципа приведена на рис. 4.

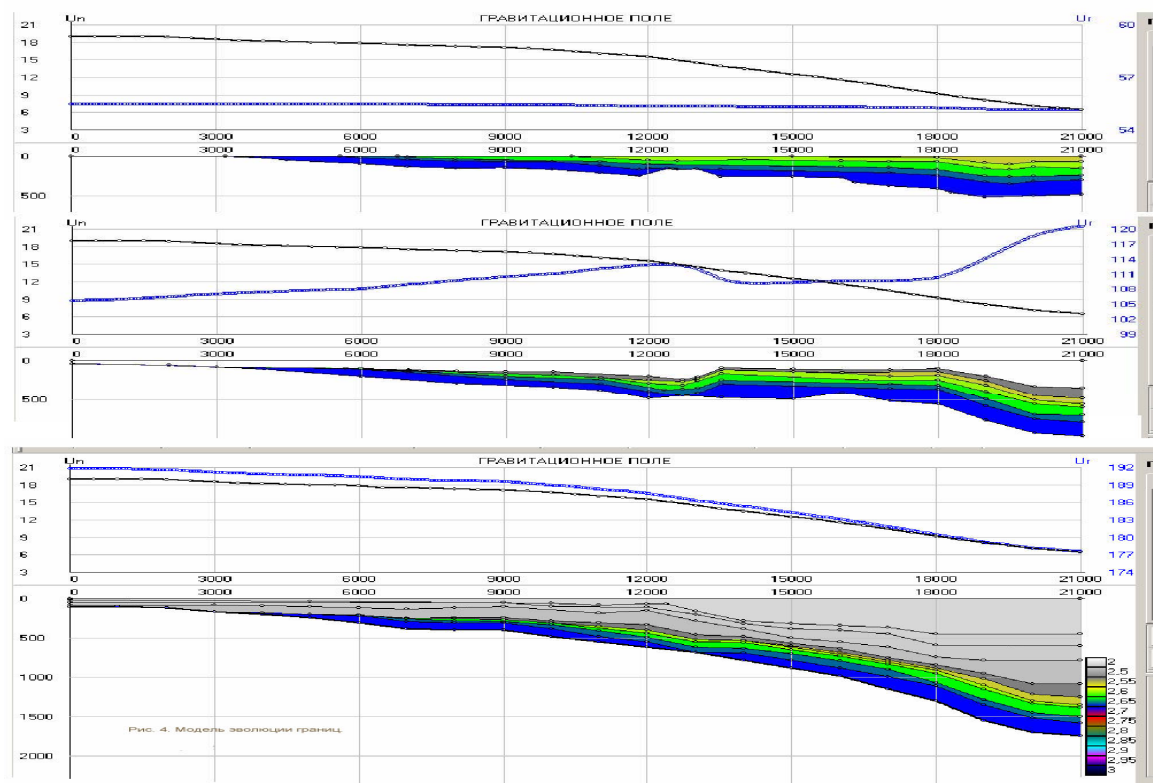


Рис. 6.4. Эволюционирующая структурная модель

Предполагаемое первоначальное состояние (верхний разрез) отражает представление о ранних стадиях эволюции фрагмента осадочного бассейна. Рассчитанное от этой модели гравитационное поле существенно отличается от современного. Предполагая тенденцию к погружению фундамента и контролируя скорость перемещения границ по фактору приближения

рассчитанного и наблюдаемого поля, последовательно переходим от промежуточной к окончательной модели среды (нижний рисунок).

Модель среды в стационарном состоянии представляет собой систему уравнений для глубин залегания плотностных границ:  $z = \mathbf{f}(s) = \{z = f_0(s), z = f_1(s), \dots, z = f_N(s)\}$ , в зависимости от горизонтальных координат  $s = \{x, y\}$ , с известным распределением физического параметра  $\theta(\mathbf{x})$ , например плотности  $\Delta\sigma(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \{s, z\}$ , между ними (см. 2.5). Наиболее распространенный случай, не требующий дополнительных определений в случае изменения конфигурации границ, – это случай постоянных значений параметра, имеющего чаще всего смысл значения параметра эффективного (обобщенного), служащего своего рода идентификатором эволюционирующего элемента рассматриваемого комплекса.

Принципиально важно для последующего анализа рассмотрение введенных границ одновременно, как геодинамических, так и физических. Геодинамические эволюционируют в зависимости от внешних воздействий и внутренних геологических свойств, характерных для рассматриваемого региона, а физические – отображаются в физическом поле  $u(s)$  с помощью оператора прямой задачи  $A(\mathbf{f}(s)) = u(s)$ . Рассматривая процесс эволюции, необходимо к уравнениям границ добавить эволюционный параметр – время  $t$ :  $z = \mathbf{f}(s, t) = \{z = f_0(s, t), z = f_1(s, t), \dots, z = f_N(s, t)\}$ . Сама эволюция начинается с нулевого момента времени и некоторой начальной модели  $\mathbf{f}^0(s) = \mathbf{f}(s, t)|_{t=0}$  и продолжается до «момента времени»  $t = T$ , заканчиваясь состоянием  $\mathbf{f}(s, T)$ .

Структурные геодинамические модели и уравнения, описывающие их эволюцию, рассматривались в разделе 2.5. Там приведена и начальная библиография по вопросу. Напомним, что для того чтобы получить уравнение эволюционирующей границы из общего уравнения (2), следует определить понятие внутренних границ. Граница – это сохраняющаяся в процессе эволюции компонента, которая меняет свою форму, поднимается либо опускается, но остается границей раздела для заданных физических параметров. Это означает, что в процессе эволюции движение вещества через границу не происходит, и она определяется как поверхность, через которую отсутствует поток вещества – параметра  $\theta(\mathbf{x}, t)$ . Следовательно, для каждой из границ системы  $z = \mathbf{f}(s, t) = \{z = f_0(s, t), z = f_1(s, t), \dots, z = f_N(s, t)\}$  полная производная по времени для частиц, расположенных на этой поверхности, равна нулю:  $\frac{d}{dt}\theta(s, f_i(s, t), t) = 0$ , а последняя, в свою очередь, складывается из производных по времени к пространственной нормальной и частной по времени производных. Это приводит к уравнению движения:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{W}(s, t) - \langle \mathbf{V}(s, t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s, t)) \rangle;$$

$$\mathbf{f}(s, t)|_{t=0} = \mathbf{f}^0(s).$$

Здесь  $\mathbf{f}^0(s)$  – начальное положение границ, с которого «начинается» эволюция.  $\mathbf{W}(s, t) = \{W_0(s, t), W_1(s, t), \dots, W_N(s, t)\}$ ;  $\mathbf{V}(s, t) = \{V_0(s, t), V_1(s, t), \dots, V_N(s, t)\}$  – управляющие геодинамические параметры, имеющие смысл соответственно вертикальной и горизонтальной составляющих вектора скорости перемещения для каждой из границ.

В дополнение к движениям материала с теми либо иными векторами скорости происходит разрушение, переотложение терригенного материала, слагающего изучаемые массивы, что называется денудацией рельефа границ, и поступление дополнительного материала из источников вне области рассматриваемых границ – процесс осадконакопления.

Дополнительный учет членов, ответственных за денудацию и осадконакопление в процессе эволюции границ (см. цитированную ранее в гл. 2 работу Михайлова В.О. и др. [2.7]), приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(s,t)}{\partial t} &= \mathbf{W}(s,t) - \langle \mathbf{V}(s,t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s,t)) \rangle + F(\mathbf{f}(s,t)) + \Psi; \\ \mathbf{f}(s,t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь  $F(\mathbf{f}(s,t))$  – оператор, ответственный за модель денудации рельефа;  $\Psi$  – сложная векторнозначная функция, ответственная за дивергентную компоненту (привнесение дополнительного материала) в эволюции каждой из границ системы и определяемая особенностями процессов осадконакопления и метаморфизма. Она зависит от большого числа факторов, включая геологические свойства пород. Однако, именно в силу сложности, равнозначной многофакторности, среди которых нельзя выделить главные, эту компоненту следует рассматривать как отдельное аддитивное слагаемое, определяемое по результатам соответствия, моделирования динамических процессов и сопоставления результатов с наблюдаемыми физическими полями. Ее можно объединить с вертикальной компонентой скорости движения границы и считать ответственной за ее вертикальные движения.

Анализ модели формирования структур показывает, что любая произвольная по рельефу слоев структура может быть получена за счет чисто вертикальных движений с включением дивергентного члена, а при дополнительно заданных внутренних напряжениях – сочетанием дивергентных членов, вертикальных и горизонтальных движений, при том бесконечным множеством способов. Это означает, что процесс денудации может быть включен в дивергентный член, ответственный за характер осадконакопления и метаморфизма, и по характеру своего влияния, на поведение модели в рамках (5) объединен с вертикальной компонентой действующих нагрузок. В этом случае может быть введена интегрированная математическая модель эволюции структур:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(s,t)}{\partial t} &= \mathbf{\Omega}(s,t) - \langle \mathbf{V}(s,t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s,t)) \rangle \\ \mathbf{\Omega}(s,t) &= \mathbf{W}(s,t) + F(\mathbf{f}(s,t)) + \Psi \\ \mathbf{f}(s,t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s). \end{aligned}$$

Смысл интегрированного параметра  $\mathbf{\Omega}(s,t)$  аналогичен тому, какой имеет и величина  $q(\mathbf{x},t)$  в эволюционном уравнении (1). Это прирост изучаемой компоненты – в данном случае вертикальное приращение, которое получает граница за счет суммарных факторов. Также, как и в задаче об эволюции распределения параметра, модель эволюции системы границ должна быть доопределена условием, чтобы процесс эволюции вел к заданным, «современным» физическим полям. Это означает дополнительное введение требования

$$\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{A}(\mathbf{f}(s,t)) = u(s).$$

Это требование уточняет величины и снижает неопределенность в значениях управляющих геодинамических параметров. Окончательно, задача эволюционно-динамического продолжения для системы границ формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(s,t)}{\partial t} &= \mathbf{\Omega}(s,t) - \langle \mathbf{V}(s,t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s,t)) \rangle; \\ \mathbf{\Omega}(s,t) &= \mathbf{W}(s,t) + F(\mathbf{f}(s,t)) + \Psi; \\ \mathbf{f}(s,t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s); \\ \lim_{t \rightarrow T} \mathbf{A}(\mathbf{f}(s,t)) &= u(s). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Уравнения (4) и (6) служат исходными для методов эволюционно-динамического продолжения при эволюционно-динамическом интегрированном анализе геолого-геофизических данных.

## 6.2. Динамика движения вещества

Рассмотрим эволюционную задачу в (4), считая, что управляющие динамические параметры<sup>27</sup>  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  и  $q(\mathbf{x}, t)$  заданы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\theta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}) &= q(\mathbf{x}, t); \\ \theta(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Разобьем весь временной промежуток  $(0-T)$  на достаточно малые интервалы времени  $h_i = \{t_i, t_{i+1}\}$   $i = 0, 1, \dots$ , в пределах каждого из которых можно считать  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  и  $q(\mathbf{x}, t)$  стационарными. Обозначим  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x})$  и  $q^i(\mathbf{x})$  их значения на соответствующих временных интервалах  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^i = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i)$ ;  $q^i(\mathbf{x}) = q^i = q(\mathbf{x}, t_i)$ . Для каждого из интервалов выпишем задачу (7):

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \dots \\ \theta^0(\mathbf{x}) &= \theta_0(\mathbf{x}); \\ \frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\theta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^i) &= q^i(\mathbf{x}); \\ t &\in (t_i, t_{i+1}); \\ \theta(\mathbf{x}, t)|_{t=t_i} &= \theta^i(\mathbf{x}); \\ \theta^{i+1}(\mathbf{x}) &= \theta(\mathbf{x}, t)|_{t=t_{i+1}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Строгое решение задачи (7) достаточно трудоемко [1, 2] и требует введения специальных математических понятий, выходящих за рамки обычного курса для вузов. В этой связи приведем упрощенные, символичные рассуждения, которые иллюстрируют суть методов вполне достаточно, чтобы служить основой для конструктивных результатов. Приводимое ниже следует рассматривать как пояснения, но не как вывод и доказательство.

Обозначим  $D(g(\mathbf{x}))$  оператор:  $\operatorname{div}(g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v})$ , отображающий функцию  $g(\mathbf{x})$  в  $y(\mathbf{x}) = \operatorname{div}(g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v})$ . Обозначим символом  $D^{-1}$  обратный к  $D = D(g(\mathbf{x}))$  так, что  $D^{-1}Dg(\mathbf{x}) = D^{-1}y(\mathbf{x}) = D^{-1}(\operatorname{div}(g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v})) = g(\mathbf{x})$ . Этот оператор многозначен, поскольку однородное уравнение  $\operatorname{div}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) = 0$  имеет нетривиальное решение в виде  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(\boldsymbol{\Psi})$ , где  $\boldsymbol{\Psi}$  – векторный потенциал. В этой связи можно записать  $g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{\Psi}) + \operatorname{grad}(\varphi)$ , где  $\varphi$  – скалярный потенциал. Вводя условие калибровки  $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\Psi}) = 0$ , получаем  $g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{grad}(\varphi)$ , откуда для определения скалярного потенциала получаем уравнение Пуассона:  $\Delta\varphi = y(\mathbf{x})$ . Частное решение этой задачи задается интегралом Пуассона:

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{y(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}.$$

Здесь  $R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  – евклидово расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_0$ . Во всех этих рассуждениях важно на самом деле лишь то, что оператор  $D^{-1}$  может быть определен.

<sup>27</sup> Опускаем перечень координат, от которых зависит вектор скорости  $\mathbf{v}$ .

Вернемся к уравнению (7), записав его в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) = -D(\theta(\mathbf{x}, t)) + q^i(\mathbf{x}). \quad (6.8)$$

В силу очевидного равенства

$$D(\theta(\mathbf{x}, t)) = \text{div}(g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^i) = [\text{div } \mathbf{v}^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad}] \theta(\mathbf{x}, t)$$

перепишем его в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) = -[\text{div } \mathbf{v}^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad}] \theta(\mathbf{x}, t) + q^i(\mathbf{x});$$

$$\theta(\mathbf{x}, t)|_{t=t_i} = \theta^i(\mathbf{x}).$$

Если  $q^i(\mathbf{x}) = 0$ , то решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) = -[\text{div } \mathbf{v}^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad}] \theta(\mathbf{x}, t); \quad (6.9)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t)|_{t=t_i} = \theta^i(\mathbf{x})$$

можно представить в виде операторного соотношения

$$\theta(\mathbf{x}, t) = e^{-tD} \theta^i(\mathbf{x}) = e^{-t[\text{div } \mathbf{v}^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad}]} \theta^i(\mathbf{x}). \quad (6.10)$$

Его справедливость проверяется простым дифференцированием:

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} e^{-tD} \theta^i(\mathbf{x}) = -D e^{-tD} \theta^i(\mathbf{x}) = -D \theta(\mathbf{x}, t).$$

Если  $q^i(\mathbf{x}) \neq 0$ , то (8) сводится к (9) при условии, что  $q^i(\mathbf{x})$ , и, как следствие,  $D^{-1}q^i(\mathbf{x})$  не содержит времени  $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta(\mathbf{x}, t) + D^{-1}q^i(\mathbf{x})) = -D(\theta(\mathbf{x}, t) + D^{-1}q^i(\mathbf{x})).$$

Считая, что  $D^{-1}$ ,  $D$  и  $e^{-tD}$  коммутируют (что на самом деле имеет место), получаем, из (9):

$$\theta(\mathbf{x}, t) = e^{-tD} \theta^i(\mathbf{x}) + D^{-1}q^i(\mathbf{x}) - D^{-1}e^{-tD}q^i(\mathbf{x}).$$

В более подробной записи:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = e^{-t(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} \theta^i(\mathbf{x}) + D^{-1}q^i(\mathbf{x}) - D^{-1}e^{-t(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} q^i(\mathbf{x}),$$

$$t \in h_i;$$

$$\Theta^i(\mathbf{x}) = \text{div } \mathbf{v}^i(\mathbf{x}).$$

Следовательно:

$$\theta^{i+1}(\mathbf{x}) = e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} \theta^i(\mathbf{x}) + D^{-1}q^i(\mathbf{x}) - D^{-1}e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} q^i(\mathbf{x}), \quad (6.11)$$

$$\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i.$$

Экспонента от оператора понимается в следующем смысле: если  $\Xi$  – линейный, замкнутый оператор, куда, в частности, относятся операторы дифференцирования, умножения на весовые функции и все ограниченные операторы, то

$$e^{-\Xi t} \theta(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\Xi)^n}{n!} t \theta(\mathbf{x}).$$

Подставим вместо  $\Xi$  оператора дифференцирования –  $\Xi = \frac{d}{dx}$ . Тогда:

$$e^{-\frac{d}{dx} t} \theta(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x} - t).$$

Отсюда нетрудно получить, в частности:

$$e^{-t \cdot \mathbf{v} \cdot \text{grad}} \theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{v}). \quad (6.12)$$

Последнее соотношение позволит дать алгоритмическую интерпретацию для (11). Она состоит в том, что одним из действий, входящим в (11), а именно действие  $e^{-\Delta t_{i+1}(\mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} \theta^i(\mathbf{x})$ , следует понимать как сдвиг  $\theta^i(\mathbf{x})$  в направлении  $\mathbf{v}^i$  на величину  $\Delta t_{i+1}$ . Однако (11) можно еще более упростить, заменив его приближенным аналогом.

Соотношение (10) дает решение для задачи (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) &= -D(\theta(\mathbf{x}, t)); \\ \theta^{i+1}(\mathbf{x}) &= e^{-\Delta t_{i+1} D} \theta^i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Эти два соотношения определяют трансформацию «на +1 шаг» предшествующего положения для распределения  $\theta^i(\mathbf{x})$ . В конечных разностях в первом случае имеем:

$$\frac{\theta^{i+1}(\mathbf{x}) - \theta^i(\mathbf{x})}{\Delta t_{i+1}} \approx -D(\theta^i(\mathbf{x})).$$

Во втором:

$$\frac{e^{-\Delta t_{i+1} D} \theta^i(\mathbf{x}) - \theta^i(\mathbf{x})}{\Delta t_{i+1}} \approx -D(\theta^i(\mathbf{x})).$$

Тогда:

$$\theta^i(\mathbf{x}) \approx -\frac{D^{-1}(e^{-\Delta t_{i+1} D} - 1)\theta^i(\mathbf{x})}{\Delta t_{i+1}}.$$

Считая, что эти уравнения справедливы для компенсационных источников  $q(\mathbf{x}, t)$ , получим:

$$D^{-1} q^i(\mathbf{x}) - D^{-1} e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} q^i(\mathbf{x}) = -D^{-1} \cdot (e^{-\Delta t_{i+1} D} - 1) \cdot q^i(\mathbf{x}).$$

Тогда:

$$D^{-1} q^i(\mathbf{x}) - D^{-1} e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} q^i(\mathbf{x}) = \Delta t_{i+1} \cdot q^i(\mathbf{x}).$$

Таким образом, соотношение (11) приближенно переписывается так:

$$\theta^{i+1}(\mathbf{x}) = e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot \text{grad})} \theta^i(\mathbf{x}) + \Delta t_{i+1} \cdot q^i(\mathbf{x}). \quad (6.13)$$

Вычислительную схему (13), а именно, введение в итерационный процесс свободного компенсационного члена, можно получить иначе.

Если в (7) положить  $q(\mathbf{x}, t) = 0$ , то описание эволюции подчиняется уравнению (10). Ввести дополнительный член  $q(\mathbf{x}, t)$  и тем самым свести (10) к (13) можно именно на этом этапе, интерпретируя его как компенсационный член, добавляемый пошагово для обеспечения баланса «количества вещества». На следующем шаге этот член  $q^i(\mathbf{x})$  участвует в «эволюции» системы как равноправная компонента вещества, а его приток, если он есть, учитывается новой порцией  $q^{i+1}(\mathbf{x})$ .

Принимая во внимание (12), можно дать следующую интерпретацию для (13). Эволюция модели распределения параметра  $\theta^i x$  на каждом из интервалов  $\Delta t_{i+1}$  складывается из комбинации деформационной  $e^{-\Delta t_{i+1} \Theta^i(\mathbf{x})} \cdot \theta^i(\mathbf{x})$ , сдвиговой  $\theta^i(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{v}^i)$  и дивергентной  $\Delta t_{i+1} \cdot q^i(\mathbf{x})$  компонент. На следующем шаге вновь полученная модель эволюционирует с новыми параметрами. В частности, осуществляется перенос и дивергентной компоненты по законам для всего распределения.



Поскольку операторы  $grad$  и умножения на весовую функцию  $\Theta(\mathbf{x})$  не коммутируют, в уточнении нуждается смысл выражения:

$$e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^i \cdot grad)} \theta^i(\mathbf{x}) \neq e^{-\Delta t_{i+1}(\mathbf{v}^i \cdot grad + \Theta^i(\mathbf{x}))} \theta^i(\mathbf{x}).$$

В общем случае

$$e^{-\Delta t_{i+1}(\mathbf{v}^i \cdot grad)} \cdot e^{-\Delta t_{i+1} \Theta^i(\mathbf{x})} \theta^i(\mathbf{x}) \neq e^{-\Delta t_{i+1}(\Theta^i(\mathbf{x}))} \cdot e^{-\Delta t_{i+1}(\mathbf{v}^i \cdot grad)} \theta^i(\mathbf{x}).$$

Смысл этого обстоятельства состоит в том, что сдвиг и последующее сжатие, вообще говоря, не дают тот же результат, что сжатие и последующий сдвиг<sup>28</sup>.

В значительном числе случаев этим различием можно пренебречь, что выполняется, в частности, при плавном изменении величины  $\Theta$  либо условия несжимаемости среды -  $div \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ . Однако, даже если эти условия не выполняются, с точки зрения алгоритма моделирования процесса эволюции, при условии уточнения в процессе моделирования геодинамических параметров, оба эти подхода практически совпадают.

С учетом высказанного замечания уравнение движения (13) содержит две компоненты – сдвигово-деформационную:

$$e^{-t \cdot (\mathbf{v}^i \cdot grad + \Theta^i(\mathbf{x}))} \theta^i(\mathbf{x}) = e^{-t \Theta^i(\mathbf{x})} \theta^i(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{v}^i),$$

регулируемую векторной скоростью  $\mathbf{v}^i(x, y, z)$ , определяющей величину, направление перемещения и деформации параметра в процессе эволюции, и дивергентную –  $\Delta t_{i+1} \cdot q^i(\mathbf{x})$ , контролирующую внешний приток – баланс количества вещества  $\theta^i(\mathbf{x})$ , включаемый на следующем шаге в его сдвигово-деформационную трансформацию.

Для момента времени  $t_{i+1}$ :

$$\theta^{i+1}(\mathbf{x}) = e^{-\Delta t_{i+1} \Theta^i(\mathbf{x})} \{ \theta^i(\mathbf{x} - \Delta t_{i+1} \mathbf{v}^i(\mathbf{x})) + \Delta t_{i+1} q^i(\mathbf{x}) \}. \quad (6.14)$$

Член  $e^{-\Delta t_{i+1} \Theta^i(\mathbf{x})}$  имеет смысл уплотнения (разуплотнения) происходящего за счет объемного расширения – сжатия. Описанная выше ситуация некоммутативности операторов  $grad$  и умножения на весовую функцию  $\Theta^i(\mathbf{x})$  приобретает вполне конкретный физический смысл. Различие состоит в том, происходит ли перемещение с последующим уплотнением, что соответствует соотношению (14), либо происходит перемещение уже уплотненных пород, что соответствует другой записи:

$$\theta^{i+1}(\mathbf{x}) = e^{-\Delta t_{i+1} \Theta^i(\mathbf{x} - \Delta t_{i+1} \mathbf{v}^i(\mathbf{x}))} \{ \theta^i(\mathbf{x} - \Delta t_{i+1} \mathbf{v}^i(\mathbf{x})) + \Delta t_{i+1} q^i(\mathbf{x}) \}. \quad (6.14a)$$

Однако механизм уплотнения может возникать не только как следствие перемещений в рассматриваемой модели течения, а также в результате приложения внешних сил, выходящих за рамки введенной модели. Этим оправдано рассмотрение дилатационной функции  $\Theta(\mathbf{x})$ , определяющей деформации сжатия – растяжения, вне зависимости от скоростей течения, что снимает вопрос о коммутативности сдвигов и сжатий.

Таким образом, в соответствии с (14, 14a) процесс эволюции начальной модели  $\theta^0(\mathbf{x})$  является пошаговым переходом от  $\theta^i(\mathbf{x})$  к  $\theta^{i+1}(\mathbf{x})$ , включает в себя три вида трансформаций. Это, во-первых, дилатационные преобразования, состоящие в сжатии либо растяжении текущей модели на величину  $e^{-\Delta t_{i+1} \Theta^i(\mathbf{x})}$ . Этот вид преобразований обозначим  $D^i_d(\theta^i(\mathbf{x}), \Theta^i(\mathbf{x}))$ . Во-

<sup>28</sup> Строго говоря,  $e^{-\mathbf{v} \cdot grad} e^{-\Theta(\mathbf{x})} = e^{-\Omega}$ . Несколько первых членов разложения для  $\Omega$  имеют вид:

$$\Omega = \mathbf{v} \cdot grad + \Theta(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}[\mathbf{v} \cdot grad, \Theta(\mathbf{x})] + \frac{1}{12}[\mathbf{v} \cdot grad, [\mathbf{v} \cdot grad, \Theta(\mathbf{x})]] + \frac{1}{12}[\Theta(\mathbf{x}), [\Theta(\mathbf{x}), \mathbf{v} \cdot grad]] + \dots,$$

где  $[\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha$  - скобки Ли.

вторых, преобразование сдвига на вектор  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}) : \theta^i(\mathbf{x} - \Delta t_{i+1} \mathbf{v}^i(\mathbf{x}))$ , которое обозначим  $D^i_s(\theta^i(\mathbf{x}), \mathbf{v}^i(\mathbf{x}))$ , и, наконец, дивергентное преобразование, состоящее в добавлении к  $\theta^i(\mathbf{x})$  аддитивной компоненты  $\Delta t_{i+1} \cdot q^i(\mathbf{x})$ , контролирующей баланс вещества  $\theta^i(\mathbf{x})$ . Эту, последнюю, операцию обозначим  $D^i_a(\theta^i(\mathbf{x}), q^i(\mathbf{x}))$ . Любой процесс движения вещества в рамках определенной модели распадается на последовательность из трех приведенных преобразований, осуществляемых в той либо иной последовательности. Результат зависит от того, какая последовательность выбрана. Это легко понять. Сдвиг, с последующим сжатием и добавлением вещества, – это совсем не то же самое, что сжатие вместе с добавленным веществом и последующим сдвигом.

Воспользуемся теперь условием (3). Его аналог в итерационном процессе (14) записывается следующим образом:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\theta^i(\mathbf{x})) = u(s). \quad (6.15)$$

Для того чтобы обеспечить это требование, необходимо, чтобы управляющие процессом эволюции (14) геодинимические параметры – скорости течений  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x})$  и величина внешних источников  $q^i(\mathbf{x})$ , обеспечивающих «вещественный баланс», – зависели в том числе и от невязки полей:  $\varphi^i(s_0) = \mathbf{A}(\theta^i(\mathbf{x})) - u(s_0)$ , уменьшаясь по мере ее убывания. Должно это происходить таким образом, чтобы при достижении нулевой невязки полей геодинимические параметры:  $\Theta^i(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x})$ ,  $q^i(\mathbf{x})$  – оказались равными нулю и процесс «эволюции» прекратился. Дальнейшая эволюция, если она есть, должна происходить без изменения наблюдаемого поля, т.е. в классе эквивалентности для оператора  $\mathbf{A}$ . Это будет выполнено, например, в том случае, если рассматривать величины  $\Theta^i(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x})$ ,  $q^i(\mathbf{x})$  как значения линейных операторов, например операторов типа свертки, определенных на компонентах невязки, ответственных за трансформации дилатации, сдвига и баланса соответственно. Точнее говоря, если  $\varphi^i(s_0) = \mathbf{A}(\theta^i(\mathbf{x})) - u(s_0) = \varphi_d^i(s_0) + \varphi_s^i(s_0) + \varphi_a^i(s_0)$  где  $\varphi_d^i(s_0)$  – компонента невязки, которую следует компенсировать дилатационным преобразованием,  $\varphi_s^i(s_0)$  – компонента невязки, которую следует компенсировать преобразованием сдвига, а  $\varphi_a^i(s_0)$  – компонента невязки, которую следует компенсировать добавлением некоторого количества вещества, то  $\Theta^i(\mathbf{x}) = \Theta(\varphi_d^i(s_0))$ ;  $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\varphi_s^i(s_0))$ ;  $q^i(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\varphi_a^i(s_0))$ . Эти операторы могут быть определены как свертки заданных функций, характеризующих пространственное распределение дилатаций, скоростей сдвигов и осадконакопления с соответствующими компонентами невязки. Эти вопросы относятся к методическим приемам и лежат вне существа общепредметного рассмотрения.

Теперь процесс эволюции (14) с учетом требования (15) может быть смоделирован следующим образом.

Текущее состояние модели  $\theta^i(\mathbf{x})$  подвергается последовательности трансформаций так, как это изображено на рис. 5:

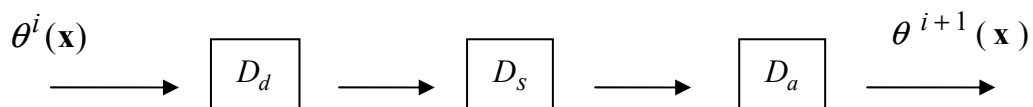


Рис. 6.5. Последовательность преобразований модели

Она состоит из дилатационной; сдвиговой и аддитивной (внешнему притоку или оттоку вещества, который называют также дивергентной компонентной составляющей). Смысл этих движений иллюстрируется рис. 6.

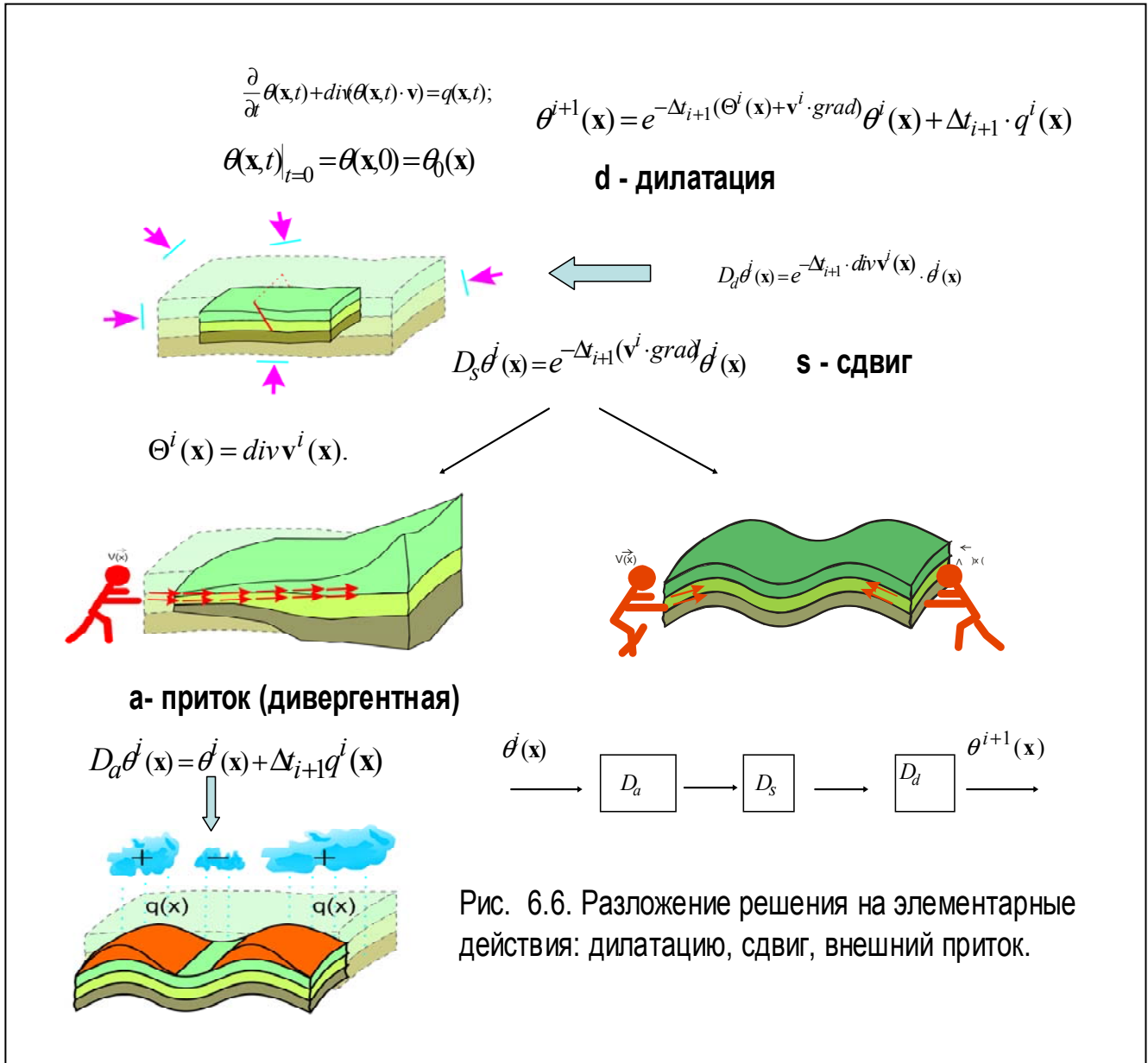


Рис. 6.6. Разложение решения на элементарные действия: дилатацию, сдвиг, внешний приток.

Последовательность их применения задается априорно, исходя из общих представлений о моделируемом развитии объекта. Например, комбинированное применение последовательности вышеизображенных преобразований записывается:

$$\theta^{i+1}(\mathbf{x}) = D^i_d (D^i_s (D^i_a (\theta^i(\mathbf{x}), \alpha_i^a \mathbf{Q}(\varphi_a^i(s_0))), \alpha_i^s \cdot \mathbf{V}(\varphi_s^i(s_0))), \alpha_i^d \cdot \Theta(\varphi_d^i(s_0))), \quad (6.16)$$

Здесь  $\alpha_i^a, \alpha_i^s, \alpha_i^d$  – параметры релаксации, ответственные за уменьшение соответствующих компонент  $\varphi_a^i(s_0); \varphi_s^i(s_0); \varphi_d^i(s_0)$ , суммарной невязки  $\varphi^i(s_0)$  и сходимости процесса (16). Каждая из последовательности трансформаций может итерироваться самостоятельно до полной компенсации соответствующей компоненты невязки поля, либо могут применяться промежуточные формы, что продиктовано особенностями решаемой задачи.

Для выбора значений параметров релаксации  $\alpha_i^a, \alpha_i^s, \alpha_i^d$ , обеспечивающих сходимость процесса (16), следует воспользоваться принципом минимальных невязок, рассмотренным в гл. 2. Его вычислительные реализации могут быть различны и зависят от конкретных особенностей задачи. В постановочном плане эти параметры должны быть выбраны так, чтобы величина невязки  $\|\varphi^{i+1}(s)\|_Y$ , как функция параметров  $\alpha_i^a, \alpha_i^s, \alpha_i^d$ , монотонно убывала с увеличением номера  $i$ . Это означает, что для

$$\|\varphi^{i+1}(s)\|_Y = \|\mathbf{A}(\theta^{i+1}(\mathbf{x})) - u(s)\|_Y = g(\alpha_i^a, \alpha_i^s, \alpha_i^d, \varphi^i(s)),$$

следует на каждом шаге итерационного процесса (16) решить задачу минимизации:

$$g(\alpha_i^a, \alpha_i^s, \alpha_i^d, \varphi^i(s)) \rightarrow \min. \quad (6.17)$$

### 6.3. Динамика структурных моделей

Повторение приведенных выше рассмотрений для использования эволюционно-динамических принципов при анализе структурных моделей, описываемых соотношением (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(s, t)}{\partial t} &= \mathbf{\Omega}(s, t) - \langle \mathbf{V}(s, t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s, t)) \rangle; \\ \mathbf{f}(s, t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s) \\ \lim_{t \rightarrow T} \mathbf{A}(\mathbf{f}(s, t)) &= u(s), \end{aligned}$$

не представляет каких-либо существенных затруднений. Однако небольшие особенности задачи требуют привести их в целях полноты рассмотрений.

Разобьем так же, как и выше, весь временной промежуток  $(0-T)$  на достаточно малые интервалы времени  $h_i = \{t_i, t_{i+1}\}$   $i = 0, 1, \dots$ , в пределах каждого из которых можно считать  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s, t)$  и  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(s, t)$  стационарными. Напомним, что

$$\mathbf{f}(s, t) = \{f_0(s, t), f_1(s, t), \dots, f_N(s, t)\}, \quad \mathbf{\Omega}(s, t) = \{\Omega_0(s, t), \Omega_1(s, t), \dots, \Omega_N(s, t)\}.$$

Обозначим  $\mathbf{V}^i(s)$  и  $\mathbf{\Omega}^i(s)$  значения  $\mathbf{V}(s, t)$  и  $\mathbf{\Omega}(s, t)$  на соответствующих временных интервалах  $\mathbf{V}^i(s) = \mathbf{V}^i = \mathbf{V}(s, t_i); \mathbf{\Omega}^i(s) = \mathbf{\Omega}^i = \mathbf{\Omega}(s, t_i)$ . Для каждого из интервалов  $h_i = (t_i, t_{i+1})$  выпишем задачу движения:

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \dots \\ \mathbf{f}(s, t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s) \\ \frac{\partial \mathbf{f}(s, t)}{\partial t} &= \mathbf{\Omega}^i(s) - \langle \mathbf{V}^i(s) | \text{grad}(\mathbf{f}(s, t)) \rangle; \\ t \in h_i &= (t_i, t_{i+1}); \\ \mathbf{f}(s, t) \Big|_{t=t_i} &= \mathbf{f}^i(s); \\ \mathbf{f}^{i+1}(s) &= \mathbf{f}(s, t_{i+1}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

При  $\mathbf{\Omega}(s, t) = 0$  ее решение имеет вид:

$$\mathbf{f}(s, t_{i+1}) = e^{-\Delta t_{i+1} (\mathbf{V}^i(s) \cdot \text{grad})} \mathbf{f}^i(s) = \mathbf{f}^i(s - \Delta t_{i+1} \mathbf{V}^i(s)).$$

Или в покомпонентной записи:

$$i = 0, 1, \dots;$$

$$j = 0, 1, \dots, N;$$

$$f_j(s, t_{i+1}) = e^{-\Delta t_{i+1}(V_j^i(s) \cdot \text{grad})} f_j(s, t_i) = f_j^i(s - \Delta t_{i+1} V_j^i(s)).$$

Его справедливость проверяется непосредственным дифференцированием, и в целом это решение повторяет выписанное ранее соотношение (10) для задачи (9).

Действительно:

$$\frac{df_j(s, t)}{dt} = - \left\langle V_j^i(s) \left| \text{grad} \left( e^{-t(V_j^i(s) \cdot \text{grad})} f_j(s, t_i) \right) \right|_{t=t_{i+1}} \right\rangle = \left\langle V_j^i(s) \left| \text{grad} (f_j(s, t)) \right| \right\rangle.$$

Легко понять, что решение задачи (18) с ненулевым членом  $\Omega(s, t)$  так же, как и выше для случая распределения параметра, можно записать в виде:

$$i = 0, 1, \dots;$$

$$j = 0, 1, \dots, N;$$

$$f_j(s, t_{i+1}) = e^{-\Delta t_{i+1}(V_j^i(s) \cdot \text{grad})} f_j(s, t_i) = f_j^i(s - \Delta t_{i+1} V_j^i(s)) + \Delta t_i \cdot \Omega_j^i(s). \quad (6.19)$$

Теперь следует дополнить систему (19) требованием  $\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{A}(\mathbf{f}(s, t)) = u(s)$ . Переходя к форме записи (19), получим:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{f}^i(s)) = u(s).$$

Также, как и в рассмотренном выше случае, для распределения параметра  $\theta^i(\mathbf{x})$ , для того чтобы обеспечить это требование, необходимо чтобы управляющие процессом эволюции (19) геодинатические параметры – горизонтальные скорости смещения границ  $\mathbf{V}^i(s)$  и величина эффективной вертикальной скорости смещения  $\Omega^i(s)$  – зависели в том числе и от невязки полей:  $\varphi^i(s_0) = \mathbf{A}(\mathbf{f}^i(s)) - u(s_0)$ , уменьшаясь по мере ее убывания. Должно это происходить таким образом, чтобы при достижении нулевой невязки полей геодинатические параметры  $\mathbf{V}^i(s)$ ,  $\Omega^i(s)$  оказались равными нулю и процесс «эволюции» прекратился. Дальнейшая эволюция, если она есть, должна происходить без изменения наблюдаемого поля, т.е. в классе эквивалентности для оператора  $\mathbf{A}$ . Это будет выполнено, например, в том случае, если рассматривать величины  $\mathbf{V}^i(s)$ ,  $\Omega^i(s)$  как значения линейных операторов, например операторов типа свертки, определенных на компонентах невязки.

Если полная невязка поля, достигнутая на  $i$ -ом шаге:  $\varphi^i(s_0) = \mathbf{A}(\mathbf{f}^i(s)) - u(s_0) = \varphi_s^i(s_0) + \varphi_a^i(s_0)$ , где  $\varphi_s^i(s_0)$  – ее компонента, которую следует компенсировать преобразованием горизонтального сдвига, а  $\varphi_a^i(s_0)$  – соответственно, компонента невязки, которую следует компенсировать за счет вертикального сдвига границ, то:  $\mathbf{V}^i(s) = \mathbf{V}(\varphi_s^i(s_0))$ ;  $\Omega^i(s) = \Omega(\varphi_a^i(s_0))$ . Эти операторы могут быть определены как свертки заданных функций, характеризующих распределение горизонтальных и вертикальных скоростей сдвигов с соответствующими компонентами невязки поля.

Далее процесс (19) переписываем с учетом этих выражений:

$$i = 0, 1, \dots;$$

$$j = 0, 1, \dots, N;$$

$$f_j(s, t_{i+1}) = f_j^i(s - \alpha_i^s \cdot V_j^i(\varphi_s^i(s_0))) + \alpha_i^a \cdot \Omega_j^i(\varphi_a^i(s_0)). \quad (6.20)$$

И может быть выполнен как последовательным применением операций горизонтального и вертикального сдвигов, так и раздельным итерированием, как это было описано выше для задачи об эволюции распределения параметра.

Параметры релаксации  $\alpha_i^a, \alpha_i^s$  должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечивалась сходимость процесса (20) по невязке полей. Воспользуемся, как и ранее, принципом минимальных невязок. Величина невязки на следующем шаге должна быть меньше соответствующей величины на предыдущем. Это значит, что  $\|\varphi^{i+1}(s)\|_Y$  как функция параметров  $\alpha_i^a, \alpha_i^s$  должна монотонно убывать с увеличением номера  $i$ . Это влечет за собой, как и выше, что для

$$\|\varphi^{i+1}(s)\|_Y = \|\mathbf{A}(\mathbf{f}^{i+1}(s)) - u(s)\|_Y = g(\alpha_i^a, \alpha_i^s, \varphi^i(s))$$

следует на каждом шаге итерационного процесса (20) решить задачу минимизации:

$$g(\alpha_i^a, \alpha_i^s, \varphi^i(s)) \rightarrow \min. \quad (6.21)$$

Как итерационному процессу (20), так и (14) можно придать форму, аналогичную (5.73)<sup>29</sup>.

Отличие будет состоять в том, что член, аналогичный параметрам критерия оптимальности  $F^{-1}F^{*-1}$ , окажется зависимым от очередного приближения  $\mathbf{f}^i(s)$  либо  $\theta^i(\mathbf{x})$ . Таким образом, метод эволюционно-динамического продолжения оказывается модификацией метода минимальных корректив с динамически меняющимся критерием оптимальности, зависящим от достигнутого состояния системы.

И еще одно важное замечание. Введенные геодинамические параметры, а это горизонтальные  $\mathbf{V}^i(s)$  и вертикальные  $\Omega^i(s)$  скорости<sup>30</sup> движений для компонент границ, деформационные  $e^{-\Delta t_{i+1} \cdot \Theta^i(\mathbf{x})}$ , сдвиговые  $\theta^i(\mathbf{x} - \Delta t_{i+1} \cdot \mathbf{v}^i)$  и дивергентные  $\Delta t_{i+1} \cdot q^i(\mathbf{x})$  компоненты трансформаций для распределения параметра  $\theta^i(\mathbf{x})$ , выражены через соответствующие компоненты невязки полей. Однако само разделение на компоненты суммарной невязки носит субъективный характер и определяется спецификой рассматриваемой задачи. Но гораздо более сложным вопросом является вопрос о виде операторов, выражающих эти параметры через компоненты невязки. Предполагая эти операторы линейными и ограниченными, приходим к выводу об их интегральной форме. Например:

$$\mathbf{V}^i(s) = \mathbf{V}(\varphi_s^i(s_0)) = \int_S \mathbf{V}(s, s_0) \cdot \varphi_s^i(s_0) ds_0.$$

$$\text{В частности, } \mathbf{V}^i(s) = \mathbf{V}(\varphi_s^i(s_0)) = \int_S \mathbf{V}(s - s_0) \cdot \varphi_s^i(s_0) ds_0,$$

где  $\mathbf{V}(s)$  – заданная оценка горизонтальной скорости смещения границ за единицу времени. Для предметного задания этих функций необходимо сформировать класс (банк) моделей движения, характерных для изучаемого региона и отнесенных к различным элементам системы границ. То же самое относится к вертикальным или дивергентным компонентам движения и деформационным, дилатационно-сдвиговым членам для моделей эволюции параметра.

#### Литература

1. Д. Хенри. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
2. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Из-во ин. лит., 1962. – 829 с.

<sup>29</sup>  $x^{i+1} = x^i + a_i F^{-1} F^{*-1} A'^*(x^i)(\Phi^* \Phi(A(x^i) - y))$ .

<sup>30</sup> Вертикальная скорость аналогична дивергентной компоненте трансформации для распределения параметра.

## ГЛАВА 7. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

В предыдущих главах мы неоднократно обращались к моделям, возникающим при рассмотрении обратных задач гравиметрии, составляющих математическое ядро процедур интерпретации гравиметрических данных. Это делалось для иллюстрации тех либо иных вводимых понятий. В настоящей главе будет рассматриваться только эта задача. К ней будет применен развитый ранее аппарат, с помощью которого легко получаются интересные для приложений следствия. Материал раздела активно использует информацию, приведенную в приложении 2. Основная цель рассмотрений – проиллюстрировать введенные общие понятия и методы для решения обратных задач геофизики на содержательном примере и дать теоретическое обоснование конкретных технологий, лежащих в основе схем извлечения информации из гравиметрических данных – построения плотностных моделей геологических сред. Обращение к обратной задаче гравиметрии (ОЗГ) продиктовано тем, что в ней удачно сочетается практическая значимость получаемых результатов и относительная простота аналогичного выражения для оператора прямой задачи. Последнее позволяет многие выводы привести в аналитической форме, построив теорию ОЗГ, и привести эффективные методы ее решения. Однако практическая значимость теоретических исследований на основе критериального подхода к доопределению обратных задач гравиметрии связана не только с собственно задачей гравиметрии. Имеющаяся в ОЗГ широкая эквивалентность как в классе распределений плотности, так и в структурных моделях, приводит к пессимистическим оценкам интерпретационных возможностей собственно гравиметрии. Но та же эквивалентность, в какой-то мере, и полезное качество в плане задач комплексной интерпретации, в частности, в связи с совместным решением обратных задач. На примере задач гравиметрии достаточно наглядно иллюстрируются и эффективно конструируются основные подходы к эволюционно-динамическим моделям интегрированного анализа комплекса геолого-геофизических данных. Это относится не только к методам реконструкции собственно плотностных моделей на основе минимальных корректив и эволюционно-динамического продолжения, но и методам реконструкции системы моделей на основе комплексных минимальных корректив. Последнее, как было показано в гл. 5, сводится к последовательному решению частных обратных задач на основе критериального подхода – метода минимальных корректив с использованием в общей итерационной схеме (5.92) частного случая (5.73). По этой причине исследование обратной задачи гравиметрии на основе принципа минимальных корректив является составной частью аналитической теории комплексной интерпретации, и это обстоятельство в большой мере оправдывает затраченные усилия на создание соответствующей теории. Эти же исследования являются своего рода эталоном для исследований других частных задач и дополнительным доводом в пользу их проведения. Наибольшую практическую значимость для задач нефтегазового профиля имеют методы комплексных минимальных корректив для реконструкции скоростно-плотностных моделей. Этому вопросу здесь также уделяется внимание.

### 7.1. Аналитические свойства оператора прямой задачи гравиметрии для распределения плотности

Будем рассматривать в качестве модели среды введенную в 2.1.1 модель распределения плотности в заданной области  $V$  нижнего полупространства. В соответствии с (2.2) запишем связь между распределением плотности  $\sigma(x, y, z)$  в области  $V$ , целиком лежащей в нижнем полупространстве ( $E_- : z > 0$ ), и вертикальной производной гравитационного потенциала в виде:

$$\iiint_V \frac{\sigma(x, y, z)z dx dy}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}. \quad (7.1)$$

Напомним, что координатные оси  $XOY$  и  $X_0OY_0$  совмещены, а ось  $OZ_0$  направлена вверх – противоположно оси  $OZ$ . На первом этапе считаем, что вертикальная производная гравитационного потенциала задана на всей плоскости  $E_0(z=0): u_z(x_0, y_0) = u_z(x_0, y_0, 0)$ . Тем самым, как хорошо известно, определены значения  $u_z(x_0, y_0, z_0)$  в любой точке области  $E_+(z < 0)$  – верхнего полупространства. В том числе и на поверхности произвольного рельефа, заданного функцией  $z_0 = \psi(x_0, y_0)$ . Значение это находится с помощью известного интеграла Пуассона (см. 2.1.4, формула (2.6)), дающего решение задачи Дирихле для полупространства:

$$u_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{E_0} \frac{u_z(x, y)z_0 dx dy}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2 \right]^{3/2}}. \quad (7.2)$$

Обозначим, кроме того,  $\Pi$  – горизонтальную полосу в нижнем полупространстве ( $E_-$ ), ограниченную по вертикали координатами  $z_1, z_2, z_2 > z_1, > \alpha > 0$ . В частности, область  $V$  может совпадать с  $\Pi$  либо быть ее собственным подмножеством. Соотношение (1), в соответствие с введенными ранее соглашениями об обозначениях операторов для прямой задачи, будем записывать в форме:

$$A_V \sigma(v) = u(s_0),$$

где  $v = \{x, y, z\} \in V; s_0 = \{x_0, y_0\} \in E_0$ .

Следующий результат характеризует свойства непрерывности оператора  $A_V$ .

**Теорема 1.** Пусть  $V$  – ограниченная область, целиком лежащая в  $\Pi$ . Тогда  $A_V$  линейен и ограничен из  $L_p(V)$  в  $L_q(E_0)$  для всех  $p, q, 1 \leq p, q \leq \infty$ . Для случая  $V = \Pi$  оператор  $A_\Pi$  линейен и ограничен из  $L_p(V)$  в  $L_q(E_0)$  при  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

Обозначим  $\|A_V\|_{p,q}$  норму оператора  $A_V$ , действующего из  $L_p(V)$  в  $L_q(E_0)$ . Тогда при ограниченной области  $V$

$$\|A_V\|_{p,q} \leq \frac{(2\pi)^\tau (1-\beta)}{\alpha^{2(1-\tau)}} = (mes(V)),$$

где введены обозначения  $\left( \beta = \frac{1}{p}; \tau = \frac{1}{q} \right)$ .

Для случая  $V = \Pi$  и  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  величина  $\|A_\Pi\|_{p,q}$  ограничена и при  $1 \leq p \leq q < \infty$ :

$$\|A_\Pi\|_{p,q} \leq (2\pi)^q \left( 1 - \frac{q-p}{p(q-1)} \right) \left( \frac{2\pi}{\alpha^{2(q-1)}} \right)^{\frac{q-p}{q \cdot p \cdot (q-1)}}.$$

В случае, когда  $q$  либо одновременно  $q$  и  $p$  равны бесконечности:

$$\|A_\Pi\|_{1,\infty} \leq 1/\alpha^2, \quad \|A_\Pi\|_{\infty,\infty} \leq 4 \cdot \pi \cdot (z_2 - z_1).$$

Доказательство. Линейность – очевидное свойство введенного оператора. Доказать следует лишь его непрерывность в тех либо иных функциональных пространствах. Для краткости вместо

$$\frac{z}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$



будем писать  $\frac{z}{|v-s_0|^3}$ , имея в виду, что  $v=\{x, y, z\}$  – пространственная координата точки в

области  $V$ .

Из (1) имеем:

$$\left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_\infty} \leq \sup_{s_0 \in E_0} \frac{z}{|v-s_0|} \text{Var}|\sigma(v) \leq \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}|\sigma(v).$$

Далее:

$$\left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_\infty} \leq \iiint_V |\sigma(v)| \frac{1}{\alpha^2} dv \leq \sup_{v \in V} \text{vrai}|\sigma(v)| \frac{\text{mes}(V)}{\alpha^2},$$

$$\left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_1} \leq \iiint_V |\sigma(v)| \cdot \iint_{E_0} \frac{z ds_0 dv}{|v-s_0|^3} = 2\pi \text{Var}|\sigma(v)|,$$

$$\left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_1} \leq 2\pi \cdot \text{mes}(V) \cdot \sup_{v \in V} \text{vrai}|\sigma(v)|,$$

Следовательно:

$$\|A_V\|_{1,\infty} \leq \frac{1}{\alpha^2};$$

$$\|A_V\|_{\infty,\infty} \leq \frac{\text{mes}(V)}{\alpha^2};$$

$$\|A_V\|_{1,1} \leq 2\pi;$$

$$\|A_V\|_{\infty,1} \leq 2\pi - \text{mes}(V).$$

В силу теоремы Риса о выпуклости (Прил. 2), для  $\beta, \tau \in [0,1]$  имеем:

$$\log \|A_V\|_{1/\beta, 1/\tau} \leq \beta \cdot (\tau \log \|A_V\|_{1,1} + (1-\tau) \cdot \log \|A_V\|_{1,\infty}) + \\ + (1-\beta) \cdot (\tau \log \|A_V\|_{\infty,1} + (1-\tau) \cdot \log \|A_V\|_{\infty,\infty})$$

Следовательно:

$$\|A_V\|_{p,q} \leq \|A_V\|_{1,1}^{\beta-\tau} \cdot \|A_V\|_{1,\infty}^{\beta-(1-\tau)} \cdot \|A_V\|_{\infty,1}^{\tau-(1-\beta)} \cdot \|A_V\|_{\infty,\infty}^{\beta-(1-\tau)}.$$

Тогда для  $\|A_V\|_{p,q}$  легко получаем:

$$\|A_V\|_{p,q} = \|A_V\|_{\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\tau}} \leq \frac{(2\pi)^\tau}{\alpha^{2(1-\tau)}} \cdot (\text{mes}(V))^{1-\beta}.$$

Приведенная оценка является грубой. Она может быть улучшена для случая  $V = \Pi$ . Заметим при этом, что если  $V_1 \subset V_2$ , то  $\|A_{V_2}\|_{p,q} \leq \|A_{V_1}\|_{p,q}$ . Таким образом,

$\|A_V\|_{p,q} \leq \|A_\Pi\|_{p,q}$ , поскольку  $V \subseteq \Pi$ .

Применим к соотношению (1) неравенство Юнга, рассматривая в качестве области  $V$  полосу  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_q(E_0)}^q &\leq \int_{z_1}^{z_2} \left\| \iint_{E_0} \frac{\sigma(x, y, z) z dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \right\|_{L_q(E_0)}^q dz \leq \\ &\leq \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \left\| \sigma(s, z) \right\|_{L_p(E_0)}^q \cdot \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_r(E_0)}^q \right\} dz. \end{aligned}$$

Здесь  $p, q, r$  связаны условием

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Заметим, что если  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , то это условие может быть выполнено при  $r = pq/(pq + p - q)$ .

Оценим величину:

$$\left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_r(E_0)}.$$

Для этой цели вновь применим теорему Риса о выпуклости  $\left(r = \frac{1}{\beta}\right)$ :

$$\begin{aligned} \log \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_\beta(E_0)} &\leq (1-\beta) \cdot \log \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_\infty} + \beta \cdot \log \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_1}; \\ \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_r(E_0)} &\leq \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_\infty}^{\left(1-\frac{1}{r}\right)} \cdot \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_1}^{1/r}. \end{aligned}$$

Но:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_\infty(E_0)} &\leq \frac{1}{\alpha^2}; \\ \left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_1(E_0)} &\leq 2\pi. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\left\| \frac{z}{|v-s_0|^3} \right\|_{L_r(E_0)} \leq \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1-\frac{1}{r}} \cdot (2\pi)^{1/r}.$$

Тогда:

$$\left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_q(E_0)}^q \leq \left(\frac{2\pi}{\alpha^{2(r-1)}}\right)^{\frac{q}{r}} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \left\| \sigma(s, z) \right\|_{L_p(E_0)}^q dz. \quad (7.3)$$

Из (3) следует, что при  $q = p$  и следующем отсюда  $r = 1$

$$\|A_{\Pi}\|_{p,p} \leq (2\pi)^p. \quad (7.4)$$

Теперь имеем следующую цепочку оценок:

$$\|A_{\Pi}\|_{1,1} \leq 2\pi; \quad (7.5)$$

$$\|A_{\Pi}\|_{1,\infty} \leq \frac{1}{\alpha^2}; \quad (7.6)$$

$$\|A_{\Pi}\|_{p,p} \leq (2\pi)^p. \quad (7.7)$$

Из приведенных соотношений и неравенств Риса о выпуклости сразу следует вывод об ограниченности  $\|A_{\Pi}\|_{p,q}$  для  $1 \leq p \leq q < \infty$ . Рассмотрим теперь случай  $p = q = \infty$ .

Обозначим  $c = \|\sigma(v)\|_{L_{\infty}(\Pi)} = \text{ess sup}_{v \in \Pi} |\sigma(v)|$ . Понятно, что

$$\left\| \frac{u_z(s_0)}{\gamma} \right\|_{L_{\infty}(E_0)} \leq c \cdot \iiint_{\Pi} \frac{zdv}{|v-s_0|^3} = c \cdot \int_{z_1}^{z_2} \iint_{E_0} \frac{zdv}{|v-s_0|^3} = \|\sigma(v)\|_{L_{\infty}(\Pi)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (z_2 - z_1).$$

Одно из утверждений теоремы доказано.

