

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)»

Кафедра «Геодезия»

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания к лабораторным работам

Составитель А.В. Виноградов

Омск • 2016

УДК 519 6004: 528

A22

Согласно 436-ФЗ от 29.12.2010 «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию» данная продукция маркировке не подлежит.

Рецензент

канд. техн. наук, доц. А.Г. Малофеев (СибАДИ)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве методических указаний.

Алгоритмизация обработки геодезических измерений [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторным работам / сост. А.В. Виноградов. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа _____, свободный.

Излагается методика выполнения лабораторных работ обучающимися по дисциплине.

Имеет интерактивное оглавление.

Адресовано для обучающихся направления «Геодезия и дистанционное зондирование», профиль «Геодезия».

Текстовое (символьное) издание (590 КБ)

Системные требования: Intel, 3,4 GHz; 150 МБ; Windows XP/Vista/7; DVD-ROM;

1 ГБ свободного места на жестком диске; программа для чтения pdf-файлов Adobe Acrobat Reader; Google Chrome

Издание первое. Дата подписания к использованию 18.10.2016

Издательско-полиграфический центр СибАДИ. 644080, г. Омск, пр. Мира, 5

РИО ИПЦ СибАДИ. 644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая, 1

ФГБОУ ВО «СибАДИ», 2016

ВВЕДЕНИЕ

Каждый студент получает индивидуальное задание, по номеру в списке преподавателя из таблиц выбирают исходные данные.

Уравнительные вычисления и математическая обработка геодезических сетей на лабораторных занятиях предусматривает глубокое теоретическое изучение (по лекциям и дополнительной геодезической литературе [1], [4], [6], ... и др.) следующих вопросов:

1. Основные способы уравнивания.
2. Выбор способа уравнивания.
3. Последовательность вычислений.
4. Контроль вычислений.
5. Оценка точности уравненных элементов сети.

В конце методических указаний представлен список литературы, рекомендуемой к изучению.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ

1.1. Исходные данные

Цель работы: освоить метод уравнительных вычислений триангуляции параметрическим способом.

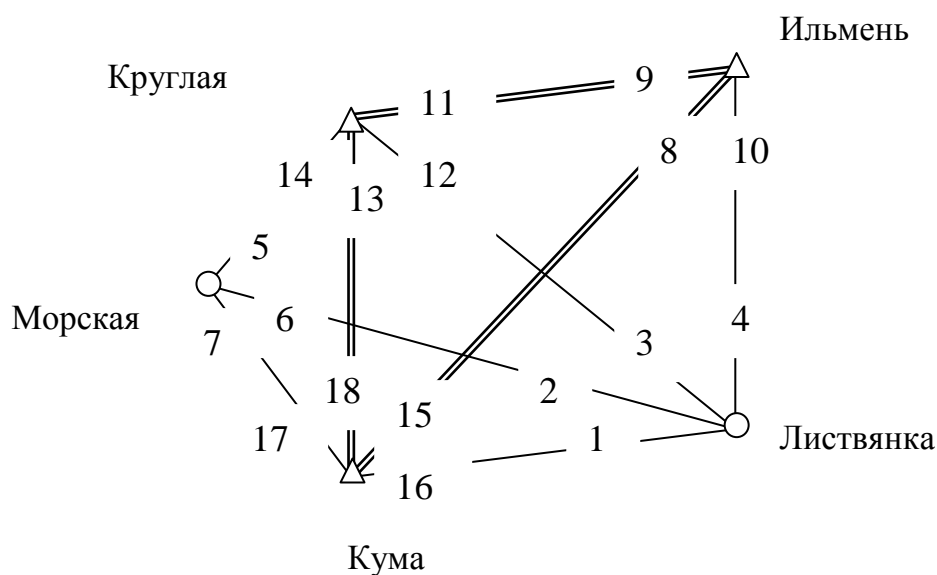


Рис. 1.1. Схема сети триангуляции

Координаты исходных пунктов и дирекционные углы исходных направлений представлены в табл. 1; схема сети триангуляции представлена на рис.1.1.

Таблица 1

Список исходных данных

№ п/п	Пункты	Координаты		Дирекционные углы		Стороны
		X	Y	α	На пункт	
1	Ильмень	104078,32	10618,72	210°54'56",5	Кума	43734,74
2	Круглая	91190,34	- 4530,06	49°36'36",6	Ильмень	19889,32
3	Кума	66557,22	-11851,15	16°33'07",9	Круглая	25698,03

1.2. Порядок выполнения работы

1. На чертеже сети необходимо пронумеровать измеренные направления по ходу часовой стрелки на пункте. Начинать нумеровать нужно с того направления, которое было принято за начальное при наблюдениях.

2. Каждый студент выполняет строго свой номер задания. В табл. 1 содержатся исходные данные общие для всех. В табл. 2 необходимо вписать измеренные направления (вместо пропущенных) из табл. 3 по номеру студента в списке.

3. По измеренным направлениям вычислить углы треугольников, определить невязки треугольников, распределить каждую невязку на три угла поровну в треугольнике.

4. Произвести предварительное решение треугольников для определения координат вновь определённых пунктов сети.

5. Приблизённые координаты пунктов Листвянка и Морская вычислить с погрешностью 0,01 м с контролем, то есть с двух пунктов.

6. Вычислить дирекционные углы всех направлений на вновь определяемые пункты Листвянка, Морская, в соответствии с приближёнными координатами определяемых пунктов и точными координатами исходных пунктов.

Дирекционные углы и линии вычисляются по формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = (Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1);$$

$$d_{1,2} = (Y_2 - Y_1) / \sin \alpha_{1,2} = (X_2 - X_1) / \cos \alpha_{1,2}. \quad (1)$$

Контроль вычисления дирекционного угла $\alpha_{1,2}$ выполнить по формуле

$$\operatorname{tg}(45 + \alpha_{1,2}) = (\Delta X + \Delta Y)/(\Delta X - \Delta Y), \quad (2)$$

где $\Delta X = X_2 - X_1$, а $\Delta Y = Y_2 - Y_1$.

Список измеренных направлений приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость проекции Гаусса-Крюгера приведены в табл. 2, 3.

7. Составить для всех 18-ти измеренных направлений уравнения погрешностей:

для пункта Листвянка

$$v_1 = -\Delta Z_{\text{л}} + a_1 \xi_{\text{л}} + b_1 \eta_{\text{л}} + l_1;$$

$$v_2 = -\Delta Z_{\text{л}} + a_2 \xi_{\text{л}} + b_2 \eta_{\text{л}} + (-a_2 \xi_{\text{м}}) + (-b_2 \eta_{\text{м}}) + l_2;$$

$$v_3 = -\Delta Z_{\text{л}} + a_3 \xi_{\text{л}} + b_3 \eta_{\text{л}} + l_3;$$

$$v_4 = -\Delta Z_{\text{л}} + a_4 \xi_{\text{л}} + b_4 \eta_{\text{л}} + l_4;$$

для пункта Ильмень

$$v_8 = -\Delta Z_{\text{л}} + l_8;$$

$$v_9 = -\Delta Z_{\text{л}} + l_9;$$

$$v_{10} = -\Delta Z_{\text{л}} + (-a_{10} \xi_{\text{л}}) + (-b_{10} \eta_{\text{л}}) + l_{10}.$$

Аналогично составить уравнения погрешностей для остальных направлений.

8. Далее заполнить схему *A* (табл. 4), в которую сначала вписывают измеренные, приведённые к центрам знаков и редуцированных на плоскость проекции Гаусса-Крюгера направления *M'* и предварительные дирекционные углы α' .

