

Б. С. Добронец
О. А. Попова

ЧИСЛЕННЫЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ДАННЫХ

Монография

Институт космических и информационных технологий



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.С. Добронез, О.А. Попова

**Численный вероятностный анализ
неопределенных данных**
МОНОГРАФИЯ

Красноярск
СФУ
2014

УДК 517.972.9

ББК 22.193

Рецензенты:

Ю.И. Рогозов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой САиТ ЮФУ;

Г.А. Доррер, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой системмотехники СибГТУ

Добронец, Б.С.

Д 564 Численный вероятностный анализ неопределенных данных: монография / Б.С. Добронец, О.А. Попова — Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2014. — 168 с.

ISBN 978-5-7638-3093-4

Впервые изложен подход к использованию численного вероятностного анализа для решения задач с неточными входными данными. Основное внимание уделено численному решению систем линейных алгебраических уравнений и нелинейных уравнений, а также задачам оптимизации и прогнозирования. Разработанные алгоритмы могут быть использованы для исследования сложных систем с входными данными, заданными различными типами неопределенности.

Предназначена для специалистов, работающих в области решения задач с неточными входными данными, в условиях их неопределенности и неоднозначности. Может быть полезной для студентов, магистрантов и аспирантов.

УДК 517.972.9

ББК 22.193

© Сибирский федеральный университет 2014

ISBN 978-5-7638-3093-4

Оглавление

Предисловие	6
Введение	16
1. Элиторная неопределенность	25
1.1. Эмпирическая функция распределения	27
1.2. Дискретная (квантильная) оценка функции распределения .	28
1.3. Гистограммы	29
1.4. Полиграмма	30
1.5. Восстановление плотности распределения методом Розенблатта– Парзена	31
1.6. Проекционные методы	32
2. Интервальное представление неопределенности	33
2.1. Интервальные числа	33
2.2. Интервальные расширения	35
2.3. Интервальные сплайны	39
2.4. Интервальные интегралы	49
2.5. Интервальные СЛАУ	53
3. Интервальные функции распределения (P-boxes)	61
3.1. Разложение интервальной функции распределения	63
3.2. Декартово произведение	65
3.3. Независимость переменных	67
3.4. Сжатие	68
3.5. Агрегация	69
3.6. Критика	71
3.7. Гистограммные функции распределения	71

4. Элементы численного вероятностного анализа	74
4.1. Способы представления функций плотности случайных величин	75
4.2. Гистограммные переменные	76
4.3. Законы распределения функций случайных аргументов . . .	77
4.4. Операции над плотностями вероятности случайных величин	78
4.5. Тестирование. Сравнение с методом Монте-Карло	83
4.6. Вероятностные расширения	84
4.7. Решения систем линейных алгебраических уравнений	87
4.8. Решения нелинейных уравнений	91
4.9. Задачи интерполяции	94
5. Гистограммные временные ряды	97
5.1. Основы гистограммных временных рядов	100
5.2. Оценка погрешности для гистограммных временных рядов .	101
5.3. Использование метода $k - NN$ для прогноза временных рядов	102
5.4. Адаптация метода $k - NN$	103
5.5. Построение прогноза	104
5.6. Метод расщепления	104
5.7. Численный пример	104
5.8. Временная агрегация	105
6. Случайное программирование	109
6.1. Введение	109
6.2. Постановка задачи	113
6.3. Случайное линейное программирование	114
6.4. Случайное нелинейное программирование	117
6.5. оптимизации выработки электроэнергии гидроэлектростанцией в условиях неопределенности	119
7. Регрессионный анализ	124
7.1. Агрегация данных	126
7.2. Регрессионное моделирование на основе агрегированных данных	129
7.3. Классическая параметрическая регрессия	131
7.4. Метрики в пространстве гистограмм	131
7.5. Гистограммная регрессия	132
7.6. Численный пример	133

8. Процедуры распространения неопределенностей	136
8.1. Анализ существующих подходов к представлению и распространению неопределенности	136
8.2. Распространение неопределенности на основе численного вероятностного анализа	138
8.3. Арифметика неопределенных данных на основе гистограмм второго порядка	140
8.4. Показатели надежности сложных объектов	144
9. Технология информационной поддержки принятия инвестиционных решений	149
9.1. Оценки рисков	150
9.2. Расчет NPV и IRR	150
9.3. Пример использования	154
Список литературы	157

Предисловие

Исследователям и практикам хорошо известно, что при получении неопределенной информации (что довольно часто и происходит в реальной практике) проведение дальнейших исследований и решение поставленных задач требует более адекватных методов представления исходной информации и более сложных методов расчета. Например, для руководителей и специалистов в различных сферах практической деятельности, принимающих ответственные управленческие решения, важно получить ответ на вопрос: «Можно ли на основе имеющейся информации получить достоверные данные и установить с помощью численных расчетов, достаточно полезную и реалистичную картину последствий принимаемых управленческих решений, несмотря на тот факт, что информация, на основе которой принимается решение, носит существенно неопределенный характер?». Ответить на этот вопрос — это значит проанализировать множество аспектов, связанных как с понятием неопределенной информации, так и собственно с самими численными методами, моделями и процедурами, необходимыми для реализации всех стадий информационного процесса. Важно отметить, что при осуществлении вычислительных процедур над неопределенными данными с помощью численных методов представления, обработки, моделирования и численных расчетов могут быть установлены дополнительные неопределенности, которых нет в изначальной постановке. Следует также указать на необходимость изучения ограничений применимости методов, используемых для практических расчетов с неопределенными значениями.

Исследователям и практикам также необходимо иметь в виду, что при разработке и применении численных методов на основе неопределенных данных должен обеспечиваться определенный уровень надежности и доверия к полученным результатам, прозрачности, полноте, релевантности и понятности допущений относительно способов представления информационной неопределенности и ограничений для реализуемых численных процедур.

Поэтому изучение способов и разработка новых форм представления

информационной неопределенности в данных, применение численного моделирования на основе новых численных методов и подходов и разработка новых методов, реализующих перечисленные выше аспекты, представляет собой актуальную задачу.

Актуальность такой постановки проблемы подтверждается требованиями многих норм действующего российского законодательства, рядом российских и зарубежных стандартов. Любые действия, предпринятые по причине неточности или неполноты данных, увеличивают надежность полученной актуарной информации.

Как показал анализ литературы, проблема снижения уровня неопределенности в исходных данных и повышение эффективности численных методов представления, обработки, моделирования и анализа в течение многих десятилетий находится в центре внимания и остается предметом многих научных исследований. Достаточно отметить работы Ф.П. Тарасенко «О роли ошибок в управленческой деятельности». Вместе с тем можно с уверенностью утверждать, что данная проблема попрежнему актуальна и составляет предмет исследования многих ученых. Наиболее значимые результаты в данной предметной области были получены учеными: В. Liu, F. Scott, A. Neumaier, H. Schjaer-Jacobsen, D. Dubois, О.И. Ужга–Ребровым.

Проблемам принятия экономических решений в условиях неопределенности, в частности проблемам методологии представления неопределенных данных, моделированию в условиях неопределенности и решению задачи оптимального выбора в условиях интервально определенных цен, посвящены работы Д.В. Давыдова, А.А. Тарасова. Проблема повышения эффективности принятия инвестиционных решений, задача оценки инвестиционных проектов с учетом факторов риска и неопределенности рассматривается в работах А.М.Дыбова, А.В. Лукашова. В частности, в работах А.М.Дыбова анализируются достоинства и недостатки различных методов формализации неопределенности, в том числе вероятностного, нечетко-множественного и экспертного. На основе результатов проведенного анализа выдвигается ряд предположений по их оптимальному применению. Изучению альтернативных методов решения задачи принятия эффективных инвестиционных решений, в частности оценке инвестиционных проектов условиях высокой неопределенности и риска, посвящены исследования А.В. Лукашова, на практических примерах им демонстрируется применение метода Монте-Карло для численных расчетов NPV инвестиционных проектов и оценки чистой приведенной стоимости с целью определения привлекательности инвестиционных проектов.

Среди зарубежных публикаций проблеме представления неопределенностей в данных и численным процедурам расчета посвящены работы, Б.С. Добронца [66, 68], R. C. Williamson [54], D. Berliant [8], Jianzhong Zhang, где рассматриваются интервальная, вероятностная и нечеткая неопределенность в данных и соответствующие арифметики над ними. Вводится как отражение специфических свойств экономических данных понятие экономической неопределенности. Изучению свойств информации в условиях неопределенности, способам и процедурам ее представления, обработки в условиях элиторной и эпистемистической неопределенности посвящены работы D. Dubois [12], H. Prade, A. Neumaier [38] и S. Ferson [23]. Численные модели и методы обработки неопределенной информации рассматриваются в работах S. Ferson [24], в частности ряд его публикаций посвящены вопросам применения и изучения эффективности метода Монте-Карло к задачам с различными типами неопределенности [22].

В настоящее время понятие неопределенности получило специализированный подтекст. Например, в работах H. Schjaer-Jacobsen [41] вводится понятие экономической неопределенности, где исследуются представления экономической неопределенности с помощью интервалов, нечетких чисел и вероятностей, в том числе квадратичных, кубических, и четырех степенных оценок и обсуждаются проблемы применения четырех основных арифметических операций к неопределенным экономическим показателям. В данной статье авторы пишут, что заинтересованы главным образом в представлении и расчете экономической неопределенности, т. е. в арифметике неопределенных значений применительно к экономическим проблемам.

Отсутствие объективной и полной информации о распределении параметров приводит к необходимости рассматривать специальные методы и подходы работы с данными. Для представления случайных величин и работы с ними определенное удобство представляют гистограммные числа и соответственно гистограммная арифметика. Исследованию и применению гистограммной арифметики посвящен ряд работ. Среди первых публикаций по данной тематике следует назвать работы Б.С. Добронца [66]. В настоящее время арифметики для работы со случайными величинами развиваются в следующих направлениях: интервальный анализ [33, 34] и интервальная арифметика, нечеткая арифметика.

Одним из факторов, влияющих на качество принимаемых решений, является уровень неопределенности информации. Уровень неопределенности информации определяет различные подходы и методы. Выделяют уровни и типы неопределенностей. Например, H. Schjaer-Jacobsen [41] определяет

несколько уровней неопределенности, где самый низкий уровень неопределенности соответствует ситуации «полная» информированность — точный результат. Более высокий уровень неопределенности предполагает наличие некоторого вероятностного пространства. Существующая неопределенность информации отражается в данных как неопределенность данных. Можно выделить три типа неопределенных данных: случайные, нечеткие и интервальные. Случайные числа задаются некоторыми вероятностными распределениями их возможных значений; нечеткие данные — лингвистически сформулированными распределениями их возможных значений; интервальные данные — интервалами их возможных значений без указания какого-либо распределения возможных значений внутри заданного интервала. Очевидно, что интервальные данные содержат минимальную информацию о границах изменения неопределенного параметра или его принадлежности некоторому интервалу. В этом случае говорят об интервальной неопределенности как о состоянии неполного (частичного знания) об интересующей нас величине. В качестве примера можно привести интервальную неопределенность спроса на произведенную продукцию.

Особый интерес в рамках работы с неопределенными данными представляют два вида неопределенностей, а именно: элиторная и эпистемическая. Неопределённость, которая является неотъемлемым атрибутом случайных событий, называют элиторной (aleatory) неопределённостью. Теория вероятностей предназначена для моделирования, оценки и оперирования именно элиторными неопределённостями. В свою очередь, неопределённость самих вероятностных оценок называют эпистемической неопределённостью (epistemic uncertainty). Эпистемическая неопределённость прямо связана с объёмом и достоверностью информации, на основании которой получают эти оценки.

Анализ публикаций по данной тематике позволил выделить шесть основных направлений в изучении эпистемической неопределенности. Первый подход отражает субъективную природу эпистемической неопределенности, когда необходимая информация, снижающая уровень неопределенности и необходимая для получения вероятностных оценок, зависит от субъекта. В этом случае используются экспертные оценки. Вместо задания значения вероятности осуществления события эксперт задает некоторое множество таких значений и приписывает каждому значению вероятность его истинности. Чтобы получить точечную оценку вероятности события, рассчитывается математическое ожидание полученного распределения. Подход второй — интервальный, связан с возможностью для по-

строения вероятностных оценок использовать информацию о граничных (интервальных) значениях оцениваемых характеристик. Эти методы сложны и достаточно широко представлены в рамках интервального анализа R. Moore [33], A. Neumaier [37]. Подход третий — анализ вероятностной чувствительности имеет исключительно прикладной характер В. (Liu [21]). В конкретной предметной задаче производится субъективное оценивание вероятностей релевантных событий. На основе полученной информации решается задача и получаются требуемые конечные результаты. После этого исходные значения вероятностей варьируются в заданных пределах и оценивается влияние этого варьирования на конечные результаты. Анализ вероятностной чувствительности нашел широкое распространение, особенно в задачах принятия решений.

Подход четвертый — теория Демпстера-Шефера (Dempster-Shafer Theory of Evidence)[46]. Эта теория является расширением теории вероятностей на случай, когда пространство случайных событий состоит не из синглетов, а может включать в себя некоторые подмножества событий. Теория Демпстера-Шефера позволяет справиться с такими задачами, в которых теория вероятностей принципиально неприменима.

Подход пятый это метод распространения вероятностей и связан с понятием сети уверенностей. Он был предложен Ю. Пирлом и представляет эффективное средство моделирования исходных неопределенных ситуаций во многих приложениях искусственного интеллекта и в теории принятия решений [43].

Шестой подход опирается на понятие вероятности второго порядка и известен как *second-order probability*. Данный подход представляет собой метод, позволяющий строить вероятностные оценки в случае эпистемической неопределенности. Концепция вероятностей второго порядка была изложена в 1996 году в работах А. Mosleh и V. M. Bier [36].

Анализ публикаций показал, что несмотря на то, что данное направление достаточно активно развивается за рубежом, понятие вероятности второго порядка еще находится в стадии определения.

В настоящее время разрабатывается подход, который в отечественной специализированной литературе получил название *распространение неопределенности*, а в зарубежных источниках звучит как *propagation of uncertainty*. Анализируя содержательный смысл этого понятия, можно выделить такой важный аспект процедуры распространения неопределенности, как способ получения дополнительных оснований (знаний) для исследования входных данных. Другими словами, если исследователь находится в условиях недо-

статочности или полного отсутствия эмпирической информации или оснований для выдвижения идей и предположений о неизвестном распределении входных параметров, то необходимо распространить (propagate) существующую неопределенность, чтобы получить достаточные выводы в соответствии с принципом недостаточного основания. Чтобы получить необходимые основания для оценки или восстановления неизвестного входного распределения на основе неполной, неточной информации, можно использовать различные процедуры, например, следует рассмотреть распределение вероятностей, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую имеющейся априорной информацией. При этом важно следовать такому принципу: выбрать тип представления в соответствии с количеством имеющейся информации и оставаться верным имеющейся информации, включая информационные пробелы. Применение принципа недостаточности (достаточности) оснований позволяет существенно расширить формы представления неопределенностей, такие, как P-boxes, Neumaier's clouds, теория Демпстера-Шафера, интервальные гистограммы, гистограммы второго порядка.

В рамках рассмотренных принципов распространения неопределенности можно достичь, используя метод вероятностных границ (Probability bounds). Его основная идея приводится, например, в работе, и состоит в следующем: «есть нечто, что можно сказать о неизвестном распределении. В частности, его функция распределения вероятностей или CDF (Cumulative Distribution Function) должна лежать в области — ящике (box), ограниченная нулем и единицей по вертикали и от минимума и максимума горизонтально. Истинная функция распределения, какой бы она ни была, должна находиться в этой области». Идея построения вероятностных границ оказалась весьма продуктивной и нашла свое применение в такой форме представления неопределенности, как P-box. Еще одним подходом к распространению неопределенности являются Облака Неймайера (Neumaier's clouds), которые позволяют представить неполную стохастическую информацию четким, понятным и вычислительно привлекательным способом, а также дают возможность визуализировать неопределенность и обладают четкой семантикой, выступая посредником между понятием нечеткого множества и вероятностным распределением. В рамках основных подходов к распространению неопределенности следует указать также на математическую теорию очевидностей (свидетельств) Демпстера-Шафера (Dempster-Shafer theory), основанную на функции доверия (belief functions) и функции правдоподобия (plausible reasoning), которые исполь-

зуются, чтобы скомбинировать отдельные части информации (свидетельства) для вычисления вероятности события. Данная теория позволяет построить необходимые основания в условиях неопределенности путем оценки верхней и нижней границы интервала возможностей. Среди подходов к распространению неопределенностей следует особенно выделить метод, который опирается на понятие «вероятность второго порядка», и известен как *second-order probability*. Данный подход представляет собой метод, позволяющий строить вероятностные оценки в случае эпистемической неопределенности.

Анализ отечественных и зарубежных публикаций показал, что такие понятия, как обработка неопределенностей (*tradement*), управление неопределенностями (*management of uncertainties*) и теория неопределенностей (*theory of uncertainty*) становятся все более популярными направлениями исследований. На это указывает присутствие данных направлений в международных конференциях, а также количество работ по данному направлению за последние несколько лет.

В этом контексте необходимо отметить книгу О.И. Ужга-Реброва «Управление неопределенностями» (2004) [97], которая посвящена современным концепциям и приложениям теории вероятностей. В качестве практических приложений теории вероятностей рассматриваются вероятностные классификаторы и задачи принятия решений в условиях риска. Исследованию математических методов обработки неопределенных данных посвящена монография А.В. Крянева и Г.В. Лукина (2006) [80].

Оптимизационные задачи представляют собой важную составляющую в теории и практике принятия управленческого решения. Особое место среди них занимают оптимизационные задачи с неопределенными входными данными. В случае, когда входные параметры содержат неопределенность, используется математический аппарат неопределенного программирования.

Исследованию неопределенностей и решению оптимизационных задач принятия решений в условиях неопределенности посвящены работы китайского математика В. Liu, который в работе «Теория и практика неопределенного программирования» (2009) [21] рассматривает разнообразные задачи принятия оптимальных решений в условиях различных типов неопределенности.

Неопределенное программирование представляет собой теоретические основы решения оптимизационных задач в условиях различных видов неопределенности. Подходы и методы неопределенного программирования имеют ряд достоинств и определенные недостатки. Среди достоинств следует ука-

зять на прикладной аспект данной теории, предлагающей методы решения различных оптимизационных задач с широким спектром неопределенностей. К числу таких задач можно отнести, например, задачи массового обслуживания, производственно – финансовые проблемы, задачи, присущие энергетическим и экологическим системам. Для каждого вида неопределенностей разрабатывается своя арифметика неопределенностей. Развитие теории неопределенного программирования способствует разработке нового унифицированного подхода к решению оптимизационных задач в неопределенных средах. В данном направлении следует отметить разработку гибридных алгоритмов, совмещающих в себе идеи и подходы статистического моделирования, нейронные сети, генетические алгоритмы, имитационный отжиг и табу-поиск. К недостаткам неопределенного программирования можно отнести тот факт, что в большинстве применяемых алгоритмов используется оператор математического ожидания и проводятся процедуры усреднения. Несмотря на то, что данное направление достаточно активно развивается в России и за рубежом, представленные методы и процедуры обладают рядом недостатков и в силу сложности рассматриваемых задач многие аспекты остаются изученными неполностью, а методы в силу ограничений их применимости являются недостаточно эффективными.

Одним из новых подходов в направлении представления, численных методов обработки, моделирования и анализа неопределенных данных является численный вероятностный анализ (ЧВА), как теоретическая и практическая основа информационно-аналитической технологии исследования информационных процессов в условиях элиторной и эпистемистической неопределенностей.

Численный вероятностный анализ представляет собой новый раздел вычислительной математики, который предназначен для решения разнообразных задач с неопределенными входными данными. Новизна ЧВА и основное его отличие от рассмотренных выше направлений исследования неопределенностей, в том числе интервального анализа, анализа вероятностных границ, анализа чувствительности, анализа на основе нечетких множеств, теории свидетельств, состоит главным образом в том, что в рамках ЧВА на основе использования нового понятия «вероятностное расширение функций» удалось разработать общий подход для выполнения разнообразных численных операций над случайными величинами, который в отличие, например, от интервального анализа и анализа на основе вероятностных границ, позволяет определять не только границы области

возможных значений исследуемых характеристик, но и получить их вероятностное описание внутри этого множества, что является крайне важным для процедур извлечения знаний из имеющихся данных. Построенные на основе ЧВА численные операции над данными в условиях неопределенности могут быть использованы для различных типов неопределенности. В отличие от существующих подходов, ЧВА оперирует с плотностями случайных величин, представленных гистограммами, дискретными и кусочно-полиномиальными функциями.

В отличие от большинства существующих арифметик над неопределенными величинами (интервальная арифметика, арифметика нечетких значений), арифметики, построенные на основе понятия *вероятностного расширения функций*, могут быть использованы как для независимых, так и для зависимых случайных величин, что является крайне актуальным для ряда практических задач.

Введены понятия *естественного и гистограммного расширения функции* и разработаны теоретические основы и численные алгоритмы их построения. Исследованы свойства введенных расширений и доказан ряд теорем для различных классов функций.

В монографии представлены новые алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений со случайными коэффициентами. В общем случае представлены новые алгоритмы построения совместных плотностей функции вероятности для векторов решений. В отличие от других подходов, использующих метод Монте-Карло, ЧВА — методы основаны на численном вычислении интегралов по специальным областям. Разработаны модификации, основанные на совместном использовании ЧВА и методов Монте-Карло.

Представлены новые алгоритмы решения систем нелинейных уравнений со случайными коэффициентами. В отличие от традиционных подходов, использующих метод простой итерации или Ньютона, данный подход основан на вычислении интегралов по специальным областям. Этот подход эффективен при нахождении корней одномерных уравнений. В этом случае для построения гистограммы функции плотности вероятности решения достаточно вычислять интегралы от вероятностного расширения функции.

В рамках численного вероятностного анализа введено новое понятие *гистограммы второго порядка*. Представлены алгоритмы численных операций над гистограммами второго порядка и разработана арифметика для них, методы *распространения и анализа неопределенностей* как способа извлечения знаний и снижения неопределенности в информационных про-

цессах с целью построения системы оснований для лиц, принимающих решения (ЛПР).

Особое внимание уделено новому подходу к решению задач оптимизации со случайными данными — *случайному программированию* как теоретической основе решения линейных и нелинейных оптимизационных задач принятия решений со случайными входными данными. В отличие от большинства подходов, в том числе, методов стохастического программирования и неопределенного программирования, целью случайного программирования является построение совместной функции плотности для множества решений оптимизационной задачи. Методы решения случайного программирования основаны на решении систем линейных алгебраических уравнений и систем нелинейных уравнений со случайными коэффициентами.

Введение

В монографии проведен анализ существующих технологий, которые применяются для работы с информационными потоками в рамках различных практических задач. На примере задач принятия управленческих решений выявлено, что наиболее универсальной и подходящей к задачам принятия управленческих решений является технология извлечения знаний из данных больших объемов KDD (Knowledge Discovery in Database). Однако данная технология представляет собой универсальный конструктор, который включает пять основных этапов – модулей и набор определенных общих рекомендаций и инструкций, позволяя комбинировать их и наполнять процесс извлечения знаний из данных содержанием, моделями, алгоритмами, процедурами и методами в зависимости от целей и задач исследования. Данный подход предполагает, что исследователь должен сам выбирать соответствующие его проблеме методы, то есть остается проблема выбора средств обработки и методов анализа и моделирования, применение которых позволило бы повысить эффективность процесса принятия решений.

Для решения данной проблемы проведен анализ основных факторов, влияющих на эффективность управленческого решения. Выявлено, что одним из факторов, влияющих на качество принимаемого решения, является информационная неопределенность, которая может проявиться на всех стадиях информационного процесса, включая сбор, обработку, применение соответствующих вычислительных процедур для расчета необходимых показателей и параметров, результаты которых влияют на выбор соответствующего решения из имеющихся альтернатив. На примере решения управленческих задач экономики и гидроэнергетики показано, что в условиях неопределенности ЛПР нуждается в различных видах информационной поддержки, учитывающей важные аспекты как самого процесса принятия решений в условиях информационной неопределенности, так и особенностей ЛПР, как субъекта, наделенного определенными знаниями, опытом, интуицией и рефлексией. Отмечается, что особое место среди управленче-

ских задач играет проблема согласования интересов всех заинтересованных сторон (стейкхолдеров) и проблема построения согласованного решения.

Обсуждается связь ошибок в управленческой деятельности с обработкой и численными расчетами информации без учета типа, объема, характера и методов представления неопределенностей.

Показывается, что снижение уровня неопределенности должно достигаться такими методами и средствами, чтобы на их основе предоставить ЛПР убедительные достоверные основания для выбора наилучшего решения.

Поскольку управленческая информация имеет ряд особенностей, например, большие объемы информации должны обрабатываться в жестко ограниченные или оперативные сроки и часто в условиях чрезвычайных ситуациях; исходная информация может подвергаться неоднократной обработке, преобразованию, представлению с различных производственных точек зрения, с учетом требований ЛПР и потребителей, сделан вывод, что применяемые численные методы представления, обработки, моделирования и расчета должны быть эффективными по быстрдействию, приемлемыми по точности, предоставлять возможности максимального учета особенностей неопределенностей, представления необходимой информации в визуально-интерактивном режиме. Выделен ряд факторов и признаков информационной неопределенности, существенным образом влияющих на выбор вычислительных методов и процедур обработки неопределенных данных, рассмотрены существующие методы представления неопределенности и численного моделирования.

Проведен анализ существующих численных процедур над неопределенными данными (стохастическими, интервальными и нечеткими) и сделан вывод о необходимости дальнейшей разработки арифметик неопределенных значений.

Отмечается, что наличие неопределенностей в данных при решении многих практических задач приводит к необходимости создания методов, учитывающих эти неопределенности. Так, интервальная неопределенность привела к развитию интервальных методов. Сами интервальные числа при этом можно трактовать как случайные величины, про которые известны лишь границы их изменения. Поэтому интервальная математика сосредоточивает свое внимание на вычислении гарантированных границ множеств решений и не учитывает возможного распределения плотности вероятности полученных решений.

Дальнейшие обобщения интервальной математики направлены на получение более детальных характеристик получаемых множеств решений [69].

Важное направление — вероятностное представление входных данных, например, в виде гистограммных чисел и разработка численных операций над ними [74, 75]. Одна из первых работ в этой области Герасимов В. А., Добронев Б. С., Шустров М. Ю. Численные операции гистограммной арифметики и их применения. *АиТ*. 1991, №2. С. 83–88 [66]. Наличие информации о плотности вероятности случайных величин приводит к возможности при расчетах учитывать и получать результаты в виде случайных величин с построенной плотностью вероятности. Сравнение подходов интервальной математики и численных операций над плотностями вероятности случайных величин показывает, что практически значимые плотности вероятности занимают лишь небольшую часть полученных интервалов. Поэтому, в таких случаях, границы решений мало информативны. Часто при работе со случайными величинами ограничиваются вычислением лишь небольшого числа характеристик: математического ожидания и дисперсии. Одним из подходов учета случайного характера входных данных является метод Монте-Карло [93]. При всех его положительных качествах этот метод обладает рядом недостатков. Один из самых существенных — низкая скорость сходимости. В тех случаях, когда это возможно, численные операции над плотностями вероятности случайных величин позволяют существенно поднять точность расчетов при сравнительно небольшом объеме вычислений.

В главе «Элиторная неопределенность» изложены вопросы, связанные с классической теорией вероятности, в условиях, когда существуют повторные выборки. Рассмотрены задачи построения гистограмм, полиграмм, ядерные оценки плотности вероятности и оценки точности.

В главе «Интервальное представление неопределенности» рассмотрены элементы Интервального анализа, который исторически был одним из первых способов учета эпистемических неопределенностей. Интервальные числа задают только границы неопределенной величины, ничего не говоря о внутреннем распределении. Основной задачей интервального анализа — построение точных границ множеств решений.

Вопросы, связанные с P-boxes, рассмотрены в главе «Интервальные функции распределения». P-boxes или Интервальные функции распределения (ИФР) появились на стыке теории вероятности, интервального анализа и метода вероятностных границ.

Действительно, как отмечает S.Ferson, разнообразие сложных вычислительных задач может быть решено с помощью одного — довольно простого — подхода, основанного на *анализе вероятностных границ* [27]. В этом подходе входные данные выражаются с помощью интервальных функций распределения. При этом каждая входная переменная разлагается в список пар вида (интервал, вероятность). Декартово произведение этих списков в случае независимости входных переменных позволяет вычислить функцию от этих переменных посредством создания списка, который может определить интервальную функцию распределения. Вследствие быстрого роста размерности выходных списков используются специальные способы сжатия списка (Condensation).

В главе показано новое расширение ИФР — гистограммные функции распределения, которые позволяют улучшить свойства ИФР.

В главе «*Элементы численного вероятностного анализа*» вводится понятие численного вероятностного анализа (ЧВА) и последовательно определяются его основные элементы, процедуры и методы.

Одним из способов представления и описания стохастической неопределенности в данных является функция плотности вероятности. В рамках классической теории вероятностей приводятся аналитические формулы выполнения простейших арифметических операций над случайными величинами. На практике использование данных процедур или существенно затруднено, или практически невозможно. А поскольку при построении множества решений в задачах принятия управленческих решений необходимо осуществлять численные арифметические процедуры, в том числе возведение в степень, нахождение максимального и минимального значений и выполнение операций бинарных отношений, то разработка эффективных численных методов — актуальная задача.

Для разработки арифметики и построения законов распределения функций от случайных аргументов вводится последовательно понятие гистограммной переменной (гистограммного числа) и разрабатываются численные процедуры гистограммной арифметики. Идея гистограммного подхода заключается в следующем: наряду с общими представлениями случайных величин своими плотностями в виде непрерывных функций, можно рассматривать случайные величины, плотность распределения которых представляет гистограмму.

Для численного моделирования функциональных зависимостей со случайными аргументами вводится понятие вероятностного, гистограммного расширения и естественного расширения и с использованием этих понятий

доказывается ряд теорем для различных классов функций.

Далее разрабатываются численные методы построения законов распределения функций от случайных аргументов.

На основе ЧВА разработаны методы для решения следующих алгебраических задач: решение линейных и нелинейных уравнений со случайными коэффициентами; решение линейной системы алгебраических уравнений и решение системы нелинейных уравнений со случайными коэффициентами.

В главе «*Гистограммные временные ряды*» рассмотрены ряды, описывающие ситуации, когда в течение каждого момента времени известны гистограммы, аппроксимирующие функции плотности некоторых случайных величин. Подобные ситуации возникают, когда необходима агрегация большого числа данных в некоторые моменты времени. В многих случаях гистограммы более информативны, чем, например, среднее значение. Области, где гистограммные временные ряды (ГВР) полезны, включают экономику, мониторинг окружающей среды.

Приведены новые алгоритмы прогноза плотности вероятности для ГВР.

В главе «*Случайное программирование*» изложен новый подход к решению оптимизационных задач принятия решений со случайными входными параметрами, который определяется как случайное программирование. Данный подход использует численный вероятностный анализ и позволяет строить множество решений оптимизационной задачи на основе функции совместной плотности вероятности. Рассматриваются последовательно задачи линейного и нелинейного программирования со случайными входными параметрами, строятся модели и описываются соответствующие им методы построения совместной функции плотности вероятности, описывающие множество оптимальных решений. Следует отметить, что предлагаемые модели для задач линейной и нелинейной оптимизации в рамках случайного программирования существенно отличаются от оптимизационных моделей стохастического и неопределенного программирования. Сформулируем оптимизационную ЛП-задачу в рамках случайного программирования.

Сравнение подходов на основе численного вероятностного анализа и метода Монте-Карло на ряде задач показало значительную эффективность ЧВА. Так, на модельной задаче сложения четырех равномерных случайных величин ЧВА эффективней метода Монте-Карло в тысячу раз, еще большей эффективности ЧВА достигает при решении нелинейных уравнений [17].

В главе «*Процедуры распространения неопределенностей*» рассмат-

риваются методы снижения уровня неопределенности, использующие для этого специальные способы ее представления и процедуры распространения неопределенности (propagation of uncertainty). Приводится анализ существующих методов. В настоящее время во многих работах, посвященных исследованию систем в условиях информационной неопределенности, используется подход, представляющий собой процедуру распространения неопределенности («propagation of uncertainty»), который с точки зрения процесса принятия решений можно использовать для построения системы дополнительных оснований (знаний), предоставляемых ЛППР с целью решения задачи выбора наиболее эффективного решения из множества возможных. Основная идея данного подхода состоит в следующем: если исследователь находится в условиях недостаточности или полного отсутствия эмпирической информации или оснований для выдвижения идей и предположений о неизвестном распределении входных параметров, то необходимо распространить (propagate) существующую неопределенность, чтобы получить достаточные выводы в соответствии с принципом недостаточного основания. Чтобы получить необходимые основания для оценки или восстановления неизвестного входного распределения на основе неполной, неточной информации, можно использовать различные процедуры, например, следует рассмотреть распределение вероятностей, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую имеющейся априорной информацией. При этом важно следовать такому принципу: выбрать тип представления в соответствии с количеством имеющейся информации и оставаться ей верным, включая информационные пробелы. Применение принципа недостаточности (достаточности) оснований позволяет существенно расширить формы представления неопределенностей. Например, P-boxes С. Ферсона, облака Неймайера, теория Демпстера-Шафера, интервальные гистограммы, гистограммы второго порядка.

Для построения системы дополнительных оснований предлагается использовать численный вероятностный анализ. Представление неопределенности, содержащейся во входных данных, осуществляется с использованием интервальных гистограмм и гистограмм второго порядка, на основе которых строятся процедуры ее распространения. С этой целью на основе гистограмм второго порядка разработана арифметика неопределенных данных. Приводятся численные примеры и обсуждается практика применения данного подхода.

Численный вероятностный анализ (ЧВА), представляет собой еще один способ распространения информационной неопределенности, в том числе

для задач, когда вероятностные оценки входных параметров носят неопределенный характер. С целью снижения уровня информационной неопределенности и получения дополнительной информации о распределении параметров в условиях информационной недостаточности предлагается использовать гистограммный подход. Для решения таких задач можно также использовать интервальные гистограммы и гистограммы второго порядка. В тех случаях, когда нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины задают оценки плотности распределения сверху и снизу.

Использование гистограмм второго порядка (ГВП) в условиях неопределенности вероятностных характеристик параметров системы имеет широкую область применения к решению разнообразных практических задач, например, к решению задач оценки эффективности инвестиционных проектов. В данном случае мы имеем дело с высоким уровнем рыночной неопределенности, где в стандартной финансовой модели не учитывается вероятностная природа характеристик оцениваемых показателей и соответственно не может быть достаточных оснований для принятия эффективных инвестиционных решений, а в используемых методах, например, в методе дисконтированных денежных потоков, не учитывается вероятностный характер результатов инвестиционных проектов. Гистограммы второго порядка также могут успешно применяться в задачах оценки показателей надежности и оценки безотказной работы сложных технических систем, для изучения гидрологических и других систем. Решение практических задач с использованием методов интерполяции и экстраполяции также лежит в сфере применения ГВП. Рассмотрим примеры, где возникает необходимость использования ГВП.

При численном моделировании часто приходится пользоваться различными зависимостями между входными и выходными величинами в том числе как эмпирическими зависимостями, построенными на основе наблюдений, так и получающимися в процессе исследования. Для этого широко применяются методы интерполяции и экстраполяции. Например, задачи интерполяции возникают при подборе эмпирической формулы по данным измерения. Здесь надо предостеречь от формального, слепого подбора такой формулы только по измеренным значениям. Выбор вида формулы (многочлен, степенная функция, экспонента и т. д.) должен опираться не только на теоретическое обсуждение различных свойств изучаемой зависимости, но и на анализ имеющейся информации с точки зрения ее полноты и специфических особенностей присутствующей в ней неопределенно-

сти. Это означает, что необходимо проанализировать множество аспектов, связанных как с понятием неопределенной информации, так и собственно самими численными методами, предназначенными для ее представления, обработки, преобразования и извлечения знаний. С этой точки зрения следует выделить два важных аспекта, которые следует иметь в виду исследователю при работе с неопределенными данными. Первый аспект связан с понятием неопределенная информация и проблемой изучения источников неопределенности и снижения уровня неопределенности в данных. Вторым аспектом связан с выбором численного метода для реализации вычислительных процедур, которые могли бы существенно помочь исследованию, а не оказаться источником ошибок. В рамках поставленных проблем рассмотрим применение ЧВА к задачам интерполяции и экстраполяции в условиях стохастической неопределенности.

Результаты проведенных исследований и численные примеры показывают возможность использования гистограмм второго порядка для представления различных типов информационной неопределенности и позволяют проводить численное моделирование на основе процедур распространения неопределенности для построения дополнительных оснований с целью снижения уровня неопределенности, присутствующей в исходной информации, в частности, для задач с неопределенными параметрами вероятностных характеристик входных данных и задач стохастической интерполяции.

В главе «Технология информационной поддержки принятия инвестиционных решений» рассматривается информационный процесс, сопровождающий решение задачи выбора проекта для вложения инвестиций. Проводится анализ финансово-экономической информации, на основе которой осуществляется оценка системы показателей, отражающих инвестиционную привлекательность проекта. Данный анализ показал, что оценка инвестиционных проектов представляет собой сложный процесс, в основе которого лежат определенные методики расчета финансово-экономических показателей привлекательности проекта на основе количественной и качественной информации, представленной в бизнес-плане. Оценка этих показателей осуществляется по определенным расчетным формулам и как, правило, без учета анализа неопределенностей, содержащихся во входной информации. Данные, включаемые в бизнес-план, представляют собой в большей степени, усредненные значения показателей, которые в дальнейшем используются в расчетных формулах. Основной проблемой бизнес-планирования в настоящее время является прогноз существенных факторов внешней и внутренней экономической среды, и их влияние на ход ре-

ализации и результаты проекта. Данная задача осложняется тем, что параметры проекта не могут быть определены однозначно в условиях недостаточной информации и, как следствие, результаты реализации проекта могут значительно отличаться от ожидаемых. При принятии решения о реализации проекта предприятию (при принятии решения о выдаче кредита банком или об оказании поддержки административными органами) необходимо оценивать возможные риски, который несет с собой реализация проекта с целью планирования мер по их предупреждению и минимизации и стоимостной оценки данных мероприятий. Расчетные методы, используемые планировщиками, не включают в себя современный математический аппарат, направленный на оценку вероятностных факторов по причине сложности их реализации. В итоге оценка рисков часто на практике ограничивается тремя составляющими:

1. Качественный анализ всех возможных рисков, с которыми может столкнуться предприятие в ходе реализации проекта.

2. Анализ безубыточности проекта, включающий определение точки безубыточности.

3. Анализ чувствительности финансовых результатов предприятия к изменению основных параметров проекта (цена реализации продукции, цена на сырье и материалы и т. д.) на момент выхода на полную мощность.

Такая методика расчета как на теоретическом, так и на практическом уровне не учитывает вероятностный характер входных и результирующих показателей инвестиционного проекта, делает невозможным управление проектом в ходе его реализации, и соответственно затрудняет принятие эффективных управленческих решений.

Для снижения уровня неопределенности при оценке инвестиционных показателей предлагается методика на основе численного вероятностного анализа и рассматриваются основные этапы информационной поддержки процесса принятия инвестиционного решения.

Глава 1.

Элиторная неопределенность

Во многих практических случаях возникает необходимость по экспериментальным данным оцепить распределение вероятностей измеренной случайной величины. Эта задача имеет свою долгую историю, которая, судя по всему, еще не закончена. Было предложено и развито много различных подходов к этой задаче, каждый из которых обладает преимуществами перед другими в некоторой конкретной ситуации. Все эти подходы достаточно четко можно разделить на два класса — параметрическое и непараметрическое оценивание распределений [94].

Параметрический подход к оцениванию распределений сводится к тому, чтобы из некоторого, более или менее широкого параметрического класса распределений подобрать то, которое наилучшим образом соответствует выборке. Например, центральная предельная теорема гарантирует, что во многих (хотя далеко не всех) случаях приемлемой аппроксимацией может служить нормальное распределение; в этих случаях задача сводится к оценке по выборке среднего и дисперсии. Если заведомо известна ограниченность возможных значений случайной величины X с одной стороны, параметрический подход предлагает пользоваться семействами лог-нормальных или гамма-распределений; при ограниченности X сверху и снизу — семейством бета-распределений. Если ввести в рассмотрение такие показатели формы распределения, как квадрат нормированного коэффициента асимметрии β_1 и нормированный показатель островершинности β_2 , выражаемые через моменты третьего и четвертого порядка, то можно указать области значений (β_1, β_2) в которых распределения принадлежат к тому или иному типу. Существует, однако, область, которая не охватывается перечисленными выше распределениями. Чтобы перекрыть и ее, Н. Джонсон предложил рассматривать параметрические классы распределений, получаемых некоторыми трансцендентными преобразованиями нормальной

случайной величины, а Е. Пирсон — класс распределений, порождаемых определенным дифференциальным уравнением. Другие типы параметрических оценок распределений получаются при использовании конечного числа членов разложений Корниша — Фишера, Грама — Шарлье, Эджворта и т. д.

