

COURS DE THEORIE DES RAIS

Véronique FARRA

Département de Sismologie

Institut de Physique du Globe de Paris

4 Place Jussieu, BP89

F75252 Paris cedex 05

SOMMAIRE

- I. Equations des rais
- II. Approche variationnelle- introduction méthodes hamiltoniennes
- III. Théorie des rais paraxiaux
- IV. Présence de discontinuités
- V. Calcul de l'amplitude
- VI. Expression du signal donnée par la théorie des rais (Retour à l'élasticité)
- VII. Validité de la théorie des rais - Introduction du volume de Fresnel

INTRODUCTION

Nous nous intéresserons dans ce cours au calcul des sismogrammes synthétiques dans des milieux complexes au moyen des méthodes asymptotiques. Je parlerai essentiellement de la théorie des rais.

Depuis une vingtaine d'années, les sismogrammes synthétiques ont été utilisés de façon routinière pour interpréter les données sismiques et sismologiques.

Il y a en gros trois catégories de méthodes pour calculer les sismogrammes synthétiques:

- Les méthodes numériques calculant dans l'espace temps (Différences finies, éléments finis) qui sont des méthodes chères, dont les résultats sont difficiles à interpréter et possédant des problèmes de dispersion numérique.

- Les méthodes spectrales (réflectivité, nombre d'onde discret, etc) qui sont valables pour les milieux stratifiés verticalement.

- Les méthodes asymptotiques à haute fréquence (théorie des rais et ses extensions, WKBJ, Maslov, Faisceaux gaussiens, etc) qui ont l'intérêt de permettre l'étude de milieux latéralement hétérogènes et d'interpréter physiquement les résultats. Le problème consiste dans la limite de validité de ces méthodes.

Les ondes de volume peuvent être modélisées de façon remarquable par la théorie des rais. La plupart des ondes de volume se propagent avec peu de dispersion et de distorsion et les effets non obtenus par la théorie des rais ne sont importants que dans des régions limitées spatialement. Les modèles classiques de terre de Jeffreys et Bullen et de Gutenberg furent obtenus en utilisant essentiellement la théorie des rais. De même la plupart de l'interprétation pétrolière est basée sur des concepts tirés de la théorie des rais. La théorie des rais est d'autre part utilisée en tomographie (réflexion et transmission), pour la localisation des séismes et des explosions dans les mines. L'interprétation des sismogrammes obtenus en milieu complexe utilise les concepts tirés de la théorie des rais. De même, la théorie des ondes de surface peut aussi être développée par une méthode proche de la théorie des rais.

Pour des raisons de simplicité, je développerai la théorie des rais pour l'équation acoustique. Les développements complets pour les ondes élastiques pourront être trouvés dans Cerveny et al (1977).

EQUATIONS DES RAIS

INTRODUCTION DES EQUATIONS

Introduisons l'équation acoustique:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -F(t, \mathbf{x}) \quad (I.1)$$

où $\Phi(t, \mathbf{x})$ décrit la pression, $F(\mathbf{x}, t)$ est la source dont le support est localisé dans l'espace et $c(\mathbf{x})$ est la vitesse des ondes acoustiques. Dans le domaine fréquentiel, on obtient l'équation d'Helmoltz, soit:

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\Phi} = 0 \quad (I.2)$$

où $\hat{\Phi}(\omega, \mathbf{x})$ est la transformée de Fourier en temps de $\Phi(t, \mathbf{x})$. Nous utiliserons la convention suivante pour la transformée de Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (I.3)$$

La solution de l'équation (I.2) est généralement non analytique quand la vitesse $c(\mathbf{x})$ est fonction de la position \mathbf{x} . On introduit l'ansatz de la théorie des rais qui consiste à chercher la solution sous la forme

$$\hat{\Phi}(\omega, \mathbf{x}) = \hat{f}(\omega) A(\omega, \mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad (I.4)$$

où $\hat{f}(\omega)$ décrit la transformée de Fourier de la forme temporelle de la source, $A(\omega, \mathbf{x})$ est l'amplitude et $T(\mathbf{x})$ est la phase qui décrit la propagation.

L'approximation asymptotique à haute fréquence consiste à chercher $A(\omega, \mathbf{x})$ sous la forme:

$$A(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(-i\omega)^j} \quad (I.5)$$

Ce qui consiste à séparer les variables d'espace et ω . En insérant les expressions (I.4) et (I.5) dans l'équation (I.2) et en regroupant les termes de même degré en ω , on obtient les expressions suivantes:

-Le terme en ω^2 donne l'équation dite Eikonal:

$$(\nabla T)^2 = c^{-2} \quad (I.6)$$

- Le terme en ω donne l'équation de transport:

$$2\nabla A_0 \cdot \nabla T + A_0 \nabla^2 T = 0 \quad (I.7)$$

Les autres termes du développement en série donnent les termes d'ordre supérieur, soient

$$2\nabla A_i \cdot \nabla T + A_i \nabla^2 T = \nabla^2 A_{i-1}$$

En pratique la théorie des rais arrête le développement à l'ordre zéro, soit

$$\widehat{\Phi}(\omega, \mathbf{x}) = \widehat{f}(\omega) A_0(\mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad (I.8)$$

et nécessite de résoudre les équations (I.6) et (I.7). A haute fréquence, l'onde se propage sans distorsion avec le temps de propagation $T(\mathbf{x})$ et une amplitude $A(\mathbf{x})$. Pour des fréquences finies, les autres termes du développement permettent une distorsion du pulse. En général, on les néglige du fait de la difficulté de les calculer.

Exemple 1:

La solution 3D pour un point source dans un milieu homogène est

$$\widehat{\Phi}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R} e^{i\omega \frac{R}{c_0}} \quad (I.9)$$

où R est la distance de l'observateur à la source, c_0 est la vitesse du milieu. Cette expression est bien de la forme recherchée par la théorie des rais.

Dans le domaine temporel, l'expression du champ est:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - \frac{R}{c_0}\right) \quad (I.10)$$

Physiquement, l'onde se propage à la vitesse constante c_0 sans se déformer. Seule, l'amplitude varie avec la courbure du front d'onde.

Exemple 2:

La solution exacte de l'équation acoustique pour une source ligne dans un milieu homogène est:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - \frac{r}{c_0})}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}}} \quad (I.11)$$

où r est la distance du récepteur à la source ligne. L'expression dans l'espace des fréquences est

$$\Phi(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i}{4} H_0^1\left(\frac{\omega r}{c_0}\right) \quad (I.12)$$

où H_0^1 est la fonction de Hankel d'ordre zéro. L'expression asymptotique de H_0^1 pour les grandes valeurs permet d'écrire à haute fréquence:

$$\Phi(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2c_0}{\pi\omega r}} e^{i(\omega \frac{r}{c_0} - \frac{\pi}{4})}$$

Cette expression peut être écrite sous une forme ressemblant à l'expression (I.4):

$$\Phi(\omega, \mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right] \sqrt{\frac{c_0}{2r}} e^{i\omega \frac{r}{c_0}} \quad (I.13)$$

La forme temporelle de cette expression asymptotique est

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_0}{2r}} \frac{H(t - \frac{r}{c_0})}{\sqrt{t - \frac{r}{c_0}}} \quad (I.14)$$

La comparaison de la solution exacte (I.11) et de la solution asymptotique à haute fréquence (I.14) montre que celle-ci est valable au voisinage du temps d'arrivée du front d'onde. En effet au voisinage du temps d'arrivée, $t = \frac{r}{c_0}$, on a effectivement:

$$\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}} = \sqrt{\frac{2r}{c_0}} \sqrt{t - \frac{r}{c_0}}$$

et l'expression haute fréquence est correcte.

Bref aperçu sur le cas élastique

L'équation des ondes dans un milieu élastique est beaucoup plus compliquée que dans un milieu acoustique. Néanmoins la même technique peut être utilisée pour obtenir une solution asymptotique. Dans un milieu élastique,

deux types d'onde se propagent, les ondes P et S . Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement vérifiant l'équation des ondes. La théorie des rais recherche la solution sous la forme:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{f}(\omega) \mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{x})}$$

Par comparaison avec l'équation (I.4), $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x})$ est le vecteur amplitude.

L'approximation asymptotique à haute fréquence consiste à chercher $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x})$ sous la forme:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_j(\mathbf{x})}{(-i\omega)^j}$$

En insérant cette forme de la solution dans l'équation des ondes, on obtient un système d'équations:

$$\begin{aligned} [(\nabla T)^2 - \frac{1}{\alpha^2}] \mathbf{A}_0 \cdot \nabla T &= 0 \\ [(\nabla T)^2 - \frac{1}{\beta^2}] \mathbf{A}_0 \times \nabla T &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

où $\alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ et $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$ sont les vitesses des ondes P et S , respectivement. λ et μ sont les paramètres de Lamé et ρ est la densité.

Ce système a 2 solutions, l'une correspondant à l'onde P , soit:

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \mathbf{A}_0 \times \nabla T = \mathbf{o},$$

l'autre correspondant à l'onde S :

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{\beta^2}, \quad \mathbf{A}_0 \cdot \nabla T = 0.$$

Le déplacement dû à l'onde P est polarisé parallèlement à la direction de propagation du front d'onde P ; le déplacement dû à l'onde S est dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation du front d'onde S . Les équations de transport correspondantes sont plus compliquées que celles obtenues dans le cas acoustique. Cependant la solution obtenue est en fait très semblable.

