АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Препринт № 9

В.Ю. Гречка, И.Р. Оболенцева

РАСЧЕТ ЛУЧЕЙ В СЛОИСТО-ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ С НЕОДНОЗНАЧНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

НОВОСИБИРСК 1989

УДК 550.834

Гречка В.Ю., Оболенцева И.Р. Расчет лучей в слоисто-однородных анизотропных средах с неоднозначными волновыми поверхностями. Новосибирск, 1989. 46 с. (Препр./ ИГиГ СО АН СССР; № 9).

Ранее авторами были разработаны алгоритмы расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах: трансверсально-изотропных и любой системы симметрии. Однако их применение было связано с требованием однозначности волновых поверхностей.

В данной работе производится обобщение указанных алгоритмов на случай неоднозначных волновых поверхностей. Исследуются свойства волновых поверхностей квазипоперечных волн. Определены два типа линий особых точек на волновых поверхностях квазипоперечных волн. Линии особых точек являются границами областей однозначности на волновых поверхностях.

Предлагаются способы разделения волновых поверхностей на области однозначности. Построены алгоритмы расчета лучей в случае многозначных волновых поверхностей. Они сводятся к определению возможных кодов волн с учетом всех комбинаций однозначных ветвей (или областей) многозначных функций лучевых скоростей и к расчету лучей для всех кодов волн.

Возможности применения двухточечных и параметрических способов расчета иллюстрируются примерами.

Работа предназначена для специалистов в области сейсморазведки, ГСЗ и сейсмологии.

Печатается с авторского оригинала

© Институт геологии
и геофизики СО АН СССР,
1989

Вычисление смещений объемных волн в анизотропных средах лучевым методом /I0/ в качестве необходимого элемента включает расчет лучей. В случае слоисто-однородных анизотропных сред для расчета лучей можно применять двухточечные алгоритмы /8, 9, I2/ и параметрический способ /6/. Однако их использование не вызывает затруднений только при условии, что на каждом из отрезков луча лучевая скорость является однозначной функцией его направления. Будем называть это условие требованием однозначности волновой поверхности.

Двухточечные алгоритмы требуют однозначности волновых поверхностей по той причине, что они основаны на использовании итерационных процессов, а в некоторых вариантах алгоритмов кроме того применяется интерполирование. При расчете лучей параметрическим способом однозначности волновых поверхностей на этапе расчета одного луча не требуется. Но при пересчете найденных многозначных функций (времен, параметров луча и др.) с хаотической сетки в заданные точки приходится выполнять интерполирование, что возможно только для однозначных функций.

Таким образом, для того чтобы можно было применять двухточечные алгоритмы или параметрический способ в тех случаях, когда для какого-либо отрезка луча волновая поверхность многозначна, надо предварительно разделить её на однозначные области и рассчитывать лучи последовательно для каждой из однозначных областей. В данной работе рассматриваются различные пути решения этой задачи.

I. Волновые поверхности квазипоперечных волн

Основные понятия и формулы

При изучении распространения плоских волн в однородных анизотропных средах используют три вида волновых поверхностей:

фазовых скоростей, рефракции и лучевых скоростей /I5/. Поверхность лучевых скоростей называют волновой поверхностью, применяя в данном случае этот термин в более узком смысле. Волновая поверхность - наиболее сложная из трех видов поверхностей. Для решения нашей задачи - расчет лучей в общем случае анизотропной среды - требуется знать свойства волновой поверхности для обнаружения и детального исследования областей её неоднозначности. Однако свойства волновой поверхности связаны со свойствами поверхностей фазовых скоростей и рефракции. Поэтому изучению волновой поверхности обычно предшествует нахождение характерных точек поверхностей фазовых скоростей и рефракции.

Прежде чем приступить к исследованию волновых поверхностей, приведем, следуя в основном /I4, I5, I8/, некоторые определения и формулы, которые будут нами использоваться.

Фазовая и лучевая скорости. В однородной анизотропной среде, характеризуемой приведенным тензором модулей упругости, (λ_{ijkl}), $\lambda_{ijkl} = c_{ijkl}/\rho$, $(c_{ijkl}) = c$ - тензор модулей упругости, ρ - плотность, заданному направлению волновой нормали $\bar{n}$ отвечают три плоских изонормальных волны. Их фазовые скорости $V_q\ (V_q^2)$ и векторы поляризации $\bar{A}^{(q)} (q=1,2,3)$ находят как собственные значения и собственные векторы тензора Кристоффеля

$$\Lambda = (\lambda_{ijkl}\, n_j\, n_k). \tag{I}$$

Разделение на типы волн $(q=1,2,3)$ выполняется на основе неравенств

$$V_1(\bar{n}) > V_2(\bar{n}) > V_3(\bar{n}). \tag{2}$$

Волна с большей скоростью $(q=1)$ называется квазипродольной (P), две другие $(q=2,3)$ - квазипоперечными (S_1, S_2). Более точно неравенства (2) имеют вид

$$V_1(\bar{n}) \geqslant V_2(\bar{n}) \geqslant V_3(\bar{n}),$$

и если для квазипродольной волны равенство $V_1(\bar{n}) = V_2(\bar{n})$ выполняется крайне редко*, то равенство фазовых скоростей двух

* Известен пример парателлурита, см.рис. 56.I4 в /I4/

квазипоперечных волн $V_2(\bar{n}) = V_3(\bar{n})$ - рядовое явление. Направление волновой нормали $\bar{n}$, при котором оно справедливо, называется акустической осью. Известно, что акустические оси имеются в кристаллах любых групп симметрии, и, более того, пока не известны кристаллы без акустических осей, хотя в принципе такие среды могут существовать. (Существование сред с $V_1(\bar{n}) = V_2(\bar{n}) = V_3(\bar{n})$ в принципе также возможно, но маловероятно, см. /2/). Наличие акустической оси, как будет показано ниже, является одной из причин неоднозначности волновых поверхностей квазипоперечных волн.

Лучевая скорость, определяемая как вектор скорости движения энергии, вычисляется по формуле

$$\upsilon_i^{(q)} = \lambda_{ijkl} A_j^{(q)} A_l^{(q)} n_k / V_q \qquad (q = 1,2,3). \tag{3}$$

Лучевая скорость может быть найдена также путем дифференцирования фазовой скорости по направлению волновой нормали /I5/

$$\upsilon_i^{(q)} = \frac{\partial V_q}{\partial n_i} = -\frac{\partial F(\bar{n}, V_q)/\partial n_i}{\partial F(\bar{n}, V_q)/\partial V_q} \qquad (q = 1,2,3), \tag{4}$$

где

$$F = \det(\Lambda_{il} - V^2 \delta_{il}) = -V^6 + C_2 V^4 + C_4 V^2 + C_6 = 0, \tag{5}$$

$$C_2 = \lambda_{ijki} n_j n_k,$$

$$C_4 = \frac{1}{2}(\lambda_{ijka}\lambda_{ibca} - \lambda_{ijki}\lambda_{abca}) n_j n_k n_b n_c, \tag{6}$$

$$C_6 = \det(\Lambda_{il}).$$

Наряду с выражением (4) для лучевой скорости будем использовать эквивалентное ему выражение /I8/

$$\bar{\upsilon}^{(q)} = \upsilon_q \bar{l} = V_q \bar{n} + \frac{\partial V_q}{\partial \beta_1}\frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta_1} + \frac{1}{\sin^2\beta_1}\frac{\partial V_q}{\partial \beta_2}\frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta_2}, \tag{7}$$

где β_1, β_2 - углы, определяющие единичный вектор волновой нормали

$$\bar{n} = (\sin\beta_1 \cos\beta_2,\ \sin\beta_1 \sin\beta_2,\ \cos\beta_1). \tag{8}$$

Аналогично (8) единичный вектор луча будем задавать углами θ_1, θ_2:

$$\bar{l} = (\sin\theta_1 \cos\theta_2,\ \sin\theta_1 \sin\theta_2,\ \cos\theta_1). \qquad (9)$$

Поверхности фазовых скоростей и рефракции. Поверхность фазовых скоростей есть поверхность, радиус-вектор $\bar{r}$ которой направлен по волновой нормали $\bar{n}$ и равен по величине фазовой скорости V_q $(q=1,2,3)$ в направлении $\bar{n}$, т.е. $\bar{r} = V_q \bar{n}$. Поверхность фазовых скоростей состоит из трех полостей, соответствующих квазипродольной P $(q=1)$ и квазипоперечным S_1 и S_2 волнам $(q=2,3)$. Она описывается уравнением двенадцатой степени относительно V.

Поверхность рефракции есть поверхность, радиус-вектор которой направлен по волновой нормали $\bar{n}$ и равен обратной величине фазовой скорости $1/V_q$ $(q=1,2,3)$ в направлении $\bar{n}$; $\bar{r} = (1/V_q)\bar{n}$. Таким образом, поверхности фазовых скоростей и рефракции взаимно инверсны. Поверхность рефракции также трехполостная (полости S_2, S_1, P). Уравнение поверхности рефракции является уравнением шестой степени относительно V.

Полости S_1 и S_2 поверхностей фазовых скоростей и рефракции имеют общие точки (вырождаются) на направлениях акустических осей

$$V_2(\bar{n}) = V_3(\bar{n}). \qquad (10)$$

Уравнения акустических осей. Равенство (10) означает наличие кратного корня кубического уравнения (5). В этом случае оно может быть представлено в виде /15/

$$(V^2 - V_2^2)^2 (V^2 - V_1^2) = 0,$$

где

$$2V_2^2 + V_1^2 = C_2, \qquad (11)$$

$$V_2^4 + 2V_1^2 V_2^2 = -C_4, \qquad (12)$$

$$V_2^4 V_1^2 = C_6, \qquad (13)$$

C_2, C_4, C_6 определяются формулами (6). Уравнения (11), (12) позволяют найти $V_1(\bar{n})$, $V_2(\bar{n})$; подстановка их в (13) приводит к уравнению /15/

$$4(C_2^2+3C_4)^3-(27C_6+9C_2C_4+2C_2^3)^2=0, \qquad (14)$$

из которого определяется направление акустической оси $\bar{n}$. Уравнение (14) является необходимым и достаточным условием наличия акустической оси.

На практике вместо уравнения (14) удобнее применять полученные А.Г.Хаткевичем более простые уравнения (см./1, 16/)

$$R_1(\bar{n},c)=(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})\Lambda_{13}\Lambda_{23}-\Lambda_{12}(\Lambda_{13}^2-\Lambda_{23}^2)=0, \qquad (15)$$

$$R_2(\bar{n},c)=(\Lambda_{11}-\Lambda_{33})\Lambda_{12}\Lambda_{23}-\Lambda_{13}(\Lambda_{12}^2-\Lambda_{23}^2)=0,$$

где Λ_{ij} - компоненты тензора (1). Уравнения (15) справедливы в системе координат, выбранной так, чтобы в окрестности вырождения $\Lambda_{ij}\neq 0$, $i\neq j$.

В /16/ приведены уравнения для нахождения направлений акустических осей в кристаллах различных сингоний, определено возможное количество акустических осей. В трансверсально-изотропной среде направление акустической оси, не совпадающей с осью симметрии, определяется простой формулой

$$tg^2\beta=\frac{(c_{11}-c_{66})(c_{33}-c_{44})+(c_{13}+c_{44})^2}{(c_{11}-c_{66})(c_{66}-c_{44})}, \qquad (16)$$

β - угол между волновой нормалью $\bar{n}$ и осью симметрии.

Следует отметить, что некоторые данные относительно акустических осей приведены также в /19, 20/.

Наиболее полно проблема нахождения акустических осей решена в /1/, где авторами сформулирован инвариантный, т.е. не зависящий от выбора системы координат, критерий вырождения. Он состоит в выполнении семи равенств

$$R_i(\bar{n},c)=0, \qquad i=1,\dots,7.$$

Конические акустические оси. Исследованию вырождений (10) посвящены работы /2, 20/. Построена классификация вырождений по геометрии контакта полостей S_1 и S_2 на поверхностях рефракции и характеру особенностей полей поляризации в окрестности точек вырождения /2/. Установлено, что все типы вырождений, кроме одного, конического, неустойчивы, т.е. исчезают при небольшом возмущении тензора модулей упругости c. В случае же конического вырождения малое возмущение тензора c приводит

лишь к смещению точки вырождения. Акустическую ось, отвечающую коническому вырождению, называют конической акустической осью. Это наиболее распространенный тип акустических осей. С ним связано явление внутренней конической рефракции /I5, I7/. Оно состоит в том, что векторы поляризации вырожденных волн S_1 и S_2 могут иметь произвольную ориентацию в плоскости, ортогональной вектору поляризации невырожденной квазипродольной волны P, вследствие чего одному направлению волновой нормали соответствует конус векторов лучевой скорости (конус рефракции).

Волновая поверхность. Радиус-вектор волновой поверхности, или поверхности лучевых скоростей, направлен по лучу $\bar{l}$ и равен по величине лучевой скорости v_q $(q=1,2,3)$ в направлении $\bar{l}$, т.е. $\bar{r}=v_q\bar{l}$. Как и поверхности фазовых скоростей и рефракции, волновая поверхность также имеет три полости (P, S_1 S_2). Полости S_1, S_2 волновой поверхности (будем называть их волновыми поверхностями квазипоперечных волн S_1, S_2) несравненно сложнее соответствующих полостей S_1, S_2 поверхностей фазовых скоростей и рефракции. Волновая поверхность описывается уравнением высокой степени: согласно /I5/, предельный порядок этой поверхности (относительно v) равен I50.