Прежде чем перейти к конкретным непараметрическим оценкам плотностей или функций распределения, рассмотрим вопрос о возможных типах сходимости статистических оценок непрерывных функций к оцениваемым функциям. Для получения непараметрических оценок функции распределения F или плотности могут быть использованы различные статистические факты, что приводит к оценкам различных типов и качества. Предпочтение обычно отдается оценкам, лучшим по качеству, однако в ряде практических ситуаций на первый план может выступить объем вычислений, необходимый для достижения результата (в особенности в многомерном случае).

Рассмотрим, какими свойствами могут обладать статистические оценки функций и как их качества могут быть описаны количественно. Поскольку от оценки функции естественно ожидать определенного приближения, стремления к неизвестной оцениваемой функции, то прежде всего необходимо установить, какие типы сходимости одной функции к другой вообще возможны. Для простоты будем пока говорить об одномерных функциях.

Пусть имеется некоторая неизвестная функция $y(x)$ и ее статистическая оценка $y_n(x)$, построенная на основе выборки x_1, x_2, \dots, x_n с использованием определенной априорной информации. В непараметрической постановке задачи об оценивании функции $y(x)$ роль априорной информации играет тот или иной непараметрический факт, имеющий отношение к функции $y(x)$.

Можно тем или иным образом определить метрику ρ и расстояние $\rho = \rho(y, y_n)$ между $y(x)$ и $y_n(x)$ т. е. числовую меру различия между ними. Тогда сходимость последовательности функций естественно понимать как сходимость последовательности случайных величин $\rho(y, y_n)$ к нулю.

Так, если

$$\rho(y, y_n) = \sqrt{\int_{\Omega} (y(x) - y_n(x))^2 dx},$$

то говорят о сходимости в среднеквадратическом смысле или в норме l_2 .

Указанные выше требования к сходимости функций могут быть предъявлены как к оценкам функции распределения, так и к оценкам плотности.

Однако оказывается, что некоторые оценки плотности, вполне приемлемые для ряда практических целей, не удовлетворяют ни одному из приведенных выше определений сходимости. Тем не менее можно говорить об их сходимости в некотором ином смысле.

Будем говорить, что y_n сходится к $y(x)$ в кусочно-интегральном смысле, если для некоторой совокупности интервалов $\{\Delta_k\}$ выполняется условие [94]

$$\int_{\Delta_k} y_n(x) dx \rightarrow \int_{\Delta_k} y(x) dx, k = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Если (1.1) имеет место лишь для конечных Δ_k , будем говорить о слабой кусочно-интегральной сходимости.

1.1. Эмпирическая функция распределения

Пусть перед нами стоит задача оценивания функции распределения одномерной непрерывной случайной величины X по выборке x_1, x_2, \dots, x_n . Поскольку функция распределения $F(x)$ определяется как вероятность события (\leq), то оценка этой вероятности будет оценкой для $F(x)$ в точке x . Известно, что оценкой вероятности событий является его относительная частота. В данном случае число «благоприятных исходов» равно числу выборочных значений, не превышающих заданную величину x . Можно записать

$$F_N = P(X \leq x) = \frac{m_x}{N}. \quad (1.2)$$

Если теперь рассматривать F_N как функцию x , то (1.2) является оценкой функции распределения $F(x)$. Эту оценку будем называть *эмпирической функцией распределения*.

Случайная величина $F_N(x)$ распределена согласно биномиальному распределению, поэтому ее среднее значение и дисперсия легко вычисляются:

$$E(F_N(x)) = F(x), \quad (1.3)$$

$$D(F_N(x)) = \frac{1}{N} F(x)(1 - F(x)). \quad (1.4)$$

Теорема Гливленко–Кантелли.

$$P\{\sup_x |F(x) - F_n(x)|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0\} = 1.$$

Свойство $F_N(x)$: *усиленный закон больших чисел*: $F_N(x) \rightarrow F(x)$ с вероятностью 1 для всех x .

Таким образом, $F_N(x) \rightarrow F(x)$ равномерно по x , что говорит о высоком качестве такой оценки неизвестного распределения.

На практике часто бывает необходимым оценить точность получаемой оценки $F_N(x)$ либо, наоборот, задав необходимую точность, указать объем выборки, при котором гарантируется указанная точность. Определяющим моментом здесь является выбор нормы, так как различные нормы обладают разными статистическими свойствами. Например, если в качестве меры точности выбрать величину

$$d_N = \|F_N - F\|_\infty = \sup |F_N - F|,$$

то ее асимптотическое распределение выражается формулой [94]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sqrt{N}d_N \leq z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \exp(-2i^2 z^2),$$

с помощью которой можно найти необходимые характеристики точности (например, доверительный интервал, дисперсию и т. п.).

Теорему Гливленко–Кантелли уточняет неравенство Колмогорова–Смирнова:

$$P\{\sup_x |F(x) - F_n(x)| > \varepsilon\} < 2 \exp(-2\varepsilon^2 N).$$

справедливое для любого закона распределения при достаточно большом N .

1.2. Дискретная (квантильная) оценка функции распределения

Для построения эмпирической функции распределения используется непараметрический факт сходимости относительной частоты к неизвестной вероятности. С помощью любого другого непараметрического факта, связанного со значением функции $F(x)$, можно было бы получить другую оценку $F_N(x)$. Такую возможность предоставляет, в частности, статистическая связь между выборочным значением и его рангом. Одно из проявлений этой связи выражается в том, что [94]

$$E(F(x_i)|R_i) = \frac{R_i}{N+1}. \quad (1.5)$$

Функцию $F(x)$ можно оценить в выборочных точках величиной

$$F_N(x_i) = \frac{R_i}{N+1}. \quad (1.6)$$

Квантильная оценка функции распределения является дискретной, так как она определена только в точках, соответствующих выборочным значениям. Можно было бы поставить вопрос об аппроксимации некоторой непрерывной функции квантильной оценки, например, о построении сплайна, график которого проходит через все точки.

1.3. Гистограммы

В тех случаях когда желательно по данным эксперимента построить оценку плотности вероятностей, экспериментаторы чаще всего прибегают к построению гистограммы. Процедура ее построения проста и состоит из следующих шагов.

В области возможных значений измеряемой величины X строится сетка $\omega = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$.

Определяется, сколько выборочных значений m_i от общего числа N оказалось в каждом интервале $(x_{i-1}, x_i]$.

Над каждым из интервалов строится вертикальный прямоугольник с площадью m_i/N . Высота прямоугольника $P_i = m_i/(N(x_i - x_{i-1}))$.

Полученная совокупность прямоугольников и называется *гистограммой*. Другими словами гистограмма — кусочно-постоянная функция и определяется своей сеткой ω , значениями $\{P_i\}$, принимающая на каждом интервале $(x_{i-1}, x_i]$ постоянное значение P_i .

Основанием для использования гистограммы $p_h(x)$ в качестве оценки неизвестной плотности вероятностей $p(x)$ является кусочно-интегральная сходимость $p_h(x)$ к $p(x)$, которая следует из того, что относительная частота m_i/N события $X \in (x_{i-1}, x_i]$ сходится к его вероятности p_i

$$\frac{m_i}{N} \rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx.$$

Такой сходимости в ряде практических случаев оказывается достаточно; однако всегда желательно по возможности улучшить оценку при заданных ограничениях. Несколько факторов влияет на качество гистограммы: объем выборки N , величина интервалов группировки. Все осложняется еще и тем, что степень влияния этих факторов зависит от неизвестного экспериментатору до опыта истинного распределения вероятностей $p(x)$. Поэтому на практике гистограммы строят с некоторым учетом свойств полученной выборки. Например, величина интервала группировки выбирается так,

чтобы не сгладить существенные особенности распределения; объем выборки связывают с тем, чтобы в ячейке с наименьшим числом измерений их насчитывалось не менее пяти; размещение интервалов связывают с положением наименьшего и наибольшего выборочных значений и т. п. Отметим также, что на качество гистограммы влияет и точность измерений [94].

Теоретическая задача оптимизации гистограммы может быть сформулирована в нескольких вариантах, однако ее решение связано с трудностями, так что конкретных результатов можно добиться лишь при некоторых частных предположениях.

Основной трудностью при построении гистограммы является выбор разбиения ω . Рекомендуется интервалы $(x_i, x_{i+1}]$ выбирать так, чтобы в каждый из них попадало одинаковое количество членов выборки, например, 5–10 при N порядка 100. При увеличении N количество членов выборки в каждом интервале необходимо увеличивать. Если обозначить h_{\max} длину наибольшего интервала, то h_{\max} играет роль параметра регуляризации при оценивании плотности по гистограмме. При $N \rightarrow \infty$ h_{\max} должен уменьшаться согласованно с ростом N .

1.4. Полиграмма

Можно предложить (Тарасенко [94]) еще одну непараметрическую оценку плотности, основой для которой является непараметрический факт, одно из конкретных проявлений этого факта состоит в том, что

$$P(|F(x_{(i+k)}) - F(x_{(i)}) - \frac{k}{N+1}| > \varepsilon) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

где $F(x)$ — истинная (и неизвестная) непрерывная функция распределения, $x_{(s)}$ — S -я порядковая статистика выборки x_1, x_2, \dots, x_N .

По определению функции плотности вероятности

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad (1.8)$$

следовательно, можно воспользоваться в качестве оценки неизвестной плотности в интервале $(x_{(i)}, x_{(i+k)}]$ величиной

$$\frac{k}{(N+1)(x_{(i+k)} - x_{(i)})}. \quad (1.9)$$

Для удобства обозначим порядковые статистики, ранги которых кратны K , через $\xi_j = x_{(jk)}$. Введя обозначение $m = K/N$ и введя функцию-индикатор интервала с помощью ступенчатой функции

$$c(t) = \{1 : t \geq 0; 0 : t < 0\},$$

результатирующую оценку плотности можно записать как

$$f_N(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{c(x - \xi_j) - c(x - \xi_{j+1})}{\xi_{j+1} - \xi_j}. \quad (1.10)$$

Будем называть оценку (1.10) полиграммой K -го порядка. Построение полиграммы сводится к упорядочению выборки и построению прямоугольников площади $K/(N + 1)$.

В [94] показано, что полиграмма K -го порядка является асимптотически несмещенной оценкой $f(x)$ и имеет конечные моменты лишь при $r \leq K$.

Теорема. *Если неизвестная плотность $f(x) > 0$, ограниченная вместе со своей первой производной, оценивается полиграммой $f_N(x)$ K -го порядка, $K = N^\alpha$, $\alpha < 0.5$ $f_N(x)$ является состоятельной оценкой $f(x)$.*

1.5. Восстановление плотности распределения методом Розенблатта–Парзена

Дифференцируя эмпирическую функцию распределения, получаем оценку

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i),$$

где δ — функция Дирака.

Эта оценка плотности неудобна, поскольку является обобщенной функцией. Модифицируем оценку \hat{p} , представив ее в виде классической функции за счет аппроксимации обобщенных функций $\delta(x - x_i)$.

Пусть $\{\psi_n\}$ — последовательность таких симметричных плотностей, что $\psi_n \rightarrow \delta$, $n \rightarrow \infty$. Определим оценку плотности равенством

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(x - x_i), \quad (1.11)$$

Теорема 2. *Оценка (1.11) состоятельна в среднем квадратичном в каждой точке x непрерывности $p(x)$, если:*

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x-s)p(x)ds \rightarrow p(x)$ при $n \rightarrow \infty$;
2. $\frac{1}{n}\psi_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы если

$$\{\psi_n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left(\frac{-x^2}{2h^2}\right).$$

В методе Розенблатта–Парзена число h играет роль параметра регуляризации. Конструктивные способы выбора подходящего значения h при конечном объеме выборки могут быть предложены только на основании дополнительной информации об искомой плотности.

1.6. Проекционные методы

Проекционные методы основаны на разложении искомой плотности в ряд по ортогональной системе функций относительно фиксированной реперной плотности.

Пусть известно, что искомая плотность $p(x)$ достаточно близка к некоторой известной плотности $p_0(x)$, которую будем называть *реперной*. Предположим для определенности, что промежуток изменения возможных значений X — вся числовая ось.

Обозначим через $\{q_k\}$ систему полиномов, нормированных на $(-\infty, \infty)$ с весом $p_0(x)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_i(x)q_j(x)p_0(x)dx = \delta_{ij},$$

причем $q_0 = 1$, q_k — полином степени k .

Такая система полиномов определена однозначно и ее можно найти с помощью стандартной процедуры ортогонализации Гильберта–Шмидта. Обозначим

$$q_k(x) = \sum_{j=0}^k a_{kj}x^j$$

и представим искомую плотность в виде

$$p(x) = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} C_k q_k(x).$$

Глава 2.

Интервальное представление неопределенности

2.1. Интервальные числа

Под *интервальным числом* \mathbf{a} мы будем понимать вещественный отрезок $[\underline{a}, \bar{a}]$, где $\underline{a} \leq \bar{a}$. Множество интервальных чисел мы будем обозначать через \mathbf{R} . При $\underline{a} = \bar{a} = \mathbf{a}$ интервальное число будем отождествлять с вещественным числом a , следовательно $R \subset \mathbf{R}$. В дальнейшем мы будем называть интервальные числа просто интервалами. *Ширина* \mathbf{a} — это величина

$$\text{wid}(\mathbf{a}) = \bar{a} - \underline{a},$$

середина — полусумма

$$\text{med}(\mathbf{a}) = (\underline{a} + \bar{a})/2.$$

Если S — непустое ограниченное множество в R^n , то его *интервальной оболочкой* $\square S$ определим наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S .

Арифметические операции над интервальными числами введем следующим образом. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}$, тогда положим

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{x * y | x \in \mathbf{a}, y \in \mathbf{b}\},$$

где знак $(*)$ — одна из операций $+, -, \cdot, /$. При делении интервал $\mathbf{b} = [\underline{b}, \bar{b}]$ не должен содержать ноль. Введенные выше операции эквивалентны следующим:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}],$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}],$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b})],$$

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = [\underline{a}, \bar{a}]/[\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}], \quad 0 \notin [\underline{b}, \bar{b}].$$

Если \mathbf{a} и \mathbf{b} вырождаются в вещественные числа, то эти равенства совпадают с обычными арифметическими операциями. Интервальные операции сложения и умножения остаются коммутативными и ассоциативными, т. е. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Если $r(x)$ — непрерывная унарная операция на R , то

$$r(X) = \left[\min_{x \in X} r(x), \max_{x \in X} r(x) \right]$$

определяет соответствующую ей операцию на R . Примерами таких унарных операций могут служить

$$\exp(X), \ln(X), \sin(X), \dots$$

Теперь укажем отличия интервальной арифметики от обычной. Вместо дистрибутивности умножения относительно сложения для $a, b, c \in R$, т. е. $a(b + c) = ab + ac$, выполняется субдистрибутивность

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subset \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Заметим, что R не является полем: элементы R не имеют обратных элементов относительно сложения и умножения. В частности, $\mathbf{a} - \mathbf{a} \neq 0$ и $\mathbf{a}/\mathbf{a} \neq 1$. Вместо этого действуют два других правила сокращения:

1. Из $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ следует $\mathbf{b} = \mathbf{c}$;
2. Из $\mathbf{ab} = \mathbf{ac}$ и $0 \notin \underline{a}$ следует $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Интервальные арифметические операции обладают свойством *монотонности по включению*: из условий $\mathbf{a} \subset \mathbf{c}, \mathbf{b} \subset \mathbf{d}$ следуют включения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &\subset \mathbf{c} + \mathbf{d}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} \subset \mathbf{c} - \mathbf{d}, \\ \mathbf{ab} &\subset \mathbf{cd}, \quad \mathbf{a}/\mathbf{b} \subset \mathbf{c}/\mathbf{d} \quad 0 \notin \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Унарные операции обладают сходными свойствами:

$$\begin{aligned} X \subseteq Y &\Rightarrow r(X) \subseteq r(Y), \\ x \in Y &\Rightarrow r(x) \in r(Y). \end{aligned}$$

Мы расширим отношения порядка $* \in \{<, \leq, >, \geq\}$ на интервальные переменные:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} \Leftrightarrow \tilde{x} * \tilde{y} \text{ для всех } \tilde{x} \in \mathbf{x}, \tilde{y} \in \mathbf{y}.$$

Расстояние ρ между двумя интервалами \mathbf{a} , \mathbf{b} определяется следующим образом:

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|\}.$$

Для вырожденных интервалов введенное расстояние сводится к обычному расстоянию между вещественными числами:

$$\rho(a, b) = |a - b|.$$

Рассмотренная выше метрика на \mathbf{R} является частным случаем хаусдорфовой.

Если U и V — непустые компактные множества вещественных чисел, то *хаусдорфово* расстояние определяется как

$$\rho(U, V) = \max\{\sup_{v \in V} \inf_{u \in U} \rho(u, v), \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} \rho(u, v)\}.$$

Вводя на множестве метрику, мы делаем его топологическим пространством. При этом понятия сходимости и непрерывности могут быть использованы обычным образом. Последовательности интервалов сходятся, если сходятся последовательности границ интервалов. Метрическое пространство \mathbf{R} с метрикой ρ является замкнутым метрическим пространством, и введенные арифметические операции непрерывны.

2.2. Интервальные расширения

Рассмотрим непрерывные вещественные функции. Примем при этом, что все функции, с которыми мы будем иметь дело, можно вычислить, используя конечное число арифметических операций и операндов. Такие функции мы в дальнейшем будем называть *рациональными*. Одна и та же рациональная функция f может иметь несколько аналитических представлений.

Интервально-значная функция \mathbf{f} называется *монотонной по включению*, если для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ из соотношения $\mathbf{a} \subset \mathbf{b}$ вытекает, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{b}).$$

Заметим, что согласно методу математической индукции из монотонности по включению для интервальных операций это свойство справедливо для любого рационального выражения $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, содержащего переменные $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ и интервальные константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$.

Пусть $f(x)$ — вещественная функция, непрерывная в области $\mathbf{a} \subset \mathbf{R}^n$. *Объединенным расширением* этой функции мы будем называть интервальную функцию $\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x})$ переменных $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subset \mathbf{a}$, задаваемую равенством

$$\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x}) = \bigcup_{x \in \mathbf{x}} f(x). \quad (2.1)$$

Непрерывность функции f является гарантией того, что при каждом \mathbf{x} правая часть в (2.1) будет конечным отрезком.

Как видно из (2.1), объединенное расширение монотонно по включению. Кроме того, оно минимально из всех возможных интервальных расширений.

Назовем *интервальным расширением* вещественной функции $f(x)$, $x \in D \subset \mathbf{R}^n$ интервальную функцию \mathbf{f} , $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ такую, что

$$f(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \forall x \in D.$$

Тогда для любого монотонного по включению интервального расширения \mathbf{f} имеет место включение

$$\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \subset D.$$

Рассмотрим вещественную рациональную функцию $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Для нее интервальное расширение можно получить естественным путем, если заменить аргументы x_i и арифметические операции соответственно интервальными числами и операциями. Как уже говорилось, полученное таким образом *естественное расширение* $\mathbf{f}_{ne}(\mathbf{x})$ будет монотонно по включению. Поэтому

$$\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}_{ne}(\mathbf{x})$$

для любых $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, для которых определена правая часть.

Отметим, что естественное интервальное расширение существенно зависит от способа записи рационального выражения.

Существуют способы представления рациональных выражений когда естественное интервальное расширение совпадает с объединенным [34].

Теорема 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — рациональное выражение, в котором каждая переменная встречается не более одного раза и только в первой степени, $\mathbf{f}_{ne}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ — его естественное расширение. Тогда

$$\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{f}_{ne}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

для любого набора $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, такого, что $\mathbf{f}_{ne}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ имеет смысл. \square

В случае если не удастся достигнуть ситуации, когда каждая переменная встречается только один раз, по крайней мере, надо стремиться к уменьшению числа вхождений каждой переменной. Это обычно приводит к уменьшению ширины интервального расширения.

Суперпозиции рациональных и элементарных функций охватывают подавляющую часть нужных нам применений. Мы будем называть *естественным интервальным расширением* таких выражений интервальные функции, в которых вещественные аргументы заменены интервальными числами, а вещественные арифметические операции — интервальными операциями.

Пусть \mathcal{F} — множество вещественных функций, для которых мы можем строить объединенные интервальные расширения. В это множество мы включим все элементарные функции $\{\sin, \cos, \ln, \exp, \dots\}$, их рациональные комбинации и суперпозиции.

Рассмотрим обобщение теоремы 1.. Для $f \in \mathcal{F}$ предположим, что мы можем представить $f(x_1, \dots, x_n)$ как рациональное выражение от некоторых функций $g_i(x_k, \dots, x_l)$.

Пусть функции g_i обладают следующими свойствами:

- 1) для каждой функции g_i построено объединенное расширение;
- 2) наборы переменных для разных функций g_i попарно не пересекаются.

Тогда, сделав замену переменных $z_i = g_i(x_k, \dots, x_l)$, мы попадаем в область действия теоремы 1. и можем построить для f объединенное расширение.

Пример 1. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = xy + x + y + 1$. Естественное интервальное расширение этой функции не будет совпадать с объединенным, поскольку переменные x, y встречаются более одного раза. В качестве функций g_i можно взять $g_1(x) = x + 1$, $g_2(y) = y + 1$. Тогда $f(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ и соответственно $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_2(\mathbf{y})$.

Заметим, что представление функции f со свойствами 1), 2) в большинстве случаев невозможно. Однако мы будем стремиться выполнить эти свойства как можно полнее. Естественно предположить, что таких представлений будет несколько. Обозначим через \mathbf{f}_j различные интервальные расширения, порожденные этими представлениями. Тогда в качестве наилучшего из возможных интервальных расширений мы можем взять

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \bigcap_j \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Этот простой прием на практике позволяет существенно снижать ширину интервальных расширений.

Заметим, что естественные интервальные расширения, как правило, имеют значительно более широкие интервалы в сравнении с объединенными расширениями. Рассмотрим прием уменьшения ширины интервальных вычислений, описанный в [33]. Идею поясним на примере функций одной переменной.

Пусть $f: \mathbf{a} \rightarrow R$ — непрерывная функция, а $\mathbf{f}_{ne}(\mathbf{x})$ — ее естественное интервальное расширение. Разобьем \mathbf{a} на p интервалов равной длины

$$\mathbf{a} = \bigcup_{i=1}^p \mathbf{a}_i, \quad \text{wid}(\mathbf{a}_i) = \text{wid}(\mathbf{a})/p.$$

Тогда интервал $\mathbf{b} = \bigcup_{i=1}^p \mathbf{f}_{ne}(\mathbf{a}_i)$ по-прежнему будет содержать объединенное расширение $\mathbf{f}_{un}(\mathbf{a})$, но, как правило, будет иметь меньшую ширину, чем $\mathbf{f}_{ne}(\mathbf{a})$:

$$\mathbf{f}_{un}(\mathbf{a}) \subset \mathbf{b} \subset \mathbf{f}_{ne}(\mathbf{a}). \quad (2.2)$$

Более того, при $p \rightarrow \infty$

$$\text{wid}(\mathbf{b}) - \text{wid}(\mathbf{f}_{un}(\mathbf{a})) = O(1/p). \quad (2.3)$$

В принципе этот прием можно распространить и на большие размерности, в том числе останутся справедливыми свойства (2.2) и (2.3). Но для n переменных вектор $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ будет подразделяться уже на p^n равных частей. Поэтому при практических вычислениях этот прием используется только для небольших размерностей.

Если известны интервальные расширения первых производных, то можно построить интервальные расширения следующим образом.

Пусть, например, $f: R^n \rightarrow R$ непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{a} \in R^n$ и \mathbf{g}_i — интервальные расширения первых производных $g_i = \partial f / \partial x_j$. Пусть $\mathbf{c} = \text{med}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Тогда для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^n g_j(\xi)(x_j - c_j), \quad \xi \in \mathbf{x}.$$

Заменяя производные их интервальными расширениями, получим соотношение

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_j(\mathbf{x})(x_j - c_j),$$

его правая часть определяет интервальную функцию

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(c) + \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_j(\mathbf{x})(\mathbf{x}_j - c_j),$$

которая обычно называется mv -формой (mean value form [34]). Справедлив следующий результат [13].

Теорема 2. Пусть производные \mathbf{g}_j для всех $j = 1, \dots, n$ удовлетворяют условию Липшица на \mathbf{a} , и при $\text{wid}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$

$$\text{wid}(\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) - \text{wid}(\mathbf{g}_{j,un}(\mathbf{x}))) = O(\text{wid}(\mathbf{x})) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad \forall \mathbf{x} \subset \mathbf{a}. \quad (2.4)$$

Тогда

$$\text{wid}(\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}) - \text{wid}(\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x}))) = O(\text{wid}^2(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \subset \mathbf{a}. \quad (2.5)$$

Если вместо (2.4) справедлива более грубая оценка

$$\text{wid}(\mathbf{g}_j(\mathbf{x})) \leq c \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \mathbf{x} \subset \mathbf{a}, \quad (2.6)$$

то вместо (2.5) выполняется соотношение

$$\text{wid}(\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}) - \text{wid}(\mathbf{f}_{un}(\mathbf{x}))) = O(\text{wid}(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \subset \mathbf{a}. \square$$

Таким образом, имея интервальные расширения производных, можно получать mv -форму функции, обладающей большей асимптотической точностью, чем исходные расширения производных.

2.3. Интервальные сплайны

Рассмотрим вопросы построения интервальных сплайнов. Они вводятся как интервальные расширения по определенным параметрам соответствующих вещественных сплайнов. При небольшой априорной информации об интерполируемой функции строятся ее двусторонние приближения.

Для частного вида интервальных функций введем следующие понятия. Пусть интервальная функция имеет вид

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i g_i(x), \quad g_i \in C^m[a, b].$$

Тогда формальную производную от $\mathbf{f}(x)$ определим таким образом:

$$\partial^k \mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i g_i^{(k)}(x), \quad k = 0, \dots, m.$$

Соответственно функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x), \quad a_i \in \mathbf{a}_i$$

будем называть *сужением функции \mathbf{f}* по константам \mathbf{a}_i .

Приведем необходимые для дальнейшего изложения элементы теории сплайнов [79]. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка

$$\omega = \{x_i | a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$$

с целым $N \geq 2$ и шагами $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_i$.

Функцию s называют сплайном степени n дефекта k (k — целое, $1 \leq k \leq n$) с узлами на ω , если:

$$1) \quad s(x) = \sum_{i=0}^n a_{ij} (x - x_j)^i \quad [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N-1; \quad (2.7)$$

$$2) \quad s \in C^{n-k}[a, b]. \quad (2.8)$$

Множество сплайнов, удовлетворяющих этим условиям, обозначим через S_n^k .

Обратимся к вопросу интерполирования заданных функций сплайнами нечетных степеней. Положим целое $m = (n-1)/2$ и будем считать дефект $k \leq m+1$.

Пусть $f \in C^{n-k}[a, b]$. Поставим задачу определения сплайна $s \in S_n^k$, интерполирующего функцию f в следующем смысле:

$$s^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, k-1. \quad (2.9)$$

Дополнительно задается еще по $m+1$ краевому условию $[a, b]$. Часто они берутся в виде

$$s^{(j)}(a) = f^{(j)}(a), \quad s^{(j)}(b) = f^{(j)}(b), \quad j = 0, \dots, m. \quad (2.10)$$

Условия (2.9), (2.10) приводят, соответственно, к $2(N-1)k$ и $(n+1)$ уравнениям для коэффициентов a_{ij} . Еще $(n-2k+1)(N-1)$ уравнений вытекают

из условия непрерывности производных в соответствии с (2.8). В итоге получается система линейных алгебраических уравнений

$$Aa = b \quad (2.11)$$

с квадратной матрицей $A \in R^{N(n+1) \times N(n+1)}$, вектором неизвестных $a \in R^{N(n+1)}$, известной правой частью $b \in R^{N(n+1)}$. Не исследуя общего случая, в дальнейшем выпишем эту систему для конкретных примеров и исследуем ее разрешимость.

Теперь перейдем к определению интервальных сплайнов вещественного аргумента. Необходимость их использования возникает, когда вместо точных значений функции f и ее производных известны только интервальные оценки, которым они принадлежат. Пусть известны интервальные константы:

$$f^{(j)}(x_i) \in \mathbf{f}_i^j, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, k-1; \quad (2.12)$$

$$f^{(j)}(a) \in \mathbf{f}_0^j, \quad f^{(j)}(b) \in \mathbf{f}_N^j, \quad j = 0, \dots, m. \quad (2.13)$$

Объединенным интервальным сплайном назовем интервальную функцию $\mathbf{s}_u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ с значениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_u(x) = \{s(x) \mid s \in S_n^k, \quad s^{(j)}(x_i) \in \mathbf{f}_i^j, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ j = 0, \dots, k-1; \quad s^{(j)}(a) \in \mathbf{f}_0^j, \quad s^{(j)}(b) \in \mathbf{f}_N^j, \quad j = 0, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Эта интервальная функция является объединенным расширением соответствующего множества вещественных сплайнов. При этом она не имеет представления вида (2.7) и вычисляется довольно сложно.

В предположении разрешимости системы (2.11) построим более простую функцию \mathbf{s} такую, что

$$\mathbf{s}_u(x) \subset \mathbf{s}(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.15)$$

Функцию \mathbf{s} будем искать в следующем виде:

$$\mathbf{s}(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_{ij} (x - x_j)^i \quad [x_j, x_{j+1}]. \quad (2.16)$$

В качестве вектора $\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_{ij}\}$ возьмем произвольный интервальный вектор, содержащий объединенное множество решений

$$X = \{x \mid x = A^{-1}b, \quad b \in \mathbf{b}\},$$

где вектор \mathbf{b} — интервальное расширение вектора b из системы (2.11), полученное заменой $f^{(j)}(x_i)$ для \mathbf{f}_i^j . Методы получения и уточнения векторов мы подробно обсудим в разделе 2.5.

Заметим, что в общем случае сужение интервальной функции (2.14) по интервальным константам $\{\mathbf{c}_{ij}\}$ не всегда будет сплайном из S_n^k , поскольку константы $c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}$ после сужения могут не удовлетворять системе (2.11).

Если известна оценка нормы $\|f\|_{p,\infty}$, то можно построить интервальные функции $\mathbf{r}_j(x)$, учитывающие ошибки аппроксимации сплайнов, такие что

$$f^{(j)}(x) \in \mathbf{s}^{(j)}(x) + \mathbf{r}_j(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.17)$$

Для получения функций $\mathbf{r}_j(x)$ воспользуемся следующим результатом [58].

Теорема 3. Пусть $f \in W_\infty^p[a, b]$, $1 \leq p \leq n + 1$ и сплайн $s \in S_n^k$ интерполирует f в смысле (2.9), (2.10). Тогда

$$\|\partial^j(f - s)\|_\infty \leq K_j h^{p-j} \|f\|_{p,\infty},$$

где K_j — константы, не зависящие от f и h . \square

Положим $\varepsilon = f - s$ и разложим $\varepsilon(x)$ в окрестности точки x_i , $i = 0, \dots, N - 1$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \varepsilon(x_i) + \varepsilon'(x_i)(x - x_i)/1! + \dots \\ &\dots + \varepsilon^{(k-1)}(x_i)(x - x_i)^{k-1}/(k-1)! + \varepsilon^{(k)}(\xi)(x - x_i)^k/k!, \end{aligned}$$

где $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$. Поскольку $\varepsilon^{(j)}(x_i) = 0$, $0 \leq j \leq k - 1$, то

$$\begin{aligned} |\varepsilon(x)| &\leq (x - x_i)^k/k! \|\partial^k(f - s)\|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]}, \\ |\varepsilon^{(j)}(x)| &\leq (x - x_i)^{k-j}/(k-j)! \|\partial^k(f - s)\|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]}. \end{aligned}$$

Поэтому на основании теоремы вложения из W_2^p в L_∞

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j(x) &= [-1, 1] \min\{K_j h^{p-j} \|f\|_{p,\infty}, \\ &K_k h^{p-k} (x - x_i)^{k-j}/(k-j)! \|f\|_{p,2}\} \\ &\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тем самым найдены интервальные функции \mathbf{r}_j , $j = 0, 1, \dots, p - 1$, позволяющие строить полосы, содержащие в себе значения j -й производной функции f .

Введенное определение интервальных сплайнов проиллюстрируем на примере сплайнов степени $n = 1, 3$.

Пусть на сетке ω заданы значения $f_i \in \mathbf{f}_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. На интервале $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн первой степени имеет вид

$$s(x) = f_i(x_{i+1} - x)/h_i + f_{i+1}(x - x_i)/h_i.$$

Поэтому интервальный сплайн первой степени можно представить следующим образом:

$$\mathbf{s}(x) = \mathbf{f}_i(x_{i+1} - x)/h_i + \mathbf{f}_{i+1}(x - x_i)/h_i, x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.19)$$

Отметим, что здесь сужение сплайна по интервальным константам \mathbf{f}_i будет вещественным сплайном.

Перейдем к интервальным кубическим сплайнам. Рассмотрим следующую интервальную функцию $\mathbf{s}_u : [a, b] \rightarrow \mathbf{r}$ со значениями

$$\mathbf{s}_u(x) = \{s(x) | s \in S_3^1, \quad s(x_i) \in \mathbf{f}_i^0, \quad i = 0, \dots, N, \\ s''(a) \in \mathbf{f}_0^2, \quad s''(b) \in \mathbf{f}_N^2\}.$$

Заметим, что вместо условий

$$s'(a) = f'(a), \quad s'(b) = f'(b),$$

вытекающих из (2.10), мы взяли более употребительные краевые условия [79]

$$s''(a) = f''(a), \quad s''(b) = f''(b), \quad (2.20)$$

что не меняет сути изложения. В итоге кубический сплайн на отрезках $[x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, N$ имеет два представления [58]:

$$s(x) = M_{j-1}(x_j - x)^3/(6h_j) + M_j(x - x_{j-1})^3/(6h_j) + \\ + (f_{j-1} - M_{j-1}h_j^2/6)(x_j - x)/h_j + (f_j - M_jh_j^2/6)(x - x_{j-1})/h_j, \quad (2.21)$$

или

$$s(x) = m_{j-1}(x_j - x)^2(x - x_{j-1})/h_j^2 - \\ m_j(x - x_{j-1})^2(x_j - x)/h_j^2 + \\ + f_{j-1}(x_j - x)^2(2(x - x_{j-1}) + h_j)/h_j^3 + \\ + f_j(x - x_{j-1})^2(2(x_j - x) + h_j)/h_j^3, \quad (2.22)$$

где $M_j = s''(x_j)$, $m_j = s'(x_j)$, $f_j = f(x_j)$.

Заменяя M_j, m_j, f_j на $\mathbf{M}_j, \mathbf{m}_j, \mathbf{f}_j \equiv \mathbf{f}_j^0$, мы получаем соответствующее представление интервальной функции, содержащей интервальный кубический сплайн. Выпишем интервальные системы линейных алгебраических уравнений:

для \mathbf{M}_j

$$\mu_j \mathbf{M}_{j-1} + 2\mathbf{M}_j + \lambda_j \mathbf{M}_{j+1} = \mathbf{D}_j, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{f}_0^2, \quad \mathbf{M}_N = \mathbf{f}_N^2,$$

$$\mathbf{D}_j = 6((\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{f}_j)/h_{j+1} - (\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j-1})/h_j)/(h_j + h_{j+1}),$$

$$\lambda_j = h_{j+1}/(h_j + h_{j+1}), \quad \mu_j = 1 - \lambda_j;$$

для m_j

$$\lambda_j \mathbf{M}_{j-1} + 2\mathbf{M}_j + \mu_j \mathbf{m}_{j+1} = \mathbf{D}_j, \quad (2.24)$$

$$2\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 = 3(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0)/h_1 - h_1 \mathbf{f}_0^2/2,$$

$$2\mathbf{M}_N + \mathbf{M}_{N-1} = 3(\mathbf{f}_N - \mathbf{f}_{N-1})/h_N + h_N \mathbf{f}_N^2/2,$$

$$\mathbf{D}_j = 3\lambda_j(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j-1})/h_j + 3\mu_j(\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{f}_j)/h_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Матрицы этих систем имеют вещественные элементы, а правые части содержат интервальные числа. Кроме того, при упорядочении уравнений и неизвестных по возрастанию j , матрицы становятся трехдиагональными и строго диагонально преобладающими. Это позволяет использовать простой метод, сводящий вычисление интервального вектора к определению его границ из двух систем уравнений с исходной матрицей, но вещественными правыми частями.

С помощью найденных интервальных чисел построим интервальную функцию $\mathbf{s}(x) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ со значениями

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x) = & \mathbf{M}_{j-1} \left((x_j - x)^3 / (6h_j) - (x_j - x)h_j / 6 \right) + \\ & + \mathbf{M}_j \left((x - x_{j-1})^3 / 6h_j - (x - x_{j-1})h_j / 6 \right) + \\ & + \mathbf{f}_{j-1}(x_j - x) / h_j + \mathbf{f}_j(x - x_{j-1}) / h_j, \end{aligned} \quad (2.25)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x) = & \mathbf{M}_{j-1}(x_j - x)^2(x - x_{j-1})/h_j^2 - \\ & - \mathbf{M}_j(x - x_{j-1})^2(x_j - x)/h_j^2 \\ & + \mathbf{f}_{j-1}(x_j - x)^2(2(x - x_{j-1}) + h_j)/h_j^3 + \\ & + \mathbf{f}_j(x - x_{j-1})^2(2(x_j - x) + h_j)/h_j^3, \end{aligned} \quad (2.26)$$

при $x \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, N$. Полученные интервальные функции содержат интервальный кубический сплайн \mathbf{s}_u .

Заметим, что если в (2.25) брать сужение \mathbf{f}_j по интервальным константам \mathbf{M}_j , то в общем случае мы не получим кубического сплайна, так как \mathbf{M}_j могут не удовлетворять системе (2.23) и как следствие этого $s' \notin C[a, b]$. Если брать сужение по \mathbf{M}_j в (2.26), то $s' \in C[a, b]$, но $s'' \notin C[a, b]$.

Этот факт объясняет то обстоятельство, что при аппроксимации функций кубическими сплайнами на конкретных компьютерах в связи с ошибками округления могут получаться функции, не являющиеся кубическими сплайнами.

Рассмотрим интервальные эрмитовы кубические сплайны $\mathbf{s}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. На каждом интервале $[x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, N$, согласно формуле (2.22), эти сплайны представимы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1(x) = & \mathbf{f}_{j-1}v((x - x_{j-1})/h_j) + \mathbf{f}_{j-1}^1w((x - x_{j-1})/h_j) + \\ & + \mathbf{f}_jv((x - x_j)/h_j) + \mathbf{f}_j^1w((x - x_j)/h_j), \end{aligned}$$

где $v(x) = (|x| - 1)^2(2|x| + 1); w(x) = x(|x| - 1)^2$.

Обратим внимание на то, что интервальные эрмитовы сплайны в отличие от кубических сплайнов точно выражаются этой формулой, т. е. $\mathbf{s}_u(x) = \mathbf{s}_1(x)$. Кроме того, сужение \mathbf{s}_1 по константам $\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j^1$ будет эрмитовым кубическим сплайном. Следовательно, при аппроксимации функций эрмитовыми сплайнами наличие ошибок в данных не снижает гладкости сплайна.

Перейдем далее к вопросу получения двусторонних аппроксимаций функций. Предположим, что для функции f известны ее оценки в некоторой норме, например в нормах пространств $W_\infty^p[a, b]$ или $C^p[a, b]$. Тогда можно построить интервальные полосы, включающие точные значения интерполируемой функции. В общем случае интервальная функция погрешности дается формулой (2.18), но она довольно груба. Построим более узкие полосы, например, для сплайнов первой степени. Сначала пусть $f \in C^1[a, b]$ и известны константы K_l в оценке норм производной

$$\|f'\|_{\infty, [x_l, x_{l+1}]} \leq K_l, \quad l = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Тогда $\mathbf{r}(x) = [-1, 1]h_lK_l$. Следовательно, на каждом отрезке $[x_l, x_{l+1}]$ интерполируемая функция содержится в полосе

$$f(x) \in \mathbf{s}(x) + [-1, 1]h_lK_l.$$

Кроме того,

$$\text{int}_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \subset \mathbf{s}([x_i, x_{i+1}]) + [-1, 1]h_i K_L.$$

Теперь пусть $f \in C^2[a, b]$ и известны константы $K_H \geq \|f''\|_{\infty, [a, b]}$, $K_B \geq \|f''_+\|_{\infty, [a, b]}$ для компонент разложения $f'' = f''_+ - f''_-$, где $f''_+(x) = \max\{0, f''(x)\}$ и $f''_-(x) = -\min\{0, f''(x)\}$. Тогда, следуя доказательству [79], получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) - s(x) &= ((x_{i+1} - x) \int_{x_i}^x (v - x_i) f''(v) dv + \\ &+ (x - x_i) \int_x^{x_{i+1}} (x_{i+1} - v) f''(v) dv) / h_i. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi(x) \leq & \left((x_{i+1} - x) \int_{x_i}^x (v - x_i) dv + \right. \\ & \left. + (x - x_i) \int_x^{x_{i+1}} (x_{i+1} - v) dv \right) \|f''_+\|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]} / h_i. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\sigma(x) = ((x_{i+1} - x)(x_i - x)^2 + (x - x_i)(x_{i+1} - x)^2) / 2h_i.$$

Тогда $\varphi(x) \leq \sigma(x) \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f''_+(x)$ и аналогично, $\varphi(x) \geq \sigma(x) \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f''_-(x)$.

