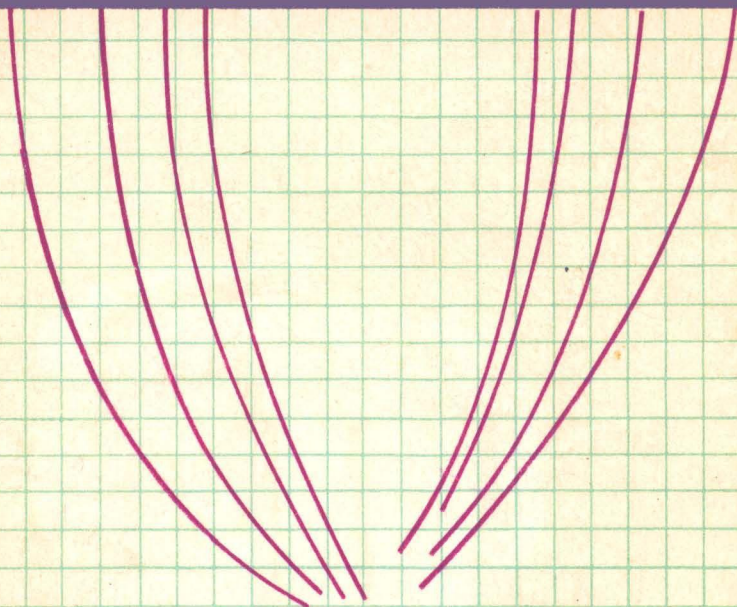


СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ

Решение задач в поле и лаборатории



Издательство «Мир»

STATISTICAL METHODS IN GEOLOGY

for field and lab decisions

R. F. CHEENEY

**Grant Institute of Geology,
University of Edinburgh**

London

George Allen & Unwin

Boston Sydney

Р. Ф. Чини

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ГЕОЛОГИИ**

Решение задач в поле и лаборатории

Перевод с английского
канд. геол.-мин. наук С. А. САНДОМИРСКОГО

под редакцией
канд. геол.-мин. наук Н. Н. ШАТАГИНА

МОСКВА «МИР» 1986

ББК 26.3:22.172

Ч 63

УДК 550.8.053:519.2

Чини Р. Ф.

Ч 63 Статистические методы в геологии: Пер. с англ. — М.:
Мир, 1986. — 189 с., ил.

Книга преподавателя Эдинбургского университета Р. Ф. Чини (Великобритания) содержит начальные сведения о статистической обработке геологических данных и представляет собой руководство, для освоения которого достаточно школьного курса математики. В ней рассмотрены общецелевые статистические средства, специальные методы, теоретические распределения и их доверительные интервалы, а также непараметрические методы. Подавляющее число примеров посвящено геологическим наблюдениям, которые часто не обладают количественной природой, и их статистическая обработка подразумевает использование непараметрических критериев. Большой интерес представляют разделы, посвященные статистическому анализу объектов, ориентированных в двух- и трехмерном пространстве.

Для геологов всех специальностей, аспирантов и студентов.

Ч $\frac{1904010000-291}{041(01)-86}$ 113—86, ч. 1

ББК 26.3:22.172

Редакция литературы по геологии

© R. F. Cheeney 1983

This book was originally published in the English language by George Allen & Unwin (Publishers) Ltd., London, England

© перевод на русский язык, «Мир», 1986

Предисловие редактора русского перевода

Нередко случается, что ученый — крупный специалист в определенной области знания — стремится создать руководство, в котором он остро нуждался, когда делал первые шаги на избранном пути. Если круг проблем, интересующих такого ученого, достаточно широк, если он обладает даром педагога и если он не лишен литературных способностей, то из-под его пера выходит книга, которой уготована счастливая судьба — широкая читательская аудитория и долгая жизнь. Думается, что книга Р. Ф. Чини относится к произведениям такого рода.

Р. Ф. Чини — известный шотландский геолог — на собственном обширном опыте убедился, сколь полезно было бы его коллегам иметь руководство по статистическим методам, которые применимы и в лаборатории за микроскопом, и в поле непосредственно на обнажении. Зная пугливое отношение геологов к изощренным формульным выкладкам, он решил так построить книгу, чтобы она была доступна читателю с минимальной математической подготовкой. Это заставило Чини вести изложение в упрощенном «рецептурном» стиле: по сути, книга представляет собой собрание тщательно разобранных примеров применения статистических методов к геологическим задачам. При этом решение задач разделено на отдельные подробно описанные шаги; затем читателю предлагаются разные наборы данных, которые он должен попытаться обработать самостоятельно по той же схеме, шаг за шагом. Большое внимание уделено вычислительной стороне. Книга снабжена всеми статистическими таблицами, необходимыми при выполнении описанных в ней приемов. Одним словом, автор постарался, чтобы ею можно было пользоваться как справочником.

Предпочтение в книге отдано тем статистическим методам, вычисления по которым, по словам самого Чини, «могут разместиться на обратной стороне почтового конверта» и лишь в отдельных случаях требуют обращения к калькулятору. Не лишено оснований опасение, что из-за нарочитой приверженности автора к ручному счету иному читателю в наш машинный век его книга на первый, поверхностный, взгляд может показаться архаичным документом «докомпьютерной эры». Но это явно поспешное суждение быстро развеется при более глубоком знакомстве с книгой. Во-первых, известно, что геолог, будучи в поле, предпочитает носить в рюкзаке образцы пород, а не ЭВМ, а, во-вторых,

как это очень хорошо показано Чини, сам характер геологических наблюдений диктует выбор статистических критериев, вычисления которых, действительно, чрезвычайно просты.

В книге, такой небольшой по объему, автору удалось продемонстрировать использование около двух десятков статистических критериев, причем подавляющее число примеров посвящено чисто геологическим задачам: изучению прибрежных галек, полигональной формы столбчатой отдельности в базальтах, порфиробластов в изверженных и метаморфических породах, окаменелостей, ориентировки различных структурных элементов и т. п. Это необходимо подчеркнуть, поскольку во многих книгах отечественных и зарубежных авторов большая часть изложения относится к задачам геохимическим, петрохимическим и геофизическим, где наблюдения сами по себе являются количественными; их значения можно сложить, умножить, поделить, т. е. произвести с ними те математические манипуляции, которые, вроде бы, совершенно необходимы при применении статистики в геологии. Геологические же наблюдения часто не обладают такой количественной природой, и их статистическая обработка подразумевает широкое использование так называемых непараметрических критериев. В книге достаточно подробно рассказано, что они собой представляют. Здесь мы лишь подчеркнем их некоторые преимущества перед традиционными статистическими методами, которые обычно обобщенно называют гауссовскими: непараметрические методы применимы для обработки данных, не обладающих количественной определенностью; они незаменимы, когда неизвестен закон распределения изучаемых случайных величин; для них характерна меньшая чувствительность к «засорению» статистических данных, к влиянию грубых ошибок, попавших в статистический материал. Сказанное вовсе не значит, что гауссовские методы уже пора сдавать в архив. Там, где они применимы, они, конечно, дают более точные результаты, поэтому и впредь будут очень широко использоваться в геологических приложениях.

Книга Чини, пожалуй, первая в литературе по математической геологии, где непараметрическим методам уделено основное внимание. В этом плане она будет полезна не только геологу, начинающему применять статистические методы, но и читателю, более умудренному в знании математической статистики. Приходится отметить, что «рецептурный» стиль изложения дал Чини возможность рассмотреть широкий круг примеров, но некоторые принципиальные вопросы остались в тени. В частности, почти нигде не поясняется, почему из нескольких возможных статистических критериев предпочтение отдано именно этому, а не какому-то другому. Поэтому читателю, столкнувшемуся в своей практике с той или иной геологической задачей, которую желательно

решить описанными методами, придется отыскивать в книге близкую по смыслу. Вряд ли соответствующий аналог найдется для всех случаев. Чтобы расширить спектр задач, решаемых непараметрическими методами, читателю можно рекомендовать книгу Р. Руниона¹, которая также рассчитана на читателя с минимальной математической подготовкой, но в основном содержит социологические и экономические задачи. С этой же целью можно обратиться к книге, непосредственно адресованной геологам² и посвященной важному разделу непараметрической статистики — ранговым критериям. Правда, по доступности она явно уступает данной книге.

Р. Ф. Чини мог бы в своем предисловии не подчеркивать, что книга написана не математиком, а геологом. Об этом легко догадываешься, когда обнаруживаешь у автора профессиональное владение геологической терминологией, тонкое понимание сути геологических задач, не свойственное пресным математическим трудам обилие «лирических» отступлений, одобренных своеобразным юмором, смысл которого, надо надеяться, удалось передать переводчику, и, главное, хорошо дозированную долю скептицизма в отношении выводов, получаемых на основе описанных статистических методов. Из замечаний Чини, разбросанных по тексту, можно сложить следующую общую рекомендацию, которой хотелось бы закончить это предисловие: при всей той пользе, которую, несомненно, приносят изложенные методы, в любом конкретном случае их применения следует помнить, что они лишь набор инструментов в сложном поиске истины, а отнюдь не сама истина, и необходимо разумное критическое отношение к полученным статистическим выводам, их неперемное сопоставление с другими подходами и приемами геологических исследований.

Н. Шатагин

¹ Р. Рунион. Справочник по непараметрической статистике. — М.: Финансы и статистика, 1982.

² Коган Р. Н., Белов Ю. П., Родионов Д. А. Статистические ранговые критерии в геологии. — М.: Недра, 1983.

Предисловие

Перед вами книга по статистике, написанная не статистиком, а полевым геологом. После того как в первой же фразе я так дискредитировал книгу, позвольте мне попытаться восстановить хотя бы видимость ее полезности. Геология преимущественно описательная наука, и поэтому прогресс как в теоретическом, так и в прикладном ее аспектах зависит от умелой документации. Тщательные описания развивают нашу проникаемость, экспериментальное чутье и творческую интуицию. Постоянно множатся теории и накапливаются данные, и лишь правильные интерпретации обеспечивают уверенность в том, что усилия направлены в нужное русло. Мы вынуждены принимать решения; чем ближе к месту проведения наблюдений, тем лучше. Когда мы осматриваем обнажение, керн или любой другой объект, мы, возможно, видим 5% того, что наблюдаем; а в том, что видим, понимаем тоже, быть может, 5%. Мы должны развивать свою наблюдательность и быть уверенными в своих гипотетических объяснениях. Именно статистика приходит нам на помощь как инструмент для обработки данных и принятия решений. Когда нам удастся тотчас же установить, что данное объяснение приемлемо, это означает то продвижение вперед, на котором могут базироваться дальнейшие исследования. Продвижение зависит от сбора данных, что часто бывает дорогостоящим. Можем ли мы повысить эффективность и точность решений путем установления связи между количеством данных и поставленными задачами, или, наоборот, можем ли мы извлекать больше информации из уже имеющихся данных? Ответом на оба вопроса будет: «весьма вероятно, что да». Обычно нам нужны простые ответы на простые вопросы, но пути к ним могут быть дьявольски извилистыми.

Итак, об этой книге. Какой уровень знания математики вам необходим, чтобы понимать ее? Не намного больше школьной алгебры и тригонометрии, которые вы используете, читая карты и выполняя основную работу по съемке, и без которых вы, вероятно, заблудились бы в трех соснах. Если ваше умение работать с картой включает также обработку стереографических проекций, тем лучше, потому что в гл. 9 (посвященной ориентировкам в трехмерном пространстве) я немного усложняю изложение. Здесь также используются некоторые основы матричной алгебры, но все, что потребуется для этого, включено в словарь терминов.

Непременно разбирайте примеры и упражнения, тем более, что их немного. Все они реальны до такой степени, что в некоторых из них я сохранил английские единицы, потому что именно в них выполнялись первичные измерения. В этих примерах также ясно виден шотландский колорит: все они составлены на материалах, собранных в окрестностях Эдинбурга. Нам приятно думать, что именно здесь, в работах Дж. Геттона, зародилась классическая геология, но я лично не считаю ее какой-то исключительно необычной и уж во всяком случае уникальной. Я хочу особо подчеркнуть, что раньше, чем вы доберетесь до конца первой главы, в своем собственном «огороде» вы найдете такие же возможности для упражнений. Поэтому я надеюсь, что рассеял впечатление об ограниченности приводимых примеров и вселил в вас желание искать собственные примеры, и чем скорее вы это сделаете, тем лучше. Рассматриваемые мною методики могут быть применимы повсюду.

Как, наконец, я представляю себе вас, своих читателей, и как вам пользоваться этой книгой? Вы можете быть студентом всего лишь с одним годом геологической жизни за плечами, или геологом-производителем, или геологом-исследователем. Хотя изучение статистических методов с трудом проникает в геологические курсы, тем не менее это происходит повсеместно, и моя книга, быть может, будет способствовать заполнению небольшого пробела. Пользуйтесь ею как учебником, как справочником для ссылки, но главным образом как руководством. Цель в том, чтобы вы повсюду таскали ее с собой, и чем больше она будет истрепана, тем больше я буду удовлетворен. Когда перед вами встает задача, вынимайте эту книгу, карандаш, тетрадь, можно и калькулятор, и решайте ее прямо на месте. Обязательно пишите мне, если вы найдете какие-нибудь ошибки (или, следовало бы сказать, *когда* вы их найдете). Я несу полную ответственность за эту книгу вплоть до того, что все таблицы, на которые имеются ссылки, за исключением двух небольших, я сам пересчитал. По всем методикам написаны программы для калькулятора фирмы «Хьюлетт Паккард» HP41C, но я не привожу здесь их тексты, потому что в вашем распоряжении будут другие вычислительные средства. Я жду того дня, когда HP41C станет «геологическим молотком»!

Р. Ф. Чини

Пеникуик, Шотландия
Ноябрь 1982

Благодарности

Написание книги — командное достижение. Моя «команда» была небольшой, но работала эффективно. Упоение от доставшейся ей роли должна испытывать миссис Патриция Стюарт, которая с огромным терпением полностью перепечатала первый вариант рукописи, правда, иногда не без ворчания на своем родном ирландском по поводу причудливости математических формул. Усердно трудились мои рецензенты, корректируя, давая советы и подгоняя. Д-р Роджер Мейсон с геологического факультета Лондонского университетского колледжа основательно помог расчистить словесные джунгли, которые скрывали самый ранний вариант рукописи. Д-р Найджел Вудкок с факультета наук о Земле Кембриджского университета оказал мне особую помощь в вопросах статистики ориентировок. Множество советов давал д-р Ли Белбин из Института биологических исследований CSIRO (Канберра), и ему я особенно признателен за замечания по поводу параметров, степеней свободы и вычислительных методик. Д-р Дэн Мёрям из Государственного университета Уичита (шт. Канзас), с которым мы переписывались, дал мне возможность глубоко прочувствовать различия в английском языке Шотландии и Северной Америки. Боюсь, что я не выполнил ряда его предложений, и обращаюсь к североамериканским читателям с просьбой не придавать значения различиям в написании некоторых терминов. Он также сделал множество частных замечаний, слишком многочисленных, чтобы приводить их здесь. Наконец, д-р Джекоб Карц из Государственной геологической службы Израиля, неоценимый постоянный помощник, сделал особенно глубокие замечания: я чувствую себя в какой-то степени должником в связи с многими его предложениями.

После рецензирования перепечатку рукописи в сжатые сроки выполнили миссис Марсия Райт (введение, гл. 1 и 2), миссис Патриция Скраттон (гл. 3—5), миссис Алла Хипкин (гл. 6—8) и миссис Маргарет Свифт (гл. 9 и 10).

Роджер Джонс, Джоффри Палмер, Элизабет Ройял и их коллеги по издательству «Джордж Аллен энд Ануин» способствовали осуществлению этого проекта.

Список таблиц

2.1. Результаты бросания одной монеты	42
2.2. Результаты бросания двух монет	42
2.3. Результаты бросания трех монет	44
2.4. Определение критического значения R	46
2.5. Вероятности ошибок при проверке гипотез	51
2.6. Односторонние критические значения статистики критерия R	52
3.1. Многоугольные поперечные сечения базальтовых столбиков из Йеллоукрейгса (Ист-Лотиан, Шотландия) и глиняных табличек из Нью-Хейвена (Коннектикут, США)	56
3.2. Формулы для определения приближенных критических значений статистики критерия Колмогорова—Смирнова D	58
4.1. Таблица сопряженности для пунктов наблюдения порфиروبластовых гнейсов	62
4.2. Таблица сопряженности с символическим обозначением частот	63
4.3. Таблица сопряженности, показывающая расхождение между наблюдаемыми и ожидаемыми частотами	64
4.4. Таблица сопряженности, получающаяся на раннем этапе изучения порфиروبластовых гнейсов	68
4.5. Таблицы сопряженности, больше отличающиеся от наблюдаемой, чем ожидаемая таблица сопряженности	69
4.6. Критические значения χ^2 для критических областей с $\alpha=0,05$ и $\alpha=0,01$ для классификаций с разными степенями свободы ν	70
4.7. Десятичные логарифмы факториалов чисел от 1 до 50	71
5.1. Максимальные диаметры (X) галек в выборке объемом 134 наблюдения	76
5.2. Вычисление значений переменной X для различных значений стандартизованного отклонения z	78
5.3. Критические значения стандартизованного отклонения	79
5.4. Интегральная функция распределения Гаусса	79
5.5. Критические значения t -статистики Стьюдента	83
6.1. Соотношение различных номинальных и порядковых методик	88
6.2. Выполненные в порядковой шкале замеры длины прибрежных галек (в выборке объемом 72 наблюдения)	89
6.3. Частоты галек в двойной классификации в зависимости от типа породы и длины	91
6.4. Длина и ширина 24 долеритовых галек, измеренные в порядковых шкалах	97
6.5. Критические значения статистики U критерия Манна—Уитни	98
7.1. Вычисление коэффициента корреляции Пирсона r , констант регрессии и фидуциальных границ	105
8.1. Критические значения m в критерии Ходжеса—Айне	111
8.2. Ориентировки устьев 36 раковин гониатитов в слое породы	111

8.3. Критические значения статистики критерия V_N	113
8.4. Критические значения видоизмененной статистики критерия U^{*2}	113
8.5. Критические значения $\bar{R}$ в критерии равномерности Рэля	117
8.6. Ориентировки (по модулю 180°) стеблей растений и устьев раковин гониатитов в одном слое	120
8.7. Критические значения дисперсионного отношения Фишера F_{v_1, v_2}	121
9.1. Формулы перехода от обычных геологических координат к направляющим косинусам	128
9.2. Замеры ориентировок слоистости и кливажа в разных пунктах Южной Шотландии	130
9.3. Классификация распределений Бингхема	137
9.4. Вычисление собственных векторов и собственных чисел по выборке ориентировок осей	138
A.1. Этапы вычисления собственных чисел и собственных векторов	167
Б.1. Ориентировки длинных осей порфиробластов амфибола в плоскости расщепления в мусковитовых сланцах	172
Б.2. Направления осей двусторонней симметрии раковин трилобитов (сохранившихся в плоскости напластования), измеренные по часовой стрелке от произвольно выбранного направления	172
Б.3. Искусственно сформированный стратиграфический разрез, состоящий из слоев аргиллита, известняка и песчаника	173
Б.4. Искусственно сформированный стратиграфический разрез, состоящий из пластов аргиллита, известняка и песчаника	175
Б.5. Длины и высоты раковин двусторчатых моллюсков рода <i>Gryphaea</i> в двух выборках	176
Б.6. Ориентировки линейных структурных элементов и слоистости в складчатой формации кварцитов	177

Список критических значений, используемых выражений и т. п.

Биномиальный критерий
Критерий Колмогорова — Смирнова
Точный критерий Фишера
Критерий хи-квадрат (χ^2)
Стандартизованное отклонение
 t -статистика Стьюдента
Критерий серий Вальда — Вольфовитца
 U -критерий Манна — Уитни
Критерий Крускала — Уоллиса
Коэффициент корреляции Кендалла τ
Критерий Ходжеса — Айне
Критерий равномерности Куипера
 U^2 -критерий Ватсона
Критерий Рэля (круговой)
Доверительный сектор кругового среднего направления
Равенство круговых средних направлений
Равенство параметров концентрации (круговых)
Дисперсионное отношение Фишера
Доверительный конус сферического среднего направления
Равенство параметров концентрации (сферических)
Равенство сферических средних направлений

Замечания о вычислениях по формулам

При вычислениях по некоторым из наиболее сложных формул, встречающихся в этой книге, важна последовательность операций, состоящая в следующем:

1) сначала в приводимом ниже порядке вычисляются выражения, заключенные в самые внутренние скобки;

2) затем производится возведение в степень, извлечение квадратного корня и вычисление логарифмов, синусов, косинусов и тангенсов;

3) затем идет умножение ($\times$) или деление, выполняемое слева направо;

4) сложение или вычитание, выполняемое слева направо.

Обратите внимание, что действия, имеющие равный приоритет, выполняются слева направо. Если вы пользуетесь электронным калькулятором, то должны быть уверены, что знаете, какие приоритеты для основных арифметических действий заложены в вашу машину, потому что в некоторых калькуляторах умножение и деление имеют приоритет над сложением и вычитанием, а в некоторых — не имеют его.

Пример. При изучении дифракции рентгеновских лучей мы часто пользуемся формулой закона Брэгга: $\lambda = 2d \sin \theta$; переписанная для вычисления межплоскостных расстояний, она имеет вид

$$d = \lambda / (2 \sin \theta).$$

Полагая, что $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$ и $\theta = 35,2^\circ$, устанавливаем на калькуляторе режим выдачи результатов с тремя десятичными знаками и сначала вычисляем выражение, стоящее в скобках:

$$2 \sin \theta = 2 \sin 35,2^\circ = 2 \times 0,576 = 1,152.$$

Затем выполняем деление:

$$d = 1,54 / 1,152 \approx 1,336 \text{ \AA}.$$

Введение

В этом кратком введении я преследую четыре цели: 1) обсудить те значения, которые вкладываются в термин *статистика*, и предложить несколько видов приложений, связанных с каждым из них; 2) описать структуру книги, в особенности те ее стороны, которые не совсем обычны, и продемонстрировать логическую связь между главами; 3) определить тот круг условий, в которых эти методы могут быть применимы; 4) показать ту роль, которую могут выполнять калькуляторы и ЭВМ.

Разные люди под «статистикой» понимают совершенно разные вещи, и, конечно, она вызывает самое разное отношение к себе: от полного неприятия через приятие с подозрительностью, а затем с осторожностью до необузданного восхищения. Подобным же образом характер ее применения меняется от вредного злоупотребления до скрытой фальсификации. Позвольте мне попытаться проложить «средний курс» (и, конечно, обосновать его), начав с предпосылки, что «статистика» и статистические методы относятся к одной из четырех рассмотренных ниже категорий.

1. Во-первых, существует обыденное представление о «статистике» как о данных (не обязательно числовых), собираемых ради них самих и представляемых в графической или табличной форме в качестве *полного описания* совокупности объектов. Примерами такого понимания статистики могут, например, служить, список всех ископаемых остатков, собранных на каком-либо обнажении, или стереографическая проекция, изображающая ориентировки всех даек в трехмерном пространстве на исследуемой территории. В эмпирических науках накопление таких данных создает основу для любых исследований, и они могут представлять собой также конечный результат, если таковы рамки исследований.

2. Для *обобщенного представления* какой-то совокупности могут быть использованы некоторые числовые параметры, вычисляемые из исходных данных. Эти параметры обычно вычисляются по простым математическим формулам. Приведем два примера: *соотношения* различных видов ископаемых организмов во всей совокупности в целом и *средняя* ориентировка даек на исследуемой территории. Другими примерами таких параметров служат широко используемые *среднее значение* (мера среднего значения переменной величины) и *стандартное отклонение* (ме-

ра рассеяния переменной величины относительно ее среднего значения). Преимущества вычисления таких параметров очевидны: одним или двумя описательными параметрами можно заменить целую таблицу чисел. Хотя при этом теряются многие детали, сжатое представление может быть очень полезным.

3. Возможно, одно из наиболее значительных применений статистики заключается в ее использовании для *проверки гипотез*, на что делается упор в этой книге. Развивая предыдущие примеры, можно задать следующие вопросы. Является ли доля брахиопод в ископаемом сообществе в данном обнажении *значимо отличной* от доли брахиопод в каком-либо другом конкретном обнажении? *Значимо ли отличается* средняя ориентировка даек на данной территории от средней ориентировки даек к северу от нее? Как показано в гл. 2, требование, чтобы описательные параметры (или какие-либо другие) значимо отличались от места к месту, сводится к вычислению значения вероятности того, что эти параметры одинаковы, а затем доказывается, что эта вероятность столь мала, что ею можно спокойно пренебречь. Успешное применение методов проверки гипотез позволяет такую субъективную фразу, как «...возможно, что...», заменить фразой «...вероятно, что...», причем эту вероятность можно определить количественно, что делает данное утверждение вполне объективным.

4. Наконец, когда в исследовании приводится описательный параметр или числовая характеристика, полученная в ходе эксперимента (например, результат химического анализа), очень полезно иметь возможность охарактеризовать наше доверие к приводимому числу. Мы никогда не можем рассчитывать на то, что такое число, будь оно описательным параметром или результатом эксперимента, точно совпадает со своим истинным значением: это всегда должно быть специально оценено. Часто можно вычислить, насколько близко оно к истинному значению. Продолжая наш предыдущий пример, можно сказать следующее: «истинная» доля брахиопод в данном ископаемом сообществе находится между такими-то нижним и верхним пределами с такой-то вероятностью; истинная средняя ориентировка этих даек располагается внутри конкретной области стереограммы с такой-то вероятностью.