Полости S_1 и S_2, как и соответствующие полости поверхностей фазовых скоростей и рефракции, имеют особые точки, связанные с акустическими осями. В случае конических акустических осей это линии, имеющие форму эллипсов, общие для полостей (поверхностей) S_1 и S_2. Они являются сечениями конусов рефракции волновыми поверхностями.

Кроме того, в отличие от поверхностей фазовых скоростей и рефракции волновые поверхности S_1 и S_2 могут иметь особые точки, связанные с нарушением условий регулярности поверхности. Как известно, поверхность $\bar{r}=\bar{r}(\alpha',\alpha'')$, α',α'' - параметры, регулярна, если $(\partial\bar{r}/\partial\alpha')\times(\partial\bar{r}/\partial\alpha'')\neq 0$. Таким образом, необходимым условием особых точек волновой поверхности $\bar{r}=\bar{v}(\beta_1,\beta_2)$, β_1, β_2 - параметры нормали $\bar{n}$, см. (8), является выполнение равенства /I5/

$$(\partial v/\partial\beta_1)\times(\partial v/\partial\beta_2)=0. \qquad (I7)$$

Особые точки этого типа, как будет показано в дальнейшем, представляют собой замкнутые линии на волновой поверхности, имеющие вид ребер; они могут иметь угловые точки и точки самопересечения. Неоднозначность волновой поверхности связана с тем, что ребра представляют собой совокупности точек возврата.

Оба типа особых точек (кривых особых точек), которые могут присутствовать на волновых поверхностях S_1 и S_2, обычно связаны между собой. На это впервые обратил внимание С.Крэмпин в /20/. Он показал, что наличие конической акустической оси в плоскости симметрии среды приводит к резкому изменению поведения волновых поверхностей и поляризации волн S_1 и S_2 вблизи акустической оси в плоскостях, составляющих с плоскостью симметрии углы порядка нескольких градусов.

О неоднозначности волновых поверхностей

Сечения волновых поверхностей плоскостями симметрии. Волновые поверхности до недавнего времени исследовались главным образом в различных сечениях и прежде всего плоскостями симметрии. При этом обычно рассчитывались и изображались только те части поверхностей, которые соответствуют волновым нормалям, лежащим в плоскостях симметрии. Примеры таких сечений можно найти в /I4/, где изображены поверхности всех трех видов ($\bar{r}=V\bar{n}$, $\bar{r}=(1/V)\bar{n}$, $\bar{r}=\bar{v}$) для кристаллов гексагональной и кубической сингоний.

Следует отметить, что в плоскостях симметрии разделение квазипоперечных волн на типы производится не на основе неравенства (2), а по поляризации, т.к. одна из двух волн является чисто поперечной и смещения в ней направлены по нормали к плоскости симметрии, в то время как вторая волна - квазипоперечная и имеет смещения в плоскости симметрии. Первую волну мы называем волной SH, а вторую - SV (более точно квази- SV). Некоторые авторы (см.,например, /I8/) термины SV и SH используют для указания направления смещений в волнах S_1, S_2 относительно вертикали и горизонтали. Тогда для вертикальных плоскостей симметрии X_1X_3 и X_2X_3 наши обозначения совпадают с обозначениями из /I8/, а для горизонтальной плоскости симметрии X_1X_2 они противоположны. В /I8/ для волны с поляризацией в

плоскости симметрии также используют название $S_P = S_{\parallel}(parallel)$, а для волны
– $S_r = S_{\perp}(right)$. При классификации волн
зации сечения волновых поверхностей каждой из волн, индикатрисами лучевых скоростей $v_{SV}(\theta)$, $v_{SH}(\theta)$, $\theta = \theta_1$ в (9), являются непрерывными функциями.

При рассмотрении трансверсально-изотропных
ляя выражение плоскость симметрии, будем иметь в виду плоскости симметрии, проходящие через ось симметрии шестого (или бесконечного) порядка. Углы β и θ , определяющие, согласно (8), (9) нормаль и луч, будем отсчитывать от оси симметрии X_3.

Хорошо известно, что индикатрисы $v_{SV}(\theta)$ могут иметь петли. Точки возврата петли принадлежат к тому типу особых точек, который связан с невыполнением условий регулярности волновой поверхности.

Наличие или отсутствие петель на индикатрисах лучевых скоростей $v_{SV}(\theta)$ устанавливают,
7, 23/. Как известно, в плоскостях симметрии уравнение поверхности рефракции, являющееся уравнением шестой степени, распадается на два уравнения: квадратное (для волн
четвертой степени (для волн SV). На кривой четвертого порядка могут быть точки перегиба, им соответствуют угловые точки, или иначе точки возврата петли на индикатрисе лучевой скорости $v_{SV}(\theta)$. Из теории кривых четвертого порядка следует, что возможное число точек перегиба на кривой рефракции волны SV равно восьми, четырем или нулю. Значит, петель может быть четыре, две (рис. I а) или ни одной.

В трансверсально-изотропных средах петли изучены достаточно подробно. Примеры петель в реальных материалах приводятся в /I4/. Петли наблюдались экспериментально при ультразвуковом моделировании: на двумерных моделях тонкослоистых периодических сред /I3/ и при наблюдениях на поверхности листа текстолита /II/. Обнаружение петель при полевых сейсмических исследованиях представляет собой несравненно более трудную задачу. Укажем на работу /2I/, относящуюся к начальной стадии экспериментального изучения поперечных волн в реальных средах.

Краткая сводка сведений о петлях дана Ф.М.Ляховицким /7/. Им составлена номограмма для быстрого определения наличия или

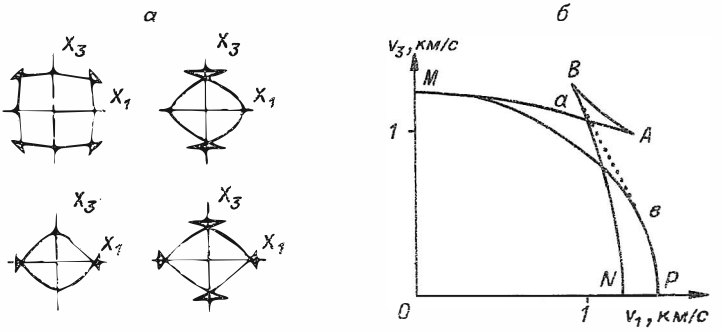


Рис. I. Волновые поверхности квази- SV и SH -волн в трансверсально-изотропной среде в сечении через ось анизотропии X_3 : а - виды петель на индикатрисах υ_{SV}, б - поясок ab между индикатрисами $MABN(\upsilon_{SV})$ и $MP(\upsilon_{SH})$.

отсутствия петель между осями симметрии с помощью неравенства, полученного В.С.Будаевым /4/. Заметим, что это условие петли ранее было получено Пэйтоном, на работу которого есть ссылка в /23/. Данное условие является точным критерием. Ещё одно неравенство получено И.О. Осиповым (см. ссылку на его работу в /23/), оно тоже названо им точным критерием. Путем алгебраических преобразований авторам /23/ не удалось привести условие И.О. Осипова к условию Пэйтона, хотя численно они эквивалентны с достаточно хорошей точностью.

Наряду с указанным точным условием, в работе /23/ приводятся ещё три приближенных условия, являющихся достаточными условиями наличия петли. Одно из них, полученное Масгрейвом, обеспечивает приемлемую точность и имеет очень простой вид:

$$2ah - d^2 > d\left((ah)^{1/2} + 2c_{44}\right), \qquad (18)$$

$$a = c_{11} - c_{44}, \quad h = c_{33} - c_{44}, \quad d = c_{13} + c_{44}.$$

Необходимыми условиями петель на осях симметрии являются неравенства /23/:

$$d^2 > ac_{33}, \quad d^2 > hc_{11}.$$

Кроме петли, в плоскости симметрии трансверсально-изотропной среды может быть ещё одна особенность, связанная с наличием акустической оси. Эта особенность показана на рис. I б. Она представляет собой отрезок прямой (поясок), примыкающий своими концами к индикатрисам $v_{SV}(\theta)$ и $v_{SH}(\theta)$. В разделе 2 будет показано, что отрезок является результатом вырождения эллипса; он представляет собой его ось, лежащую в плоскости симметрии, в то время как другая ось, перпендикулярная плоскости симметрии, равна нулю. Таким образом, акустическая ось оказывается не конической, а локально-клиновой, согласно классификации в /I/.

На существование пояска указано в /I7/. Однако автор /I7/ полагает, что это не отрезок прямой, а дуга, которая образована за счет "лучей, имеющих смещения, не нормальные к плоскости сечения и не лежащие в ней".

Было бы очень интересно получить экспериментальные подтверждения данного явления. Мы рискнули привести здесь сейсмограмму из /II/, полученную при ультразвуковом моделировании на листе текстолита. Отрезок ab на рис. 2 очень похож на отрезок

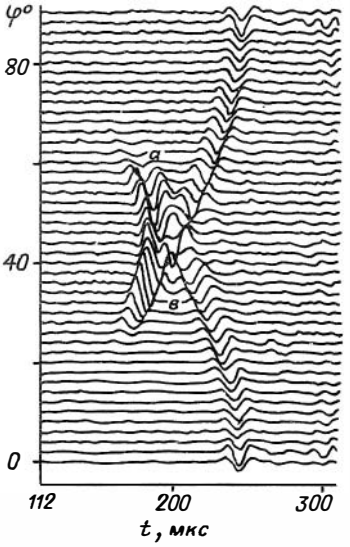


Рис. 2.Квази- SV волна на круговом профиле 0-90°, источник и приемник ориентированы ортогонально лучу, ab -поясок (предположительно). Данные ультразвукового моделирования на листе текстолита, из /II/.

прямой, являющийся вырожденным эллипсом. Из неравенства времен волны на осях $\varphi=0$ и $\varphi=90^\circ$ и небольшой асимметрии петли следует, что материал относится к гексагональной сингонии. Однако неизвестна константа c_{66}, для определения которой нужны наблюдения волны SH. Поэтому нет возможности предсказать наличие пояска и рассчитать его положение. Видно только, что он, как и положено, отходит от волны SV. Это согласуется с тем, что смещения в области пояска должны изменять поляризацию от SV к SH по мере движения от его конца на волне SV к концу на волне SH. Поясок был бы длиннее, если бы наблюдения проводились в объеме и можно было бы регистрировать смещения SH. Кроме того, получив волну SH, можно было бы увидеть примыкание пояска к волне SH.

Акустическая ось в трансверсально-изотропной среде, точнее конус акустических осей, как видно из (I6), имеет место, если $c_{66} > c_{44}$. Это условие выполняется довольно часто. В случае тонкослоистых периодических сред и трещиноватых пород (модель Гарбина-Кнопова) $c_{66} \geqslant c_{44}$, в подавляющем числе случаев $c_{66} > c_{44}$. Для гексагональных кристаллов и поликристаллических пород с ориентировкой кристаллов вдоль одной оси может быть как $c_{66} \leqslant c_{44}$, так и $c_{66} > c_{44}$, см. /7/. Таким образом, не исключено, что поясок удастся рассмотреть при полевых эксперимен - тальных наблюдениях.

Изображение волновой поверхности квазипоперечных волн в плоскости симметрии будет неполным, если при её расчете задавать нормали только в плоскости симметрии. При задании волновых нормалей в пространстве в плоскости симметрии могут появиться дополнительные петли. На рис. 3 такая петля изображена сплошной линией. Она является двойной, т.к. получена для волновых нормалей, ориентированных симметрично по отношению к плоскости симметрии. В таблице I приведены параметры всех волн, которые можно наблюдать в данном случае в приведенном сечении по направлению луча L (рис.3). Назовем эти волны изолучевыми. Видно, что по одному направлению луча распространяется I0 квазипоперечных волн. Дополнительные три пары волн, образующие дополнительную двойную петлю, имеют нормали вне плоскости симметрии. Их векторы поляризации направлены так, что смещения по нормали к плоскости симметрии компенсируют друг друга, в результате чего

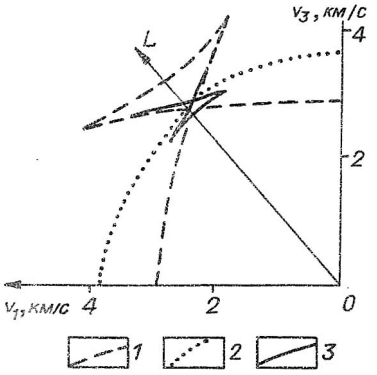


Рис. 3. Волновые поверхности квазипоперечных волн в арагоните (модули упругости из /3/) в сечении X_1X_3 : I - квази- SV волна, 2 - SH - волна, 3 - "сдвоенная" волна с нормалями вне плоскости X_1X_3.

смещения на двойной петле имеют тип SV.

Волновые поверхности в пространстве. Данные о конфигурации волновых поверхностей в пространстве в литературе отсутствуют. Поэтому для того чтобы иметь некоторое представление о том, как эти поверхности могут выглядеть, нами было рассчитано несколько поверхностей квазипоперечных волн (S_1 и S_2) для ромбических и моноклинных кристаллов (константы взяты из /3/). На рис. 4 приводятся в качестве примера изображения волновых поверхностей в арагоните (ромбическая сингония). Представлены все три вида поверхностей: фазовых скоростей, рефракции и собственно волновая.

На поверхностях фазовых скоростей и рефракции должны быть видны направления акустических осей. Согласно расчетам, акустические оси имеются в плоскостях X_1X_3 и X_2X_3 . В плоскости X_1X_3 проходят две оси: ось A_1 под углом 22^0 и ось A_2 под углом $55,5^0$ к оси X_3 . В плоскости X_2X_3 находится одна ось (A_3), отклоняющаяся от оси X_3 на 48^0. На рис.4 заметны только выходы осей A_1, A_2 в плоскости X_1X_3 . Они лучше видны на поверхностях фазовых скоростей: углублениям на S_1 отвечают выступы на S_2 . На поверхностях рефракции можно заметить то же самое, с той разницей, что выступам на S_1 отвечают углубления на S_2 .