Оценим далее  $\|A_{\Pi}\|_{1,p}$ , пользуясь для этого (4-7) и неравенством выпуклости для  $A_{\Pi}$ :

$$\log \|A_{\Pi}\|_{1, \frac{1}{(1-\beta)a_0 + \beta a_1}} \leq (1-\beta) \log \|A_{\Pi}\|_{1, \frac{1}{a_0}} + \beta \log \|A_{\Pi}\|_{1, \frac{1}{a_1}}.$$

Полагая  $a = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{p}$ , получим:

$$\|A_{\Pi}\|_{1,p} \leq \|A_{\Pi}\|_{1,\infty}^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|A_{\Pi}\|_{1,1}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \frac{2\pi}{\alpha^{2(p-1)}} \right\}^{1/p}. \quad (7.8)$$

Теперь, используя (7) и неравенство выпуклости, найдем оценку для  $\|A_{\Pi}\|_{c,p}$ , где:  $1 \leq c \leq p$ :

$$\begin{aligned} \log \|A_{\Pi}\|_{\frac{1}{(1-\beta)a_0 + \beta a_1}, p} &\leq (1-\beta) \log \|A_{\Pi}\|_{\frac{1}{a_0}, p} + \beta \log \|A_{\Pi}\|_{\frac{1}{a_1}, p}, \\ \|A_{\Pi}\|_{\frac{1}{(1-\beta)a_0 + \beta a_1}, p} &\leq \|A_{\Pi}\|_{\frac{1}{a_0}, p}^{(1-\beta)} \cdot \|A_{\Pi}\|_{\frac{1}{a_1}, p}^{\beta}. \end{aligned}$$

Примем  $a_0 = \frac{1}{p}$ ,  $a_1 = 1$ , а  $\beta$  выберем так, чтобы  $\frac{1-\beta}{p} + \beta = \frac{1}{c}$ .

Тогда  $\beta = (p-c)/c(p-1)$ , при этом  $1 \leq c \leq p \leq \infty$ . Тогда:

$$\|A_{\Pi}\|_{c,p} \leq (2\pi)^p \left( \frac{1-\beta}{c(p-1)} \right)^{\frac{p-c}{pc(p-1)}} \left( \frac{2\pi}{\alpha^{2(p-1)}} \right)^{\frac{p-c}{pc(p-1)}}.$$

Пользуясь обозначением  $\|A_{\Pi}\|_{p,q}$ , где  $p \leq q$ , получим:

$$\|A_{\Pi}\|_{p,q} \leq (2\pi)^q \left( \frac{1-\frac{q-p}{p(q-1)}}{p(q-1)} \right)^{\frac{q-p}{q \cdot p \cdot (q-1)}} \cdot \left( \frac{2\pi}{\alpha^{2(q-1)}} \right)^{\frac{q-p}{q \cdot p \cdot (q-1)}},$$

или после упрощения:

$$\|A_{\Pi}\|_{p,q} \leq \frac{2\pi^{\left( \frac{q-(q-p)(q+p)}{q \cdot p} \right)}}{\alpha^{2(q-p)/q \cdot p}},$$

что и требовалось доказать.

Итак, мы выяснили, что оператор  $A_V$  является «хорошим» для решения прямых задач, поскольку линеен и ограничен во всех обозримых для приложения пространствах. Дифференцируя уравнение (1) по переменным  $x_0, y_0, z_0$  как по параметрам и полагая  $z_0 = 0$ , получим новые операторы, соответствующие расчету высших производных гравитационного потенциала. Повторяя приведенные рассуждения, легко доказать, что вновь полученные операторы обладают теми же свойствами, что сформулированы в теореме 1. По тем же причинам непрерывен оператор  $A_V$  из  $L_p(V)$  в  $W_q^r(E_0)$  и т.д. Однако нас, в большей мере, интересует обратная задача, и главным свойством является ее разрешимость. Следует выявить, при каких правых частях уравнение (1) разрешимо, является ли решение единственным и будет ли оно устойчивым. Для простоты дальнейших рассмотрений ограничимся случаем, когда  $A_V$  действует из  $L_2(V)$  в  $L_2(E_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $V$  – область в  $E_-$ , целиком лежащая в  $\Pi$  и содержащая некоторый шар в  $E_-$ . Тогда  $\text{Im } A_V$  образует в  $L_2(E_0)$  плотное множество<sup>31</sup>.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что плотность  $\text{Im } A_V$  в  $Y = L_2(E_0)$  эквивалентна однозначной разрешимости сопряженного уравнения. Действительно, поскольку  $\overline{\text{Im } A} = (\text{Ker } A^*)^\perp$ , то из условия  $\text{Ker } A^* = 0$  следует  $(\text{Ker } A^*)^\perp = Y$  и  $\overline{\text{Im } A_V} = Y$ . Вид сопряженного к  $A_V$  оператора  $A^*$ , отображающего пространство  $L_2(E_0)$  в подпространство в  $L_2(V)$ , определен соотношением:

$$A_V^* \varphi(s_0) = P_V \iint_{E_0} \frac{\varphi(s_0) z ds_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = g(x, y, z); \quad (7.9)$$

$$\varphi(s_0) \in L_2(E_0).$$

где  $P_V$  – проектор из  $L_2(E_-)$  на  $L_2(V)$ . Это следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \langle A_V \sigma(v) | \varphi(s_0) \rangle_{L_2(E_0)} &= \iiint_{E_0} \iiint_V \frac{\sigma(x, y, z) z dx dy dz}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \varphi(s_0) ds_0 = \\ &= \iiint_V \sigma(x, y, z) \cdot \iiint_{E_0} \frac{\varphi(s_0) z ds_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} dv = \langle \sigma(v) | A^* \varphi(s_0) \rangle_{L_2(V)} = \\ &= \langle \sigma(v) | P_V A^* \varphi(s_0) \rangle_{L_2(\Pi)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Легко заметить, что  $\text{Im } A_V^*$  – множество гармонических в  $V$  и непрерывных на границе  $V$  функций, имеющих единственное аналитическое продолжение на все  $E_-$  (так как  $V$  содержит некоторый шар). Но равенство нулю гармонической функции внутри некоторого шара влечет ее равенство нулю всюду в области гармоничности. В частности, из

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \|g(x, y, z) - \varphi(x, y)\|_{L_2} \rightarrow 0$$

следует, что уравнение  $P_V \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s_0) z ds_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = 0$  имеет единственное решение  $\varphi(s_0) = 0$ . Таким образом,  $\text{Ker } A_V^* = 0$ , теорема доказана.

<sup>31</sup> Напомним, что это значит, что любой элемент из  $L_2(E_0)$  может быть как угодно точно подобран «каким-либо элементом из  $\text{Im } A_V$ ».

Из приведенного результата следует вывод о том, что уравнение (1) может быть решено как угодно точно для любой правой части из  $L_2(E_0)$ . Но разрешимость с любой наперед заданной точностью не означает строгой разрешимости. В каком-то смысле элементов из  $L_2(E_0)$ , для которых уравнение (1) не имеет строгого решения, даже больше, чем тех, для которых имеет, т.е. чем  $\text{Im } A_V$ . Более строгий смысл сказанному придает следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $V \subseteq \Pi$ , тогда  $\text{Im } A_V$  образует  $L_2(E_0)$  множество первой категории.

Доказательство. Напомним, что  $M$  есть множество первой категории, если оно представимо как не более, чем счетное объединение нигде неплотных множеств. Множество называется нигде неплотным, если его замыкание не содержит внутренних точек.

Выберем плоскость  $E'_0$ , определенную значением вертикальной координаты  $z = z', 0 < \alpha \leq z' < z_1 - \delta, \delta > 0$ , что возможно в силу определения  $\Pi$  (см. рис. 1).

Значение поля  $u'_z(S_0)$  на  $E'_0$  от распределения масс в  $V$  равно:

$$\frac{u'_z(s_0)}{\gamma} = \iiint_V \frac{\sigma(v)(z - z') dv}{\left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}}$$

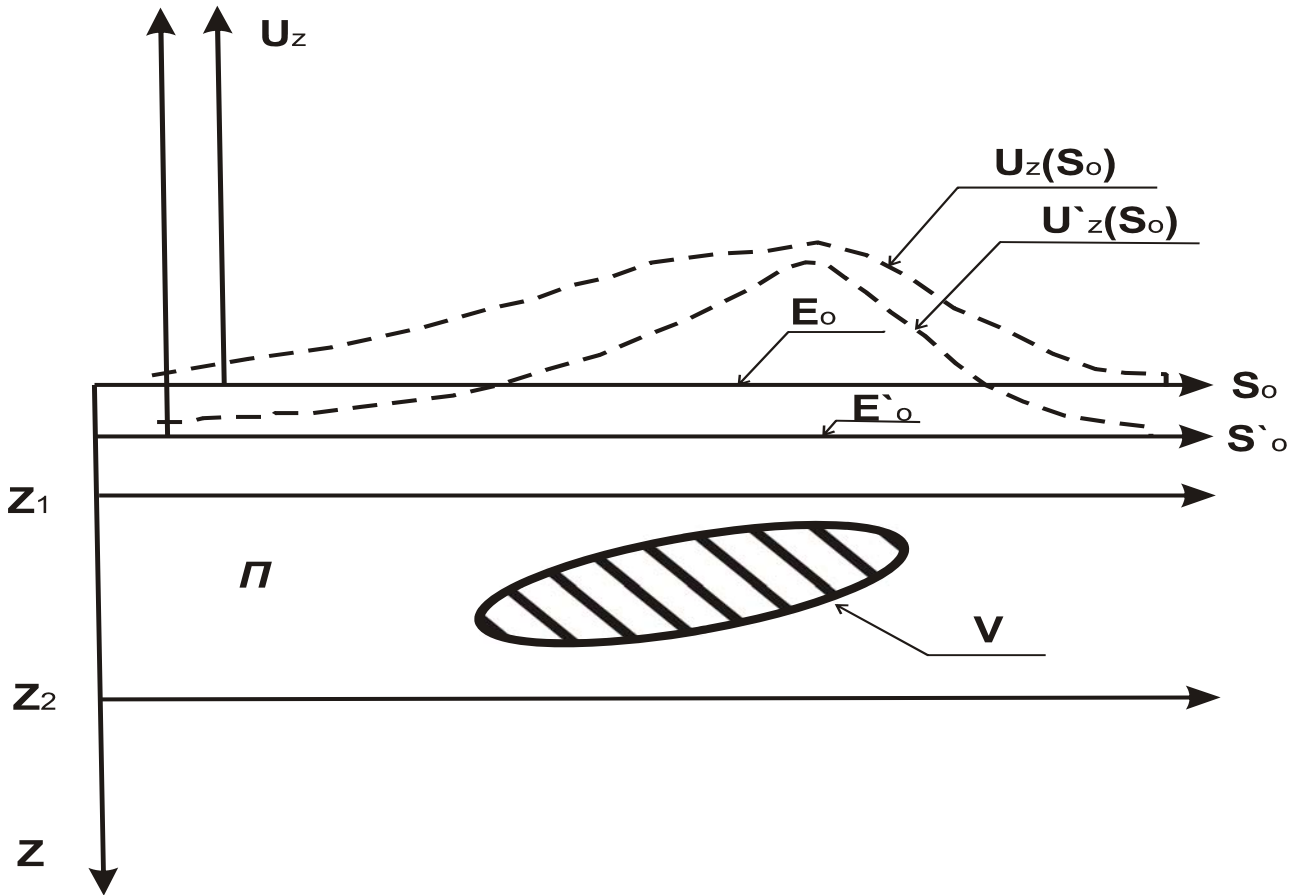


Рисунок 7.1. Пояснения к выводам

В силу доказанной выше теоремы 1 о непрерывности оператора (1)  $u'_z(s_0) \in L_2(E'_0)$  и, следовательно,  $u'_z(s_0) \in D(B)$ , где  $B$  – оператор, определенный как интеграл Пуассона:

$$B u'_z(s_0) = u_z(s_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{E_0} \frac{u'_z(s'_0) z' ds'_0}{\left[ (x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 + z'^2 \right]^{3/2}} = A_V \sigma(v) \in \text{Im } A_V.$$

Следовательно,  $\text{Im } A_V \subseteq \text{Im } B$ . Осталось показать, что  $\text{Im } B$  – множество первой категории.

Пусть  $S$  – замкнутый единичный шар в  $L_2(E'_0)$ . Поскольку для любого  $u_z(s_0) \in L_2(E'_0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_z(s_0)\|}{n} \rightarrow 0,$$

то  $L_2(E'_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} nS$ . Тогда  $\text{Im } B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ , где  $\Omega_n$  – образ  $nS$  при отображении  $B$ . В силу ограниченности  $B$  и рефлексивности  $L_2$  каждое из  $\Omega_n$  замкнуто как образ замкнутого выпуклого множества. Если  $\text{Im } B$  – множество второй категории, то хотя бы для одного  $n$   $\Omega_n$ , в силу замкнутости, имеет внутреннюю точку. Но если оператор (линейный и ограниченный) отображает замкнутый шар во множество, имеющее внутреннюю точку, то обратный к этому оператору ограничен. Покажем теперь, что оператор  $B$  не имеет ограниченного обратного, как оператор из  $L_2(E_0)$  в себя (в  $L_2(E_0)$ ).

Рассмотрим уравнение  $Bu_z(s_0) = f(s)$  ( $s = \{x, y\}, s_0 = \{x_0, y_0\}$ ):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{u_z(s_0) \cdot \bar{z} ds_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = f(s), \quad \bar{z} \geq \alpha > 0. \quad (7.11)$$

Выберем последовательность монотонно убывающих чисел  $h_n$ , предел которых равен  $\bar{z}$ , и соответствующую им, параметризованных числами  $h_n$ , последовательность функций:

$$f_n(s) = \frac{h_n}{\left[ x^2 + y^2 + h_n^2 \right]^{3/2}}.$$

Ясно, что  $f_n(s) \in L_2(E_0)$ , так как  $f_n(s) \in L_1 \cap L_\infty$  и по теореме Рисса о выпуклости:

$$f_n(s) \in L_p(E), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Последовательности  $f_n(s)$  соответствует последовательности

$$u_z^n(s) = \frac{h_n - \bar{z}}{\left[ x_0^2 + y_0^2 + (h_n - \bar{z})^2 \right]^{3/2}}.$$

Поскольку, как это следует из (11):

$$Bu_z^n(s) = f_n(s).$$

Однако последовательность  $u_z^n(s)$  не имеет предела в  $L_2(E_0)$ , в то время как последовательность  $f_n(s)$  такой предел имеет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = \frac{\bar{z}}{\left[ x^2 + y^2 + \bar{z}^2 \right]^{3/2}} = f(s).$$

Итак, имеем:  $f_n(s) \rightarrow f(s)$ ,  $Bu_z^n(s) \rightarrow f(s)$ , однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_z^n(s)$  не существует в  $L_2(E_0)$ .

Но это несовместимо с предположением ограниченности оператора  $B^{-1}$  как действующего из  $L_2(E_0)$  в  $L_2(E_0)$ . Таким образом, приходим к выводу, что  $B^{-1}$  не ограничен и, следовательно,  $\text{Im } B$  не имеет внутренней точки. Тогда  $\text{Im } B$  есть множество первой категории, что и требовалось доказать.

Замечание. Все рассмотренные последовательности принадлежат и  $L_p(E_0)$ . Следовательно, приведенный пример «работает» во всех этих пространствах. Более того, основным мо-

ментом в доказательстве теоремы является вывод о замкнутости образа  $S$  при отображении  $V$ . Это имеет место для всех рефлексивных пространств, и теорема 3 верна для всех  $L_p : 1 < p < \infty$ .

Рассмотрим теперь вопрос о единственности решения уравнения (1), предполагая, что хотя бы одно решение существует. В силу линейности оператора  $A_V$ , утверждению о существовании более чем одного решения уравнения (1) эквивалентно утверждение о существовании ненулевых решений уравнения  $A_V \sigma(v) = 0$ . Последнее означает, что ядро  $\text{Ker } A_V$  оператора  $A_V$  содержит и ненулевые элементы. Действительно, если два распределения плотности  $\sigma_1(v)$  и  $\sigma_2(v)$  удовлетворяют одному и тому же уравнению  $A_V \sigma_1(v) = A_V \sigma_2(v) = u(s)$ , то  $\Delta \sigma(v) = \sigma_1(v) - \sigma_2(v)$  удовлетворяет уравнению  $A_V \Delta \sigma(v) = 0$ .

Простейший и известный еще Ньютону пример гравитационной эквивалентности двух различных тел – это совпадение внешних гравитационных полей от двух однородных по плотности шаров с общим центром и массой, но различной плотности и, как следствие, различного радиуса. Уже из этого примера можно заключить, что ядро оператора  $A_V$  содержит более одного элемента.

Полное описание ядра оператора  $A_V$  дает следующая теорема.

**Теорема 4** (П.С. Новиков). Пусть  $V$  – замкнутая регулярная область. Для того чтобы распределение плотности  $\sigma(v)$  создало нулевой внешний потенциал, необходимо и достаточно, чтобы для любой гармонической в  $V$  и непрерывной на границе  $\partial V$  области  $V$  функции  $g(v)$  выполнялось равенство

$$\iiint_V \sigma(v) \cdot g(v) dv = 0. \quad (7.12.)$$

По сути это означает, что ядро  $\text{Ker } A_V$  оператора  $A_V$  ортогонально множеству гармонических в  $V$  и непрерывных на  $\partial V$  функций.

Замечание 1. Теорема не распространяется на случай, когда в качестве области  $V$  выступает полоса  $\Pi$ , поскольку последняя не замкнута. Более того, далее будет показано, что для случая  $V = \Pi$  существуют гармонические в  $\Pi$  функции с нулевой правой частью для (1).

Замечание 2. Существенным является и требование, чтобы нулю равнялась правая часть в (1) только всюду на  $E_0$ . Далее будет показано, что для любого конечного множества точек  $\Gamma$  из  $E_0$ , или более обще  $E_+$ , существует гармоническая в  $V$  функция, для которой правая часть в (1) отображается в ноль во всех точках  $s_0 \in \Gamma$ .

Теорему 3 можно легко вывести из теоремы о ядре (см. Прил. 2.4). Действительно, согласно теореме о ядре,  $\text{Ker } A_V = (\text{Im } A_V^*)^\perp$ . Поскольку  $\text{Im } A_V^*$  – множество гармонических в  $V$  функций, представимых в виде интеграла Пуассона, замыкание которых для регулярной области  $V$  есть также гармонические в  $V$  функции, непрерывные на границе  $\partial V$ , то и получаем требуемый результат.

Теорема о ядре позволяет сформулировать результат о единственности решения уравнения (1) и для поточно заданного поля.

**Теорема 5.** Пусть область  $V$  ограничена и замкнута. Для того чтобы распределение плотности создавало нулевую вертикальную производную гравитационного потенциала в  $N$  точках  $\{x_i, y_i, z_i\} = s_i \in \Gamma \subset E_+$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой из  $N$  функций

$$g_i(v) = \frac{z - z_i}{\left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} = \frac{z - z_i}{|v - s_i|^3}$$

выполнялось условие:

$$\iiint_V \sigma(v) g_i(v) dv = 0.$$

Для доказательства достаточно применить теорему о ядре, в соответствии с которой  $\left\{ Ker A_V = \left( \text{Im } A_V^* \right)^\perp \right\}$  к оператору:  $A_V \sigma(v) = \iiint_V \frac{\sigma(v)(z - z_i) dv}{\left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}}$ , отображающему  $L_2(V)$  в систему из  $N$  значений поля  $u_z(s_i)$ , образующих конечномерное пространство  $R^N$  с Евклидовой нормой.

Для того чтобы найти сопряженный этому оператору, выберем произвольный вектор  $\bar{\varphi} = \{\varphi_i, i = 1, \dots, N\} \in R^N$  из сопряженного к  $R^N$  пространства, совпадающего с самим  $R^N$ , и запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \langle A_V \sigma(v) | \bar{\varphi} \rangle_{R^N} &= \sum_{i=1}^N \iiint_V \frac{\sigma(v)(z - z_i) dv}{\left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} \cdot \varphi_i = \\ &= \iiint_V \sigma(x, y, z) \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\sigma(v)(z - z_i)}{\left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} \cdot \varphi_i dv = \left\langle \sigma(v) \left| A^* \bar{\varphi} \right. \right\rangle_{L_2(V)} \\ &= \left\langle \sigma(v) \left| P_V A^* \bar{\varphi} \right. \right\rangle_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый сопряженный имеет вид:

$$A_V^* \bar{\varphi} = P_V \sum_{i=1}^N \varphi_i \frac{z - z_i}{\left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} = P_V \sum_{i=1}^N \varphi_i \frac{z - z_i}{|v - s_i|^3}; \quad \bar{\varphi} \in R^N.$$

Ясно, что из условия  $Ker A_V = \left( \text{Im } A_V^* \right)^\perp$  следует, что для любого элемента  $\bar{\varphi} \in R^N$  и  $\sigma(v) \in Ker A_V$  выполнено  $\iiint_V \sigma(v) \sum_{i=1}^N \varphi_i \frac{z - z_i}{|v - s_i|^3} dv = 0$ . Но тогда выполнено и (12).

Из теоремы П.С. Новикова следует, что множество гармонических и непрерывных на границе ограниченной, регулярной, замкнутой области  $V$  есть класс единственности. Условие ограниченности области, как это было отмечено в замечании 1, весьма существенно. Без этого условия теорема не работает.

Покажем, что если область  $V$  не ограничена, то существуют гармонические распределения плотности в  $V$  с нулевым значением вертикальной производной гравитационного потенциала на  $E_0$ .

К уравнению  $A_V \sigma(v) = u(s_0)$  применим преобразование Фурье (по  $x_0, y_0$ ). Получим:

$$2\pi \int_{z_1}^{z_2} \sigma(w, v, z) e^{-|w|z} dz = u_z(w, v) / \gamma, \quad (7.13)$$

где  $u_z(w, v), \sigma(w, v, z)$  – есть преобразование Фурье функций  $u_z(s_0)$  и  $\sigma(v)$  по переменным  $x, y$  соответственно (напомним, что оси  $XOY$  и  $X_0, 0, Y_0$  совмещены), а  $|W| = (w^2 + v^2)^{1/2}$ .

Будем искать теперь решение уравнения (13) в виде  $\sigma_1(w, v, z) = \varphi(w, v) e^{-|w|z}$  и  $\sigma_2(w, v, z) = \psi(w, v) e^{|w|z}$ , соответственно. Здесь:  $\varphi(w, v), \psi(w, v)$  – искомые функции. После тривиальных подстановок выражений для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в (13) получаем:

$$\sigma_1(w, v, z) = \frac{u_z(w, v) e^{-|w|z} |W|}{\pi \cdot \gamma \cdot \left( e^{-2|w|z_1} - e^{-2|w|z_2} \right)}; \quad (7.14)$$



$$\sigma_2(w, v, z) = \frac{u_z(w, v) e^{|w|z}}{2\pi\gamma \cdot (z_2 - z_1)} . \quad (7.15)$$

Если функцию  $u_z(w, v)$  выбрать так, чтобы функция  $u_z(w, v) \cdot e^{|w|z}$  была квадратично интегрируемой при  $z \leq 2z_2 - z_1$  и, следовательно, квадратично интегрируемо и ее обратное преобразование Фурье для этих значений  $z$ , то, в силу неравенств  $z_2 < z_1$  и

$$e^{-2|w|z_1} - e^{-2|w|z_2} \geq 2|W|e^{-2|w|z_2} ,$$

формулой (14) определен некоторый элемент из  $L_2$ , преобразование Фурье (обратное) которого есть гармоническая функция. Точно также обратное преобразование Фурье функции (15) по переменным  $w, v$  есть гармоническая функция, и наложенных ранее условий на  $u_z(w, v)$  достаточно, чтобы соотношением (15) была определена функция из  $L_2(V)$ . Каждая из них соответствует одному и тому же полю, спектр которого есть  $u_z(w, v)$ . Беря их разность, получаем, что соотношением

$$\Delta\sigma_z(w, v, z) = \left\{ \frac{e^{-|W| \cdot z}}{\pi\gamma \cdot (e^{-2 \cdot |W| \cdot z_1} - e^{-2 \cdot |W| \cdot z_2})} - \frac{e^{|W| \cdot z}}{2\pi\gamma \cdot (z_2 - z_1)} \right\} \quad (7.16)$$

определена функция, обратное преобразование Фурье которой по переменным  $w, v$  есть гармоническая функция (в силу гармоничности  $\sigma_1(v)$  и  $\sigma_2(v)$ ), и этой функции соответствует нулевое значение вертикальной производной гравитационного потенциала на  $E_0$ . Таким образом, для неограниченной области существуют гармонические функции, принадлежащие ядру оператора прямой задачи с полем на  $E_0$ .

Поскольку  $A_V$  – линейный ограниченный оператор из  $L_p(V)$  в  $L_q(E_0)$ , то  $\text{Ker}A_V$  – замкнутое пространство в  $L_p(V)$ . Следовательно, можно определить фактор-пространство  $[L_p(V)]$  пространства  $L_p(V)$  по ядру оператора  $A_V$ . Это пространство состоит из классов смежности вместе с заданным элементом, содержащим и все элементы, эквивалентные ему по гравитационному полю. Иными словами, классами смежности являются всевозможные элементы вида  $[\sigma(v)] = \sigma(v) + \text{Ker}A_V$ . Легко проверить, что два класса смежности либо совпадают, либо не пересекаются. Оператор  $A_V$ , рассматриваемый на фактор – пространстве  $[L_p(V)]$ , уже является взаимнооднозначным и непрерывным, если норму  $\|[\sigma(v)]\|_{L_p}$  в  $L_p(V)$  определить условием:

$$\|[\sigma(v)]\|_{L_p} = \min_{\sigma(v) \in [\sigma(v)]} \|\sigma(v)\|_{L_p} . \quad (7.17)$$

Область значений этого оператора совпадает с областью значений оператора  $A_V$ , а область определения есть банахово пространство, состоящее из описанных классов смежности. Тогда, в силу доказанной теоремы 3,  $A_V$  не может иметь ограниченного обратного. Эквивалентное этому утверждению сужение  $A_V$  на  $(\text{Ker}A_V)^\perp$  не имеет ограниченного обратного.

Проведенный анализ приводит к следующим выводам:

1. Обратная задача в классе распределений плотности может быть решена для любой правой части из  $L_p(E_0)$  с любой наперед заданной точностью.
2. Решение неединственное и определено с точностью до произвольного элемента из  $\text{Ker}A_V$ , являющегося замкнутым подпространством в  $L_p(V)$ .

3. Оператор  $A_V$ , определенный на подпространстве в  $L_2(V)$ , состоящем из распределений, принадлежащих  $\overline{\text{Im } A_V}^*$ , не имеет ограниченного обратного. Иными словами, сужение  $A_V$  с  $L_2(V)$  на  $\overline{\text{Im } A_V}^*$  не имеет ограниченного обратного.

Таким образом, обратная задача гравиметрии является некорректной. Для нее не выполнено ни одного из условий корректности по Адамару.

В процессе доказательства того, что множество значений оператора (1) есть множество первой категории в  $L_p(E_0)$  при  $1 < p < \infty$ , было показано, что таковой является и область значений оператора (11), доставляющего решение задачи Дирихле для полупространства. Это означает, что обратная задача для (11) является неустойчивой из  $L_p(E_0)$  в  $L_p(V)$  и, кроме того, не для всех  $u(s_0)$  из  $L_p(E_0)$  она разрешима. Итак, для задачи аналитического продолжения потенциального поля в нижнее полупространство (обратная задача к аналитическому продолжению поля в верхнее полупространство, доставляемому интегралом Пуассона): решение не всегда существует, решение неустойчиво из  $L_p(E_0)$  в  $L_q(E_0)$ .

Нетрудно доказать и то, что оператор  $B$  имеет в качестве области значений множество первой категории и в пространстве непрерывных на  $E_0$  функций  $C(E_0)$ . Для этого следует продемонстрировать неограниченность обратного оператора на пространстве функций  $C(E_0)$ . Рассмотрим множество из  $C(E_0)$  функций, производная которых в направлении оси  $OY$  равна нулю (выполнены условия двумерности). Тогда аналог соотношения (11) запишется так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0 u_z(x_0, 0) dx_0}{x_0^2 + z_0^2} = u_z(x_0, -z_0),$$

где  $u_z(x_0, 0)$  и  $u_z(x_0, -z_0)$  – след на оси  $OX$  функций  $u_z(x_0, y_0, 0)$  и  $u_z(x_0, y_0, -z_0)$  соответственно. Выберем в качестве  $u_z(x_0, -z_0) = \alpha \cdot \sin(n \cdot x_0)$ . Тогда под интегралом, для того чтобы он превратился в тождество, необходимо поставить вместо  $u_z(x_0, 0)$  функцию  $\alpha \cdot e^{nz_0} \cdot \sin(nx_0)$ . При  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $\sin(n \cdot x_0)$  слабо сходится к нулю, в то же время  $\alpha \cdot e^{nz_0} \cdot \sin(nx_0)$  при  $n \rightarrow \infty$  не является слабо сходящейся последовательностью. Это противоречит требованию непрерывности. Таким образом, оператор, обратный к  $B$ , не является слабо непрерывным, тем более он не является и сильно непрерывным.

## 7.2. Экстремальные классы для распределения плотности

Запись (1) оператора прямой задачи гравиметрии для распределения плотности не учитывает два важных с прикладной точки зрения обстоятельства. Во-первых, реально гравитационное поле задано на некоторой поверхности, а, во-вторых, оно задано в дискретном, и более того, конечном наборе точек этого рельефа. Поэтому соотношение (1) должно быть обобщено соотношением:

$$\iiint_V \frac{\sigma(v)[z - \psi(x_0, y_0)] dv}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}, \quad (7.18)$$

записываемом в той же самой операторной форме:

$$A_V \sigma(v) = u(s_0).$$

Здесь функция  $\psi(x_0, y_0)$  ассоциируется с описанием рельефа, на котором задано поле  $u_z(x_0, y_0)$ . Правая часть в (18) определена либо для всех  $s_0 \in E_0$ , либо для некоторого множества точек  $\Gamma$  из  $E_0$ .

Для того чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что в конкретной выкладке следует особо учитывать рельеф и способ задания поля, для (18) будем использовать запись

$$A_V(\psi, \mu)\sigma(v) = u(s_0). \quad (7.19)$$

Причем в (18) правая часть – это еще не наблюдаемая, несмотря на то, что учтено и влияние рельефа, и конечность точек наблюдения. Неучтенными остается множество факторов, таких как влияние масс вне области  $V$ , несовпадение вертикальной и нормальной производных и многое другое, требующее уточнения и операций редуцирования наблюдаемой к идеализированному соотношению (18). Легко увидеть, что если  $\psi(x_0, y_0) \geq 0$  является однозначной функцией и область  $V$  целиком лежит в  $E_-$ , то

$$\left\| \frac{[z - \psi(x_0, y_0)]dv}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} \right\|_{L_q(E_0)} \leq \left\| \frac{zdv}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [z]^2]^{3/2}} \right\|_{L_q(E_0)}.$$

Тогда, из теоремы 1, приведенной в 7.1, следует, что  $A_V$ , определенный соотношением (18), – ограниченный оператор из  $L_p(V)$  в  $L_q(E_0)$  для всех  $1 < p, q < \infty$ , если  $V$  ограничена, и для  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , если  $V$  не ограничена. Обобщенным выражением для сопряженного к  $A_V$  оператора  $A_V^*$  будет:

$$A_V^*(\psi, \mu)\varphi(s_0) = P_V \iint \frac{\varphi(s_0)[z - \psi(s_0)]d\mu(s_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - \psi(s_0))]^2]^{3/2}}, \quad (7.20)$$

где  $d\mu(s_0)$  есть мера на области задания  $u_z(s_0)$ . Если  $u_z(s_0)$  задано для всех  $s_0 \in E_0$ , то  $d\mu(s_0) = dx_0 dy_0$ , и (20) трансформируется к аналогу (9):

$$A_V^*(\psi, \mu)\varphi(s_0) = P_V \iint_{E_0} \frac{\varphi(s_0)[z - \psi(s_0)]dx_0 dy_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - \psi(s_0))]^2]^{3/2}}. \quad (7.20-a)$$

Если  $u_z(s_0)$  задано в конечном множестве  $N$  точек  $x_i, y_i, z_i = \psi(x_i, y_i)$  из  $E_0$ , то  $d\mu(s_0)$  есть атомическая мера на  $E_0$ , и (20) примет вид:

$$A_V^*(\psi, \mu)\varphi(s_0) = P_V \sum_{i=1}^N \varphi_i \frac{z - \psi(x_i, y_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - \psi(x_i, y_i))]^2]^{3/2}}, \quad (7.20-b)$$

где  $\{x_i, y_i, z_i = \psi(x_i, y_i)\}$  – точки, в которых задано  $u_z(s_0)$ .

Это следует из цепочки равенств, повторяющих с небольшими дополнениями (10):

$$\begin{aligned} \langle A_V(\psi, \mu)\sigma(v) | \varphi(s_0) \rangle_{L_2(E_0)} &= \iiint_{E_0} \iiint_V \frac{\sigma(x, y, z)[z - \psi(s_0)]dxdy}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} d\mu(s_0) \cdot \varphi(s_0) ds_0 = \\ &= \iiint_V \sigma(x, y, z) \cdot \iiint_{E_0} \frac{\varphi(s_0) \cdot [z - \psi(s_0)] \cdot d\mu(s_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} dv = \langle \sigma(v) | A_V^*(\psi, \mu)\varphi(s_0) \rangle_{L_2(V)} \\ &= \langle \sigma(v) | P_V A_V^*(\psi, \mu)\varphi(s_0) \rangle_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Все эти соотношения объединяем записью (20).

Сопряженные операторы участвуют в конструкции идеальных и почти идеальных экстремальных классов (см. гл. 5), доставляющих согласованную со способом задания поля конструкцию, на которых решение обратной задачи существует (существует с любой наперед заданной точностью для почти идеальных классов), единственно и осмысленно с точки зрения

оптимальности уклонения от заданного элемента. Последнее обеспечивает содержательное и конструктивное применение метода минимальных корректив. Имея выражение для оператора  $A_V^*(\psi, \mu)$ , сопряженного к  $A_V(\psi, \mu)$ , легко получить выражение для почти идеальных экстремальных классов, введенных в 5.3. Напомним, что если оператор  $F$  линеен, имеет ограниченный обратный и  $\text{Ker} F \cap \text{Ker} A_V(\psi, \mu) = 0$ , то идеальный экстремальный класс в пространстве  $L_p(V)$  Идеальный экстремальный класс распределений плотности в пространстве  $L_p(V)$  имеет вид:

$$\mathfrak{K}(A_V(\psi, \mu), F, L_p) = \{\sigma(v) : F^* \left\{ (F\sigma(v))^{p-1} \text{sign}^{p-1}(F\sigma(v)) \right\} \in \overline{\text{Im}} A_V^*(\psi, \mu)\}. \quad (7.21)$$

Каждый элемент из ядра оператора (1) одновременно является и элементом ядра оператора (18). Это очевидное утверждение. Действительно, если распределение плотности таково, что гравитационное поле от него тождественно равно нулю всюду на  $E_0$  и, как следствие (в силу интеграла Пуассона) всюду в  $E_+$ , то тем более оно равно нулю на любом конечном множестве точек из  $E_+$  и любой поверхности в  $E_+$ . ( $\text{Ker} A_V \subseteq \text{Ker} A_V(\psi, \mu)$ , где  $A_V(\psi, \mu)$  обозначает (18) в отличие от (1). Но, переходя к ортогональным дополнениям, которые связаны со значениями сопряженных операторов, тут же получаем

$$\overline{\text{Im}} A_V^* = (\text{Ker} A_V)^\perp \supseteq (\text{Ker} A_V(\psi, \mu))^\perp = \overline{\text{Im}} A_V^*(\psi, \mu).$$

Но это означает, что область значений сопряженного к  $A_V$  оператора  $A_V^*$  включает в себя все элементы из  $A_V^*(\psi, \mu)$  и, следовательно, экстремальные классы  $\mathfrak{K}(A_V(\psi, \mu), F, L_p)$  можно рассматривать одновременно как и элементы из  $\mathfrak{K}(A_V, F, L_p)$ . Изучения свойств экстремальных классов, и, как следствие, свойств решений обратной задачи позволяет в дальнейших рассмотрениях обращаться в основном к случаю  $\psi(s_0) = 0$ . Будем рассматривать поле  $u_z(s_0)$  заданным либо всюду на  $E_0$ , либо в конечном множестве точек  $\Gamma$  из  $E_0$ . Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство и, учитывая, что вид оператора прямой задачи фиксирован, для соответствующих экстремальных классов будем использовать обозначение  $\mathfrak{K}(E_0, F, L_p)$  либо  $\mathfrak{K}(\Gamma, F, L_p)$ , а плотные в них подмножества, образующие почти Почти идеальный экстремальный класс распределений плотности в пространстве  $L_p(V)$  идеальные экстремальные классы, обозначаются  $\mathfrak{K}(E_0, F, L_p)$  и  $\mathfrak{K}(\Gamma, F, L_p)$  соответственно. Тогда:

$$\mathfrak{K}(E_0, F, L_2) = \left\{ \sigma(v) : \sigma(v) = F^{-1} F^{*-1} P_V \iint_{E_0} \frac{\varphi(s_0) z ds_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right\}; \quad (7.22)$$

$$\mathfrak{K}(\Gamma, F, L_2) = \left\{ \sigma(v) : \sigma(v) = F^{-1} F^{*-1} P_V \sum_{i=1}^N \varphi_i \frac{z}{\left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right\}. \quad (7.23)$$

Оператор проектирования на область  $P_V$  в выражениях (22, 23) и им аналогичных можно опускать, в связи с тем очевидным обстоятельством, что изучаемые плотностные распределения рассматриваются только в пределах области  $V$ . Далее, в силу того, что множество  $\Gamma$  конечномерно и замыкание в конечномерном линейном пространстве совпадает с исходным пространством, то  $\mathfrak{K}(\Gamma, F, L_2) = \mathfrak{K}(\Gamma, F, L_2)$ .

Далее примем, что если вместо символа  $E_0$  либо  $\Gamma$  в выражении для экстремального класса либо в другом предложении, где участвуют множества  $E_0$  или  $\Gamma$ , стоит символ “\*”, то формулируемое предложение в равной мере относится как к случаю поля, заданного всюду в  $E_0$ , так и к случаю, когда поле задано на множестве  $\Gamma$ .

*Определение 1.*  $E_0$  (либо  $\Gamma$ ) – эквивалентным перераспределением ( $E_0$  либо  $\Gamma$ ) – эквивалентное перераспределение распределения плотности  $\sigma(v)$  (\*-эквивалентным) называется преобразование, оставляющее неизменным значение оператора  $A_V(\psi, \mu)\sigma(v) = u(s_0)$ . В частности, неизменным  $A_V\sigma(v)$  для всех  $s_0 \in E_0$  (либо  $s_0 \in \Gamma$ ).

Операции \*-эквивалентного перераспределения можно дать определение с использованием операторной символики. Действительно, если обозначить (в соответствии с общими обозначениями из (3.2))  $\Omega_u(A_V(\psi, \mu))$  класс эквивалентности для элемента  $\sigma(v) : A_V(\psi, \mu)\sigma(v) = u(s_0)$ , совпадающий с классом смежности  $[\sigma(v)] = \sigma(v) + KerA(\psi, \mu)_V$ , введенным в разделе 7.1, то оператор \*-эквивалентного перераспределения определен условием:

$P_X(\Omega_u(A_V(\psi, \mu)), \sigma(v)) \equiv P_X([\sigma(v)], \sigma(v))$  есть оператор, в частности, оператор проектирования в норме пространства  $X$ , отображающий произвольное распределение плотности в элемент из своего класса эквивалентности.

В процедурах эквивалентного перераспределения важную роль играет различие между  $E_0$   $\Gamma$  – эквивалентным перераспределением. Поэтому введем дополнительное обозначение. Обозначим  $\Omega_u(A_V(\psi, \mu))$  через  $\Omega_u(*)$ , и  $P_X(\Omega_u(*), \sigma(v))$  – оператор  $E_0$  либо  $\Gamma$ -эквивалентного перераспределения.

Для операции эквивалентного перераспределения использовано то же символическое обозначение, что и для операции проектирования. Это связано с тем, что любой оператор проектирования на класс эквивалентности, по определению, является эквивалентным перераспределением. Поэтому роль индекса  $X$  в его определении играет вид нормы в соответствующем банаховом пространстве, в котором это проектирование осуществляется.

Простейшей операцией эквивалентного перераспределения является добавление к распределению плотности элемента из ядра оператора  $A_V(\psi, \mu)$ . (Ядра операторов  $A_V$ , в которых поле  $u(s_0)$  определено для  $s_0 \in E_0$  либо для  $s_j \in \Gamma$  нетождественны.) Другой тривиальный пример эквивалентного перераспределения – тождественный оператор.

Прикладной смысл оператора эквивалентного перераспределения состоит в том, чтобы получить другое, эквивалентное по полю, но отличающееся по своим свойствам распределение. Например, в качестве такого свойства может выступать условие оптимальности вновь получаемого распределения. В этом случае необходимо иметь процедуру эквивалентного перераспределения, обеспечивающую принадлежность нового распределения плотности заданному экстремальному классу.

**Теорема 6.** Пусть  $F$  – линейный, взаимнооднозначный и взаимнонепрерывный оператор из  $L_2(V)$  в  $L_2(V)$ . Тогда оператор

$$P_{L_2}(\aleph(*, F, L_2), \sigma(v)) = \xi(v) : \|F(\xi(v) - \sigma(v))\|_{L_2} = \min_{\eta(v) \in \aleph(*, F, L_2)} \|F(\eta(v) - \sigma(v))\|_{L_2}. \quad (7.24)$$

является оператором \*-эквивалентного перераспределения на экстремальный класс  $\aleph(*, F, L_2)$ .

Доказательство. Обозначим  $\aleph^F(*, F, L_2)$  – образ  $\aleph(*, F, L_2)$  при отображении  $F$  (это замкнутое подпространство в  $L_2(V)$ ). Тогда для  $\bar{g}(v) = F\xi(v)$  имеем:

$$\langle \bar{g}(v) - g(v) | v(v) \rangle = 0, \quad \forall v(v) \in \aleph^F(*, F, L_2),$$

где  $g(v) = F\sigma(v)$ . Или:

$$\langle F(\xi(v) - \sigma(v)) | F\eta(v) \rangle = 0, \quad \forall \xi(v) \in \aleph(*, F, L_2).$$

Но:  $\aleph(*, F, L_2) = F^{-1}F^{*-1}\overline{\text{Im } A_V(\psi, \mu)}^*$ .

Откуда:

$$\langle \xi(v) - \sigma(v) | \mu(v) \rangle = 0, \quad \forall \mu(v) \in \overline{\text{Im } A_V(\psi, \mu)}^*.$$

или, в силу теоремы о ядре:

$$\xi(v) - \sigma(v) \in \text{Ker} A_V(\psi, \mu),$$

что и доказывает требуемое.

Если  $\sigma_n$  – сходящаяся минимизирующая последовательность:

$$\begin{aligned} \|F(\sigma_n - \sigma)\|_{L_2} &= d_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma; \\ \sigma_n &\in \mathfrak{K}^F(*, F, L_2) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) &= d = \|F(\xi - \sigma)\|, \\ \|F(\sigma_n - \xi)\| &\leq \varepsilon(d_n), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon(d_n)$  – монотонно возрастающая, непрерывная функция,  $\varepsilon(0) = 0$ , то, в силу непрерывности оператора  $A_V(\psi, \mu)$ , имеем:

$$\|A_V(\psi, \mu)(\sigma_n - \xi)\| \leq \|A_V(\psi, \mu)\| \varepsilon(d_n).$$

Следовательно, для любого  $\delta > 0$  можно выбрать число  $n$  и соответствующий элемент  $\sigma_n$  из последовательности  $\{\sigma_n\}$  такой, что для всех  $m \geq n$ :

$$\varepsilon(d_n) \leq \delta.$$

Описанную процедуру численной минимизации можно рассматривать как процедуру  $\varepsilon$ -эквивалентного перераспределения (т.е. эквивалентного с точностью  $\varepsilon$ ).

Охарактеризуем теперь некоторые экстремальные классы.

Рассмотрим экстремальные классы, связанные с оператором Лапласа  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Этот оператор весьма распространен в задачах математической физики и возникает не только как оператор уравнения:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y, z) = 0,$$

которому удовлетворяют гармонические функции, но фактически во многих других уравнениях, в том числе и эволюционных, связанных с пространственным распределением некоторого параметра. Связано это с особым свойством симметрии для гармонических функций, которое проявляется в виде так называемой теоремы о среднем. Ее суть состоит в том, что среднее значение по окружности или кругу соответствующей размерности (сфере, шару) для гармонической функции равно в точности ее значению в центре круга (шара). Их «веса» равны – среда в состоянии равновесия. Если оператор Лапласа от некоторой функции больше нуля, то среднее значение «перевешивает» значение в центре – больше его. Если значение оператора Лапласа от функции, наоборот, меньше нуля, то среднее значение перевешивается значением в центре – оказывается «легче», чем значения в центре. Гармонические функции занимают особое место в математической физике. Точно также особое место в формулировках теорем единственности занимают экстремальные классы  $\mathfrak{K}(*, I, L_2)$ , элементами которых служат гармонические функции.

Поскольку ядром оператора Лапласа являются гармонические области  $V$  функции, которые, как уже указывалось, ортогональны ядру оператора прямой задачи, имеем:  $\text{Ker} A_V \cap \text{Ker} \Delta = 0$ . Далее  $\Delta$  – замкнутый оператор.

Легко видеть, что  $\mathfrak{K}(*, I, L_2) \subseteq \mathfrak{K}(*, \Delta, X)$ . Действительно<sup>32</sup>, функционал

$$\|\Delta \sigma(v)\|_X$$

имеет минимум при  $\Delta \sigma(v) = 0$ , откуда следует, что  $\sigma(v)$  – гармоническая функция. Но  $\mathfrak{K}(*, E, L_2)$  состоит из гармонических функций и является идеальным классом. Отсюда следует, что для каждого  $u(s_0) \in \text{Im} A_V$  имеется решение задачи:

<sup>32</sup>  $I$  – единичный оператор.

$$\begin{aligned} A_V \sigma(v) &= u(s_0); \\ \|\Delta \sigma(v)\|_X &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

такое, что  $\Delta \sigma(v) = 0$ , и, следовательно,  $\sigma(v) \in \mathfrak{K}(*, I, L_2)$ .

Легко получить из (21) выражение для почти идеальных экстремальных классов в пространстве  $L_p$  через выражения для  $\mathfrak{K}(*, F, L_2)$ . Действительно, пользуясь (21) и подставляя (22), получаем для элементов из  $\mathfrak{K}(*, F, L_p)$  характеристику:

$$F^* \{(F\sigma(v))^{p-1} \sin gn^{p-1}(F(\sigma(v)))\} \in \mathfrak{K}(*, I, L_2).$$

Рассмотрим далее, как выглядят экстремальные классы в Соболевских пространствах. С физической точки зрения, эти рассмотрения эквивалентны решению вопроса о целесообразности введения в критерий оптимальности информации о гладкости искомого решения ОЗГ. Точнее, о целесообразности минимизации не только отклонения искомого решения от принятого нулевого приближения (которое, в частности, может быть и нулем), но и производных этого отклонения.

**Теорема 7.** Пусть  $V$  – замкнутая ограниченная область. Тогда  $\mathfrak{K}(*, I, L_2(v))$  есть почти идеальное множество в  $\mathfrak{K}(*, I, W_2^r)$ .

Докажем предварительно следующий результат.

**Лемма.**  $\text{Ker} A_V \cap C_0^\infty(V)$  плотно в  $\text{Ker} A_V$  в метрике  $L_2(V)$ .

Доказательство леммы. Пространство  $L_2(V)$  разлагается в сумму взаимноортогональных подпространств:  $\text{Ker} A_V \oplus \mathfrak{K}(*, I, L_2)$ . Кроме того,  $C_0^\infty(V)$  плотно в  $L_2(V)$ . Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда в  $\text{Ker} A_V$  существует элемент  $g(v)$ , и ни одна последовательность  $\text{Ker} A_V \cap C_0^\infty(V)$  не сходится к  $g(v)$ . Но поскольку сходящаяся последовательность из  $C_0^\infty(V)$  к  $g(v)$  все же существует, то можно считать, что эта последовательность из  $(\text{Ker} A_V)^\perp \cap C_0^\infty(V)$ . Таким образом, получили последовательность  $g_n(v)$  из  $(\text{Ker} A_V)^\perp$ , сходящуюся к элементу из  $\text{Ker} A_V$ , что невозможно в силу взаимной ортогональности этих пространств.

Доказательство теоремы. То, что  $\mathfrak{K}(*, I, L_2)$  – почти идеальное множество, было доказано ранее. Необходимо показать включение:

$$\mathfrak{K}(*, I, L_2) \subseteq \mathfrak{K}(*, I, W_2^r).$$

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} A_V \sigma(v) = u(s_0) \in \text{Im } A_V; \\ \|\sigma(v)\|_{W_2^r} \rightarrow \min. \end{cases} \quad (7.25)$$

Для ее решения  $\sigma(v)$  имеем необходимые и достаточные условия (см. прил. 2.6):

$$\langle \sigma(v) | \xi(v) \rangle_{W_2^r} = 0, \quad \forall \xi(v) \in \text{Ker} A_V \cap C_0^\infty(V),$$

что в содержательных обозначениях приводит к:

$$\iiint_V \sum_{k=0}^r \sum_{(k)} (-1)^k \frac{\partial^k \sigma(v)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \cdot \frac{\partial^k \xi(v)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} dv = 0, \quad \forall \xi(v) \in \text{Ker} A_V \cap C_0^\infty(V). \quad (7.26)$$

В соответствии с доказанной леммой условие  $\forall \xi(v) \in \text{Ker} A_V$ , участвующее в характеристизации оптимального элемента, было заменено на:  $\forall \xi(v) \in \text{Ker} A_V \cap C_0^\infty(V)$ .

<sup>33</sup> Напомним, что  $\sum_{(k)}$  обозначает суммирование по всем индексам  $k_1, k_2, k_3$ , так что  $k_1 + k_2 + k_3 = k$ .

Интегрируя (26) по частям:

$$\iiint_V \sum_{k=0}^N \sum_{(k)} (-1)^k \frac{\partial^{2k} \sigma(\mathbf{v})}{\partial x^{2k_1} \partial y^{2k_2} \partial z^{2k_3}} \cdot \xi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0 \quad \forall \xi(\mathbf{v}) \in \text{Ker} A_V \cap C_0^\infty(V).$$

По теореме о ядре:

$$\sum_{k=0}^N \sum_{(k)} (-1)^k \frac{\partial^{2k} \sigma(\mathbf{v})}{\partial x^{2k_1} \partial y^{2k_2} \partial z^{2k_3}} \in \overline{\text{Im} A_V}^* = \mathfrak{R}(*, I, L_2) \subseteq \mathfrak{K}(*, I, L_2). \quad (7.27)$$

Таким образом, уравнение (27) характеризует класс  $\mathfrak{R}(*, I, W_2')$ . Но если  $\sigma(\mathbf{v}) \in \mathfrak{K}(*, I, L_2)$ , то и все производные любого порядка от этого распределения плотности также принадлежат этому множеству. Действительно, все производные гармонической функции – снова гармонические функции. Таким образом, множества распределений плотности  $\mathfrak{K}(*, I, L_2)$  удовлетворяют (27) и, следовательно, являются решениями задачи (25). Требуемое включение  $\mathfrak{K}(*, I, L_2) \subseteq \mathfrak{R}(*, I, W_2')$  доказано.

Из приведенного рассмотрения следует, что введение в критерий оптимальности дополнительных требований минимизации производных уклонения искомого решения от принятого нулевого приближения не приводит к появлению в решении новых свойств и, следовательно, является излишним.

Рассмотрим вопрос о том, какие условия обеспечивают минимальность уклонения искомого решения от нуля в метрике  $L_1$ .

**Теорема 8.** Знакопостоянные элементы из  $\Omega_u(E_0) \cap L_1(V)$  принадлежат  $\mathfrak{R}(E_0, I, L_2)$ .

Доказательство. Прежде всего, ясно, что два знакопостоянных элемента из  $\Omega_u(E_0)$  имеют одинаковую величину нормы в  $L_1(V)$ . Это следует из того, что для знакопостоянных элементов величина

$$\iiint_V |\sigma(\mathbf{v})| d\mathbf{v}$$

с точностью до знака равна массе искомого распределения плотности и есть инвариант для  $\Omega_u$ . Теперь покажем, что знакопостоянный элемент  $\sigma_1$  из  $\Omega_u$  имеет меньшую величину нормы в  $L_1$ , чем знакопеременный  $\sigma_2$ . Действительно, поскольку  $\sigma_2, \sigma_1 \in \Omega_u$ , то их массы  $M$  равны и:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_2(\mathbf{v}) d\mathbf{v} &= \iiint_V \sigma_1(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = M; \\ M &= \iiint_{V^+} |\sigma_2(\mathbf{v})| d\mathbf{v} - \iiint_{V^-} |\sigma_2(\mathbf{v})| d\mathbf{v} \leq \iiint_V |\sigma_2(\mathbf{v})| d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Здесь:

$$V^+ = \{\mathbf{v} \in V : \sigma_2(\mathbf{v}) \geq 0\};$$

$$V^- = \{\mathbf{v} \in V : \sigma_2(\mathbf{v}) < 0\}.$$

Теорема доказана.

Знакопостоянные элементы образуют экстремальный класс. Экстремальный класс ОЗГ в  $L_1$   $\mathfrak{K}(E_0, I, L_1)$ , однако этот класс не является классом единственности. Рассмотрим эти вопросы подробней.

С этой целью рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} A_V \sigma(\mathbf{v}) = u(s_0) \in \text{Im} A_V; \\ \sup_{\mathbf{v} \in V} |\sigma(\mathbf{v})| \rightarrow \min, \end{cases} \quad (7.28)$$

решение которой существует в силу замкнутости  $\Omega_u$  в метрике  $C(V)$ .



Пусть область  $V$ , будучи заполнена массами постоянной плотности  $\sigma_0$ , создает вертикальную производную гравитационного потенциала  $u(s_0)$ . Тогда для любого иного распределения плотности  $\sigma(v)$ :

$$|\sigma_0| < \sup_{v \in V} |\sigma(v)|.$$

Действительно, если  $\sigma(v)$  и  $\sigma_0 - E_0$  эквивалентны, то равны и их суммарные массы, а это означает, что

$$\iiint_V (\sigma_0 - \sigma(v)) dv = 0.$$

Следовательно,  $\sigma_0 - \sigma(v)$  знакопеременно, и существуют как точка  $v_1 \in V$ , где  $\sigma_0 - \sigma(v_1) < 0$ , так и точка  $v_2 \in V$ , где  $\sigma_0 - \sigma(v_2) < 0$ . Но тогда:  $\sigma_0 < \sup |\sigma(v)|$ .

Приведенным частным случаем исчерпываются ситуации, когда решение задачи (14) единственно. В частности, справедлив такой результат.

Если  $\Omega_u$  не содержит элемента  $\sigma_0 = const$ , то множество решений задачи (28) замкнуто, выпукло и содержит более одного элемента.

Замкнутость и выпуклость следуют из ограниченности и линейности оператора (1). Что касается существования более чем одного решения, если есть решение (28), отличное от  $\sigma_0 = const$ , то это следует из существования распределений плотности с как угодно малым носителем и как угодно малыми значениями, гравитационное поле от которых тождественно равно нулю. Такие примеры доставляют, в частности, вложенные шары равной, но противоположной как угодно малой массы, с плотностью, непрерывно радиально меняющейся от центра к границе. К переменному – исходному решению задачи (28) всегда можно добавить такое финитное распределение, не изменив минимального значения его верхней грани. Выполнить это можно многими способами (в разных подобластях), и тем самым, исходя из заданного, будут построены новые и новые решения задачи (28). Важно, чтобы была хотя бы одна нетождественная константа – функция координат.

Обратим внимание на то, что, как следует из приведенных выше рассмотрений, объект, занимающий область  $V$  и имеющий постоянную плотность  $\sigma_0 = const$ , минимально уклоняется от нуля во всех нормах  $L_p, 1 \leq p \leq \infty$  в своем классе эквивалентности.

Рассмотрим теперь классы решений обратной задачи гравиметрии, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной метрике. Точнее, в соответствии с принятыми обозначениями – классы  $\mathfrak{R}(E_0, F, C)$ . Примем в качестве области  $V$  уже использованную ранее горизонтальную полосу:  $\Pi = \{x, y, z : z_1 \leq z \leq z_2\}$ , а в качестве оператора  $F^{-1}$  – оператор свертки по горизонтальным координатам с функцией  $K(x, y, z)$ , аналитические свойства которой будут уточняться и определяться ниже, по мере возникающей в этом необходимости. Основой является задача:

$$\begin{cases} A_{\Pi} \sigma(v) = u(s_0); \\ \sup_{v \in V} |F \sigma(v)| \rightarrow \min. \end{cases} \quad (7.29)$$

Замена переменных (в предположении существования оператора  $F^{-1}$ ) трансформирует (29) к виду:

$$\begin{cases} \sigma(v) = F \bar{\xi}(v); \\ A_{\Pi} F^{-1} \bar{\xi}(v) = u(s_0); \\ \sup |\bar{\xi}(v)| = \sup |\xi(v)| \rightarrow \min. \end{cases} \quad (7.30)$$

Обобщенный аналог этой задачи рассматривался в п. 5.4. Далее символом  $K(v) * \xi(v)$  обозначается операция свертки двух функций  $K(v)$  и  $\xi(v)$  по горизонтальным координатам:

$$K(v) * \xi(v) = \iint_{E_0} K(x - x_0; y - y_0; z) \xi(x_0; y_0; z) dx_0 dy_0.$$

Введя функцию:

$$f(v) = \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}},$$

оператор прямой задачи в (29) переписывается:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(v) * \sigma(v) dz = \frac{u_z(s_0)}{\gamma}. \quad (7.31)$$

Это справедливо только в том случае, если в качестве носителя масс  $V$  выступает горизонтальная полоса  $\Pi$ , что и предполагается всюду далее.

Легко убедиться в том, что для любой функции  $K(v) \in L_1(V)$ :

$$f(v) * K(v) \in L_1(V) \cap C(V).$$

Пусть теперь оператор  $F$ , входящий в (29) и (30) таков, что существует функция  $G(v)$  и:

$$B\xi(v) = A_{\Pi} F^{-1} \xi(v) = \int_{z_1}^{z_2} \xi(v) * G(v) dz, \quad (7.32)$$

где  $G(v)$  положительна, оператор  $B$  линеен и ограничен из  $C(V)$  в  $C(E_0)$ , а его ядро не содержит функций, не зависящих от вертикальной координаты. Кроме того, считаем, что ядро сопряженного в  $B$  оператора содержит только ноль. Это значит, что множество его значений образует плотное в  $C(E_0)$ , множество. Задача (32) полностью эквивалентна (5.46) с точностью до обозначений (там вместо  $G(v)$  участвует  $K(v)$ ). В этом случае к задаче (30) можно применить результаты из п. 5.4, в соответствии с которыми экстремальный класс  $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$  состоит из распределений плотности  $\sigma(v)$  в  $V$ , представимых в виде:

$$\sigma(v) = F^{-1} \xi(s), \quad (7.33)$$

где  $\xi(s)$  – не зависящая от вертикальной координаты  $z$  функция из  $C(E_0)$ .

