

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. БЕЛЯКОВ, М.А. КАРАСЕВ, В.Л. ТРУШКО

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 531-3
ББК 22.251(26.21)
Б43

Научный редактор: д-р техн. наук *А.Г. Протосеня (Санкт-Петербургский горный университет)*

Рецензенты: д-р техн. наук *А.Н. Панкратенко (ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»);*
канд. техн. наук, главный инженер *А.Б. Максимов (ООО «Геотехническое бюро»)*

Беляков Н.А.

Б43. Механика сплошной среды. Учебное пособие / Н.А. Беляков, М.А. Карасев, В.Л. Трушко; Санкт-Петербургский горный университет. СПб, 2019. 114 с.

ISBN 978-5-00105-420-7

В первой части учебного пособия рассмотрены основные положения теории напряжений и теории деформаций, приведены основные уравнения механики твердого деформируемого тела и кратко рассмотрены основные методы аналитического решения задачи механики сплошной среды в рамках теории упругости в пространственной постановке.

Вторая часть учебного пособия посвящена прикладным задачам геомеханики, решаемым методами механики сплошной среды, рассмотрены основные геомеханические модели массивов горных пород, включающие упругую, вязкоупругую, жесткопластическую и упругопластическую модели, приведено их теоретическое обобщение, практическая значимость и области применения.

Предназначено для студентов направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело» всех профилей подготовки.

УДК 531-3
ББК 22.251(26.21)

ISBN 978-5-00105-420-7

© Коллектив авторов, 2019
© Санкт-Петербургский
горный университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Целью учебного пособия является изложение в доступной форме основных положений механики сплошной среды, а именно ее раздела механики твердого деформируемого тела, для формирования у студентов базового уровня знаний о механических процессах, происходящих в твердых тела при внешних физических воздействиях.

Физика - область естествознания: наука о простейших и вместе с тем наиболее общих законах природы, о материи, её структуре и движении.

Одним из важнейших разделов физики является механика - наука, изучающая движение материальных тел и взаимодействие между ними. Внутри механики существует собственное разделение на более узконаправленные механические дисциплины (рис. 1.1).

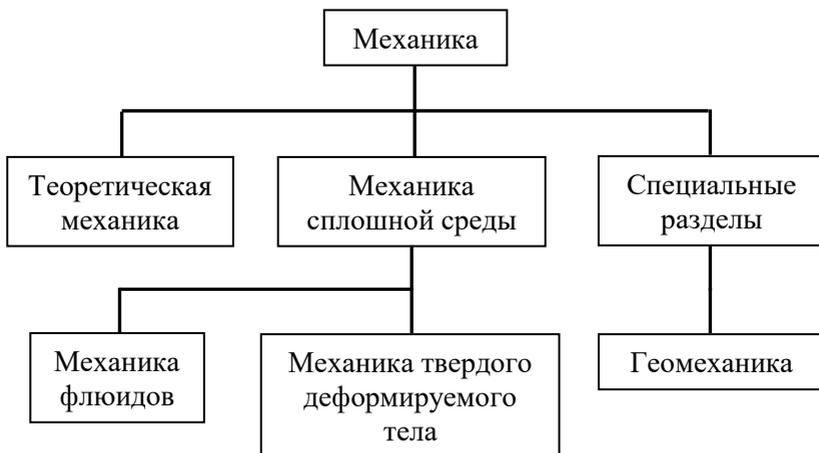


Рис. 1.1. Разделы механики

Теоретическая механика – это раздел механики, изучающий законы движения материальных точек. Материальная точка - простейшая физическая модель в механике — обладающее массой тело, размерами, формой, вращением и

внутренней структурой которого можно пренебречь в условиях исследуемой задачи.

Понятие «модель» и подходы, основанные на моделировании, являются весьма широко распространёнными в рамках науки вообще и в естественных науках, к которым относится механика, в частности. В этом случае для изучения некоторых сложных процессов и явлений, происходящих в некотором объекте, строят его мысленное отображение на некоторый более простой объект (модель) и изучают процессы и явления в нем (т.е. выполняют идеализацию), а затем полученную на более простом объекте (модели) информацию экстраполируют на исходный объект, говоря о том, что информация, полученная на модели с определенной достоверностью описывает и прогнозирует явления и процессы, происходящие в рамках изучаемого объекта.

В связи с этим модель материальной точки является наиболее простой моделью материального тела, используемой в рамках механики, а теоретическая механика является наиболее базовым разделом механики, т.к. исследует законы движения материальных точек без привязки к процессам, которые происходят в материальных телах, которые описываются моделью материальной точки.

Механика сплошной среды (МСС) - раздел механики, изучающий движение газообразных, жидких и твердых деформируемых тел, а также силовые взаимодействия внутри таких тел. В механике сплошной среды можно четко выделить раздел, изучающий движение жидкостей и газов, т.е. флюидов (гидромеханика, гидравлика, аэрология), а также раздел, изучающий движение твердых деформируемых тел. Последний раздел как раз и рассматривается в данном курсе.

Деформируемое тело – это материальное тело, способное к деформации, т.е. тело, способное изменить свою форму, внутреннюю структуру, объём, площадь поверхности под действием внешних сил. Относительная позиция любых составных точек деформируемого тела может изменяться.

В рамках МСС используется гипотеза о сплошности или континуальности среды, согласно которой распределение

характеристик среды является непрерывным в пространстве. Это значит, что любые физические процессы в сплошной среде можно рассматривать как изменение векторных или скалярных полей.

В связи с введением гипотезы о континуальности среды изучение поведения некоторого твердого деформируемого тела, находящегося под действием системы внешних сил, можно свести к исследованию поведения совокупности всех точек, расположенных в пределах его объема. Таким образом, любой параметр всего тела будет однозначно определяться как функция от координат точек тела в пределах его исследуемого объема.

Поведение тела в точке в рамках МСС исследуется с использованием элементарного объема. Элементарный объем – это такой объем, выделенный в окрестности исследуемой точки, который достаточно мал по сравнению с размерами всего исследуемого твердого деформируемого тела, чтобы им можно было пренебречь и при необходимости рассматривать его параметры как параметры материальной точки, но в то же время достаточно велик, чтобы содержать в себе количество материала тела, которое в механическом плане ведет себя так же как и все тело при внешнем физическом воздействии.

В рамках настоящего курса механика сплошной среды преимущественно рассматривается как инструмент для решения задач прогноза напряженно-деформированного состояния (НДС) горного массива. В связи с этим, отметим, что применительно к массивам горных пород гипотеза о континуальности среды приобретает в первую очередь значение предположения о том, что в пределах исследуемого объема отсутствуют естественные трещины и поры или, по меньшей мере, они не оказывают значительного влияния на поведение исследуемого массива (тогда говорят о квазисплошности или квазиконтинуальности).

Геомеханика - наука о физико-механических свойствах пород и массивов и о явлениях, происходящих в них в результате выполнения горных работ. Под горными работами здесь понимаются любые операции, которые приводят к изменению естественного состояния горного массива.

В первых разделах настоящего пособия представлены соотношения и уравнения механики сплошной среды преимущественно в рамках теории упругости для пространственного, трёхмерного тела, все три основных линейных размера которого сопоставимы между собой. При изложении материала в учебном пособии используется прямоугольная (декартова) система координат x, y, z , если не оговаривается иное.

Теория упругости – раздел механики твёрдого деформируемого тела, рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. В механику твёрдого деформируемого тела входят также следующие дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика, теория пластичности, теория ползучести и др.

Сформулируем постановку задачи механики сплошной среды в рамках теории упругости, а также основные положения и допущения, на которых она базируется.

Рассмотрим тело заданной формы, материал которого имеет известные физико-механические характеристики. На тело действуют заданные внешние нагрузки и наложены связи, т. е. на поверхности заданы геометрические граничные условия.

Требуется определить перемещения, деформации и напряжения, возникающие в упругом теле. Эти величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние (НДС) тела в каждой его точке, называются параметрами НДС, и являются основными неизвестными при решении задачи теории упругости.

Классическая теория упругости основывается на идеально-упругой модели деформируемого твёрдого тела. Такое тело наделяется наиболее простой линейной зависимостью между напряжением и деформацией.

Эта модель тела наделяется следующими свойствами:

1. Материал тела считается идеально упругим, т. е. тело способно возвращаться к первоначальной форме и объёму после удаления нагрузки, вызвавшей деформацию.

2. Материал тела представляет собой сплошную среду, т.е. сплошным образом, непрерывно, заполняет объём тела без пустот, пор и трещин. По этому допущению тело, непрерывное до деформации, остаётся непрерывным и после деформации. Таким образом, в механике сплошной среды не учитывается кристаллическая, дискретная, т. е. атомистическая, структура вещества.

3. Материал тела считается однородным, т. е. во всём объёме тела свойства материала одинаковы.

4. Материал тела считается изотропным, т. е. все упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям. В противном случае материал называется анизотропным (слоистые горные породы, дерево, фанера, композиционные материалы и пр.).

С учётом этих свойств, под классической теорией упругости понимается только линейная теория упругости однородного изотропного тела.

Из допущений сплошности и однородности следует, что параметры НДС в теле, нагруженном внешними силами, представляются непрерывно распределёнными по объёму тела. Другими словами, искомые перемещения, деформации и напряжения считаются непрерывными функциями координат точки тела.

Поэтому при решении задачи теории упругости для описания параметров НДС тела можно использовать аппарат математического анализа и теории дифференциальных уравнений, которые оперируют с функциями.

В классической теории упругости принимаются следующие условия:

- перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами;
- деформации (линейные и угловые) тела малы по сравнению с единицей.

Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет при расчёте НДС применять принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). При действии на тело нескольких внешних сил этот принцип даёт возможность подсчитать воздействие каждой

силы в отдельности, с последующим сложением полученных результатов.

В теории упругости принимается принцип локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок, или принцип Сен-Венана. Согласно этому принципу, если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, которые быстро убывают по мере удаления от места приложения нагрузки. Этот принцип можно выразить иначе: в точках твёрдого тела, достаточно удалённых от места приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок. Так, на основании принципа Сен-Венана, нагрузку, распределённую на небольшой части поверхности тела, можно заменять равной по величине сосредоточенной силой и наоборот.

1. Теории напряжений и деформаций

1.1 Силы, напряжения и напряженное состояние

Внешние силы, которые действуют на твёрдое тело, можно разделить на две группы: поверхностные и массовые (или объёмные).

Поверхностные силы являются результатом взаимодействия двух тел. Примером поверхностных сил являются давление одного тела на другое при соприкосновении, давление здания на грунт, давление газа или жидкости на стенки сосуда и т. д.

Поверхностные силы характеризуются интенсивностью q_v , т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Интенсивность поверхностной силы также называется давлением. Размерность давления выражается в Н/м^2 (или Па). Проекции (компоненты) давления q_v на оси координат x , y , z обозначаются X_v , Y_v , Z_v , соответственно. Здесь v – внешняя нормаль к поверхности тела, к которой приложена эта сила.

Массовые силы распределены по всей массе тела. Примером массовых сил являются сила тяжести, магнитные силы, силы инерции для тела, находящегося в движении, и т. д. Массовые силы, отнесённые к единице объёма (т.е. интенсивности массовых сил, называемые объёмными силами), также раскладывают на три проекции: X , Y , Z . Их размерность – Н/м^3 . Действие температуры при неравномерном нагреве тела с использованием метода устранения деформации при решении задачи также сводится к поверхностным и массовым силам.

Проекция интенсивности внешней нагрузки считается положительной, если её направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси. Поверхностные и массовые силы, так же как и параметры НДС, являются функциями координат точки.

В твёрдом теле всегда имеют место внутренние силы, которые выражают взаимодействие молекул между собой и обеспечивают существование твёрдого тела, его прочность. При

действии на тело внешних сил оно деформируется. Вследствие этого возникают дополнительные внутренние силы.

Для исследования возникающих в теле внутренних сил воспользуемся методом сечений, который применим к находящемуся в равновесии телу, нагруженному внешними силами (рис. 1.2).

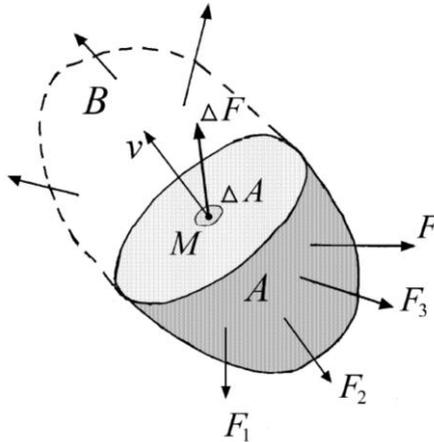


Рис.1.2. Плоское сечение твердого деформируемого тела

Мысленно рас截ём тело произвольной плоскостью на две части A и B и отбросим часть B . Оставшаяся часть A также находится в равновесии под воздействием приложенных внешних сил F_1, F_2, F_3, \dots и системы внутренних сил, распределённых по сечению и представляющих собой действие удалённой части B на часть A .

Выделим в плоскости сечения вокруг точки M элементарную площадку ΔA , весьма малую, по сравнению с размерами сечения, но довольно большую, по сравнению с расстояниями между отдельными молекулами тела.

Обозначим через ΔF главный вектор внутренних сил, пересекающих площадку ΔA . Тогда напряжением внутренних сил, или полным напряжением, p_ν в точке M тела на лежащей в плоскости сечения площадке ΔA с нормалью ν называется предел отношения:

$$p_v = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

Аналогично можно определить полные напряжения в остальных точках этого и других сечений, проведённых через тело.

Полное напряжение является вектором: оно характеризуется величиной и направлением. В общем случае вектор полного напряжения наклонён к площадке ΔA , на которой он действует, и не совпадает с направлением нормали v к площадке. Поэтому вместо полного напряжения p_v удобнее рассматривать его составляющие в сечениях, параллельных координатным плоскостям.

Для этого в окрестности точки O тела, нагруженного внешними силами, вырежем элементарный параллелепипед (рис. 1.3), рёбра dx , dy , dz которого параллельны координатным осям x , y , z , а грани – параллельны координатным плоскостям xOy , xOz , yOz . На гранях этого параллелепипеда действуют полные напряжения, которые можно разложить на нормальную (нормальное напряжение) и касательную (касательное напряжение) составляющие к грани. В свою очередь, касательное напряжение можно разложить на две составляющие, параллельные координатным осям. В результате на каждой грани параллелепипеда действует по три напряжения – одно нормальное и два касательных. Напряжения обозначаются греческими буквами: σ (читается «сигма») – нормальные напряжения, τ (читается «тау») – касательные напряжения.

Первый индекс в обозначении напряжений указывает ось, параллельно которой направлено напряжение, а второй индекс – ось, параллельно которой направлена внешняя нормаль к грани параллелепипеда, на которой действует напряжение. Если сказать короче, то первый индекс указывает направление напряжения, а второй – площадку, на которой оно действует.

В общих разделах механики принято следующее правило знаков для напряжений: если внешняя нормаль к площадке имеет положительное (отрицательное) направление, то напряжение положительно в случае, если его направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением

соответствующей координатной оси. В соответствии с приведённым правилом знаков положительные нормальные напряжения являются растягивающими, а отрицательные – сжимающими. На рис. 1.3 показаны положительные направления напряжений. Напряжения, так же как и интенсивность поверхностной нагрузки, выражаются в Н/м^2 (Па).

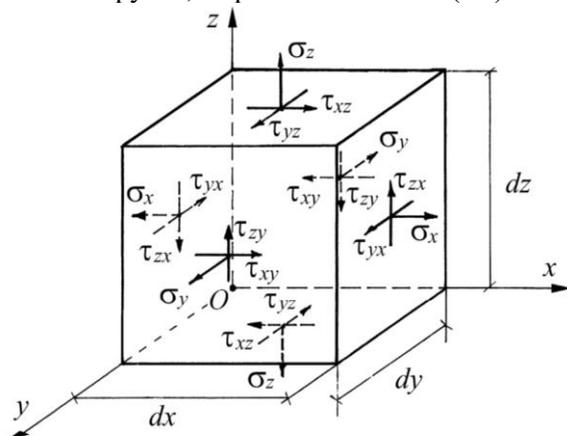


Рис. 1.3. Разложение напряжений на гранях элементарного объема

В отличие от общих разделов механики в геомеханике правило знаков напряжений полностью противоположно. Это приводит к тому, что положительными нормальными напряжениями считаются сжимающие напряжения, а отрицательными – растягивающие. Это обусловлено тем, что при решении задач геомеханики в горном массиве еще до проведения горных работ уже сформировалось естественное напряженное состояние, которое по меньшей мере обусловлено собственным весом горных пород. Это естественное напряженное состояние имеет вид объемного неравнокомпонентного сжатия и именно поэтому сжимающие нормальные напряжения считаются положительными.

В настоящем пособии в разделах 1, 2 и 3 будет использоваться общемеханическое правило знаков напряжений, а в остальных разделах – геомеханическое.

Напряжённое состояние в точке твёрдого деформируемого тела – это совокупность полных напряжений, действующих во всех площадках, проходящих через точку твёрдого деформируемого тела.

Совокупность напряжений, действующих на трёх взаимно перпендикулярных гранях параллелепипеда, – три нормальных напряжения ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) и шесть касательных напряжений ($\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{yx}$) – образует так называемый тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Тензор напряжений однозначно характеризует напряжённое состояние в рассматриваемой точке O твёрдого тела.

1.2 Напряжения на произвольных наклонных площадках.

Условия на поверхности

Для исследования напряжённого состояния во всех точках тела необходимо уметь находить напряжения на произвольной площадке, наклонённой к осям координат.

Внутри нагруженного тела выделим в виде тетраэдра $Oabc$ элементарный объём (рис. 1.4).

Три взаимно перпендикулярные грани Oab, Obc, Oca тетраэдра параллельны координатным плоскостям, а четвёртая грань abc представляет собой наклонную площадку.

Предположим, что на трёх координатных гранях тетраэдра известны все компоненты тензора напряжений. Необходимо найти компоненты X_v, Y_v, Z_v полного напряжения p_v на любой наклонной площадке с нормалью v , направляющие косинусы которой равны:

$$l = \cos(v, x); m = \cos(v, y); n = \cos(v, z). \quad (1.3)$$

Обозначим площадь грани abc через ΔA , тогда площади остальных граней тетраэдра определяются как проекции площади грани abc на соответствующие координатные плоскости:

$$S_{Obc} = \Delta A \cdot l; S_{Oca} = \Delta A \cdot m; S_{Oab} = \Delta A \cdot n. \quad (1.4)$$

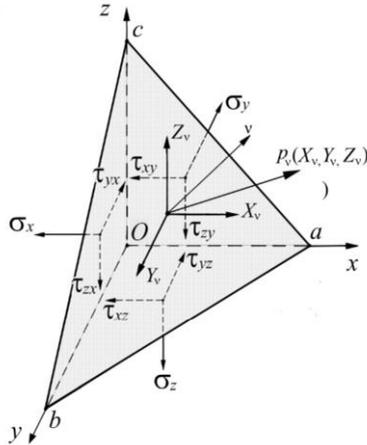


Рис. 1.4. Расчетная схема к определению полных напряжений на произвольной наклонной площадке

На рассматриваемый тетраэдр действуют следующие нагрузки:

- на координатных площадках – шесть компонент напряжения: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$;
- на площадке abc – три компоненты полного напряжения: X_v, Y_v, Z_v . Действие объёмных сил не учитывается.

Составим уравнения статики для тетраэдра $Oabc$. Проецируя все силы на оси координат, получаем три уравнения равновесия элементарного тетраэдра:

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n. \\ Z_v = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) позволяют определить компоненты полного напряжения p_v на любой наклонной площадке с нормалью v с помощью шести компонент тензора напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

Если наклонная площадка abc совпадает с поверхностью тела, то компоненты X_v, Y_v, Z_v полного напряжения p_v являются компонентами давления q_v от внешних сил, действующих на

поверхности тела. Тогда уравнения (1.5) называются условиями на поверхности тела, так как в этом случае они связывают внешние силы с внутренними напряжениями.

1.3 Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений. Шаровой тензор и девиатор напряжений

Воспользуемся уравнениями (1.5) для вычисления напряжений на любой наклонной площадке в любой точке внутри тела, если известны шесть компонент (1.4) тензора напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

Полное напряжение на наклонной площадке определяется как геометрическая сумма компонент этого напряжения:

$$p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}. \quad (1.6)$$

Разложим полное напряжение p_v на составляющую σ_v по нормали к наклонной площадке (нормальное напряжение) и составляющую τ_v в плоскости наклонной площадки (касательное напряжение).

Нормальное напряжение σ_v равно сумме проекций компонент полного напряжения X_v, Y_v, Z_v на направление нормали v к наклонной площадке (рис. 1.4):

$$\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n. \quad (1.7)$$

Подставляя значения компонент X_v, Y_v, Z_v из (1.5), получаем:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) позволяет определять нормальное напряжение на любой наклонной площадке с помощью шести компонент тензора напряжений на трёх площадках, параллельных координатным плоскостям.

Касательное напряжение на наклонной площадке определяется как геометрическая разность полного и нормального напряжений:

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (1.9)$$

Известно, что в каждой точке нагруженного тела существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} равны нулю. Эти площадки называются главными, а направления нормалей к этим площадкам называются главными направлениями (или главными осями) тензора напряжений.

На главных площадках действуют главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 . Если главные напряжения различны, то имеется только три главных направления. Если два главных напряжения равны (например, $\sigma_2 = \sigma_3$), напряжённое состояние характеризуется осевой симметрией и тогда любая площадка, содержащая ось 1, – главная. Если все главные напряжения равны ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), напряжённое состояние характеризуется центральной симметрией и тогда любая площадка в данной точке является главной (случай гидростатического напряжённого состояния).

Из условия $\tau_v = 0$, с учётом (1.5), опуская промежуточные выкладки, приходим к кубическому уравнению относительно искомого главного напряжения σ :

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0. \quad (1.10)$$

Решение этого уравнения в рассматриваемом случае даёт три вещественных корня (три главных напряжения): σ_1 , σ_2 , σ_3 . Наибольший по абсолютной величине корень обозначается через σ_1 , а наименьший – через σ_3 . Поэтому $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Величины главных напряжений не зависят от положения координатных осей x , y , z , т. е. от выбора системы координат. Поэтому коэффициенты уравнения (1.10):

$$\left. \begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_{2\sigma} &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_{3\sigma} &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

должны сохранять постоянные значения при преобразовании осей координат, т. е. они являются инвариантами. Коэффициенты $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$ называются, соответственно, первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений.

Таким образом, инварианты тензора напряжений – это характеристики напряжённого состояния, не зависящие от выбора системы координат.

Величина:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1.12)$$

называется средним нормальным напряжением.

Инварианты тензора напряжений можно выразить через главные напряжения, для чего в формулах (1.11) касательные напряжения следует положить равными нулю, а нормальным напряжениям дать индексы 1, 2 и 3 главных напряжений. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_{2\sigma} &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_{3\sigma} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Поэтому контролем правильности решения кубического уравнения (1.10) может служить равенство значений инвариантов $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$, полученных по формулам (1.11) и (1.13).

В теории напряжений инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряжённого состояния в точке. Компоненты же напряжений, связанные с осями координат, являются вспомогательными характеристиками напряжённого состояния.

