

В. В. Кадет

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации
по нефтегазовому образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям
130503 «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений»,
130504 «Бурение нефтяных и газовых скважин»
направления подготовки дипломированных специалистов
130500 «Нефтегазовое дело»
и по направлению подготовки магистров 130500 «Нефтегазовое дело»*



Центр Лит Нефтегаз

Москва
2008

УДК 622.271.63

ББК 33.36

К13

К13 Кадет В. В. Методы теории перколяции в подземной гидромеханике. – М.: Изд-во ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. – 96 с.

ISBN 978-5-902665-17-5

Рецензенты:

д. ф.-м. н., проф. *М. Э. Эглит*,

д. ф.-м. н., проф. *В. В. Калинин*

Изложены основные идеи и принципы теории перколяции – науки о поведении и свойствах неоднородных сред, в том числе пористых горных пород, – а также построения перколяционных моделей процессов переноса в таких средах.

Представлены принципиально новые математические модели, позволяющие проводить как качественные оценки, так и количественные расчеты основных характеристик многофазных фильтрационных процессов.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 130503 «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений», 130504 «Бурение нефтяных и газовых скважин» направления подготовки дипломированных специалистов 130500 «Нефтегазовое дело» и по направлению подготовки магистров 130500 «Нефтегазовое дело», а также целого ряда смежных специальностей – 130401 «Физические процессы нефтегазового производства», 010501 «Прикладная математика», магистрантов и аспирантов, преподавателей, широкого круга инженеров и научных работников.

Издание подготовлено на кафедре нефтегазовой и подземной гидромеханики РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина на базе курса лекций, читаемых автором в течение ряда лет.

ББК 33.36

ISBN 978-5-902665-17-5

© ЦентрЛитНефтеГаз, 2008

© Кадет В. В., 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Создание новых и развитие существующих технологий увеличения дебитов скважин, добывающих полезные ископаемые (воду, нефть, газ, металлы), невозможно без углубленного исследования процессов переноса флюидов в горных породах.

Вектор развития научных исследований ориентирован при этом на выяснение основных механизмов, определяющих характерные особенности макроскопических процессов, и, соответственно, возможностей влияния на них.

Важно отметить, что на сегодняшний день потенциал традиционного феноменологического подхода к решению данной задачи практически исчерпан, поскольку для этого требуется переход на следующий уровень сложности – микромеханический.

Например, среды со сложной гетерогенной микроструктурой, к каковым относятся и пористые горные среды, где теряет справедливость предположение о сплошности среды, представляют собой объекты, исследование которых невозможно в рамках классической феноменологии. В то же время очевидно, что структура пустотного пространства оказывает существенное влияние на характер фильтрации в микронеоднородной среде. Неоднородность среды может приводить к возникновению на микроуровне значительных градиентов давления при фильтрации флюидов, что отражается на качественной картине течения и приводит к возникновению новых физических эффектов.

Очевидно, что для описания явлений, связанных с процессами переноса в микронеоднородной среде, необходимо использовать пространственные решеточные модели, проводимость связей в которых описывается некоторой функцией плотности распреде-

ления. Решение таких задач (статических и динамических) методами численного моделирования связано с большими техническими сложностями. В этом плане значительный интерес представляет получение аналитических решений, тем более что они отражают закономерности общего характера и дают возможность проведения более качественного физического анализа явлений.

В результате возникает необходимость построения принципиально новых математических моделей, которые, в свою очередь, могут быть созданы только на базе новых математических теорий.

Вторая половина XX века стала временем зарождения качественно нового математического аппарата, позволяющего решать актуальнейшие задачи науки и производства на совершенно новом уровне обоснованности и глубины анализа.

Это – теория перколяции, описывающая процесс формирования, дальнейшего развития и взаимодействия конгломератов элементов с определенными свойствами в неупорядоченных системах, что приводит в конечном итоге к качественным изменениям макроскопических свойств этих систем (к так называемым фазовым переходам второго рода). Моментом ее “старта” можно считать вышедшую в 1957 году работу С. Бродбента и Дж. Хаммерсли (*Broadbent S. R., Hammersley J. M. Percolation processes. Proc. Camb. Phil. Soc., 1957, 53, 629–645*), в которой были сформулированы основные идеи, положенные в фундамент этой теории. Таким образом, она выдержала уже полувековое испытание временем, и сегодня можно говорить об активном использовании перколяционных подходов при рассмотрении широкого круга фильтрационных проблем.

Наряду с этим, теория перколяции нашла широкое применение в самых различных областях современной теоретической физики – теории аморфных ферромагнетиков и спиновых стекол, теории неупорядоченных полупроводников и строения полимеров, теории андерсоновской локализации электронов в металлах и т. д.

В настоящей работе излагается подход к описанию процессов переноса в стохастически неоднородной среде. Даны основные понятия и положения теории перколяции и развитые на ее основе принципы аналитического описания течения флюидов в решеточных моделях пористых сред. Представлена перколяционная модель микронеоднородной среды, позволяющая развить аналитические методы построения функций относительных фазовых проницаемостей для различных режимов многофазного течения.

Пособие в значительной мере отражает уровень развития теории перколяции и возможности ее приложений к решению различных научных и технических задач. Оно предназначено для самого широкого круга специалистов, как действующих, так и обучающихся, – для студентов старших курсов, аспирантов, инженеров, научных сотрудников и преподавателей.

Но прежде всего, его появление продиктовано необходимостью достаточно подробного ознакомления с теоретическими подходами, лежащими в основе многих современных методов исследования актуальнейших научно-технических проблем, магистрантов и студентов целого ряда специальностей, обучающихся по направлению “Нефтегазовое дело”: 130503 “Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений”, 130504 “Бурение нефтяных и газовых скважин”, а также целого ряда смежных специальностей – 130401 “Физические процессы нефтегазового производства”, 010501 “Прикладная математика” и др.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ

1.1. Решеточные и нерешеточные задачи теории перколяции. Кластеры. Порог протекания. Классическая решетка Бете

Решеточные задачи теории перколяции

Наиболее наглядной иллюстрацией процессов, которые принято называть перколяционными, и которые призвана объяснять и описывать теория перколяции (теория протекания), является протекание электрического тока в сетке (решетке) сопротивлений (рис. 1.1). В простейшем случае сеть является плоской и состоит из одинаковых проволочек, т. е. все ребра этой сети одинаковы, а разность потенциалов подается либо на торцы (стороны) сетки, либо на угловые точки, как это показано на рис. 1.1.

Каждому элементу такой сети – либо узлу, т. е. пересечению проволочек, либо середине связи, т. е. участку проволочки между двумя ближайшими узлами – соответствуют координаты (X, Y) в декартовой плоскости (xOy) . Если теперь организовать процедуру последовательного удаления проводящих связей или узлов сетки случайным образом – например, перекусыванием соответствующих связей или всех связей соответствующих узлов (см. рис. 1.1) – мы получим некий процесс перехода от проводящей электрический ток сетки к непроводящей сети, которая, тем не менее, будет содержать при этом и неразорванные еще связи (или неудаленные узлы).

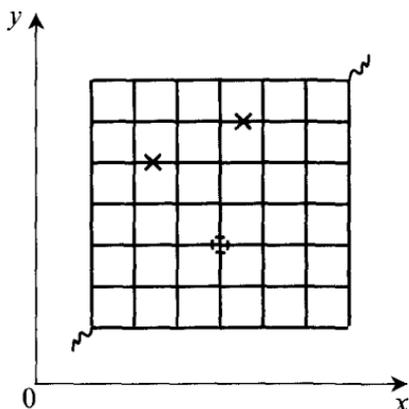


Рис. 1.1. Классический объект теории перколяции – плоская решетка, составленная из одинаковых сопротивлений

Случайный характер выбора очередного “кандидата на удаление” обеспечивается случайным выбором координат (X, Y) на каждом шаге рассматриваемого процесса – например, путем использования датчика случайных чисел. Описанный процесс есть процесс перехода системы (сети) из одного качественного состояния (проводящая сеть) в другое качественное состояние (непроводящая сеть). Причем при удалении последних связей или узлов, приводящем к окончательному разрыву сети, явление приобретает характер критического – при незначительных количественных изменениях в системе происходит кардинальное качественное изменение ее свойств. Данное явление получило название “геометрического фазового перехода” или “фазового перехода второго рода”.

Приведенный пример характеризует класс так называемых *решеточных задач* теории перколяции. При этом, в случае удаления связей сети, говорят о “задаче связей”, а задачи, в которых удаляются узлы (рвутся все выходящие из него связи), называют “задачей узлов”. В дальнейшем конкретный характер рассматриваемой задачи будет каждый раз оговариваться по мере необходимости. В случае, когда этот вопрос не уточняется, приводимые рассуждения и выводы одинаково справедливы как для задач узлов, так и для задач связей.

В описанном выше процессе общее число элементов решетки в начальный момент есть N_0 , а число проводящих (целых) элементов на каждом шаге N_n . Тогда вероятность того, что любой выбранный наугад элемент будет проводящим, есть $x = N_n/N_0$. Или, другими словами, каждый элемент решетки проводит с вероятностью x .

Кластеры

Важную роль при описании стохастических систем, в том числе и в теории перколяции, играет понятие кластера. По определению два проводящих (либо просто любых одностипных) элемента решетки являются *связанными* друг с другом, если они либо сами являются ближайшими соседями, либо существует цепочка из проводящих элементов, являющихся ближайшими соседями, соединяющая эти два элемента. Совокупность связанных элементов одного типа (проводящих, непроводящих и т. п.) называется *кластером*.

Если существует такая цепочка элементов данного типа, по которой возможно движение из рассматриваемого элемента на бесконечность (в бесконечной системе), то такой кластер называется *бесконечным кластером* (БК). Бесконечный кластер пронизывает всю систему (например, решетку) и обеспечивает наличие ее соответствующей качественной характеристики (например, наличие или отсутствие проводимости решетки как целого).

Порог протекания.

Нерешеточные задачи и их связь с решеточными

Очевидно, что при $x = 0$ решетка не проводит, а при $x = 1$, безусловно, является проводящей. Отсюда следует, что должно существовать некое значение $x = x_c$, лежащее в интервале $0 < x_c < 1$, при котором происходит указанный переход решетки из одного состояния в другое. Данная величина x_c носит название *критической вероятности* или *порога протекания*.

Для каждой конкретной реализации процесса “прореживания” исходной проводящей решетки конечных размеров величина x_c есть функция N_0 . Для бесконечной решетки, которая является, с одной стороны, математической абстракцией, а с другой — наиболее адекватно соответствует реальным природным объектам, в которых число элементов очень велико (например, число пор в объеме горной породы реального геологического масштаба), *порог протекания* является величиной *постоянной*

$$x_c = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_c(N_0)$$

для данного типа решетки и размерности пространства. Это одно из основных утверждений теории перколяции, а x_c — одна из важнейших констант этой теории.

Введем в рассмотрение вероятность $P(x)$ того, что произвольный (выбранный наугад) элемент решетки принадлежит БК.

Из физических соображений ясно, что значение порога протекания зависит от типа задачи (рассматривается задача узлов или связей), размерности задачи D и типа решетки, который характеризуется числом связей, сходящихся в одном узле, – так называемым координационным числом решетки z . Лишь для простейших случаев типа плоских ($D = 2$) треугольной $z = 6$ и квадратной $z = 4$ решеток [5] удается аналитически строго получить точные значения x_c . При этом широко используются понятия “покрывающие решетки”, “включающие решетки” и “дуальные решетки” [5, 11], а также теорема Хаммерсли, гласящая, что

$$P^s(x) \leq P^b(x),$$

где верхний индекс s отмечает случай задачи узлов (sites), а индекс b – задачи связей (bonds). Математическое доказательство теоремы Хаммерсли весьма сложное и громоздкое, однако физическая природа ее весьма прозрачна.

Для задач любого типа функции $P(x)$ являются монотонно возрастающими, причем по основной теореме они становятся отличными от нуля только при соответствующих $x > x_c$ (рис. 1.2).

Вопрос о конкретном характере поведения $P(x)$ вблизи x_c будет подробно рассмотрен в следующем параграфе. В проводимых ниже рассуждениях он принципиальной роли не играет, однако, во избежание путаницы, представленная на рис. 1.2 качественная

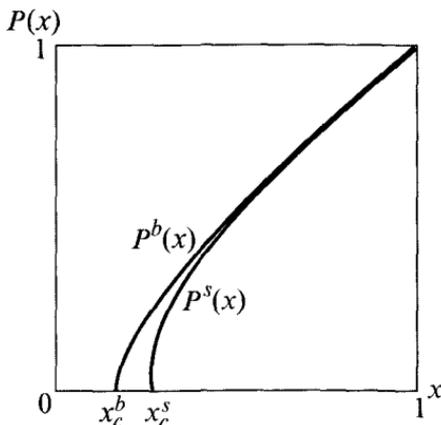


Рис. 1.2. Качественная картина зависимости плотности БК от вероятности проводимости произвольного элемента решетки x для случаев узлов ($P^s(x)$) и связей ($P^b(x)$)

зависимость роста $P(x)$ при $x > x_c$ соответствует истинному характеру этой зависимости.

Поскольку при удалении одного узла рвется сразу z связей, входящих в него, то ясно, что доля удаленных узлов, при которой в решетке исчезает протекание (например, электрического тока), меньше доли связей, которые необходимо разорвать для достижения того же эффекта. Следовательно, $x_c^b < x_c^s$, и, как видно из рис. 1.2, вблизи пороговых значений x для вероятностей протекания будет выполняться указанное неравенство.

В другом предельном случае, при $x \rightarrow 1$, как легко показать,

$$P^s(x)x \cong [1 - (1 - x)^4], \quad P^b(x) \cong [1 - (1 - x)^6],$$

поскольку в этом случае практически каждый проводящий элемент будет иметь соседа-проводника. Из приведенных соотношений следует, что и вблизи $x = 1$ справедливо соотношение

$$P^s(x) \leq P^b(x).$$

Естественно полагать, что и на всем интервале $x_c < x < 1$ сохранится тот же характер взаимного расположения кривых $P^s(x)$ и $P^b(x)$, что и на его границах (см. рис. 1.2). Причем видно, что строгое равенство $P^s(x) = P^b(x)$ будет иметь место только в точке $x = 1$.

За исключением указанных выше случаев точных аналитических расчетов x_c , для большинства решеток, и, прежде всего, для всех типов 3D-решеток, значения x_c получены путем обобщения результатов численных расчетов многоэлементных сеточных задач с использованием датчика случайных чисел. Результаты такого обобщения представлены в табл. 1.1. Значения x_c^b и x_c^s приведены в ней с точностью $\approx 1\%$. Это точность, с которой согласуются между собой результаты, полученные различными методами.

При заданной доле целых связей x_c^b каждый узел решетки связан в среднем с zx_c^b другими узлами. Естественно ожидать, что именно эта величина должна являться некоторым инвариантом, характеризующим момент появления в решетке БК и начало протекания. Используя данные табл. 1.1, легко установить следующую закономерность: *протекание в решетке возникает при достижении указанным инвариантом вполне определенного значения* или, на количественном языке, с точностью до нескольких процентов справедливо соотношение

$$zx_c^b = D / (D - 1), \quad (1.1)$$

Таблица 1.1

Тип решетки	z	x_c^b	$x_c^b z$
<i>Плоские ($D = 2$)</i>			
Квадратная	4	0,5	2,0
Треугольная	6	0,35	2,1
Шестиугольная	3	0,75	2,0
<i>Объемные ($D = 3$)</i>			
Простая кубическая	6	0,25	1,5
Объемноцентрированная кубическая	8	0,18	1,4
Гранецентрированная кубическая	12	0,12	1,4
Типа алмаза	4	0,39	1,6

что позволяет с достаточной для практических расчетов точностью легко определять порог протекания в любых решеточных задачах связей.

Ясно, что для задачи узлов данный подход в чистом виде не применим, так как величина zx_c^b в этом случае не имеет самостоятельного физического смысла. Однако если модифицировать его на основе идеи (*Шер и Заллен*) о соответствии каждому узлу определенной части пространства (при $D = 2$ это πr^2 , а при $D = 3$ это $4/3\pi r^3$, где r есть половина расстояния между соседними узлами решетки), то можно сформулировать аналогичное предположение: *протекание в решетке для задачи узлов возникает в момент, когда доля пространства, ассоциированного с проводящими узлами, достигает некоторого критического значения*, т. е. можно предположить, что в данном случае инвариантом будет являться указанная доля пространства.

Для ее определения вводится понятие коэффициента заполнения f , который равен отношению объема, соответствующего узлам решетки по указанному выше принципу, к полному объему пространства, содержащего эту решетку. Для наглядности продемонстрируем расчет коэффициента заполнения на простейшем примере плоской квадратной решетки (рис. 1.3). Если d – период решетки, то радиус соответствующего каждому узлу круга есть $d/2$. Площадь, соответствующая узлам решетки в выделенной ячейке (которая является элементарной ячейкой решетки как периодической структуры), равна $\pi d^2/4$, а полная площадь самой ячейки есть d^2 . Следовательно, $f = \pi/4 \approx 0,785$. Величина f в задаче узлов формально будет играть роль, аналогичную роли числа z для задачи связей, поскольку именно произведение fx^s определяет долю пространства, соответствующую проводящим узлам, которая, по предположению, и должна явиться искомым инвариантом задачи узлов.

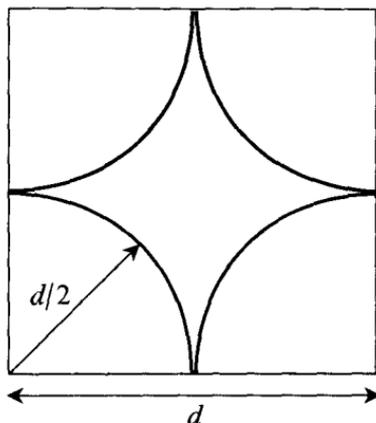


Рис. 1.3. Схема расчета коэффициента заполнения для плоской квадратной решетки

Результаты расчетов, представленные в табл. 1.2, показали, что указанная величина действительно определяет момент возникновения протекания по узлам решетки и с точностью $\approx 10\text{--}15\%$ является инвариантом вида

$$fx_c^s = 0,5$$

для плоских решеток и

$$fx_c^s = 0,16$$

для объемных.

Поскольку инвариант fx_c^s не зависит от типа решетки, то, учитывая его природу, естественно предположить, что он не зависит и от наличия решетки как таковой; т. е. можно ожидать, что и в случае перехода от системы сфер, окружающих узлы регулярной решетки, к произвольной насыпке из таких сфер значение инварианта не изменится. Эксперименты подтвердили это предположение. Таким образом возникает понятие о *нерешеточных задачах* теории перколяции.

Таблица 1.2

Тип решетки	f	x_c^s	$x_c^s f$
<i>Плоские ($D = 2$)</i>			
Квадратная	0,79	0,59	0,47
Треугольная	0,91	0,50	0,46
Шестиугольная	0,61	0,70	0,43
<i>Объемные ($D = 3$)</i>			
Простая кубическая	0,52	0,31	0,16
Объемноцентрированная кубическая	0,68	0,25	0,17
Гранецентрированная кубическая	0,74	0,20	0,15
Типа алмаза	0,34	0,43	0,15

Интересно оценить порог протекания в такой системе – случайной насыпке плотно упакованных шаров. Коэффициент заполнения для нее, рассчитанный на ЭВМ, оказался равным 0,637. Если воспользоваться приведенным выше инвариантом, то окажется, что

$$x_c = 0,16/0,637 = 0,25,$$

т. е. порог протекания в хаотической системе или в нерешеточной задаче равен порогу протекания наиболее простой регулярной 3D-решетки – простой кубической. Интересно отметить также тот любопытный факт, что и в случае случайной насыпки шаров различного радиуса инвариант fx_c^s сохраняет свое значение.

Описанная задача о насыпке шаров является нерешеточной задачей непересекающихся или “твердых” сфер. Можно рассмотреть также другие разновидности задачи сфер – задачу перекрывающихся сфер и задачу охватывающих сфер. В первом случае центры сфер считаются связанными, если расстояние между ними $L < 2r$, где r – радиус сфер (т. е. сферы просто пересекаются), а во втором – когда $L < r$ (т. е. центры сфер попадают внутрь “сфер влияния” друг друга). Если концентрация центров сфер есть n , то безразмерной величиной, по смыслу аналогичной инварианту fx_c^s , будет произведение $4/3\pi r^3 n_c$, где n_c – критическая концентрация, при которой возникает БК. Например, в случае задачи охватывающих сфер это произведение будет представлять собой среднее число центров других сфер, попадающих внутрь произвольной рассматриваемой сферы. Исследования показали, что эта величина действительно является инвариантом, который обычно обозначают буквой B

$$B = 4/3\pi r^3 n_c,$$

причем в трехмерном случае (для задачи сфер) $B = 2,7 \pm 0,1$, а в плоском (для задачи окружностей) – $B = 4,1 \pm 0,4$. Задача перекрывающихся сфер легко приводится к задаче охватывающих сфер, если в первом случае увеличить r в два раза.

Вернемся вновь к решеточным задачам. В рассматриваемых до сих пор задачах (речь идет о задаче узлов) учитывалось наличие или отсутствие связи лишь между ближайшими соседями. Такие задачи принято называть задачами с коротким взаимодействием или просто с короткодействием. Если не ограничиваться при рассмотрении задач узлов только учетом их взаимодействия с ближайшими соседями, то возникает новый класс задач – зада-

чи с дальнодействием. Группу узлов решетки, являющихся ближайшими соседями произвольного рассматриваемого узла, называют *первой координационной группой* (число узлов в этой группе и есть координационное число решетки z). А совокупность узлов, являющихся вторыми по степени удаленности соседями данного узла, называют *второй координационной группой* и т. д.

Например, в простой кубической решетке первую координационную группу составляют шесть узлов, расположенных на ребрах кубов, для которых исходный узел является угловым. Двенадцать узлов, лежащих на диагоналях граней указанных кубов, составляют вторую координационную группу. Третью координационную группу образуют восемь узлов, лежащих на самих диагоналях этих кубов, и т. д.

Постановка решеточных задач (узлов) с дальнодействием не содержит ничего принципиально нового по сравнению с постановками уже рассмотренных выше задач с короткодействием. Назовем для простоты узлы с интересующими нас свойствами “белыми”. В задаче с дальнодействием два белых узла считаются связанными, если один из них входит в любую из координационных групп, на которые распространяется влияние другого белого узла. Суммарное число узлов во всех этих группах есть Z , которое, по существу, играет роль единого координационного числа в задачах с дальнодействием. При этом имеет место следующий интересный эффект. Когда $Z = z$, величина zx_c^s , как уже отмечалось выше, не имеет самостоятельного физического смысла и поэтому не является инвариантом. Однако, по мере роста значения Z , произведение Zx_c^s (независимо от типа решетки) стремится к некоторому пределу

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} Zx_c^s = B.$$

Это позволяет утверждать, что произведение Zx_c^s является инвариантом, причем смысл этого инварианта в свете рассмотренной выше задачи перекрывающихся сфер весьма прозрачен. Если провести вокруг каждого узла сферу радиуса r , большего, чем расстояние до узлов последней “досягаемой” координационной группы, но меньшего, чем расстояние до узлов следующей координационной группы, то получим задачу перекрывающихся сфер, только на решетке. При этом Zx_c^s , также как и $4/3\pi r^3 n_c$, есть среднее число лежащих внутри сфер радиуса r центров других сфер или, соответственно, узлов решетки в задаче с дальнодействием. Пока Z мало (r мал), задачи перекрывающихся сфер на ре-

шетке и для случайно расположенных центров существенно различаются из-за различной геометрии расположения центров сфер. Однако с ростом Z (и, соответственно, r) эта разница исчезает – сдвиг центра сферы на расстояние порядка периода решетки d в случае $d \ll r$ не меняет общей картины процесса формирования БК в задаче перекрывающихся сфер. Поэтому нерешеточная задача перекрывающихся сфер эквивалентна решеточной задаче узлов с дальним действием при больших Z ($Z > 26$) и, следовательно,

$$Zx_c^s = 4/3 \pi r^3 n_c.$$

В заключение укажем на достаточно очевидное обобщение задачи сфер – рассмотрим эту задачу с элементами не сферической, а произвольной формы. Наиболее просто поддается анализу задача с элементами правильной конфигурации, которая может быть получена из сферы каким-либо преобразованием, например, задача эллипсоидов. Единственным условием при этом является одинаковая ориентация всех элементов (эллипсоидов) в пространстве.

Самый простой и наглядный пример – задача эллипсов на плоскости. Нас интересует инвариант B – среднее число центров рассматриваемых элементов, попадающих внутрь соответствующей фигуры, построенной вокруг данного пробного центра. Если рассмотреть задачу охватывающих окружностей на “резиновой плоскости” – прямоугольном куске резины постоянной толщины, а затем равномерно растянуть этот прямоугольник во взаимноперпендикулярных направлениях с различным натяжением, то окружности преобразуются в эллипсы. При этом взаимное расположение всех элементов на плоскости останется неизменным и, следовательно,

$$B^{\text{окр.}} = B^{\text{эл.}}$$

Совершенно аналогичное рассмотрение “резинового пространства” дает очевидный результат

$$B^{\text{сф.}} = B^{\text{эл.}}$$

Численные исследования, проведенные для более сложных фигур (куб, тетраэдр), показали, что в пределах точности расчетов и для них

$$B = B^{\text{сф.}}$$

Даже для такой экзотической фигуры, как “трехмерный крест”,

$$B^{\text{кр.}} = 0,8B^{\text{сф.}}$$

Поэтому в классе фигур одной размерности D величину B с хорошей точностью можно считать величиной постоянной.