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев. Пусть  $K(z)$  – положительная и непрерывная в интервале  $[z_1, z_2]$  функция. Легко убедиться в том, что если применять в качестве функций  $G(v)$  в (32)  $G(v) = K(z) \cdot f(v)$ , то оператор  $B$  удовлетворяет требуемым свойствам. Оператор  $F$ , определяющий критерий оптимальности в (29), состоит в делении распределения плотности на функцию  $K(z)$ . Экстремальный класс  $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$  Экстремальный класс ОЗГ -  $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$  в этом случае состоит из распределений плотности, представимых в виде функции с «разделяющимися» переменными  $\sigma(v) = K(z) \cdot \xi(s)$ . Для определения функции  $\xi(s)$  имеем уравнение:

$$\int_{z_1}^{z_2} K(z) \cdot \xi(s) * f(v) dz = \frac{u_z(s_0)}{\gamma}.$$

Предполагая, что  $\xi(s) \in L_1(E_0)$ , применим к последнему равенству преобразование Фурье по переменным  $\{x, y\} = s$ . После элементарных вычислений получим:

$$\xi(\omega, v) = \frac{u_z(\omega, v)}{2\pi\gamma} \cdot \int_{z_1}^{z_2} K(z) e^{-i|\omega|z} dz,$$

где  $|w| = (\omega^2 + \nu^2)^{1/2}$ . Напомним, что преобразование Фурье функции  $f(x, y)$  обозначается  $f(\omega, \nu)$  или  $[f(x, y)]^\wedge$ . Для обратного преобразования Фурье функции  $f(\omega, \nu)$  используется обозначение  $f(x, y)$ , или  $[f(\omega, \nu)]^\sim$ .

Для решения Решение ОЗГ из  $\aleph(E_0, F, C)$   $\sigma(\nu)$  из  $\aleph(E_0, F, C)$  получаем выражение в виде неограниченного оператора:

$$\sigma(\nu) = \left[ \frac{u_z(\omega, \nu) \cdot K(z)}{2\pi\gamma \int_{z_1}^{z_2} K(z) e^{-|W|z} dz} \right]^\sim. \quad (7.34)$$

В силу результатов п. 5.3, его область определения плотна в  $\text{Im } A_{II} \subseteq C(E_0) \cap L_1(E_0)$ . Решение, доставляемое соотношением (34), как уже указывалось выше, оптимально в своем классе эквивалентности относительно критерия:

$$\sup \left| \frac{\sigma(\nu)}{K(z)} \right| \rightarrow \min. \quad (7.35)$$

Легко заметить, что заданием функции  $K(z)$  предопределен закон изменения плотности в вертикальном направлении. Таким образом, если известно, как меняется плотность в вертикальном направлении и это изменение –  $K(z)$  сохраняется в пределах пласта, то такая информация выражается в критерии оптимальности (35), а решение получается по формуле (34). В частном случае, если  $K(z) = 1$ , получаем из (34) решение В.М. Новоселицкого:

$$\sigma(\nu) = \left[ \frac{u_z(\omega, \nu) \cdot |W|}{2\pi\gamma \cdot (e^{-|W|z_1} - e^{-|W|z_2})} \right]^\sim. \quad (7.36)$$

Наглядное представление о том, как влияет выбор функции  $K(z)$  на получаемое по формуле (21) решение, можно получить из серии рисунков 2. На них представлены эквивалентные решения, а вид соответствующей функции  $K(z)$  помещен непосредственно под рисунком.

Продолжим далее по аналогии.

Если  $K(\nu)$  – заданная функция трех пространственных переменных, то определим оператор  $F^{-1}$  так, что:

$$F^{-1} \xi(\nu) = K(\nu) * \xi(\nu) = \iint_{E_0} K(x - x_0; y - y_0; z) \xi(x_0; y_0; z) dx_0 dy_0.$$

Решение обратной задачи будем искать в виде:

$$\sigma(\nu) = \iint_{E_0} K(x - x_0; y - y_0; z) \xi(x_0; y_0) dx_0 dy_0. \quad (7.37)$$

Подставляя последнее выражение в (31):

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\nu) * K(\nu) * \xi(s) dz = \frac{u_z(s_0)}{\gamma},$$

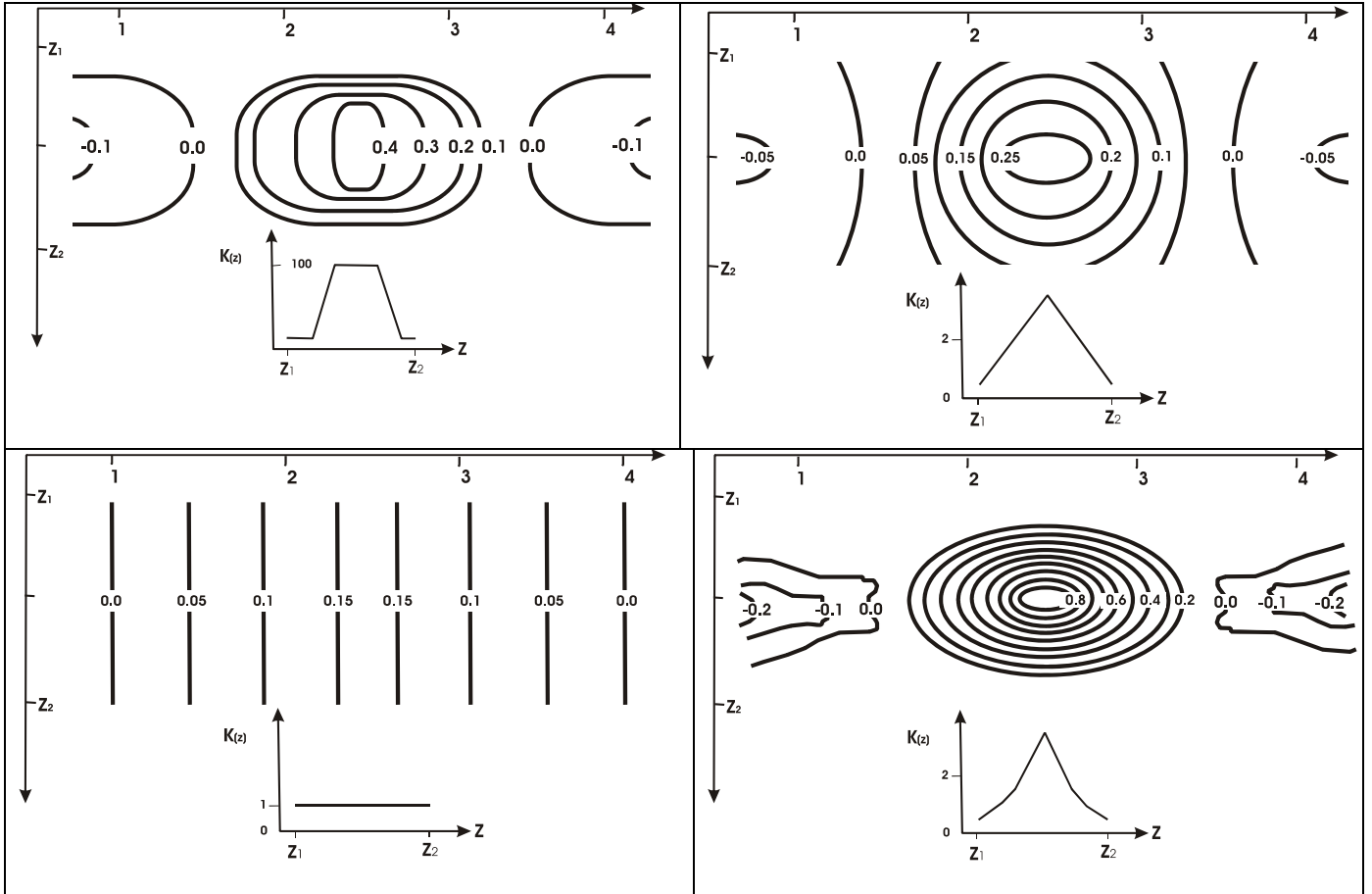


Рисунок 7.2. Эквивалентные решения

Выполняя преобразование Фурье:  $\xi(\omega, \nu) \cdot 2\pi\gamma \int_{z_1}^{z_2} K(\omega, \nu, z) e^{-|\omega|z} dz = u_z(\omega, \nu)$ , откуда полу-

чаем:

$$\sigma(\nu) = \left[ \frac{u_z(\omega, \nu) \cdot K(\omega, \nu, z)}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \int_{z_1}^{z_2} K(\omega, \nu, z) \cdot e^{-|\omega|z} dz} \right]. \quad (7.38)$$

Чтобы решение, определенное соотношением (38) (если оно существует), принадлежало экстремальному классу  $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$ , соответствующему введенному выше оператору  $F$ , необходимо, чтобы функция  $K(\nu)$ , определенная с помощью  $F$  условием

$$B\xi(\nu) = A_V F^{-1} \xi(\nu) = \int_{z_1}^{z_2} \xi(\nu) * G(\nu) dz, \text{ удовлетворяла следующим требованиям: } K(\nu) \notin \text{Ker} A_{\Pi};$$

функция  $G(\nu)$ , равная

$$K(\nu) * f(\nu) = \iint_{E_0} K(x-x_0; y-y_0; z) f(x_0; y_0; z) dx_0 dy_0 = \iint_{E_0} \frac{K(x, y) z \, dx dy}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2]^{3/2}} = G(\nu),$$

была неотрицательна, определяла линейный ограниченный оператор, и как  $\text{Ker} B$ , так и  $\text{Ker} B^*$  не содержали элементов, не зависящих от вертикальной координаты. Это означает, в частности, что если  $A_{\Pi} K(\nu) \neq 0, (K(\nu) \notin \text{Ker} A_{\Pi})$ , то

$$\int_{z_1}^{z_2} G(v) * \xi(s) dz \neq 0$$

для любой, не зависящей от вертикальной координаты и не равной тождественно нулю, функции  $\xi(s)$ . Проверить это просто. Если  $K(v) \notin \text{Ker} A_{II}$ , то и  $K(v) * \xi(s) \notin \text{Ker} A_{II}$ , так как:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{Z_1}^{Z_2} G(v) * \xi(s) dz \right]^{\wedge} &= 2\pi \int_{Z_1}^{Z_2} K(\omega, v, z) e^{-|W| \cdot z} dz \cdot \xi(\omega, v) = \\ &= [A_{II} K(v)]^{\wedge} \cdot \xi(\omega, v). \end{aligned}$$

Требование положительности  $K(v)$  является чрезмерно ограничительным. От него можно избавиться, если установить связь между классами  $\mathfrak{K}(E_0, F, C)$  и  $\mathfrak{K}(E_0, F, L_2)$  и заметить, что это требование не входит в условия на оператор  $F$  в  $\mathfrak{K}(E_0, F, L_2)$ . Необходимость таких рассуждений продиктована обеспечением плотной разрешимости уравнения

$$A_{II} \sigma(v) = u(s_0)$$

на множестве с представлением  $\sigma(v) = F^{-1} \xi(s)$ .

Пусть  $\mathfrak{L}$  – множество взаимнооднозначных операторов типа свертки по горизонтальным координатам с ядром  $K(s, z)$ , удовлетворяющим условиям:

- а)  $K(v) \in C(V)$ , и при каждом  $z : K(s, z) \in L_1(E_0)$ ;
- б)  $K(v) \geq 0$  в  $V$  (и не равно нулю тождественно).

В класс  $\mathfrak{L}$  включим оператор умножения на неотрицательную весовую функцию  $K(z)$ , непрерывную при  $z \in [z_1, z_2]$ . Оператор свертки с ядром  $K(v)$ , принадлежащий  $\mathfrak{L}$ , будем обозначать той же буквой –  $K$ .  $K\sigma(v) = K(v) * \sigma(v)$ .

Нетрудно увидеть, что множество  $\mathfrak{L}$  является алгебраически замкнутым. Это означает, что сумма и произведение операторов из  $\mathfrak{L}$  образует вновь оператор из  $\mathfrak{L}$ . Из неравенства Юнга следует, что если  $K \in \mathfrak{L}$ , то  $K$  непрерывен из  $L_p(V)$  в себя. В классе  $\mathfrak{L}$  выделим оператор  $\mathfrak{S}$

свертки с функцией  $\mathfrak{S}^{1/2}(v) = \frac{z/2}{[x^2 + y^2 + (z/2)^2]^{3/2}}$ . Это самосопряженный положительный

оператор и

$$\mathfrak{S} \sigma(v) = \mathfrak{S}^{1/2} * \mathfrak{S}^{1/2} \sigma(v) = 2\pi \iint_{E_0} \frac{\sigma(\xi, \eta, z) z d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z)^2]^{3/2}}.$$

Обратим внимание, что оператор  $\mathfrak{S}$ , действуя на функцию двух переменных  $(\xi, \eta)$ , совпадает с сопряженным к  $A_{II}$  оператором. Кроме того, этот оператор коммутирует с операторами из класса  $\mathfrak{L}$ , им обратными и к ним сопряженными.

Пусть  $K \in \mathfrak{L}$ . Положим  $F = K^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}$ . Тогда почти идеальный класс  $\mathfrak{K}(E_0, F, L_2)$  характеризуется условием

$$\mathfrak{S}^{1/2} \sigma(v) = KK^* \mathfrak{S}^{-1/2} A_{II}^* \varphi(s); \quad \sigma(v) = \mathfrak{S}^{-1/2} KK^* \mathfrak{S}^{-1/2} A_{II}^* \varphi(s) = KK^* \varphi(s).$$

Но тот же вид имеет и экстремальный класс  $\mathfrak{K}(E_0, K^{*-1} K^{-1}, C)$ , поскольку он диктует необходимость  $K^{*-1} K^{-1} \sigma(v) = \varphi(s)$ . Отсюда, в частности, следует:

$$A_{II} KK^* \varphi(s) = \frac{u_z(s_0)}{\gamma}.$$

Применяя преобразование Фурье по переменным  $\{x, y\} = s$  к выражению для  $A_{II} KK^* \varphi(s)$ , получим:

$$\sigma(\omega, v, z) e^{-|W| \cdot z/2} = e^{|W| \cdot z/2} \cdot K(\omega, v, z) \cdot K^*(\omega, v, z) \cdot \bar{e}^{|W| \cdot z} \varphi(\omega, v),$$

или

$$\sigma(\omega, \nu, z) = |K(\omega, \nu, z)|^2 \cdot \varphi(\omega, \nu).$$

Тогда:

$$\sigma(\nu) = [|K(\omega, \nu, z)|^2 \cdot \varphi(\omega, \nu)]^{\sim}. \quad (7.39)$$

Если  $\varphi(s) \in L_1(E_0)$  и, одновременно,  $\varphi(s) \in C(E_0)$ , то  $\sigma(\nu)$ , будучи квадратично интегрируемой, есть еще и непрерывная функция. Далее, если  $K(s, z) \neq 0$ , и  $D(s, z)$  – ядро свертки, соответствующее оператору  $KK^*$ , то  $D(s, z) \notin \text{Ker}A_{II}$ . Действительно, если  $D(s, z) \in \text{Ker}A_{II}$ , то

$$[A_{II} D(x, y, z)]^{\wedge} = 0 = 2\pi \cdot \int_{z_1}^{z_2} D(\omega, \nu, z) e^{-|\omega|z} dz = 2\pi \cdot \int_{z_1}^{z_2} |K(\omega, \nu, z)|^2 e^{-|\omega|z} dz, \quad (7.40)$$

что невозможно в силу положительности  $|K(\omega, \nu, z)|^2$ . Непрерывность, принадлежность к  $L_1(E_0)$  при каждом фиксированном  $z \in [z_1, z_2]$  для  $D(s, z)$  с очевидностью следует из аналогичных свойств для  $K(s, z)$ . Следовательно, формулой (39) определен также и элемент из  $\mathfrak{K}(E_0, (KK^*)^{-1}, C)$ . Таким образом, одно и то же решение обладает известными и различными экстремальными свойствами как относительно метрики  $L_2$ , так относительно  $C$ . Следовательно, решать обратную задачу можно на классе  $\mathfrak{K}(E_0, *, L_2)$ , а выбирать параметры  $K$ , исходя из принципов оптимальности в метрике  $C$ . Указанное соответствие сформулируем в виде предложения.

Пусть  $K^{-1} \in \mathfrak{L}$  и элемент  $\varphi(s)$ , параметризующий экстремальные классы  $\mathfrak{K}(E_0, *, L_2)$ , и  $\mathfrak{K}(E_0, (KK^*)^{-1}, C)$ , принадлежит  $L_1(E_0) \cap C(E_0)$ . Тогда принадлежность  $\sigma(\nu)$  одному экстремальному классу Соответствие экстремальных классов в  $C$  и  $L_2$  влечет его принадлежность к другому по следующей таблице:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathfrak{K}(E_0, \mathfrak{S}^{1/2} L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}(E_0, I, C); & \sigma(\nu) = \varphi(s); & \underline{a} \\ \mathfrak{K}(E_0, I, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}(E_0, \mathfrak{S}^{-1}, C); & \sigma(\nu) = \mathfrak{S} \varphi(s) & \underline{b} \\ \mathfrak{K}(E_0, K^{-1}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}(E_0, (KK^*)^{-1} \mathfrak{S}^{-1}, C); & \sigma(\nu) = KK^* \mathfrak{S} \varphi(s); & \underline{e} \\ \mathfrak{K}(E_0, K^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}((E_0 (KK^*)^{-1}, C); & \sigma(\nu) = KK^* \varphi(s). & \underline{c} \end{array} \right\} \quad (7.41)$$

Соотношение (41-а) следует понимать в том смысле, что распределение плотности  $\sigma(\nu)$  не зависит от вертикальной координаты.

Таким образом, если найденный из условия  $A_{II} \sigma(\nu) = u(s_0)$  элемент  $\varphi(s)$ , параметризующий экстремальные классы  $\mathfrak{K}(E_0, *, L_2)$  либо  $\mathfrak{K}(E_0, *, C)$ , априори принадлежит  $C(V) \cap L_2(V)$  (что в условиях численных расчетов всегда выполняется), то полученное решение  $\sigma(\nu)$  принадлежит не только  $\mathfrak{K}(E_0, K^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2)$ , исходя из чего была построена формула (38), но и  $\mathfrak{K}((E_0 (KK^*)^{-1}, C)$ .

Применяя преобразование Фурье к уравнению:

$$\iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma(\xi, \eta, z) \cdot z \cdot dx dy dz}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z)^2]^{3/2}} = \frac{u_z(\xi, \eta)}{\gamma},$$

получаем:

$$2\pi \int_{z_1}^{z_2} \sigma(\omega, \nu, z) e^{-|\omega|z} dz = \frac{u_z(\omega, \nu)}{\gamma}.$$

Подставляя сюда (39), легко получаем формулу для решения Решение ОЗГ в  $\mathfrak{K}((E_0 K^* K, C)$  обратной задачи из  $\mathfrak{K}(E_0, K^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2)$  или  $\mathfrak{K}((E_0 K^* K, C)$

$$\sigma(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) \cdot |K(\omega, v, z)|^2}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \int_{Z_2} |K(\omega, v, z)|^2 e^{-|W| \cdot z} dz} \right]^\sim. \quad (7.42)$$

Поскольку последняя формула дает решение и из  $\mathfrak{K}((E_0 K^* K, C)$ , то для выполнения свойств экстремальности в  $\mathfrak{K}(E_0, K^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2)$  условие положительности  $K(v)$  может быть отброшено. Формула (42), по сути, повторяет с (38), если заменить  $(K^{\frac{1}{2}})^{-1}$  на  $K^{-1}$ . Важно лишь то, что область определения оператора (42) плотна в  $\text{Im } A_{II}$ . В заключение отметим, что оператор  $K^* K$ , ядро свертки которого определено функцией  $[|K(\omega, v, z)|^2]^\sim$ , является положительным и самосопряженным. Следовательно, таковым является и его квадратный корень. Соотношения (41 в, с) тогда можно переписать:

$$\mathfrak{K}(E_0, (K^{\frac{1}{2}})^{-1}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}(E_0, (K)^{-1} \mathfrak{S}^{-1}, C); \quad \sigma(v) = K^* \mathfrak{S} \varphi(s); \quad \underline{g}$$

$$\mathfrak{K}(E_0, (K^{\frac{1}{2}})^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}((E_0 K^{-1}, C); \quad \sigma(v) = K \varphi(s). \quad \underline{c}$$

Дополнительно:  $\mathfrak{K}(E_0, L_2, I) \subset \mathfrak{R}(E_0, W_2^r, I)$ .

Нетрудно заметить, что полученное ранее соотношение (34) есть частный случай (42) при  $K(v) = K^2(z)$ . Отсюда следует и другой немаловажный вывод. Если  $K^1 = K_1^1(s) \cdot K_2^1(z)$ , а  $K^2 = K_1^2(s) \cdot K_2^2(z)$ , то оптимальные решения, соответствующие этим функциям как определяющим вид критерия оптимальности, полученные по (42), полностью совпадают, и характер этих решений определен только видом зависимости  $K_2^1(z)$ . Исходя из (42), можно убедиться, что ранее полученные гармонические решения для обратной задачи в полосе:

$$\sigma_1(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) \bar{e}^{|W|Z} \cdot |W|}{\pi \cdot \gamma \cdot (e^{-2|W|z_1} - e^{-2|W|z_2})} \right]^\sim;$$

$$\sigma_2(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) e^{|W| \cdot z}}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot (z_2 - z_1)} \right]^\sim$$

есть различные элементы из класса  $\mathfrak{K}(E_0, I, L_2)$ .

Как уже указывалось, в спектральной области связь между распределением плотности и вертикальной производной гравитационного потенциала  $u_z(s_0)$  устанавливается соотношением

$$2\pi\gamma \int_{Z_1}^{Z_2} \sigma(\omega, v, z) e^{-|W|Z} dz = u_z(\omega, v).$$

В соответствии с этим формула (42) может быть записана:

$$\sigma(v) = \left[ \frac{\int_{z_1}^{z_2} \sigma(\omega, v, z) \bar{e}^{|W| \cdot z} dz |K(\omega, v, z)|^2}{\int_{z_1}^{z_2} |K(\omega, v, z)|^2 e^{-|W| \cdot z} dz} \right]^\sim. \quad (7.43)$$

Смысл полученного соотношения состоит в том, что им установлена процедура  $E_0$  эквивалентного перераспределения элемента  $\sigma(v)$  на класс  $\aleph(E_0(K^*K)^{-1}, C)$ . Это одна из реализаций общего соотношения (24) из теоремы 6. Однако как (43), так и (42) есть неограниченные операторы с плотной в  $L_2(V)$  и  $L_2(E_0)$ , соответственно, областью определения. Поэтому для их устойчивого вычисления необходимо пользоваться развитыми в гл. 4 методами теории регуляризации.

Исходя из (27), могут быть построены частные, формальные решения обратной задачи. Положив  $|K(\omega, v, z)|^2 = 1$ , получаем:

$$\sigma(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) \cdot |W|}{2\pi\gamma \cdot (e^{-|W|z_1} - e^{-|W|z_2})} \right] \sim \quad (7.44)$$

Положив  $|K|^2 = e^{|W|z}$ , получим:

$$\sigma(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) e^{-|W|z}}{\pi\gamma \cdot (e^{-z|W|z_1} - e^{-2|W|z_2})} \right] \sim \quad (7.45)$$

Положив  $|K(\omega, v, z)|^2 = e^{|W|z}$ , имеем:

$$\sigma(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) \cdot e^{|W|z}}{2\pi\gamma \cdot (z_2 - z_1)} \right] \sim \quad (7.46)$$

Если  $V = E_-; |K(\omega, v, z)|^2 = e^{-|W|z}$ , то:

$$\sigma(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) \cdot |W| \cdot e^{-|W|z}}{2\pi\gamma} \right] \sim \quad (7.47)$$

Рассматривая эти решения, нетрудно заметить, что они дают выражения для хорошо известных в практике интерпретации гравиметрических данных трансформаций полей. Так, (46) есть продолжение поля в нижнее полупространство (в горизонтальную полосу), (47) – продолжение в верхнее полупространство и зеркальное отражение от плоскости  $E_0$  второй вертикальной производной гравитационного потенциала. Таким образом, оказывается, что эти процедуры – не просто трансформации поля, но и процедуры получения частного, формального решения обратной задачи. Это позволяет по-новому взглянуть на процесс трансформации гравитационного поля и понять их практическую значимость с точки зрения получения формальных частных, эквивалентных решений обратной задачи.

### 7.3. Конструирование решений на экстремальных классах распределений плотности

Для построения решений на сконструированных экстремальных классах для распределений плотности следует, вообще говоря, определиться, на каком именно классе следует искать решение. В силу приведенных соответствий между экстремальными классами достаточно выбрать один из них, с наиболее «прозрачными» принципами оптимальности, выражая при необходимости на основе (41) свойства одних через другие. В качестве таких «рабочих» экстремальных классов, которые взяты за базовые, примем

$$\aleph(E_0, (K^*)^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2) \leftrightarrow \aleph((E_0(K^*K)^{-1}, C) \quad ,$$



дающий представление для искомого распределения  $\sigma(v) = KK^* \varphi(s)$ . Для выделения решений, вообще говоря, следует пользоваться методами, развитыми в 5.5. Несомненно, так и будем поступать. Однако в ситуациях, когда можно считать применимыми условия, при которых выведены формулы типа (42), включая предположение, что оператор прямой задачи можно рассматривать как определенный в полосе  $\Pi$ , аналитические свойства оператора  $K$  обеспечивают выполнение всех приведенных в предшествующем разделе предположений, а с достаточной точностью для результата можно использовать преобразования Фурье, следует все же воспользоваться теми несомненными вычислительными преимуществами, которые обеспечивает существование явной аналитической записи для решения (42). В этой связи рассмотрим две вычислительные схемы.

### 7.3.1. Построение решений в спектральной форме

Принимаем за основу соотношение (42), характеризующее решение уравнения  $A_{\Pi} \sigma(v) = u(s_0)$  из экстремального класса  $\mathfrak{K}(E_0(K^*K)^{-1}, C)$ . Выберем в качестве функции  $K(x, y, z)$  нулевое приближение к исходной модели среды. Тогда  $|K(\omega, v, z)|^2$  представляет собой спектр мощности нулевого приближения. Критерий оптимальности  $\sup_{v \in V} |F\sigma(v)| \rightarrow \min$  в содержательной форме имеет вид:

$$\sup_{v \in V} |(K^*K)^{-1} \sigma(v)| = \sup_{v \in V} \iint_{E_0} D^{-1}(x - \xi; y - \eta; z) \sigma(\xi; \eta; z) d\xi d\eta \rightarrow \min. \quad (7.48)$$

Здесь  $D^{-1}(x, y, z)$  – функция, соответствующая оператору свертки  $(K^*K)^{-1}$ . Представляется, что минимизация этого выражения соответствует максимизации с обратной в смысле алгебры свертки функцией:

$$\sup_{v \in V} |(K^*K) \sigma(v)| = \sup_{v \in V} \iint_{E_0} D(x - \xi; y - \eta; z) \sigma(\xi; \eta; z) d\xi d\eta \rightarrow \max. \quad (7.49)$$

Но в силу симметрии  $D(x, y, z)$ , следующей из того, что  $D(\omega, v, z) = |K(\omega, v, z)|^2$ , критерий (49) и (48) ассоциируется с требованием максимизации функции взаимной корреляции между искомым распределением плотности и заданным нулевым приближением (точнее, его автокорреляционной функцией). Далее следует разработать устойчивый способ вычисления значения этого неограниченного оператора на заданном поле  $u_z(s)$ .

Для устойчивого вычисления значения (42)

$$\sigma(v) = \left[ \frac{u_z(\omega, v) \cdot |K(\omega, v, z)|^2}{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \int_{Z_2} |K(\omega, v, z)|^2 e^{-|W|z} dz} \right]. \quad (7.42)$$

должны быть использованы методы регуляризации, рассмотренные ранее в гл. 4. Один конкретный способ вычислений излагается ниже.

Спектры функций, входящих в (42), заменяются коэффициентами ДПФ (дискретное преобразование Фурье), вычисляемыми по формуле:

$$u(\omega_k, v_i) = \frac{1}{\sqrt{N_1 \cdot N_2}} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} u(x_p, y_j) e^{-I \frac{2\pi}{N_1} k \cdot p} \cdot e^{-I \frac{2\pi}{N_2} i \cdot j}. \quad (7.50)$$

Обратное преобразование задается соотношением:

$$u(x_p, y_j) = \frac{1}{\sqrt{N_1 \cdot N_2}} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} u(\omega_k, \nu_i) e^{I \frac{2\pi}{N_1} k \cdot p} \cdot e^{I \frac{2\pi}{N_2} i \cdot j}. \quad (7.51)$$

Здесь:  $I = \sqrt{-1}$ ;

$N_1$  – количество узлов сетки в направлении оси  $OX$ ;

$N_2$  – количество узлов сетки в направлении оси  $OY$ ;

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N_1} k; \nu_i = \frac{2\pi}{N_2} i; \quad k = 0 + N_1 - 1; \quad i = 0 + N_2 - 1.$$

Замена преобразования Фурье на ДПФ приводит к погрешностям. С целью уменьшения их влияния вместо вычисления<sup>34</sup>:

$$2\pi \int_{z_1}^{z_2} G(\omega, \nu, z) \bar{e}^{-|w|z} dz$$

осуществляется расчет ДПФ от гравитационного эффекта  $u_0(s)$ , соответствующего распределению плотности  $G(\nu)$ . Обозначим  $\Omega$  – область отличных от нуля коэффициентов Фурье функций  $u_0(s)$ ,  $u_z(s)$ ,  $G(s, z) = G(x, y, z)$ , предполагая, что коэффициенты при всех  $\omega_k, \nu_i$ ,  $k \geq N_1, i \geq N_2$  равны нулю. Кроме того, будем считать, что  $G(\omega, \nu, z)$  имеет нулевыми коэффициентами все те, которые отличны от нуля и  $u_z(s)$ . Пусть:

$$\tau = \sup_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} \frac{G(\omega_k, \nu_i, z)}{|W|^2 + 1} < \infty;$$

$$z \in [z_1; z_2]$$

$$g = \min_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} \frac{G(\omega_k, \nu_i, z)}{|W|^2 + 1} > 0;$$

$$\sigma_a(\nu) = \left[ \frac{u_z(\omega, \nu) \cdot G(\omega, \nu, z)}{u_0(\omega, \nu) + a(|W|^2 + 1)} \right] \sim. \quad (7.52)$$

Или:

$$\sigma_a(\omega_k, \nu_i, z) = \frac{u_z(\omega_k, \nu_i) \cdot G(\omega_k, \nu_i, z)}{u_0(\omega_k, \nu_i) + a(|\omega_k^2 + \nu_i^2| + 1)}. \quad (7.53)$$

Норму функций  $\sigma(\nu)$  и  $u(s_0)$  определим равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \|\sigma(\nu)\|^2 &= \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k,i} |\sigma(\omega_k, \nu_i, z)|^2 dz \\ \|u(s_0)\|^2 &= \sum_{k,i} |u(\omega_k, \nu_i)|^2 \end{aligned} \right\}. \quad (7.54)$$

Оператор (52) рассмотрим как отображение  $u_z(s_0)$  в  $\sigma(\nu)$  с нормами (54). Тем самым определится и норма оператора (52). Далее для краткости письма там, где это не приводит к недоразумениям, отождествляем  $\omega$  и  $\nu$  с  $\omega_k, \nu_i$  соответственно.

Имеем:

<sup>34</sup> Напомним, что  $|K(\omega, \nu, z)|^2 = G(\omega, \nu, z)$ .

$$\begin{aligned}
& \|\sigma_a(v)\| \leq \|u_z(s_0)\| \cdot \sup_{\substack{\omega_k, v_i \in \Omega \\ z \in [z_1, z_2]}} \frac{G(\omega_k, v_i, z)}{u_0(\omega_k, v_i) + a \cdot (\|W\|^2 + 1)} \leq \\
& \sup_{\substack{\omega_k, v_i \in \Omega \\ z \in [z_1, z_2]}} \frac{G(\omega_k, v_i, z)}{\|W\|^2 + 1} \\
& \leq \|u_z(s_0)\| \cdot \frac{\tau}{\min_{\omega_k, v_i \in \Omega} \frac{U_0(\omega_k, v_i)}{\|W\|^2 + 1} + a} = \|u_z(s_0)\| \cdot \frac{\tau}{g + a}.
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Следовательно, норма оператора (52) ограничена величиной  $\frac{\tau}{g + a}$ . Вычислим, на сколько

в норме (54) отличаются  $u_z(s_0)$  и  $u_z^a(s_0) = A_{II}\sigma_a(v)$ .

$$\delta(\omega, v) = u_z(\omega, v) - u_z^a(\omega, v) = u_z(\omega, v) \left[ 1 - \frac{u_0(\omega, v)}{u_0(\omega, v) + a \cdot (\|W\|^2 + 1)} \right] = u_z(\omega, v) \cdot \left[ \frac{a \cdot (\|W\|^2 + 1)}{u_0(\omega, v) + a \cdot (\|W\|^2 + 1)} \right].$$

Тогда после деления на  $(\|W\|^2 + 1)$ :

$$\|\delta(\omega, v)\| = \delta \leq \|u_z(\omega, v)\| \cdot \frac{a}{g + 1}, \tag{7.56}$$

следовательно, выбор  $a$  из условия

$$a(\delta) = \frac{g \cdot \delta}{\|u_z(s_0)\| - \delta}. \tag{7.57}$$

обеспечивает согласованность погрешности, с которой задано  $u_z(s_0)$  (в смысле (54)), и величины параметра регуляризации  $a$ .

При выборе параметра  $a$  следует учитывать два, в общем, противоречивых обстоятельства. С одной стороны, увеличение  $a$  приводит к повышению устойчивости решения (см. (55)). Оценка для  $a$  из (57), обеспечивая заданную величину невязки, может не обеспечивать требуемую устойчивость, и наоборот. Фактически это означает лишь то, что регуляризирующее слагаемое в знаменателе  $a \cdot (\|W\|^2 + 1)$  выбрано не лучшим образом. Для обеспечения заданного типа устойчивости и минимизации невязки воспользуемся итерационным процессом:

$$\begin{aligned}
& \sigma^0(v) = 0: \\
& \sigma^{n+1}(v) = \sigma^n(v) + \left[ \frac{(u_z(\omega, v) - u_z^n(\omega, v))G(\omega, v, z)}{u_0(\omega, v) + a \cdot (\|w\|^2 + 1)} \right],
\end{aligned} \tag{7.58}$$

где  $u_z^n(\omega, v)$  – рассчитанный дискретный спектр гравитационного поля от  $\sigma^n(v)$ .

Пусть  $m > 1$ ;  $a = \frac{g}{m-1}$ . Тогда итерационный процесс (58) сходится к элементу из

$\mathfrak{K}(E_0(K^*K)^{-1}, C)$  с гравитационным эффектом, равным  $u_z(s_0)$ , причем:

$$\|\sigma^{n+1}(v) - \sigma^n(v)\| \leq \frac{\tau}{g} \cdot \frac{m-1}{m^{n+2}} \cdot \|u_z(s_0)\|; \tag{7.59}$$

$$\|u_z(s_0) - u_z^n(s_0)\| \leq \frac{1}{m^{n+1}} \cdot \|u_z(s_0)\|. \tag{7.60}$$

Сходимость процесса (58) к постулируемому решению следует из оценок (59) и (60). Их и следует доказать.

Из (55) имеем:

$$\begin{aligned} \|\sigma^{n+1}(v) - \sigma^n(v)\| &\leq \|u_z(s_0) - u_z^n(s_0)\| \cdot \frac{\tau}{g+a} = \\ &= \frac{m \cdot \tau \cdot (m-1)}{g+m} \cdot \|u_z(s_0) - u_z^n(s_0)\|. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Из (56) следует:

$$\|u_z(s_0) - u_z^{n+1}(s_0)\| \leq \frac{1}{m} \cdot \|u_z(s_0) - u_z^n(s_0)\| \leq \frac{1}{m^{n+1}} \cdot \|u_z(s_0)\|. \quad (7.62)$$

Подставляя последнее выражение в (61), получаем (59). Результат доказан.

### 7.3.2. Построение решений на основе итерационных процессов

В случае, когда не выполнены гипотезы о задании поля на плоском рельефе и равномерным, достаточно частым шагом аппарат Фурье не применим. Следует рассматривать уравнение  $A_V(\psi, \mu)\sigma(v) = u(s_0)$  в его содержательной записи (18):

$$\iiint_V \frac{\sigma(v)[z - \psi(x_0, y_0)]dv}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}$$

и пользоваться для выделения решения из экстремального класса  $\mathfrak{K}(E_0(K^*K)^{-1}, C)$  общими методами, развитыми в 5.5. Для характеристики экстремального класса  $\mathfrak{K}((K^*K)^{-1}, C)$  воспользуемся двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что для оператора  $A_V(\psi, \mu)$  определен класс  $\mathfrak{K}(*, (K)^{-1}\mathfrak{S}^{1/2}, L_2)$ . Во-вторых, используя соответствие

$$\mathfrak{K}(E_0, K^{-1}\mathfrak{S}^{1/2}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}((E_0(KK^*))^{-1}, C),$$

распространим его и на случай  $\mathfrak{K}(*, (K)^{-1}\mathfrak{S}^{1/2}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}((K^*K)^{-1}, C)$ . Тогда распределение плотности из  $\mathfrak{K}((K^*K)^{-1}, C)$  следует искать в виде  $\sigma(v) = KK^*\varphi(s)$ , где  $\varphi(s)$  – функция, заданная таким же образом, как и поле  $u_z(x_0, y_0)$ . В результате параметризации модели поля и модели среды оказываются согласованными.

Запишем общий итерационный процесс (5.2) применительно к рассматриваемому случаю:

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1}(v) &= \sigma^n(v) + \alpha_n \cdot KK^*\varphi^n(s); \\ \varphi^n(s) &= \iiint_V \frac{\sigma^n(v)[z - \psi(x_0, y_0)]dv}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} - \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}, \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Для выбора параметра релаксации удобнее воспользоваться ее выражением в форме (5.56):

$$a_n = - \frac{\langle \varphi^n | A_V(\psi, \mu)KK^*\varphi^n(s) \rangle}{\|A_V(\psi, \mu)KK^*\varphi^n(s)\|_{L_2}^2}.$$

При вычислении скалярного произведения и нормы необходимо учитывать, что интегрирование осуществляется по мере  $d\mu(s_0)$ . В этом случае

$$\langle \varphi^n | A_V(\psi, \mu)KK^*\varphi^n(s) \rangle = \iint_{E_0} \varphi^n(s_0) \iiint_V \frac{\sigma^n(v)[z - \psi(x_0, y_0)]dv}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [z - \psi(s_0)]^2]^{3/2}} d\mu(s_0);$$

$$\|A_V(\psi, \mu)KK^* \varphi^n(s)\|_{L_2}^2 = \iint_{E_0} \left| \iiint_V \frac{\sigma^n(v)[z - \psi(x_0, y_0)]dv}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [z - \psi(x_0, y_0)]^2]^{3/2}} \right|^2 d\mu(s_0).$$

В соответствии с общими результатами из 5.5 этот итерационный процесс сходиться к единственному решению из  $\mathfrak{K}(*, (K)^{-1} \mathfrak{S}^{1/2}, L_2) \leftrightarrow \mathfrak{K}((K^*K)^{-1}, C)$  и, как следует ожидать, оптимальному в своем классе эквивалентности относительно критерия

$$\sup_{v \in V} |(K^*K) \sigma(v)| = \sup_{v \in V} \iint_{E_0} D(x-\xi; y-\eta; z) \sigma(\xi; \eta; z) d\xi d\eta \rightarrow \max.$$

## 7.4. Экстремальные классы в задачах структурной гравиметрии

Оператор прямой задачи гравиметрии для структурных задач имеет вид (2.4)

$$\sum_{i=0}^N \iint_S \frac{\Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} = \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma}, \quad (7.66)$$

$$\Delta \sigma_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i, \sigma_0 = \sigma_{N+1} = 0,$$

что в операторной форме имеет вид  $A(\mathbf{f}(s)) = u$ .

Перепад плотности  $\Delta \sigma_i$  на границах может быть функцией горизонтальных координат.

Особое значение имеют случаи, когда поле задано на поверхности рельефа в той либо иной системе точек, образующей множество  $\Gamma$ . Для того чтобы подчеркнуть эти обстоятельства и конечность области  $S$  – проекции на  $E_0$  носителя аномальных масс, будем, по аналогии с (19), использовать операторное обозначение для (66):

$$A_S(\mathbf{f}(s), \psi) = u(s_0). \quad (7.67)$$

Запись  $A(\mathbf{f}(s)) = u$  будем использовать в случае, когда поле задано всюду на  $E_0$  (рельеф плоский,  $d\mu = dx_0 dy_0$ ), область  $S$  конечна и регулярна либо бесконечна, и тогда границы выходят на асимптоты. В последнем случае асимптоты должны быть горизонтальными плоскостями, существенное отличие от которых поведения границ имеется только в конечной подобласти  $E_0$ .

Как для случая (66), так и (18) следует учитывать при расчетах, что для принципиальной возможности сопоставления  $u(s_0)$  с наблюдаемой компонентой гравитационного поля должны быть учтены массы, расположенные вне постулированной области  $V$  для случая (19) и имеющие проекцию своих источников на  $E_0$ , выходящую за  $S$ . Для структурных задач это имеет особо важное значение. Здесь нельзя отождествлять интерпретируемую компоненту поля, которая укладывается в рамки модели задачи (67), и наблюдаемую, существенно от нее отличающуюся, прежде всего, за счет влияния того, что реальные границы имеют продолжение за  $S$ . Именно для того, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в (66) для интерпретируемой компоненты поля использована запись  $\Delta u_z(x_0, y_0)$ , а не  $u_z(x_0, y_0)$ , подчеркивающая, что это приращение поля относительно иных источников. Выделенная компонента ответственна за гравитационное влияние плотностных границ внутри области, ограниченной на поверхности наблюдений площадью  $S$ . Это влияние называется влиянием боковых зон. Оно достаточно очевидно учитывается для двухмерного случая, но требует серьезных дополнительных предположений в трехмерном. При рассмотрении конкретных алгоритмов моделирования гравитационного поля для структурных задач следует особо внимательно отнестись к тому, как учитывается влияние боковых зон и особенно в трехмерном случае. Никакие надежды на то, что этот вопрос «сам собой решиться» за счет использования достаточно больших областей  $S$ , неоправданны. Погрешности, связанные с учетом влияния боковых зон, велики как при решении региональных, так зональных и локальных задач.

Оператор (66) отображает систему из  $N + 1$  плотностных границ  $\mathbf{f}(s) = \{z = f_0(s), z = f_1(s), \dots, z = f_N(s)\}$ , рассматриваемой как  $L_1^{N+1}(S) \cap L_\infty^{N+1}(S) \subset C_\infty^{N+1}(S)$  в некоторый элемент из функционального пространства на  $E_0$ . В качестве такого может выступать  $L_2(E_0)$  с мерой  $\mu$ , учитывающей способ задания поля  $u(s_0) = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}$ . Это отображение является частным случаем и по этой причине наследует свойства оператора (18). Однако, в отличие от (18) является нелинейным.

Справедлив следующий результат.

$\text{Im } A(\mathbf{f}(s)) \supseteq \text{Im } A_S(\mathbf{f}(s), \psi)$  есть множество первой категории в  $L_p(E_0)$ ;  $1 < p < \infty$ .

Существует константа  $k$  такая, что  $\|u(s_0)\|_{L_p} \leq k \cdot \sup_{i,s} |\sigma_i(s)|$ .

Это очевидные следствия аналогичных результатов для (1).

Для характеристики экстремальных классов, соответствующих уравнению (66), воспользуемся результатами 5.6.1 и, в частности, соотношением (5.59) для решения задачи (5.58). Аналогом (5.58) будет:

$$\begin{aligned} A_S(\mathbf{f}(s), \psi) &= u(s_0); \\ \|F(\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}^*(s))\|_{L_2^{N+1}} &\rightarrow \min, \end{aligned} \tag{7.68}$$

где  $\mathbf{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_N\}$  – линейный замкнутый оператор, отображающий  $L_1^{N+1}(S) \cap L_\infty^{N+1}(S)$  в себя. Операторы  $F_i$  могут быть операторами свертки с некоторыми заданными функциями  $\xi_i(s)$  либо операторами умножения на весовые функции. Содержательная запись этой задачи такова:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \iint_S \frac{\Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x,y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} &= \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma}, \\ \iint_S \sum_{i=0}^N \{F_i[f_i(s) - f_i^*(s)]\}^2 &\rightarrow \min \end{aligned} \tag{7.69}$$

Здесь  $\mathbf{f}^*(s) = \{f_0^*(s), f_1^*(s), \dots, f_N^*(s)\}$  – нулевые приближения к изучаемым границам (см. также 5.1). Компоненты задачи схематично изображены на рис. 3.

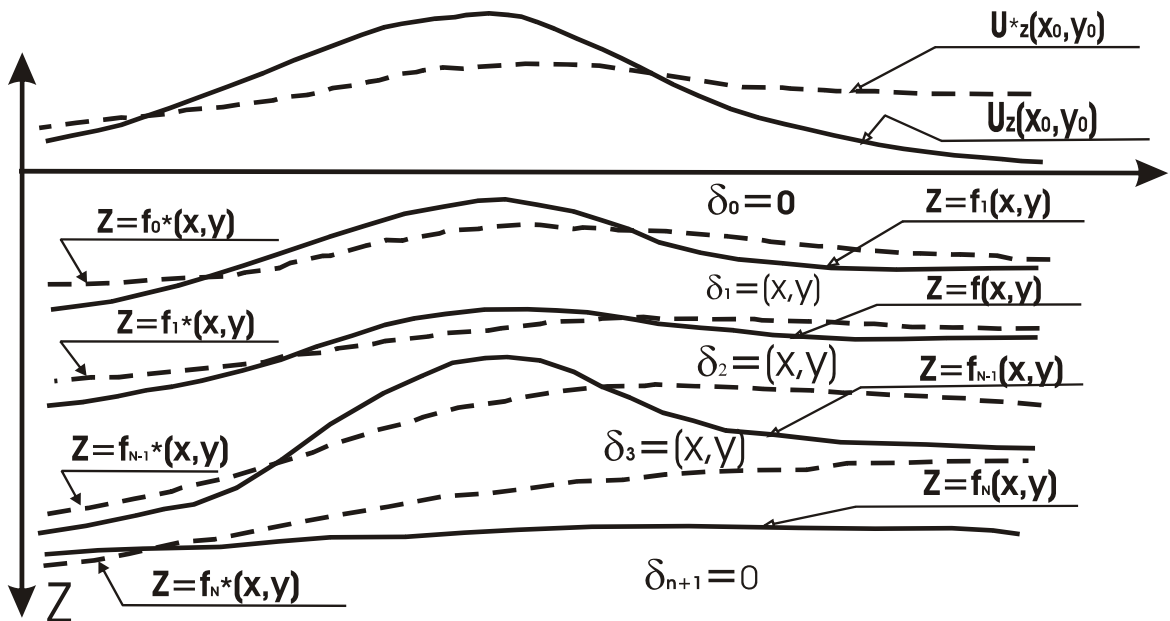


Рис. 7.3. Модель задачи

Для характеристики экстремального класса  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$  Экстремальные классы СГ  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$  необходимо вычислить сопряженный к производной оператора  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi)$ . Производная (Фреше) оператора  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi)$  в «точке»  $\mathbf{f}(s)$  есть линейный оператор  $A'_S(\mathbf{f}(s), \psi)\mathbf{h}(s)$ , действующий на  $N+1$ -мерную функцию  $\mathbf{h}(s)$  с компонентами  $h_i(s)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  и имеющий область значений, включающую в область значений оператора  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi)$ :

$$A'_S(\mathbf{f}(s), \psi)\mathbf{h}(s) = \sum_{i=0}^N \iint_S \frac{h_i(x, y) \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}}. \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(s_0) | u(s_0) \rangle_{L_2(E_0)} &= \langle \varphi(s_0) | A'_S(\mathbf{f}(s))\mathbf{h}(s) \rangle_{L_2(E_0)} = \iint_{E_0} \varphi(s_0) u(s_0) d\mu(s_0) = \iint_{E_0} \varphi(s_0) A'_S(\mathbf{f}(s))\mathbf{h}(s) d\mu(s_0) = \\ &= \iint_{E_0} \varphi(s_0) \sum_{i=0}^N \iint_S \frac{h_i(x, y) \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}} d\mu(s_0) = \\ &= \sum_{i=0}^N \iint_S \iint_{E_0} \varphi(s_0) \frac{\{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta \sigma_i d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}} h_i(x, y) dx dy = \\ &= \left\langle A'^* (\mathbf{f}(s)) \varphi(s_0) \middle| \mathbf{h}(s) \right\rangle_{L_2^{N+1}(S)}. \end{aligned}$$

Принимая относительно области значений оператора (70) те же допущения, что и в цепочке равенств (10) для определения сопряженного оператора  $-\text{Im } A'_S(\mathbf{f}(s), \psi) \subseteq L_2(E_0)$ , получим: что значение сопряженного к  $A'_S(\mathbf{f}(s), \psi)$  оператора на элементе  $\varphi(s_0)$  есть  $N+1$  вектор,  $i$ -ая компонента которого:

$$A'_i(\mathbf{f}(s), \psi)\varphi(s_0) = \iint_{E_0} \varphi(s_0) \frac{\{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta \sigma_i d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}}. \quad (7.71)$$

Отсюда следует аналог (5.59) для характеристики  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$  Характеристика  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$  для СГ:

$$f_i(x, y) = f_i^*(x, y) + F_i^{-1} F_i^{*-1} \iint_{E_0} \varphi(s_0) \frac{\{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta \sigma_i d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}}, \quad (7.72)$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

Например, в том частном случае, когда оператор  $F_i$  состоит в умножении на неотрицательную весовую функцию  $\frac{1}{\tau_i(s)}$  имеющую смысл оценки среднеквадратичной погрешности построения нулевого приближения<sup>35</sup>, (72) перепишется:

$$f_i(x, y) = f_i^*(x, y) + \tau_i^2(s) \cdot \iint_{E_0} \varphi(s_0) \frac{\{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta \sigma_i d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}}, \quad (7.73)$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

<sup>35</sup> Этот случай для двухмерного аналога задачи подробно рассматривался в 5.1.

Для случая, когда дополнительно и поле задано в конечном множестве точек  $\{s_j\} = \{x_j, y_j\} \in \Gamma$ ,  $\mu(s_0)$  – атомическая мера на  $E_0$ , характеристика экстремального класса (72) примет другой частный вид:

$$f_i(x, y) = f_i^*(x, y) + \tau_i^2(s) \cdot \sum_{j=0}^M \varphi(s_j) \frac{\{f_i(x, y) - \psi(x_j, y_j)\} \Delta \sigma_i d\mu(s_0)}{[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_j, y_j)\}^2]^{3/2}}, \quad (7.74)$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

Также, как и для задачи в классе распределений плотности, дадим характеристику экстремального класса  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$ . Характеристика экстремального класса  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$  СГ. Здесь для простоты доказательств используется оператор, определяющий поле на горизонтальной плоскости ( $\psi(x_0, y_0) = 0$ ), и, кроме того, принимается, что область  $S$  совпадает с  $E_0$ . Возникающие несобственные интегралы в этом случае будем понимать в смысле главного значения. С этой целью рассмотрим задачу:

$$\sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{\Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{1/2}} = \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma};$$

$$\|\mathbf{F}\Delta\sigma(\mathbf{h}(s))\|_{C^N(E_0)} = \sup_{\substack{x, y \in E_0 \\ i \in (0 \dots N)}} \left| F_i \left\{ \Delta \sigma_i(x, y) [f_i(x, y) - f_i^*(x, y)] \right\} \right| \rightarrow \min, \quad (7.75)$$

$$\mathbf{h}(s) = \mathbf{f}(s) - \mathbf{f}^*(s).$$

Далее мы намерены доказать, что необходимым условием для ее решения, при определенных ограничениях на  $\mathbf{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_N\}$ , служит:

$$f_i(x, y) = f_i^*(x, y) + \Delta \sigma_i^{-1}(x, y) F_i^{-1} \varphi(x, y) \quad (7.76)$$

$$i = 0 \dots N,$$

где  $\varphi(x, y)$  – непрерывная функция, одна и та же для всех  $i$ .

Это условие служит характеристикой экстремального класса  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$ .

**Утверждение.** Пусть решение задачи (75) существует, а уравнение (69) (первое уравнение в (75)) имеет решение  $\mathbf{f}(x, y)$  на классе функций с представлением (76). Тогда, если  $\mathbf{f}(x, y)$  и  $\mathbf{F}$  таковы, что:

1. множество непрерывных на  $E_0$  функций  $\varphi(x, y)$ , для которых

$$\sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{[F_i^{-1} \varphi(x, y)] f_i(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} = 0, \quad (7.77)$$

состоит только из нуля;

2. для любой абсолютно и интегрируемой на  $E_0$  функции  $\varphi(s_0)$ :

$$F_i^{-1*} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} = \iint_{E_0} \varphi(x_0, y_0) \cdot K_i(x-x_0, y-y_0, x, y) dx_0 dy_0, \quad (7.78)$$

где  $F_i^{-1*}$  – сопряженный к  $F_i^{-1}$  оператор, а  $K_i(t, \eta, x, y)$  – непрерывная и абсолютно интегрируемая по любой комбинации переменных  $t, \eta, x, y$  функция, а  $\sum_i K_i(t, \eta, x, y) \geq 0$  и не равно



нулю тождественно<sup>36</sup>, то решение уравнения в (75) на классе с представлением (76) есть решение задачи (75) и элемент экстремального класса  $\mathfrak{X}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$ .

Доказательство.

Пусть решение задачи (75) существует и есть  $\mathbf{f}(s)$ . Это значит, что для всех вариаций  $\mathbf{f}(s) + \boldsymbol{\eta}(s)$ , где  $\boldsymbol{\eta}(s) = \{\eta_0(s), \eta_1(s), \dots, \eta_N(s)\}$  принадлежит касательному к

$$\Omega_u(A(\mathbf{f}(s))) = \{\mathbf{g}(s) \in C^{N+1}(E_0) : A(\mathbf{f}(s)) = A(\mathbf{g}(s))\}.$$

Функционал  $\|\mathbf{F}\Delta\sigma(\mathbf{h}(s) + \boldsymbol{\eta}(s))\|_{C^N(E_0)}$  принимает минимальное значение при  $\boldsymbol{\eta}(s) = 0$ .

Касательное множество к  $\Omega_u(A(\mathbf{f}(s)))$  в точке  $\mathbf{f}(s)$  есть ядро оператора  $A'(\mathbf{f}(s))$  и состоит из таких  $\boldsymbol{\eta}(s) = \{\eta_0(s), \eta_1(s), \dots, \eta_N(s)\}$ , что:

$$A'(\mathbf{f}(s))\boldsymbol{\eta}(s) = \sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{\eta_i(x, y) \{f_i(x, y)\} \Delta\sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} = 0. \quad (7.79)$$

В сокращенной записи  $\boldsymbol{\eta}(s) \in \text{Ker } A'(\mathbf{f}(s))$ .

Условие (79) эквивалентно:

$$A'(\mathbf{f}(s))\mathbf{h}(s) = A'(\mathbf{f}(s))[\mathbf{h}(s) + \boldsymbol{\eta}(s)] = \bar{u}(s_0). \quad (7.80)$$

Но поскольку  $\mathbf{f}(s)$  и  $\mathbf{h}(s)$  таковы, что для всех  $\boldsymbol{\eta}(s)$ , удовлетворяющих (80), функционал  $\|\mathbf{F}\Delta\sigma(\mathbf{h}(s) + \boldsymbol{\eta}(s))\|_{C^N(E_0)}$  достигает минимума при  $\boldsymbol{\eta}(s) = 0$ , то  $\mathbf{h}(s)$  должно быть решением задачи

$$A'(\mathbf{f}(s))\mathbf{h}(s) = \bar{u}(s_0). \quad (7.81)$$

$$\|\mathbf{F}\Delta\sigma(\mathbf{h}(s))\|_{C^N(E_0)} = \sup_{\substack{x, y \in E_0 \\ i \in (0 \dots N)}} \left| F_i \left\{ \Delta\sigma_i(x, y) [f_i(x, y) - f_i^*(x, y)] \right\} \right| \rightarrow \min, \quad (7.82)$$

$$\mathbf{h}(s) = \mathbf{f}(s) - \mathbf{f}^*(s).$$

Функция  $\bar{u}(s_0)$ , вообще говоря, неизвестна. Это некоторая такая функция, которая будет доопределена после того, как будут найдены необходимые условия для искомого элемента  $\mathbf{f}(s)$  ( $\mathbf{h}(s)$ ) за счет использования уравнения в (75), которое в этом смысле заменяет (81).

Обозначим  $\mathbf{F}\Delta\sigma(\mathbf{h}(s))$  через  $\mathbf{g}(s) = \{g_0(s), g_1(s), \dots, g_N(s)\}$ . Тогда от задачи (81-82) простой заменой переменных приходим к

$$A'(\mathbf{f}(s))\Delta\sigma^{-1}F^{-1}\mathbf{g}(s) = \bar{u}(s_0).$$

$$\|\mathbf{g}(s)\|_{C^N(E_0)} \rightarrow \min$$

Что в содержательных обозначениях переписывается:

$$\mathbf{B}\mathbf{g}(s) = \sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{(F_i^{-1}g_i(x, y))f_i(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} = \bar{u}, \quad (7.83)$$

$$\sup_{i, x, y} |g_i(x, y)| \rightarrow \min.$$

Далее воспользуемся аппаратом теории двойственности для решения экстремальных задач. Поскольку  $\mathbf{B}$  линеен (относительно искомого  $\mathbf{g}(s)$ ) и ограничен (из  $C^{N+1}(E_0)$  в  $C(E_0)$ ), а функционал в (83) есть норма в пространстве  $C^{N+1}(E_0)$ , то решение (83) существует, хотя мо-

<sup>36</sup> Это означает, что ядро оператора, определенного соотношением (78) состоит только из нуля.

жет и быть не единственным. Для того чтобы  $\mathbf{g}(s)$  было решением, необходимо и достаточно, чтобы в сопряженном к  $C^{N+1}(E_0)$  пространстве нашлся функционал  $\langle \mathbf{q} | \bullet \rangle$  такой, что

$$\|\mathbf{q}\|_{(C^{N+1}(E_0))^*} \leq 1; \quad (7.84a)$$

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{g} \rangle = \|\mathbf{g}\|_{C^{N+1}(E_0)}; \quad (7.84б)$$

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{g} \rangle = 0, \quad \mathbf{g} \in \text{Ker} \mathbf{B}. \quad (7.84в)$$

Все дальнейшее состоит в доказательстве того, что если  $\mathbf{g}(s) = \{g_0(s), g_1(s), \dots, g_N(s)\}$  имеет все компоненты, равные друг другу –  $g_i(s) = g(s), \forall i \in (0, N)$ , то в условиях сформулированного утверждения функционал  $\langle \mathbf{q} | \mathbf{g} \rangle$ , обладающий свойствами (84а-в), действительно существует. Отсюда и следует, что решение задачи (75) имеет вид (76) с  $\varphi(x, y) = g(s)$ .