Теперь позвольте мне описать структуру книги и круг затронутых в ней вопросов, что в обобщенном виде показано на рис. 0.1. Поскольку основное внимание я уделяю здесь методам, считаю для себя извинительным воспользоваться грубой аналогией. У меня есть старый автомобиль и набор инструментов. Цель состоит в том, чтобы использовать набор инструментов для поддержания автомобиля «на ходу». Априорное знание состоит в том, что заранее известно, как работает автомо-

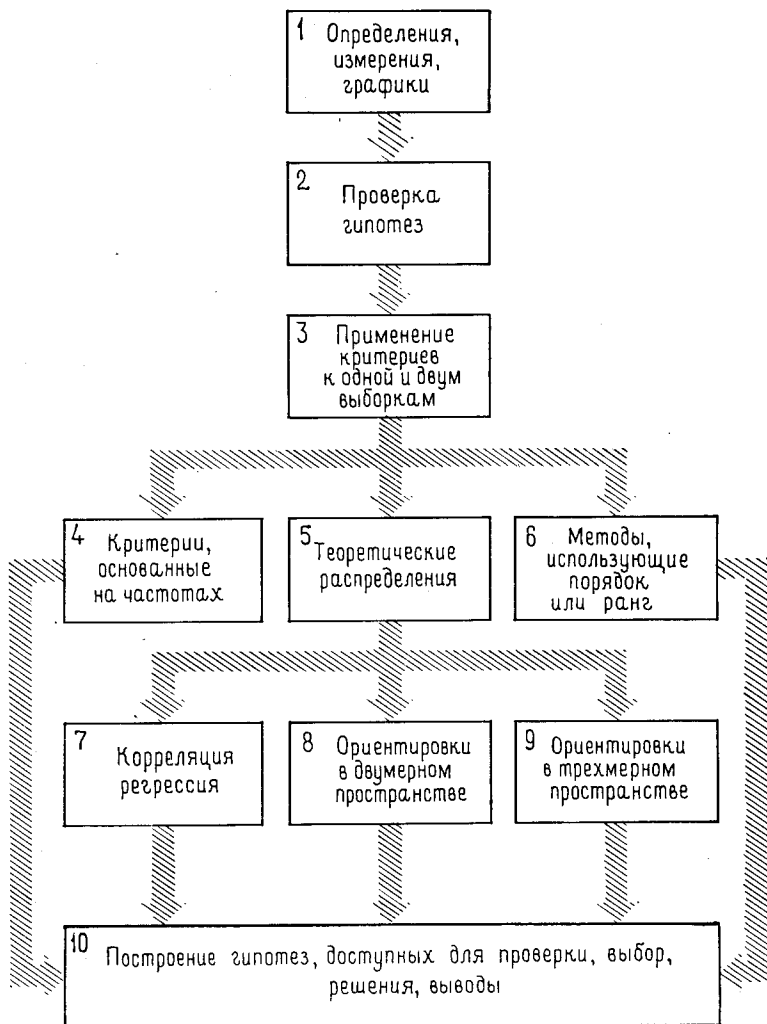


Рис. 0.1. Логические, хотя и не вполне обоснованные пути изучения книги. Цифры обозначают соответствующие номера глав.

биль в нормальном состоянии, а набор инструментов — это средство для поддержания его нормальной работы. Автомобиль имеет несколько систем: двигатель — сцепление — коробка перемены передач — тормозная и электрическая системы — колеса — шины и т. п. Эти системы представляют собой различные, но взаимозависимые области моего априорного знания. Время от времени одна из этих систем будет выходить из строя. Иногда

я ставлю какую-то отдельную запчасть, иногда заменяю всю систему целиком. Так и в геологии: одна из выношенных мною гипотез может содержать слабое, но заменяемое звено или оказаться полностью необоснованной. Во всяком случае в багажнике лежит инструмент, и в любой момент, когда он мне понадобится, я могу достать его.

В этом наборе есть инструменты общего назначения, такие, например, как гаечные ключи и отвертки, и специализированные, например, вольтметр и манометр. Я знаю, что собой представляют эти инструменты и кое-что о том, как ими пользоваться, но меня не слишком волнует то, как они изготовлялись. Я вижу, что отвертка сделана из металла, и при необходимости мог бы найти ей заменитель, но вольтметр для меня — лишь «черный» ящик со шкалой. Так же обстоит дело со статистикой: некоторые из более простых представлений мы имеем возможность проверять, но можем принять и другие представления, зная, что они работают и определенно будут полезны, располагая при этом не более чем кратким списком правил.

В гл. 1—3 описываются «инструменты общего назначения» и даются самые общие указания по их использованию. Рассмотрим это конкретнее. В гл. 1 определяются некоторые важные термины, предлагается измерение рассматривать как обобщенный способ присвоения чисел объектам и вводятся способы представления этих чисел в виде наглядных графиков. В гл. 2 описывается схема методики проверки гипотез, а в гл. 3 показано, как эта схема может быть применена для проверки согласия либо между наблюдениями и теоретической моделью, либо между двумя совокупностями наблюдений. Если продолжать аналогию с автомобилем, то в гл. 4—9 мы имеем дело с различными системами, причем показано, как могут быть использованы «инструменты общего назначения», и вводятся в рассмотрение «инструменты специального назначения», применение которых узко ориентировано на отдельные системы. Системы связаны между собой (на рис. 0.1 эти связи показаны стрелками). Обратите, например, внимание, что чтение гл. 5 является необходимым условием для восприятия гл. 7—9.

Закончив «ученичество» и научившись пользоваться набором «инструментов для обслуживания различных систем», мы сможем понять, как эти системы могут действовать совместно, заставляя двигаться старый автомобиль. Хотя мы теперь основательно знакомы с «набором инструментов», нам еще следует приобрести опыт работы с ним, научиться правильно решать конкретные задачи и избегать серьезных ошибок. В действительности мы все равно будем делать ошибки, но если все-таки сможем внимательно обсуждать «результаты игры», то от таких занятий будет польза. В гл. 10 приводится обзор методик и де-

лаются некоторые выводы относительно нашего подхода к статистическим аспектам исследований. По мнению некоторых рецензентов, гл. 10 следовало сделать первой. Во всяком случае для такого мнения есть свои веские основания, но я окончательно решил начать описание набором инструментов, а закончить старым автомобилем. Преимущество этого я вижу в том, что по дороге мы можем выбирать различные «инструменты» и пробовать их на не связанных друг с другом случайных работах, результат которых не очень существен, но приобретаемый при этом опыт полезен для изучения и понимания самого процесса.

Наконец, приведем замечание, касающееся частного момента в структуре книги: во многих используемых методиках требуется, чтобы мы обращались к формулам или таблицам значений некоторых переменных. Я поместил их в самом тексте в тех местах, где они упоминаются, а не выделил в отдельное приложение. Полный их перечень приведен в начале книги.

Далее, почему и где используют геологи эти статистические методы? Большинство полевых и лабораторных геологических работ состоит в сборе данных, которые можно просто записать или изобразить на карте. Поскольку эти данные имеют чисто описательное назначение, они поначалу могут быть организованы на не очень высоком уровне. Но вскоре мы начнем строить гипотезы, опираясь на эти данные, чтобы разработать интерпретацию, которая могла бы внести осмысленность в несвязанные между собой на первый взгляд «сюжетные линии». Это должно способствовать развитию нашего понимания, которое мы можем передать другим в более доступной форме. На самом низком уровне интерпретации наши гипотезы, вероятно, будут примитивными — чуть лучше, чем самые общие впечатления, — и в своем первоначальном виде редко пригодными для статистической проверки. Однако с самого начала следует стремиться к объективности. Поэтому нам надо отбирать такие методы, которые позволяли бы исследовать специфические свойства наших данных, такие например, присутствие которых может быть затенено или совсем скрыто. Если методы годятся для исследований и удобны в применении, то нам нужна лишь подходящая статистическая теория, для того чтобы понимать, как строить статистически проверяемые гипотезы. Непосредственная проверка этих гипотез в поле или в лаборатории позволяет сформулировать объективное объяснение или сделать обоснованный вывод, что продвигает нас к следующему этапу исследования. Чем ближе к месту сбора данных мы в состоянии делать это, тем лучше, потому что, концентрируя внимание в этом направлении, мы действительно совершенствуем способность к восприятию и объективность подхода. Двигаясь дальше (и это очень важно), нельзя не обнаружить, что у нас есть возможность при сборе необходимых дан-

ных сэкономить как на их количестве, так и на их типах, следует помнить, что сбор данных — это, возможно, наиболее дорогостоящая часть всего процесса исследования.

Математика здесь должна быть простой, потому что методики предназначены для исследования и должны быть применимы вблизи от места сбора данных. Хотелось бы, чтобы книга служила справочником, постоянно находящимся под рукой, и, следовательно, она должна быть краткой и содержать те методики, которые уменьшают трудоемкость вычислений, отвечающих поставленным целям. Тем не менее какой-то объем вычислений необходим, и калькулятор для научных расчетов будет полезным дополнением, который на 90% удовлетворит имеющиеся потребности. Надо, чтобы калькулятор мог выполнять следующие операции: четыре основных арифметических действия (сложение, вычитание, умножение и деление); вычисление тригонометрических и обратных тригонометрических функций; извлечение квадратного корня и возведение в степень; вычисление натуральных логарифмов (с основанием «е»); имел память, к которой можно было бы обращаться (чтобы хранить константу или накапливать промежуточные результаты), и так называемое научное (с мантиссой и порядком) представление числа, поскольку получающиеся числа будут колебаться от очень больших до очень малых. Пятизначное высвечивание чисел на индикаторе было бы достаточным, но внутри калькулятора точность вычислений должна быть выше (см. приложение В.7). Однако при изучении *на месте* ориентировок, особенно в трехмерном пространстве, таких, как плоскости трещин, ориентировки складчатости, направлений палеопотоков и т. п., мог бы быть полезен клавишный программируемый калькулятор с десятью или более адресуемыми ячейками памяти. За то время, которое понадобилось мне и моим рецензентам для работы над рукописью, технический прогресс в действительности сделал такой шаг вперед, что теперь стало возможным записать в непрерывную память карманного программируемого компьютера *все* таблицы и формулы этой книги и работать с ними автоматически. Тем более, теперь совершенно ясно, что наиболее трудоемкой частью любого исследовательского проекта является этап сбора данных.

Я не указал типы ЭВМ, какие могут быть в учреждении или лаборатории, потому что не хочу предполагать, что именно они будут доступны моим читателям. На таких ЭВМ часто реализуются пакеты статистических программ, но в них обычно используются более точные методы, чем те, которые излагаются здесь, и они работают с наборами данных, имеющими более сложную структуру. Я считал такие методы выходящими за рамки этой книги, за исключением того, что гл. 7 можно рассматривать как введение в эти методы.

Слово, число, рисунок

В начале главы определяются три основных понятия — наблюдение, выборка и генеральная совокупность. Далее в общедоступной форме обсуждается измерение как операция присвоения числовых характеристик объектам или событиям. Наконец, рассмотрены методы, с помощью которых числовые характеристики могут быть упорядочены и наглядно представлены в виде чертежей или графиков. Некоторые из этих графиков сразу можно использовать для статистического анализа или для непосредственной оценки параметров распределений.

1.1. Три определения

Кардинальный способ избежать путаницы — строгость в употреблении терминов!

Наблюдение (индивидуум, событие) — обособленный базовый элемент или объект исследования, например одна галька на пляже, один образец породы из геологической формации, один ископаемый остаток из осадочного слоя, одна стратиграфическая единица разреза (слой глины) и т. п.

Выборка — конечное множество наблюдений, отобранных в соответствии с некоторым планом («выборочным планом»), чтобы обеспечить исходной информацией исследование или «эксперимент», понимаемый в широком смысле. Примеры выборки — ведро гальки, собранной на пляже; мешок образцов пород, отобранных из одной геологической формации; коллекция ископаемых остатков из осадочного слоя; стратиграфический разрез, составленный по обнажениям нескольких береговых уступов. (Обратите внимание на различие между «наблюдением» и «выборкой» и помните об этом!)

Генеральная совокупность — все множество возможных в данном исследовании наблюдений: все гальки на пляже; все горные породы, составляющие геологическую формацию; все ископаемые остатки, которые когда-либо были захоронены в пределах слоя; глобальная стратиграфия каменноугольного периода. Понятие «генеральная совокупность» развивается в разд. 10.3.2.

1.2. Измерение

Основой любого исследования, использующего статистический подход, является составление выборочного плана, состоящего в общих чертах из трех этапов: а) описания «изучаемой» генеральной совокупности, б) установления правил формирования выборки из генеральной совокупности, в) определения типов измерений, которые следует выполнить для каждого наблюдения. Здесь я рассматриваю только последний из трех перечисленных этапов. Первые два детально обсуждаются в гл. 10.

Традиционный геологический опыт привел к пониманию того, что породы и ископаемые остатки можно классифицировать в соответствии с той или иной схемой. Кроме того, еще в начальной школе мы узнаем, что для измерения длины, например длины ископаемого остатка, надо приложить к измеряемому объекту линейку и взять отсчет с точностью до миллиметра. Именно действия этих двух типов относятся к обычному понятию «измерение». Если представить себе измерение как средство установления различий между наблюдениями (или как средство их сравнения), тогда можно измерять, присваивая каждому наблюдению в выборке число или наименование. Само использование этих чисел или наименований подразумевает, что мы располагаем некой **шкалой измерений**. Эти шкалы делятся на две обширные группы: шкалы **линейных¹ величин** (длины, массы, плотности) и шкалы **угловых величин** (ориентировки в двумерном или трехмерном пространстве). Отложив обсуждение последних до разд. 1.2.2, рассмотрим линейные шкалы измерений, среди которых можно выделить три важных класса:

а) **номинальная шкала** — основывается на «арифметике эквивалентности». Примером служит классификация, в которой отнесение ископаемого остатка к данному виду обусловлено определенными особенностями его морфологии. Вид на этой шкале

¹ Такое деление шкал на линейные и угловые лишний раз подчеркивает, что книга написана геологом. Постоянно работая в поле с компасом, геолог просто не задумывается над тем, что, измеряя ориентировки на плоскости, он использует полярную систему координат, а выполняя замеры азимутов и углов падения ориентировок в трехмерном пространстве, он переходит к сферическим координатам. Можно было бы те же самые ориентировки измерить не компасом, а линейкой в декартовой системе координат, и тогда, согласно классификации, предложенной Р. Ф. Чини, их следовало бы отнести к линейным величинам. В то же время существуют простые формулы перехода от одной системы координат к другой, и поэтому выделение специфической группы шкал угловых величин вряд ли было необходимо. При этом, говоря о линейных величинах, Р. Ф. Чини имеет в виду не отношения линейности между значениями этих величин, а лишь то, что они располагаются на прямой в противоположность угловым величинам, которые обычно располагаются на окружности или на сфере. Поэтому термин «линейная шкала» следует понимать просто как шкалу, построенную на прямой. — *Прим. перев.*

может быть обозначен либо названием (*Monograptus priodon*), либо числом (шестой тип граптолита). Такой способ присвоения числа служит только удобным средством маркировки, и когда сравнивают шестой и третий типы граптолита, то единственный вывод, который можно сделать, это сказать, что они различаются. Короче говоря, измерения в номинальной шкале нельзя упорядочить. Хотя сейчас это может показаться формальным, но единственные арифметические соотношения между величинами номинальной шкалы — это «равенство» и противоположное ему «неравенство». Это скорее философский взгляд на вещи, чем практический. С номинальной шкалой в какой-то степени связано понятие о положительных и отрицательных «свойствах», которое я ввожу в разд. 4.1;

б) порядковая шкала — это шкала, в которой основу составляет арифметика эквивалентности или арифметика неравенств типа «больше, чем». Густота окраски (отражающая содержание гематита), наблюдаемая на образцах бурых песчаников, может служить примером порядковой шкалы. Густоту окраски можно измерить фотометрически и получить абсолютные значения, но проще, конечно, расположить эти образцы в ряд по возрастанию густоты окраски. Выполнив это, элементы ряда можем пронумеровать 1, 2, 3 и т. д., начиная с самого бледноокрашенного, и сразу узнаем, что образец номер 6 темнее образца номер 3, но не обязательно в два раза. Арифметическими действиями, выполнимыми над числами порядковой шкалы, являются равенство, неравенство типа «больше чем» и действия, противоположные им;

в) шкала отношений¹ — это шкала, в которой за основу взята арифметика порядковой шкалы и задано известное постоянное отношение двух любых значений шкалы. Существует множество шкал отношений. Они широко распространены, и даже неспециалисты большинство измерений выполняют с их помощью. Примерами являются измерения массы, длины, времени, а определенная выше арифметика означает, например, что отношение массы предмета, измеренной в английских фунтах, к массе того же предмета, измеренной в килограммах, является константой, называемой переводным коэффициентом. Арифметиче-

¹ Шкалы измерений по степени информативности обычно делят на три группы. Первые две соответствуют вышеописанным номинальным и порядковым шкалам, а к третьей относят количественные шкалы, среди которых выделяют шкалы отношений и интервальные. Общим для количественных шкал является то, что в них задается единица измерения и фиксируется начало отсчета. Но в интервальных шкалах начало отсчета может быть выбрано произвольно, так что его сдвиг по шкале не меняет соотношения между элементами шкалы, как, например, в температурных шкалах Цельсия или Фаренгейта. В шкале же отношений начало отсчета является абсолютным, как в температурной шкале Кельвина. — *Прим. перев.*

скими соотношениями между числами в этой шкале являются не только равенство и неравенство типа «больше, чем», но и более привычные, такие, как сложение и умножение вместе с обратными действиями — вычитанием и делением.

1.2.1. Непрерывные и дискретные шкалы. До того как перейти от линейных измерений к другим, следует затронуть представление о **непрерывных** и **дискретных** шкалах. Очевидно, что номинальная шкала дискретна, поскольку она состоит из конечного множества дискретных делений, значения которых можно присваивать наблюдениям, т. е. возможны типы граптолитов 3 и 6, а не типы 4, 5 или 3, 2¹. Величины порядковой шкалы могут принимать только целые положительные значения, так что они тоже образуют дискретный ряд. В то же время, по крайней мере теоретически, отношения могут быть измерены с любой сколь угодно высокой степенью точности, причем число десятичных знаков определяется только практическими соображениями, и поэтому они образуют непрерывную шкалу измерений.

Вопросы для обсуждения. Призматические столбики, образованные трещиноватостью в базальтах, могут быть охарактеризованы числом ограничивающих их граней. Какая шкала измерений из трех вышерассмотренных типов применима в этом случае? Каков диапазон изменения чисел на этой шкале? В частности, непрерывна или дискретна эта шкала и как можно определить среднеарифметическое значение?

1.2.2. Ориентировки. К сожалению, термины, используемые сейчас при работе с замерами ориентировок («направления» или «углы»), не являются общепринятыми. В двух следующих разделах я даю определение *направлений* и *осей* и рассматриваю их как два различных типа *ориентировок*. С моей точки зрения, общим для ориентировок является то, что они определяются главным образом угловыми величинами, и я подчеркиваю, что в некоторых отношениях между измерениями ориентировок как в двухмерном, так и в трехмерном пространстве и измерениями в линейных шкалах есть общие черты, хотя в других отношениях они совершенно различны, правда, иногда чисто внешне. Замеры ориентировок безусловно *непрерывны*, однако начало отсчета (т. е. нуль, от которого мы измеряем) может быть произвольным, так как мы можем выбирать: измерять азимут от северного направления географического или магнитного меридиана (или от

¹ Этот пример нуждается в пояснении. Поскольку в номинальной шкале классы различаются лишь названиями, то наблюдаемым объектам могут присваиваться только имена классов заданной шкалы. Поэтому, если классы поименованы целыми числами, то, конечно, при измерении в такой шкале не может быть наблюдений, обозначенных каким-либо иным способом. Но в принципе классы могут быть поименованы как угодно, в том числе и дробными числами. — *Прим. перев.*

какого-нибудь другого удобного направления), а угол наклона — от горизонтали или от вертикали. Замеры ориентировок к тому же могут быть циклическими. Так, значения азимута повторяются с периодом 360° (т. е. через полный оборот стрелки компаса), тогда как углы наклона в общем не периодичны и имеют более ограниченный диапазон значений (обычно $\pm 90^\circ$). Иногда удобно использовать свойство цикличности: циклично время (суточные, недельные, годовые циклы) так же, как и определенные процессы осадконакопления, вулканические явления и т. п. Следовательно, линейные измерения, обладающие скрытой циклическостью, могут быть преобразованы в угловые величины и анализироваться с помощью некоторых статистических методов, применимых для обработки ориентировок. Для неосторожного исследователя опасность таится в арифметических операциях с угловыми величинами, особенно углами, измеренными в двухмерном пространстве, как, например, отсчеты углов по компасу. Так, в определенных ситуациях можно складывать углы или удваивать их, но будьте внимательны при вычислении «простых» среднеарифметических. Среднеарифметическое двух углов, равных 2 и 358° , казалось бы, равно 180° . Но эта величина бессмысленна, если изучаются направления в осадочных породах, потому что замеры ориентировок обладают многими свойствами векторов (т. е. элементарных отрезков прямых, имеющих ориентировку, «знак» или «полярность» ориентировки и протяженность), и соответственно этим свойствам с ними следует оперировать. Поэтому необходимо определить еще два понятия.

Направление — прямая линия, определяющая ориентировку (в двух- или трехмерном пространстве), имеющую «знак» (его можно обозначать стрелкой на одном конце прямой). Примерами служат направления палеомагнитных параметров, направления седиментации или линейные осадочные текстуры, нормали к плоскостям напластования, направленные в сторону более молодых слоев разреза, и т. п. Если направление дополняется величиной параметра, то оно становится вектором (например, скорость ветра), но в этой книге векторы требуются не часто.

Ось — прямая линия, определяющая ориентировку (тоже в двух- или трехмерном пространстве), но и не более того; в частности, для оси не важен знак ориентировки. Примерами являются нормаль к плоскости дайки, удлинение игольчатого кристалла и, к сожалению, «направление» оси складки. Последний пример — лишь один из многих, иллюстрирующих постоянную путаницу от употребления терминов «ось», «направление» и «вектор».

1.2.3. Выбор соответствующей шкалы измерений. Выбор соответствующей шкалы измерений — неотъемлемая часть разработки выборочного плана (гл. 10). В определенных ситуациях,

обычно встречающихся на практике, можно выбирать между двумя или даже тремя шкалами измерений (номинальной, порядковой или шкалой отношений). Первым важным фактором является фактор трудоемкости выбираемых измерений, ибо приобретение информации стоит дорого. Так, например, некоторые гипотезы могут быть связаны с измерениями зернистости в образцах породы какой-либо формации. Зернистость можно измерить в шкале отношений (с помощью микрометра), в порядковой шкале (упорядочив образцы по возрастанию размеров зерен) или в номинальной шкале (путем отнесения каждого образца к одному из трех классов — «тонкозернистому», «среднезернистому» или «грубозернистому»). Ясно, что самые медленные — это измерения в шкале отношений, а самые быстрые — в номинальной шкале. Выбор шкалы может быть продиктован проверяемой гипотезой, но и, наоборот, весьма вероятно, что во многих ситуациях, встречающихся на практике, простота или сложность измерений могут влиять на систему гипотез. Если результат не сильно зависит от выбора метода измерений или если мы проводим предварительные исследования, то выбираем более простую шкалу измерений (более низкого уровня), но следует помнить, что, чем выше уровень шкалы, тем она информативнее. Замеры азимута с помощью компаса, в конце концов, тоже могут быть выполнены в порядковой или номинальной шкале, причем для применения последней лимб компаса надо разделить на секторы¹.

1.3. Графическое представление данных²

Табличная и графическая форма представления данных применяется в двух важных случаях: как метод освоения данных и экспериментирования на ранних стадиях проекта и как метод обобщения и преподнесения результатов в доступной форме на этапе составления отчета. Эксперименты при таких формах представления данных на ранних стадиях могут обнаружить неожиданные взаимосвязи, но надо осознать, что таблицы и графики могут неожиданно ввести нас в заблуждение, и ни в коем случае нельзя с легкостью утверждать, что нечто кажущееся очевидным на графике точно соответствует действительности. Всегда будьте готовы применить для подтверждения статисти-

¹ Суть этого примера в том, что, разбив лимб компаса на секторы, нам следует «забыть» о количественных соотношениях между дугами этих секторов (порядковая шкала) или об их взаимной упорядоченности (номинальная шкала) и считать, что они либо качественно упорядочены, либо различаются лишь названиями; примером могут служить направления, задаваемые в румбах. — *Прим. перев.*

² Термином «данные» автор обозначает как объекты измерений, так и их результаты, понимаемые в самом широком смысле слова. — *Прим. перев.*

ческий критерий, даже когда график очень «красноречив», и, наоборот, не бойтесь пользоваться статистическими критериями, если вид графика хаотичен. Графики и таблицы, построенные соответствующим образом, могут служить основой для дальнейших исследований, поскольку их можно непосредственно использовать для применения многих простых статистических критериев. Так, по мере накопления опыта сведение данных в таблицы и нанесение их на графики становится более эффективным и целенаправленным.