В сечении, делящем пополам углы между главными площадками, действуют главные касательные напряжения τ_1 , τ_2 , τ_3 :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (1.14)$$

Максимальным касательным напряжением называют величину:

$$\tau_{max} = \max(|\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3|). \quad (1.15)$$

Для принятой выше нумерации осей наибольшее касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главного напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.16)$$

Это напряжение действует на площадке, которая делит пополам угол между площадками с наибольшим и наименьшим главными напряжениями.

Так как тело по-разному сопротивляется равномерному всестороннему давлению и касательным напряжениям, то удобно представить тензор напряжений в виде суммы:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma}, \quad (1.17)$$

где $T_{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$ – шаровой тензор напряжений,

соответствующий среднему напряжению в точке;

$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}$ – тензор, характеризующий

напряжения сдвига в данной точке и называемый девиатором напряжений.

1.4 Перемещения и деформации в точке тела. Тензор деформаций. Связь между перемещениями и деформациями (формулы Коши)

Если упругое тело закрепить так, чтобы оно не могло перемещаться как абсолютно твёрдое тело, и приложить внешние нагрузки, то перемещения любой его точки будут вызываться только деформациями этого тела.

Рассмотрим точку $M(x, y, z)$. После деформации тела (рис. 1.5) точка M переместится в новое положение $M'(x', y', z')$. Обозначим три компоненты (проекции) вектора перемещения MM' на оси координат x, y, z через u, v, w , соответственно.

Будем считать, что перемещения тела, по сравнению с его линейными размерами, являются весьма малыми величинами, и, в силу сплошности тела, непрерывно изменяющимися по его объёму. Таким образом, компоненты вектора перемещения являются функциями координат точки:

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z). \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (1.18)$$

Разница в перемещениях в различных точках тела вызывает его деформацию. Деформации обозначаются

греческими буквами ε (читается «эпсилон») и γ (читается «гамма»).

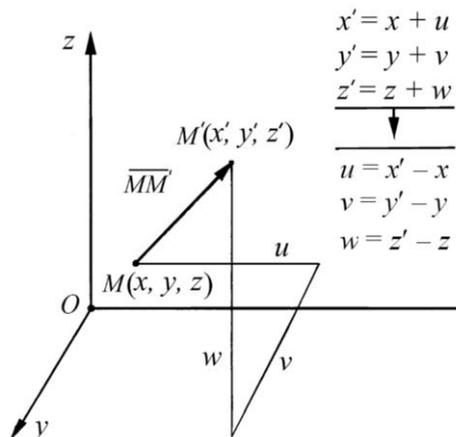


Рис. 1.5. Расчетная схема к определению параметров перемещений точки твердого деформируемого тела

Рассмотрим элементарный параллелепипед с рёбрами dx , dy , dz , вырезанный в окрестности точки P упругого тела до его деформации (рис. 1.6).

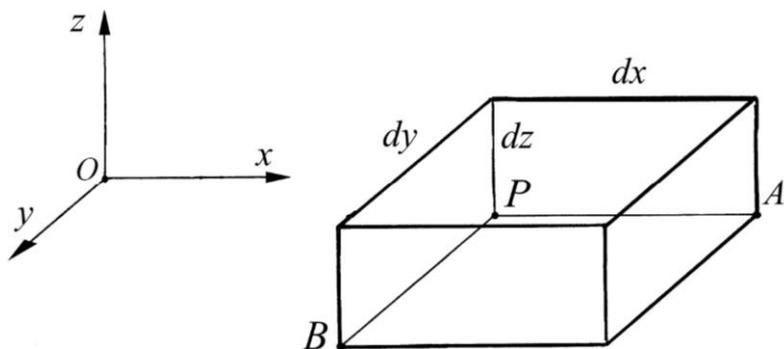


Рис. 1.6. Элементарный параллелепипед

Если тело подвергается деформации и величины u , v , w являются компонентами вектора перемещения точки P , то перемещение в направлении оси x соседней точки A ,

расположенной на оси x , равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, ввиду возрастания функции перемещения u на величину $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ с увеличением координаты x на расстояние dx . Увеличение длины ребра PA , т.е. его абсолютное удлинение, вызванное деформацией, равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Тогда линейная деформация (относительное удлинение) в точке P в направлении x представляет собой отношение абсолютного удлинения ребра PA к его исходной длине dx :

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.19)$$

Таким же путём можно показать, что относительные удлинения в точке P в направлениях y и z определяются производными $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Рассмотрим изменение угла между элементами PA и PB при деформации параллелепипеда (рис. 1.7).

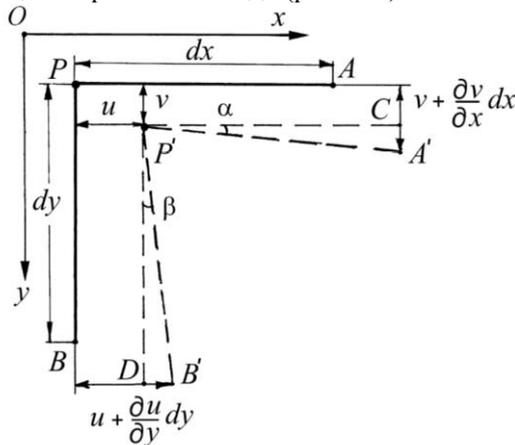


Рис. 1.7. Расчетная схема для определения угловых деформаций

Пусть точка P получила перемещения u и v в направлении осей x и y , соответственно. Тогда положение этой точки будет P' .

Перемещение точки A в направлении y будет $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, а перемещение точки B в направлении x — $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. В итоге новое

направление $P'A'$ ребра PA образует с начальным направлением малый угол α . Определим его.

Расстояние $A'C = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx$. Из треугольника $P'SA'$ находим $tg\alpha = \frac{A'C}{P'C} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Ограничиваясь рассмотрением малых деформаций, можно полагать, что $\alpha \approx tg\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$. Точно так же направление $P'B'$ повернуто к направлению PB на малый угол β . Аналогично рассуждая, получаем $\beta \approx \frac{\partial u}{\partial y}$.

Отсюда видно, что первоначальный прямой угол APB между двумя рёбрами PA и PB уменьшился на величину $\alpha + \beta$. Эта величина представляет собой угловую деформацию (относительный сдвиг) между направлениями x , y :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.20)$$

Таким же способом можно получить угловые деформации в плоскостях y , z и x , z . В пределе, когда рёбра параллелепипеда стремятся к нулю, получаем формулы для шести функций деформаций в следующих точках:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Полученные уравнения (1.21) устанавливают связь между функциями перемещений и деформаций. Они называются геометрическими соотношениями или формулами Коши и входят в число общих уравнений механики твердого деформируемого тела.

Сформулируем определение понятия «деформированное состояние в точке» как совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведённых через данную точку. Тогда тензор деформаций – это совокупность компонент деформации бесконечно малого объёма (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Тензор напряжения описывает деформированное состояние в данной точке твёрдого тела.

Относительные удлинения характеризуют изменение длины рёбер параллелепипеда, вырезанного из тела вокруг точки. Индексы указывают направления деформации. Относительные сдвиги характеризуют изменение формы параллелепипеда за счёт искажения его прямых углов. Индексы указывают, в какой координатной плоскости появляется угловая деформация параллелепипеда.

Относительно знаков деформаций в общих разделах механики существует следующее правило: положительным линейным деформациям ε_x , ε_y , ε_z соответствуют удлинения вдоль осей координат, отрицательным – укорочения; положительным угловым деформациям γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} соответствуют уменьшения углов между положительными направлениями осей; отрицательным – увеличения тех же углов.

В геомеханике принято использовать обратное правило знаков для деформаций, таким образом положительными линейными деформациями считаются деформации укорочения, а отрицательными – удлинения.

1.5 Потенциальная энергия деформации. Полная потенциальная энергия системы

Под действием внешних сил твердое деформируемое тело испытывает деформацию, при которой эти силы совершают работу. На основании закона сохранения энергии эта работа

превращается в потенциальную энергию, которая в последующем при удалении внешних сил расходуется на восстановление первоначальной (т. е. недеформированной) формы тела при условии, что это твердое деформируемое тело является абсолютно упругим.

Энергию, накапливаемую при деформации упругого тела в единичном объёме материала, выделенном около данной точки, называют удельной потенциальной энергией деформации (упругим потенциалом) в окрестности рассматриваемой точки.

Для подсчёта удельной потенциальной энергии необходимо составить сумму произведений соответствующих компонент тензоров напряжений и деформаций. Половинное значение этой суммы и составит искомую удельную энергию деформации:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (1.23)$$

Это выражение носит название формулы Клапейрона. Половинное значение берётся потому, что напряжения, вследствие зависимости от деформаций, возникают не внезапно, а растут по мере их увеличения. Это положение характерно для статического процесса нагружения.

Потенциальная энергия деформации U , накапливаемая во всём упругом теле в процессе его деформирования, подсчитывается суммированием удельной потенциальной энергии деформации по всему объёму тела, т. е. интегрированием по объёму V :

$$U = \iiint_V W dV = \iiint_V W dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (1.24)$$

Внешние массовые и поверхностные силы, соответственно, совершают работу на вызванных ими перемещениях:

$$\begin{aligned} A_1 &= \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV; \\ A_2 &= \iint_{S_\sigma} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS_\sigma. \end{aligned} \quad (1.25)$$

где S_0 – площадь поверхности тела, на которой задана поверхностная нагрузка.

Введем понятие, имеющее важное значение в механике деформируемого твёрдого тела, – функционал полной потенциальной энергии \mathcal{E} деформированного тела и действующей на него нагрузки. Выражение полной потенциальной энергии записывается следующим образом:

$$\mathcal{E} = U - A_1 - A_2. \quad (1.26)$$

Это выражение широко используется при решении задач теории упругости, пластичности и ползучести вариационными методами (например, методом конечных элементов).

1.6 Контрольные вопросы

1. Что называется полным напряжением в точке твердого деформируемого тела?
2. Что называется напряженным состоянием в точке твердого деформируемого тела?
3. Что такое тензор напряжений и для чего он используется в теории напряжений?
4. Докажите, что тензор напряжений однозначно определяет напряженное состояние в точке твердого деформируемого тела.
5. Что называют главными напряжениями и как их определить из произвольного тензора напряжений?
6. Для чего в механике сплошной среды выполняется разложение тензора напряжений на шаровой тензор напряжений и девиатор напряжений?
7. Что такое деформация и каковы основные виды деформации?
8. В чем заключается физический смысл геометрических уравнений Коши?
9. Как связаны между собой удельная потенциальная энергия деформации в точке тела и потенциальная энергия деформации всего твердого деформируемого тела?

2. Основные уравнения механики твердого деформируемого тела и пространственная задача механики сплошной среды

Уравнения механики твердого деформируемого тела направлены на вывод разрешающей системы дифференциальных уравнений задачи механики сплошной среды. Эта задача заключается в необходимости определения перемещений, деформаций и напряжений как функций от координат точек исследуемого тела при действии на него системы внешних сил.

Всю совокупность уравнений механики твердого деформируемого тела в рамках теории упругости можно разделить на следующие группы:

1. Статические уравнения: дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

2. Геометрические соотношения (уравнения Коши).

3. Уравнения неразрывности деформаций (тождественные соотношения Сен-Венана).

4. Краевые условия.

5. Физические уравнения.

Первые четыре группы уравнений выводятся только исходя из гипотезы континуальности среды. Последняя пятая группа (физические уравнения) содержит в себе механическую природу среды, определяя, по сути, её математическую модель.

Геометрические соотношения (уравнения Коши) для условий малости угловых деформаций были выведены ранее и отражены в уравнениях (1.21).

Краевые условия задаются либо кинематически, т.е. в виде принудительных перемещений в отдельных точках тела (в том числе в виде запрета перемещений), либо статически, т.е. в виде поверхностных сил, распределенных по всей или по части поверхности твердого деформируемого тела. Для второго случая они связываются с компонентами напряженного состояния тела согласно выведенным ранее уравнениям (1.5).

2.1 Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

Вьясним, каким условиям должны быть подчинены напряжения на гранях элементарного параллелепипеда, чтобы каждый элемент тела в своём взаимодействии с соседними элементами был в равновесии, а следовательно было в равновесии и всё тело.

Ввиду бесконечной малости элементарного параллелепипеда принято, что напряжения во всём его объёме остаются неизменяемыми (однородное напряжённое состояние). В действительности компоненты тензора напряжений на параллельных гранях, отстоящих друг от друга на бесконечно малом расстоянии, отличаются одно от другого на бесконечно малую величину. Таким образом, как бы ни были близки грани элементарного объёма, имеет место приращение напряжений, пропорциональное расстоянию между гранями и равное частному дифференциалу этого напряжения. Поэтому на рис. 2.1 изображено уточнённое распределение напряжений на гранях параллелепипеда.

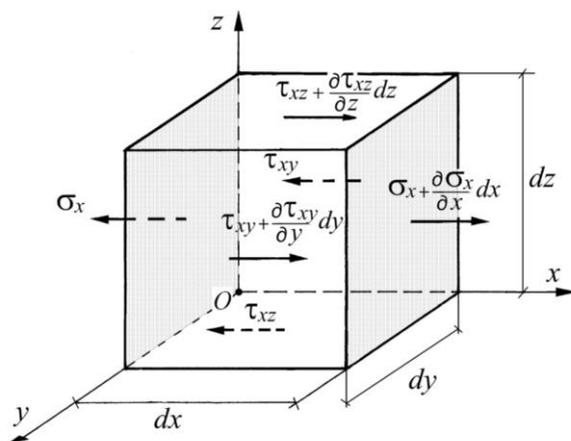


Рис. 2.1. Компоненты тензора напряжений, параллельные оси x

Рассмотрим напряжения, параллельные оси x : σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} . Если на левой грани элемента с координатой $x=0$ принять

напряжение σ_x , то на правой грани, имеющей координату dx , функция σ_x получит приращение $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, равное частному дифференциалу этой функции по аргументу x . В итоге на правой грани параллелепипеда будет напряжение $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$.

Аналогично рассуждая, получим выражения для касательных напряжений: $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy$ и $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz$, а также для напряжений, параллельных осям y и z .

Кроме напряжений, на параллелепипед действуют массовые силы, компоненты которых на оси координат будут следующие:

$$X dx dy dz; Y dx dy dz; Z dx dy dz. \quad (2.1)$$

Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций сил на оси координат и три уравнения моментов этих сил относительно координатных осей.

При выводе уравнений равновесия проекций сил элементарные силы на поверхностях граней параллелепипеда получаем перемножением напряжений на площади граней. В итоге, после приведения подобных членов и деления на объём $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, получаем три дифференциальных уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0. \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Полученные три дифференциальных уравнения равновесия называются уравнениями Навье.

Если для параллелепипеда аналогично расписать три уравнения статики для моментов, то получим соотношения закона парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2.2)$$

Согласно этому закону по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательных

напряжений, перпендикулярные линиям пересечения этих площадок, равны между собой. Следует отметить, что следствием закона является симметрия тензора напряжений относительно главной диагонали.

Таким образом, вследствие парности касательных напряжений, вместо девяти неизвестных компонент тензора напряжений, которые характеризуют напряжённое состояние в точке тела и являются функциями координат этой точки, остаётся только шесть.

Для отыскания шести неизвестных функций напряжений имеются только три дифференциальных уравнения равновесия (2.1). Отсюда следует важный вывод: так как число неизвестных напряжений превышает число уравнений равновесия Навье, то задача механики сплошной среды в рамках теории упругости оказывается статически неопределимой относительно компонент напряжений. Недостающие уравнения можно получить, лишь изучая деформации и учитывая физические свойства тела.

2.2 Уравнения неразрывности деформаций (тождественные соотношения Сен-Венана)

Формулы Коши (1.21) связывают шесть компонент тензора деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ и три компоненты вектора перемещения – u, v, w . Если заданы три функции перемещения, то шесть компонент тензора деформаций определяются из формул Коши однозначно. Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть функций деформаций, то для определения трёх функций перемещений необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (1.21) в частных производных, что не всегда можно сделать однозначно. Поэтому между шестью компонентами тензора деформаций должны существовать определённые зависимости.

Для получения этих зависимостей, которые делятся на две группы, необходимо исключить перемещения u, v, w из формул Коши.

Продифференцируем дважды первые два уравнения (1.21) по y и по x , соответственно. Складывая их почленно, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

В механике сплошной среды при проведении выкладок часто пользуются круговой подстановкой букв x, y, z и u, v, w (рис. 2.2).

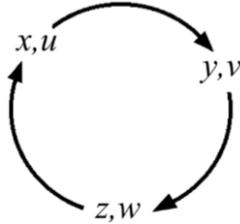


Рис. 2.2. Круговая перестановка обозначения функций

Сделаем такую подстановку в последнем уравнении, и получим два других равенства. Это приводит к первой группе, состоящей из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{cases} \quad (2.3)$$

Вторую тройку уравнений (1.21) дифференцируем следующим образом: первое уравнение – по z , второе – по x , а третье – по y . Затем сменим знак последнего уравнения на противоположный, сложим почленно все уравнения и получим уравнение:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.4)$$

Дифференцируя его по z , получим окончательный вариант первого уравнения. Делая в нём подстановку букв, получим два других равенства. В итоге приходим ко второй группе, состоящей из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \end{cases} \quad (2.5)$$

Полученные дифференциальные уравнения (2.3), (2.5) называются уравнениями неразрывности деформаций, или уравнениями Сен-Венана. Убедиться в верности этих уравнений можно просто: достаточно подставить в них формулы Коши (1.21).

Геометрическая интерпретация этих соотношений состоит в следующем. Представим себе твердое деформируемое тело разрезанным на малые параллелепипеды и дадим каждому из них деформацию, определяемую шестью компонентами. Если эти деформации не связаны между собою определёнными зависимостями, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное, но уже деформированное, твёрдое тело: в некоторых точках окажутся бесконечно малые разрывы. Уравнения (2.3) и (2.5) дают такие зависимости между компонентами деформации, при выполнении которых тело после деформации получается сплошным, или непрерывным.

2.3 Физические уравнения

Ранее в пособии были рассмотрены теории напряжений и деформаций, освещающие статическую сторону задачи и описывающие её с геометрической точки зрения. Эти две теории сами по себе не могут служить для решения физических задач теории упругости о деформациях до тех пор, пока между функциями напряжений и деформаций не будет установлена физическая зависимость.

Физическая зависимость функций напряжений и деформаций для каждого материала среды определяется на основании его лабораторных испытаний, выполняемых для построения экспериментальной диаграммы полного деформирования. На практике, как правило, пользуются

результатами аппроксимации таких диаграмм деформирования, которые можно записать в виде уравнений связи компонент тензоров напряжений и деформаций или связи приращений этих компонент.

Поскольку реальные среды обладают широким разнообразием в плане механического поведения, то существует множество моделей материалов. Таким образом, модель среды, по сути, определяет набор уравнений связи функций напряжений и деформаций (т.е. физических уравнений). В этих уравнениях зависимость напряжений и деформаций осуществляется через набор определенных констант, которые в целом принято называть деформационными свойствами средами.

К настоящему времени существует множество разных моделей сред, наиболее распространенными среди которых являются следующие группы: упругие модели (модели линейно-деформируемых тел), жесткопластические модели (модели сыпучих несвязных сред), упругопластические модели, реологические модели. Наиболее простой из всех является линейно упругая модель среды физические уравнения которой носят название обобщенного закона Гука. Рассмотрим этот закон в качестве примера физических уравнений среды.

Английский естествоиспытатель Роберт Гук в 1660 г. открыл закон, названный его именем. Этот закон устанавливает линейную зависимость между упругой деформацией твёрдого тела и приложенным напряжением от внешней нагрузки.

Различают закон Гука при растяжении-сжатии и при сдвиге. При растяжении-сжатии нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению, т. е.:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.6)$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости при растяжении-сжатии, или модулем Юнга.

При сдвиге касательное напряжение пропорционально угловой деформации:

$$\tau = G\gamma, \quad (2.7)$$

где G – модуль упругости при сдвиге.

Модули упругости E и G , которые определяются из опытов на стандартных образцах, характеризуют меру жёсткости материала и имеют размерность напряжения.

Из опытов по одноосному растяжению стержня установлен закон, связывающий относительные удлинения (укорочения) в продольном и поперечном направлениях:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu \varepsilon_x. \quad (2.8)$$

Коэффициент пропорциональности ν (читается «ню») называется коэффициентом Пуассона и представляет собой постоянную величину для каждого материала. Для различных материалов значения коэффициентов Пуассона находятся в пределах: $0 \leq \nu \leq 0,5$.

Между тремя упругими постоянными E , G , ν существует зависимость, следующая из закона Гука:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2.9)$$

Поэтому лишь две из этих трёх постоянных являются независимыми и должны быть найдены из опыта, третья постоянная определяется из формулы (2.9).

Чтобы установить зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений при объёмном напряжённом состоянии, выделим из тела элементарный параллелепипед и рассмотрим действие только нормальных напряжений σ_x , σ_y , σ_z .

Примем положение о том, что в упругом однородном изотропном теле нормальные напряжения не вызывают сдвигов, касательные напряжения не вызывают удлинений по направлению действия этих напряжений. На этом основании можем рассматривать отдельно действие нормальных и касательных напряжений.

Связь между относительными деформациями сдвига и касательными напряжениями, согласно закону Гука при сдвиге, можно представить независимо для каждой из трёх плоскостей параллелепипеда, параллельных координатным плоскостям.

На основании принципа независимости действия сил находим полные относительные удлинения рёбер параллелепипеда по направлениям трёх координатных осей как

сумму относительных удлинений этих рёбер от действия каждого нормального напряжения.

Тогда обобщённый закон Гука для упругого, однородного и изотропного твёрдого тела записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

При решении задач механики сплошной среды в рамках теории упругости часто бывает необходимо иметь выражения компонент тензора напряжений через компоненты тензора деформаций. Разрешая формулы (2.10) относительно напряжений, получим один из вариантов записи этих выражений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_z \\ \tau_{xy} = \gamma_{xy} G \\ \tau_{yz} = \gamma_{yz} G \\ \tau_{zx} = \gamma_{zx} G \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Здесь введены следующие обозначения: ε_V – относительная объёмная деформация:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (2.12)$$

$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коэффициент Ламэ.

Коэффициент λ , как и модули упругости E и G , характеризуют упругие свойства материала. Формулы (2.11) называют обратной формой закона Гука.

Таким образом, мы получили соотношения, которые выражают физические зависимости между компонентами тензора деформаций и тензора напряжений.

Представим выражение относительной объёмной деформации (2.12) через нормальные напряжения с помощью формул (2.10):

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.13)$$

В случае всестороннего гидростатического сжатия материала, когда напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$, имеем:

$$\varepsilon_V = -3(1 - 2\nu) \frac{\sigma}{E}. \quad (2.14)$$

Из полученной формулы следует, что коэффициент Пуассона ν не может быть больше 0,5. В противном случае происходит увеличение объёма тела при его сжатии.

2.4 Способы решения основных уравнений механики твёрдого деформируемого тела

Обозначенные ранее основные уравнения механики твёрдого деформируемого тела содержат 15 неизвестных функций:

- три компоненты вектора перемещения: u, v, w ;
- шесть компонент тензора напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$;
- шесть компонент тензора деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}$.

Все искомые неизвестные являются функциями координат x, y, z точки тела. Таким образом, в каждой точке нагруженного тела нас могут интересовать 15 параметров напряжённо-деформированного состояния.

Для отыскания этих функций мы имеем 15 уравнений:

- три дифференциальных уравнения равновесия (2.1);
- шесть формул Коши (1.21);
- шесть формул закона Гука (2.10), или (2.11).