Из (84 в) следует, что  $\mathbf{q}$  принадлежит \*-слабому замыканию (см. теорему о ядре в Прил. 2.4) в  $L_1^{N+1}(E_0)$  множества ортогонального к  $\text{Ker} \mathbf{B}$ . Но  $(\text{Ker} \mathbf{B})^\perp = \overline{(\text{Im} \mathbf{B}^*)}$ , где замыкание понимается, а \* – слабой топологии. Но  $\text{Im} \mathbf{B}^*$  состоит из векторзначных функций, компоненты которых есть:

$$q_i(s) = F_i^{-1*} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} = \iint_{E_0} \varphi(x_0, y_0) \cdot K_i(x-x_0, y-y_0) dx_0 dy_0. \quad (7.85)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}\mathbf{g}(s) | \varphi(s) \rangle_{C(E_0)} &= \left\langle \sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{(F_i^{-1} g_i(x, y)) f_i(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \middle| \varphi(s) \right\rangle_{C(E_0)} = \\ &= \iint_{E_0} \sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{(F_i^{-1} g_i(x, y)) f_i(x, y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \varphi(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \\ &= \sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} F_i^{-1} g_i(x, y) dx dy = \\ &= \sum_{i=0}^N \left\langle \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \middle| F_i^{-1} g_i(x, y) \right\rangle_{C(E_0)} = \\ &= \sum_{i=0}^N \left\langle F_i^{-1*} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \middle| g_i(x, y) \right\rangle_{C(E_0)} = \\ &= \left\langle F_i^{-1*} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \middle| g_i(x, y) \right\rangle_{C^{N+1}(E_0)}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{g} \rangle_{C^{N+1}(E_0)} = \iint_{E_0} \sum_{i=0}^N F_i^{-1*} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} g_i(x, y) dx dy. \quad (7.86)$$

Если в (86) все  $g_i(x, y)$  равны между собой, то (86) трансформируется в функционал на  $C(E_0)$  и соотношения (84а) и (84б) будут очевидным следствием, во-первых, всегда выполняющегося по определению равенства:

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \langle x | x^* \rangle,$$

выражающего значение нормы через верхнюю грань значений функционалов, а во-вторых, плотности множества сумм функций с представлением (85) в единичном шаре пространства  $L_1(E_0) = C^*(E_0)$ . Но в силу условия о нулевом ядре оператора (87) получаем, что множество значений оператора

$$\sum_{i=0}^N F_i^{-1*} \iint_{E_0} \frac{[\varphi(x_0, y_0)] f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \quad (7.87)$$

плотно в  $L_1(E_0)$ .

Утверждение доказано.

## 7.5. Конструирование решений на экстремальных классах для плотностных границ

Базовыми соотношениями для конструирования решений обратной структурной задачи гравиметрии на экстремальных классах служат, во-первых, уравнения, характеризующие экстремальный класс. Это уравнения (72) для  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$  и уравнения (76) для  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$ . Как в том, так и в другом случае они обеспечивают параметризацию моделей структур с помощью функции  $\varphi(x, y)$ , имеющей тот же смысл и размерность, что и интерпретируемая компонента поля  $\Delta u_z(x_0, y_0)$ . Во-вторых, базовым уравнением является прямая задача. Это оператор  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi) = u(s_0)$ , определенный соотношением (66) для экстремальных классов  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$ , и оператор  $A(\mathbf{f}(s))$ , определенный соотношением

$$\sum_{i=0}^N \iint_{E_0} \frac{\Delta\sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{1/2}} = \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma}, \quad (7.88)$$

для  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), C^{N+1}, \mathbf{F}\Delta\sigma)$ . Представление (76)

$$f_i(x, y) = f_i^*(x, y) + \Delta\sigma_i^{-1}(x, y) F_i^{-1} \varphi(x, y) \\ i = 0 \dots N$$

можно использовать и в случае оператора  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi) = u(s_0)$ :

$$\sum_{i=0}^N \iint_S \frac{\Delta\sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} = \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma}.$$

Однако строгое доказательство такой возможности выходит за рамки рассматриваемых здесь вопросов.

По аналогии с задачами о распределениях плотности рассмотрим спектральную и итерационную схемы выделения решения на экстремальных классах.

### 7.5.1. Спектральная форма решения обратной задачи структурной гравиметрии на экстремальных классах

Положим  $f_i^*(x, y) = z_i, i = 1, \dots, N$ , что соответствует случаю, когда нулевые приближения к искомому границам есть горизонтальные плоскости  $z_i$ . Будем считать их асимптотами для изучаемых границ. В этом случае  $h_i(s) = f_i(s) - z_i$  — убывающая с возрастанием  $s$  функция. Кроме того, положим, что перепады плотности  $\Delta\sigma_i$  не зависят от координат, а операторы  $F_i^{-1}$  суть операторы двухмерной свертки с функцией  $K_i(x, y)$ . В этом случае представление для решения будет иметь вид

$$f_i(x, y) = z_i + \Delta\sigma_i^{-1} K_i * \varphi(x, y) = z_i + h_i(s). \\ i = 0 \dots N$$

Подынтегральное выражение в (88) можно представить в виде степенного ряда относительно  $h_i(s)$ :

$$\frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{z_i + h_i(s)\}^2]^{1/2}} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot (h_i(s))^k. \\ c_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[ \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{\xi\}^2]^{1/2}} \right] \Big|_{\xi=z_i}. \quad (7.89)$$

Заметим далее, что член  $c_0$  можно считать равным нулю и спектр функции

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[ \frac{1}{[(x)^2 + (y)^2 + \{\xi\}^2]^{1/2}} \right]$$

равен:

$$\left[ \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[ \frac{1}{[(x)^2 + (y)^2 + \{\xi\}^2]^{1/2}} \right] \right]_{x,y} \sim (-|W|)^{k-1} e^{-|W|\cdot\xi}. \quad (7.90)$$

Подставляя (76) в (88), разлагая в степенной ряд по степеням  $h_i(s)$  (89) и учитывая (90), получим:

$$\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \varphi(\omega, \nu) \cdot K_i(\omega, \nu) \cdot e^{-|W|\cdot z_i} + \\ \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W|\cdot z_i} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [(\Delta\sigma_i^{-1} \varphi(s) * K_i(s))^k]_{x,y} \sim \frac{\Delta u_z(\omega, \nu)}{\gamma}. \quad (7.91)$$

Откуда, после очевидных преобразований:

$$h_i(\omega, \nu) = \frac{\Delta\sigma_i^{-1} \cdot K_i(\omega, \nu) \times \left\{ \frac{\Delta u_z(\omega, \nu)}{\gamma} - \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W|\cdot z_i} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [(\Delta\sigma_i^{-1} \varphi(s) * K_i(s))^k]_{x,y} \right\}}{\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot K_i(\omega, \nu) \cdot e^{-|W|\cdot z_i}}. \quad (7.92)$$

Для того чтобы перейти от спектров к пространственно заданным функциям следует применить к (92) обратное преобразование Фурье. Следует отметить, что член

$$\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W|\cdot z_i} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [(\Delta\sigma_i^{-1} \varphi(s) * K_i(s))^k]_{x,y},$$

присутствующий в знаменателе, отвечает за учет высших членов в разложении (89). Он возникает как следствие спектрального соотношения (90) для решения прямой задачи, которое можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W|z_i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [h_i(x, y)^k]_{x, y} = \frac{\Delta u_z(\omega, \nu)}{\gamma}. \quad (7.93)$$

Если ограничиться лишь линейным членом в разложении (89), получим приближенную формулу:

$$h_i(\omega, \nu) = \frac{\Delta\sigma_i^{-1} K_i(\omega, \nu) \cdot \Delta u_z(\omega, \nu)}{\gamma \cdot \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot K_i(\omega, \nu) \cdot e^{-|W|z_i}}, \quad (7.94)$$

которая соответствует линейризованному приближению к структурным задачам гравиметрии.

### 7.5.2. Вычислительная схема с использованием спектральной формы решения обратной задачи структурной гравиметрии на экстремальных классах

Соотношением (92) определен неограниченный оператор. Это полностью аналогичное (42) соотношение, для устойчивого вычисления значения которого следует пользоваться методами теории регуляризации. Применим для решения этой задачи приемы, развитые для устойчивого вычисления (42). Это оправдано в силу близости между собой этих задач.

Перепишем выражение для решения (92) в форме:

$$\Delta\sigma_i \cdot h_i(\omega, \nu) = \frac{K_i(\omega, \nu) \times \{U(\omega, \nu)\}}{\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot K_i(\omega, \nu) \cdot e^{-|W|z_i}}; \quad (7.95)$$

$$U(\omega, \nu) = \frac{\Delta u_z(\omega, \nu)}{\gamma} - \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W|z_i} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [(h_i(x, y)^k)]_{x, y}. \quad (7.96)$$

Спектр функций, входящих в (95, 96) будем вычислять с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

$$U(\omega_k, \nu_i) = \frac{1}{\sqrt{N_1 \cdot N_2}} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} U(x_p, y_j) e^{-I \frac{2\pi}{N_1} k \cdot p} \cdot e^{-I \frac{2\pi}{N_2} i \cdot j};$$

$$U(x_p, y_j) = \frac{1}{\sqrt{N_1 \cdot N_2}} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} U(\omega_k, \nu_i) e^{I \frac{2\pi}{N_1} k \cdot p} \cdot e^{I \frac{2\pi}{N_2} i \cdot j}.$$

Здесь  $I = \sqrt{-1}$ .

Используются те же обозначения, что и для рассмотренной выше задачи о распределении плотности.

Пусть

$$U_0(\omega, \nu) = \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot K_i(\omega, \nu) \cdot e^{-|W|z_i}.$$

Обозначим  $\Omega$  область ненулевых коэффициентов Фурье функций  $U_0(\omega, \nu)$ ,  $U(\omega, \nu)$ ,  $K_i(\omega, \nu)$ .

Введем обозначения

$$\tau = \sup_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} \frac{K_i(\omega_k, \nu_i)}{|W|^2 + 1} < \infty;$$

$$i \in [0; N]$$

$$g = \min_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} \frac{U_0(\omega_k, \nu_i)}{|W|^2 + 1} > 0;$$

$$\Delta\sigma_i \cdot h_i^\alpha(\omega, \nu) = \frac{K_i(\omega_k, \nu_i) \times \{U(\omega_k, \nu_i)\}}{\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot K_i(\omega_k, \nu_i) \cdot e^{-|W| \cdot z_i} + a \cdot (|W|^2 + 1)}; \quad (7.97)$$

$$|W|^2 = (\omega_k)^2 + (\nu_i)^2.$$

Далее будем рассматривать нормы:

$$\|h_i(s)\| = \sum_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} |h_i(\omega_k, \nu_i)|^2;$$

$$\|U(s)\| = \sum_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} |U(\omega_k, \nu_i)|^2. \quad (7.98)$$

Теперь можно записать:

$$\Delta\sigma_i \cdot \|h_i^\alpha(s)\| \leq \|U(s)\| \cdot \sup_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} \frac{K_i(\omega_k, \nu_i)}{U_0(\omega_k, \nu_i) + a \cdot (|W|^2 + 1)} \leq$$

$$= \|U(s)\| \cdot \frac{\frac{K_i(\omega_k, \nu_i)}{|W|^2 + 1}}{\min_{\omega_k, \nu_i \in \Omega} \frac{U_0(\omega_k, \nu_i)}{|W|^2 + 1} + a} = \|U(s)\| \cdot \frac{\tau}{g + \alpha}.$$

Следовательно, норма оператора (97) ограничена величиной  $\frac{\tau}{g + \alpha}$ . Далее уклонение

$U(s)$  от  $U^\alpha(s)$ , соответствующего решению  $h_i^\alpha(\omega, \nu)$ :

$$U^\alpha(s) = \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W| \cdot z_i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [(h_i^\alpha(x, y)^k)_{x, y}],$$

вычисляется следующим образом:

$$\delta((\omega_k, \nu_i)) = U(\omega_k, \nu_i) - U^\alpha(\omega_k, \nu_i) = U(\omega_k, \nu_i) \cdot \left\{ 1 - \frac{U_0(\omega_k, \nu_i)}{U_0(\omega_k, \nu_i) + a \cdot (|W|^2 + 1)} \right\} =$$

$$U(\omega_k, \nu_i) \cdot \frac{a \cdot (|W|^2 + 1)}{U_0(\omega_k, \nu_i) + a \cdot (|W|^2 + 1)}.$$

Тогда:

$$\|\delta(s) = \delta \leq \|U(s)\| \cdot \frac{\alpha}{g + \alpha}.$$

Следовательно, выбор  $a$  из условия

$$a(\delta) = \frac{g \cdot \delta}{\|u_z(S_0)\| - \delta}, \quad (7.99)$$

обеспечивает согласованность погрешности, с которой задано  $U(s)$  (в смысле (98)), и величины параметра регуляризации  $a$ .

Далее, так же, как и в задаче, для выделения решения в классе распределений плотности при выборе параметра  $a$  следует учитывать два, в общем, противоречивых обстоятельства. С одной стороны, увеличение  $a$  приводит к повышению устойчивости решения. Оценка для  $a$  из (99), обеспечивая заданную величину невязки, может не обеспечивать требуемую устойчивость, и наоборот. Фактически это означает лишь то, что регуляризирующее слагаемое в знаменателе  $a \cdot (|W|^2 + 1)$  выбрано не лучшим образом.

Для обеспечения заданного типа устойчивости и минимизации невязки воспользуемся итерационным процессом:

$$h_i^{\alpha(0)}(x, y) = 0;$$

$$h_i^{\alpha(n+1)}(\omega_k, \nu_i) = h_i^{\alpha(n)}(\omega_k, \nu_i) + \frac{\Delta\sigma_i^{-1} \cdot K_i(\omega_k, \nu_i) \times \left\{ \frac{\Delta u_z(\omega_k, \nu_i)}{\gamma} - \frac{\Delta u_z^n(\omega_k, \nu_i)}{\gamma} \right\}}{U_0(\omega_k, \nu_i) + a \cdot (|W|^2 + 1)}; \quad (7.100)$$

где

$$\Delta u_z^n(\omega_k, \nu_i) = \gamma \cdot \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|W| \cdot z_i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-|W|)^{k-1}}{k!} [h_i^{\alpha(n)}(x, y)^k]_{x, y} \quad (7.101)$$

– рассчитанное поле от регуляризованного, с параметром регуляризации  $\alpha$ , приближением на  $n$ -ом шаге итерационного процесса.

Пусть  $m > 1$ ;  $a = \frac{g}{m-1}$ . Тогда, повторяя рассуждения, приведенные при получении оценок (59) и (60), получим, что процесс (100) сходится к элементу из  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(s)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$ <sup>37</sup> с гравитационным эффектом, равным  $\Delta u_z(s_0)$ , причем:

$$\| \Delta\sigma_i \cdot (h_i^{\alpha(n+1)}(x, z) - h_i^{\alpha(n)}(x, z)) \| \leq \frac{\tau}{g} \cdot \frac{m-1}{m^{n+2}} \cdot \| \Delta u_z(s_0) \|; \quad (7.102)$$

$$\| \Delta u_z(s_0) - \Delta u_z^n(s_0) \| \leq \frac{1}{m^{n+1}} \cdot \| \Delta u_z(s_0) \|. \quad (7.103)$$

Приведем двухмерные аналоги выведенных соотношений для решения в спектральной форме обратной задачи структурной гравиметрии. Напомним (см. гл. 2.1.3), что двухмерные аналоги – это случай, когда параметры среды и, следовательно, поля не зависят от одной из горизонтальных координат, например от координаты  $y$ . В этом случае соотношение между параметрами среды и полем интегрируется в бесконечных пределах по оси  $OY$ . Модели рассматриваются в сечении плоскостью  $y = 0$ , и все уравнения не зависят от этой координаты. Следует понимать, что речь идет не о «разрезанной в плоскости  $XOZ$  произвольной трехмерной модели, а именно о трехмерной модели, все сечения которой любой из плоскостей  $y = const$  совпадают между собой и дают исчерпывающее представление обо всей модели. Связь между конфигурацией плотностных границ и интерпретируемой компонентой поля задана соотношением:

$$A(\mathbf{f}(x)) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln[(x - x_0)^2 + (f_i(x) - \psi(x_0))^2] dx = \frac{u_z(x_0)}{\gamma},$$

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i+1},$$

которое обозначаем  $A(\mathbf{f}(x), \psi)$ , или  $A(\mathbf{f}(x))$ , если поле задано на горизонтальной линии – оси  $OX$ , которую также будем обозначать  $E_0$ . Аналогом критерия оптимальности (75) будет

$$\| \mathbf{F}\Delta\sigma(\mathbf{h}(s)) \|_{C^N(E_0)} = \sup_{\substack{x \in E_0 \\ i \in (0 \dots N)}} \left| F_i \left\{ \Delta\sigma_i(x) [f_i(x) - f_i^*(x)] \right\} \right| \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}^*(x).$$

<sup>37</sup>  $f_i(s) = z_i + h_i(s)$ .

Представлением решения этой задачи и элементом из экстремального класса  $\mathfrak{K}(A(\mathbf{f}(x)), \mathbf{F}\Delta\sigma, C^{N+1})$  будет

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i^*(x) + \Delta\sigma_i^{-1}(x F_i^{-1} \varphi(x)), \\ i &= 0 \dots N, \end{aligned}$$

где  $\varphi(x)$  – непрерывная функция, одна и та же для всех  $i$ . Теоретическая формула для решения имеет вид:

$$h_i(\omega) = \frac{\Delta\sigma_i^{-1} \cdot K_i(\omega) \cdot \left\{ \frac{\Delta u_z(\omega)}{2 \cdot \gamma} - \sum_{i=0}^N \pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|\omega|z_i} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-|\omega|)^{k-1}}{k!} [(\Delta\sigma_i^{-1} \varphi(x) * K_i(x))^k]_{\tilde{x}} \right\}}{\sum_{i=0}^N 2\pi \cdot K_i(\omega) \cdot e^{-|\omega|z_i}}.$$

В спектральной форме прямая задача рассчитывается по формуле:

$$\frac{\Delta u_z(\omega)}{2 \cdot \gamma} = \sum_{i=0}^N \pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|\omega|z_i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-|\omega|)^{k-1}}{k!} [(h_i^\alpha(x))^k]_{\tilde{x}}.$$

Итерационный процесс для решения, аналогичный (100), записывается так:

$$h_i^{\alpha(n+1)}(\omega) = h_i^{\alpha(n)}(\omega) + \frac{\Delta\sigma_i^{-1} \cdot K_i(\omega_k) \times \left\{ \frac{\Delta u_z(\omega_k)}{2 \cdot \gamma} - \frac{\Delta u_z^n(\omega_k)}{2 \cdot \gamma} \right\}}{U_0(\omega_k) + a \cdot (|\omega|^2 + 1)}; \quad (7.104)$$

$$\Delta u_z^n(\omega_k) = \gamma \cdot \sum_{i=0}^N 2\pi \cdot \Delta\sigma_i \cdot e^{-|\omega|z_i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-|\omega|)^{k-1}}{k!} [(h_i^{\alpha(n)}(x))^k]_{\tilde{x}} \quad (7.105)$$

### 7.5.3. Итерационные методы решения обратной задачи структурной гравиметрии на экстремальных классах

В ситуациях, когда поле задано на рельефе и на нерегулярной сети наблюдений, образующей уже введенное ранее множество  $\Gamma$ , применение спектральных методов ограничено. Следует использовать прямые методы вычислений по аналогии с тем, как это было сделано для задачи о распределении плотности. С этой целью воспользуемся характеристикой экстремальных классов  $\mathfrak{K}(A_S(\mathbf{f}(s), \psi), \mathbf{F}, L_2^{N+1})$ :

$$f_i(x, y) = f_i^*(x, y) + F_i^{-1} F_i^{*-1} \iint_{E_0} \varphi(s_0) \frac{\{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\} \Delta\sigma_i d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{3/2}}, \quad (7.106)$$

$i = 0, 1, \dots, N$ .

В операторной форме она записывается следующим, сокращенным образом:

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{f}^*(s) + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1} A'^*(\mathbf{f}(s)) \varphi(s). \quad (7.107)$$

В частности, можно так подобрать операторы  $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1}$ , что

$$\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1} A'^*(\mathbf{f}(s)) \varphi(s) = \{\Delta\sigma_i^{-1}(x, y) K_i \varphi(s), i = 0, 1, \dots, N\},$$

где  $K_i$  – положительно определенные, самосопряженные операторы. В этом случае (107) оказывается эквивалентным (76), если  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi) = A(\mathbf{f}(s))$ . Будем считать, что в окрестности решения  $\mathbf{f}(s)$  оператор  $A'^*(\mathbf{f}(s))$  имеет область значений не меняющуюся при изменении  $\mathbf{f}(s)$ . Это будет выполнено, в частности, если  $A_S(\mathbf{f}(s), \psi)$  регулярен в окрестности  $\mathbf{f}(s)$ .



В этом случае для выделения решения уравнения

$$\sum_{i=0}^N \iint_S \frac{\Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x,y) - \psi(x_0, y_0)\}^2]^{1/2}} = \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma}$$

на экстремальном классе (107) можно воспользоваться результатами 5.6.2.

Итерационный процесс, доставляющий решение, будет выглядеть следующим образом:

$$f_i^{n+1}(x, y) = f_i^n(x, y) + \alpha_n \cdot \Delta \sigma_i^{-1}(x, y) K_i \varphi^n(s), \quad (7.108)$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

$$f_i^0(x, y) = f_i^*(x, y);$$

$$\varphi^n(s) = \Phi^* \Phi \left\{ A_S(\mathbf{f}^n(s), \psi) - \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma} \right\}.$$

Здесь оператор  $\Phi$  имеет смысл трансформации интерпретируемой компоненты поля для наиболее рельефной компенсации невязки. Например, это может быть комбинация единичного оператора и оператора дифференцирования вплоть до заданного порядка. В этом случае будет обеспечена не только компенсация невязки, но и компенсация производных поля. Если в качестве  $\Phi$  выбрать умножение на весовую функцию, то это будет соответствовать компенсации поля с учетом весов, отражающих, например, сравнительную меру достоверности различных участков поля. Выбор параметра релаксации  $\alpha_n$ , обеспечивающего сходимость процесса, осуществляется по формуле:

$$\alpha_n = - \frac{\langle \Phi^* \varphi^n(s) | A'(\mathbf{f}^n(s)) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1} A'^*(\mathbf{f}^n(s)) \Phi^* \varphi^n(s) \rangle}{\| \Phi A'(\mathbf{f}^n(s)) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1} A'^*(\mathbf{f}^n(s)) \Phi^* \varphi^n(s) \|^2}.$$

$\Phi^*$  – сопряженный к  $\Phi$  оператор.

Наряду с формулой (108) для выбора параметра релаксации, следующей из принципа минимальных невязок, может быть использован прямой подбор оптимального параметра для пошаговой минимизации величины:

$$\delta^n(\alpha_n) = \left\| \varphi^{n+1}(s) \right\| = \left\| \Phi^* \Phi \left\{ A_S(\mathbf{f}^n(s), \psi) + \alpha_n \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1} A'^*(\mathbf{f}^n(s)) \varphi^n(s), \psi \right\} - \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma} \right\|. \quad (7.109)$$

Рассчитывая величину  $\delta^n(\alpha_n)$  для различных значений параметра релаксации  $\alpha_n$ , можно оценить оптимальное значение путем аппроксимации зависимости  $\delta^n(\alpha_n)$  по нескольким рассчитанным точкам. Такой прием оправдан в ситуациях, когда наряду с итерационным процессом (108) осуществляется дополнительная «правка» получаемого приближения. Она может осуществляться за счет имеющихся ограничений на глубины залегания границ в разных точках, условий взаимосвязи и взаимообусловленности положения границ, выходящих за рамки процедуры (108). Если обозначить  $M$  – множество, которому должны принадлежать границы, дополнительно ко всему тому, что было уже введено, то учет всех ограничений сводится к проектированию  $\mathbf{f}^{n+1}(s)$  на  $M$ . Сюда относится и требование, чтобы границы обладали некоторыми свойствами, например взаимосвязи и обусловленности. Тогда учет этих факторов приводит к модифицированному процессу:

$$\xi_i^{n+1}(x, y) = f_i^n(x, y) + \alpha_n \cdot \Delta \sigma_i^{-1}(x, y) K_i \varphi^n(s) \quad (7.110)$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

$$f_i^0(x, y) = f_i^*(x, y);$$

$$\mathbf{f}^{n+1}(x, y) = P_X(M, \xi(x, y))$$

$$\varphi^n(s) = \Phi^* \Phi \left\{ A_S(\mathbf{f}^n(s), \psi) - \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma} \right\}.$$

Здесь  $P_X(M, \mathbf{f}^n(s))$  – операция проектирования в норме пространства  $X$  (например  $X = L_2^{N+1}(S)$ ) границ  $\xi^n(s) = \{\xi_i^n(s), i = 1, 2, \dots, N\}$  на множество  $M$ . Собственно, в качестве  $P_X(M, \mathbf{f}^n(s))$  может выступать любое отображение из  $X$  на  $M$ . Именно в таком модифицированном итерационном процессе оказывается актуальной процедура прямого подбора параметра релаксации, обеспечивающего минимизацию величины.

$$\delta^n(\alpha_n) = \left\| \varphi^{n+1}(s) \right\| = \left\| \Phi^* \Phi \left\{ A_S(\mathbf{f}^n(s)) P_X(M, \mathbf{f}^n(s) + \alpha_n \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{*-1} A^*(\mathbf{f}^n(s))) \varphi^n(s, \psi) - \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma} \right\} \right\|. \quad (7.111)$$

## 7.6. Алгоритм эволюционно-динамического продолжения

В плотную к описанным итерационным процессам для выделения решений на экстремальных классах примыкают методы эволюционно-динамического продолжения для структурных задач. Общий итерационный процесс (6.20)

$$i = 0, 1, \dots;$$

$$j = 0, 1, \dots, N;$$

$$f_j(s, t_{i+1}) = f_j^i(s - \alpha_i^s \cdot V_j^i(\varphi_s^i(s_0))) + \alpha_i^a \cdot \Omega_j^i(\varphi_a^i(s_0)).$$

приобретает конкретные формы:

$$n = 0, 1, \dots;$$

$$i = 0, 1, \dots, N;$$

$$\xi_i^{n+1}(s) = f_i^n(s - \alpha_n^s \cdot V_n^i(\varphi_s^n(s_0))) + \alpha_n^a \cdot \Omega_n^i(\varphi_a^n(s_0));$$

$$\mathbf{f}^{n+1}(x, y) = P_X(M, \boldsymbol{\xi}(x, y));$$

$$\varphi^n(s_0) = \left\{ A_S(\mathbf{f}^n(s), \psi) - \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma} \right\}.$$

После того, как:

1. определен способ расчленения интерпретируемого поля на компоненты, ответственные за сдвиговые, и по вертикали, и по горизонтали, трансформации;

2. определен вид операторов  $V_i^i$  и  $\Omega_i^i$ , преобразующих невязки в соответствующие компоненты движений.

Далее следует воспользоваться уже описанной выше процедурой подбора параметров релаксации  $\alpha_n^a, \alpha_n^s$ , минимизирующих обобщенную невязку.

$$\left\| \Phi \{ \varphi^{n+1}(s) \} \right\|_Y = \left\| \Phi \left\{ A_S(\mathbf{f}^n(s), \psi) - \frac{\Delta u_z(x_0, y_0)}{\gamma} \right\} \right\|_Y = g(\alpha_n^a, \alpha_n^s, \varphi^i(s)).$$

## Библиографические замечания

Впервые обратная задача гравиметрии в форме использования критериев оптимальности для ее доопределения была поставлена в работах [1-5]. Постановка обратных задач, внешне несколько напоминающая приведенную, была использована ранее при решении задач сейсмологии и изучении глубинного строения Земли в работах G. Backus, J Gilbert [6-8]. Эти работы в кругах отечественных гравиметристов прошли незамеченными, и ссылки на них появились лишь после выхода в свет в 1983 году учебного пособия [9], в котором дано подробное описание этих работ. Однако параллель с указанными работами чисто условна. Она исчерпывается

формальным введением вариационного принципа минимума квадратичной невязки между нулевым приближением и искомым элементом для доопределения исходной недоопределенной задачи и относится к совершенно иному классу задач. Квадратичный критерий простейший и, как было показано выше, наименее содержательный, с точки зрения соответствия получаемых физико-геологических моделей реальным геологическим объектам. Критерий оптимальности как носитель априорной геолого-геофизической информации в полной мере не использовался. Исследования носили в основном аналитический характер [10].

Содержательная критериальная постановка обратной задачи гравиметрии породила целый круг взаимно-увязанных аналитических, методических и вычислительных вопросов, решение которых осуществлялось в работах В.Н. Страхова, А.И. Кобрунова, А.С. Маргулиса, С.М. Оганесяна, В.М. Новоселицкого, В.И. Старостенко. Обзор литературы можно найти в работах [11, 12].

В связи с эволюционно-динамическим продолжением, при конструировании плотностных моделей следует упомянуть работу В.Л. Данилова [13], в которой также рассматривается «ползущее движение вязкой жидкости» с заданным коэффициентом подвижности (аналог вязкости) при условии стремления невязки полей в конце движения к нулю. Несмотря на то, что использованная постановка вопроса оторвана от реальной практики интерпретации гравиметрических данных, сам метод гидродинамических аналогий можно рассматривать как аналитического предшественника метода эволюционно-динамического продолжения.

## Литература

1. Кобрунов А.И. О методе поиска оптимальных решений обратной задачи гравиметрии. Дис. на соискание ученой степени кандидата наук / А.И. Кобрунов. – Киев, 1978. 156 с.
2. Кобрунов А.И. О вариационном методе решения обратной задачи гравиразведки // Разведка и разработка нефтяных и газовых месторождений / А.И. Кобрунов, В.Н. Панасенко. – 1976. – Вып. 13. – С. 47-51.
3. Кобрунов А.И. О построении решений обратной задачи гравиразведки в классе распределений плотности // Докл. АН УССР, Б. / А.И. Кобрунов. – 1977. – №12. – С. 1077-1080.
4. Кобрунов А.И. О построении решений обратной задачи гравиразведки в классе распределений плотности // Разведка и разработка нефтяных и газовых месторождений / А.И. Кобрунов. – 1978. – Вып. 15. – С. 48-50.
5. Страхов В.Н. Об общих решениях обратной задачи гравиметрии и магнитометрии // Изв. Вузов. Геология и разведка / В.Н. Страхов. – 1978. – №4. – С. 104-117.
6. Bacrus G., Gilbert F. Nimerical applications of a formalist for geophysical iverse problems.- Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1967. v. 13, p. 247-276.
7. Bacrus G., Gilbert F. The resolving porver of gross eath data. - Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1968, v. 16, p. 169-205.
8. Bacrus G., Gilbert F. Uniquenees in the inversion of inaccurate gross Earth data Philosophical Transac tions of the Royal Society of London, 6470, A 266, p. 123-142.
9. Яновская Т.Б. Обратные задачи геофизики / Т.Б. Яновская, Л.Н. Порохова. – ЛГУ, 1983. – 209 с.
10. Weck N. Inverse Probleme der Potential theorie. - Appl.analys, 1972, v. 2, №2, p. 105-204.

## Послесловие

Геофизические методы весьма насыщены математикой. Это одна из наиболее математически емких областей практической инженерной и научной деятельности. Естественно в этой связи то, что в одном пособии охватить все аспекты этого вопроса в равной мере просто невозможно. Рассмотренные в учебном пособии математические основы теории интерпретации геофизических данных касаются, прежде всего, детерминированных и в меньшей мере эвристических моделей связей между «средой и полем». Это связано с тем, что методы построения содержательных моделей сред, а также построения их изображений за последние 10-15 лет получили существенное развитие. В то же время систематическое изложение математических основ этих методов не нашло должного отражения не только в учебной, но и научной монографической литературе. Редкое исключение – это монография Глазева В.Н [1]. Однако тираж этой и ей подобных книг таков, что рекомендовать его в учебном пособии – дело напрасное (в данном случае он равен 350 экз.) Кстати, точно также дело обстоит и с другими книгами. Так, упоминавшаяся в гл 2. великолепная книга Терещенко С.А. [2.1] имеет тираж 300 экз.

Что касается эвристических связей, лежащих в основе методов обработки данных и теории фильтрации геофизических полей, то меньшее внимание к ним продиктовано тем, что имеются прекрасные учебные пособия, и относительно доступная научная литература касающиеся этого вопроса [2-4]. Весьма полезна в этом отношении документация к распространенной в геофизической практике и доступной для получения системе «КОСКАД 3Dt» «КОМПЛЕКС СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ «КОСКАД 3Dt» Часть II. Авторы А.А. Никитин и А.В. Петров. Московский геологоразведочный университет. Последнее особо важно в связи с тем, что эта информация доступна в Internet.

Особое место занимают методы решения задач обнаружения и оценки параметров, основанные на привлечении корреляционно статистических моделей связей (статистических по классификации 1.3). Их применение ведет к наследованию статистических свойств в реконструируемой модели и необходимости последующего принятия решений с использованием либо стратегии максимума апостериорных вероятностей (Байесова стратегия) либо стратегии минимакса. Его развитием служит информационно-статистическая теория и методы решения задач комплексной интерпретации наблюдений на основе принципов стохастических эталонных физико-геологических моделей для многоальтернативного прогноза. Это самостоятельный раздел, получивший достаточно полное освещение, как в учебной, так и монографической научной литературе.[5-11].

Вопросам развития теории и методов решения обратных задач геофизики, математической теории интерпретации геофизических данных исключительно большое внимание уделял Владимир Николаевич Страхов. По сути, развитие этих направлений в последней трети 20 века и начале 21 происходило при его постоянном внимании и под влиянием его взглядов. Основные итоги и проблемные вопросы обсуждались и продолжают обсуждаться на руководимом им международном научном семинаре им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей» и Всероссийской конференции «Геофизика и математика». Материалы этих семинаров и конференций изданы и могут служить литературой для более глубокого изучения предмета. Из последних работ В.Н. Страхова на семинаре Д.Г. Успенского отметим [12,13]. В этих работах можно почерпнуть более широкую библиографию.

Принципы вариационных методов доопределения обратных задач в виде учебной литературы издавались дважды. Это работы [14,15]. Сегодня эти книги недоступны. В настоящем учебном пособии изложены существенно развитые и продвинутые результаты. Однако история и библиография вопросов мало освещены в тексте. Это сделано сознательно для того, чтобы не затруднять изложение итак насыщенного математическим аппаратом предмета. Однако без истории вопроса предмет явно не полон. В этой связи, рекомендую просмотреть работы [7.11,7.12]. Особо обращаю внимание на сборник «Труды конференции», в кн. “Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке” – сент. 1996г. - Москва, 1997, где

собраны взгляды на историю вопроса ведущих специалистов по математическим проблемам интерпретации геофизических данных.

#### Литература

1. Глазев В.Н. Комплексные модели литосферы Финноскандии. Апатиты / В.Н. Глазев. – ЗАО «КаэМ», 2003. – 252 с.
2. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации / А.А. Никитин. – М., Недра, 1986. – 342 с.
3. Рапопорт М.Б. Вычислительная техника в полевой геофизике: Учебник для вузов / М.Б. Рапопорт. – М.: Недра, 1993. – 350 с.
4. Мала С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Мала. – М.: Изд-во «Мир». – 671 с.
5. Гольцман Ф.М. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий / Ф.М. Гольцман, Т.Б. Калинина. – Л.: Недра, 1983. – 248 с.
6. Гольцман Ф.М. Физический эксперимент и статистические выводы / Ф.М. Гольцман. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 192 с.
7. Каратаев Г.И. Корреляционная схема геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий Г.И. Каратаев. – Новосибирск: Наука, 1966. – 135 с.
8. Каратаев Г.И., Геолого-математический анализ комплекса геофизических полей / Г.И. Каратаев, И.К. Пашкевич. – Киев; Наукова думка, 1986. – 168 с.
9. Каратаев Г.И. Нелинейные дисперсионные модели структурной геофизики / Г.И. Каратаев, В.К. Фурс. – Минск, 1997. – 94 с.
10. Никитин А.А. Статистические методы выделения геофизических аномалий / А.А. Никитин. – М.: Недра, 1979. – 280 с.
11. Шрайбман В.И. Корреляционные методы преобразования и интерпретации геофизических аномалий / В.И. Шрайбман, В.С. Жданов, О.В. Витвицкий. – М.: Недра, 1977. – 137 с.
12. Страхов В.Н. Будущее теории интерпретации гравитационных аномалий // В сб. «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 34-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского» / В.Н. Страхов. – М.: ИФЗ РАН, 2007. – С. 233-238.
13. Страхов В.Н. О центральной вычислительной задаче гравиметрии, магнитометрии, геодезии и геоинформатики / В.Н. Страхов. Там же, С. 238-301.
14. Кобрунов А.И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред: Учебное пособие / А.И. Кобрунов. – Киев: УМК ВО, 1989. – 100 с.
15. Кобрунов А.И. Теоретические основы решения обратных задач геофизики: Учебное пособие / А.И. Кобрунов. – Ухта: УИИ, 1995. – 226 с.

# Приложение 1. Конечномерные линейные пространства

## Вводные сведения

**Множества.** Обозначаем  $R^N$  множество объектов  $\mathbf{x}$ , представляющих собой последовательность вещественных или комплексных чисел  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . В первом случае – вещественных, во втором – комплексных последовательностей. Объекты этого множества можно покомпонентно складывать по правилу:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z} = \{z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2, \dots, z_N = x_N + y_N\},$$

получая новый элемент  $\mathbf{z}$  того же класса. Элементы из  $R^N$  можно умножать на вещественное или комплексное число  $\alpha$  по правилу:

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = \{\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_N\},$$

вновь получая элемент того же класса. Таким образом,  $R^N$  образует  $N$ -мерное линейное пространство, поскольку вместе с любыми своими элементами содержит и их линейные комбинации. Индексы, нумерующие компоненты объекта  $\mathbf{x}$ , могут располагаться внизу, как это записано выше, либо вверху. Различие между двумя этими случаями, конечно, есть, но оно появляется в вопросах, не связанных с рассматриваемыми в этой книге. Не следует также спешить и называть линейное пространство векторным или Евклидовым – понятия, наверняка, известные читателю. Дело в том, что вектора – это более частные и, в какой-то мере, сложные объекты, чем введенные элементы из  $R^N$ , хотя они и представляются своими координатами, как элементы из  $R^N$ . Например, вектора имеют такую операцию, как векторное умножение, которой нет в  $R^N$ . Еще, и это самое важное, вектора чувствительны к преобразованиям координат, определенным образом меняя свои компоненты (элементы из  $R^N$ ), при координатных преобразованиях оставаясь тем же самым вектором (вот тут-то и сказывается различие между верхними и нижними индексами). В пространстве  $R^N$  две разных числовых последовательности – это два разных объекта, даже если они суть координаты одного и того же вектора в разных системах координат. Иногда все-таки элементы из  $R^N$  называют векторами, основываясь на том, что правило сложения, определенное выше, – это в точности правило параллелограмма для сложения векторов. В тех случаях, когда они и не являются векторами по существу, правильнее назвать  $N$ -мерные объекты  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  элементами фазового пространства, а представление его в виде линейного векторного пространства  $R^N$  (т.е. состоящего из векторов) рассматривать как модель-представление этого фазового пространства на пространстве векторов.

Частным случаем линейных векторных служат  $N$ -мерные векторные пространства  $R^N$ .  $N$  векторов  $\mathbf{x}_i$  линейного векторного пространства независимы (линейно независимы), если из  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{x}_i = 0$ , следует, что все  $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ . Если линейное пространство содержит  $N$  линейно независимых векторов, то любые из  $N+1$  векторов уже линейно зависимы, и, следовательно, существует набор ненулевых чисел  $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ , такой что

$$\mathbf{x}_{N+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{x}_i.$$

Число  $N$  называется *размерностью* линейного векторного пространства.

Элементы из  $R^N$  могут быть коэффициентами отрезка ряда Тейлора или отрезка любого другого ряда, например, ряда Фурье или разложения по ортогональным полиномам. Они могут быть и координатами вектора, но этот конкретный смысл важен при решении конкретных практических задач. Понятие Евклидова пространства также требует кое-каких дополнительных свойств. Они будут введены ниже.

**Нормы.** Линейное пространство  $R^N$  **Нормы.** линейного пространства  $R^N$  становится линейным нормированным пространством  $R^N$  после того, как для каждого его элемента  $\mathbf{x}$  определена норма этого элемента  $\|\mathbf{x}\|$ , представляющая собой вещественное число (имеющее смысл «длины» элемента  $\mathbf{x}$ ), удовлетворяющая следующим трем условиям:

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  и  $\|\mathbf{x}\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = 0$  (определенность);
2.  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (неравенство треугольника);
3.  $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$  (однородность).

Типичными примерами конечномерных линейных нормированных пространств (ЛНП), построенных на основе  $R^N$ , служат пространства  $l_p^N$ , состоящие из  $R^N$ , оснащенного нормой:

$$\|\mathbf{x}\|_{l_p^N} = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{1/p} \quad (\text{п. 1.1})$$

Легко увидеть, что условия, наложенные на норму для (1), выполнены.

Для так введенной нормы справедливо приведенное ниже неравенство Гельдера

Если неотрицательные числа  $p$  и  $q$  таковы, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ , то

$$\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\|_{l_1^N} = \sum_{i=1}^N |x_i \cdot y_i| \leq \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{1/p} \cdot \left[ \sum_{i=1}^N |y_i|^q \right]^{1/q} = \|\mathbf{x}\|_{l_p^N} \cdot \|\mathbf{y}\|_{l_q^N}.$$

Справедливо также, что  $\left| \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |x_i \cdot y_i|$ .

Три частных случая являются исключительно важными. Это случаи:

1.  $p = 1$ :  $\|\mathbf{x}\|_{l_1^N} = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i| \right]$  ;
2.  $p = \infty$  :  $\|\mathbf{x}\|_{l_\infty^N} = \sup_{i \in [1, N]} |x_i|$  ;
3.  $p = 2$ :  $\|\mathbf{x}\|_{l_2^N} = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right]^{1/2}$  .

В последнем случае пространство  $R^N$  с нормой  $l_2^N$  называется Евклидовым. В нем норма равна привычной длине, вычисленной по известному правилу сложения квадратов катетов и последующего извлечения квадратного корня. Учитывая особое значение именно этой нормы, ее будем обозначать без индексных символов:  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_{l_2^N}$ . Есть еще одно обобщение

нормы  $l_p^N$ . Оно состоит во введении положительных весовых множителей  $c_i > 0$  и вычислении нормы в пространстве  $l_p^N(\mathbf{c})$  по правилу:

$$4. \|\mathbf{x}\|_{l_p^N(\mathbf{c})} = \left[ \sum_{i=1}^N c_i \cdot |x_i|^p \right]^{1/p}.$$

Важным понятием является понятие сходимости бесконечной последовательности элементов  $\mathbf{x}_j$ . Последовательность  $\mathbf{x}_j$  сходится к элементу  $\mathbf{x}$  (это записывается  $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}$ ), если

$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ . Это, можно сказать,  $\mathbf{x}$ -предельный элемент для  $\mathbf{x}_j$ . С точки зрения сходимости, все введенные выше нормы эквивалентны. Точнее говоря, если последовательность  $\mathbf{x}_j$

сходится к элементу  $\mathbf{x}$  в одной из норм  $l_2^N(\mathbf{e})$ , то она сходится и в любой другой. Однако эта эквивалентность по сходимости совсем не означает эквивалентности по другим свойствам и, прежде всего, свойствам близости элемента к фиксированному множеству  $M \subset R^N$ .

Выпуклой комбинацией конечного числа элементов  $\mathbf{x}_j$  называется совокупность всех таких элементов  $\mathbf{y}$  из  $R^N$ , которые можно представить в виде  $\mathbf{y} = \sum_j \alpha_j \cdot \mathbf{x}_j$  и  $\sum_j \alpha_j \leq 1$ .

Множество  $M \subset R^N$ , образованное из элементов, все выпуклые комбинации которых вновь принадлежат  $M$ , называется выпуклым.

Множество  $M \subset R^N$ , все предельные элементы последовательностей которого вновь принадлежат  $M$ , называется замкнутым.

Базисными элементами  $e^j$  в линейном нормированном пространстве  $R^N$  назовем элементы из  $R^N$  компоненты, для которых значения индекса  $i$  равного  $j$ , равны единице, а для остальных  $N - 1$  значений индекса  $i, i \neq j$  эти компоненты равны нулю. Например:

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ .0 \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ .0 \end{pmatrix} \quad e^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ .0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots e^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда каждый элемент  $\mathbf{x}$  можно записать в виде  $\mathbf{x} = \{x_1 \cdot e^1, x_2 e^2, \dots, x_N e^N\}$ . Это же равенство записывают в форме:  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot e^i$ . Компоненты  $e^i$  независимы, поэтому они не складываются, а сумма понимается как суперпозиция независимых элементов.

Скалярное или внутреннее произведение двух элементов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из  $R^N$ :  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  определено равенством  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i$ . В том случае, если пространства состоят из комплексных чисел:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^*, \text{ где } y_i^* \text{ - комплексно сопряженные к } y_i \text{ числа.}$$

Ясно, что  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$ .

Совершенно очевидно, что  $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j; \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ .

В качестве базисных могут быть выбраны и другие элементы  $e'^1, e'^2, \dots, e'^N$ . Условие на базисные элементы состоит в том, что они образуют полную систему в  $R^N$ , а это значит, что любой элемент из  $R^N$  можно представить в виде  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x'_i \cdot e'^i$ . Число элементов базиса в  $R^N$  равно  $N$ . Любой дополнительный базисный элемент, если его ввести, может быть выражен в виде линейной комбинации  $e'^1, e'^2, \dots, e'^N$ . Наоборот, если взять базисных элементов меньше чем  $N$ , например  $M < N$ , то найдутся элементы в  $R^N$ , непредставимые в этом базисе. Более



того, можно сделать так, что эти элементы  $\mathbf{y} = \sum_{i=M+1}^N y_i \cdot e^i$  будут ортогональны всем другим, представимым в виде  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M x_i \cdot e^i$ .

Из неравенства Гельдера следует, что:

$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|_{l_p} \cdot \|\mathbf{y}\|_{l_q} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  и, в частности, при  $p = 2$ :  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ . Для векторов на плоскости и в пространстве известно, что  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , где  $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – косинус угла между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно. Тогда величину  $\frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$  можно отождествить с

«косинусом угла» между произвольными элементами из  $R^N$ .

**Операторы.** Линейным оператором из линейного нормированного пространства (ЛНП)  $R^N$  в ЛНП  $R^M$  называется отображение  $A$ , ставящее в соответствие каждому элементу  $\mathbf{x} \in R^N$  элемент  $\mathbf{y} \in R^M$ , обладающее свойством линейности.

Для любых двух  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  и чисел (вещественных либо комплексных, в зависимости от вещественности либо комплексности  $R^N$  и  $R^M$ )  $\alpha, \beta$ :

$$A(\alpha \cdot \mathbf{x}_1 + \beta \cdot \mathbf{x}_2) = \alpha \cdot A\mathbf{x}_1 + \beta \cdot A\mathbf{x}_2.$$

Подадим на «вход» оператора  $A$  элемент  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ . Его образом при отображении  $A$

оказывается элемент  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{M1} \end{pmatrix}$ . Это элемент из  $R^M$ . Откликом на элемент  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$  будет

служить  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{M2} \end{pmatrix}$  и так далее. Откликом на элемент  $e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$  будет  $\mathbf{a}_N = \begin{pmatrix} a_{1N} \\ a_{2N} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{MN} \end{pmatrix}$ .

Поскольку любой элемент из  $R^N$  представим в виде  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot e_i$ , то в силу линейности оператора  $A$  откликом на  $\mathbf{x}$  будет сумма откликов на  $x_i \cdot e_i$ . Таким образом, действие оператора  $A$  из  $R^N$  в  $R^M$  эквивалентно действию на компоненты «вектора»  $\mathbf{x}$  в базисе  $e_i$  прямоугольной  $N \times M$  матрицы:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots\dots\dots a_{1N} \\ a_{21}a_{22}\dots\dots\dots a_{2N} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{M1}a_{M2}\dots\dots\dots a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix} = (y_1, y_2, \dots, y_M).$$

Эта матрица состоит из вещественных чисел, если  $R^N$  и  $R^M$  вещественные ЛНП, и комплексных, в противном случае. Расчеты проводятся по формуле:

$$y_j = \sum_{i=1}^N a_{ji} \cdot x_i.$$

Часто пользуются правилом суммирования, согласно которому по дважды повторяющемуся в выражении индексу происходит суммирование по всем его значениям. Тогда

$$y_j = \sum_{i=1}^N a_{ji} \cdot x_i = a_{ji} \cdot x_i.$$

## Алгебра матриц

Матрицу можно умножить на скаляр, умножив на него все компоненты.

$$\alpha \cdot A = \{\alpha \cdot a_{ji}\}.$$

Две прямоугольные матрицы одного размера можно сложить, сложив их компоненты:

$$A + B = C \quad c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

Две матрицы можно перемножить. Для этого должны быть согласованы их размерности. Пусть  $A - M \times N$  матрица.  $B -$  матрица размером  $N \times M$ . Тогда определено их произведение:

$$A \cdot B = C \quad c_{kl} = \sum_{i=1}^N a_{ki} \cdot b_{il}.$$

Результирующая матрица оказывается квадратной размера  $M \times M$  – размерности  $M$  или ранга  $M$ . Важными служат операции комплексного сопряжения матрицы  $A$ . Комплексно сопряженная  $A^c$  матрица к  $A$  состоит из элементов, комплексно сопряженных к элементам  $a_{ji}$  матрицы  $A$ .

Транспонированная  $A^t$  матрица получается заменой строк на столбцы. Если  $A - M \times N$  матрица, то  $A^t - N \times M$  матрица, в которой все строки матрицы  $A$  заменены ее столбцами. Наконец, сопряженная к  $A$  матрица  $A^* = (A^t)^c$ . Для вещественных матриц комплексно сопряженная совпадает с исходной – это очевидно. Тогда сопряженная совпадает с транспонированной.

Обратной к  $A$  матрице называется матрица  $A^{-1}$  такая, что  $A^{-1} \cdot A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Эта матрица может и не существовать. Но, если она существует, то  $A^{-1} \cdot A = I$ , где  $I -$  единичная матрица, диагональные элементы которой равны единице, а все остальные – нулю:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующее свойство сопряженной матрицы является ее строгим определением.

Если  $A - M \times N$  матрица и  $\mathbf{x} \in R^N, \mathbf{y} \in R^M$ , то

$$\langle \mathbf{y} | A\mathbf{x} \rangle_{R^M} = \langle A^* \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle_{R^M}$$

Наибольшее значение имеют квадратные матрицы.

**Типы матриц.** Матрица называется:

- симметричной, если  $A = A^t$ ;
  - ортогональной, если  $A^{-1} = A^t$ ;
  - эрмитовой, если  $A = A^*$ ;
  - унитарной, если  $A^{-1} = A^*$ .
- Легко понять, что унитарные матрицы, примененные к вектору, не меняют его Евклидовой

длины  $\|\mathbf{x}\|^2$  (хотя меняют длину в других определениях нормы). Это следует из равенства

$$\langle A\mathbf{x} | A\mathbf{x} \rangle = \langle A^* A\mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \langle A^{-1} A\mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle;$$

- нормальной, если  $A^* \cdot A = A \cdot A^*$ ;
- невырожденной, если  $\det A \neq 0$ .

Из курса алгебры известно, что для того чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель не был равен нулю. Иными словами, чтобы матрица была невырожденной.

Напомним некоторые свойства определителя.

Определитель произведения равен произведению определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B);$$

Поскольку определитель единичной матрицы равен 1:  $\det I = 1$ , то отсюда следует, что:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1; [\det(A)]^{-1} = \det(A^{-1}).$$

$$\det(A) = \det(A^*).$$

Определитель матрицы обозначают также символом  $|a_{ij}|$ .

Следующие два утверждения эквивалентны:  $\det(A) = 0$ ; уравнение  $A\mathbf{x} = 0$  имеет ненулевые решения.

Нетрудно понять, что строки вещественной ортогональной матрицы образуют взаимно ортогональные элементы:  $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = a_{ik} a_{jk} = \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ .

Наконец, матрица называется положительно полуопределенной, если  $\langle A\mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , и положительно определенной, если  $\langle A\mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle > 0$  и равенство  $\langle A\mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0$  выполнено только при  $\mathbf{x} = 0$ .

Множество квадратных матриц образует линейное пространство, поскольку на нем определены операции умножения на число и операция умножения, в результате которых возникает вновь квадратная матрица того же ранга.

**Норма матриц.** Определим норму матрицы  $A$  правилом<sup>38</sup>:

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$= \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Норма единичной матрицы равна единице  $\|I\| = 1$ .

<sup>38</sup> Матрица может быть и прямоугольной.

Величины  $\|A\mathbf{x}\|$  и  $\|\mathbf{x}\|$  могут быть определены в  $l_q$  и  $l_p$  соответственно. В этом случае возникают различные нормы матрицы  $\|A\|_{pq}$ , в случае  $p = q = 2$  индексы в обозначении нормы опускаем.

В том случае, когда  $p = q = \infty$ , норма векторов рассчитывается по формуле:

$$\|\mathbf{x}\|_{l_\infty} = \max_{j \in [1, N]} |x_j|,$$

норма  $\|A\|_{\infty\infty}$  рассчитывается по правилу:

$$\|A\|_{\infty\infty} = \max_{j \in [1, N]} \sum_{k=1}^N |a_{jk}| \cdot \sum_{k=1}^N |a_{jk} \cdot x_j| \leq \left( \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{jk}|^2 \right) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{jk}|^2.$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|_{\infty} &= \max_j \left( \sum_k |a_{jk} \cdot x_k| \right) \leq \max_j \left( \sum_k |a_{jk}| \cdot |x_k| \right) \leq \max_j \left( \sum_k |a_{jk}| \cdot \max_k |x_k| \right) = \\ &= \max_j \left( \sum_k |a_{jk}| \cdot \|\mathbf{x}\|_{l_\infty} \right) = \|A\|_{\infty\infty} \cdot \|\mathbf{x}\|_{l_\infty}. \end{aligned}$$

Норма  $\|A\|_{22}$  имеет специальное название – норма Шмидта.  $\|A\|_{22} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{jk}|^2$ . Справедливым является неравенство:

$$\sum_{k=1}^N \left| \sum_{j=1}^N |a_{jk} \cdot x_j| \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{jk}|^2 \right) \cdot \sum_{i=1}^N |x_i|^2,$$

которое и определяет эту норму.

**Собственные числа и собственные элементы.** Для квадратной матрицы порядка  $N$  рассмотрим задачу на собственные значения:

$$A\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}.$$

Числа  $\lambda_i$ , для которых решение этого уравнения существует, будем называть собственными числами (значениями), а решения, соответствующие этим числам, – собственными элементами или векторами, если это последнее название допустимо. Для того чтобы найти все собственные числа, надо решить характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0.$$

Поскольку определитель квадратной матрицы размерности  $N$  – это полином степени  $N$ , то корней характеристического уравнения или, что то же самое, собственных чисел матрицы  $A$  ровно  $N$ .

Если  $H$  – любая неособенная (невырожденная) матрица того же ранга, то собственные числа матрицы  $A$  и  $A_H = H^{-1}AH$  совпадают. Это легко понять, поскольку

$$A_H - \lambda I = H^{-1}(A - \lambda I)H.$$

$$\det(A_H - \lambda I) = \det H^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det H = \det(A - \lambda I).$$

Следующие свойства собственных чисел практически очевидны.

Если  $A$  и  $B$  – две квадратные матрицы, то их произведения, взятые в любом порядке, имеют одни и те же собственные числа.

Если матрица  $A$  неособенная, то характеристические числа обратной к  $A$  матрицы  $A^{-1}$  равны обратной величине собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $A$ , т.е. равны  $\lambda_i^{-1}$ .

Любая эрмитова матрица имеет только вещественные собственные числа.

Если эрмитова матрица положительно определена (полуопределена), то ее собственные числа положительны (неотрицательны).

Положительно полуопределенную эрмитову матрицу всегда можно превратить в положительно определенную, исключив из рассмотрения те элементы, для которых  $Ax = 0$ . Тогда для остальных элементов форма  $\langle Ax | x \rangle$  никогда не будет нулевой, за исключением случая  $x = 0$ . Это и означает положительную определенность. Напомним, что такие элементы обозначаются  $Ker A$  и образуют линейное подпространство (в частности нулевое) в  $DA = R^N$ . Всегда можно рассматривать матрицу на ортогональном дополнении к  $Ker A$ , которое обозначим  $(Ker A)^\perp$ , которое совпадает с множеством значений самой эрмитовой матрицы  $A$ . Действительно, из  $x \in Ker A : Ax = 0$  следует  $0 = \langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle \forall y \in R^N$ , и элемент  $x$  оказывается ортогональным любому элементу, представимому в виде  $Ay$ , т.е. ортогонален подпространству  $Im(A)$ .

Если  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$  – наибольшее и наименьшее собственные числа эрмитовой матрицы, то:

$$\lambda_{\min} \cdot \|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq \lambda_{\max} \cdot \|x\|^2.$$

Для любой квадратной матрицы  $A$  матрица  $A^* \cdot A$  эрмитова и положительно полуопределена. Матрицы  $A^* \cdot A$  и  $A \cdot A^*$  имеют одни и те же собственные числа, равные квадрату собственных чисел матрицы  $A$ .

Унитарная и ортогональная матрицы имеют комплексные собственные числа, по модулю равные единице.

Спектральным радиусом  $\rho(A)$  матрицы  $A$  называется максимум модуля собственных чисел. Эти числа могут быть комплексными. Именно поэтому следует брать модуль.

Из сказанного выше следует, что спектральный радиус унитарной матрицы равен единице, а любое неособенное преобразование матрицы оставляет спектральный радиус неизменным (спектральный радиус инвариантен при преобразованиях с помощью неособенной матрицы).

Говорят, что матрицы  $A$  и  $B$  унитарно эквивалентны, если существует унитарная матрица  $U$  и

$$A = UBU^{-1}.$$

Следующая теорема называется теоремой Шура.