Волновые поверхности S_1 и S_2 нами не "расшифровывались". Надо полагать, их сложный вид обязан наличию особых точек двух

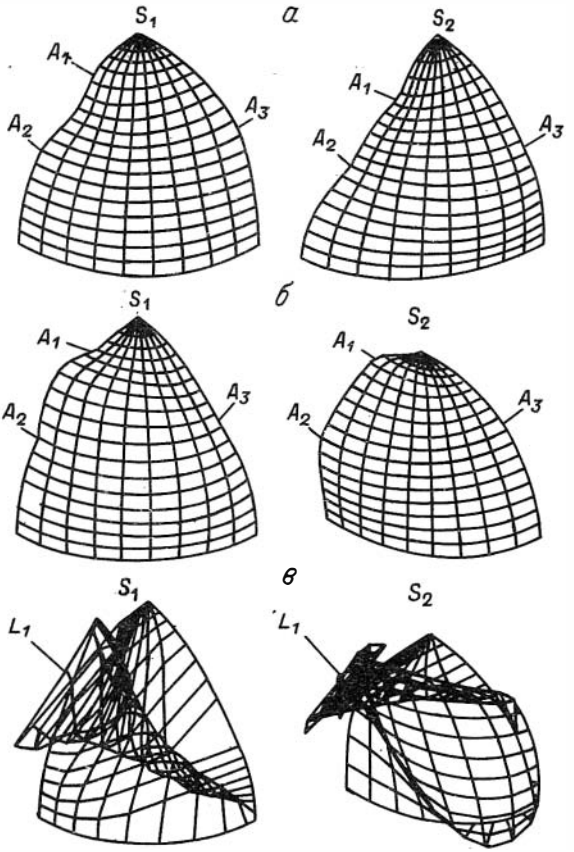


Рис. 4. Поверхности рефракции (а), фазовых скоростей (б) и лучевых скоростей (в) волн S_1 и S_2 в арагоните.

типов, вследствие выполнения равенств (I0) и (I7), сложному взаимодействию всех особенностей.

Для выяснения вопроса о многозначности функции $v(\bar{l})$ были найдены все изолучевые волны для направления луча L_1 (см. рис. 4). Их параметры приведены в таблице 2. Направление L_1 не намного отличается от направления L в плоскости симметрии

Таблица I

Параметры изолучевых волн, распространяющихся по направлению L (см. рис. 3), задаваемому вектором $\bar{l}$ =(0,643, 0, 0,766), в кристалле арагонита

Тип волны	№ п/п	Компоненты волновой нормали $\bar{n}$			Фазовая скорость	Лучевая скорость	Компоненты вектора поляризации $\bar{A}$		
		n_1	n_2	n_3	V	υ	A_1	A_2	A_3
P	I	0,52I	0	0,854	5,087	5,I45	0,6I0	0	0,793
S_1	2	0,574	0	0,8I9	4,252	4,267	0,638	0	-0,770
S_2	3	0,I46	0	0,989	3,059	3,593	0,997	0	-0,07I
S_2	4	0,93I	0	0,364	3,292	3,75I	0,084	0	-0,996
S_2	5	0,63I	0	0,776	3,732	3,732	0	I	0
S_2	6	0,333	0,254	0,908	3,458	3,800	0,7I2	-0,697	0,083
S_2	7	0,333	-0,254	0,908	3,458	3,800	0,7I2	0,697	0,083
S_2	8	0,62I	0,3I8	0,7I6	3,482	3,673	0,203	-0,880	0,429
S_2	9	0,62I	-0,3I8	0,7I6	3,482	3,673	0,203	0,880	0,429
S_2	I0	0,87I	0,I76	0,459	3,442	3,777	0,049	0,436	-0,899
S_2	II	0,87I	-0,I76	0,459	3,442	3,777	0,049	-0,436	-0,899

Таблица 2

Параметры изолучевых волн, распространяющихся по направлению L_1 (см.рис. 4), задаваемому вектором $\bar{l}$ =(0,643, 0,0II, 0,766), в кристалле арагонита

Тип волны	№ п/п	Компоненты волновой нормали $\bar{n}$			Фазовая скорость	Лучевая скорость	Компоненты вектора поляризации $\bar{A}$		
		n_1	n_2	n_3	V	υ	A_1	A_2	A_3
P	I	0,52I	0,006	0,854	5,087	5,I45	0,6I0	0,0I0	0,793
S_1	2	0,574	0,0I3	0,8I8	4,25I	4,267	0,638	0,007	-0,770
S_2	3	0,I46	0,0I0	0,989	3,059	3,593	0,997	-0,005	-0,07I
S_2	4	0,93I	0,02I	0,365	3,293	3,75I	0,084	0,030	-0,996
S_2	5	0,63I	-0,0I6	0,776	3,73I	3,733	0,0II	0,999	0,029
S_2	6	0,329	0,26I	0,908	3,445	3,778	0,72I	-0,688	0,086
S_2	7	0,338	-0,246	0,909	3,470	3,8I2	0,703	0,707	0,080
S_2	8	0,6I8	0,330	0,7I4	3,468	3,659	0,2II	-0,875	0,436
S_2	9	0,624	-0,305	0,7I9	3,498	3,687	0,I95	0,886	0,420
S_2	I0	0,876	0,I75	0,500	3,428	3,769	0,05I	0,4I2	-0,9I0
S_2	II	0,867	-0,I75	0,467	3,456	3,785	0,047	-0,457	-0,888

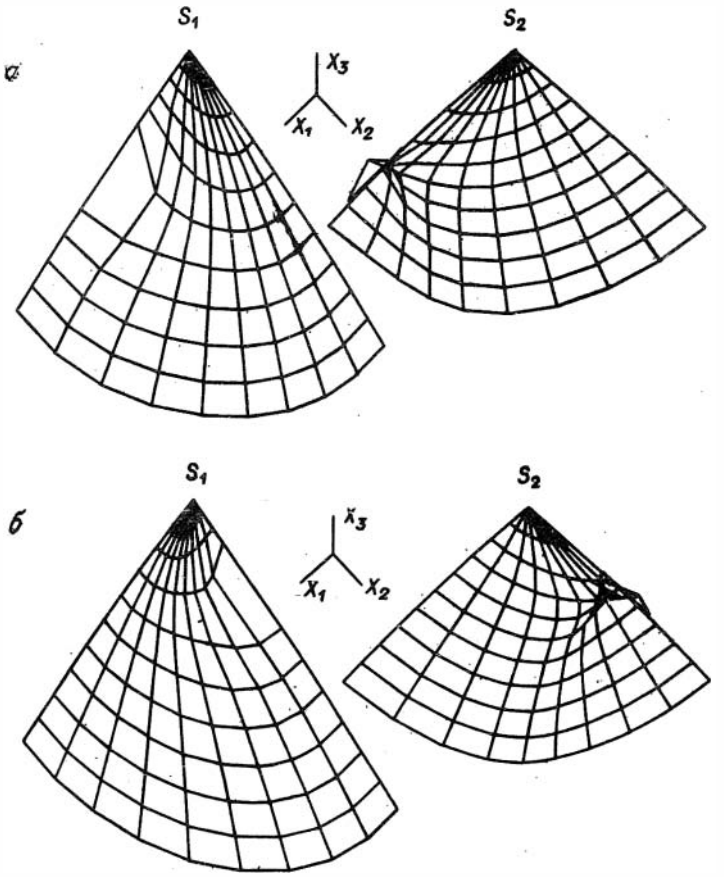


Рис. 5. Волновые поверхности S_1, S_2 в оливине с константами Верма для $\theta = 0-24^{\circ}$ на S_1 и $\theta = 0-16^{\circ}$ на S_2 в плоскости X_1X_3 (а) и Кумазавы для $\theta = 0-27^{\circ}$ на S_1 и $\theta = 0-17^{\circ}$ на S_2 в плоскости X_2X_3 (б); линии, изображающие поверхности, построены для сетки волновых нормалей $\bar{n}$ с шагами $\Delta\beta = 2^{\circ}$, $\Delta\alpha = 10^{\circ}$, β - полярный угол, α - азимут.

X_1X_3, (см. рис.3), поэтому параметры изолучевых волн, приведенные в таблице 2, сходны с соответствующими параметрами из таблицы I для направления L. Главное отличие состоит в том, что парные волны (№ 6, 7; 8,9; I0, II) теперь разделились, вследствие чего по направлению L_1 можно было бы наблюдать вступления всех десяти квазипоперечных волн, а не семи, как в плоскости симметрии.

Ещё одна иллюстрация сложного строения волновых поверхностей S_1 и S_2 представлена на рис.5. Изображены волновые поверхности в оливине (ромбическая сингония). Изучение особенностей распространения волн в оливине представляет особый интерес, т.к. с оливином, ориентацией его кристаллов, связана, как известно, анизотропия верхней мантии. Области особых точек на волновых поверхностях в оливине по размерам значительно
арагоните. В оливине имеется одна акустическая ось и одна приуроченная к ней линия особых точек. Для оливина с константами, определенными Верма (см. /3/), все особенности поверхности сосредоточены вблизи плоскости X_1X_3 (рис. 5а), т.к. акустическая ось находится в плоскости X_1X_3 и составляет с осью X_3 угол, равный I0,I$^{\circ}$. Оливин с константами Кумазавы /22/ имеет акустическую ось в плоскости X_2X_3, она образует с осью X_3 угол, равный 6,4°; вследствие этого область особых точек перемещается по азимуту на 90° и занимает положение, соответствующее направлению акустической оси (рис. 5б). Строение волновых поверхностей S_1 и S_2 в оливине нами изучено достаточно подробно и будет описано в разделе 3.

Таким образом, волновые поверхности могут иметь и часто имеют весьма сложный и не прогнозируемый (до проведения расчетов) вид. Это относится к анизотропным средам всех сингоний, кроме гексагональной. В случае же трансверсально-изотропной среды волновая поверхность в пространстве является результатом вращения вокруг оси симметрии волновой поверхности в сечении через ось симметрии. Для волны SH вращение эллипса приводит к образованию эллипсоида вращения. В случае волны SV петля в сечении при вращении образует выступ, при этом точки возврата петли описывают окружности. Вращение пояска приводит к образованию боковой поверхности усеченного конуса.

2. Границы областей однозначности на волновых поверхностях

Для разделения многозначных волновых поверхностей на области однозначности рассмотрим два вида линий, которые могут присутствовать на волновых поверхностях и являться элементами границ областей однозначности.

Линии E. Первый вид линий связан с наличием акустических осей, т.е. направлений волновых нормалей $\bar{n}$, для которых выполняется равенство (I0). Направления акустических осей находят, решая уравнение (I4) либо более простые уравнения (I5); в частных случаях используют ещё более простые уравнения, вплоть до (I6). В случае конических акустических осей направлению акустической оси $\bar{n}_{A0}$ отвечает целый конус направлений векторов лучевой скорости /I, I5, I7/

$$\bar{v}^{(2,3)} = \bar{v}_0 \pm (\bar{p}\cos 2\Phi + \bar{q}\sin 2\Phi), \tag{I9}$$

где

$$\bar{v}_0 = (\bar{Q}^{(22)} + \bar{Q}^{(33)})/2,$$

$$\bar{p} = (\bar{Q}^{(22)} - \bar{Q}^{(33)})/2, \tag{20}$$

$$\bar{q} = (\bar{Q}^{(23)} + \bar{Q}^{(32)})/2,$$

$$Q_j^{(rs)} = \lambda_{ijkl}\, n_k A_l^{(r)} A_i^{(s)}/V \qquad (r, s = 2, 3), \tag{2I}$$

$V = V_2(\bar{n}_{A0}) = V_3(\bar{n}_{A0})$, векторы поляризации $\bar{A}^{(2)}, \bar{A}^{(3)}$ взаимно ортогональны, а Φ имеет смысл угла поворота $(0 \leq \Phi \leq \pi)$ от вектора $\bar{A}^{(2)}$ к вектору $\bar{A}^{(3)}$ в плоскости, образуемой этими векторами.

В общем случае векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ линейно независимы, т.е.

$$\bar{\varkappa} = \bar{p} \times \bar{q} \neq 0. \tag{22}$$

Векторы лучевой скорости $\bar{v}^{(2,3)}$ параллельны образующим конуса, называемого конусом внутренней рефракции. Основание конуса ортогонально к $\bar{n}_{A0}$ и представляет собой эллипс с полуосями $u_{1,2}$:

$$2u_{1,2}^2 = \bar{p}^2 + \bar{q}^2 \pm [(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2 - 4\bar{\varkappa}^2]^{1/2}. \tag{23}$$

Этот эллипс, называемый далее эллипсом E или линией E, есть граница, по которой контактируют (сопрягаются) волновые поверхности S_1 и S_2. Особенность сочленения поверхностей S_1 и S_2 по линии E состоит в том, что внутри эллипса E волновая поверхность S_2 оказывается неоднозначной, а поверхность S_1 отсутствует. Или, говоря образно, внутри эллипса E поверхность S_2 собирается в складки, сморщивается, а на поверхности S_1 внутри эллипса E образуется дырка. Сама же линия E является общим краем поверхностей S_1, S_2.

Линии J. Вторым видом линий, являющихся границами областей однозначности на волновых поверхностях S-волн, являются линии, состоящие из особых точек волновой поверхности, удовлетворяющих условию (I7).