Таким образом, с точки зрения математики, задача может быть решена. Это решение сводится к интегрированию перечисленных 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхности (1.5) и уравнений неразрывности деформаций (2.3) и (2.5).

Имея эти уравнения, можно приступить непосредственно к решению задачи механики сплошной среды о напряжениях, деформациях и перемещениях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних нагрузок. Приступая к решению задачи, следует выбрать функции, которые принимаются за основные неизвестные, подлежащие определению в первую очередь, и с помощью которых далее можно определить все остальные функции, характеризующие НДС нагруженного тела.

Решение указанных уравнений можно вести тремя способами:

1. Решение в перемещениях, когда за основные неизвестные принимаются три компоненты вектора перемещения: u, v, w .

2. Решение в напряжениях, когда за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

3. Решение в смешанной форме, когда за основные неизвестные принимаются некоторые функции перемещений и напряжений.

Следует отметить, что первые два способа решения основных уравнений более распространены, поэтому рассмотрим их подробнее.

2.5 Решение задачи в перемещениях

При решении задачи теории упругости в перемещениях за основные неизвестные принимаются три компоненты вектора перемещения (1.18).

Для их отыскания преобразуем дифференциальные уравнения равновесия Навье (2.1).

Рассмотрим первое уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (2.15)$$

Подставим выражения компонент тензора напряжений через компоненты тензора деформаций, используя соотношения закона Гука в форме (2.11):

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_x; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \gamma_{xy}G; \\ \tau_{xz} &= \gamma_{xz}G.\end{aligned}$$

Уравнение равновесия примет вид:

$$\lambda \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + 2G \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + G \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (2.17)$$

Затем в уравнении представим деформации через компоненты вектора перемещения (1.18) с помощью формул Коши (1.21):

$$\lambda \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (2.18)$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$\lambda \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + X = 0. \quad (2.19)$$

Выражение во вторых круглых скобках представляет собой относительную объёмную деформацию ε_V . Поэтому:

$$\lambda \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + X = 0. \quad (2.20)$$

Введём дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Этот оператор для некоторой функции f прописывает процедуру взятия второй частной производной по всем координатам и в прямоугольных координатах записывается следующим образом:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (2.21)$$

Тогда окончательно запишем:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0. \quad (2.22)$$

В итоге приходим к уравнениям равновесия:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0. \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

В таком варианте они называются уравнениями Ламе.

Полученные уравнения полностью отражают напряженно-деформированное состояние тела, так как содержат:

- 1) условия равновесия каждого элемента тела;
- 2) геометрические характеристики деформации: u , v , w ,

ε_V ;

3) физические характеристики материала: λ и G .

Аналогичным способом преобразуются условия на поверхности (1.5), которые содержат внешнюю нагрузку X_v , Y_v , Z_v .

В этом случае при проведении выкладок используются представления производных по направлению нормали к поверхности v от компонент вектора перемещения $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, которые расписываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \\ \frac{\partial v}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \\ \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \end{cases} \quad (2.24)$$

В итоге приходим к трём условиям на поверхности, записанным через функции перемещений:

$$\begin{cases} \lambda \varepsilon_v l + G \frac{\partial u}{\partial v} + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) = X_v \\ \lambda \varepsilon_v m + G \frac{\partial v}{\partial v} + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) = Y_v \\ \lambda \varepsilon_v n + G \frac{\partial w}{\partial v} + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) = Z_v \end{cases} \quad (2.25)$$

Таким образом, для каждого элемента имеем три дифференциальные уравнения равновесия относительно компонент вектора перемещения внутри тела (2.23) и три условия на его поверхности (2.25). Поэтому для отыскания трёх функций перемещений u , v , w необходимо проинтегрировать три уравнения Ламе и при этом удовлетворить условиям на поверхности. По найденным функциям перемещений из формул Коши (1.21) вычисляются компоненты тензора деформаций, а затем по формулам (2.11) закона Гука – компоненты тензора напряжений, т. е. напряжённо-деформированное состояние тела определено в каждой его точке.

2.6 Решение задачи в напряжениях

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжений (1.2).

Для определения шести функций напряжений трёх дифференциальных уравнений равновесия (2.1) недостаточно. Поэтому для решения задачи привлекаются шесть уравнений неразрывности деформаций (2.3) и (2.5). Эти уравнения с помощью формул закона Гука (2.10) и математических преобразований, приводятся к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial x^2} = 0 \\ (1 + \nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial y^2} = 0 \\ (1 + \nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial z^2} = 0 \\ (1 + \nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial x\partial y} = 0 \\ (1 + \nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial y\partial z} = 0 \\ (1 + \nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial z\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

где $I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - первый инвариант тензора напряжений.

Уравнения (2.26) называются уравнениями Бельтрами – Мичелла. Для решения задачи механики сплошной среды в напряжениях необходимо проинтегрировать девять уравнений (2.1) и (2.26). Наличие трёх «лишних» уравнений (лишние – потому, что неизвестных функций напряжений всего шесть) необходимо для получения однозначного решения. Шесть компонент тензора напряжений, полученные после интегрирования, должны удовлетворять условиям на поверхности (1.5). Затем по формулам закона Гука (2.11) определяются компоненты тензора деформаций, а из формул Коши (1.21) путём интегрирования – компоненты вектора перемещения, т. е. напряжённо-деформированное состояние тела определено в каждой его точке.

Уравнения Бельтрами – Мичелла (2.26) завершают полную разрешающую систему уравнений, которая позволяет решать необходимые задачи в перемещениях или напряжениях.

Анализируя полученные результаты по методам решения задачи механики сплошной среды, можно сделать следующий вывод: первый способ (решение задачи в перемещениях) с

математической стороны проще второго способа (решение задачи в напряжениях). При решении задачи в перемещениях необходимо из трёх уравнений равновесия (2.23) определить только три функции перемещений. При этом условия неразрывности деформаций (2.3) и (2.5) будут удовлетворены автоматически, так как они получены из уравнений Коши и являются их следствием. При решении задачи в напряжениях следует подобрать шесть функций напряжений, удовлетворяющих девяти уравнениям.

2.7 Теорема единственности. Методы решения задачи механики твёрдого деформируемого тела

При решении задачи механики твёрдого деформируемого тела могут возникнуть следующие вопросы:

1. Является ли полученное решение единственным?
2. Могут ли приложенным объёмным силам и заданным на поверхности нагрузкам и/или перемещениям соответствовать не одна, а несколько различных систем напряжений, деформаций и перемещений внутри тела и на его поверхности?

В теории упругости доказана теорема единственности решения задачи. Эта теорема верна при выполнении гипотезы о естественном ненапряжённом состоянии тела и закона независимости действия сил. Из теоремы следует: так как решение задачи единственно, то безразлично, каким математическим методом это решение получено.

Таким образом, для выбора основных неизвестных в задаче механики твёрдого деформируемого тела в дифференциальной постановке имеются три метода, два из которых рассмотрены выше достаточно подробно. Для их математической реализации можно указать также несколько методов. Кратко опишем эти методы.

1. Прямой метод (прямая задача) заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений равновесия совместно с заданными условиями на поверхности. При этом, если решение задачи теории упругости проводится в перемещениях, то используются уравнения Ламе

(2.23) с условиями на поверхности (2.25). В случае решения задачи в напряжениях, рассматриваются уравнения равновесия (2.1) и уравнения неразрывности деформаций в форме уравнений Бельтрами – Мичелла (2.26) с условиями на поверхности (1.5).

2. Обратный метод. Непосредственное интегрирование указанных уравнений при заданных граничных условиях на поверхности представляет трудно разрешимую задачу, поэтому в некоторых случаях применяется обратный метод решения задачи (обратная задача). При решении обратным методом задаются функциями перемещений или напряжений, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям Сен-Венана (2.3) и (2.5) в первом случае и уравнениям Бельтрами – Мичелла (2.26) – во втором. Далее с помощью уравнений равновесия и условий на поверхности определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений. При использовании этого метода решение задачи теории упругости является сравнительно простым, так как связано лишь с дифференцированием функций.

3. Полуобратный метод Сен-Венана. При решении задачи этим методом задаются только частью напряжений или перемещений, т. е. делаются допущения о виде этих функций. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей.

2.8 Контрольные вопросы

1. Перечислите основные уравнения механики твердого деформируемого тела.

2. Выполните вывод дифференциальных уравнений равновесия. В чем заключается их физический смысл?

3. Выполните вывод уравнений неразрывности деформаций. В чем заключается их физический смысл?

4. Для чего в механике сплошной среды используются физические уравнения? Запишите обобщенный закон Гука и поясните, какие основные константы входят в него.

5. Раскройте сущность основных способов вывода разрешающих систем уравнений механики сплошной среды.

3. Механические свойства массива пород

3.1 Основные понятия и определения

Горная порода – совокупность минеральных агрегатов, сформировавшаяся в результате геологических процессов и залегающая в земной коре в виде определенной литологической разности.

Массив горных пород (МГП) – часть земной коры, в пределах которой происходят механические процессы, обусловленные горными работами.

Реальный МГП представляет собой сложную среду, характеризующуюся различными свойствами и состояниями. Массив может быть сплошным и не сплошным (дискретным), однородным и неоднородным, изотропным и анизотропным. Горные породы, слагающие массив, обладают деформационными и прочностными свойствами. Их количественные показатели зависят не только от минерального состава и природных связей между частицами, но и от характера напряженного состояния, условий деформирования, наличия структурно-механических ослаблений и др.

В физическом смысле сплошной считают часть массива, в которой отсутствуют дефекты (трещины, пустоты и т.п.). В математическом смысле массив считают сплошным, если в нем обеспечивается условие непрерывности напряжений и деформаций даже при наличии некоторых дефектов.

К однородным относят массив с одинаковыми свойствами материала в разных его точках, а к изотропным – с одинаковыми его свойствами во всех направлениях относительно рассматриваемой точки. Слоистые массивы пород чаще всего анизотропны и неоднородны.

При горных работах элементы массива пород могут находиться в трехосном (объемном), двухосном или одноосном (линейном) напряженных состояниях, а характер их деформирования может быть упругим, реологическим, пластическим и смешанным.

При решении задач геомеханики используют ряд специфических понятий.

Элементарным объемом массива горных пород (ГП) считают объем, многократно меньший объема изучаемого объекта, но в котором отражены все свойства массива, поэтому напряженно-деформированное состояние (НДС) в нем можно условно рассматривать как НДС в точке и описывать его непрерывными функциями координат.

Механические свойства горной породы – класс физических свойств, характеризующих поведение ГП при механических воздействиях.

Механические процессы в горных породах (и массивах) – процессы деформирования, изменения напряжений и разрушения.

Проявления механических процессов в массивах ГП – возникающие в нем концентрации напряжений, смещений, разрушений (в том числе динамических), обрушений пород.

Крепость горных пород – их способность сопротивляться различным видам разрушения.

Механическое состояние массива ГП – совокупность показателей, характеризующих степень напряженности, сопротивляемости и устойчивости массива при механических воздействиях в конкретных условиях.

Для определения механических свойств и состояний массива ГП используют лабораторные, натурные и комбинированные методы испытаний.

Лабораторные испытания обычно проводят на образцах ГП, при этом их размеры не должны быть меньше элементарного объема ГП. Используют образцы правильной, полуправильной или неправильной формы.

Натурные испытания выполняют путем воздействия испытательного устройства на обнаженную поверхность породы в горной выработке, скважине или на специально оконтуренный макрообразец породы на месте ее залегания.

В комбинированных испытаниях сочетают лабораторные и натурные методы.

3.2 Механизм деформирования и разрушения горных пород

Представление о механизме деформирования горных пород можно получить по диаграмме (рис. 3.1).

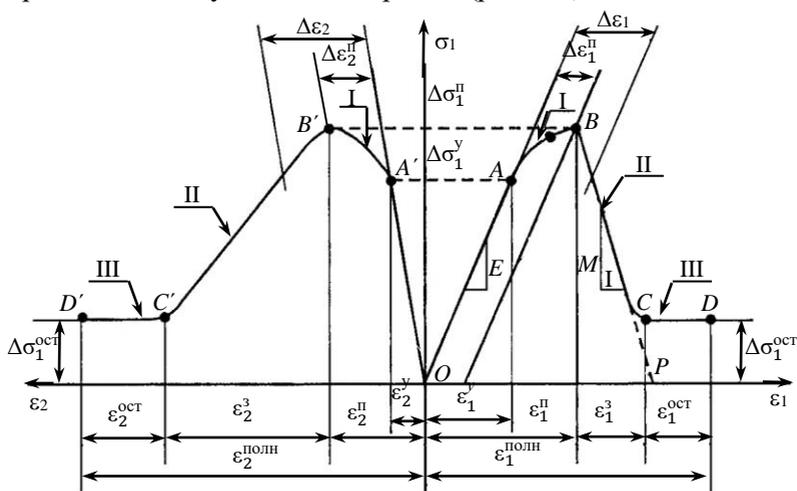


Рис. 3.1. Полная диаграмма деформирования горных пород

На полной диаграмме деформирования: ϵ_1 – продольная относительная деформация сжатия, ϵ_2 – поперечная относительная деформация растяжения; $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_2$ приращение сжимающего осевого напряжения σ_1 по отношению к боковому σ_2 ; $\Delta\sigma_1^y$, $\Delta\sigma_1^II$, $\Delta\sigma_1^ост$ – приращение осевого напряжения соответственно на пределе упругости, на пределе прочности и на пределе остаточной прочности; ϵ_1^y и ϵ_2^y – упругие продольная и поперечная деформации на пределе упругости; ϵ_1^II и ϵ_2^II – продольная и поперечная деформации на пределе прочности; ϵ_1^III и ϵ_2^III – продольная и поперечная деформации на ниспадающем участке; $\epsilon_1^ост$ и $\epsilon_2^ост$ – продольная и поперечная деформации на участке остаточной прочности; $\epsilon_1^{полн}$ и $\epsilon_2^{полн}$ – полные продольная и поперечная деформации образца; $\Delta\epsilon_1^II$ и $\Delta\epsilon_2^II$ – необратимые продольная и поперечная деформации на пределе прочности; $\Delta\epsilon_1$ и $\Delta\epsilon_2$ – необратимые продольная и поперечная деформации в произвольной точке.

На участке OA диаграммы образец деформируется по закону Гука.

При росте сжимающих напряжений от нуля до $\Delta\sigma_1^y$ наблюдается упругое сжатие минерального скелета образца с постоянным модулем упругости E . Зависимости $\Delta\sigma_1(\varepsilon_1)$ и $\Delta\sigma_1(\varepsilon_2)$ линейны. Коэффициент поперечной деформации $\beta = \varepsilon_2^y/\varepsilon_1^y < 0,5$ остается постоянным, т.е. имеет смысл коэффициента Пуассона. Объем образца уменьшается.

При уровне напряжений, большем $\Delta\sigma_1^y$, начинается образование микротрещин. При этом зависимости $\sigma_1(\varepsilon_1)$ и $\sigma_1(\varepsilon_2)$ по причине образования и раскрытия вертикальных микротрещин становятся нелинейными. С увеличением сжимающих напряжений $\Delta\sigma_1$ поперечные деформации ε_2 растут быстрее продольных ε_1 , т.е. коэффициент поперечной деформации β увеличивается, а уменьшение объема образца замедляется. При неизменной внешней нагрузке образовавшиеся микротрещины останавливаются в своем росте, а при снятии нагрузки закрываются.

При напряжениях, больших $\Delta\sigma_1^y$, развитие трещин приобретает неустойчивый лавинообразный характер, что экспериментально фиксируется в виде акустической эмиссии.

В интервале напряжений от $\Delta\sigma_1^y$ до $\Delta\sigma_1^p$ зависимости $\Delta\sigma_1(\varepsilon_1)$, $\Delta\sigma_1(\varepsilon_2)$ становятся нелинейными, т.е. модуль упругости E , постоянный на предыдущих участках деформирования, становится переменным $E(\varepsilon_1)$ и приобретает физический смысл модуля деформации. На участке деформирования AB поперечные деформации $|\varepsilon_2|$ растут быстрее, чем продольные ε_1 , и коэффициент поперечной деформации $\beta(\varepsilon_1)$ увеличивается.

Максимальная несущая способность образца $\Delta\sigma_1^p$ зависит от режима экспериментального нагружения. При «мягком» режиме нагружения достижение максимальной несущей способности $\Delta\sigma_1^p$ приводит к образованию магистральных макротрещин в образце и последующему его разрушению. При этом несущая способность образца падает до нуля практически без увеличения деформации, т.е. запредельная ветвь диаграммы

деформирования практически вертикальна. Разрушение часто носит динамический характер с разлетом частей разрушенного образца. Причиной этого является накопление упругой энергии деформирования в элементах «мягкого» нагружающего устройства и ее реализация в виде кинетической энергии при разрушении образца, что уменьшает максимальную несущую способность образца и искажает картину его запредельного деформирования. «Мягкий» режим нагружения позволяет зафиксировать только максимальную несущую способность образца, а не предел прочности горной породы как материала.

График на рис.3.1 представляет полную диаграмму деформирования горных пород, включающую допредельные (I), предельные (B, B'), запредельные участки деформирования (II) и участок остаточной прочности (III).

При «жестком» режиме нагружения максимальная несущая способность образца σ_{1d} (рис. 3.2) соответствует пределу мгновенной прочности горной породы на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$. Далее на участке деформирования de (запредельная ветвь диаграммы) увеличению деформации ϵ_1 соответствует уменьшение несущей способности σ_1 образца до некоторого минимального значения σ_{1e} , называемого остаточной прочностью горных пород σ_o .

Крутизна запредельной ветви диаграммы $\sigma_1(\epsilon_1)$ характеризует модуль спада M , численное значение которого определяется углом наклона ($\arctg M$) запредельной ветви $\sigma_1(\epsilon_1)$ к направлению оси ϵ_1 . На запредельном участке

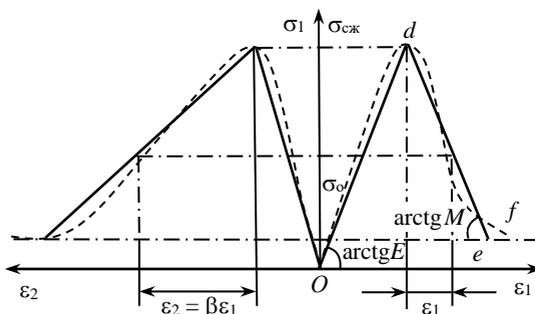


Рис. 3.2. Кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования горных пород

деформирования уменьшение способности сопровождается поперечных деформаций $|\varepsilon_2|$ (см. рис. 3.1), что вызывает увеличение коэффициента поперечной деформации β до значений, больших единицы.

Модуль спада M характеризует склонность горных пород к хрупкому разрушению, которая увеличивается с увеличением M . В расчетах удобно использовать относительную величину $\xi = M/E$.

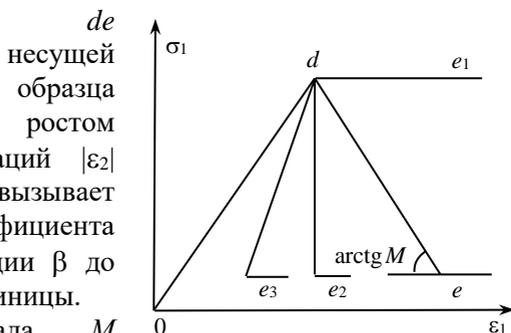


Рис. 3.3. Графическое представление классификации горных пород по их склонности к хрупкому разрушению

Модуль спада M для горных пород изменяется в широких пределах, о чем свидетельствует изменение коэффициента ξ от 0,5 (для мрамора и карналлита) до 10 (для алевролита). Все горные породы можно классифицировать по их склонности к хрупкому разрушению, принимая в качестве критерия модуль спада M . Горная порода с запредельной ветвью деформирования de_1 (рис. 3.3) имеет $M = 0$ и может быть классифицирована как идеально пластичная, а горная порода с запредельной ветвью деформирования de_2 характеризуется $M = \infty$ и будет идеально хрупкой. Все горные породы с запредельными ветвями деформирования de , лежащими в пределах угла e_2de_1 , имеют модуль спада в интервале $0 < M < \infty$ и обладают определенной склонностью к хрупкому разрушению, которая увеличивается с возрастанием M .

Если нелинейное деформирование горных пород на допредельной стадии имеет сильно выраженный характер, целесообразно рассматривать связь между напряжениями и деформациями как функцию:

$$\sigma_1 = E\xi\varepsilon_1^{1-m}; \quad (3.1)$$

где $E = \text{const}$; $\xi = M/E$, $0 < \xi \leq 1$; $0 < m \leq 1$.

В горных породах, обнаруживающих пластические деформации, возрастание бокового давления приводит к увеличению участка пластического деформирования, уменьшению модуля спада M и постепенному выполаживанию запредельной ветви деформирования (рис. 3.4, *a*), т.е. полная диаграмма деформирования становится подобной диаграммам для идеально пластичных материалов. Для горных пород,

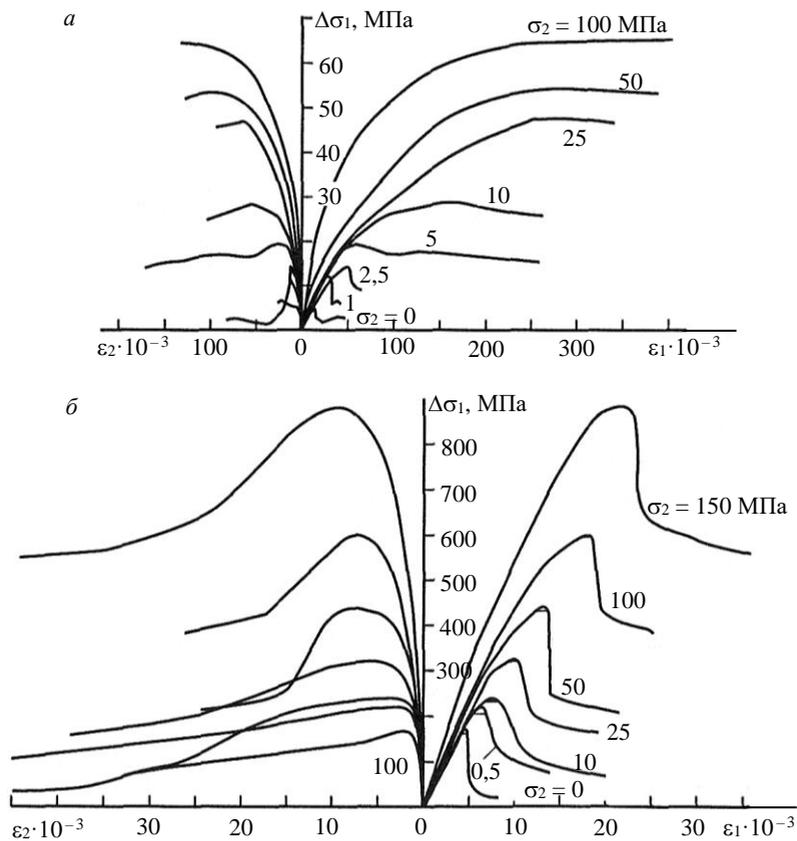


Рис. 3.4. Полные диаграммы деформирования горных пород при различных значениях бокового давления σ_2

разрушающихся хрупко, влияние бокового давления на модуль спада меньше или практически не сказывается (рис.3.4, б).