1.3.1. Классификация. Перед составлением таблиц и построением графиков необходимо провести *формальную* классификацию данных. Пусть в нашем примитивном понимании классификация представляет собой процедуру распределения наблюдений по различным **классам**, **границы** между которыми заданы нами как деления шкалы, в которой измеряется переменная¹, характеризующая классифицируемые наблюдения. Если переменная оказывается измеренной в номинальной шкале, например тип породы, то классификация уже существует в виде правила идентификации и наименования пород. Однако в случае использования порядковых шкал или шкал более высокого уровня исследователи должны сами определять границы классов. Если при изучении выветривания пород важна густота их окраски и она измерена в порядковой шкале, то для табличного и графического представления геолог может посчитать целесообразным классифицировать породы как светлые, среднеокрашенные и темные, устанавливая границы между классами по своему усмотрению, но убедившись предварительно, что они прослеживаются от одной выборки к другой (помните определение выборки?). На практике этого можно добиться, только расположив несколько выборок рядом. Там, где измерения выполняются по шкале отношений, границы классов легко совместить с соответствующими значениями измеряемой переменной, но их следует задавать так, чтобы избежать затруднений, связанных с попаданием наблюдений точно на границу. Например, длина ископаемого остатка, измеренная с предельной точностью, равна 50,0 мм. Смежные классы следует определить как «больше или равен 40 мм и меньше 50 мм», «больше или равен 50 мм и меньше 60 мм», а не просто «40—50 мм» и «50—60 мм», вызывая тем самым затруднения при классификации. Теперь этот ископаемый остаток однозначно относится к последнему классу.

¹ В отечественной литературе в качестве синонима термина «переменная» часто используют термин «признак», определяющий качественно обособленную характеристику наблюдения; проще говоря, переменная или признак — это то что мы измеряем: концентрация определенного химического элемента, или преобладающий тип породы в обнажении, или угол падения слоистости и т. п. — *Прим. перев.*

1.3.2. Гистограмма. Это — широко используемый способ изображения наблюдений, заслуживающий более детального рассмотрения вследствие того употребления, которое гистограммы получают в дальнейшем. На рис. 1 показаны три гистограммы, соответствующие номинальной и порядковой шкалам и шкале отношений.

Горизонтальная шкала градуируется в соответствии с классификацией переменной, а над каждым интервалом строится прямоугольный столбик. Его *площадь* пропорциональна числу наблюдений в соответствующем классе, т. е. **частоте** данного **класса**. Обратите внимание, что это именно *площадь*, а не высота столбика, так как на шкале отношений классы можно выбрать таким образом, что не все они будут одинаковой ширины. Другой момент, требующий внимания, это то, что вертикальная шкала проградуирована в фактических значениях частот, а не в процентах от полной выборки, как это обычно делается. *Использование процентных величин может вызвать затруднения* при изложении значительной части последующего материала этой книги, и, вероятно, лучше всего избегать их употребления. Зачастую они свободно используются, что делает неопределенным **объем выборки** (число наблюдений в выборке), так что фактически все соответствующие статистические критерии, рассмотренные в этой книге, оказываются бесполезными. С этой целью приведенные выше гистограммы построены так, что по

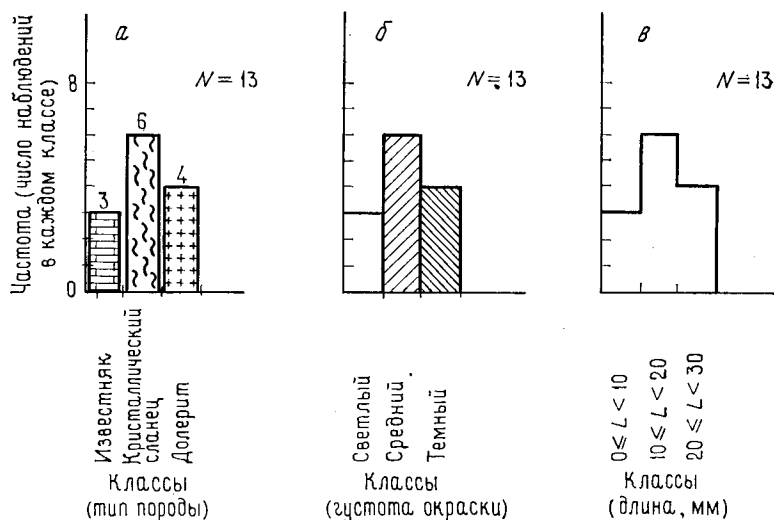


Рис. 1.1. Гистограммы, соответствующие номинальной шкале измерений (а), порядковой шкале (б) и шкале отношений (в).

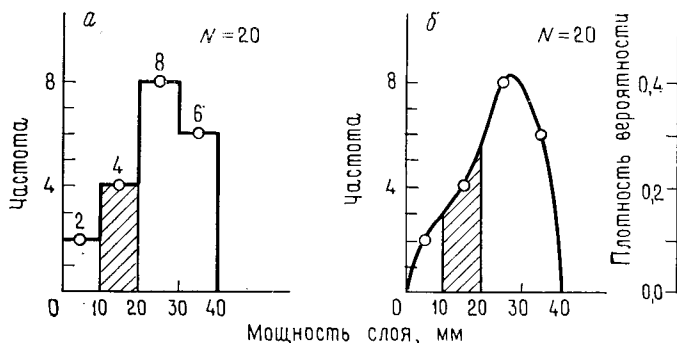


Рис. 1.2. Соотношение между гистограммой (а) и кривой распределения частот или функцией плотности вероятности (ФПВ) (б).

ним легко определить частоту каждого класса и выразить объем выборки N . Последняя тонкость состоит в том, что на дискретной шкале (тип породы) прямоугольные столбики разделяются, тогда как на непрерывных шкалах они вплотную примыкают друг к другу.

1.3.3. Функция плотности вероятности. Если переменная измеряется в непрерывной шкале отношений, то из гистограммы можно получить другой тип графика, изображенный на рис. 1.2.

Чтобы построить кривую распределения частот, отмечаем середины верхних сторон прямоугольных столбиков, образующих гистограмму, а затем проводим плавную кривую через эти точки. Если кривая проведена аккуратно, то площадь под ней, ограниченная двумя ординатами (вертикальными прямыми), проходящими, например, через границы класса, равные мощностям слоя 10 и 20 мм, будет такой же, как и площадь соответствующего прямоугольного столбика на гистограмме (на диаграммах эти площади заштрихованы). Это свойство оказывается полезным, если вспомнить, что площади прямоугольных столбиков гистограммы пропорциональны частотам наблюдений в каждом классе. Суммарная площадь прямоугольных столбиков гистограммы пропорциональна объему выборки $N = 20$, состоящему из 2 наблюдений в первом классе, 4 во втором, 8 в третьем и 6 в четвертом (рис. 1.2, а). В интервале от 10 до 20 мм содержится два слоя разной мощности, доля которых составляет $4/N = 4/20 = 0,2$ полного объема выборки. Измерение соответствующих площадей под аккуратно проведенной кривой распределения частот дает тот же результат. Достоинство этой кривой в том, что подобное упражнение можно выполнить для *любого* диапазона значений переменной совершенно независимо от первоначальной классификации, т. е. можно провести полный

анализ распределения частот в выборке. Короче говоря, кривую частотного распределения можно представить себе как сглаженную гистограмму, содержащую бесконечное число классов бесконечно малой ширины.

Смысл другого названия кривой распределения частот — **функция плотности вероятности (ФПВ)** — можно проиллюстрировать следующим способом. Если предположить, что выборка точно отражает генеральную совокупность, из которой она извлечена, то не существует слоев, мощность которых меньше 0 и больше 40 мм. Таким образом, если выбирать любой отдельный слой из этой выборки, то можно быть уверенным, что его мощность будет находиться в диапазоне от 0 до 40 мм. Принято, что событие, исход которого абсолютно достоверен, имеет вероятность (исхода), равную единице. С другой стороны, считают, что событие, которое никогда не происходит, имеет нулевую вероятность. В нашем примере никогда не встретится слой мощностью меньше 0 или больше 40 мм. По-видимому, больший интерес будут представлять вероятности, заключенные между 0 и 1. Например, нам, может быть, надо ответить на вопрос: какова вероятность обнаружения слоя, мощность которого лежит в интервале от 10 до 20 мм? Конечно, можно вычислить эту величину по гистограмме, потому что интервал 10—20 мм совпадает с одним из заданных классов. Ответ таков:

$$\frac{\text{Площадь заштрихованного прямоугольника на рис. 1.2, а}}{\text{Суммарная площадь гистограммы}} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Но такое совпадение границ класса с заданным интервалом, вероятно, будет нечастым. Однако для той же цели можно использовать свойства ФПВ. Ответ на тот же вопрос таков:

$$\frac{\text{Площадь заштрихованной фигуры на рис. 1.2, б}}{\text{Суммарная площадь фигуры под графиком ФПВ}},$$

но эти вычисления более громоздки из-за необходимости искать способ измерения площадей таких сложных фигур. На практике для этого упражнения следует воспользоваться **интегральной функцией распределения** (описанной в следующем разделе). Заметьте, что наибольшая плотность вероятности (соответствующая вершине кривой на рис. 1.2, б) означает, что наиболее частая мощность слоя около 27 мм.

1.3.4. Интегральная функция распределения¹. Есть третий вид графического представления данных, который особенно полезен.

¹ Р. Ф. Чини называет это понятие «cumulative distribution function» («интегральная функция распределения»). В отечественной литературе его чаще определяют термином «функция распределения» (Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969), но используется и термин автора «интегральная функция распределения». Чтобы быть ближе к авторскому тексту, мы остановились на второй формулировке. — Прим. перев.

Построение таких графиков можно иллюстрировать рис. 1.3.

Сначала мысленно строим «интегральную гистограмму», на которой площадь каждого прямоугольника пропорциональна сумме: число наблюдений в соответствующем классе *плюс* число наблюдений во всех других классах, расположенных слева, т. е. с *меньшими* значениями переменной. Используя те же данные, по которым ранее строились обычная гистограмма и кривая распределения частот, получаем график, изображенный на рис. 1.3, а, на котором каждая следующая ступенька образована сложением площадей соответствующих прямоугольных столбиков обычной гистограммы. Затем заново размечаем вертикальную шкалу, поделив частоты на объем выборки для того, чтобы они были выражены в долях этого объема. Наконец, поставив в верхнем правом углу каждого мысленно построенного прямоугольника небольшие кружки, проведем через них сглаженную кривую, асимптотически приближающуюся к горизонтальным прямым, параллельным оси абсцисс, проходящим через значения долей, равные 0 и 1. На этом графике потерялась информация об объеме выборки, потому что вертикальная шкала теперь проградуирована в долях; в связи с этим объем выборки должен быть ясно выражен на графике: в данном случае $N=20$. Заметьте, что высота любого прямоугольного столбика на интегральной гистограмме равна суммарной площади прямоугольных столбиков обычной гистограммы, совпадающих с ним

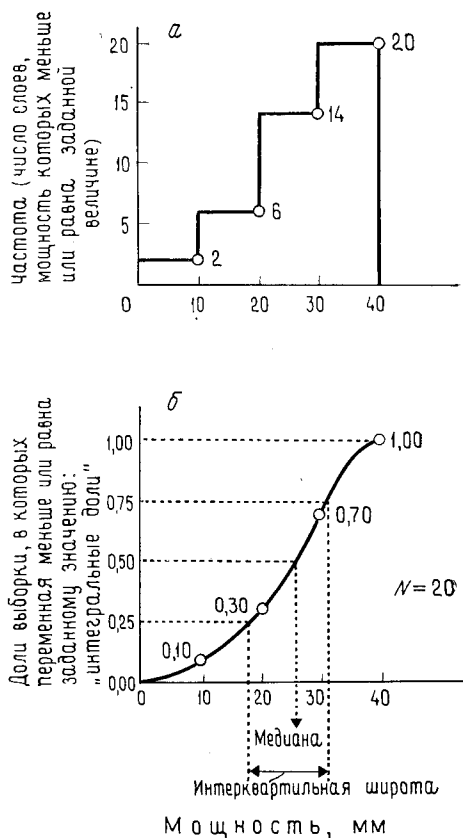


Рис. 1.3. Интегральная гистограмма (а), используемая для построения интегральной кривой долей или интегральной функции распределения (ИФР) (б).

и расположенных влево от него. Подобным же образом *высота* кривой интегральной функции распределения (ИФР), соответствующая заданному значению переменной, равна *площади* фигуры, лежащей под кривой ИФР и влево от соответствующей ординаты. Можно использовать эту особенность, чтобы облегчить ответ на вопрос: какова вероятность того, что мощность слоя имеет значение между 10 и 20 мм? Глядя на рис. 1,3, б, замечаем, что доля слоев, мощность которых меньше или равна 20 мм, составляет 0,3 всей выборки, тогда как доля слоев мощностью 10 мм и меньше, составляет 0,10 всей выборки. Таким образом, искомая вероятность равна $0,30 - 0,10 = 0,20$.

Наконец, следует отметить, что такой способ графического представления применим как для дискретных, так и для непрерывных переменных. Так, например, две необычные на первый взгляд ступенчатые интегральные функции распределения, изображенные на рис. 1,4, имеют обоснованное практическое применение, которое будет рассмотрено в гл. 3.

1.3.5. Параметры распределений линейных данных¹. Во введении отмечалось, что по геологическим наблюдениям в большинстве случаев с помощью простых математических выражений можно получать числовые характеристики и затем применять их для сжатого описания особенностей исследуемых распределений. В других разделах (особенно в гл. 5, 8 и 9) мы увидим, что эти параметры появляются благодаря удобному во многих случаях предположению о том, что в *генеральной совокупности*, из которой извлекается исследуемая *выборка*, распределение наблюдений описывается математической зависимостью, называемой **функцией распределения**. Эти математические зависимости содержат константы, определяющие детально формы их графиков, подобно тому как m и c в выражении $y = mx + c$ определяют соответственно наклон и положение прямой линии на графике в прямоугольных координатах x , y . В статистике эти константы называются **параметрами**, а статистические критерии (как мы увидим в гл. 5) в зависимости от того, используют или не используют они эти параметры, называются соответственно **параметрическими** или **непараметрическими**. Строго говоря, параметры присущи только генеральной совокупности, а не выборке, поэтому, выполняя те или иные вычисления по выборочным наблюдениям, можно лишь *оценивать* значения параметров. Некоторые из них можно использовать для количественной характеристики положения и формы графиков как ФПВ, так и ИФР; следовательно, непосредственно по этим графикам без промежуточных вычислений

¹ Здесь имеются в виду данные, распределенные на прямой. — Прим. перев.

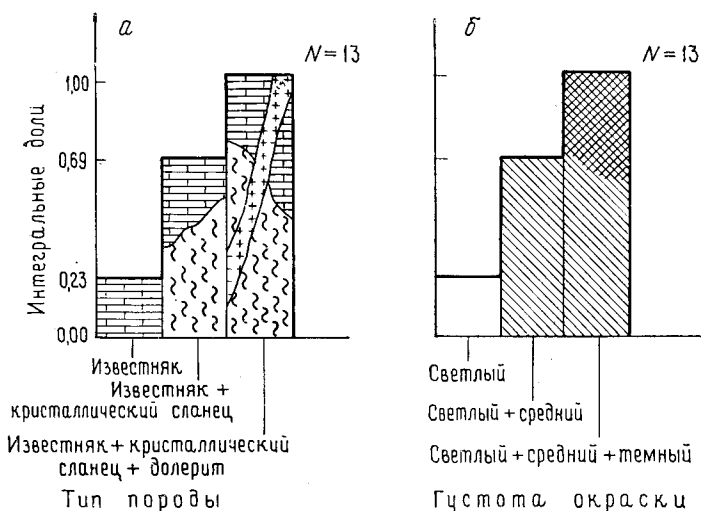


Рис. 1.4. Интегральные функции распределения, построенные для переменных, измеренных в номинальной (а) и порядковой (б) шкалах. Функции имеют ступенчатый вид, потому что переменные дискретны.

можно получать грубые оценки значений некоторых параметров.

Положение ФПВ и **ИФР**, или, точнее, *центральное значение* переменной, распределение которой нас интересует, может быть определено одним из трех следующих параметров:

а) **Мода** — значение переменной, соответствующее максимуму ФПВ и почти всегда оцениваемое графически (для данных, изображенных на рис. 1,2, б, значение моды приблизительно равно 27 мм). Для классифицированных наблюдений, представленных на гистограмме, **модальным** является **класс** с максимальной частотой (на рис. 1.1 — это класс кристаллических сланцев и класс образцов средней густоты окраски). Данные в некоторых выборках даже большого объема могут быть полимодальными, т. е. графики ФПВ имеют несколько вершин или гистограммы имеют несколько классов, в которых частота больше, чем в классах, непосредственно к ним примыкающих. Однако при рассмотрении круговых гистограмм в разд. 1.3.8 мы увидим, что такие локальные моды просто могут быть результатом произвольного выбора границ классов.

б) **Медиана** — значение переменной, делящее исследуемую выборку так, что одна половина выборочных значений меньше медианного значения, а другая половина больше. На графике ФПВ — это ордината (вертикальная прямая), делящая площадь фигуры под кривой ФПВ на две равные части. В соответ-

ствии с первым из двух вышеприведенных определений значение медианы вычисляется непосредственно, если наблюдаемые значения переменной **ранжированы**, т. е. расположены в порядке их возрастания. Если выборка состоит из нечетного числа наблюдений, то медианное значение равно значению переменной в наблюдении, занимающем центральное положение в ранжированном ряду. Если число наблюдений четное, то в качестве медианного значения принимается среднее арифметическое значение переменной в двух соседних наблюдениях, находящихся по разные стороны от центральной точки ряда. Сразу вычислить значение медианы, пользуясь вторым определением, трудно, но его можно получить непосредственно по графику ИФР, найдя значение переменной, отсекающее на оси ординат долю, равную половине объема выборки. На рис. 1.3, б медианное значение переменной приблизительно равно 26 мм.

в) **Среднее значение** — обычно этот параметр связан со среднеарифметическим, получаемым суммированием значений переменной, измеренных в каждом из наблюдений, и делением этой суммы на число наблюдений. В формальных математических обозначениях можно записать:

$$\bar{M} = (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N)/N, \quad (1.1)$$

где $\bar{M}$ — среднее значение; $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ — значения переменной, присвоенные наблюдениям с номерами 1, 2, 3, ... N соответственно; N — объем выборки, т. е. число наблюдений в выборке. Позвольте мне отвлечься и воспользоваться этим простым примером, чтобы показать, как можно сократить выражение (1.1), используя знак суммирования Σ :

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{i=N} (X_i)/N, \quad (1.2)$$

где $\sum_{i=1}^{i=N} (X_i)$ означает $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N$. Нижний индекс i используется в качестве общего индекса наблюдений, а диапазон принимаемых им значений указывается снизу и сверху от знака Σ , начиная с минимального значения $i=1$, с шагом 1 до максимального значения $i=N$. Символ Σ — это знак суммирования, который влечет за собой **условие суммирования**, требующее сложить выражения того типа, что появляются в скобках непосредственно за ним, для всех возможных значений подстрочного индекса i . Выражение (X_i) в этом примере простое: это только значение переменной, но дальше символ суммирования будет использоваться в сочетании с более сложными выражениями. Наконец, заметьте в формуле (1.2), что суммирование должно быть выполнено до деления на N .

Я уже отметил ограничения, связанные с оценкой некоторых из вышеперечисленных параметров. Еще одно следует из того факта, что во многих случаях пытаются оценить параметры генеральной совокупности по измерениям, выполненным в выборках ограниченного объема. Следовательно, необходимо высказать соображения не только о том, как облегчить вычисления, но и о том, как обеспечить **устойчивость** оценок. Например, среднее значение, вычисленное по формуле (1.1), может быть сильно искажено, если выборка содержит одно или два наблюдения с резко выделяющимися значениями переменной, тогда как медиана в меньшей степени подвержена таким возмущениям. Простота вычислений может зависеть от условий, в которых они проводятся. Определение середины ряда, образованного свободно лежащими гальками, упорядоченными по возрастанию их длины, непосредственно указывает гальку, имеющую медианную длину, но если те же гальки образуют крепко сцементированный конгломерат, то трудоемкость определения медианы сопоставима с трудоемкостью вычисления среднего значения.

Форму графиков ФПВ или ИФР можно описать с помощью двух групп параметров, связанных с **рассеянием и асимметрией**. Количественно рассеяние характеризует, насколько далеко в обе стороны от центрального значения (среднего значения, медианы или моды) разбросаны наблюдаемые значения. Чем больше рассеяние, тем шире будет растянут график ФПВ по горизонтали и тем более плоской будет его вершина. На таком графике трудно с уверенностью указать положение моды. В то же время малому значению рассеяния соответствует график ФПВ, имеющий форму резко выраженного высокого пика, на котором легко определить положение моды. Простой и иногда эффективный параметр, характеризующий рассеяние, — размах, определяемый разностью между максимальным и минимальным наблюдаемыми значениями. К сожалению, недостатки этого параметра очевидны: при случайном попадании в выборку резко выделяющихся наблюдений они сильно влияют на получающееся значение размаха.

Несколько менее чувствительна к особенностям формирования выборки **интерквартильная широта**, легко оцениваемая по графику ИФР. Рис. 1,3, б иллюстрирует эту процедуру: находим ординаты (вертикальные прямые), отсекающие на графике доли распределения, равные соответственно 0,25 (нижняя квартиль) и 0,75 (верхняя квартиль), т. е. $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ полной выборки. Интерквартильная широта равна расстоянию между этими ординатами, измеренному в единицах горизонтальной шкалы. В приведенном примере интерквартильная широта равна $31 - 18 = 13$ мм. Иногда берут половину этой величины, получая интерквартильную полушироту. Ясно, что оба эти параметра

более устойчивы к колебаниям выборочных значений, чем полный размах.

И размах, и интерквартильная широта не очень удобны в статистическом анализе. Несомненно, более употребляемой мерой рассеяния служит *стандартное отклонение*. Его оценка рассматривается в разд. 5.2.2, поскольку оно является параметром важного теоретического распределения, исследованного Гауссом. Хотя этот параметр полезен в статистическом анализе, следует отметить трудоемкость, связанную с необходимыми измерениями (наблюдения измеряются в шкале отношений) и вычислениями его значения.

Другая характеристика формы изучаемого распределения относится к симметрии (или асимметрии) его ФПВ. Во многих случаях предполагается, что график ФПВ будет иметь один пик (т. е. будет унимодальным) и примерно симметрично расположенные относительно моды хвосты. Если график ФПВ сильнее наклонен в одну сторону, то говорят об асимметрии ФПВ, при этом мода смещается в сторону либо малых, либо больших значений переменной. Параметр, характеризующий это явление, называется коэффициентом асимметрии и может быть вычислен двумя приведенными ниже способами:

$$\text{Коэффициент асимметрии} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{Верхняя квартиль} + \text{Нижняя квартиль} - 2 \times \text{медиана}}{\text{Интерквартильная широта}}, \quad (1.3) \\ \frac{(3 \times \text{Среднее значение} - \text{Медиана})}{\text{Стандартное отклонение}}. \quad (1.4) \end{array} \right.$$

Для симметричных ФПВ оба выражения равны 0 и принимают значения от -1 (если график ФПВ наклонен в сторону высоких значений) до $+1$ (в противном случае). Однако для выборок особого вида эти выражения дают несколько различающиеся оценки; поэтому всегда указывайте, какая формула использовалась. Средне и сильно асимметричные выборки могут вызывать затруднения в применении к ним более тонкого статистического анализа, требующего предположения о симметрии ФПВ. Обычный путь для преодоления таких трудностей — **преобразование** первоначальных измерений, с тем чтобы дальнейший анализ проводить не по исходным значениям переменной, а по простым функциям от этой переменной, таким, как логарифм, квадратный корень и т. п. При этом цель состоит в том, чтобы найти такое преобразование, которое уменьшает асимметрию ФПВ. Иногда подходящее преобразование подсказывается физическим смыслом выборки, в других случаях — эмпирически.

1.3.6. Ориентировки. Ориентировки обычно появляются в геологических исследованиях в условиях двухмерного или трех-

мерного пространства, т. е. на окружности и на сфере, и, таким образом, можно говорить о распределениях **на окружности и на сфере** в дополнение к рассмотренным выше распределениям на прямой. Графически распределения на сфере почти всегда изображаются с помощью стереографических или подобных им проекций, на которых ориентировки представлены точками. Есть множество способов проведения линий равной плотности этих точек, но все они, кроме одного, неудобны для практического применения в статистическом анализе: они трудоемки и мало что дают, кроме простого увеличения числа графиков.

1.3.7. Круговая диаграмма. Круговой диаграмме на плоскости соответствует стереографическая проекция в трехмерном пространстве. В примере, приведенном на рис. 1.5, точками на окружности показаны направления устьев 36 раковин гониатитов, замеренные в одном слое. Такой график строится быстро, и на нем хорошо видны колебания плотности ориентировок. Его также можно использовать непосредственно для определения **кругового медианного направления**. Для этого находят диаметр окружности, делящий выборку пополам (в данном случае по каждую сторону от искомого диаметра должно быть по 18 наблюдений), а затем на нем выбирается направление, в котором увеличивается плотность наблюдений на диаграмме.