Interprétation physique de l'eikonal

L'équation eikonal:

$$(\nabla T)^2 = c^{-2}$$

est valable en acoustique comme en élastique. Dans le cas élastique, la vitesse c est égale à la vitesse de l'onde P ou de l'onde S .

Les surfaces $T(\mathbf{x}) = t$ sont les surfaces d'égale phase et sont appelées front d'onde, quel que soit le type de source. Connaissant le front d'onde à l'instant t , on peut calculer le front d'onde à l'instant $t + dt$, connaissant ∇T en tout point du front d'onde (utilisation du principe de Huygens). Dans la pratique on n'intègre pas tout à fait l'eikonal de cette façon là. De plus, nous ne sommes pas forcément intéressés à connaître $T(\mathbf{x})$ en tout point. Nous préférons calculer les courbes perpendiculaires en tout point aux fronts d'onde. Ces courbes sont appelées rais (Figure). La tangente au rai est définie par son vecteur unitaire:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad (I.15)$$

où s est l'abscisse curviligne mesurée le long du rai. Par définition, \mathbf{t} est parallèle à ∇T , soit:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\nabla T$$

Introduisons le vecteur lenteur:

$$\mathbf{p} = \nabla T \quad (I.16)$$

On obtient la première équation des rais:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\mathbf{p} \quad (I.17)$$

Une autre équation est nécessaire pour définir entièrement un rai. On a:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\nabla T}{ds} = \nabla \frac{dT}{ds}$$

Compte tenu du fait que

$$\frac{dT}{ds} = \mathbf{t} \cdot \nabla T = \frac{1}{c} \quad (I.18)$$

on obtient la deuxième équation des rais:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \frac{1}{c} \quad (I.19)$$

L'eikonal (I.6) nous donne d'autre part:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{c^2} = u^2 \quad (I.20)$$

où nous avons noté u la lenteur du milieu définie comme l'inverse de la vitesse. L'intégration des équations (I.17) et (I.19) permet d'obtenir les rais et d'intégrer l'eikonal le long des rais en utilisant l'équation (I.18).

Le rai est défini entièrement par son vecteur canonique $\mathbf{y}(s) = (\mathbf{x}(s), \mathbf{p}(s))$. La position du rai $\mathbf{x}(s)$ à l'abscisse s vérifie une équation différentielle du deuxième ordre:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla \frac{1}{c}$$

L'introduction du vecteur lenteur $\mathbf{p}(s)$ permet de diminuer l'ordre des équations différentielles mais augmente l'espace des paramètres. On peut remarquer que les équations des rais ressemblent aux équations d'Hamilton pour une particule dans un champ de potentiel.

Géométrie des rais:

La première équation des rais (I.17) est une équation de normalisation. La deuxième équation nous permet d'obtenir la courbure du rai et sa torsion. En effet, introduisons le repère de Frénet $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ le long du rai (Figure). Le vecteur \mathbf{t} est tangent au rai, le vecteur \mathbf{n} est le vecteur normal à la courbe dans le plan principal qui contient localement cette courbe. Le vecteur \mathbf{b} est orthogonal au plan principal. La courbure locale K de la courbe est définie par l'équation suivante:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = K \mathbf{n}$$

Des équations des rais (I.17) et (I.19), on en déduit:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds}(c\mathbf{p}) = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \mathbf{t} - \nabla c \right)$$

Compte tenu de la définition du vecteur normal \mathbf{n} , on en déduit que le plan principal du rai (défini par les 2

vecteurs \mathbf{t} et \mathbf{n}) contient le vecteur ∇c . Donc,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n} \mathbf{n}$$

et

$$K = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n} \quad (I.21)$$

Le rai a donc tendance à se tourner dans la direction opposée au gradient de vitesse normal.

Notant \mathbf{b} le vecteur binormal au rai, la torsion $T(s)$ du rai est définie par:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -K\mathbf{t} + T\mathbf{b}$$

Les expressions précédentes nous permettent d'écrire:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{cK} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \mathbf{t} - \nabla c \right)$$

On en déduit

$$T(s) = -\frac{1}{cK} \frac{d\nabla c}{ds} \cdot \mathbf{b} \quad (I.22)$$

La torsion des rais est nulle pour des courbes planes, ce qui est le cas dans les milieux homogènes, stratifiés verticalement ou les milieux à symétrie sphérique, dans les problèmes à 2 dimensions.

Retour aux équations des rais:

Nous sommes passés d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre (I.6) à un système d'équations différentielles qui ne sont pas indépendantes. On a en effet:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \frac{1}{c} \quad (I.23)$$

et

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{1}{c} \quad (I.24)$$

Pour résoudre ce problème, on peut soit laisser tomber une des équations du système différentiel soit intégrer le système et vérifier simultanément la précision du calcul en testant le résidu $\|\mathbf{p}\| - \frac{1}{c}$.

Comment intégrer ces équations dans la pratique? On peut les intégrer numériquement (Runge Kutta, etc) ou bien discrétiser le milieu en éléments dans lesquels les équations sont intégrables analytiquement.

Exemples de milieux dans lesquels les équations des rais sont intégrables:

- Milieu homogène $c(\mathbf{x}) = c_0$

Les rais correspondants sont des droites et ont pour expression:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(s_0)$$

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + c_0 \mathbf{p}(s_0)(s - s_0)$$

- Milieu à gradient constant de la vitesse $c(\mathbf{x}) = c_0 + \Gamma z$:

L'intégration des équations (I.23) donne:

$$p_x(s) = p_x(s_0) , p_y(s) = p_y(s_0)$$

où p_x, p_y sont les composantes horizontales du vecteur lenteur. La projection horizontale du vecteur lenteur est donc conservée le long du rai. Tout rai est donc contenu dans un plan vertical. Plaçons nous dans ce plan vertical en prenant pour axe oy l'axe perpendiculaire à ce plan. Nous avons donc dans ce système de coordonnées:

$$p_x(s) = p_x(s_0) , p_y(s) = 0$$

Introduisons l'angle θ du vecteur lenteur \mathbf{p} avec la verticale. Alors

$$p_x(s) = \frac{\sin\theta(s)}{c} , p_z(s) = \frac{\cos\theta(s)}{c}$$

La courbure du rai K donnée par l'équation (I.22)

$$K = \frac{1}{c} \frac{dc}{dz} \sin\theta = \Gamma p_x(s) = \Gamma p_x(s_0)$$

est constante le long du rai. Tout rai est donc un arc de cercle de rayon $R = (\Gamma p_x)^{-1}$. Les centres de ces cercles sont situés sur une ligne horizontale en $z_c = -\frac{c_0}{\Gamma}$. Il est donc très facile de tracer un rai dans un milieu à gradient.

En utilisant l'angle θ et l'expression $\frac{d\theta}{ds} = K = \frac{1}{R}$, on obtient l'expression analytique d'un rai défini par l'angle initial θ_0 en $z = z_0$:

$$x(\theta) = x(\theta_0) + R(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$z(\theta) = z(\theta_0) + R(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

Le temps de parcours est donné par:

$$T(\theta) = T(\theta_0) + \frac{1}{\Gamma} \log\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right)$$

- Milieu à gradient constant de la lenteur au carré

Vitesse du milieu variant dans une seule direction:

De même que dans un milieu à gradient constant, il est facile de montrer que le rai est contenu dans un plan vertical. Dans ce plan vertical, les équations des rais s'écrivent:

$$\frac{dx}{ds} = cp_x, \quad \frac{dz}{ds} = cp_z, \tag{I.25}$$

$$p_x = p_x(s_0), \quad p_z = \pm \sqrt{u^2(z) - p_x^2}$$

où $u(z) = \frac{1}{c(z)}$ est la lenteur et le signe de p_z dépend de la direction de propagation du rai (montante ou descendante). On a donc:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p_x}{p_z} = \pm \frac{p_x}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} \tag{I.26}$$

qui s'intègre facilement sous la forme:

$$X(z, p_x) = X(z_0, p_x) + \int_{z_0}^z \frac{p_x}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} dz \tag{I.27}$$

où $X(z, p_x)$ est la distance horizontale parcourue par le rai caractérisé par son paramètre p_x , à la profondeur z . A la profondeur z_p , telle que $p_x = u(z_p)$, le rai présente un point tournant. L'intégrand dans (I.27) présente une singularité cependant intégrable. Au delà de ce point tournant, on obtient:

$$X(z, p_x) = X(z_0, p_x) + \int_{z_0}^{z_p} \frac{p_x}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} dz + \int_z^{z_p} \frac{p_x}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} dz \tag{I.27b}$$

On peut aussi obtenir le temps de parcours le long du rai:

$$T(z, p_x) = T(z_0, p_x) + \int_{z_0}^z \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} dz \quad (I.28)$$

et au delà du point tournant:

$$T(z, p_x) = T(z_0, p_x) + \int_{z_0}^{z_p} \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} dz + \int_z^{z_p} \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p_x^2}} dz \quad (I.28b)$$

Ces intégrales doivent être intégrées numériquement et ont été très utilisées en géophysique fondamentale pour déterminer la structure de la terre. On peut remarquer (Figure) que dans un milieu où la vitesse ne dépend que d'une seule variable, les rais peuvent présenter des figures très compliquées comprenant des caustiques ou des zones d'ombre.