Таблица 2

**Список измеренных направлений приведенных к центрам
знаков и редуцированных на плоскость проекции Гаусса-Крюгера**

Название пункта	Названия направлений	Направления	Название пункта	Названия направлений	Направления	Название пункта	Названия направлений	Направления
Листвянка	Кума	0 0000,0	Морская	Круглая	0 0000,0	Ильмень	Кума	0 0000,0
	Морская	49°38'37,2''		Листвянка	54° 07'35,7''		Круглая	18° 41'39,7''
	Круглая	85°49'29,2''		Кума	127°28'46,5''		Листвянка	340 44'31,1''
	Ильмень	138°23'01,1''						
Название пункта	Названия направлений	Направления	Название пункта	Названия направлений	Направления	Название пункта	Названия направлений	Направления
Круглая	Ильмень	0 0000,0	Кума	Ильмень	0 0000,0	Круглая	Ильмень	0 0000,0
	Листвянка	89° 29'18,8''		Листвянка	22° 21'27,4''		Листвянка	89° 29'18,8''
	Кума	146°56'29,0''		Морская	325°21'13,7''		Кума	146° 56'29,0''
	Морская	179°10'50,9''		Круглая	345°38'05,9''		Морская	179°09'50,9''

Таблица 3

Измеренные направления, приведенные к центрам знаков и редуцированные на плоскость Гаусса-Крюгера в различных индивидуальных заданиях

Название пунктов	Название направлений	Плоские направления в индивидуальных заданиях							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Морская	Листвянка	54°28'35",7	54°27'39",7	54°26'35",7	54°25'39",7	54°24'35",7	54°23'35",7	54°22'35",7	54°21'35",7
	Кума	128°05'51",9	128°04'06",0	128°02'20",2	128°00'34",3	127°58'48",5	127°57'02",6	127°55'16",6	127°53'30",8
Круглая	Морская	178°49'50",9	178°50'50",9	178°51'50",9	178°52'50",9	178°53'50",9	178°54'50",9	178°55'50",9	178°56'50",9
Кума	Морская	325°37'19",1	325°36'33",2	325°35'47",4	325°35'01",5	325°34'15",7	325°33'29",8	325°32'43",8	325°31'58",0
		IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
Морская	Листвянка	54°20'35",7	54°19'35",7	54°18'35",7	54°17'35",7	54°16'35",7	54°15'35",7	54°14'35",7	54°13'35",7
	Кума	127°51'44",7	127°49'58",9	127°48'13",0	127°46'27",0	127°44'41",1	127°42'55",1	127°41'09",1	127°39'23",1
Круглая	Морская	178°57'50",9	178°58'50",9	178°59'50",9	179°00'50",9	179°01'50",9	179°02'50",9	179°03'50",9	179°09'50",9
Кума	Морская	325°31'11",9	325°30'26",1	325°29'40",2	325°28'54",2	325°28'08",3	325°27'22",3	325°26'36",3	325°25'50",3
		XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV
Морская	Листвянка	54°12'35",7	54°11'35",7	54°10'35",7	54°09'35",7	54°08'35",7	54°07'35",7	54°06'35",7	54°05'35",7
	Кума	127°37'36",9	127°35'51",1	127°34'04",8	127°32'18",8	127°30'32",7	127°28'46",5	127°27'00",4	127°25'14",2
Круглая	Морская	179°05'50",9	179°06'50",9	179°07'50",9	179°08'50",9	179°09'50",9	179°10'50",9	179°11'50",9	179°12'50",9
Кума	Морская	325°25'04",1	325°24'18",2	325°23'32",0	325°22'46",0	325°21'59",9	325°21'13",7	325°20'27",6	325°19'41",4

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		25	26	27	28	29	30	31	32
Морская	Листвянка	54°04'35",7	54°03'35",7	54°02'35",7	54°01'35",7	54°00'35",7	53°59'35",7	53°58'35",7	53°57'35",7
	Кума	127°23'28",1	127°21'42",0	127°19'55",8	127°18'09",7	127°16'23",5	127°14'37",4	127°12'51",1	127°11'04",9
Круглая	Морская	179°13'50",9	179°14'50",9	179°15'50",9	179°16'50",9	179°17'50",9	179°18'50",9	179°19'50",9	179°20'50",9
Кума	Морская	325°18'55",3	325°18'09",2	325°17'23",0	325°16'36",9	325°15'50",7	325°15'04",6	325°14'18",3	325°13'32",1
		33	34	35	36	37	38	39	40
Морская	Листвянка	53°56'35",7	53°55'35",7	53°54'35",7	53°53'35",7	53°52'35",7	53°51'35",7	53°50'35",7	53°49'35",7
	Кума	127°09'18",6	127°07'32",3	127°05'46",1	127°03'59",8	127°02'13",5	127°00'27",2	126°58'41",0	126°56'54",7
Круглая	Морская	179°21'50",9	179°22'50",9	179°23'50",9	179°24'50",9	179°25'50",9	179°26'50",9	179°27'50",9	179°28'50",9
Кума	Морская	325°12'45",8	325°11'59",5	325°11'13",2	325°10'27",0	325°09'40",7	325°08'54",4	325°08'08",2	325°07'21",9
		41	42	43	44	45	46	47	48
Морская	Листвянка	53°48'35",7	53°47'35",7	53°46'35",7	53°45'35",7	53°44'35",7	53°43'35",7	53°42'35",7	53°41'35",7
	Кума	126°55'08",3	126°53'21",9	126°51'35",5	126°49'49",1	126°48'02",7	126°46'16",3	126°44'29",9	126°42'43",5
Круглая	Морская	179°29'50",9	179°30'50",9	179°31'50",9	179°32'50",9	179°33'50",9	179°34'50",9	179°35'50",9	179°36'50",9
Кума	Морская	325°06'35",5	325°05'49",1	325°05'02",7	325°04'16",3	325°03'29",9	325°02'43",5	325°01'57",1	325°01'10",7
		49	50	51	52	53			
Морская	Листвянка	53°40'35",7	53°39'35",7	53°38'35",7	53°37'35",7	53°36'35",7			
	Кума	126°40'57",1	126°39'10",7	126°37'24",2	126°35'37",6	126°33'51",1			
Круглая	Морская	179°37'50",9	179°38'50",9	179°39'50",9	179°40'50",9	179°41'50",9			
Кума	Морская	325°00'29",3	324°59'37",9	324°58'51",4	324°58'04",8	324°57'18",3			

После этого вычисляют предварительные ориентирующие углы Z' по формулам

$$\begin{aligned} Z'_1 &= \alpha'_1 - M'_1; \\ Z'_2 &= \alpha'_2 - M'_2; \\ &\dots\dots\dots \\ Z'_n &= \alpha'_n - M'_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее на каждом пункте вычисляют средний ориентирующий угол $Z_0 = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n)/n$ и записывают его в схему A , в строку специально оставленную между соседними пунктами.

Имея предварительные ориентирующие углы на каждом пункте, для каждого измеренного направления и средний ориентирующий угол Z_0 для данного пункта, вычисляют сводные члены уравнений погрешностей как

$$\begin{aligned} l_1 &= Z'_1 - Z_0; \\ l_2 &= Z'_2 - Z_0; \\ &\dots\dots\dots \\ l_n &= Z'_n - Z_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Свободные члены l записываются для каждого измеренного направления для данного пункта в столбце после ориентирующих углов. Контролем вычисления свободных членов уравнений погрешностей служит $[l] = 0$ на каждом пункте. Допустимое расхождение $[l] \neq 0$ за счёт округления цифр не более $0,2''$ (при вычислениях до $0,1''$).

Коэффициенты a и b вычисляют по формулам

$$a = \text{Sin}\alpha \cdot 20,63/S(\text{км}); \quad b = -\text{Cos}\alpha \cdot 20,63/S(\text{км}). \quad (5)$$

Следует иметь в виду, что в ряде геодезических учебников у коэффициентов a и b принимаются знаки противоположных приведённым, то есть не «+» «-», а «-» «+».

Коэффициенты a и b уравнений погрешностей надо вычислять особенно тщательно, так как ошибки в их вычислениях обнаруживаются только после получения поправок координат, а ошибки вычисления свободных членов l могут быть совсем не обнаружены до окончания уравнивания.

Для проверки правильности вычисления коэффициентов a и b следует выполнить контрольные вычисления по формулам:

$$a^2 + b^2 = (20,63/S_{\text{км}})^2; \quad a/b = -\Delta y/\Delta x = -\text{tg} \alpha. \quad (6)$$

В формулах (5) вычисления коэффициентов a и b и в контрольных формулах (6) сторона S , между соответствующими пунктами, берётся в километрах.

Коэффициенты a и b вычислять до 0,01, т. е. до двух значащих цифр после запятой. На этом временно заканчивается заполнение схемы А, остальные величины заполняются после уравнивания сети.

9. Заполняется таблица коэффициентов уравнений погрешностей (схема Б) (табл. 5), в первый и второй столбец вписывают названия всех пунктов сети и номера направлений. В третьем коэффициент при Δz , в четвёртом, пятом, шестом и седьмом столбцах схемы записывают коэффициенты a и b уравнений погрешностей и в восьмом свободные члены l для всех пунктов сети и для каждой горизонтальной строки на данном пункте вычисляется сумма S .

После заполнения строк по первому пункту пропускают 2–3 строки и затем выписывают коэффициенты уравнения погрешностей следующего пункта и т.д.

Пропущенная суммарная ([]) строка по каждому пункту (см. табл. 5) делится на две строки по каждой поправке в координаты ξ и η . Во второй строке вычисляются суммы $[a] = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$;

$[b] = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ и т. д., $[c]$, $[d]$ (–2,54; –1,49; 1,07; 0,24) по каждому пункту сети. В первой строке эти суммы умножаются на $-1/n$, где n – число направлений на пункте ($-[a]/n$; $-[b]/n$ и т.д.), (0,635; 0,372; –0,268 и –0,06).