1.3.8. Круговая гистограмма. Можно построить и круговые гистограммы (рис. 1.6). На обеих гистограммах изображены рассмотренные выше наблюдения над гониатитами, и обе имеют ширину класса, соответствующую 30° . Площадь каждого сектора гистограммы пропорциональна частоте соответствующего класса (которая указывается по периметру гистограммы); поэтому радиус сектора определяется формулой

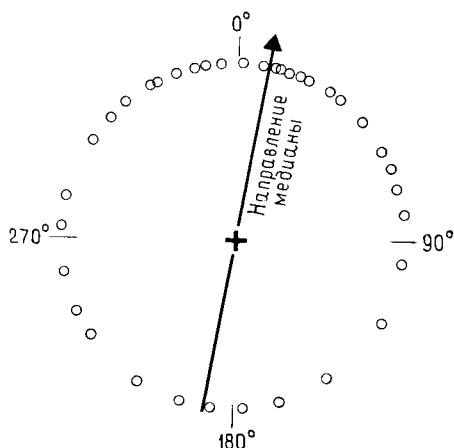


Рис. 1.5. Круговая диаграмма направлений устьев 36 раковин гониатитов на поверхности слоя в Северной Англии (данные любезно предоставлены д-ром У. Б. Хептон-столлом).

$$r^2 = 2Af/Nw, \quad (1.5)$$

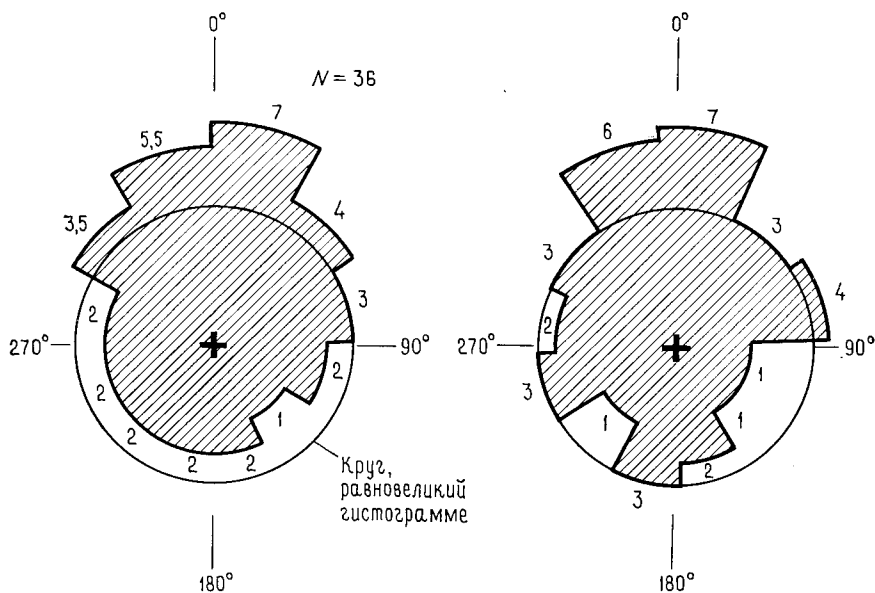


Рис. 1.6. Круговые гистограммы замеров, изображенных на рис. 1.5. Основное различие этих двух диаграмм — в выборе границ классов.

где r — радиус сектора, A — суммарная площадь гистограммы, f — частота класса, N — объем выборки и m — ширина класса в радианах ($1 \text{ рад} = 180^\circ/\pi$).

Таким образом, понятно, что для построения круговой гистограммы необходимы некоторые вычисления, а ее ступенчатые разрывы сводят на нет непрерывное изменение частот, выявляемое на круговой диаграмме. Однако модальный класс (класс с максимальной частотой) отчетливо различим на гистограмме. Тем не менее серьезным недостатком, присущим всем типам гистограмм, является то, что вид гистограммы может коренным образом изменяться в зависимости от выбора *положений* границ классов. На обеих вышеприведенных гистограммах ширина класса соответствует 30° , но если на левой гистограмме первая граница класса установлена в начале отсчета (0°), то на правой гистограмме границы класса установлены так, что центр модального класса совпадает с медианным направлением. Этот небольшой сдвиг границ классов — всего на 10° против часовой стрелки — заметно повлиял на общий вид гистограммы. Как линейные, так и круговые гистограммы подвержены этому виду неустойчивости, особенно когда объемы выборок малы, и поэтому не следует ни пренебрегать их обсуждением, ни придавать им слишком большого значения.

Другая распространенная трудность при работе с гистограммой состоит в том, что ее часто строят необдуманно, считая, что частоте класса пропорционален *радиус*, а не *площадь* сектора, как отмечено выше. Это приводит к сильным искажениям гистограммы (рис. 1.7). Модальный класс зрительно непропорционально велик по сравнению с его истинной значимостью. На таком графике сильно утрируется степень предпочтительности ориентировки¹.

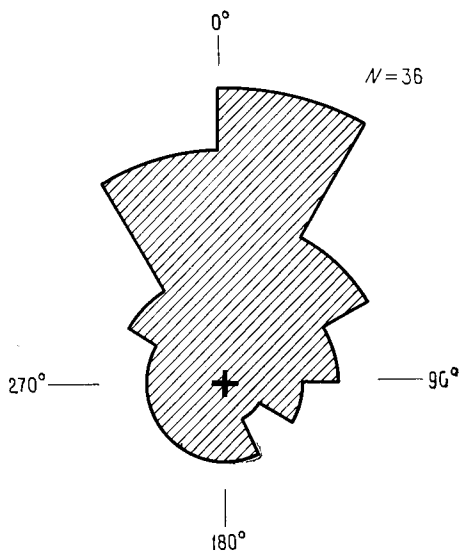


Рис. 1.7. Диаграмма, изображающая круговую гистограмму, радиус (а не площадь) сектора которой пропорционален частоте класса. Исходные данные те же, что и на рис. 1.5.

1.3.9. Другие виды круговых диаграмм. Можно придумать и другие способы изображения данных, распределенных по окружности, но все они уступают круговым диаграммам по затратам времени на построение и по полезности для дальнейшего анализа. Так, например, можно круговую гистограмму развернуть и представить в псевдолинейном виде, поместив 0° на одном конце горизонтальной оси и 360° на другом, но такое представление затушевывает цикличность, присущую угловым величинам. Можно построить круговой аналог кривой распределения частот, но практическое его использование мало что дает.

Наконец, следует отметить, что данные, распределенные по окружности, могут быть как «ососями», так и «направленными» (помните различия между ними?). Противоположные концы стеблей ископаемых растений (рис. 1.8), имеющих одинаковую толщину по всей длине, могут не отличаться друг от друга; поэтому для измерения их ориентировок достаточно использовать только половину лимба компаса (от 0 до 180°). Однако, как ни странно, на практике может оказаться полезным изображение

¹ В отечественной геологической литературе за круговыми гистограммами закрепилось название «розы-диаграммы». К сожалению, приходится признать, что в большинстве случаев они строятся с описанными нарушениями.—
Прим. ред.

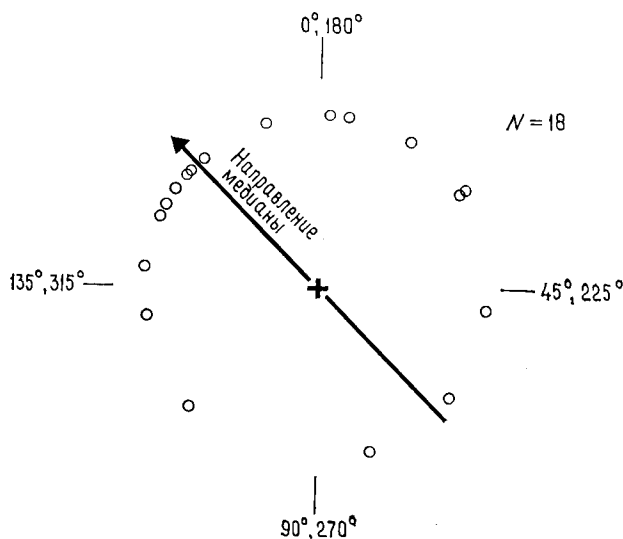


Рис. 1.8. Круговая диаграмма ориентировок стеблей ископаемых растений. Эти наблюдения являются «ососями»; так как один конец стебля неотличим от другого, то для определения их ориентировки достаточно первых 180° лимба компаса. Чтобы подчеркнуть цикличность замеров и сделать диаграмму более полезной для практического использования, значения замеров углов удвоены (данные любезно предоставлены д-ром У. Б. Хептонстоллом).

таких ориентировок на круговой диаграмме путем удвоения замеренных угловых величин. Верхний конец вертикального диаметра такой диаграммы соответствует направлению как на север, так и на юг, а нижний конец — направлению на восток и на запад (!), но полный оборот на этой диаграмме соответствует одному полному циклу ориентировок, что удобно: этот график можно использовать в статистическом анализе (гл. 8).

Упражнение. Галька — легкодоступный геологический объект, который уже фигурировал в ряде примеров и будет использоваться в дальнейшем. Тем не менее не следует рассматривать эту книгу как руководство по подсчету галек; вы увидите, что рассмотренные здесь методы применимы ко всем классам геологических задач. В качестве упражнения возьмите несколько образцов гальки и определите, сколько видов измерений (используя различные типы шкал) можно выполнить на каждом образце. Подумайте, например, о сферичности и окатанности гальки: меры Крамбейна для этих характеристик точно определяются, а достаточно ли для этого простого упорядочения? Если гальки упорядочены по возрастанию сферичности, то придется ли существенно менять их взаимное расположение, чтобы проанжировать их по возрастанию окатанности? Во всяком случае, насколько легко такое упражнение?

Бросание монеты и стратиграфия

В главе даются некоторые исходные представления о вероятности и проверке гипотез. Они иллюстрируются известными законами случайных явлений, связанными с бросанием монеты. Эта глава важна потому, что вопросы проверки гипотез обсуждаются на протяжении всей книги. Хотя содержание главы в некоторой степени касается «покера» и других игр, в которых случай является важным элементом, в конце ее я показываю, как всю структуру без изменения можно перенести в область стратиграфии.

2.1. Эксперимент с бросанием монеты

Допустим, имеется выборка, состоящая из одинаковых монет, в каждой из которых одна сторона называется «гербом» (g), а другая — «решеткой» (p). Бросая такую монету, предполагаем, что монета правильная, т. е. она приземляется вверх «гербом» или «решеткой» с равной вероятностью. Другими словами, если G — вероятность выпадения «гербов», а P — вероятность выпадения «решеток», то $G = P = 1/2$. Однако на время отбросим наше предположение о том, что монеты «правильные», так как из-за дефектов изготовления все монеты неуравновешены и, следовательно, G не равно P . Тем не менее в соответствии с нашим пониманием вероятности $G + P = 1$, т. е. монета *должна* упасть либо кверху g , либо кверху p (мы, таким образом, не учитываем тот маловероятный случай, когда монета встанет на ребро).

Теперь рассмотрим простейший эксперимент, в котором мы бросаем одну-единственную монету. Он имеет два возможных исхода: исход g с вероятностью G или исход p с вероятностью P . Результаты эксперимента можно изобразить в виде табл. 2.1, в которой каждый столбец соответствует возможному исходу эксперимента.

Теперь мы видоизменяем эксперимент, добавляя вторую монету, а результаты представляем в виде табл. 2.2. Чтобы гарантировать понимание этой таблицы, надо обратить внимание на два момента. Во-первых, рассмотрим вероятности исхода.

Таблица 2.1. Результаты бросания одной монеты

Номер исхода	1	2	($=2^1$)
Монета падает	«Решеткой» (p) кверху	«Гербом» (g) кверху	
Вероятность исхода	P	G	
Вывод	Вероятности выпадения «герба» равны соответственно P (исход 1) и G (исход 2)		

Таблица 2.2. Результаты бросания двух монет

Номер исхода	1	2	3	4	($=2^2$)
Монета 1	p	p	g	g	(кверху)
Монета 2	p	g	p	g	(кверху)
Вероятность исхода	P^2	$P \times G$	$G \times P$	G^2	
Вывод	Вероятности выпадения 0, 1 или 2 «гербов» при бросании двух монет равны соответственно P^2 (исход 1), $P \times G + G \times P = 2 \times P \times G$ (исходы 2 и 3) и G^2 (исход 4)				

Есть две монеты, они бросаются независимо, и падение одной монеты никоим образом не может влиять на падение другой. Следовательно, вероятность падения монеты 1 «решеткой» вверх не зависит от того, как упадет монета 2. Короче говоря, эти события независимы, а правило объединения вероятностей независимых событий состоит в их перемножении [20]. Это должно быть ясно из альтернативного представления эксперимента на рис. 2.1. Начинаем рассматривать эту схему сверху. Бросание монеты 1 сразу делит дальнейшие события на две группы: P , в которой монета падает «решеткой» кверху, и G , в которой она падает «гербом» кверху. При бросании монеты 2 группа P делится дальше на части P и G . Правилom вычисления части от части снова является умножение, которое в результате дает полные вероятности исходов, показанные в нижней части рис. 2.1.

Во-вторых, поскольку нас интересует только *суммарное* число «гербов» в любом отдельном исходе, то вычислять вероятности выпадения 0, 1 или 2 «гербов» можно, объединяя вероятности отдельных событий так, как показано выше. Эти вероятности равны соответственно P^2 , $2 \times P \times G$ и G^2 , а получить их можно, раскрывая выражение $(P+G)^2$:

$$(P+G)^2 = P^2 + 2 \times P \times G + G^2.$$

Эта формула **биномиального** разложения, а вероятности, вычисленные таким способом, называются **биномиальными ве-**

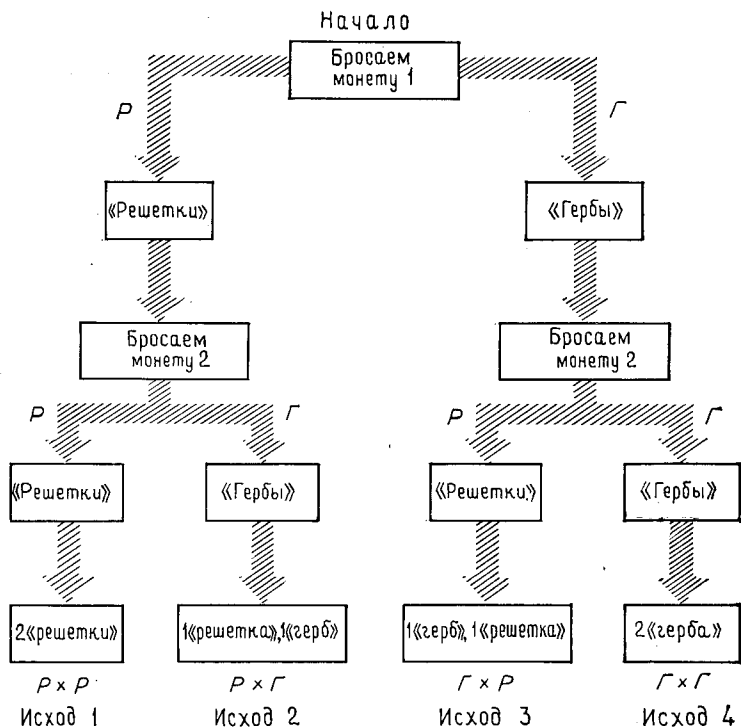


Рис. 2.1. Все возможные последовательности событий в опыте с бросанием двух монет. Буквы P и Γ у стрелок означают вероятности выпадения соответственно «решеток» и «гербов». Полные вероятности указаны в конце каждой из четырех ветвей.

роятностями. Им подчиняются все процессы, в которых в любой момент может происходить только одно из двух возможных событий.

Теперь мы готовы к дальнейшему усложнению эксперимента: бросанию трех монет. Его результаты показаны в табл. 2.3.

Надеюсь, что дальнейший путь ясен. В эксперименте с бросанием N монет вероятности выпадения 0, 1, 2, ..., N «гербов» являются последовательными членами разложения бинома $(P + \Gamma)^N$. Это биномиальное разложение и его общий член задается формулой

$$\begin{aligned} \text{Вероятность выпадения } R \text{ «гербов»} &= \binom{N}{R} \times \Gamma^R \times P^{N-R} = \binom{N}{R} \times \\ &\times \Gamma^R \times (1 - \Gamma)^{N-R}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

Таблица 2.3. Результаты бросания трех монет

Номер исхода	1	2	3	4	5	6	7	8(=2 ³)
Монета 1	<i>p</i>	<i>p</i>	<i>p</i>	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>g</i>
Монета 2	<i>p</i>	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>p</i>	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>g</i>
Монета 3	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>p</i>	<i>g</i>
Вероятности исхода	P^3	$P^2 \times G$	$P^2 \times G$	$P \times G^2$	$P^2 \times G$	$P \times G^2$	$P \times G^2$	G^3
Вывод	Вероятности выпадения 0, 1, 2, 3 «гербов» при бросании трех монет равны соответственно P^3 , $3 \times P^2 \times G$, $3 \times P \times G^2$ и G^3 , т. е. членам разложения формулы $(P+G)^3$							

где $\binom{N}{R}$ — число сочетаний из N объектов по R , определяемое формулой

$$\left(\frac{N}{R}\right) = \frac{N!}{R! \times (N-R)!},$$

где ! — знак факториала ($N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$; например, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$).

Пример. Чему равна вероятность выпадения четырех «гербов» при бросании шести правильных монет («правильных» означает, что $P=G=1/2$)? В этом примере $N=6$ и $R=4$, поэтому

$$\left(\frac{N}{R}\right) = \frac{6!}{4! \times (6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (2 \times 1)} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15,$$

также $G^R = (1/2)^4 = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/16$ и $P^{N-R} = (1/2)^2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Таким образом, искомая вероятность равна $15 \times (1/16) \times (1/4) = 15/64$, что приблизительно составляет 0,234.

Предположим, что мы проводим эксперимент с 14 монетами, и первоначально допускаем, что монеты правильные (т. е. $P=G=1/2$). Используя формулу (2.1), можно составить таблицу предполагаемых вероятностей выпадения 0, 1, 2,, 13, 14 «гербов» в эксперименте, когда все монеты бросаются одновременно. Эта таблица дана в подписи к рис. 2.2, на котором представлен график, построенный по тем же данным (ФПВ аналогична рис. 1.2, б, но с дискретной переменной R , принимающей только целые значения; поэтому результирующая функция имеет ступенчатый вид).

Если монеты правильные, мы ожидаем получить приблизительно равные множества «гербов» и «решеток». С другой стороны, если выпадает очень мало или очень много «гербов», можно сделать следующие выводы: либо (а) наше предположение $G=P=1/2$ верно, но произошло редкое событие, либо (б)

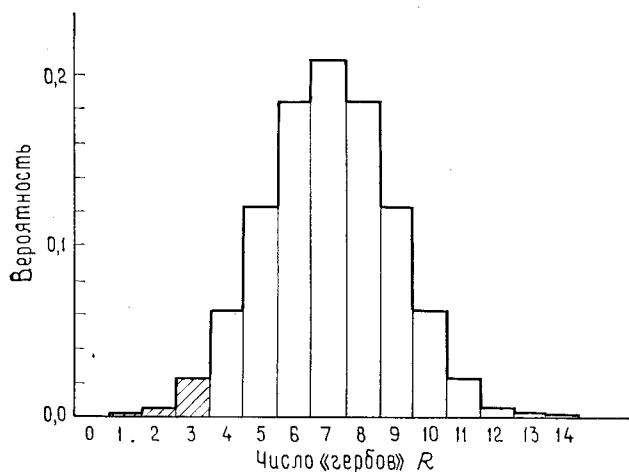


Рис. 2.2. Функция плотности вероятности биномиального распределения для выборки объемом $N=14$ при $P=G=1/2$.

Число «гербов»	Вероятность	Число «гербов»	Вероятность	Число «гербов»	Вероятность
0	0,0000610	5	0,122	10	0,0611
1	0,000854	6	0,183	11	0,0222
2	0,00555	7	0,209	12	0,00555
3	0,0222	8	0,183	13	0,000854
4	0,0611	9	0,122	14	0,0000610

наше предположение $G=P=1/2$ неверно. На каком из этих двух выводов мы остановимся, будет зависеть от того, что мы понимаем под «редким событием» (обсуждается в следующем разделе). Между тем из вывода (б) естественным образом следует, что если выпадает очень мало «гербов», то мы скорее предположим, что G меньше P , и, наоборот, если выпадет очень много «гербов», то можно предположить, что G больше P .

2.2. «Малые вероятности» и «редкие события»

Вопрос теперь состоит в следующем: как количественно охарактеризовать то, что мы подразумеваем под словами „очень мало «гербов»” или „очень много «гербов»”? Иначе: при каком критическом значении R (числе «гербов») мы считаем возможным отвергнуть гипотезу о том, что G равно P , и принять альтер-

нативную гипотезу, что G не равно P ? Ответ должен быть таким: при некотором маловероятном значении R в *предположении*, что $G=P$. Далее переходим к вопросу о том, как *определить* «малую вероятность». Никакие статистические теории не помогут исследователю решить, что понимать под «малой вероятностью», потому что многое зависит от конкретных условий. Однако, как только решение принято, с помощью множества разнообразных методов (называемых статистическими критериями) исследователь может применить его в ряде ситуаций для того, чтобы определить, произошло или нет «редкое событие».

По определению **редкое событие** происходит с малой вероятностью. В Англии из 50 млн. человек в среднем 20 человек каждый день гибнет в дорожных происшествиях. Хотелось бы считать, что такое катастрофическое событие происходит с исключительно малой вероятностью. Для «среднего человека» вероятностью погибнуть в какой-нибудь день на дороге равна $20/50\,000\,000 = 0,0000004$ (или $1/2\,500\,000$). В погоне за выигрышем в «орлянку» и в другие азартные игры мы бы пошли на риск, если бы шанс выиграть был, скажем, не меньше, чем $1:20$ или $1:100$. Короче говоря, наше представление о «малой вероятности» будет зависеть от конкретной ситуации. Допустим, в эксперименте с бросанием 14 монет мы решаем, что малая вероятность равна $1:20$ (0,05) или меньше. Если при однократном бросании всех монет не выпадает ни одного «герба» ($R=0$), то произошло редкое событие (при условии, что монеты «правильные»), потому что таблица в подписи к рис. 2.2 показывает, что соответствующая вероятность равна 0,0000610 (т. е. приблизительно $1:16400$). Если, повторяя эксперимент, последовательно получаем 0 или 1 «герб», то опять происходит редкое событие (по-прежнему предполагаем, что монеты правильные), потому что вероятность выпадения 0 или 1 «герба» равна сумме отдельных вероятностей ($0,0000610 + 0,000854 = 0,000915$, т. е. приблизительно $1:1100$). Чтобы вычислить «критическое значение» числа «гербов», равное или меньшее того числа, при котором редкое событие все еще происходит, просто продолжаем

Таблица 2.4. Определение критического значения R

Вероятность выпадения	{	0 гербов	0,0000610
		не больше 1 «герба»	0,000915
		не больше 2 «гербов»	0,00646
		не больше 3 «гербов»	0,0287
		не больше 4 «гербов»	0,0898

складывать последовательные вероятности из таблицы в подписи к рис. 2.2 и получаем табл. 2.4. Из нее видно, что выпадение трех или менее «гербов» согласуется с выбранным нами определением редкого события.

Эта последовательность действий очень важна, поэтому давайте составим схему наших действий:

1) Предполагаем, что монеты правильные, т. е. $\Gamma = P = 1/2$, а если они неправильные, то при бросании выпадает меньше «гербов», чем «решеток».

2) Для проверки этого предположения решаем провести эксперимент с бросанием монет, образующих выборку, и подсчитать число выпадающих «гербов».

3) Будем бросать 14 монет и считать, что «редкое событие» — это такое событие, которое происходит не чаще чем 1 раз в 20 бросаниях (т. е. с вероятностью 0,05 или меньше).

4) Так как мы собираемся основывать наш вывод на числе выпадающих «гербов» R , нам нужно знать вероятности выпадения конкретных значений R . Эти вероятности вычислены в табл. 2.4.

5) Таблица 2. 4 показывает, что если выпало не больше трех «гербов», то по предположению этапа 1 произошло «редкое событие».

6) Наконец, мы проводим эксперимент и можем сделать следующие выводы:

а) Если R больше или равно 4, считаем, что монеты правильные и Γ равно P .

б) Если R меньше или равно 3, то:

либо считаем, что монеты правильные, а результат объясняем тем, что произошло редкое событие;

либо отвергаем предположение о том, что монеты правильные, и считаем их неуравновешенными так, что при бросании этих монет «гербов» выпадает меньше, чем «решеток».

2.3. Шесть этапов проверки гипотез

Ниже приведено данное Зигелем [19] формальное описание шести только что рассмотренных этапов проверки гипотез. Некоторые из понятий, которые я ввожу здесь, рассмотрены в общих чертах только потому, что мне хочется вернуться к ним и более подробно обсудить их в гл. 10, раз уж я описал, что можно делать с помощью конкретных статистических критериев.

2.3.1. Формулировка «нулевой» и «альтернативной» гипотез.
Нулевая гипотеза (обычно обозначаемая H_0) — это гипотеза об отсутствии различий. Иногда ее специально выдвигают для того, чтобы отвергнуть в пользу **альтернативной гипотезы** (обозначаемой

мой H_1), которая может быть формулировкой «рабочей гипотезы» исследователя.

В вышеприведенном примере H_0 состоит в том, что монеты правильные, т. е. нет различия между вероятностями «гербов» и «решеток», и, следовательно, в нулевой гипотезе содержится предположение, что $\Gamma = P = 1/2$. Альтернативная гипотеза состоит в том, что монеты неправильные; все они некоторым образом не уравновешены (их центры тяжести смещены), так что, когда их бросают, монеты стремятся падать «решетками» вверх. В этом случае вероятности таковы, что $\Gamma < P$.