Другой важной характеристикой деформационных свойств горных пород является коэффициент поперечной деформации $\beta = (\Delta\varepsilon_3/\Delta\varepsilon_1)$, где $\Delta\varepsilon_3$ и $\Delta\varepsilon_1$ – приращения соответствующих деформаций на полной диаграмме деформирования. На рис. 3.5 показана кусочно-линейная аппроксимация функций $\sigma_1(\varepsilon_1)$ и $\varepsilon_3(\varepsilon_1)$. На графике $\varepsilon_3(\varepsilon_1)$ четко прослеживаются три участка, аппроксимированные линейными функциями: допредельного деформирования Od , где $\beta < 0,5$ и имеет смысл коэффициента Пуассона; запредельного деформирования de , где $\beta \geq 0,5$, и остаточной прочности ef , где $\beta \approx 0,5$ и объемная деформация практически равна нулю. Особый интерес представляет коэффициент поперечной деформации на запредельном участке $\beta = (\Delta\varepsilon'_3/\Delta\varepsilon'_1)$, который целесообразно вычислять, перенося начало координат в точку d .

Для коэффициента поперечной деформации на допредельной стадии обычно принимается обозначение μ .

На запредельной стадии при $\beta > 0,5$ наблюдается увеличение деформируемого объема горных пород, т.е. так называемая дилатансия. Коэффициент β возрастает с увеличением модуля спада M , т.е. в хрупко разрушающихся породах наблюдается большая дилатансия, чем в породах, разрушающихся с проявлением пластических деформаций, хотя

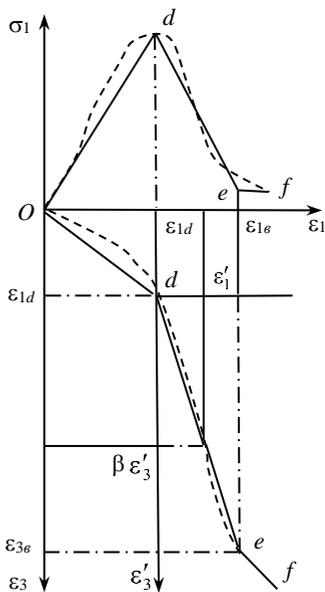


Рис. 3.5. Схема определения коэффициента поперечной деформации β на различных стадиях деформирования горных пород

для некоторых типов пород такая закономерность не прослеживается. Общее увеличение объема горных пород при их полном разрушении может достигать 10 %.

Горные породы относятся к группе анизотропных материалов. Следует различать анизотропию геометрическую и физическую. Геометрическая анизотропия характеризуется различными модулями деформации в зависимости от направления действующего усилия по отношению к направлению слоистости или трещиноватости горных пород.

Физическая анизотропия характеризуется различными модулями деформации при сжатии и растяжении. Результаты отдельных исследований показывают, что для некоторых типов сланцев и суглинков модуль деформации при сжатии соответственно в 1,2-1,5 и 1,5-5 раз больше, чем при растяжении. Деформационные характеристики горных пород зависят от вида напряженного состояния.

3.3 Прочность горных пород

Прочностные свойства горных пород определяют в условиях элементарных напряженных состояний – одноосных сжатия и растяжения. Под прочностью породы понимают ее способность сопротивляться силовым воздействиям, не разрушаясь. За предел прочности породы принимается отношение максимального силового воздействия (при сжатии или растяжении) к исходной площади поперечного сечения испытываемого образца: в итоге получаем пределы прочности породы на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$ и на растяжение $\sigma_{р}$. Обе эти характеристики могут быть определены по соответствующим полным диаграммам деформирования как максимальные несущие способности соответственно при сжатии и растяжении образцов горной породы. Кроме того, на полной диаграмме деформирования при сжатии фиксируется минимальная несущая способность образца на запредельной стадии, называемая остаточной прочностью σ_0 .

Характер разрушения при одноосном сжатии и прочность зависят от условий на контактах образца с плитами испытательной

машины. При полном сцеплении на контактах в приторцевых областях формируется неоднородное напряженное состояние, близкое к объемному сжатию, и разрушение происходит по поверхностям конусов, оси которых обычно совпадают с осью образца, – «коническое» разрушение (рис. 3.6, а) или по наклонной поверхности – «косое» разрушение (рис.3.6, б). При отсутствии сцепления на контактах в неоднородной по структуре породе возникают растягивающие в поперечном направлении напряжения и разрушение происходит по поверхностям, параллельным направлению внешней сжимающей нагрузки («столбчатое» разрушение или «раскалывание», рис. 3.6, в). Для образцов с отношением высоты h к диаметру d , равным 2, «коническое» и «косое» разрушения равновероятны, а иногда наблюдается разрушение смешанного вида (рис.3.6, г). У образцов с $h/d = 1$ обычно наблюдается «косое» разрушение. Кроме того, экспериментально установлено, что прочность $\sigma_{сж}$ при сцеплении на торцах больше, чем при отсутствии сцепления примерно на 30-50 %, и что эксперимент с отсутствием сцепления более правильно воспроизводит реальные условия нагружения горной породы как материала и столбчатый характер разрушения ее вокруг выработок.

Одним из важных факторов, влияющих на прочность $\sigma_{сж}$ образца, являются его размеры, как абсолютные, так и относительные, характеризующиеся отношением высоты образца h к его поперечному размеру d . Влияние абсолютных размеров образца, называемое масштабным эффектом, прослеживается в том, что при увеличении размеров образца его прочность может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Наиболее интенсивное снижение прочности происходит в диапазоне

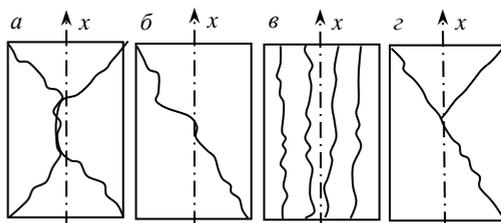


Рис. 3.6. Виды разрушения сжимаемых породных образцов при различных контактных условиях

$h/d = 0,5 \div 1,0$. Причина влияния высоты образца на прочность заключается в наличии трения по его торцам от взаимодействия с давящими плитами пресса. Остаточная прочность горных пород σ_0 в условиях одноосного сжатия изменяется обычно в интервале 3-20 % от предела прочности на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$.

При одноосном растяжении образцов деформации растяжения ограничены определенным значением. Разрушение происходит в результате распространения трещин, ориентированных главным образом по нормали к внешней растягивающей нагрузке, и завершается разделением образца на две части. Внутренняя дефектность образцов при растяжении проявляется гораздо в большей степени, чем при сжатии.

Технические трудности испытаний на прямое растяжение послужили причиной разработки различных косвенных методов: изгиб, раздавливание, раскалывание, разрыв давлением изнутри образцов правильной и неправильной формы.

Прямое растяжение, несмотря на его техническую сложность, представляется более корректным методом испытаний. Для горных пород предел прочности на растяжение σ_r и отношение прочности при сжатии и растяжении $\sigma_{сж}/\sigma_r$ изменяются в широком диапазоне. Для сравнительно широкого круга горных пород среднее значение отношения $\sigma_{сж}/\sigma_r = 8 \div 12$.

Характеристики прочности горных пород $\sigma_{сж}$, σ_0 , σ_r , определяемые в условиях элементарных напряженных состояний (одноосное сжатие и растяжение), используются при построении различных теорий прочности, позволяющих оценивать прочность горных пород при любых видах напряженного состояния, наблюдаемых в окрестности горных выработок.

Испытания на установках объемного нагружения позволили достаточно полно исследовать механические свойства горных пород на допредельной стадии деформирования.

Необходимо отметить общую тенденцию к увеличению разрушающих напряжений сжатия σ_1 с увеличением среднего обжимающего напряжения $\sigma_{ср} = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. Наблюдаемый эффект увеличения прочности проявляется в большей степени

при объемном нагружении трещиноватых и пористых пород, чем при испытании монолитных нетрещиноватых пород.

Увеличение бокового давления в горных породах, обнаруживающих пластические деформации, повышает максимальную прочность и уменьшает разность между максимальной и минимальной прочностью (см. рис. 3.4, *a*). Тот же процесс в горных породах, разрушающихся хрупко, приводит к увеличению в большей степени максимальной прочности (рис. 3.4, *б*), чем минимальной.

3.4 Реологические свойства горных пород

При уменьшении скорости деформирования или скорости нагружения начинают проявляться реологические свойства горных пород: зависимость механических свойств горных пород от времени. Реология занимается изучением способности твердых деформируемых тел проявлять свойства вязких жидкостей при длительном нагружении.

Особенности длительного деформирования на допредельной и предельной стадиях изучены достаточно полно (рис. 3.4). На рис. 3.4, *a* показаны соответствующие участки диаграмм деформирования, построенные при быстром (кривая 1) и медленном (кривая 2) деформировании горных пород в условиях одноосного нагружения. Если испытания, осуществляемые по кривой 1, остановить в точке *a* с координатами σ_{1a} и ε_{1a} и обеспечить режим заданной нагрузки σ_{1a} на длительное время, не ограничивая деформации ε_1 , будем наблюдаться процесс ползучести горных пород, который приведет к увеличению деформаций до уровня ε_{1b} , соответствующего точке *b* на кривой 2 длительных испытаний. Если испытания остановить в той же точке *a* и обеспечить на длительное время режим заданных деформаций ε_{1a} , будет наблюдаться процесс релаксации напряжений σ_1 в горных породах, который приведет к уменьшению напряжений до уровня σ_{1c} , соответствующего точке *c* на кривой 2.

Наконец, если в испытаниях по кривой 1 в точке *a* значительно уменьшить скорость деформирования, будут наблюдаться одновременно процессы ползучести и релаксации

напряжений, которые увеличат деформации до уровня ε_{1d} и уменьшат напряжения до уровня σ_{1d} , что соответствует точке d на кривой 2. При уменьшении скорости деформирования наблюдается также снижение предельной несущей способности образцов горных пород ($\sigma_{сж2} < \sigma_{сж1}$), т.е. снижение их прочности. Минимальной будет прочность при бесконечно длительном нагружении, которая фиксируется как предел длительной прочности $\sigma_{сж\infty}$ в отличие от предела условно-мгновенной прочности $\sigma_{сж}$ горных пород на одноосное сжатие.

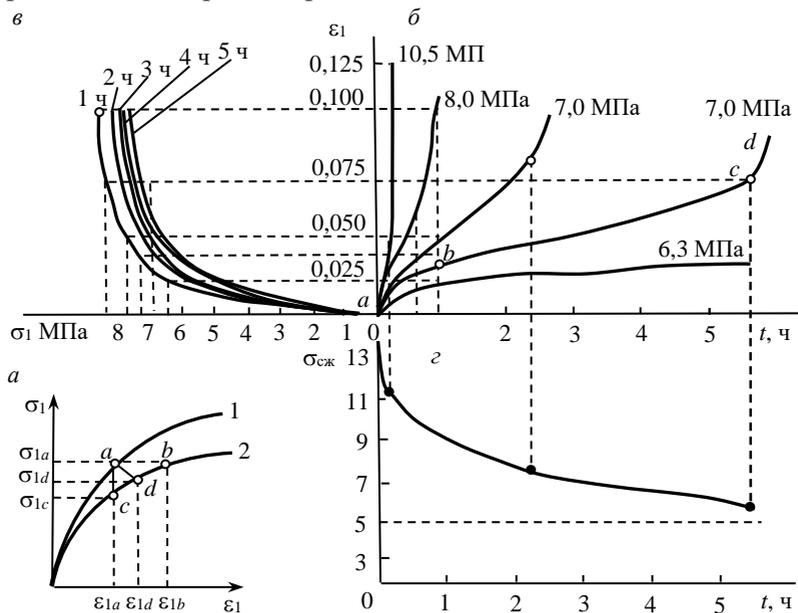


Рис. 3.7. Построение диаграмм длительного деформирования горных пород

Экспериментальное исследование реологических свойств горных пород обычно сводится к построению графиков ползучести горных пород $\varepsilon_1(t)$ при фиксированных напряжениях σ_1 . В качестве иллюстрации на рис. 3.7, б показано семейство графиков ползучести $\varepsilon_1(t)$ для замороженного песка.

На графике $\varepsilon_1(t)$ при $\sigma_1 = 7,0$ МПа разграничены характерные участки деформирования, соответствующие определенным стадиям процесса. Участок Oa соответствует начальной условно-мгновенной деформации. В зависимости от уровня напряжений σ_1 деформация ε_1 может быть как упругой, связанной с упругим сжатием минерального скелета, так и частично необратимой, обусловленной микроразрушениями. На участке ab наблюдается неустановившаяся или затухающая ползучесть ($\varepsilon_1 \rightarrow 0$), для которой также характерны как упругие, так и необратимые деформации. Участок bc соответствует стадии установившейся «ползучести» ($\varepsilon_1 = \text{const}$), характеризующейся разрушением структурных связей, что при снятии нагрузки приводит лишь к частичному восстановлению деформаций. Заключительный участок cd соответствует стадии прогрессирующей ползучести ($\varepsilon_1 \rightarrow \infty$), на которой наблюдается интенсификация процесса разрушения, появление трещин и, наконец, разрушение образца породы.

Рассмотренный график $\varepsilon_1(t)$ описывает наиболее общий случай ползучести горных пород: в зависимости от уровня действующих напряжений σ_1 и типа горных пород некоторые стадии деформирования наблюдаются на ограниченных промежутках времени или вообще отсутствуют. Так, при $\sigma_1 < \sigma_{сж\infty}$ (предела длительной прочности) разрушение не наблюдается и будет отсутствовать участок прогрессирующей ползучести, при $\sigma_1 \rightarrow \sigma_{сж}$ практически будет отсутствовать участок установившейся ползучести.

Последующая обработка графиков $\varepsilon_1(t)$ может быть произведена следующим образом. Фиксируя на оси t определенные моменты времени, снимаем с графиков $\varepsilon_1(t)$ соответствующие деформации ε_1 при соответствующих напряжениях σ_1 и далее строим семейство диаграмм деформирования $\sigma_1(\varepsilon_1)$ для фиксированных моментов времени t (рис. 3.7, в). Диаграмма $\sigma_1(\varepsilon_1)$ при $t \rightarrow 0$ соответствует мгновенному нагружению и угол ее наклона к оси ε_1 определяет мгновенный, или динамический, модуль деформации E горных

пород. Диаграмма $\sigma_1(\varepsilon_1)$ при $t \rightarrow \infty$ соответствует длительному нагружению и угол ее наклона к оси ε_1 характеризует длительный, или статический, модуль деформации E_∞ горных пород.

Если на графиках $\varepsilon_1(t)$ зафиксировать моменты времени, соответствующие началу прогрессирующей ползучести, т.е. началу разрушения образцов горных пород, и выписать соответствующие им уровни напряжений σ_1 , можно в координатах $\sigma_1(t)$ построить кривую длительной прочности горных пород $\sigma_{сж}(t)$, как это показано на рис. 3.7, з. Начальная ордината этой кривой соответствует пределу мгновенной прочности $\sigma_{сж}$, а асимптота – пределу длительной прочности $\sigma_{сж\infty}$ горных пород на одноосное сжатие.

Следуя классификации Ю.М. Либермана, горные породы по характеру длительного деформирования можно подразделить на два типа. К первому типу относятся породы, длительное деформирование которых носит ограниченный характер (рис. 3.8, кривая 1). Деформации ползучести стремятся к некоторому предельному уровню, нелинейно зависящему от действующих напряжений. К породам первого типа относятся, например, глинистые сланцы, песчаники, песчанистые сланцы, аргиллиты и алевролиты.

Ко второму типу относятся горные породы, при длительном деформировании которых не прослеживается предельный уровень деформаций (кривая 2 на рис. 3.8). Ярким представителем пород такого типа являются массивы каменных солей.

Длительная прочность горных пород $\sigma_{сж}(t)$ является важным параметром механических свойств, необходимым для расчета длительной устойчивости горных выработок. Кривая длительной прочности $\sigma_{сж}(t)$, как отмечалось выше, может быть

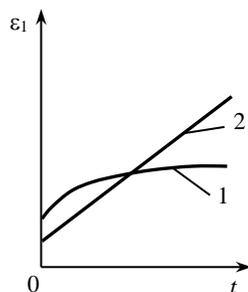


Рис. 3.8. Диаграммы длительного деформирования различных горных пород

построена по результатам испытаний при постоянной нагрузке.

Длительная прочность горных пород $\sigma_{сж}(t)$ является важным параметром механических свойств, необходимым для расчета длительной устойчивости горных выработок. Кривая длительной прочности $\sigma_{сж}(t)$, как отмечалось выше, может быть построена по результатам испытаний при постоянной нагрузке.

Подобные эксперименты требуют больших затрат труда и времени. В связи с этим заслуживает внимания ускоренный метод определения длительной прочности горных пород при одноосном сжатии, разработанный во ВНИМИ и основанный на измерении объема образца, нагружаемого ступенчато возрастающими нагрузками. После построения экспериментальной зависимости объемной деформации образца θ от действующего напряжения σ_1 предел длительной прочности вычисляют по формуле:

$$\sigma_{сж\infty} = 0,5(\sigma_1' + \sigma_1''); \quad (3.2)$$

где σ_1' – напряжение, соответствующее максимальному уплотнению породного образца; σ_1'' – напряжение, соответствующее начальному моменту увеличения объема образца.

При известном пределе мгновенной прочности $\sigma_{сж}$, который определяется традиционным методом по диаграмме деформирования как максимальная несущая способность породного образца σ_{1d} , кривая длительной прочности $\sigma_{сж}(t)$ может быть построена с помощью аппроксимирующего уравнения:

$$\sigma_{сж}(t) = \sigma_{сж\infty} + (\sigma_{сж} - \sigma_{сж\infty})e^{-t/t_0}. \quad (3.3)$$

В качестве результатов эксперимента обычно приводится отношение $\sigma_{сж\infty}/\sigma_{сж}$.

Реологические испытания, выполненные во ВНИМИ, позволили установить, что значения отношения $\sigma_{сж\infty}/\sigma_{сж}$ для мерзлых грунтов составляют 0,08-0,35, для слабых и пластичных пород – 0,3-0,7, для пород средней прочности и крепких – 0,7-0,95.

Характерной особенностью реологических процессов на запредельной стадии является высокая скорость релаксации напряжений: почти полная релаксация происходит за время

$t = 10^2 \div 10^3$ с. С уменьшением начальной прочности σ увеличивается относительная минимальная несущая способность σ_∞/σ образцов после релаксации напряжений, что указывает на увеличение относительного предела длительной прочности.

3.5 Структурная нарушенность массивов горных пород

На механические свойства породного массива основное влияние оказывает количественный показатель трещиноватости горных пород, характер распределения трещин в породном массиве, обводненность породного массива, особенности текстуры и структуры горной породы, а также и др. факторы.

Оценка механических свойства породного массива выполняется на основании детальной оценки результатов инженерно-геологических изысканий с применением одной из классификационных геологических систем (*RMR*, *Q*, *GSI* и др.).

Геомеханическая классификация пород RMR

Геомеханическая классификация породного массива по Беньявскому включает в себя 6 рейтинговых показателей, которые позволяют комплексно оценить развитие структурную нарушенность породного массива:

$$RMR = J_{A1} + J_{A2} + J_{A3} + J_{A4} + J_{A5} + J_B; \quad (3.4)$$

где J_{A1} – показатель, который зависит от прочности породы в условиях одноосного сжатия; J_{A2} – показатель, который зависит от значения показателя *RQD*; J_{A3} – показатель, который зависит от расстояния между трещинами; J_{A4} – показатель, учитывающий качество контакта по трещинам; J_{A5} – показатель, учитывающий обводненность трещин; J_B – показатель, учитывающий направление трещиноватости.

Показатели, входящие в формулу (3.4) определяются на основании табл. 3.1-3.6.

Таблица 3.1

Показатель (J_{A1}) критерия *RMR*, характеризующий прочность
горной породы на одноосное сжатие

Индекс прочности при точечном нагружении, МПа	Предел прочности на одноосное сжатие, МПа	Показатель J_{A1}
> 10	более 250	15
4 – 10	100 – 250	12
2 – 4	50 – 100	7
1 – 2	25 – 50	4
-	5 – 25	2
-	1 – 5	1
-	менее 1	0

Таблица 3.2

Показатель (J_{A2}) критерия *RMR*, характеризующий качество
горной породы согласно индексу *RQD*

Качественное описание горной породы	Качество по керну <i>RQD</i> , %	Показатель J_{A2}
Отличное	90 – 100	20
Хорошее	75 – 90	17
Нормальное	50 – 75	13
Плохое	25 – 50	8
Очень плохое	менее 25	3

Таблица 3.3

Показатель (J_{A3}) критерия *RMR*, характеризующий
интенсивность трещиноватости породного массива

Качественное описание интенсивности трещиноватости (расстояние между трещинами)	Расстояние между трещинами, м	Рейтинг J_{A3}
очень значительное	> 2	20
значительное	0,6 – 2	15
среднее	0,2 – 0,6	10
малое	0,06 – 0,2	8
очень малое	< 0,06	5

Таблица 3.4

Показатель (J_{A4}) критерия *RMR*, характеризующий характер трещиноватости породного массива

Описание характера трещины	Рейтинг J_{A4}
Очень шероховатые неветрелые породы. Трещины плотно закрыты или отсутствуют	30
Шероховатые и слегка выветрелые породы, отдельности до 1 мм	25
Слегка шероховатые и от средне до весьма выветрелые породы, отдельности до 1 мм	20
Гладкие поверхности, отдельности 1-5 мм, заполненные набухающим материалом	10
Толщина набухающего слоя 5 мм, отдельности 5 мм	0

Таблица 3.5

Показатель (J_{A5}) критерия *RMR*, характеризующий условия обводненности породного массива

Приток воды на 10 м длины тоннеля, л/мин	Давление воды в трещине/главные максимальные напряжениям	Общее описание	Рейтинг J_{A5}
отсутствует	0	полностью сухие	15
< 10	0 – 0,1	влажные	10
10 – 25	0,1 – 0,2	мокрые	7
25 – 125	0,2 – 0,5	капез	4
> 125	> 0,5	приток	0

Таблица 3.6

Показатель (J_B) критерия *RMR*, характеризующий ориентацию трещин относительно тоннеля

Ориентация трещин относительно тоннеля	Рейтинг J_B
Очень благоприятная	0
Благоприятная	-2
Относительно благоприятная	-5
Неблагоприятная	-10
Весьма неблагоприятная	-12

После определения рейтинга по каждому отдельному фактору, по формуле (3.4) определяют значение критерия *RMR*. По величине критерия *RMR* согласно табл. 3.7 можно определить устойчивость породного массива, среднее время устойчивого состояния обнажения, а также прочностные показатели породного массива.

Таблица 3.7

Показатели устойчивости породного массива на основании критерия *RMR*

Параметры/свойства породного массива	Величина критерия <i>RMR</i>				
	100 – 81	80 – 61	60 – 41	40 – 21	< 20
Категория устойчивости	I	II	III	IV	V
Классификация горных пород по устойчивости	очень устойчивые	устойчивые	среднеустойчивые	неустойчивые	весьма неустойчивые
Среднее время устойчивого состояния	10 лет, пролет до 15 м	6 месяцев, пролет до 8 м	1 неделя, пролет до 5 м	10 часов, пролет до 2.5 м	30 минут, пролет до 1 м

Показатель *RQD* определяется на основании изучения керна породы, извлекаемого из скважины. Если такие данные отсутствуют, что встречается достаточно часто на тех производствах, где в программу инженерно-геологических испытаний не включены требования по определению данного показателя, то можно воспользоваться эмпирическими методиками для его определения.