Суммарные уравнения составляются для исключения из уравнения поправок ориентирующих углов ΔZ , то есть для нахождения коэффициентов редуцированных нормальных уравнений.

10. Коэффициенты редуцированных нормальных уравнений и их свободные члены, для заполнения схемы В в табл. 6,7, находят с помощью табл. 5, коэффициентов уравнений погрешностей (схема Б).

Первый квадратный коэффициент $[a_i a_i] - [a][a]/n$.

Контрольная сумма получается суммированием всех коэффициентов, стоящих в горизонтальных строках столбцов 1, 2, 3, 4, 5, например для первой строки:

$$[Ps] \text{ контр} = [aa] - \sum \frac{[a][a]}{n} + [ab] - \sum \frac{[a][b]}{n} + [ac] - \sum \frac{[a][c]}{n} + [al] \text{ и т. д.}$$

В схеме В при $\xi_{л}$ это 2,709, его получают таким образом:

$$\left\{ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) - \frac{[a]^2}{4} \right\} + \left\{ (a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) - \frac{[a]^2}{3} \right\} +$$

$$+ \left\{ (a_8^2 + a_9^2 + a_{10}^2) - \frac{[a]^2}{3} \right\} +$$

$$+ \left\{ (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2) - \frac{[a]^2}{4} \right\} + \left\{ (a_{15}^2 + a_{16}^2 + a_{17}^2 + a_{18}^2) - \frac{[a]^2}{4} \right\}$$

или в цифрах:

$$\{ (-0,76^2 + (-1,07)^2 + (-0,88)^2 + 0,17^2) - (2,54)(0,635) + 1,07^2 - 1,07 \cdot 0,357 +$$

$$+ 0,17^2 \cdot 0,057 + (-0,88)^2 - 0,88 \cdot 0,22 + (-0,76)^2 - 0,76 \cdot 0,19 \} = 2,709.$$

Второй коэффициент первого нормального уравнения, то есть коэффициент при неизвестной $\eta_{л}$ $[ab] - \frac{[a][b]}{n}$ получается путем алгебраического суммирования коэффициентов первого столбца на коэффициенты второго столбца тех же строк плюс, минус, произведения полных сумм при каждом пункте I столбца на суммы деленных на n – количество измеренных направлений на пункте.

$$(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_4) - \frac{[a] \cdot [b]}{4} + (a_5 \cdot b_5 + a_6 \cdot b_6 + a_7 \cdot b_7) -$$

$$- \frac{[a] \cdot [b]}{3} + (a_8 \cdot b_8 + a_9 \cdot b_9 + a_{10} \cdot b_{10}) - \frac{[a] \cdot [b]}{3} +$$

$$+ (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{12} + a_{13} \cdot b_{13} + a_{14} \cdot b_{14}) - \frac{[a] \cdot [b]}{4} +$$

$$+ (a_{15} \cdot b_{15} + a_{16} \cdot b_{16} + a_{17} \cdot b_{17} + a_{18} \cdot b_{18}) - \frac{[a] \cdot [b]}{4} .$$

В цифрах этот коэффициент будет равен

$$(-0,76)0,57 + (-1,07)(-0,24) + (-0,88)(-1,01) + 0,17(-0,81) +$$

$$+ (-2,54)(0,37) + (-1,07)(-0,25) + (-1,07)0,08 + 0,17(-0,81) + 0,17(0,27) +$$

$$+ (-0,88)(-1,01) + (-0,88)(0,252) + (-0,76)0,57 + (-0,76)(-0,142) = 0,51 .$$

Все остальные коэффициенты редуцированных нормальных уравнений получают аналогичным путем.

Таблица 4

Схема А

Предварительные вычисления									Окончательные вычисления				
Название пункта	№ направлен	Редуциров. на плоскость направлен. М'	Предварит дирекцион углы α'	Ориентир. углы $Z'=\alpha'-M'$	$l=Z'-Z_0$	S км	a	b	v	v_0	Уравнен. направл. М	Уравнен. дирекц. углы α	Уравнен ориентир углы Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	14	15	16
Листвянка	1	M'_1	α'_1	$Z'_1=\alpha'_1-M'_1$	l_1	S ₁	a ₁	b ₁	v_1	0	M ₁	α_1	$Z_1=\alpha_1-M_1$
	2	M'_2	α'_2	$Z'_2=\alpha'_2-M'_2$	l_2	S ₂	a ₂	b ₂	v_2	$v_2 \cdot v_1$	M ₂	α_2	$Z_2=\alpha_2-M_2$
	3	M'_3	α'_3	$Z'_3=\alpha'_3-M'_3$	l_3	S ₃	a ₃	b ₃	v_3	$v_3 \cdot v_1$	M ₃	α_3	$Z_3=\alpha_3-M_3$
	4	M'_4	α'_4	$Z'_4=\alpha'_4-M'_4$	l_4	S ₄	a ₄	b ₄	v_4	$v_4 \cdot v_1$	M ₄	α_4	$Z_4=\alpha_4-M_4$
				$Z_0=[Z_i]/n$	[l]								
Листвянка	1	00°00'00",0	233°16'29",15	233°16'29",15	2,59	21,7 2	-0,76	0,57	0,5	0,0	00°00'00",0	233°16'27",00	233°16'27", 0
	2	49°38'37",2	282°55'02",52	233°16'25",32	-1,23	18,8 6	-1,07	-0,24	-1,2	-1,7	49°38'35",5	282°55'02",6	233°16'27", 1
	3	85°49'29",2	319°05'58",09	233°16'28",89	2,34	15,4 1	-0,88	-1,01	2,7	2,2	85°49'31",4	319°05'58",5	233°16'27", 1
	4	138°23'01", 1	11°39'23",95	233°16'22",85	-3,70	25,0 5	0,17	-0,81	-2,0	-2,5	138°22'58", 6	11°39'25",6	233°16'27", 0
				233°16'26",55									

Примечание. Вычисление элементов уравнений погрешностей и уравненных направлений для пунктов Морская, Ильмень, Круглая, Кума производится также как и для пункта Листвянка.

Таблица 5

Схема Б. Таблица коэффициентов уравнений погрешностей

Название пункта	№ направ.	ΔZ	I ζ_L	II η_L	III ζ_M	IV η_M	L	$S=4+5+6+7+8$	P	$-\Delta Z$	$\Delta\alpha$	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Корреляты												
Листвянка	1 2 3 4	-1 -1 -1 -1	a_1 a_2 a_3 a_4	b_1 b_2 b_3 b_4	$-a_2$	$-b_2$	L_1 L_2 L_3 L_4	S_1 S_2 S_3 S_4	1 1 1 1			
	$\sum_{i=1}^n$		$[a]/4$ $[a]$	$[b]/4$ $[b]$	$[c]/4$ $[c]$	$[d]/4$ $[d]$	0	$[S]$	-1/4			
Корреляты			1,49 4	- 1,67	1,10	0,453						
Листвянка	1 2 3 4	-1 -1 -1 -1	- 0,76 - 1,07 - 0,88 0,17	0,57 - 0,24 - 1,01 - 0,81	- 1,07 - -	- 0,24 - -	2,59- -1,23 2,34 -3,70	2,39 - 1,27 0,45 - 4,34	1 1 1 1	0 0 0 0	-2,09 0,09 0,39 1,61	0,52 -1,18 2,75 -2,09
	Σ	-4	$\frac{0,635}{-2,54}$	$\frac{0,375}{-1,49}$	$\frac{-0,268}{1,07}$	$\frac{-0,06}{0,24}$	0	2,37	-0,25	0	0	0
Морская	5 6 7	-1 -1 -1	- - 1,07 -	- - 0,24 -	1,38 1,07 0,06	-1,25 0,24 1,2	1,11 -1,86 0,76	1,24 - 1,86 2,02	1 1 1	-0,55 -0,55 -0,55	0,95 0,09 0,61	1,51 -2,32 0,81
	Σ	-3	$\frac{0,357}{-1,07}$	$\frac{0,08}{-0,24}$	$\frac{-0,837}{2,51}$	$\frac{-0,063}{0,19}$	0	1,40	-0,33	-1,65	1,65	0

Таблица 6

Схема В. Коэффициенты редуцированных нормальных уравнений

I $\xi_{\text{Л}}$	II $\eta_{\text{Л}}$	III $\xi_{\text{М}}$	IV $\eta_{\text{М}}$	[APL]	[APS]	Контроль
2,709	0,51	-0,398	-0,340	-3,405	-1,394	-1,383
	2,990	0,426	-0,497	4,681	7,675	7,651
		3,241	-2,602	-1,07	-0,404	-0,403
			5,344	0,119	2,012	2,024

Таблица 7

Схема В. Формулы

I $\xi_{\text{Л}}$	II $\eta_{\text{Л}}$	III $\xi_{\text{М}}$	IV $\eta_{\text{М}}$	[APL]	[APS]	Контроль
$[aa] - \frac{[a][a]}{n}$	$[a\vartheta] - \frac{[a][\vartheta]}{n}$	$[ac] - \frac{[a][c]}{n}$	$[ad] - \frac{[a][d]}{n}$	[al]	$[aS] - \frac{[a][S]}{n}$	
	$[\vartheta\vartheta] - \frac{[\vartheta][\vartheta]}{n}$	$[\vartheta c] - \frac{[\vartheta][c]}{n}$	$[\vartheta d] - \frac{[\vartheta][d]}{n}$	[ϑ l]	$[\vartheta S] - \frac{[\vartheta][S]}{n}$	
		$[cc] - \frac{[c][c]}{n}$	$[cd] - \frac{[c][d]}{n}$	[cl]	$[cS] - \frac{[c][S]}{n}$	
			$[dd] - \frac{[d][d]}{n}$	[dl]	$[dS] - \frac{[d][S]}{n}$	

11. Используя любой из способов, решают редуцированные нормальные уравнения (табл. 8).