Следовательно,

$$\mathbf{r}(x) = [-K_H, K_B] \sigma(x).$$

Таким образом, построена функция \mathbf{r} , гарантирующая включение

$$f(x) \in \mathbf{s}(x) + \mathbf{r}(x).$$

Перейдем к изучению интервальных сплайнов многих переменных. Наиболее распространены два подхода для обобщения понятия сплайна на случай многих переменных. Первый способ состоит в тензорном произведении одномерных сплайнов, второй подход, развивается в теории конечных элементов.

Предположим, что Ω — ограниченная односвязная область в R^2 . Триангулируем ее, т. е. построим замкнутый односвязный многоугольник $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$,

представленный в виде объединения прямоугонных замкнутых треугольников T_i :

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^N T_i.$$

Причем треугольники таковы, что пересечение двух различных T_i, T_j есть либо вершина, либо целиком сторона, либо T_i, T_j вообще не пересекаются. Рассмотрим полный полином порядка m

$$P_m(x, y) = \sum_{h+l=0}^m a_{kl} x^k y^l.$$

В линейном случае ($m = 1$) он имеет вид $P_1(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$ и для его однозначного определения достаточно знать значения функции f в вершинах $z_i, i = 1, 2, 3$ треугольника T .

Полином второй степени имеет шесть неопределенных коэффициентов:

$$P_2(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2.$$

Пусть $z_i, i = 4, 5, 6$ — середины сторон треугольника T . Легко видеть, что существует единственный полином $p_2(x, y)$, интерполирующий f в узлах $z_i : f(z_i) = R_2(z_i), i = 1, \dots, 6$.

Можно построить аппроксимацию на треугольнике T для полных кубических полиномов. Кубический полином

$$P_3(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \\ + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

определяется значениями в десяти узлах $z_i, i = 1, \dots, 10$, причем $z_i, i = 4, \dots, 9$ расположены парами на сторонах треугольника так, что делят их на равные части, а z_{10} лежит на пересечении медиан.

Пусть в узлах $z_i, i = 1, \dots, N$ на треугольнике T заданы значения функции $f(z_i) = f_i \in \mathbf{f}_i$. Назовем *интервальным конечным элементом* степени m следующую функцию:

$$\mathbf{P}_m(x, y) = \{P_m(x, y) | P_m(z_i) \in \mathbf{f}_i\}.$$

Пусть $\psi_i(x, y)$ — полные полиномы степени m такие, что $\psi_i(z_i) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, N$. Тогда интервальный конечный элемент можно представить как

$$\mathbf{P}_m(x, y) = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \psi_i(x, y).$$

Поскольку $\psi_i(x, y)$ — вещественные функции, сужение по интервальным константам $\{\mathbf{f}_i\}$ дает конечный элемент, аппроксимирующий $f(x, y)$.

Перейдем непосредственно к кусочно-линейным элементам. Пусть треугольник T имеет вершины $z_i = (x_i, y_i)$; тогда базисный элемент с вершиной в точке (x, y) записывается в виде

$$\psi_1(z) = \frac{A(z, z_2, z_3)}{A(z_1, z_2, z_3)}, \quad \psi_2(z) = \frac{A(z_1, z, z_3)}{A(z_1, z_2, z_3)},$$

$$\psi_3(z) = \frac{A(z_1, z_2, z)}{A(z_1, z_2, z_3)},$$

$$z = (x, y), \quad A(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{s}_1(z) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{f}_i \psi_i(z).$$

Построим полосу, содержащую функцию f . Пусть $f \in C^2(\Omega)$, тогда [79]

$$\mathbf{s}_1(z) - f(z) = \sum_{i=1}^3 \psi_i(z) R_i(z) \equiv \varphi(z),$$

где

$$R_i(z) = \int_x^{x_i} (x_i - x) \partial_{11} f(v, y_i) dv +$$

$$+ \int_y^{y_i} (y_i - v) \partial_{22} f(x, v) dv + (x_i - x) \int_y^{y_i} \partial_{12} f(x, v) dv.$$

Отсюда

$$\varphi(z) \in \sum_{i=1}^3 \psi_i(z) [\underline{R}_i(z), \bar{R}_i(z)],$$

где

$$\underline{R}_i(z) = \frac{1}{2}(x_i - x)^2 \min_{\Omega} \partial_{11} f_- + \frac{1}{2}(y_i - y)^2 \min_{\Omega} \partial_{22} f_- +$$

$$+ (x_i - x)(y_i - y) \min_{\Omega} \partial_{12} f_-,$$

$$\bar{R}_i(z) = \frac{1}{2}(x_i - x)^2 \max_{\Omega} \partial_{11} f_+ + \frac{1}{2}(y_i - y)^2 \max_{\Omega} \partial_{22} f_+ +$$

$$+ (x_i - x)(y_i - y) \max_{\Omega} \partial_{12} f_+.$$

2.4. Интервальные интегралы

Интегрирование непрерывных функций. Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$ — непрерывная вещественная функция, имеющая в качестве интервального расширения функцию $\mathbf{f}(x)$, заданную при $x \subset [a, b]$, монотонную по включению и удовлетворяющую условию типа Липшица, т. е. $\text{wid}(\mathbf{f}(x)) \leq L \text{wid}(x)$, где $L \geq 0$ — некоторая постоянная. По теореме о среднем

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} f(t) dt = \int_{[\underline{x}, \bar{x}]} \mathbf{f}(t) dt = f(\xi) \text{wid}(x)$$

(здесь $\xi \in x$). Следовательно,

$$\int_x \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{f}(x) \text{wid}(x). \quad (2.27)$$

Возьмем произвольное натуральное число n и рассмотрим разбиение $[a, b]$ на n подынтервалов $x_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$, $i = 1, \dots, n$, т. е. $[\underline{x}_i, \bar{x}_i] \cap [\underline{x}_j, \bar{x}_j] = \emptyset$, $i \neq j$, $[a, b] = \cup_{i=1}^n x_i$. Из свойств аддитивности вытекает

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i} \mathbf{f}(t) dt. \quad (2.28)$$

Для функций, удовлетворяющих условию Липшица, справедливо утверждение [34].

Теорема 4. *Существует константа L , не зависящая от n , такая, что*

$$\int_a^b f(x) dx \in \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{wid } x_i$$

и

$$\text{wid}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \text{wid } x_i\right) \leq L \cdot \sum_{i=1}^n \text{wid}(x_i)^2.$$

□

Определим

$$\mathbf{I}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(x_i) \text{wid } x_i.$$

Пусть $h = \max \text{wid } x_i$. Из теоремы 4. следует

$$\text{wid } \mathbf{I}_n \leq Lh^2.$$

Пусть непрерывная, монотонная по включению интервальная функция $\mathbf{f}(t)$ представима в виде

$$\mathbf{f}(t) = [\underline{f}(t), \overline{f}(t)].$$

В этом случае [33]

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \left[\int_a^b \underline{f}(t) dt, \int_a^b \overline{f}(t) dt \right].$$

Если выполнено включение $\mathbf{f}(t) \subseteq \mathbf{g}(t)$, $\forall t \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt \subseteq \int_a^b \mathbf{g}(t) dt.$$

В частности, если $\mathbf{f}(t)$ — интервальное расширение $f(t)$, тогда

$$\int_a^b f(t) dt \in \int_a^b \mathbf{f}(t) dt.$$

Пример 2. Предположим, что мы хотим вычислить следующий интеграл:

$$I = \int_0^b e^{-t^2} dt.$$

Для функции e^{-t^2} несложно получить интервальное расширение, основанное на рядах Тейлора:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}e^{-\theta t^2} t^{2(n+1)}.$$

где $\theta \in [0, 1]$. $e^{-\theta t^2} \in [e^{-t^2}, 1]$. Ограничимся $n = 3$,

$$e^{-t^2} \in 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}[e^{-t^2}, 1]t^8$$

$$\left(1 - \frac{1}{4!}t^8\right)e^{-t^2} \geq 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3!}t^6.$$

$$e^{-t^2} \geq \frac{1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3!}t^6}{\left(1 - \frac{1}{4!}t^8\right)} = \underline{f}(t).$$

$$e^{-t^2} \leq 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8 = \overline{f}(t).$$

Итак, мы можем вычислить интегралы от функций $\underline{f}(t)$, $\overline{f}(t)$.

Перейдем к случаю вычисления интервальных интегралов, основанные на численных квадратурах. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с интервальной константой Липшица $\mathbf{L} = [\underline{L}, \bar{L}]$:

$$f(x) - f(y) \in \mathbf{L}(x - y).$$

Предположим, что известны значения $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Предположим также, что функция не является линейной, т. е. $[\underline{L} \neq \bar{L}]$, $\mathbf{x}_i \cap \mathbf{x}_{i+1} = \emptyset$. Заметим, что на отрезке $[\bar{x}_i, \underline{x}_{i+1}]$ функция $f(x)$ не превосходит величины $\min\{\bar{f}(\bar{x}_i) + \bar{L}(x - \bar{x}_i), \bar{f}(\underline{x}_{i+1}) + \underline{L}(x - \underline{x}_{i+1})\}$. Следовательно, выполнено неравенство

$$\int_{\bar{x}_i}^{\underline{x}_{i+1}} f(t) dt \leq (\bar{f}(\bar{x}_i) + \bar{L}(\xi - \bar{x}_i)/2)(\xi - \bar{x}_i) + (\bar{f}(\underline{x}_{i+1}) + \underline{L}(\xi - \underline{x}_{i+1})/2)(\underline{x}_{i+1} - \xi).$$

где $\xi = (\bar{f}(\underline{x}_{i+1}) + \bar{f}(\bar{x}_i) + \bar{L}\bar{x}_i - \underline{L}\underline{x}_{i+1})/(\bar{L} - \underline{L})$.

Метод трапеций. Пусть в узлах сетки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ известны значения $f(x_i) \in \mathbf{f}_i$ и известна оценка второй производной функции $f''(x) \in [\underline{F}_i^{(2)}, \bar{F}_i^{(2)}]$, $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда справедливо включение

$$\int_a^b f(t) dt \in \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i-1}) + \mathbf{R},$$

where $\mathbf{R} = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^3 \mathbf{F}^{(2)}_i$.

В случае равномерной сетки $x_i - x_{i-1} = h$ эти формулы упрощаются:

$$\int_a^b f(t) dt \in h \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{f}_i + \frac{h}{2}(\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_n) + \mathbf{R},$$

where $\mathbf{R} = -\frac{b-a}{12} h^2 [\min_i \underline{F}_i^{(2)}, \max_i \bar{F}_i^{(2)}]$.

Применение сплайнов. Обратимся к вопросу о применении изложенной теории аппроксимации для интегрирования функций, заданных с ошибкой. Пусть $f^{(j)}(x_i) \in \mathbf{f}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, l - 1$ и известна априорная информация об f , позволяющая построить $\mathbf{r}(x)$. Кроме того, пусть $\mathbf{s}(x)$ — сплайн, аппроксимирующий f и такой, что

$$f(x) \in \mathbf{s}(x) + \mathbf{r}(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.29)$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \in \int_a^b (\mathbf{s}(x) + \mathbf{r}(x)) dx = [\underline{I}, \bar{I}].$$

Интеграл в правой части можно вычислить точно, особенно просто в случае полиномиальных сплайнов, когда на каждом отрезке $[x_l, x_{l+1}]$

$$\mathbf{s}(x) + \mathbf{r}(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} \mathbf{a}_i x^i. \quad (2.30)$$

Интеграл от интервального полинома снова будет интервальным полиномом вида

$$\int_a^b \sum_{i=0}^{2m-1} \mathbf{a}_i x^i dx = \sum_{i=0}^{2m-1} (\mathbf{a}_i x^{i+1} / (i+1)) \Big|_a^b.$$

Используя развитый ранее прием интерполяции, можно находить интегралы многомерных функций, которые заданы в конечном наборе точек и для которых известны оценки старших производных. Данный подход не требует привлечения такого понятия, как интервальное расширение функций, заменяя его априорной информацией о производных. В ряде случаев это бывает полезным, например, когда интервальное расширение не известно или очень грубое.

Обратимся теперь к вопросу апостериорного оценивания ошибок интегрирования вещественных функций. Пусть

$$I(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau, \quad x \in (a, b). \quad (2.31)$$

Далее обозначим через $I^h(x)$ приближенное значение интеграла (2.31), найденное каким-либо численным методом. Оценим погрешность $I(x) - I^h(x)$. Для этого построим полином $\mathcal{P}_n(a, b)$, интерполирующий функцию $I^h(x)$ следующим образом:

$$s(a) = I^h(a) = 0, \quad s(b) = I^h(b), \quad (2.32)$$

$$\frac{ds}{dx}(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (2.33)$$

где $\xi_i \in [a, b]$, $\{a = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-2} = b\}$ — набор внутренних узлов.

Обозначим $\varepsilon(x) = I(x) - s(x)$. Поскольку

$$\frac{dI(x)}{dx} = f(x), \quad x \in (a, b),$$

то

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{dI(x)}{dx} - \frac{ds(x)}{dx} = \varphi(x), \quad (2.34)$$

где $\varphi(x) = f(x) - \frac{ds(x)}{dx}$. Следовательно,

$$(x - a) \min \varphi(x) \leq \varepsilon(x) \leq (x - a) \max \varphi(x). \quad (2.35)$$

Заметим, что в определение φ входят конкретные функции f и s .

Остановимся на вопросе точности двустороннего неравенства (2.35). Для этого нам понадобятся оценки φ и ε :

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(\nu)}(x)| &= |I^{(\nu)}(x) - s^{(\nu)}(x)| \leq |I^{(\nu)}(x) - s_T^{(\nu)}(x)| + \\ &+ |s_T^{(\nu)}(x) - s^{(\nu)}(x)|, \quad \nu = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь $s_T \in \mathcal{P}_n(a, b)$ — полином, интерполирующий $I(x)$ по формулам (2.32)–(2.34). Первое слагаемое в правой части неравенства (2.36) оценивается так:

$$|I^{(\nu)}(x) - s_T^{(\nu)}(x)| \leq K(b - a)^{n+1-\nu} \|f\|_{n,\infty}.$$

Для оценки второго слагаемого представим полином $s_T - s$ в виде

$$s_T(x) - s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Заметим, что в силу построения s_T, s справедлива оценка $|a_i| \leq K\varepsilon(b)/(b - a)^i$. Следовательно,

$$|\varphi| \leq K_1(b - a)^n \|f\|_{n,\infty} + K_2\varepsilon(b)/(b - a)$$

и

$$|I(x) - s(x)| \leq (K_1(b - a)^n \|f\|_{n,\infty} + K_2\varepsilon(b)/(b - a))(x - a).$$

Для того чтобы построенная апостериорная оценка погрешности интеграла соответствовала истинной погрешности, необходимо согласовать порядки величин $(b - a)^{n+1} \|f\|_{n,\infty}$ и $\varepsilon(b)$, т. е. степень полинома должна соответствовать порядку точности метода интегрирования.

2.5. Интервальные СЛАУ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (2.37)$$

где $b = (b_i), i = 1, \dots, n$ — известный вектор; $A = (a_{i,j}), i, j = 1, \dots, n$ — невырожденная матрица.

Тогда вектор $x = A^{-1}b$ — решение системы (2.37). Предположим, что A и b содержат ошибки и известно, что их элементы принадлежат соответствующим интервальным числам

$$a_{i,j} \in \mathbf{a}_{i,j},$$

$$b_i \in \mathbf{b}_i, i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть также все матрицы из множества \mathbf{A} не вырождены. Множество векторов

$$\mathcal{X} = \{x | Ax = b, A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\}$$

назовем *множеством решений системы*

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}. \tag{2.38}$$

Пример 3. Пусть необходимо решить систему интервальных линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

с матрицей \mathbf{A} и правой частью \mathbf{b} .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Множество векторов \mathcal{X} для этой задачи изображено на рис. 2.1.

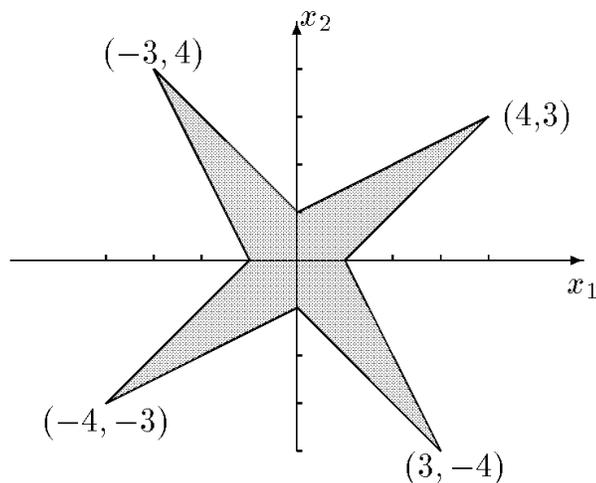


Рис. 2.1. Множество решений системы (2.39)

Минимальным интервальным вектором, содержащим множество ее решений, является интервальный вектор $\mathbf{x} = ([-4, 4], [-4, 4])^T$.

Множество \mathcal{X} может быть описано следующим образом [6]:

$$\mathcal{X} = \{x | x \in R^n, \mathbf{A}x \cap \mathbf{b} \neq \emptyset\} \quad (2.40)$$

или

$$\{x | x \in R^n, 0 \in \mathbf{A}x - \mathbf{b}\}.$$

Справедливо следующее утверждение [42]:

$$x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow |\text{mid } \mathbf{A}x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad}(\mathbf{b}).$$

Поставим задачу найти интервальный вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, содержащий множество \mathcal{X} .

Самым простым способом для нашего примера будет метод Крамера. Действительно, для СЛАУ $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, $i, j = 1, 2$. Решение находится по формулам

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \mathbf{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{21},$$

$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{12}b_1.$$

Для решения СЛАУ с интервальными коэффициентами из примера (2.39) сделаем интервальное расширение формул Крамера. Непосредственными вычислениями получаем $\mathbf{x}_1 = [-6, 6]$, $\mathbf{x}_2 = [-6, 6]$.

Как видим, ответ несколько шире оптимального. Этот факт легко объясняется, поскольку рациональные выражения для \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 не удовлетворяют условию теоремы 1., т. е. содержат переменные более одного раза.

Применять формулы Крамера для решения больших систем крайне не рационально. В вычислительной математике для этих целей используют прямые методы: метод Гаусса, LU - и QR -разложения и т. д.

Рассмотрим еще ряд примеров.

Пример 4. Пусть необходимо решить систему интервальных линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 4] \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [0, 0] \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Множество векторов \mathcal{X} этой задачи

$$\mathcal{X} = \{x | x \in R^2, 2|\mathbf{x}_2| \leq |\mathbf{x}_1|, 2|\mathbf{x}_1| \leq 3 + |\mathbf{x}_2|\}$$

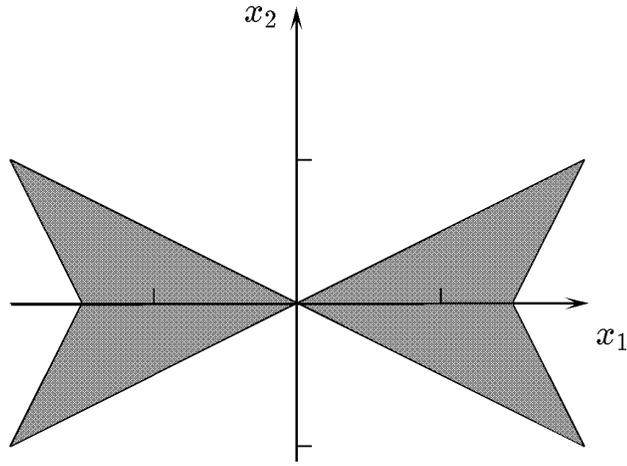


Рис. 2.2. Множество решений системы (2.41)

и изображено на рис. 2.2.

Пример 5. Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in [0, 1]. \quad (2.42)$$

Заметим, что по правилу Крамера

$$\mathbf{x}_1 = 1.2(2 - \alpha)/(4 - \alpha\beta),$$

$$\mathbf{x}_2 = -1.2(2 - \beta)/(4 - \alpha\beta).$$

Следовательно,

$$\square \mathcal{X} = \begin{pmatrix} [0.3, 0.6] \\ [-0.6, -0.3] \end{pmatrix}.$$

Применяя формально правило Крамера к системе (2.42), мы получаем интервальный вектор $([0.3, 1.2], [-0.8, 1.2])$.

Найдем обратную матрицу

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \square \left\{ \frac{1}{4 - \alpha\beta} \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in [0, 1] \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} [1/2, 2/3] & [0, 1/3] \\ [0, 1/3] & [1/2, 2/3] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что

$$A^{-1}\mathbf{b} \neq \square \mathcal{X}.$$

Пусть A — симметричная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 1].$$

Множество решений системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей представляет собой отрезок с концами $(0.4, -0.4)$, $(0.6, -0.6)$ рис. 2.3. Интервальная оболочка множества решений с симметричной матрицей

$$\square \mathcal{X}_{sym} = \begin{pmatrix} [0.4, 0.6] \\ [-0.6, -0.4] \end{pmatrix} \neq \square \mathcal{X}.$$

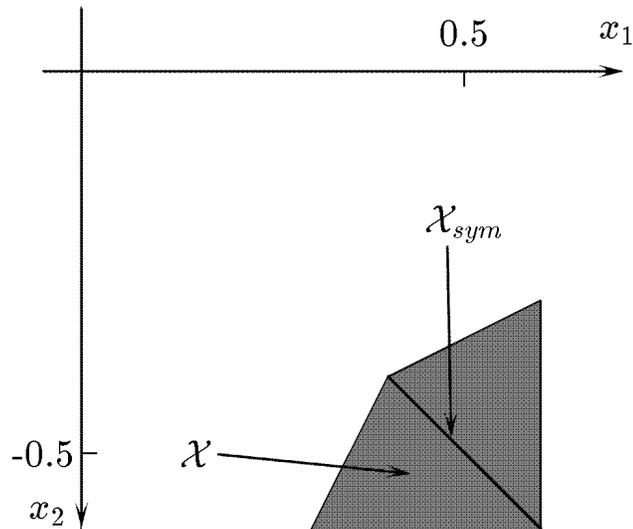


Рис. 2.3. Множество решений с симметричной матрицей

Метод Гаусса и LU -разложение. Интервальный метод Гаусса представляет корректное интервальное расширение метода Гаусса для СЛАУ.

Рассмотрим систему интервальных линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей размерности n :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Метод Гаусса состоит из двух ходов: прямого и обратного. На прямом ходе с помощью элементарных преобразований будем последовательно стремиться привести систему (2.43) к верхнетреугольному виду.

Первый шаг. Преобразуем систему к виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ 0 & \mathbf{a}_{22}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{a}_{n2}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ik}^{(1)} &= \mathbf{a}_{ik} - l_{i1}\mathbf{a}_{1k}; \\ \mathbf{b}_i^{(1)} &= \mathbf{b}_i - l_{i1}\mathbf{b}_1, l_{i1} = \mathbf{a}_{i1}/\mathbf{a}_{11}. \end{aligned}$$

Далее переходим к подсистеме с матрицей $\mathbf{A}^{(1)}$ и правой частью $\mathbf{b}^{(1)}$ размерности $n - 1$. Применим к этой системе первый шаг и т. д. Окончательно приводим систему (2.43) к верхнетреугольному виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ 0 & \mathbf{a}_{22}^{(*)} & \dots & \mathbf{a}_{2n}^{(*)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{a}_{nn}^{(*)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2^{(*)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^{(*)} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Обратный ход. Далее последовательно вычисляем неизвестные $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{b}_n^{(*)}/\mathbf{a}_{nn}^{(*)}, \\ \mathbf{x}_i &= \frac{\mathbf{b}_i - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij}^{(*)} \mathbf{x}_j}{\mathbf{a}_{ii}^{(*)}}, \quad i = n - 1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Интервальный метод Гаусса не всегда можно реализовать даже для регулярных матриц \mathbf{A} .

Пример Райхмана. Рассмотрим интервальную матрицу

$$S(a) = \begin{pmatrix} 1 & [0, a] & [0, a] \\ [0, a] & 1 & [0, a] \\ [0, a] & [0, a] & 1 \end{pmatrix}.$$

Проводя прямой ход метода Гаусса, получаем

$$S(a) \sim \begin{pmatrix} 1 & [0, a] & [0, a] \\ 0 & 1 & [-a^2/(1-a^2), a/(1-a^2)] \\ 0 & 0 & [1-a^2-a^2/(1-a^2), 1+a^3(1-a^2)] \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться, для любого $a \in [(\sqrt{5}-1)/2, 1]$ следует, что $0 \in [1-a^2-a^2/(1-a^2), 1+a^3(1-a^2)]$. Таким образом, метод Гаусса не может быть закончен.

Теорема 5. Если матрица \mathbf{A} — M -матрица или имеет диагональное преобладание, то решение \mathbf{x}_G по методу Гаусса существует и

$$\square \mathcal{X} \subseteq \mathbf{x}_G.$$

Согласно методу Холецкого матрицу \mathbf{A} можно представить в виде произведения двух треугольных матриц \mathbf{L}, \mathbf{U} .

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nN} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{u}_{12} & \dots & \mathbf{u}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \mathbf{u}_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матриц \mathbf{L}, \mathbf{U} находят по формулам

$$l_{i1} = \mathbf{a}_{i1} \quad \text{для } i = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{u}_{1i} = \mathbf{a}_{1i}/l_{11} \quad \text{для } i = 2, \dots, n.$$

Далее справедливы рекуррентные соотношения:

$$l_{is} = (\mathbf{a}_{is} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{ik} \mathbf{u}_{ki}), i = s, \dots, n; s = 2, 3, \dots, n,$$

$$\mathbf{u}_{si} = (\mathbf{a}_{is} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{ik} \mathbf{u}_{ki})/l_{ss}, i = s + 1, \dots, n; s = 2, \dots, n - 1.$$

Если матрицы \mathbf{L}, \mathbf{U} построены, предлагается следующий алгоритм. Сначала решают вспомогательную систему

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Так как матрица \mathbf{L} треугольная, то нетрудно выписать рекуррентные соотношения

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{b}_1/l_{11}, \mathbf{y}_2 = (\mathbf{b}_2 - l_{12}\mathbf{y}_1)/l_{22}, \dots,$$

$$\mathbf{y}_n = (\mathbf{b}_n - \sum_{i=1}^{n-1} l_{ni}\mathbf{y}_i)/l_{nn}.$$

Зная вектор \mathbf{y} , находят решение системы (2.43) с помощью треугольной матрицы \mathbf{U} .

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Аналогично выписывают рекуррентные соотношения

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-1,n}\mathbf{x}_n, \dots,$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 - \sum_{i=2}^n \mathbf{u}_{1i}\mathbf{x}_i.$$

Метод LU -разложения наиболее предпочтителен, если систему (2.43) необходимо решать для разных правых частей \mathbf{b} . Один раз нужно найти матрицы L, U , а затем пользоваться обратным ходом нахождения векторов Y, X .

Пример 6. Рассмотрим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & [-1, 0] \\ [-1, 0] & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

\mathbf{A} — M -матрица с LU -разложением

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-0.5, 0] & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & [-1, 0] \\ 0 & [1.5, 2] \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.2, 0.6] \\ [-0.8, -0.3] \end{pmatrix}.$$

Глава 3.

Интервальные функции распределения (P-boxes)

В этой главе мы рассмотрим подход, который в последнее время получил достаточное распространение для численных оценок различных проблем в условиях неопределенности, когда для входных параметров известны только интервальные границы функции распределения. Этот подход в англоязычной литературе получил название «Probability box» — (вероятностный ящик), сокращенно P-box. Мы будем называть «Probability box» как интервальная функция распределения (ИФР).

Действительно, как отмечает S. Ferson, что разнообразие сложных вычислительных задач может быть решено с помощью одного — довольно простого — подхода, основанного на *анализе вероятностных границ* [27]. В этом подходе входные данные выражаются с помощью интервальных функций распределения. При этом каждая входная переменная разлагается в список пар вида (интервал, вероятность). Декартово произведение этих списков в случае независимости входных переменных позволяет вычислить функцию от этих переменных, посредством создания списка, который может определить интервальную функцию распределения. Вследствие быстрого роста размерности выходных списков используются специальные способы сжатия списком (Condensation).

Современные аналитики риска тщательно различают изменчивость и неопределенность [14]. Изменчивость (также вызванная случайностью, случайной неопределенностью, объективной неопределенностью, разногласием или неприводимой неопределенностью) является результатом естественной случайности окружения, изменения в пространстве или во времени. Неуверенность (также вызвана неопределенностью, незнанием, эпистемологической неопределенностью, субъективной неопределенностью) возникает от неполноты знания о мире. Источником неуверенности являются

ошибки измерения, малые повторные выборки, пределы распознавания, незнание деталей физических процессов и другие пробелы в научном познании.

Изменчивость и неуверенность существенно отличаются [29]. Неопределенность может быть уменьшена опытным путем. Изменчивость может быть лучше охарактеризована дальнейшими теоретическими исследованиями математических моделей и предметной области. Изменчивость может быть использована непосредственно в оценке риска (т. е. вероятность некоторого неблагоприятного или экстремального последствия) вычислением надлежащей вероятностной модели. Результатом применения модели является характеристика риска, обычно как отношение между величиной некоторого экстремального события или неблагоприятного воздействия и его вероятностью или частотой возникновения. Неопределенность не может быть переведена в вероятность таким же образом, по крайней мере, без обращения к *субъективной вероятности*, которую часто считают недостаточно надежной. Однако это может и должно использоваться, чтобы построить границы ошибки степени риска. Изменчивость и неуверенность должны быть обработаны отдельно, и по-другому, в оценках степени риска [23]. Таким образом, *анализ вероятностных границ* — это комбинация методов стандартного интервального анализа [33, 34] и классической теории вероятности [67].

Идея, использовать границы для вероятности (probability bound), появилась достаточно давно. Действительно, уже Дж. Буль [28] использовал понятие интервальных границ для вероятности. Неравенство Чебышева позволяет вычислить границы распределения, если известны матожидание и дисперсия, Марков нашел подобные границы для модуля переменной, когда известно матожидание.

Анализ границ вероятности близок к методам Байеса [7], также названный Байесовым анализом чувствительности. Yager [55] описал элементарные процедуры, с помощью которых могут быть вычислены границы функции распределения, например суммы двух случайных величин при условии независимости случайных величин. Williamson и Downs в работе [54] также описали метод, подобный методу [55]. Berleant и его коллеги [8]–[11] получили и реализовали программно алгоритмы для вычисления операций над функциями распределений вероятностей.

В анализе вероятностных границ неопределенность о функции распределения вероятностей для каждой входной переменной выражена с точки зрения границ интервальных функций. Эти границы формируют интер-

вальную функцию распределения (P-box) для каждой входной переменной. Например, на рис. 3.1 изображены три интервальные функции распределения различного вида, которые характеризуют неопределенные числа U , V и W ; вертикальная ось — вероятность, что случайная переменная больше соответствующего значения, данного на горизонтальной оси. Это дополнительная вероятность, которую мы более кратко называем превышением вероятности. У каждой интервальной функции распределения (ИФР) есть левый «хвост», от минус бесконечности до ее крайнего левого значения вероятности больше единицы. Аналогично, у каждой ИФР есть правый «хвост», от правого нижнего угла ИФР до плюс бесконечности. Ради удобства эти левые и правые «хвосты» не показаны рисунках 3.1.

ИФР для переменной U . Моделирование переменной U с этой ИФР утверждает, что дополнительная функция распределения U независимо от того, какая она, находится в области, ограниченной интервальными границами. ИФР для переменной V вырожденная в том смысле, что границы совпадают и эквивалентны точной функции распределения. ИФР для переменной W также вырожденное, но по-другому. Эта ИФР утверждает, что носитель случайной величины лежит полностью в интервале, но никакая другая информация о функции распределения этой переменной не известна. Величина W может быть константой, значение которой известно не точно, или это может быть случайной величиной со своей функцией распределения, носитель которой находится полностью в этом интервале.

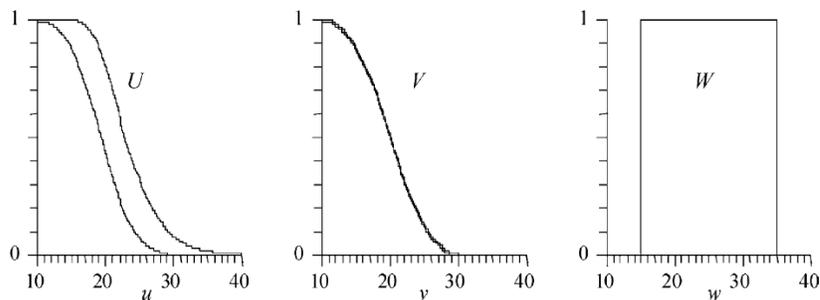


Рис. 3.1. Три примера ИФР, выражающих различные степени неопределенности

3.1. Разложение интервальной функции распределения

Всегда возможно представить ИФР в виде списка пар (интервал, значение). Такой список представляет структуру Dempster–Shafer [46], напри-

мер, левая ИФР изображенная на рис. 3.1. Левые и правые границы этой ИФР показаны как толстые, черные ступенчатые функции от единицы до нуля по вертикали. Чтобы анализировать эту ИФР, просто построим серию горизонтальных линий, от каждого угла каждой ступенчатой функции к другой границе. Эти горизонтальные линии показаны как тонкие серые линии. Иногда есть угол на одной границе, который на той же высоте как угол с другой стороны границы (как во второй серой строке от вершины). В этом случае горизонтальные строки будут совпадающими. Этот процесс описывает набор прямоугольников различных толщин и расположений. Расположение каждого прямоугольника вдоль горизонтальной оси определяет интервал. Высота каждого прямоугольника — значение, связанное с тем интервалом. Анализировать ИФР означает получить список всех таких пар интервалов и связанных с ними значений. По построению сумма всех значений будет равняться единице. Если ИФР соответствует одному интервалу, то его разложение — единственная пара, состоящая из интервала и его значения. Разложение распределения дискретной случайной величины X состоит из списка значений X_i и соответствующих им значений вероятности. Когда у P -box границы гладкие, а не ступенчатые функции, дискретизация необходима, чтобы разложить P -box. Полученный список (интервал, значение) будет приближением к ИФР. Эта идея проиллюстрирована для правой ИФР, изображенной на рис. 3.2. Прямоугольники теперь стали тонкими по вертикали. У этих конструкций может быть равная высота. В этом случае значения, связанные с интервалами в разложении, все будут одинаковыми. Естественно, чем более многочисленное разбиение, тем лучше приближение. В работе [54] Williamson и Downs предписывают, как построить разбиение, чтобы сохранить границы ИФР.

Они используют схему, проиллюстрированную на рис. 3.3, которая минимизирует ошибку представления. Показано два набора четырех точек, каждое представление определило значения дополнительной функции распределения. Четыре точки слева и линейные сегменты, соединяющие их, использовались для построения левой границы ИФР (что является нижней границей на дополнительных функциях распределения). Четыре точки справа и их линейные сегменты использовались, чтобы охарактеризовать правую границу ИФР (верхняя граница этих вероятностей). Эта схема использует монотонность функций распределения. Учитывая, это точки представляют надежные оценки дополнительной функции распределения, эти направленные исходящим образом сегменты, конечно, содержат как все такие функции, так и ограничения. В практических вычислениях, ко-

гда кривые границы определяют ИФР, часто используют дискретизацию в 100 прямоугольников, каждый со значением 0.01. Как пример рассмотрим разложение ИФР, изображенные на рис. 3.1. Переменная U является логнормальной распределенной, матожидание которой — интервал $[20, 23]$ и дисперсия находится в интервале $[3.5, 4.5]$. Дискретизация в 100 прямоугольников приводит к списку пар $\{([0.0, 16.0], 0.01), ([11.6, 16.7], 0.01), ([12.4, 17.1], 0.01), \dots, ([27.9, 35.7], 0.01), ([29.2, \infty], 0.01)\}$. У переменной V есть симметричное треугольное распределение, с минимальным значением 10, модой 20 и максимумом 30. Интервалы в дискретизации этого объекта очень узкие. Действительно, некоторые или все интервалы, возможно, были точками, но просто достаточно широки, чтобы содержать ошибку, представленную конечной дискретизацией только на 100 уровней, в порядке, предписанном на рис. 3.3. Список (интервал, вероятность):

$\{([10, 11.4], 0.01), ([11.4, 12.0], 0.01), ([12.0, 12.4], 0.01), \dots, ([28.0, 28.6], 0.01), ([28.6, 30.0], 0.01)\}$.

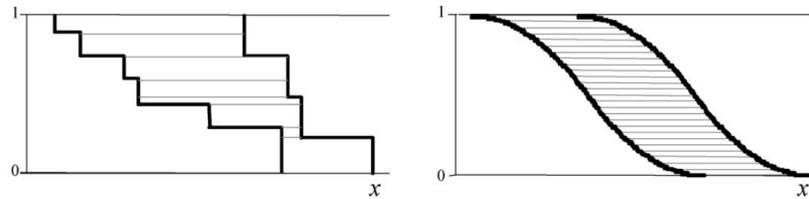


Рис. 3.2. Разложение ИФР

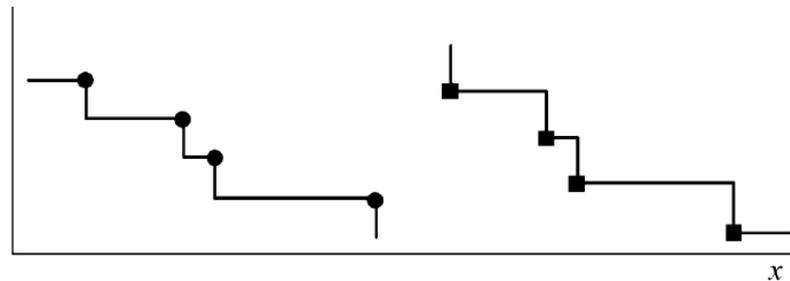


Рис. 3.3. Схема дискретизации

Разложение W на рис. 3.1 — единственный интервал — $\{([15, 35], 1)\}$.

3.2. Декартово произведение

В работе [55] Yager объяснил, как вычислять функции от структур Dempster–Shafer при условии независимости. По существу то же вычисление было

независимо описано в [54] и Berleant [8]. Предположим, что A — неопределенное число, определяемое списком (a_i, p_i) $i = 1, \dots, n$ и B — другое неопределенное число (b_j, q_j) $j = 1, \dots, m$. Где a_i, b_j — интервалы, p_i, q_j — вероятности

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

Таким образом, операция $f(A, B)$ над независимыми переменными A, B , характеризуется декартовым произведением двух списков, которое является списком, состоящим из nm элементов,

$$[(f(a_1, b_1), p_1 q_1), \dots, (f(a_n, b_1), p_n q_1), \dots, (f(a_1, b_m), p_1 q_m), \dots, (f(a_n, b_m), p_n q_m)],$$

где f — функция, определяющая операцию над неопределенными переменными A, B .

Независимость аргументов, подразумевает что вероятности следует просто перемножить. Потому

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j = 1.$$

Этот список имеет тот же вид что и списки для A и B , это список пар (интервал, значение). Таким образом этот список определяет некоторое неопределенное число, характеризующее операцию $f(A, B)$.

Представим результаты операций. Для простоты рассмотрим операцию сложения. Вычисляем все интервалы $c_{ij} = a_i + b_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Каждому интервалу c_{ij} сопоставляем вероятность $p_i q_j$. Аналогично можно рассмотреть и другие операции. Алгоритмы, чтобы обработать эти случаи, являются более или менее прямыми обобщениями этого для дополнения [9, 24, 25, 55, 54].

Далее левые конечные точки всех nm интервалов сортируются и используются, чтобы сформировать левую границу ИФР. Правые концы интервалов образуют правую границу ИФР.

Полученная ИФР отражает всю информацию о функции распределения суммы U и V . Ответ строгий в том смысле, что ИФР содержит все функции распределения, которые могли бы возникнуть в результате использования функций распределения U и V при условии, что они лежат в рамках их соответствующих им ИФР [54]. ИФР, как также известно, самые лучшие или оптимальные в том смысле, что границы не могли быть более точными при сделанных предположениях. Безусловно, ИФР, несомненно, содержат лишние функции распределения суммы.

3.3. Независимость переменных

В теории вероятностей есть несколько определений независимости. Эти определения математически эквивалентны друг другу. В этом отношении есть, по существу, только одно понятие независимости, которое одновременно включает все остальные. В работе [15] Couso и др. указывают, что дело обстоит не так для неточных вероятностей. Они приводят шесть возможных определений независимости, у которых, оказывается, есть различные последствия для некоторых вычислений, включающих неточные вероятности.