Dans le cas où la vitesse ne dépend que d'une seule variable, on a donc trouvé une représentation explicite des expressions des rais qui a une forme intégrable. On notera pour la suite du cours qu'une représentation explicite des rais est une représentation pour laquelle deux des composantes de position (ici (x, y)) sont fonctions d'une troisième (ici z).

Vitesse du milieu où la vitesse varie suivant le rayon de la Terre $c(\mathbf{r})$:

Les équations des rais sont:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= c\mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \nabla \frac{1}{c} \end{aligned} \quad (I.29)$$

Introduisons les composantes de $\mathbf{p} = p_r \mathbf{e}_r + p_\theta \mathbf{e}_\theta + p_\phi \mathbf{e}_\phi$. On peut montrer que:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (I.30)$$

Le rai reste donc dans un plan passant par la source et le centre de la Terre. On peut toujours s'assurer que ce plan définisse un méridien et imposer $p_{\phi_0} = 0$. L'équation (I.30) a pour conséquence: $rp_\theta = Cte = r_0 p_{\theta_0}$. D'autre part,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dr}{ds} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{ds} \mathbf{e}_\theta$$

La première équation de (I.29) nous permet d'écrire:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r} \frac{p_\theta}{p_r}$$

équation qu'on intègre facilement sous la forme:

$$\theta(r, p_{\theta_0}) - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{1}{r} \frac{p_\theta}{\sqrt{u^2 - p_\theta^2}} dr \quad (I.31)$$

où nous avons posé $u = \frac{1}{c}$ et pris en compte l'eikonal, c'est à dire la relation $p_r^2 + p_\theta^2 = u^2$. L'expression du temps de parcours est donnée par:

$$T(r, p_{\theta_0}) - T_0 = \int_{r_0}^r \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - p_\theta^2}} dr \quad (I.32)$$

Nous avons donc trouvé une représentation explicite des rais sous une forme intégrable dans le cas d'un milieu où la vitesse ne dépend que de r .

En faisant le changement de variable:

$$\begin{aligned} \hat{c}(z) &= c(r) \frac{r_0}{r} \\ \Delta &= r_0(\theta - \theta_0) \\ z &= r_0 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \\ p_x &= \frac{r}{r_0} p_\theta \end{aligned}$$

On obtient

$$\Delta(z, p_x) = \int_{z_0}^z \frac{p_x}{\sqrt{\hat{u}^2 - p_x^2}} dz$$

où $\hat{u}(z) = \frac{1}{\hat{c}(z)}$. De même,

$$T(z, p_x) = T(z_0, p_x) + \int_{z_0}^z \frac{\hat{u}^2}{\sqrt{\hat{u}^2 - p_x^2}} dz$$

Ces expressions sont les mêmes que celles obtenues dans le milieu $\hat{c}(z)$ équivalent.

Intégration des équations des rais dans le cas général

Dans le cas général où le milieu possède des variations latérales, deux approches peuvent être utilisées:

- On peut décomposer le milieu en éléments finis dans lesquels les équations des rais sont intégrables analytiquement. Des éléments très utilisés sont les triangles (2D) et les tétraèdres (3D). Cette méthode permet de tracer les rais rapidement mais a l'inconvénient de créer des artefacts numériques liés à la discrétisation du milieu (caustiques et zones d'ombre très petites).

- Les équations des rais peuvent d'autre part être intégrées numériquement en utilisant les méthodes classiques (Runge Kutta, méthode prédicteur correcteur). Dans ce cas, le milieu est défini par interpolation au moyen de fonctions splines.

Conditions initiales- conditions aux limites

Pour intégrer les équations des rais, il est nécessaire de connaître les conditions initiales $(\mathbf{x}(s_0), \mathbf{p}(s_0))$. Le problème avec conditions initiales connues est simple à résoudre. En général, on a un problème avec conditions aux limites: Les positions de la source et du récepteur sont connues mais pas la direction du rai à la source; on cherche les rais orthogonaux à une surface donnée et passant par des récepteurs donnés, ... Ce problème est beaucoup plus compliqué à résoudre car il est non-linéaire et le nombre de solutions est inconnu. En effet, le problème peut ne pas avoir de solution (zone d'ombre) ou plusieurs solutions (zone de triplications).

II. APPROCHE VARIATIONNELLE

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu les équations des rais par une interprétation géométrique de l'Eikonal. Il existe en fait 2 autres approches pour obtenir les équations des rais:

- La méthode des caractéristiques (Courant et Hilbert)
- L'approche variationnelle à partir du principe de Fermat.

II.1 Approche variationnelle

Parmi les trajectoires reliant 2 points \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_1 , un rai est une trajectoire qui rend extrémal le temps de parcours mesuré le long de cette courbe. On définit le temps de parcours le long d'une courbe $\mathbf{x}(s)$ par:

$$\Theta(\mathbf{x}, s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} u(\mathbf{x}(s)) ds \quad (II.1)$$

où s est l'abscisse curviligne. Le principe de Fermat dit que les rais sont les trajectoires qui rendent extremum la fonction Θ . Au voisinage de ces trajectoires, on peut écrire:

$$\delta\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = 0 \quad (II.2)$$

Supposons que les courbes soient décrites par un paramètre ν . Le long d'une de ces courbes, le temps de parcours est donné par l'expression:

$$\Theta(\mathbf{x}, \nu_0, \nu_1) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} u(\mathbf{x}(\nu)) \|\dot{\mathbf{x}}(\nu)\| d\nu \quad (II.3)$$

soit,

$$\Theta(\mathbf{x}, \nu_0, \nu_1) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} L(\mathbf{x}(\nu), \dot{\mathbf{x}}(\nu)) d\nu \quad (II.4)$$

où $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}) \|\dot{\mathbf{x}}\|$. Les courbes extrémales vérifient les équations d'Euler (voir (A.3) dans APPENDICE A), soit:

$$\frac{d}{d\nu}(\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L) = \nabla_{\mathbf{x}} L \quad (II.5)$$

où on a noté $\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L$ le vecteur dont les coordonnées sont $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$. Utilisant l'expression du Lagrangien, on obtient de façon explicite:

$$\frac{d}{d\nu}\left(u \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|}\right) = \nabla u \|\dot{\mathbf{x}}\| \quad (II.6)$$

En utilisant l'abscisse curviligne s le long de la courbe, on obtient:

$$\frac{d}{ds}\left(u \frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) = \nabla u \quad (II.7)$$

expression équivalente aux équations des rais (I.23) si on pose:

$$\mathbf{p} = u \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L$$

Ce résultat montre l'équivalence entre la formulation variationnelle basée sur le principe de Fermat et le système des équations des rais. On notera T le temps de parcours le long des rais:

$$T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \Theta(\text{rai}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$$

Remarque: Si on modifie la position du point final \mathbf{x}_1 de $d\mathbf{x}$, on obtient une variation du temps de parcours (voir équation (A.4) dans l'appendice A) égale à:

$$dT = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L \cdot d\mathbf{x}$$

On obtient donc:

$$\nabla T = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L = u \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{p} \quad (II.8)$$

Ceci montre l'orthogonalité des rais et des fronts d'onde (en milieu isotrope).

II.2 Méthode des caractéristiques

II.2.1 Introduction de l'Hamiltonien complet (système de représentation implicite des rais)

Posons $H(s, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{c(\mathbf{x})}{2}[\mathbf{p}^2 - u^2]$. L'eikonal (I.20) implique

$$H(s, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0. \quad (II.9)$$

L'équation (II.9) est une équation aux dérivées partielles du 1er ordre suivie par le temps T (Rappelons que $\mathbf{p} = \nabla T$). Pour intégrer ce type d'équation, on peut utiliser la méthode des caractéristiques. Les courbes caractéristiques de cette équation sont solutions du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \nabla_{\mathbf{p}} H \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= -\nabla_{\mathbf{x}} H \end{aligned} \quad (II.10)$$

On peut montrer que ces équations sont les mêmes que les équations des rais (I.23). De façon générale, on peut montrer que pour une paramétrisation donnée ν le long du rai, les équations du rai sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\nu} &= \nabla_{\mathbf{p}} H \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\nu} &= -\nabla_{\mathbf{x}} H \end{aligned} \quad (II.11)$$

avec l'Hamiltonien

$$H(\nu, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{f(\mathbf{x})}{2} [\mathbf{p}^2 - u^2], \quad (II.12)$$

où $f(\mathbf{x})$ est une fonction positive. Pour certaines formes de la vitesse, il peut être intéressant d'utiliser d'autres types de paramétrisation, par exemple le temps de parcours de l'onde pour lequel le paramètre ν est donné par $d\nu = cds$ (dimension km^2s^{-1}). Un rai est donc défini entièrement par son vecteur canonique $\mathbf{y}(\nu) = (\mathbf{x}(\nu), \mathbf{p}(\nu))$ et les équations différentielles (II.11).