Таблица 8

Решение редуцированных нормальных уравнений

I $\xi_{\text{Л}}$	II $\eta_{\text{Л}}$	III $\xi_{\text{М}}$	IV $\eta_{\text{М}}$	[APL]	[APS]	Контроль
1	2	3	4	5	6	7
2,709	0,061	-0,400	-0,3580	-3,489	-1,477	-1,477
	-0,0225	0,1477	0,1322	1,2879	0,5452	0,5453
	2,989	0,415	-0,505	4,730	7,690	7,690
	2,988	0,424	-0,497	4,809	7,723	7,724
		-0,1419	0,1663	-1,609	-2,585	-2,585
		3,243	-2,607	-1,398	-0,747	-0,747
		3,124	-2,589	-2,595	-2,060	-2,061
			0,8287	0,8307	0,6594	0,6594
			5,396	0,858	2,784	2,784
			3,120	-0,953	2,167	2,167

1	2	3	4	5	6	7
				0,3054	-0,695	-0,695
		$K_4 =$	0,3054			
	$K_3 =$	1,038	0,2531	0,8307		
$K_2 =$	-1,7124	-0,1538	0,0508	-1,6094		
$K_1 =$ 1,5269	0,0385	0,1601	0,0404	1,2879		

Полученные коррелаты $K_1 K_2 K_3 K_4$ есть не что иное, как поправки к координатам вновь определяемых пунктов, выраженные в дециметрах.

12. Составляют ведомость окончательных координат, в которую записывают предварительные координаты вновь определяемых пунктов, поправки к ним и окончательные координаты.

В эту же ведомость записывают координаты исходных пунктов.

Таблица 9

Вычисление окончательных координат

Название пунктов	Предварительные координаты		Поправки		Окончательные координаты	
Определяемые пункты:						
– Листвянка	6079545,16	5557,50	0,15	-0,17	609545,31	5557,33
– Морская	6083732,48	-12699,82	0,11	0,03	6083732,54	-12699,79
Исходные пункты:						
– Ильмень					6104078,32	10618,72
– Круглая					6091190,34	-4530,06
– Кума					6066557,22	-11851,15

13. Используя окончательные координаты всех пунктов, находят окончательные дирекционные углы и длины линий, решая обратные задачи (табл. 9).

14. Используя коэффициенты уравнений погрешностей (табл. 5) и найденные координаты, находят поправки определяющих углов ΔZ , поправки дирекционных углов и поправки направлений.

Поправку ориентирующего угла на каждом пункте вычисляют по формуле:

$$-\Delta Z = -\left(\frac{\xi_{\text{Л}}[a]}{n} + \frac{\eta_{\text{Л}}[b]}{n} + \frac{\xi_{\text{М}}[c]}{n} + \frac{\eta_{\text{М}}[d]}{n}\right), \quad (7)$$

где ξ и η – поправки абсцисс и ординат вновь определяемых пунктов, выраженные в дециметрах.

Например поправка $-\Delta Z$ на пункте Ильмень будет равна

$$-\Delta Z = -\left[\left(1,527\right)\left(\frac{0,17}{3}\right)\right] - \left[\left(-1,712\right)\left(-\frac{0,81}{3}\right)\right] = -0,55''.$$

Поправки дирекционного угла $\Delta\alpha$ вычисляется по формуле:

$$\Delta\alpha_i = a_i\xi_{\text{Л}} + b_i\eta_{\text{Л}} + a_i\xi_{\text{М}} + b_i\eta_{\text{М}}. \quad (8)$$

Например, для 10 направления на пункте Ильмень $\Delta\alpha_{10} = a_{10}\xi_{\text{Л}} + b_{10}\eta_{\text{Л}} = (0,17)(1,53) + (-0,81)(-1,71) = 1,64''$.

Поправки в соответствующие направления получают двумя способами. Первый – суммируя поправки ориентирующих углов, дирекционных углов и свободных членов по горизонтальным сторонам.

$V = -\Delta Z + \Delta\alpha + l$ для направления 10 на пункте Ильмень будем иметь $V_{10} = -0,55'' + 1,64'' - 2,6'' = -1,55''$ Поправки $-\Delta Z$, $\Delta\alpha$ вычисляются в табл. 5 (Схема Б), а потом переносятся в схему А.

Второй – поправки в направления вычисляются по формуле

$$v_i = (-\Delta Z_k) + a_i\xi_k + b_i\eta_k + (-a_i\xi_k) + (-b_i\eta_k) + l_i,$$

где v_i – поправка в i -направление;

$(-\Delta Z_k)$ – поправка в ориентирный угол на пункте k ;

a_i, b_i – коэффициенты уравнений поправок по вычисляемому направлению;

ξ_k, η_k – поправки абсцисс и ординат соответствующих пунктов;

l_i – свободный член i - направления.

Поправки в направления, вычисленные двумя способами, должны совпадать.

15. Затем заполняется схема А. Сначала выписывают в нее из схемы Б поправки направлений v . Далее из поправок по всем направ-

лениям на пункте вычитают поправку начального направления. В результате получаем поправки в направления, приведённые к начальному (табл. 10) Полученными поправками исправляют измеренные направления M' , получают уравненные направления M .

Таблица 10

Приведение поправок к начальному направлению

v	v_0
0,49	0,00
-1,14	-1,63
2,74	2,24
-2,09	-2,58

Вычисляют в схеме А поправки ориентирующих углов ΔZ и дирекционных углов $\Delta\alpha$.

Окончательные дирекционные углы выписывают из таблицы 10 окончательного решения обратных задач. Контроль вычисления $\Delta\alpha$ и уравнения осуществляется путем введения поправок $\Delta\alpha$ в предварительные дирекционные углы α' и сравнением их с уравненными дирекционными углами.

Окончательные ориентирующие углы $Z = \alpha - M$, вычисленные для всех направлений одного пункта, должны быть одинаковыми, причем при вычислении Z должны быть использованы дирекционные углы, вычисленные по окончательно уравненным координатам, а не полученные путем введения поправок в предварительные дирекционные углы.

Только при таком условии вычисленные Z являются окончательным и надежным контролем уравнивания и вычислений.

16. Контроль уравненных вычислений можно выполнить еще по таким формулам:

$$[a_{ki}(V_{ki} + V_{ik})] = 0; [b_{ki}(V_{ki} + V_{ik})] = 0; [vv] = [ll] + \sum [al]\xi_i + \sum [bl]\eta_i.$$

1.3. Оценка точности

1. Для оценки точности результатов полевых наблюдений по формуле Ферреро вычисляют среднюю квадратическую погрешность измеренного угла

$$m_{\beta} = \pm \sqrt{\frac{[WW]}{3n}}; \quad (9)$$

где $[WW]$ – сумма квадратов невязок треугольников, n – число треугольников в сети.

2. Для оценки точности по результатам уравнивания вычисляется средняя квадратическая погрешность единицы веса (направления) по формуле

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[PV^2]}{r}}, \quad (10)$$

где V – поправки направлений из уравнивания с весом P , не приведенные к нулю; r – число избыточных измерений, определяемых по формуле $r = D - 2k - t$, где t – число всех пунктов, на которых выполнялись угловые измерения, D – число всех измеренных направлений, считая и направления, измеренные с твердых пунктов на твердые; K – число вновь определяемых пунктов.

Для нашего примера $D = 18$, $K = 2$, $t = 5$; $r = 18 - 4 - 5 = 9$.