Классическая решетка Бете

Примером решетки, допускающей наиболее полное аналитическое решение перколяционной задачи, является экзотическая *бесконечномерная* решетка, которая, тем не менее, называется *классической* или *решеткой Бете*, поэтому остановимся на ее исследовании более подробно. Эта решетка представляет собой модель дерева, из конца каждой ветви которого прорастает произвольное, но фиксированное для данной задачи число новых веток (рис. 1.4).

Рост такого дерева должен происходить без пересечения ветвей. Это условие приводит к необходимости “разведения” ветвей на каждом шаге по различным плоскостям, ориентированным под различными углами. Каждая такая плоскость является новым измерением (чтобы ветви из разных плоскостей не могли пересечься), и для дерева с бесконечным числом разветвлений количество измерений бесконечно. Окончание каждой ветки является узлом, из которого “растут” новые ветки в количестве $z' = z - 1$, где z — обычное координационное число решетки. Величина z' носит название *параметр ветвления*. Ветви играют роль связей в решетке. Определим величину x_c и характер поведения функции $P(x)$ в задаче о протекании в такой решетке.

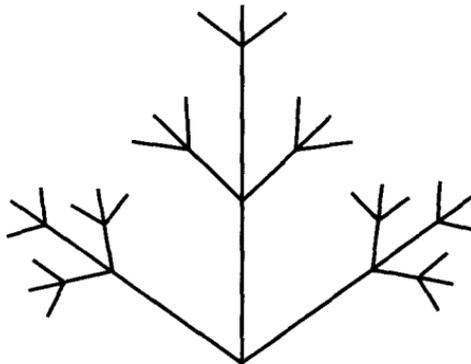


Рис. 1.4. Решетка Бете или модель дерева ($z' = 3$)

Задача связей на решетке Бете. Рассмотрим процесс формирования БК в задаче связей для протекания на решетке Бете. Вероятность того, что выбранная наугад связь не разорвана, есть x , а того, что разорвана – $(1 - x)$. Вероятность того, что при данной доле x целых связей в решетке узел принадлежит БК, есть $P(x)$. Соответственно, вероятность того, что узел не войдет в БК, есть $Q(x) = 1 - P(x)$. Это может произойти по двум причинам:

1. Связь, ведущая к этому узлу, оказалась разорванной – вероятность этого события $(1 - x)$;

2. Связь, ведущая к этому узлу, цела, но сам он не принадлежит БК – вероятность этого события $xQ(x)$, так как указанные элементарные события независимы.

События 1 и 2 *несовместимы*, поэтому их вероятности *складываются*, а все ветви *независимы*, поэтому вероятности связанных с ними событий *перемножаются*. Следовательно,

$$Q(x) = [1 - x + xQ(x)]^{z'}$$

Используя связь между $P(x)$ и $Q(x)$, легко получить окончательное уравнение для определения $P(x)$

$$1 - P(x) = [1 - xP(x)]^{z'} \tag{1.2}$$

Данное уравнение имеет, очевидно, тривиальное решение $P(x) = 0$, однако нас будут интересовать нетривиальные решения, которые должно иметь нелинейное уравнение (1.2). Наибольший интерес представляет нахождение зависимости $P(x)$ вблизи порога протекания x_c , поэтому рассмотрим область $x \rightarrow x_c$. Известно, что в этой области $P(x) \ll 1$, и, следовательно, степенной двучлен может быть разложен в ряд

$$[1 - P(x)]^{z'} \cong 1 - z'xP(x) + \frac{z'(z'-1)}{2}x^2P^2(x) - \dots \tag{1.3}$$

Ограничиваясь в разложении (1.3) тремя первыми членами, получаем из (1.2)

$$P(x) = \frac{2}{x^2} \frac{z'x - 1}{z'(z'-1)} = \frac{2}{z'x^2} \frac{x - 1/z'}{1 - 1/z'} \tag{1.4}$$

Из полученного соотношения видно, что $P(x)$ обращается в ноль при $x = 1/z'$, т. е. для исследуемой решетки $x_c \doteq 1/z'$, а также то, что зависимость $P(x)$ для решетки Бете вблизи порога протекания имеет линейный характер. Последнее легко видеть, если

учесть, что при $x \rightarrow x_c$ величина $1/x^2 \rightarrow z^2$. Тогда (1.4) можно переписать в виде

$$P(x) = \frac{2z'}{1-x_c}(x-x_c), \quad (1.5)$$

откуда видно, что $P(x) \sim (x-x_c)$, а угол наклона прямой (1.5) определяется параметром ветвления z' .

Надо отметить, что при небольших значениях z' уравнение (1.2) может быть решено и без использования разложения (1.3). Например, при $z' = 2$ уравнение (1.2) примет вид

$$P^2(x)x^2 = P(x)(2x-1)$$

или, поскольку ищем нетривиальное решение $P(x) \neq 0$,

$$P(x) = \frac{2}{x^2}(x-1/2),$$

т. е. $x_c = 1/2$, а $P(x) \sim (x-x_c)$.

При $z' = 3$ ситуация несколько осложняется – уравнение (1.2) становится более громоздким

$$1 - P(x) = 1 - 3xP(x) + 3x^2P^2(x) - x^3P^3(x).$$

Учитывая условие $P(x) \neq 0$, получаем для $P(x)$ уравнение

$$x^3P^2(x) - 3x^2P(x) + (3x-1) = 0,$$

которое является обычным квадратным уравнением и разрешимо в квадратурах. Однако в общем виде такое решение весьма громоздко и не обладает необходимой степенью наглядности. Проще вновь проанализировать это уравнение, учтя, что $P(x) \ll 1$ при $x \rightarrow x_c$. Тогда первым (квадратичным) членом уравнения можно пренебречь. В результате имеем

$$P(x) \cong \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{1}{3} \right),$$

откуда получаем, что $x = 1/3$, т. е. $x = 1/z'$ в полном соответствии с (1.4), а $P(x)$ зависит от $(x-x_c)$ вблизи критической точки $x = x_c$ линейным образом.

Для произвольных z' уравнение (1.2) без использования разложения (1.3) не поддается аналитическому решению, поэтому в рамках аналитического подхода приходится использовать его приближенное решение в виде (1.4).

Задача узлов на решетке Бете. Задача узлов на решетке Бете рассматривается аналогично по приведенной выше схеме. Если $P(x)$ – вероятность того, что узел принадлежит БК (при условии, что он “проводит” с вероятностью x), а $Q(x) = 1 - P(x)$ – вероятность того, что он не принадлежит БК, то

$$Q(x) = 1 - x + x[Q(x)]^{z'}, \quad (1.6)$$

поскольку вероятность $Q(x)$ складывается из двух несовместимых событий – вероятности того, что узел *не проводит* (равной $(1 - x)$), и вероятности того, что сам он *проводит* (с вероятностью x), но все последующие связанные с ним z' узлов не принадлежат БК (вероятность последнего события $[Q(x)]^{z'}$, так как все ветви дерева независимы). Перепишем уравнение (1.6) в терминах функции $P(x)$

$$x[1 - P(x)]^{z'} + P(x) - x = 0. \quad (1.7)$$

Разлагая $[1 - P(x)]^{z'}$ в ряд, аналогично (1.3), в окрестности $x = x_c$

$$[1 - P(x)]^{z'} = 1 - z'P(x) + \frac{z'(z'-1)}{2}P^2(x) - \dots$$

и вновь ограничиваясь первыми тремя членами ряда, получаем (после сокращения на $P(x) \neq 0$)

$$\frac{z'(z'-1)}{2}P(x)x - z'x + 1 = 0.$$

Из последнего соотношения имеем окончательное выражение для $P(x)$ в задаче узлов

$$P(x) = \frac{2}{z'x} \frac{x - 1/z'}{1 - 1/z'} = \frac{2}{z'x(1 - x_c)}(x - x_c). \quad (1.8)$$

Для малых z' и в задаче узлов функция $P(x)$ определяется точно. При $z' = 1$ имеем очевидный случай: $P(x) = 0$ при $x \neq 1$ и $P(x) = 1$ при $x = x_c = 1$. При $z' = 2$ уравнение (1.7) принимает вид

$$P^2(x)x - 2P(x)x + P(x) = 0,$$

откуда получаем два решения – тривиальное $P(x) = 0$ и нетривиальное

$$P(x) = 2 - \frac{1}{x}. \quad (1.9)$$

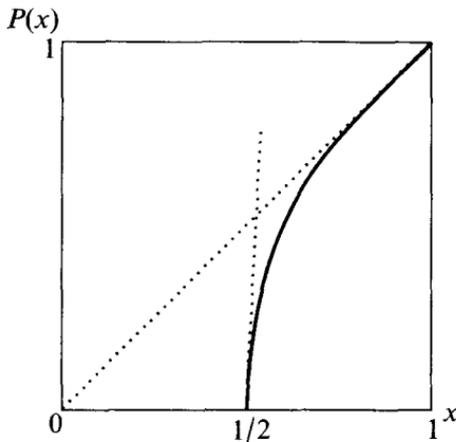


Рис. 1.5. График зависимости $P(x)$ для решетки Бете с параметром ветвления $z' = 2$

Так как рассматривается случай $P(x) \geq 0$, то, очевидно, (1.9) справедливо при $x > 1/2$, а $x_c = 1/2 = 1/z'$. Таким образом,

$$P(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2 - 1/x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

Причем при $x \rightarrow x_c$ функция $P(x) = 2 - 1/x = 2/x(x - 1/2) \cong \cong 2z'(x - x_c)$. Соотношение (1.10) позволяет получить наглядную качественную картину поведения $P(x)$ (рис. 1.5).

Пунктиром на рис. 1.5 показаны производные $dP(x)/dx$ в точках $x = 1/2$ и $x = 1$, значения которых легко определяются из (1.9) — $dP(x=1/2)/dx = 4$, $dP(x=1)/dx = 1$.

Сопоставление результатов рассмотрения на решетке Бете задач узлов и связей (соотношений (1.4) и (1.8)) показывает значительное совпадение свойств их решений. Во-первых, вблизи порога протекания x_c функции вероятности протекания $P(x)$ имеют одинаковую линейную асимптотику

$$P(x) \sim (x - x_c),$$

а во-вторых, одинаковы сами значения порогов протекания $x_c = 1/z'$.

Последнее достаточно очевидно, поскольку явления блокирования узла или ведущей к нему связи эквивалентны по своим последствиям. Поэтому переход от задачи узлов к эквивалентной задаче связей достаточно тривиален, и при этом пороги протекания в эквивалентных задачах должны совпадать. Неудивительно поэтому и то, что эти задачи имеют одинаковый качественный характер поведения $P(x)$ при $x \rightarrow x_c$.

Кроме того, нетрудно было предсказать и сам результат вычисления порога протекания. Поскольку для задачи связей на решетке имеет место инвариант

$$zx_c = D/(D - 1),$$

то на бесконечномерной решетке, т. е. при $D \rightarrow \infty$, $zx_c \rightarrow 1$. При этом роль координационного числа z в такой решетке будет играть параметр ветвления z' , поскольку узел может осуществить связь с другими узлами только посредством z' связей, а через “первую” (входящую) связь соединиться можно только с ним, но сам он ею “воспользоваться” не может. Отсюда имеем

$$z'x_c = 1 \text{ или } x_c = 1/z'.$$

Тот же самый результат дает исследование задачи узлов на так называемых гиперрешетках – решетках в пространстве большой размерности D . Координационное число для таких решеток $z = 2D$. Причем в предельных случаях реальных пространств $D = 2$ и $D = 3$ получаем известные значения z для квадратной и простой кубической решетки, соответственно, $z = 4$ и $z = 6$. Результаты численных расчетов порогов протекания для задач на гиперрешетках хорошо описываются аппроксимационной формулой

$$x_c = \left(1 + \frac{6,3}{D^2}\right) \frac{1}{z-1}.$$

Отсюда следует, что для решетки Бете (когда $D \rightarrow \infty$) $x_c = 1/z'$, так как $z - 1 = z'$.

В заключение подчеркнем еще раз, что решетка Бете – единственная, для которой удается аналитически вычислить функцию $P(x)$. При этом поведение $P(x)$ вблизи критической точки оказывается линейным $P(x) \sim (x - x_c)$, что является специфическим свойством решеточных задач в пространствах большой размерности ($D \rightarrow \infty$).

1.2. Особенности структуры бесконечного кластера.

Критические перколяционные индексы.

Скейлинг. Метод ренормализации

Вначале проанализируем распределение образующихся кластеров по размерам (более точно – по числу входящих в них элементов) в системе, где $x < x_c$. Пусть $P_m(x)$ – вероятность того, что произвольный элемент решетки принадлежит кластеру, содержащему не менее M проводящих элементов. Это означает, что

и сам элемент является проводящим, и связан при этом с не менее чем $M - 1$ проводящими элементами.

Вычислим функцию $P_m(x)$ для значений $M = 1$ и $M = 2$. Очевидно, $P_1(x) = x$, так как x и есть вероятность того, что сам выбранный наугад элемент проводит. А $P_1(x) = xW(x)$, где $W(x)$ – вероятность того, что среди его соседей есть хоть один также проводящий (вероятность одновременного происхождения двух независимых событий с вероятностями x и $W(x)$ есть их произведение). Вид $W(x)$ зависит от свойств конкретной решетки. Возьмем для наглядности один из наиболее простых случаев – квадратную решетку на плоскости – и рассмотрим на ней задачу узлов (см. рис. 1.1). В такой системе каждый элемент имеет четыре ближайших соседа. При этом вероятность того, что все четыре элемента непроводящие, обозначим через W_0 и учтем, что

$$W_0 + W = 1,$$

поскольку соответствующие этим вероятностям события образуют полную систему событий. Для любого из четырех ближайших соседей вероятность того, что он окажется непроводящим, есть $1 - x$. Поскольку все эти события независимы, то $W_0 = (1 - x)^4$. Следовательно,

$$W(x) = 1 - W_0 = 1 - (1 - x)^4,$$

$$P_2(x) = x[1 - (1 - x)^4].$$

Для наглядности рассмотрим предельный случай $x \ll 1$. При этом $P_2(x) \cong 4x^2$ и, соответственно,

$$P_2(x)/P_1(x) \cong 4x \ll 1.$$

Аналогично можно показать, что $P_3(x) \cong 18x^3$, откуда, с учетом выражения для $P_2(x)$, $P_3(x)/P_2(x) \cong 4,5x \ll 1$, и так далее для любого M

$$P_M(x)/P_{M-1}(x) \ll 1.$$

Это означает, что количество кластеров данного размера резко убывает с увеличением последнего. При этом сразу отметим логически вытекающий отсюда вывод о единственности бесконечного кластера. К более строгому рассмотрению этого вопроса мы вернемся чуть позже.

Введем также специальное обозначение для такой важной величины, как $P_\infty(x)$, в виде $P(x)$ без индекса. Это есть уже упоми-

навшаяся вероятность того, что произвольный (выбранный наугад) элемент решетки принадлежит БК, т. е. он сам является проводящим и при этом связан с БК проводящих элементов. Очевидно, что в конечной системе БК будет представлять собой кластер, связывающий противоположные стороны решетки и содержащий N_m элементов. При этом указанная вероятность (обозначим ее через $P'(x)$)

$$P'(x) = N_m/N_0.$$

При переходе к бесконечной системе и $N_0 \rightarrow \infty$, и $N_m \rightarrow \infty$, а

$$P(x) = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} P'(x).$$

Функция $P(x)$ носит название *вероятности протекания*, а по смыслу является *плотностью* БК. Критический характер перколяционных процессов, отмеченный выше, математически формулируется в виде *основной теоремы теории протекания* (С. Бродбент и Дж. Хаммерсли, см. с. 4): для всех значений $x < x_c$ вероятность $P(x)$ имеет меру ноль – $\{\forall x < x_c: \mu[P(x)] = 0\}$.

Особенности структуры бесконечного кластера. Критические перколяционные индексы

Поведение функции $P(x)$ представляет столь значительный интерес в связи с тем, что она является одной из основных характеристик структуры БК. По существу, возникновение БК является фазовым переходом второго рода, и параметром порядка образующейся в результате такого перехода системы оказывается мощность или плотность бесконечного кластера – т. е. вероятность произвольному элементу системы принадлежать рассматриваемому БК. Эта величина вблизи критической точки x_c в общем случае ведет себя степенным образом

$$P(x) \sim (x - x_c)^\beta, \quad (1.11)$$

где β есть критический перколяционный показатель, получаемый расчетным путем в численных экспериментах.

С высокой степенью точности ($\sim 1\%$) установлено, что этот показатель является универсальным по отношению к типу решетки и зависит лишь от размерности задачи: при $D = 2 - \beta_2 = 0,14$, при $D = 3 - \beta_3 = 0,4$. На рис. 1.6 показаны зависимости $P(x)$ для различных типов решеток, полученные расчетным путем.

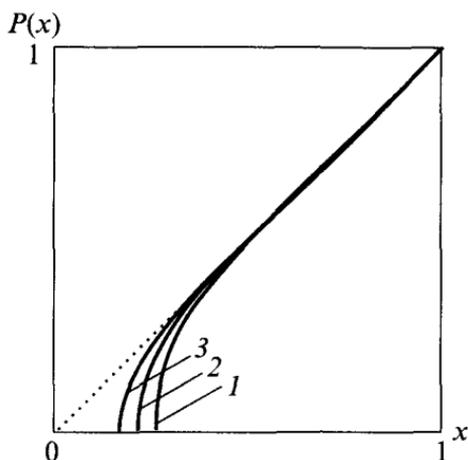


Рис. 1.6. График зависимости $P(x)$ для различных типов решетки:
 1 – простая кубическая; 2 – объемноцентрированная кубическая;
 3 – гранецентрированная кубическая

Структура БК – это его геометрия с точки зрения масштабов, много больших периода решетки (или в нерешеточных задачах – радиуса сферы). На таких масштабах БК можно представить в виде совокупности бесконечных путей (по которым можно уйти на бесконечность – почему такой кластер и получил название *бесконечного*) и конечных путей, ведущих в тупик. Схематично такую структуру можно представить так, как это показано на рис. 1.7.

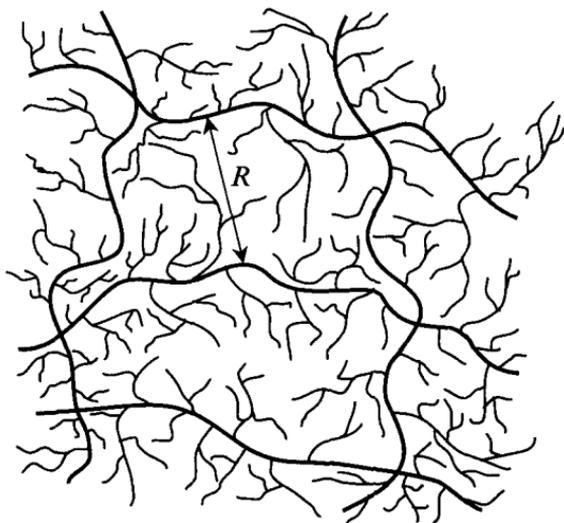


Рис. 1.7. Схематичное представление структуры БК, положенное в основу модели Шкловского – де-Жена

Такое представление о структуре БК положено в основу модели Шкловского – де-Жена или сеточной модели БК. В рамках этой модели БК рассматривается как “рваная рыбацья сеть”. “Прорехи” такой сети нерегулярны, и размеры их много больше размера ячейки исходной сетки.

Статистически усредненный (или характерный) размер этих “прорех” R носит название радиуса корреляции БК. На масштабах R изломы, имеющие место на исходной решетке с периодом d , исчезающе малы пропорционально отношению $d/R \ll 1$. Поэтому пути, образованные последовательно связанными элементами БК, представляются плавными линиями. Пространственная ориентация бесконечных путей вполне произвольна, никак не связана с ориентацией элементов исходной сетки, и поэтому возникающая структура таких бесконечных проводящих путей (скелет БК) изотропна.

Радиус корреляции R представляет собой характерный пространственный масштаб системы. Изучению этой величины было уделено много внимания, прежде всего – в рамках численных экспериментов на решеточных структурах. Результатом этих многочисленных экспериментов явился общепризнанный, хотя и не доказанный строго математически, вывод о том, что зависимость $R(x)$ в окрестности критической точки x_c имеет степенной вид

$$R(x) \sim |x - x_c|^{-\nu}, \quad (1.12)$$

график которой представлен на рис. 1.8.

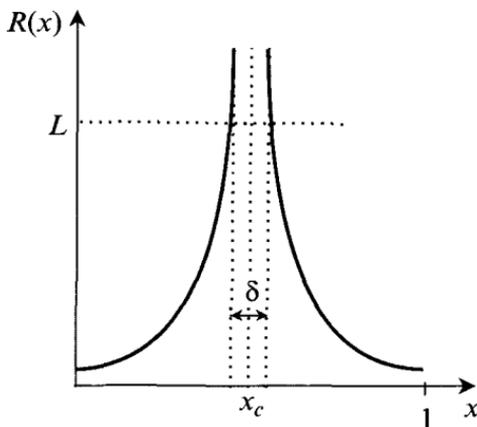


Рис. 1.8. График зависимости радиуса корреляции от вероятности проводимости произвольного элемента решетки

Очевидно, это есть характерный размер ячеек “рваной рыбацкой сети”, т. е. “период” решетки скелета БК при $x > x_c$ и размер самого большого проводящего кластера при $x < x_c$. Как и показатель β , величина ν (носящая специальное название – *индекс радиуса корреляции*) не зависит от типа решетки и является только функцией размерности задачи $\nu(D=2) = \nu_2 = 1,33 \pm 0,03$; $\nu(D=3) = \nu_3 = 0,85 \pm 0,05$. Указанные значения ν_i ($i = 1, 2$) также получены в численных экспериментах.

Из приведенного на рис. 1.8 графика легко проследить связь экспериментально определяемой на конечной сетке величины R с размером этой сетки L . Для того чтобы сеть размером L стала проводящей, БК проводящих элементов должен вырасти до размеров самой сети, т. е. R должен стать равным L

$$R = L. \quad (1.13)$$

Если отложить величину L на оси R , то линия $L = R$ пересечет график $R(x)$ в двух точках, аргументы которых отклоняются в обе стороны от точки x_c . Расстояние между этими точками носит название *ширина критической области* δ и представляет собой интервал значений, которые будет принимать величина порога протекания x_c при различных реализациях численного эксперимента на данной решетке размера L .

Связь ширины критической области δ с числом ячеек $N = L/d$ конечной сетки, используемой в расчетах, легко получить из (1.12), (1.13). Возьмем произвольное значение x из δ -окрестности точки x_c . Для этой точки имеем

$$|x - x_c| \sim \delta \sim L^{1/\nu} \sim N^{-1/D\nu}. \quad (1.14)$$

Чтобы перейти в (1.14) от равенства по порядку величины к точному равенству, необходимо ввести численный коэффициент C

$$\delta = CN^{-1/D\nu},$$

который определяется в результате численных исследований и оказывается величиной порядка единицы. Например, при $D = 2$ коэффициент $C \approx 1/2$.

Оценим ширину критической области для случая сравнительно небольшой сетки. Например, в первых отечественных работах, посвященных численному решению задач о протекании по решеткам капилляров [1, 2], использовались плоские квадратные сетки размером 15×15 . В этом случае $\delta(15) = 1/2 \times 15^{-1/2,6} \approx 0,1$. Относитель-

ная величина ширины критической области δ/x_c для рассматриваемого варианта составляет $\delta z(D-1)/D \approx 0,2$, т. е. примерно 20 %.

Если (исходя из возможностей ЭВМ) использовать то же общее число узлов ($15 \times 15 = 225$) для решения трехмерной задачи на простой кубической решетке, то абсолютная ширина критической области не изменится, так как произведение vD при этом практически не меняется ($1,3 \times 2 \cong 0,85 \times 3$), а вот относительная – возрастает в два раза, поскольку при $D = 2$, $z = 4$ величина $x_c = 1/2$, а при $D = 3$, $z = 6$, соответственно, $x_c = 1/4$.

Основные элементы БК в модели Шкловского – де-Жена – “скелет” и “мертвые концы”. Каждый из этих элементов выполняет свои функции – скелет “отвечает” за проводимость БК, а совокупность мертвых концов – за его емкость, т. е. способность к насыщению. Интересно сопоставить “по массе” эти две составляющие БК.

Выделим произвольную ячейку БК (см. рис. 1.7). Ее характерный линейный размер – радиус корреляции R . Скелету БК принадлежат узлы (или связи), расположенные по периметру выделенной ячейки, и число их $N_s \sim R/d$.

Полное число узлов в ячейке $N_t^{(2)} \sim (R/d)^2$ для $D = 2$ и $N_t^{(3)} \sim (R/d)^3$ для $D = 3$. Поэтому доля узлов, принадлежащих скелету БК,

$$P_s^{(D)}(x) \sim N_s / N_t^{(D)}$$

есть

$$P_s^{(2)}(x) \sim (R/d)/(R/d)^2 \sim 1/R \sim (x-x_c)^v \quad \text{для } D = 2$$

и

$$P_s^{(3)}(x) \sim (R/d)/(R/d)^3 \sim 1/R^2 \sim (x-x_c)^{2v} \quad \text{для } D = 3.$$

Доля узлов, принадлежащих БК, есть плотность БК $P^{(D)}(x) \sim (x-x_c)^{\beta_D}$, ($D = 2, 3$).