Условие (I7) представлено в работе /I5/ в компактной инвариантной форме

$$\tilde{\eta}_c = 0, \tag{24}$$

или

$$(\eta_c)^2 = (\eta^2)_c, \tag{25}$$

где

$$\eta = (\eta_{ik}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial n_k}\right) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial n_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial n_k}\right), \tag{26}$$

$\tilde{\eta}$ - матрица, взаимная к η, c - знак следа матрицы. Подстановка (26) в (24) или (25) приводит к выражению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial n_i}\,\frac{\partial^2 V}{\partial n_k \partial n_k} - \frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial n_k}\,\frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial n_k} = 0, \tag{27}$$

которое и является уравнением $f(n_1, n_2) = 0$ искомой линии особых точек. Вторые производные фазовой скорости $V(\bar{n})$, входящие в (27), находятся из уравнения (5) путем дифференцирования V как неявной функции $\bar{n}$

Из условия (I7) можно получить ещё одно очень полезное уравнение линии особых точек. Для этого надо использовать представление лучевой скорости (7).

Представим производные, входящие в (I7), в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_i} = \frac{\partial v}{\partial \beta_i}\,\bar{l} + v\,\frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_k}\,\frac{\partial \theta_k}{\partial \beta_i} \qquad (i = 1, 2). \tag{28}$$

Далее, выполнив необходимые преобразования, найдем, что

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_1} \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_2} = v^2 J \sin\theta_1 \bar{l} - v J_2 \sin\theta_1 \frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_1} \quad v J_1 \sin_1 \frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_2} = 0, \tag{29}$$

где

$$J = \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \beta_1},$$

$$J_i = \frac{\partial v}{\partial \beta_1}\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_2} - \frac{\partial v}{\partial \beta_2}\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_1} \qquad (i = 1, 2).$$

Дифференцированием выражения (7) по β_i нетрудно убедиться в выполнении соотношений

$$J v \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_2} \bar{n}\right) = J_1 (\bar{l}\, \bar{n}),$$

$$J v \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_1} \bar{n}\right) = -J_2 (\bar{l}\, \bar{n}),$$

которые позволяют переписать (29) в виде

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_1} \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_2} = J v^2 \sin\theta_1 \frac{\bar{n}}{(\bar{l}\, \bar{n})} = 0. \tag{30}$$

Таким образом, условие особых точек (I7) приводит к равенству нулю якобиана J :

$$J \equiv J(\bar{n}) = \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \beta_1} = 0. \tag{3I}$$

Производные $\partial\theta_i/\partial\beta_k$, входящие в (3I), являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_k} \qquad (i, k = 1, 2). \tag{32}$$

Правые части системы (32) определяются путем дифференцирования по β_k выражения (7) и имеют вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta_k} = a_{ik} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta_i}, \tag{33}$$

где

$$a_{11} = V + \partial^2 V/\partial \beta_1^2, \quad a_{12} = \partial^2 V/(\partial \beta_1 \partial \beta_2) - \operatorname{ctg} \beta_1 (\partial V/\partial \beta_2),$$

$$a_{21} = a_{12}/\sin^2\beta_1, \quad a_{22} = V + \operatorname{ctg}\beta_1 (\partial V/\partial \beta_1) + \operatorname{cosec}^2\beta_1 (\partial^2$$

Коэффициенты системы (32) могут быть представлены в аналогичном виде:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta_i} = b_{ki} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta_k}, \tag{34}$$

где

$$b_{ki} = \frac{v}{\delta_{1k} + \delta_{2k} \sin^2 \beta_1} \left[\left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta_k} \right) - \frac{\left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial \theta_i} \bar{n} \right) \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta_k} \bar{l} \right)}{(\bar{l}\, \bar{n})} \right]$$

Из равенств (33), (34) следует, что в системе координат с ортами вдоль $\partial \bar{n} / \partial \beta_1$ и $\partial \bar{n} / \partial \beta_2$, т.е. в плоскости фронта, система уравнений (32) представляет собой две системы двух линейных уравнений относительно $\partial \theta_i / \partial \beta_k$:

$$\begin{aligned} b_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta_k} + b_{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta_k} &= a_{1k}, \\ b_{21} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta_k} + b_{22} \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta_k} &= a_{2k} \qquad (k = 1, 2). \end{aligned} \tag{35}$$

Производные фазовой скорости V по углам β_k волновой нормали вычисляются из уравнения (5) путем дифференцирования V как неявной функции $\bar{n}(\beta_1, \beta_2)$; производные $\partial \bar{n} / \partial \beta_k$, $\partial \bar{l} / \partial \theta_i$ находятся прямым дифференцированием выражений (8), (9).

Нахождение линии особых точек $f(n_1, n_2) = 0$ путем решения уравнения (31) по вычислительной сложности приблизительно эквивалентно использованию уравнения (27).

Остановимся теперь на геометрическом смысле якобиана (31). Для этого выпишем формулу, связывающую его с гауссовой кривизной K волновой поверхности:

$$J = \frac{(\bar{l}\, \bar{n}) \sin \beta_1}{K v^2 \sin \theta_1}. \tag{36}$$

Из этой формулы видно, что знак якобиана J совпадает со знаком гауссовой кривизны K и, следовательно, указывает тип точки волновой поверхности: эллиптический при $J > 0$ и гиперболический при $J < 0$. Параболических точек, как видно из (36), на волновой поверхности нет.

В точках волновой поверхности, где выполняется условие (31)

$J=0$, гауссова кривизна K обращается в бесконечность. Эти точки образуют на волновой поверхности линии особых точек, которые далее будем называть линиями J .

Таким образом, если линии E являются краями волновых поверхностей квазипоперечных волн, то линии J являются границами эллиптических и гиперболических областей на этих поверхностях.

Особые точки в плоскостях симметрии. На сечениях волновых поверхностей плоскостями симметрии будем также различать два типа особых точек, аналогов линий E и J . При описании волновых поверхностей в разделе I были освещены вопросы существования особых точек и приведены примеры, иллюстрирующие характер проявления многозначности волновых поверхностей в окрестности особых точек. В данном разделе будут изложены способы расчета положения особых точек в плоскостях симметрии.

Хорошо известные точки возврата петель являются точечным аналогом линий J . Эти точки могут быть найдены из уравнения (см. /I5/)

$$\partial^2 V/\partial n_1^2 + \partial^2 V/\partial n_3^2 = 0, \tag{37}$$

а также геометрически очевидного уравнения

$$d\theta/d\beta = 0. \tag{38}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (27) и (3I) для линий J . Уравнения (37), (38) для определенности записаны для плоскости симметрии X_1X_3 . В (38) $\theta=\theta_1$, $\beta=\beta_1$, см. выражения (8), (9) для нормали и луча; $\beta_2=\theta_2=0$.

Из уравнений (37) и (38) получается ещё одно условие особых точек

$$V + d^2V/d\beta^2 = 0. \tag{39}$$

Все три условия (37) - (39) эквивалентны и являются необходимыми условиями.

В трансверсально-изотропной среде, как известно, фазовая скорость V и угол θ между лучом и осью анизотропии выражаются в явном виде как функции угла β , задающего волновую нормаль:

$$V = ((R-Q)/2)^{1/2}, \tag{40}$$

$$tg\,\theta = (W/P)\,tg\,\beta, \tag{41}$$

где

$$R = a_1 + a_2 y, \quad Q = (a_3 + 2a_4 y + a_5 y^2)^{1/2},$$
$$W = a_6 + a_7 y - a_8 Q, \quad P = a_3 + a_4 y - a_1 Q,$$

$$y = \sin^2\beta,$$
$$a_1 = \lambda_{33} + \lambda_{44}, \quad a_2 = \lambda_{11} - \lambda_{33}, \quad a_3 = h^2, \tag{42}$$

$$a_4 = d - hg, \quad a_5 = g^2 - 2d,$$

$$a_6 = d - fh, \quad a_7 = fg - d, \quad a_8 = \lambda_{11} + \lambda_{44},$$

$$h = \lambda_{33} - \lambda_{44}, \quad d = 2(\lambda_{13} + \lambda_{44})^2,$$

$$f = \lambda_{11} - \lambda_{44}, \quad g = f + h, \quad \lambda_{ij} = c_{ij}/\rho.$$

Это облегчает нахождение производных, входящих в (38), (39). Уравнение (38) принимает вид:

$$\sin 2\beta = 2PW/(WP' - PW'), \tag{43}$$

где

$$P' = a_4 \sin 2\beta - a_1 Q', \quad W' = a_7 \sin 2\beta - a_8 Q',$$
$$Q' = Q^{-1/2}(a_4 + a_5 y)\sin 2\beta.$$

Уравнение (39) после подстановки в него выражения (40) для V и выражения для V'', полученного дифференцированием (40), оказывается более длинным, чем уравнение (43); поэтому оно здесь не приводится.

Решение уравнения (43) состоит в поиске двух корней - значений β_A, β_B (рис. 6а), в которых функция $\theta(\beta)$ принимает экстремальные значения. Значения θ_A, θ_B будут точками возврата на индикатрисе лучевой скорости $v_{SV}(\theta)$, (см. рис. 6б). Начальное приближение для каждого корня β_A, β_B задается на основе предварительного вычисления кривой $\theta(\beta)$ или индикатрисы $v_{SV}(\theta)$ и уточняется путем решения уравнения (43). Вообще говоря, для нахождения β_A, β_B совсем не обя-

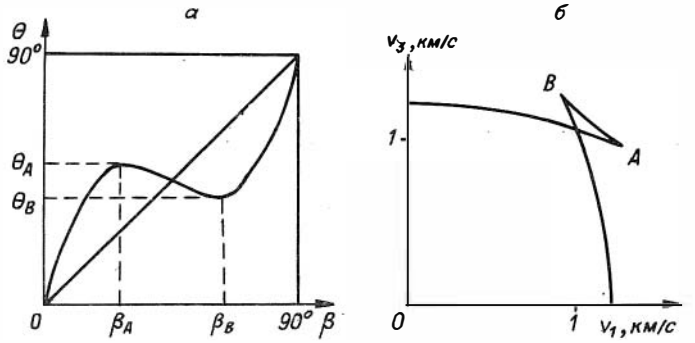


Рис. 6. Зависимости $\theta(\beta)$ (а) и $\upsilon_{SV}(\theta)$(б) для трансверсально-изотропной среды в сечении через ось симметрии X_3 ; β - угол между волновой нормалью $\bar{n}$ и осью симметрии X_3 , θ - угол между лучом $\bar{l}$ и X_3 .

зательно решать какие-либо уравнения. Достаточно произвести интерполяцию. Вполне удовлетворительную точность дает квадратичная интерполяция по трем точкам в окрестности экстремума.

В связи с рис. 6 а сделаем одно замечание, касающееся условий наличия петли на индикатрисе $\upsilon_{SV}(\theta)$. Между точками β_A и β_B функция $\theta(\beta)$ убывает, так что в области петли $d\theta/d\beta < 0$. Кроме того, пересечение кривой $\theta(\beta)$ с прямой $\theta=\beta$ также происходит на отрезке (β_A, β_B) . Отсюда вытекает полученное Мак Курди (см. /23/) условие петли. Однако, оно более сложное, чем условие Масгрейва (I8), и часто менее точное.

Линии E в плоскостях симметрии могут быть в трансверсально-изотропных средах. Это так называемые пояски, стягивающие волновые поверхности волн SV и SH и представляющие собой одну из осей эллипса. Пояски были описаны в разделе I, где было дано изображение пояска, полученное расчетным путем и экспериментально (рис. Iб, 2). В данном разделе поясним, отчего возникает поясок и укажем, как найти его положение.

Пусть $\bar{n}_{A0}=(n_1, 0, n_3)$ - акустическая ось, вдоль которой $V_2(\bar{n}_{A0})=V_3(\bar{n}_{A0})=V$. В случае трансверсально-изотропной среды

$$V^2 = \lambda_{66} n_1^2 + \lambda_{44} n_3^2,$$

а векторы поляризации $\bar{A}^{(2)}$, $\bar{A}^{(3)}$ определяются формулами

$$\frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{V^2 - \lambda_{44} n_3^2 - \lambda_{11} n_1^2}{n_1 n_3 (\lambda_{13} + \lambda_{44})} = \frac{n_1(\lambda_{66} - \lambda_{11})}{n_3(\lambda_{13} + \lambda_{44})}, \quad A_2^{(2)} = 0, \quad \bar{A}^{(3)} = (0,1,0). \tag{44}$$

Найдем векторы $\bar{Q}^{(23)}$ и $\bar{Q}^{(32)}$, определяющие согласно (20) вектор $\bar{q}$, входящий в выражение (I9) для конуса векторов лучевой скорости.

