



Тема 3: ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ.

Свобода и ограничение есть два аспекта необходимости.

Антуан де Сент-Экзюпери. (Писатель и летчик Франции, XX в.)

Берешь топор, обрубаешь себе палец, и начинаешь вибрировать. Берешь сигнал, обрубаешь ему хвост, и он тоже начинает вибрировать. А весовая функция, это обезболивающий укол. Вибрацию снимает, но палец не восстанавливает.

Валерий Самойлин. (Геофизик и альпинист России, XX в.)

Содержание: 3.1. Явление Гиббса. Сущность явления Гиббса. Параметры эффекта. Последствия для практики. 3.2. Весовые функции. Нейтрализация явления Гиббса. Основные весовые функции. Литература.

ВВЕДЕНИЕ.

Большинство методов анализа и обработки данных представляют собой или имеют в своем составе операцию свертки множества данных $s(k)$ с функцией оператора свертки $h(n)$. Как множество данных $s(k)$, так и оператор $h(n)$, выполняющий определенную задачу обработки данных и реализующий определенную частотную передаточную функцию системы (фильтра), могут быть бесконечно большими. Практика цифровой обработки имеет дело только с ограниченными множествами данных ($k = 0, 1, 2, \dots, K$) и коэффициентов оператора ($n = 0, 1, 2, \dots, N$ или $n = -N, \dots, 1, 0, 1, \dots, N$ для двусторонних операторов). В общем случае, эти ограниченные множества "вырезаются" из бесконечных множеств $s(k)$ и $h(n)$, что равносильно умножению этих множеств на прямоугольную функцию с единичным амплитудным значением, которую называют естественным временным окном или естественной весовой функцией. Учитывая, что произведение функций отображается в спектральной области сверткой их фурье-образов, это может весьма существенно сказаться как на спектральных характеристиках функций, так и на результатах их последующих преобразований и обработки. Основное назначение рассматриваемых в данной теме весовых функций – сведение к минимуму нежелательных эффектов усечения функций.

3.1. ЯВЛЕНИЕ ГИББСА /Л24/.

Чаще всего с изменением частотных характеристик функций приходится сталкиваться при усечении операторов фильтров. На примере усечения операторов и рассмотрим характер происходящих изменений.

При расчетах фильтров, как правило, задается определенная передаточная характеристика $H(\omega)$ фильтра и по ней производится расчет оператора фильтра $h(n)$, количество членов которого может оказаться очень большим даже только по значимым значениям. Усечение может рассматриваться, как результат умножения функции оператора фильтра на селективное весовое окно длиной $2N+1$. В простейшем случае это окно представляет собой П-образную селективирующую функцию:

$$h_n = h(n) \cdot \Pi_N(n), \quad \begin{aligned} \Pi_N(n) &= 1 \text{ при } |n| \leq N, \\ \Pi_N(n) &= 0 \text{ при } |n| > N. \end{aligned}$$

Функция $h(n)$ оператора фильтра, в пределе бесконечная, обуславливает определенную частотную передаточную характеристику фильтра $H(\omega)$. Полному оператору $h(n)$ соответствует исходная частотная характеристика $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n). \quad (3.1.1)$$

Сущность явления Гиббса. Функции во временном окне селекции $\Pi_N(n)$ в частотном пространстве соответствует спектральная функция, которая в определенной степени должна отличаться от функции $H(\omega)$. Очевидно, что при усечении оператора $h(n)$, а значит и ряда Фурье (3.1.1), до конечного числа членов N мы будем иметь усеченный ряд Фурье:

$$H_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N h(n) \exp(-j\omega n), \quad (3.1.2)$$

при этом сходимость суммы остающихся членов ряда $H_N(\omega)$ к исходной передаточной функции $H(\omega)$ ухудшается и происходит отклонение частотной характеристики фильтра от первоначальной в тем большей степени, чем меньше значение N . Особенно ярко это проявляется на крутых перепадах (разрывах, скачках) в передаточных функциях:

- крутизна перепадов "размывается", т.к. она не может быть больше, чем крутизна (в нулевой точке) последней сохраненной гармоники ряда (3.1.2);
- по обе стороны "размытых" перепадов появляются выбросы и затухающие осцилляции с частотой, равной частоте последнего сохраненного или первого отброшенного члена ряда (3.1.1).