Следуя Yager [55] и [54], только одно определение независимости дает простое вычисление вероятности в виде произведения вероятностей соответствующих интервалов в декартовом произведении. Couso и др. [15] назвали это независимостью случайного набора. Это немного отличается от определений, утверждающих, что некоторое знание о значении одной переменной ничего не говорит о функции распределения другой переменной, которую они называют «эпистемологической независимостью» [53]. Именно это последнее определение соответствует лучше всего [40]: «параметры a , и b независимы, т. е., знание о значении одного параметра ничего не подразумевает о значении другой».

Может случиться так, что принятие независимости случайного набора приводит к большему набору совместных распределений, чем это делает принимающая эпистемологическая независимость или любой из других видов независимости, которые обобщают понятие из теории вероятности [15]. Это означало бы, что все совместные распределения, которые подразумеваются под эпистемологической независимостью, включены в набор совместных распределений, подразумеваемых под независимостью случайного набора. Последствие этого было бы то, что границы, следующие из наших вычислений под независимостью случайного набора, конечно, не более трудны, чем те, которые были бы вычислены, принимая эпистемологическую независимость. Поэтому наши ответы на основе независимости случайного набора строгие, если они, несомненно, включают все дистрибутивы, которые могли бы фактически возникнуть, дающие установленную неопределенность.

3.4. Сжатие

Если каждый из k переменных, участвующих в прямом произведении, имеет список из n элементов вида (интервал, вероятность), то результат анализа будет иметь n^k таких пар. При больших значениях n величина n^k может быть довольно большой. Williamson [54] рассмотрел возможность сжатия выходных списков до приемлемого размера, сохраняя при этом приемлемую точность.

Во многих задачах интервальная арифметика может быть использована для вычисления функции от интервальных значений.

Наряду с ограничениями на функции распределения, анализ вероятностных границ также позволяет вычислить границы математического ожидания и дисперсии.

Пример 7. Пусть $a = [0.1, 1]$, $b = [0, 1]$ — интервалы. P-box'ы для этих интервалов вырождены, и декомпозиция представляет список из одного элемента для a — $([0.1, 1], 1)$, b — $([0, 1], 1)$. Пусть необходимо построить P-box для операции над a , b : $(a + b)^a$. Тогда, используя вероятностные расширения для выражения $z = (a + b)^a$, получаем $z = [0.692, 2]$. Соответственно P-box представляет собой прямоугольник $[0.692, 2] \times [0, 1]$.

Пример 8. Переменная a определяется как интервал $[0.1, 1]$, но переменная b имеет логнормальное распределение с матожиданием $\mu \in [0, 1]$ и дисперсией $\sigma \in [0.1, 0.5]$.

ИФР может быть вычислена достаточно просто путем вычисления функции распределения четырех экстремальных распределений, образующихся возможными парами конечных точек параметров. ИФР для b изображена на рис. 3.4. Матожидание этого распределения лежит в интервале $[1.00, 3.08]$ и дисперсия лежит в интервале $[0.010, 2.7]$.

Поскольку переменная a является простым интервалом, то ИФР представляется списком из одного элемента $\{([0.1, 1], 1)\}$. Следовательно, декартово произведение между переменными a и b является матрицей с 1×100 элементов. Результирующая ИФР изображена на рис. 3.5.

Пример 9. Для переменной b известно точное распределение. Это логнормальная форма, с параметрами $\mu = 0.5$ $\sigma = 0.5$. ИФР изображена на рис. 3.6. Несмотря на то, что распределение задано точно, но при его дискретизации на 100 уровней появляется некоторая ошибка, которая может быть выражена этими интервалами. Полученный P-box изображен на рис. 3.6.

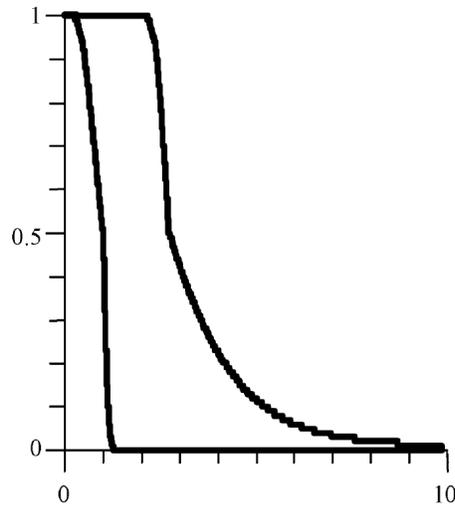


Рис. 3.4. ИФР для логнормального распределения с матожиданием $\mu \in [0, 1]$ и дисперсией $\sigma \in [0.1, 0.5]$.

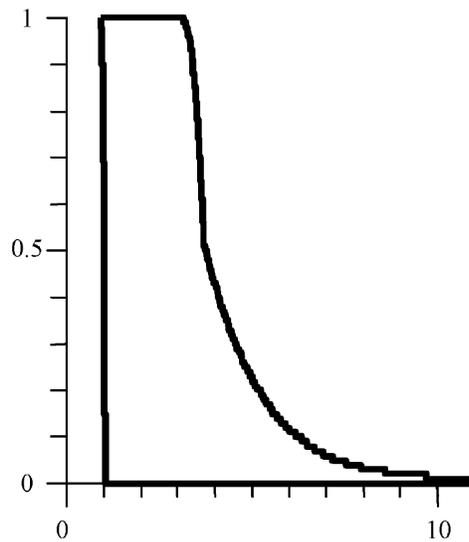


Рис. 3.5. P-бокс для $(a + b)^a$

3.5. Агрегация

В примерах 7–9, рассмотренных выше, используются многократные оценки переменных. Так, в примере 7, есть четыре оценки для переменной b , и в примерах 8 и 9, есть многократные оценки для обоих переменных. Если агрегировать их, какой метод должен использоваться, чтобы сделать это? Есть различные способы объединить информацию в различных оценках. Ferson и др. [26] рассмотрели много методов агрегации, которые будут полезны для ИФР.

На рис. 3.7 изображены результаты применения четырех различных опе-

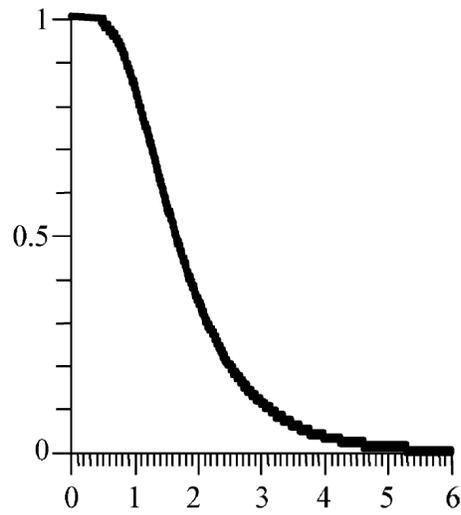


Рис. 3.6. P-вох для b

раций агрегации.

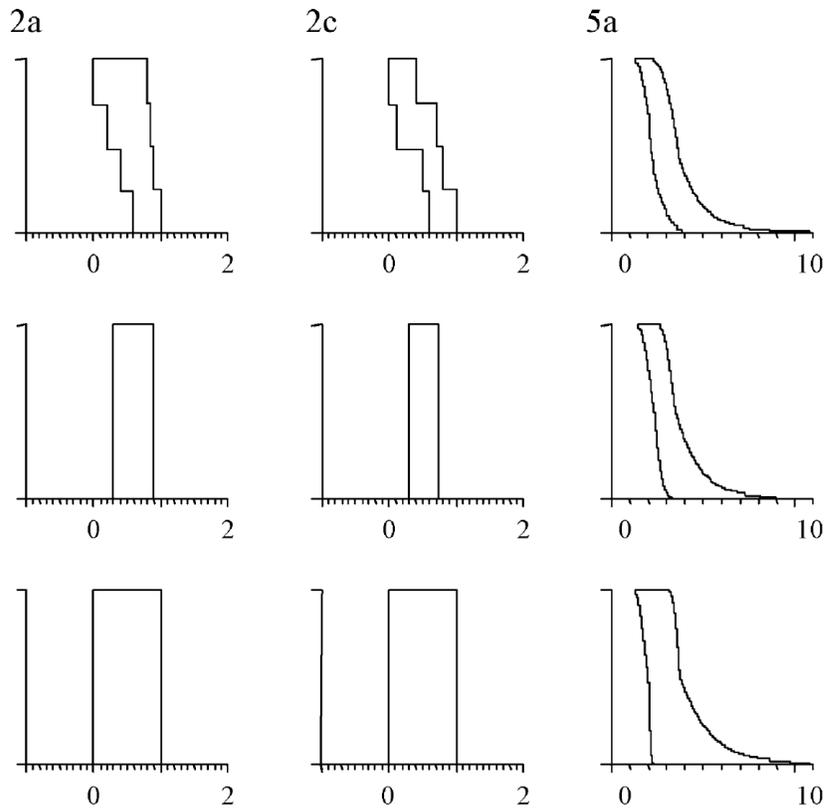


Рис. 3.7. Различные агрегации

Помимо методов, проиллюстрированных на рис. 3.7, есть много других возможных операций агрегации, которые могли использоваться, включая Байесовы стратегии, несколько версий правила Демпстера и статистиче-

ских подходов, которые рассматривают многократные оценки как выборки.

3.6. Критика

У ИФР отсутствует *внутренняя структура*. Поскольку ИФР сохраняет мало информации о внутренней структуре распределения, это не позволяет знать структуру распределения в пределах ИФР. Это может значительно осложнить решения в тех случаях, когда границы ИФР близки к вертикальным.

ИФР теряют информацию. Для достижения вычислительной эффективности, ИФР теряют информацию по сравнению с более сложными структурами Демпстер-Шафера. В частности, ИФР теряют информацию и о наиболее вероятных значениях. Эта информация может быть полезной особенно в ситуациях, когда величина неизвестна, но является константой.

Использование теории вероятности. Некоторые критики использования ИФР утверждают, что использования функций распределения вероятностей достаточно, чтобы охарактеризовать неопределенность всех видов. Например, Lindley утверждал: как ни подходить к неопределенности, теория вероятности единственный способ решать проблемы [31]. Эти критики утверждают, что бессмысленно говорить о «неопределенности в отношении вероятности», и что традиционная теория вероятности является полной и достаточной для представления всех форм неопределенности.

Использование теории возможности. Некоторые критики утверждают, что имеет смысл в некоторых случаях работать с распределением возможности, а не работать отдельно с левой и правой границами ИФР. Они считают, что множество функций распределений вероятности, вызванных распределением возможности, является подмножеством ИФР [5]. Другие возражают, что результаты, полученные с помощью распределений возможности, не лучше чем ИФР [51].

3.7. Гистограммные функции распределения

Как отмечалось выше, использование ИФР часто дает неудовлетворительные результаты. ИФР унаследовали сложности и проблемы интервального анализа, поскольку используют для декомпозиции интервальное пред-

ставление и соответственно для арифметических операций используют интервальную арифметику.

Интервальный анализ направлен на мажорирование границ распределений и соответственно ничего не говорит о распределении случайной величины внутри интервала. Часто при этом интервальный анализ дает значительно более широкие границы.

Таким образом, один из способов преодолеть эти трудности — рассмотреть *гистограммные функции распределения* (ГФР). Подобно тому как осуществляется переход от интервальных переменных к переменным, заданным своими плотностями вероятности, например гистограммами, перейдем от ИФР к ГВР.

Заметим, что обычная ИФР задается своими граничными функциями

$$\underline{F}(x) \leq \overline{F}(x),$$

где $\underline{F}(x), \overline{F}(x) \in [0, 1]$ — некоторые функции распределения.

Далее рассмотрим непрерывное отображение $P^2: y \in [0, 1] \rightarrow C$, т. е. сопоставим $\forall y \in [0, 1]$ функцию плотности вероятности

$$P_y(x) \geq 0, x \in [\overline{F}^{-1}(y), \underline{F}^{-1}(y)], y \in [0, 1].$$

Таким образом, определим ГФР как *множество плотностей вероятности* $\{P_y\}$, $y \in [0, 1]$. Заметим, что множество $\{P_y\}$ можно представить как непрерывную функцию $p(x, y)$.

Рассмотрим гистограммное приближение для ИФР. Следуя алгоритмам декомпозиции ИФР, построим на отрезке $[0, 1]$ сетку $\omega_y: \{0 = y_0 < y_1 < y_2, \dots, y_n = 1\}$. Рассмотрим полосу $[y_i, y_{i+1}]$. Далее на отрезке $[\overline{F}^{-1}(y_i), \underline{F}^{-1}(y_{i+1})]$ построим сетку

$$\omega^i: \{\overline{F}^{-1}(y_i) = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_m = \underline{F}^{-1}(y_{i+1})\}$$

и определим на ней значения гистограммы $P^i = \{P_l^i | l = 1, \dots, m\}$.

$$P_l^i = \int_{\Omega_{il}} p(x, y) dx dy / \text{mes}(\Omega_{il}),$$

где $\Omega_{il} = [y_i, y_{i+1}] \times [x_{l-1}, x_l]$. Таким образом, пара (P^i, ω^i) определяет гистограмму H^i . Совокупность гистограмм $\{H^i | i = 1, \dots, n\}$ и сетки ω_y определяет ГФР для P_{box}^2 .

Арифметические операции над ГФР. Пусть P_1, P_2 — ГФР, заданные на структурах $(H_1, \omega_1), (H_2, \omega_2)$. Рассмотрим арифметическую операцию

$\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ над P_1, P_2 . Таким образом, следуя операциям над ИФР вычислим декартово произведение $H_1 \times H_2$ в виде множества гистограмм $\{H_{ij} = H_1^i \star H_2^j\}$ и каждому элементу этого множества сопоставим значение $p_{ij} = (y_{i+1}^1 - y_i^1) \cdot (y_{j+1}^2 - y_j^2)$. Список $[(H_{ij}, p_{ij})]$ и определит ГФР $P_1 \star P_2$.

Пример 10. Вернемся к примеру 1. Пусть по прежнему $a = [0.1, 1]$ $b = [0, 1]$ — интервалы, но далее предполагаем, что следуя принципу максимальной энтропии a, b равномерно распределены. Списки для a, b построим размерности $n = 100$ с одинаковыми значениями вероятности $p = 0.01$, сетки для гистограмм построим равномерные размерности 100. Используя описанный выше подход, построим ГФР для операции над a, b : $(a + b)^a$. В итоге получаем, 100 гистограмм с носителями $z = [0.692, 2]$. Соответственно ИФР представляет собой прямоугольник которые образуют прямоугольник $[0.692, 2] \times [0, 1]$, аналогичный примеру 3.1. Однако математические ожидания этих гистограмм образуют функцию распределения, которая несет вполне конкретную информацию о вероятностях случайной величины $(a + b)^a$. На рис. 3.8 приведены ИФР и математическое ожидание ГФР.

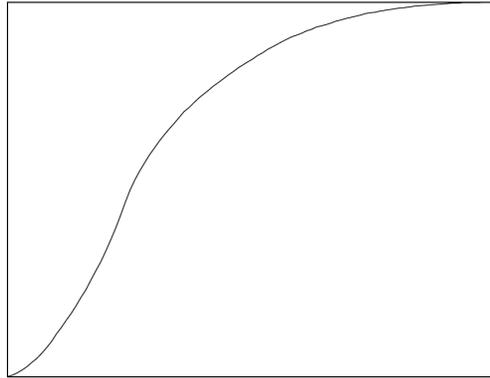


Рис. 3.8. ИФР и математическое ожидание ГФР

В главе рассмотрено гистограммное расширение для P-boxes, которое позволяет значительно улучшить оценки для операций над случайными величинами. Это расширение в значительной мере использует подходы численного вероятностного анализа.

Глава 4.

Элементы численного вероятностного анализа

Статистические методы все более широко применяют при решении различных прикладных задач. Область приложений довольно широка. Наличие неопределенностей во входных данных при решении многих практических задач приводит к необходимости создания методов, учитывающих эти неопределенности.

Аналитические методы вероятностного анализа носят ограниченный характер и не могут быть использованы для большинства прикладных задач. Метод Монте-Карло — мощный и универсальный подход, который широко используется для стохастического моделирования, но наряду со своими положительными качествами обладает рядом недостатков. Один из самых существенных — низкая скорость сходимости метода Монте-Карло [93].

Альтернативой методу Монте-Карло в ряде случаев можно считать интервальную математику [68], подходы, основанные на численных операциях над случайными величинами [8, 20, 54, 66], методы численного вероятностного анализа [19, 74].

Предыдущие пакеты, численно реализующие гистограммную арифметику [8, 20, 54, 66], имеют некоторые недостатки. Расчеты операций над случайными величинами в главном образом основываются на картезианском произведении подынтервалов, что ощутимо сказывается на точности результатов.

Численный вероятностный анализ представляет собой раздел вычислительной математики, предметом которого является решение задач со стохастическими неопределенностями в данных в условиях элиторной и эпистемистической неопределенности с использованием численных операций над плотностями вероятностей случайных величин и их функций. Необходимость разработки численных операций, определяющих предмет ариф-

метики, определяется следующими основаниями. Одним из способов представления и описания стохастической неопределенности в данных является функция плотности вероятности. В рамках классической теории вероятностей приводятся аналитические формулы выполнения простейших арифметических операций над случайными величинами. В реальности использование данных процедур или существенно затруднено, или практически невозможно. А поскольку при построении множества решений в задачах принятия управленческих решений необходимо осуществлять численные арифметические процедуры, в том числе возведение в степень, нахождение максимального и минимального значений и выполнение операций бинарных отношений, то разработка эффективных численных методов — актуальная задача.

Для разработки арифметики и построения законов распределения функций от случайных аргументов вводится последовательно понятие гистограммной переменной (гистограммного числа) и разрабатываются численные процедуры гистограммной арифметики. Идея гистограммного подхода заключается в следующем: наряду с общими представлениями случайных величин своими плотностями в виде непрерывных функций, можно рассматривать случайные величины, плотность распределения которых представляет гистограмму.

Для численного моделирования функциональных зависимостей со случайными аргументами вводится понятие вероятностного, гистограммного расширения и естественного расширения и с использованием этих понятий доказывается ряд теорем для различных классов функций.

4.1. Способы представления функций плотности случайных величин

Представим виды функций плотности вероятности случайных величин, над которыми могут осуществляться арифметические операции.

Дискретные случайные величины. Дискретная случайная величина ξ принимает значения x_1, x_2, \dots, x_n и существует такая функция $p(x)$, значение которой в каждой точке x_i есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_i .

Гистограммы. Гистограммой называется случайная величина, плотность распределения которой представлена кусочно-постоянной функцией. Гистограмма P определяется сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$, на каждом отрезке

$[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ гистограмма принимает постоянное значение p_i .

Интервальные гистограммы. Зачастую в прикладных задачах нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины. В таких случаях задаются оценки плотности распределения сверху и снизу. Такие оценки удобно аппроксимировать интервальными гистограммами. Гистограмму будем называть интервальной, если ее функция распределения $P(x)$ — кусочно-интервальная функция.

Гистограммы второго порядка. В случае эпистемической неопределённости наряду с интервальными гистограммами возможно использование *гистограмм второго порядка*, т. е. таких гистограмм, каждый столбец которой — гистограмма [72].

Кусочно-линейные функции. Кусочно-линейные функции также могут рассматриваться как инструмент аппроксимации функции плотности распределения случайной величины. Кусочно-линейной называется непрерывная функция, линейная на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Сплайны. Под сплайном s будем понимать кусочно-полиномиальную функцию. Сплайны имеют многочисленные применения в силу своих аппроксимационных свойств как в математической теории, так и в разнообразных вычислительных приложениях. Будем рассматривать случайные величины плотность вероятности которых аппроксимируется сплайном.

Аналитически заданные плотности вероятности. Рассматриваются случайные величины, плотность распределения которых задана аналитически.

4.2. Гистограммные переменные

Обозначим, через \mathbf{R} множество $\{\mathbf{x}\}$ случайных величин, заданных своими плотностями вероятности p_x , соответственно \mathbf{R}^n — пространство случайных векторов.

Наряду с общими представлениями случайных величин своими плотностями в виде непрерывных функций, будем рассматривать случайные величины, плотность распределения которых представляет гистограмму. Гистограмма P — кусочно-постоянная функция определяется сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ гистограмма принимает постоянное значение p_i .

Рассмотрим вопрос построения гистограммы P по некоторой p_x . Тогда

значение p_i на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ определится как среднее

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_x(\xi) d\xi / (x_i - x_{i-1}).$$

4.3. Законы распределения функций случайных аргументов

Имеется непрерывная случайная величина \mathbf{x} с плотностью распределения p_x . Другая случайная величина \mathbf{y} связана с нею функциональной зависимостью

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

Плотность распределения величины \mathbf{y} в случае монотонной функции f согласно [64] определяется следующим образом:

$$p_y(y) = f(f^{-1}(y)) |(f^{-1})'(y)|,$$

где f^{-1} — функция, обратная к f .

Однако, пользоваться таким представлением в ряде случаев довольно затруднительно.

Рассмотрим построение гистограммы p_y по известной гистограмме p_x . Пусть p_x задается сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$. Вычислим сетку для гистограммы p_y $\{y_i | i = 0, \dots, n\}$ как $y_i = f(x_i)$. Тогда вероятность попадания случайной величины \mathbf{x} в отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ равна вероятности попадания случайной величины \mathbf{y} в отрезок $[y_{i-1}, y_i]$. Следовательно, гистограмма p_y будет определяться сеткой $\{y_i | i = 0, \dots, n\}$ и соответствующими значениями $p_{yi} = p_{xi}$.

Рассмотрим общий случай, когда f не является монотонной рис. 4.1. Пусть $\{y_i | i = 0, \dots, n\}$ — сетка для гистограммы p_y . Фиксируем отрезок $[y_{i-1}, y_i]$, найдем p_{yi} . Пусть $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$ такие, что $[y_{i-1}, y_i] = f([a_j, b_j])$. Тогда вероятность p_{yi} попадания случайной величины \mathbf{y} в отрезок $[y_{i-1}, y_i]$ определяется как

$$p_{yi} = \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} p_x(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим задачу определения закона распределения функции нескольких случайных аргументов.

Приведем метод решения этой задачи для случая функции двух аргументов. Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин \mathbf{x}, \mathbf{y}

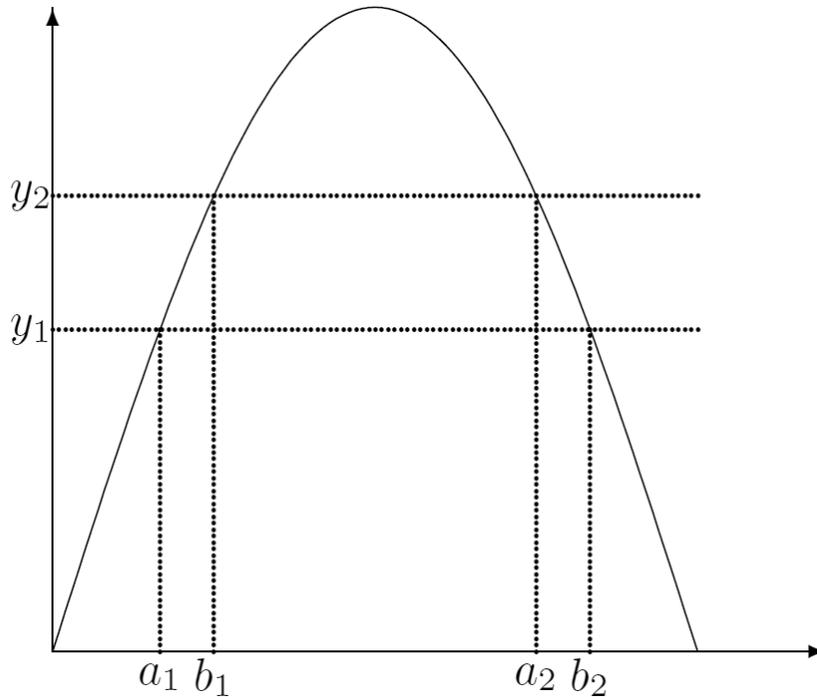


Рис. 4.1. Случай не монотонных функций

с плотностью распределения $p(x, y)$. Случайная величина z связана с x и y функциональной зависимостью

$$z = f(x, y).$$

Тогда закон распределения P_z величины z [64]:

$$P_z(r) = P(f(x, y) < r).$$

Пусть, как и выше, гистограмма p_z определяется сеткой $\{z_i | i = 0, \dots, n\}$. Определим область $\Omega_i = \{(x, y) | z_i < f(x, y) < z_{i+1}\}$. Тогда p_{zi} имеет вид

$$p_{zi} = \int \int_{\Omega_i} p(x, y) dx dy / (z_{i+1} - z_i).$$

4.4. Операции над плотностями вероятности случайных величин

Рассмотрим арифметические операции над различными видами плотностей вероятности случайных величин.

Операция над двумя дискретными величинами. Пусть необходимо произвести некоторую арифметическую операцию $* \in \{+, -, \cdot, /, \uparrow\}$

над двумя независимыми дискретными величинами ξ и η , принимающими соответственно значения x_i с вероятностью p_i и y_i с вероятностью q_i . Результат — случайная величина ψ , принимающая все возможные значения $x_i * y_j$ с вероятностью $p_i q_j$. Поскольку возможен «комбинаторный взрыв», то возникает необходимость преобразовывать дискретные случайные величины в другие типы, например гистограммные. Для этих случаев можно воспользоваться алгоритмами, описанными, например, в [80].

Операция над двумя гистограммными величинами. Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ с плотностью распределения $p(x_1, x_2)$. Известны аналитические формулы для определения плотности вероятности результатов арифметических действий над случайными величинами. Например, для нахождения плотности вероятности $p_{x_1+x_2}$ суммы двух случайных величин $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ используется соотношение [67]

$$p_{x_1+x_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-v, v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} p(v, x-v)dv, \quad (4.1)$$

для нахождения плотности вероятности p_{x_1/x_2} частного двух случайных величин $\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_2$

$$p_{x_1/x_2} = \int_0^{\infty} vp(xv, v)dv - \int_{-\infty}^0 vp(v, xv)dv. \quad (4.2)$$

Плотность вероятности $p_{x_1x_2}$ произведения двух случайных величин $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ [64] определяется соотношением

$$p_{x_1x_2} = \int_0^{\infty} (1/v)p(x/v, v)dv - \int_{-\infty}^0 (1/v)p(v, x/v)dv. \quad (4.3)$$

Однако эти формулы не всегда удобны для численных расчетов.

Основные принципы разработки гистограммных операций продемонстрируем на примере операции сложения. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, и носители \mathbf{x}_1 — $[a_1, a_2]$, \mathbf{x}_2 — $[b_1, b_2]$, $p(x_1, x_2)$ — плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Заметим, что прямоугольник $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ — носитель плотности распределения вероятностей $p(x_1, x_2)$ на рис. 4.2 и плотность вероятности \mathbf{z} отлична от нуля на интервале $[a_1+b_1, a_2+b_2]$. Обозначим z_i , $i = 0, 1, \dots, n$ — точки деления этого интервала на n отрезков. Тогда вероятность попадания величины \mathbf{z} в интервал $[z_i, z_{i+1}]$ определяется по формуле

$$P(z_i < \mathbf{z} < z_{i+1}) = \left(\int \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \right.$$

где $\Omega_i = \{(x_1, x_2) | z_i \leq x_1 + x_2 \leq z_{i+1}\}$ [66]. И окончательно p_{z_i} имеет вид

$$p_{z_i} = \left(\int \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) / (z_{i+1} - z_i). \quad (4.4)$$

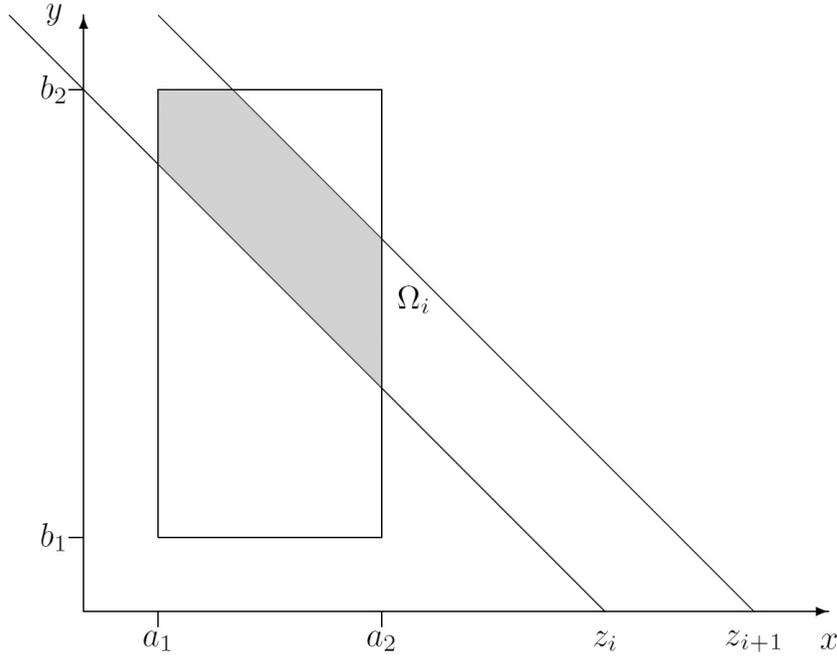


Рис. 4.2. Построение гистограммы суммы двух случайных величин

Рассмотренный выше подход обобщается на случай большего числа переменных. Пусть требуется найти гистограмму p_z суммы

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

и пусть $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность распределения вероятностей случайного вектора (x_1, x_2, \dots, x_n) . Тогда вероятность попадания z в интервал (z_i, z_{i+1}) соответственно равна [67]

$$P(z_i < z < z_{i+1}) = \int \dots \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где $\Omega_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | z_i < a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n < z_{i+1}\}$.

p_{z_i} имеет вид

$$p_{z_i} = \int \dots \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n / (z_{i+1} - z_i).$$

Рассмотрим в качестве примера операцию $\max(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Вероятность того, что $\max(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < z$ — определяется через функцию распределения F .

$$F(z) = \int_{-\infty}^z P_x(\xi) d\xi \int_{\infty}^z P_y(\xi) d\xi.$$

Используя функцию распределения F , можно построить гистограмму для $\max(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на сетке $\{z_i\}$. Тогда $p_i = F(z_{i+1}) - F(z_i)$.

Реализация арифметических операций основана на работе с $p(x, y)$ — совместной плотностью вероятности двух случайных величин x, y . Пусть p_z — гистограмма, приближающая плотность вероятности, арифметической операции над двумя случайными величинами $x * y$, где $*$ $\in \{+, -, \cdot, /, \uparrow\}$. Тогда вероятность попадания величины z в интервал $[z_i, z_{i+1}]$ определяется по формуле

$$P(z_k < z < z_{k+1}) = \int_{\Omega_k} p(x, y) dx dy, \quad (4.5)$$

где $\Omega_k = \{(x, y) | z_k \leq x * y \leq z_{k+1}\}$.

Численная реализация этого метода заключается в следующем. Пусть случайная величина x задана сеткой a_i и вероятностями p_i , y соответственно b_i и q_i . Носители плотности вероятности этих величин — $[a_0, a_n]$ и $[b_0, b_n]$. Носитель совместной вероятности $p(x_1, x_2)$ — прямоугольник $[a_0, a_n] \times [b_0, b_n]$ и разбит на n^2 прямоугольников $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, вероятность попадания в которые является постоянной величиной $p_i q_j$ для независимых случайных величин и p_{ij} для зависимых.

Для вычисления искомой гистограммы совершаем обход по всем прямоугольникам $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, для каждого из них вычисляем его вклад в каждый отрезок $[z_k, z_{k+1}]$ итоговой гистограммы. С этой целью мы определяем область Ω'_k , по которой рассматриваемый прямоугольник $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ пересекается с Ω_k :

$$\Omega'_k = \Omega_k \cap ([a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]).$$

Вычислим по Ω'_k интеграл

$$p_{zk} = \int_{\Omega'_k} p(x, y) dx dy. \quad (4.6)$$

Заметим, что на каждом $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ совместная плотность вероятности $p(x, y)$ является константой, и поэтому этот интеграл равен отношению площади Ω'_k к площади прямоугольника $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$. Совершив обход по всем прямоугольникам, вычисляем искомую гистограмму p_z . При этом число арифметических операций для построения гистограммы $O(n^2)$.

Операция над плотностями вероятности гистограммной и дискретной случайных величин. Рассмотрим операции вида $x * c$, где $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$, c — константа, x — случайная величина с плотностью вероятности f_x . Когда $*$ $\in \{+, -\}$, то функцию плотности вероятности f_z

случайной величины $z = x * c$ можно легко выразить следующим образом: $f_z(\xi * c) = f_x(\xi)$, $\xi \in R$. Рассмотрим случай, когда $*$ — операция умножения и $c \neq 0$, тогда $f_z(\xi) = f_x(\xi/c)/c$, в случае $c = 0$ случайная величина z принимает лишь одно значение 0 с вероятностью 1. Операция деления на $c \neq 0$ получается аналогично $f_z(\xi) = f_x(\xi \cdot c) \cdot c$, $\xi \in R$.

В случае осуществления операции над дискретной и гистограммной случайными величинами мы имеем вместо прямоугольников $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ отрезки $A_i \times [b_j, b_{j+1}]$. Далее аналогично, перебирая все подобные отрезки, вычисляем вклад каждого в итоговую гистограмму. Разница в численной реализации — поиск не соотношения площадей, а соотношения длин отрезков. Однако если число значений, принимаемых дискретной случайной величиной, велико, то подобные вычисления могут спровоцировать существенное увеличение временных затрат. В такой ситуации дискретная случайная величина представляется в виде гистограммы, и далее производятся действия над гистограммами, как описано в предыдущем пункте.

Операция над гистограммной величиной и аналитически заданной функцией плотности. Алгоритм вычислений аналогичен случаю с двумя гистограммными величинами с той лишь разницей, что в данном случае совместная плотность вероятности не будет являться константой, и потребуются численные вычисления интегралов вида (4.4). В результате получаем гистограмму, приближающую плотность распределения искомой случайной величины.

Операция над гистограммами второго порядка. Пусть X, Y — гистограммы второго порядка, определяются сетками $\{v_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, $\{w_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ и наборами гистограмм $\{Px_i\}$, $\{Py_i\}$. Пусть $Z = X * Y$, где $*$ $\in \{+, -, \cdot, /, \uparrow\}$. Построим Z как гистограмму второго порядка. Зададим сетку $\{z_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, тогда гистограмма Pz_i на отрезке $[z_k, z_{k+1}]$, следуя (4.5), определяется по формуле

$$Pz_k = \int_{\Omega_k} X(\xi)Y(\eta)d\xi d\eta / (z_{k+1} - z_k),$$

где $\Omega_k = \{(\xi, \eta) | z_k \leq \xi * \eta \leq z_{k+1}\}$.

Заметим, что на каждом прямоугольнике $[v_{i-1}, v_i] \times [w_{j-1}, w_j]$ функция $X(\xi)Y(\eta)$ есть постоянная гистограмма $Px_i \cdot Py_j$. Интеграл от гистограммы по некоторой области есть значение гистограммы, умноженное на площадь области.

4.5. Тестирование. Сравнение с методом Монте-Карло

В качестве примера тестирования численных операций над гистограммными переменными рассмотрим задачу сложения четырех случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$.

Заметим, что плотность вероятности суммы n равномерно распределенных величин есть

$$p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} (x^{n-1} - C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-2)^{n-1} - \dots), \quad (4.7)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты и при каждом фиксированном значении аргумента x суммирование в скобках осуществляется только по тем слагаемым, для которых значение $(x-k)$, $k = 1, 2, \dots$ неотрицательно [17].

Таким образом, при $n = 4$ мы имеем

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3} & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 10x - \frac{22}{3} & \text{при } 2 \leq x \leq 3; \\ -\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 8x + \frac{32}{3} & \text{при } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Таблица 4.1.

Сравнение точности гистограммной арифметики и метода Монте-Карло

n	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$	$\ H_n - P_n\ _2$
10	0.0059	0.00168	0.00037	4.16e-3
20	0.0055	0.00198	0.00041	5.39e-4
50	0.0026	0.00103	0.00026	3.47e-5
100	0.0023	0.00062	0.00018	4.35e-6
150	0.0016	0.00055	0.00016	1.28e-6
200	0.0014	0.00044	0.00014	5.44e-7

Пусть N — число повторов метода Монте-Карло и n — размерность сеток гистограмм, H_n — гистограмма, построенная по функции p для сетки размерности n , P_n — гистограмма, полученная с использованием арифметических операций для сетки размерности n , $MC_{n,N}$ — гистограмма, полученная с использованием метода Монте-Карло для n, N .

В сравнительной таблице результатов (табл. 4.1) указаны погрешности $\|H_n - P_n\|_2$ и $\|H_n - MC_{n,N}\|_2$ в норме l_2 , возникшие при вычислении суммы четырех равномерно распределенных случайных величин посредством численных операций гистограммной арифметики и метода Монте-Карло с различным числом повторов [17].

Как можно видеть, при фиксированном n ошибка метода Монте-Карло убывает как $O(1/\sqrt{N})$, гистограммные операции в приведенном примере имеют скорость сходимости $O(1/n^\alpha)$, $\alpha \approx 3, 5$. При этом число арифметических операций гистограммной арифметики определяется порядком $O(n^2)$, а число операций метода Монте-Карло — непосредственно числом бросаний [93].

Пусть необходимо достигнуть точности ε , число операций метода Монте-Карло при этом $O(\varepsilon^{-2})$ в сравнении с гистограммными расширениями $O(\varepsilon^{-2/\alpha})$. Таким образом, получается, что подход, основанный на гистограммных операциях, эффективней метода Монте-Карло примерно в $\varepsilon^{-2(1-1/\alpha)}$ раз.

Непосредственно из табл. 4.1 следует, что гистограммная арифметика эффективней метода Монте-Карло примерно в 100–1000 раз.

Увеличение точности. С целью увеличения точности имеет смысл представлять искомую плотность вероятности в виде кусочно-линейной функции или сплайна. Этого можно добиться двумя способами.

Получившуюся в результате работы гистограмму можно сглаживать. Например, соединив середины столбцов гистограммы, мы получим кусочно-линейную функцию, приближающую искомую плотность вероятности.

Можно искать значение плотности распределения вероятности искомой случайной величины в конкретных точках, которые на графике совместной плотности вероятности величин, над которыми осуществляется операция, будут представлены кривыми (прямыми — для сложения, вычитания и деления, гиперболами — для умножения). Вычислив интеграл по этим кривым, мы получим вероятность попадания в конкретные точки и, нормализовав полученный результат, сможем построить по этим точкам кусочно-линейную функцию либо сплайн.

Как альтернативу вычислению интеграла по кривой можно рассматривать вычисление вероятности попадания в полосу (аналогично гистограммному случаю), в качестве полосы взяв достаточно малую окрестность рассматриваемой кривой.

4.6. Вероятностные расширения

Естественное вероятностное расширение. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — рациональная функция, тогда для вычисления гистограммы F заменим арифметические операции на гистограммные, а переменные x_1, x_2, \dots, x_n — их

гистограммными значениями. Полученную гистограмму F будем называть *естественным гистограммным расширением*.

Теорема 6. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — рациональная функция, каждая переменная которой встречается только один раз, и x_1, \dots, x_n — независимые случайные величины. Тогда естественное гистограммное расширение аппроксимирует вероятностное расширение с точностью $O(h^\alpha)$.

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 2$ утверждение справедливо [66]. Пусть справедливо для $n = k$ и гистограмма F_k аппроксимирует плотность вероятности функции $f(x_1, \dots, x_k)$ с некоторой точностью $O(h^\alpha)$. Покажем, что это справедливо и для $n = k + 1$. Действительно, $F_{k+1} = F_k * x_{k+1}$, но

$$F_{k+1} - f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (F_k - f(x_1, \dots, x_k)) * x_{k+1} \leq Ch^\alpha * \text{supp} \{x_{k+1}\}.$$

Теорема доказана.

Пример 11. Для рациональной функции $f(x, y) = xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$ только второе представление попадает под условие теоремы 6. и, следовательно, естественное гистограммное расширение будет аппроксимировать вероятностное с некоторой точностью $O(h^\alpha)$.

Теорема 6. легко обобщается на следующий случай:

Пусть для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ возможна замена переменных, такая что $f(z_1, \dots, z_k)$ — рациональная функция от переменных z_1, \dots, z_k , удовлетворяющая условиям Теоремы 1 и z_i — функции от множества переменных $x_i, i \in \text{Ind}_i$, причем множества Ind_i попарно не пересекаются. Пусть для каждой z_i существуют вероятностные расширения. Тогда естественное расширение $f(z_1, \dots, z_k)$ будет аппроксимировать вероятностное с некоторой точностью.

Пример 12. Пусть $f(x_1, x_2) = (-x_1^2 + x_1) \sin(x_2)$. Тогда, полагая $z_1 = (-x_1^2 + 1)$ и $z_2 = \sin(x_2)$. Заметим, что можно построить вероятностные расширения функций z_1, z_2 и $f = z_1 z_2$ — рациональная функция, попадающая под условия теоремы 6. Следовательно, ее естественное расширение будет аппроксимировать вероятностное с некоторой точностью.