Le temps de parcours peut être calculé le long du rai à l'aide de l'expression suivante:

$$T(\mathbf{x}(\nu_0), \mathbf{x}(\nu_1)) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} d\nu$$

L'approche développée ci dessus est tout à fait générale et indépendante du paramètre ν utilisé. L'approche Hamiltonienne a l'intérêt de diminuer l'ordre des équations par rapport à l'approche Lagrangienne (II.5) en introduisant le paramètre supplémentaire: le vecteur lenteur \mathbf{p} . La démonstration effectuée dans ce chapitre est valable en milieu isotrope. En fait, on peut obtenir en milieu anisotrope général, l'équation Eikonal qui peut être relativement compliquée (polynome de degré 6).

II.2.2 Introduction de l'Hamiltonien réduit (système de représentation explicite des rais)

Le système d'équations différentielles (II.11) n'est pas composé d'équations indépendantes. On a en effet l'équation eikonale (II.9) à vérifier. Il peut être parfois intéressant de paramétrer les rais de façon explicite par une des coordonnées du système de représentation. Par exemple, dans un système de coordonnées cartésiennes, le rai peut être décrit par la courbe $X(z), Y(z)$, où z désigne la profondeur du point.

Plaçons nous à 2 dimensions (la généralisation à 3 dimensions est immédiate). Supposons que le système de coordonnées utilisé soit noté (σ, q) et que le rai soit décrit par la représentation $q = Q(\sigma)$. Par exemple, en système cartésien, un rai peut être représenté par l'équation $x = X(z)$. D'autres systèmes peuvent être utilisés dans la pratique comme par exemple le système de coordonnées sphériques ou polaires.

Ecrivons dans ce système de coordonnées curvilignes l'expression du temps de parcours le long d'une courbe (II.1), soit:

$$\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} u(\mathbf{x}(s)) ds = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} u(\mathbf{x}) \frac{ds}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} L(q(\sigma), \dot{q}(\sigma), \sigma) d\sigma \quad (II.13)$$

où le Lagrangien $L(q, \dot{q}, \sigma)$ est défini par:

$$L(q, \dot{q}, \sigma) = u(\sigma, q) \sqrt{h_\sigma^2 + h_q^2 \dot{q}^2}. \quad (II.14)$$

Dans l'expression (II.14), h_σ et h_q sont les facteurs d'échelle du système de coordonnées curvilignes σ, q . L'Hamiltonien correspondant, dit Hamiltonien réduit, peut être trouvé de la façon suivante. On pose par analogie avec la mécanique classique:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = u \frac{h_q^2 \dot{q}}{\sqrt{h_\sigma^2 + h_q^2 \dot{q}^2}}$$

L'Hamiltonien est par définition

$$H(q, p, \sigma) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, \sigma) = -h_\sigma \sqrt{u^2 - \frac{p^2}{h_q^2}} \quad (II.15)$$

Les équations des courbes extrémales (les rais) sont données par:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{d\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\tag{II.16}$$

Un rai est donc défini par son vecteur canonique $(q(\sigma), p(\sigma))$ qui vérifie le système d'équations différentielles (II.16).

Les résultats de l'Appendice A nous donnent de plus:

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} = -H, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = p\tag{II.17}$$

On déduit de (II.17) que $\frac{p}{h_q}$ n'est autre que la composante du vecteur lenteur \mathbf{p} suivant la courbe de coordonnées q . Rappelons que le vecteur lenteur est défini par $\mathbf{p} = \nabla T = h_\sigma^{-1} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \mathbf{e}_\sigma + h_q^{-1} \frac{\partial T}{\partial q} \mathbf{e}_q$. De même, $-\frac{H}{h_\sigma}$ n'est autre que la composante du vecteur lenteur suivant la courbe de coordonnées σ . Le système (II.16) est composé de 2 équations en dimension 2, et de 4 équations en dimension 3.

Le temps de parcours peut être calculé le long du rai défini par son vecteur canonique $(q(\sigma), p(\sigma))$ par l'expression déduite de (II.13) en utilisant le paramètre p plutôt que le paramètre \dot{q} :

$$T(q(\sigma_2)) = T(q(\sigma_1)) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{h_\sigma u^2}{\sqrt{u^2 - \frac{p^2}{h_q^2}}} d\sigma\tag{II.18}$$

Exemple 1: en système cartésien, le rai est paramétré par la courbe $x = X(z)$. L'Hamiltonien réduit (II.14) correspondant est

$$H(x, p_x, z) = -\sqrt{u^2 - p_x^2} = -p_z$$

Les équations des rais dans ce système de coordonnées sont:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{\sqrt{u^2 - p_x^2}} \\ \frac{dp_x}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{u}{\sqrt{u^2 - p_x^2}} \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

Si la vitesse ne dépend que de la profondeur, alors p_x est constant et on peut intégrer facilement la première équation sous la forme:

$$x = X(z, p_x) = \int_{z_0}^z \frac{p_x}{\sqrt{u^2 - p_x^2}} dz + X(z_0, p_x)$$

De même, le temps de parcours est donné par:

$$T(x(z), z) = T(x(z_0), z_0) + \int_{z_0}^z \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - p_x^2}} dz \quad (II.18)$$

On retrouve les équations de Bullen (I.27) obtenues dans le premier chapitre.

Exemple 2: en système de coordonnées sphériques, le rai paramétré par r est décrit par le vecteur $(\theta(r), \phi(r), p_\theta(r), p_\phi(r))$. L'Hamiltonien réduit correspondant est:

$$H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi, r) = -\sqrt{u^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}} = -p_r$$

On obtient de même les équations des rais obtenues dans le chapitre I, lorsque la vitesse ne dépend que de r .

Conclusion

Nous avons développé une approche hamiltonienne du tracé de rais. Quel en est l'intérêt?

- Cela permet de diminuer l'ordre des équations
- Les expressions sont valables dans n'importe quel système de coordonnées.

Deux approches ont été développées:

L'hamiltonien complet $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{1}{2}f(\mathbf{x})[\mathbf{p}^2 - u^2(\mathbf{x})]$

L'Hamiltonien "réduit" : $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \sigma) = -h_\sigma \sqrt{u^2 - \frac{p_1^2}{h_{q_1}^2} - \frac{p_2^2}{h_{q_2}^2}}$

La première approche permet de développer des algorithmes de tracé de rais rapides car les équations sont simples à intégrer analytiquement pour des formes particulières de la vitesse. Pour des milieux complexes, le milieu peut être décomposé en éléments simples à l'intérieur desquels le tracé de rais est analytique (Virieux et al, 1988).

La deuxième approche comporte moins d'équations. On a cependant diminué la simplicité des équations en faveur du nombre d'équations à résoudre. Cette approche est intéressante lorsque la vitesse dépend d'une direction (par exemple $c(z)$ ou $c(r)$).

III. Théorie des rais paraxiaux

Quel que soit le type de l'Hamiltonien choisi (complet ou réduit), on peut décrire tout rai par son vecteur canonique $y(\nu) = (\mathbf{x}(\nu), \mathbf{p}(\nu))$ qui vérifie le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{d\nu} &= \nabla_{\mathbf{p}}H \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\nu} &= -\nabla_{\mathbf{x}}H\end{aligned}\tag{III.1}$$

Ce système d'équations est non linéaire. Pour intégrer ce système, il est nécessaire d'avoir des conditions aux limites: 6 en dimension 3, 4 en dimension 2.

Lorsque les conditions initiales sont données $(\mathbf{x}(\nu_0), \mathbf{p}(\nu_0))$, on peut utiliser des méthodes numériques (Runge-Kutta, prédicteur-correcteur,...) ou semi-analytiques (décomposition du milieu en blocs) pour intégrer ces équations. Dans la pratique, on a généralement des conditions aux limites fixées (le rai doit passer par 2 points donnés) et le problème est plus difficile à résoudre car le système (III.1) n'est pas linéaire. De plus, du fait de cette non-linéarité, il peut y avoir plusieurs solutions (rais) au problème ou bien aucune solution (zone d'ombre).

Une méthode pour effectuer le tracé de rai entre 2 points consiste à tracer un rai à partir de la source et à ajuster son angle de tir pour arriver à la station. Pour cela, il est intéressant d'avoir les expressions des rais au voisinage d'un rai dit de référence. On utilise une méthode de perturbation pour développer les équations de ces rais voisins, rais dits paraxiaux par analogie avec l'optique géométrique. Dans la suite de ce chapitre, j'utiliserai l'Hamiltonien complet pour développer les équations des rais paraxiaux; le même type de développement peut être effectué avec l'Hamiltonien réduit.

IV. Réflexion-transmission d'une onde à une discontinuité

Toute méthode utilisée pour calculer des sismogrammes synthétiques est incomplète si elle ne prend pas en compte les interfaces structurales du milieu. A l'intérieur de la terre, la vitesse et ses dérivées partielles ne sont pas des fonctions lisses des coordonnées et ces "discontinuités" de vitesse jouent un rôle important en sismologie et en prospection sismique. La topographie de ces interfaces n'est généralement pas horizontale, ce qui a pour conséquence des anomalies locales du mouvement du sol. La théorie des rais est un outil intéressant pour l'étude de la propagation dans des structures complexes car elle permet de prendre en compte des variations latérales du milieu.