Значение *RQD* можно определить по следующей формуле:

$$RQD = 100e^{-0,1\lambda}(0,1\lambda + 1); \quad (3.5)$$

где λ – среднее количество трещин на 1 м длины породного массива.

Также значение *RQD* можно определять через объемный показатель трещиноватости породного массива J_v , который характеризует количество трещин, пересекающих 1 м³ объема породного массива:

$$RQD = 110 - 2,5J_v. \quad (3.6)$$

Геомеханическая классификация пород Q

Разработана Бартоном в период с 1971 по 1974 г. и в первую очередь предназначена для оценки устойчивости породных обнажений, располагаемых в различных горно-геологических условиях. Показатель Q рассчитывается на основании 6 параметров, характеризующих структурную нарушенность породного массива. На основании полученной величины показателя Q можно предварительно определить тип крепи и параметры крепи, необходимые для рассматриваемых условий. Таким образом, геомеханическая классификация породного массива Q (далее рейтинговая система Q) может быть использована в качестве вспомогательного инструмента при обосновании типа и параметров крепи, а также является эффективным инструментом для описания структурной нарушенности породного массива. Изначально, рейтинговая система Q разрабатывалась таким образом, чтобы определять значения параметров, входящих в нее на основании визуального осмотра и замеров, проводимых непосредственно в породном обнажении. Однако допускается их определение и на основании обработки кернового материала, получаемого при инженерно-геологических изысканиях.

Значение показателя Q изменяется в диапазоне от 0,001 до 1000. Меньшее значение соответствует меньшей устойчивости породного обнажения, в то время как его увеличение говорит о повышении устойчивости. Показатель Q определяется по следующей зависимости:

$$Q = \frac{RQD}{J_n} \cdot \frac{J_r}{J_a} \cdot \frac{J_w}{SRF}; \quad (3.7)$$

где RQD – показатель качества горной породы (RQD – *rock quality designation*); J_n – показатель количества систем трещин; J_r – показатель шероховатости трещины; J_a – показатель трансформации контактных условий по трещине; J_w – показатель учитывающий влияние обводненности трещины на условие контакта по трещине; SRF – показатель, учитывающий соотношение между напряжениями, действующими в породном массиве и прочностью породы. Значения коэффициентов в

зависимости от показателей структурной нарушенности породного массива приведены в табл. 3.8-3.12.

Таблица 3.8

Рекомендации по определению показателя J_n

Класс породного массива	Описание трещиноватости породного массива	Значение показателя J_n
<i>A</i>	Трещиноватость породного массива отсутствует или наблюдается несколько неориентированных трещин	0,5 – 1
<i>B</i>	Одна система трещин	2
<i>C</i>	Одна система трещин и несколько хаотично ориентированных трещин	3
<i>D</i>	Две системы трещин	4
<i>E</i>	Две системы трещин и несколько хаотично ориентированных трещин	6
<i>F</i>	Три системы трещин	9
<i>G</i>	Три системы трещин и несколько хаотично ориентированных трещин	12
<i>H</i>	Четыре или более систем трещин или хаотичная ориентация трещин	15
<i>J</i>	Раздробленная или перемятая порода	20

Примечание: для сопряжения горных выработок значение J_n принимается равным $3J_n$ для порталных участков значение J_n принимается равным $2J_n$.

Таблица 3.9

Рекомендации по определению показателя J_r

Класс породного массива	Описание условия контакта по трещине	Значение показателя J_r
<i>A</i>	Прерывная (не сплошная) трещиноватость	4
<i>B</i>	Шероховатая, нерегулярная, волнистая поверхность трещины	3
<i>C</i>	Гладкая, волнистая поверхность трещины	1
<i>D</i>	Скользкая, волнистая поверхность трещины	1,5
<i>E</i>	Шероховатая, нерегулярная, плоская поверхность трещины	1,5
<i>F</i>	Гладкая, плоская поверхность трещины	1
<i>G</i>	Скользкая, плоская поверхность трещины	0,5
<i>H</i>	Трещина заполнена глинистым материалом, препятствующим возникновению контакта между стенок породного массива при сдвиге	1

Таблица 3.10

Рекомендации по определению показателя J_w

Класс породного массива	Описание условия обводненности трещин	Значение показателя J_w
A	Породный массив в окрестности породного обнажения сухой или наблюдается незначительный приток воды через несколько трещин	1,0
B	Приток воды в породное обнажение средней интенсивности, нерегулярное вымывание заполнителя трещин, приток воды происходит через несколько трещин	0,66
C	Высокое давление подземных вод, которое проявляется в виде интенсивного притока воды в породное обнажение через незаполненные минералами трещины	0,5
D	Большой приток воды в породное обнажение, сопровождающееся вымыванием минеральных частиц из трещин	0,33
E	Очень значительный мгновенный приток или высокое мгновенное давление подземных вод который/ое уменьшается со временем и сопровождается вымыванием минеральных частиц из трещин, а также отдельных фрагментов породного массива	0,2-0,1
F	Очень значительный мгновенный приток или высокое мгновенное давление подземных вод который/ое не уменьшается со временем и сопровождается вымыванием минеральных частиц из трещин, а также отдельных фрагментов породного массива	0,1-0,05

Таблица 3.11

Рекомендации по определению показателя J_a

Класс породного массива	Описание условия контакта по трещине	Ориентировочное значение угла внутреннего трения ϕ_r	Значение показателя J_a
Контактное взаимодействие между стенками трещины реализуется напрямую (трещины не запылены минералами)			
A	Плотно закрытая трещина, твердая, непроницаемая.	-	0,75

Класс породного массива	Описание условия контакта по трещине	Ориентировочное значение угла внутреннего трения φ_r	Значение показателя J_a
<i>B</i>	Трещина без видимых изменений, незначительное поверхностное изменение текстуры.	25-35	1
<i>C</i>	Незначительно изменённая поверхность стенок трещины. Поверхность стенок покрыта неразмываемыми минералами. Внутри трещины наблюдаются отдельные частички песка, дезинтегрированной породы без наличия глинистых частиц.	25-30	2
<i>D</i>	Поверхность трещин покрыта суглинистыми и супесчаными частицами. Внутри трещины наблюдается небольшое количество глинистых включений.	20-25	3
<i>E</i>	Поверхность трещин покрыта размягчаемыми минералами или глинистыми частицами, характеризующимися малым трением. Внутри трещины могут присутствовать частицы гипса, графита, хлорита и др. минералов, а также небольшие включения набухающей глины.	8-16	4
Контактное взаимодействие между стенками трещины реализуется (трещина заполнена тонким слоем минерального заполнителя)			
<i>F</i>	Трещины заполнены песчаными частицами и дезинтегрированной породой, глинистые частицы отсутствуют.	25-30	4
<i>G</i>	Трещины заполнены сильно литифицированной не размягчаемой глиной толщиной не более 5 мм.	16-24	6
<i>H</i>	Трещины заполнены слабо или средне литифицированной глиной толщиной не более 5 мм.	12-16	8

Класс породного массива	Описание условия контакта по трещине	Ориентировочное значение угла внутреннего трения φ_r	Значение показателя J_a
<i>J</i>	Трещины заполнены набухающей глиной, содержащей минералы монтмориллонита, толщиной не более 5 мм. Величина показателя J_a варьируется от процентного содержания набухающих глинистых частиц.	6-12	8-12
Контактное взаимодействие между стенками трещины отсутствует (трещина заполнена толстым слоем минерального заполнителя)			
<i>K</i>	Зоны или полосы породного массива, состоящие из дезинтегрированной или разрушенной породы. Трещины заполнены сильно литифицированной глиной.	16-24	6
<i>L</i>	Зоны или полосы породного массива, состоящие из дезинтегрированной или разрушенной породы или полностью из глинистой породы. Трещины заполнены средне или слабо литифицированной глиной.	12-16	8
<i>M</i>	Полосы породного массива, состоящие из дезинтегрированной или разрушенной породы, либо полностью из глинистой породы. Трещины заполнены набухающей глиной. Величина показателя J_a варьируется от процентного содержания набухающих глинистых частиц.	6-12	8-12
<i>N</i>	Мощные протяженные зоны или полосы сильно литифицированных глинистых пород.	12-16	10
<i>O</i>	Мощные протяженные зоны или полосы средне и слабо литифицированных глинистых пород.	12-16	13

Класс породного массива	Описание условия контакта по трещине	Ориентировочное значение угла внутреннего трения φ_r	Значение показателя J_a
<i>P</i>	Мощные протяженные зоны или полосы набухающих глинистых пород. Величина показателя J_a варьируется от процентного содержания набухающих глинистых частиц.	6-12	13-20

Таблица 3.12

Рекомендации по определению показателя *SRF*

Класс породного массива	Описание	$\sigma_{c,i}/\sigma_1$	$\sigma_w/\sigma_{c,i}$	<i>SRF</i>
а) Зоны ослабления, пересекающие породные обнажения, которые могут стать причиной обрушения породной массы				
<i>A</i>	Множественные зоны ослабления, содержащие глинистые породы, химически дезинтегрированные породы или протяженные секции слабых неустойчивых пород	-	-	10
<i>B</i>	Множественные зоны значительной структурной нарушенности породного массива по длине породного обнажения, чередующиеся с зонами монолитных пород или несильно трещиноватых пород с отсутствием глинистого заполнителя	-	-	7.5
<i>C</i>	Единичная зона ослабленных пород, заполненная или не заполненная глинистой породой, либо химически дезинтегрированной породой (глубина от поверхности менее 50 м)	-	-	5
<i>D</i>	Сильно нарушенный породный массив, открытая трещиноватость, условия контакта по трещинам неблагоприятные	-	-	5
<i>E</i>	Единичная зона ослабленных пород, заполненная или не заполненная глинистой породой, либо химически дезинтегрированной породой (глубина от поверхности не менее 50 м)	-	-	2.5
Примечание: значение показателя <i>SRF</i> необходимо снизить на 25-50% если зона ослабления не пересекает породное обнажение, а только оказывает влияние на геомеханическое состояние породного обнажения				

Класс породного массива	Описание	$\sigma_{c,i}/\sigma_1$	$\sigma_{\theta}/\sigma_{c,i}$	<i>SRF</i>
б) Монолитные, в основном не трещиноватые и слабо трещиноватые породы, проблемы с устойчивостью которых могут быть вызваны напряженным состоянием				
<i>F</i>	Напряженность породного массива низкая, отдельные трещины находятся в открытом состоянии	> 200	< 0,01	2,5
<i>G</i>	Напряженность породного массива средняя, благоприятное распределение напряжений в окрестности породного обнажения	200 – 10	0,01 – 0,3	1
<i>H</i>	Напряженность породного массива высокая. Обычно направление действия напряжений благоприятное относительно трещиноватости породного массива.	10 – 5	0,3 – 0,4	0,5 – 2 2 – 5*
<i>J</i>	Наблюдается шелушение или стреляние породы средней интенсивности, которое может сопровождаться раскалыванием и последующим отслоением породы от породного массива примерно через 1 час после обнажения	5 – 3	0,5 – 0,65	5 – 50
<i>K</i>	Наблюдается интенсивное стреляние и динамическое заколообразование непосредственно через несколько минут после обнажения. Может сопровождаться низкоэнергетическим горным ударом	3 – 2	0,65 – 1	50 – 200
<i>L</i>	Наблюдается высокоэнергетический горный удар и мгновенное динамическое деформирование породного массива сразу после обнажения	< 2	> 1	200 – 400
Примечание: для породного массива, расположенного в сильно анизотропном начальном напряженном состоянии применить следующие корректировки: значение $\sigma_{c,i}$ снизить до $0,75\sigma_{c,i}$ если $5 \leq \sigma_1/\sigma_3 \leq 10$; значение $\sigma_{c,i}$ снизить до $0,5\sigma_{c,i}$ если $\sigma_1/\sigma_3 > 10$				
в) Породы склонные к большим пластическим деформациям в условиях значительной величины начальных напряжений породного массива				
<i>M</i>	Напряженное состояние породного массива таково, что приводит к ограниченному развитию пластических деформаций породного массива в окрестности породного обнажения	-	1-5	5 – 10

Класс породного массива	Описание	$\sigma_{c.i}/\sigma_1$	$\sigma_\theta/\sigma_{c.i}$	SRF
<i>N</i>	Напряженное состояние породного массива таково, что приводит к значительному развитию пластических деформаций породного массива в окрестности породного обнажения	-	> 5	10 – 20
г) Породные массивы, склонные к химическому пучению за счет изменения естественной влажности				
<i>O</i>	Породы, проявляющие ограниченное пучение при изменении естественной влажности	-	-	5 – 10
<i>P</i>	Породы, проявляющие значительное пучение при изменении естественной влажности	-	-	10 – 15

Примечание: σ_1 – максимальное главное напряжение; σ_3 – минимальное главное напряжение; σ_θ – максимальное значение нормального тангенциального напряжения на контуре породного обнажения (оценка напряжения на контуре породного обнажения выполняется на основании теории упругости); $\sigma_{c.i}$ – прочность ненарушенной породы в условиях одноосного сжатия.

На основании шести параметров входящих в формулу (3.7)(3.7) можно количественно определить три основных показателя, определяющих устойчивость породного обнажения в структурно нарушенной среде: RQD/J_n – показатель степени трещиноватости породного массива; J_r/J_a – показатель, характеризующий состояние поверхности ослабления; J_w/SRF – показатель, характеризующий напряженное состояние породного массива.

Согласно Бартону в зависимости от величины показателя Q породный массив можно классифицировать согласно табл. 3.13.

Таблица 3.13

Классификация породного массива в зависимости от величины показателя Q

Класс породного массива	Описание породного массива	Значение показателя Q
<i>A</i>	Невероятно хорошее состояние	400 – 1000
	Экстремально хорошее состояние	100 – 400

Класс породного массива	Описание породного массива	Значение показателя Q
	Очень хорошее состояние	40 – 100
<i>B</i>	Хорошее состояние	10 – 40
<i>C</i>	Среднее состояние	4 – 10
<i>D</i>	Плохое состояние	1 – 4
<i>E</i>	Очень плохое состояние	0,1 – 1
<i>F</i>	Экстремально плохое состояние	0,01 – 0,1
<i>G</i>	Невероятно плохое состояние	0,001 – 0,01

Оценка прочностных и деформационных характеристик породного массива по методике Хока-Брауна

Для оценки механических характеристик средне и сильнотрещиноватых породных массивов наибольшее распространение получила эмпирическая методика, предложенная Хоком и Брауном.

Критерий прочности горной породы Хока-Брауна запишем через главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{c.i} \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{c.i}} + s \right)^a ; \quad (3.8)$$

где σ_1 - максимальные главные эффективные напряжения; σ_3 - минимальные главные эффективные напряжения; $\sigma_{c.i}$ – прочность породы в образце при испытании в условиях одноосного сжатия; m_b , s , a – эмпирические параметры критерия прочности Хока-Брауна, зависящие от геологической структуры породного массива.

Параметры m_b , s , a можно получить по следующим эмпирическим зависимостям:

$$m_b = m_i e^{\left(\frac{GSI-100}{28-14D} \right)} ; \quad (3.9)$$

$$s = e^{\left(\frac{GSI-100}{9-3D} \right)} ; \quad (3.10)$$

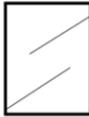
$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-\frac{GSI}{15}} - e^{-\frac{20}{3}} \right) ; \quad (3.11)$$

где GSI – геологический индекс прочности; m_i – параметр, характеризующий тип горной породы; D – показатель качества буровзрывных работ (наведенной нарушенности массива).

Геологический индекс прочности GSI устанавливается по результатам осмотра породного обнажения опытным геологом по данным табл. 3.14.

Таблица 3.14

Рекомендации по определению показателя GSI критерия прочности породного массива Хока-Брауна

Геологический индекс прочности GSI		Качество поверхности горной породы					
Структура породного массива		Ухудшение качества поверхности горной породы \rightarrow					
	Сплошная, массивная – породный массив без нарушений и трещин или с несколькими одиночными трещинами	↕ Уменьшение прочности внутренних связей между кусками горной породы	90			Нет данных	Нет данных
	Блочная – ненарушенные блоки горной породы кубической формы, разделенные между собой двумя или тремя системами трещин						
	Весьма блочная – ненарушенные блоки горной породы произвольной формы, разделенные между собой четырьмя и более системами трещин						
	Блочная/нарушенная/слоистая – складчатая структура, состоящая из угловатых блоков, разделенных системами трещин. Наличие слоистости и плоскостей напластования		Нет данных	Нет данных			
	Дезинтегрированная – плохо связанные между собой отдельные блоки произвольной формы, перемешанные с угловатыми и круглыми кусками горной породы						
	Слоистая – отсутствие блочной структуры, незначительное расстояние между слоями породы или плоскостями сдвига						
			Очень хорошее. Очень шероховатая, не выветрелая поверхность	Хорошее. Шероховатая, слегка выветрелая поверхность.	Среднее. Гладкая, средне выветрелая и измененная поверхность	Плохое. Гладкая скользкая поверхность, весьма выветрелая. Трещины заполнены уплотненной породой.	Плохое. Гладкая скользкая поверхность, весьма выветрелая. Трещины заполнены мягкой глиной

В тех случаях, когда геологическая информация отсутствует, можно воспользоваться переходом от более распространенных показателей структурной нарушенности породного массива к показателю GSI . На основании обобщения результатов натурных наблюдений рекомендуется определять показатель GSI на основании показателя RMR (в редакции от 1989 г.) и показателя RQD согласно формуле:

$$GSI = 1,5JCond_{89} + \frac{RQD}{2}; \quad (3.12)$$

где $JCond_{89}$ – рейтинг горной породы, ориентировочно определяемый по табл. 3.15; RQD – показатель качества горной породы.

Таблица 3.15

Определение показателя $JCond_{89}$ согласно рейтингу горной породы по Беньявскому от 1989 г.

Состояние трещины	Очень шероховатая поверхность, раскрытие трещины отсутствует, без следов выветривания стенок трещины	Слегка шероховатая поверхность, раскрытие трещины менее 1 мм, незначительные следы выветривания стенок трещины	Слегка шероховатая поверхность, раскрытие трещины менее 1 мм, значительные следы выветривания стенок трещины	Гладкая или скользкая поверхность или заполнение трещины другой породой толщиной до 5 мм или раскрытие трещины от 1 до 5 мм	Заполнение трещины слабой породой толщиной более 5 мм или раскрытие трещины более 5 мм
Рейтинг $JCond_{89}$	30	25	20	10	0

Также, существует возможность выразить показатель GSI с помощью показателя Q в следующем виде:

$$GSI = \frac{52 \frac{J_r}{J_a}}{1 + \frac{J_r}{J_a}} + \frac{RQD}{2}; \quad (3.13)$$

где J_r – показатель шероховатости поверхности трещины; J_a – показатель заполнения трещины другой породой.

В некоторых случаях при выполнении геомеханического анализа необходимо воспользоваться условием прочности

Кулона-Мора, который характеризуется прочностными показателями c и φ . Прочностные показатели условия прочности Кулона-Мора можно получить для определенного вида напряженного состояния из условия прочности Хока-Брауна, задавшись величиной напряжений σ_{3n} по формулам:

$$\varphi = \sin^{-1} \left[\frac{6am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{2(1+a)(2+a) + 6am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}} \right]; \quad (3.14)$$

$$c = \frac{\sigma_{c.i}[(1+2a)s + (1-a)m_b\sigma_{3n}](s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a) \sqrt{1 + \frac{6am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a)}}}; \quad (3.15)$$

$$\sigma_{3n} = \frac{\sigma_{3max}}{\sigma_{c.i}}. \quad (3.16)$$

Значение σ_{3max} , при анализе горных выработок глубокого заложения, можно найти по следующей зависимости:

$$\frac{\sigma_{3max}}{\sigma_{c.gl}} = 0,47 \left(\frac{\sigma_{c.gl}}{\gamma H} \right)^{-0,94}; \quad (3.17)$$

где γ – удельный усредненный вес вышележащих пород; H – глубина заложения горной выработки.

Показатель качества буровзрывных работ (наведенной нарушенности массива) D определяется по табл. 3.16.

Глобальная прочность породного массива на сжатие может быть определена по следующей зависимости:

$$\sigma_{c.gl} = \sigma_{c.i} \frac{(m_b + 4s - a(m_b - 8s)) \left(\frac{m_b}{4} + s \right)^{a-1}}{2(1+a)(2+a)}. \quad (3.18)$$

Пределы прочности породного массива в условиях одноосного сжатия $\sigma_{c.m}$ и одноосного растяжения $\sigma_{t.m}$ согласно критерию прочности Хока-Брауна, могут быть определены как:

$$\begin{aligned} \sigma_{c.m} &= \sigma_{c.i} \frac{s^a}{s}; \\ \sigma_{t.m} &= \sigma_{c.i} \frac{s}{m_b}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Модуль деформации породного массива также может быть определен по методике, предложенной Хоком-Брауном:

Таблица 3.16

Рекомендации по определению показателя D критерия прочности породного массива Хока и Брауна

Графическое представление поверхности породных обнажений	Описание породного массива	Рекомендуемая величина параметра D
	<p>Отличное качество поверхности контура породного обнажения. Применение гладкоконтурного взрывания или проходческого комбайна. Минимальное воздействие на породный массив в приконтурной зоне.</p>	0,0
	<p>Слабые породы. Механическая или ручная разработка породы. Минимальное воздействие на окружающий породный массив.</p>	0,0
	<p>В породных массивах, склонных к проявлению пучения и значительных деформаций контура породного обнажения.</p>	0,5
	<p>Очень плохое качество буровзрывных работ в весьма прочных породных массивах. Значительные локальные повреждения контура породного обнажения. Зона распространения повреждений 2 – 3 м от контура породного обнажения.</p>	0,8

$$E_m = E_i \left(0,02 + \frac{1 - \frac{D}{2}}{1 + e^{\frac{60+15D-GSI}{11}}} \right). \quad (3.20)$$

Модуль деформации породного массива E_m ориентировочно можно определить через рейтинг RMR по следующей формуле:

$$E_m = 10^{\frac{RMR-10}{40}}. \quad (3.21)$$

3.6 Контрольные вопросы

1. Воспроизведите диаграмму полного деформирования горной породы и охарактеризуйте её основные участки.
2. Перечислите и дайте определение основным деформационным свойствам горных пород.
3. Как принято описывать прочность горных пород при разных напряженных состояниях?
4. Каким образом вид напряженного состояния влияет на прочностные и деформационные свойства горных пород?
5. Перечислите и дайте определение основным реологическим свойствам горных пород.
6. Дайте описание рейтинговой системы Бенявского, используемой для учета структурной нарушенности массивов горных пород.
7. Дайте описание рейтинговой системы Бартона, используемой для учета структурной нарушенности массивов горных пород.
8. Дайте описание рейтинговой системы Хока-Брауна, используемой для учета влияния структурной нарушенности массивов горных пород на их деформационные и прочностные свойства.

4. Геомеханические модели породных массивов

4.1 Напряженное состояние массива горных пород до и после начала горных работ

Массив пород находится в напряженном состоянии, которое формируется под действием веса вышерасположенных пород, т.е. гравитационными силами. Во многих случаях к гравитационным силам добавляются тектонические силы, связанные с геологическими процессами в недрах.

Рассмотрим напряженное состояние нетронутого горными работами массива пород. На глубине H от земной поверхности представим элементарный параллелепипед.

Компоненты нормальных напряжений на глубине H от поверхности в точке массива обозначим (рис. 4.1): горизонтальные σ_x, σ_y ; вертикальное σ_z .