Общий случай. Рассмотрим случай, когда для $f(x_1, \dots, x_n)$ необходимо найти вероятностное расширение \mathbf{f} , но не удастся построить замену переменных согласно теореме 2. Пусть для определенности только x_1 встречается несколько раз. Заметим, что если подставить вместо случайной величины x_1 детерминированную t , то для функции $f(t, x_2, \dots, x_n)$ можно построить естественное вероятностное расширение.

Таблица 4.2.
Погрешность аппроксимации вероятностных расширений

n	$\ f - \varphi\ _2$
10	1.2887825282E-03
20	4.5592973952E-04
40	1.6120775967E-04
80	5.6996092139E-05
160	2.0151185588E-05

Пусть t — дискретная случайная величина, аппроксимирующая x_1 следующим образом: t принимает значения t_i с вероятностью P_i и пусть для каждой $f(t_i, x_2, \dots, x_n)$ можно построить естественное вероятностное расширение φ_i . Тогда вероятностное расширение \mathbf{f} функции $f(x_1, \dots, x_n)$ можно аппроксимировать плотностью вероятности φ следующим образом:

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i \varphi_i(\xi).$$

Пример 13. $f = x - x$. В этом случае $f = 0$ — детерминированная. Естественное вероятностное расширение $f = x - x$ дает некоторую случайную величину. Замена x , по правилу, описанному выше, получаем правильный ответ $f = 0$ — детерминированная.

Пример 14. Пусть $f(x, y) = x^2 y + x$, где x, y — равномерные случайные величины, заданные на $[0, 1]$. Заменим x дискретной случайной величиной t , $\{t_i | t_i = (i - 0.5)/n, i = 1, 2, \dots, n\}$, $P_i = 1/n$. Далее вычислим естественные вероятностные расширения φ_i . Сравнение φ и \mathbf{f} — вероятностного расширения $f(x_1, \dots, x_n)$ показало хорошее согласование. В табл. 4.2 приведена норма l_2 разности φ и \mathbf{f} в зависимости от n . Анализ полученных результатов показал, что в данном примере φ аппроксимирует \mathbf{f} с порядком $\alpha = 1,4998$.

Число арифметических операций для вычисления $x * y$ имеет порядок $O(n^2)$, где n — размерность гистограмм. Гистограмма, как кусочно-постоянная функция, приближает плотность вероятности с точностью $O(1/n)$. Однако как нетрудно видеть, уже средние точки гистограмм приближают плотность вероятности с точностью $O(1/n^2)$. Как показано в [66] нижняя оценка скорости сходимости гистограммных расширений к вероятностным $\alpha = 1$. Реально это значение несколько выше. Численные эксперименты показали, что в условиях теоремы 6. при правильном согласовании сеток гистограмм и использовании более тонких способов интегрирования, гистограммные расширения имеют скорость сходимости $\alpha \approx 2$.

Сравнение с Монте-Карло. Известно, что метод Монте-Карло имеет сходимость $O(1/\sqrt{N})$, где N — число повторов, гистограммные расширения имеют скорость сходимости $O(1/n^\alpha)$. Пусть необходимо достигнуть точности ε , число операций методом Монте-Карло при этом $\approx \varepsilon^{-2}$ в сравнении с гистограммными расширениями $\approx \varepsilon^{-2/\alpha}$. Таким образом, гистограммная арифметика эффективней метода Монте-Карло примерно в $\varepsilon^{-2(1-1/\alpha)}$ раз.

4.7. Решения систем линейных алгебраических уравнений

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из самых востребованных задач вычислительной математики. Они используются практически во всех разделах математического моделирования. К численному решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многие задачи математической физики, экономики. Однако при решении реальных практических задач коэффициенты матриц и правые части уравнений редко известны точно.

Один из подходов к численному решению задач с неточными данными — метод Монте-Карло [93]. При всех его положительных качествах этот метод обладает рядом недостатков. Один из самых существенных — низкая скорость сходимости и большой объем вычислений.

С середины 60-х г. прошлого века стал развиваться альтернативный подход решения задач с неточными данными — интервальный анализ [33]. Для его реализации необходимо знать интервалы изменений случайных величин. Соответственно, интервальный анализ дает только границы множеств решений исходных задач.

Системы линейных уравнений со случайными коэффициентами. Рассмотрим системы линейных уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, i = 1 \dots n,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ — случайный вектор решения; $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ — случайная матрица и вектор правой части.

Предположим, что случайная матрица \mathbf{a}_{ij} и вектор \mathbf{b}_i имеют независимые компоненты с плотностями вероятности pa_{ij} , pb_i соответственно.

Пример 15. Пусть матрица матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что случайный вектор \mathbf{b} состоит из независимых компонент $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, каждая из которых случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Тогда носитель плотности вероятности вектора \mathbf{b} — квадрат $[0, 1]^2$.

Построим функцию распределения случайного вектора \mathbf{x} . Заметим вероятность того, что $x_1 < r_1$ и $x_2 < r_2$, равна площади, отсекаемой от квадрата $[0, 1]^2$ прямыми, проходящими через точку $\mathbf{b}_0 = A\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ с направляющими векторами $\mathbf{l}_1 = (2, -1)$ $\mathbf{l}_2 = (-1, 2)$.

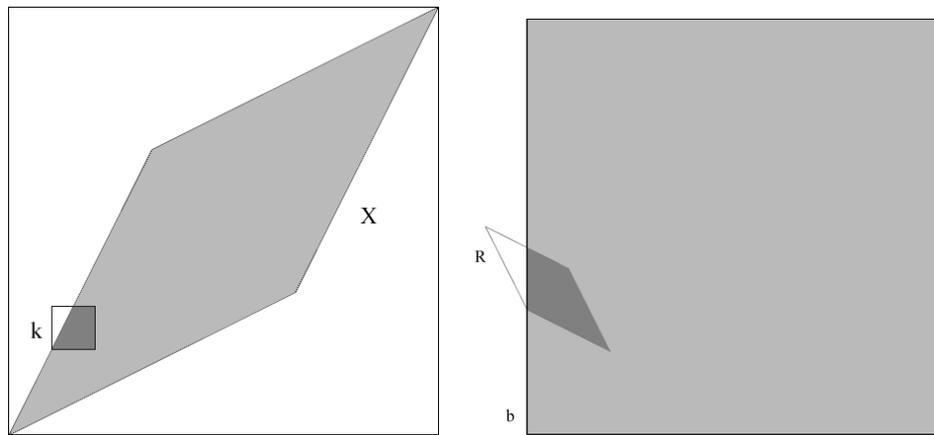


Рис. 4.3. Вычисление плотности вероятности вектора решений

На рис. 4.3 в левой части серым цветом закрашено X — множество решений системы. Для вычисления вероятности попадания в квадрат k отображим его с помощью матрицы A на вектор правой части \mathbf{b} (правая часть рисунка). Квадрат k отображается в ромб R . Таким образом вероятность попадания решения в квадрат k равняется интегралу от плотности вероятности вектора \mathbf{b} по области пересечения ромба R и вектора правой части \mathbf{b} .

На рис. 4.5 приведено кусочно-постоянное с шагом $h = 0,1$ приближение совместной плотности вероятности вектора \mathbf{x} . Сплошной линией проведена граница множества решений исходной системы. Величина вероятности в точности пропорциональна площади пересечения элементарного квадрата и множества решений.

Заметим, что при $h \rightarrow 0$ приближение совместной плотности вероятности стремится к точному P_x — равномерному с носителем, совпадающим

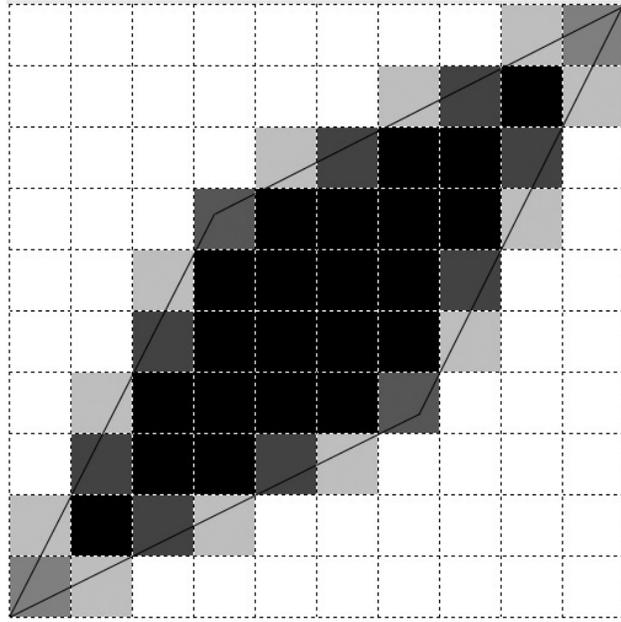


Рис. 4.4. Кусочно-постоянное приближение совместной плотности вероятности

с границами множества решений исходной системы. Непосредственными вычислениями легко убедиться что

$$Ax = b.$$

Перейдем теперь к случаю когда $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ — случайная матрица. Каждому $x \in X$ можно сопоставить подмножество коэффициентов $A_x \subset \mathbf{A}, b_x \subset \mathbf{b}$

$$\Omega_x = \{A, b | Ax = b, A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\}.$$

Заметим, что для фиксированного x коэффициенты матрицы и вектора правой части связаны соотношением

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i = 0, i = 1, \dots, n,$$

следовательно,

$$\Omega_x = \{A, b | \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть необходимо найти вероятность $P(X_0)$ попадания решения x в некоторое подмножество $X_0 \subset X$. Сопоставим X_0 множество $\Omega_0 = \{\Omega_x | x \in X_0\}$

Тогда

$$P(X_0) = \int_{\Omega_0} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n p a_{ij} \prod_{i=1}^n p b_i d\Omega.$$

Пример 16. Рассмотрим случайную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы a_{ij} состоят из независимых равномерно распределенных компонент, с носителями a_{11}, a_{22} отрезке $[2, 4]$, $a_{21}, a_{12} \in [-1, 0]$. Вектор \mathbf{b} состоит из независимых компонент $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, каждая из которых, случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

На рис. 4.5 приведено кусочно-постоянное приближение совместной плотности вероятности вектора решения системы случайных линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

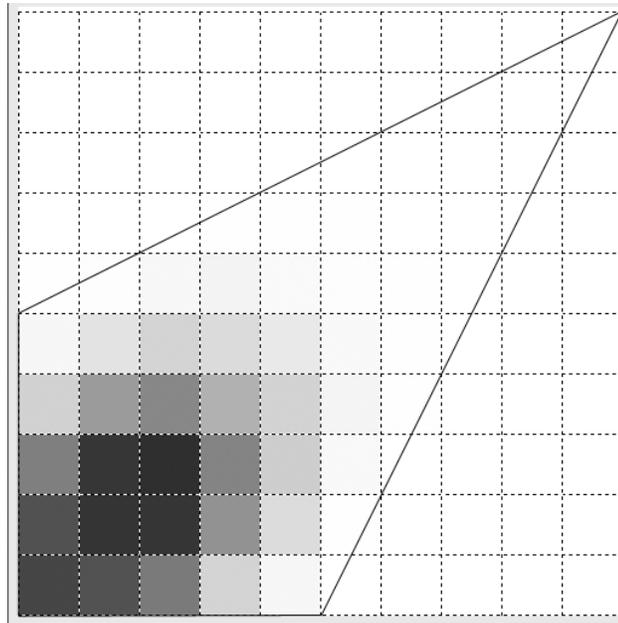


Рис. 4.5. Приближение совместной плотности вероятности вектора x

Вычисление элементов обратной матрицы. Пусть $C = A^{-1}$, $C = (c_{ij})$, тогда элемент c_{11} можно представить в виде

$$c_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{1}{a_{11} - a_{12}a_{21}/a_{22}}.$$

Заметим, что в последнем выражении каждая переменная встречается только один раз и следовательно c_{11} можно вычислить арифметику над плотностями вероятности.

Прямые методы. В тех случаях, когда нет необходимости вычислять функцию совместной плотности вероятности решения, можно воспользоваться прямыми методами решения.

Используя элементы обратной матрицы, можно вычислить решение (x_1, x_2) системы

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

В этом случае для вычисления решения (x_1, x_2) будем использовать вероятностные расширения. Так, для вычисления x_1 заменим a_{22}, a_{12} дискретными случайными величинами t_{22}, t_{12} . Тогда

$$x_1 = \sum_{t_{22}} \sum_{t_{12}} P(t_{22})P(t_{12}) \frac{t_{22}b_1 - t_{12}b_2}{a_{11}t_{22} - t_{12}a_{21}}.$$

На рис. 4.6 представлена гистограмма решения x_1 .

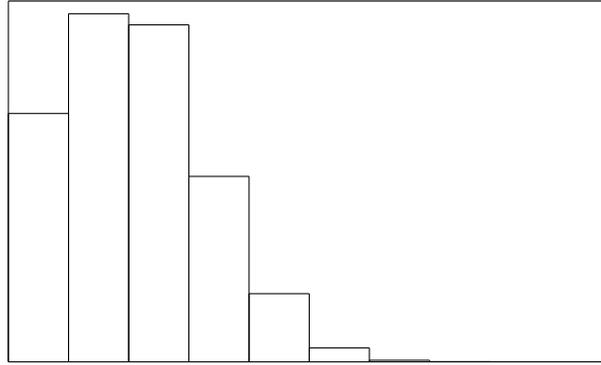


Рис. 4.6. Гистограмма x_1

В рамках численного вероятностного анализа построены алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений с неточными коэффициентами. В тех случаях, когда известны функции плотности вероятности входных данных, построены аппроксимации как совместных плотностей вероятности вектора решений, так и отдельно каждого компонента.

Регрессии

4.8. Решения нелинейных уравнений

Одномерные задачи. Рассмотрим системы нелинейных уравнений

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0, i = 1 \dots n,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ — случайный вектор решения; $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^m$ — случайный вектор коэффициентов, $p_k(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m)$ — функция совместной плотности вероятности

вектора \mathbf{k} и K — носитель p_k . Множество решений X имеет вид

$$X = \{x | f(x, k) = 0, k \in K\}.$$

Каждому $x \in X$ можно сопоставить подмножество коэффициентов $K_x \subset K$

$$K_x = \{k | f(x, k) = 0\}.$$

Пусть необходимо найти вероятность $P(X_0)$ попадания решения x в некоторое подмножество $X_0 \subset X$. Сопоставим X_0 множество коэффициентов $K_0 = \{K_x | x \in X_0\}$.

Тогда вероятность

$$P(X_0) = \int_{K_0} p_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m.$$

Нахождение подмножеств $K_x \subset K$ в общем случае не простая задача. Но для ряда частных случаев вполне реализуемая.

Рассмотрим задачу нахождения корня одномерного уравнения

$$f(x, k) = 0.$$

Предположим, что корень локализован на отрезке $[a, b]$. Заметим, что x будет представлять собой случайную величину и необходимо найти плотность распределения \mathbf{x} этой случайной величины. Далее мы будем предполагать, что можно с достаточной точностью для любого $z \in [a, b]$ вычислять плотность распределения ϕ_z случайной величины $f(z, \mathbf{k})$.

Тогда $P(z)$ есть вероятность, что корень лежит левее (правее) точки z :

$$P(z) = \int_{-\infty}^0 \phi_z(\xi) d\xi.$$

Действительно, перепишем уравнение $f(x, k) = 0$ в виде $\phi(k) - x = 0$. Тогда $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{k})$ и ϕ_z есть плотность распределения $\phi(\mathbf{k})$ или, что то же самое плотность распределения \mathbf{x} , сдвинутая на z .

Таким образом, плотность распределения корня $\mathbf{x} = P'(z)$. В тех случаях, когда $P(z)$ — не аналитическая функция и явное вычисление производной затруднено, можно вычислять производную численным способом. Для построения гистограммы g с узлами $\{z_i\}$, приближающей плотность распределения \mathbf{x} , достаточно вычислить $P(z_i)$. Тогда значение гистограммы g_i на отрезке $[z_{i-1}, z_i]$ определяется соотношением

$$g_i = \frac{P(z_i) - P(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}}.$$

В качестве примера рассмотрим решение простейшего квадратного уравнения $\mathbf{a}x^2 - \mathbf{b} = 0$, где \mathbf{a}, \mathbf{b} — случайные величины с равномерным законом распределения, заданные, соответственно, на отрезках $[1, 2]$, $[2, 4]$. Несложно убедиться, что \mathbf{x} задана на отрезке $[1, 2]$. Таким образом, для $\forall x \in [1, 2]$: $\mathbf{f}(x, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}x^2 - \mathbf{b}$.

Заметим, $\mathbf{a}x^2$ — равномерная случайная величина, заданная на отрезке $[x^2, 2x^2]$, тогда для вычисления \mathbf{f} необходимо найти разность двух независимых равномерных случайных величин. Для построения гистограммы \mathbf{x} вычислим функцию распределения P_x в точках сетки $\{x_i = 1 + ih, h = 1/n, i = 0, 1, \dots, n\}$. Далее по ней построим гистограмму для корня квадратного уравнения. На рис. 4.7 приведена гистограмма \mathbf{x} корня квадратного уравнения при $n = 100$.

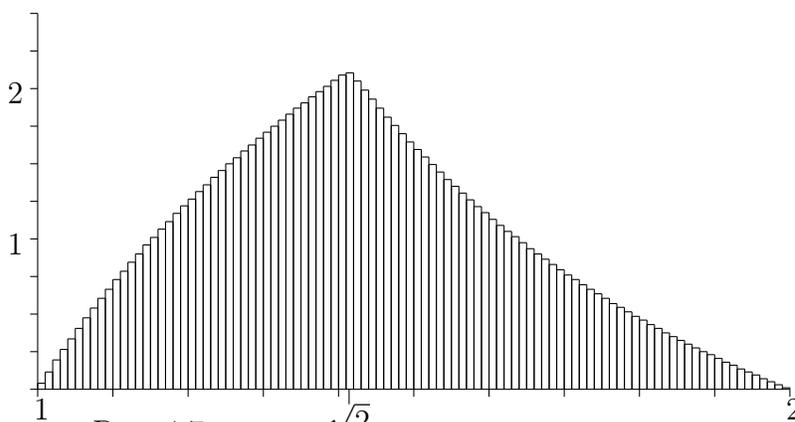


Рис. 4.7. Гистограмма корня квадратного уравнения

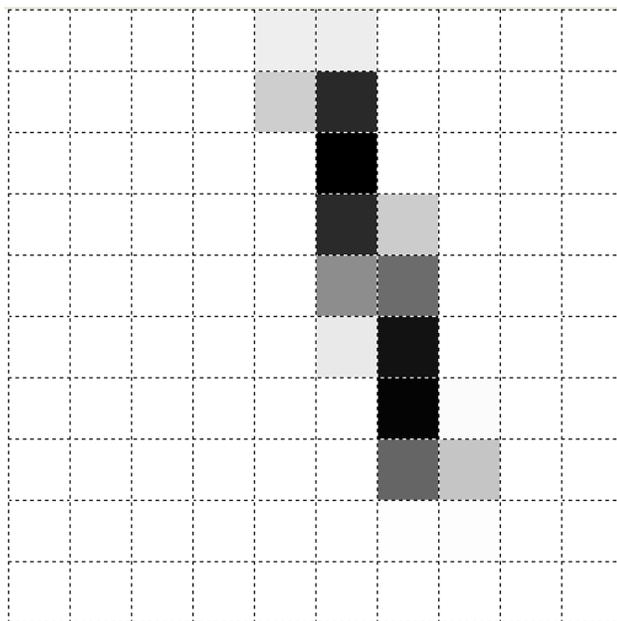


Рис. 4.8. Приближение плотности вероятности решения системы нелинейных уравнений

Системы уравнений. Рассмотрим пример системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}ax^2 + by^2 - 4 &= 0, \\xy - c &= 0,\end{aligned}$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} — равномерные случайные величины, плотности вероятности которых имеют носители $[1, 1.1]$, $[2, 2.1]$, $[0.505, 0.51]$.

Зафиксируем \mathbf{c} , тогда для каждого x, y в пространстве параметров a, b подмножество $k_{x,y}$ — прямая $ax^2 + by^2 - 4 = 0$. Таким образом несложно вычислить плотность вероятности для вектора решений (\mathbf{x}, \mathbf{y}) и далее подсчитать вероятность попадания решения в некоторую область, например, в прямоугольник $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Таким образом, вероятность попадания решения в прямоугольник $[0.37, 0.375] \times [1.36, 1.365]$ — $P = 0.1465$. Подобная точность достигается при моделировании методом Монте-Карло с числом бросаний порядка 10^6 .

На рис. 4.8 приведено кусочно-постоянное приближение совместной плотности вероятности вектора (\mathbf{x}, \mathbf{y}) решения системы нелинейных уравнений.

4.9. Задачи интерполяции

При численном моделировании часто приходится пользоваться различными зависимостями между входными и выходными величинами — в том числе, как эмпирическими зависимостями, построенными на основе наблюдений, так и получающимися в процессе исследования. Для этого широко применяются методы интерполяции и экстраполяции. Например, задачи интерполяции возникают при подборе эмпирической формулы по данным измерения. Здесь надо предостеречь от формального, слепого подбора такой формулы только по измеренным значениям. Выбор вида формулы (многочлен, степенная функция, экспонента и т. д.) должен опираться не только на теоретическое обсуждение различных свойств изучаемой зависимости, но и на анализ имеющейся информации с точки зрения ее полноты и специфических особенностей присутствующей в ней неопределенности. Это значит, что надо проанализировать множество аспектов, связанных как с понятием неопределенной информации, так и с собственно самими численными методами, предназначенными для ее представления, обработки, преобразования и извлечения знаний. С этой точки зрения следует выделить два важных аспекта, которые надо иметь в виду исследователю при работе

с неопределенными данными. Первый аспект связан с понятием неопределенной информации и проблемой изучения источников неопределенности и снижения уровня неопределенности в данных. Второй аспект связан с выбором численного метода для реализации вычислительных процедур, которые могли бы существенно помочь исследованию, а не оказаться источником ошибок. В рамках поставленных проблем рассмотрим применение ЧВА к задачам интерполяции и экстраполяции в условиях стохастической неопределенности.

Рассмотрим случай линейной интерполяции. Пусть для некоторой функции f в точках x_1, x_2 значения f_1, f_2 известны не точно и представлены независимыми гистограммами F_1 и F_2 .

В случае линейной интерполяции имеем точное равенство

$$f(x) = l_1(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2} f''(\xi)$$

где l_1 — полином Лагранжа первой степени,

$$l_1(x) = f_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

$\xi \in [x_1, x_2]$.

Необходимо построить линейную гистограммную функцию $L(x)$ такую, что бы были выполнены условия интерполяции $L(x_1) = F_1$ и $L(x_2) = F_2$. Таким образом, используя естественные вероятностные расширения, построим гистограммный полином Лагранжа первой степени

$$L(x) = F_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + F_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Заметим, что условия интерполяции выполнены и $L(x)$ принимает соответствующие значения в узлах интерполяции.

Далее, если необходимо построить гистограммную функцию \mathbf{f} , для которой выполнено включение $\mathbf{f} \in f, \forall x \in [x_1, x_2]$, то необходимо знать априорную информацию о плотностях вероятности f'' на отрезке $[x_1, x_2]$. Заметим, что

$$f(x) = L(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2} f''(\xi).$$

Поскольку точка ξ не известна, то для оценки f'' воспользуемся гистограммами второго порядка. Для этих целей построим гистограмму второго порядка $f'' = \{f''(x) | x \in [x_1, x_2]\}$.

Следуя гистограммному подходу, для плотности вероятности $f(x)$ получаем включение

$$f(x) \in L(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2} f''.$$

Таким образом, построение включений с использованием простейших интерполяционных формул приводит к необходимости расширить стандартные действия над гистограммными переменными элементами гистограмм второго порядка и использовать процедуру распространения неопределенности. Последнее не сильно усложняет работу гистограммного анализа.

Глава 5.

Гистограммные временные ряды

Временные ряды — это особый способ представления данных, характеризующих изменение некоторого показателя (показателей) во времени.

В экономике это ежедневные цены на акции, курсы валют, еженедельные и месячные объемы продаж, годовые объемы производства и т. п. В метеорологии типичными временными рядами являются ежедневная температура, месячные объемы осадков, в гидрологии — периодически измеряемые уровни воды в реках. В технике временные ряды возникают при измерении значений приборов и параметров технологических процессов в последовательные моменты времени.

Многообразие систем и процессов, протекающих в них с течением времени, определяет различные виды временных рядов, а также методы и подходы к их исследованию.

Как правило, временной ряд — это последовательность чисел; его элементы — значения некоторого процесса в определенные моменты времени t_i , обычно через равные промежутки; элементы временного ряда x_i нумеруют в соответствии с номером момента времени, к которому они относятся. Порядок следования элементов временного ряда весьма существен [96].

Понятие временного ряда часто толкуют расширительно. Например, одновременно могут регистрироваться несколько характеристик процесса. В этом случае говорят о многомерных временных рядах. Если измерения производятся непрерывно, говорят о временных рядах с непрерывным временем, или о случайных процессах. Наконец, текущая переменная может иметь не временной, а какой-нибудь иной характер, например пространственный (тогда говорят о случайных полях).

Особенностью измерения элементов временных рядов x_i является присутствие случайных помех, случайных ошибок и т. д.

Временные ряды бывают двух типов: моментные и интервальные. Мо-

ментный временной ряд получается при многократном измерении некоторой величины через равные промежутки времени. Примерами моментных рядов являются ежегодно фиксируемая численность населения; курс акции на момент окончания торгов для каждого торгового дня последнего месяца; температура воздуха, вычисляемая ежедневно в полдень в течение года. Интервальные же ряды связаны с накоплением (суммой) величины за равные промежутки времени.

Примерами интервальных рядов могут служить ежедневные объемы продаж товара, ежемесячные объемы перевозок или количество осадков.

В последнее время термином «интервальные временные ряды» стали обозначать временные ряды со значениями в виде интервалов.

Для изучения временных рядов используются различные методы и подходы, которые можно с большой долей общности назвать анализом временных рядов. Анализ временных рядов, в свою очередь, делится на ряд анализов, отражающих специфику как исследуемого объекта, процесса, так и способы измерения, представления данных в виде временных рядов.

Гистограммный временной ряд (ГВР) описывает ситуации, когда в течение каждого момента времени известны гистограммы, аппроксимирующие функции плотности некоторых случайных величин. Подобные ситуации возникают, когда необходима агрегация большого числа данных в некоторые моменты времени. Во многих случаях гистограммы более информативны, чем, например, среднее значение. Области, где ГВР полезны, включают экономику, мониторинг окружающей среды. В главе рассмотрен метод k -ближайших соседей ($k - NN$) для работы с ГВР. Рассмотренный метод $k - NN$ опирается на специальные метрики в пространстве гистограмм.

Обычно временной ряд — значения во времени каких-либо параметров (в простейшем случае одного) исследуемого процесса. Однако подобные ряды не описывают явления, когда реализация наблюдаемой величины доступна для каждого момента времени в виде некоторого множества.

Вот две типичных ситуации, когда это происходит:

1. Если измеряется некая переменная во времени для группы людей. Но исследование заключается не в каждом отдельном человеке, но в группе в целом. В этом случае временной ряд представляет выборочное среднее наблюдаемой величины с момента времени.

2. Когда переменная наблюдается, например, раз в секунду или в минуту, но должна быть проанализирована на более низкой частоте, скажем

за день. В этом случае среднее значение и интервальный анализ много информации не учитывают.

Эти две ситуации описывают распределенная и временная агрегации соответственно. В каждом случае временной ряд функций плотности вероятности предложил бы более информативное представление, чем другие его формы.

Таким образом, чтобы использовать временные ряды функций плотностей вероятности, нужно определить, как представлять наблюдаемые распределения. Распределения могут быть оценены любым параметрическим методом или непараметрическим методом.

В этой главе рассмотрено представление функций плотности вероятности с использованием гистограммы.

Такие ряды, естественно, возникают во многих приложениях, включая экономику, финансы, метеорологию и так далее [4]. На рис. 5.1 приведен пример использования гистограммных временных рядов из работы [4].

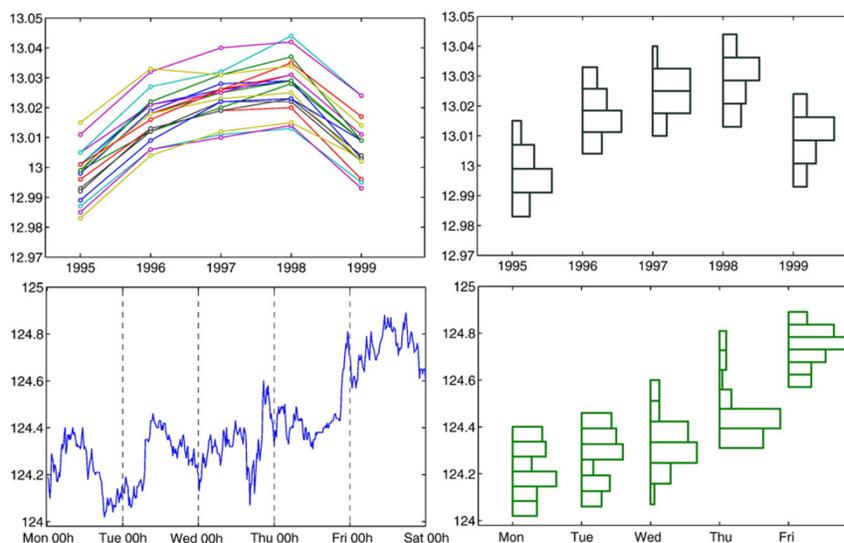


Рис. 5.1. Примеры агрегации при построении ГВР

В символическом анализе данных и Data Mining [12] гистограммы используются для исследования множества различных процессов и применяются для описания изменчивости количественных признаков.

Использование гистограмм во временных рядах функций плотности вероятности порождает ГВР. Важно отметить, что в анализе ГВР цель состоит в том, чтобы предсказать временной ряд распределений, наблюдаемых в течение времени и, следовательно, прогноз будет функций плотности вероятности, представленный гистограммой.

ГВР подходит для представления агрегированных данных. Очевидно, что если интерес заключается в исходных данных, агрегирование не должно быть рассмотрено. Заметим, что ГВР сохраняют больше информации, чем среднее или интервал.

Для прогнозирования ГВР в ряде работ использовались адаптации известных методов. В работе [3] предложены методы сглаживания, основанные на гистограммной арифметике. В работе [4] адаптирован алгоритм $k - NN$ для прогноза ГВР. Способность к прогнозу и простота $k - NN$ делают свою адаптацию к ГВР подходящей. Другая сила алгоритма $k - NN$ — своя многосторонность: это может быть применено к оценке плотности, классификации, приближению функции и также к прогнозированию временного ряда.

5.1. Основы гистограммных временных рядов

Определения. Определим гистограммный временной ряд как последовательность плотностей вероятности представленных в виде гистограмм P_i .

В символьном анализе данных [12] интервальные и гистограммные переменные применены, чтобы описать изменчивость количественных признаков понятий.

Почему гистограммы?

Использование гистограмм обусловлено прежде всего тем, что они позволяют достаточно точно представлять произвольные распределения. Вторая причина — развитая арифметика для работы с гистограммными переменными.

Во-первых, это важно отметить, что, несмотря на свою простоту, гистограммы охватывают все возможные интервалы оценки плотности вероятности. Наиболее популярными из них являются гистограммы с фиксированной шириной столбцов, которые в большом объеме используются на практике, полиграммы и дискретные плотности вероятности.

Во-вторых, гистограммы могут также обеспечить точное представление исходной плотности вероятности.

Можно утверждать, что на основе ядерных оценок плотности вероятности можно представить более гладкие, чем гистограммы, аппроксимации плотности вероятности. Однако это значительно повышает вычислительные затраты [4].

Причины для использования гистограмм могут быть сформулированы следующим образом:

- можно использовать их для любой исходной плотности вероятности;
- они могут описывать данные с достаточной степенью точности;
- простая и гибкая структура упрощает их использование.

5.2. Оценка погрешности для гистограммных временных рядов

В классических временных рядах точность оценки основана на разнице между наблюдаемыми и прогнозируемыми ценностями, т. е. между наблюдением и прогнозируемым значением. Однако из-за сложностей гистограмм ГВР требуют другого подхода к количественной оценке различий между гистограммами.

Для этого рассмотрим метрику Вассерштейна и Mallows [32] для обратных функций распределения. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции плотности вероятности, тогда представим метрики

$$\rho_W(f, g) = \int_0^1 |F^{-1}(t) - G^{-1}(t)| dt, \quad (5.1)$$

$$\rho_M(f, g) = \left(\int_0^1 (F^{-1}(t) - G^{-1}(t))^2 dt \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

где $F^{-1}(t)$, $G^{-1}(t)$ — обратные функции к функции распределения.

Причинами выбора этой метрики было успешное применение в ряде работ [4]. Более того, эта метрика эквивалентна Earth Mover's Distance (EMD), предложенной Rubner, Tomasi и Guibas [45]. EMD — известное компьютерное расстояние, которое используется для того, чтобы измерить несходства между гистограммами текстуры и цвета. EMD между двумя гистограммами — наименьшее количество объема работы, чтобы преобразовать одну гистограмму в другую.

Если $h(x)$ — некоторая гистограмма, тогда функцию распределения H , соответствующую этой гистограмме, можно представить в виде

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(\xi) d\xi.$$

В силу того, что гистограмма — кусочно-постоянная функция, вычисление интеграла от нее не представляет особого труда. В результате функция

распределения H будет кусочно-линейная функция. Таким образом, метрики (7.2), (7.1) можно интерпретировать как площадь между функциями распределения.

В работе [3] была предложена мера оценки погрешности ГВР. Пусть $\{h_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — наблюдаемые значения, $\{\hat{h}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — прогноз. Среднее расстояние ошибки (The Mean Distance Error)

$$MDE(\{h_i\}, \{\hat{h}_i\}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho(h_i, \hat{h}_i).$$

В работе [3] была предложена средняя масштабируемая оценка погрешности ГВР (Mean Scaled Distance Error)

$$MSDE(\{h_i\}, \{\hat{h}_i\}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\rho(h_i, \hat{h}_i)}{MDE_m},$$

$$MDE_m = \frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^m \rho(h_i, h_{i-1}).$$

5.3. Использование метода $k - NN$ для прогноза временных рядов

Опишем использование метода $k - NN$ для прогноза временных рядов.

1. Временной ряд $\{X_t\}$, $t = 1, \dots, n$ представим в виде последовательности векторов размерности d

$$X_t^{d,\tau} = (X_t, X_{t-\tau}, \dots, X_{t-(d-1)\tau},) \quad (5.3)$$

где $d, \tau \in N$ с d — числом задержек и параметра задержки τ .

Если $\tau = 1$, как принято во многих случаях, временной ряд векторов обозначен $\{X_t^d\}$, $t = 1, \dots, n$

$$X_t^d = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-(d-1)}) \quad (5.4)$$

где вектор d последовательных наблюдений, которые могут быть представлены как точка в пространстве размерности d .

2. Вычисляется расстояние между последним вектором

$$X_n^d = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-d+1})$$

и каждым вектором $\{X_t^d\}$, где $t = d, \dots, n - 1$. Далее отбираем k ближайших к X_n^d . Обозначим их $X_{T_1}^d, X_{T_2}^d, \dots, X_{T_k}^d$. Обычно на этом шаге используется евклидово расстояние.

3. Полученные k ближайших векторов $X_{T_1}^d, X_{T_2}^d, \dots, X_{T_k}^d$, их последующие значения $X_{T_1+1}, X_{T_2+1}, \dots, X_{T_k+1}$ усредняем, чтобы получить прогноз X_{n+1} .

Это самый простой $k - NN$, но могут быть предложены и более сложные версии. Например, Meade (2002) использует, геометрически взвешенное евклидово расстояние, чтобы поместить больший акцент в подобие между более свежими наблюдениями, и получает прогноз как взвешенное среднее значение, которое назначает больше веса самым близким соседям. Кроме того, больше внимания можно уделить выбору значений k, d .

5.4. Адаптация метода $k - NN$

Адаптация метод $k - NN$, чтобы иметь дело с ГВР, полагается на выбор метрики для пространства гистограмм. Это метрика будет использоваться для измерения несходства между векторами гистограммы, для построения прогнозов и измерения ошибок прогноза. Поскольку эти три проблемы близко связаны, рекомендуется использовать то же самое расстояние для всех трех.

Ранее была рассмотрена метрика, подходящая для измерения ошибок в ГВР и т. п.

Рассмотрим ГВР $\{h_t\}$ с $t = 1, \dots, n$ и построим ряд векторов гистограмм размерности d

$$h_t^d = (h_t, h_{t-1}, \dots, h_{t-d+1}) \quad (5.5)$$

с $t = d, \dots, n$. Расстояние между последним вектором h_n^d и всеми векторами h_t^d , с $t = d, \dots, n - 1$ вычислим как

$$D(h_n^d, h_t^d) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d D(h_{n-i+1}, h_{t-i+1}). \quad (5.6)$$

Далее находим k самых близких элементов к h_n^d и обозначим их $h_{T_p}^d$ с $p = 1, \dots, k$.

5.5. Построение прогноза

В методе $k - NN$ прогнозы обычно вычисляются как среднее число k соседних последовательностей. Чтобы приспособить метод $k - NN$ к ГВР, процедуру усреднения можно заменить построением центра тяжести гистограмм. Прогноз \hat{h}_{n+1} будет решением задачи

$$\arg \min_{\hat{h}_{n+1}} \sum_{p=1}^k w_p D(\hat{h}_{n+1}, h_{T_p+1}). \quad (5.7)$$

5.6. Метод расщепления

Далее рассмотрим подход построения прогноза ГВР, основанного на расщеплении гистограммного ряда на подряды. Рассмотрим ГВР h_i , $i = 1, \dots, N$. Далее пусть каждая гистограмма определяется равномерной сеткой $\omega^i = \{z_i^j, j = 0, \dots, k\}$ и значениями p_i^j , $j = 1, \dots, k$. Рассмотрим вспомогательные временные ряды

$$z_i^0, z_i^k, p_i^j, j = 1, \dots, k, i = 1, \dots, N. \quad (5.8)$$

Для построения прогноза \hat{h}_{N+1} будем использовать последние d значений рядов (5.8). Таким образом, используя один из методов построения прогноза, построим значения $\hat{z}_{N+1}^0, \hat{z}_{N+1}^k, \hat{p}_{N+1}^j$. Для гистограммы \hat{h}_{N+1} определим равномерную сетку $\omega^{N+1} = \{\hat{z}_{N+1}^j, j = 0, \dots, k\}$ и положим на ней значения \hat{p}_{N+1}^j . Последним шагом в построении прогноза будет нормировка гистограммы \hat{h}_{N+1}

$$\hat{h}_{N+1}^{nor} = \frac{1}{\beta} \hat{h}_{N+1},$$

$$\beta = \int_{z_{N+1}^0}^{z_{N+1}^k} \hat{h}_{N+1}^{nor}(\xi) d\xi,$$

таким образом, чтобы

$$\int_{z_{N+1}^0}^{z_{N+1}^k} \hat{h}_{N+1}^{nor}(\xi) d\xi = 1.$$

5.7. Численный пример

Рассмотрим исторические данные о максимальной температуре в г. Красноярске за последние сто лет. Сгруппируем данные по дням и построим

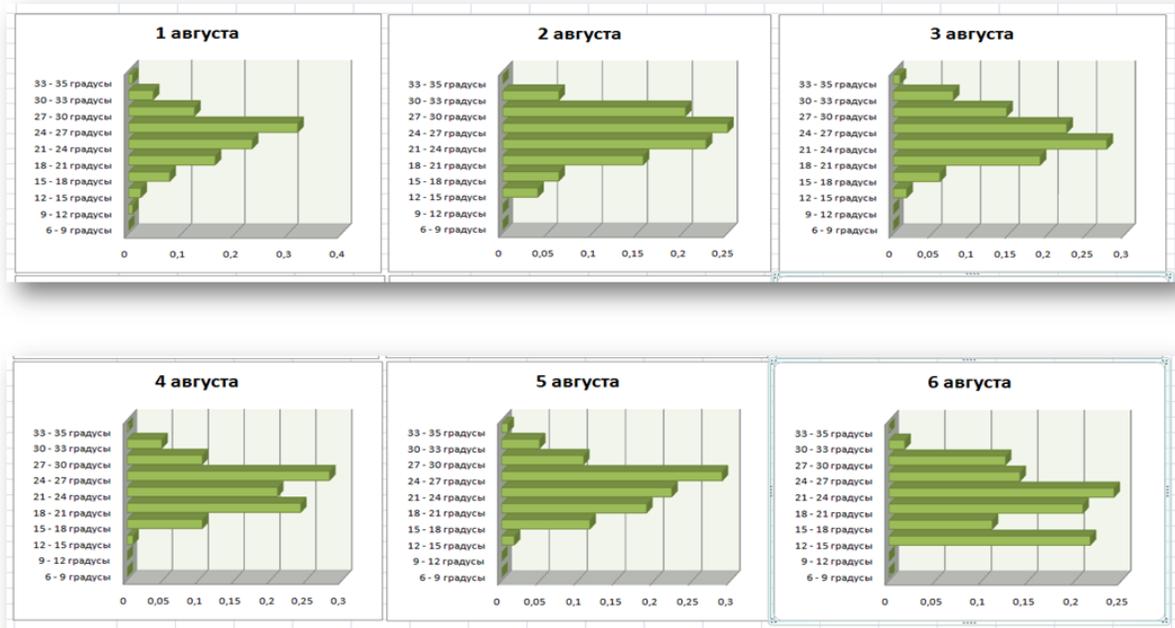


Рис. 5.2. Гистограммы максимальной температуры 1–6 августа

соответствующие гистограммы. На рис. 5.2. приведены гистограммы максимальной температуры 1–3 августа.