Векторы $\bar{Q}^{(rs)}$ определяются формулой (2I). Учитывая, что $\bar{A}^{(2)} = (A_1^{(2)}, 0, A_3^{(2)})$, $\bar{A}^{(3)} = (0,1,0)$ и опуская V в знаменателе, получим

$$Q_k^{(23)} = \lambda_{2kjl} n_j A_l^{(2)}, \qquad Q_k^{(32)} = \lambda_{lkj2} n_j A_l^{(2)}.$$

Тензор (λ_{ijkl}) таков, что

$$Q_1^{(23)} - Q_3^{(23)} = Q_1^{(32)} = Q_3^{(32)} = 0,$$

а

$$Q_2^{(23)} = \lambda_{21} n_1 A_1^{(2)} + \lambda_{23} n_3 A_3^{(2)}, \quad Q_2^{(32)} = \lambda_{66} n_1 A_1^{(2)} + \lambda_{44} n_3 A_3^{(2)}. \tag{45}$$

Подставляя в (45) выражения (44) для $A_1^{(2)}$, $A_3^{(2)}$, найдем, что

$$Q_2^{(23)} + Q_2^{(32)} = 0.$$

Следовательно, $\bar{q} = (\bar{Q}^{(23)} + \bar{Q}^{(32)})/2 = 0$, что означает обращение в ноль оси эллипса, перпендикулярной плоскости симметрии. В результате конус рефракции превращается в веер векторов лучевой скорости, находящийся в плоскости симметрии

$$\bar{v}^{(23)} = \bar{v}_0 + \bar{p} \cos 2\Phi, \tag{46}$$

где $2\bar{v}_0 = \bar{v}^{(2)} + \bar{v}^{(3)}$, $2\bar{p} = \bar{v}^{(2)} - \bar{v}^{(3)}$ - оставшаяся ось эллипса, или поясок. Концы пояска лежат на лучевых индикатрисах волн SV и SH (см. рис.I) в точках $\bar{v}^{(2)} = \bar{Q}^{(22)}$ и $\bar{v}^{(3)} = \bar{Q}^{(33)}$. Вектор поляризации волны на поясе E поворачивается от $\bar{A}^{(2)}$ в точке $\bar{v}^{(2)}$ к $\bar{A}^{(3)}$ в точке $\bar{v}^{(3)}$.

Таким образом, в плоскостях симметрии могут присутствовать точки возврата петель (точки типа J) и пояски (отрезки типа

E). Они определяются нормалями, находящимися в плоскости симметрии. Кроме этих особых точек в плоскости симметрии могут попадать дуги и петли от линий E и J , волновые нормали которых лежат вне плоскости симметрии. Пример петли был дан на рис. 3. Векторы поляризации таких волн не лежат в плоскости симметрии и не ортогональны ей.

3. Выделение областей однозначности на волновых поверхностях

Трехмерная среда любой системы симметрии, кроме гексагональной

Исследование многозначности волновых поверхностей. Для выделения областей однозначности сначала необходимо провести предварительное исследование, которое включает в себя определение направлений акустических осей (10) и выяснение, для какой из поперечных волн S_1 , S_2 возможно выполнение условия особых точек (17). Далее находятся линии E и J , на которых нарушаются условия регулярности поверхности. Очевидно, что они должны стать опорными линиями при разделении волновой поверхности на однозначные области.

Ввиду сложности волновых поверхностей, процесс выделения областей однозначности вряд ли может быть полностью формализован. К тому же ещё недостаточно полно изучены особенности волновых поверхностей в реальных кристаллах, материалах и геологических средах. Поэтому рассмотрим возможности и принципы выделения областей однозначности на примере.

В качестве тестовой модели была выбрана среда с параметрами оливина. Этот выбор обусловлен, во-первых, тем, что оливин играет большую роль в образовании анизотропии верхней мантии, и, во-вторых, тем, что для оливина волновые поверхности не очень сложны (рис. 5).

Рассмотрим оливин с параметрами из /22/; его волновые поверхности S_1 и S_2 изображены на рис. 5б . Акустическая ось лежит в плоскости X_2X_3 , образуя небольшой угол (6,416°) с осью X_3 . Учитывая симметрию упругих свойств оливина, будем изучать его волновые поверхности S_1 и S_2 в верхнем полупро-

странстве $X_3 \geq 0$ при $X_2 \geq 0$.

Волновые поверхности S_1 и S_2 находятся друг с другом в контакте по линии эллипса E. Положение эллипса E, определяемого выражениями (I9), (20), изображено на рис. 7. На одной из волновых поверхностей внутри эллипса должна быть дырка, а на другой - осложнения (рис. 5 б). Вычисляя значения якобиана J (см.формулы (30), (32) - (35)), находим, что для волны S_1 $J(\bar{n})>0$ при всех значениях $\bar{n}$, а для волны S_2 $J(\bar{n})<0$, если $-0,08<n_1<0,08$ и $0,09<n_2<0,15$. Таким образом, многозначна поверхность S_2, она и является предметом дальнейшего изучения. Линия J, находимая из уравнения (3I) $J(\bar{n})=0$, так же, как и линия E, показана на рис. 7.

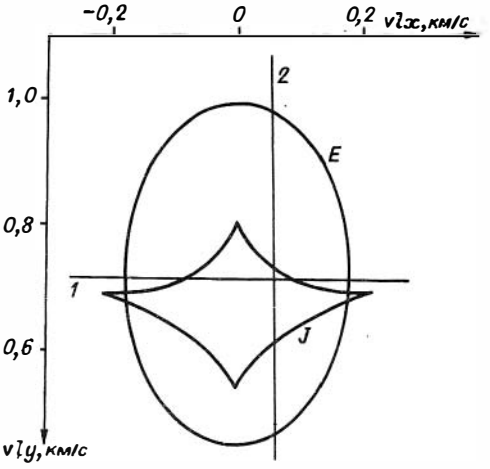
Для того чтобы представить себе поведение поверхности в области линий E и J, обратимся к рис. 8. На нем изображены сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям X_1X_3, X_2X_3 (линии сечений указаны на рис. 7). Видно, что поверхность четырехзначна и её ветви соотносятся друг с другом сложным образом. Проследим, как связаны между собой в пространстве различные части поверхности, представленные в сечениях четырьмя ветвями. Воспользуемся для этого картой изолиний лучевой скорости υ (рис. 9), а также полем градиентов лучевой скорости (рис.I0). Важный диагностический признак-знак кривизны поверхности ($K>0$ на рис. I0 а и $K<0$ на рис. I0 б).

Поверхность υ представлена по отдельности для двух её непрерывных частей, граничащих по линии J. Первая часть - кусок поверхности S_2, ограниченный рамкой рисунка и линией J (рис. 9 а); вторая часть - поверхность между линиями J и E (рис. 9 б); E - край, или кромка поверхности S_2, линия её контакта с поверхностью S_1.

Неоднозначность поверхности S_2 в области линий J и E возникает по той причине, что линия J является линией точек возврата. Это проявляется следующим образом.

Как видно из рис. 9 а, по направлению к линии J происходит подъем поверхности. При этом верхние изолинии упираются в нижнюю часть контура J (ADC), а нижние изолнии - в его верхнюю часть (ABC). Под контуром J части поверхности, поднимающиеся навстречу друг другу, пересекаются; внутри линии J функция υ становится двузначной. Пересечение поверхностей

Рис. 7. Линии особых точек E и J на волновой поверхности в оливине с константами Кумазавы; I--линия сечения плоскостью υl_y=0,72; 2 -плоскостью υl_x=0,05 (км/с).



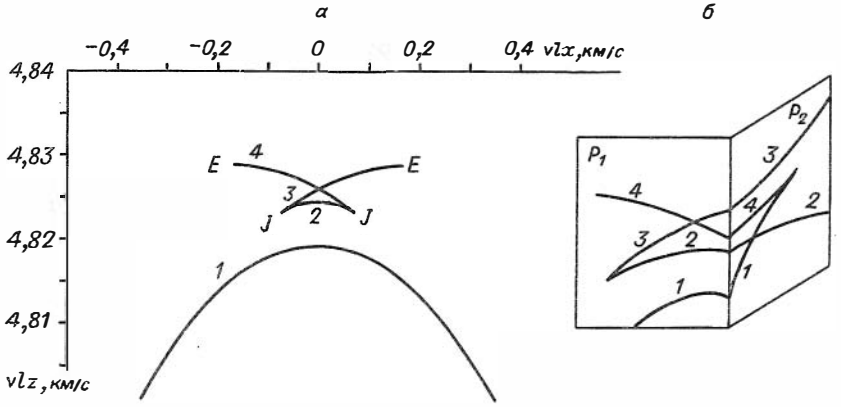


Рис. 8. Волновая поверхность S_2 : а - сечение υl_y=0,72; б - схематическое изображение пересечения сечений υl_y = =0,72 (P_1) и υl_x=0,05 км/с (P_2); I-4 - однозначные ветви $\upsilon(\bar{l})$.

видно на рис. 8 б в сечении P_2 (ветви I, 2).

Далее от линии J к линии E поверхность опять поднима-

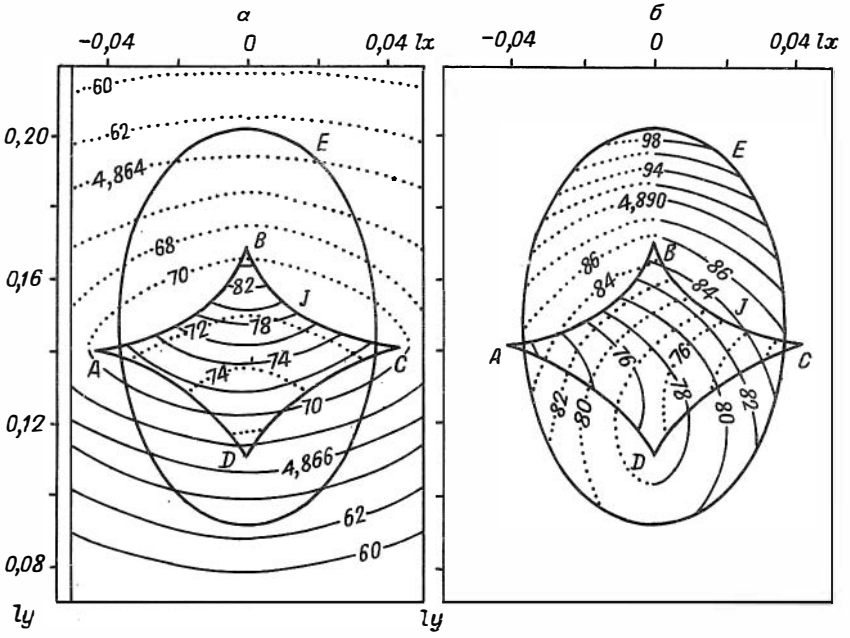


Рис. 9. Изолинии лучевой скорости $\upsilon(l_x, l_y)$ для областей однозначности I, 2 (а) и 3, 4 (б).

ется (рис. 9б), но только в этот раз от контура BAD линии J к правой части линии E и от контура BCD - к левой части линии E, т.е. с разворотом на 90^0. Подъем поверхностей навстречу друг другу приводит к их пересечению и снова к двузначности лучевой скорости υ. Пересечение поверхностей теперь можно видеть в сечении P_1 на рис. 8б (ветви 3, 4).

Две части поверхности S_2, изображенные на рис. 9а и 9б, отличаются друг от друга направлениями градиентов лучевой скорости υ и знаками кривизны поверхности. Это можно видеть, сравнивая рис. 10а и 10б. Наиболее существенно различие в знаках кривизны. Кривизна K связана с якобианом J формулой (36); знак кривизны равен знаку якобиана. Для поверхности на рис. 9а, 10а $K > 0$, как и для всей поверхности S_2, а для поверхности на рис. 9б, 10б $K < 0$. Это означает, что на ли-

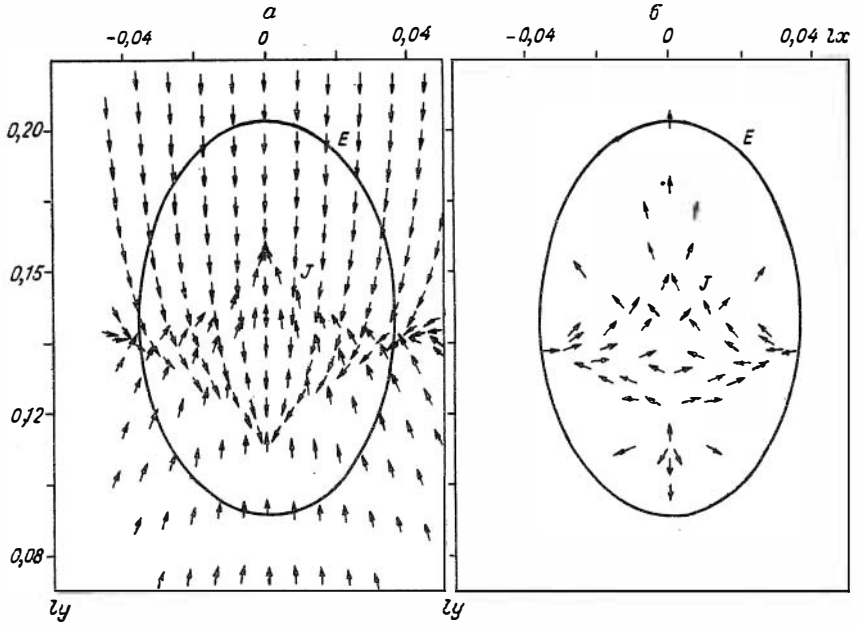


Рис. 10. Поле градиентов лучевой скорости $\operatorname{grad} \upsilon(l_x, l_y)$ для областей однозначности I, 2 (а) и 3, 4 (б).

нии J происходит смена эллиптического типа точек гиперболическим.

Разделение на области однозначности. Вся поверхность S_2 в изучаемой области является наложением поверхностей на рис. 9а и 9б. Схематически она изображена на рис. II. Видны области, где функция υ однозначна (между рамкой рисунка $KLL'K'$ и контуром эллипса E, исключая "треугольнички" O_1AO_2 и O_3CO_4), двузначна (между контурами E и J, J - со срезанными "треугольничками"), трехзначна ("треугольнички") и четырехзначна (внутри J без "треугольничков"). Разделение поверхности на области однозначности показано с помощью условных обозначений. Областей однозначности - четыре. Их границы состоят из линий E и J, а также четырех вспомогательных линий, нанесенных пунктиром.