Для любой квадратной матрицы  $A$  существует унитарная матрица  $U$  такая, что  $A$  унитарно эквивалентна треугольной матрице  $T = \{t_{ij}\} = \begin{cases} 0 & i > j \\ \lambda_i & i = j \end{cases}$ , где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $A$ .

$$T = \{t_{ij}\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в частности, следует, что унитарно эквивалентная матрица к любой квадратной матрице может быть представлена в виде диагональной матрицы  $D$ , в которой ненулевые члены только те, что стоят на диагонали и равны собственным числам исходной матрицы, и некоторой добавочной  $M$ , ненулевые члены которой расположены только выше (или только ниже) диагонали. Матрицы  $M$  и  $U$  определены неоднозначно. Если  $A$  нормальная матрица, то можно так подобрать  $U$ , что матрица  $M$  окажется нулевой – состоящей только из нулей.

Спектральной нормой  $\sigma(A)$  квадратной матрицы называют положительное значение квадратного корня из наибольшего собственного числа матрицы  $A^*A$ :

$$\sigma(A) = \|A\|_{cn}.$$

Спектральная норма и спектральный радиус совпадают для эрмитовых матриц. В общем же случае спектральный радиус не превосходит спектральной нормы.

**Экстремальные свойства собственных чисел.** Собственные числа для вполне непрерывных эрмитовых матриц обладают важным экстремальным свойством. Если  $A$  – положительно определенная эрмитова матрица, то ее наибольшее собственное значение, обозначим его  $\lambda_1$ , обеспечивает максимум выражению  $\frac{\langle Ax | x \rangle}{\langle x | x \rangle}$  при условии, что  $x \neq 0$ . Иными словами,

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax | x \rangle}{\langle x | x \rangle}.$$

Причем, максимум достигается на собственном элементе  $f_1$ , соответствующем этому собственному числу. Если этому собственному числу соответствует несколько, например,  $m_1$  разных собственных элементов  $f_1^1, \dots, f_1^{m_1}$ , то максимум –  $\lambda_1$  обеспечивается на каждом из них, и само это собственное число называем число кратности  $m_1$ . Очевидно, что линейная комбинация собственных элементов (векторов), соответствующих одному собственному числу, есть снова собственный элемент, соответствующий этому собственному числу. Действительно,

$$A(\alpha_1 \cdot f_1^1 + \alpha_2 \cdot f_2^1, \dots, \alpha_{m_1} \cdot f_1^{m_1}) = \lambda_1 \cdot \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j \cdot f_1^j + \alpha_2 \cdot f_2^1, \dots, \alpha_{m_1} \cdot f_1^{m_1}.$$

Сумма кратностей всех собственных чисел равна размерности эрмитовой положительно определенной матрицы.

Далее второе собственное число  $\lambda_2$  обладает теми же экстремальными свойствами, но уже на подпространстве  $R^{N-m_1}$  в  $R^N$ , ортогональном ко всем элементам  $f_1^1, \dots, f_1^{m_1}$ :

$$\lambda_2 = \max_{x \neq 0, x \in R^{N-m_1}} \frac{\langle Ax | x \rangle}{\langle x | x \rangle}.$$

Пусть это число имеет кратность  $m_1$  и его собственные элементы  $f_2^1, \dots, f_2^{m_2}$ . Процесс можно продолжить, и собственное число  $\lambda_3$  оказывается решением экстремальной задачи:

$$\lambda_3 = \max_{x \neq 0, x \in R^{N-m_1-m_2}} \frac{\langle Ax | x \rangle}{\langle x | x \rangle}.$$

Здесь  $R^{N-m_1-m_2}$  – подпространство в  $R^N$ , ортогональное ко всем элементам  $f_1^1, \dots, f_1^{m_1}, f_2^1, \dots, f_2^{m_2}$ .  $R^{N-m_1-m_2}$  ортогонально подпространству в  $R^N$ , натянутому на  $f_1^1, \dots, f_1^{m_1}, f_2^1, \dots, f_2^{m_2}$ . Процесс этот можно продолжить, расположив собственные числа в порядке убывания, суммарная кратность которых равна  $N$ . Займемся теперь собственными элементами.

Для эрмитовых матриц собственные элементы, принадлежащие различным собственным числам ортогональны.

Действительно, пусть  $Af_1 = \lambda_1 f_1$  и  $Af_2 = \lambda_2 f_2$ .

Тогда  $\lambda_1 \langle f_1 | f_2 \rangle = \langle Af_1 | f_2 \rangle = \langle f_1 | Af_2 \rangle = \lambda_2 \langle f_1 | f_2 \rangle$ . Но при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , следует что  $\langle f_1 | f_2 \rangle = 0$ .

Аналогичное положение дел имеет место для ортогональных и унитарных операторов. (Их собственные числа по модулю равны единице.) Доказывается это следующим образом. Пусть  $Af_1 = \lambda_1 f_1$  и  $Af_2 = \lambda_2 f_2$ .

$$\text{Тогда, } \langle f_1 | f_2 \rangle = \langle Af_1 | Af_2 \rangle = \langle \lambda_1 \cdot f_1 | \lambda_2 \cdot f_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \lambda_2^* \langle f_1 | f_2 \rangle.$$

$$\text{Поскольку } 1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2^* \neq 0 \text{ } \langle f_1 | f_2 \rangle = 0.$$

**Разложение единицы.** Совокупность собственных элементов, образующих ортогональную систему положительно определенной эрмитовой матрицы, можно рассматривать как новый ортогональный базис в пространстве  $R^N$ . Расположив собственные числа по мере их возрастания, можно ввести подпространства  $H_i$ , соответствующие собственным элементам для собственного числа  $\lambda_i$ . Все пространство  $R^N$  представляет собой ортогональную (прямую) сумму подпространств  $H_i: R^N = H_1 \oplus H_2 \dots$  так, что в каждом из подпространств  $H_i$  действие оператора сводится к умножению вектора на собственное число  $\lambda_i$ . Но тогда можно образовать подпространства  $R(\lambda_i)$  в  $R^N$ , образованные этими прямыми суммами, соответствующими собственным числам от  $\lambda_1$  до  $\lambda_i$ . Ортогональными базисами в этих подпространствах служат собственные элементы для всех собственных чисел, от собственных чисел от  $\lambda_1$  до  $\lambda_i$ . Причем для положительно определенных эрмитовых матриц  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R(\lambda) \rightarrow R^N$ . Можно определить оператор

$E(\lambda_i)$  ортогонального проектирования произвольного элемента  $x$  из  $R^N$  на  $R(\lambda_i)$ . Так что  $E(\lambda_i) - E(\lambda_j) \quad i < j$  – оператор проектирования на подпространство  $R^N = H_i \oplus H_{i+1} \dots H_j$ . В частности,  $E(\lambda_i) - E(\lambda_{i+1}) = P(\lambda_i)$  – проектирование на  $H_i$ . Также понятно, что  $E(0) = E(\lambda_{\min}) = E$  – тождественный, единичный оператор. Оператор  $E(\lambda_i)$  называется разложением единицы. Действие матрицы можно представить теперь в виде  $Ax = \sum_i \lambda_i (E(\lambda_i) - E(\lambda_{i+1}))x$ .

В приведенных обозначениях эта запись, возможно, кажется более сложной, чем просто запись  $Ax$ , но она, как никакая другая, вскрывает смысл проводимого оператором  $A$  действия. Также она вскрывает и смысл введенного названия – разложения единицы.

**Разложение решений по собственным элементам.** Это, последнее, соотношение можно записать в виде рекомендаций по решению системы линейных уравнений

$$Ax = y$$

с положительно определенным эрмитовым оператором.

Пусть  $f_i, i=1,2,\dots,N$  – полная система собственных элементов, образующая ортогональный базис в  $R^N$ . Тогда искомым элемент  $x$  можно представить в виде:  $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f_i$ . То-

гда:  $Ax = A \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot f_i$ . Умножив правую и левую часть последнего равенства

скалярно на  $f_j$ , получаем  $\langle Ax | f_j \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \cdot \langle f_i | f_j \rangle = \alpha_j \lambda_j \cdot \langle f_j | f_j \rangle$ . Отку-

$$\text{да: } \alpha_j = \frac{\langle Ax | f_j \rangle}{\lambda_j \cdot \langle f_j | f_j \rangle} \text{ и, следовательно, } x = \sum_{i=1}^N \frac{\langle Ax | f_j \rangle}{\lambda_j \cdot \langle f_j | f_j \rangle_i} \cdot f_i.$$

Обратим внимание на то, что если хотя бы одно собственное число обращается в ноль, то последнее выражение теряет смысл. Но это же означает, что однородное уравнение  $Ax = 0$

имеет нетривиальное решение и матрица  $A$  не является положительно определенной. Далее, если среди собственных чисел есть числа, имеющие очень малые значения, то компоненты собственных элементов, соответствующих этим числам, оказываются несравнимо большими, чем все остальные, притом, что их роль в значении оператора  $A$  очень мала. Таким образом, мало проявляющиеся в правой части компоненты собственных элементов (малые собственные числа) очень сильно «выпячиваются» при конструировании решений. Такие уравнения являются «плохими» в интуитивно понимаемом смысле при попытке их решения. В этой связи целесообразно ввести меру «плохизны» такого сорта уравнений или, что то же самое, меру их «хорошести»<sup>39</sup>. Здесь важно иметь в виду, что значения имеют не абсолютные числа – значения по модулю минимального из собственных чисел, а их отношения к максимальным значениям. Такой мерой служит число обусловленности  $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ . Если в качестве нормы выбрать введенную выше спектральную норму эрмитовой матрицы  $\sigma(A) = \|A\|_{cn}$ , то число обусловленности приобретает вид:

$$k(A) = \|A\|_{cn} \cdot \|A^{-1}\|_{cn} = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}.$$

Если число обусловленности равно 1, то матрица унитарна.

Значение числа обусловленности определяется следующим результатом.

Если  $A$  матрица, имеющая ограниченную обратную (отсутствуют нулевые собственные значения) и  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , то для любого  $\mathbf{g}$  и  $A\mathbf{g} = \mathbf{u}$  справедливо неравенство:

$$\frac{\|A\mathbf{g} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \cdot k^{-1}(A) \leq \frac{\|\mathbf{g} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|A\mathbf{g} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}.$$

Это неравенство позволяет оценить относительную погрешность в решении  $\frac{\|\mathbf{g} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ , возникающую за счет использования приближенных данных (вместо  $\mathbf{y}$  подобрано  $\mathbf{u} = A\mathbf{g}$ ).

Приближенно дело обстоит так – чем меньше число обусловленности (а оно всегда больше единицы), тем меньшая погрешность возникает при использовании приближенных данных.

Однако приведенное неравенство – это не погрешность, а ее двухсторонняя оценка.

Приведем еще два соотношения, имеющих большое значение для конструирования решений уравнений  $A\mathbf{g}$ . Приводимые ниже результаты справедливы и для более широкого класса операторов, чем матрицы. Они справедливы и для линейных ограниченных операторов.

Обозначим  $B^n$  результат  $n$ -кратного применения линейного непрерывного оператора с нормой, не превосходящей  $N < 1$  (в частности матрицы) оператора  $B$ .

**Утверждение 1.** Пусть ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} B^k f$  сходится для всех  $f$  из линейного нормированного

пространства  $Y$ . Тогда оператор  $(I - B)$  имеет обратный и  $(I - B)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f$ .

Если  $\|B\| \leq N < 1$ , то  $\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - N}$ .

Приведенный результат справедлив в широких предположениях об операторе  $B$ . В частности, в качестве  $B$  можно принять и  $(I - A)$  для некоторого  $A$ . Тогда справедлив, в частности, и результат, двойственный к приведенному выше.

**Утверждение 2.** Пусть  $A$  – положительный, самосопряженный оператор и  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + (A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^k)$ .

<sup>39</sup> Приношу извинения за такие нелитературные обороты. Я не нашел более подходящего словосочетания.



Записанное – это метод последовательных приближений, используемый при решении уравнения  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$  – метод простой итерации. Последнее эквивалентно:  $\mathbf{x}^{k+1} = \sum_{i=0}^k (I - A)^i A\mathbf{x}$ .

Если  $\|A\| = \lambda_1 < 1$ , то последовательность  $\mathbf{x}^k$  сходится к  $\mathbf{x}$ . Тогда  $A \sum_{i=0}^{\infty} (I - A)^i \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}$ , и,

следовательно,  $A^{-1}\mathbf{y} = \sum_{i=0}^{\infty} (I - A)^i \mathbf{y}$  для любого  $\mathbf{y}$  из области значений  $\text{Im } A$  оператора  $A$ .

Легко убедиться в том, что если разложить функцию  $A^{-1}$  в ряд Тейлора в окрестности единицы, обозначив ее (единицу)  $I$ , и сопоставить полученное разложение с записанным выше рядом, то получим полное их совпадение. Подобные выкладки лежат в основе обоснований сходимости используемых итерационных процессов для решения уравнений.

## Приложение 2. Функциональный анализ. Линейные операторы. Экстремальные задачи (вводный конспект)

Этот раздел служит, в определенной мере, продолжением предыдущего и его обобщением на случай произвольных, в том числе и бесконечномерных пространств. Все здесь сказанное имеет свою «проекцию» на конечномерный случай. В свою очередь, конечномерный случай можно рассматривать, в том числе, и как подготовительный материал к настоящему разделу, хотя он и содержит много самостоятельно интересных фактов. Множества, рассматриваемые здесь, служат обобщением координатных пространств, линейные операторы – матриц. Однако не каждый результат в конечномерном случае имеет свой очевидный аналог в бесконечномерном. Бесконечномерный случай содержит много нового, и это новое необходимо, прежде всего, для понимания истинной сути и причины тех проблем, которые возникают при анализе «конечномерными методами» реальных геофизических полей. Любое интегральное уравнение можно представить в виде его конечномерного аналога. Это можно сделать многими разными способами. Но для того, чтобы увидеть общие свойства этих конечномерных моделей и сложности, возникающие с их использованием в процессе реконструкции физических моделей среды, конечномерных представлений недостаточно.

### 2.1. Множества

Множества представляют собой исходный объект, на котором строятся те либо иные математические конструкции. Это одно из наиболее общих понятий, не поддающихся определению. Например, можно говорить о множестве всех натуральных чисел, множестве возможных геологических структур, литологических либо стратиграфических разностей горных пород.

Множества обозначаются заглавными буквами  $A, B, C, \dots$ . Элементы множеств, как правило, обозначаются соответствующими малыми:  $a, b, c, \dots$ . Иногда эти малые буквы снабжены индексами  $i, j, k, \dots$ , которые могут иметь значения из некоторого другого множества, например множества натуральных чисел.

Тем самым осуществляется идентификация конкретных элементов множества. Иногда множество, состоящее из элементов  $a_i, i = 0, 1, \dots$ , обозначается  $(a)$ .

Прежде всего, договоримся об использовании обозначений, часть из которых использовалась и ранее:

- 1)  $\emptyset$  – пустое множество;
- 2)  $a \in A$  – элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ ;
- 3)  $a \notin A$  – элемент  $a$  не принадлежит множеству  $A$ ;
- 4)  $A \subset B$  – множество  $A$  есть подмножество в  $B$ ;
- 5)  $A \subseteq B$  – то же, что и 4, но возможно равенство  $A$  и  $B$ ;
- 6)  $G = A \cup B$  –  $G$  есть объединение (сумма)  $A$  и  $B$ , т.е. состоит из элементов, принадлежащих  $A$  либо  $B$ ;
- 7)  $G = A / B$  –  $G$  есть дополнение  $B$  до  $A$ , т.е. состоит из элементов в  $A$ , не принадлежащих  $B$ ;
- 8)  $G = A \cap B$  –  $G$  есть пересечение (произведение)  $A$  и  $B$  – т.е. состоит из элементов, одновременно принадлежащих  $A$  и  $B$ .

Далее используются кванторы всеобщности и существования  $\forall$  и  $\exists$ .

$\forall$  – квантор всеобщности. Например, предложение

$$P(a), \forall a \in A$$

читается так: справедливо утверждение  $P(a)$  (здесь вместо  $P(a)$  может быть любое выражение) для любого элемента  $a$  из множества  $A$ . Или:

$$M = \{m \in N : P(a, m), \forall a \in A\},$$

$M$  – есть множество элементов из  $N$ , для которых справедливо предложение  $P(a, m)$  при любом  $a$  из  $A$ .

$\exists$  – *квантор существования*. Предложение « $\exists \in A$ » читается так: существует элемент (найдется элемент)  $a$  из  $A$ .

Выражением  $B = \{m \in M : P(m)\}$  определяется множество  $B$ :  $B$  есть совокупность элементов  $m$  из  $M$  таких, что выполнено предложение  $P(m)$ .

Приведенные символические записи используются для сокращенной формулировки тех либо иных предложений.

Совокупность всех подмножеств множества  $A$  обозначается  $P^A$ . Это новое множество. Его элементами служат, например, все  $A$  и каждый из элементов  $a \in A$  в отдельности. Между двумя множествами можно построить отображение.

Будем говорить, что задано *отображение  $f$  из  $A$  в  $B$*  (записывается в виде  $f : A \rightarrow B$ ), если некоторым элементам из  $P^A$  поставлены в соответствие некоторые элементы из  $P^B$ .

В приложениях теории множеств удобно пользоваться *принципом двойственности*, который основан на следующих соотношениях.

Если  $A_i$  – последовательность множеств, занумерованная индексом  $i$ , и  $S$  – множество, содержащее все  $A_i$ , то:

- 1)  $S / \bigcup_i A_i = \bigcap_i (S / A_i)$  (дополнение суммы множеств равно пересечению их дополнений);
- 2)  $S / \bigcap_i A_i = \bigcup_i (S / A_i)$  (дополнение пересечений равно сумме дополнений).

Предлагаем читателю нарисовать рисунки и самостоятельно доказать этот результат.

Благодаря принципу двойственности из любой теоремы, относящейся к системе подмножеств фиксированного множества  $S$ , автоматически получаются новые теоремы, в которых множества заменены их дополнениями, объединение – пересечениями, пересечения – объединениями.

Множество  $A$  называется *частично упорядоченным*, если для некоторых его элементов  $a_i$  установлено отношение: либо  $a_i < a_j$ , либо  $a_i > a_j$ , либо  $a_i = a_j$ . Это отношение удовлетворяет условиям:

- 1)  $a_i < a_i$  либо  $a_i = a_i$  при любом  $a_i \in A$ ;
- 2) если  $a_i < a_j$  и  $a_j < a_k$ , то  $a_i < a_k$ ;
- 3) если  $a_i < a_j$  и  $a_j < a_i$ , то  $a_i = a_j$ .

Символы «<» и «=» нельзя понимать только в узком смысле – меньше, равно. Их значение шире – упорядочение либо эквивалентность по любому признаку.

Множество называется *упорядоченным* (или *вполне упорядоченным*), если отношение порядка установлено для любых двух элементов из  $A$ .

Пример частично упорядоченного множества – множество комплексных чисел, где в качестве отношения порядка установлено сравнение их вещественных и мнимых чисел. Пример вполне упорядоченного множества – множество вещественных чисел.

Другой нетривиальный пример частично упорядоченного множества, который используется, таков. Предположим, что некоторая площадь находится на этапе разведки. Имеющиеся сведения о геологическом строении района еще не позволяют однозначно вырисовывать тип геологической структуры. Тем самым допускается множество  $A$  возможных структур. Однако каждая из них соответствует в большей либо в меньшей степени имеющимся сведениям о районе – реально имеющимся данным. Тогда для некоторых различных структур можно указать, какая из них более, а какая менее соответствует имеющимся данным. Благодаря этому на мно-

жестве  $A$  вводится структура частичного упорядочения. Если такое сравнение можно сделать для любых двух элементов из  $A$ , то введенная структура упорядочения является вполне упорядоченной. Интуитивно представляется очевидным, что возможность введения структуры вполне упорядоченного множества из  $A$  соответствует большей изученности теории.

## 2.2. Топология\*

Определенное выше понятие отображения является столь общим, что лишено какого-либо конструктивного начала. Для того чтобы отображение обладало свойствами непрерывности либо, наоборот, не обладало ими на множествах, которые ставят отображение в соответствие друг другу, должна быть определена соответствующая структура, позволяющая определить понятие непрерывности. Такой структурой служит топология.

*Топологическое пространство* – это множество  $A$  с выделенным в нем семейством подмножеств  $\tau$ , называемых *открытыми*, и обладающее следующими свойствами:

- 1)  $\emptyset \in \tau$ ;  $A \in \tau$ ;
- 2) пересечение конечного числа элементов из  $\tau$  есть снова элемент из  $\tau$ ;
- 3) объединение любого семейства элементов из  $\tau$  есть снова элемент из  $\tau$ .

Система  $\tau$  называется топологией пространства  $A$ , и все топологическое пространство обозначается  $(A, \tau)$ . Когда топология определена и путаница исключена (из текста ясно, о какой топологии идет речь), используется просто запись  $A$ .

Одно и то же множество  $A$  может быть снабжено несколькими различными топологиями. Такая ситуация распространена.

Топология  $\tau_1$  слабее топологии  $\tau_2$  ( $\tau_2$  сильнее  $\tau_1$ ) (обозначается  $\tau_1 < \tau_2$ ), если каждое множество из  $\tau_1$  одновременно принадлежит  $\tau_2$ . Иными словами, в  $\tau_2$  есть все элементы из  $\tau_1$  плюс, возможно, и многое другое. Более сильная топология – это та, которая содержит все открытые подмножества, входящие в состав более слабой, и, кроме того, содержит еще множества, возможно более мелкие, позволяющие увидеть более тонкие эффекты, которых (множеств) нет в более слабой топологии.

Пусть  $A$  есть множество,  $\tau$  – выделенная в нем топология,  $B$  – подмножество в  $A$ . Обозначим  $\tau'$  совокупность множеств, полученных как пересечение  $B$  и элементов из  $\tau$ . Если  $(B, \tau')$  – топологическое пространство, то  $\tau'$  называется индуцированной топологией на  $B$  и  $(B, \tau')$  подпространством в  $(A, \tau)$ .

*Базой  $\gamma$  топологии  $\tau$*  называется такое подмножество в  $\tau$ , что любые элементы из  $\tau$  могут быть получены с помощью операций объединения любого числа и пересечения конечного числа (относится только к пересечению) элементов из  $\gamma$ .

Дополнения к элементам из  $\tau$  называются *замкнутыми множествами*.

Замечание. Множество может быть одновременно открытым и замкнутым – это все  $A$  и пустое множество –  $\emptyset$ . Множество, не являющееся открытым, может и не быть замкнутым, т.к. не всякое множество есть дополнение к открытому.

Наименьшее замкнутое множество в топологическом пространстве  $(A, \tau)$ , содержащее заданное множество  $B$ , называется *замыканием  $B$*  и обозначается  $\bar{B}$ . Если  $\bar{B} = B$ , то говорят, что  $B$  плотно в  $B$  в топологии  $\tau$ .

Множество  $B$  топологического пространства  $(A, \tau)$  называется *нигде неплотным множеством*, если оно не плотно ни в одном из закрытых множеств в  $(A, \tau)$ .

Множество, полученное объединением не более чем счетного числа нигде не плотных множеств, называется *множеством первой категории*. Дополнение к множеству первой категории есть *множество второй категории*.

Множество, полученное в результате замыкания, зависит от используемой топологии. Если  $(A, \tau_1)$  и  $(A, \tau_2)$  – два топологических пространства над одним и тем же множеством  $A$  и то-

пология  $\tau_1$  слабее топологии  $\tau_2$  ( $\tau_1 < \tau_2$ ), то замыкание  $B_1$  множества  $B$  в топологии  $\tau_1$  содержит в себе замыкание  $B_2$  того же множества в топологии  $\tau_2$ :  $B_2 \subset B_1$ .

*Окрестностью* точки  $a \in A$  называется произвольный элемент из  $\tau$ , содержащий эту точку  $a$ . Окрестностью замкнутого множества называется открытое множество, включающее в себя это замкнутое.

Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности.

Топологическое пространство называется *нормальным* или *отделимым*, если в нем всякие два непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности.

**Теорема 1.** Пересечение любого числа и сумма любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Для доказательства к определению понятия топологии следует применить принцип двойственности. Тогда, поскольку замкнутые множества есть дополнение к открытым, заменив в определении открытые множества замкнутыми, объединения – на пересечения и, наоборот, получим утверждение теоремы.

Точка  $a$  называется *внутренней точкой* множества  $A$ , если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в  $A$ . Все точки открытого множества – внутренние. Множество первой категории не имеет внутренних точек. Но замыкание множества первой категории может иметь внутренние точки.

Эквивалентным понятию отображение является понятие функции.

Задать отображение из множества  $A$  во множество  $B$  – значит определить закон, согласно которому элементу  $a \in A$  ставится в соответствие элемент  $b = f(a) \in B$ . Этот закон может быть определен не для всех элементов из  $A$ . Совокупность тех элементов из  $A$ , для которых этот закон определен, называется *областью определения* отображения  $f$  и обозначается  $D(f)$ .

Совокупность элементов из  $B$ , являющихся образом элементов из  $D(A) \subseteq A$  при отображении  $f$ , называется *множеством значений* отображения  $f$  и обозначается  $\text{Im}(f)$ .

$$\text{Im } f = \{b \in B : b = f(a), a \in Df \subseteq A\}$$

Отображение называется *однозначным*, если элементу  $a$  соответствует только один элемент из  $B$ , являющийся образом  $a$ .

Наряду с отображением  $f$ , как законом преобразования из  $A$  в  $B$ , вводится ему обратное  $f^{-1}$  следующим образом:  $f^{-1}(f(a)) = a$ . Если отображения  $f$  и  $f^{-1}$  одновременно однозначны, то  $f$  – *взаимно однозначное отображение*. Точка  $a = f^{-1}(b)$ , если она существует, называется *прообразом* точки  $b$  при отображении  $f$ .

Введенное понятие отображения соответствует использованному ранее как закону, который элементам из  $P^A$  ставит в соответствие элемент из  $P^B$ . Действительно, если  $N$  – некоторое подмножество в  $A$ , то его образ при отображении  $f$  обозначим  $f(N)$ . Этот образ есть подмножество в  $B$ .

Благодаря введению топологии для отображения может быть определено понятие непрерывности.

Отображение  $a = f(b)$  *непрерывно* в точке  $a \in A$ , если, каково бы ни было множество  $N$ , из  $N \subseteq D(f)$  и  $a \in N$  следует  $f(a) \in f(N)$ .

$f$  – *непрерывное преобразование на  $A$* , если оно непрерывно во всех точках множества  $A$ . Эквивалентное определение непрерывности, явно использующее понятие топологии, таково:  $f$  непрерывно, если во всякой окрестности  $M$  точки  $b = f(a)$  существует окрестность  $N$  точки  $a \in A$  и  $f(N) \subset M$ .

Следующие необходимые и достаточные условия непрерывности отображения  $f$  в каждой точке множества  $A$  эквивалентны:

- 1) прообраз  $f^{-1}(G)$  любого открытого множества  $G$  есть множество открытое;
- 2) прообраз  $f^{-1}(F)$  любого замкнутого множества  $F$  есть множество замкнутое;

3) если  $G \subseteq B = \text{Im}(f)$ , то  $f^{-1}(\overline{G}) \supseteq \overline{(f^{-1}(G))}$ ;

4) если  $N \subset A$ , то  $f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$ .

Если отображения  $f$  и  $f^{-1}$  одновременно непрерывны, то  $f$  называется *взаимно-непрерывным отображением*.

Взаимно-непрерывное и взаимнооднозначное отображение называется *гомеоморфизмом*. Это очень важное понятие.

Говоря о непрерывности отображения, следует уточнить область определения и топологию, в которой это отображение непрерывно. Одно и то же отображение может быть непрерывным в одной топологии и оказаться разрывным в другой.

Объекты, которые рассматриваются в функциональном анализе и его приложениях, помимо топологической, наделены и алгебраической структурой.

*Бинарной операцией* называется операция, которая каждым двум элементам ставит в соответствие третий элемент.

Для дальнейшего достаточно использовать три типа операций, которые условимся называть сложением, умножением (внутренним умножением) и умножением на вещественные либо комплексные числа. Другие эквивалентные названия этих операций – аддитивная, мультипликативная и умножение. Выбранное множество может быть снабжено одной из этих операций, двумя либо тремя. В зависимости от этого получаются те либо иные алгебраические структуры. Множества, наделенные алгебраическими операциями, это уже нечто совсем иное, чем обычные множества. Для них будем использовать более привычные обозначения  $X, Y$ .

Пусть  $X$  – множество, содержащее, по крайней мере, два различных элемента, в котором определена бинарная операция, называемая сложением. Ее обозначаем «+».  $X$  называется *аддитивной группой*, если выполняются следующие условия:

1) всякая пара  $(x, y)$  из  $X$  имеет единственный элемент  $z = x + y \in X$ ;

2) существует элемент  $0$  и  $\exists x \in X : 0 + x = x$ ;

3) для всякого элемента  $x$  существует элемент  $-x$  и  $x + (-x) = 0$ .

*Группа называется коммутативной или абелевой*, если сложение коммутативно:

$$x + y = y + x$$

Если  $X$  есть аддитивная группа и топологическое пространство одновременно, то  $X$  называется *топологической аддитивной группой*, если аддитивная операция непрерывна топологии пространства  $X$  относительно каждого из двух участвующих в операции элементов. Иными словами – сложение непрерывно.

В аддитивную группу вводится другая операция – умножение на скаляры. В качестве скаляров выступает либо множество комплексных чисел, которое будем обозначать  $\mathbf{Z}$ , либо множество вещественных чисел –  $R$ .

Коммутативная абелева группа  $X$  называется *линейной системой (модулем)* над скалярным множеством ( $R$  либо  $\mathbf{Z}$ ), если на ней однозначно определена операция умножения на скалярные числа  $\alpha$ :

1)  $y = \alpha \cdot x \in X$ ;

2)  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ ;

3)  $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ ;

4)  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ ;

5)  $1 \cdot x = x$ .

Линейную систему называют также *линейным векторным пространством*, а ее элементы – векторами. Это название не отражает истинного смысла понятия вектор в векторном анализе, и не следует путать с ним. Об этом говорилось в приложении 1.

Линейная система, содержащаяся в некоторой другой линейной системе, называется *линейным подпространством*. Для любого множества  $Y$ , содержащегося в линейном векторном пространстве  $X$ , существует наименьшее линейное векторное подпространство в  $X$ , содержащее  $Y$ . Оно состоит из элементов  $y$  вида:

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_i$$

где  $y_i \in Y$ ,  $\alpha_i$  – скаляры.

Подмножество  $C$  линейной системы  $X$  называется *выпуклым*, если из условий  $x_1, x_2 \in C$  следует, что и каждая их выпуклая комбинация  $\alpha \cdot x_1 + (1-\alpha) \cdot x_2$ ,  $\alpha \in (0,1)$  содержится в  $C$ .

Для всякого множества  $C$  существует наименьшее выпуклое множество  $C_0$ , содержащее  $C$ . Оно состоит из всех векторов  $y$  вида:

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1; \quad y_i \in C.$$

$n$  – конечное число.

Множество  $C_0$  называется *выпуклой оболочкой множества  $C$* .

Предположим, что  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – линейные системы над одним и тем же множеством скаляров. Произведением, или прямой суммой  $X^n$ , множеств  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  называется множество всевозможных упорядоченных систем  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в которых  $x_i \in X_i$ . Такое произведение обозначается  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ . Арифметические операции в нем определены покомпонентно правилом:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n).$$

*Топологическое линейное пространство (линейное пространство)* – это линейная система, являющаяся топологической аддитивной группой, в которой определена операция умножения на скаляр, являющаяся непрерывной функцией от  $(\alpha, x)$ .

Топологическое линейное пространство называется *локально выпуклым*, если оно обладает базисом, состоящим из выпуклых окрестностей. В топологическом линейном пространстве можно ввести понятие сильной выпуклости. Множество  $C$  называется *сильно выпуклым*, если оно выпукло и для любых двух точек  $x_1, x_2 \in C$  все точки прямой  $\alpha \cdot x_1 + (1-\alpha) \cdot x_2$ ,  $\alpha \in (0,1)$  имеют окрестность, целиком лежащую в  $C$ .

Если линейное пространство  $X$  содержит подмножество  $Y$ , само являющееся линейным пространством, то  $Y$  называется *линейным подпространством* в  $X$ . Если  $Y$  – дополнительно замкнутое множество, то  $Y$  – замкнутое подпространство.

Наряду со сложением и умножением на скаляр в топологическом линейном пространстве может быть введена операция умножения двух элементов – мультипликативная операция. Она может рассматриваться и независимо от введенных выше, и в этом последнем случае возникает объект, называемый группой либо группоидом, в зависимости от того, все ли эти элементы имеют обратные. Однако столь общие объекты далее использоваться не будут, поэтому мультипликативная операция вводится как дополнение к уже введенным – на топологическом линейном пространстве.

Линейная система  $X$  называется *алгеброй*, если в ней существует мультипликативная операция, называемая умножением, а результат ее действия – произведение, удовлетворяет условиям:

- 1) для всякой пары элементов  $x, y \in X$  однозначно определено их произведение  $x \cdot y$ ;
- 2)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ;
- 3)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ;
- 4)  $\alpha \cdot x \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \cdot y$ .

Если в алгебре  $X$  существует элемент « $e$ » такой, что  $e \cdot x = x \cdot e = x$ ,  $\alpha \cdot x = x \cdot \alpha = x$  для любого  $x \in X$ , то она называется алгебра с единицей. Если  $x \cdot y = y \cdot x$ , то алгебра называется коммутативной.

Алгебра  $X$  называется *топологической алгеброй (топологическим алгебраическим пространством)*, если  $X$  – топологическое пространство, и для любых  $x, y$  в окрестности их произ-

ведения  $N(x \cdot y)$  существует окрестность  $N(x)$  точки  $x$  и окрестность  $N(y)$ , точки  $y$  такие, что

$$x \cdot N(y) \subseteq N(x \cdot y);$$

$$y \cdot N(x) \subseteq N(x \cdot y)$$

Выражение  $x \cdot N(y)$  следует понимать как множество, образованное произведением элемента  $x$  на все элементы из  $N(y)$ .

Таким образом, операция умножения двух элементов в топологическом пространстве непрерывна по каждому из сомножителей.

На рисунке 1 приведена схема, позволяющая более наглядно представить взаимосвязь вводимых понятий.

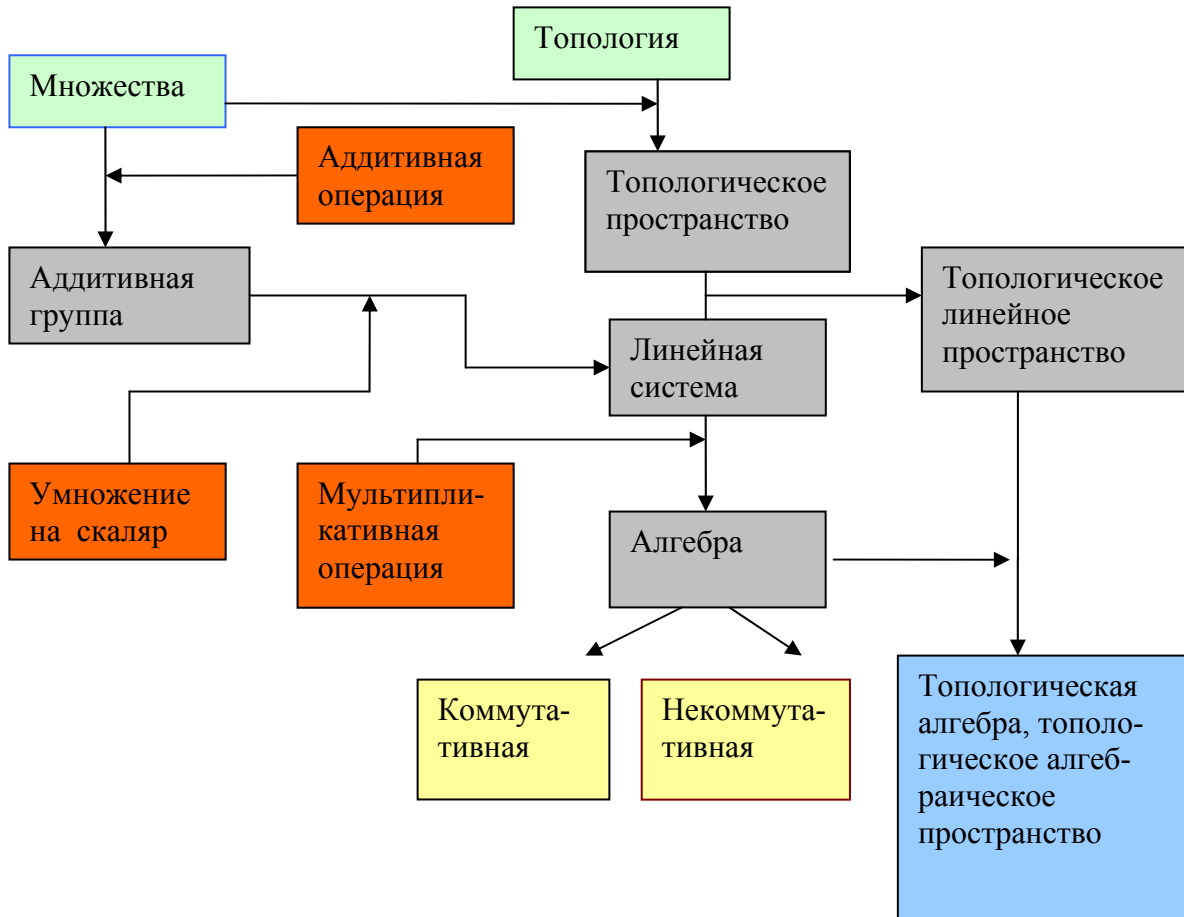


Рис. прил. 2.1. Связь вводимых понятий 1

### 2.3. Элементы функционального анализа

Введенные ранее абстрактные понятия приобретают свое конкретное выражение в частных случаях топологических пространств – метрических и нормированных. Для конечномерных пространств эти вопросы рассмотрены вне связи с топологическими понятиями в приложении 1. Здесь основным предметом рассмотрений являются пространства, элементами которых служат функции и другие более общие объекты.

Качественно, метрика – это формализованное понятие расстояния между двумя объектами заданного множества, и если это понятие, подчиненное ряду требований, определено над линейным векторным пространством, то последнее превращается в метрическое пространство. Поскольку с введением понятия расстояния автоматически определяются и окрестности того



либо иного элемента, то метрическое пространство оказывается и топологическим. Обратное, вообще говоря, неверно. Не всякое топологическое пространство является метрическим. Иными словами, не всякая топология, т.е. базис окрестностей, определяется метрикой. Если в конечномерном случае это различие в основном терминологическое, то в бесконечномерном пространстве отображений: функций, функционалов, операторов – это различие весьма существенно и имеет значимые конструктивные следствия. Аналогично понятие нормы является более жестким, чем понятие метрика. Всякая норма есть одновременно и метрика, но не всякая метрика – норма.

Понятие метрики играет существенную роль в постановках и решении обратных задач геофизики. Действительно, при решении обратной задачи необходимо как можно лучше, точнее приблизить рассчитанное от того либо иного элемента поле к наблюдаемому. Именно наилучшее совпадение рассчитанного и наблюдаемого полей и является одним из основных критериев отбора решения. Но для такого сравнения необходимо уметь вычислять величину отклонения одного поля от другого, причем для того, чтобы результаты вычислений можно было всегда сравнить, ими – результатами – должно быть упорядочено множество, например вещественные числа (а не комплексное или вектор). Способов такого расчета может быть много. Все зависит от тех факторов, которые следует принимать во внимание. Например, расстояние функции  $f_1(t)$  переменной  $t$  от  $f_2(t)$  можно оценить величинами:

$$d_p = \int |f_1(t) - f_2(t)|^p dt, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$d_0 = \max_t |f_1(t) - f_2(t)|;$$

$$d_0^N = \int \sum_{k=0}^N \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} (f_1(t) - f_2(t)) \right| dt.$$

Все они с формально математической стороны равноправны, но при этом выражают различные принципы близости двух элементов и, как следствие, приводят к различным результатам при решениях обратных задач. Приведенные примеры – это примеры задания норм и, как следствие, метрик различным способом на одном и том же пространстве  $X$ , состоящем из функций  $f(t)$  одного переменного, обозначенного  $t$ , имеющих некоторую естественную область определения, по которой осуществляется интегрирование или нахождение максимума. Дадим теперь несколько более точных определений.

*Метрическим пространством* называется пара  $(X, \rho(x, y))$ , состоящая из множества  $X$  и функции  $\rho(x, y)$ , определенной на  $X \oplus X$ , называемой метрикой, удовлетворяющая условиям:

- 1)  $\rho(x, y)$  определена для всех  $x, y \in X$  и принимает только неотрицательные значения из множества вещественных чисел  $R^1$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 3)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- 4)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Линейная система, снабженная метрикой, называется *линейным метрическим пространством*.

Если в качестве  $x$  положим  $0$  (при условии  $0 \in X$ ), то  $\rho(0, y)$  характеризует отклонение  $y$  от нуля.

Если  $X$  – линейная система, и для каждого  $x \in X$  определена вещественно-значная функция  $P(x)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $P(x) \geq 0$ ;
- 2)  $P(x) = 0$  только при  $x = 0$ ;
- 3)  $P(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot P(x)$  для всех  $\alpha$ , где  $\alpha$  – вещественное либо комплексное число;
- 4)  $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ ,

то  $P(x)$  называется *нормой* элемента  $x$ , а линейная система, снабженная нормой – *линейным нормированным пространством*.

Обратите внимание на отличие нормы и метрики. Оно состоит в более жестком условии на норму – условию (3), аналог которого отсутствует у метрики.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с линейными системами, то вместо «линейное нормированное (метрическое) пространство» будем писать просто «нормированное (метрическое) пространство». Всякое нормированное пространство является одновременно и метрическим, где метрика  $\rho(x, y)$  определена условием:

$$\rho(x, y) = P(x - y).$$

Норму элемента  $x$  будем обозначать  $\|x\|_X$ , опуская индекс  $X$ , уточняющий вид нормы там, где это не приведет к недоразумениям (т.е. когда очевидно, какое конкретно пространство имеется в виду или, что то же самое, каким конкретно выражением определена функция  $P(x)$ ). В главном нас будут интересовать нормированные пространства.

Понятно, что и метрические и, тем более, нормированные пространства, являются топологическими линейными пространствами. В качестве топологии в нормированном пространстве выступают открытые множества  $Q_\varepsilon(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ , которые называются  $\varepsilon$ -*окрестностью* точки  $x_0 \in X$ . Замыкание  $\bar{Q}_\varepsilon(x_0)$  окрестности  $Q_\varepsilon(x_0)$  есть множество

$$\bar{Q}_\varepsilon(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  – последовательность элементов в метрическом пространстве  $X$ . Говорят, что эта последовательность *сходится* к  $x_0 \in X$ , если всякая окрестность  $Q_\varepsilon(x_0)$  для любого  $\varepsilon > 0$  содержит все точки  $x_n$ , начиная с некоторого номера  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Эквивалентное определение: последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  сходится в точке  $x_0 \in X$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_0, x_n) \rightarrow 0.$$

Для нормированных пространств это условие таково:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - x_n\|_X \rightarrow 0.$$

Последовательность точек  $x_i, i = 1, 2, \dots, \infty$  метрического (нормированного) пространства  $X$  называется *фундаментальной*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$ , и  $p(x_n, x_m) < \varepsilon$  ( $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ ) для всех  $\{n, m\} > N(\varepsilon)$ . Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то она фундаментальна. Если же в пространстве  $X$  (метрическом или нормированном) любая фундаментальная последовательность сходится, то пространство называется *полным*.

*Операция замыкания множества* состоит в присоединении к нему пределов всех фундаментальных последовательностей.

Понятие плотного множества, введенное в топологическом пространстве, в метрических пространствах формулируется на языке сходимостей или замыканий. Если  $A \subseteq B \subseteq X, X$  – метрическое пространство и  $\bar{A} \supseteq B$ , то  $A$  *плотно в B*.

Операция присоединения к линейному метрическому пространству пределов всех его фундаментальных последовательностей называется *пополнением пространства*. Отличие от замыкания состоит в том, что пополнение – операция, относящаяся ко всему метрическому пространству, а замыкания – только к его подмножеству.

*Полное нормированное пространство называется банаховым (пространства Банаха)*. Банаховы пространства могут быть получены из нормированных путем их пополнения.

**Теорема Бэра-Хаусдорфа\***. Всякое непустое полное метрическое пространство является множеством второй категории.

Поскольку объединение счетного числа множеств первой категории есть снова множество первой категории, то из приведенной теоремы следует, что банахово пространство не может быть получено как объединение счетного числа множеств первой категории.

Для многих вопросов важным является *понятие компактности\**. Общее определение, пригодное для линейных топологических пространств таково:

*Топологическое пространство называется компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Если рассматриваемое пространство хаусдорфово, т.е. две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности, то компактное пространство (множество) называется *компактом*. Это определение эквивалентно важнейшему свойству компактов, из-за которых нас они и интересуют. Оно состоит в том, что:

***компактное множество является замкнутым и всякое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку. Всякое замкнутое подмножество компактного множества компактно, и непрерывный образ компактного множества компактен.***

Следующая теорема очень часто используется.

**Теорема о гомеоморфизме.** *Взаимнооднозначное и непрерывное отображение компакта на хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм.*

Значение приведенного результата состоит в том, что им гарантируется непрерывность обратного к  $f(x)$  отображения  $f^{-1}(x)$ , определенного на образе  $Y$  компакта  $X$ ;  $Y = \text{Im } f(X)$ , если  $f(x)$  взаимно-однозначен и непрерывен из  $X$  в  $Y$ . Иными словами, из взаимной однозначности, непрерывности «туда» следует и непрерывность «обратно». Непрерывность как понятие определено через топологию и зависит от ее вида.

В геофизических приложениях, при рассмотрении обратных задач, непрерывность обратного преобразования обеспечивает теоретическую устойчивость определения параметров среды – элемента из  $X$ , как функции наблюдаемой – элемента из  $Y$ , если  $f(x)$  – непрерывное отображение модели среды в модель поля. Использование компактных множеств важно и для задач минимизации, поскольку их введением обеспечивается существование решения соответствующей задачи. Точнее, справедлив такой результат.

**Следствие.** *Пусть  $X$  – компактное множество и  $f(x)$  – непрерывная на  $X$  числовая функция. Тогда  $f(x)$  ограничена на  $X$  и достигает на  $X$  верхней и нижней грани.*

Свойством несколько более слабым, чем компактность, является счетная компактность.

Топологическое пространство  $X$  называется *счетно-компактным*, если любое его открытое счетное покрытие имеет конечное подпокрытие. Эквивалентное определение таково: топологическое пространство называется счетно-компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку.

В метрических пространствах, как следствие, и нормированных понятия счетной компактности и компактности совпадают.

*Предкомпактным* (иногда в литературе употребляют термин «*относительно компактным*») называется множество, замыкание которого компактно.

Пространство называется *локально-компактным*, если каждая его точка имеет предкомпактную окрестность.

В нормальном (отделимом) линейном пространстве все замкнутые ограниченные множества компактны тогда и только тогда, когда пространство конечномерно. Отсюда следует, что в конечномерных пространствах понятие компактности сводится к ограниченности и замкнутости. Но тогда по теореме о гомеоморфизме:

*всякое однозначное непрерывное отображение  $f(x)$  конечномерного пространства  $X$ , определенное на замкнутом ограниченном множестве  $A \subset X$  имеет ограниченное обратное на образе  $B = \text{Im } f(A)$  этого множества.*

Рассмотрим теперь более частные случаи отображений.

Пусть  $X, Y$  – линейные топологические пространства и  $A(x)$  преобразование из  $X$  в  $Y$ . Преобразование  $A(x)$  называется *аддитивным*, если:

$$\forall x_1, x_2 \in X : A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2).$$

Аддитивное преобразование, непрерывное в одной какой-нибудь точке, непрерывно всюду. Если преобразование аддитивно и *однородно*, т.е.  $A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot A(x)$ , где  $\alpha$  – скаляр, то  $A(x)$  называется *линейным преобразованием*. Из определения следует, что линейное преобразование должно быть определено на линейном пространстве.

Если преобразование  $A(x)$  отображает ограниченные множества в ограниченные, то оно называется *ограниченным*.

Для линейных преобразований, действующих из нормированного пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , понятия ограниченности и непрерывности совпадают.

Для линейного непрерывного преобразования, действующего в паре банаховых пространств (из  $X$  в  $Y$ ), вводится его норма:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Из ее определения следует неравенство:

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X.$$

Ограниченность линейного преобразования  $A(x)$  эквивалента требованию  $\|A\| < \infty$ .

Преобразования в произвольных топологических пространствах  $X$  и  $Y$  называются операторами, а в том частном случае, когда  $Y$  – множество вещественных либо комплексных чисел,  $A$  называется вещественно-значным либо комплексно-значным *функционалом*. В дальнейшем используются исключительно вещественно-значные функционалы, поэтому прилагательное вещественно-значный будет опущено.

Наряду с введенными обозначениями для области определения  $D(A)$ , области значений  $\text{Im}(A)$  произвольного оператора  $A$  для линейного оператора дополнительно вводится понятие *ядра оператора*:  $\text{Ker}A = \{x \in DA : Ax = 0\}$ .

Если  $A$  – линейный ограниченный оператор из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ , то  $\text{Ker}A$  – замкнутое линейное подпространство в  $X$ .

Понятие ядра по аналогии можно ввести и для нелинейного оператора, но оно не будет иметь столь широкого применения, как для линейного, уже лишь потому, что не будет являться линейным подпространством в  $X$ , как это имеет место для линейного случая.

Пусть  $X$  – банахово пространство. Совокупность всех *линейных ограниченных функционалов, определенных на  $X$* , обозначается  $X^*$  и называется *сопряженным пространством к  $X$* . Элементы  $x^*$  из  $X^*$  представляют собой отображения  $x^*(x)$  из  $X$  во множество вещественных чисел, и для этого отображения вводится, в силу его особой значимости, специальное обозначение:  $\langle x^* | x \rangle$ . По причинам, которые станут ясны из дальнейшего, элементы из  $X^*$  иногда будем отождествлять с  $x^*$ , входящим в выражение  $\langle x^* | x \rangle$ .

Из приведенных выше общих сведений следует, что  $X^*$  является линейным нормированным пространством с нормой:

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle x^* | x \rangle. \quad (2.1)$$

Равенство (1) может быть обращено:

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \langle x^* | x \rangle.$$

Последнее соотношение можно рассматривать как определение нормы при заданном виде сопряженного пространства, а соотношение (1) – как определение нормы в сопряженном пространстве при заданном исходном.

Если  $X$  – банахово пространство, то  $X^*$  относительно нормы (1) – тоже банахово. Чаще всего  $X$  – это пространство функций некоторого переменного, например  $\tau : x(\tau)$ . Выбор переменной, как и ее размерность, не имеет значения. Важно, что эта переменная определена в некоторой области  $V$ . В этих и аналогичных им случаях справедлива **теорема Рисса об общем**

виде **линейного ограниченного функционала** на пространстве  $X$ . В соответствии с этой теоремой, каждый элемент из  $X^*$  отождествляется с некоторым интегралом:

$$\langle x^* | x \rangle_x = \int_V x(\tau) x^*(\tau) d\tau,$$

где элемент  $x^*(\tau)$  принадлежит некоторому другому функциональному пространству, называемому двойственным к  $X$ . Благодаря этому интегралу двойственное пространство,  $\tilde{X}$ , состоящее из функций  $x^*(\tau)$ , находится в соответствии и отождествляется с  $X^*$ . Справедливо и обратное – каждый такой интеграл с заданной функцией  $x^*(\tau)$  из  $\tilde{X}$  порождает линейный непрерывный функционал на  $X$  и представляет собой элемент из  $X^*$ . Норма отображения  $\langle x^* | x \rangle$

в соответствии с определением (1) оказывается равной норме элемента  $x^*(\tau)$  в пространстве  $\tilde{X}$ , двойственном к  $X$ . Таким образом,  $\tilde{X}$  и  $X^*$  находятся во взаимнооднозначном соответствии и поэтому отождествляются. Вместо  $x^*(\tau) \in \tilde{X}$  записываем  $x^* \in X^*$  и в этом смысле говорим, что  $X^*$  двойственно  $X$ .

Если  $X$  – банахово пространство, то пространство  $X^*$  также линейно и нормированно. Следовательно, можно построить и к нему сопряженное, которое называется вторым сопряженным к  $X$  и обозначается  $X^{**}$ . Понятно, что  $X \subseteq X^{**}$ . В том частном случае, когда  $X = X^{**}$ ,  $X$  называется *рефлексивным*.

Топологию банахова пространства  $X$ , порожденную нормой, называют *сильной*. Соответственно, говорят о *сильной сходимости*, *сильных пределах*, *сильном замыкании*, *сильной компактности* и т.д., когда хотят подчеркнуть, что речь идет о топологии нормы.

Исходя из заданной системы функционалов над  $X$ , может быть определена другая топология, зависящая от того, какие функционалы считаются непрерывными.

Слабейшая из всех топологий на  $X$ , относительно которой непрерывны все функционалы из  $X^*$ , называется *слабой топологией*. Соответственно, возникает понятие *слабой полноты*, *слабой компактности*, *слабой замкнутости*, *слабой сходимости*, *слабой непрерывности* и т.д.

Приведем сведения о некоторых свойствах слабой топологии и ее соотношениях с сильной.

Слабая топология на  $X$  слабее, чем сильная, так что всякая сильно сходящаяся последовательность является и слабо сходящейся, и всякое сильно непрерывное отображение – слабо непрерывным. Обратное, вообще говоря, неверно. Слабо сходящаяся последовательность может не иметь сильного предела. Это, практически, очень значимое обстоятельство. Отсюда, в частности, следует, что слабое замыкание некоторого множества шире, чем его сильное замыкание.

Рассмотрим такой пример. Пусть  $L_2(-\pi, \pi)$  обозначает множество функций, определенных на интервале  $(-\pi, \pi)$  и имеющих конечную величину квадратичной Гильбертовой нормы:

$$\|f(x)\|_{L_2} = \left[ \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Сопряженное к  $L_2$  в приведенном выше смысле совпадает с самим  $L_2$ . Точнее говоря, двойственным к  $L_2$  служит само  $L_2$  и, следовательно, сопряженное к  $L_2$  отождествляется с самим  $L_2$  (это следует из неравенства Гельдера – см. п. 5 настоящего приложения). В этом случае, в соответствии с теоремой Риса:

$$\langle x^*(\tau) | f(\tau) \rangle_{L_2(-\pi, \pi)} = \int_{-\pi}^{+\pi} x^*(\tau) f(\tau) d\tau,$$

где  $x^*(\tau) \in L_2(-\pi, \pi)$ .

Таким образом:

$$L_2^*(-\pi, \pi) = L_2(-\pi, \pi).$$

Рассмотрим последовательность функций  $\cos(n \cdot \tau)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Она не является сильно сходящейся, но из теории рядов Фурье известно, что для любой квадратичной интегрируемой функции  $\varphi(\tau)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\tau) \cos(n \cdot \tau) d\tau \rightarrow 0.$$

Это означает, что последовательность  $\{\cos(n \cdot \tau)\}$  сходится слабо к нулю, ибо для каждого  $x^*(\tau) \in X^* = L_2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^* | \cos(n \cdot \tau) \rangle_{L_2} = 0.$$

Однако из слабой сходимости последовательности следует, что она ограничена. Точнее, если последовательность  $x_n$  сходится слабо, то:

$$\sup_n \{\|x_n\|_X < \infty\}.$$

Любое сильно замкнутое подпространство слабо замкнуто и всякое сильно замкнутое выпуклое множество является слабо замкнутым. Верно и обратное. Слабо замкнутое выпуклое множество одновременно и сильно замкнуто. Таким образом, для выпуклых множеств понятия сильной и слабой замкнутости совпадают.

Слабо компактное множество слабо полно.

Если последовательность  $x_n$  слабо сходится к  $\bar{x}$ , то для любого целого положительного  $n$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое конечное множество действительных чисел

$$\alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i = 1, \text{ что } \left\| \bar{x} - \sum_i \alpha_i x_i \right\| < \varepsilon.$$

Этот результат означает, что из слабо сходящейся последовательности можно построить выпуклую комбинацию ее элементов, сходящуюся сильно.

На пространстве  $X^*$  наряду с сильной топологией, определенной нормой:

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{\|x^{**}\|_{X^{**}} < 1} \langle x^* | x^{**} \rangle_{X^*},$$

может быть введена и слабая топология. Но больший интерес представляет другая, родственная ей топология, называемая \*-слабой.

\*-слабая топология на  $X^*$  — это слабейшая из всех топологий, в которых непрерывны функционалы  $\langle x^* | x \rangle$  на  $X^*$  при  $x \in X$  (а не  $x \in X^{**}$ ). Эта топология совпадает со слабой топологией на  $X^*$ , если  $X = X^{**}$ . Последнее имеет место, когда  $X$  рефлексивно. Таким образом, введение понятия \*-слабой топологии, в отличие от слабой, содержательно только для нерефлексивных пространств. Поскольку в этих случаях  $X \subset X^{**}$ , то \*-слабая топология слабее, чем слабая топология на  $X^*$ .

К числу нерефлексивных пространств относятся пространства непрерывных и пространства абсолютно интегрируемых функций. \*-слабая топология потребуется при рассмотрении задач на минимум, именно в этих пространствах, и в этой связи важен результат:

**Теорема Банаха-Алаоглу\*.** Сфера  $S$  в  $X^*$ :  $S = \{x^* : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$  компактна в \*-слабой топологии пространства  $X^*$ .

Поскольку в рефлексивном пространстве  $X = X^{**}$ , то из приведенной теоремы вытекает следующий результат.

**Следствие 1.** В рефлексивном пространстве сфера  $S = \{x : \|x\|_X \leq 1\}$  слабо компактна.

Оказывается справедливо и обратное.

**Следствие 2.** Если сфера  $S = \{x : \|x\|_X \leq 1\}$  слабо компактна, то пространство  $X$  рефлексивно.

*Слабая топология может совпадать с топологией нормы (сильной). Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $X$  было конечномерно.*

Если  $M$  – некоторое подмножество в линейном топологическом пространстве  $X$ , то совокупность элементов  $x^*$  из  $X^*$  таких, что  $\langle x^* | x \rangle = 0, \forall x \in M$ , называется аннулятором  $M$  и обозначается  $M^\perp$ . Если  $M$  дополнительно является линейным подпространством, то  $M^\perp$  называется ортогональным дополнением к  $M$ , и есть линейное подпространство в  $X^*$ , замкнутое относительно сильной топологии в  $X^*$ .

## 2.4. Операторы

Пусть  $X$  – линейное топологическое пространство и  $X_1$  – его подпространство. Пусть, далее,  $A_1$  – линейный оператор, определенный на  $X_1$ , и  $A$  – оператор, определенный на  $X$ . Если:  $\forall x \in X_1 : Ax = A_1x$ , то  $A$  называется расширением  $A_1$ . Соответственно,  $A_1$  – сужение  $A$  с  $X$  на  $X_1$ .