Для проверки метода расщепления возьмем построенные гистограммы за 1–25 августа. Следуя методу расщепления построим 12 вспомогательных временных рядов. Для рядов $z_i^0 = 6^0$, $z_i^{10} = 35^0$, $i = 1, \dots, 25$ в силу их стационарности прогноз тривиален. Далее для 10 вспомогательных рядов p_i^j , $j = 1, \dots, 10$, $i = 1, \dots, 25$, используя в качестве базового метод наименьших квадратов [96], построим прогноз \hat{p}_{28}^j , \hat{p}_{29}^j , \hat{p}_{30}^j на 28, 29, 30 августа.

На рис. 5.3 приведено сравнение истинного и прогнозных значений на 28, 29, 30 августа. Как видно из сравнения, прогнозные значения достаточно хорошо совпали с истинным значением.

5.8. Временная агрегация

Рассмотрим апробацию метода прогноза погоды с использованием ГВР. Рассмотрим пример прогноза температуры на начало 2013 г. с использованием подхода, основанного на методе $k - NN$. Для этих целей построим ГВР с 2000 по 2012 г. Каждый элемент ряда получен временной агрегацией максимальной температуры с 1 января по 31 декабря. Элементы ряда представлены на рис. 5.4.

Следуя методике прогноза, основанной на методе $k - NN$, найдем бли-

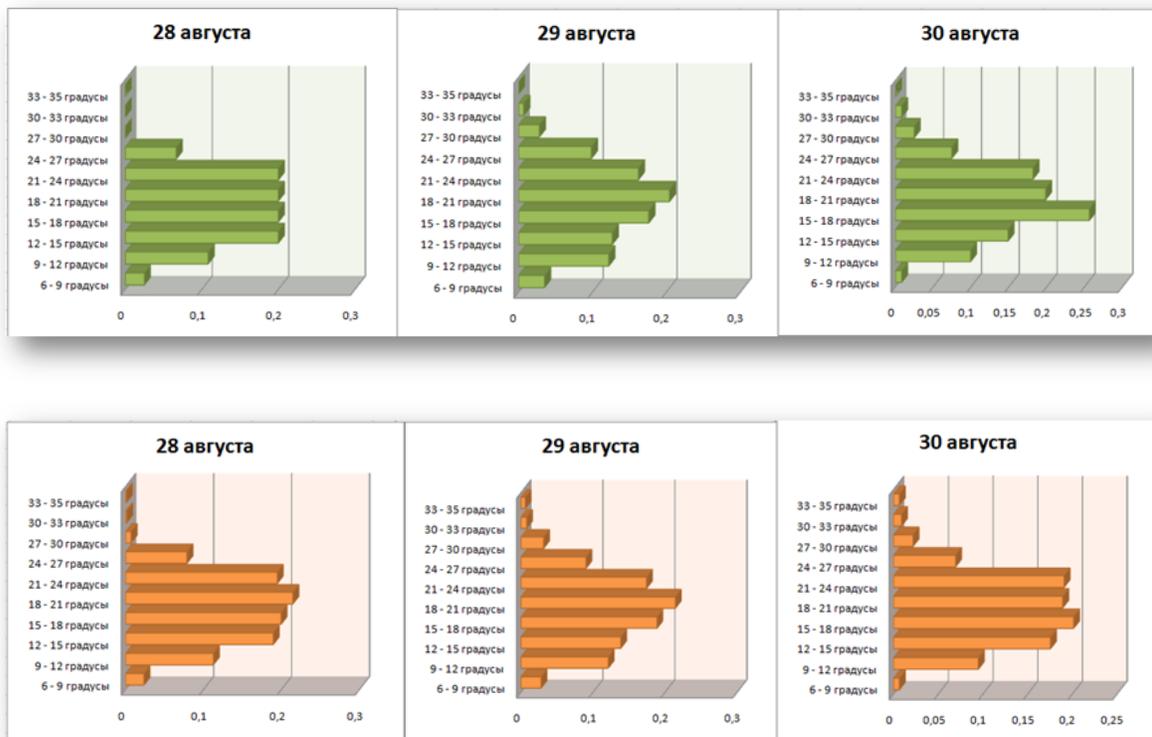


Рис. 5.3. Истинные и спрогнозированные значения

жайшую гистограмму к 2012 г. по метрике MDE. Таким оказался 2003 г. На рис. 5.6 приведено сравнение гистограмм температуры за 2003 и 2012 гг.

Таким образом, начало 2004 г. можно считать годом аналогом 2013 г. Для иллюстрации приведем сравнение температур начала 2004 и 2013 гг.

Приведенные исследования использования гистограммных временных рядов показали перспективность развития данного направления. Гистограммные временные ряды в дальнейшем предполагается использовать в тех областях, где обычные временные ряды недостаточно полно описывают происходящие процессы, не эффективны и требуют больших вычислительных затрат. Такие процессы возникают при обработке информации зондирования Земли, в прогнозах гидрологических рядов, эконометрике.

Дальнейшее перспективное направление — исследование в областях прогнозирования плотности (density forecast).

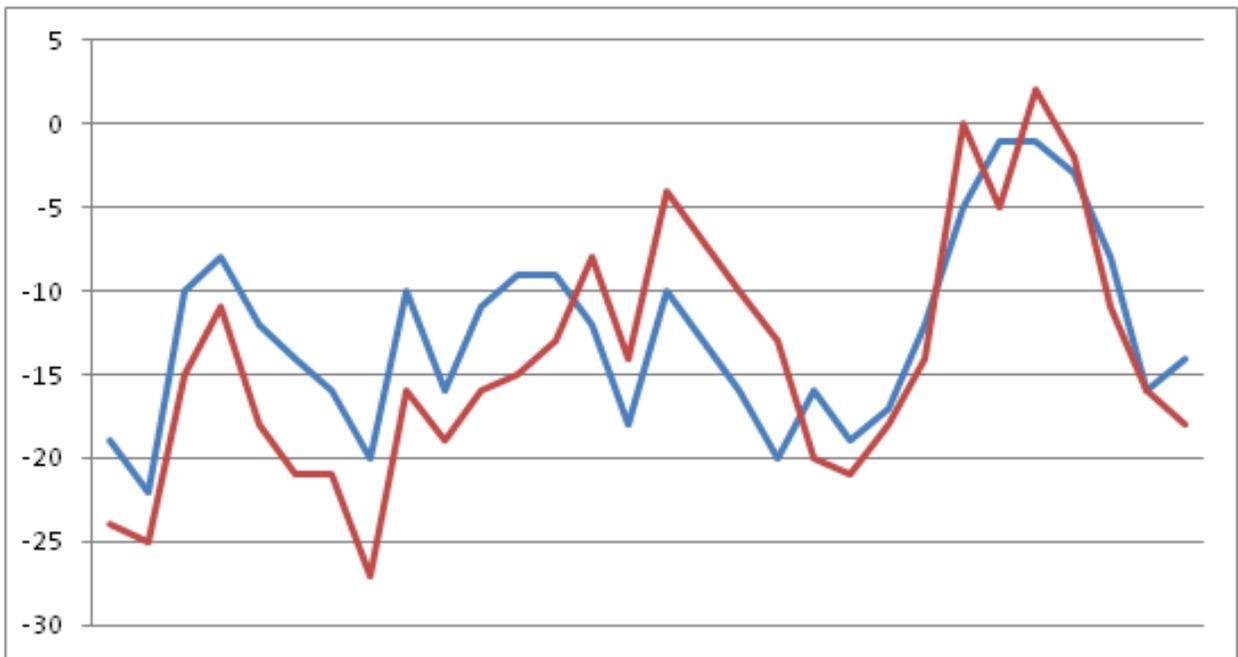


Рис. 5.6. График сравнения температур начала 2004 и 2013 гг.

Глава 6.

Случайное программирование

6.1. Введение

Многие практические задачи, в том числе задачи принятия решений, требуют для своего изучения применения оптимизационного подхода. Эффективность полученных решений определяется рядом факторов. К таким факторам в первую очередь можно отнести данные, необходимые для описания и решения поставленной проблемы.

Необходимость учитывать характер и особенности данных показал исторический опыт применения методов линейного программирования, а именно кризис линейного программирования в 60–70-х гг. XX в. века. Стремительное развитие теории линейного программирования при решении практических задач планирования национальной экономики столкнулось с проблемой несоответствия теоретических предположений и реальных результатов при решении конкретных экономических задач. Результаты решения задач линейного программирования часто не соответствовали ожиданиям составителей планов. Одним из существенных факторов, которые не учитывались в предлагаемых моделях и методах, была неопределенность входных данных – явление, присущее многим практическим задачам экономики.

На актуальность учета неопределенных факторов в данных указывает Технический актуарный стандарт (ТАС) (Великобритания, ноябрь 2009), в котором отмечается, что при работе с данными должен быть установлен определенный уровень их надежности. Надежность данных заключается в том, что пользователи, для которых была создана некая актуарная информация, должны иметь возможность в значительной степени доверять релевантности информации, прозрачности допущений, полноте и понятности, включая сообщения о любой неопределенности, присущей инфор-

мации. В нем также отмечается, что любые действия, предпринятые по причине неточности или неполноты данных, увеличивают надежность полученной актуарной информации.

В случаях когда требуемые данные являются существенно неполными или неадекватными, проводится оценка для определения того, может ли надежность данных быть улучшена путем их изменения или дополнения.

Примером способа, которым данные могут быть скорректированы, является замена средними значениями неверных или отсутствующих записей.

Данные могут быть дополнены с использованием дополнительных источников данных, косвенных методов или методов выборки. Любые дополнительные источники данных должны быть проверены на надежность.

В некоторых случаях корректировки могут быть внесены в допущения, используемые в моделях или расчетах, или в их результаты вместо корректировки неполных или неточных данных, или в дополнение к ней. Любые такие изменения должны документироваться, а их влияние должно быть выявлено.

Понятие неопределенных данных трактуется учеными, исследователями и практиками достаточно широко и неоднозначно. Различают, например, элиторную и эпистемистическую неопределенность. Для решения экономических задач некоторыми исследователями используется понятие экономической неопределенности [41].

В рамках понятия неопределенных данных можно выделить три типа неопределенности: стохастическую, нечеткую и неточную.

Природа неопределенных данных может быть случайной, связанной с ошибками измерений или определяться неполнотой информации. Тогда говорят о случайных, неточных, неполных данных.

Можно найти множество аргументов в поддержку того, какую сторону или тип неопределенности подвергнуть исследованию, однако понятно, что результаты полученных решений зависят от количества и качества соответствующей информации, доступных и ограниченных познавательных способностей лиц, принимающих решения, а также численных методов, выбранных для расчета.

В главе рассматривается численный вероятностный подход к решению задач оптимизации со случайными входными параметрами. В результате решения подобных задач методами математического программирования получаются оптимальные решения, зависящие от этих параметров. В тех случаях, когда известны плотности вероятности входных параметров, на основе численного вероятностного анализа возможно построение совмест-

ной функции плотности вероятности оптимального решения. В отличие от стохастического программирования [21, 47], где оптимальное решение представляет собой некоторое фиксированное решение, данный подход позволяет построить все множество решений оптимизационной задачи, определяемое построенной совместной функцией плотности вероятности.

Методы, позволяющие строить множество решений оптимизационной задачи со случайными входными параметрами на основе применения численного вероятностного анализа, назовем *случайным программированием*.

Важно заметить, что после представления полученных неопределенностей формируется проблема выбора метода, который позволит осуществить последующие расчеты таким образом, чтобы получить реальные результаты, с тем чтобы не получить дополнительные неопределенности [41].

В настоящее время с этой целью развивается математический аппарат неопределенного программирования. Неопределенное программирование представляет собой теоретические основы решения оптимизационных задач в условиях различных видов неопределенности.

В работах [21] известный специалист в области теории и практики решения оптимизационных задач в условиях неопределенности выделяет три основных вида неопределенности: случайность, нечеткость и неточность.

При этом случайная величина представляет собой измеримую функцию из вероятностного пространства на вещественную прямую. Нечеткая переменная есть функция из возможностного пространства на вещественную прямую. Неточная величина — это измеримая функция из пространства приближений на вещественную прямую.

Поскольку интервальное число можно рассматривать как специальный вид неточной величины, то в раздел неточного программирования попадает интервальный анализ, интервальная арифметика и соответственно интервальное программирование.

В данном направлении следует отметить разработку гибридных алгоритмов, совмещающих в себе идеи и подходы статистического моделирования, нейронные сети, генетические алгоритмы, имитационный отжиг и табу-поиск [21].

В большинстве алгоритмов неопределенного программирования применяется оператор математического ожидания и проводятся процедуры усреднения.

В формулировке задач неопределенной оптимизации, обычно пытаются найти хороший компромисс между реалистичностью модели оптимизации и ее позволительной способностью в выборе и дальнейшем использовании

соответствующего численного метода решения изучаемой проблемы. Эти две составляющие в совокупности обычно влияют на полезность и качество получаемых решений. В результате этих соображений существует большое количество различных подходов к постановке и решению задач оптимизации в условиях неопределенности. Остановимся на стохастическом подходе к решению оптимизационных задач.

Рассмотрим общую постановку задачи стохастического программирования (Stochastic Programming Problem (SPP)) [47]

$$\max f(x, \xi),$$

$$g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

где x — вектор решения; ξ — случайный вектор; $f(x, \xi)$ — целевая функция; $g_i(x, \xi)$ — случайные функции ограничений.

С целью применения соответствующих подходов к решению оптимизационных задач в условиях стохастической неопределенности общая задача SPP может быть сформулирована в М и Р постановках по отношению к записи целевой функции и ограничений. М-постановка означает оптимизацию математического ожидания целевой функции и представляет собой первый тип постановки задачи стохастического программирования. В зарубежной литературе такие задачи называются моделями ожидаемого значения или expected model value (EMV) [21]. М-постановка имеет вид

$$\max M[f(x, \xi)], \tag{6.1}$$

$$M[g_i(x, \xi)] \leq 0, \quad i = 1, \dots, p. \tag{6.2}$$

Во многих случаях задача стохастической оптимизации может ставиться как многокритериальная. В этом случае имеет место многокритериальное стохастическое программирование.

Существует два основных подхода к решению задач стохастического программирования:

1) не прямые методы, которые заключаются в нахождении функций $F(x)$, G_i и решении эквивалентной задачи нелинейного программирования вида (6.1), (6.2);

2) прямые методы стохастического программирования, основанные на информации о значении функций $f(x, \xi)$, $g_i(x, \xi)$, получаемой в результате проведения экспериментов.

Следует указать на относительно новые постановки оптимизационных задач в условиях интервальной неопределенности. Например, задача ли-

нейного программирования с интервальными данными формулируется следующим образом [98]:

$$(c, x) \rightarrow \min, \quad (6.3)$$

$$Ax = b, x \geq 0. \quad (6.4)$$

$$A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{A} — интервальная матрица; \mathbf{b}, \mathbf{c} — интервальные векторы размерности n .

6.2. Постановка задачи

Сформулируем задачу случайного программирования в следующем виде:

$$f(x, \xi) \rightarrow \min, \quad (6.6)$$

$$g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.7)$$

где x — вектор решения; $f(x, \xi)$ — целевая функция; $g_i(x, \xi)$ — функции ограничений; ξ — случайный вектор параметров. Относительно ξ известно, что

$$\xi \in \mathbf{\xi}, \quad (6.8)$$

где $\mathbf{\xi}$ — множество случайных векторов.

Точка x^* — решение задачи (6.6) — (6.8), если

$$f(x^*, \xi) = \inf_U f(x, \xi),$$

где

$$U = \{x | g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.\}$$

Множество решений (6.6)–(6.8) определим следующим образом:

$$\mathcal{X} = \{x | f(x, \xi) \rightarrow \min, g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \xi \in \mathbf{\xi}\}.$$

Заметим, что x^* — случайный вектор, поэтому в отличие от детерминированной задачи, для x^* необходимо определять функции плотности вероятности для каждой компоненты x_i^* как совместную плотность вероятности.

Мы расширим отношение порядка $*$ $\in \{<, \leq, \geq, >\}$ на случайные переменные:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} \Leftrightarrow x * y \text{ для всех } x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}.$$

Если носители \mathbf{x} , \mathbf{y} пересекаются, можно говорить о вероятности $\mathbf{x} * \mathbf{y}$

$$P(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = \int_{\Omega} p(x, y) dx dy,$$

где $\Omega = \{(x, y) | \mathbf{x} * \mathbf{y}\}$, $p(x, y)$ — совместная плотность вероятности \mathbf{x} , \mathbf{y} .

Задача линейного программирования со случайными данными формулируется следующим образом:

$$(c, x) \rightarrow \min, \quad (6.9)$$

$$Ax = b, x \geq 0. \quad (6.10)$$

$$A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}, \quad (6.11)$$

где \mathbf{A} — множество случайных матриц; \mathbf{b} , \mathbf{c} — множества случайных векторов размерности n .

Точка x_* — решение задачи (6.9) – (6.11), если

$$(c, x^*) = \inf_U (c, x),$$

где

$$U = \{x | Ax = b, x \geq 0.\}$$

Множество решений (6.9) – (6.11)

$$\mathcal{X} = \{x | (c, x) \rightarrow \min, Ax = b, x \geq 0, A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}\}$$

6.3. Случайное линейное программирование

Известно, для задачи (6.9), (6.10) оптимальное решение x^* достигается в угловой точке множества U [62].

Теорема 7. Пусть множество U определено условиями (6.10), Для того чтобы точка $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ была угловой необходимо и достаточно, чтобы существовали номера j_1, \dots, j_r :

$$A_{j_1} x_{j_1} + \dots + A_{j_r} x_{j_r} = b; x_j = 0, j \neq j_l, l = 1, \dots, r,$$

причем столбцы A_{j_1}, \dots, A_{j_r} линейно независимы.

Пример 17. Пусть U определяется матрицей A и вектором b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда столбцам матрицы A_1, A_2 соответствует угловая точка с координатами $(2, 1, 0, 0)$, $A_1, A_3 — (0, 0, 1, 0)$, $A_2, A_4 — (0, 5/7, 0, 4/3)$.

Заметим, что из n столбцов можно выбрать r линейно независимых не более чем C_n^r способами. Следовательно, число угловых точек множества U конечно.

Это значит, что каноническую задачу (6.9)–(6.11) можно попытаться решить следующим образом:

- 1) найти все угловые точки x множества U ;
- 2) вычислить значение функции (c, x) в каждой из угловых точек и определить наименьшее из них.

Однако такой подход практически не применяется, так как даже в задачах не очень большой размерности число угловых точек может быть очень большим. Тем не менее идея перебора угловых точек множества оказалась весьма плодотворной и послужила основой ряда методов решения задач линейного программирования. Одним из таких методов является так называемый симплекс-метод.

Для задачи (6.9)–(6.11) построим совместную плотность вероятности вектора x^* . Для этой цели воспользуемся одним из способов решения детерминированных задач линейного программирования, например симплекс-методом.

Рассмотрим вспомогательную задачу.

$$(c_t, x) \rightarrow \min, \quad (6.12)$$

$$A_t x = b_t, x \geq 0. \quad (6.13)$$

$$A_t \in \mathbf{A}, b_t \in \mathbf{b}, c_t \in \mathbf{c}, \quad (6.14)$$

найдем решение x_t^* и соответствующую ему угловую точку с номерами j_1, \dots, j_r .

Решим систему линейных алгебраических уравнений численным вероятностным анализом [87]

$$(\mathbf{A}_{j_1} \dots \mathbf{A}_{j_r}) \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Совместная плотность вероятности найденного решения будет соответствовать \mathbf{x}_t^* . Если носители входных параметров достаточно малы, то в силу непрерывности \mathbf{x}_t^* будет совпадать с \mathbf{x}^* . В случае произвольных носителей входных параметров процедуру выбора $A_t \in \mathbf{A}, b_t \in \mathbf{b}, c_t \in \mathbf{c}$, следует повторить, используя подходы метода Монте-Карло или генетических алгоритмов. Если при этом будут получены разные решения \mathbf{x}_t^* , то их можно сравнить вычисляя вероятностные расширения $\mathbf{f}_t = (\mathbf{c}, \mathbf{x}_t^*)$ [76].

Численный пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$(c, x) \rightarrow \min, \quad (6.15)$$

$$Ax = b, x \geq 0. \quad (6.16)$$

$$A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}, \quad (6.17)$$

где $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ — равномерная случайная матрица, каждый элемент — равномерная случайная величина с носителем $[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, аналогично \mathbf{b}, \mathbf{c} — случайные векторы с элементами в виде равномерных случайных величин.

Носители заданы следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} [1-r, 1+r] & [1-r, 1+r] \\ [1-r, 1+r] & [-1-r, -1+r] \\ [3-r, 3+r] & [1-r, 1+r] \\ [1-r, 1+r] & [2-r, 2+r] \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} [3-r, 3+r] \\ [1-r, 1+r] \end{pmatrix},$$

$$c = (-1, -1, 0, 0).$$

При $r = 0$, что соответствует детерминированному случаю, решение $x^* = (2, 1, 0, 0)$, столбцы матрицы A_1, A_2 соответствуют угловой точке.

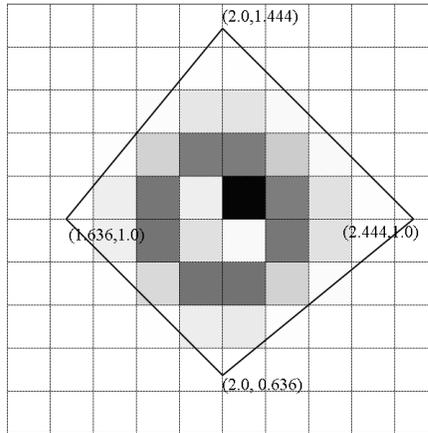


Рис. 6.1. Совместная плотность вектора $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$

На рис. 6.1 приведена совместная плотность вектора $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ при $r = 0.1$, компоненты $x_3 = 0, x_4 = 0$. Сплошная линия — граница множества решений на плоскости (x_1, x_2) . Множество решений \mathcal{X} — четырехугольник с вершинами $(2.0, 0.636)$, $(2.444, 1.0)$, $(2.0, 1.444)$, $(1.636, 1.0)$. Как видно из

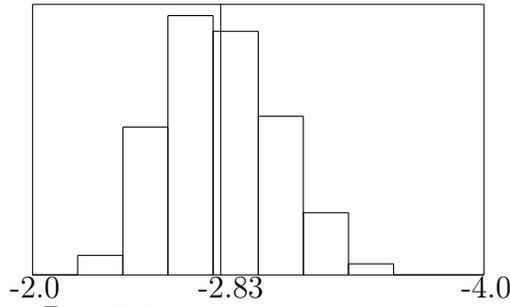


Рис. 6.2. Гистограмма $c_1x_1 + c_2x_2$

рис. 6.1 плотность вероятности распределена крайне неравномерно, самая большая в центре, в окрестности точки $(2.0, 1.0)$.

На рис. 6.2 приведена гистограмма целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2$, матожидание в точке -2.834 .

Площадь \mathcal{X} сильно зависит от r , с увеличением r она растет и уже при $r = 1$ становится бесконечной. Это определено тем, среди матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & [-2, 0] \end{pmatrix},$$

есть линейно-зависимые столбцы.

6.4. Случайное нелинейное программирование

Рассмотрим задачу случайного нелинейного программирования без ограничений в следующем виде:

$$\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \rightarrow \min. \quad (6.18)$$

$$A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}, \quad (6.19)$$

где \mathbf{A} — случайная матрица; \mathbf{b} — случайный вектор.

Задача (6.18),(6.19) в случае симметричных положительно определенных матриц A сводится к решению случайной системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b. \quad (6.20)$$

Для решения случайных систем линейных алгебраических уравнений вида (6.20) в общем случае можно использовать метод Монте-Карло. В ряде случаев удается использовать численный вероятностный анализ, который эффективней метода Монте-Карло $10^2 - 10^3$ раз [74].

В общем случае задачу случайного нелинейного программирования (6.6),(6.7) можно свести к решению случайной системы нелинейных уравнений

$$F(x, k) = 0, \quad k \in \mathbf{k}, \quad (6.21)$$

где \mathbf{k} — множество случайных векторов параметров.

В результате для задачи (6.20) или (6.21) получаем совместную плотность вероятности решения \mathbf{x} .

Численные примеры. Пусть в задаче (6.18) \mathbf{A} — равномерная случайная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \end{pmatrix},$$

\mathbf{b} — равномерный случайный вектор. Носители $\mathbf{a}_1 = [2, 4]$, $\mathbf{a}_2 = [-1, 0]$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = [0.5, 1]$.

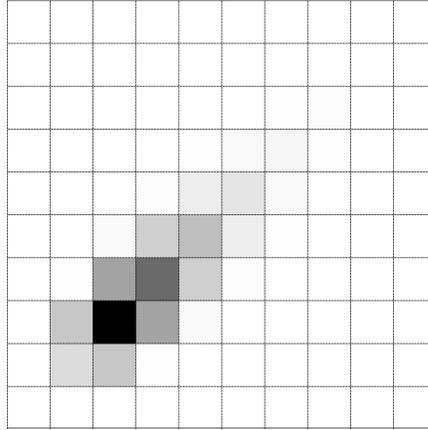


Рис. 6.3. Совместная плотность вектора \mathbf{x}

На рис. 6.3 для задачи (6.18),(6.19) приведена кусочно-постоянная аппроксимация совместной плотности вероятности вектора \mathbf{x} . Для сравнения на рис. 6.6 приведены частные решения системы (6.20) аналогичные квази Монте-Карло методу [39]. В силу определенной симметрии матрицы \mathbf{A} частные решения системы (6.20) образуют некоторый порядок.

Добавим к задаче (6.18) ограничение в виде

$$x_1 + x_2 = a, \quad (6.22)$$

где $a \in \mathbf{a}$, \mathbf{a} — равномерная случайная величина с носителем $[0.9, 1.0]$. В этом случае решение оптимизационной задачи выписывается в явном виде

$$x_1 = -(b_2 - b_1 - 2aa_2 - 2aa_1)/(8a_1),$$

$$x_2 := a - x_1.$$

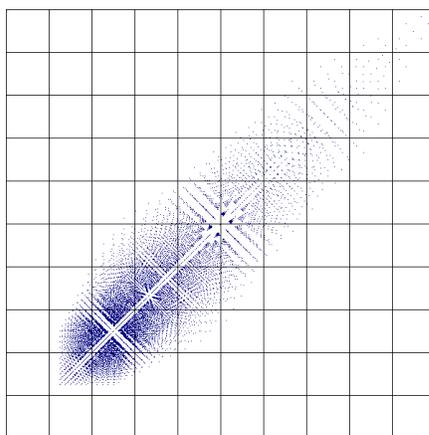


Рис. 6.4. Частные решения системы (6.20)

Используя численный вероятностный анализ [87] построим решение \mathbf{x} . На рис.6.5 на квадрате $[0.7, 1.0] \times [0, 0.3]$ приведена совместная плотность вероятности вектора решения задачи (6.18) с ограничениями (6.22).

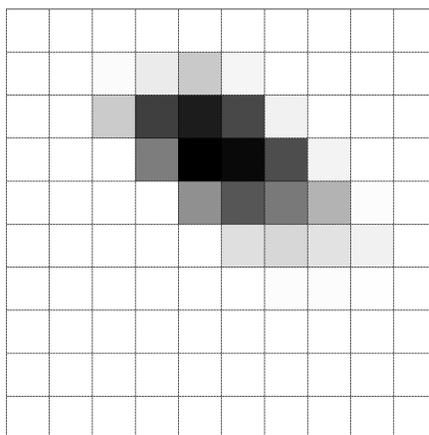


Рис. 6.5. Решение задачи с ограничениями

6.5. оптимизации выработки электроэнергии гидроэлектростанцией в условиях неопределенности

Задачи гидроэнергетики характеризуются высоким уровнем неопределенности, которая проявляется на всех стадиях информационного процесса принятия управленческого решения. Поэтому поиск методов и подходов к построению эффективных решений в условиях неопределенности является важной и практически значимой задачей. Решением разнообразных задач со стохастическими неопределенностями в данных занимается стохастическая гидрология (см. например [65]). Для решения оптимизационных задач

со стохастическими входными данными используется аппарат стохастического программирования. Особое место занимают оптимизационные задачи с неопределенными входными данными. В случае, когда входные параметры содержат различные типы неопределенности, используется математический аппарат неопределенного программирования [21]. Следует отметить работы в области интервальных неопределенностей [83, 98]. Работа чешских авторов [98] посвящена задачам линейной оптимизации в условиях интервальной и нечеткой неопределенности.

Численный вероятностный анализ направлен прежде всего на разработку численных процедур и методов, способствующих снижению уровня неопределенности в зависимости от типа, характера, специфических особенностей, объема и ее источников на всех стадиях информационного процесса, сопровождающего принятие управленческого решения. В статье для решения оптимизационных задач гидроэнергетики со случайными входными данными предлагается использовать аппарат случайного программирования [44], представляющего собой раздел математического программирования и использующий методы численного вероятностного анализа для построения функции плотности вероятности множества возможных оптимальных решений для линейных и нелинейных оптимизационных задач.

Постановка задачи. Мощность p выработки электроэнергии ГЭС можно представить в виде [100]

$$p = Chu,$$

где C — некоторая константа; h — высота уровня воды в водохранилище, $h \in [h_{min}, h_{max}]$, u — количество воды проходящей через турбины в единицу времени, $u \in [u_{min}, u_{max}]$.

Высота уровня воды h зависит от объема воды в водохранилище V :

$$h = h(V).$$

Объем воды в водохранилище $V(t)$ в свою очередь зависит от $u(t)$, притока воды в водохранилище $q(t)$ и $u_x(t)$ — холостого сброса.

$$V(t) = V_0 + \int_0^t q(\xi) - u(\xi) - u_x(\xi) d\xi.$$

Пусть необходимо максимизировать выработку электроэнергии на временном отрезке $[0, T]$. Ставится задача оптимального управления

$$P(u) = \int_0^T C h \left(V_0 + \int_0^T q(t) - u(t) - u_x(t) dt \right) u(t) dt \rightarrow \max,$$

где u — управление, количество воды проходящей через турбины в единицу времени, $u \in [u_{min}, u_{max}]$.

Упростим задачу, представим объем воды в водохранилище V в виде

$$V(t) = V_0 + S(h(t) - h_0).$$

где V_0 и h_0 — объем и уровень воды в водохранилище в момент времени $t = 0$ соответственно. Уровень воды h в водохранилище зависит от $u(t)$, $q(t)$ и $u_x(t)$

$$h(t) = h_0 + (V(t) - V_0)/S = h_0 + \left(\int_0^t q(\xi) - u(\xi) - u_x(\xi) d\xi \right) / S.$$

Таким образом

$$P(u) = C \int_0^T \left(h_0 + \left(\int_0^t q(\xi) - u(\xi) - u_x(\xi) d\xi \right) / S \right) u(t) dt \rightarrow \max. \quad (6.23)$$

где $q(t)$ — приток воды в водохранилище; $u_x(t)$ — холостой сброс; u — количество воды через турбины, $u \in [u_{min}, u_{max}]$.

Дискретная модель. Рассмотрим дискретное приближение для модели (6.23). Это позволит свести решение исходной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для этих целей построим на отрезке $[0, T]$ сетку: $\omega = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$, приток воды в водохранилище за время $[t_{i-1}, t_i]$ приблизим гистограммой q_i , соответственно $\{u_{xi} | t \in [t_{i-1}, t_i]\}$ — гистограммы холостого сброса за время $[t_{i-1}, t_i]$, $U = \{u_i | t \in [t_{i-1}, t_i]\}$ — гистограммы количества воды через турбины за время $[t_{i-1}, t_i]$.

$$P(U) = C \sum_{i=1}^n \left(h_0 + \left(\sum_{j=1}^i q_j - u_j - u_{xj} \right) / S \right) u_i \rightarrow \max.$$

Задачу в случае известного q_x можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AU = b,$$

где U — вектор решения, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$ — матрица и вектор правой части.

В нашем случае

$$2u_1 + u_2 + \dots + u_n = h_0 + q_1,$$

$$u_1 + 2u_2 + \dots + u_i + \dots + u_n = h_0 + q_1 + q_2,$$

$$u_1 + u_2 + \dots + 2u_i + \dots + u_n = h_0 + \sum_{j=1}^i q_j,$$

$$u_1 + u_2 + \dots + 2u_n = h_0 + \sum_{j=1}^n q_j.$$

В этом случае оптимальное количество воды проходящей через турбины u_i , $i = 1, \dots, n$ можно представить в виде линейных комбинаций от q_i , $i = 1, \dots, n$.

В данной модели основная входная информация $q(t)$ — приток воды в водохранилище. В силу многих причин функция $q(t)$ носит случайный характер. В этом случае мы получаем систему линейных алгебраических уравнений со случайной правой частью. Важное значение имеет способ построения $q(t)$ и соответственно аппроксимаций q_i , $i = 1, \dots, n$ и возможность вычислять линейные комбинации от q_i , которые будут представлены своими гистограммами. Для этих целей будем использовать численный вероятностный анализ.

Численный пример. Рассмотрим численное решение дискретной модели. Пусть $q_i \in [q_i, \bar{q}_i]$ — равномерные случайные величины. Для определенности $n = 3$, $S = 1$, носители $q_1 = [0.1, 0.2]$, $q_2 = [0.2, 0.3]$, $q_3 = [0.3, 0.4]$, $h_0 = 0.9$.

При $n = 3$ решив систему линейных алгебраических уравнений, в силу детерминированности матрицы, получаем оптимальное количество воды проходящей через турбины в виде линейной комбинации притоков воды:

$$u_1 = \frac{-q_3 - 2q_2 + q_1 + h_0}{4},$$

$$u_2 = \frac{-q_3 + 2q_2 + q_1 + h_0}{4},$$

$$u_3 = \frac{3q_3 + 2q_2 + q_1 + h_0}{4}.$$

В предположении независимости q_i для вычисления u_i достаточно использовать гистограммную арифметику.

На рис. 6.6 представлена гистограмма плотности вероятности решения u_1 , значения совместных плотностей вероятности для (u_1, u_2) , (u_2, u_3) представлены оттенками серого. Носители $u_1 = [0.0, 0.1]$ и $u_2 = [0.25, 0.35]$,

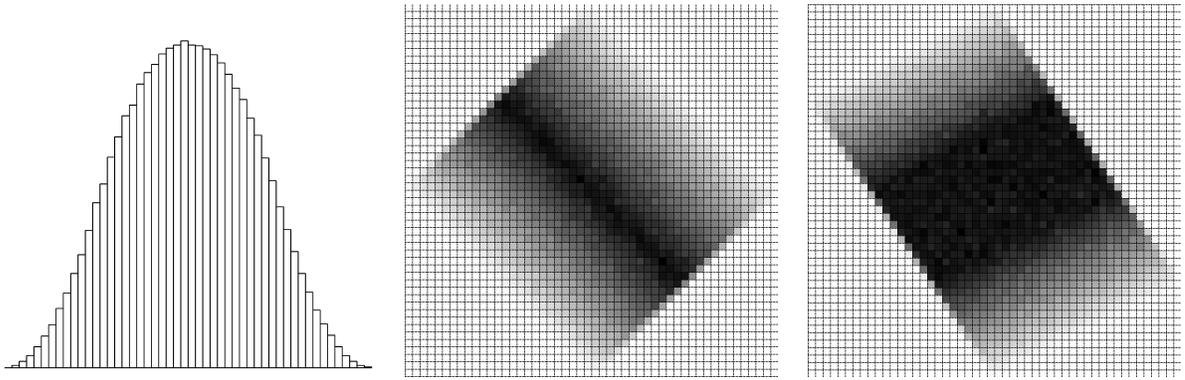


Рис. 6.6. Гистограмма u_1 и совместные плотности вероятности для (u_1, u_2) , (u_2, u_3)

$u_3 = [0.575, 0.725]$. Лицу принимающему решения, представляется визуальная информация о плотности вероятности компонент решения и их совместных плотностей вероятности, что значительно облегчает принятие решений.

В параграфе рассмотрена оптимизация выработки электроэнергии гидроэлектростанцией в условиях случайных входных данных, в частности, случайного характера притока воды в водохранилище. В качестве решения использовалось количество воды проходящей через турбины. В результате построены плотности вероятности решений, которые представлены в виде гистограмм. Далее эта информация о решении может быть использована для оценки рисков.

Рассмотренные методы решения приведенных задач линейной и нелинейной оптимизации позволяют представить *случайное программирование* как эффективный метод решения оптимизационных задач в условиях неопределенности входных параметров. В дальнейшем планируется разработать алгоритмы выбора наилучших оптимальных решений из построенного множества решений.

Глава 7.

Регрессионный анализ

С развитием информационных технологий проблема обработки и исследования массивов данных становится все более и более актуальной. Существует ряд причин, которые актуализируют разработку новых подходов и методов связанных с содержательными, количественными, структурными составляющими самих данных. Рассмотрим некоторые из них.

Данные, с которыми приходится оперировать исследователю, многообразны по своему качественному и количественному составу, специфике способов измерения, регистрации, представления. В этом направлении важно отметить, что организации создают огромные объемы данных, которые представлены различным образом и в различных форматах — это веб-журналы, видеозаписи, текстовые документы, машинный код или, например, геопространственные данные. В результате, пользователи имея доступ к огромному объему своих данных, часто нуждаются в эффективных технологиях обработки и анализе данных, с целью установить взаимосвязи между этими данными, извлечь полезную информацию и сделать на их основе значимые выводы.

Многообразие способов представления данных определяет выбор методов их обработки, моделирования и анализа. Классический подход к обработке и анализу данных, как правило, предполагает, что каждое значение является единственной точкой в p -мерном пространстве R^p [12]. Кроме подобных данных во многих практических задачах хранения, обработки, анализа приходится сталкиваться с «многозначными данными», примерами которых могут служить: список значений, интервальные данные, более сложный тип модально-значные данные, в которых содержатся вероятности, веса, или другие связанные значения. Хорошим примером модально-значных данных является гистограмма. Подобные данные попадают в класс данных, который называется «символьные данные» [12].

Важным отличием символьных данных является наличие у них внутренней структуры. Важно также отметить, что данные, представленные в виде гиперкуба в p -мерном пространстве R^p , есть также пример символьных данных.

К сложно структурированным данным не применима классическая статистическая теория и методы обработки и анализа данных. Поэтому, разработка новых методов для анализа символьных данных и построения математических основ имеют большую актуальность.

Billard L., Diday E. описали оригинальную математическую основу символьных данных [12]. Как правило, символьные данные возникают в двух случаях, при сборе и обработке информации. Некоторые собранные данные уже по своей природе являются символьными, некоторые становятся символьными после обработки. Прежде всего, исходные данные могут быть собраны как списки, интервалы, гистограммы, и т. п. Примером естественно, собранной символической информации являются показания артериального давления, где измерительный прибор на самом деле измеряет диапазон (хотя это значение может быть записано как одно значение). Другой пример символических данных - уровень доходов.

Другая важная причина развития новых подходов к обработке и анализу данных состоит в том, что с появлением современных информационных технологий актуальность хранения, обработки и анализа данных больших объемов с целью извлечения знаний становится актуальной задачей, требующей как больших вычислительных мощностей, так и новых методов анализа данных. Анализ публикаций на эту тему, показал, что в последнее время возрос интерес, и увеличилась исследовательская активность в области разработки теории и практики анализа данных больших объемов.

Большой объем информации, с одной стороны, позволяет получить более точное описание объекта исследования, а с другой стороны превращает поиск решений в сложную задачу, требующую применения современных математических методов обработки и анализа информации, в том числе разработки численных методов регрессионного моделирования и анализа.

Одним из способов решения проблемы анализа данных больших объемов является применение разнообразных процедур предобработки данных. Например, агрегирование больших данных на группы по некоторым параметрам, это особенно эффективно, когда характеристики групп представляют больший интерес для аналитика. Таким образом, суть процедуры агрегирования составляют процедуры, когда первоначальный набор данных

сводится к наборам данных меньшего объема, сохраняя при этом имеющиеся в них знания.

В научно-технической литературе все чаще появляется термин «большие данные», который, как правило, связывают с тремя составляющими, а именно с увеличением объемов информации, с ростом скорости обмена данными и увеличением информационного разнообразия. Например, метеорологические данные, данные дистанционного зондирования земли, потоки данных о местонахождении абонентов, потоки сообщений из социальных сетей – вот только некоторые примеры источников «больших данных».