2.3.2. Выбор статистического критерия. В конкретной ситуации можно использовать множество статистических критериев. Однако каждому критерию соответствуют статистическая модель и условия проведения измерений, которые совместно обуславливают некоторые утверждения относительно исследуемой генеральной совокупности, способа отбора наблюдений и метода измерений. Выполняются ли условия конкретной модели, иногда можно проверить, но чаще приходится делать некоторые допущения. Следовательно, в любой ситуации статистическая модель частично или целиком определяется набором допущений и утверждений относительно предполагаемой обоснованности измерений. Однако обращаем внимание на то, что наиболее «мощные» статистические критерии основаны, как правило, на самых общих предположениях (я откладываю обсуждение «мощности» статистических критериев до разд. 2.4). По существу, мы добиваемся полной эффективности, в особенности полного использования данных, и тщательно исследуем ограничения применимости критерия.

В рассмотренном примере мы построили наш собственный статистический критерий, базирующийся на исследовании биномиального распределения. Однако чаще мы, вероятно, будем применять «стандартный» критерий, и естественно, что по мере постоянного расширения наших знаний и опыта мы увидим, что выбирать критерий будет легче (более подробно об этом сказано в гл. 10).

2.3.3. Установление объема выборки N и определение «малой вероятности» α . Выбор статистического критерия, вероятно, будет влиять на определение объема выборки N (или наоборот), и, конечно, то и другое будут зависеть от содержания задачи. По-видимому, чем больше становится объем выборки, тем, естественно, больше мы будем доверять своим выводам, и, конечно, справедливо, что с ростом объема выборки уменьшается вероятность совершения ошибок, но не обязательно это уменьшение будет резким. Однако один из важных моментов разработки методики проверки гипотез состоит в попытке достичь цели с минимальными усилиями или затратами. Раз уж

мы увидели в действии некоторые статистические критерии, то следовало бы указать, как в нашей конкретной задаче до применения критерия можно предсказать вероятный объем вычислений. В тех случаях, когда такие предсказания трудны, ситуацию всегда можно исследовать, выбирая менее «мощный» критерий, который проще применить и который требует меньших усилий. Ценность такой «пристрелки» в том, что с ее помощью определяется основной критерий. В нашем примере с бросанием монеты установление объема выборки N равным 14, возможно, открывает путь к совершению ошибок, но оказывается, что для выборки этого объема можно получить ряд вероятностей, удобных для использования в последующих примерах.

Как говорилось выше, только *сам исследователь* может определить, что понимать под термином «редкое событие». Статистическая теория оказывается мало полезной, так как здесь мы вступаем в область теории принятия решений, где начинают действовать факторы цены, усилий и даже личной репутации, но это в значительной степени находится вне сферы данной книги. Единственно, что можно оценить, это вероятность допустить ошибку, принимая решение (как мы вкратце увидим в разд. 2.4), и это представляется значительным достижением. В рассмотренном примере я выбрал малую вероятность равной 0,05; следовательно, шансы наступления «редкого события», приводящего к выпадению «очень малого» числа «гербов» при бросании 14 монет, будут не больше чем 1:20.

2.3.4. Оценка или определение другим способом распределения частот «статистики критерия». **Статистика критерия** — это число, которое наблюдается или рассчитывается по завершении эксперимента и с которым мы приступаем к статистической проверке. Обоснование или вывод статистического критерия будет включать ссылку на способ нахождения численного значения статистики критерия (не путайте «статистику критерия» со «статистическим параметром»!). В нашем примере статистикой критерия является число «гербов» R , определяемое путем подсчета. Статистику критерия по другим критериям можно находить графически или с применением математических формул.

Для того чтобы решить, какие значения статистики критерия «обычны», а какие «редки» при условии *справедливости* нулевой гипотезы, надо знать распределение частот (или функцию плотности вероятности) статистики критерия или по меньшей мере ее «критическое значение» на границе между «обычным» и «редким» значениями. В нашем примере вероятность появления всех возможных значений статистики критерия была вычислена и представлена графически (рис. 2.2). Вообще говоря, мы *можем* вычислять такие вероятности, но, скорее всего, нас интересует только «критическое значение» статистики критерия, а

для большинства стандартных критериев эти значения сводятся в таблицы или изображаются графически. Почти всегда такие таблицы и графики — это все, что нужно на данном этапе проверки гипотез.

2.3.5. Определение «критической области» (или «области неприятия» гипотезы). Критическая область — это область распределения частот статистики критерия, содержащая крайние значения статистики критерия, вероятность появления которых при условии справедливости гипотезы H_0 равна или меньше α .

Обращаясь к табл. 2.4 и рис. 2.2 и проводя аналогию с нашим обсуждением рис. 1.2, α , это «загадочное» определение можно проиллюстрировать следующим образом. Мы хотим найти крайние значения числа «гербов» R , вероятность появления которых при справедливости H_0 меньше или равна 0,05. Таблица 2.4, по сути дела, говорит о том, как растет часть площади под левой ветвью «кривой» на рис. 2.2 по мере добавления последующих прямоугольных столбиков. Заметим, что критическая область будет находиться под левой ветвью кривой, потому что альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что центры тяжести монет смещены так, что они падают «решетками» вверх, обеспечивая тем самым выпадение меньшего числа «гербов». Складывая прямоугольные столбики для 0, 1, 2 и 3 «гербов», получаем площадь, равную 0,0287 суммарной площади под «кривой». Добавление к ней прямоугольного столбика, соответствующего 4 «гербам», увеличивает значение площади до 0,0898, которое, таким образом, превышает выбранное нами значение, равное 0,05. Следовательно, о критической области, заштрихованной на рис. 2.2, можно говорить как об области, «содержащей» значения R , меньшие или равные 3. Малая вероятность α , выбранная для того, чтобы найти **размер критической области**, известна также как «уровень значимости». Употребление последнего термина обязано своим происхождением обычной задаче поиска «значимого» различия между фактом и теорией либо между двумя или более наборами наблюдений.

2.3.6. Решение. Если эксперимент дает значение статистики критерия внутри критической области, то H_0 отвергается. Возможны два объяснения: а) H_0 на самом деле справедлива, но произошло редкое событие; б) H_0 ложна. Формулируя решение, *никогда* не следует опускать ссылку на размер использованной критической области.

2.4. Вероятность принятия ошибочного решения

Обратите самое серьезное внимание на то, что статистический метод проверки гипотез *не доказывает* чего-либо! В действительности статистика *ничего не доказывает*. Даже если экспери-

Таблица 2.5. Вероятности ошибок при проверке гипотез (I — ошибка 1-го рода, II — ошибка 2-го рода)

		Фактически	
		H_0 справедлива	H_1 справедлива
Вывод:	принимается H_0	$1-a$	b (II)
	принимается H_1	a (I)	$1-b$

мент дает $R=0$, мы все еще *не доказали*, что монеты неправильные в юридическом или математическом смысле этого слова. В статистике всегда допускается, что выводы ошибочны, но всегда можно оценить *вероятность* этого допущения. Возможны только два типа ошибок, которые иллюстрируются табл. 2.5. В нашей методике в шесть этапов определяют редкие события при условии *справедливости* H_0 . В случае появления редкого события, вероятность которого равна a , мы отвергаем H_0 и делаем вывод о *справедливости* H_1 , хотя *фактически* справедливой *может быть* гипотеза H_0 . В этом случае мы сделали ошибку «1-го рода»: мы отвергли нулевую гипотезу, а фактически она справедлива; очевидно, что вероятность сделать это равна a . Можно совершить и ошибку «2-го рода», а именно принять нулевую гипотезу, когда фактически она является ложной. Вероятность этой ошибки обозначается буквой b . Вероятности a и b не независимы: через объем выборки N они связаны обратной зависимостью, которая существенно меняется от критерия к критерию. Следовательно, если для данного критерия и для данного объема выборки N уменьшаем a , то b увеличивается, и наоборот. Математической сути этой связи в настоящей книге мы касаться не будем (см. [16]), хотя уже в следующем абзаце дадим некоторые рекомендации по ее использованию. Обычно мы хотим, чтобы a и b были приблизительно равны. Но чтобы сделать обе величины сколь угодно малыми (для уменьшения вероятности появления ошибок 1-го и 2-го рода) нужно увеличить N . Только когда N равно полному объему генеральной совокупности, $a=b=0$.

В большинстве критериев, описанных в этой книге, и для большинства объемов выборок, практически доступных во многих геологических исследованиях, значения a можно выбирать в интервале от 0,05 до 0,01; обычно используют именно эти два значения, хотя они отнюдь не обладают какими-то магическими достоинствами. При таких значениях a у нас есть все основания быть уверенными в том, что b имеет приблизительно тот же порядок величины, что и a . Отметим, что если статистические критерии соответствуют меньшим значениям a и b для заданного N , то о них говорят как о более «мощных». Как a , так и b можно

задать предварительно, а затем *вычислить* требуемый объем выборки N , что будет характеризовать более глубокое понимание наших статистических критериев. При таком условии определяем, что мощность критерия равна $1-b$, т. е. равна вероятности принятия H_1 , когда она в действительности справедлива.

2.5. Типы альтернативной гипотезы: односторонние и двусторонние критерии

Остается обсудить последний момент — влияние конкретного типа альтернативной гипотезы H_1 на *положение* критической области. Как говорилось выше, наша альтернативная гипотеза состояла в том, что монеты не уравновешены в такой степени, что обеспечивают выпадение меньшего числа «гербов», чем «решеток». Предположим, что монеты не уравновешены, *но неизвестно, в чью пользу*: в пользу «гербов» или «решеток». В этом случае при справедливости нулевой гипотезы мы должны включить в число редких событий возможность того, что эксперимент приводит к выпадению как «очень большого», так и «очень малого» числа «гербов». Очевидно, что теперь критическая область должна быть разделена *поровну* между двумя ветвями ломаной линии на рис. 2.2. Сохраняя по-прежнему $\alpha=0,05$, под обеими ветвями ломаной нужно выделить области, соответствующие половине этой величины ($\alpha/2=0,025$). Так как «кривая» совершенно симметрична, то для иллюстрации того, что критическая область содержит теперь значения R , равные 0, 1, 2, 12, 13, 14, и что критические значения R равны или меньше 2 и равны или больше 12, можно использовать табл. 2.4. Таким образом, **односторонний** или **двусторонний** критерий применяется в зависимости от того, подразумевается или не подразумевается в формулировке альтернативной гипотезы некое «направление».

Таблица 2.6. Односторонние критические значения статистики критерия R . Критическая область содержит меньшие значения R , чем указанные критические значения

N	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	N	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	N	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
7	0	0	15	3	2	23	7	5
8	1	0	16	4	2	24	7	5
9	1	0	17	4	3	25	7	6
10	1	0	18	5	3	26	8	6
11	2	1	19	5	4	27	8	7
12	2	1	20	5	4	28	9	7
13	3	1	21	6	4	29	9	7
14	3	2	22	6	5	30	10	8

Упражнение. В эксперименте с бросанием монеты, приведенном выше, для критической области размером 0,01 определите критические значения R в одностороннем и двустороннем случаях. Ответ найдите в табл. 2.6.

2.6. Приложение к стратиграфии

В заключение все вышеприведенное теоретическое обсуждение я хочу перенести в область практической стратиграфии. Предположим, что геолог картировал площадь, на которой определенные части стратиграфического разреза обнажаются в нескольких приблизительно параллельных руслах водных потоков. Геолог отмечает, что во многих руслах ископаемый остаток определенного вида исчезает из стратиграфического разреза на уровне, меняющемся при переходе от потока к потоку. По-видимому, это частично обусловлено случайностями захоронения. Пусть исчезновение этого ископаемого остатка в русле любого потока будет событием h . Подобным же образом геолог отмечает исчезновение другого ископаемого вида на уровнях, тоже меняющихся от потока к потоку. Пусть исчезновение этого вида будет событием t . События h и t (опять же из-за различных случайностей — неполноты стратиграфического разреза) не всегда проявляются в разрезе одного и того же потока, но все-таки в 14 руслах они появляются вместе. В 10 из них h располагается стратиграфически выше t , тогда как в остальных четырех h стратиграфически ниже t . Из-за *видимого* несоответствия (10:4) геолог может склоняться к выводу, что h и t — несвязанные события и что h действительно моложе t . Однако здесь стоит провести аналогию с вышеприведенным примером с бросанием монеты. Если h и t происходили в одно и то же время, то соотношение « h выше t » должно наблюдаться приблизительно с той же частотой, что и « t выше h », причем любые малые отклонения от равенства обуславливаются случайными флуктуациями условий захоронения, выхода обнажения на поверхность и т. п. С другой стороны, так как соотношение « h выше t » численно превосходит соотношение « t выше h », как 10:4, то другая возможность состоит в том, что события h и t происходили в разное время и что h стратиграфически моложе. Перейдем к непосредственной проверке гипотезы по шестиступенчатой методике:

1) H_0 — соотношения « h выше t » и « t выше h » равновероятны, так как h и t — два одновременных стратиграфических события. Любые отклонения от равенства обуславливаются флуктуациями отбора.

H_1 — соотношение « h выше t » численно превосходит соотношение « t выше h », потому что h и t — два разновременных стратиграфических события, причем h моложе. (Обратите внимание,

что альтернативная гипотеза имеет «направление», а именно h моложе t .)

2) В любом конкретном разрезе возможны только два расположения событий: « h выше t » и « t выше h », поэтому подходит критерий, основанный на биномиальном распределении. Обратите внимание на то, что появление h и t на одном уровне исключается (что соответствует падению монеты на ребро). Если в небольшом числе русел h и t появляются на одном уровне, то они игнорируются. Если же они появляются вместе в очень большом числе потоков, то подход должен быть совершенно другим, и будут применимы методы, рассмотренные в гл. 4.

3) $N=14$; устанавливаем $\alpha=0,05$.

4) Статистикой критерия R является число соотношений « h выше t ». Она распределена по биномиальному закону; поэтому можно вычислить соответствующие вероятности.

5) Односторонняя критическая область для $\alpha=0,05$ содержит значения R , равные или большие 11 (сравните с *очень большим* числом «гербов»).

6) Наблюдаемое значение $R=10$ не попадает в критическую область. Следовательно, принимается нулевая гипотеза.

В связи с полезностью «биномиального критерия» в табл. 2.6 приведены односторонние критические значения статистики критерия R для выборок различного объема N и для двух размеров критической области: $\alpha=0,05$ и $\alpha=0,01$. Таблица охватывает объемы выборок вплоть до $N=30$. При необходимости эту таблицу нетрудно будет расширить для больших значений N .

Методы проверки гипотез для одной и двух выборок

Применяя простые статистические методы к решению наших задач, мы зачастую хотим ответить на один из двух вопросов: «Действительно ли этот ряд наблюдений согласуется с моей теоретической моделью?» или «Действительно ли эти два ряда наблюдений различаются так сильно, что я должен предполагать, что они извлекаются из разных генеральных совокупностей?» Это и есть варианты применения статистических методов для одной и двух выборок. Для иллюстрации их построения рассмотрим критерий Колмогорова — Смирнова, который можно быстро применить непосредственно на графиках интегральных функций распределения (ИФР).

3.1. Критерии для одной и двух выборок

В последнем примере предыдущей главы рассмотрен случай, в котором наблюдаемая картина — число соотношений « h выше t » отличается от числа соотношений « t выше h » — сравнивалась с теоретической моделью — число соотношений « h выше t » и число соотношений « t выше h » одинаковы. На практике часто встречается другая ситуация — две наблюдаемые картины сравниваются с целью решения вопроса, «похожи» они или «различны». Первый случай влечет за собой критерий для одной выборки, тогда как последний требует применения критерия для двух выборок. Короче говоря, критерий для одной выборки включает в себя сравнение случайной выборки с теоретической моделью для проверки степени соответствия между тем, что наблюдается, и тем, что мы ожидаем. С другой стороны, критерий для двух выборок применяется с тем, чтобы определить, извлечены ли две независимые выборки из одной и той же генеральной совокупности (или из одинаковых совокупностей), и, следовательно, он может считаться критерием сравнимости двух отдельных выборок. Для иллюстрации этих представлений вводится критерий Колмогорова — Смирнова сначала для проверки предположения о том, что «столбики базальта имеют шестиугольные сечения», и затем для того, чтобы исследовать, сильно ли различаются формы поперечных сечений базальтовых столбиков и глиняных табличек, образованных трещинами высыхания.

3.2. Многоугольные формы базальтовых столбиков и глиняных табличек

Форма глиняных табличек и поперечных сечений базальтовых столбиков близка к многоугольной, и эти многоугольники можно «измерять» (в соответствии с нашим пониманием измерения, введенным в гл. 1), подсчитывая число их сторон. В табл. 3.1 приведены результаты таких измерений, выполненных на некоторых реальных объектах.

Нас может интересовать механизм образования этих многоугольников. В соответствии с известными теориями предполагается, что многоугольники образуются благодаря сжатию, направленному к их центрам, равноотстоящим друг от друга, и, подобно пчелиным сотам, они должны быть шестиугольными. Обращаем внимание на то, что в базальтовых столбиках отчетливо выделяется модальный класс, образованный шестиугольниками (почти половина выборки состоит из шестиугольников), но при этом определенное распространение имеют и другие сечения, особенно четырех- и пятиугольные, а полный размах охватывают трехгранные и десятигранные столбики. Допустим, мы хотим проверить известную теорию о том, что базальтовые столбики являются шестигранными. Как можно сопоставить наблюдаемое явление и теоретическую модель? Очевидно, в данном случае следует начать с представления данных в виде гистограммы. Вершина гистограммы форм базальтовых столбиков соответствовала бы шестигранным, а высота столбиков гистограммы убывала бы в обе стороны от вершины. Гистограмма теоретической модели, в которой все базальтовые столбики имеют шестиугольное сечение, состояла бы лишь из одного прямоугольника, соответствующего

Таблица 3.1. Многоугольные поперечные сечения базальтовых столбиков из Йеллоукрейгса (Ист-Лотиан, Шотландия) и глиняных табличек Нью-Хейвена (Коннектикут, США)

Классы (число граней)	Частоты классов	
	Базальт	Глина
3	1	1
4	3	7
5	8	10
6	15	8
7	4	6
8	1	4
9	0	0
10	1	0
Объемы выборок	33	36

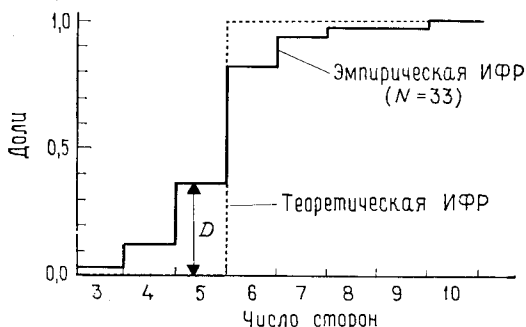


Рис. 3.1. Теоретическая и эмпирическая интегральные функции распределения базальтовых столбиков, для которых предполагается шестиугольная форма поперечного сечения.

классу шестигранных столбиков, а высота этого прямоугольника была бы пропорциональна числу 33, т. е. объему выборки. К сожалению, для таких малых объемов выборок у нас нет статистического критерия, основанного непосредственно на подобных диаграммах. На практике намного полезнее была бы интегральная «кривая» долей (или интегральная функция распределения; рис. 1.3, б), изображенная на рис. 3.1.

Как и следовало ожидать, между теоретической и наблюдаемой интегральными функциями распределения существует расхождение, и это расхождение может служить мерой различия между «теорией» и «фактом». Теоретическая модель состоит в том, что центры сжатия расположены на равных расстояниях друг от друга и что образующиеся столбики являются шестигранными. Наши наблюдения позволяют предположить, что центры сжатия не являются строго равноотстоящими друг от друга, и поэтому мы наблюдаем не только шестигранные базальтовые столбики. Но является ли это расхождение значимым или оно просто обусловлено «малыми» случайными флуктуациями? Ниже показано, как можно применить шесть этапов проверки гипотез и критерий Колмогорова — Смирнова для одной выборки.

3.3. Критерий Колмогорова — Смирнова для одной выборки

1) *Нулевая и альтернативная гипотезы.* Нулевая гипотеза состоит в том, что центры сжатия равно отстоят друг от друга и все столбики получаются шестигранными. Альтернативная гипотеза состоит в том, что центры сжатия не равноотстоящие: они распределены как-то иначе; как именно, здесь не определяется, а формы поперечных сечений получающихся столбиков имеют некоторый разброс.

2) *Выбираем критерий Колмогорова — Смирнова для одной выборки.* Критерий может быть основан на интегральной функции распределения любого вида (так что можно использовать любую шкалу измерений), и его применение не ограничивается малым объемом выборки.

3) *Объем выборки и малая вероятность a .* Были измерены 33 столбика ($N=33$), а размер критической области a мы можем выбрать равным 0,01.

4) *Выборочное распределение статистики критерия.* Статистикой критерия является **максимум** расхождения D между теоретической и наблюдаемой ИФР, измеренного по вертикальной шкале. В примере на рис. 3.1 видно, что это максимальное расхождение соответствует классу пятигранных столбиков, для которого высота наблюдаемой ИФР приблизительно равна 0,36, а высота теоретической ИФР равна 0. Следовательно, $D=0,36$. При полном согласии между наблюдаемым и теоретическим распределениями $D=0$, а с ростом расхождения между ними D увеличивается, достигая максимального значения, равного 1. Здесь не обязательно точно знать, как именно растет D ; достаточно иметь критическое значение D (табл. 3.2) на границе критической области.

5) *Критическая область.* Поскольку неважно, каких столбиков в наблюдаемом распределении больше: имеющих более шести граней или менее шести граней, — с альтернативной гипотезой не связывается какое-либо «направление» в том смысле, как мы его определили в разд. 2.5. (В данном примере 12 столбиков имеют меньше шести граней и шесть столбиков — больше шести граней). Следовательно, нашей задаче соответствует двусторонняя критическая область, и, обращаясь к табл. 3.2, мы замечаем, что критическая область содержит значения D , не меньшие чем 0,28.

6) *Решение.* Наблюдаемое значение статистики критерия, $D=0,36$, попадает внутрь критической области, и, следовательно,

Таблица 3.2. Формулы для определения приближенных критических значений статистики критерия Колмогорова — Смирнова D

	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
Односторонние значения	1,22 N'	1,51 N'
Двусторонние значения	1,36 N'	1,63 N'

Для одновыборочного критерия $N' = 1/\sqrt{N}$.

Для двухвыборочного критерия $N' = \sqrt{(N_1+N_2)/(N_1 \times N_2)}$.

Критическая область содержит значения D , превышающие указанные значения. Чтобы в приведенных приближениях сохранялись две значащие цифры, объемы выборок должны быть больше 16.

мы отвергаем нулевую гипотезу и считаем, что центры сжатия не являются равноотстоящими друг от друга.

Если бы мы построили альтернативную гипотезу, включающую знак «направления», то наши способы вычисления значений статистики критерия нуждались бы в уточнении, потому что расхождения между наблюдаемой и теоретической ИФР также были бы «направленными»: они могли бы быть как *положительными* (наблюдаемое значение больше теоретического), так и *отрицательными* (наблюдаемое значение меньше теоретического). Частное расхождение, взятое в качестве значения статистики критерия, должно было бы совпадать по «направлению» с «направлением» альтернативной гипотезы (т. е. должно быть максимальным положительным или максимальным отрицательным).

Упражнение (непростое). Чтобы закрепить понимание того, что изложено в последнем абзаце, проверьте сформулированную выше нулевую гипотезу против альтернативной гипотезы, состоящей в том, что центры сжатия «в среднем» распределены таким образом, что получающиеся столбики имеют больше или меньше шести сторон (выберите соответствующий вариант альтернативной гипотезы).

3.4. Критерий Колмогорова — Смирнова для двух выборок

Формы сечений базальтовых столбиков и глиняных табличек можно сравнить, построив интегральные функции распределения, как на рис. 3.2. Это может представлять интерес, если требуется сопоставить соответствующие механизмы образования или даже действия одного механизма образования (например, базальтовых столбиков) в разных геологических обстановках. Теперь нас прежде всего интересует, были ли обе выборки извлечены из одной и той же (или одинаковых) генеральной совокупности.

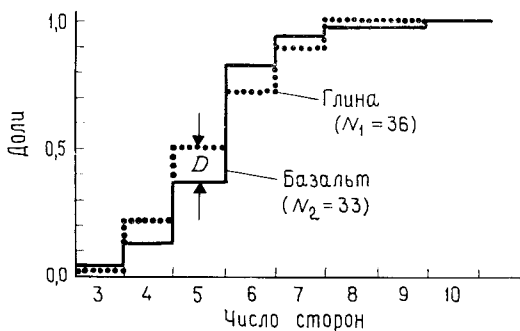


Рис. 3.2. Представление интегральных функций распределения многоугольных форм поперечного сечения базальтовых столбиков и глиняных табличек для применения критерия Колмогорова — Смирнова для двух выборок.

Критерий Колмогорова — Смирнова для двух выборок применяется следующим образом.

1) *Нулевая и альтернативная гипотезы.* Что касается многоугольной формы, то нулевая гипотеза состоит в том, что обе выборки извлекаются из одинаковых генеральных совокупностей, а расхождения обуславливаются флуктуациями отбора. Альтернативная гипотеза утверждает, что выборки извлекаются из различных генеральных совокупностей без указания *конкретных* различий между ними.

2) Выбираем критерий Колмогорова — Смирнова для двух выборок. Критерий можно строить на интегральной функции распределения любого вида: он *не зависит* от каких-либо предположений относительно вида *распределений генеральных совокупностей*, лежащих в его основе, и может применяться к выборкам малого объема.