Эти эффекты при усечении рядов Фурье получили название явления Гиббса. Рассмотрим явление Гиббса более подробно на примере разложения в ряд Фурье частотной функции единичного скачка $G(\omega)$, которая является Фурье-образом какой-то дискретной временной функции b_n . Уравнение функции единичного скачка:

$$G(\omega) = \begin{cases} -0.5 & \text{при } -\pi \leq \omega < 0, \\ 0.5 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Функция (3.1.3) имеет разрыв величиной 1 в точке $\omega = 0$ и, в силу дискретности временной функции и периодичности ее спектра, в точках $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ и т.д. Поскольку функция $G(\omega)$ является нечетной, ее ряд Фурье не содержит косинусных членов, и коэффициенты ряда определяются выражением:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega) \sin(n\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\omega) d\omega.$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2/(n\pi), & n\text{- нечетное,} \\ b_n &= 0, & n\text{- четное.} \end{aligned}$$

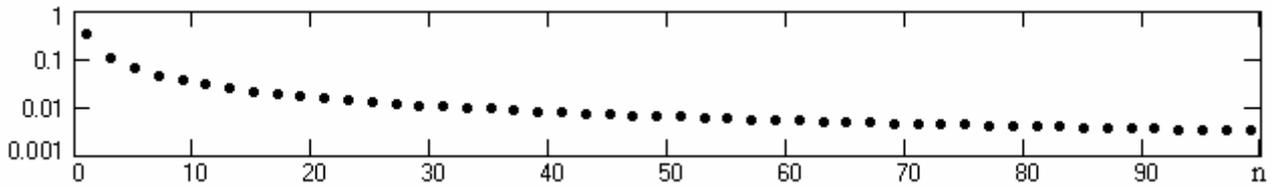


Рис. 3.1.1. Значения коэффициентов b_n .

Как видно на рис. 3.1.1, ряд коэффициентов b_n затухает очень медленно. Соответственно, медленно будет затухать и ряд Фурье функции $G(\omega)$:

$$G(\omega) = (2/\pi)[\sin \omega + (1/3)\sin 3\omega + (1/5)\sin 5\omega + \dots].$$

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(2n+1)\omega]/(2n+1). \quad (3.1.4)$$

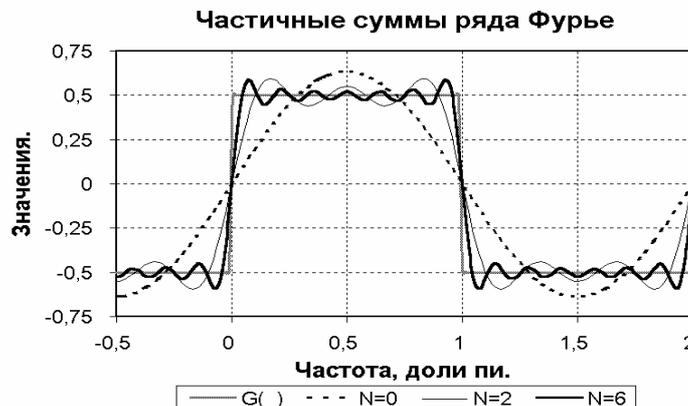


Рис. 3.1.2. Явление Гиббса.

Если мы будем ограничивать количество коэффициентов b_n , т.е. ограничивать значение N ряда Фурье функции $G(\omega)$, то суммирование в (3.1.4) будет осуществляться не до ∞ , а до значения N . Графики частичных сумм ряда (3.1.4) в сопоставлении с исходной функцией приведены на рис. 3.1.2. Они наглядно показывают сущность явления Гиббса.

При усечении рядов Фурье определенное искажение функции, разложенной в ряд Фурье, существует всегда. Но при малой доле энергии отсекаемой части сигнала этот эффект может быть и мало заметен. На скачках и разрывах функций он проявляется наиболее ярко.

Параметры эффекта. Ряд (3.1.4) при усечении можно записать в следующем виде:

$$G_N(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N \left[\int_0^{\omega} \cos((2n+1)\omega) d\omega \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \left[\sum_{n=0}^N \cos((2n+1)\omega) \right] d\omega.$$

Сумма косинусного ряда равна $\sin[2(N+1)\omega]/(2\sin \omega)$. Отсюда:

$$G_N(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{\sin 2(N+1)\omega}{\sin \omega} d\omega. \quad (3.1.5)$$