Понятие «большие данные» связано с проблемой обработки информации огромного объема, разнообразного состава, способов представления и организации, имеющей или не имеющей внутренней структуры, весьма часто обновляемой. Существует множество методик анализа массивов данных, в основе которых используется инструментарий, заимствованный, например, из статистики и информатики, например, технология Data Mining, KDD и другие. Исследователи продолжают работать над созданием новых методик и совершенствованием существующих. Важно отметить, многие методики имеют универсальный характер и успешно могут применяться как к большим данным, так и для меньших по объему массивов. В этой связи следует отметить Численный вероятностный анализ (ЧВА) [74, 75, 19].

В данной статье рассматривается подход к регрессионному моделированию на основе ЧВА, а также использования гистограммных переменных, которые есть результат агрегирования данных на основе гистограммного подхода на этапе подготовки данных к численному моделированию и представляющие собой входные и выходные переменные регрессионной модели.

7.1. Агрегация данных

В данном разделе рассматривается процедура агрегирования данных как метод предобработки для последующего регрессионного моделирования.

Суть процедуры агрегирования составляют методы, позволяющие первоначальный набор данных свести к наборам данных меньшего объема, сохраняя и обнаруживая при этом полезные знания в соответствии с возможностями используемых методов. Другими словами, агрегация представляет собой процедуру «сжатия» информации.

С другой стороны, агрегация может рассматриваться как процесс преобразования данных с высокой степенью детализации к более обобщенному

их представлению за счет вычисления так называемых агрегатов – значений, получаемых в результате применения данного преобразования к некоторому набору фактов, связанных с определенным измерением. Примером таких процедур является простое суммирование, вычисление среднего, медианы, моды или выбор максимального или минимального значений. Применение процедуры агрегирования имеет свои достоинства и недостатки. В качестве положительных моментов, укажем, например, на то, что детализированные данные часто оказываются очень изменчивыми из-за воздействия различных случайных факторов, что затрудняет обнаружение общих тенденций и закономерностей исследуемого процесса. Важно иметь в виду, что применение таких процедур, как усреднение, исключение экстремальных значений (выбросов), процедур сглаживания, может привести к потере важной и значительной части информации об объекте исследования.

Существуют различные способы агрегирования данных. Рассмотрим гистограммный подход к агрегации данных. Данный подход полезен по следующим причинам. В основе этого подхода лежит понятие гистограммы. Гистограмму можно рассматривать как математический объект, который удобен для описания и вычисления математических процедур и операций, сохраняя суть частотного распределения данных. В рамках ЧВА разработана гистограммная арифметика, которая позволяет выполнять различные арифметические операции над гистограммными переменными, включая операции вычисления максимума и минимума, возведения в степень, процедуры сравнения. В настоящее время гистограммы активно применяются в различных областях. Например, гистограммы активно используются в базах данных, в задачах аппроксимирования и сжатия информации, распознавания образов и обработки изображений. В задачах обработки изображений гистограмма характеризует статистическое распределение количества пикселей изображения в зависимости от их значений. Для построения гистограммы достаточно вычислить количество пикселей в каждом интервале значений DN , а затем поделить его на общее число пикселей N :

Отметим важное свойство гистограмм, которое связано с понятиями агрегирование информации и агрегирование данных. Гистограмма представляет собой кусочно-постоянную функцию, заданную сеткой, на каждом отрезке которой гистограмма принимает постоянное значение. Использование гистограмм обусловлено прежде всего тем, что они позволяют достаточно точно представлять произвольные распределения случайных величин. Несмотря на свою простоту, гистограммы охватывает все возмож-

ные интервалы оценки функции плотности вероятности. Простая и гибкая структура гистограмм существенно упрощает их использование в численных расчетах и имеет наглядный визуальный образ, что удобно для аналитических выводов .

В работах [77] для агрегации данных временного ряда и данных, полученных на основе мониторинга дистанционного зондирования земли, показана эффективность применения данного подхода к обработке данных с целью их агрегирования. В статье [89] для агрегации временных рядов вводится понятие гистограммного ряда и на основе применения ЧВА строятся информационно-аналитические модели прогнозирования. В работе [77] рассматривается проблема изучения природных процессов на основе данных космического и наземного мониторинга. На основе численного вероятностного анализа предлагается концептуально — гистограммный подход, который применяется для разработки процедур агрегирования информационных потоков, а также для численного моделирования и представления характеристик природных объектов. Показывается, что применение разработанных процедур снижает уровень неопределенности в данных и существенно повышает эффективность численных расчетов.

В качестве примера агрегаций могут служить следующие типичные ситуации: первая если измеряется, например, температура по некоторой области, как обычно бывает при зондировании Земли из Космоса. При этом в каждый момент времени измерения получается N значений температуры. Обычно в этих случаях используют среднее значение или интервал изменения. Понятно, что при этом значительная часть информации теряется. Агрегирование информации по пространственному признаку с помощью гистограмм позволяет более точно представить измеренную информацию. Такая агрегация называется — *распределенной* агрегацией [84].

Второй способ агрегации называется «*временной*» и возникает, когда переменная наблюдается, например, раз в секунду или в минуту, но должна быть проанализирована на более низкой частоте, скажем за день. В этом случае, использование средних значений или интервального анализа, приводят к потере информации.

Эти две ситуации описывают распределенную и временную агрегации, соответственно. В каждом из этих случаев представление данных в виде плотностей вероятности, является более информативным представлением, чем другие способы.

Рассмотрим пример временной агрегации. На рис. 7.1. изображен набор данных (x_l, y_l) расходов на питание (y_l) и дохода (x_l), число наблюдений

равно 7125. Графическое представление полного набора данных визуально представляет область изменения и сосредоточения данных. Заметим, что по многим причинам работать с таким большим объемом информации напрямую неудобно. Для повышения эффективности анализа данных с целью извлечения полезной информации целесообразно эти данные агрегировать в гистограммы. Для этих целей построим в области изменения дохода X сетку $\{x_0 < x_1, \dots, < x_n\}$. Для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i)$ построим множество $\mathcal{Y} = \{y_l | x_l \in [x_{i-1}, x_i)\}$. По множеству \mathcal{Y} построим гистограмму Y_i , $i = 1, \dots, n$. Способ агрегирования исходного набора (x_l, y_l) в гистограммы $\{Y_i, i = 1, \dots, n\}$ будем называть — «временной» агрегацией. Роль времени играет «доход».

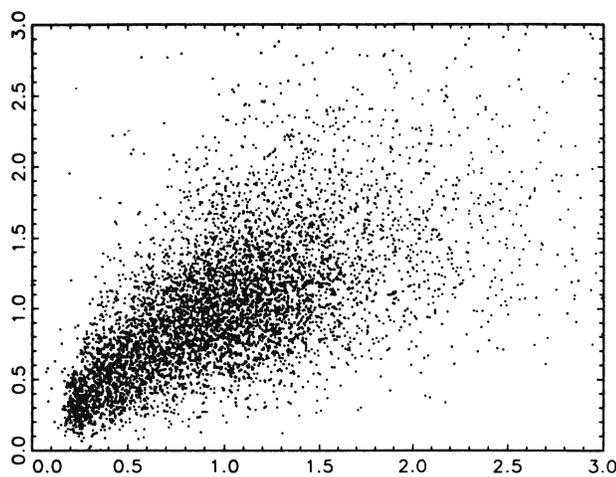


Рис. 7.1. Графическое представление расходов на питание (y_l) и дохода (x_l) [99]

7.2. Регрессионное моделирование на основе агрегированных данных

Регрессионное моделирование представляет собой способ исследования объектов на основе использования информационного подхода для выявления факта существования различных зависимостей между входными и выходными данными. Регрессионный анализ может рассматриваться как метод моделирования измеряемых данных и исследования их свойств. Данные представляются в виде пар значений зависимой переменной (переменной отклика) и независимой переменной (объясняющей переменной). Регрессионная модель есть функция независимой переменной и параметров с добавленной случайной переменной. Регрессионный анализ предназначен для изучения по выборочным данным статистической зависимости ряда

величин; некоторые из которых являются случайными. При статистической зависимости величины не связаны функционально, но как случайные величины заданы совместным распределением вероятностей. Исследование зависимости случайных величин приводит к моделям регрессии и регрессионному анализу на базе выборочных данных. Теория вероятностей и математическая статистика представляют лишь инструмент для изучения статистической зависимости, но не ставят своей целью установление причинно-следственной связи. Числовые данные обычно имеют между собой явные (известные) или неявные (скрытые) связи. Поэтому важной задачей для исследователя является с помощью различных методов выявить скрытые зависимости и закономерности, содержащиеся в данных и выразить их в виде формул, т. е. математически смоделировать явления или процессы. Регрессионный анализ называют основным методом современной математической статистики для выявления неявных и завуалированных связей между данными наблюдений. В регрессионном анализе имеют место следующие допущения: количество наблюдений достаточно для проявления статистических закономерностей относительно факторов и их взаимосвязей; обрабатываемые данные содержат некоторые ошибки (помехи), обусловленные погрешностями измерений, воздействием неучтенных случайных факторов; матрица результатов наблюдений является единственной информацией об изучаемом объекте, имеющейся в распоряжении перед началом исследования.

В условиях «больших» данных предполагается целесообразным имеющиеся наблюдения или «сырые данные» подвергнуть процедуре обработки, в частности агрегации.

С этой целью применим гистограммный подход и, только после этого, на агрегированных данных будем строить регрессионные модели. Такой подход уже на стадии подготовки данных к моделированию позволяет провести предварительный анализ данных с целью их «сжатия», извлечения полезной информации и ориентировать вычислительный процесс на оптимизацию численных процедур, необходимых для построения регрессионных моделей. Ниже сформулируем «классическую» постановку задачи регрессионного моделирования и далее перейдем к постановке задачи для «гистограммной» регрессии.

7.3. Классическая параметрическая регрессия

Пусть входные данные $X = (x_1, \dots, x_n)$ и целевая переменная Y являются числовыми. Тогда для каждой записи Y_i, X_i можно построить модель:

$$Y_i = f(X_i, a) + \epsilon_i, i = 1, \dots, N,$$

где f — функция зависимости целевой переменной от входных данных и некоторых параметров, $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ — параметры регрессии, а ϵ_i — ошибки. Необходимо найти наилучшую функцию f и наилучшие параметры a таким образом, чтобы ошибки ϵ были достаточно малы. Если накладывается условие: $\|\epsilon\| \rightarrow \min$, то можно говорить об оптимизации функции

$$\Phi(a) = \sum_{i=1}^N \|Y_i - f(X_i, a)\|^2.$$

Существует класс функций и норма $\|\cdot\|$, когда задача регрессии может быть сведена к решению систем линейных алгебраических уравнений. В случае линейных функций относительно x_1, \dots, x_n и Евклидовой нормы получаем классическую линейную регрессионную модель

$$\Phi(a) = \sum_{i=1}^N (Y_i - a_0 - \sum_{j=1}^n a_j x_{ji})^2.$$

Решение которой сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Aa = b,$$

где матрица $A = X'X$, $b = X'Y$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}.$$

7.4. Метрики в пространстве гистограмм

В силу специфики гистограмм, далее будем использовать специальные подходы к количественной оценке расстояний между гистограммами.

Для этого рассмотрим метрику Вассерштейна и Mallows [32] для обратных функций распределения. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ функции плотности вероятности, тогда представим метрики

$$\rho_W(f, g) = \int_0^1 |F^{-1}(t) - G^{-1}(t)| dt, \quad (7.1)$$

$$\rho_M(f, g) = \left(\int_0^1 (F^{-1}(t) - G^{-1}(t))^2 dt \right)^{1/2}, \quad (7.2)$$

где $F^{-1}(t)$, $G^{-1}(t)$ — обратные функции к функции распределения.

Причинами выбора этой метрики было успешное применение в ряде работ [4]. Более того эта метрика эквивалентна Earth Mover's Distance (EMD), предложенной Rubner, Tomasi и Guibas [45]. EMD — известное компьютерное расстояние, которое используется для того, чтобы измерить несходства между гистограммами текстуры и цвета. EMD между двумя гистограммами — наименьшее количество объема работы, чтобы преобразовать одну гистограмму в другую.

Если $h(x)$ некоторая гистограмма, тогда функция распределения H соответствующая этой гистограмме, можно представить в виде

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(\xi) d\xi.$$

В силу того, что гистограмма — кусочно постоянная функция, вычисление интеграла от нее не представляет особого труда. В результате функция распределения H будет кусочно линейная функция. Таким образом, метрики (7.2), (7.1) можно интерпретировать, как площадь между функциями распределения.

7.5. Гистограммная регрессия

Пусть входные данные $X = (x_1, \dots, x_n)$ и целевая переменная Y являются гистограммными переменными и вектора $X = (x_1, \dots, x_n)$ известна совместная плотность вероятности $p(x_1, \dots, x_n)$.

Аналогично числовой регрессии для каждой пары (X_i, Y_i) можно записать

$$Y_i = f(X_i, a) + \epsilon_i, i = 1, \dots, N,$$

или в случае линейной модели

$$Y_i = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x_{ij} + \epsilon_i, i = 1, \dots, N.$$

Таким образом, для нахождения неизвестных параметров a_0, a_1, \dots, a_n можно записать задачу оптимизации

$$\Phi(a) = \sum_{i=1}^N \rho(Y_i, a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x_{ji})^2 \rightarrow \min. \quad (7.3)$$

В силу нелинейности операции сложения для решение задачи (7.3) можно использовать, например, метод наискорейшего спуска [62].

Для вычисления градиента Φ' будем использовать разностные производные

$$\Phi'_i = \frac{\Phi(a_0, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - \Phi(a_0, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h},$$

где h — параметр.

Начальное приближение для вектора параметров a_0, a_1, \dots, a_n можно получить решив задачу регрессии для математических ожиданий ($M[X_i]$, $M[Y_i]$).

7.6. Численный пример

Пример 18. Предположим, что имеются данные, представляющие измерения гемоглобина (X) и гематокрита (Y) у некоторого количества пациентов [12]. В результате применения гистограммного подхода к данным была применена процедура *распределенной* агрегации.

Ставится задача на агрегированных данных (Таблица 1.) построить линейную гистограммную регрессию, где зависимой переменной является Y = гематокрит и переменной предиктором является X = гемоглобин. Данные таблицы 1. представляют $N = 10$ гистограммных переменных. Гистограммы представлены в виде списка пар $\{(In_i, p_i)\}$, где In — интервал, p — вероятность попадания случайной величины в интервал In . Заметим, что для Y_5 и Y_{10} списки гистограммных переменных содержат лишь одну пару $(In, 1)$, что совпадает с интервальными переменными.

Рассмотрим линейную модель

$$Y = a_0 + a_1 X.$$

Для нахождения параметров регрессии a_0, a_1 решается задача оптимизации (7.3), где в качестве метрики ρ используется метрика ρ_M . Были получены следующие оценки $a_0 = -1.44$ $a_1 = 3.12$. Если вместо гистограммных переменных, использовать их математические ожидания $M[X_i]$,

$M[Y_i]$, то значения оценок параметров регрессии будут соответственно равны $a_0 = -2.12$ $a_1 = 3.16$.

Таблица 7.1.

Гистограммные данные зависимости гемоглобина (X) и гематокрита (Y)

n	Y	X
1	{[33.29, 37.52), 0.6} [37.52, 39.61], 0.4}	{[11.54, 12.19), 0.4} [12.19, 12.80], 0.6}
2	{[36.69, 39.11), 0.3} [39.11, 45.12], 0.7}	{[12.07, 13.32), 0.5} [13.32, 14.17], 0.5}
3	{[36.69, 42.64), 0.5} [42.64, 48.68], 0.5}	{[12.38, 14.20), 0.3} [14.20, 16.16], 0.7}
4	{[36.38, 40.87), 0.4} [40.87, 47.41], 0.6}	{[12.38, 14.26), 0.5} [14.26, 15.29], 0.5}
5	{[39.19, 50.86]}	{[13.58, 14.28), 0.3} [14.28, 16.24], 0.7}
6	{[39.70, 44.32), 0.4} [44.32, 47.24], 0.6}	{[13.81, 14.50), 0.4} [14.50, 15.20], 0.6}
7	{[41.56, 46.65), 0.6} [46.65, 48.81], 0.4}	{[14.34, 14.81), 0.5} [14.81, 15.55], 0.5}
8	{[38.40, 42.93), 0.7} [42.93, 45.22], 0.3}	{[13.27, 14.00), 0.6} [14.00, 14.60], 0.4}
9	{[28.83, 35.55), 0.5} [35.55, 41.98], 0.5}	{[9.92, 11.98), 0.4} [11.98, 13.80], 0.6}
10	{[44.48, 52.53]}	{[15.37, 15.78), 0.3} [15.78, 16.75], 0.7}

Пример 19. Рассмотрим другую модель гистограммной регрессии, основанную на временной агрегации. В этом случае нам известны измерения целевой переменной Y_i , но измерения входной переменной X_i удобнее трактовать, как принимающую вещественные значения. Таким образом, интервальным переменным X_i сопоставим значения $t = 1, 2, \dots, 7$. В таблице 2. приведены гистограммы зависимости уровня холестерина от возраста. Для простоты восприятия в таблице для Y показаны только носители (т. е. интервалы на которых гистограммы отличны от нуля).

Рассмотрим несколько другую модель гистограммной регрессии, когда нам известны измерения целевой переменной Y_i , но измерения входной переменной X_i удобнее трактовать как принимающую вещественные значения.

В этом случае регрессионную модель представим в следующем виде

$$Y = A\phi_1(t) + B\phi_2(t), t \in [1, 7],$$

где A, B — гистограммные переменные, ϕ_1, ϕ_2 — линейные функции, такие что $\phi_1(1) = 1, \phi_1(7) = 0$ и $\phi_2(1) = 0, \phi_2(7) = 1$.

Таким образом, используя модель (7.3) относительно A, B получаем для них следующие значения $A = [109.3, 182.9], B = [148.9, 249.1]$.

Использование ЧВА и гистограммного подхода для предобработки данных больших объемов, на примере процедуры агрегирования данных, способствует повышению достоверности в изучении природных явлений и процессов во времени и в пространстве на основе имеющихся данных.

Таблица 7.2.

Гистограммные данные зависимости возраста (X) и гемоглобина (Y)

i	X	Y
1	[20, 30)	[114, 192]
2	[30, 40)	[103, 189]
3	[40, 50)	[120, 191]
4	[50, 60)	[136, 223]
5	[60, 70)	[149, 234]
6	[70, 80)	[142, 229]
7	[80, 90)	[140, 254]

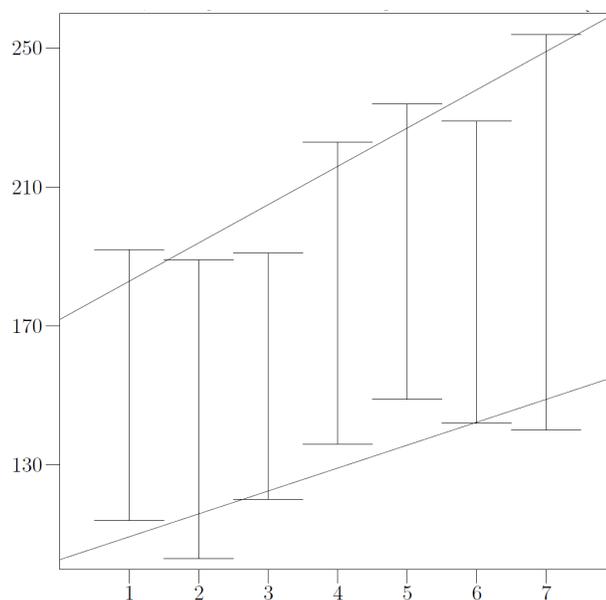


Рис. 7.2. Гистограммная регрессия

Разработанные на основе ЧВА процедуры и методы гистограммного представления, обработки и численного регрессионного моделирования, позволяют снизить уровень неопределенности в информационных потоках, существенно сократить время обработки и выполнения численных процедур. Данный подход позволяет также в режиме визуально-интерактивного моделирования представить необходимые данные для оперативного принятия решений.

Глава 8.

Процедуры распространения неопределенностей

Решение многих практических задач в условиях информационной неопределенности входных данных требует специальных методов, основанных на процедурах представления и численного моделирования. Для решения таких задач предлагается использовать численный вероятностный анализ. Представление неопределенности, содержащейся в параметрах входных данных, осуществляется с использованием гистограмм второго порядка, на основе которых строятся процедуры ее распространения. С этой целью на основе гистограмм второго порядка разработана арифметика неопределенных данных.

8.1. Анализ существующих подходов к представлению и распространению неопределенности

В настоящее время во многих работах, посвященных исследованию систем в условиях информационной неопределенности, используется подход, представляющий собой процедуру распространения неопределенности («propagation of uncertainty»), который с точки зрения процесса принятия решений можно использовать для построения системы дополнительных оснований (знаний), предоставляемых ЛПР, с целью решения задачи выбора наиболее эффективного решения из множества возможных. Основная идея данного подхода состоит в следующем: если исследователь находится в условиях недостаточности или полного отсутствия эмпирической информации или оснований для выдвижения идей и предположений о неизвестном распределении входных параметров, то необходимо распространить (propagate) существующую неопределенность, чтобы получить достаточ-

ные выводы в соответствии с принципом недостаточного основания. Чтобы получить необходимые основания для оценки или восстановления неизвестного входного распределения на основе неполной, неточной информации, можно использовать различные процедуры, например, следует рассмотреть распределение вероятностей, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую имеющейся априорной информацией. При этом важно следовать такому принципу: выбрать тип представления в соответствии с количеством имеющейся информации и оставаться верным имеющейся информации, включая информационные пробелы. Применение принципа недостаточности (достаточности) оснований позволяет существенно расширить формы представления неопределенностей: например, P-boxes S. Ferson, облака Неймайера (Neumaier's clouds) [38], теорию Демпстера-Шафера [46], интервальные гистограммы, гистограммы второго порядка.

В рамках рассмотренных принципов распространение неопределенности можно достичь, используя метод вероятностных границ (Probability bounds). Его основная идея приводится, например, в работе [52], и состоит в следующем: «Есть нечто, что можно сказать о неизвестном распределении. В частности, его кумулятивная функция распределения вероятностей или CDF (Cumulative Distribution Function) должна лежать в области — ящике (box), ограниченная нулем и единицей по вертикали и от минимума и максимума горизонтально. Истинная функция распределения, какой бы она ни была, должна находиться в этой области». Идея построения вероятностных границ оказалась весьма продуктивной и нашла свое применение в такой форме представления неопределенности, как P-box. Еще одним подходом к распространению неопределенности являются облака Неймайера (Neumaier's clouds) которые позволяют представить неполную стохастическую информацию четким, понятным и вычислительно привлекательным способом, а также позволяют визуализировать неопределенность и обладают четкой семантикой, выступая посредником между понятием нечеткого множества и вероятностным распределением. В рамках основных подходов к распространению неопределенности следует указать также на математическую теорию очевидностей (свидетельств) Демпстера—Шафера, основанную на функции доверия (belief functions) и функции правдоподобия (plausible reasoning), которые используются, чтобы скомбинировать отдельные части информации (свидетельства) для вычисления вероятности события. Данная теория позволяет построить необходимые основания в условиях неопределенности путем оценки верхней и нижней границ интервала возможностей. Среди подходов к распространению неопределенностей сле-

дует особенно выделить метод, который опирается на понятие вероятности второго порядка, и известен как *second-order probability*. Данный подход представляет собой метод, позволяющий строить вероятностные оценки в случае эпистемистической неопределенности [48]. Концепция вероятностей второго порядка была изложена в 1996 г. в работах А. Mosleh и V. M. Bier. Анализ публикаций показал, что, несмотря на то, что данное направление достаточно активно развивается за рубежом, понятие вероятности второго порядка еще находится в стадии определения.

В главе для построения системы дополнительных оснований предлагается использовать численный вероятностный анализ. Представление неопределенности, содержащейся во входных данных, осуществляется с использованием интервальных гистограмм и гистограмм второго порядка, на основе которых строятся процедуры ее распространения. С этой целью на основе гистограмм второго порядка разработана арифметика неопределенных данных. Приводятся численные примеры и обсуждается практика применения

8.2. Распространение неопределенности на основе численного вероятностного анализа

Численный вероятностный анализ представляет собой еще один способ распространения информационной неопределенности, в том числе для задач, когда вероятностные оценки входных параметров носят неопределенный характер. С целью снижения уровня информационной неопределенности и получения дополнительной информации о распределении параметров в условиях информационной недостаточности предлагается использовать гистограммный подход. Для решения таких задач можно также использовать интервальные гистограммы и гистограммы второго порядка. В тех случаях, когда нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины, задают оценки плотности распределения сверху и снизу. Такие оценки удобно аппроксимировать *интервальными гистограммами*.

Гистограмму будем называть интервальной, если значения гистограммы принимают интервальные значения. Наряду с интервальными гистограммами в рамках ЧВА предлагается использовать *гистограммы второго порядка*, т. е. такие гистограммы, каждый столбец которых — гистограмма [76]. Определим гистограмму второго порядка (ГВП) как кусочно-

гистограммную функцию. ГВП так же, как обычная гистограмма, определяется сеткой $\{z_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ и набором гистограмм $\{P_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. На каждом отрезке $[z_{i-1}, z_i]$ ГВП принимает гистограммное значение P_i .

Рассмотрим процедуру построения ГВП. Пусть мы имеем ряд гистограмм $\{Y_i, i=1, 2, \dots, N\}$. Каждой Y_i поставим в соответствие вероятность $p_i: \sum p_i = 1$. Для простоты будем считать, что все гистограммы Y_i заданы на сетке $\{z_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ и на отрезке $[z_{k-1}, z_k]$ Y_i принимает значение Y_{ik} . Таким образом, на каждом отрезке $[z_{k-1}, z_k]$ имеем случайную величину Y_k , принимающую значения Y_{ik} с вероятностью p_i . Используя эти значения, мы можем на каждом отрезке $[z_{k-1}, z_k]$ восстановить гистограмму Pz_k .

Рассмотрим пример задачи, когда вероятностные характеристики изучаемого показателя содержат неопределенности, и построим для него гистограмму второго порядка.

Пример 20. Пусть параметр S представляет собой некоторую случайную величину S_t , которая имеет треугольное распределение P_t на отрезке $[0,1]$, высота $h=2$ и вершина в некоторой точке $(t,2)$, где t — случайная величина с треугольным распределением на отрезке $[0.25, 0.75]$ с вершиной $(0.5, 4)$ (рис. 8.1).

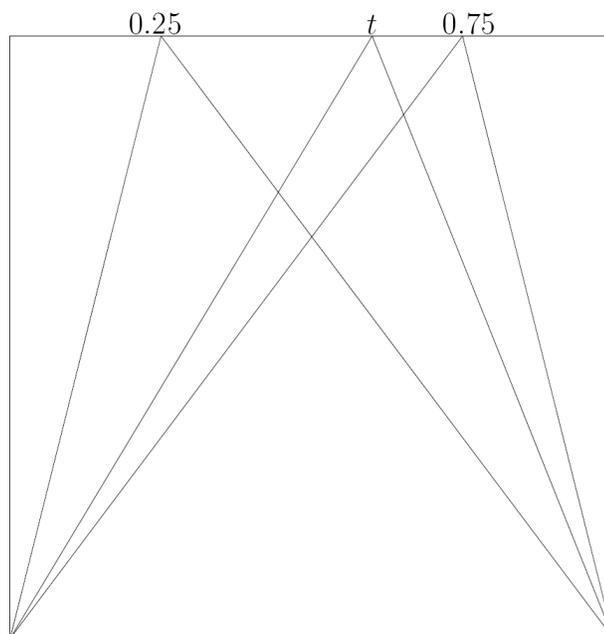


Рис. 8.1. Множество треугольных распределений

На рис. 8.1 представлена случайная величина S_t , на рис. 8.2 приведена гистограмма второго порядка, где оттенками серого показано распределение вероятностей. Интервальное распределение (максимальное и минимальное P_t для всех t) изображено граничными линиями. Внутренняя

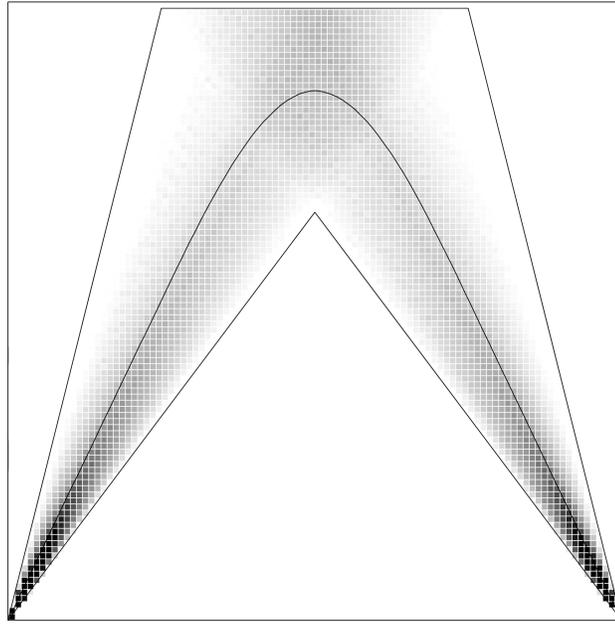


Рис. 8.2. Гистограмма второго порядка для параметра S

линия определяет «эффективную» плотность вероятности гистограммы второго порядка — математическое ожидание плотностей вероятности P_t в точке x .

8.3. Арифметика неопределенных данных на основе гистограмм второго порядка

Для осуществления численных операций над «неопределенными» переменными, заданными своими функциями плотности в виде гистограмм второго порядка, в условиях неопределенности определим арифметику для ГВП.

Пусть X, Y — ГВП, определяются сетками $\{v_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, $\{w_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ и наборами гистограмм $\{Px_i\}$, $\{Py_i\}$. Пусть $Z = X * Y$, где $*$ $\in \{+, -, \cdot, /, \uparrow\}$. Построим Z как ГВП. Зададим сетку $\{z_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, тогда гистограмма Pz_i на отрезке $[z_{i-1}, z_i]$, следуя работе [74], определяется по формуле

$$Pz_i = \int_{\Omega_i} X(\xi)Y(\eta)d\xi d\eta$$

где $\Omega_i = \{(\xi, \eta) | z_i \leq \xi * \eta \leq z_{i+1}\}$.

Заметим, что на каждом прямоугольнике $[v_{i-1}, v_i] \times [w_{j-1}, w_j]$ функция $X(\xi)Y(\eta)$ есть постоянная гистограмма $Px_i Py_j$. Интеграл от гистограммы

по некоторой области есть значение гистограммы, умноженное на площадь области.

Проиллюстрируем, как работает гистограммная арифметика в случае сложения двух ГВП.

Пример 21. Пусть необходимо сложить две гистограммы второго порядка X и Y . Гистограммы X и Y порождены равномерными случайными величинами, заданными соответственно на отрезках $[0, t_1]$ и $[t_2, 2]$, где t_1 — равномерная случайная величина, заданная на отрезке $[1,2]$, t_2 — равномерная случайная величина, заданная на отрезке $[0,1]$. Результат сложения двух гистограмм представлен в виде гистограммы второго порядка Z , изображенной на рис. 8.3. Носителем Z является отрезок $[0,4]$, высота 1, значения плотности вероятности представлены оттенками серого.

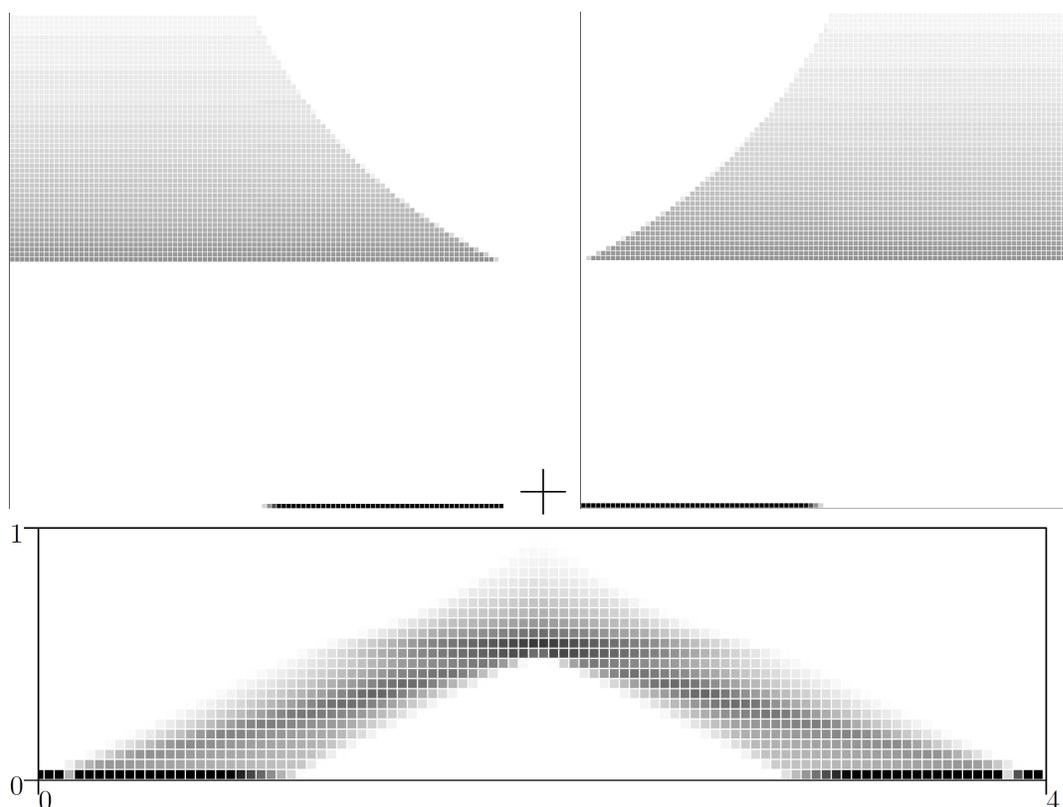


Рис. 8.3. Сумма двух гистограмм второго порядка $Z = X + Y$

Использование гистограмм второго порядка в условиях неопределенности вероятностных характеристик параметров системы имеет широкую область применения в решении разнообразных практических задач. Например, в решении задач оценки эффективности инвестиционных проектов. В данном случае мы имеем дело с высоким уровнем рыночной неопределенности, где стандартная финансовая модель не учитывает вероятностную

природу характеристик оцениваемых показателей и соответственно не может дать достаточных оснований для принятия эффективных инвестиционных решений, а используемые методы, например метод дисконтированных денежных потоков, не учитывает вероятностный характер результатов инвестиционных проектов. Гистограммы второго порядка также могут успешно применяться в задачах оценки показателей надежности и оценки безотказной работы сложных технических систем, для изучения гидрологических и других систем. Решение практических задач с использованием методов интерполяции и экстраполяции также лежит в сфере применения ГВП. Рассмотрим примеры, где возникает необходимость использования ГВП.

Рассмотрим простой пример, когда некоторая фирма собирается производить новый продукт и необходимо оценить денежные потоки от его реализации. Пусть планируется продать $\bar{N} = 1000$ единиц продукции по цене $\bar{C} = 10$ условных единиц и получить от реализации продукта соответственно, выручку $R = 10000$ условных единиц. Однако в силу рыночной неопределенности N, C — случайные величины. Допустим, экспертные оценки при этом показывают, что величина N будет иметь закон распределения

$$P_N = 2\left(\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)/n - 0,5\right)\Delta + \bar{N}$$

с математическим ожиданием $\bar{N} \in [950, 1050]$ с носителем $[\bar{N} - \Delta, \bar{N} + \Delta]$, $\Delta = 50$, где t_i — равномерно распределенные случайные величины на отрезке $[0,1]$; n — случайное целое в диапазоне от 3 до 6.

Цена при этом коррелирована с величиной продаж N .

$$C = (N - \bar{N})/\Delta + \bar{C}.$$

В данной задаче относительно показателей C и N , имеющих стохастическую природу, присутствует интервальная неопределенность, которая порождается \bar{N} , что существенно ограничивает информационную составляющую для принятия управленческого решения. Для повышения эффективности управленческого решения применим процедуру распространения неопределенности. Для этого используем гистограммный подход и ГВП-арифметику. Для этого предположим в силу принципа максимальной энтропии [23], что имеет равномерный закон распределения.

На рис. 8.4. Приведены результаты расчетов, представленные в виде ГВП. По горизонтали — значения R , по вертикали — значения плотности

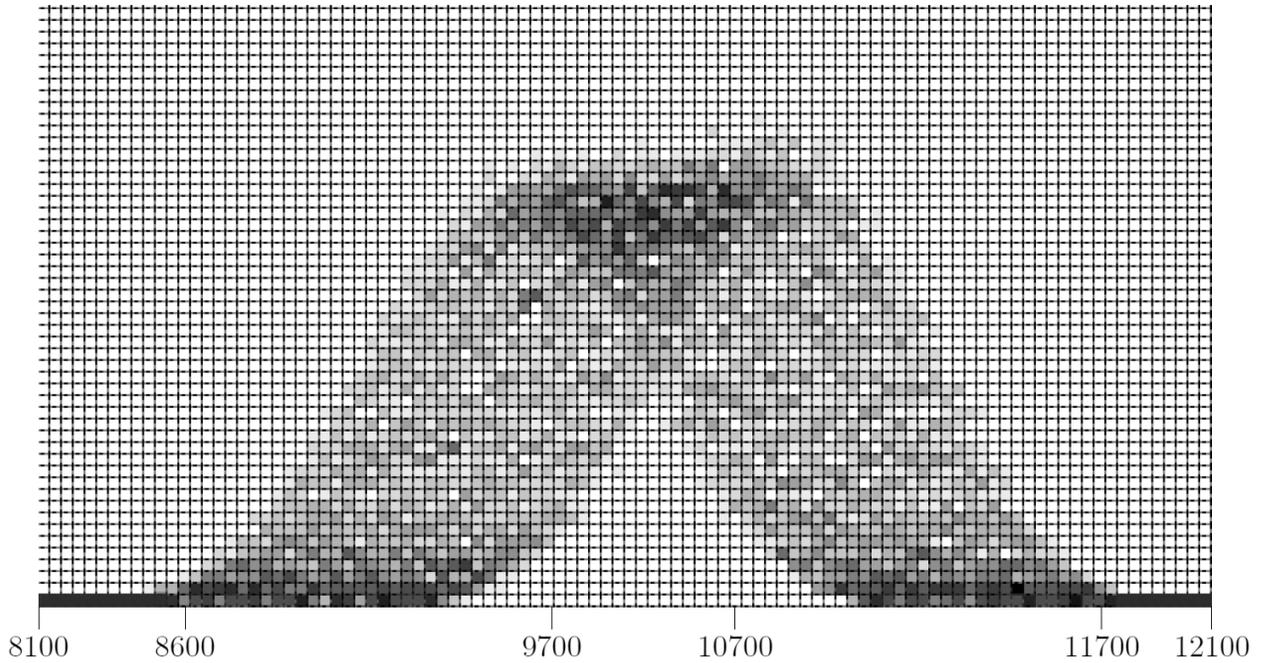


Рис. 8.4. Гистограмма второго порядка R

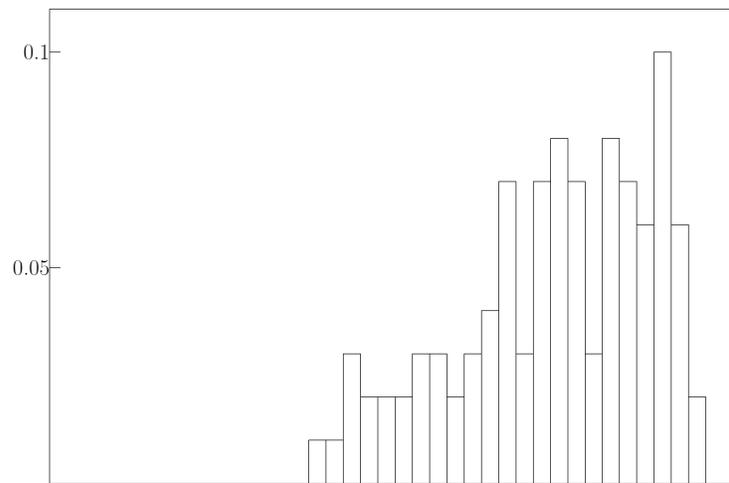


Рис. 8.5. Гистограмма P_{50}

вероятности. Если применить интервальный анализ, то получим, что значения R отличны от нуля на отрезке $[8\ 100, 12\ 100]$.

Гистограмму второго порядка определим сеткой $\{z_i = 8100 + hi, i = 0, 1, \dots, 100; h = 40\}$ и набором гистограмм $\{P_i, i = 1, 2, \dots, 100\}$. На каждом отрезке $[z_{i-1}, z_i]$ ГВП принимает гистограммное значение P_i , которое на рис. 8.4 представлено оттенками серого цвета. На рис. 8.5 приведен 50-й столбец гистограммы второго порядка P_{50} .

Из анализа гистограммы второго порядка для R следует, что наибо-

лее вероятные значения R лежат в интервале $[9700, 10700]$, значения R из интервалов $[8100, 8600]$ и $[11700, 12100]$ имеют практически нулевые вероятности.