3) Объемы выборок $N_1=36$ и $N_2=33$, размер критической области α принимаем равным 0,05.

4) Определение и свойства статистики критерия похожи на те, которые связаны с вышеописанным критерием для одной выборки. В данном случае статистикой критерия является максимум расхождения между двумя ИФР, измеряемого по вертикальной шкале безотносительно к «направлению» расхождения, так как альтернативная гипотеза не содержит в себе какой-либо «направленности». Максимум расхождения соответствует классу пятиугольников и определяется как разность долей, соответствующих этому классу в глинах и этому же классу в базальтах, что дает $D=0,50-0,36=0,14$.

5) *Критическая область.* Так как применяется двусторонняя критическая область (альтернативная гипотеза «ненаправленная»), то из табл. 3.2 следует, что критическая область размером $\alpha=0,05$ содержит все значения D , не меньшие чем 0,33.

6) *Решение.* Поскольку наблюдаемое значение $D=0,14$ не попадает внутрь критической области, мы принимаем нулевую гипотезу.

В заключение обратим внимание на следующие особенности критерия Колмогорова — Смирнова: 1) он основан на расхождениях между наблюдаемой и теоретической ИФР или между двумя наблюдаемыми ИФР; 2) его можно применять к переменным, измеренным в любой шкале: номинальной, порядковой, шкале отношений, непрерывной или дискретной; 3) не делается никаких предположений относительно распределения переменных в генеральных совокупностях, из которых извлекаются выборки; 4) он чувствителен к любым различиям между ИФР, связаны ли они со «средним», «рассеянием» или «асимметрией»; 5) его можно применять к выборкам совсем небольшого объема (но с соответствующей потерей мощности).

Номинальные статистики

Вслед за накоплением эмпирических данных, которые составляют основу описательных наук, сразу же возникает необходимость в классификации объектов и событий, а затем и в анализе структуры совокупностей (статистического типа), основанном на подсчетах частот индивидов, попадающих в каждый класс. Здесь мы рассматриваем некоторые методики анализа данных, представленных этими частотами встречаемости, т. е. числами, которые получаются путем простого подсчета индивидов конкретного типа, содержащихся в наших выборках. Смысл многих классификаций заключается в установлении числа делений номинальной шкалы, причем простейшие из них классифицируют объекты в зависимости от присутствия или отсутствия у них конкретного свойства.

Такие частотные данные удобно представлять в виде таблиц, а определенные свойства таких «таблиц сопряженности» легко анализировать. Критерии здесь связываются с примером, в котором изучается появление в гнейсах порфиروبластов различных минеральных видов. В ходе изложения нам придется рассмотреть новое статистическое понятие — «степени свободы»; надеюсь, что при этом мы не слишком отклонимся в сторону.

4.1. Дальнейшее развитие номинальной шкалы

В ходе краткого обсуждения теории измерений в гл. 1 мы увидели, что правила идентификации пород, минералов и ископаемых организмов можно рассматривать как способы расположения объектов в соответствующих позициях номинальной шкалы измерений. Более того, отдельные объекты могут быть одновременно измерены не в одной номинальной шкале, а в нескольких. Например, обломки породы из ледниковых отложений можно классифицировать по типу породы и по расположению места отбора. Потом можно проанализировать получающиеся частоты, чтобы определить, есть ли значимые различия в соотношении типов пород между разными местами отбора. Однако для иллюстрации этих методик вводится другой, несколько отличный способ применения номинальной шкалы. Часто геологические объек-

Таблица 4.1. Таблица сопряженности для пунктов наблюдения порфиروبластовых гнейсов

	<i>H</i>	<i>h</i>	Суммы по строкам
<i>B</i>	(15)	(18)	(33)
<i>b</i>	(48)	(9)	(57)
Суммы по столбцам	(63)	(27)	<i>N</i> = 90

ты можно классифицировать просто по тому, присутствует или отсутствует в них какое-нибудь конкретное свойство (т. е. в двучленной номинальной шкале). Приводимый ниже численный пример основан на выборке, состоящей из наблюдений, выполненных в 90 пунктах в районе Скай (Шотландия), где развита формация порфиروبластовых гнейсов. В каждом пункте в составе гнейсов присутствует в виде порфиروبластов в кварц-полевошпатовой основной массе по крайней мере один из трех минералов — роговая обманка, биотит и гранат. Следовательно, каждый пункт наблюдения можно измерить в трех двучленных номинальных шкалах, а именно в шкале роговой обманки (присутствует или отсутствует), в шкале биотита (присутствует или отсутствует) и в шкале граната (присутствует или отсутствует). В данном примере я хочу остановиться на двух минералах — роговой обманке и биотите. Если присутствие роговой обманки обозначить через *H*, а через *h* — ее отсутствие и аналогично через *B* и *b* — присутствие и отсутствие биотита, то в зависимости от присутствия того или иного порфиробласта отдельные пункты наблюдения можно пометить как *HB*, *Hb*, *hB* или *hb*. Затем соответствующим символом, заключенным в скобки, можно обозначить полное число (частоту) пунктов наблюдения, характеризующихся конкретной ассоциацией порфиробластов: (*HB*), (*Hb*) и т. п. В данном числовом примере (*HB*) = 15, (*Hb*) = 48, (*hB*) = 18, (*hb*) = 9, полный объем выборки *N* = 90. Так как мы используем лишь две номинальные шкалы, эти значения можно представить в виде табл. 4.1, называемой таблицей сопряженности.

4.2. Таблицы сопряженности и независимость

Упомянутая выше табл. 4.1 называется таблицей сопряженности 2×2 , так как она состоит только из двух строк и двух столбцов. Измерив две переменные и поместив их частоты в таблицу сопряженности, задаем основной вопрос: являются ли

Таблица 4.2. Таблица сопряженности с символическим обозначением частот (символы в круглых скобках — наблюдаемые частоты)

	H	h	Суммы по строкам
B	(HB)	(hB)	(B)
b	(Hb)	(hb)	(b)
Суммы по столбцам	(H)	(h)	N

эти переменные независимыми? Другими словами, не связано ли (т. е. не зависит ли) присутствие или отсутствие порфиробластов биотита в этих породах с присутствием или отсутствием порфиробластов роговой обманки. Оба минерала содержат железо и магний и имеют близкий химический состав, а их присутствие в породах такого состава по отдельности или вместе определяется главным образом конкретными условиями метаморфизма. Если статистический анализ приводит нас к выводу, что порфиробласты роговой обманки и биотита появляются независимо, то можно предполагать один набор условий метаморфизма, а если мы делаем вывод о том, что их появление не независимо, то можно предполагать другой набор этих условий. Но, что является критерием независимости?

Сначала составим таблицу сопряженности (табл. 4.2) из символов. Тогда критерий независимости можно сформулировать двумя способами:

а) Доля биотитовых пород, содержащих роговую обманку (т. е. $(HB)/(B)$), должна быть такой же, как доля безбиотитовых пород, содержащих роговую обманку (т. е. $(Hb)/(b)$). Посмотрите, какие места в табл. 4.2 занимают компоненты этих отношений.

б) Доля биотитовых пород, содержащих роговую обманку (т. е. $(HB)/(B)$), должна быть такой же, как доля всех пород, содержащих роговую обманку (т. е. $(H)/(N)$). Как и выше, посмотрите, на каких местах в табл. 4.2 находятся компоненты этих отношений. Видите ли вы проявление закономерности?

Хотя эти две переменные могут быть действительно независимыми, равенства, предполагаемые в обоих видах критерия, редко строго выполняются из-за флуктуаций при формировании выборки из генеральной совокупности. Если предположить независимость в качестве нулевой гипотезы, то можно вычислить ожидаемые значения частот. Заклучив ожидаемые частоты в кавычки (например, « HB »), мы можем использовать вторую формулировку критерия для получения выражения

$$\text{«}HB\text{»} = (B) \times (H)/N. \quad (4.1)$$

Упражнение. Составьте таблицу сопряженности, содержащую числовые значения ожидаемых частот классов. Сделайте это простое упражнение прямо сейчас, потому что ниже вам понадобятся его результаты.

4.3. Положительные и отрицательные связи

В нашем примере $\langle HB \rangle = 23$, что гораздо больше наблюдаемой частоты $(HB) = 15$. Если это расхождение обусловлено не отклонениями в отборе наблюдений из генеральной совокупно-

Таблица 4.3. Таблица сопряженности, показывающая расхождение между наблюдаемыми и ожидаемыми частотами. Наблюдаемые частоты выражены через ожидаемые частоты и величину расхождения d

	H	h	
B	" HB " + d	" hB " - d	(B)
b	" Hb " - d	" hb " + d	(b)
	(H)	(h)	N

сти, в которой обе переменные действительно независимы, то оно должно указывать на наличие «связи» между переменными. В данном случае связь «отрицательная», потому что мы имеем меньше биотит-роговообманковых пород, чем ожидалось. Иными словами, породы могут быть либо преимущественно биотитовыми, либо преимущественно роговообманковыми, но не теми и другими одновременно. «Положительную» связь могла бы иллюстрировать обратная тенденция: роговая обманка и биотит проявляются совместно (тогда было бы $(HB) > \langle HB \rangle$). Если расхождение обозначать через $d = (HB) - \langle HB \rangle$, то, сохраняя постоянными суммы по строкам и столбцам, легко показать, что таблицу сопряженности можно переписать в символических обозначениях, чтобы получить табл. 4.3.

4.4. Критерий «хи-квадрат»

Можно предположить, что при $d = 15 - 23 = -8$ расхождение — просто результат флуктуаций отбора. Чтобы оценить вероятность появления такого значения, нужен статистический критерий. Для этого применяется критерий хи-квадрат, и я ввожу его здесь, используя шесть этапов проверки гипотез.

1) *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы.* Нулевая гипотеза состоит в том, что роговая обманка и биотит появ-

ляются в составе породы независимо друг от друга, а (hB) равно 15 вместо 23 из-за флуктуаций отбора. Альтернативная гипотеза состоит в том, что расхождение существует в действительности, и, следовательно, появление биотита отрицательно связано с появлением роговой обманки.

2) *Выбираем статистический критерий.* Вообще говоря, статистика критерия χ^2 (хи-квадрат) является мерой отклонения наблюдаемых частот от ожидаемых, которые получаются при любой классификации данных, когда каждое наблюдение принадлежит к одному и только к одному классу. В этом примере данные были размещены в четырех классах таблицы сопряженности 2×2 . Критерий хи-квадрат из-за теоретических ограничений применим только к выборкам, объем которых не меньше 50, а минимальная частота отдельного класса не меньше 5 и лучше, если она больше 10. В нашем примере можно использовать критерий хи-квадрат, потому что объем выборки равен 90, а минимальная ожидаемая частота класса « hB » = 10. (Если бы частоты классов были слишком малы, то для выполнения вышеуказанных условий следовало бы по возможности объединять соседние классы.) Все классы взаимно независимы, т. е. наблюдение принадлежит не более чем к одному классу. Величину критерия χ^2 можно вычислить по одной из двух формул:

$$\chi^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=C} [(O_i - E_i)^2 / E_i], & (4.2) \\ \sum_{i=1}^{i=C} (O_i^2 / E_i) - N, & (4.3) \end{cases}$$

где C — число классов; i — целое число, обозначающее индекс класса и принимающее значения от 1 до C с шагом 1; O_i — наблюдаемая частота i -го класса; E_i — ожидаемая частота i -го класса; N — объем выборки; Σ обозначает суммирование выражения, стоящего *во внешних* скобках, для всех указанных значений индекса i [ср. с формулой (1.2), где объясняется использование знака суммы].

Если в таблице сопряженности 2×2 (табл. 4.1) пронумеровать классы ($i=1, 2, 3, 4$) по часовой стрелке, начиная с правого верхнего угла, то по формуле (4.3) получаем

$$\chi^2 = \frac{15^2}{23} + \frac{18^2}{10} + \frac{9^2}{17} + \frac{48^2}{40} - 90 = 14,5.$$

(Обратите внимание, что объем выборки N вычитается *после того*, как завершается суммирование.) Для вычисления критерия χ^2 обычно проще пользоваться формулой (4.3).

3) *Устанавливаем объем выборки и определяем размер кри-*

тической области. (N здесь равно 90). Пусть размер критической области a равен 0,01.

4) *Исследуем выборочное распределение статистики критерия.* Статистика критерия χ^2 имеет следующие свойства:

а) принимает только положительные значения, увеличиваясь от нуля до бесконечности;

б) увеличивается по мере роста расхождения между наблюдаемыми и ожидаемыми значениями;

в) ее точное значение зависит от числа «степеней свободы» классификации. В случае таблицы сопряженности 2×2 число степеней свободы равно единице, потому что, выполняя требование постоянства суммы по строкам и по столбцам, произвольно можно выбрать частоту только одного класса. В следующем разделе я кратко вернусь к общему представлению о степенях свободы наборов данных. Между тем обращаем внимание на то, что критические значения χ^2 можно найти в табл. 4.6.

5) *Определяем критическую область.* Для критической области размером 0,01 и классификации, имеющей одну степень свободы, табл. 4.6 дает критическое значение χ^2 , равное 6,64. Из формулы (4.2) мы видим, что критерий χ^2 растет по мере того, как наблюдаемые значения все дальше отклоняются от ожидаемых; поэтому критическая область содержит значения χ^2 , равные или больше 6,64.

6) *Решение.* Наблюдаемое значение критерия χ^2 , равное 14,5, лежит в критической области, поэтому нулевая гипотеза отвергается, и мы делаем вывод, что в действительности порфиробласты роговой обманки и биотита связаны отрицательно. Вероятность того, что наш вывод ошибочен, меньше или равна 0,01 (т. е. $\alpha \leq 0,01$).

(Последующее микроскопическое исследование показало, что роговая обманка замещает биотит.)

4.5. Степени свободы

Этой теме я уже касался в разд. 4.4 и буду возвращаться к ней в дальнейшем; поэтому позвольте мне попытаться следующим образом охарактеризовать данное понятие в общих чертах. Когда мы обрабатываем выборочные данные для классификации или вычисления числовой характеристики (или набора числовых характеристик), включая как параметры, так и статистики критериев, то исходные данные вместе с классификацией (или вычисляемыми числовыми характеристиками) отчетливо связываются некой общей структурой. В случае классификации эта структура состоит из правил классификации, в случае вычисляемых числовых характеристик она определяется одним или несколькими математическими выражениями. Число степеней сво-

боды структуры равняется объему выборки (или, если удобнее, числу классов) за вычетом числа независимых ограничений, налагаемых структурой. Оно дает нам некоторую информацию о том, сколькими способами можно изменять выборку, не вызывая изменений ограничивающих факторов.

Это можно проиллюстрировать двумя примерами. В разд. 4.4 мы рассматривали таблицу сопряженности 2×2 для проверки независимости признаков. Ограничения, относящиеся к этой таблице, состоят в том, что мы можем изменять частоту любого класса, лишь выполняя требование о постоянстве сумм по строкам и по столбцам. Таких сумм четыре; следовательно, и ограничений четыре: две суммы по столбцам и две суммы по строкам, и если их сложить по отдельности, то получится полный объем выборки. Ясно, однако, что последнее ограничение не является независимым. Далее, поскольку сложение двух сумм по столбцам и двух сумм по строкам дает одно и то же число, то не все четыре суммы независимы: если определить три любые суммы, то четвертая находится автоматически. Таким образом, *независимы* только три ограничения и, число степеней свободы таблицы сопряженности 2×2 для фиксированных сумм по строкам и по столбцам равно: 4 класса — 3 независимых ограничения = 1. В разд. 4.4 мы видели, что, в самом деле, выполняя требование сохранения постоянства сумм по строкам и столбцам, лишь частоту одного класса можно выбрать независимо. Как только определяется частота одного класса, три другие оказываются уже зафиксированными.

В качестве второго примера возьмем вычисление среднего значения переменной в выборке объемом N , а затем ответим на вопрос: сколько отдельных наблюдаемых значений можно изменить, сохраняя постоянным среднее значение? Ответ заключается в том, что первым $N - 1$ наблюдениям мы можем придать любые значения, но значение N -го наблюдения ограничивается требованием постоянства среднего значения. Таким образом, говорят, что оценка среднего значения имеет $N - 1$ степеней свободы. Если бы мы также оценивали стандартное отклонение, то общая структура имела бы $N - 2$ степеней свободы, потому что эти два параметра независимы. Следовательно, если оцениваемые параметры и статистики критериев независимы, то для того, чтобы найти число степеней свободы, просто надо их число вычесть из объема выборки.

4.6. Точный критерий Фишера

Выше мы отмечали, что критерий хи-квадрат применим только к выборкам, в которых объем и частоты отдельных классов превышают определенную минимальную величину. В самом деле,

последнее требование в рассмотренном примере удовлетворялось на пределе. В тех условиях, когда из-за указанных причин критерий хи-квадрат неприменим для анализа таблиц сопряженности 2×2 , его можно заменить точным критерием Фишера. В табл. 4.4 приведены сопряженности, определенные в начале вышеописанного исследования. Для иллюстрации применения точного критерия Фишера снова можно воспользоваться шестью этапами проверки гипотез:

Таблица 4.4. Таблица сопряженности, получающаяся на раннем этапе изучения порфиробластовых гнейсов (в круглых скобках — наблюдаемые частоты, в кавычках — ожидаемые частоты)

	<i>H</i>	<i>h</i>	
<i>B</i>	(3) "7"	(6) "2"	(9)
<i>b</i>	(19) "15"	(2) "6"	(21)
	(22)	(8)	(30)

1) *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы.* Они формулируются так же, как и в предыдущем примере, за исключением фразы «(*HB*) равно 3 вместо ожидаемого значения, равного 7».

2) *Выбираем статистический критерий.* Так как объем выборки меньше 50, а ожидаемые частоты трех классов меньше 10, то критерий хи-квадрат неприменим, и вместо него надо использовать точный критерий Фишера.

3) *Устанавливаем объем выборки и выбираем размер критической области.* Объем выборки $N=30$. В связи с этим критерий, вероятно, будет менее мощным, поэтому соответствующий размер критической области можно взять равным 0,05.

4) *Исследуем выборочное распределение статистики критерия.* Явной статистики, связанной с точным критерием Фишера, нет; вместо этого, как показано ниже, мы будем непосредственно исследовать вероятности появления определенных таблиц сопряженности. Наблюдаемые частоты не совпадают с ожидаемыми частотами, предсказанными нулевой гипотезой, но это может быть результатом флуктуаций отбора. Вероятность получения наблюдаемых частот по ожидаемым частотам, обусловленная флуктуацией отбора, точно определяется следующей формулой:

$$p_0 = \frac{(B)!(b)!(H)!(h)!}{N!(HB)!(Hb)!(hB)!(hb)!}, \quad (4.4)$$

где ! — знак факториала (см. (2.1)). Эту величину легко оценить, используя табл. 4.7:

$$p_0 = \frac{9!2!1!22!8!}{30!3!19!6!2!} = 0,003014.$$

Но при справедливости нулевой гипотезы также могли бы появляться и более далекие значения наблюдаемых частот (т. е. наблюдаемые частоты, еще дальше отстоящие от ожидаемых частот). Итак, вычисленная выше вероятность появления минимальной наблюдаемой частоты в табл. 4.4, равной $(hb) = 2$, составляет 0,003014. Однако к ней мы должны добавить вероятности даже еще меньших (или еще более далеких) частот: $(hb) = 1$ и $(hb) = 0$, дающие те же суммы по строкам и столбцам. В табл. 4.5 приводятся вычисленные по формуле (4.4) еще более далекие от ожидаемых таблицы сопряженности и вероятности их появления. Из этой таблицы следует, что вероятность появления наблюдаемой таблицы сопряженности или таблицы сопряженности, еще более далекой от ожидаемой, получается суммированием этих отдельных вероятностей: $p = p_0 + p_i + p_{ii} = 0,003145$ (или 0,003 для практического применения).

5) *Определяем область, где гипотеза должна быть отвергнута.* Размер критической области $\alpha = 0,05$, и, следовательно, наблюдаемые частоты попадут в эту область, если сумма вероятностей появления наблюдаемых и более далеких частот меньше размера этой области.

6) *Решение.* Сумма вероятностей появления наблюдаемых и более далеких частот меньше 0,05. Нулевая гипотеза отвергается,

Таблица 4.5. Таблицы сопряженности, больше отличающиеся от наблюдаемой, чем ожидаемая таблица сопряженности. (Звездочка отмечает клетку таблицы с минимальной частотой)

	<i>H</i>	<i>h</i>	
<i>B</i>	(2)	(7)	(9)
<i>b</i>	(20)	(1)*	(21) $p_{ij} = 0,000129$
	(22)	(8)	30

	<i>H</i>	<i>h</i>	
<i>B</i>	(1)	(8)	(9)
<i>b</i>	(21)	(0)*	(21) $p_{ij} = 0,000002$
	(22)	(8)	30

и, как и раньше, мы делаем вывод, что роговая обманка и биотит связаны отрицательно. Вероятность того, что этот вывод ошибочен, меньше или равна 0,003.

4.7. Обсуждение

Остается обсудить два вопроса. Во-первых, полезно посмотреть, как растет мощность критерия с ростом объема выборки. На раннем этапе вышеописанного изучения, когда были рассмотрены только 30 пунктов с выходами порфировластовых гнейсов, нулевую гипотезу о независимости появления роговой обманки и биотита можно было отвергнуть с вероятностью ошибиться меньшей или равной 0,05 (чтобы быть точным, меньшей или равной 0,003). Однако, когда объем выборки увеличивается до 90, то вероятность ошибочно отвергнуть нулевую гипотезу становится меньшей или равной 0,01 (фактически ближайшее значение равно 0,0000001).

Во-вторых, пример ограничивается рассмотрением таблицы сопряженности 2×2 . В более сложных исследованиях могут рассматриваться таблицы $p \times q$ со значениями p и q больше 2 или даже трехмерные таблицы сопряженности $p \times q \times r$. Первые строятся легко и обрабатываются с помощью методов, использующих вышеописанный критерий хи-квадрат. Анализ более слож-

Таблица 4.6. Критические значения χ^2 для критических областей с $\alpha=0,05$ и $\alpha=0,01$ для классификаций с разными степенями свободы ν . Критические области содержат значения χ^2 больше, чем указанные критические значения

ν	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	ν	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	ν	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
1	3,841	6,635	13	22,36	27,69	25	37,65	44,31
2	5,991	9,210	14	23,68	29,14	26	38,89	45,64
3	7,816	11,35	15	25,00	30,58	27	40,11	46,96
4	9,488	13,28	16	26,30	32,00	28	41,34	48,28
5	11,07	15,08	17	27,59	33,41	29	42,56	49,59
6	12,59	16,81	18	28,87	34,81	30	43,77	50,89
7	14,07	18,49	19	30,14	36,19	40	55,76	63,69
8	15,51	20,09	20	31,41	37,57	50	67,50	76,15
9	16,92	21,67	21	32,67	38,93	60	79,08	88,38
10	18,31	23,21	22	33,92	40,29	70	90,53	100,4
11	19,68	24,72	23	35,17	41,64	80	101,9	112,3
12	21,03	26,22	24	36,42	42,98	90	113,1	124,1

Таблица 4.7. Десятичные логарифмы факториалов чисел от 1 до 50
(используются при вычислении вероятностей для точного критерия Фишера)

n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$
1	0,0000	11	7,6012	21	19,7083	31	33,9150	41	49,5244
2	0,3010	12	8,6803	22	21,0508	32	35,4202	42	51,1477
3	0,7782	13	9,7493	23	22,4125	33	36,9387	43	52,7811
4	1,3802	14	10,9404	24	23,7927	34	38,4702	44	54,4246
5	2,0792	15	12,1165	25	25,1906	35	40,0142	45	56,0778
6	2,8573	16	13,3206	26	26,6056	36	41,5705	46	57,7406
7	3,7024	17	14,5511	27	28,0370	37	43,1387	47	59,4127
8	4,6055	18	15,8063	28	29,4841	38	44,7185	48	61,0939
9	5,5598	19	17,0851	29	30,9465	39	46,3096	49	62,7841
10	6,5598	20	18,3861	30	32,4237	40	47,9116	50	64,4831

ных трехмерных таблиц выходит за рамки этой книги, и мы отсылаем заинтересованных читателей к книге Юла и Кендалла [25]. Значимые значения χ^2 , получающиеся из таблиц $p \times q$, могут требовать более точного анализа данных, для того чтобы установить источник значимости. В случае таблиц $p \times q \times r$ связи между переменными могут быть действительными и мнимыми; по-видимому, значимые связи между этими двумя переменными появляются из-за того, что на самом деле обе они независимо связаны с третьей переменной. Тем не менее эти методы обычно представляют интерес и во многих ситуациях заслуживают детального рассмотрения.

Теоретические распределения и доверительные интервалы

До сих пор нас не очень беспокоило, как в точности распределены исследуемые переменные в генеральной совокупности, т. е. как выглядят их ФПВ и ИФР; мы знали лишь о том, что такие параметры, как среднее, стандартное отклонение и асимметрия, дают некоторую информацию о положении и форме распределения. Все было бы хорошо, если бы природа создавала генеральные совокупности в точном соответствии с математическими законами, но, поскольку этого нет, мы вынуждены строить грубые приближения или предположения. Обычно это оправдывается тем, что дальнейшая математическая обработка данных заметно упрощается. При внимательном изучении этих предположений можно осуществить ряд полезных приемов, например присвоение числовой характеристики нашему уровню доверия к оценке параметра. Данная глава начинается с общего теоретического обзора и показывает, как можно количественно охарактеризовать доверие. Затем в ней дается понятие, с помощью которого статистические критерии можно отнести к параметрическому или непараметрическому типу, и обсуждаются относительные достоинства последних. Наконец, в приложении к задаче количественного определения содержания и отношения вкрапленников оливина и авгита в лавах рассматривается способ построения доверительных границ по соотношениям, оцениваемым путем подсчета.