Для определения местоположения максимумов и минимумов осцилляций функции (3.1.5) приравняем к нулю ее первую производную (подинтегральную функцию), при этом:

$$\omega_k = \pm k\pi/(2(N+1)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Соответственно, амплитудные значения первых (максимальных) осцилляций функции приходится на точки $\omega_{k=1} = \pm\pi/(2(N+1))$, вторых (противоположных по полярности) - на точки $\omega_{k=2} = \pm\pi/(N+1)$. Период пульсаций равен $2\omega_{k=1} = \pi/(N+1) = \Delta\omega$, т.е. интервалу дискретизации спектра при равном количестве отсчетов оператора фильтра и его спектра. Функция пульсаций (при ее выделении) является нечетной относительно скачка. Соответственно, при скачке функции $G(\omega)$ на произвольной частоте главного частотного диапазона значения ω_k являются значениями $\Delta\omega_k$ относительно частоты скачка. Амплитудные значения функции в точках ω_1 и ω_2 (при подстановках ω_1 и ω_2 верхним пределом в (3.1.5)) практически не зависят от количества членов ряда N и равны:

$$G_N(\omega_1) \approx 0.5 + 0.09, \quad G_N(\omega_2) \approx 0.5 - 0.05.$$

Амплитуда последующих осцилляций постепенно затухает.

Таким образом, для усеченных рядов Фурье предельные значения максимальных выбросов по обе стороны от скачка и следующих за ними обратных выбросов при единичной амплитуде разрыва функции достигают соответственно 9% и 5% значения амплитуды скачка. Кроме того, сам скачок функции из собственно скачка преобразуется в переходную зону, длина которой между точками максимальных выбросов по обе стороны скачка равна $\pi/(N+1)$, а по уровню исходных значений функции на скачке (в данном случае от -0.5 до 0.5) порядка $(2/3)\pi/(N+1)$. Это явление типично для всех функций с разрывом.

Можно рассмотреть это явление и с других позиций. Как известно, произведение функций отображается в частотном представлении сверткой их фурье-образов. Отсюда:

$$h_n = h(n) \cdot \Pi_N(n) \Leftrightarrow H(\omega) * \Pi_N(\omega) = H_N(\omega). \quad (3.1.6)$$

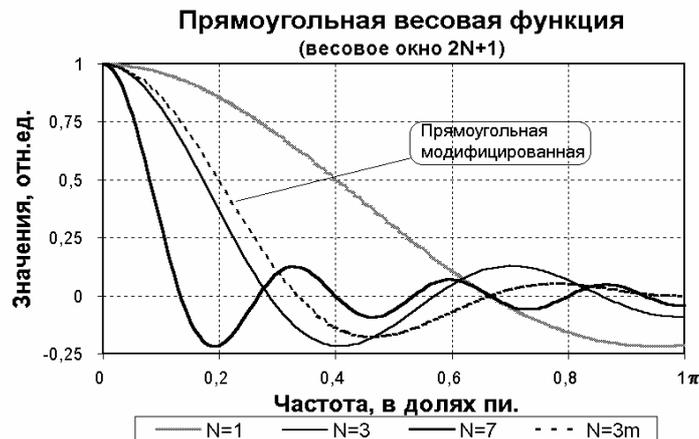


Рис. 3.1.3. Свертывающие (частотные) весовые функции.

Правая часть выражения (3.1.6) и отражает математическую сущность явления Гиббса. Ограничение массива функции определенным количеством членов (умножением на П-окно, прямоугольную селектирующую функцию) отображается сверткой частотной характеристики функции с частотной характеристикой селектирующей функции (которую часто называют свертывающей функцией). Частотная характеристика прямоугольной функции хорошо известна, как функция отсчетов $\text{sinc}(x)/x$, $x = \omega(2N+1)/2$, и для П-импульса длиной $2N+1$ приведена на рис. 3.1.3 (для ряда значений N). Чем больше N , тем уже центральный пик функции и, соответственно, будет меньше ширина переходной зоны, которая формируется на разрыве вместо скачка функции. Амплитуда самих осцилляций (по номеру от центрального пика) остается без изменений. Свертка этой частотной функции (Фурье-образа селектирующей функции) с частотной характеристикой усекаемых функций и порождает явление Гиббса на резких скачках частотных характеристик.

Последствия для практики. При расчетах фильтров и усечении размеров их операторов явление Гиббса является весьма нежелательным, т.к. приводит к искажению формы передаточных характеристик фильтров. В качестве примера рассмотрим явление Гиббса применительно к фильтру низких частот.