IV.1 Conditions initiales des rais réfléchis ou transmis

Implicitement dans le développement asymptotique que nous avons fait précédemment, nous avons supposé le milieu continu. En présence de discontinuités de vitesse, il est nécessaire de vérifier les conditions aux limites sur l'interface et de réinitialiser le problème. En acoustique, il y a création d'une onde réfléchie et d'une onde transmise. Le champ Φ_i de l'onde incidente est développée sous la forme (I.4):

$$\widehat{\Phi}_i(\omega, \mathbf{x}) = e^{i\omega T_i(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(-i\omega)^j} \quad (IV.1)$$

Dans le milieu incident, nous avons le champ total suivant:

$$\widehat{\Phi}_1 = \widehat{\Phi}_i + \widehat{\Phi}_r \quad (IV.2)$$

où Φ_r désigne le champ de l'onde réfléchie. Dans le milieu transmis, nous avons une onde transmise définie par son champ:

$$\widehat{\Phi}_2 = \widehat{\Phi}_t \quad (IV.3)$$

Les champs Φ_r et Φ_t satisfaisant aussi l'équation des ondes, on peut de même les exprimer sous la forme:

$$\widehat{\Phi}_r(\omega, \mathbf{x}) = e^{i\omega T_r(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j(\mathbf{x})}{(-i\omega)^j}, \quad \widehat{\Phi}_t(\omega, \mathbf{x}) = e^{i\omega T_t(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j(\mathbf{x})}{(-i\omega)^j}$$

Les conditions de continuité du champ sur l'interface,

$$\widehat{\Phi}_1 = \widehat{\Phi}_2$$

ont pour conséquence l'égalité des phases de l'onde incidente, de l'onde réfléchie et de l'onde transmise en tout point situé sur l'interface:

$$T_i(\mathbf{x}_I) = T_r(\mathbf{x}_I) = T_t(\mathbf{x}_I) \quad (IV.4)$$

L'égalité des phases le long de l'interface a pour conséquence l'égalité des dérivées tangentielles, soit:

$$\mathbf{n} \times \nabla T_i = \mathbf{n} \times \nabla T_r = \mathbf{n} \times \nabla T_t \quad (IV.5)$$

où \mathbf{n} est le vecteur local normal à l'interface. Soit, en utilisant les vecteurs lentes:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{p}_I = \mathbf{n} \times \mathbf{p}_R = \mathbf{n} \times \mathbf{p}_T$$

où \mathbf{p}_I , \mathbf{p}_R et \mathbf{p}_T désignent les vecteurs lentes des ondes incidente, réfléchie et transmise au point d'incidence sur l'interface. En termes géométriques, la projection du vecteur lent sur le plan tangent à l'interface est donc la même pour les 3 rais (incident, réfléchi et transmis). Ceci n'est autre que la loi de Descartes (connue aussi sous le nom de loi de Snell). Plaçons nous dans le plan d'incidence (plan contenant la direction du vecteur lent de l'onde incidente \mathbf{p}_I et le vecteur normal à l'interface). Au point d'incidence, les vecteurs lentes \mathbf{p}_R et \mathbf{p}_T des ondes réfléchie et transmise sont situés dans ce plan. Introduisons les angles θ_I , θ_R et θ_T des vecteurs lentes des ondes incidente, réfléchie et transmise avec l'axe normal à l'interface (Figure). Alors, on a les relations suivantes:

$$\theta_R = \theta_I, \quad \frac{\sin \theta_T}{c_T} = \frac{\sin \theta_I}{c_I}$$

où c_I et c_T sont les vitesses des ondes incidente et transmise, respectivement.

Comment construire les rais de l'onde réfléchie ou transmise, dont les fronts d'onde vérifient les conditions aux limites (IV.4) sur l'interface?: La loi de Snell-Descartes nous donne la projection sur l'interface du vecteur lent au point d'émergence du rai (réfléchi ou transmis). La composante normale est obtenue en utilisant l'eikonal (I.20) de chacune des ondes en ce point.

V. Calcul de l'amplitude

Nous savons maintenant tracer un rai et calculer grosso modo le temps de parcours au voisinage de ce rai. Nous voulons maintenant calculer l'amplitude $A(\mathbf{x})$. L'amplitude est solution de l'équation de transport qui est une équation aux dérivées partielles.

$$2\nabla A \cdot \nabla T + A \nabla^2 T = 0 \quad (V.1)$$

Cependant, à l'aide des équations des rais, l'équation de transport peut être réduite à une équation différentielle ordinaire. Utilisant la définition du vecteur lenteur $\mathbf{p} = \nabla T = u\mathbf{t}$, où \mathbf{t} est le vecteur tangent au rai et u la lenteur, on obtient:

$$2u \frac{dA}{ds} + A \nabla^2 T = 0 \quad (V.2)$$

soit

$$\frac{d}{ds}(\log A) = -\frac{c}{2} \nabla^2 T \quad (V.3)$$

V.1 Calcul du laplacien $\nabla^2 T$:

Pour calculer le laplacien, on utilise les coordonnées liées aux rais (τ, ν_1, ν_2) : (ν_1, ν_2) spécifient le rai et τ décrit la position du point sur le rai par le temps de parcours mis par l'onde pour atteindre le point. Par exemple pour un point source, ν_1 et ν_2 peuvent être les angles polaires décrivant la direction initiale du rai à la source. Tout point \mathbf{x} peut être décrit par un triplet (τ, ν_1, ν_2) . Pour (ν_1, ν_2) fixé, $\mathbf{x}(\tau, \nu_1, \nu_2)$ décrit un rai; pour τ fixé, $\mathbf{x}(\tau, \nu_1, \nu_2)$ décrit le front d'onde. Un tube de rais est un ensemble de rais compris entre $(\nu_1^0, \nu_1^0 + d\nu_1)$ et $(\nu_2^0, \nu_2^0 + d\nu_2)$.

Un élément de volume dV est décrit dans le système de coordonnées (τ, ν_1, ν_2) par:

$$dV = J_0 d\tau d\nu_1 d\nu_2 \quad (V.4)$$

où J_0 est le jacobien

$$J_0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \nu_1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \nu_2}\right),$$

qu'on peut écrire aussi:

$$J_0 = c \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \nu_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \nu_2} \right\|$$

car le vecteur $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$ est parallèle à $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \nu_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \nu_2}$ et sa norme est égale à la vitesse c .

Introduisons la quantité $J = \frac{J_0}{c}$. $J d\nu_1 d\nu_2$ décrit la surface interceptée par un tube de rais sur le front d'onde. J est appelé divergence géométrique des rais à l'abscisse considérée. Considérons un tube de rais et prenons un petit volume s'appuyant sur ce tube et de longueur $ds = cd\tau$ (Figure). Par application du théorème de Gauss, on peut écrire:

$$\int \int \int \nabla^2 T dV = \int \int \nabla T \cdot \mathbf{n} dS$$

où le vecteur \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface. En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient:

$$\int \int \int \nabla^2 T dV = \nabla^2 T J_0 d\tau d\nu_1 d\nu_2 = \nabla^2 T J ds d\nu_1 d\nu_2$$

Les bords du tube de rais étant parallèles aux rais, l'intégrale surfacique se réduit à l'intégrale sur les surfaces S_1 et S_2 (Figure):

$$\int \int \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_{S_2} \frac{1}{c_2} dS - \int \int_{S_1} \frac{1}{c_1} dS = \left[\frac{J_2}{c_2} - \frac{J_1}{c_1} \right] d\nu_1 d\nu_2 = \frac{d}{ds} \left(\frac{J}{c} \right) ds d\nu_1 d\nu_2$$

Utilisant ces 2 expressions, on peut donc écrire:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{J} \frac{d}{ds} \left(\frac{J}{c} \right)$$

où J est la divergence géométrique des rais. Quand le tube de rais s'élargit ou se rétrécit, le laplacien de T varie comme la dérivée du logarithme de J . En remplaçant l'expression du laplacien dans l'équation de transport, on obtient

$$\frac{d}{ds} (\log A) = -\frac{c}{2J} \frac{d}{ds} \left(\frac{J}{c} \right)$$

qu'on peut intégrer facilement :

$$A(s) = A(s_0) \sqrt{\frac{c(s)J(s_0)}{c(s_0)J(s)}} \quad (V.5)$$

L'expression obtenue pour l'amplitude d'ordre zéro de la théorie des rais revient à supposer que l'énergie est conservée dans un tube de rai, sans diffusion par les parois du tube. L'amplitude dépend de la façon dont les rais divergent.

Calcul du facteur J

Jusqu'en 1980, le facteur J était calculé en traçant des rais voisins et en calculant la section du tube de rais ainsi constitué.

VI. Signal donné par la théorie des rais

VI.1 Forme du signal

Prenant en compte l'expression de l'amplitude obtenue dans le chapitre précédent, l'expression (I.4) de la théorie des rais est donc donnée par:

$$\widehat{\Phi}(\omega, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \widehat{f}(\omega) \sqrt{\frac{c(s)J(s_0)}{c(s_0)J(s)}} F(\nu_1, \nu_2) e^{i\omega T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \quad (VI.1)$$

où $F(\nu_1, \nu_2)$ décrit la géométrie de la source et $T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ est le temps de parcours. Dans l'expression (VI.1), le terme de divergence géométrique peut s'annuler et même changer de signe. Ce phénomène se produit lorsque le rai a touché une caustique. L'expression de la théorie des rais n'est pas valable au voisinage d'une caustique. La théorie des rais donne une amplitude infinie, ce qui est non-physique. Cette singularité de la théorie des rais provient de son incapacité à prendre en compte des phénomènes de propagation dépendant de la fréquence. D'autres méthodes doivent alors être utilisées pour effectuer le calcul au voisinage de la caustique. Pour les rais ayant touché la caustique, la forme du signal subit un déphasage et est transformée en sa transformée de Hilbert.