Соотношение между числом узлов, входящих в систему скелета БК, и полным числом узлов, принадлежащих БК, т. е. входящих как в скелет, так и в мертвые концы БК

$$P_s^{(2)}(x)/P^{(2)}(x) \sim (x-x_c)^{v_2-\beta_2},$$

$$P_s^{(3)}(x)/P^{(3)}(x) \sim (x-x_c)^{2v_3-\beta_3}.$$

При $D = 2$ показатель степени ($v_2 - \beta_2$) $\cong 1,2$, а при $D = 3$ – ($v_3 - \beta_3$) $\cong 1,3$. Поскольку оба показателя больше нуля, для любого D получаем

$$P_s^{(D)}(x)/P^{(D)}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow x_c.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что “масса” скелета БК пренебрежимо мала по сравнению с его общей массой, которая практически вся сосредоточена в мертвых концах БК.

Однако, несмотря на это, цепочки, образующие скелет БК, достаточно протяженные. Реальная длина связи L между узлами “макрорешетки” скелета БК, схематически изображенной на рис. 1.7, существенно больше кратчайшего расстояния между ними, которое составляют $\sim R$. Данное обстоятельство естественно трактовать как *извилистость* проводящих путей и описывать его путем введения соответствующего критического перколяционного “показателя извилистости” ζ

$$L \sim (x - x_c)^{-\zeta}.$$

Для определения численного значения показателя ζ рассмотрим скелетную сетку в модели Шкловского – де-Жена при некотором $x > x_c$.

Если в исходной сетке разорвать каждую связь с вероятностью $(x - x_c)/x$, то придем к порогу протекания x_c , поскольку доля оставшихся целых связей окажется при этом равной $x[1 - (x - x_c)/x] = x_c$.

Для получения того же самого результата на скелетной макросетке необходимо разорвать некоторую долю макросвязей. Так как в модели Шкловского – де-Жена скелетная сеть одножильная, для разрыва любой макросвязи достаточно разрыва лишь одного из составляющих ее звеньев, поэтому вероятность ее разрыва пропорциональна длине L

$$P_l \sim L(x - x_c)/x,$$

а доля неразорванных макросвязей составит при этом $Y = 1 - P_l$. Соответственно, из условия разрыва макросетки $Y = Y_c$ (где $Y_c = \text{const}$ – порог протекания по скелету БК) имеем

$$L(x - x_c)/x \sim 1 - Y_c,$$

откуда

$$L \sim (x - x_c)^{-1},$$

т. е. $\zeta = 1$.

Из полученного результата можно сделать два вывода.

Во-первых, отношение

$$L/R = (x - x_c)^{\nu - \zeta} \quad (1.15)$$

удовлетворяет естественному исходному предположению $L/R \gg 1$ только при условии $\nu - \zeta < 0$ или $\zeta > \nu$. Откуда следует, что изви-

лиственность участков скелетной сети имеет место лишь в трехмерных системах, так как $v_3 < 1$, а $v_2 > 1$.

Во-вторых, извилистость макросвязей скелетной сети БК при $D = 3$ ($L = R^{1.1}$) значительно слабее извилистости пути случайных блужданий по решетке, где $L = R^2$, и извилистости самоизбегающего пути, где $L = R^{5/3}$ [3].

Исследуя особенности строения БК, рассмотрим также вопрос о количестве БК, существующих в системе. Строгая математическая формулировка ответа на него состоит в утверждении, что число БК в любой системе может принимать следующие значения: 0, 1 и ∞ . Очевидно, что число БК равно нулю при $x < x_c$. Ситуацию, когда число БК равно ∞ , также возможно себе представить, например, в случае полностью “неповрежденной” проводящей сетки (т. е. при $x = 1$). В бесконечной системе, каковые формально рассматриваются, число путей переноса в этом случае будет бесконечным, что и соответствует бесконечному числу БК.

Однако приведенный пример слишком специфичен. А при произвольном $1 > x > x_c$ из физических соображений естественно ожидать существование *единственного* БК. Докажем это утверждение на физическом уровне строгости.

Пусть в области $x_c < x < x_1$ существуют два БК. Это значит, что при $x = x_c + \Delta/2$, где $\Delta < x_1 - x_c$, они имеют конечную плотность $P(x)$ и расположены на некотором конечном расстоянии друг от друга. Устремим $x \rightarrow x_c + \Delta/2$, вводя в системе дополнительные проводящие элементы (узлы или связи). Вероятность α “застраивания” этими элементами любой фиксированной перемычки между существующими БК очень мала, но конечна (отлична от нуля). В то же время число таких возможных перемычек N очень велико ($N \rightarrow \infty$, так как бесконечны оба кластера).

Следовательно, вероятность возникновения связи между обоими БК, равная произведению $\alpha \times N \neq 0$, за счет величины N может быть сколь угодно близка к единице. Другими словами, при $x = x_c + \Delta/2$ рассматриваемые БК с достоверностью окажутся связанными в один БК, что противоречит исходному предположению о существовании в области $x_c < x < x_1$ двух независимых БК.

Скейлинг. Метод ренормализации

Альтернативой численному эксперименту для определения критического индекса радиуса корреляции, также как и ряда других критических перколяционных показателей, является аналитический *метод ренормализационных преобразований*, в основу

которого положено понятие масштабной инвариантности (самоподобия) или скейлинга (от англ. scale – масштаб).

Масштабная инвариантность (она же автомодельность или самоподобие) геометрического объекта состоит в том, что его “фотографии”, сделанные в различном масштабе, одинаковы. То есть, если сфотографировать произвольную n -ю часть объекта, а затем увеличить фотографию в n раз, и полученную картину сравнить с фотографией всего объекта, то они будут неразличимы.

Если рассмотреть указанную процедуру в приложении к БК, то окажется, что он самоподобен. Причем в отношении реальных объектов речь может идти не о строгом, а о статистическом самоподобии – когда “детали” фотографии при увеличении оказываются несколько размазаны, но в целом БК остается подобным себе (своим частям). В случае регулярных искусственных структур, моделирующих реальные БК (о чем речь пойдет несколько ниже), самоподобие будет не статистическим, а строгим математическим.

Какое же следствие можно извлечь из постулата о самоподобии БК?

Рассмотрим задачу о протекании по узлам на наиболее простой структуре – плоской треугольной сетке [4]. Такая система имеет для проводимого исследования то большое преимущество, что она хорошо изучена, и для нее получены строгие математические результаты [5]. Последнее обстоятельство дает возможность сопоставить результаты, полученные в рамках приближенного подхода, с точными данными, полученными математически строго. (Изучаемый подход является приближенным именно в силу статистического – с точностью до “мелких, малосущественных” деталей – характера самоподобия БК.)

Для выбранной решетки $x_c = x_c^s = 1/2$ (см. табл. 1.2). Пусть существует произвольная концентрация проводящих узлов $x > x_c$. Это означает, что в системе существует БК из этих узлов. Увеличим масштаб рассмотрения БК в b раз, то есть “раздвинем” рамки “фотографии объекта” в b раз по каждой из координатных осей. Ясно, что “в целом” изображение БК от этого не должно измениться.

Вспомним теперь постулат о самоподобии БК – в соответствии с ним эффекта увеличения масштаба изображения в b раз можно достичь, ужимая исходное изображение рассматриваемой части бесконечного объекта (БК) в b раз, оставляя размеры самой фотографии неизменными.

При этом несколько изменится четкость изображения на фотографии – некоторые мелкие детали потеряются, так как самоподобие статистическое, – в среднем же характер картины будет тот же.

Теперь подберем величину b специальным образом, удобным для последующих рассуждений. Поскольку исходная решетка треугольная, возьмем $b = \sqrt{3}$. Это приведет к тому, что при указанном сжатии исходной картинке каждый элемент площадью $b^2 = 3$, содержащий соответственно три узла, перейдет в элемент, содержащий один узел. При этом мы получаем новую решетку с новой концентрацией новых проводящих узлов x' .

Как получаются “новые” узлы из “старых”? По принципу “большинства” – если два или три старых узла, вошедших в новый укрупненный узел, были проводящими, то и данный новый узел считается проводящим. Аналогичное симметричное утверждение справедливо и в отношении непроводящих узлов.

Исходя из данного принципа, несложно получить связь между старой и новой концентрациями проводящих узлов в системе. Вероятность того, что все три узла, попавшие в укрупненный узел, проводящие, равна x^3 , а вероятность того, что проводящими окажутся два любые из них, есть $3x^2(1-x)$. Следовательно,

$$x' = x^3 + 3x^2(1-x). \quad (1.16)$$

Приведенную выше процедуру огрубления можно повторять любое число раз, и при этом переход от старой концентрации к новой каждый раз будет описываться соотношением (1.16).

Поскольку в целом поведение огрубленной сетки должно совпадать с поведением исходной детальной, вторая должна иметь тот же порог протекания, что и первая. Следовательно, критическая концентрация $x_c = 1/2$ должна быть неподвижной точкой масштабного преобразования. Справедливость этого общего физического рассуждения проверяется простой подстановкой значения $x_c = 1/2$ в (1.16), откуда получаем, что $x'_c = x_c = 1/2$. Также очевидно, что существует еще две тривиальные неподвижные точки преобразования (1.16) – $x = 0$ и $x = 1$.

Посмотрим теперь, что происходит с радиусом корреляции БК при такой перенормировке пространства после изменения масштаба. В исходной системе

$$R(x) \sim |x - x_c|^{-\nu}, \quad (1.17)$$

а в новой

$$R(x') \sim |x' - x_c|^{-\nu}. \quad (1.17')$$

Сжимая изображение БК в b раз при переходе от старой сетки к новой, мы пропорционально уменьшаем и $R(x)$. Поэтому радиус корреляции БК в новой огрубленной сетке $R(x')$ и БК в старой сетке $R(x)$ будут связаны соотношением

$$R(x') = (1/b)R(x). \quad (1.18)$$

Прежде чем произвести подстановку (1.16) в (1.18), учтем, что соотношения (1.17), (1.17') справедливы вблизи критической точки $x_c = x'_c$, и запишем (1.16) для x , близких x_c . Для этого разложим (1.16) по малому параметру $(x - x_c) \ll 1$ вблизи x_c . Опустим несложные промежуточные выкладки, отметив лишь, что при их проведении используется то обстоятельство, что в рассматриваемой решетке $x_c = 1 - x_c = 1/2$. В результате получаем

$$x' \cong x_c + 3/2(x - x_c). \quad (1.19)$$

Подставляя теперь (1.19) в (1.18), имеем

$$[3/2(x - x_c)]^v \cong b(x - x_c)^v,$$

откуда $b \cong (3/2)^v$, а $v \cong \ln b / \ln(3/2)$.

Учитывая, что рассмотрение проводилось для $b = \sqrt{3}$, окончательно получаем

$$v \cong \frac{(1/2)\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \cong 1,355.$$

Полученный результат демонстрирует очень высокую степень согласия ($\sim 1\%$) с точным значением $v_{(D=2)} = 4/3$ (см. табл. 3.1).

Подчеркнем в заключение два важных обстоятельства, связанных с приведенными выше рассуждениями.

Во-первых, представленный способ вычисления показателя $v_{(D=2)}$ является наглядным примером реализации общего метода *ренормализационного преобразования пространства* или просто – *ренормализации* – для вычисления критических перколяционных показателей.

Во-вторых, данный метод является приближенным, поскольку процесс изменения масштаба рассмотрения объекта огрубляет сетку и, как следствие, ведет к потере информации о ней. Поскольку БК рассматривается вблизи порога протекания, когда $x = x_c$, такие преобразования могут привести даже к нарушению связности БК при $x > x_c$ в случае численной реализации конкретной задачи протекания [6].

Для полноты освещения вопроса отметим также следующие характерные закономерности поведения системы (решетки) вблизи критической точки. Средняя "масса", или среднее число узлов конечных кластеров вблизи критической точки [3], ведет себя как

$$\bar{s}(x) \sim |x - x_c|^{-\gamma}. \quad (1.20)$$

При этом критические показатели ν , β и γ связаны между собой соотношением

$$D\nu = 2\beta + \gamma, \quad (1.21)$$

которое входит в систему равенств, соответствующих так называемому *двухпоказательному скейлингу*. Его отличительной чертой является то обстоятельство, что для получения всех вводимых перколяционных критических индексов (здесь мы остановились только на трех) достаточно иметь значения двух любых из них. Как правило, в качестве таких известных индексов, через которые определяют все остальные, используют показатели ν и β . Если соотношения двухпоказательного скейлинга не содержат размерность пространства D , то они справедливы при любом D , а если содержат – то при $D < 6$. Последние часто называют гиперскейлинговыми соотношениями. К их числу относится и соотношение (1.21).

Вычислим, используя (1.21), индекс радиуса корреляции ν для классической решетки Бете. Значение показателя β для этой решетки определялось в начале этой главы, где было показано, что оно равно единице. Показатель γ , введенный соотношением (1.20), можно определить для данной решетки следующим образом. Представим величину $\bar{s}(x)$ как

$$\bar{s}(x) = \frac{\sum n_s s(x)}{\sum n_s},$$

где n_s – число кластеров с числом узлов $s(x)$. Вблизи критической точки относительная "масса" конечных кластеров приближается к критической ($\sum n_s s(x)/N_0 \rightarrow x_c$), поскольку БК образуется именно в результате слияния достаточного количества конечных кластеров. Нормировочный делитель N_0 есть общее число элементов в системе. Следовательно, $\sum n_s s(x) \rightarrow x_c N_0 = \text{const}$.

В то же время величина $\sum n_s$ (с точностью до нормировочного делителя N_0) представляет собой $P(x)$ вблизи критической точки $x = x_c$, где $P(x) \sim (x - x_c)$. Следовательно, $\bar{s}(x) \sim (\sum n_s)^{-1} \sim (x - x_c)^{-1}$, откуда заключаем, что $\gamma = 1$.

Таблица 1.3

D	2	3	4	5	6
ν	4/3	0,88	0,7	0,6	1/2
β	5/36	0,4	0,5	0,7	1

Учтем теперь, что классической области $D \rightarrow \infty$ (решетке Бете) в практике расчетов соответствуют численные значения $D \geq 6$. Тогда, положив в (1.21) $D = 6$, $\beta = \gamma = 1$, получаем, что индекс радиуса корреляции ν для решетки Бете равен 1/2.

Значения основных критических показателей для пространств различной размерности приведены в табл. 1.3.

Все перечисленные критические показатели не зависят от выбора решетки или (в случае нерешеточных задач) модели процесса, а определяются лишь размерностью пространства. Это утверждение, основанное на результатах большого количества численных экспериментов, является в настоящее время общепринятым и составляет фундамент теории перколяции.

Поведение системы определяется соотношением пространственных масштабов – размера минимального элемента системы (например, постоянной решетки d) и длины радиуса корреляции R . Вблизи критической точки $R \rightarrow \infty$ и существует область промежуточной асимптотики $d \ll l_0 \ll R$. Эта область примечательна тем, что в ней все характеристики кластеров подобны их характеристикам в самой критической точке $x = x_c$, когда $R = \infty$. Следовательно, в данном случае мы имеем дело с самоподобием или масштабной инвариантностью, т. е. скейлингом. На масштабах больших R система ведет себя как однородная макросистема, составленная из элементов размером R . Свойства самих этих элементов определяются поведением системы на масштабе промежуточной асимптотики l_0 , где геометрия объектов является фрактальной.

1.3. Фрактальная размерность бесконечного кластера.

Размерность самоподобия. Фрактальные кривые.

Однородные фракталы

Понятие фрактальной геометрии играет весьма существенную роль при описании БК на масштабах, меньших R . При этом, являясь новым направлением в неклассической математике, она еще не столь широко употребляема, поэтому обращение к ней требует предварительного знакомства с рядом новых понятий.

Размерность самоподобия

Прежде всего введем определение *размерности самоподобия* d_s ,

$$d_s = \ln N / \ln n \quad (1.22)$$

Здесь N – число объектов, подобных данному, но имеющих в n раз меньший пространственный масштаб – при условии, что из них можно составить данный исходный объект.

Теперь в качестве простых иллюстраций объектов с фрактальной геометрией рассмотрим последовательно два примера.

Возьмем обычный квадрат. Вначале разделим его на четыре подобных ему квадрата со стороной вдвое меньшей, проведя два разреза, как показано на рис. 1.9, *а*. Очевидно, что в данном примере размерность самоподобия $d_s = \ln 4 / \ln 2 = 2$, и она совпадает с обычной евклидовой размерностью плоской фигуры $D = 2$.

Теперь проведем четыре разреза, как показано на рис. 1.9, *б*, разделив его при этом на девять частей, и затем удалим среднюю. Далее ту же самую процедуру сделаем с каждой из оставшихся восьми частей. Причем она может быть проделана (математически) бесконечное число раз. В результате получим фигуру, для которой $N = 8$, а $n = 3$ (см. рис. 1.9, *б*). Следовательно, для нее размерность самоподобия $d_s = \ln 8 / \ln 3 = 1,88... < 2 = D$.

Геометрические объекты с дробной (нецелой) размерностью получили название *фракталов* (или *фракталей* – в литературе встречаются оба эти названия), а сама эта размерность – *фрактальной размерности*.

Рассмотрим несколько аналогичных примеров построения регулярных искусственных фракталов. Такого рода объекты, устроенные достаточно просто, получили специальное название – ковер (или универсальная кривая) Серпинского и интенсивно исследуются в качестве моделей перколяционных кластеров и дру-

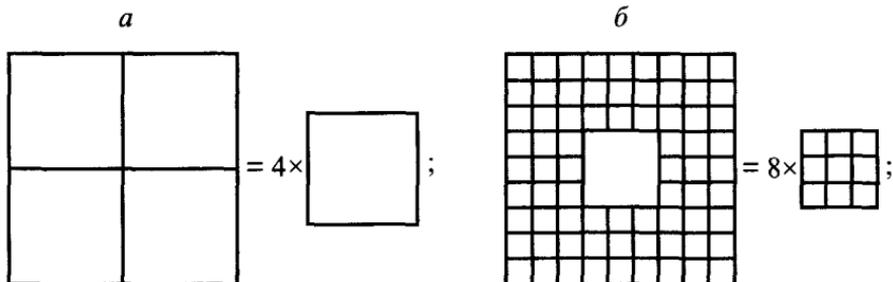


Рис. 1.9. Примеры геометрических объектов с обычной евклидовой (*а*) и фрактальной (*б*) размерностью

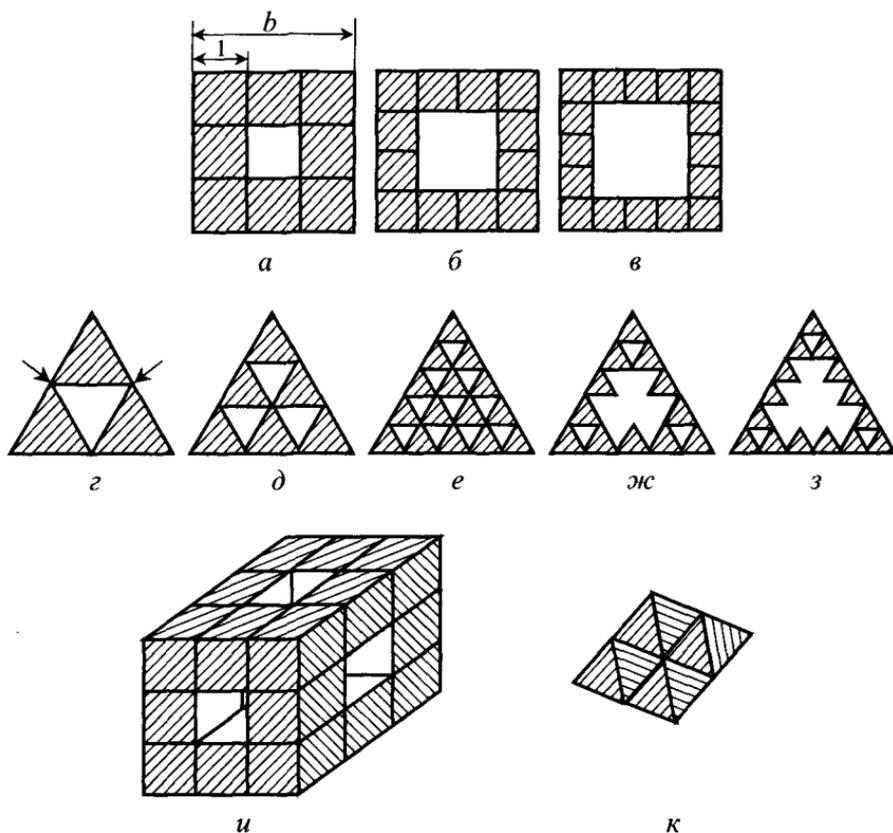


Рис. 1.10. Модели регулярных фракталов:

а–в – ковер Серпинского и другие фракталы, рассмотренные в [7]: $r = \infty$;
г – треугольная кривая Серпинского; *д–з* – другие шахматные треуголь-
 ники: $r < \infty$; *и, к* – обобщения *а* и *г* на трехмерный случай

гих самоподобных систем. Эти фракталы представлены на рис. 1.10, где каждая заштрихованная область представляет собой фрактал, подобный данному, но в уменьшенном соответствующим образом масштабе. Ясно, что таким образом можно построить фрактал с любой наперед заданной фрактальной размерностью.

Между объектами *а–в* и *г–з*, представленными на рис. 1.10, существует принципиальное отличие: первые состоят из элементарных ячеек, соединенных вдоль всей стороны, а вторые – из ячеек, соединенных только в вершинах. С топологической точки зрения все представленные на рис. 1.10 объекты одинаковы – для “разрезания” любого из них на две несвязные части достаточно исключения из начальной конфигурации счетного множества то-

чек. Однако минимальное необходимое число исключенных точек в первом случае бесконечно, а во втором – конечно. Например, для треугольной кривой Серпинского оно равно двум, как это показано на рис. 1.10, *з*. Это минимальное число точек называется разветвленностью фрактала x . Конкретное значение разветвленности несущественно, важно лишь, конечна она или бесконечна, так как некоторые свойства фракталов с конечной и бесконечной разветвленностью качественно различаются.

Отсутствие фазовых переходов на решетках с конечной разветвленностью и их возможность на бесконечно разветвленных решетках достаточно очевидны из физических соображений. В одномерных системах ($D = 1$), где для разрезания структуры достаточно удаления одной точки – т. е. разветвленность конечна, фазовые переходы невозможны – там $x_c = 1$. В системах с $D \geq 2$, где она бесконечна, $x_c < 1$, и фазовые переходы существуют.

Непосредственно в точке $x = x_c$ удаление конечного числа узлов скелета БК приводит к его разрушению, следовательно, его разветвленность в этой точке конечна. Поэтому в качестве модели скелета БК можно использовать треугольную кривую Серпинского (рис. 1.10, *з-з*) и нельзя ковер Серпинского (рис. 1.10, *а-в*).

В заключение отметим, что введенное выше определение размерности самоподобия относится, строго говоря, к регулярным (искусственно построенным) фрактальным геометрическим объектам. Реальные физические объекты – перколяционные кластеры, полимерные макромолекулы и их агрегаты, мономолекулярные пленки напыления, спектры частот случайных шумов и т. д. – обладают статистическим самоподобием. Оказывается, что данное определение размерности самоподобия с успехом может быть распространено и на такие объекты.

Фрактальные кривые

Статистическое самоподобие состоит в том, что на каждом шаге представленной на рис. 1.11 схемы при увеличении произвольного выделенного участка кривой в n раз, мы получаем кривую, близкую к исходной. Каждая из таких кривых не повторяет исходную абсолютно точно. Но, усреднив все полученные в результате реализации такой схемы кривые, мы как раз получим исходную линию.

Поскольку каждый сколь угодно малый элемент этой кривой будет иметь столь же сложную структуру, что и исходная кривая (а не будет являться отрезком прямой или дуги), то самоподоб-

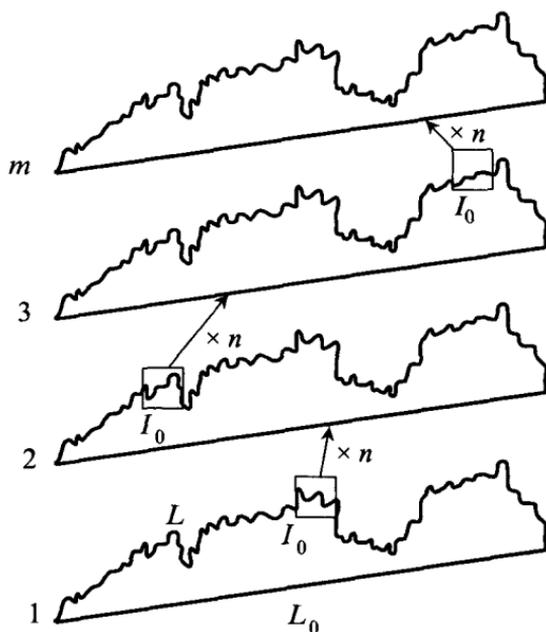


Рис. 1.11. Схема многократного (бесконечного) воспроизведения исходной кривой путем увеличения на каждом этапе произвольного выделенного участка кривой в n раз

ные кривые (как статистически, так и математически самоподобные) можно назвать “толстыми” линиями [6].