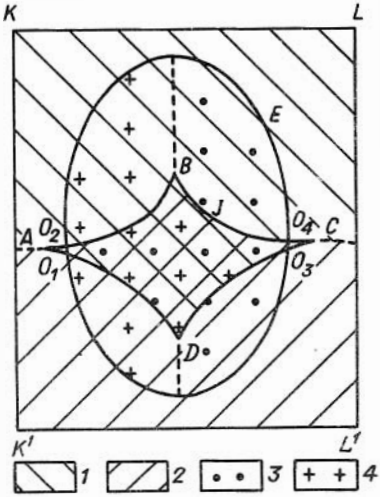


Рис.II. Разделение волновой поверхности S_2 на области однозначности I–4.

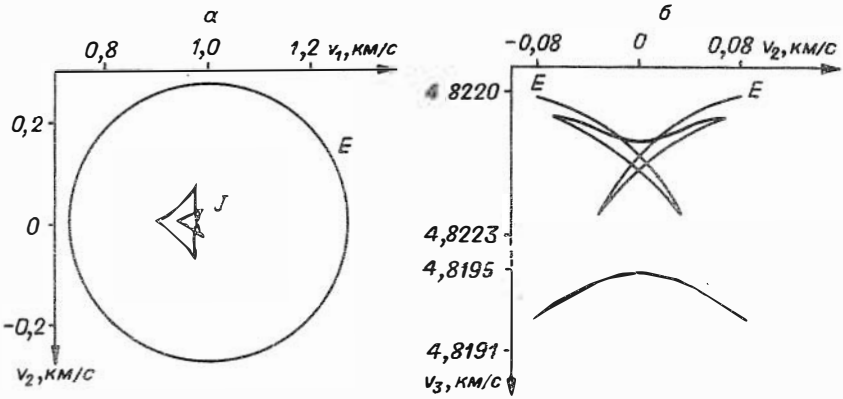


Рис. I2. Линии особых точек E и J на волновой поверхности S_2 в оливине с константами Верма (а) и сечение волновой поверхности S_2 плоскостью $\upsilon l x$ =0,9825 км/с (б).

<u>Зависимость от вариаций тензора c</u>. Покажем, что выделенные области однозначности и конфигурация линии J неустойчивы относительно малых изменений тензора упругих модулей. Для это-

го возьмем другие упругие постоянные оливина - из /3/. Волновые поверхности S_1 и S_2 для этого образца оливина изображены на рис. 5 а. Акустическая ось переместилась на плоскость $X_1 X_3$, и вид линии J на поверхности S_2 существенно изменился (рис. I2а). Усложнение линии J привело к тому, что теперь на волновой поверхности S_2 - волны выделяется шесть областей однозначности, и сама волновая поверхность существенно усложнилась, что демонстрирует рис. I2б.

Критерии разделения на области однозначности. Выполненный анализ волновой поверхности позволяет сформулировать критерии для разделении её на области однозначности. Как было установлено, в области однозначности сохраняются непрерывность функции $v(\bar{l})$, её градиента $\operatorname{grad} v(\bar{l})$ и кривизны поверхности $K(\bar{l})$. Наиболее простым и, как показали расчеты, достаточно эффективным является использование свойства непрерывности лучевой скорости $v(\bar{l})$.

Нами применялся следующий алгоритм. Пусть на сетке волновых нормалей (n_1, n_2)

$$n_1 = n_1^{(0)} + i\Delta n_1,\ n_2 = n_2^{(0)} + j\Delta n_2 \quad (i = 0,1,\dots,i_K;\ j = 0,1,\dots,j_K) \qquad (47)$$

вычислены модули лучевой скорости $v_{i,j}$ и лучи $\bar{l}_{i,j} = \bar{v}_{i,j}/v_{i,j}$. Требуется разделить многозначную функцию $v_{i,j} = v_{i,j}(\bar{l}_{i,j})$ на однозначные области.

Элементарный акт разделения - выяснение того, принадлежит ли точка поверхности $v_{i+1,j}(\bar{l}_{i+1,j})$ той же области однозначности, что и точка $v_{i,j}(\bar{l}_{i,j})$. Используя разложение функции $v(\bar{l})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{l}_{i,j}$, получим для точки $\bar{l}_{i+1,j}$:

$$v_{i+1,j} = v_{i,j}\left(1 - \frac{(\partial \bar{l}_{i,j}/\partial\theta_K)\,\bar{n}_{i,j}}{(\bar{l}_{i,j}\,\bar{n}_{i,j})}(\theta_{K,i+1,j} - \theta_{K,i,j})\right) \quad (K = 1,2) \qquad (48)$$

где единичный вектор $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ определяется формулами (47), θ_1, θ_2 - параметры луча $\bar{l}$ в сферической системе координат, см. формулы (9). Теперь, сравнивая значение $v_{i+1,j}$, вычисленное согласно (48), обозначим его $v^*_{i+1,j}$, с имеющимся значением $v_{i+1,j}$, примем, что если

$$|v_{i+1,j} - v^*_{i+1,j}| < \Delta v, \qquad (49)$$

где Δv - заданная малая величина, то точки $v_{i,j}$ и $v_{i+1,j}$ относятся к одной и той же области однозначности, в противном случае - к разным.

Для использования критерия (49) необходимо задать Δv при выбранных Δn_1, Δn_2. Выделение областей однозначности в оливине (рис. II) нами было выполнено при $\Delta n_1 = \Delta n_2 = 10^{-3}$, $\Delta v = 10^{-4}$ км/с. Поскольку величины Δn_1, Δn_2, Δv задаются на основе опыта, нужно контролировать правильность выделения областей однозначности. Для этого нами использовались:

а) сечения волновой поверхности плоскостями (рис.8), на которых выделенные области хорошо видны;

б) карта изолиний лучевой скорости $v(\bar{l})$ (рис. 9);

в) поле градиентов лучевой скорости (рис. I0);

г) знаки кривизн поверхности $v(\bar{l})$ (рис. I0), позволяющие выделить области $K(l) > 0$ и $K(\bar{l}) < 0$;

д) свойство симметрии упругих свойств оливина /22/ относительно плоскости X_2X_3: симметричны левые $(n_1 < 0)$ и правые $(n_1 > 0)$ части в областях I, 2 и симметричны друг другу области 3 $(n_1 < 0)$ и 4 $(n_1 > 0)$ (см. рис. 9-II).

Трансверсально-изотропная среда и среды любого типа симметрии в сечениях плоскостями симметрии

Трансверсально-изотропная среда. Волновые поверхности квазипоперечных волн одинаковы во всех сечениях, проходящих через ось симметрии (рис. I) и полностью определяются для каждого сечения волновыми нормалями, лежащими в этом сечении. Для волны SH индикатриса лучевой скорости, как известно, есть эллипс, а для волны SV лучевая скорость $v_{SV}(\theta)$ может быть из-за наличия петли трехзначной. Достаточным условием петли является неравенство (I8). Кроме того, между индикатрисами $v_{SV}(\theta)$ и $v_{SH}(\theta)$ в случае если $c_{66} > c_{44}$ располагается поясок ab, на котором поляризация изменяется от SV к SH по мере передвижения от конца пояска на кривой $v_{SV}(\theta)$ к концу на кривой $v_{SH}(\theta)$. Таким образом, максимальное количество вступлений волн SV и SH для одного направления луча $\bar{l}$ равно пяти.

Разделение волновой поверхности волны SV на области однозначности не представляет труда. Ими являются ветви MA, AB, BN и поясок ab (рис. Iб).

Положение точек возврата петли A, B определяется путем решения уравнения (43) или аналогичных уравнений, полученных из (37), (39) с использованием выражений (40), (42); возможно также непосредственное нахождение экстремальных точек $\theta(\beta)$ путем интерполяции, см. рис. 6. Ещё один способ - представление выражения $d\theta/d\beta$ в виде полинома (получается полином 8-ой степени относительно $tg^2\beta$) и выбор из его восьми корней двух нужных значений β_A, β_B.

Концы пояска ab находятся из выражения (46) для веера рефракции. Положив $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi$, найдем, что

$$\theta_a = arctg(v_1^{(2)}/v_3^{(2)}), \quad \theta_b = arctg(v_1^{(3)}/v_3^{(3)}),$$

где индекс 2 соответствует SV - волне, а индекс 3 - SH - волне; лучевые скорости $v_{SV}(\theta_a)$ и $v_{SH}(\theta_b)$ вычисляются для волновой нормали $\bar{n} = \bar{n}_{A0}$, определяемой выражением (I6).

Таким образом, трем ветвям MA, AB, BN лучевой скорости $v_{SV}(\theta)$ соответствуют три интервала значений параметра β: $(0, \beta_A)$, (β_A, β_B), $(\beta_B, 90°)$, а пояску ab значение $\beta = \beta_{A0}$. Углы $\theta = \theta(\beta)$ изменяются в интервалах $(0, \theta_A)$, (θ_A, θ_B), $(\theta_B, 90°)$ и (θ_a, θ_b), при этом в интервале (θ_A, θ_B) значения θ расположены в порядке убывания (рис. Iб, 2).

<u>Среды любого типа симметрии (исключая гексагональный) в плоскостях симметрии</u>. Сечения волновых поверхностей $v_{SV}(\theta)$, $v_{SH}(\theta)$, задаваемые нормалями в плоскостях симметрии, могут быть четырехзначными функциями. Для SH - волны имеем эллипс, для SV - волны - индикатрису с петлями.

Положение точек возврата петли может быть найдено из уравнения (39). Вторые производные фазовой скорости V вычисляются путем дифференцирования V как неявной функции, определяемой уравнением (5) $F(\bar{n}, V) = 0$. Уравнение (38) приводится к виду (39), если использовать известные представления $\theta(\beta)$, вытекающие из выражения (7) при $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = 0$:

$$\theta = \beta + \operatorname{arctg}\frac{dV(\beta)/d\beta}{V(\beta)} \tag{50}$$

либо

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\upsilon_x}{\upsilon_z} = \frac{V(\beta)\sin\beta + (dV(\beta)/d\beta)\cos\beta}{V(\beta)\cos\beta - (dV(\beta)/d\beta)\sin\beta}. \tag{51}$$

Вместо нахождения точек возврата петли β_A, β_B из уравнения (39) можно, как и в случае трансверсально-изотропной среды, вычислив кривые $\theta(\beta)$ согласно (50) или (51), уточнить положение экстремальных точек $\theta(\beta)$ путем интерполяции.

В общем случае петли располагаются не симметрично относительно $\theta = 90^0$ (рис. 13). Поэтому поиск значений параметра β в точках возврата петель ведется в интервале значений $\beta \in (0, 180^0)$. На рис. 13а показаны экстремальные точки A, B и C, D кривой $\theta(\beta)$, соответствующие точкам возврата A, B и C,

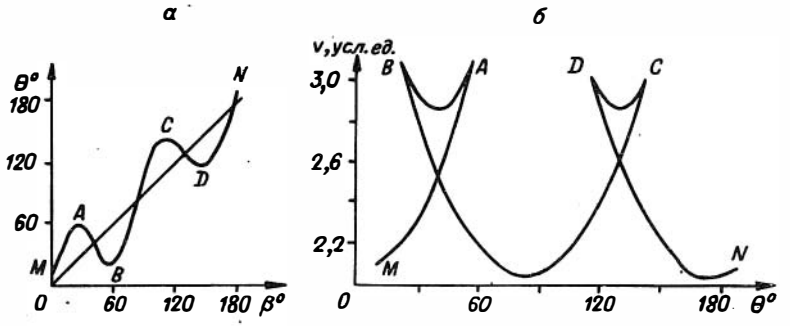


Рис. 13. Зависимости $\theta(\beta)$ (а) и $\upsilon_{SV}(\theta)$ (б) в эпидоте (модули упругости из /3/) в сечении X_1X_3; $\theta = 0$ – направление оси симметрии X_3; υ в условных единицах.

D петель на кривой $\upsilon_{SV}(\theta)$, см. рис. 13б. Выделяется пять областей однозначности: ветви MA, AB, BC, CD и DN кривой $\upsilon_{SV}(\theta)$. Им соответствуют интервалы значений β: $(0, \beta_A)$, (β_A, β_B), (β_B, β_C), (β_C, β_D), (β_D, β_N) и аналогично θ: (θ_M, θ_A), (θ_A, θ_B), (θ_B, θ_C), (θ_C, θ_D), (θ_D, θ_N). В интервалах (θ_A, θ_B) и (θ_C, θ_D) значения θ убывают от начальной точки интервала к конечной.

Как отмечалось в разделе I, в плоскости симметрии функция $\upsilon_{SV}(\theta)$ может быть более, чем трехзначной, если учитывать сечения волновой поверхности, для которых нормали $\overline{n}$ находятся вне плоскости симметрии (рис.3). Однако, в вычислительном отношении это рассмотренный выше случай трехмерной среды.

4. Способы расчета лучей в слоисто-однородных средах

Вопросы расчета лучей, связанные с многозначностью функций $\upsilon(\overline{l})$. Пусть $\upsilon_k(\overline{l}_k)$ - лучевые скорости вдоль отрезков луча $(k=1,\dots,m)$ и пусть для некоторых значений k функции $\upsilon_k(\overline{l}_k)$ неоднозначны. Тогда для расчета лучей надо решить следующие проблемы:

выделение однозначных областей для каждой многозначной функции $\upsilon_k(\overline{l}_k)$;

определение возможных кодов волн с учетом всех комбинаций однозначных ветвей (или областей) многозначных функций $\upsilon_k(\overline{l}_k)$;

выбор рационального для данной модели среды и системы наблюдений алгоритма расчета.