Попытаемся реализовать передаточную функцию фильтра следующего вида:

$$H(f) = 1, \text{ при } -0.2 \leq f \leq 0.2, \\ = 0, \text{ при } -0.2 > f > 0.2,$$

в главном частотном диапазоне от -0.5 до 0.5 . Функция четная, коэффициенты ряда Фурье представлены только косинусными членами:

$$a_n = 4 \int_0^{0.2} \cos(2\pi fn) df = 2 \sin(0.4\pi n)/(\pi n).$$

Передаточная функция:

$$H(f) = 0.4 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(0.4\pi n) \cos(2\pi fn)/(\pi n). \quad (3.1.7)$$

Результат усечения ряда Фурье (3.1.7) до $N = 7$ приведен на рис. 3.1.4.

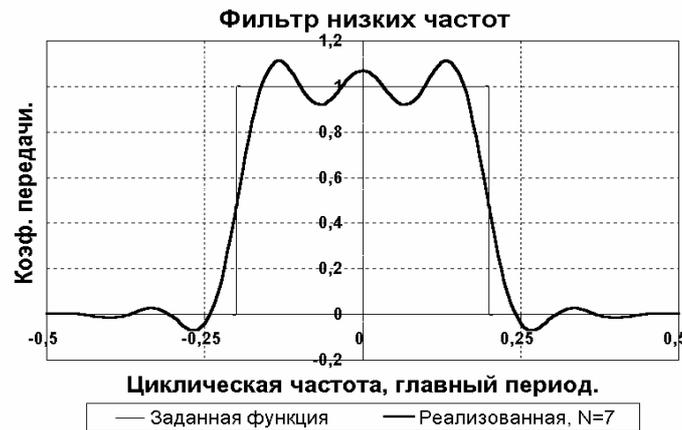


Рис. 3.1.4. Передаточные функции ФНЧ.

Как видно на рисунке, явление Гиббса существенно искажает передаточную функцию фильтра. Однако при реализации фильтров ограничение длины операторов фильтров является правилом их конструирования исходя из чисто практических соображений реализации.

Явление Гиббса имеет место при усечении любых числовых массивов. При обработке геофизических данных операция усечения числовых массивов, как одномерных, так и многомерных, относится к числу типовых. Вырезаются из профилей и площадей участки съемки с аномальными данными для их более детальной обработки и интерпретации. При анализе усекаются корреляционные функции, и соответственно свертываются с частотным образом весового окна вычисляемые спектры мощности, и пр. Во всех этих случаях мы можем столк-

нутья как с явлением Гиббса, так и с другими последствиями свертки функций в частотной области, в частности с цикличностью свертки, с определенным сглаживанием спектров усечаемых данных, которое может быть и нежелательным (снижение разрешающей способности), и полезным (повышение устойчивости спектров). В самих усечаемых данных мы не видим этих явлений, т.к. они проявляется в изменении их частотного образа, но при обработке данных, основной целью которой, как правило, и является изменение частотных соотношений в сигналах, последствия этих явлений могут сказаться самым неожиданным образом.

На рис. 3.1.5 показан другой пример искажений сигнала при усечении. Исходный аналоговый сигнал был вырезан из массива данных на интервале $k = \{0..60\}$, дискретизирован и переведен в цифровой форме в спектральную область для обработки. Дискретизация сигнала вызвала периодизацию его спектра, а дискретизация спектра вызвала периодизацию его динамического представления. Но на точках $k=0$ и $k=60$ в периодическом повторении исходного сигнала при усечении образовался скачок функции с бесконечным частотным спектром, а главный диапазон спектра дискретизированного сигнала ограничен интервалом его дискретизации ($\omega_N=1/2\Delta t$). Следовательно, спектр сигнала является искаженным за счет наложения спектров боковых периодов, а при восстановлении аналогового сигнала по спектру главного диапазона он восстанавливается из усеченного спектра. Это приводит к появлению явления Гиббса на обоих концах вырезанного сигнала (за счет периодизации сигнала), что наглядно видно на рис. 3.1.5.

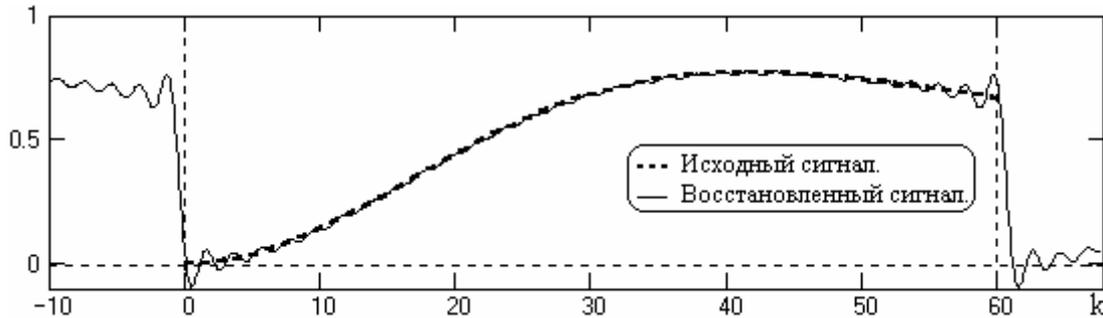


Рис. 3.1.5.