Si le rai n'a pas touché de caustique, la divergence géométrique J est positive et le champ est donné par

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = F(\nu_1, \nu_2) \sqrt{\frac{c}{J}} f(t - T) \quad (VI.2)$$

Si le rai a touché une caustique, la divergence géométrique J devient négative et le champ est donné par

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = F(\nu_1, \nu_2) \sqrt{\frac{c}{|J|}} \overline{f}(t - T) \quad (VI.3)$$

où $\overline{f}(t)$ est la transformée de Hilbert de $f(t)$.

La transformée de Hilbert $\overline{f}(t)$ d'une fonction $f(t)$ a pour transformée de Fourier (dans la convention choisie dans ce cours) : $\widehat{\overline{f}}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) \widehat{f}(\omega)$. Par exemple, la transformée de Hilbert de la fonction de Dirac $\delta(t)$ est $H\delta(t) = -\frac{1}{\pi t}$. La transformée de Hilbert de la fonction $\frac{H(t)}{\sqrt{|t|}}$ est $\frac{H(-t)}{\sqrt{|-t|}}$. La transformée de Hilbert d'une fonction $f(t)$ est défini dans le temps par $\overline{f} = -\frac{1}{\pi t} \star f$, où \star désigne le produit de convolution.

Sur la caustique, les effets d'interférence ne sont pas modélisables par la théorie des rais. D'un côté de la caustique est située une zone d'ombre où aucun rai ne pénètre; de l'autre côté, en tout point passent 2 rais.

Dans la zone d'ombre, nous avons une décroissance exponentielle de l'amplitude; de l'autre coté, nous avons des interférences. La théorie des rais est cependant valable dès qu'on s'éloigne de la caustique.

En fait, le signe de la racine complexe dans (VI.1) n'est pas donné par la théorie des rais mais par la comparaison avec des solutions locales. A chaque fois que le rai rencontre une caustique, le facteur J change de signe. La théorie des rais peut être utilisée du moment que la racine carrée est correctement calculée. De façon générale, nous avons:

$$\widehat{\Phi}(\omega, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \widehat{f}(\omega) \sqrt{\frac{c(s)}{c(s_0)} \left| \frac{J(s_0)}{J(s)} \right|} F(\nu_1, \nu_2) e^{i\omega T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} e^{-i\frac{\pi}{2} KMAH \operatorname{sgn}(\omega)} \quad (VI.4)$$

où $KMAH$ est un indice comptant le nombre de fois où le rai a touché une caustique. L'indice $KMAH$ est initialement nul, est constant le long du rai entre 2 caustiques et change d'un nombre entier à chaque caustique. Pour les ondes de volume, l'indice $KMAH$ augmente d'un nombre égal à la dimension perdue par le tube de rai sur la caustique. Normalement, la section du tube de rais est réduit à une ligne et l'indice $KMAH$ s'accroît d'une unité. Ceci introduit le retard de phase bien connu de $\pi/2$. Cependant, le tube de rais peut être réduit à un point; Deux dimensions sont perdues dans ce cas et le retard de phase est π .

Introduisons la fonction analytique $F(t) = f(t) + i\overline{f}(t)$, alors on peut écrire le champ sous la forme générale suivante:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = F(\nu_1, \nu_2) \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{c}{J}} F(t - T) e^{-i\frac{\pi}{2} KMAH} \right].$$

Remarquons que nous avons négligé les termes d'ordre supérieur de la théorie des rais. Rappelons que nous avons posé:

$$\widehat{\Phi}(\omega, \mathbf{x}) = e^{i\omega T(\mathbf{x})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(-i\omega)^j}$$

Par exemple, le terme A_1 vérifie une équation de transport semblable à celle suivie par A_0 , soit:

$$2\nabla A_1 \cdot \nabla T + A_1 \nabla^2 T = \nabla^2 A_0$$

soit

$$2u \frac{dA_1}{ds} + \frac{A_1}{J} \frac{d}{ds} \left(\frac{J}{c} \right) = \nabla^2 A_0$$

Multiplions les 2 cotés de l'équation par $\frac{1}{2}\sqrt{Jc}$, on obtient:

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{\frac{J}{c}} A_1 \right) = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{J}{c}} \nabla^2 A_0$$

Dès que la quantité A_0 aura des variations brutales, le terme A_1 deviendra important. Ceci est le cas au voisinage de l'angle critique par exemple. Les termes d'ordre supérieurs décrivent les effets de diffraction.

VI.2 Retour à l'élasticité

Les résultats sont très semblables à ceux obtenus en milieu acoustique. A haute fréquence, il y a séparation de l'onde P et de l'onde S.

Dans un milieu 1D-2D, l'onde P donnée par la théorie des rais est polarisée parallèlement à la direction du rai. L'onde S peut être séparée en une onde SH polarisée perpendiculairement au plan d'incidence et une onde SV polarisée dans le plan d'incidence, ces 2 ondes se propageant indépendamment. L'onde S peut ne pas être polarisée de façon rectiligne si les 2 ondes ont subi un déphasage différent. Dans un milieu isotrope, ceci ne peut se produire que lors de l'interaction du rai avec une interface par une réflexion/transmission surcritique.

Dans un milieu 3D, l'onde S peut être séparée en deux ondes se propageant indépendamment et dont la direction de polarisation tourne généralement autour du rai lorsque l'onde se propage. Ces 2 ondes sont en général couplées aux interfaces.

En résumé, l'expression du déplacement \mathbf{u} donnée par la théorie des rais est pour l'onde P:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{t} F(\nu_1, \nu_2) \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{\alpha_s \rho_s}{\alpha \rho J}} F(t - T_P(\mathbf{x})) \right]$$

pour l'onde S:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = [\mathbf{e}_1 F_1(\nu_1, \nu_2) + \mathbf{e}_2 F_2(\nu_1, \nu_2)] \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{\beta_s \rho_s}{\beta \rho J}} F(t - T_S(\mathbf{x})) \right]$$

où \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent au rai en \mathbf{x} et $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sont des vecteurs orthogonaux à \mathbf{t} et entre eux et qui tournent autour du rai à une vitesse dépendant de la torsion T du rai (Figure). Utilisons le repère de Frénet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, déjà introduit dans le chapitre I. Dans le plan défini par les 2 vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{b} , on peut écrire:

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta \mathbf{n} + \sin\theta \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_2 = -\sin\theta \mathbf{n} + \cos\theta \mathbf{b}$$

on montre que $\frac{d\theta}{ds} = T$.

VI.3 Présence d'interfaces

La méthode de l'optique géométrique donne une solution à ce problème en invoquant le principe de localité. L'approximation d'ordre zéro suppose qu'en chaque point de l'interface, la réflexion se passe comme si l'onde était plane et l'interface est remplacée par le plan tangent. Ce principe nous permet d'utiliser dans l'approximation d'ordre zéro la formule des coefficients de réflexion-réfraction des ondes planes à une interface plane dans l'expression de l'amplitude.

En présence d'une interface, nous avons donc création d'une onde réfléchie et d'une onde transmise. La continuité du champ sur l'interface nous a permis dans le chapitre IV d'obtenir la loi de Snell-Descartes pour les rais. De plus, nous devons assuré la continuité de la dérivée normale (en acoustique) sur l'interface. Nous avons donc les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_I + \widehat{\Phi}_R &= \widehat{\Phi}_T, \\ \frac{\partial \widehat{\Phi}_I}{\partial N} + \frac{\partial \widehat{\Phi}_R}{\partial N} &= \frac{\partial \widehat{\Phi}_T}{\partial N}\end{aligned}$$

où N indique la direction normale à l'interface.

Introduisons la forme de la solution donnée par la théorie des rais pour les ondes incidente, réfléchie et transmise:

$$\widehat{\Phi}_I = A_I(\omega, \mathbf{x})e^{i\omega T_I(\mathbf{x})}, \quad \widehat{\Phi}_R = A_R(\omega, \mathbf{x})e^{i\omega T_R(\mathbf{x})}, \quad \widehat{\Phi}_T = A_T(\omega, \mathbf{x})e^{i\omega T_T(\mathbf{x})}$$

Dans l'approximation haute fréquence, on obtient donc au point d'incidence de l'onde sur l'interface:

$$A_R = RA_I, \quad A_T = TA_I$$

avec

$$R = \frac{1 - Y}{1 + Y}, \quad T = \frac{2}{1 + Y}$$

et $Y = \frac{u_T \cos \theta_T}{u_I \cos \theta_I}$

où θ_I et θ_T sont les angles des vecteurs lents de l'onde incidente et de l'onde transmise avec la normale à l'interface.

Les développements précédents nous permettent d'écrire:

$$A_R(\mathbf{x}) = A_R(\mathbf{x}_I) \sqrt{\frac{c_R(\mathbf{x})J_R(\mathbf{x}_I)}{c_R(\mathbf{x}_I)J_R(\mathbf{x})}}, \quad A_T(\mathbf{x}) = A_T(\mathbf{x}_I) \sqrt{\frac{c_T(\mathbf{x})J_T(\mathbf{x}_I)}{c_T(\mathbf{x}_I)J_T(\mathbf{x})}}$$

où J_R et J_T sont les divergences géométriques des ondes réfléchi et transmise respectivement.