Основная проблема - разделение многозначных функций $\upsilon_k(\overline{l}_k)$ на области однозначности. Для трансверсально-изотропных сред проблемы как таковой не существует, ибо в этих случаях лучевая скорость - функция одной переменной $\upsilon(\overline{l}) = \upsilon(\theta)$, а многозначность имеет вид петли и пояска. Для сред других систем симметрии, даже в плоскостях симметрии, приходится решать трехмерную задачу расчета лучей и проводить исследование волновой поверхности, разделение на области однозначности в пространстве. Разделение на области однозначности выполняется на основе требования непрерывности свойств (функции $\upsilon(\overline{l})$) на выделяемых частях волновой поверхности. Если область многозначности $\upsilon(\overline{l})$ мала или малы изменения $\upsilon(\overline{l})$ в этой области, многозначностью можно пренебречь и аппроксимировать эту часть волновой поверхности однозначной гладкой функцией. Например, это можно было сделать в случае оливина, см. рис. 8а, 9, I2. Иногда от многозначности в заданной области можно избавиться небольшим изменением модулей упругости c_{ij} (такая рекомендация содержится в работе /6/).

После разделения волновых поверхностей $v_k(\bar{l}_k)$ на однозначные области для каждого участка пути с номером k становится известным предельное число q_k зависимостей $v_k(\bar{l}_k)$. Это дает возможность сосчитать общее число возможных типов волн и сформировать их коды. Очевидно, что максимально возможное число волн (лучей) Q равно произведению их числа на отдельных участках пути: $Q = \prod_{k=1}^{m} q_k$. Реальное же количество возможных волн (лучей) должно быть меньше Q, так как на участках многозначности $v_k(\bar{l}_k)$ не каждый луч пересекает все однозначные области многозначной функции $v_k(\bar{l}_k)$. Кроме того, законы отражения-преломления на границах ограничивают возможности сочетания различных однозначных ветвей $v_k(\bar{l}_k)$ и $v_{k+1}(\bar{l}_{k+1})$. Поэтому не все формально составленные коды волн могут быть реализованы, что выясняется путем предварительного анализа или на стадии процесса расчета лучей.

Ввиду сложности и трудоемкости алгоритмов расчета лучей в рассматриваемых средах, рекомендуется при построении модели ограничивать число слоев с неоднозначными волновыми поверхностями.

Лучи, как известно, можно рассчитывать разными способами. Основные способы - расчет для фиксированных направлений волновых нормалей в источнике /6, 8/ и расчет для фиксированных точек наблюдения /8, 9, 12/. В случае многозначных волновых поверхностей при любом способе расчета процедуры выделения однозначных областей лучевых скоростей и формирования кодов волн обязательны. В первом способе без них невозможно интерполирование найденных времен и параметров лучей для получения их в заданных точках принятой системы наблюдений. Во втором способе невозможен расчет каждого луча, так как он выполняется итерационным методом или с использованием интерполирования.

При выборе способа расчета следует руководствоваться теми же общими соображениями, что и в случае изотропных сред. Если вычисляется небольшое число лучей и модель среды достаточно сложна, так что трудно предсказать, хотя бы ориентировочно, точки выхода лучей на плоскость наблюдений, оптимально применение двухточечных алгоритмов. При большом количестве точек наблюдения целесообразно рассчитывать лучи параметрическим способом с последующим интерполированием результатов. При этом если

модель сложна, для опорных точек, в частности граничных точек плоскости наблюдений, целесообразно применять двухточечные алгоритмы и найденные направления нормалей в источнике использовать при вычислениях в параметрическом виде для всех остальных точек.

При использовании двухточечных алгоритмов /9/ в случае сред с неоднозначными волновыми поверхностями возникает следующая трудность. Как известно, принципу Ферма удовлетворяют траектории, для которых выполняется необходимое условие минимума времени пробега. Это означает, что решением являются траектории минимума времени, максимума или седловых точек. Расчеты показали, что для волн разных кодов, т.е. проходящих через разные области однозначности волновых поверхностей, искомые траектории могут соответствовать всем трем возможностям. При этом заранее, без предварительного исследования, неизвестно - каким именно.

Из двухточечных алгоритмов /9/ безразличен к типу траекторий только способ их нахождения путем решения системы уравнений, выражающей необходимые условия минимума времени пробега. Кратко мы называем этот способ методом итераций, т.к. система уравнений решается методом итераций. Это самый эффективный путь решения задачи. Однако случается, что итерационный процесс сходится к решению очень медленно или даже расходится. В таком случае в программах предусмотрен автоматический (т.е в процессе расчета луча) переход к другому методу - поиску $\min t(\bar{x})$ либо $\max t(\bar{x})$, где $\bar{x}$ - вектор координат точек пересечения лучом заданных границ в многослойной среде. Применяются методы нелинейного программирования, наиболее часто - метод сопряженных градиентов (алгоритм Флетчера-Ривса). Тогда и возникает указанная выше проблема - что искать. Если это заранее известно (был предварительно изучен рельеф целевой функции $t(\bar{x})$), то ищется $\min t(\bar{x})$ либо $\max t(\bar{x})$. Очень часто при этом находится и седловая точка, для которой, в зависимости от направления подхода, время минимально или максимально.

В случае неизвестных свойств функции $t(\bar{x})$ целесообразен поиск вектора x из условия $|grad\, t(\bar{x})| = 0$ или $(grad\, t(\bar{x}))^2 = 0$. Ввиду усложнения целевой функции, поиск $\min |grad\, t(\bar{x})|$ легче вести прямыми методами, без использования производных.

Следует отметить, что аналогичные проблемы при поиске луча двухточечными способами возникают в случае криволинейных границ, когда среда изотропна.

Вторая трудность применения двухточечных алгоритмов связана с необходимостью учета ограничений на вектор $\bar{x}$, удерживающих траекторию в заданной ограниченной области однозначности $v_k(\bar{l}_k)$. В этом случае следует выполнять поиск $\min(t(\bar{x})+$ $+G_i(\bar{x}))$, где $G_i(\bar{x})$ – функция штрафа, i – номер итерации, $G_i(\bar{x})\to 0$ при $i\to\infty$. Для применения методов нелинейного программирования с использованием производных функция $G_i(\bar{x})$ должна быть дифференцируемой.

Таким образом, расчет лучей двухточечными способами оказывается довольно сложным. Кроме того, подбор конкретного алгоритма для расчета в заданной модели среды для заданной системы наблюдений требует выполнения определенного объема предварительных исследований и расчетов. Поэтому предпочтительнее использовать параметрические способы расчета, дополняя их по возможности двухточечными.

Краткая характеристика алгоритмов. Расчет лучей отраженных или проходящих волн состоит из следующих процедур.

I. Предварительный расчет лучей в упрощенной модели среды (без учета возможной неоднозначности волновых поверхностей).

2. Исследование волновых поверхностей в заданной модели среды в окрестности направлений лучей, найденных при расчете для упрощенной модели (определение направлений акустических осей и при их наличии расчет линий E и J). Разделение волновых поверхностей на области однозначности.

3. Формирование кодов волн с учетом всех комбинаций ветвей (областей) однозначности. Например, в случае трансверсально-изотропной среды для отраженной волны PSV имеем коды $PS_{(1)}$, $PS_{(2)}$, $PS_{(3)}$ – по числу ветвей индикатрисы $v_{SV}(\theta)$ (рис. 6). Для волны SVSV число кодов уже равно девяти: коды $S_{(i)}S_{(j)}$ $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$, хотя не все эти волны окажутся возможными, т.е. удовлетворяющими закону Снеллиуса (или принципу Ферма). Чтобы не выходить за пределы вычислительных возможностей в случае многослойных сред надо строить их модели, задавая неоднозначные функции $v_k(\bar{l}_k)$ также на одном или двух отрезках луча. Будем обозначать их $\{v_{kp}(\bar{l}_k)\}$, где p – номер области однозначности.

4. Аппроксимация волновых поверхностей $v_{kp}(\bar{l}_k)$, т.е. для каждой области однозначности. В общем случае нами применялась аппроксимация кубическими сплайнами на хаотической сетке /5/. Сплайны S_{kp} используются либо в двухточечных алгоритмах для вычисления $v_{kp}(\bar{l}_k)$, см./9/, либо в параметрическом способе для определения принадлежности $v_k(\bar{l}_k)$ p - ой области однозначности (по формулам (48), (49)).

5. Расчет лучей волны заданного кода (для однозначных функций) параметрическим или двухточечным способом согласно алгоритмам /6, 8, 9, I2/. Результатам счета присваиваются номера, соответствующие кодам волн.

6. Интерполирование на хаотической сетке результатов счета (времен, параметров луча и др.) для нахождения их в заданных точках наблюдения. Эта процедура применяется в случае, если расчет лучей выполнялся параметрическим способом. Для каждой из однозначных областей рассчитанных полей параметров производится построение интерполирующих сплайнов на хаотической сетке, после чего выполняется интерполирование; используются программы /5/.

Примеры расчета. На рис. I4 изображены рассчитанные параметрическим способом годографы ОТВ отраженных обменных волн PS_1 и PS_2 для случая среды ромбического типа симметрии и горизонтальной отражающей границы. Среда имеет параметры оливина /22/, и расчет выполнен в области неоднозначности волновой поверхности волны S_2 . Волновые поверхности S_1 и S_2 изображены на рис. 5б, а их свойства описаны в разделе 3, где также произведено разделение поверхности S_2 на области однозначности (рис. II). На рис. I4а изображены четырехзначный годограф волны PS_2 и примыкающий к нему в точках E годограф волны PS_1. Годограф волны PS_2 повторяет сечение волновой поверхности S_2 - волны (см. рис. 8а). Годограф волны PS_1 не определен между точками E , т.к. не определена волновая поверхность S_1 в этой области, являющейся дыркой внутри эллипса E . На рис. I4б изображены годографы волн PS_1 и PS_2 (пересекающиеся ветви) в плоскости yz , совпадающей с плоскостью симметрии X_2X_3 оливина. Они рассчитаны для волновых нормалей, лежащих в плоскости симметрии. Кроме того, в области пересечения

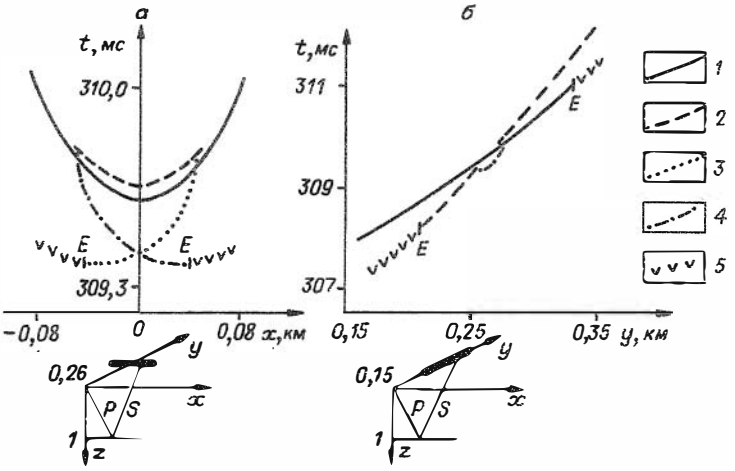


Рис. I4. Годографы ОТВ отраженных волн PS_1, PS_2 в среде с параметрами оливина (из /22/) на профилях вдоль оси x (а) и оси y (б). Номера ветвей I-4 годографа волны PS_2 соответствуют номерам областей однозначности волновой поверхности S_2, указанным на рис. II; 5 - годограф PS_1-волны.

годографов имеется короткая дугообразная ветка, соответствующая PS_2 - волне с нормалями P и S_2 волн вне плоскости симметрии. Преемственность ветвей годографов на рис. I4а и I4б видна из обозначений.

В случае трансверсально-изотропной среды годографы S - -волн в области неоднозначности волновых поверхностей выглядят так, как это изображено на рис. I5. На годографе SV - волны видна петля. От петли отходит ветвь, соответствующая пояску (см. разделы 2,3 и рис.I6), соединяющему волновые поверхности волн SV и SH. Эта ветвь примыкает к годографу волны SH. Поляризация на ней изменяется от SV до SH. Под годографами схематически изображены вееры лучей - падающих и отраженных, отвечающих направлению волновой нормали $\bar{n}$, совпадающей с акустической осью $\bar{n}_{A0}$.

Годографы волн SH и SV рассчитаны двухточечным спосо-

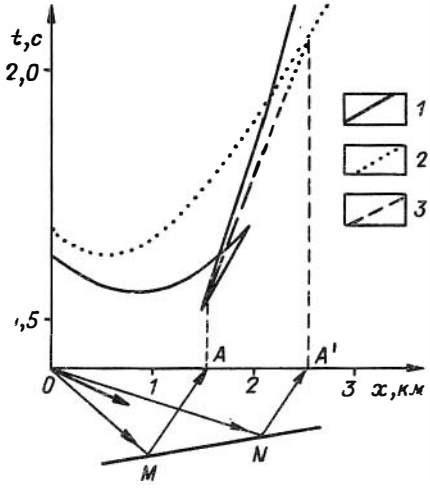


Рис. I5. Годографы ОТВ отраженных поперечных волн SV (I) и SH (2) в трансверсально-изотропной среде с эффективными упругими константами $V_{P\perp}=3$ км/с; $\kappa_P=I$; $\gamma_\perp=0,4$; $\kappa=0,7$. Граница наклонена на $I0^0$, её глубина $h=I$ км по нормали из источника; профиль ориентирован по линии падения границы. Ось анизотропии вертикальна. Годограф 3 отвечает пояску ab на рис. I, соединяющему индикатрисы $\upsilon_{SV}(\theta)$ и $\upsilon_{SH}(\theta)$; падающие лучи OM, ON и отраженные MA, NA' ограничивают вееры рефракции, образующиеся при падении и отражении.