5.1. Роль теоретически выведенных распределений

Функции плотности вероятности переменных (если смысл очевиден, будем называть их просто «распределениями»), полученные теоретически, часто используются для разработки практических статистических методик. Без них невозможно дальнейшее развитие статистических методов, и в гл. 2 при обсуждении задачи с бросанием монеты (применительно к стратиграфии) я уже касался одного из них — биномиального распределения. При изучении переменных, измеренных в шкале *отношений*, центральное значение имеет теоретическое распределение Гаусса, или «нормальное» распределение. Оно было получено в астроно-

нии при разработке теории ошибок измерения положения звезд, но оказалось, что многие распределения, встречающиеся в природе и изучаемые эмпирическими науками, хорошо аппроксимируются распределением Гаусса: отсюда другое его название — «нормальное распределение». Действительно, благодаря этой хорошей аппроксимации многие наиболее мощные методы статистического анализа основаны на предположении, что лежащая в их основе переменная имеет распределение Гаусса, поэтому ниже мы получим способы проверки этого основного предположения. Далее, распределение Гаусса занимает видное место в последующих усовершенствованиях статистических методов, поскольку над ним легко выполнять математические операции, и в последующих главах мы встретимся с ним в этом качестве.

Во множестве приложений, основанных на переменной, измеренной в шкале *отношений* и предположительно имеющей распределение Гаусса, целесообразно применение *t*-статистики критерия Стьюдента. *t*-распределение Стьюдента можно использовать не только в качестве мощного метода проверки различий двух выборок: оно также позволяет вычислять «доверительные интервалы», которые говорят о том, насколько мы можем доверять нашим оценкам таких параметров генеральной совокупности, как математическое ожидание. Я также описываю метод вычисления доверительных интервалов, связанный с *соотношениями*, оцениваемыми путем подсчета, например в результате подсчета минералов в шлифе, но применение этого метода полезно и при выполнении сходных полевых наблюдений.

5.2. Функция плотности вероятности распределения Гаусса

5.2.1. График ФПВ. График функции плотности вероятности распределения Гаусса представляет собой симметричную одновершинную кривую, ветви которой уходят в бесконечность в обоих направлениях. Он показан на рис. 5.1 в качестве приближения для распределения частот в выборке, состоящей из замеров максимальных диаметров, или «длин», галек.

Математическое выражение ФПВ распределения Гаусса приводим здесь только для информации:

$$f(X) = \exp [-(X - M)^2 / (2s^2)] / \sqrt{2\pi s^2}, \quad (5.1)$$

где X — переменная, M и s — *параметры* (константы) распределения Гаусса, называемые соответственно математическим ожиданием и стандартным отклонением, а $\exp(x)$ означает число e в степени x . Величина s^2 , являющаяся квадратом стандартного отклонения, называется дисперсией.

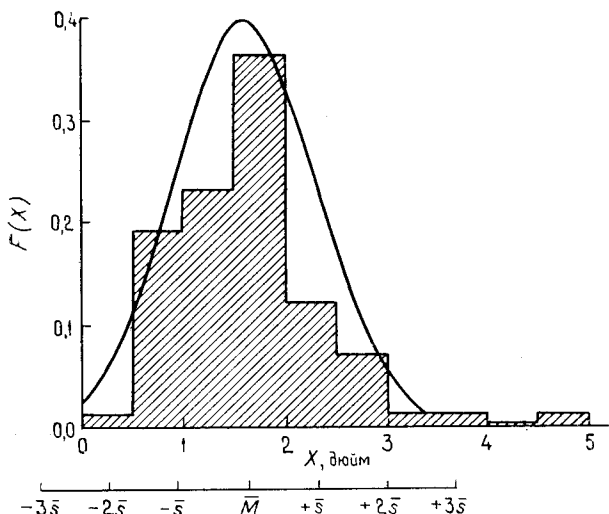


Рис. 5.1. Гауссова ФПВ, соответствующая выборке максимальных диаметров прибрежных гаек. Гистограмма отражает данные, приведенные в табл. 5.1. Гладкая одновершинная непрерывная кривая является графиком гауссовой ФПВ, вычисленной таким образом, что ее среднее значение $\bar{M}$ и стандартное отклонение $\bar{s}$ совпадают с соответствующими выборочными параметрами. Нижняя из двух горизонтальных шкал показывает максимальные диаметры гаек в виде отклонений от среднего, измеренных в единицах стандартного отклонения. (Обратите внимание, что фактически все теоретическое распределение заключено в интервале $\bar{M} \pm 3 \times \bar{s}$.)

5.2.2. Оценка параметров. Если мы уверены, что выборка извлечена из генеральной совокупности, в которой интересующая нас переменная имеет распределение Гаусса, то нередко оказывается удобным заменить все отдельные замеры переменной в выборке двумя числами, а именно *оценками* двух параметров исходной генеральной совокупности. Этими оценками являются среднее значение $\bar{M}$ (где черточка над символом указывает на оценку *истинного*, но неизвестного значения математического ожидания M) и стандартное отклонение $\bar{s}$ — квадратный корень из дисперсии. **Математическое ожидание** — это значение переменной, вокруг которого сгруппирована выборка, а **стандартное отклонение** — мера «рассеяния» или «разброса» выборки. Обратите внимание, что стандартное отклонение имеет такие же единицы измерения, как и среднее значение (например, миллиметры или килограммы и т. п.), и что 0,68 (около 2/3) всех выборочных значений (а это можно проверить) содержится в интервале измерений ± 1 стандартное отклонение от среднего значения. Далее, как видно из рис. 5.1, почти все теоретическое рас-

пределение Гаусса (точнее, 0,997) заключено в интервале ± 3 стандартных отклонения от среднего.

Если мы предполагаем, что выборка извлечена из генеральной совокупности, имеющей распределение Гаусса, то нам следует *оценить* параметры генеральной совокупности M и s . Это можно сделать с помощью определенных формул.

Оценка математического ожидания (или среднеарифметическое) вычисляется по формуле

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (X_i), \quad (5.2)$$

а *оценка* стандартного отклонения (мера «рассеяния» выборки вокруг среднего) — по формулам

$$\bar{s}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (X_i - \bar{M})^2, \\ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i^2), \end{array} \right. \quad (5.3a)$$

$$\bar{s}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i^2), \\ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (X_i^2) - \bar{M}^2, \end{array} \right. \quad (5.3b)$$

$$\bar{s}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (X_i^2) - \bar{M}^2, \end{array} \right. \quad (5.3b)$$

где N — объем выборки, i — номера наблюдений от 1 до N , X_i — значение переменной в i -м наблюдении; $\sum$ означает, что выражение, стоящее в скобках, надо просуммировать для всех заданных значений i , а $x_i = X_i - \bar{M}$ есть **отклонение** от среднего значения.

Если вычисление этих оценок не встроено в калькулятор, то вручную оценку стандартного отклонения, вероятно, проще вычислять по формуле (5.3в), при этом следует помнить о неточностях вычислений, обсуждаемых в приложении В. Если данные были классифицированы (или «сгруппированы», см. разд. 1.3.1), то оценки среднего и стандартного отклонений вычисляются соответственно по формулам

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=C} (f_i X_i), \quad (5.4)$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=C} (f_i X_i^2) - \bar{M}^2 - \frac{w^2}{12}, \quad (5.5)$$

где C — число классов, i — номера классов от 1 до C , f_i — частоты

Таблица 5.1. Максимальные диаметры (X) галек в выборке объемом 134 наблюдения

Класс (дюймы)		Частота класса	Интегральная частота	Интегральная доля
>0	$\leq 0,5$	1	1	0,007
$>0,5$	≤ 1	25	26	0,194
>1	$\leq 1,5$	31	57	0,425
$>1,5$	≤ 2	48	105	0,784
>2	$\leq 2,5$	16	121	0,903
$>2,5$	≤ 3	10	131	0,978
>3	$\leq 3,5$	1	132	0,985
$>3,5$	≤ 4	1	133	0,993
>4	$\leq 4,5$	0	133	0,993
$>4,5$	≤ 5	1	134	1,000

та i -го класса, X_i — значение переменной в средней точке i -го класса и ω — ширина класса.

Упражнение. Используя данные табл. 5.1 и формулы (5.4) и (5.5), проверьте, что в выборке, состоящей из замеров максимальных диаметров галек, гистограмма которой приведена на рис. 5.1, среднее значение диаметра равно 1,62 дюйма, а стандартное отклонение составляет 0,68 дюйма.

5.3. Проверка соответствия распределения наблюдаемой переменной распределению Гаусса

Так как несколько наиболее мощных статистических критериев рассчитано на предположение, что лежащая в их основе переменная (или переменные) имеет (имеют) распределение Гаусса, важно проверить выборочные данные на степень соответствия распределению Гаусса. Для этого был предложен ряд относительно несложных методов, однако, на наш взгляд, критерий Колмогорова — Смирнова для одной выборки кажется особенно полезным и быстрым. Применяя этот критерий, мы сравниваем эмпирическую интегральную функцию распределения с теоретической, причем последняя вычисляется таким образом, чтобы ее параметры M и s совпадали с их выборочными оценками.

Для иллюстрации применения этого критерия возьмем выборку, состоящую из замеров максимальных диаметров галек и

изображенную на рис. 5.1; в этом случае прослеживаются шесть этапов методики проверки гипотез:

1) *Формулировка нулевой и альтернативной гипотез.* Нулевая гипотеза утверждает, что максимальные диаметры галек извлечены из генеральной совокупности, имеющей распределение Гаусса с математическим ожиданием, равным 1,62 дюйма, и стандартным отклонением, равным 0,68 дюйма. В альтернативной гипотезе утверждается, что максимальные диаметры галек извлечены из генеральной совокупности, отличной от той, которая определена в нулевой гипотезе, но не говорится, в чем состоит различие этих генеральных совокупностей.

2) *Выбор статистического критерия.* Выбираем критерий Колмогорова — Смирнова для одной выборки (разд. 3.2 и 3.3), поскольку с его помощью сравниваются эмпирическая и теоретическая ИФР. В данном случае измерения непрерывны и выполнены в шкале отношений, поэтому графики ИФР представляют собой гладкие кривые. В критерии Колмогорова — Смирнова помимо утверждений, содержащихся в вышесформулированной нулевой гипотезе, не делается предположений относительно вида распределений исследуемой переменной.

3) *Определение объема выборки и размера критической области.* Выборка галек состоит из 134 наблюдений. Пусть размер критической области будет равным 0,01.

4) *Исследование выборочного распределения статистики критерия.* Статистикой критерия Колмогорова — Смирнова D является максимум расхождения между двумя ИФР, измеренный

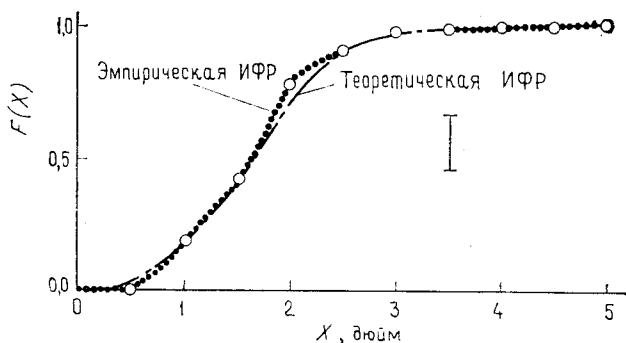


Рис. 5.2. Гауссова ИФР, соответствующая выборке максимальных диаметров прибрежных галек. Точечная кривая строилась по данным, приведенным в табл. 5.1. Штрихпунктирная линия изображает теоретическую гауссову ИФР, вычисленную по выборочным значениям среднего и стандартного отклонений. Конкретные значения приведены в табл. 5.2. Длина вертикального отрезка равна критическому значению статистики D критерия Колмогорова — Смирнова. Нулевая гипотеза не отвергается, потому что вертикальный отрезок не укладывается между кривыми.

Таблица 5.2. Вычисление значений переменной X для различных значений стандартизованного отклонения z (см. табл. 5.4.) в генеральной совокупности с оценкой математического ожидания $\bar{M} = 1,62$ дюйма и оценкой стандартного отклонения $\bar{s} = 0,68$ дюйма

z	X (дюймы)	$F(X)$	z	X (дюймы)	$F(X)$
-3,5	-0,76	0,000	0,1	1,69	0,540
-3,0	-0,42	0,001	0,3	1,82	0,618
-2,5	-0,08	0,006	0,5	1,96	0,692
-2,0	0,26	0,023	1,0	2,30	0,841
-1,5	0,60	0,067	1,5	2,64	0,933
-1,0	0,94	0,159	2,0	2,98	0,977
-0,5	1,28	0,309	2,5	3,32	0,994
-0,3	1,42	0,382	3,0	3,66	0,999
-0,1	1,55	0,460	3,5	4,00	1,000

вдоль вертикальной шкалы. При полном совпадении ИФР она равна 0 и увеличивается до 1 с ростом отклонения эмпирической ИФР от теоретической. Критические значения статистики D были даны в табл. 3.2.

5) *Определение критической области.* Так как в формулировке альтернативной гипотезы не подразумевается какое-либо «направление», применяется двусторонний критерий. Обращаясь к предыдущему этапу (этапу 4) и табл. 3.2, видим, что в критической области заключены значения D , равные 0,14 или больше.

6) *Применение критерия и принятие решения.* По данным табл. 5.1 в соответствии с описанием, приведенным в разд. 1.3.4, строим график эмпирической функции распределения (рис. 5.2). Используя данные табл. 5.4 (сразу изучите ее), полученные из табл. 5.2, вычисляем теоретическую интегральную функцию распределения и строим ее график (рис. 5.2). Из этих графиков видно, что значение статистики критерия D (максимального расхождения двух ИФР в вертикальном направлении) намного меньше критического значения, показанного в виде вертикального отрезка прямой, и, таким образом, оно не попадает в критическую область. Следовательно, принимаем нулевую гипотезу, несмотря на кажущееся различие графиков, изображенных на рис. 5.1.

5.4. Дальнейшие приложения: z как статистика критерия

Еще одна важная область, в которой возможно применение распределения Гаусса, появляется в результате теоретических разработок, связанных с рядом полезных статистических критериев; некоторые из них рассматриваются ниже в связи с обработкой ориентировок. Особенностью этих критериев является как раз то, что статистика критерия имеет *гауссово* (или «нормальное») *распределение с нулевым математическим ожиданием ($M=0$) и единичным стандартным отклонением ($s=1$) (или единичной дисперсией)*¹. Это полезно знать при определении

Таблица 5.3. Критические значения стандартизованного отклонения

	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
Одностороннее	1,64	2,33
Двустороннее	1,96	2,58

Таблица 5.4. Интегральная функция распределения Гаусса. ИФР для удобства представления дается как функция *стандартизованного отклонения* z , которое определяется выражением $z = (X - \bar{M})/\bar{s}$.

Для перехода от стандартизованного отклонения к значению переменной это выражение должно быть переписано следующим образом: $X = z \times \bar{s} + \bar{M}$

Стандартизованное отклонение	Интегральная доля	Стандартизованное отклонение	Интегральная доля
—3,5	0,000	0,1	0,540
—3,0	0,001	0,3	0,618
—2,5	0,006	0,5	0,692
—2,0	0,023	1,0	0,841
—1,5	0,067	1,5	0,933
—1,0	0,159	2,0	0,977
—0,5	0,309	2,5	0,994
—0,3	0,382	3,0	0,999
—0,1	0,460	3,5	1,000

¹ Такое распределение называется стандартным нормальным распределением. — Прим. перев.

критической области для статистики критерия на этапах 4 и 5 методики проверки гипотез.

Нулевое значение статистики M в случае одной выборки соответствует полному совпадению наблюдаемых частот с ожидаемыми вероятностями, а в случае двух выборок — полному совпадению их эмпирических частот. С ростом расхождения между наблюдаемыми и ожидаемыми значениями или между наблюдаемыми значениями в двух выборках значение статистики критерия увеличивается либо в положительном, либо в отрицательном направлении. Таким образом, критические области располагаются либо под одной, либо под обеими ветвями графика гауссовой ФПВ (рис. 5.1) в зависимости от того, какой критерий применяется: односторонний или двусторонний. Во всех подобных критериях применяется формула вычисления **стандартизованного отклонения z** (табл. 5.4), используемого в качестве статистики критерия. Следовательно, для определения критических областей нужна таблица критических значений z (табл. 5.3).

5.5. Доверительные интервалы: введение

В приведенном выше примере *оценка* среднего максимального диаметра по выборке из 134 галек составила 1,62 дюйма. Хотя это число вычислено с точностью до второго десятичного знака, вероятность получения такого же результата по второй выборке, извлеченной из той же генеральной совокупности, очень мала. В самом деле, аккуратное повторение этого же эксперимента с другой выборкой, состоящей из 90 галек, дало в результате 1,69 дюйма (при стандартном отклонении 0,62 дюйма). Так могу ли я указать, какой из этих результатов правильный?

Это всеобщая проблема, возникающая при вычислении оценки, и обычное решение состоит в том, что *оценка* конкретного параметра генеральной совокупности дается совместно с «доверительным интервалом (или множеством, или областью)». В вышеприведенном примере получаем, что оценка среднего максимального диаметра в выборке, состоящей из 134 галек, равна 1,62 дюйма, при этом с вероятностью 0,99 истинное среднее значение лежит в интервале 1,47—1,77 дюйма. Менее строго это можно выразить так: «На 99% я уверен в том, что среднее значение максимального диаметра находится между $1\frac{1}{2}$ и $1\frac{3}{4}$ дюйма». Ниже показано, как вычислять доверительные интервалы.

5.6. t -статистика Стьюдента и доверительные интервалы

По смыслу рассматриваемого примера (т. е. оценка средних) вычисление доверительного интервала базируется на знании распределения t -статистики Стьюдента. Происхождение этого рас-

пределение связано с исследованием теории ошибок оценивания малых выборок, где классические методы становятся неадекватными. График ФПВ t -статистики критерия Стьюдента очень похож на график ФПВ z -статистики распределения Гаусса тем, что он имеет одну вершину, а его ветви симметрично расположены относительно $t=0$. Различаются они тем, что t -статистика связана с числом степеней свободы ν , которое почти всегда является функцией объема (объемов) выборки. Однако, как только ν определено, по таблицам можно получить критические значения t (табл. 5.5) и определить односторонние или двусторонние критические области; поэтому нет необходимости точно знать вид ФПВ статистики t .

Чтобы показать, как вычислять доверительный интервал для диаметров галек, попытаемся видоизменить шестистапную методику проверки гипотез; поскольку имеется определенная аналогия с двусторонним критерием для одной выборки, внимательные читатели вскоре обнаружат несколько небольших сокращений.

1) *Формулировка нулевой и альтернативной гипотез.* В нулевой гипотезе утверждается, что выборка, состоящая из 134 галек, извлечена из генеральной совокупности, в которой максимальные диаметры галек имеют распределение Гаусса со стандартным отклонением 0,68 дюйма и математическим ожиданием, лежащими в интервале $M_1 - M_u$; остается вычислить соответствующие значения нижней и верхней границ этого интервала. Альтернативная гипотеза выражается теми же словами, за исключением того, что математическое ожидание лежит *вне* интервала $M_1 - M_u$.

2) *Выбор статистического критерия.* Теоретически можно вывести выражение, связывающее t -статистику критерия Стьюдента с параметром M :

$$t = (M - \bar{M}) \times \sqrt{N/\bar{s}}, \text{ при } \nu = N - 1, \quad (5.6)$$

где $\bar{M}$ — вычисленная оценка математического ожидания, M — истинное (но неизвестное) значение математического ожидания и $\bar{s}$ — оценка стандартного отклонения.

Так как функция плотности вероятности статистики t известна, благодаря выражению (5.6) известна и ФПВ величины $M - \bar{M}$. Следовательно, можно вычислить вероятность появления различных «истинных» значений M . В частности, рассмотрим нижнее и верхнее граничные значения M_1 и M_u :

$$t_u = (M_u - \bar{M}) \times \sqrt{N/\bar{s}},$$

$$t_1 = (M_1 - \bar{M}) \times \sqrt{N/\bar{s}},$$

откуда получаем

$$M_u = \frac{t_u \bar{s}}{\sqrt{N}} + \bar{M}, \quad (5.7a)$$

$$M_l = \frac{t_l \bar{s}}{\sqrt{N}} + \bar{M}. \quad (5.7б)$$

3) *Определение объема выборки и выбор размера критической области.* Заданный объем выборки N равен 134. Пусть размер критической области a равен 0,01. Тогда это число является также вероятностью совершения ошибки 1-го рода (разд. 2.4), т. е. вероятностью отвергнуть нулевую гипотезу в том случае, когда на самом деле она истинна. Тогда вероятность противоположного вывода, т. е. принятия нулевой гипотезы, когда она истинна, равна $1-a$, т. е. 0,99. Таким образом, для доверительного интервала уровня 0,99 критическая область a равна 0,01.

4) *Исследование выборочного распределения статистики критерия.* Оно уже было описано выше. Распределение симметрично относительно $t=0$, и, чем больше значения t , тем меньше вероятность их появления.

5) *Определение критической области.* В данном случае мы требуем, чтобы критическая область была поделена поровну между двумя ветвями кривой t -распределения, потому что, как следует из выражений (5.7a) и (5.7б), t_u и t_l равны по абсолютной величине, но t_u будет положительной, а t_l — отрицательной. Учитывая, что число степеней свободы равно $\nu = N-1 = 133$, из табл. 5.5 для $a=0,01$ находим, что двустороннее критическое значение t приблизительно равно 2,60; следовательно, $t_u = +2,60$ и $t_l = -2,60$ ¹.

6) *Вычисления и принятие решения.* Подставляя полученные значения в выражения (5.7a) и (5.7б), получаем $M_u = 1,77$ и $M_l = 1,47$. Следовательно, мы утверждаем, что с вероятностью 0,99 истинное значение математического ожидания максимальных диаметров галек в генеральной совокупности, из которой была извлечена наша выборка, находится в интервале 1,47—1,77 дюйма. Иначе говоря, мы на «99% уверены» в том, что «истинное» среднее находится в интервале 1,47—1,77 дюйма.

¹ Р. Ф. Чини в табл. 5.5 приводит критические значения t -статистики в сильно сокращенном виде, а именно только до степени свободы $\nu=60$. Для $\nu=133$ значение статистики определяется линейной интерполяцией между $\nu=100$ и $\nu=200$, для которых значения t соответственно равны 2,626 и 2,601. Линейная интерполяция позволяет получить лишь два верхних десятичных знака. — Прим. ред.

Таблица 5.5. Критические значения t -статистики Стьюдента. Критическая область содержит значения t , большие чем критическое значение

ν	Односторонние		Двусторонние	
	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
1	6,31	31,82	12,71	63,66
2	2,92	6,96	4,30	9,92
3	2,35	4,54	3,18	5,84
4	2,13	3,75	2,78	4,60
5	2,02	3,36	2,57	4,03
6	1,94	3,14	2,45	3,71
7	1,89	3,00	2,36	3,50
8	1,86	2,90	2,31	3,36
9	1,83	2,82	2,26	3,25
10	1,81	2,76	2,23	3,17
12	1,78	2,68	2,18	3,05
15	1,75	2,60	2,13	2,95
20	1,72	2,53	2,09	2,85
24	1,71	2,49	2,06	2,80
30	1,70	2,46	2,04	2,75
40	1,68	2,42	2,02	2,70
60	1,67	2,39	2,00	2,66

5.7. t -статистика Стьюдента и различие между двумя средними значениями

Другой аспект применения t -статистики Стьюдента позволяет проверить принадлежность двух выборочных средних одной и той же генеральной совокупности. Иными словами, если $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ — оценки математического ожидания, то значительно ли отличается от нуля их разность $\bar{M}_1 - \bar{M}_2$? Для этого нужны следующие формулы:

$$t = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \sqrt{N_1 \times N_2 / (N_1 + N_2)} / s_0$$

при $\nu = N_1 + N_2 - 2$, (5.8)

где s_0 задается выражением

$$s_0^2 = [(N_1 - 1) \times \bar{s}_1^2 + (N_2 - 1) \times \bar{s}_2^2] / \nu.$$

Упражнение. В выборке, состоящей из 134 галек, среднее значение максимальных диаметров равно 1,62 дюйма, а стандартное отклонение составляет 0,68 дюйма. В другой выборке — объемом 90 — значения соответствующих параметров равны 1,69 и 0,62 дюйма. Покажите, что для критической области размером $\alpha=0,01$ вы не можете отвергнуть нулевую гипотезу, утверждающую, что обе выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности.

5.8. Параметрические и непараметрические критерии

В последнем упражнении вы применили t -распределение Стьюдента для проверки различия между двумя средними значениями. При вычислении *статистики критерия* использовались *оценки* параметров генеральной совокупности M и s и, следовательно, делались предположения относительно вида распределения переменной, лежащей в основе критерия, а именно то, что распределение гауссово. В начале главы это предположение проверялось для выборки большего объема и было найдено справедливым. В этом отношении данный критерий явно противопоставлен критерию Колмогорова — Смирнова для двух выборок, в котором *статистика критерия* вычислялась непосредственно по интегральной функции распределения, т. е. без использования параметров распределения. Критерии, относящиеся к первой группе, называются **параметрическими**, а относящиеся к последней группе — **непараметрическими**. Это различие имеет значение, потому что, хотя параметрические критерии обычно более мощные, они уступают непараметрическим критериям в том, что требуют предположений относительно распределения переменной и относительно шкалы, в которой переменная измеряется.