Вертикальное напряжение, вызванное весом вышележащих пород:

$$\sigma_z = \gamma H; \quad (4.1)$$

где γ – усредненный удельный вес горных пород.

Под действием вертикальных напряжений элементарный параллелепипед укорачивается в вертикальном направлении и расширяется в горизонтальном. Однако расширению пород

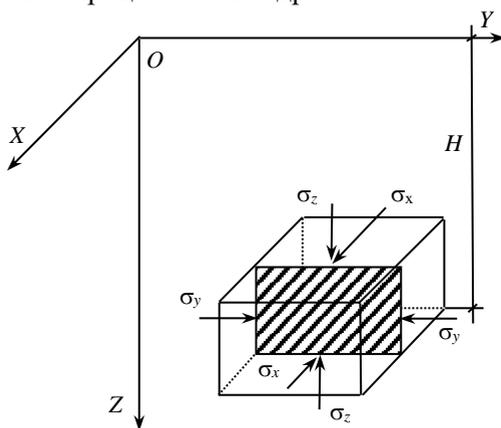


Рис. 4.1. Компоненты напряжений в точке нетронутого горными работами массива пород

препятствует горизонтальный распор, в результате формируются горизонтальные напряжения.

Для нахождения предположим, что массив пород изотропен, т.е. его деформационные характеристики во всех направлениях одинаковы.

В сечении параллелепипеда на плоскости YOZ (рис. 4.2, а) горизонтальную деформацию под действием вертикальной нагрузки $\sigma_z = \gamma H$ обозначим через ϵ_y .

В результате совместного деформирования соседних элементов 1 и 2 получим (рис. 4.2, б):

$$\epsilon_{1,y} = -\epsilon_{2,y}, \quad (4.2)$$

поскольку деформации элементов имеют противоположное направление и, соответственно, противоположные знаки.

Соотношение (4.2) можно записать следующим образом:

$$\epsilon_{1,y} + \epsilon_{2,y} = 0 \text{ или } \epsilon_y = 0, \quad (4.3)$$

Таким образом, под действием гравитационной нагрузки (веса вышерасположенных пород) в произвольной точке изотропного массива горизонтальные деформации не образуются.

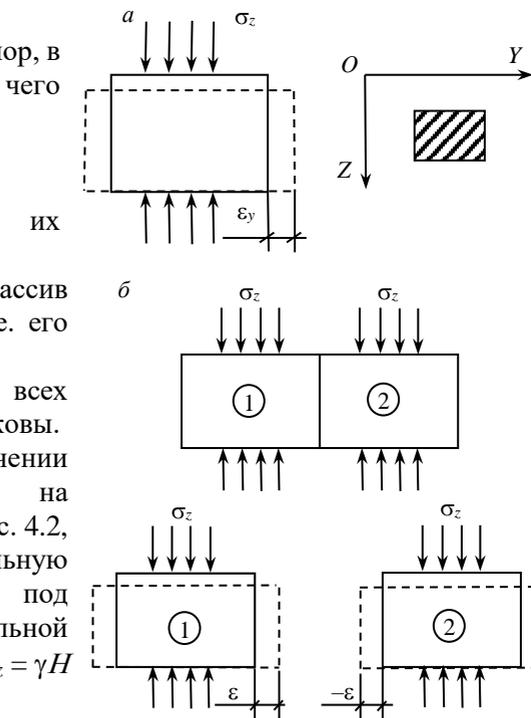


Рис.4.2. Расчетная схема

**Распределение напряжений в нетронутом массиве по
А.Н. Диннику**

Предположим, что массив горных пород изотропен и деформируется по закону Гука. Деформация ε_y в направлении оси OY записывается так:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z - \sigma_x)], \quad (4.4)$$

где E , ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Используя условия (4.3), соотношение (4.4) запишем следующим образом:

$$\frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z - \sigma_x)] = 0. \quad (4.5)$$

Компоненты горизонтальных напряжений будем искать в виде:

$$\sigma_y = \lambda \sigma_z, \quad (4.6)$$

где λ – коэффициент бокового распора, $\lambda = \text{const}$.

В силу изотропности массива:

$$\sigma_x = \sigma_y = \lambda \sigma_z. \quad (4.7)$$

Используя соотношение (4.7), условия (4.5) запишем в виде:

$$\lambda \sigma_z - \nu(\sigma_z - \lambda \sigma_z) = 0 \text{ или } \lambda - \nu - \nu \lambda = 0, \quad (4.8)$$

откуда:

$$\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) носит название формулы А.Н. Динника и отражает тот факт, что горизонтальные напряжения в нетронутом массиве связаны с вертикальными зависимостью:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \quad (4.10)$$

Поскольку коэффициент ν для горных пород изменяется в интервале $0 \leq \nu \leq 0,5$, коэффициент бокового распора будет изменяться в пределах $0 \leq \lambda \leq 1$.

Гидростатическое распределение напряжений

В результате экспериментальных исследований горных пород установлено, что они склонны к проявлению свойств ползучести, что выражается в изменении деформационных характеристик пород во времени.

В частности, с течением времени при ползучести коэффициент Пуассона горных пород возрастает. Это обстоятельство дает возможность утверждать, что для горных пород $\nu \rightarrow 0,5$. Тогда с течением времени при $\nu \rightarrow 0,5$ коэффициент $\lambda \rightarrow 1,0$. Следовательно:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \gamma H. \quad (4.11)$$

Гидростатическое распределение напряжений справедливо для мягких осадочных пород (например, солей, глин и др.). Породы высокой прочности (граниты, диориты и др.) и залегающие на большой глубине находятся в упругом состоянии.

Распределение напряжений в тектонических зонах массива

Следует отметить, что в результате действия тектонических деформаций в нетронутом массиве горных пород формируется напряженное состояние, в результате которого горизонтальные напряжения могут превосходить вертикальные и отличаться от распределения напряжений по А.Н. Диннику:

$$\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z \neq \gamma H. \quad (4.12)$$

Результаты натуральных измерений напряжений в тектонических зонах массива подтверждают их распределение по закону (4.12).

Проведение горной выработки в массиве пород изменяет его напряженное состояние. Вследствие извлечения части массива в пределах контура горной выработки потенциальная энергия сжатия, накопленная в нем в виде напряжений, перераспределяется в окрестности горной выработки. При этом совокупная напряженность породного массива концентрируется вблизи контура выработки и постепенно стремится к своему естественному значению по мере удаления от него.

При $\lambda < 1$ в боках на контуре выработки прямоугольного сечения (рис. 4.3, а), сжимающие вертикальные напряжения составляют $\kappa_2 \gamma H$ (κ_2 – коэффициент концентрации напряжений, значение которого может достигать 5). В кровле и почве по мере удаления от контура уменьшаются до нуля, а затем переходят в сжимающие и постепенно достигают значения, соответствующего напряжению в нетронутом массиве. В углах

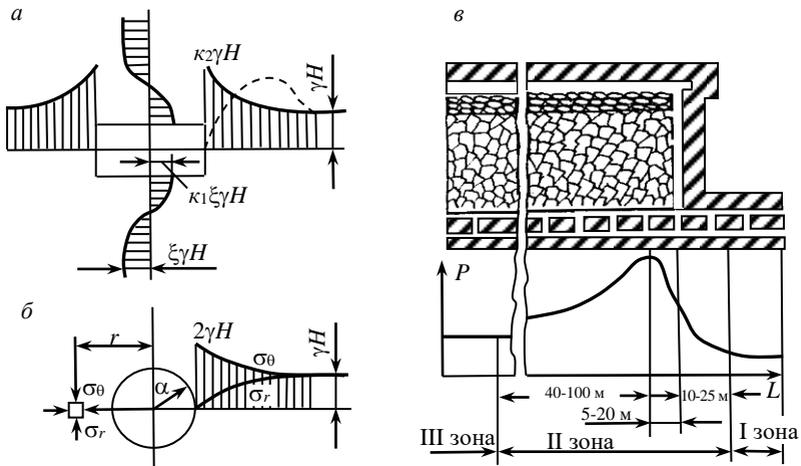


Рис. 4.3. Эпюры распределения напряжений вокруг выработок

выработки возникают растягивающие напряжения $\kappa_1\gamma H$, которые в выработке и вершинах впадин возникает наибольшая концентрация напряжений, здесь они теоретически достигают бесконечно большого значения. Закругление углов резко снижает напряжение.

Вокруг выработки круглого сечения при гидростатическом распределении напряжений в нетронutom массиве имеют место только сжимающие напряжения одинакового значения по всему периметру контура сечения (рис. 4.3, б). На контуре выработки тангенциальные напряжения $\sigma_\theta = 2\gamma H$, радиальные $\sigma_r = 0$. По мере удаления от контура вглубь массива σ_θ уменьшается, а σ_r увеличивается, асимптотически приближаясь к значению напряжений в нетронutom массиве.

Глубина зоны концентрации напряжений практически не превышает $(3-5)l$ (l – наибольший линейный размер сечения выработки). При расположении в массиве сближенных выработок возникает их взаимное влияние, вызывающее дополнительную концентрацию напряжений.

Характер проявлений горного давления зависит в наибольшей мере от соотношения напряжений и прочности

массива вокруг выработки. Если напряжения относительно высоки, они могут вызвать разрушение или пластическое деформирование пород в некоторой зоне вокруг выработки и для ее нормальной эксплуатации необходимо применение горной крепи. Напряжение в зоне разрушения снижается, и вокруг выработки образуется зона пониженных напряжений (неупругих деформаций). Зона максимальных напряжений отодвигается от контура вглубь массива (пунктирная кривая на рис. 4.3, *a*), где порода находится в объемном напряженном состоянии, благодаря чему ее сопротивление возрастает. Смещение контура выработки, вызванное упругими и неупругими деформациями пород, может достигать нескольких десятков и даже сотен миллиметров.

Итак, под термином «горное давление» будем понимать напряжение (давление) в массиве пород вокруг выработки или в системе «порода – крепь», вызванное природными и технологическими факторами в результате ведения горных работ.

Горное давление может проявляться в разных формах.

1) упругое или упруговязкое смещение пород без их разрушения;

2) вывалообразование (местное или регулярное) в слабых, трещиноватых и мелкослоистых породах;

3) разрушение и смещение пород (в частности, вывалообразование) под влиянием предельных напряжений в массиве по всему периметру сечения выработки или на отдельных ее участках;

4) выдавливание пород в выработку вследствие пластического течения, в частности, со стороны почвы (пучение пород).

При ведении очистных работ породы кровли и почвы обнажаются на больших пространствах и, зависая, пригружают (по нормали к пласту) примыкающие к выработанному пространству участки полезного ископаемого, а также кровли и почвы. Образующиеся зоны опорного давления простираются до 50 м вперед и по бокам от очистного забоя и до 100 м позади него.

По степени влияния очистного забоя выделяют три зоны опорного давления (рис. 4.3, *в*): I – слабого влияния, II –

существенного влияния, III – остаточного опорного давления. В подготовительных, а иногда и в капитальных выработках, попадающих в зоны опорного давления, имеют место повышенные деформации пород, предотвратить которые практически нельзя. В таких случаях необходимо применение податливых конструкций крепи.

Над и под выработанным пространством, а также в примыкающих к нему разрушенных горным давлением краевых участках пласта образуются зоны разгрузки (пониженных напряжений).

Особое место занимают динамические проявления горного давления (шелушение, стреляние, горные удары, внезапные выбросы пород и газа), которые фиксируются в перенапряженных зонах массива пород и создают повышенную опасность при ведении горных работ.

4.2 Классификация геомеханических моделей породных массивов

Одним из наиболее эффективных методов изучения механических процессов в породных массивах, а также их взаимодействия с подземными сооружениями является метод моделирования, основанный на замене реального породного массива некоторым его идеализированным отображением. Сами модели могут быть физическими, математическими, аналоговыми. Математические модели широко используются в геомеханике, поскольку они обладают наибольшей общностью, свободны от влияния частных факторов, характеризующих горнотехническую ситуацию, позволяют не только качественно, но и количественно прогнозировать развитие механических процессов. При этом точность решений зависит от того, насколько обоснованы и представительны исходные предпосылки.

Массив горных пород в общем случае является физически дискретной, неоднородной, анизотропной средой с начальным напряженным состоянием, механические процессы деформирования которой носят нелинейный временной

характер. Факторы, влияющие на формирование в породном массиве структурно-механических особенностей, могут быть геологические (физико-механические и эрозионные свойства горных пород, условия их залегания, степень нарушенности, блочность, а также гидрогеологические условия и начальное напряженное состояние) и инженерно-технические (форма и размеры выработки, ее расположение в массиве, способ проходки и поддержания, место и время установки крепи относительно забоя, качество проходческих работ и др.).

Очевидно, что математическое описание подобной среды является крайне сложным, а решение конкретных задач обычными аналитическими методами становится практически невозможным из-за непреодолимых математических трудностей. Реальный массив заменяют *геомеханической моделью*, которая с определенной степенью приближения отображает механические свойства реального массива горных пород, закономерности их изменения в пространстве и времени и предопределяет характер реализации механических процессов в массиве. Как уже отмечалось ранее, геомеханическая модель породного массива по сути предопределяет набор физических уравнений среды, используемых при решении задач.

Следует учитывать два основных аспекта. Во-первых, при переходе от массива горных пород к его геомеханической модели ряд структурно-механических особенностей учитываются не в явном виде, а косвенно. Например, массив горных пород с системной трещиноватостью естественного происхождения может быть представлен моделью нетрещиноватой, но анизотропной среды с эквивалентными характеристиками.

Во-вторых, в конкретной горно-геологической и горно-технической обстановке степень проявления различных структурно-механических особенностей может быть таковой, что их учет не внесет принципиальных качественных и количественных изменений в оценку изучаемых механических процессов. Последнее обстоятельство приводит к мысли о целесообразности иметь не одну универсальную геомеханическую модель, а их набор, причем каждая из этих

моделей должна быть эквивалентна реальному массиву по его основному признаку (в данных условиях).

С точки зрения структурно-механических особенностей реальный массив горных пород может быть представлен моделями сплошной и дискретной среды.

По характеру связи между напряжениями и деформациями геомеханические модели сплошной среды подразделяют на модели линейно и нелинейно деформируемой среды, однородной или неоднородной, изотропной или анизотропной.

С точки зрения поведения перечисленных моделей во времени они могут быть отнесены к классу реономных или склерономных сред.

Геомеханика как прикладная дисциплина своими достижениями во многом обязана широкому применению моделей и методов механики сплошной среды, и в первую очередь механики твердого деформируемого тела (теории упругости, теории пластичности, теории предельного равновесия и теории ползучести). Модели дискретной среды лучше отражают реальные свойства породных массивов, и применение их может оказаться весьма перспективным. Однако в настоящее время, несмотря на определенные достижения механики дискретной среды, ее практическое использование представляется затруднительным, поэтому в дальнейшем ограничимся анализом моделей и методов механики сплошной среды. В основе выбора геомеханической модели сплошной среды лежат понятие элементарного объема и условие квазисплошности.

Для оценки влияния слоистости можно использовать те же методы, что и для оценки влияния трещиноватости. Микрослоистость, как и упорядоченная трещиноватость, вызывает появление у породы неоднородности и анизотропии механических свойств.

Массивы горных пород в пределах одной литологической разности считаются квазиоднородными, если коэффициент вариации свойств не превышает 25 %.

По степени литологической неоднородности массивы горных пород подразделяют на два вида:

1) непрерывно-неоднородные, т.е. такие, в которых изменение свойств при переходе от одной литологической разности к другой не вызывает скачкообразного изменения механического состояния;

2) с кусочной неоднородностью, характеризующиеся резким изменением свойств при переходе от одной литологической разности к другой.

Массивы первого вида относят к квазиоднородным. Массивы второго вида являются неоднородными, и их геомеханическая модель должна учитывать макрослоистость.

Однородные, квазиоднородные и непрерывно-неоднородные массивы можно считать сплошными средами, а массивы с кусочной неоднородностью – дискретными.

Следует также иметь в виду относительный характер неоднородности. В зависимости от соотношения размеров исследуемой области массива и элемента неоднородности одна и та же структура может оказаться квазиоднородной и неоднородной.

В зависимости от характера деформирования массива, записанного в виде связей между напряжениями и деформациями, т.е. физических уравнений, геомеханические модели сплошного однородного массива можно разбить на пять классов (рис. 4.4).

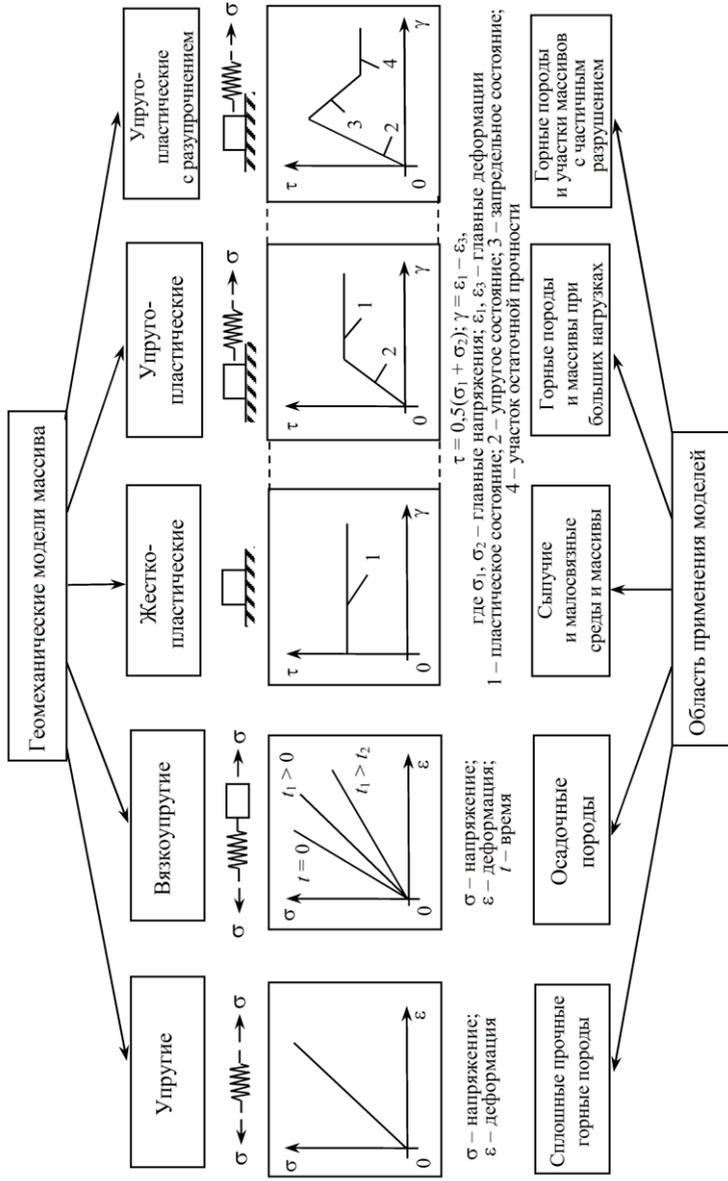


Рис. 4.4. Классификация и области применения основных геомеханических моделей породных массивов

4.3 Упругие модели массива

На рис. 4.5 показаны характерные для горных пород графики «напряжения – деформации», получаемые в результате испытаний. На рисунке показан один цикл «нагрузка – разгрузка».

По результатам испытаний определяются следующие деформационные характеристики горных пород:

- *модуль упругости*, равный отношению приложенных к образцу напряжений σ к упругой продольной деформации при разгрузке ε_e :

$$E_e = \sigma / \varepsilon_e;$$

- *модуль общей деформации*, равный отношению напряжений σ к общей продольной деформации ε при нагрузке:

$$E = \sigma / \varepsilon;$$

- *коэффициент Пуассона*, равный отношению упругой поперечной ε'_e деформации к упругой продольной ε_e :

$$\nu = \varepsilon'_e / \varepsilon_e;$$

- *коэффициент поперечной деформации*, равный отношению общей поперечной деформации к общей продольной:

$$\nu = \varepsilon' / \varepsilon.$$

Общая (полная) деформация образца складывается из упругой ε_e и остаточной (пластической) ε_{pl} :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{pl}.$$

Поскольку при строительстве подземных сооружений деформирование пород происходит только в одном направлении

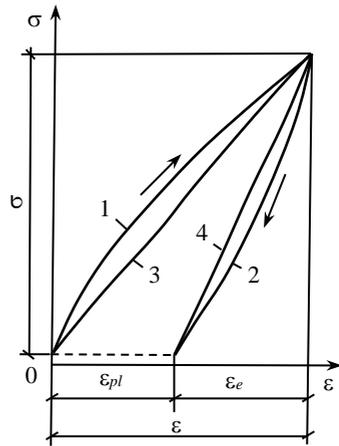


Рис. 4.5. Характерные графики деформирования образца горной породы

1, 2 – продольные деформации образца при нагрузке и разгрузке; 3, 4 – идеализированные графики

(нагрузка), а деформация разгрузки не осуществляется, свойство идеально упругого тела (упругой модели) восстанавливать свою форму и размеры при снятии нагрузки (собственно свойство упругости) в механике подземных сооружений в приложении к горным породам не является существенным и в подавляющем большинстве случаев во внимание не принимается. Существенной является многократно проверенная аппроксимация действительной диаграммы напряжений пород при нагружении (кривая 1 на рис. 4.5) прямой линией 3.

Таким образом, основными характеристиками массива пород при использовании упругой модели массива являются модуль общей деформации (или просто – модуль деформации) E и коэффициент поперечной деформации ν .

В свете изложенного упругую модель массива пород правильнее называть линейно деформируемой моделью (средой).

Объемное напряженное состояние описывается в упругой модели обобщенным законом Гука (2.10) и (2.11).

Анизотропная упругая модель массива пород отличается тем, что учитывает изменение свойств массива в различных направлениях. Например, для пород с четко выраженной сланцеватостью (слоистостью) отмечается различие модулей деформации по направлениям вдоль и поперек слоистости.

Анизотропные среды изучает теория упругости анизотропного тела. В общем случае анизотропная среда характеризуется 18 независимыми константами (изотропная среда – только двумя константами: E и ν).

Самой простой анизотропной моделью массива пород является *трансверсально-изотропная (транстропная)* среда. Она характеризуется постоянством свойств в различных направлениях в плоскости изотропии и отличающимися свойствами в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии.

Транстропная среда может служить моделью массива однородных сланцеватых пород, а в ряде случаев также неоднородных мелкослоистых пород с выраженным

напластованием, которые можно рассматривать как квазиоднородные. Эта модель может быть использована при наличии в массиве преобладающей системы трещин.

Свойства массива пород как трансформной среды описывают пять независимых констант:

- E_1 – модуль деформации при растяжении-сжатии в плоскости изотропии;
- E_2 – модуль деформации при растяжении-сжатии в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии;
- ν_1 – коэффициент поперечной деформации, характеризующий расширение в плоскости изотропии при сжатии в той же плоскости;
- ν_2 – коэффициент поперечной деформации, характеризующий расширение в направлении оси упругой симметрии при сжатии в плоскости изотропии;
- G_2 – модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии.

Рассмотрим протяженную выработку круглой формы сечения, расположенную на достаточно большой глубине (рис. 4.6).

Существенная особенность напряженно-деформированного состояния массива пород, в котором проходят горную выработку, заключается в том, что выработка образуется в заранее напряженном массиве с установившимся полем начальных напряжений. По этой причине нельзя моделировать массив с выработкой, попросту перенося начальные напряжения на бесконечность, так как тогда оказалось бы, что напряжения приложены к массиву после проведения выработки.