Если измерять длину L этой кривой с пространственным разрешением l_0 , то результат измерения будет зависеть от выбранной единицы измерения l_0 , поскольку в соответствии с (1.22) размерность кривой будет представлена соотношением

$$d_s = \ln N / \ln n = \ln N / \ln (L_0 / l_0) \sim -\ln N / \ln l_0,$$

так как масштаб перехода от целой кривой к составляющим ее элементам есть $n = L_0 / l_0$ (см. рис. 1.11).

Следовательно, число участков, на которые оказывается разбита исходная кривая при измерении ее в единицах l_0

$$N \sim l_0^{-d_s}.$$

Поскольку измеряемая длина $L \sim l_0 N$, то

$$L \sim l_0^{1-d_s}.$$

Приведенные рассуждения справедливы в случае, когда кривая не имеет возвратов и самопересечений. В противном случае определение размерности должно быть несколько модифицировано по сравнению с (1.22).

Однородные фракталы

Вычислим *фрактальную размерность* БК, учитывая, что он является фрактальным объектом на масштабах $l < R$ (на больших масштабах он однороден). Считая, что элементы разбиения фрактальной кривой представляют собой “атомы” одинакового размера l_0 и массы m_0 , из которых состоит вся рассматриваемая структура, можно показать, что масса системы (или полное число “атомов” в ней) связана с ее размером L_0 (см. рис. 1.11) как

$$M \sim L_0^{d_s}.$$

Действительно, $n \sim L_0/l_0 \sim L_0$, поскольку в данном рассмотрении мы положили $l_0 = \text{const}$. Тогда из (1.22) получаем

$$N \sim L_0^{d_s}$$

или, соответственно,

$$M = Nm_0 \sim L_0^{d_s}.$$

Полученный результат справедлив, очевидно, и для любого участка системы размером $l < R$. Отсюда легко установить плотность структуры на масштабе $l < R$

$$\rho = M/l^D \sim l^{d_s}/l^D \sim l^{d_s-D}. \quad (1.23)$$

С другой стороны, мы знаем, что плотность БК ведет себя в соответствии с (1.11) как

$$P(x) \sim (x - x_c)^\beta.$$

Используя также (1.12), получаем для плотности ρ выражение

$$\rho = P(x) \sim (R^{-1/v})^\beta = R^{-\beta/v}. \quad (1.24)$$

Сопоставление (1.23) и (1.24) для случая $l \sim R$ позволяет получить связь между евклидовой размерностью пространства D , в котором рассматривается задача, и фрактальной размерностью d_s исследуемого объекта (в данном случае – БК), выраженную через критические перколяционные индексы

$$d_s = D - \beta/v. \quad (1.25)$$

Полученное соотношение содержит D и, следовательно, справедливо в гиперскейлинговом режиме – при $D < 6$. В классической области – при $D \geq 6$ – показатель d_s , в соответствии с (1.25) и данными таблицы 1.3, принимает постоянное значение $d_s = 4$.

Соотношение (1.21) позволяет получить формулу для расчета значения d_s при любой размерности пространства D с использованием еще одного критического показателя – γ

$$d_s = (\beta + \gamma)/\nu.$$

Наряду с размерностью БК как единой структуры, особый интерес представляет размерность его скелета, определяющего транспортные свойства БК. Поскольку скелет БК также является фрактальным объектом, то в отношении него справедливы все приведенные выше рассуждения, и, соответственно, для размерности скелета можно записать соотношение, аналогичное (1.24),

$$d_s^{(b)} = D - \beta_b/\nu,$$

где β_b есть критический показатель мощности скелета БК (вероятности того, что элемент принадлежит непосредственно скелету, и равной $P^{(b)}(x) \sim (x-x_c)^{\beta_b}$). Величина β_b оказалась равной $1,67 \pm 0,17$ для $D = 2$ и $1,68 \pm 0,14$ для $D = 3$, что очень близко к размерности треугольной кривой Серпинского. Поэтому данная регулярная фрактальная кривая, как уже отмечалось выше, может быть использована в различных задачах в качестве модели скелета БК.

Рассмотренные выше структуры, которые ведут себя как фрактальные на масштабах $l < R$ и как обычные евклидовы (то есть однородные) на масштабах $l > R$, получили название *однородные фракталы*. Представление о том, как выглядит такая система, дает схема, показанная на рис. 1.7. Аналогичную картину можно получить, если покрыть обычную плоскость ($D = 2$) коврами Серпинского (типа представленных на рис. 1.10, а–в), как кафельными плитками размером $R \times R$.

Для таких структур может быть предложен метод экспериментального определения как радиуса корреляции БК, так и его фрактальной размерности. На больших масштабах структура однородна, следовательно, плотность ее постоянна. На малых масштабах структура фрактальна, поэтому плотность ее определяется соотношением (1.23). Математическая запись этого обстоятельства имеет вид

$$\rho = \begin{cases} l^{d_s - D}, & l < R, \\ \text{const}, & l > R, \end{cases} \quad (1.26)$$

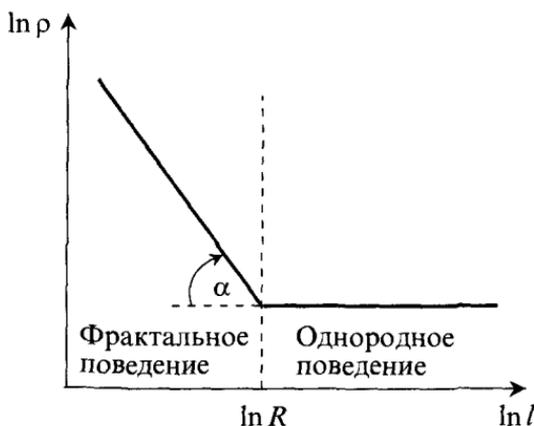


Рис. 1.12. Поведение плотности однородного фрактала

откуда видно, что переход от постоянной плотности к переменной как раз и произойдет при $l = R$. Следовательно, если построить зависимость (1.26) в двойном логарифмическом масштабе (рис. 1.12), то из него можно определить и величину R , которая есть координата точки излома графика, и величину d_s , которая есть тангенс угла наклона убывающей части графика плюс евклидова размерность пространства задачи — $d_s = \text{tg } \alpha + D$. На рис. 1.13, а, б представлены примеры экспериментального определения зависимости $\rho(l)$ для реальных физических фрактальных объектов — островковых металлических пленок [3].

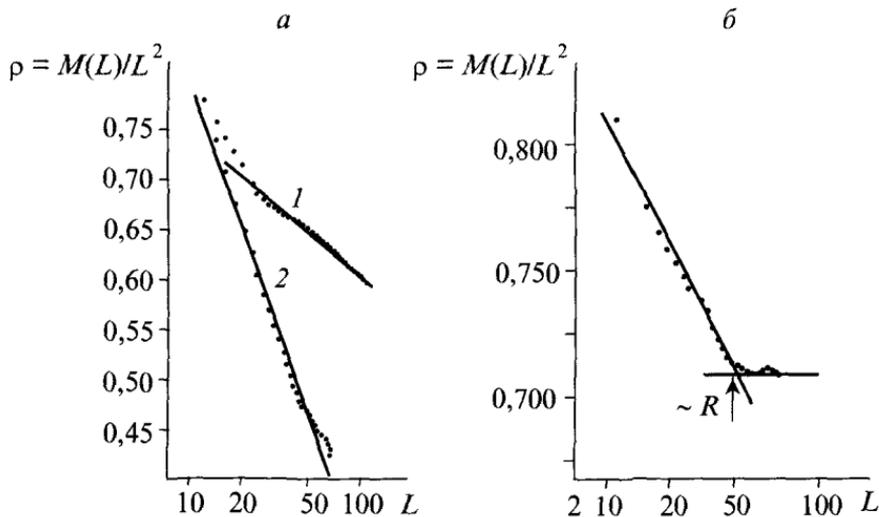


Рис. 1.13. Графики зависимости плотности ρ от масштаба измерения L :
 а) для $x = x_c$ ($l = R$) (1 — плотность БК, 2 — плотность скелета);
 б) для $x > x_c$ ($l > R$)

1.4. Модель эффективной среды.

Вывод основного соотношения.

Решетка с бинарным распределением

Для решения задач протекания на слабо нарушенных решетках, находящихся далеко от порога протекания, довольно широко используется модель (иногда ее даже называют теорией) *эффективной среды* (МЭС) [7].

Модель эффективной среды

Идея, положенная в основу этой модели, состоит в переходе от сетки случайных сопротивлений – с произвольным распределением связей по проводимостям σ , описываемым некоторой нормированной плотностью распределения $f(\sigma)$ – к однородной сетке с $\sigma = \sigma_m = \text{const}$. При этом глобальные, макроскопические свойства однородной сетки должны быть такими же, как и у исходной неоднородной. А рассчитать любые макроскопические характеристики однородной сети не составляет больших сложностей.

С математической точки зрения МЭС представляет собой *расчетный алгоритм* для отыскания величины σ_m по заданной функции плотности распределения $f(\sigma)$.

Наиболее наглядно продемонстрировать логику построения этого алгоритма можно на примере исследования протекания электрического тока по проволочной сетке.

Вывод основного соотношения

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть существует сетка проводников, проводимости которых σ распределены с некоторой нормированной плотностью распределения $f(\sigma)$. Предположим, для определенности, что разность потенциалов V приложена в направлении одной из осей сетки (рис. 1.14). Требуется определить проводимость звена однородной сетки, т. е. состоящей из одинаковых сопротивлений σ_m , обеспечивающей (при том же внешнем перепаде потенциалов V) протекание по ней того же тока I , что течет по неоднородной сети.

Для этого поступим следующим образом. Возьмем искомую однородную сетку и проведем с ней следующий мысленный эксперимент.

Отметим предварительно, что разность потенциалов на любом сопротивлении однородной сетки (например, AB на рис. 1.14) вдоль направления приложенного напряжения будет постоянна.

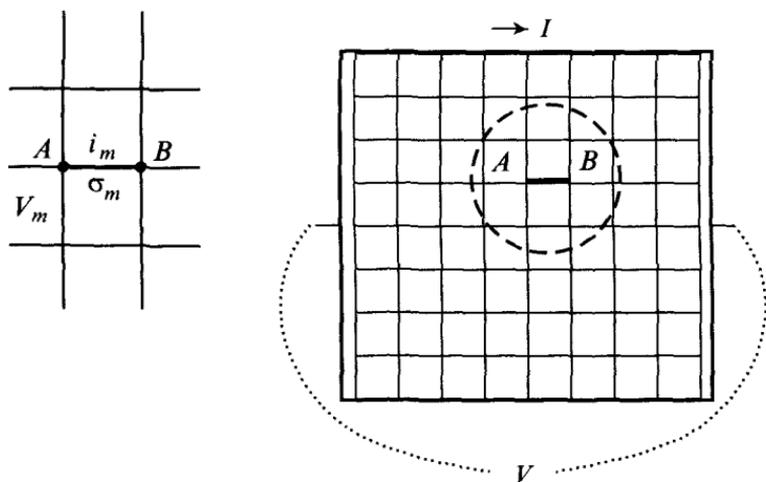


Рис. 1.14. Сеть проводников с различными проводимостями σ . Выделенный участок между узлами A и B используется для определения эквивалентного сопротивления σ_m^{-1} однородной сети

Обозначим ее v_m . Соответственно, ток, текущий по данному элементу решетки,

$$i_m = v_m \sigma_m. \tag{1.27}$$

Если теперь заменить элемент AB однородной сетки на элемент с проводимостью σ_0 , который должен стоять на этом месте в исходной неоднородной сетке, то это приведет к возмущению поля однородной сетки в окрестности этого элемента, а разность потенциалов между точками A и B изменится на величину v_0 . Это, в свою очередь, вызовет и соответствующее изменение протекающего между этими точками тока на величину i_0

$$i_m + i_0 = (v_m + v_0) \sigma_0. \tag{1.28}$$

В то же время сетку, по которой течет ток, схематично можно представить так, как показано на рис. 1.15, где Σ_{AB} – проводимость всей сети без сопротивления AB .

Тогда дополнительный ток i_0 , вызванный дополнительным напряжением v_0 , будет определяться соотношением

$$i_0 = v_0(\sigma_0 + \Sigma_{AB}). \tag{1.29}$$

Рассматриваемая система проявляет по закону Ленца “инерционность”, которая состоит в том, что возникающие дополнительные токи будут стремиться минимизировать причину своего возникновения – локальное дополнительное напряжение v_0 .

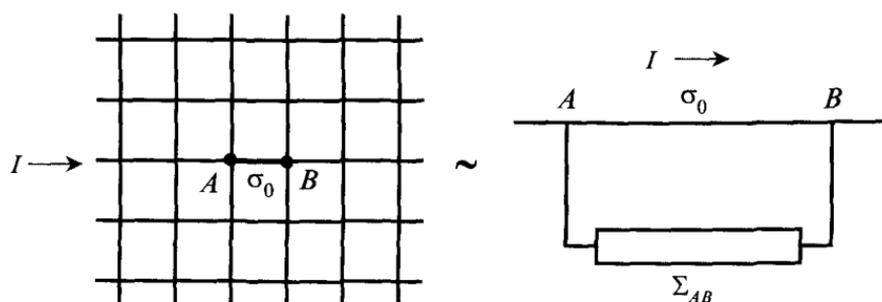


Рис. 1.15. Схема протекания тока в сети для определения возмущения поля v_0

Следовательно, в бесконечной однородной решетке замена одного сопротивления не может создать сильного локального возмущения поля в его окрестности. Это возмущение “поглощается” бесконечностью системы, “размажется” по ней, и непосредственно на элементе σ_0 это возмущение окажется небольшим по сравнению с существующим “фоном”

$$v_0/v_m \ll 1,$$

поэтому пренебрежем величиной v_0 в (1.28). Это позволяет “расцепить” уравнения (1.28) и (1.29) – каждое из них содержит теперь только “свой” потенциал – v_m или v_0 , что в результате приводит систему (1.27) – (1.29) к разрешимому виду

$$i_m = v_m \sigma_m, \quad (1.27')$$

$$i_m + i_0 = v_m \sigma_0, \quad (1.28')$$

$$i_0 = v_0(\sigma_0 + \Sigma_{AB}). \quad (1.29')$$

Строго говоря, такой переход от системы (1.27)–(1.29) к системе (1.27')–(1.29') математически необоснован и ведет к потере самосогласованности в исходной системе (1.27)–(1.29). Однако в пользу целесообразности такой жертвы говорят как приведенные выше физические соображения, указывающие на то, что вносимая погрешность будет невелика, так и то, что в “обмен” на внесение очевидно малой погрешности “приобретается” принципиальная возможность решения задачи.

Перейдем к решению системы (1.27')–(1.29'). Вычитая (1.28') из (1.27'), получаем

$$i_0 = v_m(\sigma_0 - \sigma_m). \quad (1.30)$$

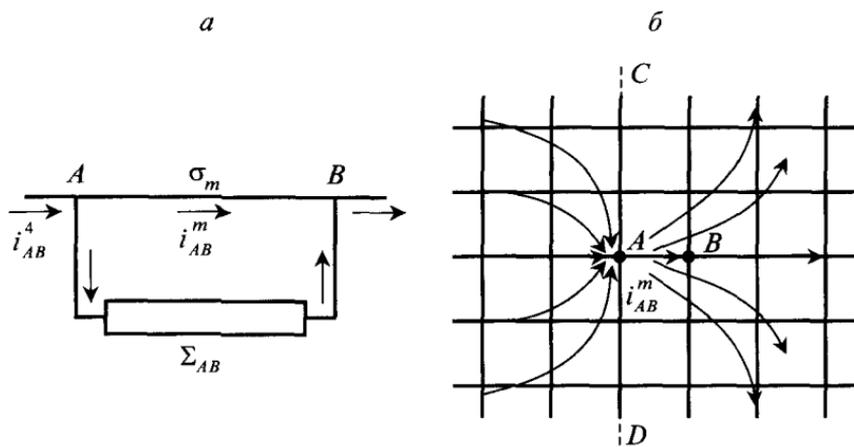


Рис. 1.16. Схема протекания тока в сети для определения:
 а – проводимости всей сети без рассматриваемого сопротивления;
 б – тока, текущего непосредственно по рассматриваемому сопротивлению σ_{AB}

Подстановка (1.30) в (1.29') дает выражение для возмущения поля v_0

$$v_0 = v_m \frac{\sigma_0 - \sigma_m}{\sigma_0 + \Sigma_{AB}}. \quad (1.31)$$

Определим проводимость Σ_{AB} сети с одним удаленным сопротивлением. Для этого рассмотрим движение тока в однородной сети, которую по аналогии с рис. 1.15 представим в следующем виде (рис. 1.16, а).

Суммарный ток, протекающий по системе из точки A в точку B , есть

$$i_{AB}^\infty = v_{AB}(\sigma_m + \Sigma_{AB}), \quad (1.32)$$

здесь v_{AB} – разность потенциалов между точками A и B .

Ток, протекающий непосредственно по сопротивлению AB , есть

$$i_{AB}^m = v_{AB}\sigma_m. \quad (1.33)$$

Из соображений симметрии, ток, втекающий в точку A , есть сумма токов, втекающих в нее слева от плоскости CD , проходящей через точку A , как это показано на рис. 1.16, б, а суммарный ток, вытекающий из точки A , есть сумма токов, расходящихся из этой точки по всем возможным путям, расположенным справа от плоскости CD . При этом пути движения тока делятся на две рав-

ные (симметричные) части – по левой половине путей, входящих в A , ток втекает, а по правой – вытекает. Половина входящих в точку A путей (и, соответственно, выходящих из нее) есть $z/2$, где z – координационное число решетки. В однородной решетке, где все сопротивления равны, токи, текущие по ним, будут одинаковы. Следовательно, по любому сопротивлению, выходящему из точки A справа от плоскости CD – в том числе и по сопротивлению AB , – будет течь ток, равный $1/(z/2)$ -й части от полного тока i_{AB}^∞ , вытекающего из A . Это значит, что

$$i_{AB}^m = 2i_{AB}^\infty / z, \quad (1.34)$$

а, подставляя (1.32) и (1.34) в (1.33), окончательно имеем искомый результат

$$\Sigma_{AB} = \left(\frac{z}{2} - 1 \right) \sigma_m. \quad (1.35)$$

Подставляя (1.35) в (1.31), получаем связь между величиной локального возмущения поля v_0 и величинами проводимости – элемента однородной сетки σ_m и элемента исходной неоднородной сетки σ_0 , “возмущающего” данную однородную решетку

$$v_0 = v_m \frac{\sigma_0 - \sigma_m}{\sigma_0 + (z/2 - 1)\sigma_m}. \quad (1.36)$$

Для того, чтобы при переходе к начальной неоднородной сетке с распределением $f(\sigma)$ путем восстановления на своих местах всех элементов σ получить то же поле, что и в эквивалентной однородной сетке, необходимо, чтобы среднее значение возмущений по всей сетке обращалось в ноль

$$\langle v_0 \rangle = 0. \quad (1.37)$$

Отметим, что указанный принцип, математически выраженный соотношением (1.37), является общим положением МЭС в ее различных модификациях.

Подставим теперь в соотношение общего вида (1.37) выражение для v_0 (1.36). В результате получим окончательную формулу для расчета проводимости элемента эквивалентной однородной сетки σ_m

$$\int_0^\infty \frac{\sigma_m - \sigma}{(z/2 - 1)\sigma_m + \sigma} f(\sigma) d\sigma = 0. \quad (1.38)$$

Решетка с бинарным распределением

Проиллюстрируем возможности МЭС на примере расчета достаточно простого варианта – решетки с бинарным распределением связей по проводимостям

$$f(\sigma) = p\delta(\sigma - 1) + (1 - p)\delta(\sigma - \alpha). \quad (1.39)$$

Плотность распределения (1.39) показывает, что с вероятностью p проводимость связи равна единице, а с вероятностью $(1 - p)$ она принимает значение α . Или, другими словами, p -я доля связей имеет проводимость $\sigma = 1$, а $(1 - p)$ -я доля – $\sigma = \alpha$.

Подставляя распределение (1.39) в основную формулу МЭС (1.38), получаем интеграл вида

$$p \int_0^{\infty} \frac{\sigma_m - \sigma}{(z/2 - 1)\sigma_m + \sigma} \delta(\sigma - 1) d\sigma + (1 - p) \int_0^{\infty} \frac{\sigma_m - \sigma}{(z/2 - 1)\sigma_m + \sigma} \delta(\sigma - \alpha) d\sigma = 0.$$

Произведя интегрирование с учетом свойств δ -функции, приходим к алгебраическому выражению

$$p \frac{\sigma_m - 1}{(z/2 - 1)\sigma_m + 1} + (1 - p) \frac{\sigma_m - \alpha}{(z/2 - 1)\sigma_m + \alpha} = 0,$$

которое путем элементарных преобразований приводится к квадратному уравнению относительно σ_m

$$(z/2 - 1)\sigma_m^2 + \{1 - pz/2 - \alpha[z/2(1 - p) - 1]\}\sigma_m - \alpha = 0, \quad (1.40)$$

решение которого есть

$$\sigma_m = \frac{\{pz/2 + \alpha[z/2(1 - p) - 1] - 1\}}{z - 2} + \frac{\sqrt{\{pz/2 + \alpha[z/2(1 - p) - 1] - 1\}^2 + 4\alpha(z/2 - 1)}}{z - 2}. \quad (1.41)$$

Второй корень уравнения (1.40) отброшен, поскольку он меньше нуля, а по физическому смыслу задачи проводимость не может быть отрицательной. Оценим эффективность МЭС на примере предельного перехода к классической задаче теории перколяции, когда $\alpha = 0$. В этом случае формула (1.41), полученная для произвольного бинарного распределения, существенно упрощается

$$\sigma_m = \frac{zp - 2}{z - 2}. \quad (1.42)$$

Из (1.42) легко видеть, что σ_m обращается в ноль (что соответствует прекращению протекания по решетке) при $p = 2/z$. Если ввести обозначение $p_c = 2/z$, то (1.42) можно представить в виде

$$\sigma_m = \frac{p - p_c}{1 - p_c}, \quad (1.43)$$

где p_c – критическая доля проводящих связей в решетке или порог протекания. Следовательно, в пределе классической теории перколяции МЭС дает инвариант

$$zp_c = 2, \quad (1.44)$$

что полностью совпадает с результатом, полученным ранее при рассмотрении классической теории для двумерных решеток. Для пространственных решеток ($D = 3$) в классической теории этот инвариант имеет другое значение

$$zp_c = 2/3$$

и, следовательно, для 3D-решеток МЭС будет давать результаты, содержащие погрешность порядка 25 %.

Очевидно, что МЭС может быть наиболее успешно использована для решения задач на плоских решетках, где она дает практически точные результаты во всем диапазоне изменения $p_c \leq p \leq 1$. На пространственных решетках приближенный характер МЭС проявляется более существенно. Особенно ощутимым он оказывается вблизи порога протекания, где вносимая использованием МЭС погрешность достигает 25 %. Вдали от p_c , когда $p \rightarrow 1$, в соответствии с (1.43) и $\sigma_m \rightarrow 1$. Очевидно, что данный результат является точным независимо от размерности пространства D .

Таким образом, при $D = 3$ МЭС может быть эффективно использована лишь вдали от порога протекания – при $p \geq p_c + 0,1$. Величина $\sim 0,1$ есть абсолютная погрешность МЭС при определении p_c в случае $D = 3$ из соотношения (1.44).

Вблизи порога протекания, при $p_c \leq p \leq p_c + 0,1$, для получения результатов, более точных, чем получаемых в рамках МЭС, необходимо использовать непосредственно методы теории перколяции.

ГЛАВА 2

ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ФЛЮИДОВ В РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ ПОРИСТЫХ СРЕД

2.1. Обобщение модели Шкловского – де-Жена для случая фильтрационного течения в микронеоднородной среде

Транспортные или кондуктивные свойства пористых сред определяются, прежде всего, наличием проводящих поровых каналов. Наиболее простая и удобная модель, позволяющая описывать взаимодействие этих каналов и, как результат, формирование проницаемости пористой среды как макрообъекта, – пространственная решетка проводящих капилляров. При этом естественно считать, что радиусы капилляров в такой решетке распределены в соответствии с реальной порометрической кривой – функцией плотности распределения поровых каналов по радиусам $f(r)$.

В общем случае природа образования поровых каналов, т. е. наиболее “узких” элементов в структуре порового пространства, в коллекторах различных типов различна. Однако, для определенности, чтобы не отвлекаться каждый раз на обсуждение особенностей того или иного конкретного варианта строения соответствующего типа коллектора, дальнейшее рассмотрение проведем для зернистой среды (рис. 2.1). В этом случае естественно считать области A – порами, а области B – поровыми каналами.