Практически это означает, что при частотной обработке вырезанного сигнала будет обрабатываться не спектр исходного сигнала, а спектр, которому соответствует сигнал, восстанавливаемый по данному спектру с наложенным явлением Гиббса.

3.2. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ /Л16/.

Естественным методом нейтрализации нежелательных эффектов усечения сигналов во временной области (и любой другой области аргументов) является изменение окна селекции сигнала таким образом, чтобы частотная характеристика окна селекции при свертке как можно меньше искажала спектр сигнала. Что последнее возможно, показывает, например, даже такая простая модификация прямоугольной функции, как уменьшение в два раза значений ее крайних членов. Фурье-образ модифицированной П-функции уже рассматривался нами в составе сглаживающих фильтров МНК 1-го порядка и отличается от обычной П-функции с тем же размером окна выходом в ноль на частоте Найквиста и несколько меньшей амплитудой осцилляций при небольшом расширении главного максимума. В силу тождественности всех свойств прямого и обратного преобразований Фурье все ниже рассматриваемое действительно и для нейтрализации явлений Гиббса во временной области при усечениях спектров.

Нейтрализация явления Гиббса в частотной области. Рассмотрение продолжим с формулы (3.1.2) при усечении произвольного оператора фильтра $h(n)$ прямоугольным селективным окном $\Pi_N(n)$. Период осцилляций суммы усеченного ряда Фурье (3.1.2) равен периоду последнего сохраненного либо первого отброшенного члена ряда. С учетом этого фактора осцилляции частотной характеристики могут быть существенно сглажены путем усреднения по длине периода осцилляций в единицах частоты, т.е. при нормированной свертке с

$\Pi_T(\omega)$ – импульсом, длина которого равна периоду осцилляций $\tau = 2\pi/(N+1)$. Эта свертка отобразится во временной области умножением коэффициентов фильтра $h(n)$ на множители, которые являются коэффициентами преобразования Фурье частотной Π -образной сглаживающей функции $\Pi_T(\omega)$:

$$\begin{aligned} H'_N(\omega) &= H_N(\omega) * \Pi_T(\omega) \Leftrightarrow h_n \sigma_N(n) = h(n) \Pi_N(n) \sigma_N(n), \\ p(n) &= \Pi_N(n) \sigma_N(n) = \text{sinc}(\pi n / (N+1)), \quad |n| \leq N. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Эта операция носит название сглаживания Ланцоша. Произведение $\Pi_N(n) \sigma_N(n) \equiv \sigma_N(n)$ представляет собой новое весовое окно селекции $p(n)$ взамен прямоугольного окна. Функцию $\sigma_N(n)$ обычно называют временной весовой функцией (окном). Вид и частотная характеристика весового окна Ланцоша в сопоставлении с прямоугольным окном приведены на рис. 3.2.1.