Применение упругой модели массива позволяет в соответствии с принципом независимости действия сил учесть

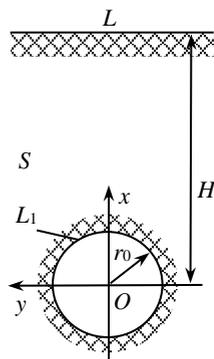


Рис. 4.6. Схема к определению напряжений в массиве, моделируемом упругой средой, вокруг выработки круглого сечения

это важное обстоятельство, рассматривая напряжения в массиве, ослабленном выработкой (рис. 4.7, а), как сумму *начальных* (рис. 4.7, б) и *дополнительных (снимаемых)* (рис. 4.7, в) напряжений.

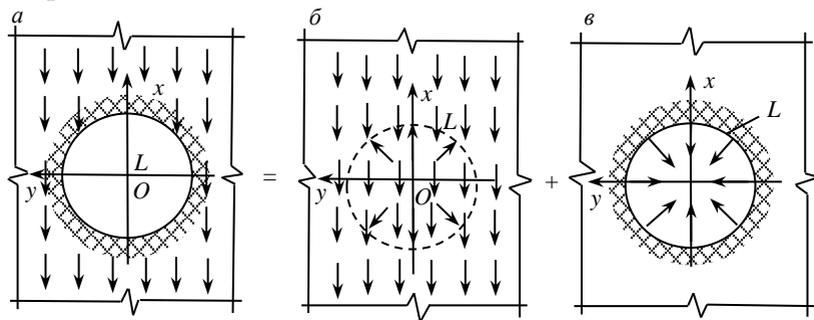


Рис. 4.7. Схема к определению полных напряжений в весоном массиве

Это значит, что с контура будущего отверстия (рис. 4.7, б) необходимо снять имеющиеся на нем радиальные и касательные начальные напряжения, так как контур отверстия свободен от напряжений. В упругой модели эту операцию можно осуществить, прибавив к начальному полю напряжений снимаемое поле напряжений, вызванное действием только снимаемых напряжений, приложенных к контуру отверстия в невесомой плоскости (рис. 4.7, в). Очевидно, что снимаемые напряжения равны по величине начальным и противоположны по знаку.

Понятие *снимаемые напряжения* ввел И.В. Родин. Начальному полю напряжений в массиве соответствует начальное поле деформаций и перемещений, которые произошли до проведения выработки. Следовательно, деформации и перемещения в массиве, происходящие вследствие образования выработки, вызываются только снимаемыми напряжениями.

Для определения напряжений вокруг выработки используется решение плоской задачи теории упругости о полубесконечном весоном массиве (область S), ограниченном земной поверхностью L и ослабленном выработкой (контур L_1 на рис. 4.6).

Искомые компоненты полных напряжений в области S могут быть представлены, как было указано выше, в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}; \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)};\end{aligned}\tag{4.13}$$

где $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$ – начальные напряжения, действовавшие в ненарушенном массиве до образования выработки; $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}$ – дополнительные (снимаемые) напряжения, вызванные образованием выработки.

При заложении выработки на глубине $H > 5r_0$ влияние поверхности земли можно не учитывать и принять схему невесомой плоскости с отверстием (выработкой). Напряжения σ_x и σ_y приложены на границе невесомой плоскости.

Компоненты напряжений в массиве вокруг незакрепленной выработки, представленные в радиальной системе координат, могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \gamma H \left[\frac{1+\lambda}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{1-\lambda}{2} \left(1 + 3 \frac{r_0^4}{r^4} - 4 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \sigma_\theta &= \gamma H \left[\frac{1+\lambda}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{1-\lambda}{2} \left(1 + 3 \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \tau_{r\theta} &= \gamma H \frac{1-\lambda}{2} \left(1 - 3 \frac{r_0^4}{r^4} + 2 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta;\end{aligned}\tag{4.14}$$

где γ – средний удельный вес пород в массиве над выработкой; λ – коэффициент бокового распора в нетронутым массиве; r, θ – соответственно радиальная и угловая координата.

Правильность решения устанавливается путем проверки граничных условий. В данном случае контур сечения выработки должен быть свободен от напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$. Подставляем в выражения (4.14) значения $r = r_0$, после очевидных преобразований получаем $\sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0$. Следовательно, выражения (4.14) являются решением поставленной задачи.

Нормальные тангенциальные напряжения на контуре сечения выработки при $r = r_0$:

$$\sigma_\theta = \gamma H [(1 + \lambda) - 2(1 - \lambda) \cos 2\theta].\tag{4.15}$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (точка A , рис. 4.8) напряжения:

$$\sigma_{\theta} = \gamma H(3\lambda - 1). \quad (4.16)$$

Следовательно, при $\lambda < 1/3$ на контуре в точке A возникают растягивающие напряжения.

При $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$ (точка B , рис. 4.8) напряжения:

$$\sigma_{\theta} = \gamma H(3 - \lambda). \quad (4.17)$$

При $\lambda = 0$

тангенциальное напряжение достигает наибольшего значения, максимальный коэффициент концентрации $K_{\sigma} = \sigma_{\theta}/(\gamma H) = 3$.

При $\lambda = 1$ в гидростатическом поле распределение напряжений вокруг выработки будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \end{aligned} \right\} = \gamma H \left(1 \mp \frac{r_0^2}{r^2} \right);$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

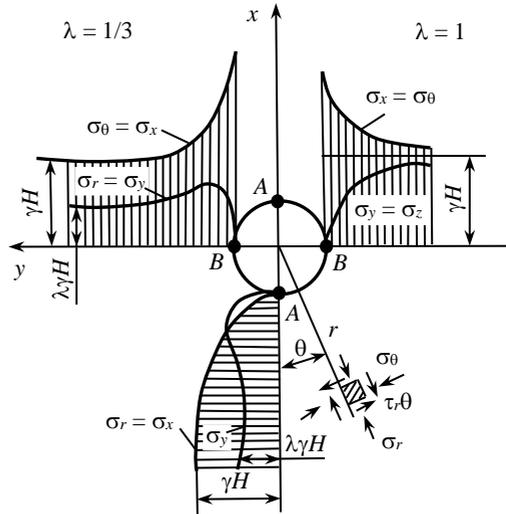


Рис. 4.8. Распределение напряжений вокруг выработок круглого сечения

В этом случае распределение напряжений обладает полярной симметрией, напряжения зависят только от радиуса r и не зависят от угла θ . На контуре сечения выработки ($r = r_0$) нормальные тангенциальные напряжения постоянны и составляют:

$$\sigma_{\theta} = 2\gamma H.$$

Размеры зоны влияния выработки в массиве можно определить из формулы (4.14), приняв допущение, что на границе этой зоны тангенциальная составляющая напряжений σ_{θ} будет превышать фоновые напряжения γH на 5%. Тогда:

$$\sigma_{\theta} = 1,05\gamma H = \gamma H \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right), \quad (4.18)$$

откуда $r \approx 5r_0$.

Напряжения в массиве вокруг вертикального ствола круглого сечения в цилиндрической системе координат (рис. 4.9) описываются выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \gamma H; \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \end{aligned} \right\} &= \lambda\gamma H \left(1 \mp \frac{r_0^2}{r^2}\right); \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

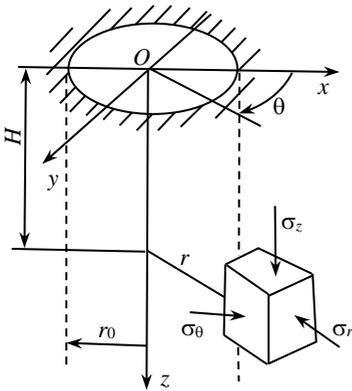


Рис. 4.9. Компоненты напряжений в массиве вблизи вертикальной выработки

Напряжения в важных точках удобно характеризовать безразмерными величинами отношений этих напряжений к начальным напряжениям в рассматриваемых точках. Такие величины называются коэффициентами концентрации напряжений.

С удалением от выработки напряжения стремятся к своим начальным значениям, существовавшим в массиве до ее проведения. Следовательно, проходка выработки вызывает перераспределение напряжений в

массиве в некоторой ограниченной области, называемой зоной влияния выработки.

4.4 Жесткопластические модели массива

Для описания прочности горных пород и материалов крепи горных выработок и обделок подземных сооружений применяются жесткопластические модели на основе теории прочности Мора с линейным критерием прочности Кулона-Мора.

Основные положения теории прочности Мора заключаются в следующем:

1) пластическая деформация (разрушение) происходит путем сдвига по площадкам скольжения;

2) сдвигу по площадке скольжения препятствует сцепление и трение;

3) прочность (пластичность) материала определяется только максимальными и минимальными главными напряжениями (σ_1 и σ_3), среднее по величине главное напряжение (σ_2) оказывает слабое влияние на прочность.

Из схемы (рис. 4.10) следует линейный критерий прочности Кулона – Мора:

$$\tau_c = C + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi, \quad (4.20)$$

где C – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

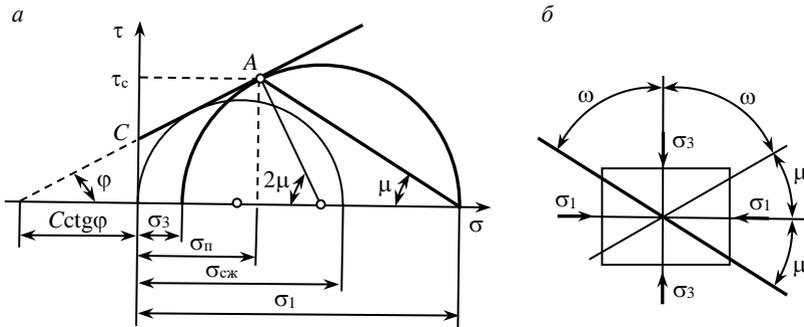


Рис. 4.11. Диаграмма наибольших кругов напряжений – паспорт прочности пород (а) и ориентировка площадок скольжения относительно главных напряжений (б) в пластической среде

Условие (4.20) называют также условием предельного состояния. Графическое изображение этого уравнения

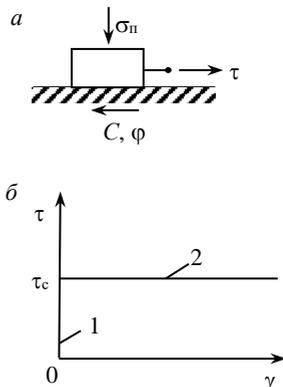


Рис. 4.10. Структурная схема (а) и диаграмма напряжений (б) жесткопластической модели

1 – отсутствие деформаций (жесткий участок); 2 – пластические деформации

представляет собой прямолинейный паспорт прочности горных пород (рис. 4.11, а) – это огибающая наибольших кругов напряжений, которые испытывает порода на пределе прочности. Из геометрии кругов напряжений и огибающей (общей касательной к этим кругам) можно получить следующие соотношения: предел прочности на одноосное сжатие:

$$\sigma_{сж} = \frac{2C\cos\varphi}{1-\sin\varphi}, \quad (4.21)$$

условие прочности в главных напряжениях:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + \beta\sigma_3, \quad (4.22)$$

где $-\beta$ параметр объемной прочности, $\beta = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$.

Условие пластичности (прочности) в наиболее общем виде имеет вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2C\operatorname{ctg}\varphi)^2 \sin^2 \varphi. \quad (4.23)$$

Жесткопластическая модель с критерием прочности Кулона – Мора имеет две прочностные характеристики пород: C и φ . Параметры $\sigma_{сж}$ и β являются производными от первых двух.

Углы наклона площадок скольжения к направлениям наибольшего σ_1 и наименьшего σ_3 главных напряжений (рис. 4.11, б):

$$\begin{aligned} \mu &= \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right); \\ \omega &= \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Следует отметить, что разрушение пород путем сдвига происходит при всестороннем сжатии. При появлении растягивающих напряжений разрушение происходит путем отрыва по площадке, перпендикулярной к направлению растягивающих напряжений. Это обстоятельство ограничивает, строго говоря, применение модели Кулона только областью сжимающих напряжений σ .

Действительные огибающие наибольших кругов напряжений, построенные по результатам стабилметрических испытаний, не являются прямыми линиями, а имеют слегка выпуклую форму. С увеличением шарового тензора напряжений огибающие выполаживаются. Вместе с тем для решения задач геомеханики огибающие наибольших кругов напряжений на

наиболее характерных участках вполне допустимо заменять прямыми линиями, характеризующимися эквивалентными параметрами C и φ .

В настоящее время в качестве характеристики массива пород продолжает широко применяться предложенный

М.М. Протоdjяконовым коэффициент крепости пород («кажущийся коэффициент трения»).

М.М. Протоdjяконов рассматривал массив пород состоящим из отдельных кусков, лишь отчасти связанных между собой, его можно уподобить настоящей сыпучей среде. Коэффициент крепости – это характеристика, аналогичная коэффициенту внутреннего трения сыпучих тел (только значительно его превышающая), так как учитывает сцепление, существующее в массиве. Коэффициенту крепости соответствует кажущийся угол внутреннего трения φ^* (рис. 4.12):

$$f = \operatorname{tg}\varphi^*. \quad (4.25)$$

М.М. Протоdjяконов является основоположником механики горных пород. Он разработал применяемую поныне классификацию горных пород по крепости, а также ставшую классической теорию давления горных пород (теорию свода).

Предложенная М.М. Протоdjяконовым характеристика массива является приближенной. Однако выбор единой универсальной характеристики горных пород оказался, как показала практика, весьма удачным.

Жесткопластические модели массива, в которых давление пород на крепь определяют без учета ее деформационно-силовой характеристики, используют в четырех основных вариантах:

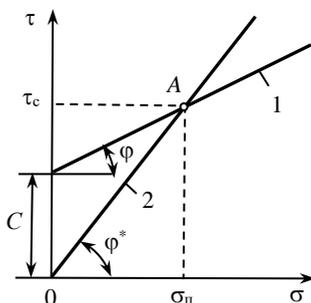


Рис. 4.12. Схема, иллюстрирующая отличие угла внутреннего трения ρ от кажущегося угла внутреннего трения ρ^* проф. М.М. Протоdjяконова:
1 – огибающая наибольших кругов напряжений; 2 – характеристика массива пород по М.М. Протоdjяконову

1) модель полного веса столба породы:

$$p_g = \gamma H; \quad (4.26)$$

2) модель неполного веса столба породы:

$$p_g = \Phi \gamma H; \quad (4.27)$$

3) модель балок (плит):

$$p_g = 0 \text{ при } L_{уст} \geq 2a; p_g = \gamma b_c \text{ при } L_{уст} < 2a; \quad (4.28)$$

4) модель свободообразования:

$$p_g = \Phi \gamma a; \quad (4.29)$$

где p_v – интенсивность вертикальной нагрузки на крепь, кПа; γ – удельный вес породы, кН/м³; H – высота до поверхности от кровли выработки, м; a – полупролет или радиус выработки, м; $L_{уст}$ – устойчивый пролет некоторого слоя в кровле, м; b_c – высота зоны обрушения слоев пород до устойчивого слоя, м; Φ – члены формул, характеризующие долю нагрузки от максимальной.

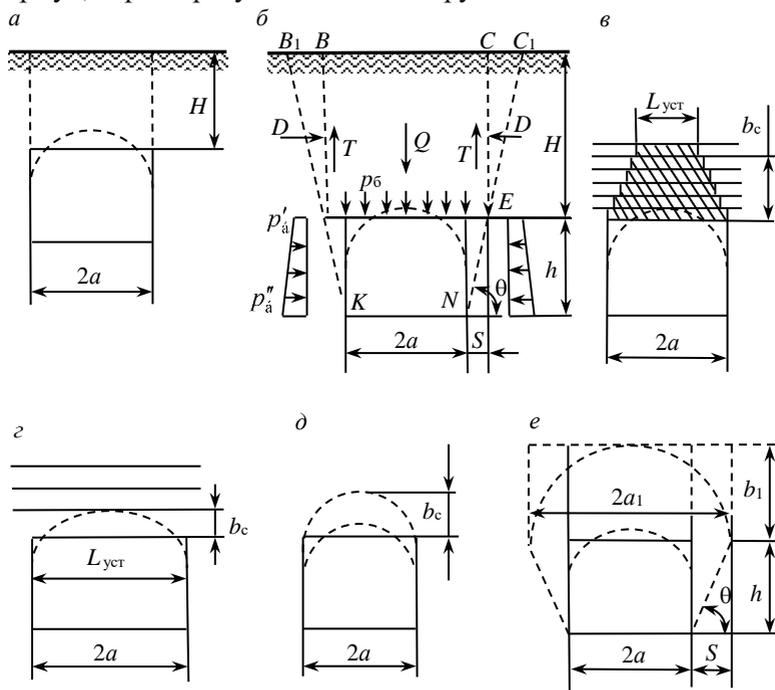


Рис. 4.13. Схемы к расчету горного давления по жесткопластическим моделям

Первую модель (рис. 4.13, а) применяют при неустойчивых породах и небольшой глубине заложения выработки ($H \leq 2a$), когда над ней не формируется устойчивая плита или свод естественного равновесия.

Вторую модель применяют в тех же случаях, что и первую, но при глубине $H \geq (1 \div 2)2a$. При расчетном методе Бирбаумера (рис. 4.13, б) вес $Q = 2(a + S)\gamma H$ столба породы $ABCE$ частично уравновешивается силами трения T , вызванными боковым давлением D призм сползания ABB_1 и CC_1E :

$$T = D \operatorname{tg} \varphi = 0,5\gamma H^2 \lambda_6 \operatorname{tg} \varphi; \quad (4.30)$$

где φ – угол внутреннего трения пород; $\lambda_6 = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{90 - \varphi}{2} \right)$.

Следовательно:

$$p_e = \gamma H \left(1 - \frac{H}{2(a+S)} \lambda_6 \operatorname{tg} \varphi \right). \quad (4.31)$$

Третья модель, предназначенная для слоистого массива пород, построена на отыскании предельного пролета $L_{\text{пр}}$ (рис. 4.13, в, з), при котором слой породы (балка или плита) мощностью m способен сохранять устойчивость. Если $L_{\text{уст}} < 2a$, то над выработкой может образоваться вывал высотой b_c (рис. 4.13, з), вес которого и определяет вертикальную нагрузку на крепь. Если $L_{\text{уст}} \geq 2a$, то кровля выработки устойчива и регулярного давления на крепь выработки не должно быть.

Четвертая модель предназначена для сыпучих или трещиноватых с небольшим сцеплением пород, способных образовывать над выработкой свод естественного равновесия, воспринимающий на себя давление вышележащей толщи. Давление на крепь создается весом пород в своде обрушения высотой b_c или b_1 (рис. 4.13, д, е). Интенсивность вертикальной нагрузки:

$$p_e = \gamma b_c \text{ или } p_e = \gamma b_1. \quad (4.32)$$

Высота параболического свода обрушения (по М.М. Протодяконову) при устойчивых боках выработки (рис. 4.13, д):

$$b_c = a/f; \quad (4.33)$$

где f – коэффициент крепости пород.

При неустойчивых боках, когда в них образуются призмы сползания:

$$b_1 = \frac{a_1}{f} = \frac{a + h \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \varphi_6}{2}\right)}{f}; \quad (4.34)$$

где h – высота выработки; $\varphi_6 = \operatorname{arctg} f$ – кажущийся угол внутреннего трения боковых пород.

Интенсивность бокового давления пород на крепь (при неустойчивых боках) во всех рассмотренных схемах определяют как давление сыпучих пород на подпорную стенку с учетом пригрузки сверху p_B призмы сползания высотой h (см. рис. 4.13).

Следовательно, интенсивность боковой нагрузки на уровне кровли и почвы выработки:

$$\begin{aligned} p'_6 &= p_B \lambda_6; \\ p''_6 &= (p_B + \gamma_6 h) \lambda_6. \end{aligned} \quad (4.35)$$

В большинстве моделей свода глубина заложения выработки от поверхности не учитывается.

4.5 Уругопластические модели массива

Для массива горных пород, в котором по мере роста напряжений имеют место вначале упругие деформации, а при некоторой величине напряжений – пластические, применимы уругопластические модели (рис. 4.14).

В начальный период существования выработки наибольшая концентрация напряжений имеет место на ее контуре. При достижении напряжениями выработки предела прочности горной породы на сжатие она переходит в предельное состояние. Здесь порода находится в двухосном напряженном состоянии.

Для определения размеров зоны предельного состояния массива вокруг выработки необходимо знать

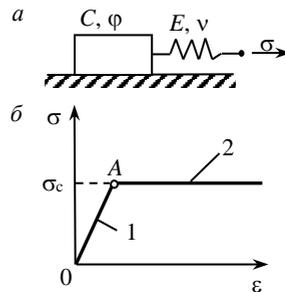


Рис. 4.14. Структурная схема (а) и диаграмма напряжений уругопластической модели (б) 1 – область упругих деформаций; 2 – область пластических деформаций

прочность горных пород в объемном напряженном состоянии. Согласно теории прочности Мора, основные положения которой были сформулированы в разделе 4.4, она может быть представлена в общем виде математической зависимостью:

$$\tau = f(\sigma); \quad (4.36)$$

где $\tau = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3)$ – наибольшее касательное напряжение; $\sigma = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$ – среднее нормальное напряжение; σ_1, σ_3 – главные напряжения ($\sigma_1 > \sigma_3$).

Согласно этому условию, породы переходят в предельное состояние, если наибольшее касательное напряжение при данном напряженном состоянии достигнет огибающей кругов Мора. При меньших значениях τ породы находятся в упругом состоянии. При этом величина τ зависит от среднего напряжения σ .

В зависимости (4.36) аналитический вид функции неизвестен. Для описания огибающей были предложены различные линейные и нелинейные зависимости, получившие названия условий предельного состояния, условий прочности или условий пластичности. Среди условий прочности, применяемых для описания породных массивов, можно отметить линейное условие Кулона-Мора, линейное условие Друкера-Прагера, нелинейное условие Продьяконова, нелинейное условие Хоека-Брауна, нелинейное условие Ставрогина.

Наибольшее практическое распространение имеет линейная функция, называемая линейным условием прочности Кулона-Мора, рассмотренная ранее и отраженная в уравнениях (4.20), (4.21) и (4.22).

Из нелинейных зависимостей наиболее полно описывает огибающую кругов главных напряжений экспоненциальное условие, предложенное А.Н. Ставрогиным:

$$\tau = \tau_0 e^{AC}; \quad (4.37)$$

где $C = \sigma_3/\sigma_1$; A, τ_0 – характеристики горной породы, их значения для основных типов пород определены экспериментально

Натурные наблюдения за состоянием массива пород вокруг выработок показывают, что около контура образуется область предельного состояния. За этой областью породы деформируются по закону Гука.

Упругопластическая модель деформирования массива пород вокруг горных выработок была исследована Р. Феннером, А. Лабассом и другими учеными. При этом рассматривалось сечение массива плоскостью, перпендикулярной к оси выработки и исследовалось напряженное состояние в окрестности последней. Оно моделируется распределением напряжений в бесконечной плоскости с круговым отверстием, которое сжимается на бесконечности усилиями с интенсивностью:

$$\sigma_x = \lambda\gamma H; \sigma_y = \gamma H; \tau_{xy} = 0; \quad (4.38)$$

где H – глубина заложения выработки; γ – средний удельный вес горных пород; λ – коэффициент бокового распора.