3. Средняя квадратическая погрешность угла по результатам уравнивания вычисляется по формуле

$$m = \mu \sqrt{2}. \quad (11)$$

4. При оценке точности вычисляются средние квадратические погрешности координат M_x и M_y пункта, положение которого определяется в сети с наибольшими погрешностями. Для этого при составлении редуцированных нормальных уравнений ставят на последние места поправки для этого пункта, тогда квадратичный коэффициент последнего преобразованного нормального уравнения будет весом последнего неизвестного

$$M_y = 0,1 \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} \text{ метр}; \quad M_x = 0,1 \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} \text{ метр}. \quad (12)$$

Для нашего примера вес последнего неизвестного $P_{\eta} = 3,120$. Вес P_{ξ} предпоследнего неизвестного ξ_m вычисляется по формуле

$$P_{\xi_M} = P_{\eta_M} \cdot \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}}, \quad (13)$$

где C и A – квадратические коэффициенты соответственно последнего и предпоследнего преобразованных нормальных уравнений; B – коэффициент при η_m в предпоследнем преобразованном уравнении. Используя данные табл. 7, определим вес предпоследнего неизвестного ξ_m :

$$P_{\xi_M} = 3,120 \cdot \frac{3,124}{3,120 + \frac{(-2,59)^2}{3,124}} = 1,85.$$

5. Погрешность положения пункта Морская подсчитывается по формуле:

$$m = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}. \quad (14)$$

Контрольные вопросы

1. Как написать уравнения погрешностей между пунктами сети?
2. Как вычислить предварительный и окончательно уравненный ориентируемый угол?
3. Как вычислить коэффициенты уравнений погрешностей a и b ?
4. Как получить коэффициенты редуцированных нормальных уравнений?
5. Как вычислить вес предпоследнего и последнего неизвестного?

2. УРАВНИВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ)

Цель работы: Освоить методы уравнительных вычислений по МНК коррелатным способом.

Исходные данные к выполнению работы:

- схема полигонометрического хода;
- результаты измерения углов и линий;

– координаты исходных пунктов и дирекционные углы исходных направлений (табл. 11).

Содержание работы:

1. Вычертить схему полигонометрического хода 1-го разряда.
2. Вычислить угловую невязку и определить её допустимость.
3. Вычислить невязки в приращения координат и рабочие координаты пунктов полигонометрического хода.
4. Подсчитать число условий, возникающих в ходе, и составить соответствующее число условных и нормальных уравнений коррелат (в общем виде).
5. Выполнить вспомогательные вычисления для определения коэффициентов условных уравнений поправок и нормальных уравнений коррелат установив веса измеренных величин.
6. Составить таблицу коэффициентов условных уравнений поправок и нормальных уравнений коррелат для нахождения коррелат.
7. Вычислить поправки в измеренные углы и линии.
8. Вычислить уравненные значения приращений координат и вычислить уравненные значения координат.
9. Выполнить оценку точности по результатам уравнивания.

Таблица 11

Исходные данные для варианта № 0

Исходные дирекционные углы			Исходные дирекционные углы			
Пункты	Измеренные углы β (лев)	Длины линий S , м	п.т. Сухой –1		8-п.т. Исток	
Сухой			35°35'24"		81°20'38"	
1	181°05'47"	552,007	Координаты исходных пунктов			
2	247°51'08"	565,338				
3	156°32'35"	339,025				
4	139°20'11"	400,408	п.т. 1		п.т. 8	
5	157°18'32"	356,831	X_1	Y_1	X_8	Y_8
6	170°06'59"	372,236	4800,595	6149,970	6512,992	7828,890
7	179°59'41"	348,716				
8	253°30'32"					
Исток			Для остальных вариантов данные в табл. 20 и 21			
$m_\beta = 4''.0$ $m_s = 2.0$ см						

2.1. Схема полигонометрического хода 1-го разряда

Для составления схемы полигонометрического хода 1-го разряда необходимо воспользоваться данными измерений углов и линий, выданными преподавателем. Схема представлена на рис. 2.1.

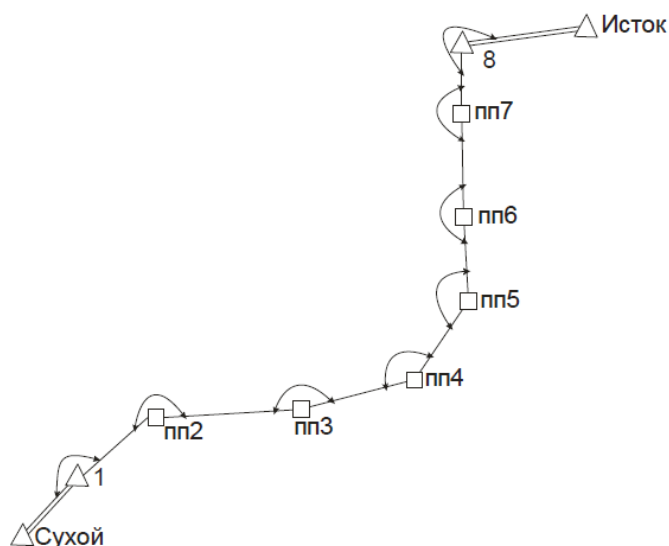


Рис. 2.1. Схема полигонометрического хода 1-го разряда

2.2. Вычисление угловой невязки

Угловую невязку в ходе при левых измеренных углах вычисляют по формуле:

$$f_{\beta_{\text{практ}}} = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_{i_{\text{изм}}} - (\alpha_{\text{кон}} - \alpha_{\text{нач}}) - 180^{\circ} \cdot (n + 1), \quad (15)$$

где n – число измеренных сторон, β_i – измеренные углы, $\alpha_{\text{нач}}$ и $\alpha_{\text{кон}}$ – дирекционные углы на начальном и конечном пунктах хода.

Вычисляют допустимую угловую невязку по формуле:

$$f_{\beta_{\text{доп}}} = 2 \cdot m_{\beta} \cdot \sqrt{n + 1}, \quad (16)$$

где n – количество станций, m_{β} – средняя квадратическая погрешность измерения угла в сети, для полигонометрии 1-го разряда – 5".

Сеть можно уравнивать, если выполняется условие

$$f_{\beta \text{ прак}} \leq f_{\beta \text{ доп}} \cdot \quad (17)$$

Для дальнейших уравнительных вычислений не требуется распределение невязки $f_{\beta \text{ прак}}$ в измеренные углы.

2.3. Вычисление рабочих координат пунктов и невязок в приращении координат полигонометрического хода

Дирекционные углы линий хода вычисляем по формуле

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta_i \cdot k - 180^\circ \cdot k, \quad (18)$$

где α_i , α_{i+1} – дирекционные углы предыдущей и последующей линии; β_i – измеренный угол; $k = +1$ при левых углах и $k = -1$ при правых углах; $i = 1, 2; n$ – текущий номер стороны хода.

Вычисленный дирекционный угол последней стороны $\alpha_{\text{кон}}$ будет отличаться от исходного конечного дирекционного угла на величину f_{β} . По полученным дирекционным углам вычисляют приращения координат по формулам

$$\Delta x_i = s_i \cdot \cos \alpha_i; \Delta y_i = s_i \cdot \sin \alpha_i. \quad (19)$$

Вычислив алгебраические суммы приращений координат $[\Delta x]$ и $[\Delta y]$, определяют невязки в приращениях f'_x и f'_y по формулам

$$f'_x = [\Delta x] - (x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}}); f'_y = [\Delta y] - (y_{\text{кон}} - y_{\text{нач}}), \quad (20)$$

где $x_{\text{нач}}, y_{\text{нач}}$ и $x_{\text{кон}}, y_{\text{кон}}$ – координаты начального и конечного исходных пунктов. Штрихи у невязок означают, что они вычислены по неуравненным за угловую невязку углам.

Рабочие координаты пунктов полигонометрического хода вычисляют по формулам

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i; y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (21)$$

где i – порядковый номер стороны хода.

Вычисленные координаты контролируют равенствами

$$x_{\text{кон(выч)}} - x_{\text{кон(исх)}} = f'_x; y_{\text{кон(выч)}} - y_{\text{кон(исх)}} = f'_y. \quad (22)$$

По полученным значениям $f'x$ и $f'y$ вычисляют линейную абсолютную и относительную невязку хода по формулам

$$f_{абс} = \sqrt{f'^2x + f'^2y}; f_{относ} = \frac{f_{относ}}{[S_i]}, \quad (23)$$

где $[S]$ – длина хода.

Относительная невязка хода не должна превышать допустимого значения, в нашем примере 1: 10000 для полигонометрии 1-го разряда.

Все предварительные вычисления оформляются в стандартную ведомость вычисления координат полигонометрического (теодолитного) хода.