Пусть  $A$  есть линейный оператор, действующий из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$  ( $A: X \rightarrow Y$ ). Рассмотрим множество  $G$ , образованное прямым произведением области определения (множества  $D(A)$ ) и области значений (множества  $ImA$ ) оператора  $A$ . Множество  $G$  называется *графиком оператора* и состоит из всевозможных пар  $(x, y) = (x, Ax)$ . Это множество называется графиком оператора  $A$ . Введя норму для элемента из  $G$  правилом  $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ , превращаем  $G$  в нормированное пространство. Если во введенной норме график операторов  $A$  оказывается замкнутым множеством, то *оператор  $A$  называется замкнутым*. Иными словами, оператор  $A$  замкнут, если из условий  $x_n \rightarrow \bar{x}, y_n = Ax_n \rightarrow \bar{y}$ , следует, что  $\bar{x} \in DA; \bar{y} \in Im A; \bar{y} = A\bar{x}$ . Здесь важно иметь в виду, что замкнутость  $A$  не означает сходимости  $y_n$  из сходимости  $x_n$ , что имеет место для ограниченных операторов. Замкнутость означает, что из сходимости последовательностей  $x_n$  и  $y_n$  следует, что пара  $(\bar{x}, \bar{y})$  – их предел, принадлежит графику.

Непосредственно из определения следует, что если  $A$  замкнут и имеет обратный, то  $A^{-1}$  также замкнут.

Практически возникающие при рассмотрении интерпретационных задач в геофизике операторы всегда замкнуты и имеют в качестве области определения некоторое линейное множество – линейное пространство  $X_1$ . Это множество можно пополнить до некоторого банахова пространства  $X$  (без продолжения оператора на пополнение) и считать, что  $A$  имеет область определения, плотную в банаховом пространстве  $X$ . Это далее предполагается.

Множество линейных замкнутых операторов, действующих из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ , обозначается  $[X \rightarrow Y]$ .

Исключительно важным для дальнейшего является понятие сопряженного оператора. Это одно из центральных понятий, используемых как в теории операторов, так и более узком вопросе, но основном, для рассмотрения в этой книге – теории и методах анализа и решения некорректных задач математической физики.

Пусть  $A$  – линейное преобразование, действующие из  $X$  в  $Y$ , где  $X, Y$  – банаховы пространства. Как и всюду, далее предполагаем, что  $DA$  плотно в  $X$ . Рассмотрим линейный ограниченный функционал  $y^* \in Y^*$  на  $Im A \subseteq Y$ :  $\langle y^* | y \rangle_Y = \langle y^* | Ax \rangle_Y$ .

Этот функционал является одновременно и функционалом на элементах из  $DA \subseteq X$ , т.е. элементом из  $X^*$ , и, следовательно, существует элемент  $x^* \in X^*$  такой, что  $\langle y^* | Ax \rangle_Y = \langle x^* | x \rangle_X$ .

Этот элемент зависит от принятого  $y^* \in Y^*$  и оператора  $A$ .

Последнее равенство определяет отображение  $A^*$  из  $Y^*$  в  $X^*$  по правилу:

$$\langle y^* | Ax \rangle_Y = \langle x^* | x \rangle_X = \langle A^* y^* | x \rangle_X.$$

Требование плотности  $DA$  в  $X$  необходимо для того, чтобы  $A^*$  был однозначен. Оператор  $A^*$  называется сопряженным к  $A$ .

Приведем некоторые примеры (используются в 7.1). Пусть  $A$  действует из  $L_2(V)$ , в  $R^3$ , в  $L_2(E_0)$  по правилу:

$$A\sigma(v) = \iiint_V \frac{\sigma(v)zdv}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = u(x_0, y_0). \quad (2.2)$$

Здесь  $V$  – замкнутая ограниченная область,  $v = \{x, y, z\}$ ,  $E_0 = \{x_0, y_0\} \notin V$ . Например,  $E_0 = \{x_0, y_0 : -\infty \leq x_0, y_0 \leq \infty, z < 0\}$ ,  $V = \{x, y, z > 0\}$ .

Этот оператор соответствует оператору прямой задачи гравиразведки. Он ограничен (см. 7.1 из  $L_2(V)$  в  $L_2(E_0)$ ). Тогда, учитывая, что двойственным к  $L_2$  служит само  $L_2$ , получим для  $\varphi^*(x_0, y_0) \in L_2(E_0)$ :

$$\begin{aligned} \langle A_V \sigma(v) | \varphi^*(s_0) \rangle_{L_2(E_0)} &= \iiint_{E_0} \iiint_V \frac{\sigma(x, y, z)zdx dy dz}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \varphi(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \\ &= \iiint_V \sigma(x, y, z) \cdot \iiint_{E_0} \frac{\varphi^*(x_0, y_0)zdx_0 dy_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} dv = \langle \sigma(v) | A^* \varphi^*(x_0, y_0) \rangle_{L_2(V)} \end{aligned}$$

Таким образом, оператор  $A^*$  ставит в соответствие элементу  $\varphi^*(x_0, y_0) \in L_2(E_0)$  элемент<sup>40</sup>:

$$\xi^*(v) = \iiint_{E_0} \frac{\varphi^*(x_0, y_0)zdx_0 dy_0}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}}.$$

Свойства оператора и его сопряженного тесно связаны между собой. Без доказательства укажем следующие из них.

Если  $A$  линеен и задан на плотном в банаховом пространстве  $X$  множестве, то  $A^*$  замкнут, и  $\|A\| = \|A^*\|$ . Если дополнительно  $A$  имеет обратный,  $Im A = Y$  (всюду предполагается, что  $X, Y$  – банаховы пространства), то  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ ;  $A^{-1}$  ограничен тогда и только тогда, когда  $(A^*)^{-1}$  ограничен на  $X^*$ .

Операторами, являющимися замкнутыми, исчерпывается большинство геофизических приложений. Поэтому сформулируем основные результаты для этого класса операторов.

**Теорема 2.** Если  $A$  – замкнутое линейное преобразование из  $X$  в  $Y$  ( $A \in [X \rightarrow Y]$ ), область значений которого  $Im A$  – множество второй категории в  $Y$ , то

- 1)  $Im A = Y$ ;
- 2) существует такая постоянная  $m > 0$ , что  $\forall y \in Y, \exists x \in DA$  и  $y = Ax$ ;  $\|x\|_X \leq m \|y\|_Y$ ;
- 3) если существует обратное преобразование ( $A$  взаимнооднозначен), то оно ограничено.

<sup>40</sup> Всяду отождествляется элемент из сопряженного пространства ему соответствующим по теореме Риса элементом двойственного пространства.



Отсюда, в частности, следует:

если  $A \in [X \rightarrow Y]$ ,  $\text{Im}A = Y$  и  $A$  – взаимнооднозначен, то  $\|A^{-1}\| < \infty$ ;

если  $A \in [X \rightarrow Y]$  и  $DA$  есть множество второй категории в  $X$ , то  $DA = X$ , и  $\|A\| < \infty$ ;

если  $A \in [X \rightarrow Y]$  и  $A$  не ограничен, то  $DA$  не может совпадать со всеми  $X$ , а в лучшем случае образует лишь плотное в  $X$  подмножество.

Таким образом, если  $A$  замкнут, взаимнооднозначен и  $\text{Im}A$  есть множество первой категории, то  $A$  не имеет ограниченного обратного. В этом случае  $\text{Im}A$  не содержит ни одной внутренней точки (как множество первой категории).

Для оператора (2), который использовался в качестве примера выше, можно доказать, что область его значений есть множество первой категории в  $L_2(E_0)$  при  $E_0 = \{x_0, y_0 : -\infty \leq x_0, y_0 \leq \infty, z < 0\}$ ,  $V = \{x, y, z > 0\}$ . Это сделано в п. 7.1. Тогда из приведенной теоремы, в частности, следует вывод, что он не имеет ограниченного обратного.

При рассмотрении обратных задач с замкнутым оператором в паре банаховых пространств:

$$\begin{aligned} Ax &= y; \\ x &\in X; y \in Y \end{aligned} \quad (2.3)$$

прежде всего, возникают вопросы, связанные с разрешимостью этой задачи.

*Уравнение (3) называется:*

*однозначно разрешимым (о.р.), если  $\text{Ker}A = 0$ ;*

*плотно разрешимым (п.р.), если  $\overline{\text{Im}A} = Y$ ;*

*везде разрешимым (в.р.) при  $\text{Im}A = Y$ ;*

*корректно разрешимым (к.р.) при  $\|A^{-1}\| < \infty$ .*

Из приведенных выше результатов следует, что для замкнутого взаимно однозначного оператора из всюду разрешимости следует корректная разрешимость.

Все введенные понятия и результаты относительно замкнутого оператора с областью определения в банаховом пространстве  $X$  можно распространять и на случай, когда  $\text{Ker}A$  содержит нетривиальные элементы и образует линейное многообразие в  $X$ . Это соответствует ситуации однозначного оператора, имеющего многозначный обратный. Делается это следующим образом.

Разобьем все пространство  $X$  на *классы смежности*  $[x]$ , содержащие вместе со всяким элементом  $x \in X$  и все элементы  $x+g$ , где  $g \in \text{Ker}A$ . Легко видеть, что два класса  $[x_1]$  и  $[x_2]$  либо совпадают, либо не пересекаются. Множество всех таких классов обозначим  $X/\text{Ker}A$ . Оно образует нормированное пространство, если норму в нем определить следующим образом:

$$\|[x]\|_X = \inf_{x \in [x]} \|x\|_X. \quad (2.4)$$

В этом случае оператор  $A$ , рассматриваемый на элементах из  $X/\text{Ker}A$ , является взаимно однозначным. Действительно, каждому  $y \in \text{Im}A$  соответствует только один класс  $[x]$  из  $X/\text{Ker}A$ . Пространство этих классов называется *фактор пространством пространства  $X$  по множеству  $\text{Ker}A$* . К так модифицированному оператору  $A$ , который называется *факторизованным*, приемлемы все приведенные результаты об ограниченности обратного. При этом под обратным понимается соответствие элементу  $y$  класса  $[x]$  с нормой (4).

Так, например, если оператор  $A$  замкнут, действует из  $X$  в  $Y$ ,  $\text{Im}A$  есть в  $Y$  множество второй категории, то факторизованный оператор имеет ограниченный обратный (из  $Y$  в  $X/\text{Ker}A$ ). Примером подобному случаю может служить операция проектирования точек трехмерного пространства на некоторое двумерное подпространство этого пространства. Ядром оператора служит линия, проходящая через ноль и ортогональная подпространству, на которое происходит проектирование. Наоборот, если  $\text{Im}A$  не есть множество первой категории, то факторизованный не имеет ограниченного обратного. Например, таков оператор (2), рассмотренный выше. Этот результат, в частности, означает, что задача:

$$A\sigma(v) = \iiint_V \frac{\sigma(v)zdv}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = u(x_0, y_0).$$

$$\|\sigma(v)\|_{L_2(V)} \rightarrow \min.$$

не имеет устойчивого решения из  $L_2(E_0)$  в  $L_2(V)$ . Иными словами, оператор, доставляющий решение этой задачи, неограничен. Причина тому состоит в том, что множество  $\text{Im}A$  есть множество первой категории в  $L_2(E_0)$ .

Свойства разрешимости уравнений с операторами  $A$  и  $A^*$  тесно связаны между собой.

Главным в установлении такой взаимосвязи является совокупность результатов. Они объединяются в результат под именем **Теорема о ядре**.

Пусть  $y^* \in \text{Ker}A^*$  и  $x \in DA$ . Тогда:

$$0 = \langle A^* y^* | x \rangle_X = \langle y^* | Ax \rangle_Y$$

И, следовательно,  $y^* \in (\text{Im}A)^\perp$ . Наоборот, если  $y^* \in (\text{Im}A)^\perp$  б  
 $0 = \langle A^* y^* | x \rangle_X = \langle y^* | Ax \rangle_Y = 0 = \langle A^* y^* | x \rangle_X, \forall x \in DA$  и, следовательно,  $y^* \in \text{Ker}A^*$ .

Итак, получаем равенство:

$$\text{Ker}A^* = (\text{Im}A)^\perp. \quad (2.5)$$

Аналогично можно показать, что для ограниченного оператора  $A$ :

$$\text{Ker}A = (\text{Im}A^*)^\perp. \quad (2.6)$$

Если оператор  $A$  – линеен и ограничен, то для него справедливы, в некоторой мере, обратные к (5-6) результаты:

$$(\text{Ker}A)^\perp = M, \quad (2.7)$$

где  $M$  – замыкание  $(\text{Im}A^*)$  в \*-слабой топологии пространства  $X^*$ .

$$(\text{Ker}A^*)^\perp = \overline{(\text{Im}A)}, \quad (2.8)$$

где последнее замыкание берется в слабой топологии пространства  $Y$ .

Исходя из результатов (5-8), составляющих суть теоремы о ядре, можно упорядочить различные типы разрешимости для уровней с операторами  $A$  и  $A^*$ . В предположении, что  $A$  линеен, замкнут и имеет плотную в  $X$  область определения, разрешимости уравнений для операторов  $A$  и  $A^*$  связаны так:

$A$		$A^*$
О.р.	$\leftarrow$	П.р.
П.р.	$\leftrightarrow$	О.р.
К.р.	$\leftrightarrow$	В.р.
В.р.	$\leftrightarrow$	К.р.

(2.9)

В порядке возрастания свойств непрерывности линейного оператора  $A$  можно выделить замкнутый, непрерывный, вполне непрерывный.

*Вполне непрерывным оператором называется линейный оператор, отображающий каждое ограниченное множество в предкомпактное.*

Вполне непрерывный оператор всегда непрерывен, а непрерывный – замкнут. Можно ввести промежуточные понятия: слабозамкнутых, слабонепрерывных и слабо вполне непрерывных операторов. Определения этих понятий повторяют приведенные ранее с заменой сильной топологии на слабую.

*Слабо замкнутый оператор имеет слабо замкнутый график.*

*Слабо непрерывный оператор непрерывен относительно слабой топологии.*

*Слабо вполне непрерывный оператор переводит ограниченные множества в слабо предкомпактные.*

*Слабо замкнутый линейный оператор и сильно замкнут;*

*Непрерывный оператор одновременно является и слабо непрерывным.*

*Вполне непрерывный оператор одновременно и слабо вполне непрерывный.*

*Важным для нас является следующий результат.*

**Теорема 3.** Пусть  $A$  – линейный ограниченный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$ , где  $X, Y$  – банаховы пространства. Если  $Y$  рефлексивно, то  $A$  – слабо вполне непрерывен.

Доказательство достаточно просто.

Пусть  $S$  – ограниченное множество в  $X$  и  $M$  – замкнутое, выпуклое ограниченное множество, охватывающее  $S$  ( $S \subseteq M$ ). Тогда  $A(S) \subseteq A(M)$  и  $A(M)$  замкнуто, выпукло и, в силу рефлексивности  $Y$ , слабо компактно. Тогда (поскольку  $A(S) \subseteq A(M)$ ),  $A(S)$  слабо предкомпактно, что и требовалось доказать.

Особую роль играют сопряженные операторы в Гильбертовых пространствах.

Справедлив следующий результат.

Пусть  $A$  и  $B$  – линейные ограниченные операторы в Гильбертовом пространстве. Тогда:

$$1. (A+B)^* = A^* + B^*.$$

$$2. (AB)^* = B^* A^*.$$

$$3. (aA)^* = a^* A^*.$$

$$4. I^* = I.$$

$$5. A^{**} = A.$$

$$6. \|A\| = \|A^*\|.$$

7. Если один из обратных к  $A$  или  $A^*$  существует и непрерывен, то существует и непрерывен другой, причем  $A^{-1*} = A^{*-1}$ .

## 2.5. Примеры функциональных пространств

Наиболее важным отличием между различными пространствами функций является вид введенной нормы, хотя это и не единственное различие. Все интересующие нас банаховы пространства функций строятся единообразным способом. Выбирается исходное пространство функций, на нем определяется вид нормы и далее к этому множеству присоединяются все пределы всех фундаментальных последовательностей. Осуществляется его пополнение. Получаемое нормированное пространство по построению оказывается полным, т.е. банаховым, а исходное множество – плотным в нем подмножеством. Конечно, в зависимости от введенной нормы состав элементов в получаемых пространствах различен, но главным для нас является различие в выражениях для нормы. Введение различных пространств продиктовано необходимостью конкретного выражения для нормы, а не «нехваткой» элементов пространств для тех либо иных описаний. Приведем пример.

Простейшим и одновременно наиболее употребляемым из всех рассматриваемых банаховых пространств является гильбертово пространство  $L_2(V)$ , состоящее из всех квадратично интегрируемых в области  $V$  функций с нормой:

$$\|f(v)\|_{L_2(V)} = \left\{ \int_V |f(v)|^2 dv \right\}^{1/2}.$$

Оно выделяется по своим свойствам в связи с тем, что для любых двух элементов  $f_1(v), f_2(v)$  определен линейный непрерывный функционал

$$\int_V f_1(v) \cdot f_2(v) dv,$$

называемый скалярным произведением. Скалярным произведением исчерпываются все линейные ограниченные функционалы на  $C$ . В соответствии с теоремой Риса этим и устанавливается

то, что двойственным к  $L_2(V)$ , которое мы отождествляем с сопряженным, служит само  $L_2(V)$ . Другим распространенным банаховым пространством служит  $C(V)$ , состоящее из всех непрерывных в области  $V$  функций с нормой

$$\|f(v)\|_{C(V)} = \sup_{v \in V} |f(v)|.$$

Множество  $L_2(V)$  и  $C(V)$  не совпадают, хотя их пересечение плотно как в  $L_2(V)$ , так и в  $C(V)$ . Для практических целей – описания объектов, возникающих в геофизических приложениях – наблюдаемых распределений физического параметра, хватило бы и этого пересечения. Но мы рассматриваем  $L_2(V)$  либо  $C(V)$  в связи с тем, что основной в этой книге часто рассматривается задача оптимизации вида:

$$\begin{cases} f(v) \in M; \\ I(f(v)) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Для ее решения желательно, чтобы функционал  $I(f(v))$  имел вид нормы. Далее множество  $M$  часто представлено как  $M = \text{Ker} A + a$ , где  $A$  – заданный линейный оператор и  $a$  – элемент (функция) из его области определения. Для существования решения этой оптимизационной задачи требуется, чтобы множество  $M$  было замкнутым относительно функционала  $I(f(v))$ . Последнее означает, что этот функционал, рассматриваемый как оператор из  $M$  во множество вещественных чисел, должен быть на множестве  $M$  замкнутым. Если  $I(f(v)) = \|f(v)\|_X$ , то для выполнения этого требования достаточно, чтобы  $A$  был непрерывен (при условии, что он линеен) на функциональном пространстве  $X$ . Такого рода потребности и вынуждают рассматривать не только простейшие – гильбертовы пространства, которых по числу элементов, несомненно, хватает, но и более сложные и общие – пространства банаха.

Обозначим  $C_0^\infty(V)$  множество всех непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций, образующихся в ноль на границе  $\partial V$  области  $V$ . На множестве  $C_0^\infty(V)$  введем норму:

$$\|f(v)\|_{L_p(V)} = \left\{ \int_V |f(v)|^p dv \right\}^{1/p}.$$

Здесь  $1 \leq p < \infty$ . Пополним  $C_0^\infty$  относительно введенной нормы. В результате получим банахово пространство, обозначаемое  $L_p(V)$ . При  $p = 2$  получим уже упоминавшееся ранее гильбертово пространство  $L_2(V)$ . Для случая  $p = \infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f(v)\|_{L_p(V)} = \sup_{v \in V} |f(v)| = \|f(v)\|_{L_\infty(V)}.$$

Здесь: “ $\sup_{v \in V}$ ” означает “существенная верхняя грань”, т.е. верхняя грань по множеству  $V$ , за исключением, может быть, множества меры нуль (т.е. конечного или счетного числа точек из  $V$ ). Пополнение  $C_0^\infty$  по такой норме образует банахово пространство  $L_\infty(V)$ .

Пространство  $L_p(V)$  Пространство  $L_p(V)$  состоит из всех функций с конечной величиной  $\|f(v)\|_{L_p(V)}$ . Иными словами, любая функция с конечной величиной  $\|f(v)\|_{L_p(V)}$  может быть представлена как предел в норме  $L_p(V)$  последовательности элементов из  $C_0^\infty(V)$ .

Всякий линейный ограниченный функционал на  $L_p(V)$  имеет вид  $\langle f^*(v) | f(v) \rangle$ ,  $1 < p < \infty$ :

$$\langle f^*(v) | f(v) \rangle_{L_p(V)} = \int_V f^*(v) \cdot f(v) dv, \forall f(v) \in L_p(V),$$

где  $f^*(v) \in L_{p'}(V)$ . Причем  $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$ .

Норма этого функционала в точности равна норме элемента  $f^*(v)$ , порождающего этот функционал в соответствии с теоремой Риса, и несколько условно можно записать:

$$\|f^*(v)\|_{L_{p'}(V)} = \left\| \langle f^*(f^*(v)) |^* \rangle \right\|_{L_p^*(V)}.$$

Таким образом, сопряженное к  $L_p(V)$  пространство *изометрически изоморфно* пространству  $L_{p'}(V)$ . Последнее означает, что каждому элементу  $\langle f^*(v) | f(v) \rangle_{L_p(V)}$ ,  $1 < p < \infty$ : соответствует один и только один элемент  $f^*(v) \in L_{p'}(V)$ . Так, что

$$\sup_{\|f(v)\|_{L_p} \leq 1} \langle f^*(v) | f(v) \rangle_{L_p} = \|f^*(v)\|_{L_{p'}}.$$

В смысле этого изоморфизма и отождествляются  $(L_p(V))^*$  и  $L_{p'}(V)$ .

Из приведенного факта следует, что  $p'' = p$ ;  $1 < p < \infty$ , так что  $L_p(V)$  рефлексивно. Отсюда, в частности, следует и другой вывод. Поскольку

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \langle x | x^* \rangle,$$

то:

$$\left\{ \int_V |f(v)|^p \right\}^{1/p} = \sup_{\|\varphi(v)\|_{L_{p'} \leq 1} V} \int f(v) \varphi(v) dv.$$

Банахово пространство  $X$  называется *сильно выпуклым*, если для  $x, y \in X$ , из условий  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  следует  $x = \alpha \cdot y$ , где  $\alpha$  – число. Это определение совпадает с данным ранее для топологических пространств, в случае топологии нормы.

Банахово пространство называется *равномерно выпуклым*, если из того, что  $x_n \in X, y_n \in X, \|x_n\|_X \leq 1, \|y_n\|_X \leq 1, \|x_n + y_n\|_X \rightarrow 2$ , следует  $\|x_n - y_n\|_X \rightarrow 0$ .

Равномерно выпуклые пространства одновременно и сильно выпуклы.

Пространства  $L_p(V)$  ( $1 < p < \infty$ ) являются равномерно выпуклыми и каждое равномерно выпуклое пространство рефлексивно. Однако существуют рефлексивные пространства, не являющиеся равномерно выпуклыми.

Пространства  $L_1(V)$  и  $L_\infty(V)$  не являются ни равномерно выпуклыми, ни рефлексивными. При этом сопряженным к  $L_1(V)$  служит  $L_\infty(V)$  (в смысле указанного выше изометрического изоморфизма). Сопряженное к  $L_\infty(V)$  образует специальное множество функций, которое обозначается  $ba$ , а нормой служит полная вариация. Пространство  $L_1(V)$  образует \*-слабо плотное множество в  $ba$  и, таким образом,  $ba$  можно рассматривать как \*-слабое замыкание  $L_1(V)$ . Это обстоятельство нам потребуется в гл. 7.

В связи с пространствами  $L_p$  важен результат, называемый *теоремой Рисса о выпуклости*. Мы приведем лишь один его частный случай.

**Теорема Риса о выпуклости.** Пусть  $A$  – линейное ограниченное отображение из  $L_p(V)$  в  $L_q(S)$  и  $\|A\|_{p,q}$  – его норма. Пусть известно, что  $\|A\|_{p,q} < \infty$  для всех комбинаций  $p, q = \{0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1\}$ . Тогда  $\log \|A\|_{1/a, 1/b}$  есть выпуклая функция от  $a, b$  при  $0 \leq a, b \leq \infty$ .

Эта теорема позволяет делать вывод об ограниченности оператора в нормах промежуточных пространств, если известна его ограниченность в пространствах с индексами  $p, q$  равными 0 и 1.

Следующее неравенство известно, как

**Неравенство Юнга.** Пусть  $f(x) \in L_p$ ,  $g(x) \in L_r$ , где  $1/p + 1/r \geq 1$ ,  $p \geq 1$ ,  $r \geq 1$ . Тогда для

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \cdot g(y) dy,$$

имеем

$$\|h(x)\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_r}$$

при

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1.$$

Пространство  $C^r(V)$  является замыканием (пополнением)  $C_0^\infty(V)$  относительно нормы:

$$\|f(v)\|_{C^r(V)} = \sup_{v \in V} \sum_{k=0}^r \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} f(v) \right|, \quad v = \{x, y, z\},$$

где  $\sum_{(k)}$  означает суммирование по всевозможным комбинациям индексов

$k_1, k_2, k_3$ ;  $k_1 + k_2 + k_3 = k$ ;  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ . Это пространство состоит из функций, непрерывных в  $V$  вместе со всеми своими производными до порядка  $r$  включительно (по любому из аргументов). Легко увидеть, что если  $r_1 > r_2$ , то  $C^{r_1} \subset C^{r_2}$ . Наиболее распространен случай  $C_0(V)$ , обозначаемый  $C(V)$ ,

$$\|f(v)\|_{C(V)} = \sup_{v \in V} |f(v)|.$$

Пространство  $C(V)$  не является ни рефлексивным, ни сильно выпуклым, и общий вид линейного функционала над  $C(V)$  имеет вид

$$\langle f(v) | g(v) \rangle_{C(V)} = \int_V f(v) g(v) dv,$$

где  $g(v) \in L_1(V)$ . Так что  $L_1(V)$  можно отождествлять (в смысле изометрического изоморфизма) с  $C^*(V)$ .

*Соболевское пространство*  $W_p^r(V)$  состоит из пополнения  $C_0^\infty(V)$  по норме:

$$\|f(v)\|_{W_p^r(V)} = \left\{ \int_V \sum_{k=0}^r \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} f(v) \right|^p dv \right\}^{1/p},$$

Для этого пространства не потребуется строить ему сопряженное, конструкция которого требует введения дополнительных понятий (пространства с отрицательной нормой по Лаксу). Важно лишь отметить, что единичная сфера в  $W_p^r(V)$  компактна в  $L_p(V)$ .

Обобщением конечномерных пространств  $l_p^n$ , рассмотренных в приложении 1, служат множества, состоящие из сходящихся бесконечных числовых последовательностей  $l_p^\infty$ , которые будем обозначать  $l_p$ . Пространства  $l_p$  определяются как пространства числовых последовательностей, пронумерованных натуральным числовым рядом;  $a \in l_p$ ;  $a = \{a_1 \dots a_n, \dots\}$  и

$$\|a\|_{l_p} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Для  $p = \infty$ :  $\|a\|_{l_\infty} = \max_{i \in [1, \infty]} |a_i|$ .

Сопряженное к  $l_p$  пространство изометрически изоморфно  $l_{p'}$ , и общий вид линейного ограниченного функционала на  $l_p$  задан соотношением

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i, \quad b \in l_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Все  $l_p$  рефлексивны.

В качестве примера использования пространства  $l_p$  построим сопряженный к оператору из  $L_2(V)$  в  $l_p$ .

Оператор, аналогичный (2), в практических случаях приходится рассматривать с областью значений в  $l_p^n$ . Приводимые ниже соотношения более общие, относятся к  $l_p$  и легко распространяются на случай  $l_p^n$ . Это соответствует случаю, когда наблюдаемый гравитационный эффект измерен в конечном числе  $n$  точек  $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ . Для  $l_p$  число этих точек счетное.

$$A\sigma(v) = \iiint_V \frac{\sigma(v) z dv}{\left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = u(x_i, y_i).$$

Будем считать, что  $a = \{y(x_i, y_i)\} \in l_p$ . Поскольку  $(l_p)^* = l_{p'}$ , то для  $\varphi \in l_{p'}$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle A_V \sigma(v) | \varphi \rangle_{l_p^n} &= \sum_{i=1}^{\infty} \iiint_V \frac{\sigma(x, y, z) z dx dy dz}{\left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \cdot c = \\ &= \iiint_V \sigma(x, y, z) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i \cdot dx dy dz}{\left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = \langle \sigma(v) | A^* \varphi \rangle_{L_2(V)} \end{aligned}$$

Таким образом, в случае такого задания оператора  $A$ ,  $A^* \varphi$  отождествляется с отображением из  $l_{p'}$  в  $L_2(V)$  по правилу:

$$A^* \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i z}{\left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2 \right]^{3/2}}.$$

## 2.6. Экстремальные задачи

При решении обратных задач геофизики вариационные методы занимают ведущее место. Задачи на максимум или минимум, а в общем случае – задачи на нахождение экстремума, пронизывают все постановки и методы, используемые при анализе геофизической информации. Они являются главным средством для решения обратных задач, на их основе реализуется содержательная постановка задач. Это становится понятным, если вспомнить, что наблюдаемая компонента геофизического поля, подлежащая обработке и интерпретации, осложнена ошибками. Задачи анализа данных состоят чаще всего в наилучшей аппроксимации (подборе) этой наблюдаемой системой заданных элементов, образующих заданное множество  $M$ . Наилучший подбор достигается тогда, когда невязка между наблюдаемой и искомым элементом из  $M$  становится минимальной.

Если мера удаления наблюдаемой  $\mathbf{y}'$  от произвольного  $\mathbf{y} \in M$  оценивается функционалом  $\mathbf{J}(\mathbf{y}', \mathbf{y})$ , то задача обработки данных сводится к:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{y}', \mathbf{y}) &\rightarrow \min, \\ \mathbf{y} &\in M. \end{aligned}$$

Например, это может выглядеть так:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|_{L_2} &\rightarrow \min, \\ \mathbf{y} &\in M. \end{aligned}$$

Рассмотрение такого рода задач составляет предмет теории экстремальных задач. Рассмотрим один достаточно простой пример.

Искомой является функция  $f(x, y)$  двух переменных, доставляющая минимум функционалу:

$$\iint_S L(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)) dx dy \rightarrow \min \quad (2.10)$$

Здесь  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  обозначают, соответственно, производные функции  $f(x, y)$  по  $x$  и  $y$ ;  $S$  – область в  $R^2$ ,  $L$  – некоторая функция, в данном случае, пяти переменных, которая в приложениях называется Лагранжевой плотностью. Это переменные  $x, y, a, b, c$ , где вместо переменных  $a, b, c$  подставлены  $f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)$  соответственно. Предположим, что решение задачи (10) существует и есть  $f(x, y)$ . Предположим, далее, что функция  $L(x, y, a, b, c)$  достаточное число раз дифференцируема по всем своим переменным. Пусть  $\eta(x, y)$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, заданная в  $S$  и равная нулю на границе  $\partial S$  области  $S$ . Тогда

$$J(t) = \iint_S L(x, y, f(x, y) + t\eta(x, y); f_x(x, y) + t\eta(x, y); f_y(x, y) + t \cdot \eta(x, y)) dx dy, \quad ^{41} \quad (2.11)$$

где  $t$  – числовой параметр, есть обычная функция переменной  $t$ . Поскольку экстремум (10) достигается на  $f(x, y)$ , то экстремум (11) достигается при  $t = 0$ . Тогда производная от (11) должна обращаться в нуль при  $t = 0$ :

$$\delta I = \iint_S L_f(x, y, f, f_x, f_y) \eta dx dy + \iint_S L_{f_x}(x, y, f, f_x, f_y) \eta_x dx dy + \iint_S L_{f_y}(x, y, f, f_x, f_y) \eta_y dx dy = 0.$$

Здесь  $L_f, L_{f_x}, L_{f_y}$  – производные от функции  $L(x, y, a, b, c)$  по  $a, b, c$  соответственно, на место которых подставлены  $f, f_x, f_y$ . Далее

$$\begin{aligned} L_{f_x} \eta_x &= \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_x} \eta) - \eta \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x}; \\ L_{f_y} \eta_y &= \frac{\partial}{\partial y} (L_{f_y} \eta) - \eta \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\delta I = \iint_S \left[ L_f - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} \right] \eta dx dy + \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_x} \eta) + \frac{\partial}{\partial y} (L_{f_y} \eta) \right] dx dy.$$

Второй интеграл, после применения формулы Грина, равен:

$$\oint L_{f_x} \eta dx + L_{f_y} \eta dy,$$

и обращается в нуль, поскольку значения  $\eta(x, y)$  равны нулю на  $\partial S$  по условию.

<sup>41</sup> Далее для краткости письма будем, где это не ведет к недоразумениям, опускать перечень переменных  $(x, y)$  при функциях.



Тогда равенство

$$\iint_S \left[ L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_y} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_x} \right] \cdot \eta dx dy = 0$$

выполняется для всех  $\eta = C_0^\infty(S)$ . С другой стороны,  $C_0^\infty(S)$  плотно в  $L_2(S)$ . Следовательно:

$$L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_y} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_x} = 0. \quad (2.12)$$

Это и есть искомое *уравнение Эйлера*, являющееся необходимым условием, которому удовлетворяет экстремаль (т.е. решение вариационной задачи) (10).

В том случае, когда на искомую экстремаль наложены дополнительные ограничения вида:

$$\iint_S G_i(x, y, f, f_x, f_y) dx dy = a_i, \quad (2.13)$$

задача минимизации функционала (10) при условии (13) сводится к безусловной минимизации (т.е. минимизации рассмотренного выше вида) функционала:

$$\iint_S L(x, y, f, f_x, f_y) dS + \sum_{i=1}^n \alpha_i \iint_S G_i(x, y, f, f_x, f_y) dS \rightarrow \min. \quad (2.14)$$

Здесь  $\alpha_i$  – числа, которые называются *множители Лагранжа*. Это правило – замена задачи на условный экстремум (10, 13) задачей на безусловный экстремум (14) – называется «*правило Лагранжа*».

Числа  $\alpha_i$  находятся из условия, чтобы экстремаль (14) удовлетворяла системе уравнений (13).

Предполагается, что  $G_i(x, y, f, f_x, f_y)$  также требуемое число раз дифференцируема по всем своим аргументам.

В приведенном примере мы столкнулись с тем обстоятельством, что отображение  $L(x, y, f, f_x, f_y)$  следовало дифференцировать по функциям, как по переменным. Таковы производные  $L_f, L_{f_x}, L_{f_y}$ . Это характерное обстоятельство. Введем соответствующее определение.

Пусть  $X, Y$  – банаховы пространства, и  $A(x)$  – отображение (оператор) окрестности  $Q(x)$  точки  $x \in D(A) \subseteq X$  в  $Y$ .  $A(x)$  называется дифференцируемым по Фреше (сильно дифференцируемым) в точке  $x$ , если существует такой линейный непрерывный оператор,  $A'(x) : X \rightarrow Y$ , что

$$A(x+h) = A(x) + A'(x)h + r(h),$$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0.$$

$A'(x)$  называется *производной Фреше* оператора  $A(x)$  в точке  $x$ . Если оператор  $A(x)$  дифференцируем по Фреше в окрестности точки  $x \in D(A) \subseteq X$  и  $\overline{\text{Im } A'(x)} = Y$ , то  $A$  *регулярен* в окрестности  $x$ . Следует помнить, что  $A'(x)h$  суть линейный оператор, действующий на элементы  $h \in X$ . Если для всех точек из  $Q(x)$  существует  $A'(x)$  и отображение  $x \rightarrow \|A'(x)\|_Y$  непрерывно, то  $A(x)$  называется непрерывно дифференцируемым или отображением (оператором) класса  $C_1$ .

Наряду с производной Фреше и следующими из нее понятиями, можно ввести и другое определение – производную Гато, или слабую производную. Далее используется только сильная производная, поэтому термин «Фреше» зачастую опускается.

Благодаря введенному понятию оправдывается дифференцирование некоторого отображения по функции, как по переменной. Так, собственно, и вычисляются производные.

Рассмотрим пример.

$$A(f(x)) = \iint_S \frac{dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + f^2(x,y)]^{1/2}}.$$

Это отображение можно рассматривать из подмножества в  $L_2(S)$  функций, таких что  $f(x) > 0$ . Для того чтобы вычислить производную Фреше, продифференцируем это выражение по  $f(x)$ , как по параметру. В результате получим:

$$A'(f(x,y))h(x,y) = - \iint_S \frac{h(x,y)f(x,y) dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + f^2(x,y)]^{3/2}}.$$

Пусть  $A(x)$  – линейный оператор:  $A(x) = Ax$ . Тогда  $A'(x)h = Ah$ . Производная уже не зависит от  $x$ , оператор действует на приращение  $h$ , следовательно, во всех точках  $x$  производная одна и та же. Следует всегда помнить, что производная – это линейный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$ .

Следующая теорема называется *правилом (принципом) Лагранжа* и является основной в вариационном исчислении. Она является обобщением того приема, который был введен под тем же названием выше (задачи (10, 13, 14)).

**Правило Лагранжа.** Пусть функционал  $J(x)$  и отображение  $A(x): X \rightarrow Y$  дифференцируемы по Фреше в окрестности точки  $\bar{x}$ , где  $\bar{x}$  – решение задачи:

$$\begin{cases} J(x) \rightarrow \min \\ A(x) = 0, \end{cases}$$

существование которого предполагается. Пусть  $\text{Im } A'(x) = \overline{\text{Im } A'(\bar{x})}$ . Тогда найдутся не равные одновременно нулю элементы  $\alpha \in R^1$  и  $y^* \in Y^*$ , такие что:

$$\alpha \cdot J'(\bar{x}) + A'(\bar{x})y^* = 0. \quad (2.15)$$

Если  $A(x)$  непрерывно дифференцируемо и регулярно в точке  $\bar{x}$ , то  $\alpha \neq 0$ , и можно считать, что  $\alpha = 1$ .

Уравнение (15) называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Доказательство этого результата см. [4, 87-88]. Здесь, как и для уравнения (12), приведем лишь пояснения к результату.

Пусть  $A(x) = 0$ . Построим вариацию  $\bar{x}(h,t) = \bar{x} + t \cdot h + r(t)$  такую, что

$$\begin{aligned} A(\bar{x}(h,t)) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|r(t)\|}{t} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда:

$$A(x(h,t)) = A(\bar{x}) = A(\bar{x}) + A'(\bar{x})t \cdot h + \tilde{r} = 0,$$

где  $\tilde{r}$  – величина более высокого порядка малости, чем остальные члены. Отсюда заключаем, что  $h \in \text{Ker } A'(\bar{x})$ . В условиях теоремы, т.е. в предположении замкнутости  $\text{Im } A'(x)$  непрерывности отображения  $x \rightarrow \|A'(x)\|$  в окрестности точки  $\bar{x}$ , имеет место и обратное утверждение: совокупность векторов  $h$  из  $\text{Ker } A'(\bar{x})$  обладает свойством:

$$\begin{aligned} A(\bar{x}(h,t)) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|r(t)\|}{t} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим функцию параметра  $t$ :

$$J(\bar{x}(h,t)) \rightarrow \min.$$

По условию ее минимум должен достигаться при  $t = 0$  и, следовательно, вычисляя производную по  $t$  при  $t = 0$ :

$$\langle J'(\bar{x}) | h \rangle = 0 \quad \forall h \in \text{Ker} A'(\bar{x}).$$

$J'(\bar{x})$  – есть линейный функционал над  $X$ , и его мы записали для наглядности в виде  $\langle J'(\bar{x}) | h \rangle$ . Элемент  $J'(\bar{x})$ , таким образом, отождествляется в смысле изометрического изоморфизма с некоторым элементом из  $X^*$ . Из последнего условия, по теореме о ядре  $\text{Ker}(A'(\bar{x})) = \overline{(\text{Im } A^*(\bar{x}))}$ , получаем  $\alpha \cdot J'(\bar{x}) \in \overline{\text{Im } A^*(\bar{x})}$ , где  $\alpha$  – некоторое число<sup>42</sup>. Следовательно, в регулярном случае  $\text{Im } A'(\bar{x}) = \overline{\text{Im } A'(\bar{x})}$ , откуда следует,  $\text{Im } A^*(x) = \overline{\text{Im } A^*(x)}$ , существует элемент  $y^* \in Y^*$  и  $\alpha \cdot J'(\bar{x}) + A^*(\bar{x})y^* = 0$ . Это и требовалось показать.

Здесь важно отметить то, что требование регулярности оператора  $A(\bar{x})$  в окрестности точки  $\bar{x}$  является весьма жестким. И хотя, фактически, результат теоремы чаще всего справедливым остается и когда  $\text{Im } A'(\bar{x})$  незамкнуто, строгое ее применение неправомерно. Из замкнутости  $\text{Im } A'(\bar{x})$  следует корректная разрешимость факторизованного уравнения

$$A'(\bar{x})h = u,$$

которая называется *нормальной разрешимостью*.

Последнее означает корректную разрешимость уравнения относительно фактор пространства  $X$  по ядру оператора, или корректность решения задачи

$$\begin{aligned} A'(\bar{x})h &= u \\ \|h\|_X &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Зачастую при постановках обратных геофизических задач нормальная разрешимость места не имеет. Так, например, приведенный результат нельзя применять к задаче:

$$\left\{ \begin{aligned} \iint_V \frac{\sigma(v)zdv}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} &= u(x_0, y_0), \\ \|\sigma(v)\|_{L_2(V)} &\rightarrow \min. \end{aligned} \right.$$

Приведенный выше результат – теорема Лагранжа (принцип Лагранжа) – это необходимые условия экстремума. Для его корректного применения следует еще доказать, что соответствующая конкретная задача имеет решение и записанные условия достаточны. Доказать это удается, как правило, лишь в весьма жестких предположениях относительно функционала  $J(x)$  и оператора  $A(x)$ . Оказывается, что для специальных случаев, к которым могут быть сведены многие геофизические задачи, соответствующие результаты можно доказать, исходя из других принципов, не используя производных.

В большинстве рассматриваемых в приложениях случаях функционал  $J(x)$  имеет специальный вид – вид нормы в банаховом пространстве. Рассмотрим следующую задачу, называемую *задачей о наилучшем приближении*.

<sup>42</sup> Оно введено на тот случай, если оператор  $A$  не регулярен. Тогда возникают особенности с применением теоремы о ядре. Равенство нулю этого числа делает весь результат тривиальным и справедливым для любого случая. Впрочем, в этом последнем случае он не только тривиален, но и бессодержателен с конструктивной точки зрения. Считаем его не равным нулю.

Пусть  $X$  – банахово пространство,  $M$  – его подмножество и  $x_0$  – элемент из  $X$ , не принадлежащий  $M$ . Назовем элемент  $\bar{x}$  *наилучшим приближением* к  $x_0$  (аппроксимацией  $x_0$ ) на множество  $M$ , если

$$\|x - x_0\|_X = \inf_{\xi \in M} \|\xi - x_0\|_X. \quad (2.16)$$

Для того чтобы такой элемент существовал всегда, необходимо, чтобы  $M$  было замкнуто. Следующая цепочка результатов характеризует условия существования и единственности решения задачи (16).

Пусть  $M$  – замкнутое множество в банаховом пространстве  $X$  (например,  $M$  – подпространство). Тогда решение  $\bar{x}$  задачи (16) существует. Если  $M$  дополнительно выпукло, то множество решений задачи (16) образует замкнутое выпуклое множество, если пространство  $X$  дополнительно сильно выпукло (например равномерно выпуклое), то решение задачи (16) единственно. Напомним, что равномерно-выпуклые пространства являются сильно выпуклыми. Сюда относятся все пространства  $L_p$  при  $1 < p < \infty$ .

Наиболее типичными примерами задач, рассматриваемых далее, являются следующие:

$$\begin{cases} \|Ax - y\|_Y \rightarrow \min \\ x \in M \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \|Fx\|_X \rightarrow \min \\ x \in \Omega_u. \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь  $A, F$  – некоторые операторы,  $M, \Omega_u$  – подмножества в банаховом пространстве  $X$ . Задача (17) возникает при подборе параметров модели среды из класса моделей  $M$  по требованию наилучшего согласия наблюдаемой  $y$  и рассчитанной от элемента  $x$  по правилу  $Ax$  поля.

**Теорема 4.** Если  $M \subset X$  – замкнутое выпуклое множество,  $X$  рефлексивно,  $Y$  сильно выпукло ( $X, Y$  – банаховы пространства),  $A: X \rightarrow Y$  взаимнооднозначен и непрерывен, то решение задачи (17) существует и единственно.

Доказательство\*. При доказательстве этого результата существенно используется понятие слабой топологии.

Поскольку  $M$  замкнуто и выпукло,  $X$  рефлексивно, то  $M$  слабо компактно. Поскольку  $A$  непрерывен, то и слабо непрерывен, следовательно, слабо компактные множества переводит в слабо компактные. Таким образом, оказывается, что  $S$  – образ  $M$  при отображении  $A$  – является слабо замкнутым. Поскольку в силу выпуклости  $M$  выпукло и  $S$ , то множество  $S$  будет замкнуто сильно (слабо замкнутое выпуклое множество сильно замкнуто).

Следовательно, решение задачи

$$\begin{cases} \|\xi - y\|_Y \rightarrow \min \\ \xi \in S = A(M) \end{cases} \quad (2.19)$$

существует и единственно, поскольку минимум сильно выпуклого функционала на замкнутом выпуклом множестве достигается и единственен. Обозначим его  $\bar{y}$ . Поскольку  $A$  взаимнооднозначен на  $M$  и  $\bar{y} \in S \subset \text{Im } A$ , то существует единственный элемент  $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$ , являющийся решением (17). Что и требовалось доказать.

Задача (19) – это преобразованная задача (17), и она по форме аналогична (16). Это второе обстоятельство, которое мы хотели проиллюстрировать.

Обозначим  $P_X(M, x_0)$  оператор, ставший в соответствие элементу  $x_0 \in X$  решением задачи (16). Тогда решение задачи (19) суть  $P_Y(S, y)$ , и решение задачи (17) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = A^{-1}P_Y(S, y); \\ S = A(M). \end{cases} \quad (2.20)$$

Если  $A$  взаимнооднозначен, непрерывен и  $M$  компактно, то, в соответствии с теоремой о гомеоморфизме (20), оказывается непрерывным. Рассмотрения, развивающие приведенные, имеются в п. 3.2 и составляют теоретическую основу методов квазиразрешений.

Рассмотрим теперь задачу (18), предполагая, что

$$\Omega_u = \{x \in DA \subseteq X : Ax = y \in \text{Im } A\},$$

где  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $X$  в  $Y$  ( $X, Y$  – банаховы пространства).  $\Omega_u$  есть сдвиг  $\text{Ker } A$  и, в силу непрерывности  $A$ ,  $\text{Ker } A$  замкнуто в  $X$ . Следовательно, замкнуто и выпукло  $\Omega_u$ . Если  $F$  – гомеоморфизм, то образ  $\Omega_u$  при отображении  $F$  есть также замкнутое выпуклое множество. Тогда задача (18) записывается в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \|\xi\|_X \rightarrow \min; \\ \xi \in F(\Omega_u). \end{cases} \quad (2.21)$$

Решение (18) есть  $\bar{x} = F^{-1}\bar{\xi}$ , где  $\bar{\xi}$  – решение (21). Таким образом, и (17), и (18) сводятся к задаче (16).

Следующий результат касается задачи (16) и является для нее основным.

**Теорема двойственности.** Пусть  $M$  – замкнутое выпуклое множество линейного нормированного пространства  $X$ . Для того чтобы элемент  $\bar{x}$  был наилучшим приближением в  $M$  к  $x_0$ , т.е. являлся решением задачи

$$\begin{cases} \|x - x_0\|_X \rightarrow \min; \\ x \in M, \end{cases} \quad (2.22)$$

необходимо и достаточно, чтобы в сопряженном к  $X$  пространстве  $X^*$  существовал элемент  $x^*$ , определяющий линейный функционал на  $X : \langle x^* | x \rangle$  такой, что:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \|x^*\|_{X^*} \leq 1; \\ \text{б) } & \|\bar{x} - x_0\|_X = \langle x^* | x_0 - \bar{x} \rangle; \\ \text{в) } & \langle x^* | \bar{x} \rangle = \sup_{\xi \in M} \langle x^* | \xi \rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Условие (в) в приведенном результате может быть, как это нетрудно видеть, заменено эквивалентным

$$\text{в')} \quad \langle x^* | \bar{x} - \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in M.$$

В том частном случае, когда  $M$  – линейное подпространство в  $X$ , условие (в) либо ему эквивалентное (в') заменяется на

$$\text{в'')} \quad \langle x^* | \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in M$$

Действительно, если предположить возможность строгого неравенства в (в'), то в силу линейности  $M$  оно всегда может быть обращено для некоторого другого  $\xi$ , и, следовательно, возможно только равенство.

Приводимое ниже следствие из теоремы двойственности является одним из главных результатов, используемых в гл. 5, 7.

**Следствие.** Если  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $X$  в  $Y$ , где  $X, Y$  – банаховы пространства и

$$M = \{x \in DA \subseteq X : Ax = y\},$$

то условие (в) в теореме двойственности заменится на

$$\text{в''')} \quad \langle x^* | x \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Ker } A.$$

Докажем этот результат.

Пусть  $a \in X$  и  $Aa = y$ . Тогда  $M = \text{Ker } A + a$  и

$$\min_{x \in M} \|x - x_0\|_X = \min_{x \in \text{Ker } A} \|x - (x_0 - a)\|_X.$$

Решение задачи (23) есть  $\bar{x} = \tilde{x} + a$ , где  $\tilde{x}$  – решение задачи

$$\min_{x \in \text{Ker} A} \|x - (x_0 - a)\|_X. \quad (2.24)$$

К (24) применима теорема двойственности в случае, когда  $M$  – линейное подпространство. Тогда условие (а) для (24) остается без изменений, для условия (б) имеем:

$$\|\bar{x} - (x_0 - a)\|_X = \langle x^* | x_0 - \bar{x} \rangle = \|\bar{x} - x_0\|_X;$$

т.е. это условие также осталось без изменения, а условие (в'') будет иметь вид

$$\text{в''')} \langle x^* | x \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Ker} A,$$

что и требовалось доказать.

Следующий результат является частным, но весьма распространенным случаем.

Пусть  $X = L_2$  – гильбертово пространство,  $M$  – замкнутое выпуклое множество. Для того чтобы  $\bar{x}$  было решением задачи (23), необходимо и достаточно  $\langle \bar{x} - x_0 | \bar{x} - \xi \rangle \leq 0, \forall \xi \in M$  и, если  $M$  – подпространство в  $X$ , то:

$$\langle \bar{x} - x_0 | \xi \rangle = 0, \quad \forall \xi \in M. \quad (2.25)$$

Для доказательства в качестве функционала  $\langle x^* | x \rangle$ , участвующего в формулировке теоремы двойственности, выберем

$$\left\langle \frac{x_0 - \bar{x}}{\|x_0 - \bar{x}\|_{L_2}} \middle| x \right\rangle.$$

Этот элемент действительно принадлежит  $L_2$  и, в силу нормировки, имеет единичную норму, так что условие (а) в (22) для него выполнено. Далее, поскольку

$$\frac{1}{\|\bar{x} - x_0\|} \langle x_0 - \bar{x} | x_0 - \bar{x} \rangle = \frac{\|\bar{x} - x_0\|_x^2}{\|\bar{x} - x_0\|_x} = \|\bar{x} - x_0\|_x,$$

то выполнено и условие (б). Запишем третье уравнение – (в')

$$\left\langle \frac{x_0 - \bar{x}}{\|x_0 - \bar{x}\|_{L_2}} \middle| \bar{x} - \xi \right\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in M \quad \text{или:}$$

$$\langle \bar{x} - x_0 | \bar{x} - \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in M$$

Если  $M$  – подпространство, то строгое неравенство невозможно, что и требовалось доказать.

В приведенных результатах были использованы линейные операторы, и по этой причине процедуры дифференцирования не потребовались. Но здесь необходимо знать вид сопряженного к рассматриваемому пространству, и этим-то и оправдываются рассмотрения, проведенные ранее в связи с пространствами линейных функционалов над  $X$ .

Условия (в'), (в''), (в'''), участвующие в различных формулировках теоремы двойственности, могут быть заменены эквивалентной заменой требований  $\forall \xi \in M; \forall x \in \text{Ker} A$  на требования  $\forall x \in B; \forall x \in G$ , где  $B, G$  – плотные в  $M$  либо  $\text{Ker} A$  множества.

Рассмотрим теперь пример задачи (17) в предположении, что  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $X$  в  $Y$ , где  $X, Y$  – гильбертовы пространства. В соответствии с теоремой Лагранжа для решения задачи

$$J(x) = \|Ax - y\|_{L_2} \rightarrow \min$$

следует продифференцировать  $J(x)$  по  $x$ , и результат приравнять нулю.

$$J(x) = \langle Ax - y | Ax - y \rangle = \langle Ax | Ax \rangle - 2 \langle Ax | y \rangle + \|y\|_{L_2}^2.$$

Тогда:

$$\langle J'(x)|h \rangle = \langle A^* Ax | h \rangle + \langle h | A^* Ax \rangle - 2 \langle h | A^* y \rangle = \langle A^* (Ax - y) | h \rangle = 0$$

или

$$A^* (Ax - y) = 0.$$

Это и есть уравнение Эйлера – необходимое условие экстремума для (17).

Теперь для той же задачи воспользуемся методами теории двойственности, предварительно трансформируя ее к (19), как это было проделано ранее. Сохраним введенные предположения относительно  $X, Y, M, A$ . Тогда для  $\bar{y}$  решения (19) из (25) имеем

$$\langle \bar{y} - y | \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \text{Im } A$$

или, учитывая, что  $\bar{x}$  – решение задачи (17) – связано с  $\bar{y}$  соотношением  $\bar{y} = Ax$ :

$$\langle A\bar{x} - y | Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

Из последнего условия имеем:

$$\langle A^* (A\bar{x} - y) | x \rangle = 0 \quad \forall x \in X,$$

откуда:  $A^* (Ax - y) = 0$ .

Мы вновь получили уравнение Эйлера, но теперь оно – необходимое и достаточное условие для искомого решения.

## 2.7. Библиографические замечания

Математические понятия, введенные в настоящей части, значительно выходят за рамки традиционных курсов по математике, изучаемых на геофизических специальностях. В то же время для специалиста в области интерпретации, точнее, методов обработки и автоматизированных средств интерпретации геофизических данных, эти понятия необходимы. Они позволяют «увидеть» задачи и пути их решения в целом и, исходя из такого понимания, анализировать и даже конструировать конкретные методы и алгоритмы. Специалистов такого типа становится все больше, а их роль в общем комплексе геофизических исследований все значительнее. Однако в настоящее время учебника по современным математическим методам для геофизика нет. Приведенный конспект слишком краток, чтобы восполнить такой пробел, да это и не входило в его цели. Поэтому необходимы рекомендации по изучению предмета.

Практически все необходимое можно найти в учебнике Ф.Н. Колмогорова и С.В. Фомина [1], и, по крайней мере, первичные понятия следует черпать именно оттуда. Краткое и одновременно очень насыщенное изложение всех необходимых понятий функционального анализа: топологические, метрические, нормированные пространства; линейные операторы и функционалы; слабые топологии – имеются в книге Э. Хилле, Р. Филипс ([2] стр. 13-64). По вопросам разрешимости операторных уравнений желательно обратиться к книге С.Г. Крейна ([3] стр. 5-40). Для получения первых представлений по теории экстремальных задач следует обратиться к книге А.Д. Иоффе, В.М. Тихомирова ([4], стр. 11-101) и книге Н.П. Корнейчука ([5], стр. 11-43).

### Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
2. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд. ин. лит., 1962. – 829 с.
3. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
5. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

### Приложение 3. Непрерывные группы и их представления\*

Есть довольно много веских причин для того, чтобы внимательно изучить те следствия, которые проистекают от факта симметрии объектов относительно некоторых движений в пространстве, или более обще – некоторых типов преобразований. Одна из них состоит в том, что симметрия связана с законом сохранения в физике. Собственно, это и понятно. Если под действием преобразования нечто не изменяется, т.е. симметрично относительно этого преобразования, то по-другому это произносится – нечто сохраняется при преобразованиях. Например, с течением времени не меняется полная энергия системы – система симметрична относительно преобразований сдвига по времени. Оказывается, однако, что сам факт записи дифференциальных уравнений часто означает нечто иное, как перечень минимального числа тех преобразований, которым подвергаются начальные данные этого уравнения. Но отсюда возможны и алгоритмические следствия – проще моделировать сами эти движения, чем искать сеточными или иными приемами решения дифференциальных уравнений. Результат один и тот же, но достигается разными по трудоемкости и прозрачности средствами. Понятие движения подразумевает нечто, непрерывно связанное с некоторым параметром, например временем, хотя это не единственный и даже не лучший параметр. Например, роль такого параметра может играть пространственная координата или некоторый формальный параметр.

Другая веская причина рассмотрения симметрий – специфическая для геофизических методов исследования неоднородных сред. Она состоит в том, что факт симметрии какого-либо процесса или явления в пространстве, времени свидетельствует и воспринимается как однородность пространственно-временного многообразия относительно этого процесса. Наоборот, неоднородности среды воспринимаются как неоднородности лишь постольку, поскольку проявляются в виде нарушения симметрии распространения в пространственно-временном многообразии физического поля. Поскольку геофизические методы направлены на изучение неоднородностей среды, то локальные нарушения симметрий – их основной предмет изучения.

*Группой* (преобразований, действующих на некотором пространстве) называется такое множество  $G$ , для каждых двух элементов  $g_1$  и  $g_2$  которой определено понятие их композиции  $g_1 \circ g_2$  (умножения, последовательного применения), так что результат композиции есть снова элемент из  $G$  ( $g_1 \circ g_2 = g_3 \in G$ ).

Существует единичный элемент  $e \in G$  с свойством: ( $g_1 \circ e = e \circ g = 1$ ).

Для каждого элемента  $g$  из  $G$  существует принадлежащий  $G$  элемент  $g^{-1}$ , называемый обратным к  $g$ , такой, что:  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ .<sup>43</sup>

*Непрерывной группой* называется множество  $G$ , элементы которого есть непрерывные функции параметра  $s$  со значением в некотором пространстве  $R^N$ . Для того чтобы это сделать, надо, как минимум, ввести на множестве  $G$  топологию или метрику, а лучше норму<sup>44</sup>, и показать, что любые два элемента  $g_1, g_2$  группы  $G$  соответствуют значениям параметра  $s_1$  и  $s_2$ , и их можно непрерывным образом соединить, двигаясь по кривой соединяющей точки  $s_1$  и  $s_2$  в  $R^N$ . Понятие непрерывной группы может быть введено и исследовано в самых общих предположениях. Это красивая, содержательная теория. Однако далее для иллюстративных целей вполне достаточно иметь аналоги пространственно-временных трансформаций (понятия трансформации и преобразования являются синонимами), куда относятся: сдвиги (трансляции), вращения, растяжения-сжатия. Другой тип преобразований дают преобразование зеркального отражения. Он не является непрерывным. Действительно, нельзя отразиться в бесконечном зер-

<sup>43</sup> Если такой обратный элемент существует не для всех элементов  $G$ , то  $G$  называется полугруппой. Например, множество квадратных матриц – это полугруппа, поскольку не для каждой из них существует обратная. Но множество квадратных матриц с определителем, равным единице, образует группу.