бом - методом сопряженных градиентов (алгоритм Флетчера-Ривса). Для трансверсально-изотропных сред применение двухточечных алгоритмов несколько проще, чем в общем случае сред других систем симметрии.

Двухточечные алгоритмы в случае трансверсально-изотропных сред. Существует несколько возможностей расчета. Рассмотрим их на простейшем примере расчета годографа отраженной SV - волны в случае, когда среда над границей однородна, т.е. не слоиста, а граница плоская. Других ограничений нет: граница может быть наклонена на любой угол по любому азимуту, ось анизотропии также может иметь произвольную ориентацию в пространстве.

Разделим трехзначную функцию $\upsilon_{SV}(\theta)$ на области однозначности (см.разделы 2, 3 и рис. 6) и пронумеруем их I, 2, 3 в соответствии с ветвями MA, AB, BN. Возможны 9 кодов волн, так как лучевая скорость $\upsilon(\theta)$ на падающем и отраженном луче определена в одной из трех областей однозначности. Для кодов волн установим обозначения ij, где i - номер однозначной ветви

на падающем луче, j - на отраженном.

Наиболее простой способ расчета - прямой поиск $\min t(x,y)$, $\max t(x,y)$ либо $\min|\mathrm{grad}\, t(x,y)|$, (x,y,z) - предполагаемая точка отражения на границе $z = A + Bx + Cy$. Вычисляются времена пробега источник - точка (x,y,z) - приемник для значений (x,y), заданных на прямоугольной сетке между источником и приемником, и ищутся экстремальные точки $t(x,y)$ или точка $\min|\mathrm{grad}\, t(x,y)|$. Для облегчения расчетов скорости $v(\theta)$ вычисляются путем сплайновой интерполяции. Время $t(x,y)$ не вычисляется, если для падающего или отраженного луча угол $\theta(x,y)$ между лучом и осью анизотропии выходит за пределы заданной области определения (i либо j).

Прямой поиск оказался довольно эффективным. Для моделей общего вида (произвольная ориентация в пространстве отражающей плоскости и оси анизотропии) шаг сетки по x составил 0,01, а по y 0,005 км, что обеспечивало точность определения t порядка 10^{-4} - 10^{-5} с. Размеры сетки зависели от степени асимметрии среды.

Было установлено, что из девяти кодов волн реализуются только 5: 11, 22, 33, 12, 23. Коды 11, 22, 33 дают ветви годографа MA, AB, BN соответственно. Коды 12 и 23 реализуются в области угловых точек петли: 12 вблизи точки A, 23 - вблизи точки B. Интересно также, что ветвям MA и BN годографа отвечают траектории $\min t(x,y)$, а ветви AB - седловые точки $t(x,y)$, при этом в двумерном случае на ветви AB реализуется $\max t(x,y)$. Характер седла $t(x,y)$ зависит от модели: это может быть $\{\min_x t(x,y), \max_y t(x,y)\}$ или наоборот.

Расчет лучей итерационными методами более труден. (Имеются в виду указанные выше методы итераций и сопряженных градиентов). Вдали от границ областей однозначности (θ_A, θ_B) трудностей как правило не возникает. Для счета вблизи границ функции $v(\theta)$ должны быть продолжены за пределы границ. Мы опробовали несколько гладких способов продолжения и увидели, что во многих случаях итерационные процессы сходились, часто независимо от способа продолжения, но, к сожалению, в ряде случаев решение не удавалось найти.

При счете методом сопряженных градиентов возможно использование функций штрафа, препятствующих выходу за границы областей однозначности. Перебирая различные дифференцируемые функции, мы остановили свой выбор на функции

$$G_i(x,y) = b\sum_{n=1}^{N} exp(r_i S_n(x,y)),$$

где $S_n(x,y)$ - ограничение, $b=1$ при поиске $min(t(x,y)+G_i(x,y))$ и $b=-1$ при поиске $max(t(x,y)+G_i(x,y))$, i - номер итерации, $r_i \to \infty$ при $i \to \infty$; $r_i = r_0 \cdot 2^i$.

Ограничение $S_n(x,y)$ состоит в том, что для обоих лучей (падающего и отраженного) углы $\theta_k = arccos|\bar{a}\ \bar{l}_k|$ ($\bar{a}$ - единичный вектор оси анизотропии, $\bar{l}_k$ - единичный вектор луча; $k=1,2$) не должны выходить за пределы заданных областей однозначности: $\theta < \theta_A$, $\theta_B < \theta < \theta_A$, $\theta > \theta_B$, см. рис. 6а. Вид ограничений определяется кодом волны. В случае кодов jj получим следующие неравенства:

$j=1$: $S_1(x,y) = max(\theta_1,\theta_2) - \theta_A < 0$;

$j=2$: $S_1(x,y) = max(\theta_1,\theta_2) - \theta_A < 0$, $S_2(x,y) = \theta_B - min(\theta_1,\theta_2) < 0$;

$j=3$: $S_1(x,y) = \theta_B - min(\theta_1,\theta_2) < 0$.

Однако, применение функции штрафа не всегда приводит к сходимости итерационного процесса. Кроме того, применение метода сопряженных градиентов по сравнению с методом итераций более трудоемко, во-первых, потому что сам метод таков, а, во-вторых, потому, что расчет в области AB приходится выполнять дважды: для поиска $min\, t(x,y)$ и $max\, t(x,y)$.

Для вычисления функции $v(\bar{l})$ и её производных по координатам точек отражения можно применять интерполирование, рассчитав $v(\theta)$ по точным формулам только в узлах. Как и в случае прямого поиска, мы использовали для этого кубические сплайны. Однако, если нужна бо́льшая точность, целесообразно находить $tg\,\beta$ из уравнения $tg\,\beta = f(\beta,\theta)$, см. (41), решая его в пределах заданной области однозначности. Вместо того чтобы решать это трансцендентное уравнение, можно находить все значения $tg\,\beta$ сразу (по одному для областей I, 3 и три значения для области 2), решая уравнение шестой степени относительно $tg\,\beta$. Это уравнение получается из указанного трансцендентного

уравнения путем алгебраических преобразований и имеет вид:

$$\kappa_{60}\alpha^6 + \kappa_{51}\alpha^5\varphi + (\kappa_{42}\varphi^2 + \kappa_{40})\alpha^4 + \kappa_{31}\alpha^3\varphi + \\ + (\kappa_{22}\varphi^2 + \kappa_{20})\alpha^2 + \kappa_{11}\alpha\varphi + \kappa_{02}\varphi^2 = 0,$$

где

$$\varphi = l_1/l_3 = tg\theta, \quad \alpha = n_1/n_3 = tg\beta,$$

$$\kappa_{60} = -c_{11}c_{44}(c_{11}-c_{44})^2, \quad \kappa_{51} = d(c_{11}-c_{44})^2,$$

$$\kappa_{42} = c_{11}c_{44}(c_{33}+c_{44})^2 - d((c_{13}+c_{44})^2 + c_{44}(c_{11}+c_{33})),$$

$$\kappa_{40} = 2c_{11}c_{44}(d-(c_{13}+c_{44})^2 - c_{44}(c_{11}+c_{33})),$$

$$\kappa_{31} = 2(c_{33}c_{44}(c_{11}-c_{44})^2 + c_{11}c_{44}(c_{33}+c_{44})^2 - d^2),$$

$$\kappa_{20} = \kappa_{42} + c_{44}(c_{33}(c_{11}+c_{44})^2 - c_{11}(c_{33}+c_{44})^2),$$

$$\kappa_{22} = \kappa_{40}c_{33}/c_{11}, \quad \kappa_{11} = d(c_{33}-c_{44})^2,$$

$$\kappa_{02} = -c_{33}c_{44}(c_{33}-c_{44})^2, \quad d = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{13}c_{44}.$$

Одним из действительных корней является значение $tg\beta$ для P - волны. Для SV - волны действительными оказываются один или три корня, остальные четыре или два - комплексные. Расположив значения трех корней в порядке возрастания, получим значения $\beta(\theta)$ для трех ветвей, см. рис. 6.

Параметрический способ расчета. В случае трансверсально-изотропных сред расчет лучей параметрическим способом выполняется по-разному для двумерных и трехмерных моделей. Для двумерных не надо формировать коды волн и делить $v_{SV}(\theta)$ на области однозначности. В этом случае неоднозначность (петля) непосредственно переходит с индикатрисы $v_{SV}(\theta)$ на годограф, и годограф делится на однозначные ветви для проведения интерполирования. В случае трехмерных сред и площадных систем наблюдений неоднозначность волновой поверхности может отображаться сложным образом во временном поле и полях других параметров. Поэтому расчет лучей должен выполняться с использованием всего набора процедур, как в общем случае анизотропных сред. Однако сами процедуры становятся более простыми.

Заключение

Данная работа завершает выполненное авторами в предыдущих работах (/8, 9, I2/) построение алгоритмов расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах. Разработаны способы расчета для сред с многозначными волновыми поверхностями. Многозначность волновых поверхностей свойственна анизотропным средам всех систем симметрии и должна учитываться при расчетах лучей.

В работе исследованы свойства волновых поверхностей квазипоперечных волн в области их многозначности. Эта часть работы представляет самостоятельный интерес. Исследования подобного рода нам не известны.

Построение лучей для сложных моделей сред - это в значительной степени формальная процедура, а не решение задачи о распространении волн. К таким средам неприменим чисто кинематический подход. Многозначность волновых поверхностей приводит к большому числу волн, имеющих близкие времена пробега, разные интенсивности (комплексные интенсивности) и разную пространственную поляризацию. Необходим расчет трехкомпонентных сейсмограмм суммарного поля смещений. В этом плане расчет лучей следует рассматривать как подготовительный этап для расчета полей смещений лучевым методом. Исходя из аналогии со сложнопостроенными изотропными средами, можно ожидать, что результаты расчета лучевым методом будут неверны для угловых точек волновых поверхностей и для областей резкого изменения их свойств. Тем не менее основные контуры волнового поля, по-видимому, могут быть получены путем применения лучевого метода, основанного на построении лучей.

Литература

1. Альшиц В.И., Сарычев А.В., Щувалов А.Л. Классификация вырождений и анализ их устойчивости в теории упругих волн в кристаллах// ЖЭТФ. 1985. Т. 89, вып. 3 (9). С. 922-938.
2. Альшиц В.И., Лоте Е. Упругие волны в триклинных кристаллах// Кристаллография. 1979. Т. 24. С. 672-693.
3. Беликов Б.П., Александров К.С., Рыжова Т.В. Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород. М.: Наука, 1970. С. 49-58.
4. Будаев В.С. Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред// Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 33-40.
5. Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В. и др. Библиотека программ LIDA-2 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1983. С. 78-103.
6. Каштан Б.М., Ковтун А.А., Петрашень Г.И. Алгоритмы и методики вычисления полей объемных волн в произвольных анизотропных упругих средах// Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. С. 108-248.
7. Ляховицкий Ф.М. Проблемы сейсмической анизотропии тонкослоистых сред// Вестник МГУ. Сер. Геология. 1983. № 5. С. 68-75.
8. Оболенцева И.Р. Численный способ решения прямых пространственных задач геометрической сейсмики для сложнопостроенных анизотропных сред// Экспериментальные и теоретические исследования отраженных волн. Новосибирск: Наука, 1975. С. 134-142.
9. Оболенцева И.Р., Гречка В.Ю. Двухточечные алгоритмы расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах// Геология и геофизика. 1988. № 10. С. 104-112.
10. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
11. Программно-аппаратурный комплекс "ЭХО-1" для ультразвукового сейсмического моделирования// Бобров Б.А., Гик Л.Д., Держи Н.М. и др. Новосибирск: Изд. ИГиГ СО АН СССР, 1984. 123 с.
12. Сейсморазведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1981. С. 141-142.
13. Сибиряков Б.П., Максимов Л.А., Татарников М.А. Анизотропия

и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах. Новосибирск: Наука, 1980. 72 с.
14. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. С. 351-372.
15. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
16. Хаткевич А.Г. Акустические оси в кристаллах// Кристаллография. 1962. Т. 7. С. 742-747.
17. Хаткевич А.Г. К явлению внутренней конической рефракции упругих волн// Кристаллография. 1962. Т. 7. С. 916-921.
18. Crampin S. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic media// Wave motion. 1981. V.3. P.343-391.
19. Crampin S., Kirkwood S.C. Velocity variations in systems of anisotropic symmetry// J. Geophys. 1981. V.49. P.35-42.
20. Crampin S., Yedlin M. Shear-wave singularities of wave propagation in anisotropic media// J. Geophys. 1981. V.49. P.43-46.
21. Jolly R.N. Investigation of shear waves// Geophysics. 1956. V.21, N4. P.905-938.
22. Kumazawa M., Anderson O.L. Elastic moduli, pressure derivatives and temperature derivatives of single-crystal olivine and single-crystal forsterite// J. Geophys. Res. 1969. V.74, N25. P.5961-5972.
23. Musgrave M.J.P., Payton R.G. Criteria for elastic waves in anisotropic media - a consolidation// J. of Elasticity. 1984. V.14. P.269-285.

Утверждено к печати
Институтом геологии и геофизики СО АН СССР

Технический редактор Н.Н.Александрова

Подписано к печати I7.05.89. МН I0207.
Бумага 60x84/I6. Печ.л.3,0. Уч.-изд.л.2,7.
Тираж 200. Заказ 2I4. Бесплатно.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск,90. Ротапринт.