Необходимым условием применимости представленных в главе 1 методов описания течения в решеточных структурах

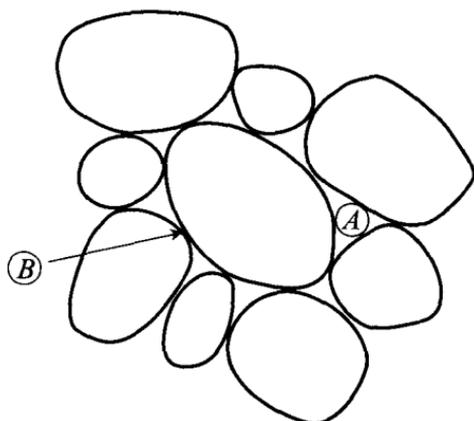


Рис. 2.1. Схематичное представление выделения в пористой среде пор A и поровых каналов B

является определенная степень однородности проводящих элементов (связей в решетке), т. е. полагается, что собственная проводимость у всех проводящих связей в решетке одинакова. Однако для многих типов неоднородных сред, например, коллекторов нефти и газа, такой подход неприменим. Это связано с тем, что в эффективную проводимость неоднородной среды могут давать соизмеримый вклад различные группы элементов структуры, собственные проводимости которых могут отличаться на несколько порядков. В данной работе предлагается модель, позволяющая описать проводимость неоднородной среды, если известна функция распределения элементов структуры по величине их собственной проводимости. По существу, предлагается обобщение модели Шкловского – де-Жена на случай, когда решетка содержит проводящие элементы, имеющие распределение по величине их собственной проводимости.

Рассмотрим решеточную модель неоднородной среды, узлы которой соединены связями с различной проводимостью σ . Сразу оговоримся, что, во избежание повторений, под обобщающим понятием “проводимость”, если это не конкретизируется, подразумеваются как гидропроводность или проницаемость, так и электропроводность, поскольку логика рассуждений при построении моделей обоих процессов полностью совпадает.

Пусть период решетки равен l . Предположим, что величины проводимости (или, что то же самое, значения определяющего ее параметра – радиуса сечения) связей распределены в решетке

хаотическим образом и характеризуются функцией распределения $f_0(\sigma)$, удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma = 1.$$

Поскольку флюидопроводность капилляра $\sim r^4$, а электропроводность $\sim r^2$, распределение связей по проводимостям можно характеризовать также нормированной функцией распределения капилляров по радиусам $f(r)$

$$\int_0^{\infty} f(r) dr = 1.$$

В дальнейшем, при рассмотрении конкретных процессов переноса, будет использоваться соответствующий вид зависимости $\sigma(r)$, а для характеристики неоднородности пористой среды — функция $f(r)$.

Соответствующее распределение по размерам узлов решетки может быть различным и зависит от выбранной решеточной модели (например, размеры узлов могут быть много больше, чем радиусы соединяющих их капилляров, или как-то коррелировать с ними). В случае зернистой структуры породы (см. рис. 2.1) размеры пор существенно больше сечения капилляров, поэтому гидравлическое сопротивление пор много меньше такового для поровых каналов. Исходя из этих соображений, влияние размеров узлов решетки на протекание по ней не рассматривается. Таким образом, полагается, что проводимость решетки определяется только течением в капиллярах. Данное предположение является достаточно распространенным для решеточных моделей пористой среды [8, 9, 10], однако далеко не обязательным. Наиболее адекватным оно оказывается в указанном случае зернистых сред.

Исходя из представлений о структуре БК, приходим к задаче определения проводимости его скелета, ответственного за транспортные свойства как собственно БК, так и, соответственно, пористой среды в целом.

Проводящие каналы, по которым осуществляется течение флюида, представляют собой цепочки гидравлически связанных между собой поровых каналов (капилляров) различного радиуса (рис. 2.2). Проводимость цепочки будет определяться самым тонким капилляром, поэтому его радиус естественно считать основной характеристикой такой цепочки. Используя его, введем поня-

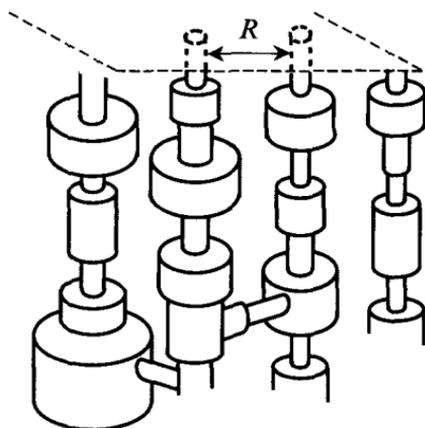


Рис. 2.2. Схема формирования проводящих r -цепочек

тие “ r -цепочки” – будем так именовать цепочки капилляров, в которых минимальный радиус составляющих их капилляров лежит в диапазоне $r \div r + dr$.

Скелет БК будут составлять r -цепочки всего диапазона области определения функции $f(r)$ – ($0 < r < r_{\max}$), причем их количество для каждого r будет свое и, вообще говоря, заранее неизвестно. Поэтому необходимо построить некоторый алгоритм определения количества образовавшихся r -цепочек, их проводимостей и последующего суммирования с целью нахождения суммарной проводимости БК. Именно данный алгоритм и является главным элементом перколяционной модели.

Представляемый здесь подход основан на введении определенной систематизации или иерархии r -цепочек, которая позволяет реализовать указанную выше схему суммирования.

Отметим, что для изотропной решетки проводимость скелета БК в любом выделенном направлении в основном определяется параллельными этому направлению проводящими цепочками (рис. 2.2, 2.3).

Предположим на время, что проводимости связей, величины которых меньше σ_1 , равны нулю. Тогда протекание возможно лишь по связям, проводимость которых превышает σ_1 .

Средняя проводимость σ_1 -цепочки $k(\sigma_1)$ однозначно определяется величиной σ_1 . Зная $F(\sigma_1)$ – функцию распределения проводящих цепочек по σ_1 , можно определить общую проводимость БК

$$K = \int_0^{\sigma_c} k(\sigma_1) F(\sigma_1) d\sigma_1, \quad (2.1)$$

где σ_c – проводимость так называемой r_c -цепочки. Это максимально возможная проводимость отдельной цепочки в выстраиваемой иерархии, которая состоит в следующем.

Начнем рассмотрение возможности формирования r -цепочек, начиная с r_{\max} – правой границы области определения $f(r)$. Очевидно, капилляров с радиусами в диапазоне $r_{\max} \div r_{\max} + dr$ будет недостаточно для возникновения БК. Будем двигаться влево по оси r . Количество проводящих капилляров будет нарастать, и, когда оно достигнет порога протекания, возникнет БК. Вероятность для связи иметь проводимость $\sigma \geq \sigma_1$

$$P^b(\sigma_1(r_1)) = \int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma = \int_{r_1(\sigma_1)}^{\infty} f(r) dr, \quad (2.2)$$

где $r_1(\sigma_1)$ есть обращенная зависимость $\sigma_1(r_1)$. Бесконечный кластер и, соответственно, протекание в решетке возникают в случае, когда $P^b(\sigma_1) \geq P_c^b$. Используя (1.1) и (2.2), можно найти величину $\sigma_c(r_c)$, при которой образуется БК. Такая r_c -цепочка с максимальной проводимостью σ_c будет всего одна, поскольку она отвечает моменту возникновения БК и, соответственно, радиус корреляции при этом равен бесконечности.

Если уменьшать далее пороговое значение $\sigma_1 > 0$, то число проводящих σ_1 -цепочек $n(\sigma_1)$ будет увеличиваться. При этом проводящие цепочки, добавившиеся к тем, которые были при начальном σ_1 , содержат связи с проводимостью $\sigma \leq \sigma_1$, поэтому их средняя проводимость будет меньше.

Число проводящих цепочек $n(\sigma_1)$, содержащих связи с $\sigma \geq \sigma_1$ и выходящих на единицу поверхности секущей плоскости, перпендикулярной к выбранному направлению, в трехмерном случае равно $1/R^2$, а в плоском – $1/R$. С учетом (2.2), (1.12),

$$n(\sigma_1) = l^{(1-D)} \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right]^{v(D-1)}, \quad \int_{\sigma_c}^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma = P_c^b \quad (2.3)$$

или

$$n(\sigma_1) = l^{(1-D)} \left[\int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right]^{v(D-1)}, \quad \int_{r_c}^{\infty} f(r) dr = P_c^b. \quad (2.3')$$

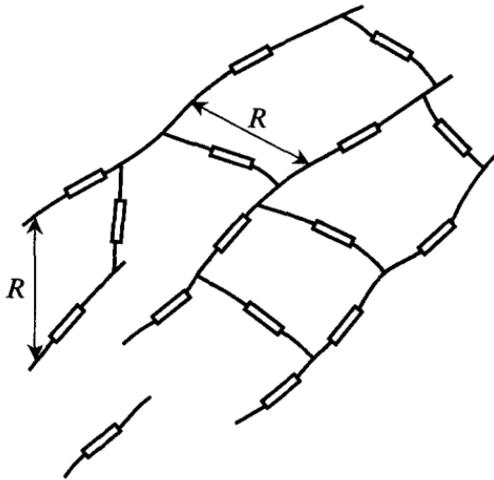


Рис. 2.3. Упрощенная схема структуры скелета БК в рамках модели Шкловского – де-Жена без учета извилистости (фрактальности) составляющих его проводящих путей

Соответственно, функция распределения проводящих цепочек по σ_1 связана с величиной n соотношением $F(\sigma_1) = -dn/d\sigma_1$, поскольку n с уменьшением σ_1 возрастает

$$F(\sigma_1) = v(D-1)I^{(1-D)} \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right]^{v(D-1)-1} f(\sigma_1). \quad (2.4)$$

Теперь определим $k(\sigma_1)$ – среднюю проводимость единицы длины σ_1 -цепочки (r_1 -цепочки), составленной из последовательно соединенных связей с $\sigma \geq \sigma_1$ (см. рис. 2.2). На этом этапе необходимо учесть различие между 2D- и 3D-решетками. В случае 2D-решеток r -цепочки представляют собой гладкие линии (рис. 2.3), поэтому

$$k(\sigma_1) = \left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right]^{-1} \left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma \right]. \quad (2.5)$$

Однако в 3D-задачах возникает существенная извилистость (фрактальность) элементов скелета БК. В соответствии с результатом (1.15) раздела 1.2 реальная длина участка r -цепочки в

$$\left(\int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right)^{v-\zeta}$$

или, соответственно, в

$$\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right)^{v-\zeta}$$

раз больше обычного линейного расстояния между его концами.

Следовательно, проводимость r -цепочки для данного расстояния в

$$\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right)^{v-\zeta} \quad (2.6)$$

раз меньше. Вводя корректировочный коэффициент (2.6) в (2.5), получаем окончательное выражение для средней проводимости единицы длины элемента порового 3D-пространства (моделирующей его пространственной решетки капилляров)

$$k(\sigma_1) = \left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right]^{-1} \left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma \right] \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right)^{-(v-\zeta)}. \quad (2.7)$$

Таким образом, подставляя (2.4) и (2.5) либо (2.7) в (2.1), с учетом использования (2.3) для определения σ_c , получаем для 2D-решетки

$$K = \gamma v l^{-1} \int_0^{\sigma_c} \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right]^{v-1} f_0(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{\left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right] \left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma \right]^{-1}}, \quad (2.8)$$

для 3D-решетки

$$K = 2\gamma v l^{-2} \int_0^{\sigma_c} \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_c} f_0(\sigma) d\sigma \right]^v f_0(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{\left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right] \left[\int_{\sigma_1}^{\infty} f_0(\sigma) d\sigma \right]^{-1}}, \quad (2.9)$$

а численный коэффициент γ (порядка единицы), зависящий от типа решетки, призван скорректировать тот факт, что перетоки между проводящими параллельными цепочками не были учтены.

При получении выражения (2.9) учтено численное значение показателя извилистости $\zeta = 1$.

В случае, когда все проводящие каналы имеют одинаковую проводимость, формулы (2.8), (2.9) приобретают вид критических перколяционных зависимостей $\Sigma \sim K \sim (P^b - P_c^b)^d$ [11], описывающих изменение решеточной проводимости вблизи критической точки в интервале изменения вероятности проводимости связи $P_c^b \leq P^b \leq P_c^b + \Delta P^b$, где $\Delta P^b < 0,1$.

2.2. Верификация перколяционной модели по результатам численного эксперимента

Поскольку выведенные в предыдущем разделе формулы получены в предположении отсутствия перетоков между параллельными проводящими цепочками, возникает вопрос о точности найденных зависимостей. С целью проверки надежности полученных в рамках перколяционной модели результирующих соотношений (2.8), (2.9) проводилось сравнение результатов теоретических расчетов с результатами следующего численного эксперимента.

Рассмотрим стационарное распространение тока в произвольной среде, описываемое эллиптическим уравнением

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla \varphi) = 0. \quad (2.10)$$

Разностным аналогом соотношения (2.10) на 2D-решетке является уравнение, определяющее распределение потенциала φ в квадратной решетке с периодом l

$$l^{-2} \left[\sigma_{i+1/2,j} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}) - \sigma_{i-1/2,j} (\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}) \right] + \\ + l^{-2} \left[\sigma_{i,j+1/2} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}) - \sigma_{i,j-1/2} (\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}) \right] = 0. \quad (2.11)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$ – натуральные числа, характеризующие положение узла в решетке, $\sigma_{i \pm 1/2, j \pm 1/2}$ – собственная проводимость связи в точке $i \pm 1/2, j \pm 1/2$ (задается с использованием датчика случайных чисел), φ_{ij} – значение потенциала в точке i, j (рис. 2.4).

Случай 2D рассмотрен из соображений наглядности и меньшей громоздкости записи разностного аналога уравнения (2.10). Случай 3D реализуется на кубической решетке совершенно аналогично.

Проводимости связей в решетке задавались с использованием датчика случайных чисел при условии, что плотность их распре-

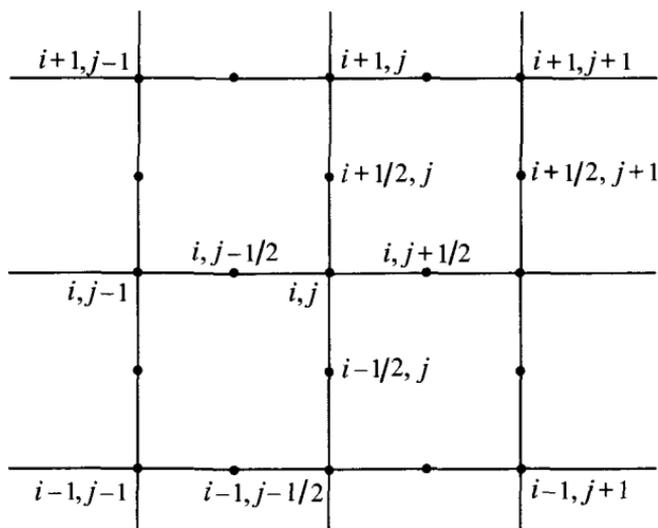


Рис. 2.4. Двумерная сетка для численного решения задачи о протекании в решетке

деления есть некоторая заданная функция $f_0(\sigma)$. Граничные условия имели при этом вид

$$\varphi_{i,N} - \varphi_{i,N-1} = 0, \quad \varphi_{i,1} - \varphi_{i,2} = 0, \quad (2.12)$$

$$\varphi_{0,j} = 1, \quad \varphi_{N,j} = 0. \quad (2.13)$$

Условие (2.12) означает отсутствие потока через границы решетки в j -м направлении, условие (2.13) – постоянство потенциала на границах решетки, через которые подводится ток.

Уравнение (2.11) решалось численно методом установления. Для ускорения счета начальное распределение задавалось в виде

$$\varphi_{i,j} = 1 - i/N.$$

Для заданной разности потенциалов на границах решетки $\delta\varphi = 1$ определялось среднее значение потока между границами

$$Q = N^{-1} \sum_{j=1}^N \sigma_{N-1/2,j} (\varphi_{N-1,j} - \varphi_{N,j}).$$

Эффективная проводимость Σ определялась по формуле

$$\Sigma = Q/\delta\varphi.$$

В процессе численного эксперимента задавались функции распределения собственных проводимостей связей различного вида:

1. $f_0(\sigma) = a \exp(-a\sigma)$, $a > 0$;
2. $f_0(\sigma) = \kappa(\sigma - 1) + (1 - \kappa)\delta(\sigma - 10^{-1})$;
3. $f_0(\sigma) = \kappa[\eta(\sigma) - \eta(\sigma - 1)]$,

где $\delta(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ – традиционные обозначения для δ -функции Дирака и η -функции Хевисайда ($\delta(\cdot) = \eta'(\cdot)$). Кроме того, варьировалась величина κ – доля проводящих связей в решетке. Для каждого варианта набиралась статистика путем проведения расчетов для различных реализаций распределения проводящих связей на решетке при фиксированной функции $f_0(\sigma)$. Величина N в различных вариантах расчета полагалась равной либо 100, либо 150. Сравнение результатов расчетов с различными функциями распределения показывает, что в случае, когда $N = 150$, точность определения Σ составляет ≈ 10 –15 %.

Для проверки того, насколько хорошо перколяционные формулы определяют эффективную проводимость неоднородной среды с гладкой функцией распределения проводящих структурных элементов, была выбрана функция распределения $f_0(\sigma) = a \exp(-a\sigma)$. Данная функция распределения $f_0(\sigma)$ нормирована на единицу, и, меняя величину a , можно варьировать ее дисперсию. Величина a определяет математическое ожидание функции $f_0(\sigma)$

$$m_f = \int_0^{\infty} \sigma f_0(\sigma) d\sigma = a^{-1}.$$

Ниже приведены результаты численного расчета эффективной проводимости Σ неоднородной 2D-решетки (отмечены индексом c) и соответствующие теоретические значения Σ (с индексом t), вычисленные по формуле (2.8) при $l = 1$ для различных значений m_f :

m_f	0,05	0,1	0,5
Σ_c	0,043	0,089	0,47
Σ_t	0,043	0,088	0,45

Формула (2.8) хорошо описывает эффективную проводимость неоднородной среды в широком диапазоне изменения m_f при $\gamma = 2,85$. Интересно отметить, что для гладких функций распределения, типа рассмотренной выше, величина эффективной проводимости решетки близка к математическому ожиданию, совпа-

дающему со средним значением проводимости среды $\Sigma \approx m_f = \langle \sigma \rangle$. В одномерном же случае эффективная проводимость определяется средним значением величины, обратной проводимости среды, т. е. средним сопротивлением $\Sigma \approx \langle 1/\sigma \rangle^{-1}$, и не совпадает со средним значением $\langle \sigma \rangle$.

Зависимости эффективной проводимости среды от параметра x , определенные для 2-й и 3-й функций распределения, представлены на рис. 2.5 для случаев 2D и 3D (формулы (2.8), (2.9)). Параметр l и значение поправочного множителя γ полагались теми же, что и в предыдущем случае. На рис. 2.5, а, б представлены результаты расчетов с использованием $f_0(\sigma)$ № 2, а на рис. 2.5, в — с $f_0(\sigma)$ № 3. Значения Σ , полученные в результате численных расчетов, обозначены на тех же графиках кружками с указанием погрешностей.

Функция распределения № 2 отличается от распределения, которое обычно используется в теории перколяции, лишь тем,

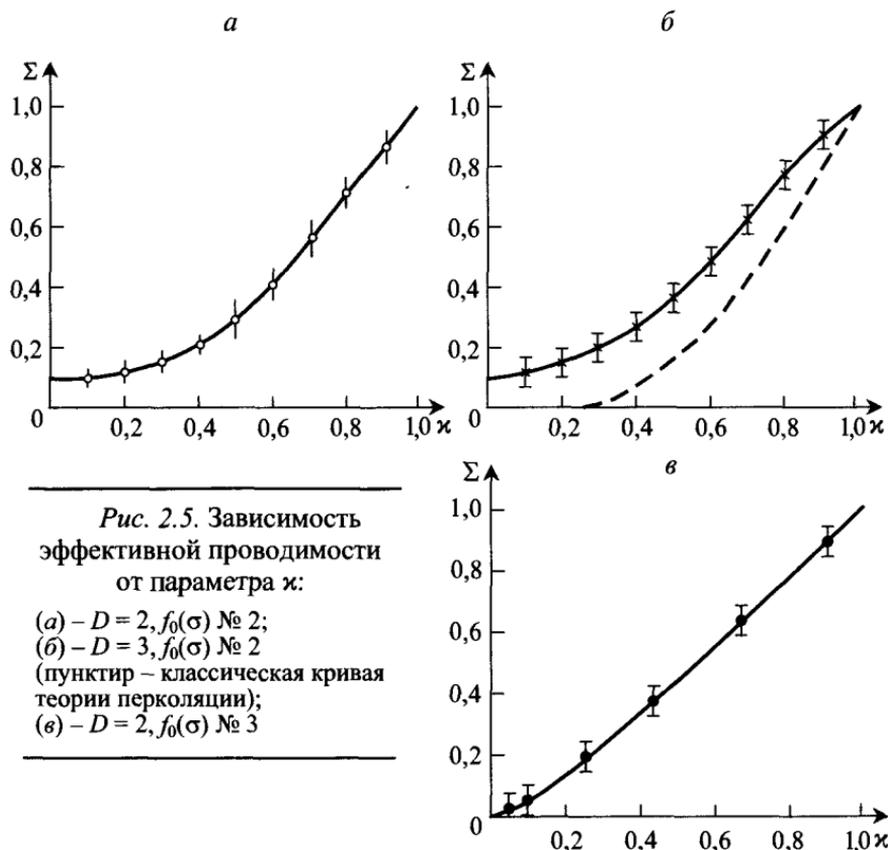


Рис. 2.5. Зависимость эффективной проводимости от параметра x :

- (а) — $D = 2, f_0(\sigma)$ № 2;
- (б) — $D = 3, f_0(\sigma)$ № 2
- (пунктир — классическая кривая теории перколяции);
- (в) — $D = 2, f_0(\sigma)$ № 3

что вместо непроводящих связей в решетку вводятся связи с малой, но отличной от нуля проводимостью. Численное моделирование показывает, что введение в решетку вместо “нулевых” связей соответствующих связей с малой (но не нулевой) проводимостью кардинально меняет характер зависимости $\Sigma(\kappa)$. В рамках классической теории перколяции, когда второй член в выражении для $f_0(\sigma)$ № 2 имеет вид $(1 - \kappa)\delta(\sigma - 0)$, данная зависимость характеризуется кривой типа штриховой линии (см. рис. 2.5, б).

Из сопоставления приведенных на рис. 2.5, б кривых видно, что, если в классической теории в области $\kappa \leq P_c^b$ проводимость системы $\Sigma(\kappa) \equiv 0$, то в рассматриваемом ее обобщении $\Sigma(\kappa) > 0$ при любых κ . При этом и в интервале $P_c^b < \kappa \leq 1$ имеет место различие в поведении кривых $\Sigma(\kappa)$, особенно заметное вблизи $\kappa = P_c^b$.

В целом представленные на рис. 2.5 графики показывают, что имеется удовлетворительное согласие аналитических зависимостей (2.8), (2.9) с результатами численных экспериментов.

Отметим, что полученные расчетные соотношения (2.8), (2.9) включают, естественно, и предельный случай $(1 - \kappa)\delta(\sigma - 10^{-1}) \rightarrow (1 - \kappa)\delta(\sigma - 0)$. При этом расчеты по указанным формулам дают классическую перколяционную зависимость, показанную на рис. 2.5, б штриховой линией и описываемую соотношением (1.5).

2.3. Учет инерционных потерь при построении перколяционной модели течения в пористой среде

Построенная в параграфе 2.1 модель течения в капиллярной системе учитывает лишь гидравлические потери, обусловленные силами вязкого трения,

$$\sigma(r) = \frac{\pi^4}{8}.$$

Обоснованность такого подхода для случая зернистой среды обсуждалась в начале данной главы.

Можно, однако, предположить, что при больших градиентах давления и, соответственно, больших локальных числах Рейнольдса значительная часть потерь давления связана с внезапными сужениями и расширениями капилляров, т. е. происходит на местных гидравлических сопротивлениях.

Покажем, каким образом указанное обстоятельство может быть учтено в перколяционной модели и к каким последствиям оно приводит с точки зрения описания макроскопической картины течения.

Перепад давления на каждом капилляре традиционно определяем по формуле Пуазейля

$$\Delta P_k = \frac{8\mu l q}{\pi r^4},$$

здесь q – объемный расход через капилляр, μ – динамическая вязкость жидкости.

Что касается перепада (потерь) давления ΔP_s на стыке капилляров с узлами решетки, то будем считать, что он определяется плотностью жидкости ρ , ее вязкостью μ , расходом q и радиусами r_1 и r_2 капилляров, примыкающих к узлу в направлении течения жидкости. Из соображений размерности запишем

$$\Delta P_s = \rho q^2 r_1^{-4} \xi(r_2/r_1, \rho q/\mu r_1). \quad (2.14)$$

Поскольку речь идет о достаточно больших числах Рейнольдса (Re), учтем, что при $Re > 500$ [12] в соотношении (2.14) можно пренебречь зависимостью функции ξ от Re

$$\Delta P_s = \rho q^2 r_1^{-4} \xi(r_2/r_1) = q^2 \xi(r_1, r_2). \quad (2.15)$$

Функция ζ представляет собой формулу Борда для внезапного расширения и формулу Жуковского для внезапного сужения капилляра [13]

$$\zeta(r_1, r_2) = -\rho \pi^{-4} (r_1^{-2} r_2^{-2} - r_2^{-4}), \quad r_1 \leq r_2;$$

$$\zeta(r_1, r_2) = -\rho \pi^{-4} (r_1^{-4} - \alpha r_2^{-4}), \quad r_1 > r_2.$$

Здесь $\alpha = 1 + (\varepsilon^{-1} - 1)^2$, ε – коэффициент гидравлического сжатия струи.