<sup>44</sup> Например, эта группа является нормированным пространством



кале наполовину или, скажем, на две трети. Несмотря на это, преобразование играет большую роль при классификации непрерывных пространственно-временных трансформаций. Подгруппой группы  $G$  называется подмножество  $D$  в  $G$ , обладающее всеми свойствами группы  $G$  и замкнутое относительно групповой операции. Последнее означает, что для любых двух элементов из  $D$  их произведения и обратные элементы принадлежат  $D$ .

Пусть на пространстве  $R^4$  осуществлено линейное преобразование, сохраняющее длины всех векторов. Это преобразование от координат  $x_\mu$  к координатам  $x'^\mu$  задается соотношением<sup>45</sup>:

$$x'^\mu = a^\mu + A_V^\mu x^V \quad (3.1)$$

Здесь  $A_V^\mu$  – компоненты матрицы, характеризующей преобразование,  $a^\mu$  – компоненты, характеризующие вектор сдвига.

Используется правило суммирования Эйнштейна, в соответствии с которым по дважды повторяющемуся индексу происходит суммирование. Если индекс греческий, суммирование происходит от 0 до 3; если индекс латинский – от 1 до 3. Мы не следим за балансом нижних и верхних индексов, используя только нижние, только верхние, или те и иные, лишь из соображений удобства письма. Поскольку длина векторов при преобразованиях остается неизменной, то, исключая сдвиг, получим:  $x'^\mu \cdot x'^\mu = x^\mu \cdot x^\mu$  и, следовательно:

$$A_V^\mu \cdot A_\mu^K = \sigma(V, K).$$

Как обычно, через  $\sigma(V, K)$  обозначен символ Кронекера – дискретный аналог дельта импульса Дирака.  $\sigma(V, K) = \delta_V^K = \begin{cases} 1 & \text{при } V = K; \\ 0 & \text{при } V \neq K. \end{cases}$

Поскольку  $\langle Ax | Ax \rangle = \langle x | x \rangle$ , то матрица  $A$  ортогональна и  $\det |A| = \pm 1$ . Следовательно, типы преобразования, осуществляемые матрицей  $A$ , разбиваются на два класса: с положительным и отрицательным детерминантом. Их совокупность обозначается  $O(4)$ . Ту их часть, которая обладает положительным единичным детерминантом, обозначим  $SO(4)$ . Понятно, что  $SO(4)$  есть подгруппа в  $O(4)$ . Часть преобразования (1), связанную со смещением вектора  $x$  на вектор  $a$ , с компонентами  $a_\mu$  обозначим  $T(4)$ . Эта подгруппа группы преобразований (1) (но не подгруппа в  $O(4)$ ) называется подгруппой трансляций рассматриваемой группы преобразований.

Введенные преобразования являются непрерывными. Это следует понимать в том смысле, что какое бы из рассматриваемых преобразований ни было бы осуществлено, можно осуществить и другое, сколь угодно близкое к нему. Для каждой из таких непрерывных групп преобразований полезно ввести понятие связанного с ней множества, бесконечно близких к единичному преобразований. Это даст возможность описывать преобразования, бесконечно близкие к заданному. Опишем это множество.

Сдвиг по координате  $x_\mu$  на величину  $\delta\lambda_\mu$  описывается самой величиной  $\delta\lambda_\mu$ . Таким образом, для  $T(4)$  бесконечно близкое к единичному преобразование описывается так:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta\lambda_\mu = x_\mu + \delta_\mu^V \delta\lambda_V,$$

где  $\delta_\mu^V = \sigma(V, \mu)$ .

Рассмотрим теперь бесконечно малые преобразования для  $SO(4)$ . Преобразования, бесконечно близкие к единичному, могут быть описаны с помощью суммы единичной матрицы  $E$ , оставляющей вектор  $x$  без изменений, и матрицы с компонентами  $\varepsilon_\mu^V$ , обеспечивающей бесконечно малое преобразование вектора  $x$ .

<sup>45</sup> В формулах, куда входит индексированный параметр, суммирование по дважды повторяющемуся индексу осуществляется по всем его значениям вне зависимости от того, латинский это, или греческий индекс.

Тогда преобразование из окрестности единицы задается условием:

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu^V x_V.$$

Длина результирующего вектора легко вычисляется:

$$x'_\mu \cdot x'_\mu = x_\mu \cdot x_\mu + x_\mu \cdot \varepsilon_\mu^V x_V + \varepsilon_\mu^V x_V \cdot x_\mu + \text{члены квадратичные по } \varepsilon_\mu^V.$$

Пренебрегая квадратичными членами, в силу их малости, получаем из условия равенства длин исходного и преобразованного векторов, что матрица  $\varepsilon_\mu^V$  кососимметрична:

$$\varepsilon_\mu^V = -\varepsilon_\mu^H.$$

Действительно, из  $x_\mu \cdot \varepsilon_\mu^V x_V = \varepsilon_\mu^H x_\mu \cdot x_V$  следует  $x_\mu \cdot \varepsilon_\mu^V x_V + \varepsilon_\mu^V x_V \cdot x_\mu = \varepsilon_\mu^H x_\mu \cdot x_V + \varepsilon_\mu^V x_V \cdot x_\mu = 0$  при  $\varepsilon_\mu^V = -\varepsilon_\mu^H$ .

Таким образом, только 6 независимых параметров характеризуют бесконечно малое преобразование на SO(4), причем само это преобразование задается кососимметричной матрицей. Её определитель равен нулю, поскольку диагональные элементы кососимметричной матрицы тождественно равны нулю.

Общее число параметров, характеризующих преобразование векторов в четырехмерном пространстве (пространстве-времени) без изменения их длин и сохранения ориентации (определитель положителен) оказывается равным десяти. Оно складывается из вращений, характеризуемых шестью независимыми параметрами кососимметричной матрицы и трансляций, характеризуемых четырьмя параметрами. Легко убедиться в том, что эти преобразования образуют непрерывную группу.

Действительно, групповые свойства для каждого из множеств преобразований SO(4) и T(4) очевидны:

1. определена операция умножения (композиции двух преобразований). Произведение (последовательное применение) двух преобразований из этого множества преобразований дает новое преобразование из того же множества;

2. существует единичное преобразование (единичная матрица  $E$ ), умножение на которое не меняет преобразования;

3. для каждого преобразования существует ему обратное из того же множества.

Непрерывность следует из того, что поворот может быть осуществлен на какой угодно малый угол, а сдвиг – на любую сколь угодно малую величину.

*Непрерывная группа (полугруппа) называется группой (полугруппой) Ли.*

Рассмотрим способ нахождения бесконечно малых преобразований из заданной непрерывной группы. Пусть преобразование  $R$  из группы  $\mathfrak{g}$  непрерывно зависит (строго говоря, группа  $\mathfrak{g}$  должна быть топологической для того, чтобы имело смысл понятие непрерывности) от вектора параметров  $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ , размерность которого  $N$ . Таким образом,  $R$  есть функция  $\mathbf{s}$ :  $R(\mathbf{s})$ . Бесконечно малое преобразование (дифференциал, *инфинитезимальное преобразование*) из  $\mathfrak{g}$  можно определить так:

$$\delta R(\mathbf{s}) = \frac{\partial}{\partial s_i} R(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=0} \cdot \delta s_i.$$

Оператор  $\Gamma^i = \frac{\partial}{\partial s_i} R(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=0}$  называется генератором бесконечно малого преобразования,

или *производящим оператором*.

Результатом действия бесконечно малого преобразования из  $\mathfrak{g}$  на вектор  $\mathbf{x}$  вычисляется по формуле:

$$\delta \mathbf{x} = \Gamma^i \mathbf{x} \cdot \delta s_i. \quad (3.2)$$

Оператор  $\Gamma^i \delta s_i$ , применяемый к вектору  $\mathbf{x}$ , характеризует собственно операцию бесконечно малого преобразования, называется *инфинитезимальным оператором группы (полугруппы)*. Таким образом, оператор бесконечно малого преобразования «раскладывается» в набор

генераторов по каждому из параметров, характеризующих преобразование из группы Ли, и вариации самих этих параметров.

Поскольку  $\mathbf{x}$  – это вектор, то каждый из операторов  $\Gamma^i$  – это двухиндексная матрица  $\Gamma_{\nu}^{i\mu}$ . Следовательно, в покомпонентной записи соотношение (2) можно переписать:

$$\delta x_{\mu} = \Gamma_{\mu}^{i\nu} x_{\nu} \cdot \delta s_i \quad (3.3)$$

Исходя из выясненных ранее свойств бесконечно малого преобразования, задаваемого матрицей  $\mathcal{E}_{\nu}^{\mu}$ , приходим к выводу о том, что *генераторы*  $\Gamma_{\nu}^{i\mu}$  антисимметричны по индексам  $\{\nu, \mu\}$ . Рассмотрим их явное выражение для введенных выше групп.

Для подгруппы трансляций легко получить:

$$\Gamma_{\mu}^{i\nu} x_{\nu} = \delta_{\mu}^i = \sigma(i, \mu).$$

Рассмотрим теперь подгруппу вращений. Как было выяснено ранее, она шестипараметрическая. Выберем в качестве параметров шесть углов поворота в плоскостях:  $X_1X_2; X_2X_3; X_1X_3; X_1X_0; X_2X_0; X_3X_0$ , соответственно. Вращения в плоскостях, содержащих временную компоненту  $x_0$ , физически означают переход к движущейся в направлении соответствующей пространственной координаты системе координат. Угол поворота выражается через скорость этого движения. Таким образом, подгруппа четырехмерных вращений имеет собственную подгруппу вращений в трехмерном пространстве и подгруппу движений в трехмерном пространстве.

Рассмотрим *подгруппу трехмерных вращений*. Она состоит из подгруппы  $S0(3)$ , которую можно назвать чистыми вращениями, и пространственных отражений:  $x \rightarrow -x$ . Поворот вокруг оси  $X_3$  на угол  $Q$  задается в трехмерном пространстве соотношением:

$$R(Q)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(Q) & \sin(Q) & 0 \\ -\sin(Q) & \cos(Q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

В его справедливости легко убедиться прямым вычислением.

Тогда для генератора  $\Gamma^3$  имеем:

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.4<sup>a</sup>)

Аналогично, имеем для генераторов поворота вокруг осей  $X_2$  и  $X_1$  соответственно:

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4^b)$$

Эти матрицы легко переписать и для случая пространственного вращения четырехмерных векторов. Для этого достаточно дописать в них нулевую 4-строку и нулевой 4-столбец.

Генераторы группы Ли имеют не одну групповую операцию, а две. Добавляется аддитивная операция – сложение генераторов. Такого сорта объекты называются алгебрами. Точнее говоря, множество, для элементов которого определены две групповых операции: аддитивная, относительно которой она является группой, и мультипликативная, относительно которой она является полугруппой, (выполняются все условия группы, кроме существования для любого элемента ему обратного в том же множестве) называется алгеброй. Таким образом, набор генераторов, соответствующих группе Ли, образует алгебру. Она называется *алгеброй Ли*, соответствующей группы Ли. Однако это специфическая алгебра. Аддитивной операцией в ней служит, как уже указывалось, сложение. Что касается умножения (композиции, мультипликативной операции), то оно имеет более сложный характер.

Если ввести на множестве генераторов группы Ли умножение по соответствующему правилу матричного умножения (унаследованного от исходной группы Ли, элементами которой являются и элементы ее алгебры Ли), то получаемый в результате элемент может и не принадлежать алгебре Ли генераторов группы. Иными словами, матричное умножение двух генераторов дает элемент группы, но он может оказаться не соответствующим ни одному из генераторов групп Ли. Для того чтобы превратить множество генераторов в группу Ли относительно мультипликативной операции, примем в качестве последней антикоммутатор, который называется также *скобкой Пуассона*, или скобочным умножением:

$$[\Gamma^i; \Gamma^j] = \Gamma^i \Gamma^j - \Gamma^j \Gamma^i.$$

Введение такой мультипликативной операции превращает группу Ли генераторов в алгебру Ли. Применение скобочного умножения, в отличие от обычного матричного, не выводит за пределы алгебры, поскольку справедливо следующее равенство:

$$[\Gamma^i; \Gamma^j] = C_k^{ij} \Gamma^k.$$

Оно называется *коммутационным соотношением*. Величины  $C_k^{ij}$  называются *структурными константами* алгебры Ли. По сути, структурные константы – это самое главное, что определяет собственно алгебраические свойства рассматриваемых объектов. Возможно существование различных по природе объектов, образующих алгебры с одними и теми же структурными константами. В таком случае говорят о различных представлениях одной и той же алгебры Ли. Скобочное умножение  $[f; d]$  антисимметрично по сомножителям  $f, d$ , линейно по каждому множителю, и, кроме того, удовлетворяет *тождеству Якоби*:

$$\begin{aligned} [[f; d]; s] + [[s; f]; d] + [[d; s]; f] &= 0. \\ [f; d] &= -[d; f]; \\ [f; (d + s)] &= [f; d] + [f; s]; \\ [[f; d]; s] + [[s; f]; d] + [[d; s]; f] &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отсюда, в частности, видно, что скобочное умножение в общем случае и неассоциативно. Это означает, что  $[f; [d; s]] \neq [[f; d]; s]$ .

Тождество Якоби легко проверяется прямым вычислением, а по форме оно аналогично правилу дифференцирования произведения. Действительно, определим производную элемента  $f$  по элементу  $s$  правилом  $[s; f] = f'$ . Тогда тождество Якоби записывается так:  $[f; d'] = [f'; d] + [f; d']$ . Последнюю запись можно раскрыть:

$$[s; [f; d]] = [[s; f]; d] + [f; [s; d]],$$

и она с учетом антисимметрии скобочной операции эквивалентна тождеству Якоби.

Для генераторов пространственных вращений структурные константы образуют полностью антисимметричный тензор третьего ранга  $\varepsilon_{ijk}$  с компонентами, равными  $+1$ , в случае, если  $i, j, k$  есть четная перестановка чисел  $1, 2, 3$ ;  $-1$  – в случае нечетной перестановки, нулю – в остальных случаях:  $[\Gamma^i \Gamma^j] = -\Gamma^k$  для  $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$  соответственно.

Вращение на бесконечно малый угол  $\alpha$  вокруг оси  $X_3$  задается оператором  $R_3(\alpha) = 1 + \Gamma^3 \alpha$ . Вращение вектора  $\mathbf{x}$  на конечный угол  $Q$  можно рассмотреть как результат  $N$  поворотов на угол  $Q/N$ . Тогда, переходя к пределу для вычисления конечных вращений через найденные выражения для генераторов вращений вокруг соответствующих осей, получим:

$$R_3(Q)\mathbf{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{Q}{N} \Gamma^3 \right)^N \mathbf{x} = \exp(Q \cdot \Gamma^3) \mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Алгебра генераторов Ли группы обозначается так же, как и исходная группа Ли, с добавлением впереди буквы А. Например, алгебра Ли группы  $S0(3)$  обозначается  $ASO(3)$ .

Если на множестве, в котором действует группа координатных преобразований  $\mathbf{g}$ , задана функция  $\phi(\mathbf{x})$ , то под действием этих преобразований происходит изменение функции  $\phi$ . Каждому преобразованию  $R \in \mathbf{g}$  можно поставить в соответствие преобразование  $B$  над функция-

ми  $\phi$ . Сделать это можно многими разными способами. Потребуем, чтобы преобразования  $B$  образовывали группу, изоморфную  $\mathfrak{g}$ .

Напомним, что две алгебры, а более обще, и группы, называются изоморфными, если между их элементами существует взаимнооднозначное соответствие, устанавливаемое некоторым отображением, при котором сохраняются групповые соотношения между прообразами и образами при этом отображении. Точнее говоря, если  $G_1$  и  $G_2$  – группы и  $\phi(g)$  – взаимнооднозначное и непрерывное отображение  $G_1$  в  $G_2$ , то  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, если  $\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ . Если  $B$  – отображение, ставящее в соответствие функции  $\phi(\mathbf{x})$  некоторую другую функцию того же класса, то этому преобразованию можно поставить в соответствие элемент  $R$  из группы  $\mathfrak{g}$  преобразований векторов по правилу:

$$B(R)\phi(\mathbf{x}) = \phi(R^{-1}\mathbf{x}). \quad (3.6)$$

Действительно, правило (6) ставит в соответствие каждому элементу  $R$  группы  $\mathfrak{g}$  свой оператор  $B(R)$ , действующий на пространстве функций от векторов  $\mathbf{x}$ . Это физически разумное правило означает равенство старой и преобразованной функции в одной и той же физической точке. Использование для определения операторов элементов  $R^{-1}$ , а не  $R$ , обеспечивает выполнение групповых свойств для множества операторов.

Поясним последнее обстоятельство.

Пусть вслед за оператором  $B(R_1)$  действует оператор  $B(R_2)$ . Тогда  $B(R_2) \cdot B(R_1)\phi(\mathbf{x}) = B(R_2)\phi(R_1^{-1}\mathbf{x}) = \phi(R_1^{-1}R_2^{-1}\mathbf{x}) = \phi((R_2R_1)^{-1}\mathbf{x})$ . Соответствие последовательности применения операторов в определении отображения достигнуто.

Совокупность операторов  $B(R)$ , определенных таким образом, образует группу  $G$ , называемую *представлением группы  $\mathfrak{g}$*  на пространстве функций. Являясь представлением на пространстве функций группы Ли,  $G$  сама является группой Ли и, следовательно, состоит из операторов  $B(s)$ , зависящих непрерывно от параметра  $s$ . В таком случае  $G$  обладает алгеброй Ли  $AG$ , находящейся в соответствии с  $A\mathfrak{g}$ .

Группа Ли  $G$  состоит из операторов  $B(s)$ , непрерывно зависящих от параметра  $s$ . Она и исчерпывается этими операторами. Поэтому эквивалентным обозначением для оператора  $B$  из  $G$  будет  $G(s)$ . Группой Ли можно назвать и семейство  $B(s)$ . То же самое можно сказать и о операторах  $R$ , и группе  $\mathfrak{g}$ :  $R(s)$  – это группа Ли, а  $\mathfrak{g}(s)$  – ее элемент. Из контекста всегда ясно, о чем идет речь, и путаница здесь исключена.

Воспользуемся определением (6) и найдем элементы алгебры Ли  $AG$ , действующей на пространстве дифференцируемых функций и соответствующей генераторам  $\Gamma^i$  трехмерных вращений (в трехмерном пространстве  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ):

$$B(\delta\mathbf{s})\phi(\mathbf{x}) = \phi(R^{-1}(\delta\mathbf{s})\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} - \Gamma^i \mathbf{x} \cdot \delta s_i). \quad (3.7)$$

Теперь необходимо воспользоваться правилом  $J^i \phi(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial}{\partial \delta s_i} B(\delta\mathbf{s})\phi(\mathbf{x}) \right|_{\delta s_i=0}$  для нахождения генераторов преобразования (7). Принимая во внимание вид операторов  $\Gamma^i$ , определенных матрицами (4), нетрудно получить:

$$\begin{aligned} J^1 \phi(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial}{\partial \delta s_1} B(\delta\mathbf{s})\phi(\mathbf{x}) \right|_{\delta s_1=0} = [x_3 p_2 - x_2 p_3] \phi(\mathbf{x}); \\ J^2 \phi(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial}{\partial \delta s_2} B(\delta\mathbf{s})\phi(\mathbf{x}) \right|_{\delta s_2=0} = [x_1 p_3 - x_3 p_1] \phi(\mathbf{x}); \\ J^3 \phi(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial}{\partial \delta s_3} B(\delta\mathbf{s})\phi(\mathbf{x}) \right|_{\delta s_3=0} = [x_2 p_1 - x_1 p_2] \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

Прямым вычислением можно убедиться в том, что полученные генераторы  $J^i$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, т.е. имеют те же структурные константы, что и операторы  $\Gamma^i$ . Следовательно, формулы (8) дают иное представление той же алгебры Ли пространственных вращений. Представление на пространстве дифференцируемых функций. Точно так же легко получить выражения для генераторов группы четырехмерных трансляций в представлении на пространстве дифференцируемых функций в четырехмерном пространстве. Эти генераторы – не что иное, как введенные выше операторы  $p_\mu$  дифференцирования по координате  $x_\mu$ .

Так же, как и в (5), вычисление конечных вращений вокруг оси  $X^i$  на угол  $Q$  задается оператором:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{Q}{N} J^i \right)^N \phi(\mathbf{x}) = \exp(Q \cdot J^i) \phi(\mathbf{x}).$$

Сдвиг в направлении оси  $X^i$  на величину  $a$  задается оператором:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{N} p_i \right)^N \phi(\mathbf{x}) = \exp\left(\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \phi(\mathbf{x}).^{46}$$

Еще один, очень важный пример группы трансформаций на пространственно-временном многообразии доставляют преобразования дилатации. Преобразования дилатации  $D$  координат  $\mathbf{x}$  состоят в домножении всех (или оговоренной части) компонент на одно и то же число  $s$ :  $D: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} = s \cdot \mathbf{x}$ . Роль нулевого элемента (нулевого угла поворота, сдвига на нулевой вектор) играет значение  $s = 1$ . Это одномерная группа Ли, и ее представление на пространстве дифференцируемых функций в качестве своего генератора имеет оператор  $D: D\phi(\mathbf{x}) = x^i \cdot p_i$ . Действительно,  $D\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial s} \phi(s \cdot \mathbf{x})|_{s=1} = x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \phi(\mathbf{x})$ . Таким образом, алгебра Ли одномерна. Индекс  $i$  в приведенной выше формуле пробегает значения 1, 2, 3, и тогда речь идет о пространственной дилатации. Если заменить индекс  $i$  на греческий, который принимает значения 0, 1, 2, 3, то будет получен генератор пространственно-временной дилатации.

Если однопараметрическая группа Ли  $\mathfrak{g}$  имеет генератор  $\Gamma$ , то подгруппа  $\mathfrak{g}(s) = \exp(s \cdot \Gamma)$  изоморфна  $\mathfrak{g}$ , однако, вообще говоря, с ней не совпадает. Таким образом, легко построить группу, изоморфную дилатациям, исходя из найденного вида генератора. Эта группа имеет вид  $\exp\left(s \cdot x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \cdot \phi(\mathbf{x})$ . Однако, такое и им аналогичные построения следует воспринимать, скорее, как интерпретацию выражения  $\mathfrak{g}(s) = \exp(s \cdot \Gamma)$  в терминах действий, осуществляемых элементами исходной группы. При этом следует иметь в виду, что, если  $f, d$  – коммутирующие элементы алгебры Ли, то  $\exp(f) \cdot \exp(d) = \exp(f + d)$ . В иных случаях,  $\exp(f) \cdot \exp(d) = \exp(s)$ , где  $s$  должно быть специальным образом вычислено. Сама процедура такого вычисления устанавливается формулой Кэмпбела – Бейкера – Хаусдорфа (КБХ) (Р. Рихтмайер. Принципы со-

<sup>46</sup> Поучительно эту формулу получить из других соображений. Справедливо следующее разложение в ряд:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \text{ Подставив чисто формально вместо } t \text{ выражение } \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ и рассматривая степень от производной}$$

как производную в степени, получим:

$$e^{\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}} \cdot \phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k \phi(\mathbf{x})}{k!} \cdot \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial^k}{(\partial x_i)^k} \phi(\mathbf{x})\right)}{k!} \cdot \alpha^k = \phi(\mathbf{x} + \alpha).$$

временной математической физики. – М.: Мир, 1984. – 169 с.). Она представляет собой ряд, первые несколько членов которого таковы:

$$s \stackrel{def}{=} \ln(\exp(f) \cdot \exp(d)) = f + d + \frac{1}{2}[f; d] + \frac{1}{12}[f; [f; d]] + \frac{1}{12}[d; [d; f]] + \dots$$

Приведем таблицу наиболее распространенных однопараметрических преобразований на плоскости и им соответствующих генераторов алгебры Ли.

Таблица 1

## Преобразования на плоскости

Название	Формула	Генератор
Перенос вдоль оси $Ox$	$x' = x + s, y' = y$	$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x}$
Перенос вдоль прямой $ax + by = 0$	$x' = x + b \cdot s; y' = y - a \cdot s$	$\Gamma = b \cdot \frac{\partial}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial}{\partial y}$
Вращение	$x' = x \cos(s) + y \sin(s),$ $y' = y \cos(s) - x \sin(s),$	$\Gamma = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$
Преобразование Лоренца	$x' = x \cdot ch(s) + y \cdot sh(s),$ $y' = y \cdot ch(s) + x \cdot sh(s),$	$\Gamma = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$
Преобразование Галилея	$x' = x + s \cdot y, y' = y$	$\Gamma = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}$
Однородное растяжение	$x' = x \cdot e^s, y' = y \cdot e^s$	$\Gamma = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$
Неоднородное растяжение	$x' = x \cdot e^{a \cdot s}, y' = y \cdot e^{b \cdot s}$	$\Gamma = a \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + b \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$

Описанная точка зрения является конструктивной в том отношении, что для некоторых типов эволюционных уравнений позволяет явно построить процедуры их решения как процедуры трансформации начальных или краевых условий элементами некоторой группы. Сама эта группа находится по генераторам алгебры Ли, входящим в соответствующее эволюционное уравнение, и может быть проинтерпретирована в терминах движений. Может так оказаться, и оказывается, в частности, при моделировании эволюции структур (см. гл. 6), что моделировать эти движения проще, чем сеточными или иными приемами решать соответствующие уравнения.

Рассмотрим подробнее эти вопросы.

При рассмотрении целого ряда различных по природе физических полей возникают сходные по структуре уравнения, описывающие их поведение. Это эволюционные уравнения. Так, например, при рассмотрении процессов переноса излучения, течения жидкости в пористых средах, изотермического течения идеального газа, процессов теплообмена, течения слабо сжимаемой жидкости, уравнения движения вязкой среды и многие другие (см. гл. 2) возникают уравнения эволюционного типа.

Они имеют вид:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + Au(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$  – пространственные координаты,  $u(\mathbf{x}, t)$  – эволюционирующая во времени величина. Она может быть скаляром или вектором, иметь и более сложную природу.  $A$  – некоторое преобразование, называемое эволюционным преобразованием и  $g(\mathbf{x}, t)$  – распределение внешних источников. Уравнение (9) должно быть дополнено начальным условием  $u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$ , совместно с которым и рассмотрено.

Уравнения типа (9) являются обобщением уравнений, описывающих процесс поглощения энергии или другой характеристики некоторого излучения, в процессе его распространения, эволюции в некоторой поглощающей среде.

Рассмотрим некоторые простые частные случаи.

Пусть в среде распространяется вдоль некоторой линии  $L$  излучение, энергия которого описывается функцией  $u(t)$ , где  $t$  – параметр вдоль линии, однозначно характеризующий ее точку. Например, линия  $L$  может совпадать с осью  $OX$ , а параметром  $t$  служит координата  $x$  на этой прямой. Выбрав элементарный интервал  $\Delta t$  вдоль кривой  $L$  и рассмотрев механизм поглощения энергии при его прохождении, приходим к выводу о том, что относительное изменение энергии на этом интервале пропорционально величине этого интервала с коэффициентом пропорциональности  $A$ , который называется коэффициентом поглощения и служит эволюционным оператором:

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = -Au(t).$$

Знак минус в правой части указывает на поглощение энергии. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) = -Au(t). \quad (3.10)$$

Это пример уравнения (9). Имея начальные условия:  $u(t)|_{t=0} = u_0(t) = u_0$ , решение этого уравнения можно представить в виде:

$$u(t) = u_0 e^{-At}. \quad (3.11)$$

Усложним задачу. В том случае, когда коэффициент поглощения, он же эволюционный оператор, является функцией координат, можно считать, что он меняется вдоль параметра  $t$ , и уравнение поглощения будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) = -A(t)u(t). \quad (3.12)$$

Это новая модификация уравнения (9). Его решение при тех же начальных данных имеет вид:

$$u(t) = \exp\left(-\int_L^t A(\zeta) d\zeta\right) \cdot u_0. \quad (3.13)$$

В частности, решение уравнения (12) в форме (13) составляет предмет рассмотрений в компьютерной томографии при решении, например, задач рентгеновской диагностики.

Действительно, если изучается распределение в области  $V$  пространства коэффициента поглощения  $A(x)$ , то с каждой парой точек  $x'_i, x''_i$  на поверхности объема  $V$  можно связать линию  $L(x'_i, x''_i)$ , вдоль которой происходило распространение и поглощение сигнала. Тогда из (13) имеем:

$$u(x'') = \exp\left(-\int_{L(x', x'')} A(\zeta) d\zeta\right) \cdot u(x'), \text{ откуда}$$

$$\ln\left(\frac{u(x'')}{u(x')}\right) = -\int_{L(x', x'')} A(\zeta) d\zeta.$$

Левая часть этого уравнения – известная, измеренная на границе области  $V$  функция двух переменных – источника и приемника излучения. Решение этого интегрального уравнения позволяет восстановить распределение коэффициента поглощения вдоль линии  $L(x'_i, x''_i)$ , увидеть «срез» по этой линии коэффициента поглощения. Имея достаточное число таких срезов, можно ставить задачу восстановления распределения в пространстве коэффициента поглощения (см. гл. 2).



Наконец, следующее усложнение. Уравнение со стационарным (не зависящим от времени) эволюционным оператором (коэффициентом поглощения), но с присутствующими и меняющимися во времени внешними источниками  $g(\mathbf{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + Au(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}, t) \\ u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= u_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp(-A \cdot t) \cdot u_0(\mathbf{x}) + \int_0^t \exp(-A \cdot (t-s)) \cdot g(\mathbf{x}, s) ds. \quad (3.15)$$

Если источники  $g(\mathbf{x}, t)$  являются стационарными, т.е. не зависят от параметра  $t$ , то, интегрируя (15), получаем:

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp(-A \cdot t) \cdot u_0(\mathbf{x}) + A^{-1}g(\mathbf{x}) - A^{-1} \cdot \exp(-A \cdot t) \cdot g(\mathbf{x}) \quad (3.16)$$

Действительно, проверим последнее уравнение прямой подстановкой в (14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) &= -A \cdot \exp(-A \cdot t) \cdot u_0(\mathbf{x}) + \exp(-A \cdot t) \cdot g(\mathbf{x}) = \\ &= -A(\exp(-A \cdot t) \cdot u_0(\mathbf{x}) - A^{-1} \cdot \exp(-A \cdot t) \cdot g(\mathbf{x})) = \\ &= -A(\exp(-A \cdot t) \cdot u_0(\mathbf{x}) - A^{-1} \cdot \exp(-A \cdot t) \cdot g(\mathbf{x}) + A^{-1} \cdot g(\mathbf{x}) - A^{-1} \cdot g(\mathbf{x})) = \\ &= -Au(\mathbf{x}, t) + AA^{-1}g(\mathbf{x}) = -Au(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, (14) выполнено.

Если допустить, что операторы  $A$  есть функция параметра  $t$ , то в выражении (16) величину  $\exp(-A \cdot t)$  следует заменить на:

$$\exp\left(-\int_0^t A(\tau) d\tau\right).$$

Тогда формула (16) примет вид:

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp\left(-\int_0^t A(\tau) d\tau\right) \cdot u_0(\mathbf{x}) + A^{-1}g(\mathbf{x}) - A^{-1} \cdot \exp\left(-\int_0^t A(\tau) d\tau\right) \cdot g(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Полученные явные, экспоненциальные формы решений эволюционных уравнений с простыми операторами – типа коэффициентов поглощения – позволяют рассчитывать на аналогичные решения для уравнений (9), в котором роль «коэффициента поглощения» играет некоторый оператор  $A$ , действующий на эволюционирующую пространственно-временную функцию. Следует при этом еще определить, что, собственно, понимается под выражением  $e^{-At}u_0$  в случае, когда  $A$  – оператор, отображающий пространство функций в себя. Естественно, что само это понятие существенно зависит от свойств оператора  $A$ .

Ограничимся рассмотрением линейных операторов.

Обозначим  $\mathbf{A}(t)$  семейство зависящих от параметра  $t$  операторов, действующих в некотором подмножестве  $\mathbf{X}$  функционального пространства  $X$ , которое придает некоторый содержательный и вычислительный смысл выражению  $e^{-At}$ . Связь между свойствами оператора  $A$  и свойствами семейства  $\mathbf{A}(t)$  составляет содержание теории полугрупп операторов, развитой, в частности, в работах Р. Филиппса, Э. Хилле [2]. Смысл выражения  $e^{-At}$  и, следовательно, операторов  $\mathbf{A}(t)$  можно определить, используя степенное разложение функции  $e^{-At}$  относительно  $A \cdot t$  и рассматривая далее в качестве  $A^n$ ,  $n$  – кратное применение оператора  $A$  к функции  $u(x)$ . В таком случае, класс функций  $\mathbf{X}$  функционального пространства  $X$ , таков, что для него ряд

$$\mathbf{A}(t)u(x) = e^{-At}u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tA)^n}{n!} u(x), \quad u(x) \in X \quad (3.18)$$

определен, сходится, непрерывен и непрерывно дифференцируем по параметру  $t$ . В этом случае, решение задачи (9) с начальным условием  $u_0(x) = u(x, 0)$  дается формулой:

$$u(x, t) = e^{-At}u_0(x) + \int_0^t e^{-A(t-s)} g(x, s) ds = \mathbf{A}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathbf{A}(t-s) \cdot g(x, s) ds. \quad (3.19)$$

В частном случае стационарных внешних источников, описываемых функцией  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-At}u_0(x) - A^{-1}g(x) - A^{-1}e^{-tA}g(x) = \\ &= \mathbf{A}(t)u_0(x) + A^{-1}g(x) - A^{-1}\mathbf{A}(t)g(x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Справедливость этого равенства легко проверяется подстановкой построенного решения в исходное уравнение. Это было проделано выше.

Более тщательный анализ, выяснение условий на операторы  $A$  и структуру пространств  $X$ , и  $X$ , при которых введенные требования выполнены, выходит за рамки наших рассмотрений. Однако соотношение (20), дополненное определением (18), дает возможность не только качественно проследить характер решений, но и организовать математическое моделирование решений эволюционных уравнений.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{A}(t)u_0(x); \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t)u_0(x) + A\mathbf{A}(t)u_0 &= 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{A}(t)u_0(x) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В некоторых случаях удается найти вид оператора  $\mathbf{A}(t)$  и определить характер его действия на начальные условия, имеющие более приемлемую для вычислений форму, чем ряд (8).

Семейство операторов  $\mathbf{A}(t)$  образует группу Ли. Это с очевидностью следует из уравнения:

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{A}(t)u(x) = \mathbf{A}(s)u(t, x) = u(t+s, x) = \mathbf{A}(t+s)u(x).$$

Эта группа может в определенных случаях быть рассмотрена как представление на пространстве функций группы Ли координатных преобразований. Нахождение этой, последней, группы позволит более просто вычислить значение оператора  $\mathbf{A}(t)$  на той либо иной функции. Поставим задачу нахождения группы Ли координатных преобразований  $g(t)$ , представление которой в пространстве функций  $X$  образует группу  $\mathbf{A}(t)$ .

Пусть  $\mathbf{B}$  есть  $N$  параметрическая группа Ли  $\mathbf{B}(s)$  с генераторами  $J^i$   $i = 1, \dots, N$ . Определим траекторию  $s_i = s_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, N$  в пространстве параметров группы  $\mathbf{B}$  и однопараметрическую группу  $\mathbf{A}(t)$ , будем рассматривать траекторию в  $\mathbf{B}$ , соответствующую траектории в пространстве параметров  $s_i$ :  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{B}(s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))$ .

Очевидны следующие условия:

$$s_i(t)|_{t=0} = 0; \quad \mathbf{B}(0) = E. \quad E - \text{единичный оператор.}$$

Бесконечно близкое к единичному преобразование  $\mathbf{A}(\delta t)$  определится в этом случае равенством:  $\mathbf{A}(\delta t) = E + J^i \frac{\partial s_i}{\partial t} \cdot \delta t$ . Легко понять, что так определенный оператор  $\mathbf{A}(t)$  удовлетворяет наложенным на него условиям (21) и требованиям. Действительно, в окрестности любой точки  $t_0$  имеем

$$\mathbf{A}(t_0)u_0(x) = u(x, t_0) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}(t_0 + \delta t)u(x) = \mathbf{A}(\delta t)u(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t)|_{t=t_0} u(x, t_0) \delta t.$$

$$\text{Тогда:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t)|_{t=t_0} \cdot \delta t \cdot u(x) = J^i \frac{\partial s_i}{\partial t} u(x) \cdot \delta t.$$

Следовательно, роль оператора  $A$  в (21) играет инфинитезимальный оператор  $\left[ -J^i \frac{\partial s_i}{\partial t} \delta t \right]$  группы  $\mathbf{A}(t)$ .

Пусть теперь  $\mathbf{q}$   $N$ -мерная группа Ли на пространстве координатных преобразований (преобразований вектора  $\mathbf{x}$ ) с генераторами  $\Gamma^i$  (являющимися двухиндексными матрицами, действующими на вектор  $\mathbf{x}$ ) и  $s_i = s_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, N$  – некоторая траектория  $L$  в пространстве параметров группы. Величину  $t$  можно рассматривать, например, как длину кривой  $L$ , отсчитываемую от некоторой начальной точки. Траектория  $L$  порождает на  $\mathfrak{g}$  траекторию  $q(t) = \mathbf{q}(s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))$ , служащую подгруппой в группе  $\mathfrak{g}$ . Бесконечно близкое к единичному преобразованию из однопараметрической подгруппы  $g(t)$  определено условием:

$$q(\delta t) = E + \left. \frac{\partial}{\partial s_i} \mathbf{q}(\mathbf{s}) \right|_{\mathbf{s}=0} \frac{\partial s_i}{\partial t} \cdot \delta t = E + \Gamma^i \frac{\partial s_i}{\partial t} \cdot \delta t.$$

Если группа  $\mathbf{A}(t)$  есть представление на пространстве функции группы  $q(t)$ , то,  $\mathbf{A}(\delta t)u(x) = u(x + \Gamma^i \frac{\partial s_i}{\partial t} \mathbf{x} \delta t)$ . Поскольку  $\Gamma^i$  – это двухиндексные матрицы  $\Gamma_v^{i\mu}$ , то имеем в развернутой записи:

$$\mathbf{A}(\delta t)u(x) = u(x + \Gamma_v^{i\mu} x^v \frac{\partial s_i}{\partial t} \delta t). \quad (3.22)$$

Подсчитаем инфинитезимальный оператор группы  $\mathbf{A}(t)$ , исходя из (22).

$$\delta \mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} \right|_{t=0} \delta t = \Gamma_v^{i\mu} x^v \frac{\partial s_i}{\partial t} \delta t \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Следовательно:

$$\Gamma_v^{i\mu} x^v \frac{\partial}{\partial x^\mu} = J^i.$$

Таким образом, восстановить алгебру Ли группы координатных преобразований, эквивалентных действию группы  $\mathbf{A}(t)$  и удовлетворяющей уравнению (21), можно на основе равенства:

$$A = \Gamma_v^{i\mu} X^v \frac{\partial s_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.23)$$

Сама группа координатных преобразований  $g(t)$  восстанавливается по известным элементам алгебры Ли группы  $\mathbf{q}$  и траектории  $s_i = s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Действительно, по определению генераторов группы  $\mathbf{q}(\mathbf{s})$  имеем:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{s})}{\partial s_i} \right|_{\mathbf{s}=0} = \Gamma^i; \quad \mathbf{q}(\mathbf{0}) = E,$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{s})}{\partial s_i} = \Gamma^i \mathbf{q}(\mathbf{s}); \quad \mathbf{q}(\mathbf{0}) = E \quad (3.24)$$

Функции  $s_i(t)$  восстанавливаются по известным  $\zeta_i(t) = \frac{\partial s_i}{\partial t}$  и начальным условиям  $s_i(0) = 0$ :

$$s_i(t) = \int_0^t \zeta_i(\tau) d\tau.$$

<sup>47</sup> Строго говоря, следует писать  $\mathbf{A}(\delta t)u(x) = u(x - \Gamma_v^{i\mu} x^v \frac{\partial s_i}{\partial t} \delta t)$ . Однако знак «минус» можно опустить, учитывая его в знаке генераторов.

Решение системы (24), в которое вместо параметров  $\mathbf{s}$  подставлены функции  $s_i$ , параметра  $t$ , и образует искомую группу –  $q(t)$ . Для нахождения решения системы (24), воспользуемся экспоненциальной формой представления группы изоморфной, заданной посредством генераторов:

$$\mathbf{q}(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^N g_i(s_i) = \prod_{i=1}^N e^{s_i \Gamma^i} .^{48}$$

Тогда представление для группы  $q(t)$ , будет:

$$q(t) = \prod_{i=1}^N \exp \left\{ \int_0^t \zeta_i(\tau) d\tau \Gamma^i \right\}. \quad (3.25)$$

Таким образом, возникает следующий алгоритм нахождения решений эволюционного уравнения (9). Решение ищем в форме (19) или (20), если внешние источники стационарны – функции  $g$  не зависят от времени. Оператор  $\mathbf{A}(t)$  находится по формуле:

$$\mathbf{A}(t)u_0(x) = u_0(q(t)x),$$

где  $q(t)$  определено соотношением (25), а в качестве операторов  $\Gamma^i$  использованы операторы, полученные из уравнения (23):

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)u_0(\mathbf{x}) = u_0 \left( \prod_{i=1}^N \exp \left\{ \int_0^t \zeta_i(\tau) d\tau \Gamma^i \right\} \mathbf{x} \right). \quad (3.26)$$

Группа  $\mathbf{q}(s)$  может быть восстановлена по известным генераторам  $\Gamma^i$ , или операторам  $J^i$  непосредственно, исходя из известных в теории представления групп Ли типичных операторов – генераторов тех либо иных координатных преобразований. Таковы, например, операторы сдвига, дилатации, вращения.

В противном случае, можно воспользоваться непосредственным счетом по формуле (26), что, конечно, менее удобно. Для практического счета выражения

$$\exp \left\{ \int_0^t \zeta_i(\tau) d\tau \Gamma^i \right\} \mathbf{x}$$

воспользуемся рядом (18):

$$\exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial s_i}{\partial t}(\tau) d\tau \Gamma^i \right\} \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{ \int_0^t \frac{\partial s_i}{\partial t}(\tau) d\tau \Gamma^i \right\}^n}{n!} \mathbf{x},$$

здесь  $\frac{\partial s_i}{\partial t}(\tau) = \zeta_i(\tau)$ .

Использование последнего ряда на «пространстве координатных преобразований», возможно, более целесообразно, чем вычисления по формуле (18) в «пространстве функций».

Рассмотрим в качестве примера уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= y \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x} - x \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial y}; \\ \mathbf{x} &= \{x, y\}; \\ u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= u_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = J u(\mathbf{x}, t), \quad \text{где } J = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

В соответствии с (23) получаем выражение для матрицы  $\Gamma$  – генератора соответствующих координатных преобразований:

<sup>48</sup> Не производится суммирование по индексу  $i$ .

$$261$$

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Легко проверить, что в соответствии с (22)

$$u(\mathbf{x}, \delta t) = \mathbf{A}(\delta t)u_0(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x} + \Gamma\mathbf{x}\delta t) = u_0(x + y\delta t, y - x\delta t)$$

группа  $q(t)$  имеет генератор  $\Gamma$ , а ее представление на пространстве функций имеет генератор  $J$ . В соответствии с (25) можно записать

$$q(t) = \exp(t\Gamma),$$

и для решения задачи (27)

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0 \left\{ \exp \left( t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{x} \right\} = u_0(q(t)\mathbf{x}),$$

выражение

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{x} \quad (3.28)$$

должно быть проинтерпретировано соответствующим образом, поскольку представляет собой функцию от оператора – матрицы  $\Gamma$ . Однако группа  $g(t)$  может быть восстановлена непосредственно из вида генератора  $J$  или  $\Gamma$  без обращения к ней изоморфной подгруппы (28). Действительно, генератор представления на пространстве функций группы вращений трехмерного пространства вокруг оси OZ имеет в точности вид  $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ . Следовательно, искомая группа

$q(t)$  есть группа вращений трехмерного пространства вокруг оси OZ и

$$q(t)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.29)$$

Следовательно, решением задачи (27) будет:

$$u_0(q(t)\mathbf{x}) = u_0 \left( \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \right) = u_0(x \cos(t) + y \sin(t), y \cos(t) - x \sin(t)). \quad (3.30)$$

Легко убедиться прямым вычислением, что функция (30) действительно есть решение задачи (27).

#### Литература

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд. ин. лит., 1962. – 829 с.

## Приложение 4. Вариационные подходы и геометрические принципы характеристики локально неоднородных сред\*

Вариационные методы, которые играют ключевую роль при постановке недоопределенных обратных задач, характерных для геофизики (критериальные методы, методы эволюционно-динамического анализа), а также при построении устойчивых приближенных решений обратных задач (методы регуляризации), являются еще и основой для получения собственно самих уравнений связи между моделями среды и моделями поля. Причем касается это как связей между содержательными моделями среды и поля – собственно уравнениями математической физики, так и связей между некоторыми эффективными моделями и атрибутами поля. В последнем случае эти связи и методы могут быть распространены на неоднородные среды модели, которые таковы, что содержательные связи либо чрезмерно сложны, либо внутренне противоречивы.

В настоящем приложении и, прежде всего, в разделах 4.2-4.4 описывается технология получения таких уравнений. Она требует введения некоторых новых понятий, но открывает большие просторы для непротиворечивого конструирования трансформации наблюдаемых в некоторые эффективные параметры, характеризующие параметры неоднородности среды. Материал этого приложения ориентирован на творчески настроенного читателя и может служить источником для подготовки квалификационных работ от курсовых проектов до диссертационных работ. Однако основному изложению предшествует вводная часть – 4.1, посвященная принципу наименьшего действия, которая должна рассматриваться как обязательный элемент при изучении специальных вопросов теории физических полей.

### 4.1. Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия является основным как в механике, так и в теории поля. Смысл его состоит в том, что реально осуществляемое движение или распределение поля отличается от всех других – физически не реализуемых, невозможных, тем, что сообщает экстремум некоторому положительнозначному функционалу, который называется действием. Этот принцип имеет многочисленные проявления. Например, луч света в однородном пространстве распространяется по прямой. Известно, что прямая – это как раз та линия между двумя точками, движение по которой осуществляется за наименьшее время (при постоянной скорости) в силу ее наименьшей длины среди всех иных линий, эти точки соединяющих.

Этот простой физический принцип имеет интересные и нетривиальные проявления в теории поля, и мы рассмотрим его более подробно.

Пусть имеется система из  $N$  материальных точек, каждая из которых обладает массой  $m_i$  и характеризуется положением в пространстве, задаваемым тремя координатами  $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ , зависящими от времени  $t$ . Индекс  $i$  нумерует рассматриваемые материальные точки. Как известно, кинетическая энергия такой системы определится выражением:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \{ \dot{x}_i^2(t) + \dot{y}_i^2(t) + \dot{z}_i^2(t) \}.$$

Здесь  $\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$ ,  $\dot{y}_i(t) = \frac{d}{dt} y_i(t)$ ,  $\dot{z}_i(t) = \frac{d}{dt} z_i(t)$  представляют собой компоненты скорости в направлении осей OX, OY, OZ соответственно.

Если движение системы осуществляется в интервале времени  $t_1, t_2$  под влиянием потенциального, для простоты стационарного, поля с потенциалом  $U(x, y, z)$ , то определим функцию Лагранжа  $L$  следующим образом:  $L = T - U$ , а действием назовем величину:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (4.1)$$

Покажем теперь, что экстремали функционала (1), т.е. те уравнения для  $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ , для которых функционал (1) приобретает экстремальное значение, описывают реальные траектории движения или, что то же самое, удовлетворяют динамическим уравнениям движения. Эти рассуждения близки к приведенным в приложении 2.6. Проведем их в общем, чем для приведенного выше выражения, случае.

Пусть экстремаль для (1) существует и есть  $x_i(t), t_i(t), z_i(t), I = 1, \dots, N$ . Выберем для определенности функцию  $x_i(t)$  и рассмотрим её вариацию  $x_i(t) + \alpha \eta(t)$ , где  $\alpha$  – некоторое число,  $\eta_i(t)$  – гладкая функция, обращающаяся в ноль на концах интервала  $[t_1, t_2]: \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ . Последнее условие необходимо для того, чтобы варьируемая траектория при всех вариациях начиналась и заканчивалась в заданных точках. Поскольку  $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$  есть экстремали, то действие:

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i(t) + \alpha \eta(t), \dots) dt,$$

как функция параметра  $\alpha$ , должна иметь экстремум при значении  $\alpha = 0$ .

Следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} S(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Считаем, что функция Лагранжа  $L$  содержит в качестве своих аргументов  $t, x_i(t)$  и  $\dot{x}_i(t)$ .

Тогда из условия

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} S(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} L(x_i(t) + \alpha \eta(t), \dots) dt \Big|_{\alpha=0} = 0$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(x_i(t), y(t), \dots)}{\partial x_i} \eta(t) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(x_i(t), y(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} \dot{\eta}(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} \dot{\eta}(t) dt = \\ & = \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} \right) \eta(t) dt \end{aligned}$$

Первый член последнего выражения тождественно равен нулю в силу наложенных на функцию  $\eta(t)$  условий. Тогда получаем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} \right) \eta(t) dt = 0.$$

Поскольку это требование должно быть выполнено для любой функции  $\eta_i(t)$ , получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (4.2^a)$$

Повторяя приведенные рассуждения для функций  $y_i(t)$  и  $z_i(t)$ , получим ещё два уравнения:

$$\frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad (4.2^b)$$

$$\frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{z}_i} = 0. \quad (4.2^b)$$

Система уравнений (2) называется системой уравнений Эйлера для вариационной задачи:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \rightarrow \min.$$

Подставив в полученные уравнения Эйлера принятую для системы функцию Лагранжа и учитывая равенства:

$$\frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial L(x_i(t), y_i(t), \dots)}{\partial \dot{x}} = m_i \dot{x}_i(t),$$

получим:

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i(t)) = -\frac{\partial U}{\partial x_i};$$

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{y}_i(t)) = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{z}_i(t)) = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Но поскольку производная от потенциала – это минус соответствующая компоненте напряженности поля, получим, что последняя система уравнений – это в точности система уравнений Ньютона (второй закон Ньютона) для динамики системы точек. Таким образом, получено обоснование принципа наименьшего действия:

Величина  $\frac{\partial L}{\partial x_i}$  имеет смысл компоненты в направлении оси  $Ox$  силы, действующей на  $i$ -ую частицу, а  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$  – проекция на ось  $Ox$  импульса  $i$ -ой частицы:  $p_{xi}$ . Тогда уравнение Эйлера дает следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \dot{p}_{xi} \\ p_{xi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.4^a)$$



Аналогично можно записать для компонент в направлении осей  $OY$  и  $OZ$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \dot{p}_{yi} \\ p_{yi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \end{aligned} \right\} \quad (4^6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z_i} &= \dot{p}_{zi} \\ p_{zi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \end{aligned} \right\} \quad (4^B)$$

Координаты и импульсы частицы с номером  $i$  будем обозначать  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{p}_i$  соответственно. Причем  $\mathbf{x}_i = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} = \{x_i, y_i, z_i\}$ ,  $\mathbf{p}_i = \{p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}\} = \{p_i^1, p_i^2, p_i^3\}$ . Полный набор всех координат и импульсов будем обозначать одной буквой без индексов:  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  соответственно.

Уравнение Эйлера, равно как и сама функция Лагранжа, записаны в переменных: координаты –  $\mathbf{x}_i$ , скорости –  $\dot{\mathbf{x}}_i$ . Импульсы  $\mathbf{p}_i$  определены уравнениями (4).

Уравнение:

$$p_i^j = \frac{\partial L}{\partial x_i^j}$$

можно разрешить относительно скорости  $\dot{x}$ , если матрица Гесса

$$M_{ik}^j = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^j \partial x_k^j},$$

неособенная для каждого  $j = 1, 2, 3$ . Последнее означает, что её определитель не равен нулю. В этом случае скорости  $\dot{x}_i$  можно выразить через координаты и импульсы так, что  $\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ .

Определим функцию Гамильтона следующим образом:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_i - L.$$

Здесь в функции Лагранжа также скорости выражены через импульсы. Вычислим вариацию  $\delta H$  функции Гамильтона.

$$\delta H = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{p}_i \dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})) - \delta L = \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i \delta \dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{x}}_i \delta \mathbf{p}_i) - \frac{\partial L}{\partial x_i^j} \delta x_i^j - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j} \delta \dot{x}_i^j.$$

Но

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j} = p_i^j,$$

и

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \delta \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 p_i^j \delta x_i^j.$$

В результате последний и первый член сокращаются. Тогда получаем:

$$\delta H = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \delta \mathbf{p}_i - \delta \mathbf{p}_i \delta \dot{\mathbf{x}}_i,$$

откуда следует<sup>49</sup>

<sup>49</sup>  $\delta H = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial H}{\partial x_i^j} \delta x_i^j + \frac{\partial H}{\partial p_i^j} \delta p_i^j.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i^j} &= \dot{x}_i^j \\ \frac{\partial H}{\partial x_i^j} &= -p_i^j \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Система уравнений (5) представляет собой эквивалент уравнений движения Эйлера, но выраженных через функцию Гамильтона. Эти уравнения называются гамильтоновой формой уравнений движения.

Функция Лагранжа представляет собой разность между кинетической и потенциальной энергиями:  $L = T - U$ . Поставляя в выражение для функции Гамильтона конкретные значения входящих в нее компонент и учитывая, что:

$$\frac{\partial L(x_i, y_i, \dots)}{\partial \dot{x}} = m_i \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{p}_i,$$

получим

$$H = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{x}, p) - L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2(\mathbf{x}, p) - L = 2T^N - L = T + U.$$

Таким образом, функция Гамильтона представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий – полную энергию системы.

Переход от лагранжевой к гамильтоновой форме требует неособенности матрицы Гессе:

$$M_{ik}^j = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^j \partial x_k^j}.$$

Это условие может быть, вообще говоря, и не выполнено. Таким образом, указанный переход возможен не всегда.

Свойства системы и законы её развития не меняются, если переместить её как целое в другую точку пространства. Это значит, что функция Лагранжа не меняется при преобразованиях координат типа сдвига:  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}$ , и вариация лагранжевой функции при вариации координат равна нулю:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} \delta z_i = 0.$$

Поскольку  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{b}$  и это произвольный вектор, то:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0.$$

Учитывая уравнение Эйлера, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = 0.$$

Но последнее выражение представляет собой закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = 0.$$

Таким образом, из однородности пространства следует сохранение во времени импульса системы. Это утверждение можно обратить, сказав, что *импульс – это то, закон сохранения для чего вытекает из однородности пространства.*

Предположим, что лагранжева функция не зависит явно от времени. Тогда  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , т.е. время однородно.

Полная производная по времени от лагранжевой функции равна:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial x_i^j} \dot{x}_i^j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j} \frac{d}{dt} \dot{x}_i^j.$$

Принимая во внимание уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j},$$

последнее равенство можно переписать:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j} \dot{x}_i^j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j} \frac{d}{dt} \dot{x}_i^j = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^j} \dot{x}_i^j.$$

Окончательно

$$\frac{d}{dt} \left( L - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{dL}{d\dot{x}_i^j} \dot{x}_i^j \right) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} H = 0.$$

Таким образом, однородность по времени влечет за собой закон сохранения полной энергии системы. Это утверждение можно также обратить, приняв, что *энергия системы – это то, закон сохранения чего вытекает из однородности времени.*

Приведенный способ описания движения через стационарное значение действия можно распространить на описание физических полей. При этом возникают особенности. Переход от системы из  $N$  материальных точек к непрерывно распределенному в пространстве физическому полю означает замену конечномерного случая бесконечномерным. Для вычисления энергетических характеристик поля в заданной пространственно-временной области в таком случае следует осуществлять интегрирование по этой области. Тогда то, что оказывается под знаком интеграла, естественно назвать не функцией Лагранжа, а лагранжевой плотностью.

Проиллюстрируем это примерами:

Пусть скалярное стационарное поле  $\phi(x)$ ,  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$  распределено в пространстве таким образом, что для любой области  $\Omega$  действие

$$S(\phi(x)) = \iiint_{\Omega} \left[ \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \right\}^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.6)$$

стационарно.

Лагранжевой плотностью является функция

$$L(\phi(x)) = \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \right\}^2,$$

а сформулированный принцип наименьшего действия можно записать:

$$S(\phi(x)) = \iiint_{\Omega} L(\phi(x)) dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow \min.$$

Действительно, рассмотрим вариацию поля  $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha \eta(x)$ , где  $\alpha$  – некоторой числовой параметр, а  $\eta(x)$  – гладкая функция, обращающаяся в ноль на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ .

Стационарность действия при реальном распределении поля означает, что:

$$\left. \frac{\partial S(\phi(x) + \alpha \eta(x))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Тогда получаем:

$$\left. \frac{\partial S(\phi(x) + \alpha\eta(x))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_3} \right] \cdot dx_1 dy_1 dz_1 = 0,$$

где  $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ .

Далее, поскольку:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \right) \cdot \eta(x) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi(x) \cdot \eta(x), \text{ получим:}$$

$$\left. \frac{\partial S(\phi(x) + \alpha\eta(x))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \iint_{\Omega} F_n \eta(x) d\sigma - \iiint_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi(x) \eta(x) \cdot dx_1 dy_1 dz_1.$$

Здесь  $F^n$  – компонента в направлении нормали к поверхности  $d\sigma$ , ограничивающей область  $\Omega$  вектора  $F^i = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}$ . Поскольку  $\eta(x)$  равно нулю на границе области  $\Omega$ , то первый член в

правой части последнего равенства равен нулю, а поскольку область  $\Omega$  была произвольной, то стационарность действия означает равенство нулю подынтегрального выражения во втором члене правой части. Тогда получаем, что стационарность действия (6) означает, что рассматриваемое поле удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \phi(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \phi(x) = 0. \quad (4.7)$$

Но (7) – это в точности уравнение Лапласа. Таким образом, поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, соответствует принципу наименьшего действия, где действие имеет вид (6).

Рассмотрим теперь нестационарное поле  $\phi(x)$ , где  $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ , и потребуем стационарности действия:

$$S(\phi(x)) = \iiint_{\Omega} \left[ \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \right\}^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_0} \right\}^2 \right] dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.8)$$

Здесь  $\Omega$  – четырехмерная область в пространственно-временном многообразии.

Лагранжевой плотностью является функция:

$$L(\phi(x)) = \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \right\}^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_0} \right\}^2.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, легко получить, что стационарность так построенного действия эквивалентна выполнению для поля  $\phi(x)$  уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \phi(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \phi(x) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \phi(x). \quad (4.9)$$

Это известное в математической физике волновое уравнение, которое описывает процесс распространения волны в однородной среде со скоростью  $c$ . Таким образом, принцип стационарного действия (8) приводит к выводу о том, что удовлетворяющее ему поле удовлетворяет волновому уравнению.