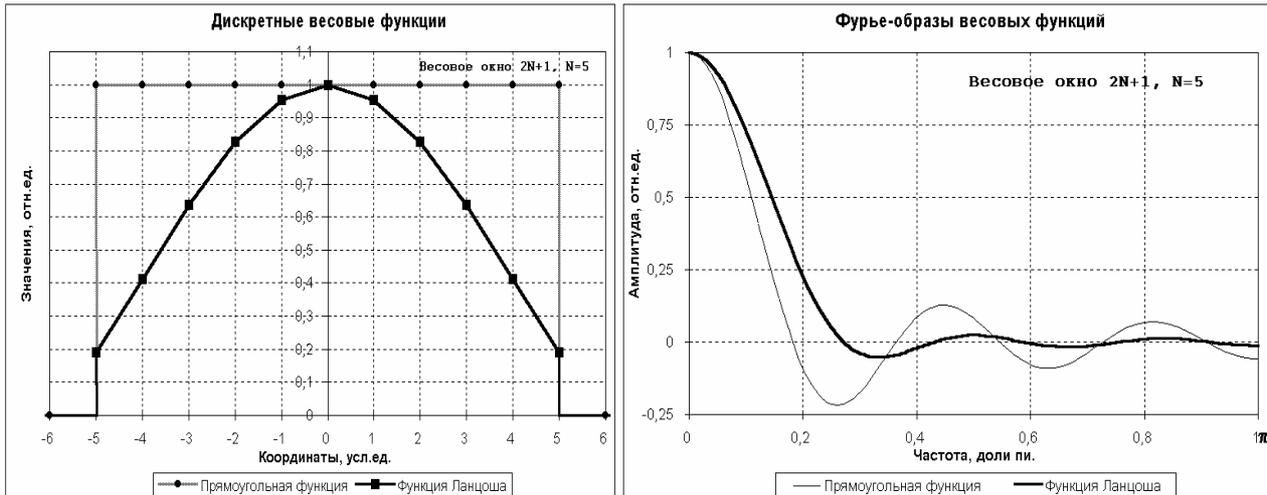


Рис. 3.2.1. Весовая функция Ланцоша.

Как видно на рисунке, частотная характеристика весовой функции Ланцоша по сравнению с Π -образной функцией имеет почти в 4 раза меньшую амплитуду осцилляций, но при этом ширина главного максимума увеличилась примерно на четверть. Отметим, однако, что если амплитуда осцилляций (в единицах амплитуды главного максимума) определяется выбранным типом весовой функции, то ширина главного максимума, которой определяется ширина переходной зоны (вместо скачка функции) зависит от размеров весового окна и соответственно может изменяться под поставленные условия (уменьшаться увеличением размера $2N+1$ весового окна).

Основные весовые функции. В настоящее время известны десятки различных по эффективности весовых функций. В идеальном случае хотелось бы иметь весовую свертывающую функцию с минимальной амплитудой осцилляций, высокую и узкую в главном максимуме, и при этом с минимальными размерами весового окна.

В таблицах 3.2.1 и 3.2.2 приведены формулы и основные спектральные характеристики наиболее распространенных и часто используемых весовых окон. Носители весовых функций, в принципе, являются неограниченными и при использовании в качестве весовых окон действуют только в пределах окна и обнуляются за его пределами (как и в (3.2.1)), что выполняется без дальнейших пояснений. Для упрощения записи формулы приводятся в аналитической, а не в дискретной форме, с временным окном 2τ , симметричным относительно нуля (т.е. $0 \pm \tau$). При переходе к дискретной форме окно 2τ заменяется окном $2N+1$, а значения t - номерами отсчетов n ($t = n\Delta t$). Следует заметить, что большинство весовых функций на границах окна ($n = \pm N$) принимают нулевые или близкие к нулевым значения, т.е. фактическое окно усечения данных занижается на 2 точки. Последнее исключается, если принять $2\tau = (2N+3)\Delta t$.

Таблица 3.2.1.

Временное окно	Весовая функция	Фурье-образ
Естественное (Π)	$\Pi(t) = 1, t \leq \tau; \Pi(t) = 0, t > \tau$	$\Pi(\omega) = 2\tau \operatorname{sinc}[\omega\tau]$
Бартлетта (Δ)	$b(t) = 1 - t /\tau$	$B(\omega) = \tau \operatorname{sinc}^2(\omega\tau/2)$.
Хеннинга, Ганна	$p(t) = 0.5[1 + \cos(\pi t/\tau)]$	$0.5\Pi(\omega) + 0.25\Pi(\omega + \pi/\tau) + 0.25\Pi(\omega - \pi/\tau)$
Хемминга	$p(t) = 0.54 + 0.46 \cdot \cos(\pi t/\tau)$	$0.54\Pi(\omega) + 0.23\Pi(\omega + \pi/\tau) + 0.23\Pi(\omega - \pi/\tau)$
Карре (2-е окно)	$p(t) = b(t) \cdot \operatorname{sinc}(\pi t/\tau)$	$\tau \cdot B(\omega) * \Pi(\omega), \Pi(\omega) = 1$ при $ \omega < \pi/\tau$
Лапласа-Гаусса	$p(t) = \exp[-\beta^2(t/\tau)^2/2]$	$[(\tau/\beta) \sqrt{2\pi} \exp(-\tau^2\omega^2/(2\beta^2))] * \Pi(\omega)$
Кайзера-Бесселя	$p(t) = \frac{J_0[\beta\sqrt{1-(t/\tau)^2}]}{J_0[\beta]}$ $J_0[x] = \sum_{k=1}^{\infty} [(x/2)^k/k!]^2$	Вычисляется преобразованием Фурье. $J_0[x]$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка

Таблица 3.2.2.