Найдем теперь общие потери давления в проводящей цепочке, составленной из чередующихся капилляров и узлов (см. рис. 2.2)

$$\Delta P = \sum_i \Delta P_{ki} + \sum_i \Delta P_{sij},$$

где i – номер капилляра, j – следующего за ним узла.

Рассмотрев цепочку, составленную из N капилляров данной решетки с радиусами r больше некоторого значения r_1 , после деления данного соотношения на Nl получаем

$$\frac{\Delta P}{Nl} = \frac{8\mu}{\pi} \frac{\sum_{i=1}^N r_i^{-4}}{N} q + \frac{\sum_{i=1}^N \zeta(r_i, r_j)}{Nl} q^2. \quad (2.16)$$

Перейдя в (2.16) при $N \rightarrow \infty$ от суммирования к интегрированию и считая, что длина проводящей цепочки L велика, а радиусы пор распределены независимо с плотностью распределения $f(r)$, градиент давления, действующий в цепочке, можно записать в виде

$$\Delta P / L = I_1(r)q + I_2(r)q^2;$$

$$I_1(r) = \frac{8\mu}{\pi} \int_r^\infty f(\rho) \cdot \rho^{-4} d\rho \bigg/ \int_r^\infty f(\rho) d\rho; \quad (2.17)$$

$$I_2(r) = l^{-1} \int_r^\infty \int_r^\infty \zeta(\rho_1, \rho_2) f(\rho_1) f(\rho_2) d\rho_1 d\rho_2 \bigg/ \left[\int_r^\infty f(\rho) d\rho \right]^2,$$

где r – минимальный радиус капилляров, входящих в данную цепочку.

Отсюда, выражая q через $\Delta P/L$, получим связь потока флюида в r -цепочке с внешним градиентом давления, приложенным к рассматриваемой макроскопической области

$$q = \frac{2 \Delta P / L}{I_1(r) + (I_1^2(r) + 4 I_2(r) \Delta P / L)^{1/2}}. \quad (2.18)$$

Далее реализуем базовый алгоритм построения перколяционной модели (2.1)–(2.9):

1) находим количество проводящих путей с минимальным радиусом r , приходящееся на единицу площади поперечного сечения пористой среды

$$n(r) = R^{1-D};$$

2) определяем распределение числа проводящих путей, приходящихся на единицу площади поперечного сечения, по минимальному радиусу r

$$F(r) = -dn/dr; \quad (2.19)$$

3) суммируем расходы (2.18) по всем проводящим путям, используя (2.19).

В результате получаем закон течения ньютоновской жидкости в пористой среде, который оказывается существенно нелинейным

$$w = \int_0^{r_c} \frac{2 F(r) |\nabla P| dr}{I_1(r) + (I_1^2(r) + 4 I_2(r) |\nabla P|)^{1/2}}. \quad (2.20)$$

Здесь w – величина скорости фильтрации жидкости (определяемая как расход через единичную площадку), $|\nabla P|$ – величина градиента давления, соответствующая в макромасштабе перепаду давления на единичную длину в соотношении (2.18).

Асимптотики закона (2.20) показывают, что при малых градиентах давления он переходит в линейную зависимость (закон Дарси)

$$w \approx |\nabla P| \int_0^{r_c} \frac{F(r)}{I_1(r)} dr,$$

справедливую для случая, когда основные потери напора вызваны вязкостным трением, а при больших градиентах имеем квадратичный закон фильтрации

$$w \approx |\nabla P|^{1/2} \int_0^{r_c} \frac{F(r) dr}{(I_2(r))^{1/2}},$$

работающий в ситуации, когда основную роль играют инерционные потери.

Таким образом, показано, что общие принципы построения перколяционных моделей позволяют также учитывать инерционные гидравлические потери при течении флюидов в пористых средах и, соответственно, теоретически получать нелинейные законы макроскопической фильтрации на основе микромеханического анализа гидродинамики флюидопереноса.

2.4. Обобщенная микромеханическая модель расчета проводимости капиллярной решетки

Представленные в 2.1 и 2.3 результаты говорят о том, что собственно перколяционный подход позволяет решить проблему, поставленную в 1.4, существенно повысить точность расчетов вблизи порога протекания. Однако при $P^b \rightarrow 1$ полученные соотношения дают большую погрешность, которую необходимо компенсировать введением коэффициента γ , определяемого из сравнения теории с численным экспериментом (см. 2.2).

Безусловный интерес представляет построение единой модели, успешно работающей во всем диапазоне изменения величины $P(r_1)$ – от порога протекания $P(r_c)$ до полностью проводящей среды $P(r_1) = 1$.

“Слабым звеном” перколяционной модели является использование в (2.3') асимптотического равенства для радиуса корреляции

$$n(r_1) = \frac{1}{R^{(D-1)}} \sim l^{-(D-1)} \left[\int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right]^{v(D-1)}, \quad (2.21)$$

справедливого лишь вблизи P_c , во всем интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq 1$, в том числе и вдали от порога протекания. В результате возникала необходимость коррекции получаемых соотношений путем введения дополнительных численных множителей. Первый вводился в (2.21) непосредственно при проведении теоретических выкладок для обеспечения предельного перехода от решетки с разорванными связями к исходной решетке при $P \rightarrow 1$

$$n(r_1) = \frac{1}{R^{(D-1)}} = \frac{1}{[1 - P_c]^{v(D-1)} l^{D-1}} \left[\int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right]^{v(D-1)}. \quad (2.22)$$

Второй – собственно поправочный коэффициент $\gamma \sim 1$, возникающий из сопоставления полученных аналитических расчетных соотношений с результатами прямого численного моделирования течения на той же решетке.

В то же время вдали от порога протекания, как это было показано в главе 1 (п. 1.4), проводимость решетки хорошо описывается в рамках модели эффективной среды. При этом можно перейти к эффективной решетке с одинаковой проводимостью всех связей σ_m и общей проводимостью, равной проводимости исходной решетки. Общий вид уравнения для определения σ_m представлен в п. 1.4

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma_m - \sigma}{\sigma + (z/2 - 1)\sigma_m} f(\sigma) d\sigma = 0. \quad (2.23)$$

Гидравлическая проводимость капилляра $\sigma \sim r^4$. Поэтому для решетки, в которой проводят все капилляры с $r > r_1$, уравнение (2.23) преобразуется к виду

$$[z/2 - 1]^{-1} \int_0^{r_1} f(r) dr + \int_{r_1}^{\infty} \frac{r_m^4 - r^4}{r^4 + (z/2 - 1)r_m^4} f(r) dr = 0. \quad (2.24)$$

Получив из (2.24) значение эффективного радиуса r_m , найдем общую проводимость σ_1 однородной решетки капилляров

$$\sigma_1 = d^{-(D-1)} \frac{\pi r_m^4}{8}, \quad (2.25)$$

которая равна проводимости исходной неоднородной решетки.

Для адекватного описания проводимости рассматриваемой решетки капилляров во всем интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq 1$ необходимо объединить представленные выше результаты перколяционного моделирования, которые хорошо обоснованы при $P(r_1) \rightarrow P(r_c)$, и расчетные соотношения модели эффективной среды, успешно работающие при $P(r_1) \rightarrow 1$. Для этого определим положение границы $P(r_b)$, слева от которой, в интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq P(r_b)$, наиболее эффективно использование перколяционного подхода, а справа, при $P(r_b) < P(r_1) \leq 1$, – модели эффективной среды.

В этом случае, поскольку перколяционная модель используется в сравнительно узкой области вблизи порога протекания, техническую сторону вычисления проводимости решетки можно заметно упростить, так как проводимость цепочек капилляров $\sigma(r_1)$ в этой области меняется незначительно. Таким образом, будем считать все проводящие цепочки, состоящие из капилляров с минимальными радиусами r_1 ($r_c \geq r_1 \geq r_b$), эквивалентными. Тогда выражение (2.1) для определения проводимости всей решетки σ_2 вблизи порога протекания упростится и примет вид

$$\sigma_2 = \frac{n(r_1)}{l(r_1)}. \quad (2.26)$$

При этом погрешность соотношения (2.22) для определения концентрации $n(r_1)$ проводящих цепочек, приходящихся на единицу площади поперечного сечения решетки и составленных из капилляров с $r > r_1$, будет невелика.

Что касается проводимости решетки вдали от порога протекания, то здесь для соответствующего r_1 нужно решить уравнение (2.24) и воспользоваться (2.25) для получения искомой величины проводимости решетки капилляров.

Рассмотрим теперь данные прямого численного эксперимента [14] по определению безразмерной проводимости кубической ($z = 6$) решетки, полученные для предельного случая бинарного распределения проводимости связей, т. е. для решетки с одинаковой проводимостью всех действующих связей, в которой доля проводящих связей равна P , а доля разорванных (непроводя-

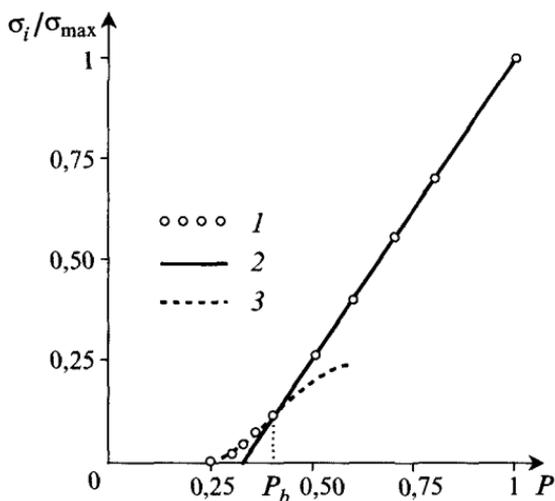


Рис. 2.6. Проводимость кубической решетки при бинарном распределении проводимости связей: 1 – прямой численный эксперимент, 2 – расчет по модели эффективной среды, 3 – расчет по перколяционной модели

щих) – $(1 - P)$ (круглые точки на рис. 2.6). Обезразмеривание осуществляется путем отнесения проводимости решетки σ_i ($i = 1, 2$) к максимальной проводимости решетки σ_{\max} при $P = 1$.

Для определения положения границы $P(r_b)$ (для бинарного распределения обозначим ее P_b) сравним представленные результаты численного эксперимента с расчетами по предложенным соотношениям для σ_1 и σ_2 . Обезразмерив проводимость решетки, найденную по модели эффективной среды (2.24), (2.25), получим линейную зависимость $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 / \sigma_{\max}$ от P (сплошная линия на рис. 2.6)

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{3P - 1}{2}.$$

Расчет по перколяционной модели (2.26) для бинарной функции распределения дает зависимость $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 / \sigma_{\max}$ от P , представленную на рис. 2.6 пунктирной линией. Приведенные на рис. 2.6 графики пересекаются в точке, слева от которой экспериментальные данные хорошо совпадают с проводимостью, найденной по перколяционной модели, а справа – с результатами расчетов по модели эффективной среды. Абсцисса этой точки и есть искомая граница P_b .

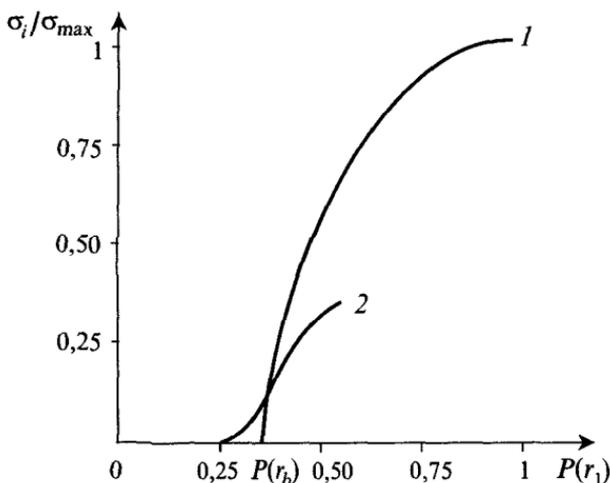


Рис. 2.7. Проводимость капиллярной решетки при логарифмически-нормальной функции распределения капилляров по радиусам:

- 1 – расчет по модели эффективной среды (формулы (2.24), (2.25)),
 2 – расчет по перколяционной модели (формула (2.26))

Построим теперь кривые проводимостей $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1(r_1)/\sigma_{\max}$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2(r_1)/\sigma_{\max}$ с использованием характерного (логнормального) вида порометрической кривой

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b_r r} \exp\left[-\frac{(\ln r - a_r)^2}{2b_r^2}\right],$$

где a_r и b_r – параметры распределения. При этом максимальная проводимость решетки σ_{\max} будет определяться значением σ_1 , определенным по формулам (2.24), (2.25) при $r_1 = 0$. На интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq 1$ кривые проводимостей $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ пересекутся в некоторой точке (рис. 2.7). Эту точку, по аналогии с предельным случаем бинарного распределения, естественно выбрать в качестве границы $P(r_b)$, слева от которой для определения проводимости будем использовать перколяционную модель (2.26), а справа – модель эффективной среды (2.24), (2.25).

Таким образом, проводимость решетки с заданной функцией распределения капилляров по радиусам $f(r)$ будет определяться соотношением

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma_1, & P(r_b) < P(r_1) \leq 1; \\ \sigma_2, & P(r_c) < P(r_1) \leq P(r_b); \\ 0, & 0 \leq P(r_1) \leq P(r_c). \end{cases} \quad (2.27)$$

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ МНОГОФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

3.1. Микромеханическое моделирование процесса двухфазной равновесной фильтрации несмешивающихся ньютоновских флюидов

Описание процессов переноса нескольких фаз в реальных геологических породах основывается на введении эффективных усредненных макрохарактеристик для микроскопически гетерогенных пористых сред. На практике их определение производится преимущественно прямыми экспериментальными методами, которые являются довольно сложными и продолжительными.

Одномерные (1-D) теоретические модели, типа модели бесконечных цилиндрических пор, являются слишком упрощенными и не позволяют описывать и объяснять многие из опытных данных. В частности, сумма фазовых проницаемостей в такой модели всегда должна быть константой, что опровергается известными экспериментами.

Для получения более адекватного теоретического описания процессов многофазного переноса на микроуровне необходимо использовать пространственные (3-D) решеточные модели структуры порового пространства.

Первые шаги в этом направлении были предприняты путем *численного моделирования на решеточных моделях*, что нашло отражение в работах [1, 10, 15]. В рамках этих исследований про-

водилось в том числе и определение функций относительных фазовых проницаемостей. В дальнейшем данному направлению уделялось большое внимание, и был предложен широкий спектр вариантов прямого численного моделирования многофазных течений в пористых средах. Такой подход свободен от недостатков, присущих феноменологическим и "одномерным" моделям, однако не обладает достаточной степенью общности получаемых результатов, характерной для аналитических методов.

Перколяционная модель

Для получения аналитических соотношений, позволяющих рассчитывать и анализировать поведение коэффициентов фазовых проницаемостей, воспользуемся вначале собственно перколяционным подходом. Рассмотрим вытеснение смачивающей жидкости несмачивающей в пористой среде, считая обе жидкости несжимаемыми и вязкими. Будем по-прежнему для определенности моделировать среду кубической решеткой, узлы (поры) которой соединены между собой связями (капиллярами) с различной проводимостью, а проводимость капилляров характеризовать нормированной функцией плотности распределения $f(r)$.

Пусть в некотором макрообъеме произошло частичное вытеснение насыщающей образец фазы и сформировался БК вытесняющей жидкости, который в дальнейшем будем обозначать БК2. Здесь и в дальнейшем величины, относящиеся к смачивающей и несмачивающей жидкостям, отмечаются, соответственно, индексами 1 и 2. Предполагается, что доля капилляров, заполненных смачивающей жидкостью, превышает порог перколяции, и в среде существует также бесконечный кластер БК1, образованный капиллярами, содержащими вытесняемую фазу. Очевидно, вытеснение смачивающей жидкости может происходить лишь из капилляров, удовлетворяющих условию

$$p_k(r) \leq \Delta p, \quad p_k(r) = 2\chi \cos \theta / r \quad (3.1)$$

и контактирующих с БК2. Здесь Δp – разность давлений в жидкостях, χ – коэффициент поверхностного натяжения, а θ – угол смачивания поверхности контактом фаз. Другими словами, вытеснение будет происходить только из капилляров, достижимых для вытесняющей жидкости по цепочкам, принадлежащим БК2.

По определению БК2 состоит из капилляров, удовлетворяющих условию (3.1). В то же время условию (3.1) могут удовлетворять и капилляры, не принадлежащие БК2, заполненные смачи-

вающей жидкостью. Однако доля таких капилляров, за исключением небольшой области вблизи порога протекания, как будет показано ниже, мала. Более того, на проводимость БК2 такие капилляры в принципе не оказывают влияния, поскольку с ним не связаны. С этой точки зрения несущественно, какой жидкостью (смачивающей или несмачивающей) заполнены такие капилляры. Таким образом, функцию плотности распределения по радиусам капилляров, являющихся проводящими для БК2, можно представить в виде

$$f_2(r) = f(r), \quad (r \geq r_k), \quad f_2(r) = 0, \quad (r < r_k). \quad (3.2)$$

Здесь r_k – минимальный радиус капилляра, из которого при заданной величине Δp может происходить вытеснение смачивающей жидкости.

Подставляя (3.2) в (2.9) либо (2.27), можно найти K_2 – проницаемость рассматриваемого макрообъема для вытесняющей жидкости. Относительные фазовые проницаемости определяются соотношениями $k_i = K_i/K_0$ ($i = 1, 2$), поэтому, используя выражения для K_2 и абсолютной проницаемости среды K_0 , найдем аналитическое выражение для относительной фазовой проницаемости вытесняющей жидкости $k_2(r_k)$

$$k_2(r_k) = \int_{r_k}^{r_c} \left[\int_r^{r_c} f_2(r) dr \right]^v \frac{f_2(r) dr}{I(r)} \left\{ \int_0^{r_c} \left[\int_r^{r_c} f_2(r) dr \right]^v \frac{f_2(r) dr}{I(r)} \right\}^{-1}. \quad (3.3)$$

Отметим, что в окончательное выражение для относительной фазовой проницаемости входят только функция плотности распределения капилляров по радиусам и перколяционный инвариант $\xi_c \equiv P_c^b$, который зависит лишь от типа решетки и размерности задачи. Таким образом, результирующее выражение (3.3) справедливо не только для кубической решетки, но и для решеток любых типов и размерностей. Тип решетки сказывается на величине ξ_c , а размерность задачи – на величине показателя v .

Для определения относительной фазовой проницаемости k_1 проведем аналогичное рассмотрение структуры БК1. Очевидно, что БК1 будет состоять из капилляров, из которых при заданной величине Δp смачивающая жидкость в принципе не может быть вытеснена, т. е. радиус которых удовлетворяет условию $r < r_k$. Кроме того, в БК1 будут входить не заполненные вытесняющей жидкостью капилляры, радиус которых больше r_k . Доля таких капилляров

$$\alpha(r_k) = \xi - W(\xi), \quad \xi = \int_{r_k}^{\infty} f(r) dr,$$

где величина ξ определяет долю капилляров, удовлетворяющих условию $r > r_k$, а функция $W(\xi)$ – долю таких капилляров, принадлежащих БК2.

Вблизи порога протекания ($\xi \approx \xi_c$) справедлива асимптотика (1.11) $W(\xi) \sim |\xi - \xi_c|^\beta$, где $\beta = 0,4$ при $D = 3$. Значит, при $|\xi - \xi_c| \ll 1$ разность $\xi - W(\xi) \approx \xi_c \sim (1 \div 2) \cdot 10^{-1}$. Однако очень быстро, начиная со значений $|\xi - \xi_c| \approx 10^{-1}$ и далее, вплоть до $\xi = 1$, зависимость $W(\xi)$ становится линейной: $W(\xi) = \xi$. Это означает, что $\alpha(r_k) = 0$ в указанном интервале изменения ξ . Таким образом, лишь в непосредственной близости от порога протекания, при возникновении БК2, коэффициент $\alpha(r_k)$ порядка 10^{-1} , а далее, по мере увеличения ξ , он очень быстро стремится к нулю.

Рассмотрим равновесную фильтрацию, т. е. проведем исследование в предположении, что динамическая стадия прорастания цепочек, образующих БК2, уже закончена, и кластер представляет собой достаточно стабильное пространственное формирование. Формально это означает конечную отделенность величины ξ от порога протекания ξ_c : $\xi - \xi_c \sim 10^{-1}$. При этом получаем оценку $\alpha(r_k) \leq 10^{-2}$, и поэтому, для упрощения дальнейших выкладок, положим $\alpha(r_k) = 0$. С учетом этого допущения функцию плотности распределения капилляров $f_1(r)$, определяющих проводимость БК1, можно представить в виде

$$f_1(r) = 0, \quad (r > r_k), \quad f_1(r) = f(r), \quad (r \leq r_k). \quad (3.4)$$

Используя (2.9) и (3.4), находим выражение для относительной фазовой проницаемости

$$k_1(r_k) = \left[\int_0^{r'_c} \int_r^{r'_c} f_1(r) dr \right]^v \frac{f_1(r) dr}{I(r)} \left\{ \int_0^{r_c} \int_r^{r_c} f_1(r) dr \right\}^v \frac{f_1(r) dr}{I(r)} \left\}^{-1}. \quad (3.5)$$

Здесь r'_c определяется соотношением

$$\int_{r'_c}^{r_k} f(r) dr = \xi_c. \quad (3.6)$$

Представляет интерес получение связи найденных зависимостей относительных фазовых проницаемостей с величиной S_1 , характеризующей насыщенность среды смачивающей жидкостью.

Рассмотрим два предельных случая расчета S_1 . В случае использования модели I можно оценить S_1 в предположении, что количество заполненных смачивающей жидкостью пор пропорционально числу капилляров, заполненных этой жидкостью. Если размеры пор не сильно отличаются, то

$$S_1 = \int_0^{r_k} f(r) dr. \quad (3.7)$$

По модели II величина S_1 определяется объемом проводящих первый флюид капилляров. В этом случае

$$S_1 = \int_0^{r_k} f(r) r^2 dr \left[\int_0^{\infty} f(r) r^2 dr \right]^{-1}. \quad (3.8)$$

Таким образом, формулы (3.2)–(3.8) определяют параметрические зависимости относительных фазовых проницаемостей от насыщенности среды для двух указанных выше моделей.

Отметим, что функция плотности распределения капилляров через соотношения (3.7) или (3.8) определяет также функцию Леверетта $p_k = (S_1)$, задающую связь капиллярного давления с насыщенностью образца при равновесной фильтрации. Фазовые проницаемости и функция Леверетта составляют полный набор данных, необходимых для расчета двухфазной фильтрации.

В настоящее время, вообще говоря, отсутствуют абсолютно надежные экспериментальные способы определения функции плотности распределения капилляров по величине их собственной проводимости, поэтому расчет качественного поведения фазовых проницаемостей целесообразно привести для модельной функции плотности распределения. Для определения характерного качественного вида зависимости $f(r)$ проанализируем поведение функции Леверетта $p_k = (S_1)$, типичный вид которой приведен на рис. 3.1.

Воспользовавшись формой записи производной $dS_1/dr = dS_1/dp_k \cdot dp_k/dr$ и учитывая, что $p_k \sim r^{-1}$, из соотношения (3.7) или (3.8) можно получить оценку

$$f(r) \sim A' \left| \frac{dS_1(r)}{dp_k} \right| \frac{1}{r^2}, \quad (3.9)$$

где $A' = 1$ в случае (3.7) и $A' = r^{-2}$, когда S_1 определяется формулой (3.8).

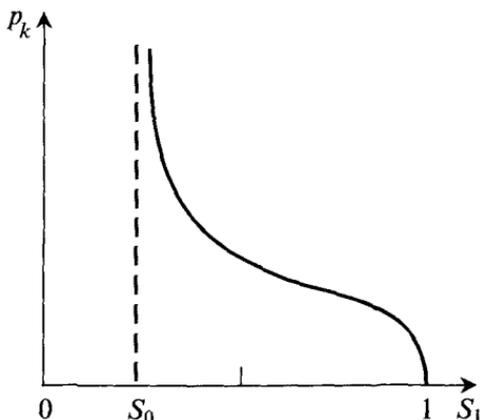


Рис. 3.1. Характерный вид кривой капиллярного давления (функции Леверетта)

Поскольку $f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то в общем случае ее можно представить в виде разложения в ряд по отрицательным степеням r (теорема Вейерштрасса)

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i / r^i,$$

где a_i – коэффициенты разложения. Выделяя в сумме главный член, дающий основной вклад в $f(r)$, и рассматривая его в качестве модельной функции плотности распределения, можно получить аналитические выражения для фазовых проницаемостей и капиллярного давления.

Исходя из оценки (3.9), естественно представлять модельную функцию распределения в виде

$$f(r) = 0, \quad (a_* < r, \quad r > a^*),$$

$$f(r) = \frac{a_* a^*}{a^* - a_* r^2} \frac{1}{r^2}, \quad (a_* \leq r \leq a^*). \quad (3.10)$$

Здесь a^* определяет максимально возможный радиус капилляра; очевидно, что a^* не может превышать размер зерна в среде. Величина a_* определяет минимальный радиус капилляра, в котором еще возможна фильтрация. Существование такого предельного радиуса можно связать, например, с наличием в капилляре двойного электрического слоя, затрудняющего фильтрацию флюида в тонких капиллярах вследствие возникновения в них аномально высокой вязкости.