D'autre part, sur l'interface, nous avons:

$$\widehat{\Phi}_I(\mathbf{x}_I, \omega) = \widehat{s}(\omega) F(\nu_1, \nu_2) \sqrt{\frac{c_I(\mathbf{x}_I)J_I(\mathbf{x}_s)}{c_I(\mathbf{x}_s)J_I(\mathbf{x}_I)}} e^{i\omega T_I(\mathbf{x}_I)}$$

Les champs réfléchi et transmis sont donc donnés par:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_R(\mathbf{x}, \omega) &= \widehat{s}(\omega) F(\nu_1, \nu_2) R \sqrt{\frac{c_I(\mathbf{x}_I)J_R(\mathbf{x}_I)}{c_R(\mathbf{x}_I)J_I(\mathbf{x}_I)}} \sqrt{\frac{c_R(\mathbf{x})J(\mathbf{x}_s)}{c_I(\mathbf{x}_s)J(\mathbf{x})}} e^{i\omega T_R(\mathbf{x})}, \\ \widehat{\Phi}_T(\mathbf{x}, \omega) &= \widehat{s}(\omega) F(\nu_1, \nu_2) T \sqrt{\frac{c_I(\mathbf{x}_I)J_T(\mathbf{x}_I)}{c_T(\mathbf{x}_I)J_I(\mathbf{x}_I)}} \sqrt{\frac{c_T(\mathbf{x})J(\mathbf{x}_s)}{c_I(\mathbf{x}_s)J(\mathbf{x})}} e^{i\omega T_T(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

On peut montrer géométriquement les relations suivantes:

$$J_R(\mathbf{x}_I) = -J_I(\mathbf{x}_I), \quad \frac{J_T(\mathbf{x}_I)}{J_I(\mathbf{x}_I)} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

Nous avons donc tous les éléments pour calculer les sismogrammes dans des milieux présentant des interfaces.

De façon générale, nous avons:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = F(\nu_1, \nu_2) Re \left[R \sqrt{\frac{c}{J}} S(t - T(\mathbf{x})) \right]$$

où R est une constante complexe contenant les produits des coefficients de réflexion/transmission et les facteurs intervenant à l'interface, J est la divergence géométrique dont la racine doit être correctement calculée. Rappelons qu'au delà de certains angles (dits critiques), les coefficients de réflexion/transmission peuvent être complexes et la forme de l'onde est une combinaison de la fonction source $s(t)$ et de sa transformée de Hilbert $\overline{s}(t)$.

Le sismogramme est en fait la somme sur tous les rais allant de la source au récepteur des solutions élémentaires données ci dessus.

VI.4 Conclusion partielle

Les signaux donnés par la théorie des rais se propagent généralement sans changer de forme mais en changeant d'amplitudes. Les changements de forme qui peuvent cependant apparaître sont dus à des effets locaux comme

les caustiques ou des interfaces. On peut aussi introduire l'effet dû à l'atténuation dans l'expression donnée par la théorie des rais. La théorie des rais n'est pas valide au voisinage des irrégularités du champ (caustique, angle critique, zone d'ombre, ..). Le problème de trouver des développements asymptotiques du champ dans ces régions n'est pas un problème simple. Une littérature importante est consacrée à la recherche de développement asymptotique uniforme qui serait valide partout y compris dans les régions singulières. Il est aussi possible de rechercher des développements asymptotiques valables au voisinage d'une singularité mais non valables à de grandes distances. Ces développements locaux peuvent être combinés à la théorie des rais pour obtenir les ondes correspondantes. Ceci peut être une technique intéressante pour l'étude d'ondes particulières (comme par exemple la diffraction à l'interface manteau-noyau).

VII. VALIDITE DE LA THEORIE DES RAIS

Le théorie des rais est une approximation haute fréquence. La longueur d'onde λ doit être donc plus petite que les autres échelles du problème (rayon de courbure de l'onde, rayon de courbure des interfaces, échelle des hétérogénéités $v/|\nabla \mathbf{v}|$, ..). L'étude d'un certain nombre d'exemples montre que la théorie des rais peut cependant être appliquée même dans des situations où la longueur d'onde est de l'ordre des longueurs caractéristiques du milieu. D'autre part, nous avons négligé les termes d'ordre supérieur : une condition suffisante d'applicabilité devrait d'une façon ou d'une autre considérer les erreurs accumulées dues au fait que l'approximation d'ordre zéro n'est pas une solution exacte. Une condition suffisante d'applicabilité de la méthode est en général impossible à trouver sauf dans des cas simples. Généralement on compare le terme d'ordre 1, A_1 , au terme d'ordre zéro ou bien on utilise les concepts élémentaires de Huygens et de Fresnel sur les interférence des ondes secondaires. La théorie des rais n'est pas valable au voisinage de fortes variations de l'amplitude A_0 .

VII.1 Problèmes canoniques

Dans cette section, nous allons décrire de façon succincte les régions dans lesquelles la théorie des rais est valide ou non.

a) Rai normal ou tournant

Ceci est le cas le plus simple. Le milieu ne présente pas de discontinuités; le rai et les coefficients d'amplitude varient de façon lisse. Dans ce cas, la théorie des rais est une excellente approximation.

b) Branche inverse

Si les rais se croisent, le coefficient d'amplitude devient infini et la théorie des rais ne marche pas. Des méthodes spéciales sont nécessaires pour modéliser au voisinage de la caustique. Néanmoins, la théorie des rais peut être utilisée au delà de la caustique si le coefficient d'amplitude est correctement interprété.

c) Rais réfléchis ou transmis

A partir du moment où l'interface est lisse et le coefficient de réflexion/transmission varie lentement, la théorie des rais peut être utilisée. La décroissance géométrique est modifiée par la courbure de l'interface et l'amplitude par le coefficient de réflexion/transmission. Lorsque la réflexion est totale, ce coefficient devient complexe, mais la théorie des rais reste valide. La théorie des rais n'est pas valable si la forme de l'interface ou le comportement des coefficients entraînent des variations discontinues (ou rapides) d'amplitude, par exemple au voisinage du point

critique ou en présence de coins.

Nous allons maintenant décrire les ondes de volume non décrites par la théorie des rais classique.

d) Rai critique et onde conique

A l'angle critique, le coefficient de réflexion a une singularité en racine carré. Le rai transmis a une amplitude géométrique nulle. Le front réfléchi et le front transmis sont connectés par un autre front, l'onde conique. La théorie des rais classique (d'ordre zéro) ne peut donner l'onde conique. cependant le terme d'ordre 1 dans le développement permet d'obtenir cette onde (Cerveny and Ravindra, 1971). Des fonctions plus compliquées sont nécessaires pour décrire la solution au voisinage de l'angle critique.

e) Caustique

Sur la caustique, la théorie des rais n'est pas valide car l'amplitude géométrique est infinie. Près de la caustique, l'amplitude varie de façon importante et il y a interférence de deux ondes. L'utilisation des termes d'ordre supérieur n'améliore pas la solution (ils sont tous infinis). Il faut utiliser une forme de solution (ansatz) plus compliquée au voisinage de la caustique (Fonction d'Airy dans le domaine fréquentiel).

f) Zone d'ombre de type Fresnel

Certaines parties du milieu peuvent créer une discontinuité du front d'onde, par exemple lors de la réflexion sur une interface de pente discontinue ou lorsque le rai rase l'interface. Quoique l'amplitude géométrique soit finie, la théorie des rais n'est pas valide. Deux effets sont importants: l'interface peut produire de nouvelles ondes et des effets non géométriques se produisent au bord de la zone d'ombre. Un exemple typique d'onde se propageant dans la zone d'ombre d'une interface sont les ondes P et S diffractées à la surface du noyau.

g) Diffraction par un coin

Si la pente de l'interface est discontinue, une onde diffractée est engendrée au coin. Une extension de la théorie des rais classique a été proposée par Keller (1962) pour modéliser ces signaux. La théorie des rais est utilisée pour propager les ondes incidentes et diffractée. Un coefficient dépendant de la fréquence est utilisé pour lier les amplitudes au point diffractant.

h) Diffraction par une interface

Si un rai rase une interface, une onde d'interface est créée. Cette onde a pour conséquence de limiter l'amplitude de l'onde dans la zone d'ombre donnée par la fonction de Fresnel. Des méthodes asymptotiques locales peuvent

être utilisées pour calculer le signal. Pour cela, il est nécessaire de résoudre les conditions aux limites sur l'interface. L'amplitude et la vitesse de ces ondes sont dépendantes de la fréquence.

i) Réflexion basse fréquence

Lorsqu'une région présente un fort gradient de vitesse, un signal réfléchi et un signal transmis sont engendrés par cette région lorsque la longueur d'onde du signal est importante devant l'épaisseur de la région. La prise en compte de termes d'ordre supérieur dans la théorie des rais ne permet pas d'engendrer ces signaux de façon adéquate. Généralement des méthodes itératives sont utilisées (Chapman, 1981).

j) Guide d'onde

Un guide d'onde crée généralement de nombreuses caustiques. Il y a donc un problème pour utiliser la théorie des rais. Il vaut mieux utiliser une méthode de sommation de modes.