На контуре кругового отверстия приложено нормальное усилие p , моделирующее работу крепи:

$$\sigma_r = p; \tau_{r\theta} = 0. \quad (4.39)$$

Массив горных пород представляется однородным и изотропным. В области предельного состояния компоненты напряжений удовлетворяют условию Кулона – Мора (4.20). Область полностью охватывает контур выработок. К.В. Руппнейтом получено приближенное решение вышеприведенной упругопластической задачи, а А.Г. Протосеней – точное решение.

Область предельного состояния вокруг выработки при $\lambda < 1$ имеет форму эллипса, вытянутого в горизонтальном направлении:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.40)$$

Здесь $a = c_0 + c_1$; $b = c_0 - c_1$. Тогда:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{0,5(1+\lambda)\gamma H + C \operatorname{ctg} \varphi}{p + C \operatorname{ctg} \varphi} (1 - \sin \varphi); \\ c_1 &= \frac{(1-\lambda)\gamma H c_0^{1-\alpha}}{\alpha(p + C \operatorname{ctg} \varphi)}; \\ \alpha &= \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Приведенное решение имеет смысл при $b \geq 1$.

Решение приведенной выше упругопластической задачи для условия предельного состояния А.Н. Ставрогина (4.37) А.Г. Протосене удалось получить только приближенным путем.

Уравнение области предельного состояния R_L находится в виде разложения по малому параметру ε :

$$R_L = r_0 + \varepsilon r_1 \cos 2\theta. \quad (4.42)$$

Здесь $\varepsilon = 0,5(1 - \lambda)$; θ – угловая координата.

$$r_0 = \frac{\sqrt{\tau_0 c_1 e^{d \left(\frac{2A}{A - \ln(dc)} \right)}}}{\lambda_1 \gamma H d (A - \ln(dc))^A};$$

$$r_1 = \frac{2r_0}{\lambda_1 d} \cdot \frac{(A - \ln(dc))^2 - A(1 + A - \ln(dc))}{(A - \ln(dc))^2 - 2A(1 + A - \ln(dc))}, \quad (4.43)$$

$$c_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_0} \cdot \left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{2A} e^{-\frac{2A}{A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_0}}};$$

$$c = \frac{\lambda_1 \gamma H}{\tau_0}; \lambda_1 = 0,5(1 + \lambda).$$

Значение постоянной d находят из уравнения:

$$A - \ln(dc) = d(A + \ln(dc)). \quad (4.44)$$

Наибольшее касательное напряжение τ_1 на контуре выработки является решением уравнения:

$$p = \frac{2\tau_1 \ln \frac{\tau_1}{\tau_0}}{A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_0}}. \quad (4.45)$$

Приведенные зависимости позволяют получить размер области предельного состояния вокруг выработки кругового очертания.

Для выработок некругового очертания точное решение вызывает значительные математические трудности. Поэтому для решения практических задач выработку некругового очертания часто заменяют круговой выработкой с эквивалентным радиусом R_0 и используют изложенные выше формулы. Здесь:

$$R_0 = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad (4.46)$$

где S – площадь сечения выработки некругового сечения.

4.6 Модель хрупкого разрушения пород

Образование зоны разрушения вокруг выработки в условиях гидростатического состояния нетронутого массива было впервые учтено при выводе уравнения равновесных состояний

массива Ю.М. Либерманом. Он рассмотрел случай идеально хрупкой среды (кривая 1 на рис. 4.15), в которой зона пластических деформаций является одновременно зоной разрушения, а граница этой зоны ($r = r_c$, рис. 4.16) – границей сред с разными свойствами.

В соответствии с принятой моделью идеально хрупкого материала, который полностью разрушается по достижении предела прочности, совпадающего с пределом упругости, в зоне разрушения материал представлен идеально сыпучей средой. В неразрушенном состоянии он характеризуется сцеплением C и углом внутреннего трения φ . Угол внутреннего трения на основании данных экспериментов принят в обеих зонах одинаковым.

Радиус зоны разрушения r_c найдем из условия, что граница этой зоны является границей раздела материалов с различными свойствами. На границе раздела при подходе к ней со стороны массива упругие напряжения должны удовлетворять условию предельного состояния для исходного неразрушенного материала. Радиальные напряжения на границе упругой и пластической зон при $r = r_c$ равны в силу непрерывности, откуда:

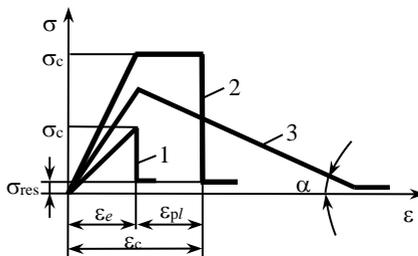


Рис. 4.15. Диаграммы напряжений некоторых основных механических моделей пород, учитывающих деформирование за пределом прочности: 1 – хрупкой; 2 – упругопластической и ограниченной пластической

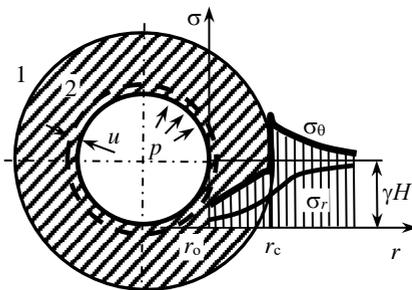


Рис. 4.16. Распределение напряжений в массиве вокруг выработки в идеально хрупком массиве: 1 – упругая область; 2 – зона полного разрушения

$$r_c = \left[(1 - \sin \varphi) \frac{2\gamma H - \sigma_{сж}}{2p} \right]^{1/\alpha} R_0; \quad (4.47)$$

где $\sigma_{сж}$ – предел прочности породы на одноосное сжатие; p – отпор крепи.

Характер распределения напряжений в массиве вокруг выработки показан на рис. 4.16. В данном случае на границе зоны разрушения имеется скачок нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , вызванный резким изменением прочности (см. рис. 4.15) при переходе из упругой области в пластическую.

Смещение на контуре выработки определяется аналогично вышеизложенному на основании решения дифференциального уравнения неразрывности (совместности) деформаций. В рассматриваемом случае уместно воспользоваться ассоциированным законом течения, так как разрушение материала несомненно происходит с увеличением его объема.

Окончательный вид уравнения для радиальных смещений контура:

$$u = \frac{r_0}{2G} \left[\left(\gamma H - \frac{\sigma_{сж}}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\sigma_{сж}}{2} \right] \left[(1 - \sin \varphi) \frac{2\gamma H - \sigma_{сж}}{2p} \right]^{1/\sin \varphi}. \quad (4.48)$$

4.7 Реологические модели массива

Реологические модели в отличие от рассмотренных ранее моделей являются нестационарными во времени.

Структурные схемы реологических моделей включают вязкий элемент Ньютона. Он представляет собой поршень в цилиндре с вязкой жидкостью. В вязком элементе напряжения пропорциональны скорости деформации:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}; \quad (4.49)$$

где η – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

Величина, обратная вязкости, называется текучестью. Вязкость характеризуется также коэффициентом кинематической вязкости:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}; \quad (4.50)$$

где ρ – плотность.

Модели, включающие упругие и вязкие элементы, называют *вязкоупругими* (рис. 4.17).

При ступенчатом нагружении в среде в начальный момент возникают упругие мгновенные деформации (рис. 4.18 *a*), а затем во времени развиваются деформации ползучести.

Скорость ползучести во времени уменьшается и через некоторое время может стать нулевой (кривая 1) или постоянной (участок *BC* на кривой 2).

Вязкоупругие модели

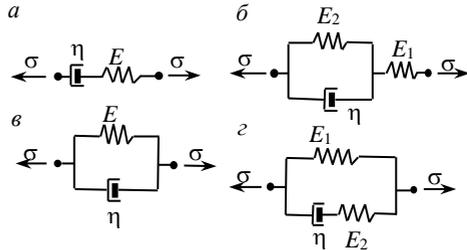


Рис. 4.17. Структурные схемы некоторых вязкоупругих моделей: *a* – Максвелла; *б* – Кельвина; *в, г* – обобщенной вязкоупругой среды

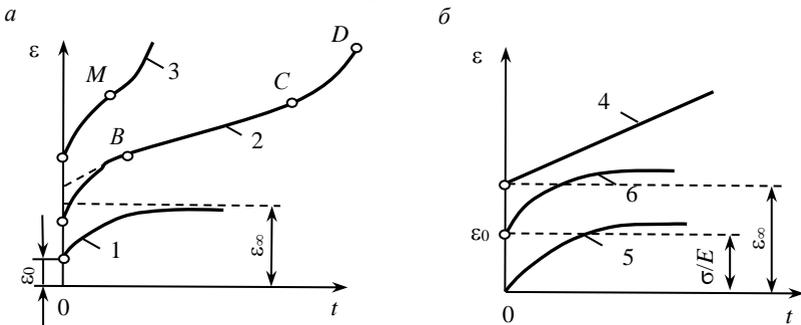


Рис. 4.18. Кривые ползучести

1 – затухающая (ограниченная) ползучесть; 2 – установившаяся (незатухающая) ползучесть; 3 – неограниченная прогрессирующая ползучесть; 4 – модель Максвелла; 5 – модель Кельвина; 6 – обобщенная модель

При достаточно большом уровне напряжений кривая ползучести 3 может иметь два участка неустановившейся ползучести, разделенных точкой перегиба *M*. Участки характеризуются убывающей, а затем сразу возрастающей скоростью деформации, приводящей к разрушению.

Ордината кривой ползучести в произвольный момент времени включает упругую (условно мгновенную) деформацию ε_e и вязкоупругую ε_{et} , развивающуюся во времени:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_{et}. \quad (4.51)$$

Для описания ползучести используются структурные модели и соответствующие им физические уравнения (уравнения состояния), получаемые на основании испытания горных пород.

Рассмотрим *линейную наследственную среду*. Теория линейной наследственной ползучести позволяет описать деформирование горных пород во времени с учетом истории нагружения. Теория предложена Л. Больцманом и развита В. Вольтерра.

В соответствии с теорией, деформации среды под действием внешних сил продолжают развиваться после их приложения и снятия (наследственность), при этом деформации пропорциональны действовавшим в разные моменты времени напряжениям (линейность) и складываются между собой (принцип суперпозиции).

Понятие о линейности можно проиллюстрировать графиками (рис. 4.19). Перестроим кривые ползучести в координатах ε , σ для фиксированных моментов времени t_i ($i = 0, 1, 2, 3$). Если получившиеся при этом изохронные зависимости (рис. 4.19, а) являются прямыми линиями, то мы имеем дело с линейной наследственной средой.

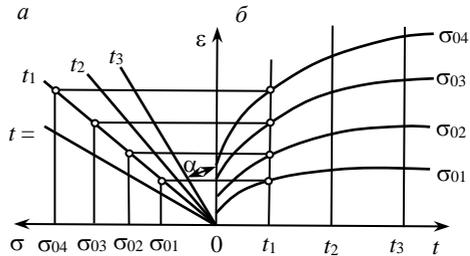


Рис. 4.19. Изохронные кривые (а) и кривые ползучести пород (б)

Согласно указанной теории, ползучесть пород описывается интегральным уравнением Вольтерра второго рода:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t L(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau; \quad (4.52)$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – напряжения и деформации в момент времени t ; $L(t-\tau)$ – функция влияния, ядро наследственности (ползучести).

Заметим, что уравнение (4.52) с экспоненциальными ядрами ползучести описывает модели Максвелла, Кельвина и обобщенной вязкоупругой среды как частные случаи.

Ж.С. Ержанов экспериментально установил, что деформирование горных пород до определенного уровня нагружения соответствует уравнению (4.52) с ядром в виде степенной функции (ядро типа Абеля):

$$L(t-\tau) = \delta(t-\tau)^{-\alpha}; \quad (4.53)$$

где δ и α – характеристики ползучести, получаемые экспериментально, δ – в секундах в степени $\alpha - 1$; $0 < \alpha < 1$.

С учетом ядра (4.53) уравнение ползучести (4.52) горных пород приобретает следующий вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{\delta t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right). \quad (4.54)$$

Уравнение (4.54) можно представить в виде:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 / \bar{E}; \quad (4.55)$$

где σ_0 – начальное напряжение; \bar{E} – временной оператор.

Ю.Н. Работнов показал, что задачу теории линейной наследственной ползучести можно формально рассматривать как задачу теории упругости, в которой вместо упругих постоянных необходимо использовать временные операторы с ядром ползучести. Указанное положение Ю.Н. Работнов назвал принципом Вольтерра.

На основании этого принципа в задачах механики подземных сооружений, в которых граничные условия и объемные силы не зависят от времени, операторные выражения для упругих постоянных можно заменить обычными алгебраическими выражениями, соответствующими ядру интегрального уравнения. Метод решения задач теории ползучести с использованием временных функций вместо упругих постоянных называется методом переменных модулей.

Для определения переменных модулей А.М. Линьков и Б.З. Амусин предложили использовать Φ -функцию ползучести:

$$\Phi = \frac{\delta t^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (4.56)$$

На основании изложенного уравнение ползучести (4.54) приобретает вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 + \Phi). \quad (4.57)$$

Согласно методу переменных модулей, влияние времени учитывается путем замены деформационных характеристик массива временными функциями. В частности, модуль деформации пород E (см. рис. 4.19, *a*) можно представить как некоторую функцию времени E_t . Из уравнения (4.54) имеем:

$$E_t = \frac{E}{1 + \Phi}. \quad (4.58)$$

Временные функции для коэффициента Пуассона и модуля сдвига имеют вид:

$$\begin{aligned} \nu_t &= 0,5 - \frac{0,5 - \nu}{1 + \Phi}; \\ G_t &= \frac{G}{1 + \frac{3\Phi}{2(1 + \nu)}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Вязкопластические модели

Вязкопластические модели массива пород можно разделить на две группы. В одной из них породы рассматриваются как вязкие жидкости, движение которых описывается дифференциальными уравнениями Навье–Стокса. В другой группе моделей свойство вязкости лишь дополняет другие свойства (упругость, пластичность) и вязкий элемент выполняет функцию задержки во времени упругих и пластических деформаций.

В модели вязкой жидкости коэффициент вязкости η , характеризующий сопротивление перемещению одной части текучих тел относительно другой, является величиной постоянной для жидкостей и составляет для воды $0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ($1 \cdot 10^{-9} \text{ МПа}\cdot\text{с}$), для битума - $3,6 \cdot 10^5 \text{ МПа}\cdot\text{с}$. Коэффициенты вязкости пород изменяются от $1,1 \cdot 10^{11} \text{ МПа}\cdot\text{с}$ для аргиллитов до $220 \cdot 10^{11} \text{ МПа}\cdot\text{с}$ – для мрамора.

Вязкопластические модели второй группы учитывают развитие во времени упругих и пластических деформаций.

При параллельном соединении элементов (пластического и вязкого) получается модель среды, которая впервые была

исследована Ф.Н. Шведовым (1900 г.), а затем Ю. Бингамом (1922 г.). При напряжениях, не превышающих предельные ($\sigma < \sigma_{сж}$), среда деформируется как упругая:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (4.60)$$

Если напряжения превосходят предельные ($\sigma > \sigma_{сж}$), то разность между ними воспринимается вязким элементом, который деформируется со скоростью:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{(\sigma - \sigma_{сж})}{\eta}. \quad (4.61)$$

Скорость полной деформации:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{(\sigma - \sigma_{сж})}{\eta}. \quad (4.62)$$

Уравнение ползучести при постоянных напряжениях $\sigma = \sigma_{сж} = \text{const}$ имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{(\sigma_0 - \sigma_{сж})}{\eta} t. \quad (4.63)$$

Кривые ползучести являются прямыми линиями, скорость деформации постоянна и пропорциональна разности $(\sigma_0 - \sigma_{сж})$.

Модель Шведова–Бингама обладает релаксацией напряжений. При одномерном анализе деформирования массива пород, моделируемого средой Шведова–Бингама, ослабленного выработкой круглого сечения, вокруг выработки образуется зона пластического течения (релаксации напряжений), радиус которой $r_e(t)$ зависит от времени.

В основу решения задачи положено уравнение состояния среды, в котором в качестве эффективных напряжений и деформаций приняты соответственно разность главных напряжений и тангенциальные деформации:

$$\sigma = \sigma_\theta - \sigma_r; \quad \varepsilon = \varepsilon_\theta; \quad (4.64)$$

где σ_θ , σ_r – тангенциальные и радиальные напряжения вокруг выработки.

Заметим, что деформации вызываются дополнительными (снимаемыми) напряжениями. В начальный момент времени ($t = 0$) в массиве образуется выработка, вокруг которой массив испытывает

мгновенные упругие деформации. Дальнейшее деформирование массива происходит в соответствии с уравнением состояния (4.63) при условии несжимаемости.

В результате решения задачи Ю.А. Песляком и К.В. Руппенейтом, которое здесь не приводится, получено следующее уравнение относительно радиуса зоны пластического течения вокруг выработок с гидростатическим начальным напряженным состоянием нетронутого массива:

$$e^{\frac{t}{t_0}} - 1 = \frac{r_e^2(t) - r_e^2(0)}{r_0^2 \left[\ln\left(\frac{r_e(\infty)}{r_0}\right) - \ln\left(\frac{r_e(0)}{r_0}\right)^2 \right]}, \quad (4.65)$$

где t_0 – время релаксации напряжений; $r_e(0)$, $r_e^2(t)$, $r_e(\infty)$ – радиус зоны вязкопластического течения вокруг выработок соответственно в начальный момент времени $t = 0$, в момент времени t и при $t \rightarrow \infty$, т.е. предельное значение радиуса; r_0 – радиус выработки.

Следовательно, нельзя получить в явном виде зависимость радиуса указанной зоны от времени. Для графического построения этой зависимости можно пользоваться соотношением:

$$\frac{t}{t_0} = \ln \left\{ 1 + \frac{r_e^2(t) - r_e^2(0)}{r_0^2 \left[\ln\left(\frac{r_e(\infty)}{r_0}\right) - \ln\left(\frac{r_e(0)}{r_0}\right)^2 \right]} \right\}. \quad (4.66)$$

Смещения контура сечения выработки описываются выражением:

$$u(t) = r_0 \frac{\gamma H}{2G} \left(1 - \frac{p}{\gamma H} \right) \left(1 + \frac{t}{t_0} \right). \quad (4.67)$$

где G – модуль сдвига; p – давление на крепь.

При последовательном соединении элементов: вязкого, пластического и упругого – получается среда, которая при $\sigma < \sigma_{сж}$ ведет себя как вязкоупругая (модель Максвелла), а при $\sigma \geq \sigma_{сж}$ деформируется подобно идеально пластической.

4.8 Контрольные вопросы

1. Что называется начальным (естественным) напряженным состоянием породного массива? Какие основные факторы влияют на его формирование?

2. Перечислите и раскройте основные гипотезы о естественном напряженном состоянии.

3. Дайте определение понятию «горное давление». Какие основные формы проявления горного давления выделяют в геомеханике?

4. Что понимается под геомеханическими моделями породных массивов? Каковы основные причины существования большого разнообразия геомеханических моделей?

5. Перечислите основные классификации геомеханических моделей породных массивов.

6. Каковы основные положения, заложенные в упругую модель (модель линейно деформируемого тела) поведения породного массива?

7. Раскройте сущность гипотезы Родина о «снимаемых» напряжениях, используемой в рамках упругой модели поведения породного массива.

8. Раскройте основные положения жесткопластической модели породного массива.

9. Каковы основные расчетные схемы для определения нагрузки на крепь подземной горной выработки, составленные на основании использования жесткопластической модели породного массива?

10. Раскройте основные положения упругопластической модели породного массива.

11. Раскройте основные положения модели линейной наследственной среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Механика сплошной среды является фундаментальной дисциплиной для большинства инженерных специальностей, а раздел механики сплошной среды механика твердого деформируемого тела – это теоретическая основа многих специальных разделов механики. Поэтому авторы настоящего учебного пособия попытались обратить внимание прежде всего на разработку классификации по основным разделам дисциплины, установление логических взаимосвязей между элементами классификаций и методы исследования и решения практических задач. Авторы убеждены, что, если сегодняшние студенты, изучив учебное пособие, получают достаточное представление о методах решения практических задач механики сплошной среды и геомеханики, то основная цель обучения в этом направлении будет достигнута.

Основная часть учебного пособия посвящена анализу существующих подходов и методов построения геомеханических моделей массивов в зависимости от их геологического строения, физико-механических свойств, степени нарушенности и истории нагружения.

При построении геомеханических моделей следует, прежде всего, обратить внимание на процессы деформирования и разрушения породных массивов, которым принадлежит определяющая роль в потере устойчивости горных выработок.

В учебном пособии рассмотрены только основные геомеханические процессы и модели, описывающие напряженно-деформированное состояние массивов.

Объем учебного пособия не позволил в достаточной степени изложить теоретические методы решения геомеханических задач. Ознакомиться с этими методами можно в литературе, которая приведена в рекомендательном библиографическом списке.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник, МГУ, 1990 г.
2. Баклашов И.В. Геомеханика. М.: Изд-во Моск. гос. горного ун-та. 2004. Т.1. 207 с.
3. Баклашов И.В. Механика подземных сооружений и конструкций крепей / И.В.Баклашов, Б.А.Картозия. М.: Недра, 1984. 411 с.
4. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. М.: Недра, 1989. 270 с.
5. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений: Учебник для вузов. 2-е изд. М.: Недра, 1994. 382 с.
6. Ставрогин А.Н. Механика деформирования и разрушения горных пород / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1992. 224 с.
7. Ставрогин А.Н. Пластичность горных пород / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1970. 300 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Теории напряжений и деформаций.....	9
1.1 Силы, напряжения и напряженное состояние.....	9
1.2 Напряжения на произвольных наклонных площадках. Условия на поверхности	13
1.3 Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений. Сферический тензор и девиатор напряжений	15
1.4 Перемещения и деформации в точке тела. Тензор деформаций. Связь между перемещениями и деформациями (формулы Коши).....	18
1.5 Потенциальная энергия деформации. Полная потенциальная энергия системы	22
1.6 Контрольные вопросы	24
2. Основные уравнения механики твердого деформируемого тела и пространственная задача механики сплошной среды.....	25
2.1 Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).....	26
2.2 Уравнения неразрывности деформаций (тождественные соотношения Сен-Венана)	28
2.3 Физические уравнения	30
2.4 Способы решения основных уравнений механики твердого деформируемого тела	34
2.5 Решение задачи в перемещениях	35
2.6 Решение задачи в напряжениях.....	37
2.7 Теорема единственности. Методы решения задачи механики твердого деформируемого тела.....	39
2.8 Контрольные вопросы	40
3. Механические свойства массива пород.....	41
3.1 Основные понятия и определения.....	41
3.2 Механизм деформирования и разрушения горных пород	43
3.3 Прочность горных пород	49
3.4 Реологические свойства горных пород.....	52
3.5 Структурная нарушенность массивов горных пород...	57
3.6 Контрольные вопросы	74

Н.А. Беляков, М.А. Карасев, В.Л. Трушко

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Учебное пособие

Изд. лицензия ЛР №065684 от 19.02.98

Подписано в печать 06.05.2019 г.

Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 6,6. Тираж 100 экз.

Заказ № 5107.

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика

в ООО «Издательство “ЛЕМА”»

199004, Россия, Санкт-Петербург, 1-я линия В.О., д.28

тел.: 323-30-50, тел./факс: 323-67-74

e-mail: izd_leva@mail.ru

<http://www.levaprint.ru>