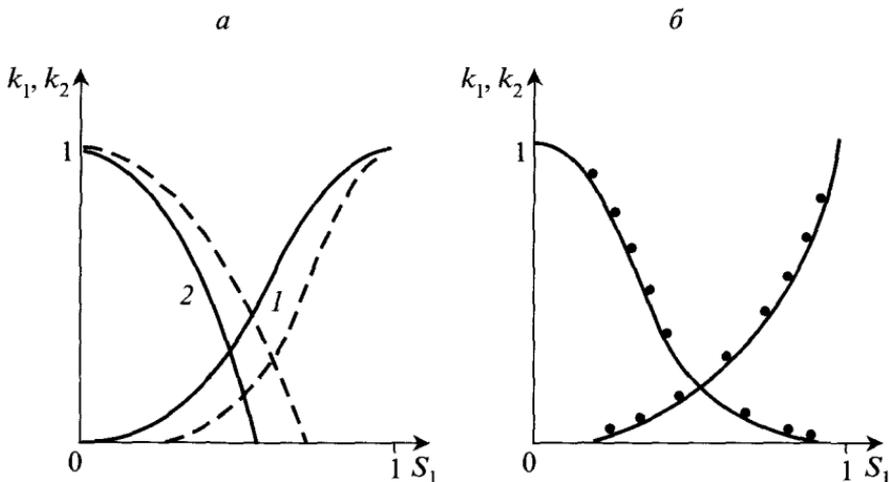


Рис. 3.2. Кривые фазовых проницаемостей, рассчитанные с модельными степенной (а) и логнормальной (б) функциями распределения

Воспользовавшись для определенности соотношением (3.8), в случае (3.10) находим связь насыщенности среды смачивающей жидкостью S с величиной r_k

$$S_1 = (r_k - a_*) / (a^* - a_*). \quad (3.11)$$

Найденные из выражений (3.2)–(3.5) и (3.11) фазовые проницаемости приведены на рис. 3.2, а, где цифрами 1 и 2 обозначены соответственно кривые $k_1(S_1)$ и $k_2(S_1)$. Там же пунктирной линией представлены зависимости $k_1(S_1)$ и $k_2(S_1)$ для случая, когда насыщенность определяется соотношением (3.7) (модель I). На рис. 3.2, б изображены кривые фазовых проницаемостей, полученные в случае задания зависимости

$$f(r) = (\sqrt{2\pi\sigma_d} r)^{-1} \exp \left[-(\ln r - \mu')^2 / (2\sigma_d^2) \right],$$

использовавшейся при проведении численных расчетов в [16]. Так же, как в [16], полагалось, что $\sigma_d = 0,25$, $\mu' = 2$, $z = 6$.

Приведенные на рис. 3.2, б результаты численного моделирования процесса двухфазной фильтрации на решеточных моделях [10] (точки) показывают, что данные аналитических и численных расчетов для одной и той же функции $f(r)$ удовлетворительно совпадают. Для предельных случаев ($S_1 \rightarrow 1$ и $S_1 \rightarrow a_*/a^*$), полагая $\nu = 1$, из (3.2)–(3.5) можно получить асимптотические выражения для относительных фазовых проницаемостей, проводя разложение по малому параметру $\varepsilon_1 = a_*/a^* \ll 1$. Удерживая первые члены разложения, получаем

$$k_1(S_1) = \begin{cases} 1 - 2\varepsilon_1 / (\xi_c S_1), & S_1 \rightarrow 1, \\ \zeta_c^2 (S_1^2 / \varepsilon_1^2 - 1), & S_1 \rightarrow \varepsilon_1, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$k_2(S_1) = \begin{cases} 0, & S_1 > \varepsilon_1 / \xi_c, \\ 1 - (S_1 \xi_c / \varepsilon_1)^2, & S_1 \leq \varepsilon_1 / \xi_c. \end{cases} \quad (3.13)$$

Анализ соотношения (3.12) показывает, что при $S_1 \rightarrow 1$ кривая $k_1(S_1)$ имеет выпуклость вверх, а угол наклона касательной в точке $S_1 = 1$ не равен нулю. При $S_1 \rightarrow \varepsilon_1$ выпуклость обращена вниз, а касательная в точке $S_1 = \varepsilon_1$ расположена под углом, близким к нулю. Аналогично из выражения (3.13) видно, что на всей области определения кривая $k_2(S_1)$ имеет выпуклость вверх. При $S_1 \rightarrow \varepsilon_1$ имеем $k_2(S_1) \rightarrow 1$ с почти горизонтальной касательной, а при $S_1 \rightarrow \varepsilon_1 / \xi_c$ получаем, что $k_2(S_1)$ быстро стремится к нулю.

Соотношение (3.11) позволяет получить также зависимость $p_k(S_1)$ для случая равновесной фильтрации. Так как $p_k \sim r_k^{-1}$, то из (3.11) находим

$$p_k(S_1) \sim [a_* + S_1(a^* - a_*)]^{-1},$$

откуда видно, что $p_k \rightarrow 0$ при $S_1 \rightarrow 1$, а при $S_1 \rightarrow 0$ ($S_1 \rightarrow \varepsilon_1$) имеем $p_k \rightarrow \infty$. Качественный вид рассчитанной зависимости полностью совпадает с представленной на рис. 3.1.

В рамках рассмотренной модели фазовые проницаемости полностью определяются функцией плотности распределения проводящих капилляров по величине их собственной проводимости (эффективному радиусу) $f(r)$ и величиной порога протекания, характеризующего структуру среды (тип решетки), а также распределением фаз в решетке (функциями $f_i(r)$).

К сожалению, в настоящее время отсутствуют надежные эксперименты, одновременно содержащие данные относительно вида функций $f(r)$ и $k_i(s)$, что не позволяет вначале вычислить фазовые проницаемости, а затем провести количественное сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей. Однако результаты расчетов, проведенных для модельной функции плотности распределения, показывают хорошее качественное совпадение экспериментальных и теоретических зависимостей фазовых проницаемостей.

Необходимо подчеркнуть, что в рамках рассматриваемой перколяционной модели, по существу, не учитываются динамические эффекты [17], которые при значительных скоростях филь-

трации могут привести к отклонению процесса фильтрации от квазистационарного режима. Существенную роль в этом случае может играть характер распределения давления в среде на микроуровне, зависящий от скорости фильтрации.

Интересно отметить, что развитый подход отчетливо демонстрирует наличие “концевого эффекта”. Этот эффект заключается в задержке вытесняющей фазы вблизи поверхности образца до тех пор, пока насыщенность среды вытесняемым флюидом не достигает величины, близкой к предельной $S_{10} \sim \xi_c$. Поэтому образец является непроницаемым для второй жидкости фактически до значений $S_1 \cong 0,2 \div 0,4$, и лишь после падения насыщенности ниже указанного значения $S_1 \approx S_{10}$ происходит прорыв вытесняющей жидкости из образца.

Обобщенная модель

Переходя к описанию обобщенной модели двухфазного течения, отметим предварительно важное обстоятельство: распределение каждого из флюидов по капиллярам решетки, т. е. вид функций $f_i(r)$, зависит от реализуемого режима течения. Режимы двухфазной фильтрации, как правило, различают в зависимости от преобладания капиллярных или гидродинамических сил, а также отношения вязкостей вытесняющего и вытесняемого флюида. Для их характеристики используют капиллярное число

$$Ca = \frac{w\mu_1}{\chi},$$

где w – скорость фильтрации, μ_1 – вязкость вытесняемого флюида, χ – коэффициент межфазного поверхностного натяжения, и отношение вязкостей

$$M = \mu_1 / \mu_2.$$

Ограничимся для определенности изучением совместного течения флюидов с близкими значениями вязкостей, например вода и нормальная нефть. В этом случае $M \approx 1$, и роль основного параметра процесса будет играть капиллярное число.

Для прогнозирования конкретного распределения флюидов в капиллярной решетке при двухфазной фильтрации можно исходить из общих представлений о наиболее вероятном местонахождении каждого флюида при данных условиях. Например, в случаях стационарного или квазистационарного режимов течения приближенно можно считать, что один флюид находится только в крупных капиллярах, а другой – только в мелких.

Рассмотрим на такой основе случай преобладания гидродинамических сил над капиллярными, т. е. когда капиллярное число большое ($Ca \gg 10^{-5}$, где 10^{-5} – характерное значение капиллярного числа для пластов [18]). Тогда менее вязкий флюид (вода) занимает крупные капилляры, а более вязкий (нефть) остается в мелких. Данное распределение, например, может быть использовано для моделирования стационарного двухфазного вытеснения в пластах при относительно высоких градиентах давления. При этом распределение воды и нефти в решетке характеризуется текущим значением r_1 , определяющим соответственно минимальный радиус для водосодержащих капилляров и максимальный – для нефтесодержащих.

Для определения зависимости водонасыщенности S пористой среды от r_1 необходимо задаться моделью, учитывающей емкостные свойства порового пространства. Предположим, что среда является зернистой, и размеры пор не сильно варьируются. При этих условиях водонасыщенность можно считать равной значению доли $P(r_1)$ водосодержащих капилляров [19], т. е. $S = P(r_1)$.

Проницаемость по воде K_w в рамках предложенной схемы расчета (2.27) приобретает вид

$$K_w(S) = \begin{cases} \sigma_1, & P(r_b) < S \leq 1; \\ \sigma_2, & P(r_c) < S \leq P(r_b); \\ 0, & 0 \leq S \leq P(r_c). \end{cases} \quad (3.14)$$

Чтобы найти проницаемость по нефти K_o , необходимо в формулах для вычисления проводимости изменить пределы интегрирования. Это объясняется тем, что значение r_1 для цепочек из нефтесодержащих капилляров определяет не минимальное значение радиуса капилляров, а максимальное. Поэтому система соотношений (2.24), (2.25) для расчета проводимости нефтесодержащих цепочек приобретает вид

$$\sigma_1^* = d^{-(D-1)} \frac{\pi r_m^{*4}}{8},$$

где r_m^* находится из уравнения

$$[z/2 - 1]^{-1} \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr + \int_0^{r_1} \frac{r_m^{*4} - r^4}{r^4 + (z/2 - 1)r_m^{*4}} f(r) dr = 0,$$

а выражение для проводимости (2.26) записывается следующим образом

$$\sigma_2^* = \frac{n^*(r_1)}{I^*(r_1)},$$

в котором

$$I^*(r_1) = \frac{8}{\pi} \int_0^{r_1} f(r) r^{-4} dr \left[\int_0^{r_1} f(r) dr \right]^{-1},$$

$$n^*(r_1) = d^{-(D-1)} \left[\int_{r_c^*}^{r_1} f(r) dr \right]^{v(D-1)}.$$

При этом второе уравнение в соотношении (2.3'), определяющее порог протекания r_c^* нефтяной фазы, выглядит как

$$\int_0^{r_c^*} f(r) dr = \frac{D}{z(D-1)}.$$

Таким образом, проницаемость по нефти K_o определяется выражением

$$K_o(S) = \begin{cases} \sigma_1^*, & 0 < S \leq P(r_b^*); \\ \sigma_2^*, & P(r_b^*) < S \leq P(r_c^*); \\ 0, & P(r_c^*) \leq S \leq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Относительные фазовые проницаемости получаются делением проницаемостей по воде K_w и нефти K_o на абсолютную проницаемость K , вычисляемую по формуле (2.27). На рис. 3.3 показаны относительные фазовые проницаемости, рассчитанные для логарифмически-нормальной функции $f(r)$ при изменении водосыщенности в интервале $0 \leq S \leq 1$.

Формулы (3.14), (3.15) представляют аналитические соотношения для расчета фазовых проницаемостей, когда один из флюидов находится только в крупных капиллярах, а другой — только в мелких. В общем случае фазовую проницаемость можно рассчитать, используя любую заданную функцию распределения флюида по капиллярам. Пусть распределение каждого флюида по капиллярам характеризуется некоторой функцией $f_i(r)$, где i — порядковый номер флюида. Тогда выполняется соотношение

$$\sum_i f_i(r) = f(r).$$

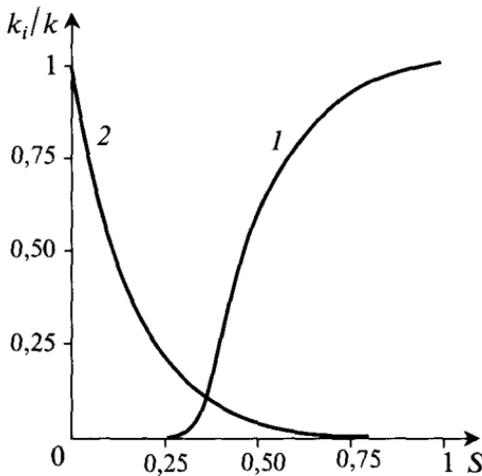


Рис. 3.3. Кривые относительных фазовых проницаемостей:
1 – для воды, 2 – для нефти

При этом фазовая проницаемость флюида K_i будет определяться проводимостью решетки, для которой функция $f_i(r)$ задает распределение радиусов проводящих капилляров, а их доля в решетке равна интегралу от $f_i(r)$. Соотношение (2.25), определяющее проводимость такой решетки по модели эффективной среды (вдали от порога протекания), переписывается в виде

$$\sigma_1 = d^{-(D-1)} \frac{\pi r_m^4}{8},$$

где r_m находится из уравнения

$$[z/2 - 1]^{-1} \left(1 - \int_0^\infty f_i(r) dr \right) + \int_0^\infty \frac{r_m^4 - r^4}{r^4 + (z/2 - 1)r_m^4} f_i(r) dr = 0.$$

Выражение (2.26), характеризующее проводимость по перколяционной модели вблизи порога протекания, примет вид

$$\sigma_2 = \frac{n}{I},$$

в котором

$$I = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty f_i(r) r^{-4} dr \left[\int_0^\infty f_i(r) dr \right]^{-1},$$

$$n = d^{-(D-1)} \left[\int_0^{\infty} f_i(r) dr - \frac{D}{z(D-1)} \right]^{v(D-1)}.$$

Итак, в общем случае фазовая проницаемость флюида K_i , по аналогии с (2.27), определяется максимальным из двух значений σ_1 и σ_2 при условии, что доля капилляров с данным флюидом больше порога протекания по решетке

$$K_i = \begin{cases} \max \{ \sigma_1, \sigma_2 \}, & \int_0^{\infty} f_i(r) dr \geq \frac{D}{z(D-1)}; \\ 0, & \int_0^{\infty} f_i(r) dr < \frac{D}{z(D-1)}. \end{cases} \quad (3.16)$$

3.2. Статистические методы получения функций распределения флюидов по капиллярам решетки

Для получения функций $f_i(r)$ без использования приведенных выше серьезных предположений можно прибегнуть к *статистическим моделям роста*, хотя в этом случае микромеханическая модель расчета $k_i(s)$ перестает быть чисто аналитической, так как будет содержать в качестве имманентного элемента этап численных расчетов.

Фазовые проницаемости в случае доминирования капиллярных сил

В данной ситуации для того, чтобы установить распределение флюидов в решетке, предлагается использовать модель *инвазионной перколяции* [20, 21], заключающуюся в следующем.

Предполагается, что вначале капиллярная решетка целиком заполнена вытесняемым флюидом, а вытесняющий флюид соприкасается только с одной из сторон решетки. Всем капиллярам решетки присваивается случайное число из интервала $(0, 1)$. Вытеснение в решетке моделируется таким образом, что на каждом шаге вытесняющий флюид попадает в один определенный капилляр, содержащий вытесняемый флюид. Выбор данного капилляра осуществляется исходя из условий, что он должен граничить с вытесняющим флюидом и иметь наименьшее значение присвоенного ему числа.

Если интерпретировать данное число как сопротивление капилляра, то на каждом шаге для вытеснения будет выбираться капилляр, контактирующий с фронтом вытеснения и имеющий наибольший радиус. Таким образом, эта схема в общих чертах моделирует процесс, когда несмачивающий флюид вытесняет из решетки смачивающий флюид. При этом влияние капиллярных сил проявляется в том, что несмачивающий флюид в первую очередь затекает в самые крупные капилляры (так называемый режим “дренажа”).

С другой стороны, число, которое присваивается капилляру при моделировании вытеснения, можно трактовать как его проводимость. В этом случае, на каждом шаге из ближайших к фронту вытеснения капилляров выбирается тот, у которого радиус наименьший. Такая схема заполнения решетки вытесняющим флюидом моделирует процесс, при котором смачивающий флюид проникает в решетку под действием капиллярных сил и вытесняет несмачивающий флюид из наиболее мелких капилляров (режим “капиллярной пропитки”). В работе [16] экспериментально было показано, что структура растущего кластера вытесняющего флюида, получаемого в рамках модели инвазионной перколяции, хорошо отражает развитие процесса вытеснения в выгравированной в стекле капиллярной решетке при очень малых значениях капиллярного числа.

Рассмотрим реализацию модели инвазионной перколяции на квадратной решетке с заданной функцией распределения капилляров по радиусам. Смоделируем вытеснение на каждом шаге по описанной выше схеме, при этом рассмотрим два альтернативных варианта: когда для вытеснения выбирается капилляр с наименьшим и наибольшим радиусом. Типичный вид растущего кластера вытесняющего флюида показан на рис. 3.4.

Чтобы избежать влияния границ решетки на расчеты функций распределения, выделим некоторую центральную часть решетки. В этой отмеченной части на каждом шаге будем подсчитывать, сколько капилляров какого радиуса занято каждым флюидом, и на этой основе определять вид функций распределения $f_i(r)$. Таким образом, результаты модели инвазионной перколяции могут быть использованы для получения функций распределения флюидов по капиллярам решетки $f_i(r)$ при различных значениях насыщенности решетки флюидами.

На базе получаемых функций $f_i(r)$ можно на каждом шаге определить значение насыщенности флюидом и фазовые проницае-

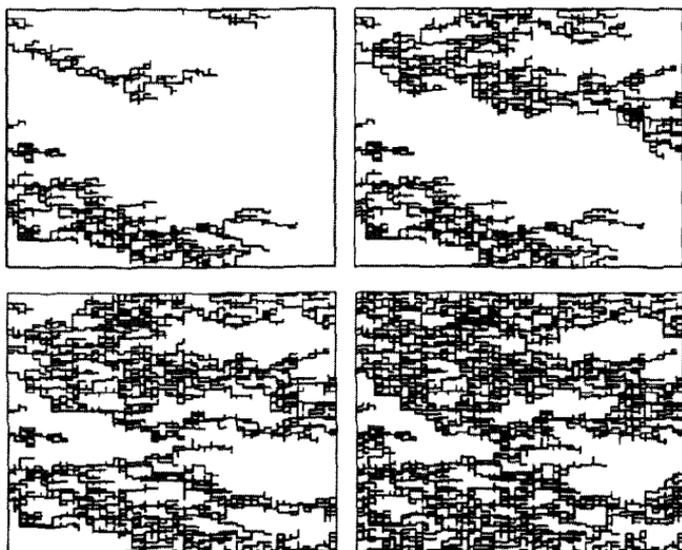


Рис. 3.4. Эволюция кластера вытесняющего флюида
в модели инвазивной перколяции
(1 → 2 → 3 → 4)

мости по соотношению (3.16). На рис. 3.5 представлены рассчитанные таким образом фазовые проницаемости для смачивающего флюида (воды) и несмачивающего флюида (нефти) для описанных режимов “дренажа” и “капиллярной пропитки”. Для сравнения на рис. 3.5 показаны также фазовые проницаемости, рассчитанные по формулам (3.14) и (3.15), которые соответствуют случаю, когда один флюид (вода) находится только в мелких капиллярах, а другой (нефть) – в крупных.

Как видно из рис. 3.5, при расчетах по формулам (3.14), (3.15) фазовая проницаемость несмачивающего флюида (нефти) является наибольшей, а фазовая проницаемость смачивающего флюида (воды) – наименьшей по сравнению с модельными режимами “дренажа” и “капиллярной пропитки”. Это объясняется указанным выбором распределения флюидов по капиллярам, при котором несмачивающий флюид, находящийся только в крупных капиллярах, имеет наилучшую проницаемость, а смачивающий флюид, напротив, – наихудшую.

Из сравнения фазовых проницаемостей в режимах “дренажа” и “капиллярной пропитки” можно заключить, что при “дренаже” фазовые проницаемости заметно лучше, чем при “капиллярной пропитке”. Данный факт является следствием того, что при “дренаже” кластер несмачивающего флюида, выбирая для своего рос-

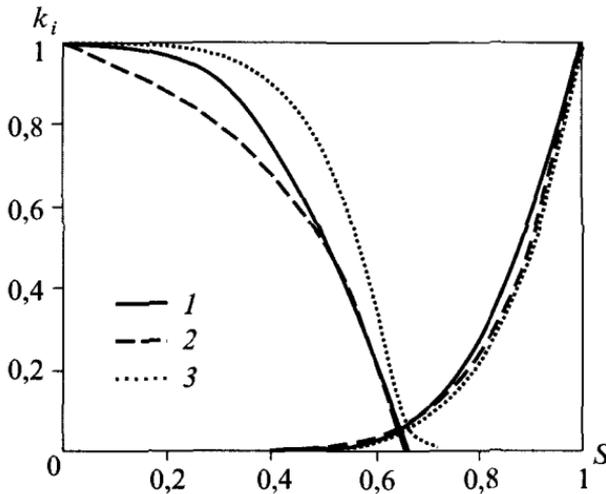


Рис. 3.5. Кривые относительных фазовых проницаемостей: 1 – расчет на основе функций распределения флюидов по капиллярам, полученных в режиме “дренажа”; 2 – расчет на основе функций распределения флюидов по капиллярам, полученных в режиме “капиллярной пропитки”; 3 – расчет по соотношениям (3.14) и (3.15)

та преимущественно более крупные капилляры, содержит в себе большую долю крупных капилляров, чем остается в области несмачивающего флюида при его вытеснении в режиме “капиллярной пропитки”. В то время как при “капиллярной пропитке” кластер смачивающего флюида включает в себя большую долю мелких капилляров по сравнению с областью смачивающего флюида, образующуюся при его вытеснении в режиме “дренажа”.

Стоит отметить, что для модели инвазионной перколяции был предложен ряд модификаций, позволяющих при формировании кластера вытесняющего флюида учитывать такие явления как окружение одного флюида другим, а также иные особенности вытеснения [22]. Кластеры, получаемые в рамках этих модификаций, могут быть также использованы для определения функций распределения флюидов по капиллярам в указанных случаях.

Фазовые проницаемости при преобладании гидродинамических сил

Другая известная модель неустойчивого роста получила название *диффузионно-ограниченная агрегация (DLA)*. Модель DLA была предложена в работе [23] и строится следующим образом. В решетке, полностью заполненной вытесняемым флюидом,

задается исходное положение кластера вытесняющего флюида, как правило, это – или точка в центре решетки, или одна из границ решетки. С границы (контура) решетки, удаленной от кластера вытесняющего флюида, запускается частица, которая совершает случайные блуждания по части решетки, заполненной вытесняемым флюидом. Если частица в процессе движения коснется границы кластера вытесняющего флюида, то она “прилипает” к кластеру, и он увеличивается на один элемент (один капилляр). Затем запускается следующая частица.

В работе [24] экспериментально наблюдался кластер вытесняющего флюида, образующийся в процессе неустойчивого вытеснения в капиллярной решетке, выгравированной в стекле, при больших значениях капиллярного числа, когда вязкость вытесняющего флюида была много меньше вязкости вытесняемого. При этом отмечалось, что образующиеся в данном случае так называемые “вязкие пальцы” хорошо соответствуют виду кластера, построенного по модели DLA.

Аналогично случаю инвазионной перколяции результаты модели DLA можно использовать для определения функций $f_i(r)$ при различных значениях насыщенности решетки каждым флюидом. Для этого рассмотрим квадратную решетку капилляров, первоначально заполненную вытесняемым флюидом (нефтью). С одной стороны решетка граничит с вытесняющим флюидом (водой). Выбор капилляра, который в каждый момент времени включается в кластер вытесняющего флюида, осуществляется по следующей схеме. С противоположной, занятой вытесняющим флюидом стороны решетки выпускается частица. Эта частица на каждом шаге случайным образом попадает из одного капилляра решетки, содержащего вытесняемый флюид, в другой. Если частица оказывается в капилляре, контактирующем с кластером вытесняющего флюида, то этот капилляр присоединяется к кластеру. Затем начинается блуждание следующей частицы. Типичный кластер вытесняющей жидкости, полученный по этой схеме, представлен на рис. 3.6.

Определение функций распределения $f_i(r)$ для каждого флюида проведем, как и в случае инвазионной перколяции, в некоторой выделенной центральной части решетки. Используя полученный вид функций $f_i(r)$ в каждый момент времени, можно рассчитать значение насыщенности решетки флюидом и фазовые проницаемости по выражению (3.16). Полученные на базе таких вычислений фазовые проницаемости показаны на рис. 3.7.