## 4.2. Эффективные параметры неоднородности среды

Понятие однородности или неоднородности среды тесным образом связано с понятием симметрии. Мы называем однородной средой ту, у которой свойства не меняются при координатных преобразованиях от точки к точке, произошедших либо за счет движений – трансляций, либо за счет поворотов. Следовательно, однородность среды – это ее симметрия при координатных преобразованиях. Наоборот, нарушение этой симметрии, состоящее в том, что при сдвиге или повороте свойства в новой точке иные, т.е. несимметричность среды относительно такого рода преобразований, ассоциируется с неоднородностями, присущими среде. Однако если факт однородности среды достаточно ясно и очевидно связан с ее симметрией при координатных преобразованиях, то нарушение симметрии как свойство неоднородности и, соответственно, неоднородность как проявление нарушения симметрии очевидным и привычным образом не выражаются друг через друга.

Пусть задана группа Ли линейных координатных преобразований  $g(s)$ , некоторый произвольный элемент которой будем обозначать символом  $R^{50}$ .  $s = \{s_j, j = 1, \dots, N\}$ ,  $N$  – мерный параметр. Например, его размерность может совпадать с размерностью пространства. Пусть далее  $G(s)$  – представление группы  $g(s)$  на пространстве полей. Произвольный элемент этой группы, соответствующий элементу  $R$ , будем обозначать  $B$ . Вариация лагранжиана, вызванная преобразованиями координат и полей операторами  $R$  и  $B$ , равна:

$$\delta L = L(x, \phi(x), \phi_{,\mu}(x)) - L(Rx, B\phi(x), (B\phi(x))_{,\mu}), \quad (4.10)$$

$$x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}.$$

Если лагранжева плотность не зависит явно от пространственно-временных координат, то в вариации (10) участвует только оператор  $B$ . Если эта вариация обращается в ноль, то операторы  $R$  и  $B$ , являясь операторами из группы симметрии, порождают уже описанным в предыдущем разделе образом уравнения поля в среде – уравнения Эйлера и законы сохранения.

*Определение.* Среда называется однородной для заданного поля относительно группы преобразований  $R$ , если вариация лагранжевой плотности при преобразованиях из  $R$  и их представлениях на физических полях имеют вид (10) и  $(B\phi(x))_{,\mu} = B\phi_{,\mu}(x)$ .

Строго говоря, под такое определение попадают и среды, которые в привычном смысле являются неоднородными. Это оправдано тем, что в дальнейшем мы намерены изучать и описывать с помощью понятия нарушения симметрии неоднородности «сверх заданных», «сверх уже входящих» в уравнения, и лагранжеву плотность для поля.

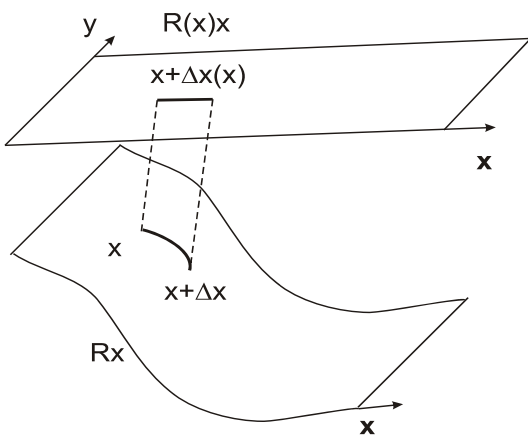


Рисунок прил. 4.1. Кривизна

Неоднородность среды можно ассоциировать с зависимостью преобразования  $R$  из группы  $g(s)$  от координат так, что результат применения оператора  $R$  к неоднородной среде зависит от пространственно-временных координат точки приложения этого оператора. Например, сдвигая глобально систему координат, получим локальное изменение координат, величина которого зависит от координат рассматриваемой точки. Ситуация аналогична тому, как если бы глобально сдвигалась некоторая «кривая» поверхность, а значения новых координат рассматривались в проекции ее на плоскость (рис. прил. 4.1). Неоднородность среды представляется в виде кривизны координатной системы.

<sup>50</sup> Это матрица на координатном пространстве.

Зависимость от координат оператора  $R$  влечет за собой зависимость от координат  $B$  из  $G(s)$ , реализующих представление группы  $g(s)$  на пространстве физических полей. Эта зависимость (операторов  $R$  и  $B$  от координат) называется *локальным нарушением симметрии*.

В пространствах с локально нарушенной симметрией трансформационные свойства поля при преобразованиях координат операторами  $R$  и поля оператором  $B$  такие же, как и в пространствах с ненарушенной симметрией. Это означает, что закон их преобразования одинаков как при зависящих так и при не зависящих, от координат операторов  $R$  и  $B$ .

$$x \rightarrow x' = R(x)x; \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B(x)\phi(x). \quad (4.11)$$

Однако этот закон нарушается для производных поля<sup>51</sup>. В то время как в пространстве с ненарушенной локальной симметрией производная поля трансформируется по закону  $\phi_{,\mu}(x) \rightarrow \phi'_{,\mu}(x) = B\phi_{,\mu}(x)$ , в пространствах с локально нарушенной симметрией имеем:

$$\phi_{,\mu}(x) \rightarrow \phi'_{,\mu}(x) = (B(x)\phi(x))_{,\mu} = B(x)\phi_{,\mu}(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x)\right)\phi(x). \quad (4.12)$$

Дополнительно появившийся в законе трансформации производных поля при локальном нарушении симметрии член

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x)\right)\phi(x)$$

приводит к тому, что в пространствах с локально нарушенной симметрией меняется и закон (10) трансформации лагранжиана:

$$\begin{aligned} \delta L' &= L\{x, \phi(x), \phi_{,\mu}(x)\} - L\{R(x)x, B(x)\phi(x), (B(x)\phi(x))_{,\mu}\} = L\{x, \phi(x), \phi_{,\mu}(x)\} - \\ &- L\left\{R(x)x, B(x)\phi(x), B(x)\phi_{,\mu}(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x)\right)\phi(x)\right\}, \end{aligned}$$

$$\delta L \neq \delta L'.$$

Рассмотрим случай возможных некоммутирующих операторов  $B$  и вычисления производной для пространств с ненарушенной симметрией. В пространствах с локально ненарушенной симметрией координатные преобразования  $x \rightarrow x' = Rx$  влекут за собой преобразования поля по закону  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B\phi(x)$ , а это, в свою очередь, влечет закон трансформации для производной по некоторому правилу  $\{\phi_{,\mu}(x)\} \rightarrow \{\phi'_{,\mu}(x)\} = C\{\phi_{,\mu}(x)\}$ .

Здесь  $\{\phi_{,\mu}(x)\}$  строка производных, которая взята в скобки для того, чтобы подчеркнуть, что набор производных образует единый объект. Локальное нарушение симметрии производит к тому, что то же преобразование поля  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B\phi(x)$  влечет преобразование производных уже по правилу

$$\{\phi_{,\mu}(x)\} \rightarrow \{\phi'_{,\mu}(x)\} = S(x)\{\phi_{,\mu}(x)\}.$$

За счет возможного отличия оператора  $S$  от оператора  $C$  и происходит нарушение трансформационных свойств производных. Однако столь общая постановка вне конкретизации вида операторов  $C$  приводит к громоздким и мало что дающим рассмотрениям. Поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим случай теории коммутирующих операторов дифференцирования и  $B$  в пространствах с ненарушенной симметрией. Описанный выше случай самостоятельного за-

<sup>51</sup> В приведенных рассмотрениях, по существу, делается одно очень серьезное предположение. Предполагается, что в случае, когда оператор  $B$  не зависит от координат, оператор  $B$  и оператор вычисления производной коммутируют. Вообще говоря, это ниоткуда не следует. Производная от поля является самостоятельным объектом, и закон ее преобразования при преобразовании координат и поля операторами  $R$  и  $B$ , соответственно, не обязан совпадать с законом преобразования поля. Производная даже в случае пространства с ненарушенной симметрией может иметь самостоятельный закон преобразования, отличный от закона преобразования поля. Поэтому, вообще говоря, следует использовать именно такую постановку. Однако, фактически, такое обобщение приводит лишь к модификации теории, одно из них – наиболее конструктивное и распространенное – теория пространств с аффинной связностью, приводится в данном пособии.

кона преобразования для производных рассмотрим в следующем разделе на конкретном содержательном примере пространств с аффинной связностью.

Неоднородности среды ассоциируются, как уже указывалось ранее, с локальным нарушением симметрии, а последнее можно образно представить как искривление пространственно-временной сцены, на которой происходит соответствующий физический процесс. Характер этого искривления и есть проявляющиеся в регистрируемом физическом поле неоднородности среды. Для неоднородной среды в таком понимании неоднородностей законы преобразования энергетических характеристик системы среда-поле должны быть теми же самыми, что и в однородном случае, но действуют в искривленном многообразии – пространстве-времени. Таким образом, следует обеспечить совпадение трансформационных свойств лагранжевой плотности как в пространствах с локально нарушенной, так и ненарушенной симметрией. Так как именно она является энергетической характеристикой системы, будучи разностью между плотностью кинетической и потенциальной энергией.

Поскольку отличие в трансформационных свойствах лагранжевой плотности возникает за счет производных поля, то именно это понятие должно быть переопределено так, чтобы обеспечить совпадение трансформационных свойств лагранжиана в пространствах с локально нарушенной и ненарушенной симметриями. Необходимость переопределения производных и подчеркивает факт интерпретации локального нарушения симметрии как изменения геометрической характеристики пространственно-временной сцены. Действительно, на способ определения производных, а через них уже и на все иные аналитические объекты влияют, прежде всего, геометрические характеристики многообразия.

В качестве нового, обобщающего старое, определения производной поля примем:

$$D_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) - T_\mu \phi(x). \quad (4.13)$$

Здесь  $T_\mu$  – линейные операторы, действующие на поле  $\phi(x)$ , которые далее будем называть *объектами связности*. Эти операторы предназначены для компенсации членов  $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x)\right)\phi(x)$ , присутствующих в законе трансформации для производных поля в пространствах с нарушенной симметрией. Следовательно, их вид должен быть аналогичен виду операторов  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x)$ .

Оператор  $B$  является одним из операторов группы Ли  $G(s)$  и, следовательно, при некотором значении параметра  $s = G(s)$ . Зависимость оператора  $B$  от координат означает, по существу, зависимость от координат значения параметра  $s$ , при котором  $B(x) = G(s(x))$ . Следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x) = \frac{\partial}{\partial s_j} G(s) \frac{\partial}{\partial x^\mu} s_j(x).$$

Будем считать, что операторнозначная функция  $G(s)$  регулярная в области значений параметра  $s$ . Это означает, что пространства векторов (называемых *касательными*), составленные из линейных комбинаций элементов

$$H^j = \frac{\partial}{\partial s_j} G(s), \quad j = 1, \dots, N.$$

совпадают между собой для всех  $s$  из рассматриваемой области значений этого параметра. Тогда операторы  $H^j$  могут быть представлены как линейные комбинации генераторов  $\Gamma^j(G)$ ,  $j = 1, \dots, N$  группы  $G(s)$ . Таким образом,  $H^j$  – элементы алгебры Ли  $AG$  группы  $G$ . Следовательно, для операторов

$$T_\mu \square \frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x) = W_{\mu j}(x) \Gamma^j(G), \quad (4.14)$$

где:  $\Gamma^\mu(G)$  – генератор группы  $G$ <sup>52</sup>, образующие алгебру Ли  $AG$  этой группы;  $W_{\mu j}(x)$  – для каждого индекса  $j$  векторное поле  $W_j(x) = \{W_{0j}(x), W_{1j}(x), W_{2j}(x), W_{3j}(x)\}$ , которое называется *калибровочным полем симметрии*, соответствующей генератору  $\Gamma^j(G)$ . Число таких векторных полей равно числу генераторов группы  $G$ . Таким образом, каждому генератору группы симметрий, которая предполагается нарушенной, ставится в соответствие калибровочное поле, которое и служит количественным выражением нарушения симметрии. Функции  $W_{\mu j}(x)$  следует рассматривать как зависящие от координат коэффициенты, определяющие новую производную:

$$D_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) - T_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) - W_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) \phi(x). \quad (4.15)$$

Так определенную производную называют удлинённой. Удлинённая производная вводится для того, чтобы обеспечить выполнение в пространствах с локально нарушенной симметрией закона трансформации для удлинённой производной, аналогичного закону трансформации обычной производной в однородном пространстве-времени. Именно, если  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B(x)\phi(x)$ , то должно быть выполнено правило:

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow D'_\mu \phi'(x) = \phi'_{,\mu}(x) - T'_\mu \phi'(x) = \phi'_{,\mu}(x) - W'_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) \phi'(x) = B(x) D_\mu \phi(x). \quad (4.16)$$

Замена в лагранжевой плотности обычных производных удлинёнными приводит к тому, что все компоненты лагранжевой плотности в пространствах с нарушенной и ненарушенной симметрией преобразуются одинаково. В последнем случае лишь функции  $W_{\mu j}(x)$  обращаются в ноль, что свидетельствует об однородности среды.

Правило трансформации (16) будет выполнено, если при преобразованиях (11) объекты связности  $T_\mu$  преобразуются по закону:

$$T'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x) B^{-1}(x) + B(x) T_\mu B^{-1}(x). \quad (4.17)$$

Действительно, из (16) следует:

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi'(x) &= \phi'_{,\mu}(x) - T'_\mu \phi'(x) = \\ &= (B(x)\phi(x))_{,\mu} - T'_\mu B(x)\phi(x) = B_{,\mu}(x)\phi(x) + B(x)\phi_{,\mu}(x) - T'_\mu B(x)\phi(x) \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$B(x) D_\mu \phi(x) = B(x)\phi_{,\mu} - B(x) T_\mu \phi(x),$$

тогда из требования

$$B(x) D_\mu \phi(x) = D'_\mu \phi'(x) \text{ получаем: } T'_\mu B(x)\phi(x) = B_{,\mu}(x)\phi(x) + B(x) T_\mu \phi(x).$$

Применяя к последнему соотношению справа оператор  $B^{-1}(x)$ , получим искомый закон преобразования (17) объектов связности при преобразованиях поля по закону (11).

При определении удлинённой производной (15) можно пользоваться и положительным вторым слагаемым:

$$D_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) + \widehat{T}_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) + \widehat{W}_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) \phi(x).$$

Операторы  $\widehat{T}_\mu$  – это также объекты связности, выполняющие роль компенсации членов  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x)$ . Однако это другие объекты связности, отличающиеся от  $T_\mu$  и имеющие несколько отличный от (17) закон преобразования. Этот закон легко находится приемом, уже описанным выше:  $D'_\mu \phi'(x) = \phi'_{,\mu}(x) + \widehat{T}'_\mu \phi'(x)$ . Действительно,

$$\phi'(x) = (B(x)\phi(x))_{,\mu} + \widehat{T}'_\mu B(x)\phi(x) = B_{,\mu}(x)\phi(x) + B(x)\phi_{,\mu}(x) + \widehat{T}'_\mu B(x)\phi(x).$$

Далее:

$$B(x) D_\mu \phi(x) = B(x)\phi_{,\mu} + B(x)\widehat{T}_\mu \phi(x),$$

<sup>52</sup> Не зависящие от пространственно-временных координат.



тогда из требования

$$B(x)D_\mu\phi(x) = D'_\mu\phi'(x), \text{ следует:}$$

$$\widehat{T}'_\mu B(x)\phi(x) = B(x)\widehat{T}'_\mu\phi(x) - B_{,\mu}(x)\phi(x).$$

Из последнего соотношения следует искомый закон преобразования:

$$\widehat{T}'_\mu = B(x)\widehat{T}_\mu B^{-1}(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x) B^{-1}(x). \quad (4.17-1)$$

Преобразования (17) называются калибровочными, и их смысл состоит в том, что они дают закон преобразования для объектов связанности  $T_\mu$ , характеризующих неоднородности среды через зависящий от пространственно-временных координат результат действия того либо иного преобразования симметрии из  $G(s)$ . Если объекты связанности могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x) B^{-1}(x),$$

то они называются чисто калибровочными. Объекты связанности  $T_\mu$  и  $T'_\mu$ , связанные между собой отношением (17), называются калибровочно-эквивалентными. Таким образом, все множество объектов связанности разбивается на множество непересекающихся классов калибровочно-эквивалентных объектов связанности. Часть из них – чисто калибровочные, содержат нулевой член, и, следовательно, надлежащим координатным преобразованием все они могут быть сведены к нулю.

Формула (17) преобразования объектов связанности еще раз подтверждает правильность их представления в виде (14), так как из (17) следует, что  $T_\mu$  принадлежат области значений выражения

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x).$$

Выберем в четырехмерном пространстве замкнутый прямоугольный контур со сторонами:  $\Delta x^\mu$   $\delta x^\nu$ . Подсчитаем разность приращений поля, полученных при движении: из одной точки в другую по двум разным направлениям, показанный на рис. прил. 4.2 стрелками. Получим:

$$\begin{aligned} \phi(x + \delta x^\nu) &= \phi(x) + D_\nu\phi(x)\delta x^\nu; \\ \phi(x + \delta x^\nu + \Delta x^\mu) &= \phi(x + \delta x^\nu) + D_\mu\phi(x + \delta x^\nu)\Delta x^\mu = \\ &= \phi(x) + D_\nu\phi(x)\delta x^\nu + D_\mu\phi(x)\Delta x^\mu + D_\mu D_\nu\phi(x)\delta x^\nu\Delta x^\mu; \\ \phi(x + \Delta x^\mu) &= \phi(x) + D_\mu\phi(x)\Delta x^\mu; \\ \phi(x + \Delta x^\mu + \delta x^\nu) &= \phi(x + \Delta x^\mu) + D_\nu\phi(x + \Delta x^\mu)\delta x^\nu = \\ &= \phi(x) + D_\mu\phi(x)\Delta x^\mu + D_\nu(\phi(x) + D_\mu\phi(x)\Delta x^\mu)\delta x^\nu = \\ &= \phi(x) + D_\mu\phi(x)\Delta x^\mu + D_\nu(\phi(x)\delta x^\nu + D_\mu\phi(x)\Delta x^\mu\delta x^\nu). \end{aligned}$$

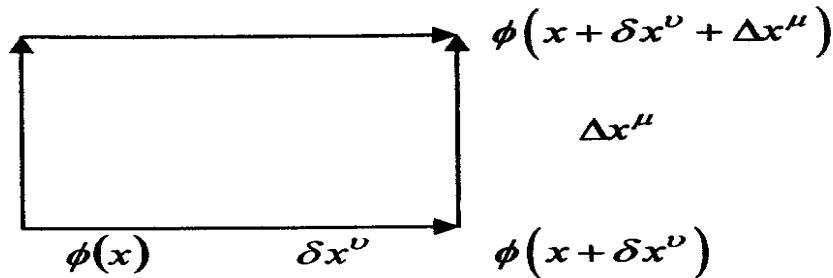


Рис. прил. 4.2. Контур обхода

Следовательно, разность приращений поля  $\delta R(\phi) = \phi(x + \delta x^\nu + \Delta x^\mu) - \phi(x + \Delta x^\mu + \delta x^\nu)$  равна:

$$\delta R(\phi) = F_{\nu\mu}\phi(x)\Delta x^\mu\delta x^\nu, \quad (4.18)$$

где:

$$\begin{aligned} F_{\nu\mu} &= [D_\nu, D_\mu] = D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\nu + [T_\nu \cdot T_\mu] \\ &= T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} + [T_\mu \cdot T_\nu] = \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_{\nu j}(x) \Gamma^j(G) + \\ &+ W_{\nu j}(x) \Gamma^j(G) W_{\mu i}(x) \Gamma^i(G) - W_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) W_{\nu i}(x) \Gamma^i(G) = \\ &= \{W_{\mu j, \nu}(x) - W_{\nu j, \mu}(x)\} \Gamma^j(G) + W_{\nu j}(x) W_{\mu i}(x) \Gamma^j(G) \Gamma^i(G) - \\ &- W_{\mu i}(x) W_{\nu j}(x) \Gamma^i(G) \Gamma^j(G) = \\ &= \{W_{\mu j, \nu}(x) - W_{\nu j, \mu}(x)\} \Gamma^j(G) + W_{\nu j}(x) W_{\mu i}(x) [\Gamma^j, \Gamma^i]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Величину  $\delta R(\phi)$  естественно назвать кривизной, а оператор  $F_{\nu\mu}$  – операторы кривизны. В связи с тем, что оператор кривизны представляет собой антикоммутатор удлиненных производных, его трансформационные свойства те же, что и удлиненной производной. Т.е. при преобразовании  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B(x)\phi(x)$  имеем:

$$F_{\nu\mu}\phi(x) \rightarrow [F_{\nu\mu}\phi(x)] = B(x)F_{\nu\mu}\phi(x).$$

С другой стороны,

$$[F_{\nu\mu}\phi(x)] = F'_{\nu\mu}\phi'(x) = F'_{\nu\mu}B(x)\phi(x).$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} F'_{\nu\mu}B(x) &= B(x)F_{\nu\mu}; \\ F'_{\nu\mu} &= B(x)F_{\nu\mu}B^{-1}(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Из последнего соотношения, в частности, вытекает, что если объект связанности калибровочно-эквивалентен нулю, то его оператор кривизны тождественно равен нулю. Действительно, для нулевого объекта связанности кривизна равна нулю. Это следует из (18). Любой другой ему калибровочно-эквивалентный получается по (20), что так же всегда дает ноль.

Для того чтобы построить уравнения, описывающие поведение поля в пространствах с локально нарушенной симметрией, следует в лагранжевой плотности  $L\{x, \phi(x), \phi_\mu(x)\}$  заменить обычные производные  $\phi_\mu(x)$  удлиненными  $D_\mu\phi(x)$ . Далее, варьируя таким образом полученное новое действие:

$$S = \int_{\Omega} L\{x, \phi(x), D_\mu\phi(x)\} dw,$$

в предположении его экстремума получаем, в соответствии с принципом наименьшего действия, уравнения Эйлера, которые и являются уравнениями поля в пространствах с локально нарушенной симметрией. Неоднородности среды характеризуются калибровочными полями

$$W_j(x), \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, последовательность получения обобщения уравнений, описывающих физический процесс в пространствах с локально нарушенной симметрией, выглядит следующим образом: для исходного уравнения выписывается лагранжева плотность; выбирается группа Ли симметрий, локальное нарушение которой принимается за описываемую неоднородность; находятся представления этой группы на функциях поля и ее генераторы – базисные элементы соответствующей алгебры Ли. Далее в лагранжевой плотности производные заменяются их удлиненными аналогами с использованием калибровочных полей, после чего варьированием этой

новой лагранжевой плотности получают уравнение Эйлера как уравнение поля в пространствах с локально нарушенной симметрией.

Если поле  $\phi(x)$   $M$  компонентно, т.е.  $\phi(x) = \{\phi^i(x), i = 1, \dots, M\}$ , то система уравнений поля в среде с локально нарушенной симметрией имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^i(x)} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu^i(x)} = 0, \quad (21)$$

где  $L = L(x, \phi^i(x), D_\mu \phi^i(x))$ . При этом поле  $\phi$  в однородной среде имеет лагранжиан  $L(x, \phi^i(x), \phi_\mu^i(x))$ .

### 4.3. Искривленные многообразия (пространства с афинной связностью)

Общая теория описания неоднородностей среды, проявляющихся в аномальном (отличном от соответствующего однородного) поведении поля, развитая в предыдущем разделе, может быть конкретизирована в разных аспектах.

Зависимость группы  $G(s)$  операторов  $B$ , действующих на поле от координат, привели к появлению удлиненных производных. Эта зависимость возникла как результат представления на функциях поля группы координатно зависимых координатных преобразований  $g(s)$ . Но такая зависимость может быть введена и самостоятельно, без связи с координатными преобразованиями. Наконец, элементы группы  $G(s)$  могут быть комбинацией первого и второго. Строго говоря, теория, построенная в предыдущем разделе, основана лишь на операторах  $B(x)$  из группы  $G(s)$  и не требует введения группы  $g(s)$  элементов координатных преобразований. Последние, по сути, играли роль лишь для пояснения подхода.

Рассмотрим, как локальное нарушение симметрии может быть введено, например, для векторных полей.

Далее мы используем понятие вектора как многокомпонентного объекта с заданным законом преобразования компонент при координатных преобразованиях.

По порочной традиции зачастую используется псевдонаучный жаргон. Так, используют термин вектор для характеристики любого многокомпонентного объекта. Например, говорят «вектор параметров некоторой физической модели», имея в виду набор параметров, полностью характеризующий этот физический объект (см. приложение 1). При этом не уточняется, какова природа этих параметров и можно ли их, с полным для того основанием, называть вектором. На самом деле, понятие вектора тесно связано с понятием преобразования координат. Вектор – это как раз такой многокомпонентный объект, компоненты которого при координатных преобразованиях преобразуются по заданному конкретному закону. И именно это свойство физических параметров должно давать основания называть их векторами.

Пусть поле  $\phi(x)$  представляет собой поле векторов в пространстве  $R^4$  с компонентами<sup>53</sup>  $\phi^\mu(x)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Напомним, что вектор  $V = \{V^\mu, \mu = 0, 1, \dots, 3\}$  при координатных преобразованиях  $x \rightarrow x' = x'(x^0, x^1, x^2, x^3)$  «в приказном порядке» изменяется по закону

$$V'^\mu = a_v^\mu V^v, \quad (4.22)$$

где матрица  $A$ , состоящая из элементов  $a_v^\mu$ , имеет обратную в рассматриваемой области  $R^4$  и образована элементами:

<sup>53</sup> Греческие индексы – обозначения векторов меняются от 0 до 3.

$$a_v^\mu = \frac{\partial x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial x^v}. \quad (4.23)$$

Вектора с верхними индексами, преобразующиеся по закону (1) с коэффициентами, вычисляемыми по (14), называются контравариантными векторами. Само же преобразование (14) называется преобразованием по контравариантным индексам.

Могут быть введены вектора с нижними индексами  $V_\mu$ , которые также в «приказном порядке» при преобразованиях координат

$$x' = x'(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

меняются по закону

$$V_\mu = V_\nu b_\mu^\nu = V_\nu \frac{\partial x^\nu(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial x'^\mu}. \quad (4.24)$$

Такие векторы называются ковариантными векторами, а преобразование (15) – преобразованием по ковариантным индексам.

Для более сложных образований – тензоров – многоиндексных объектов, его верхние индексы преобразуются по контравариантному закону, а нижние – по ковариантному. Это, по существу, следует воспринимать как определение тензора. При этом порядок, в котором расположены индексы, имеет существенное значение. Так, например, три раза контравариантный и один раз ковариантный тензор  $H_{\dots\beta}^{\xi\chi\cdot\varphi}$  преобразуется в  $(H')_{\dots\psi}^{\alpha\sigma\cdot\delta}$  по закону:

$$(H')_{\dots\psi}^{\alpha\sigma\cdot\delta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\xi} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\chi} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\psi} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x'^\varphi} H_{\dots\beta}^{\xi\chi\cdot\varphi}.$$

Рассмотрим теперь в качестве преобразования  $B(x)$ , образующих группу  $G(s)$ , преобразования векторов по закону (1). Локальное нарушение симметрии, связанное с такими преобразованиями, приводит, в соответствии с (3.6), к удлиненной производной:

$$D_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) + \widehat{T}_\mu \phi(x) = \phi_{,\mu}(x) + \widehat{W}_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) \phi(x). \quad (4.25)$$

Последнее выражение следует переписать в покомпонентной для элементов поля  $\phi^v$  форме:

$$D_\mu \phi^v(x) = \phi_{,\mu}^v(x) + \widehat{T}_\mu \phi^v(x) = \phi_{,\mu}^v(x) + K_{\mu\beta}^v(x) \phi^\beta(x),^{54}$$

где одним коэффициентом  $K_{\mu\eta}^v(x) \phi^\eta(x)$  обозначена  $v$  – компонента выражения:

$$W_{\mu j}(x) \Gamma^j(G) \phi(x) = \widehat{T}_\mu \phi(x).$$

Коэффициенты  $K_{\mu\eta}^v(x)$  называются аффинной связностью в  $R^4$  или просто связностью. Таким образом, аффинная связность представляет собой частный случай объектов связности, введенных при определении удлиненной производной в общем случае. Для каждого индекса  $\mu$   $K_{\mu\eta}^v(x)$  представляет собой квадратную матрицу размером по числу компонент векторного поля  $\phi(x)$  и преобразующейся при преобразованиях

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B(x) \phi(x) = a_v^\mu \phi^v(x) = \frac{\partial x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial x^v} \phi^v(x), \quad (4.26)$$

по закону, следующему из (3.8):  $\widehat{T}'_\mu = -\frac{\partial}{\partial x'^\mu} B(x) B^{-1}(x) + B(x) T_\mu B^{-1}(x)$ .

Приведенный закон преобразования объектов связности был получен как следствие требования: если  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = B(x) \phi(x)$ , то:

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow D'_\mu \phi'(x) = \phi'_{,\mu}(x) + \widehat{T}'_\mu \phi'(x) = B(x) D_\mu \phi(x).$$

<sup>54</sup> Здесь во втором слагаемом записан знак «+» только лишь для того, чтобы использовать распространенные для инвариантного дифференцирования, которым является удлиненная производная, обозначения. Ровным счетом ничего не изменилось бы, если записать знак «-». Но это просто будет другая связность.

Однако для случая преобразования компонент векторного поля с помощью матрицы  $A$  это требование должно быть заменено иным. Дело в том, что для векторного поля  $\phi(x)$  его удлиненная производная  $D_\mu\phi(x)$  является двухиндексным объектом и при координатных преобразованиях преобразовываться должна именно как двухиндексный объект. Потребуем, чтобы этот объект образовывал тензор: ковариантный по индексу дифференцирования  $\mu$  и контравариантный по индексу, нумерующему компоненту поля, если поле – контравариантный вектор. Если же поле – ковариантный вектор, то  $D_\mu\phi(x)$  представляет собой дважды ковариантный тензор. Тогда закон для преобразования объектов связности получается из следующего правила: преобразованная удлиненная производная от преобразованного поля должна быть равна преобразованной по тензорному закону исходной удлиненной производной от исходной функции. Или:

$$D'_\gamma\phi'^\alpha(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} D_\beta\phi^\zeta(x)$$

$$D'_\gamma \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \phi^\zeta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} D_\beta\phi^\zeta(x).$$

Последнее равенство можно переписать:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \phi^\zeta(x) + K'^\alpha_{\gamma\nu}(x) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\zeta} \phi^\zeta(x) =$$

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \phi^\zeta(x) + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} K^\zeta_{\beta\nu} \phi^\nu(x) \quad (4.27)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \phi^\zeta(x) = \frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \phi^\zeta(x),$$

получим:

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x'^\gamma \partial x^\zeta} \phi^\zeta(x) + K'^\alpha_{\gamma\nu}(x) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\zeta} \phi^\zeta(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} K^\nu_{\beta\zeta} \phi^\zeta(x).$$

В последнем соотношении удобно штрихованные переменные и не штрихованные поменять местами. Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = 1,$$

можно получить закон преобразования аффинных объектов связности при координатных преобразованиях  $x \rightarrow x' = x'(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Для того чтобы уравнение (27) было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы исходный и преобразованный объекты связности были связаны между собой соотношением:

$$K'^\alpha_{\gamma\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial^2 x^\zeta}{\partial x'^\nu \partial x'^\gamma} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\zeta \partial x'^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\gamma} K^\eta_{\beta\zeta} \quad (4.28)$$

Уравнение (28) представляет собой полный аналог калибровочных преобразований (17) для объектов связности общего вида, учитывающий специфику координатных преобразований и следующих из них правил преобразований для векторов и тензоров. Преобразования (28) называются калибровочными преобразованиями аффинных объектов связности. Также, как и (17), они описывают законы преобразования, но уже для частного случая – аффинных объектов связности, характеризующих неоднородности среды. Два объекта связности калибровочно эквивалентны, если они связаны преобразованием (28). Калибровочно-эквивалентным нулю называется объект связности, который может быть представлен в виде:

$$K'^\alpha_{\gamma\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial^2 x^\zeta}{\partial x'^\nu \partial x'^\gamma}.$$

Если аффинный объект связности калибровочно-эквивалентный нулю, то существует координатное преобразование, переводящее его в тождественный ноль.

Наряду с ковариантной производной<sup>55</sup> контравариантного векторного поля:

$$D_\mu \phi^v(x) = \phi_\mu^v(x) + \tilde{T}_\mu \phi(x) = \phi_\mu^v(x) + K_{\mu\eta}^v(x) \phi^\eta(x). \quad (4.29)$$

Может быть определена ковариантная производная ковариантного векторного поля, т.е. поля с нижними индексами, преобразующегося при координатных преобразованиях по правилу (22):

$$D_\mu \phi_v(x) = \phi_{v,\mu}(x) - K_{\mu\eta}^v(x) \phi_v(x). \quad (4.30)$$

Это правило обеспечивает трансформационные свойства ковариантной производной ковариантного векторного поля как дважды ковариантного тензора второго ранга при преобразовании аффинных объектов связности по использованному уже правилу (28). Правила (30) «выводятся» из правила (29), и, наоборот, если предположить, что ковариантные вектора и контравариантные могут образовывать скалярные произведения по правилу  $\phi^v(x)\phi_v(x)$ . Скалярное произведение векторного поля самого с собой образует скаляр, ковариантная производная от которого совпадает с обычной производной, и, кроме того, для скалярного произведения справедливо правило цепного дифференцирования так же, как и для обычной производной:

$$D_\mu (A^v B_v) = (D_\mu A^v) B_v + A^v (D_\mu B_v). \quad (4.31)$$

Нетрудно видеть, что сам аффинный объект связности тензором не является, поскольку в закон его преобразования (28) входит «лишний» член:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\zeta} \frac{\partial^2 x^\zeta}{\partial x'^\nu \partial x'^\tau}.$$

Отсюда, в частности, следует, что разность двух объектов аффинной связности является тензором, но не является объектом аффинной связности, а их сумма не является ни объектом связности, ни тензором<sup>56</sup>. Однако выпуклая комбинация двух объектов связности является объектом связности.

Вид преобразования (28) наталкивает на рассмотрение только симметричной по нижним индексам аффинной связности. Любая другая может быть представлена в виде симметричной и антисимметричной по нижним индексам компонент тензора третьего ранга:

$$K_{\zeta\chi}^\alpha = \frac{1}{2}(K_{\zeta\chi}^\alpha + K_{\chi\zeta}^\alpha) + \frac{1}{2}(K_{\zeta\chi}^\alpha - K_{\chi\zeta}^\alpha).$$

В связи с тем, что свойство антисимметрии при преобразованиях (28) не сохраняется, рассмотрение таких связностей не дает новых результатов. Антисимметричная часть связности называется кручением. Оно переносится согласованно со связностью вектора. Далее будем предполагать, что все рассматриваемыми аффинные связности симметричны по нижним индексам. В итоге, кручение равно нулю.

Ковариантное дифференцирование по переменной с индексом  $\mu$  будем обозначать добавлением к дифференцируемой величине соответствующего ковариантного индекса (в данном случае  $\mu$ ) через точку с запятой (в отличие от обычного дифференцирования, обозначаемого через запятую):  $D_\mu \phi_i = \phi_{i;\mu}$ .

Теперь можно определить удлиненную производную для тензора произвольного ранга, какое-то количество раз ковариантного и какое-то количество раз контравариантного. Для каждого ковариантного индекса надо добавить «удлиняющий член производной» ковариантного типа, а для каждого контравариантного индекса – удлиняющий член контравариантного типа. Следующий пример пояснит сказанное:

$$T_{\dots pq;i}^{kl} = T_{\dots pq;i}^{kl} + K_{jn}^k T_{\dots pq}^{nl} + K_{in}^l T_{\dots pq}^{kn} - K_{ip}^n T_{\dots np}^{kl} - K_{iq}^n T_{\dots pn}^{kl}.$$

<sup>55</sup> Для аффинного случая удлиненную производную называют ковариантной. Это название происходит оттого, что по индексу дифференцирования образованный после взятия производной объект будет ковариантным. Именно отсюда были выведены трансформационные свойства аффинных объектов связности.

<sup>56</sup> При первом члене в (28) появляется множитель 2, который «портит» закон преобразования для объектов связности.

Аффинная связность порождает геометрические характеристики пространства, в частности его кривизну. Повторяя рассуждения, приведшие к оператору кривизны в пространствах с локально нарушенной симметрией, в частности к выражению (18), для оператора кривизны получим:

$$\delta R^\eta(\phi) = F_{\alpha\nu\mu}^\eta \phi(x) \Delta x^\mu \delta x^\nu = [D_\nu, D_\mu] \phi^\alpha(x) \Delta x^\mu \delta x^\nu \quad (4.32)$$

Правая часть последнего выражения есть вектор, компоненты которого пронумерованы индексом  $\eta$ . Этот индекс явно выписан лишь в правой части. Величина  $F_{\alpha\nu\mu}^\eta$  называется тензором кривизны, или тензором Римана-Кристоффеля. Если расписать это выражение, то получим:

$$F_{\alpha\lambda\mu}^\eta = \left\{ -\Gamma_{\alpha\lambda,\mu}^\eta + \Gamma_{\alpha\mu,\lambda}^\eta + \Gamma_{\beta\lambda}^\eta \Gamma_{\alpha,\mu}^\beta - \Gamma_{\beta\mu}^\eta \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta \right\} \quad (4.33)$$

Понятно, что если аффинная связность калибровочно-эквивалентна нулю, то тензор кривизны тождественно равен нулю, что следует из тензорного закона преобразования кривизны. Если тензор кривизны равен нулю, то это означает, что согласованный со связностью и называемый потому параллельным перенос вектора из точки в точку не зависит от пути переноса, а лишь от координат начальной и конечной точек. Это, в свою очередь, означает, что, исходя из заданного в одной точке вектора  $A^\nu$ , может быть построено векторное поле  $A^\nu(x)$  как результат параллельного переноса исходного вектора во все точки. Это векторное поле удовлетворяет уравнению  $D_\lambda A^\lambda = 0$  или, что то же самое:

$$\frac{\partial^\nu A}{\partial x^\lambda} = -K_{\lambda\alpha}^\nu A^\alpha. \quad (4.34)$$

Если аффинная связность задана и уравнение (34) разрешимо, то это означает равенство нулю кривизны и, как следствие, калибровочную эквивалентность нулю заданной аффинной связности. В римановой геометрии такую связность называют интегрируемой.

В силу определения (32-33) кривизны – тензора Римана – Кристоффеля, имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} F_{\alpha\lambda\mu}^\eta &= -F_{\alpha\mu\lambda}^\eta; \\ F_{\alpha\lambda\mu}^\eta + F_{\mu\lambda\alpha}^\eta + F_{\alpha\mu\lambda}^\eta &= 0; \\ F_{\alpha\lambda\mu,\tau}^\eta + F_{\alpha\mu\tau,\lambda}^\eta + F_{\alpha\tau\lambda,\mu}^\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Сворачивая тензор кривизны, получим тензор Ричи  $R_{\nu p}$ :

$$R_{\nu p} = F_{\nu p\mu}^\mu$$

Кроме того:

$$R_{\nu p} = K_{\nu\alpha,p}^\alpha - K_{\nu p,\alpha}^\alpha - K_{\nu p}^\alpha K_{\alpha\beta}^\beta + K_{\nu\beta}^\alpha K_{p\alpha}^\beta. \quad (4.36)$$

Его, в свою очередь, также можно свернуть по паре оставшихся индексов, получив тем самым хорошо известный в римановой геометрии объект – скалярную кривизну.

Введение аффинных объектов связности порождает искривленное многообразие, которое можно представить как некоторую кривую поверхность, вложенную в некоторое пространство большего числа измерений. Геометрия этого пространства определяется линиями, перенесение вдоль которых касательных к этой линии векторов, согласованных со связностью образом, составляет их касательными к той же линии. Такие линии называются геодезическими.

Пусть уравнение геодезической задано параметрическими уравнениями  $u^\mu(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} z^\mu(\tau)$ . Приращение, которое получает контравариантный вектор  $u^\mu(\tau)$  при смещении на величину  $dx^\sigma$ , равно:

$$du^\mu = -K_{\mu\sigma}^\nu u^\mu dx^\sigma.$$

Откуда:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} u^\mu(\tau) + K_{\nu\sigma}^\mu u^\nu \frac{dz^\sigma}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\tau^2} z^\mu(\tau) + K_{\nu\sigma}^\mu \frac{dz^\nu}{d\tau} \frac{dz^\sigma}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Уравнение (37) представляет собой уравнение для геодезических.

Объекты афинной связности введены нами как частный случай калибровочных полей и объектов связности в пространствах с локально нарушенной симметрией. Однако аналогичная теория может быть построена на основе введения метрики в афинном пространстве, которая порождает объекты афинной связности. Рассмотрим элементы этой теории и продемонстрируем ее связь с вышеизложенным.

Пусть в афинном пространстве задан метрический тензор  $g_{i\phi}$  второго ранга ковариантный и симметричный по своим индексам. Это означает, что для любых двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  их скалярное произведение  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle_g$  определено соотношением  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle_g = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ . Соответствующим образом определена и длина вектора  $\mathbf{A}$ :  $\|\mathbf{A}\|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ . Афинное пространство, наделенное метрическим тензором, называется римановым пространством. Риманово пространство одновременно является и пространством с афинной связностью. При этом связность и метрика должны не противоречить друг другу. Соответствующая полю метрического тензора афинная связность должна быть такой, чтобы согласованный со связностью перенос метрического тензора в другую точку дал результат, равный значению метрического тензора в этой другой точке, т.е. перенес его в себя. Это означает:  $g_{i\chi;\lambda} = 0$ . Эквивалентным требованием служит то, что для любого контравариантного вектора  $A^\nu$  величина  $g_{\nu\mu} A^\nu A^\mu$  должна оставаться инвариантом при всех одновременных переносах как вектора  $A^\nu$ , так и тензора  $g_{\mu\nu}$ . Если определить контравариантный метрический тензор  $g^{i\chi}$  условием  $g^{i\chi} g_{\lambda\chi} = \delta(i, \lambda)$ <sup>57</sup>, то единственная афинная связность, удовлетворяющая таким условиям согласованности с метрикой, есть:

$$K_{i\psi}^\chi = \frac{1}{2} g^{\chi\lambda} \left\{ \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^\psi} + \frac{\partial g_{\lambda\psi}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i\psi}}{\partial x^\lambda} \right\}. \quad (4.38)$$

Однако найти обратное выражение далеко не всегда удается. Не всякое пространство с афинной связностью может быть римановым. Т.е. не для всякого афинного пространства может быть найден метрический тензор, соответствующая которому по (38) связность совпадает с исходной. Однако при этом римановы пространства, т.е. афинные пространства, снабженные метрическим тензором, представляют достаточно широкие возможности для описания неоднородностей среды через кривизну пространства. Использование с этой целью римановых пространств весьма просто. Достаточно в исходных уравнениях для однородной среды обыкновенные производные заменить ковариантным аналогом. Поскольку объекты связности по заданному метрическому тензору легко определяются, то проблем с расчетом первых производных, от скалярных и тензорных полей, не возникает. Сложности возникают при расчете вторых производных и, в частности, вычислении аналогов операторов Лапласа и Даламбера, имеющих в декартовых координатах вид:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3};$$

И, соответственно,

$$\square = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^0}.$$

Оба этих оператора можно записать в единой форме:

<sup>57</sup> Дельта функция Дирака.



$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

В первом случае  $g^{ij}$  – диагональная 3x3 матрица с единичными элементами. Во втором – это диагональная 4x4 матрица, элементы  $g^{ii}$   $i=1,2,3$  которой равны единице, а элемент  $g^{44}$  равен минус единице. Для произвольного метрического тензора и скалярного поля  $F$  обобщением операторов Лапласа и Даламбера будет:

$$g^{ij} (F_{;i})_{;j}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что:

$$g^{ij} (F_{;i})_{;j} = g^{ij} (F_{;j})_{;i}.$$

Несколько сложнее дело обстоит со вторыми производными для векторного поля. Можно показать, что:

$$F_{i;j;k} \neq F_{i;k;j}.$$

Обобщением этих операторов на случай векторного поля  $F$  служит [1]:

$$g^{kl} F_{i;k;l}, \quad (4.39)$$

где

$$F_{j;k;i} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^k \partial x^i} - K_{ki}^m \frac{\partial F_j}{\partial x^m} - K_{ij}^m \frac{\partial F_m}{\partial x^k} - K_{jk}^m \frac{\partial F_m}{\partial x^i} - F_m K_{jki}^m.$$

Здесь:

$$K_{jki}^m = \frac{1}{3} \sum \left( \frac{\partial K_{ki}^m}{\partial x^j} - 2K_{sj}^m K_{ki}^s \right).$$

В том случае, если речь идет об операторе Даламбера, индексы меняются в пределах от нуля до трех. Для случая оператора Лапласа диапазон их изменения – от единицы до трех.

Таким образом, неоднородная среда может характеризоваться искривлением пространственно-временной сцены, на которой происходит рассматриваемый физический процесс. Это задается с помощью задания, зависящего от координат симметричного метрического тензора, через который с помощью соотношения (38) рассчитываются объекты аффинной связности. Далее в уравнении, описывающем распространение поля в однородной и «плоской» среде, все производные заменяются их ковариантными аналогами. Наиболее часто встречающиеся операторы второго порядка, операторы Лапласа и Даламбера, заменяются выражениями (39). Восстановление компонент метрического тензора по наблюдаемым физическим полям составляет предмет задачи построения изображения среды.

#### 4.4. Конструирование уравнений поля в пространствах с нарушенной симметрией

Применим теперь технику, развитую в разделе 2 настоящего приложения, для построения уравнений поля в пространствах с нарушенной симметрией. С этой целью рассмотрим, как распространяется уравнение для продольных волн в однородной среде на случай сред неоднородных. Волновое уравнение для потенциала  $\phi$  продольных волн в однородной среде имеет вид:

$$\Delta \phi(x) = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2}. \quad (4.40)$$

Требование однородности среды весьма существенно в процессе получения этого уравнения. В гл. 2 формулам (2.14-2.16) это продемонстрировано. Предположение о том, что среда неоднородна, влечет за собой появление производных по координатам от параметров упругости, разрастание и усложнение самого уравнения движения и невозможность введения такого понятия, как переменная скорость. В то же время экспериментально мы знаем, что такое переменная

скорость, и хотелось бы знать, каким образом она может возникнуть из теоретических рассуждений. Ответ на этот вопрос дает развитая выше техника характеристики параметров неоднородности как локального нарушения симметрии.

Волновому уравнению в однородной среде, которое мы намерены распространить на неоднородные с локально нарушенной симметрией, соответствует лагранжева плотность:

$$L(\phi, \mu(x)) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right)^2 \quad (4.41)$$

В качестве группы Ли симметрий, локальное нарушение которой принимается за описываемую неоднородность, примем группу пространственно-временных трансляций. Генераторами этой группы, как было показано в приложении 3, в представлении на пространстве дифференцируемых функций служат операторы дифференцирования по соответствующей пространственной или временной координате –  $p_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Заменяя в лагранжевой плоскости (41)

обычные производные их удлинненными аналогами с использованием калибровочных полей и указанных генераторов

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - W_\mu^\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad , \quad (4.42)$$

получим лагранжеву плотность для волнового уравнения в пространстве с нарушенной трансляционной симметрией:

$$\tilde{L}(\phi, \mu(x)) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} - W_i^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right)^2 - \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - W_0^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right)^2. \quad (4.43)$$

Уравнение Эйлера

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx^j} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi_{,j}} = 0$$

для лагранжевой плотности (42) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^1} - W_1^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) (1 - W_1^1(x)) \right] - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^2} - W_2^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_2^1(x) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^3} - W_3^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_3^1(x) + \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - W_0^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_0^1(x) \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^2} - W_2^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) (1 - W_2^2(x)) \right] - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^1} - W_1^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_1^2(x) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^3} - W_3^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_3^2(x) + \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - W_0^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_0^2(x) \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^3} - W_3^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) (1 - W_3^3(x)) \right] - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^1} - W_1^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_1^3(x) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^2} - W_2^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_2^3(x) + \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - W_0^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_0^3(x) \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ -\frac{1}{V^2} \left[ \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - W_0^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) (1 - W_0^0(x)) \right] - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^1} - W_1^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_1^0(x) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^2} - W_2^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_2^0(x) \right\} - \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^3} - W_3^\nu(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} \right) W_3^0(x) \right\} = 0. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Уравнение (44) представляет собой весьма общее дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, роль которых играют калибровочные поля  $W_\mu^v(x)$ . Таким образом, рассмотрение неоднородностей среды как искривления пространственно-временной сцены, на которой происходит распространение волн, приводит к общим дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, связанными с калибровочными полями для соответствующих генераторов трансляций. Для произвольного дифференциального уравнения второго порядка может быть поставлена задача интерпретации коэффициентов этого уравнения как калибровочных полей, отвечающих за нарушение соответствующей симметрии.

Рассмотрим более частный случай уравнения (44), соответствующий предположению о локальном нарушении симметрии лишь относительно временных трансляций. Кроме того, будем считать неизменными во времени свойства симметрии рассматриваемого пространства. Это означает, что неоднородности среды не изменяются с течением времени на рассматриваемых временных масштабах. Тогда калибровочные поля будут ненулевыми лишь для  $W_\mu^0$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  и зависеть только от пространственных координат. Предположим, кроме того,  $W_0^0 = 0$ . Последнее предположение связано с условием стационарности лишь в том случае, когда  $W_\mu^0 = \frac{\partial}{\partial x^\mu} W^0$ , где  $W^0$  – некоторый потенциал объектов связности, зависящий от координат. Таким образом, используется лагранжева плотность

$$L'(\phi_\mu(x)) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} - W_i^0(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right)^2, \quad (4.45)$$

уравнение Эйлера для которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \phi(x) - 2 \left( W_1^0(x) \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^0 \partial x^1} + W_2^0(x) \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^0 \partial x^2} + W_3^0(x) \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^0 \partial x^3} \right) - \\ - \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^0} (W_{1,1}^0 + W_{1,2}^0 + W_{1,3}^0) + \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2} \left( (W_1^0)^2 + (W_2^0)^2 + (W_3^0)^2 + \frac{1}{V^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Обозначим  $\mathbf{W}$  векторнозначную функцию, компоненты которой суть  $W_1^0, W_2^0, W_3^0$ . В частности, можно предположить, что  $\mathbf{W} = \text{grad } W^0$ . Тогда уравнение (46) можно переписать в форме:

$$\Delta \phi(x) - 2 \frac{\partial}{\partial x^0} \langle \text{grad } W^0 | \text{grad } \phi(x) \rangle - \frac{\partial}{\partial x^0} \text{div } \text{grad } W^0 = \frac{1 - V^2 |\text{grad } W^0|^2}{V^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2}, \quad (4.47)$$

или, что то же самое:

$$\Delta \phi(x) - 2 \frac{\partial}{\partial x^0} \langle \mathbf{W} | \text{grad } \phi(x) \rangle - \frac{\partial}{\partial x^0} \text{div } \mathbf{W} = \frac{1 - V^2 |\mathbf{W}|^2}{V^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2}. \quad (4.48)$$

Уравнения (47) и (48) представляют собой искомое обобщение уравнений распространения волн в однородной среде на случай среды, неоднородности которой состоят в локальном нарушении симметрии энергетических характеристик при временных трансляциях. Оператор кривизны, соответствующий указанному нарушению симметрии, имеет следующий вид:

$$F_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \left( \frac{\partial W_j^0(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^i} - \frac{\partial W_i^0(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^0}. \quad (4.49)$$

Здесь  $i, j = 1, 2, 3$ . Очевидно, что  $F_{0i} = F_{i0} = 0$  и, следовательно, объекты связности калибровочно-эквивалентны нулю. Это означает существование потенциала для объектов связности,

соответствующих нарушению симметрии относительно временных сдвигов, и нулевую кривизну для пространства, в котором происходит распространение волн.

Поскольку лагранжева плотность связана с энергетической характеристикой системы поле-неоднородность, то можно рассматривать коэффициенты  $W_j^0$  как компоненты некоторого поля, характеризующего состояние системы при заданном  $\phi(x)$ . Тогда, считая лагранжеву плотность определенной, уравнением (4.43) варьируем (43) по  $W_1^0$  в предположении экстремума. Получим в результате уравнения Эйлера:

$$W_i^0(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} / \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i}, \quad I = 1, 2, 3. \quad (4.50)$$

Пользуясь правилом дифференцирования неявно заданной функции, приходим к выводу, если существует функция  $x^0 = x^0(x^1, x^2, x^3)$  такая, что  $\phi(x^0(x^1, x^2, x^3), x^1, x^2, x^3) = const$ , то:

$$W_i^0(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial x^0}{\partial x^i}. \quad (4.51)$$

По смыслу функция  $x^0 = x^0(x^1, x^2, x^3)$  для каждой точки пространства указывает время прихода возмущения в эту точку. Следовательно, коэффициенты  $W_1^0(x_1, x_2, x_3)$ , являясь компонентами градиента этой функции, характеризуют изменение «масштаба времени» в разных точках пространства при распространении волны.

Рассмотрим теперь случай, когда происходит нарушение симметрии по временным трансляциям, причем только  $W_0^0$  отлично от нуля. Физически это означает искажение масштаба времени только во временной компоненте. Это соответствует введению лагранжевой плотности:

$$L'(\phi, \mu(x)) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - W_0^0(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right)^2. \quad (4.52)$$

Легко получить уравнение Эйлера для этого лагранжиана, которое имеет вид:

$$\Delta \phi(x) = \frac{1 - W_0^0(x)}{V^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2}. \quad (4.53)$$

Волновое уравнение в среде с такого сорта неоднородностью имеет вид традиционно записываемого волнового уравнения с «переменной скоростью»  $\tilde{V}(x) = \frac{V}{\sqrt{1 - W_0^0(x)}}$ . Отсюда, в

частности, следует интерпретация переменной скорости в волновом уравнении как параметра нарушения симметрии по временным трансляциям – масштаба времени. Именно такой результат и требовалось получить. Волновое уравнение с переменной скоростью рассматривать можно, но переменная скорость возникает в результате модулирующего множителя  $\sqrt{1 - W_0^0(x)}$  при фоновой постоянной скорости, который имеет смысл искривления многообразия по временной компоненте параметра нарушения симметрии по временным трансляциям.

Рассмотрим далее уравнение Лапласа в трехмерном пространстве:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \phi(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \phi(x) = 0. \quad (4.54)$$

Лагранжева плотность, соответствующая этому уравнению, имеет вид:

$$L(\phi(x)) = \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \right\}^2. \quad (4.55)$$

Введем в функцию  $\phi(x)$  дополнительный параметр  $\xi$ , в результате чего будем иметь  $\phi(x, \xi)$ . Лагранжева плотность симметрична относительно этого параметра просто потому, что она от него не зависит. Введем теперь нарушение симметрии относительно группы трансляций по этому параметру  $\xi$ . Это соответствует введению новой лагранжевой плотности  $L$ :

$$L = \left( \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial x_1} - W_1^\xi \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial x_2} - W_2^\xi \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial x_3} - W_3^\xi \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi} \right)^2.$$

Записывая для этой лагранжевой плотности уравнение Эйлера, получим:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, \xi)}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, \xi)}{(\partial x_2)^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, \xi)}{(\partial x_3)^2} = \text{div}(\mathbf{W}^\xi(x) \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi}).$$

Здесь  $\mathbf{W}^\xi(x) = \{W_1^\xi(x), W_2^\xi(x), W_3^\xi(x)\}$  – калибровочные поля, ответственные за характеристику локального нарушения симметрии относительно введенного параметра.

Рассмотрим частный случай, демонстрирующий возможные пути практического использования этого результата. Пусть среда характеризуется нарушением трансляционной симметрии только по вертикальной координате и в удлиненной производной калибровочное поле  $\mathbf{W}^\xi(x) = \{W_1^\xi, W_2^\xi, W_3^\xi\}$  имеет лишь отличную от нуля компоненту  $W_3^\xi(x)$ . Это приводит к лагранжевой плотности

$$L = \left( \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial x_3} - W_3^\xi \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi} \right)^2.$$

и уравнению Эйлера для нее:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, \xi)}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, \xi)}{(\partial x_2)^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, \xi)}{(\partial x_3)^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} (W_3^\xi(x) \frac{\partial \phi(x, \xi)}{\partial \xi}). \quad (4.56)$$

В подобного рода задачах речь идет о реконструкциях параметров нарушения симметрии по результатам измерений поля, являющегося краевым значением гармонической функции. Отсюда, в частности, для (56) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (W_3^\xi(x)) = -W_3^\xi(x) \cdot G(x), \quad (4.57)$$

где  $G(x) = \left. \frac{\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial \xi} \phi(x, \xi)}{\frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x, \xi)} \right|_{\xi=0}$ .

Поскольку измеряемая компонента поля должна соответствовать нулевому значению параметра  $\xi$ , то можно считать заданной на уровне  $x_3 = 0$  функцию  $\frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x, 0)$ , однако величина

$\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(x, \xi) \Big|_{\xi=0}$  и, следовательно,  $\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial \xi} \phi(x, \xi) \Big|_{\xi=0}$  остается неопределенной. Например, она

может быть задана условием

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial \xi} \phi(x, \xi) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2}{(\partial x_3)^2} \phi(x, 0).$$

Вычислив регуляризованное приближение к пространственному распределению функции  $G(x)$ , можно найти введенную характеристику нарушения симметрии пространства –  $W_3^\xi(x)$ , как решение задачи Коши (57) при дополнительном начальном условии  $W_3^\xi(x) \big|_{x_3=0} = W_3^\xi(x_1, x_2)$ . Это дает:

$$W_3^\xi(x) = W_3^\xi(x_1, x_2) \cdot \exp\left(-\int_{z_0}^z G(x_1, x_2, \psi) d\psi\right).$$

Развитие подобного рода технологий открывает большое поле для деятельности. Приведенные соотношения и их обобщения могут быть использованы для интерпретации результатов эвристических трансформаций в терминах параметров нарушения свойств симметрии изучаемой среды. Действительно, выполнив процедуру построения пространственного распределения трансформанты поля, можно далее воспользоваться уравнениями поля с локально нарушенной симметрией и прямым вычислением, найти распределение калибровочного поля, обеспечивающего выполнимость уравнения для найденной трансформанты. Этот прием позволит перейти от пространственного распределения трансформанты поля к пространственному распределению параметра среды – нарушению симметрии, характеризующего меру неоднородности среды.

#### Литература

1. Рихтмаер Р. Принципы современной математической физики. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – С. 246-249.

Учебное издание

Кобрунов Александр Иванович

**Математические основы теории интерпретации геофизических данных**

Учебное пособие

Редактор Коптяева К.В.  
Технический редактор Коровкина Л.П.

План 2007 г., позиция 29.

Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.  
Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.  
Усл. печ. л. 17,0. Уч.- изд. л. 16,3..

Ухтинский государственный технический университет.  
169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13.