Таблица 12

Ведомость вычисления предварительных координат полигонометрического хода

Название пункта	Углы поворота β	Дирекц. углы α	Длины линий	$\cos \alpha_i$	Приращ. координат м		Координаты, м	
				$\sin \alpha_i$	Δx_i	Δy_i	X_i	Y_i
Сухой								
		$\alpha_{нач}$						
пп 1	β_1			$\cos \alpha_1$			X_1	Y_1
		α_1	s_1	$\sin \alpha_1$	Δx_1	Δy_1		
пп 2	β_2			$\cos \alpha_2$			X_2	Y_2
		α_2	s_2	$\sin \alpha_2$	Δx_2	Δy_2		
пп 3	β_3			$\cos \alpha_3$			X_3	Y_3
		α_3	s_3	$\sin \alpha_3$	Δx_3	Δy_3		
пп 4	β_4			$\cos \alpha_4$			X_4	Y_4
		α_4	s_4	$\sin \alpha_4$	Δx_4	Δy_4		
пп 5	β_5			$\cos \alpha_5$			X_5	Y_5
		α_5	s_5	$\sin \alpha_5$	Δx_5	Δy_5		
пп 6	β_6			$\cos \alpha_6$			X_6	Y_6
		α_6	s_6	$\sin \alpha_6$	Δx_6	Δy_6		
пп 7	β_7			$\cos \alpha_7$			X_7	Y_7
		α_7	s_7	$\sin \alpha_7$	Δx_7	Δy_7		
пп 8	β_8						X_8 вычис	Y_8 вычис
		$\alpha_{кон прак}$	[s]		$[\Delta x_i]$	$[\Delta y_i]$		
Исток								
пп 8		$\alpha_{кон теор}$			f абсол=		X_8 исход	Y_8 исход
					f относ=		$f'\Delta x$	$f'\Delta y$
невязки		$f_{впрак}$						

2.4. Подсчет числа условий, возникающих в ходе и составление соответствующего числа условных и нормальных уравнений коррелат

Число условий, возникающих в ходе, определяют по формуле

$$r = n' - k, \quad (24)$$

где, n' – число всех измерений; k – число неизвестных.

Число всех измерений равно сумме » сторон и $n + 1$ углов, то есть $n' = 2n + 1$.

Для схемы хода изображённого на рис. 2.1 $n = 7$, $n + 1 = 8$, $n' = 15$.

Число неизвестных координат k равно числу всех определяемых пунктов хода, умноженному на два, так как у каждого пункта неизвестными являются абсцисса x и ордината y . Для данного полигонометрического хода $k = 12$, следовательно число условий, возникающих в полигонометрическом ходе, равно $r = 15 - 12 = 3$.

По числу условий составляют три условных уравнения

$$\begin{aligned} [v_\beta] + f_\beta &= 0; \\ [v_s \cdot \cos \alpha] - \frac{1}{\rho} [v_\beta \cdot (y_{n+1} - y_i)] + f'_x &= 0; \\ [v_s \cdot \sin \alpha] - \frac{1}{\rho} [v_\beta \cdot (x_{n+1} - x_i)] + f'_y &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где v_β и v_s – поправки в углы и линии хода;

α – дирекционные углы линий;

f_β, f'_x , и f'_y – угловая и линейные невязки по осям координат;

x_i, y_i – координаты точек хода;

$x_{n+1} - x_i, y_{n+1} - y_i$ – разности абсцисс и ординат конечной точки хода и точек с номером i ($i = 1, 2, \dots, n$);

n – число сторон в ходе;

ρ – число секунд в одном радиане (206265").

Для дальнейших вычислений поправки v_s и невязки f'_x, f'_y выражают в сантиметрах. Для приведения всех коэффициентов к близким величинам $1/\rho''$ увеличивают в 100 000 раз, а разности координат $x_{n+1} - x_i, y_{n+1} - y_i$ уменьшают в это же число раз, т.е. выражают их в километрах.

Величину $100000/\rho'' = 0,485$ подставим в формулы (25) и получим три условных уравнения для полигонометрического хода в следующем виде

$$\begin{aligned} [v_\beta] + f\beta'' &= 0; \\ [\cos\alpha \cdot v_s(\text{см})] - 0,485 \cdot [y_8 - y_i] \text{ км} v_\beta'' + f'_x(\text{см}) &= 0; \\ [\sin\alpha \cdot v_s(\text{см})] + 0,485 \cdot [x_8 - x_i] \text{ км} v_\beta'' + f'_y(\text{см}) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В полигонометрическом ходе при числе условий равному трём составляем три нормальных уравнения коррелат, общий вид которых следующий:

$$\begin{aligned} [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + [qa_1a_3]k_3 + f\beta'' &= 0, \\ [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + [qa_2a_3]k_3 + f'_x &= 0, \\ [qa_1a_3]k_1 + [qa_2a_3]k_2 + [qa_3a_3]k_3 + f'_y &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где q – обратный вес, k_1, k_2, k_3 – коррелаты, $f\beta''$, f'_x , f'_y – невязки.

2.5. Выполнение вспомогательных вычислений для определения коэффициентов условных и нормальных уравнений коррелат и установление весов измеренных величин

Для упрощения дальнейших вычислений выполняют вспомогательные вычисления в журнале вычисления, установив перед этим веса измеренных углов и линий.

Веса измеренных углов и линий определяют по общим формулам

$$P_{\beta i} = \frac{C}{m_{\beta i}^2}; P_{si} = \frac{C}{m_{si}^2}, \quad (28)$$

где C – постоянная величина, коэффициент пропорциональности.

При измерении линий светодальномером величину C принимают равной m_β . В этом случае формулы (28) приобретают следующий вид:

$$P_{\beta i} = 1; P_{si} = \frac{m_{\beta i}^2}{m_{si}^2}. \quad (29)$$

Погрешности полевых измерений m_β и m_s для данного полигонометрического хода указываются в задании или принимаются равными требованиям нормативных документов. При $m_\beta = 4''$ и $m_s = 2$ см вес измеренных линий, вычисленный по формуле (29), будет равен 4. Обратные веса измеренных углов и линий вычисляют по формулам

$$q_\beta = \frac{1}{p_\beta}; q_s = \frac{1}{p_s}. \quad (30)$$

Следовательно, для данного хода обратные веса будут иметь следующие значения: $q_\beta = 1$ и $q_s = 0,25$. При других значениях m_β и m_s , см вес измеренных линий и обратные вес будут другими.

Для упрощения дальнейших вычислений по рабочим координатам пунктов составляют табл.13.

При вычислении разностей $x_{n+1} - x_i$, $y_{n+1} - y_i$ рабочие координаты пунктов переводят в километры, округляя 0,001км. Все вычисления в табл. 13 производят, оставляя три знака после запятой.

Таблица 13

Вспомогательные вычисления

№ пунктов	Разность координат, км		$q_s \cdot \cos \alpha_i$	$q_s \cdot \sin \alpha_i$	$q_s \cdot \cos^2 \alpha_i$	$q_s \cdot \sin^2 \alpha_i$	$q_s \cdot \cos \alpha_i \cdot \sin \alpha_i$
	$x_8 - x_i$	$y_8 - y_i$					
1	$x_8 - x_1$	$y_8 - y_1$					
2	$x_8 - x_2$	$y_8 - y_2$					
3	$x_8 - x_3$	$y_8 - y_3$					
4	$x_8 - x_4$	$y_8 - y_4$					
5	$x_8 - x_5$	$y_8 - y_5$					
6	$x_8 - x_6$	$y_8 - y_6$					
7	$x_8 - x_7$	$y_8 - y_7$					
8	$x_8 - x_8$	$y_8 - y_8$					
Сумма					[]	[]	[]

Контроль вычислений в табл 13:

$$[q_s \cdot \cos^2 \alpha_i] + [q_s \cdot \sin^2 \alpha_i] = [q \cdot n].$$

2.6. Составление таблицы коэффициентов условных уравнений поправок и нормальных уравнений коррелат для нахождения коррелат

По полученным условным уравнениям (26) составляют таблицу коэффициентов условных уравнений, в которую записывают результаты. (табл. 14). В столбец 6 выписывают поправки в углы $v_{\beta i}$, количество которых равно $(n+1)$, и поправки в стороны v_{si} , количество которых n . В столбец 1 – значения обратных весов измеренных углов и линий, вычисленных по формулам (30). Обратный вес для всех измеренных углов будет иметь одинаковое значение, также как и обратный вес для измеренных сторон, так как выполненные измерения являются равноточными.