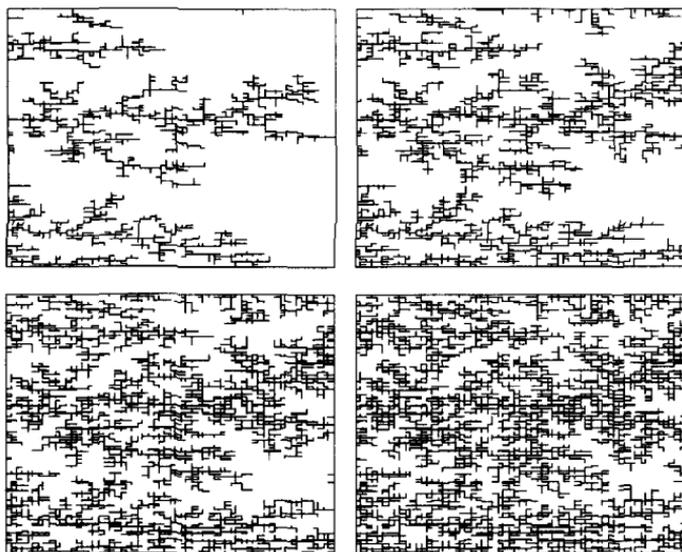


Рис. 3.6. Эволюция кластера вытесняющего флюида в модели DLA
(1 → 2 → 3 → 4)

Для сравнения на рис. 3.7 также показаны фазовые проницаемости, определенные по формулам (3.14), (3.15). Наблюдаемое на рис. 3.7 существенное различие в кривых фазовых проницаемостей для рассматриваемых случаев объясняется тем, что

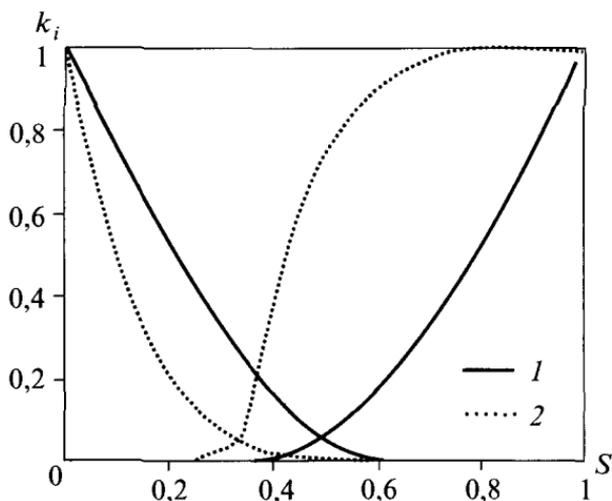


Рис. 3.7. Кривые относительных фазовых проницаемостей:
1 – расчет на основе функций распределения флюидов по капиллярам,
полученных из модели DLA,
2 – расчет по соотношениям (3.14), (3.15)

при случайном характере роста кластера вытесняющего флюида в модели DLA распределение флюидов по капиллярам является в среднем одним и тем же для обоих кластеров при одинаковых значениях насыщенности решетки флюидами. При расчетах же по формулам (3.14) и (3.15) предполагается строгое разделение флюидов по крупным и мелким капиллярам.

Противоположный модели DLA случай (модель anti-DLA [25]) имеет место, когда при больших капиллярных числах вязкость вытесняющего флюида много больше вязкости вытесняемого. При этом наблюдается устойчивый фронт вытеснения или так называемое “поршневое вытеснение” [16]. Рассчитывать фазовые проницаемости в этом случае не имеет смысла, так как они носят вырожденный характер.

3.3. Моделирование трехфазной равновесной фильтрации несмешивающихся ньютоновских флюидов

В связи со значительными техническими сложностями экспериментального определения фазовых проницаемостей при трехфазной фильтрации особое значение приобретает теоретический анализ их поведения. Результаты исследований равновесной двухфазной фильтрации, изложенные в 3.1, позволяют провести их обобщение на случай фильтрации трех фаз.

Ограничимся для определенности анализом фильтрационных процессов в средах со структурой порового пространства, описываемой моделью I. Рассмотрим равновесную фильтрацию трех различных жидкостей, присвоив им номера от 1 до 3, возрастающие с уменьшением степени смачивающей способности флюида.

При построении модели трехфазной фильтрации, так же как и в 3.1, существенно условие равновесности процесса фильтрации. Это означает, что скорости фильтрации достаточно малы, и поэтому распределение фаз в поровом пространстве полностью определяется капиллярными силами. Тогда, если в исходном состоянии насыщенности фаз примерно равны (ни одна из фаз не “защемлена”), их последующее изменение будет сопровождаться перераспределением флюидов в капиллярах сетки, при котором более смачивающая фаза будет занимать капилляры меньшего радиуса, а менее смачивающая – более крупные.

Определим характерные насыщенности среды (S_1 , S_2 , S_3), при которых осуществляются фильтрационные течения с различным числом фаз. Равновесная фильтрация любой фазы возможна лишь в случае, когда капилляры, заполненные этой фазой, образу-

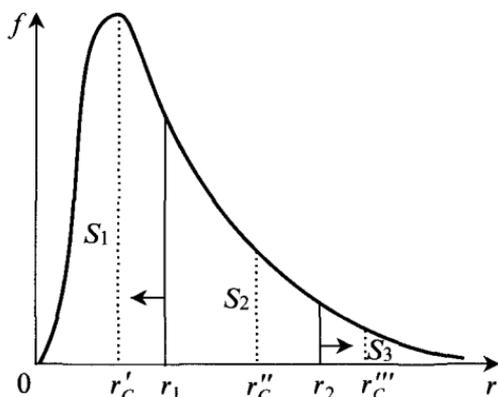


Рис. 3.8. Схематическое распределение фаз в поровом пространстве под действием капиллярных сил в случае стационарной фильтрации

ют БК. Критерием образования БК в решетке является превышение долей капилляров, содержащих рассматриваемую фазу, пороговой величины ξ_c .

Оценим вероятность того, что капилляр содержит i -ю фазу. При равновесной фильтрации доступными для любой фазы являются лишь те капилляры, в которых капиллярное давление не превышает давления в ней p_i . Естественно, в наиболее крупных капиллярах, при $r > r_2$ (рис. 3.8), будет находиться фаза с индексом 3, обладающая наименьшей степенью смачивания твердой поверхности. В тонких капиллярах ($r < r_1$) будет находиться фаза с индексом 1, обладающая наибольшей степенью смачивания. В капиллярах с радиусами, удовлетворяющими условию $r_1 < r < r_2$, будет находиться фаза с индексом 2. Величины r_1 и r_2 , разбивающие $f(r)$ на зоны насыщения различными фазами (см. рис. 3.8), определяются из условия фазового равновесия

$$r_j = 2\chi_{j,j+1} \cos \theta_{j,j+1} / p_j; \quad j = 1, 2, \quad (3.17)$$

где $\chi_{j,j+1}$ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела j - и $(j+1)$ -й фаз, $\theta_{j,j+1}$ – угол смачивания твердой поверхности на контакте j - и $(j+1)$ -й жидкостей.

В 3.1 было показано, что с точностью до 15 % i -му БК принадлежат все капилляры, радиусы которых удовлетворяют условию проникновения в них i -й фазы. Поэтому, с учетом данной погрешности, вероятности ξ_i того, что капилляр содержит i -ю фазу, определяются следующими выражениями

$$\xi_1 = \int_0^{r_1} f(r) dr; \quad \xi_2 = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr; \quad \xi_3 = \int_{r_2}^{r_c'''} f(r) dr. \quad (3.18)$$

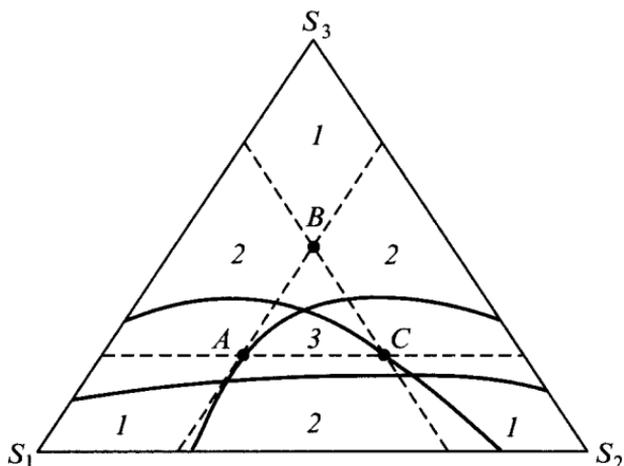


Рис. 3.9. Треугольная диаграмма областей фильтрации различного числа фаз в зависимости от соотношения их насыщенностей (треугольник Гиббса–Розебома)

Соответственно, i -я фаза протекает при выполнении условия

$$\xi_i \geq \xi_c. \quad (3.19)$$

Для количественного определения величины ξ_c необходимо знать тип решетки, наиболее адекватно моделирующей структуру порового пространства. Реальное расположение и взаимная ориентация пор и каналов в среде являются хаотическими. Хаотическую структуру связей удобно моделировать простой кубической решеткой. Поскольку в настоящее время отсутствуют какие-либо данные в пользу другого выбора типа решетки, в дальнейшем, как и в предыдущих исследованиях, для определенности будем считать решетку кубической. При этом из (1.1) получаем $\xi_c = 1/4$.

Из соотношений (3.18) в рамках модели I следует, что $S_i = \xi_i$. Если нанести полученные таким образом оценки критических значений насыщенностей на треугольную диаграмму (штриховые линии внутри треугольника $S_1S_2S_3$ на рис. 3.9), то получим ряд областей, отличающихся друг от друга числом участвующих в фильтрационном течении фаз.

Цифрами 1 на рис. 3.9 обозначены области однофазной фильтрации, при которой две фазы из трех оказываются “защемленными” (БК для этих фаз отсутствуют). При соотношениях насыщенностей, соответствующих областям 1, фильтруется только i -я компонента, где i – индекс вершины треугольника. В областях, отмеченных цифрами 2, “защемлена” одна из трех фаз, и реализуется двухфазная фильтрация жидкостей i и j , где i, j – индексы

сторон треугольника S_1S_2 , к которым примыкают зоны 2. В центре треугольника расположена область 3, где возможна одновременная фильтрация всех трех фаз.

Из диаграммы видно, что трехфазная фильтрация теоретически возможна лишь в небольшой окрестности центральной точки треугольника $S_1S_2S_3$. Отметим, что равновесная четырехфазная фильтрация в случае кубической решетки невозможна, поскольку для нее выполнить условие (3.19) одновременно для четырех фаз нельзя. Одна из фаз в таком случае будет вынуждена фильтроваться в несвязном виде. При больших координационных числах решетки ($z > 6$) порог протекания в системе снижается и, в принципе, возможна равновесная фильтрация четырех и более фаз.

Интересно сравнить полученный теоретический результат с экспериментальными данными.

К сожалению, экспериментальные исследования трехфазной равновесной фильтрации для случая $\mu_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$), $\chi_1 \cos \theta_1 > \chi_2 \cos \theta_2 > \chi_3 \cos \theta_3$ до настоящего времени не проводились. Известны лишь эксперименты Леверетта (1940 г.), в которых вязкости фаз также существенно отличались ($\mu_1 \approx \mu_2 \gg \mu_3$). Результаты этих экспериментов для сравнения нанесены на той же треугольной диаграмме насыщенностей (сплошные линии внутри треугольника $S_1S_2S_3$).

Видно, что площади областей 3 примерно одинаковы как при теоретическом рассмотрении, так и в эксперименте, однако экспериментально найденный треугольник трехфазной фильтрации расположен несколько дальше от вершины S_3 . В этом же направлении деформированы области 2, прилегающие к сторонам S_1S_3 и S_2S_3 .

Это может быть связано с проявлением динамических эффектов. Например, в связи с существенно меньшей вязкостью и, следовательно, большей подвижностью третьей фазы, на динамической стадии фильтрации она может прорываться сквозь образец, изолируя при этом целиком малоподвижных фаз 1 и 2. В результате в широком диапазоне изменения S_3 ($1 > S_3 > 0,35$) происходит однофазная фильтрация третьего флюида. При $S_3 < 0,35$, когда содержание в образце третьей фазы достаточно мало, чтобы различие в подвижностях фаз перестало определять характер их распределения в поровом пространстве, теоретическая и экспериментальная диаграммы различных областей трехфазных фильтратий совпадают с точностью $\approx 10\%$. Это говорит о хорошем совпадении теории и эксперимента для рассматриваемого случая равновесной трехфазной фильтрации.

Проведем расчет коэффициентов относительной фазовой проницаемости в различных областях фильтрации. Очевидно, что в областях 1 треугольной диаграммы отличны от нуля (и равны 1) только относительные фазовые проницаемости соответствующих i -х фаз. В областях 2, как отмечалось выше, реализуется двухфазное течение i -й и j -й фаз. Коэффициенты их фазовых проницаемостей можно найти, используя зависимости (3.2)–(3.8). Обобщение этих зависимостей на случай трехфазного течения позволит определить относительные фазовые проницаемости в области 3.

Использование условий (3.16) дает возможность “вырезать” из общей функции плотности распределения $f(r)$ ту ее часть $f_i(r)$, которая приходится на долю капилляров, содержащих i -ю фазу. В случае трехфазной фильтрации $f_i(r)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \begin{cases} 0, & r > r_2, \\ f(r), & r \leq r_1; \end{cases} \\ f_2(r) &= \begin{cases} 0, & r > r_2, r < r_1, \\ f(r), & r_1 \leq r \leq r_2; \end{cases} \\ f_3(r) &= \begin{cases} f(r), & r \geq r_2, \\ 0, & r < r_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя в качестве $f(r)$ в (2.9) функции $f_i(r)$ из (3.20), находим параметрические зависимости абсолютных фазовых проницаемостей $K_i(r_1, r_2)$ от величин r_1 и r_2 , характеризующих области насыщения капилляров i -й фазой. При этом насыщенности фаз задаются соотношениями (3.18). Коэффициенты относительных фазовых проницаемостей вычисляются по формуле

$$k_i(r_1, r_2) = K_i(r_1, r_2) / K_0. \quad (3.21)$$

Они полностью определяются функцией плотности распределения капилляров по радиусам и порогом протекания системы, зависящим от типа решетки (координационного числа z). Таким образом, система выражений (2.9) и (3.18)–(3.21) с учетом условия (3.17) позволяют рассчитать относительные фазовые проницаемости в области 3.

В частном случае $r_1 = r_2$ имеем $f_2(r) = 0$, т. е. одна из фаз исчезает, и “вдоль” стороны S_1S_3 треугольника $S_1S_2S_3$ реализуется двухфазное течение. Если при этом какое-либо значение $\xi_i < \xi_c$, то имеет место двухфазная фильтрация с заземленной i -й фазой. В ука-

знном случае фазовые проницаемости $k_1(r_1 = 0, r_2 = r_1) = k_1(r_1)$ и $k_3(r_1 = r_2, r_2 = \infty) = k_3(r_2)$ являются фактически лишь функциями r_1 и r_2 соответственно и вычисляются единым образом для всех областей диаграммы. Данное явление наблюдалось в экспериментах Леверетта, где также отмечалось, что проницаемость наиболее смачивающей фазы (воды) зависит лишь от насыщенности данной фазы и нечувствительна к соотношению двух других фаз.

Для получения более простых аналитических соотношений воспользуемся перколяционной моделью и найдем фазовые проницаемости для модельной функции плотности распределения (3.10) при $a_*/a^* \ll 1$, т. е.

$$f(r) = a_* r^{-2} \eta(r - a_*), \quad (3.22)$$

полагая также, что $a_* = 1$. Подставляя (3.22) в (3.18), найдем связь r_1 и r_2 с насыщенностями фаз: $S_1 = 1 - r_1^{-1}$, $S_3 = 1 - r_2^{-1}$, $S_2 = 1 - S_1 - S_3 = r_1^{-1} - r_2^{-1}$. Очевидно, имеет смысл сразу получить соотношение для k_2 , поскольку значения k_1 и k_3 могут быть получены из него соответствующими предельными переходами. Связь критического радиуса r_c'' с r_2 для функции $f_2(r)$ находим из (2.3') с учетом (3.20) и (3.22). Для упрощения вычислений полагаем $\nu = 1$ вместо значения $\nu \approx 0,9$. Тогда, подставляя r_c'' в (2.9), используя (3.20)–(3.22) и пренебрегая в расчетах членами $\sim (r_c''/r_2)^5$, находим коэффициент относительной фазовой проницаемости для второй фазы

$$k_2(S_1, S_3) = \frac{2}{27} \frac{1}{(S_3 + \xi_c)^2} \left\{ 1 - \frac{S_3}{2(S_3 + \xi_c)} - 3 \left(\frac{S_3 + \xi_c}{1 - S_1} \right)^2 \times \right. \quad (3.23)$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{2(2S_3 + \xi_c)}{3(1 - S_1)} + \frac{S_3(S_3 + \xi_c)}{2(1 - S_1)^2} \right] \right\} \eta(1 - S_1 - S_3 - \xi_c).$$

Таким образом, для определения фазовой проницаемости k_2 необходимо знать две любые насыщенности из трех, связанных в случае несжимаемых флюидов обычным соотношением $S_1 + S_2 + S_3 = 1$.

Значения k_1 и k_3 получаем из (3.23), осуществляя предельный переход от трехфазной системы к двухфазной. Для этого в случае k_1 удобно устремить к нулю S_1 ($r_1 \rightarrow 0$). При этом получаем двухфазную систему, в которой формально роль S_1 будет играть насыщенность S_2 , поэтому удобно ввести обозначение $S_1 = S_2$. Гра-

ница “раздела” фаз с точки зрения $f(r)$ есть r_2 , однозначно связанная с насыщенностью S_3 , которая в данном случае равна $1 - S_1$. Следовательно, получаем, что $k_1(S_1) = k_2(0, 1 - S_1)$ или

$$k_1(S_1) = \frac{2}{27} \frac{1}{(1 - S_1 + \xi_c)^2} \left\{ 1 - \frac{1 - S_1}{2(1 - S_1 + \xi_c)} - 3(1 - S_1 + \xi_c)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{2}{3}(2 - 2S_1 + \xi_c) + \frac{1}{2}(1 - S_1 + \xi_c)(1 - S_1) \right] \right\} \eta(S_1 - \xi_c).$$

Аналогично в случае k_3 устремляем к нулю S_3 ($r_2 \rightarrow \infty$). Теперь S_2 формально есть S_3 , а S_1 следует заменить на $1 - S_3$. Получаем, что $k_3(S_3) = k_2(1 - S_3, 0)$, т. е.

$$k_3(S_3) = 1/27(32 - 6S_3^{-2} + S_3^{-3})\eta(S_3 - \xi_c).$$

Сопоставить теоретический расчет $k_2(S_1, S_3)$ с экспериментальными данными в области ABC трехфазной фильтрации не представляется возможным, поскольку последние отсутствуют. Однако хорошее качественное и количественное совпадение теории с экспериментом в областях одно- и двухфазной фильтрации (области 1 и 2 на фазовой диаграмме $S_1S_2S_3$, см. рис. 3.9), представленное в 2.2, 2.4 и 3.1, а также в указанном выше случае опытов Леверетта по трехфазной фильтрации, говорит в пользу предлагаемого теоретического описания процесса равновесной трехфазной фильтрации.

Литература

1. **Ентов В. М., Фельдман А. Я., Чен-Син Э. П.** Программное моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде // Программирование. 1975. – № 3 – С. 71–78.
2. **Манучарянц Э. О., Мишина А. Ю., Юдин В. А.** Моделирование неравновесного вытеснения несмешивающихся жидкостей в сетке капилляров на ЭВМ // Тез. докл. Всесоюз. семинара «Современные проблемы и математические методы теории фильтрации», М.: Изд. МИНГ, июнь 1984. – С. 80–82.
3. **Соколов И. М.** Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // Успехи физических наук, 1986. – Т. 150. – Вып. 2. – С. 221–255.
4. **Федер Дж.** Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 314 с.
5. **Кестен Х.** Теория просачивания для математиков. – М.: Мир, 1986. – 391 с.
6. **Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д.** Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук, 1985. – Т. 146. – Вып. 3. – С. 493–506.
7. **Киркпатрик С.** Перколяция и проводимость // Теория и свойства неоднородных материалов. - М.: Мир, 1977. – Вып. 7. – С. 240–292.
8. **Hardy Н. Н. Jots.** A mathematical model of microscopic fluid flow in porous media // Transp. Porous Media, № 1, 1990, pp. 27–48.
9. **Jerauld G. R., Salter S. J.** The effect of pore-structure on hysteresis in relative permeability and capillary pressure: pore-level modeling // Transp. Porous Media, № 2, 1990, pp. 103–152.
10. **Ентов В. М., Фельдман А. Я., Юдин В. А., Чен-Син Э. П.** Численное моделирование равновесия и движения несмешивающихся жидкостей в сетке капилляров на ЭВМ. – Деп. в ВИНТИ. – 1980. № 3608-80.12. – С. 174.
11. **Займан Дж.** Модели беспорядка. - М.: Мир, 1982. – 591 с.
12. **Емцев Б. Т.** Техническая гидромеханика: Учебник для вузов по специальности «Гидравлические машины и средства автоматизации». 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
13. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. - М.: Машиностроение, 1975. – 559 с.
14. **Велихова Н.В., Данилова Н. А., Битов В. М., Чен-Син Э. П.** Моделирование неравновесной и нелинейной фильтрации в сетке капилляров // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск, 1977. – С. 17–24.
15. **Ентов В. М., Зак С. А., Чен-Син Э. П.** О двухфазном течении в среде с микрогетерогенной смачиваемостью // ДАН. – 1984. – Т. 274. – № 6. – С. 1334–1336.
16. **Lenormand R., Zarcone C., Sarr A.** Mechanisms of the displacement of one fluid by another in the network of capillary ducts // J. Fluid Mech. 135, 1983, pp. 337–353.
17. **Lenormand R., Touboul E., Zarcone C.** Numerical models and experiments on immiscible displacement in porous media // J. Fluid Mech. 189, 1988. pp. 165–187.

18. **Кадет В. В., Селяков В. И., Мусин М. М., Мусин Р. М.** Анализ эффективности заводнения с учетом характера течения жидкости на микроуровне // Нефтяное хозяйство. – 1995. № 12.
19. **Селяков В. И., Кадет В. В.** Перколяционные модели процессов переноса в микронеоднородных средах. – М.: Недра, 1995. – 222 с.
20. **Chandler R., Koplik J., Lerman K., Willemsen J. F.** Capillary displacement and percolation in porous media // *J. Fluid Mech.* 119, 1982. p. 249.
21. **Wilkinson D., Willemsen J. F.** Invasion Percolation: A new Form of Percolation // *J. Phys. A* 16, 1983. pp. 3365–3371.
22. **Панфилов М. Б., Туваева И. В.** Перколяционные модели процессов вытеснения жидкостей в случайно-неоднородных средах. – М.: Препринт 12 ИПНГ АН СССР, 1991. – 91 с.
23. **Witten T. A., Sander L. M.** Diffusion limited aggregation // *Phys. Rev. B*, vol. 27, 1983. pp. 5686–5697.
24. **Maloy K. J., Feder J., Jossang T.** Viscous fingering fractals in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 55, 1985, pp. 1885–1891.
25. **Paterson L.** Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacement in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 52, 1984. pp. 1621–1624.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ	6
1.1. Решеточные и нерешеточные задачи теории перколяции. Кластеры. Порог протекания. Классическая решетка Бете.....	–
1.2. Особенности структуры бесконечного кластера. Критические перколяционные индексы. Скейлинг. Метод ренормализации.....	21
1.3. Фрактальная размерность бесконечного кластера. Размерность самоподобия. Фрактальные кривые. Однородные фракталы.....	34
1.4. Модель эффективной среды. Вывод основного соотношения. Решетка с бинарным распределением.....	42
Глава 2. ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ФЛЮИДОВ В РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ ПОРИСТЫХ СРЕД	49
2.1. Обобщение модели Шкловского – де-Жена для случая фильтрационного течения в микронеоднородной среде.....	–
2.2. Верификация перколяционной модели по результатам численного эксперимента.....	56
2.3. Учет инерционных потерь при построении перколяционной модели течения в пористой среде.....	60
2.4. Обобщенная микромеханическая модель расчета проводимости капиллярной решетки.....	63
Глава 3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ МНОГОФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ	68
3.1. Микромеханическое моделирование процесса двухфазной равновесной фильтрации несмешивающихся ньютоновских флюидов.....	–
3.2. Статистические методы получения функций распределения флюидов по капиллярам решетки.....	80
3.3. Моделирование трехфазной равновесной фильтрации несмешивающихся ньютоновских флюидов.....	86
Литература.....	93

Учебное издание

Валерий Владимирович Кадет

**МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ
В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ**

Главный редактор *М. С. Кенесов*

Редактор *Л. К. Казанцева*

Техническое редактирование и компьютерная верстка *К. А. Плотниковой*

Корректор *В. В. Ковалев*

Художник *И. Н. Сердюков*

Сдано в набор 04.02.2008. Подписано в печать 04.03.2008.

Формат 60×90 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.

Гарнитура Times. Объем 6,0 п. л.

Тираж 1000 экз. Заказ № 634

Издательство «ЦентрЛитНефтеГаз».

Москва, ул. Проспект Мира, д. 105.

Тел./Факс +7(495) 682-93-18

E-mail: book7@mail.ru

Web-сайт: www.zentrilit.ru

Отпечатано в ОАО «Типография «Новости»

105005, Москва, ул. Фр. Энгельса, 46