Характеристики спектров весовых функций

Параметры	Ед. изм.	Π-окно	Бартлетт	Ланцош	Хеннинг	Хемминг	Карре	Лаплас	Кайзер
Амплитуда:									
Главный пик	τ	2	1	1.18	1	1.08	0.77	0.83	0.82
1-й выброс(-)	%Гл.п.	0.217	-	0.048	0.027	0.0062	-	0.0016	.00045
2-й выброс(+)	- " -	0.128	0.047	0.020	0.0084	0.0016	-	0.0014	.00028
Ширина Гл. пика	$\omega\tau/2\pi$	0.60	0.89	0.87	1.00	0.91	1.12	1.12	1.15
Положения:									
1-й нуль	$\omega\tau/2\pi$	0.50	1.00	0.82	1.00	1.00	-	1.74	1.52
1-й выброс	$\omega\tau/2\pi$	0.72	-	1.00	1.19	1.09	-	1.91	1.59
2-й нуль	$\omega\tau/2\pi$	1.00	-	1.29	1.50	1.30	-	2.10	1.74
2-й выброс	$\omega\tau/2\pi$	1.22	1.44	1.50	1.72	1.41	-	2.34	1.88

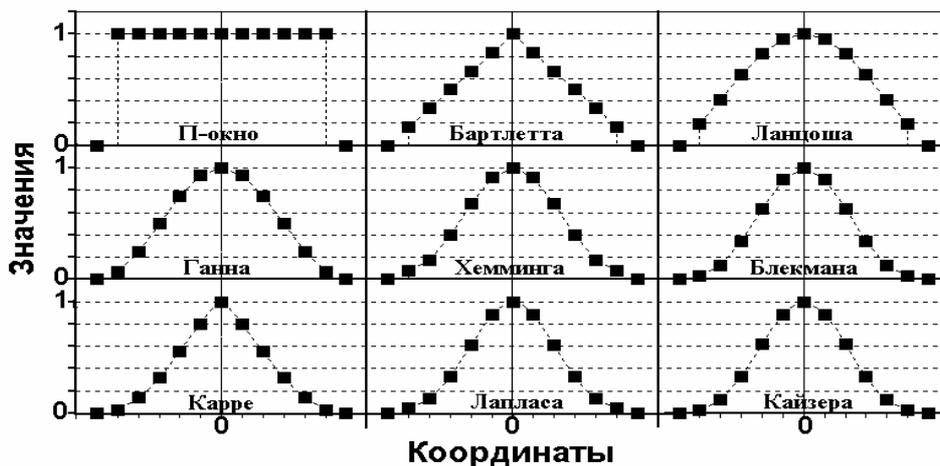
Дискретные весовые функции
(весовое окно $2N+1, N=5$)

Рис. 3.2.2. Примеры весовых функций.

Сравнительный вид весовых функций приведен на рис. 3.2.2. Расчет функций проведен с исключением нулевых значений на границах весового окна.

Спектральные окна Бартлетта и Карре не имеют отрицательных выбросов и применяются, в основном, для усечения корреляционных функций. Функция Карре не имеет нулей и представляет собой положительно убывающую функцию. Функции Хеннинга и Хемминга примерно одного класса, функция Хемминга является улучшенным вариантом функции Хен-

нинга. Частотные образы функций Бартлетта и Хемминга приведены на рис. 3.2.3.