В столбцы 2, 3 и 4 – коэффициенты условных уравнений при поправках, которые обозначают в первом уравнении через a_{1i} , во втором – через a_{2i} , в третьем – через a_{3i} . Для контроля вычислений в столбец 5 записывают суммы коэффициентов условных уравнений. В дальнейшем с этими числами производят такие же действия, как и с коэффициентами условных уравнений. Сходимость в последующих вычислениях суммы коэффициентов с суммированными коэффициентами служит контролем вычислений. В табл. 15 в столбце «Сумма» даны результаты вычислений с суммой коэффициентов, а в столбце «Контроль» – сумма преобразованных коэффициентов нормальных уравнений.

Таблица 14

Коэффициенты условных уравнений

Вес q_{β}	a_1	a_2	a_3	Сумма коэф- фициентов	Поправки
1	2	3	4	5	6
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_1)$	$+0,485(x_{n+1}-x_1)$	s_1	$v''_{\beta 1}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_2)$	$+0,485(x_{n+1}-x_2)$	s_2	$v''_{\beta 2}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_3)$	$+0,485(x_{n+1}-x_3)$	s_3	$v''_{\beta 3}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_4)$	$+0,485(x_{n+1}-x_4)$	s_4	$v''_{\beta 4}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_5)$	$+0,485(x_{n+1}-x_5)$	s_5	$v''_{\beta 5}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_6)$	$+0,485(x_{n+1}-x_6)$	s_6	$v''_{\beta 6}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_7)$	$+0,485(x_{n+1}-x_7)$	s_7	$v''_{\beta 7}$
1	1	$-0,485(y_{n+1}-y_8)$	$+0,485(x_{n+1}-x_8)$	s_8	$v''_{\beta 8}$
Вес q_s					В см
0,25	0	$+\cos\alpha_1$	$+\sin\alpha_1$	s_9	v_{s1}

1	2	3	4	5	6
0,25	0	$+\cos\alpha_2$	$+\sin\alpha_2$	s_{10}	v_{S2}
0,25	0	$+\cos\alpha_3$	$+\sin\alpha_3$	s_{11}	v_{S3}
0,25	0	$+\cos\alpha_4$	$+\sin\alpha_4$	s_{12}	v_{S4}
0,25	0	$+\cos\alpha_5$	$+\sin\alpha_5$	s_{13}	v_{S5}
0,25	0	$+\cos\alpha_6$	$+\sin\alpha_6$	s_{14}	v_{S6}
0,25	0	$+\cos\alpha_7$	$+\sin\alpha_7$	s_{15}	v_{S7}
W невяз- ки	$f_{\beta''}$	$f_x'(\text{см})$	$f_y'(\text{см})$		
	k_1	k_2	k_3		

Вычисления в табл. 14 выполняют с округлением значений до 2–3 значащих цифр. Определив коэффициенты условных уравнений, составляют коэффициенты нормальных уравнений коррелат, которые вычисляют по формулам, представленным в табл. 15.

Первый коэффициент вычисляют как сумму произведений

$$[q_i a_{1i} \cdot a_{1i}] = q_1 a_{11} \cdot a_{11} + q_2 a_{12} \cdot a_{12} + q_3 a_{13} \cdot a_{13} + \dots + q_{2n+1} a_{1,2n+1} \cdot a_{1,2n+1},$$

где n – число сторон в ходе.

Коэффициенты при поправках в углы и обратные веса углов равны единице, а коэффициенты поправок сторон равны нулю. Следовательно, первый коэффициент нормального уравнения коррелат равен числу углов в ходе, в нашем примере – 8.

Второй коэффициент нормального уравнения находится как сумма произведений коэффициентов первого условного уравнения на соответствующие коэффициенты второго условного уравнения и на обратный вес.

$$[q_i a_{1i} \cdot a_{2i}] = q_1 a_{11} \cdot a_{21} + q_2 a_{12} \cdot a_{22} + q_3 a_{13} \cdot a_{23} + \dots + q_{2n+1} a_{1,2n+1} \cdot a_{2,2n+1},$$

где n – число сторон в ходе.

Аналогично вычисляют остальные коэффициенты нормальных уравнений и суммы. Контролем является равенство суммы коэффициентов нормального уравнения с вычисленной суммой, полученной из условных уравнений.

Таблица 15

Коэффициенты нормальных уравнений в общем виде

	a_1	a_2	a_3	L	Сумма	Контроль
$[qa_1]$	$[qa_1 \cdot a_1]$	$[qa_1 \cdot a_2]$	$[qa_1 \cdot a_3]$	$f_{\beta''}$	$[qa_1 \cdot s]$	$[a_1]$
$[qa_2]$		$[qa_2 \cdot a_2]$	$[qa_2 \cdot a_3]$	$fx'(см)$	$[qa_2 \cdot s]$	$[a_2]$
$[qa_3]$			$[qa_3 \cdot a_3]$	$fy'(см)$	$[qa_3 \cdot s]$	$[a_3]$

Составив систему нормальных уравнений коррелат (табл. 16) в цифровом виде, решают её методом последовательного исключения неизвестных, определяя коррелаты k_1 , k_2 и k_3 .

Таблица 16

Коэффициенты нормальных уравнений для хода полигонометрии

	$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	L	Сумма	Контроль
$[qa_1]$	$q \cdot (n+1)$	$-0.485 \cdot [(y_{n+1} - y_i)]$	$0.485 \cdot [(x_{n+1} - x_i)]$	$f_{\beta''}$		
$[qa_2]$		$0.485^2 \cdot [(y_{n+1} - y_i)^2] + [q_s \cdot \cos^2 \alpha_i]$	$-(0.485^2 \cdot [(y_{n+1} - y_i)(x_{n+1} - x_i)] + [q_s \cdot \cos \alpha_i \cdot \sin \alpha_i])$	$fx'(см)$		
$[qa_3]$			$0.485^2 \cdot [(x_{n+1} - x_i)^2] + [q_s \cdot \sin^2 \alpha_i]$	$fy'(см)$		

Для упрощения напомним коэффициенты нормальных уравнений в условных обозначениях (табл. 17).

Таблица 17

Коэффициенты нормальных уравнений в условных обозначениях

	$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	свободные члены	Сумма	Контроль
$[qa_1]$	N_{11}	N_{12}	N_{13}	L_1	S_1	$[N_{1i}]$
$[qa_2]$		N_{22}	N_{23}	L_2	S_2	$[N_{2i}]$
$[qa_3]$			N_{33}	L_3	S_3	$[N_{3i}]$

Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса представлено в табл. 18.

Таблица 18

Решение нормальных уравнений (в условных обозначениях)

Дейст- вия	k_1	k_2	k_3	L	Сумма	Кон- троль
N_{1i}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	L_1	S_1	$[N_{1i}]$
E_1	$-\frac{N_{11}}{N_{11}} = -1$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}}$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$	$-\frac{S_1}{N_{11}}$	$[E_1]$
N_{2i}		N_{22}	N_{23}	L_2	S_2	$[N_{2i}]$
$E_{12}N$		$-\frac{N_{12}}{N_{11}} N_{12}$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} N_{13}$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} L_1$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} S_1$	
$N_{2i}^{(1)}$		$N_{22}^{(1)} = N_{22} - \frac{N_{12}}{N_{11}} N_{12}$	$N_{23}^{(1)} = N_{23} - \frac{N_{12}}{N_{11}} N_{13}$	$L_2^{(1)} = L_2 - \frac{N_{12}}{N_{11}} L_1$	$S_2^{(1)} = S_2 - \frac{N_{12}}{N_{11}} S_1$	$[N_{2i}^{(1)}]$
E_2		$-\frac{N_{22}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = -1$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$[E_2]$
N_{3i}			N_{33}	L_3	S_3	$[N_{3i}]$
$E_{13}N$			$-\frac{N_{13}}{N_{11}} N_{13}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} L_1$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} S_1$	
$E_{23}N^{(1)}$			$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} N_{23}^{(1)}$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)}$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} S_2^{(1)}$	
$N_{3i}^{(2)}$			$N_{33}^{(2)} = N_{33} - \frac{N_{13}}{N_{11}} N_{13} - \frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} N_{23}^{(1)}$	$L_3^{(2)} = L_3 - \frac{N_{13}}{N_{11}} L_1 - \frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)}$	$S_3^{(2)} = S_3 - \frac{N_{13}}{N_{11}} S_1 - \frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} S_2^{(1)}$	$[N_{3i}^{(2)}]$
E_3			$-\frac{N_{33}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} = -1$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	$[E_3]$

Вычисление коррелат:

$$k_3 = -\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}},$$

$$k_2 = -\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \cdot k_3 - \frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}},$$

$$k_1 = -\frac{N_{12}}{N_{11}} \cdot k_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}} \cdot k_3 - \frac{L_1}{N_{11}}.$$

2.7. Вычисление поправок в измеренные углы и линии

По найденным коррелатам k_1 , k_2 и k_3 получают поправки в измеренные углы и линии по формулам

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + \dots + q_i a_{ir} k_r \quad (i=1, \dots, n) \quad (31)$$

или

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + q_i a_{i3} k_3 \quad (i=1, \dots, n) \quad (32)$$

в общем виде.