VII.2 Echelle-fréquence : introduction de la zone de Fresnel

Une condition nécessaire de l'applicabilité de la théorie des rais est la suivante: les longueurs caractéristiques de l'amplitude A , du vecteur lenteur \mathbf{p} et de la vitesse c doivent être plus grandes que la longueur d'onde λ :

$$L \gg \lambda$$

où $L = \min(L_1, L_2, L_3)$ et

$$L_1 = \frac{A}{\|\nabla A\|}, L_2 = \min\left(\frac{\|\mathbf{p}\|}{\|\nabla p_j\|}\right), L_3 = \frac{c}{\|\nabla c\|}$$

Une condition suffisante peut être obtenue en utilisant les concepts de Huygens et de Fresnel. On peut définir un volume autour du rai dit volume de Fresnel. Pour un point source, ce volume est défini par l'ensemble des points M situés au voisinage du rai et pour lesquels :

$$|T(S, M) + T(M, R) - T(S, R)| < \frac{T_s}{2}$$

où S et R désignent les points source et récepteur, respectivement. $T(S, M)$, $T(M, R)$ et $T(S, R)$ sont les temps de parcours entre les points considérés. T_s désigne la période du signal.

Le volume de Fresnel définit le rai physique. Les paramètres du milieu et les paramètres de l'onde (vecteur lenteur, amplitude, polarisation,..) ne doivent pas varier significativement dans une section du volume de Fresnel.

La négligence des termes supérieurs de la théorie des rais a pour conséquence une limite supérieure sur le chemin parcouru par le rai. On doit vérifier :

$$L \gg \frac{l_0^2}{\lambda}$$

où l_0 est une distance caractéristique de l'hétérogénéité dans la direction de propagation de l'onde considérée.

APPENDICE A

Soit à rechercher les courbes extrémales $\mathbf{x}(\nu)$ de la fonction:

$$\Theta(\nu_1, \nu_2, \mathbf{x}) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L(\mathbf{x}(\nu), \dot{\mathbf{x}}(\nu)) d\nu \quad (A.1)$$

Nous nous placerons pour simplifier dans un espace à une dimension. Soit $x_0(\nu)$ une solution du problème. Considérons une perturbation $\delta x(\nu)$. La perturbation correspondante de la fonction Θ est:

$$\delta\Theta = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] d\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x d\nu + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{\nu_1}^{\nu_2} \quad (A.2)$$

Dans l'équation (A.2) nous avons utilisé une intégration par parties.

1^{er} résultat: la courbe perturbée passe par les points extrêmes x_1 et x_2 . Alors $\delta x(\nu_1) = \delta x(\nu_2) = 0$. De plus, $x_0(\nu)$ étant une solution extrémale de la fonction $\Theta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\delta\Theta = 0$. On en déduit que la solution $x_0(\nu)$ vérifie l'équation d'Euler, soit:

$$\frac{d}{d\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

En dimension 3, le résultat s'écrit sous la forme:

$$\frac{d}{d\nu} (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L) = \nabla_{\mathbf{x}} L \quad (A.3)$$

où $\nabla_{\mathbf{x}} L$ et $\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L$ ont pour coordonnées $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$, respectivement.

2^{me} résultat:

Définissons le temps de parcours $T(x_1, x_2)$ entre 2 points x_1 et x_2 par la valeur de la fonction θ calculée pour la courbe extrémale liant les 2 points. L'équation (A.2) nous permet d'écrire la relation suivante:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

soit, pour un espace à plusieurs dimensions:

$$\nabla \mathbf{T} = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L \quad (A.4)$$

REFERENCES

- Aki, K., and Richards, P., 1980. Quantitative seismology theory. W. H. Freeman, San Francisco.
- Cerveny, V., 1972. Seismic rays and ray intensities in inhomogeneous anisotropic media. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 29, 1-13.
- Cerveny, V., 1985. The application of ray tracing to the numerical modelling of seismic wave fields in complex structures, in *Handbook of Geophysical Exploration*, section 1, Seismic exploration, vol 15A, pp 1-119, Geophysical Press, London.
- Cerveny, V., 1987. Ray tracing algorithms in three dimensional laterally varying layered structures. in *Tomography in Seismology and Exploration Seismics*, edited by Nolet, D. Reidel, Hingham, Mass.
- Cerveny, V., 1989. Ray tracing in factorized anisotropic inhomogeneous media. *Geophys. J. Int.*, 99, 91-100.
- Cerveny, V., Molotkov, I. A. and Psencik, I., 1977. *Ray method in seismology*, Charles University Press.
- Cerveny, V., Popov, M.M. and Psencik, I., 1982. Computation of wave fields in inhomogeneous media - Gaussian beam approach. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 70, 109-128.
- Chapman, C.H., 1978. A new method for computing synthetic seismograms. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 54, 481-513.
- Chapman, C.H., 1985. Ray theory and its extensions: WKBJ and Maslov seismograms. *J. Geophys.*, 58, 27-43.
- Chapman, C.H. and Drummond, R., 1982. Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 72, S277-S317.
- Conte, S.D. and de Boor, K., 1983. *Elementary numerical analysis: An algorithmic approach*. McGraw-Hill Book Co.
- Farra, V., 1989. Ray perturbation theory for heterogeneous hexagonal anisotropic medium. *Geophys. J. Int.*, 99, 723-738.
- Farra, V., 1990. Amplitude computation in heterogeneous media by ray perturbation theory : a finite element method approach. *Geophys. J. Int.*, 103, 341-354.
- Farra, V., 1992. Bending method revisited: a Hamiltonian approach. *Geophys. J. Int.*, 109, 138-150.
- Farra, V. and Madariaga, R., 1987. Seismic waveform modeling in heterogeneous media by ray perturbation theory. *J. Geophys. Res.*, 92, 2697-2712.

- Farra, V., Virieux, J. and Madariaga, R., 1989. Ray perturbation theory for interfaces. *Geophys. J. Int.*, 99, 377-390.
- Guiziou, J.L. 1989. Enhanced Ray-tracing techniques for 3-D applications. 59th Annual SEG Meeting expanded abstracts, 1102-1104.
- Hanyga, A., 1988. Numerical methods for tracing rays and wavefronts. In *Seismological algorithms: Computational methods and computer programs*, D.J. Doornbos ed., Academic Press London.
- Julian, B.R. and Gubbins, D., 1977. Three dimensional seismic ray tracing. *J. Geophys.*, 43, 95-114.
- Keller, H. B. and Perozzi, D. S., 1983. Fast seismic ray tracing. *SIAM J. Appl. Math.*, 43, 981-992. Kendall, J.M. and Thomson, C.J., 1989. A comment on the form of the geometrical spreading equations, with some numerical examples of seismic ray tracing in heterogeneous anisotropic media. *Geophys. J. Int.*, 99, 369-376.
- Kline, M. and I.W. Kay, 1965. *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, John Wiley and Sons, New York.
- Langan, R. T., Lerche, I. and Cutler, R. T., 1985. Tracing of rays through heterogeneous media: An accurate and efficient procedure. *Geophysics*, 50, 1456-1465.
- Moser, T. J., 1991. Shortest path calculation of seismic rays. *Geophysics*, 56, 59-67.
- Muller, G., 1984. Efficient calculation of Gaussian-beam seismograms for two dimensional inhomogeneous media. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 79, 153-166.
- Nowack, R. L. and Psencik, I., 1991. Perturbation from isotropic to anisotropic media in the ray approximation. *Geophys. J. Int.*, 106, 1-10.
- Pereyra, V., Lee, W.H.K. and Keller, H.B., 1980. Solving two-point seismic ray tracing problem in a heterogeneous medium, Part I: A general adaptive finite difference method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 70, 79-99.
- Pereyra, V., 1988. Numerical methods for inverse problems in three-dimensional geophysical modeling. *Appl. Num. Math.*, 4, 97-139.
- Popov, M.M., 1982. A new method of computation of wave fields using Gaussian beams. *Wave motion*, 4, 85-97.
- Prothero, W.A., Taylor, W.J. and J.A. Eickmeyer, 1988. A fast, two-point, three dimensional raytracing algorithm using a simple step search method. *Bull. seism. Soc. Am.*, 78, 1190-1198.

Sambridge, M.S. and Kennett, B.L.N., 1990. Boundary value ray tracing in heterogeneous medium: a simple and versatile algorithm. *Geophys. J. Int.*, 101, 157-168.

Thomson, C.J., and Chapman, C.H., 1985. An introduction to Maslov's asymptotic method. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 61, 729-746.

Um, J. and C. Thurber, 1987. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bull. seism. Soc. Am.*, 77, 972-986.

Vidale, J.E., 1988. Finite difference calculation of travel times. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 78, 2062-2076.

Virieux, J., Farra, V. and Madariaga, R., 1988. Ray tracing for earthquake location in laterally heterogeneous media. *J. Geophys. Res.*, 93, 6585-6599.

Virieux, J., 1991. Fast and accurate ray tracing by Hamiltonian perturbation. *J. Geophys. Res.*, 96, 579-594.

Virieux, J. and V. Farra, 1991. Ray tracing in 3-D complex isotropic media: An analysis of the problem. *Geophysics*, 56, 2057-2069.