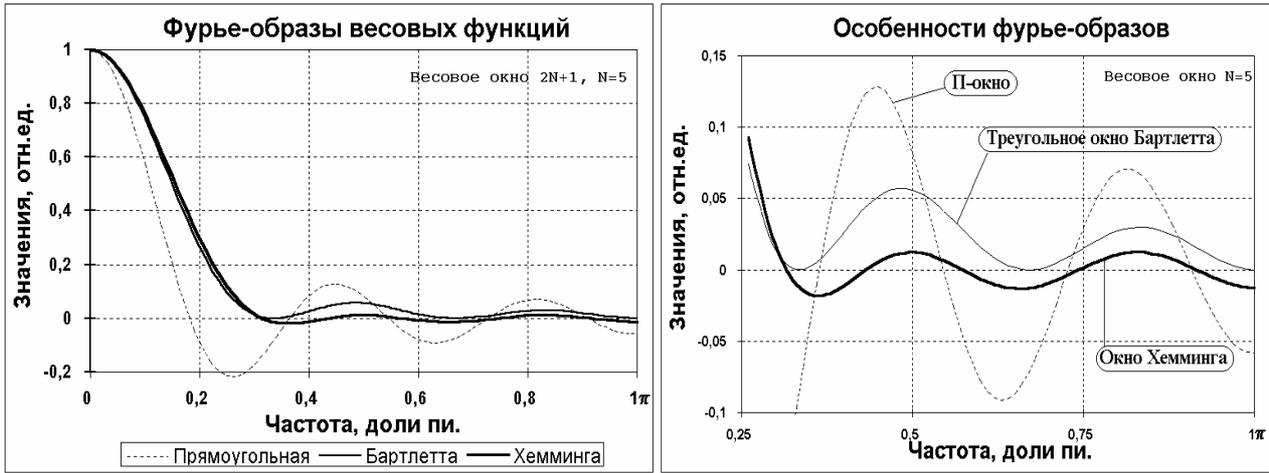


Рис. 3.2.3. Частотные функции весовых окон.

Весовые окна Лапласа и Кайзера - усеченные функции соответственно Гаусса и Бесселя. Степень усечения зависит от параметра β . Характеристики функций, приведенные в таблице 3.2.2, действительны при $\beta=3$ для окна Лапласа и $\beta=9$ для окна Кайзера. При уменьшении значения β крутизна главного максимума сглаживающих функций увеличивается (ширина пика уменьшается), но платой за это является увеличение амплитуды осцилляций.

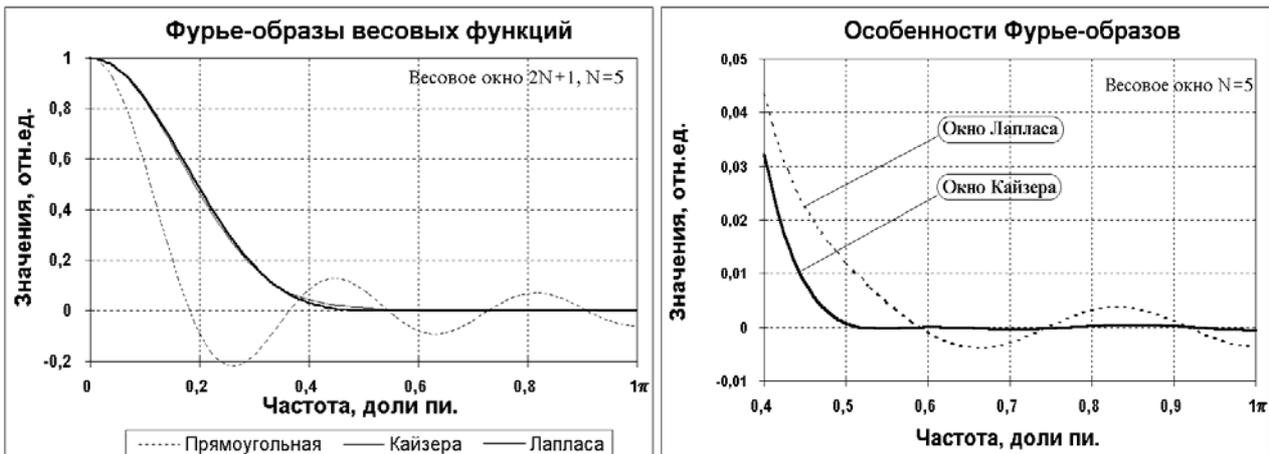


Рис. 3.2.4. Частотные функции весовых окон.

Функции Лапласа и Кайзера являются универсальными функциями. По-существу, их можно отнести к числу двухпараметровых: размером окна 2τ (числом N) может устанавливаться ширина главного максимума, а значением коэффициента β - относительная величина осцилляций на частотной характеристике весовых функций, причем вплоть до осцилляций П-окна при $\beta=0$. Это обусловило их широкое использование, особенно при синтезе операторов фильтров.

Попутно заметим, что достаточно гладкие частотные характеристики весовых функций позволяют использовать их в качестве сглаживающих низкочастотных НЦФ.

Курсовая работа 5 - Исследование характеристик специальных весовых функций (свертка П-окна с функцией Гаусса).

Курсовая работа 6 - Разработка методики использования весовых функций в качестве сглаживающих фильтров.

ЛИТЕРАТУРА

л16. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. - М.: Мир, 1983.

л24. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. - М.: Недра, 1987. - 221 с.