В нашем примере поправки вычисляем по формулам

$$v_{\beta_i} = q_{\beta} \cdot (k_1 - (y_{n+1} - y_i) \cdot k_2 + (x_{n+1} - x_i) \cdot k_3) \quad (i = 1, \dots, n); \quad (33)$$

$$v_{s_i} = q_s \cdot (\cos \alpha_i \cdot k_2 + \sin \alpha_i \cdot k_3) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (34)$$

Контролем правильности вычисления поправок в углы является равенство

$$[v_{\beta_i}] = -f_{\beta}. \quad (35)$$

Вычисления по формулам (33) и (34) удобно выполнять в табл. 14 и заносить в шестой столбец. Поправки вычислять до 0,1" и до тысячных долей метра.

2.8. Вычисление уравненных значений приращений координат и вычисление уравненных значений координат

Дальнейшие вычисления можно производить двумя путями.

Первый путь. Поправки v_{β_i} и v_{s_i} вводят в измеренные значения углов и линий. Далее по исправленным углам вычисляют дирекционные углы, а затем по дирекционным углам и исправленным линиям – исправленные приращения координат $\Delta x_{испр}$ и $\Delta y_{испр}$. Заключительный контроль производят по следующим формулам

$$[\Delta x_{испр}] = x_{кон} - x_{нач}; [\Delta y_{испр}] = y_{кон} - y_{нач} . \quad (36)$$

Уравненные (окончательные) координаты x и y получают по формулам

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_{испр}; y_{i+1} = y_i + \Delta y_{испр}. \quad (37)$$

Также можно вычислить координаты *вторым путем*. Для этого вычисляют поправки в приращения координат $y\Delta x$ и $y\Delta y$ по формулам

$$y\Delta x_i = v_{s_i} \cos \alpha_i - y_{ai}/\rho'' \cdot \Delta y_i; y\Delta y_i = y_{s_i} \sin \alpha_i + y_{ai}/\rho'' \cdot \Delta x_i . \quad (38)$$

Заключительным контролем вычисления поправок в приращения координат являются равенства

$$[y\Delta x] = -fx'; [y\Delta y] = -fy'. \quad (39)$$

Вычисления по формулам (38) можно производить в табл. 19 с округлением координат до тысячных долей метра.

Таблица 19

Вычисление уравненных координат

№ пунк тов	$v_{s_i} \cos \alpha_i$, см	$\frac{V_{ai}}{P} \cdot \Delta y_i$ см	$v\Delta x$ см	$v_{s_i} \sin \alpha_i$, см	$\frac{V_{ai}}{P} \cdot \Delta x_i$, см	$v\Delta y$, см	Уравненные коор- динаты	
							X, м	Y, м
1	1,913	0,499	2,412	1,425	-0,670	0,755	4800,595	6149,970
2	-0,256	1,693	1,437	0,987	0,439	1,426	5243,306	6479,811
3	0,278	1,180	1,459	1,773	-0,185	1,588	5101,356	7027,117
4	1,819	0,896	2,715	1,549	-1,053	0,496	5153,912	7362,131
5	2,109	0,366	2,475	0,674	-1,146	-0,472	5458,792	7621,809
6	2,008	0,182	2,190	0,277	-1,325	-1,048	5798,717	7730,499
7	2,008	0,202	2,210	0,276	-1,470	-1,194	6167,502	7781,323
8							6512,994	7828,888

2.9. Выполнить оценку точности выполненных измерений по результатам уравнивания

Оценка точности измерений по результатам уравнивания заключается в вычислении средней квадратической погрешности единицы веса по формуле.

$$\mu = \sqrt{\frac{[p \cdot vv]}{r}}. \quad (40)$$

В формуле (40) $p = p_{\beta} = 1$, $r = 3$; $v_i = v_{\beta, i}$ получим $\mu = m_{\beta}$.

Предельное значение m_{β} выбирается в зависимости от класса или разряда полигонометрии (табл. 20). Для первого разряда предельное значение m_{β} принимается равным 5". Сравнивая m_{β} вычисленное с $m_{\beta пред}$ делают вывод о соответствии измеренных углов по точности данному классу или разряду.

Таблица 20

Исходные данные для полигонометрии 1-го разряда

Пункты	Измеренные углы β левые	Линии s м	Дирекционные углы Вариант № 0
Сухой			
			35°35' 27"
1	181°05' 47"		
		552,007	
2	247°51' 08"		
		565,338	
3	156°32' 35"		
		339,025	
4	139°20' 11"		
		400,408	
5	157°18' 32"		
		356,831	
6	170°06' 59"		
		372,236	
7	179°59' 41"		
		348,716	
8	253°30' 32"		
			81°20' 40"
Исток			
	$m_{\beta}=4''$	$m_s=2.0$ см	

Полевые данные для всех вариантов постоянные (табл. 21). Дирекционные углы вычисляются по формулам

Сухой – 1 $\alpha = 35^{\circ}35' 27'' + 20' \cdot \text{№ варианта};$

8 – Исток $\alpha = 81^{\circ}20' 40'' + 20' \cdot \text{№ варианта}.$

Таблица 20

Исходные данные координаты для полигонометрии 1-го разряда

№ п/п	X1	Y1	X8	Y8
0	4801,025	6150,4	6513,372	7828,890
1	4802,939	6153,314	6505,502	7841,748
2	4804,853	6156,228	6497,574	7854,548
3	4806,767	6159,142	6489,589	7867,291
4	4808,681	6162,056	6481,547	7879,977
5	4810,595	6165,969	6473,477	4810,595
6	4812,509	6167,884	6465,292	4812,509
7	4814,423	6170,798	6457,081	4814,423
8	4816,337	6173,712	6448,814	4816,337
9	4818,251	6176,626	6440,491	4818,251
10	4821,025	6180,399	6432,879	4821,025
11	4822,939	6183,314	6424,448	4822,939
12	4824,853	6186,228	6415,962	4824,853
13	4826,767	6189,142	6407,422	4826,767
14	4828,681	6192,056	6398,828	4828,681
15	4830,595	6194,971	6390,148	4830,595
16	4832,509	6197,884	6381,482	4832,509
17	4834,423	6200,798	6372,729	4834,423
18	4836,337	6203,712	6363,925	4836,337
19	4838,251	6206,626	6355,068	4838,251
20	4841,025	6210,401	6346,933	4841,025
21	4842,939	6213,314	6337,975	4842,939
22	4844,853	6216,228	6328,966	4844,853
23	4846,767	6219,142	6319,906	4846,767
24	4848,681	6222,056	6310,797	4848,681
25	4850,595	6224,970	6301,638	4850,595
26	4852,509	6227,884	6292,43	4852,509
27	4854,423	6230,798	6283,173	4854,423
28	4856,337	6233,712	6273,867	4856,337
29	4858,251	6236,626	6264,513	4858,251
30	4861,025	6240,399	6255,891	4861,025
37	4874,423	6260,798	6188,782	4874,423
38	4876,337	6263,712	6179,013	4876,337

Контрольные вопросы и задания

1. Какая матрица симметричная? Приведите пример матрицы столбца и матрицы строки. Как находится произведение матриц?
2. Какие измерения называются необходимыми и какие избыточными? Для чего нужны необходимые и избыточные измерения?
3. Сколько и какие математические зависимости можно записать в сети из двух треугольников имеющих общую сторону?
4. Какую роль должны выполнять поправки в измерениях?
5. Назовите основную цель уравнивания.

Список рекомендуемой литературы

1. Виноградов, А.В. Современные технологии геодезических изысканий : учебное пособие / А.В. Виноградов, А.В. Войтенко. – Омск : СибАДИ, 2012. – 108 с.
2. Федотов, Г.А. Инженерная геодезия : учебник / Г.А. Федотов. – 4-е изд., стер.– М. : Высшая школа, 2007. – 463 с.
3. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 543 с.
2. Лесных, Н.Б. Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов : учебное пособие / Н.Б. Лесных – Новосибирск : СГГА, 2003. – 60 с.
3. Маркузе, Ю.И. Книга 2 Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений : учеб. пособ. / Ю.И. Маркузе. – М. : МИИГАиК, 2005. – 280 с.
4. Поклад, Г.Г. Геодезия : учебное пособие для вузов / Г.Г. Поклад, С.П. Гриднев – 2-е изд. – М. : Академический Проект, 2013. – 592 с.
5. Селиханович, В.Г. Практикум по геодезии / В.Г. Селиханович. – М. : Недра, 2000. – 544 с.