8.4. Показатели надежности сложных объектов

Сложные системы состоят из более простых объектов (элементов). В зависимости от характера влияния надежности элементов на надежность системы в целом различают два типа соединений элементов — основное (последовательное) и параллельное. Под последовательным соединением с точки зрения надежности понимают такое, при котором отказ любого элемента приводит к отказу системы в целом. Под параллельным соединением понимают такое, при котором отказ системы наступает только при отказе всех ее элементов (отказ не наступает, если работоспособен хотя бы один элемент).

Вероятность безотказной работы $P(t)$ — вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ не возникает (*наработка* — это продолжительность или объем работы):

$$P(t) = P(T \geq t),$$

где T — случайное время работы объекта до отказа; t — заданная наработка.

Этот показатель обладает следующими свойствами:

$P(t) = 1$, т. е. до начала работы ($t = 0$) система являлась безусловно работоспособной;

$P(t)$ — невозрастающая функция времени;

$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$, т. е. объект не может сохранять свою работоспособность неограниченно долго.

Вероятность отказа $Q(t)$ — вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта возникает:

$$Q(t) = 1 - P(t).$$

Она характеризует вероятность того, что случайное время t работы объекта до отказа меньше заданного времени: $T \geq t$. Под T понимается непрерывная случайная величина, для которой существует плотность распределения наработки до отказа.

Интенсивность отказов — условная плотность вероятности возникновения отказа невозстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не возник:

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (8.1)$$

Интенсивность отказов показывает, какая часть элементов выходит из строя в единицу времени по отношению к среднему числу исправно работающих элементов.

Решая соотношение (8.1) как линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции безотказности, получаем

$$P(t) = e^{\int_0^t -\lambda(t)dt}. \quad (8.2)$$

В частном случае, когда $\lambda = \text{const}$, выражение (8.2) представляет собой экспоненциальный закон надежности. По этому закону вероятность безотказной работы элементов, обладающих интенсивностью отказов, убывает со временем по экспоненциальной кривой.

Из определения последовательного соединения элементов следует:

1. Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t).$$

2. Вероятность отказа системы

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n P_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - Q_i(t)).$$

3. Интенсивность отказов системы найдем из соотношения

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} = \prod_{i=1}^n P_i(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt},$$

откуда

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t).$$

В случае постоянной интенсивности отказов

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Из определения параллельного соединения элементов:

1. Вероятность отказа системы

$$Q(t) = \prod_{i=1}^n Q_i(t).$$

2. Вероятность безотказной работы системы

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i(t)) \approx 1 - (\lambda t)^n.$$

Рассмотрим техническое устройство, состоящее из n блоков, из них первые n_1 соединены последовательно и n_2 — параллельно.

Пусть испытания показали, что для каждого i -го блока интенсивность λ_i лежит в интервале $[p_i, q_i]$. Таким образом, результирующая надежность будет лежать в интервале

$$\begin{aligned} & [\exp(-\sum_{i=1}^{n_1} q_i t)(1 - \prod_{i=n_1+1}^n (1 - \exp(-q_i t))), \\ & \exp(-\sum_{i=1}^{n_1} p_i t)(1 - \prod_{i=n_1+1}^n (1 - \exp(-p_i t))]. \end{aligned} \quad (8.3)$$

В случае отсутствия информации о плотности вероятности λ_i ее можно принять равномерной.

В этом случае можно, используя ЧВА, посчитать гистограмму результирующего распределения. Носитель этого распределения будет совпадать с отрезком (9.2). Таким образом, используя построенные гистограммы можно оценить риски того, что вероятность безотказной работы лежит в интервале $[p_1, p_2]$.

Рассмотрим пример. Пусть имеем $n = 10$ блоков, $n_1 = 6$, $p_i = 0.0001$, $q_i = 0.0002$, $t = 10$. Тогда носитель плотности вероятности $[0.7374, 0.9044]$. Результирующая гистограмма имеет вид, показанная на рис. 8.6.

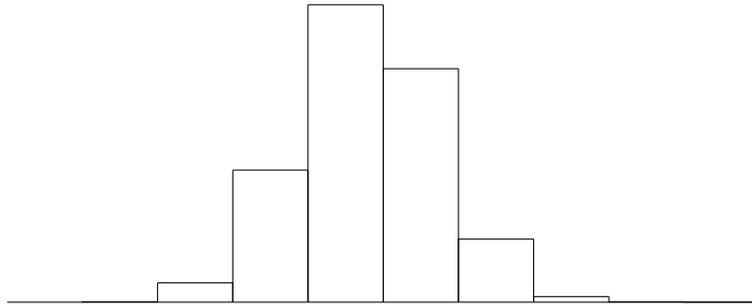


Рис. 8.6. Гистограмма вероятности безотказной работы

Гистограмма состоит из 10 столбцов, сетка для нее выбрана равномерная $x_i = 0.7374 + i * h$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$, $h = 0.0167$. Значения вероятностей попадания в интервал $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ равны соответственно 0.000, 0.001, 0.0206, 0.1776, 0.4079, 0.2997, 0.0841, 0.0086, 0.0005, 0.000.

Таким образом, можно существенно сократить носитель гистограммы до $[0.7875, 0.8545]$, отбросив несущественные вероятности.

Рассмотрим случай, когда для каждого блока известны для вероятностей P_i не только интервалы $[p_i, q_i]$, но и гистограммы плотности вероятности рис. 8.7:

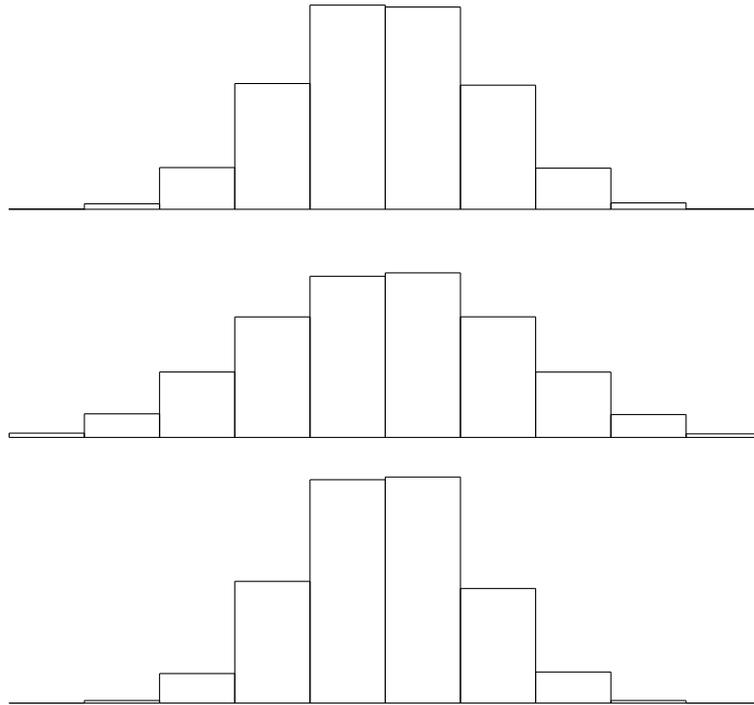


Рис. 8.7. Гистограммы вероятности безотказной работы блоков

В результате получаем гистограмму с носителем $[0.7374, 0.9044]$ рис. 8.8. Гистограмма состоит из 20 столбцов, сетка для нее выбрана равномерная $x_i = 0.7374 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, 20$, $h = 0.00835$.

На рис. 8.8 показана результирующая гистограммы вероятности безотказной работы. Как видно из анализа результатов расчетов эффективные вероятности сосредоточены на отрезке $[x_7, x_{13}]$, что существенно поднимает точность расчетов.

В главе рассмотрено использование численного вероятностного анализа для исследования систем в условиях как элиторной, так и эпистемической неопределенности. В первом случае функции плотности вероятности случайных переменных представляются в виде гистограмм, во вто-

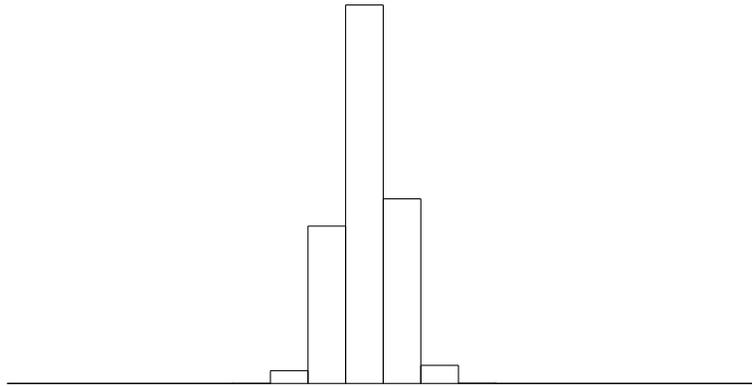


Рис. 8.8. Результирующая гистограмма вероятности безотказной работы

ром используются вероятности второго порядка. Для учета эпистемистической неопределенности предложено использовать гистограммы второго порядка. Численные примеры показали эффективность использования гистограммной арифметики для исследования систем.

Глава 9.

Технология информационной поддержки принятия инвестиционных решений

В главе рассматривается информационный процесс, сопровождающий решение задачи выбора проекта для вложения инвестиций. Проводится анализ финансово-экономической информации, на основе которой осуществляется оценка системы показателей, отражающих инвестиционную привлекательность проекта. Данный анализ показал, что оценка инвестиционных проектов представляет собой сложный процесс, в основе которого лежат определенные методики расчета финансово-экономических показателей привлекательности проекта на основе количественной и качественной информации, представленной в бизнес-плане. Оценка этих показателей осуществляется по определенным расчетным формулам и, как правило, без учета анализа неопределенностей, содержащихся во входной информации. Данные, включаемые в бизнес-план, представляют собой в большей степени усредненные значения показателей, которые в дальнейшем используются в расчетных формулах. Основной проблемой бизнес-планирования в настоящее время является прогноз существенных факторов внешней и внутренней экономической среды, и их влияние на ход реализации и результаты проекта. Данная задача осложняется тем, что параметры проекта не могут быть определены однозначно в условиях недостаточной информации и, как следствие, результаты реализации проекта могут значительно отличаться от ожидаемых.

9.1. Оценки рисков

При принятии решения о реализации проекта предприятию (при принятии решения о выдаче кредита банком или об оказании поддержки административными органами) необходимо оценивать возможные риски, который несет с собой реализация проекта с целью планирования мер по их предупреждению и минимизации и стоимостной оценки данных мероприятий. Расчетные методы, используемые планировщиками, не включают в себя современный математический аппарат, направленный на оценку вероятностных факторов по причине сложности их реализации. В итоге оценка рисков часто на практике ограничивается тремя составляющими:

1. Качественный анализ всех возможных рисков, с которыми может столкнуться предприятие в ходе реализации проекта.
2. Анализ безубыточности проекта, включающий определение точки безубыточности.
3. Анализ чувствительности финансовых результатов предприятия к изменению основных параметров проекта (цена реализации продукции, цена на сырье и материалы и т. д.) на момент выхода на полную мощность.

Приведем некоторые аналитические модели, которые используются для оценки инвестиционных проектов предприятия, производящего товары.

9.2. Расчет NPV и IRR

Приведем пример формул, которые используются для оценки инвестиционных проектов предприятия, производящего товары.

Это прежде всего оценка денежных потоков CF_z , далее чистый дисконтированный доход NPV и внутренняя норма доходности IRR .

$$\begin{aligned} CF_z = & \sum_i G_i P_i (1 - AV_{G_i}) - \sum_j E_j (1 - AV_{E_j}) \\ & - \sum_k S_k W_k T_{W_k} - \sum_p H_p (A_p + T_{H_p}) - \\ & - \sum_q T_q - \sum_n C_n R_n + Fin_z - Fout_z, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где G_i — количество продаж i -го товара; P_i — цена i -го товара; AV_{G_i} — налог на добавленную стоимость на i -ый товар; E_j — расходы j -го вида; AV_{E_j} — налог на добавленную стоимость на приобретаемые товары по j -му виду

расходов; S_k — численность персонала k -ой категории; W_k — средняя заработная плата работников k -ой категории; T_{Wk} — коэффициент отчислений во внебюджетные фонды по k -ой категории работников; H_p — основные фонды p -го вида; A_p — норма амортизации по p -му виду основных фондов; T_{Hp} — ставка налога, базой для расчета которого выступает p -ый вид основных фондов (налог на имущество); T_q — сумма q -го налога; C_l — сумма l -го кредита; R_l — процент по l -ому кредиту; TPr_z — ставка налога на прибыль в z -ом году; Fin_z — прочие операционные, финансовые и инвестиционные поступления средств; $Fout_z$ — прочие операционные, финансовые и инвестиционные выплаты средств.

NPV — это сумма приведенных к текущему моменту времени чистых денежных потоков по инвестиционному проекту. Данный показатель определяется по следующей формуле:

$$NPV = \sum_{z=1}^T \frac{CF_z}{(1+d)^z},$$

где T — расчетный срок инвестиционного проекта в годах; d — ставка дисконтирования. Инвестиционный проект признается эффективным в случае, если $NPV > 0$.

IRR — расчетная ставка дисконтирования, при которой чистый дисконтированный доход (NPV) равен нулю. IRR определяется из уравнения

$$\sum_{z=1}^T \frac{CF_z}{(1+IRR)^z} = 0.$$

Инвестиционный проект признается эффективным в случае если $IRR > d$.

Как правило, для оценки инвестиционных проектов необходимо рассчитывать показатели на несколько лет вперед. В условиях высокой рыночной неопределенности такие показатели, например, как G_i , P_i , имеют существенно стохастический характер. Однако при расчетах, как правило, используют только детерминированные оценки.

Такая методика расчета как на теоретическом, так и на практическом уровне не учитывает вероятностный характер входных и результирующих показателей инвестиционного проекта, делает невозможным управление проектом в ходе его реализации и соответственно затрудняет принятие эффективных управленческих решений.

Как было показано в [19], учет стохастических неопределенностей и использование численного вероятностного анализа позволяют существенно поднять качество оценки проектов.

Предлагаем алгоритм оценки показателей инвестиционного проекта на основе использования численного вероятностного анализа. Алгоритм включает следующие этапы.

Этап 1. Подготовка входной информации на основе анализа данных с целью выявления характера неопределенности и описания показателей, имеющих четко выраженный случайный характер.

Подготовка входной информации включает разработку системы входных и результирующих показателей, необходимых для оценки инвестиционного проекта, а также подготовку базы данных для работы. Подготовка базы данных включает не только традиционные шаги, такие как сбор, хранение информации, но и этапы, связанные с такими процедурами, как очистка, трансформация, агрегирование данных. Далее на основе статистического и экспертного анализа внутренней и внешней среды объекта исследования осуществляется процедура выявления характера неопределенности данных и описание показателей, имеющих устойчивый случайный характер.

Этап 2. Построение функции плотности вероятности. Для работы со случайными характеристиками важна информация о законе распределения и функции плотности вероятности случайной величины. Для большинства практических задач функция плотности распределения неизвестна. Поэтому актуальной является задача определения функции плотности вероятностей. Существуют различные методы построения функции плотности. Если класс, к которому принадлежит распределение (с точностью до численных значений конечного числа параметров), неизвестен, то для восстановления функции распределения или функции плотности вероятностей используют непараметрические методы [80].

Рассмотрим оценку совместной плотности вероятности переменных G , P (индекс для простоты опустим). Предположим, что для этих целей нам известны аналогичные реализации этих случайных величин для похожих проектов

$$(G_1, P_1), (G_2, P_2), \dots, (G_n, P_n). \quad (9.2)$$

В случае когда G , P — независимые случайные переменные, можно использовать *метод гистограмм*. Гистограмма H — кусочно-постоянная функция, определяется сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, N\}$, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ гистограмма принимает постоянное значение h_i .

Рассмотрим построение гистограммы H для случайной величины G . Обозначим n_j количество членов G_i выборки, попавших в интервал $[x_{j-1}, x_j]$.

Тогда

$$h_j = \frac{n_j}{n(x_j - x_{j-1})}.$$

В случае когда G и P — зависимые случайные переменные, оценим их совместную плотность вероятности кусочно-постоянной функцией H , которая принимает на каждом прямоугольнике $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ постоянное значение h_{ij} .

$$h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})},$$

где n_{ij} — количество членов выборки, попавших в прямоугольник $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Случай функциональной зависимости $P = f(G)$ рассмотрен в [74]

Неопределённость, которая является неотъемлемым атрибутом случайных событий, называют элиторной (aleatory) неопределённостью. Теория вероятностей предназначена для моделирования, оценки и оперирования именно элиторными неопределённостями. В свою очередь, неопределённость самих вероятностных оценок называют эпистемической неопределённостью (epistemic uncertainty). Эпистемическая неопределённость прямо связана с объёмом и достоверностью информации, на основании которой получают эти оценки. В случае полного отсутствия объективной исходной информации единственным способом получения интересующих нас вероятностных оценок является *экспертное оценивание* [97].

В тех случаях, когда нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины, задают оценки плотности распределения сверху и снизу. Такие оценки удобно аппроксимировать *интервальными гистограммами*. Гистограмму будем называть интервальной, если значения h_i принимают интервальные значения.

В случае эпистемической неопределённости наряду с интервальными гистограммами возможно использование *гистограмм второго порядка*, т. е. таких гистограмм, каждый столбец которой — гистограмма.

Решением этой задачи является обращение к опыту и интуиции экспертов. Объективные вероятности не отрицаются в своей основе. Расширение требований вызывает необходимость возврата к экспертным суждениям. Таким образом, возможно нахождение эпистемических вероятностей, источником которых является эксперт или группа экспертов.

Следовательно, наличие различных экспертных оценок плотностей вероятности случайных величин позволит построить для них гистограммы второго порядка, которые можно использовать для оценки NPV , IRR [74].

Этап 3. Для вычисления функции (9.1) будем использовать численный вероятностный анализ (ЧВА) [19]. Предметом ЧВА является решение различных задач со стохастическими неопределенностями в данных с использованием численных операций над плотностями вероятностей случайных величин и функций со случайными аргументами. Для построения функции плотности (9.1) будем использовать подход, в основе которого лежат такие понятия, как вероятностное и гистограммное расширения [19].

Этап 4. На основе построенной оценки плотности вероятности для функции (9.1) строятся аналогичные оценки для NPV и IRR [74]. Следовательно, зная оценки плотностей вероятности NPV и IRR в виде гистограмм, интервальных гистограмм или гистограмм второго порядка, можно оценить соответствующие риски. Так, если P_{NPV} — гистограмма плотности вероятности NPV , то

$$P_u = \int_{-\infty}^0 P_{NPV}(\xi) d\xi$$

— вероятность того, что инвестиционный проект окажется убыточным.

9.3. Пример использования

В качестве примера использования численных операций над гистограммными переменными рассмотрим задачу принятия решения об инвестировании проекта выпуска лекарственного препарата [81].

Компания рассматривает вопрос о приобретении для последующего производства патента нового лекарственного препарата. Стоимость патента составляет 3,4 млн. долл. Решение принимается на основе анализа дисконтированных денежных потоков NPV и IRR . Горизонт расчетов составляет три года. Стандартная финансовая модель приводится на табл. 9.1. Согласно прогнозам компания в первый, второй и третий год проекта продаст соответственно 802 тыс., 967 тыс. и 1 132 тыс. упаковок лекарства по цене 6, 6,05 и 6,10 долл. за упаковку.

Ставка налога на прибыль равна 32 %, ставка дисконтирования — 10 %, себестоимость составляет 55 %, а операционные издержки — 15 % от цены препарата. По результатам расчетов IRR проекта составляет 15 %, а NPV — 344,8 тыс. долл.

В данном случае мы имеем дело с высоким уровнем рыночной неопределенности, поэтому стандартная финансовая модель не может дать достаточных для принятия решения результатов. Для одновременного учета

неопределенности в цене, продажах, себестоимости и издержках применяется численный вероятностный анализ. Основные параметры финансовой модели — цена, объем продаж — моделируются как случайные переменные, имеющие вероятностное распределение. Численный вероятностный анализ позволит понять, какие факторы в наибольшей степени повлияют на финансовые результаты проекта. Для моделирования цены продажи (в первый, второй и третий год проекта отдельно) используется треугольное распределение. Треугольное распределение имеет три параметра — минимальное значение, максимальное значение и наиболее вероятное значение. Цена продажи в первый год имеет минимальное значение 5,90 долл., максимальное значение — 6,10 долл. и наиболее вероятное значение — 6,00 долл. Аналогично, цена продажи во второй год имеет треугольное распределение с параметрами 5,95; 6,05; 6,15 долл. Цена продажи на третий год имеет треугольное распределение с параметрами 6,00; 6,10; 6,20 долл. Объем продаж моделируется как случайная переменная с нормальным распределением. Объем продаж в первый год имеет нормальное распределение со средним значением (математическим ожиданием) 802 тыс. долл. и стандартным отклонением 25 тыс. долл. Аналогично, объем продаж во второй год имеет нормальное распределение с ожиданием 967 тыс. долл. и стандартным отклонением 30 тыс. долл. Наконец, объем продаж в третий год имеет нормальное распределение с ожиданием 1132 тыс. долл. и стандартным отклонением \$25 тыс. долл. Себестоимость (процент от продаж), как предполагается, имеет треугольное распределение с минимальным значением 50 %, максимальным значением 65 % и наиболее вероятным значением 55 %. Следует отметить, что в данном случае треугольное распределение имеет не симметричную форму, а немного скошено вправо, т. е. имеется большая вероятность того, что себестоимость будет завышена, а не занижена по сравнению с наиболее вероятным значением. Операционные издержки (процент от продаж) моделируются как нормальное распределение с ожиданием 15 % и стандартным отклонением 2 %.

На рис. 9.1, рис. 9.2 приведены гистограммы NPV и IRR для проекта. Из анализа гистограмм NPV и IRR видно, что вероятны как крайне негативные исходы, так и возможна значительная прибыль в сравнении со стандартным анализом. Приведенный пример показывает, что применение гистограммной арифметики в рамках технологии визуально-интерактивного моделирования (ВИМ) [71] позволяет ЛПР увидеть возможные варианты негативных исходов реализации проекта по сравнению со стандартным ана-

Таблица 9.1.

Стандартная финансовая модель

	Год 0	Год 1	Год 2	Год 3
Цена упаковки		\$6,00	\$6,05	\$6,10
Количество проданных, шт.		802000	967000	1132000
Выручка		\$4 812 000	\$5 850 350	\$6 905 200
Себестоимость		\$2 646 600	\$3 217 693	\$3 797 860
Валовая прибыль		\$2 165 400	\$2 632 658	\$3 107 340
Операционные издержки		\$324 810	\$394 899	\$466 101
Чистый доход до налогов		\$1 840 590	\$2 237 759	\$2 641 239
Налоги		\$588 989	\$716 083	\$845 196
Стартовые инвестиции	-\$3 400 000			
Чистый доход	-\$3 400 000	\$1 251 601	\$1 521 676	\$1 796 043

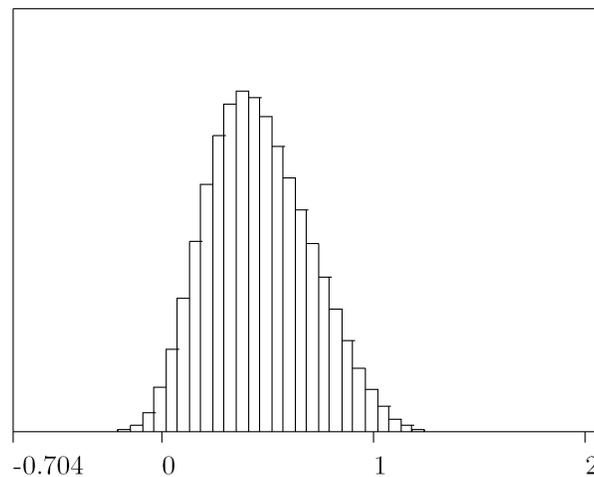


Рис. 9.1. Гистограмма NPV

лизом, который дает только положительный ответ.

Результаты проведенных исследований и численные примеры показывают возможность использования гистограмм второго порядка для представления различных типов информационной неопределенности и позволяют проводить численное моделирование на основе процедур распространения неопределенности для построения дополнительных оснований с целью снижения уровня неопределенности, присутствующей в исходной информации, в частности, для задач с неопределенными параметрами вероятностных характеристик входных данных и задач стохастической интерполяции.

Проведенные практические исследования позволяют сделать два основных вывода:

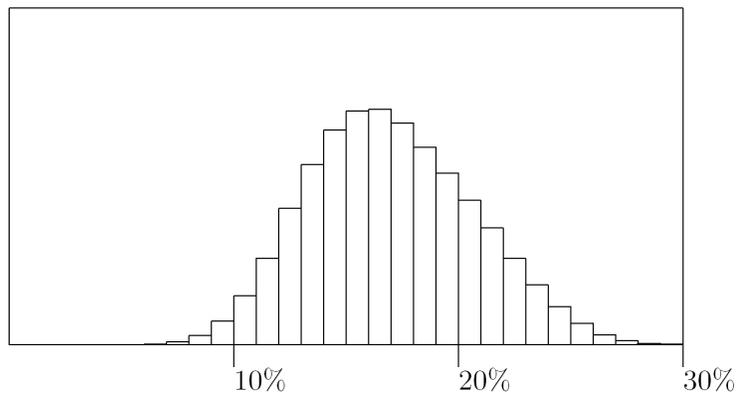


Рис. 9.2. Гистограмма IRR

- гистограммная арифметика может рассматриваться как численный метод вероятностного анализа, позволяющий работать с неопределенными данными в рамках различных практических приложений [70];
- гистограммная арифметика может использоваться как инструмент ВИМ-технологии, что значительно повышает качество анализа возможных вариантов решений и дает в руки ЛПР удобное средство для принятия решений.

Список литературы

1. Antipin A.S., Popova O.A. A Two-person game in mixed strategies as a model of training // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. Т. 45. № 9. P. 1511-1519.
2. Antipin A.S., Popova O.A. Equilibrium model of a credit market: statement of the problem and solution methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. Т. 49. № 3. P. 450-465.
3. Arroyo J., Maté C., Munoz San Roque, A. & Sarabia A. (2008). Exponential smoothing methods for histogram time series based on histogram arithmetic, Technical report, Universidad Complutense de Madrid.
4. Arroyo J., Maté C. Forecasting histogram time series with k-nearest neighbours methods // International Journal of Forecasting 25 (2009) P. 192–207.
5. Baudrit C. Representation et propagation de connaissances imprecises et incertaines : Application a l'évaluation des risques lies aux sites et aux sols pollues. Ph.D. dissertation, Universite Paul Sabatier, Toulouse III. 2005.
6. Beeck H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // Computing. 1972. Vol. 10. P. 231–244.
7. Berger J.O. Statistical decision theory and Bayesian analysis. New York: Springer, 1985.
8. Berleant D. Automatically verified reasoning with both intervals and probability density functions // Interval Computations, 1993. №2, P. 48–70.

9. Berleant D. Automatically verified arithmetic on probability distributions and intervals. In: Kearfott B, Kreinovich V, editors. Applications of interval computations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. P. 227–244.
10. Berleant D, Cheng H. A software tool for automatically verified operations on intervals and probability distributions // *Reliable Computing* 1998. №4. P. 71–82.
11. Berleant D, Goodman-Strauss C. Bounding the results of arithmetic operations on random variables of unknown dependency using intervals // *Reliable Computing* 1998. №4. P. 147–165.
12. Billard L., & Diday E. (2006). Symbolic data analysis: conceptual statistics and data mining. Chichester: Wiley & Sons.
13. Caprani, O., Madsen, K. Mean value forms in interval analysis // *Computing*. 1980. V. 25. P. 147-154.
14. Casti J.L. Searching for certainty. New York: William Morrow; 1990
15. Couso I., Moral S., Walley P. A survey of concepts of independence for imprecise probabilities // *Risk Decis Pol* 2000. Vol. 5. P. 165–181.
16. Gerasimov V.A., Dobronets B.S. and Shustrov M.Yu. Numerical operations of histogram arithmetic and their applications // *Automation and Remote Control*, (1991), Vol. 52(2). P. 208–212.
17. Dobronets B.S., Krantsevich A.M., Krantsevich N.M. Software implementation of numerical operations on random variables // *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, Т. 6:2 2013. С. 168–173
18. Dobronets B.S., Popova O.A. Numerical probabilistic analysis under aleatory and epistemic uncertainty. 15th GAMM-IMACS International Symposium SCAN'12, Book of Abstracts, Novosibirsk, Russia, Institute of Computational Technologies, 2012, P. 33–34.
19. Dobronets B.S., Popova O.A. Numerical probabilistic analysis under aleatory and epistemic uncertainty // *Reliable Computing*. Vol. 19, 2014. P. 274–289.
20. W. Li, J. Hym, Computer arithmetic for probability distribution variables, *Reliability Engineering and System Safety*, 85(2004).

21. Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming (2nd Edition). Springer-Verlag, Berlin, 2009.
22. Ferson S. What Monte Carlo Methods Cannot Do // Human and Ecological Risk Assessment. 1996. Vol. 2, No. 4. P. 990–1007.
23. Ferson S., Ginzburg L.R. Different methods are needed to propagate ignorance and variability // Reliab. Engng. Syst. Saf. 1996. Vol. 54. P. 133–144.
24. Absolute bounds on the mean of sum, product, max, and min: a probabilistic extension of interval arithmetic / S. Ferson, L. Ginzburg, V. Kreinovich, J. Lopez // Extended Abstracts of the 2002 SIAM Workshop on Validated Computing, Toronto Canada, 2002 May 23–25; 2002. P. 70–72.
<http://www.cs.utep.edu/vladik/2002/tr02-12b.pdf>.
25. Exact bounds on sample variance of interval data; 2002. Extended Abstracts of the 2002 SIAM Workshop on Validated Computing, Toronto, pp. 67–69.
A longer version may be found at <http://www.cs.utep.edu/vladik/2002/tr02-13c.pdf>.
26. Ferson S., Kreinovich V., Ginzburg L., Myers D., Sentz K. Constructing probability boxes and Dempster–Shafer structures. SAND2002-4015, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM; 2003.
27. Ferson S., Hajagos J.G. Arithmetic with uncertain numbers: rigorous and (often) best possible answers Reliability Engineering & System Safety Vol. 85., №1–3., 2004. P. 135–152.
28. Hailperin T. Boole’s logic and probability. Amsterdam: North-Holland, 1986.
29. Hoffman F.O., Hammonds J.S. Propagation of uncertainty in risk assessments: the need to distinguish between uncertainty due to lack of knowledge and uncertainty due to variability // Risk Anal 1994. Vol. 14. P. 707–712.
30. Li W., Hym J. Computer arithmetic for probability distribution variables. // Reliability Engineering and System Safety. 2004. Vol. 85.

31. Lindley D.V. Understanding Uncertainty. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006.
32. Mallows C. L. A note on asymptotic joint normality // The Annals of Mathematical Statistics. 1972. Vol. 43(2). P. 508–515.
33. Moore R.E. Interval analysis. Englewood Cliffs. N.J.:Prentice-Hall, 1966.
34. Moore R.E. Methods and Applications of Interval Analysis // SIAM, Philadelphia. 1979.
35. Moore R.E. Risk analysis without monte carlo methods. // Freiburger Intervall-Berichte.1984. Vol. 84(1). P. 1–48,
36. Mosleh A., Bier V.M. Uncertainty About Probability: A Reconciliation with the Subjectivist Viewpoint. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans, 1996. Vol. 26. №3. P. 303 – 310.
37. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
38. Neumaier A. Clouds, fuzzy sets and probability intervals. // Reliable Computing. 2004. Vol. 10. P.249–272.
39. Niederreiter H. Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. SIAM, Philadelphia, 1992.
40. Challenge problems: uncertainty in system response given uncertain parameters / W.L. Oberkampf, J.C. Helton, C.A. Joslyn, [et al.] // Reliab. Engng. Syst. Saf. 2004.
<http://www.sandia.gov/epistemic/prob.statement.12-01.pdf>.
41. Schjaer-Jacobsen H. Representation and calculation of economic uncertainties: Intervals, fuzzy numbers, and probabilities. *Int. J. Production Economics*, 78:91–98, 2002.
42. Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numerische Mathematik. 1964. Vol. 6. P. 405–409.
43. Pearl J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. Morgan Kaufmann Publishers, 1988. Inc., San Mateo, California. 550 p.

44. Popova O.A. Optimization problems with random data // Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ., 2013. Т. 6. № 4. С. 506–515.
45. Rubner, Y., Tomasi, C., & Guibas, L. J. (2000). The Earth Mover's Distance as a metric for image retrieval. *International Journal of Computer Vision*, 40(2), 99–121.
46. Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton, NJ: Princeton University Press; 1976.
47. Shapiro A., Dentcheva D., and Ruszczyński A. Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. SIAM, Philadelphia, 2009.
48. Skyrms B. Higher Order Degrees of Belief // *Prospects for Pragmatism: Essays in Memory of F.P. Ramsey*, D.H. Mellor, ed. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1980., P. 109–137.
49. Sobol I.M. A Primer for the Monte Carlo method. CRC Press, Boca Raton, 1994.
50. Swiler L.P. and Giunta A.A. Aleatory and epistemic uncertainty quantification for engineering applications. Technical Report SAND2007–2670C, Sandia National Laboratories, (2007).
51. Troffaes M.C.M. and Destercke S. Probability boxes on totally preordered spaces for multivariate modelling // *International Journal of Approximate Reasoning*
52. TUCKER W. T. AND FERSON S. Probability bounds analysis in environmental risk assessments. // Technical report, Applied Biomathematics, (2003).
53. Walley P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. London: Chapman and Hall, 1991.
54. Williamson R. and Downs T. Probabilistic arithmetic I: numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds // *International Journal of Approximate Reasoning*. 1990. Vol 4.
55. Yager R. Arithmetic and other operations on Dempster–Shafer structures. *Int J. Man–Mach Stud.* 1986; 25:357–66.
56. Yager R. Uncertainty modeling and decision support. // *Reliability Engineering & System Safety*. 2004. Vol. 85(1–3). P. 341–354.

57. Yager R. and Kreinovich V. Decision making under interval probabilities. // International Journal of Approximate Reasoning. 1999. Vol. 22. P. 195–215.
58. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
59. Антипин А.С., Попова О.А. О равновесной модели кредитного рынка: постановка задачи и методы решения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 465–481
60. Антипин А.С., Попова О.А. Игра двух лиц в смешанных стратегиях как модель обучения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 9. С. 1 566–1 574.
61. Ащепков Л. Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления Ин-т прикладной математики ДВО РАН. — М. : Наука, 2006. — 151 с.
62. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1988.— 552 с.
63. Венников В.А. Оптимизация режимов электростанций и энергосистем: Учебник для вузов / В.А. Венников, В.Г.Журавлев, Г.А. Филиппова. — М.: Энергоиздат, 1981 г. С. 464.
64. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. — 576 с.
65. Гельфан А.Н. Динамико-стохастическое моделирование формирования талого стока. Ин-т вод. проблем РАН. — М. : Наука, 2007. — 279 с.
66. Герасимов В. А., Добронев Б. С., Шустров М. Ю. Численные операции гистограммной арифметики и их применения // АиТ. Т. 1991, №2. С. 83–88.
67. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей — М.: Наука, 1988. — 448 с.
68. Добронев Б. С. Интервальная математика. — Красноярск: КГУ, 2004.
69. Добронев Б. С. Приближения множеств решений параметрическими множествами. // Журн. Сиб. федер. уни. Математика и физика. 2009. 2(3). С. 305–311.

70. Добронеец Б. С., Попова О. А. Применение гистограммной математики в задачах принятия экономических решений // Тр. IX междунар. конф. по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий — Красноярск: КГТЭН; СФУ, 2010. С. 127–130
71. Добронеец Б. С., Попова О. А. Гистограммная арифметика для визуально-интерактивного моделирования в задачах принятия экономических решений // Актуальные проблемы анализа и построения информационных систем и процессов: сб. ст. Междунар. науч.-техн. конф.— Таганрог: Изд. ЮФУ, 2010. С. 53–57.
72. Добронеец Б.С., Попова О.А. Гистограммные временные ряды // Тр. X междунар. конф. по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий — Красноярск: КГТЭН; СФУ, 2011. С. 130–133.
73. Добронеец Б.С., Попова О.А. Численный вероятностный анализ и вероятностные расширения // Тр. XIV Междунар. конф. по эвентологической математике и смежным вопросам — Красноярск, 2011.
74. Добронеец Б.С., Попова О.А. Численные операции над случайными величинами и их приложения // Журн. Сиб. федер. ун. Математика и физика. 2011. Т. 4. № 2. С. 229–239.
75. Добронеец Б.С., Попова О.А. Элементы численного вероятностного анализа // Вест. Сиб. гос. аэрокосм. ун. им. акад. М.Ф. Решетнева. 2012. № 2. С. 19–23.
76. Добронеец Б.С., Попова О.А. Численный вероятностный анализ для исследования систем в условиях неопределенности // Вест. Томского гос. ун. — Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4. С. 39–46.
77. Добронеец Б.С., Попова О.А. Гистограммный подход к представлению и обработке данных космического и наземного мониторинга // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 6 (155). С. 14–22.
78. Добронеец Б.С., Попова О.А. Представление и обработка неопределенности на основе гистограммных функций распределения и p-boxes // Информатизация и связь. 2014. № 2. С. 23–26.
79. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

80. Крянев А. В., Лукин Г. В. Математические методы обработки неопределенных данных. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 216 с.
81. Лукашов А. В. Метод Монте-Карло для финансовых аналитиков: краткий путеводитель // Управление корпоративными финансами. 2007. Т. 01 (19) С. 22–39.
82. Орлов А.И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. 672 с.
83. Перепелица В. А., Тебуева Ф. Б. Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных — М.: Изд. «Академия Естествознания», 2007. — 151 с.
84. Попова О.А. Технология извлечения и визуализации знаний на основе численного вероятностного анализа неопределенных данных // Информатизация и связь. 2013. № 2. С. 63–66.
85. Попова О.А. Задачи оптимизации со случайными данными // Журн. Сиб. федер. ун. Математика и физика. 2013. Т. 6. № 4. С. 506–515.
86. Попова О.А. Задача линейного программирования со случайными входными данными // Вестн. ВСГУТУ. 2013. № 2 (41). С. 19–23.
87. Попова О.А. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений со случайными коэффициентами // Вестн. ВСГУТУ. 2013. № 2 (41). С. 5–11.
88. Попова О.А. Численный вероятностный подход к решению оптимизационных задач со случайными данными // Информатизация и связь, № 5. 2013. С. 60–66.
89. Попова О.А. Гистограммный информационно-аналитический подход к представлению и прогнозированию временных рядов. // Информатизация и связь. 2014. № 2. С. 43–47.
90. Попова О.А. Гистограммы второго порядка для численного моделирования в задачах с информационной неопределенностью // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 6 (155). С. 6-14.
91. Попова О.А., Фёдоров М.С. Применение равновесного подхода к разработке модели принятия кредитных решений на основе согласования

- интересов // Системы управления и информационные технологии. 2010. Т. 40. № 2. С. 35–40.
92. Попова О. А. Першина Е. Л., Чуканов С. Н. Интеллектуальные системы поддержки принятия решений: комплексы программ, модели, методы, приложения. [монография] Сиб. гос. автомобильно-дорож. акад. Омск: СибАДИ. 2010.
 93. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973. — 312 с.
 94. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика. — Томск. ТГУ, 1976. С. 294.
 95. Трахтенгерц Э. А. Неопределенность в математических моделях компьютерной оценки решений. — М., ИПУ, 1998
 96. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. Изд. 3-е, перераб. и доп./ под ред. В. Э. Фигурнова — М.: ИНФРА-М, 2002. 528 с.
 97. Ужга-Ребров О. И. Управление неопределенностями. Ч. 1. Современные концепции и приложения теории вероятностей. Rēzekne: RA Izdevniecība, 2004. 292 с.
 98. Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. — М.: Ижевск: НИЦ «РХД», 2008. 288 с.
 99. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия: Пер. с англ. — М., Мир, 1993. — 349 с.
 100. Цветков Е. В. Оптимальные режимы гидроэлектростанций в энергетических системах / Е. В. Цветков, Т.М. Алябышева, Л.Г. Парфенов; — М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 304.

Научное издание

Добронец Борис Станиславович

Попова Ольга Аркадьевна

**ЧИСЛЕННЫЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ
НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ДАННЫХ**

Компьютерная верстка *Б.С. Добронец*

Подписано в печать 27.03.2015. Печать плоская. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,5. Тираж 500 экз. Заказ № 2070

Издательский центр

Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел./факс (391) 206-21-49, e-mail: rio.bik@mail.ru

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел./факс (391) 206-26-49; тел. (391) 206-26-67
E-mail: print_sfu@mail.ru; <http://bik.sfu-kras.ru>

**В Издательском центре
Библиотечно-издательского комплекса СФУ
вам быстро и качественно выполнят следующие виды
издательских работ:**

- редактирование**
- корректура**
- художественное оформление**
- компьютерная верстка**

**Наш адрес:
660041, г. Красноярск
пр. Свободный, 82а, к. 0108
Тел./факс (391) 206-26-67 – отдел договоров**