5.9. Оценка отношений способом подсчета: снова о доверительных интервалах

Наконец, есть еще одна распространенная задача, а именно оценка отношений способом подсчета, в которой, вероятно, полезно знать доверительный интервал. На практике такое исследование состоит в подсчете числа индивидуумов R , обладающих определенным свойством, в выборке объемом N . В общем отношение $R:N$ является оценкой доли указанных индивидуумов в генеральной совокупности. Такие оценки долей путем подсчета обычно характерны для микроскопических исследований в петрографии, но их легко приспособить и к множеству других ситуаций.

Если истинная доля указанных индивидуумов в генеральной совокупности равна H , а в выборке объемом N мы насчитываем

R индивидуумов, обладающих характерным свойством, то отношение $R:N$ является оценкой H . Тогда по формуле (2.1) можно вычислить вероятности получения различных значений R по выборке объемом N , извлеченной из генеральной совокупности, в которой истинная доля равна H (так как эти вероятности имеют биномиальное распределение). Последовательно выполняя шесть этапов, аналогичных вышеописанной процедуре (разд. 5.6) вычисления доверительных интервалов оценки математического ожидания, мы можем с помощью формулы (2.1) вычислить значения R , вероятность появления которых очень мала и которые, следовательно, попадут в критическую область. В практической работе редко возникает необходимость вычисления доверительных интервалов с высокой точностью; поэтому мы можем использовать графические способы оценки, которые показаны на рис. 5.3.

Рисунок делится на две части, одна из которых предназначена для определения доверительных интервалов уровня 0,95, а другая — для определения доверительных интервалов уровня 0,99. В каждой части рисунка для выборок, объемы которых равны 50, 100, 200 и 400 наблюдениям, проводится по одной верхней и одной нижней кривой.

Рассмотрим пример, показывающий, как применяются эти графики. В одном обнажении обнаружено 100 ископаемых остатков, четыре из которых являются остатками морских ежей. Следовательно, оценка доли морских ежей в данной генеральной совокупности ископаемых остатков составляет $4/100 = 0,040$. Чтобы определить доверительный интервал уровня 0,99 для оценки этого отношения, находим на горизонтальной оси графика точку, соответствующую значению 0,040, и отмечаем две точки пересечения вертикальной прямой, проходящей через значение 0,040, с кривыми, соответствующими объему выборки, равному 100. Теперь слева от вертикальной оси графика считываем значения, соответствующие этим двум точкам: они равны $-0,035$ и $+0,050$. Таким образом, искомым доверительный интервал колеблется от $0,040 - 0,035$ до $0,040 + 0,050$, т. е. от 0,005 до 0,090 (проще говоря, я на 99% уверен в том, что «истинная» доля морских ежей находится в интервале 0,5—9%). Обратите внимание, что для оценки долей, превышающих 0,50, графики нужно перевернуть на 180° . Имейте также в виду, что, пытаясь сузить доверительный интервал и используя выборки большего объема, вы сталкиваетесь с действием закона геометрической прогрессии. Например, чтобы вдвое уменьшить доверительный интервал, надо в четыре раза увеличить объем выборки.

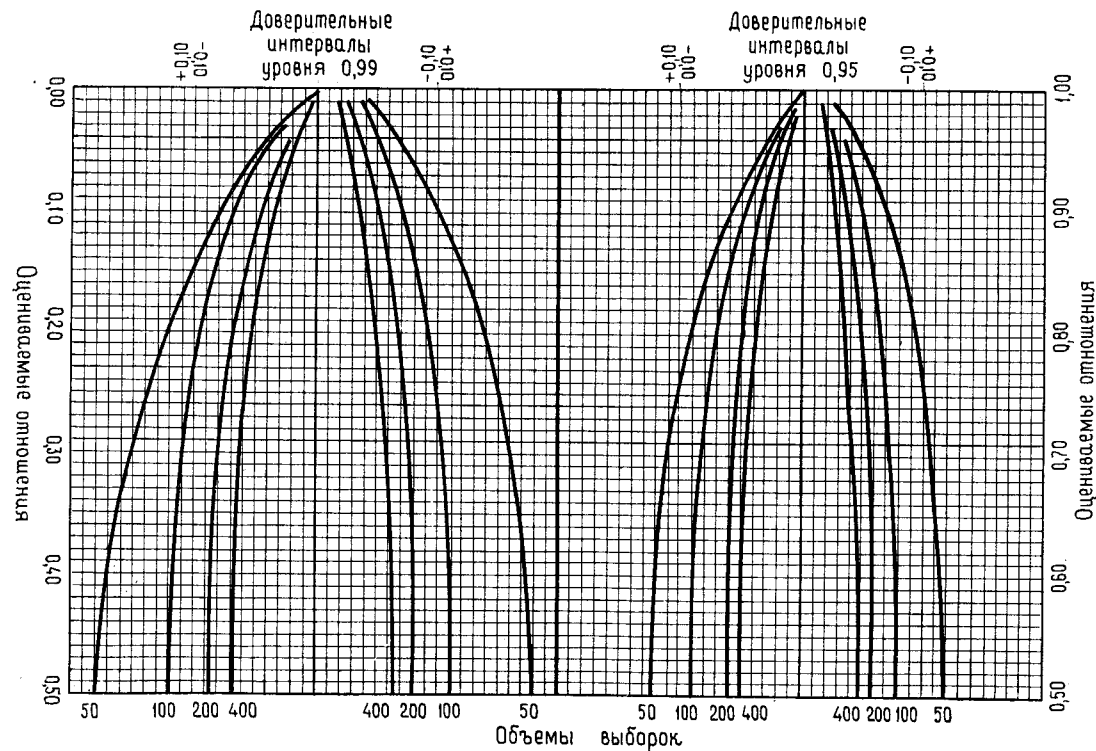


Рис. 5.3. Номограмма для вычисления доверительных интервалов отношений, определяемых путем подсчета. Конкретный пример приведен в тексте (разд. 5.9).

Порядковые методы

В этой главе мы будем иметь дело со статистическими методами, применимыми к данным, представляющим собой наблюдения, упорядоченные по возрастанию значения какой-либо переменной, т. е. измеренные в порядковой шкале. При таком упорядочении легко определяется медианное значение переменной: оно равно значению переменной в наблюдении, занимающем центральное положение в упорядоченном ряду для выборок с нечетным числом наблюдений (или равно среднеарифметическому значений переменной в двух соседних наблюдениях, расположенных по обе стороны от центральной точки упорядоченного ряда, в случае выборок с четным числом наблюдений). Вследствие этой простоты определения я включаю в рассмотрение критерии различия медиан в двух выборках. Вводятся также варианты этих критериев для исследований, в которых выборка распадается на две или более подвыборки, в связи с тем что наблюдения, измеренные в порядковой шкале, дополнительно измерены в номинальной шкале, например осадочные слои различной мощности, классифицированные по типу слагающей их породы. Хотя все предлагаемые здесь критерии являются непараметрическими, они заслуживают пристального внимания, потому что часть из них по мощности приближается к более известным параметрическим критериям, но свободна от неудобств, обусловленных некоторыми ограничениями, свойственными параметрическим критериям. Для вычислений, связанных с большинством из этих критериев, обычно достаточно обратной стороны обыкновенного конверта.

6.1. Одновременная классификация или измерение в нескольких шкалах

До сих пор мы представляли себе статистические критерии для двух выборок как критерии проверки нулевой гипотезы о равенстве двух совершенно различных выборок. В качестве же варианта мы могли бы рассматривать разделение одной выборки на две или большее число подвыборок с помощью дополнительных измерений в номинальной шкале, выполненных на каж-

Таблица 6.1. Соотношение различных номинальных и порядковых методик

		Вторая переменная	
		Номинальная	Порядковая
Первая переменная	Номинальная	Таблица сопряженности (критерий хи-квадрат, точный критерий Фишера)	Критерий Колмогорова — Смирнова для двух выборок
	Порядковая	Медианный критерий, критерий серий Вальда — Вольфовитца, U-критерий Манна — Уитни, однофакторный дисперсионный анализ Крускала — Уоллиса	Ранговый коэффициент корреляции Кендалла τ

дом наблюдении, а затем сравнивать эти подвыборки друг с другом. Простым примером этого может служить классификация галек по типу породы, проводимая совместно с измерением их длин. Этот пример в какой-то степени сопоставим с задачей о порфиروبластовых гнейсах, рассмотренной в гл. 4, где каждое наблюдение было измерено в двух номинальных шкалах (одна шкала определялась присутствием или отсутствием роговой обманки, а другая — присутствием или отсутствием биотита). В практической работе такие ситуации обычны, но при изложении методик я введу следующие ограничения: измерения в каждом наблюдении выполняются только в двух шкалах и каждая из этих шкал может быть либо номинальной, либо порядковой (т. е. шкалы отношений исключаются из рассмотрения). Учитывая указанные ограничения, мы можем составить табл. 6.1, показав тем самым относительное место некоторых используемых методик. Обратите внимание, что все методики непараметрические (разд. 5.8).

6.2. Пример возможных различий между выборками

Для того чтобы ввести в употребление критерии, помещенные в нижней части табл. 6.1, и облегчить их сопоставление, рассмотрим выборку из 72 прибрежных галек, которая была классифицирована (т. е. измерена в номинальной шкале) на две подвыборки: 48 галек долеритов (Д) и 24 гальки осадочных пород (О). Длина — одна из тех переменных, которые легко измеряются в порядковой шкале: гальки располагаются в порядке уве-

Таблица 6.2. Выполненные в порядковой шкале замеры длины прибрежных галек (в выборке объемом 72 наблюдения), из которых 48 галек представлены долеритами (Д), а 24 — осадочными породами (О). Серии (т. е. ненарушенные последовательности) галек типа Д и О разделяются ломаной линией; $r=30$; $R_{\text{дол}}=1926$; $R_{\text{осад}}=702$ (объяснения см. в тексте). Медианная длина галек типа О равна среднеарифметическому длин галек с номерами 26 и 27 (39 мм), а медианная длина галек типа Д — среднеарифметическому длин галек с номерами 40 и 41 (44 мм). Общая медианная длина равна среднеарифметическому длин галек с номерами 36 и 37 (43 мм)

Ранг	Тип породы	Ранг	Тип породы	Ранг	Тип породы
1	О	25	О	49	О
2	О	26	О	50	Д
3	Д	27	О	51	Д
4	О	28	Д	52	О
5	Д	29	Д	53	О
6	Д	30	О	54	Д
7	Д	31	Д	55	О
8	Д	32	Д	56	Д
9	О	33	Д	57	О
10	О	34	О	58	Д
11	Д	35	Д	59	Д
12	Д	36	Д	60	Д
13	О	37	Д	61	О
14	О	38	Д	62	Д
15	О	39	О	63	Д
16	Д	40	Д	64	Д
17	О	41	Д	65	Д
18	О	42	Д	66	Д
19	Д	43	О	67	Д
20	Д	44	Д	68	Д
21	Д	45	Д	69	Д
22	Д	46	Д	70	Д
23	Д	47	Д	71	Д
24	Д	48	О	72	Д

личения их длины, самой короткой из них на одном конце ряда присваивается номер 1, а самой длинной на другом конце ряда — номер 72. Результат такого упорядочения приведен в табл. 6.2.

В таком ряду легко определить медианные значения: медианная длина галек осадочных пород равна 39 мм (среднеарифмети-

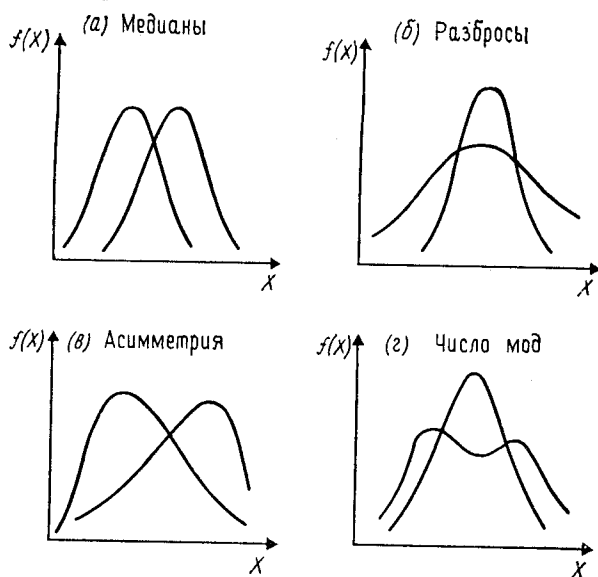


Рис. 6.1. Функции плотности вероятности, иллюстрирующие возможные типы различий двух генеральных совокупностей. Все кривые построены в одной и той же системе координат: значения переменной X откладываются по горизонтальной оси, а соответствующие значения ФПВ $f(X)$ — по вертикальной. На графиках показаны следующие типы различий: *a* — одинаковые кривые, различающиеся только медианами; *б* — симметричные кривые с одинаковыми медианами, но различным разбросом значений; *в* — асимметричные кривые, наклоненные влево или вправо, с одинаковым разбросом значений, но разными медианами; *г* — симметричные кривые с одинаковыми медианами и, возможно, одинаковым разбросом значений, но с разным числом мод.

ческое из длин галек с номерами 26 и 27), долеритовых галек 44 мм (среднеарифметическое из длин галек с номерами 40 и 41) и медианная длина галек всей выборки 43 мм. Непосредственно по этим числам можно предположить наличие различий между длинами «осадочных» и «долеритовых» галек. Однако, как следует из графиков гипотетических распределений частот, показанных на рис. 6.1, существуют и другие особенности распределений, по которым могут различаться две подвыборки.

Упражнение. Набросайте графики ИФР, соответствующие графикам ФПВ, изображенным на рис. 6.1.

Нулевая гипотеза (т. е. отсутствие различий) будет одной и той же в каждом случае, но альтернативные гипотезы могут быть сформулированы многими способами в соответствии с интересующими нас видами различий. Альтернативная гипотеза может касаться различий между подвыборками только по одно-

му из параметров, изображенных на рис. 6.1, по двум или по всем параметрам. Обычно, чем неопределеннее сформулирована альтернативная гипотеза, тем меньше мощность соответствующего статистического критерия. Порядок расположения критериев в нижней части табл. 6.1 приблизительно соответствует увеличению их мощности, и в этом порядке я и буду их описывать. Предполагая, что теперь вы знакомы со схемой шестистапной методики проверки гипотез, я буду описывать каждый критерий только в общих чертах. Для всех этих критериев считаем, что наблюдения упорядочены по возрастанию величины измеряемой переменной, однако обозначения выборок и подвыборок те же, что и в табл. 6.2.

6.3. Медианный критерий

Содержание подходящей альтернативной гипотезы для медианного критерия состоит в том, что две выборки или две подвыборки различаются своими медианными значениями и не упоминается ни о каких-либо других параметрах генеральной совокупности, ни о «направлении» различия (разд. 2.5). Предполагается, что переменная, лежащая в основе критерия, непрерывна и измерена, по крайней мере в порядковой шкале. Применение критерия состоит в представлении данных в виде таблицы сопряженности 2×2 (табл. 6.3).

Поскольку полная выборка делится общей медианой $Me_{\text{общ}}$, суммы по строкам равны (в данном случае 36) или различаются не больше чем на единицу. Если бы медианы подвыборок $Me_{\text{дол}}$ и $Me_{\text{осад}}$ были равны друг другу и, следовательно, общей медиане, то и две частоты долеритовых галек были бы равны друг другу; то же самое справедливо для галек осадочных пород. Следовательно, в «долеритовом» столбце ожидаемые частоты равнялись бы 24, а в «осадочном» они составляли бы 12. Однако пары наблюдаемых частот в двух столбцах не равны, и возникает

Таблица 6.3. Частоты галек в двойной классификации: в зависимости от типа породы (долерит или осадочная) и длины (большей, равной или меньшей, чем общая медиана выборки)

	Долерит	Осадочная порода	Сумма
«Длинные» (т. е. длина больше, чем $Me_{\text{общ}}$)	27	9	36
«Короткие» (т. е. длина меньше, чем $Me_{\text{общ}}$)	21	15	36
Сумма	48	24	72

вопрос, является ли это неравенство случайным расхождением при условии справедливости нулевой гипотезы, или оно отражает значимое расхождение, требующее отвергнуть нулевую гипотезу. Так как мы имеем дело с таблицей сопряженности 2×2 , для ее анализа можно применить методы, описанные в гл. 4. Поскольку объем выборки больше 50, а ожидаемая частота не меньше 10, то применим критерий хи-квадрат, дающий в этом примере значение $\chi^2 = 2,25$. Для одной степени свободы v и критической области размером 0,05 нулевая гипотеза (утверждающая равенство медиан подвыборок) принимается, потому что критическая область включает значения χ^2 , равные или большие чем 3,84 (табл. 4.6).

В этом критерии выборки делятся их общей медианой и наблюдаемые значения уже никак не используются; поэтому большинство данных оказывается излишним и, следовательно, снижается мощность критерия. Кроме того, поскольку нет упоминаний о каком-либо «направлении» различий между медианами, не существует и одностороннего варианта критерия.

6.4. Критерий серий Вальда — Вольфовитца

Когда две выборки или подвыборки упорядочены совместно, как показано в табл. 6.2, и сохраняется тождественность наблюдений (например, гальки сохраняют принадлежность классам О или Д), образуется ряд ненарушенных последовательностей, или «серий», наблюдений, обозначенных ступенчатой линией. Серия может состоять всего из одного наблюдения, или, наоборот, две выборки могут быть полностью разобщены, образуя только две серии. Более обычны промежуточные случаи, отражающие одно из частотных распределений, изображенных на рис. 6.1. Следовательно, различие в разбросе относительно общей медианы будет давать длинные серии на краях общего упорядоченного ряда и сильную перемешанность в его центре. В табл. 6.2 отдельные серии разделяются горизонтальными отрезками зигзагообразной линии, а суммарное число серий r равно 30. За исключением самой длинной серии в конце ряда, состоящей из 11 Д-галеков (гальки с номерами 62—72), остальные серии, по-видимому, перемешаны довольно равномерно.

В качестве нулевой гипотезы в критерии серий Вальда — Вольфовитца (или просто в «критерии серий») используется предположение о том, что распределения двух выборок (или подвыборок) не различаются своими медианами, разбросами, коэффициентами асимметрии и другими параметрами. Следовательно, в критерии ищется любой вид различия между двумя распределениями, и благодаря своей общности он, вероятно, снова будет обладать меньшей мощностью. Из-за общности, при-

сущей альтернативной гипотезе, нельзя построить ее односторонний вариант.

Теория, лежащая в основе критерия, автоматически предсказывает ожидаемое число ненарушенных серий, когда две выборки или подвыборки из одинаковых генеральных совокупностей ранжируются совместно, как в табл. 6.2. Если наблюдаемое число последовательностей значимо отличается от предсказанного, то нулевая гипотеза отвергается. Статистикой критерия является величина z , вычисляемая по формуле (6.1). Критические значения z приведены в табл. 5.3 (следует помнить, что используются двусторонние критические значения), а критическая область содержит значения z , превышающие критическое. Приближение, задаваемое формулой (6.1), удовлетворяет любым выборкам, за исключением выборок ничтожно малого объема (меньшего 9). Для данного примера с 30 сериями $z = -0,80$; поэтому нулевая гипотеза для критической области, равной 0,05, не отвергается.

Если r — наблюдаемое число серий, то приближенное значение статистики z вычисляется следующим образом: пусть $N = N_1 + N_2$; $P = 2 \times N_1 \times N_2$, где N_1 и N_2 — объемы двух (под)выборок, тогда, если $M = 1 + P/N$ и $s = \sqrt{P \times (P - N) / [N_2 \times (N - 1)]}$,

$$z = (r - M) / s. \quad (6.1)$$

6.5. U -критерий Манна — Уитни

U -критерий Манна — Уитни является более мощным и следующим образом реагирует на различия медианных значений и функций распределения. Если из одной и той же генеральной совокупности извлекаются две выборки, а из каждой выборки случайным образом выбирается по одному наблюдению, то вероятность того, что первое наблюдение больше второго, точно равна 0,5. Если каждое наблюдение одной выборки сравнивается с каждым наблюдением другой выборки и если среднее значение вероятностей, получающееся в результате этих сравнений, не равно приблизительно 0,5, то эти две выборки извлекаются, по-видимому, из генеральных совокупностей с разными медианами. Мощность критерия обуславливается полным использованием порядковых данных в результате сравнения каждого наблюдения одной выборки с каждым наблюдением другой выборки. Статистика критерия U вычисляется следующим образом:

1) Две выборки или подвыборки объединяются и упорядочиваются по возрастанию значений переменной, как в табл. 6.2.

2) Ранг, равный 1, присваивается наблюдению с минимальным значением переменной, ранг, равный 2, — наблюдению со следующим по величине значением переменной и т. д. независимо от того, какой выборке принадлежит наблюдение.

3) Вычисляется сумма рангов в первой выборке (R_1) и сумма рангов во второй (R_2). В данном примере $R_{\text{дол}}=1926$, а $R_{\text{осад}}=702$.

4) Затем вычисляются величины U_1 и U_2 (предварительно следует свериться с замечанием о вычислениях по формулам в начале книги):

$$U_1 = N_1 \times N_2 + N_1 \times (N_1 + 1)/2 - R_1,$$

$$U_2 = N_1 \times N_2 + N_2 \times (N_2 + 1)/2 - R_2$$

(проверка: $U_1 + U_2 = N_1 \times N_2$). В рассматриваемом примере $U_{\text{дол}}=402$, $U_{\text{осад}}=750$.

5) Статистикой критерия U является минимальное из двух значений U_1 и U_2 ; для выборок объемом не менее 13 (критическая область 0,01) или не менее 20 (критическая область 0,05) U имеет распределение, близкое к распределению Гаусса с параметрами:

$$M = N_1 \times N_2 / 2$$

$$s = \sqrt{N_1 \times N_2 \times (N + 1) / 12};$$

следовательно, можно вычислить статистику $z = (U - M) / s$, а в табл. 5.3 найти ее критические значения. Критическая область будет содержать значения z , превышающие по абсолютной величине соответствующее критическое значение. Критическое значение U для выборок меньшего объема можно взять из табл. 6.5. В данном примере z равно $-2,08$ и попадает, таким образом, в критическую область размером 0,05. Следовательно, применение более мощного критерия Манна — Уитни приводит к принятию альтернативной гипотезы о том, что медианная длина долеритовых галек больше медианной длины галек осадочных пород.

6.6. Однофакторный дисперсионный анализ

Крускала — Уоллиса

«Однофакторный дисперсионный анализ» Крускала — Уоллиса — наиболее мощный из рассматриваемых здесь критериев. Термин «дисперсия» уже встречался нам (разд. 5.2.1), но здесь он имеет несколько иное значение. До сих пор дисперсия использовалась только как квадрат стандартного отклонения распределения Гаусса и была дана формула для вычисления ее оценки. Здесь дисперсии придается более общий неколичественный смысл в связи с тем, что критерий Крускала — Уоллиса чувствителен к различиям в медианах и в меньшей степени к различиям в разбросе наблюдений вокруг медиан. Следовательно, здесь дисперсия не имеет строгого количественного определения и используется как термин, обозначающий более широкое понятие межвыборочного рассеяния.

Дисперсионный анализ применяется для того, чтобы попытаться обнаружить источники изменчивости между выборками или подвыборками. В нашем примере мы измерили длины галек в порядковой шкале и, учитывая типы пород, слагающих гальки, разбили всю выборку на две подвыборки. Связана ли межвыборочная изменчивость галек с их длиной? Критерий Крускала — Уоллиса — непараметрический метод, с помощью которого можно попытаться ответить на этот вопрос. Если отвечаем: «да», то надо искать причину изменчивости; если — «нет», то говорят, что выборки или подвыборки **однородны**.

«Однофакторный» дисперсионный анализ означает, что в ходе его применения рассматривается только одна переменная. В данном примере этой единственной переменной является длина галек. Чтобы рассматривать изменчивость, обусловленную двумя или более переменными, применяются «двухфакторный», «трехфакторный» и т. п. параметрические методы дисперсионного анализа. Однако они не всегда достаточно удобны для немедленного применения, поэтому по понятным причинам я отсылаю заинтересованного читателя к работам [20 и 25].

Критерий Крускала — Уоллиса полезен тем, что с его помощью можно сопоставлять *более* двух выборок (или подвыборок). Методика применения критерия очень похожа на методику критерия Манна — Уитни вплоть до ее третьего этапа — суммирования рангов в каждой выборке или подвыборке. Затем вычисляется статистика критерия H по формуле

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \times \sum_{i=1}^{i=S} (R_i^2/N_i) - 3 \times (N+1), \quad (6.2)$$

где S — число выборок (или подвыборок), i — индексы выборок (или подвыборок), меняющиеся от 1 до S , R_i — сумма рангов в i -й выборке, N_i — объем i -выборки и N — суммарный объем выборок.

Если N больше 50 и все N_i больше 10, то статистику H можно заменить статистикой χ^2 с числом степеней свободы $\nu = S - 1$, с тем чтобы критические значения можно было взять из табл. 4.6. В рассматриваемом примере $H = 4,32$. Для $\nu = S - 1 = 1$ критическая область размером 0,05 содержит значения H , большие или равные 3,84; поэтому нулевая гипотеза снова отвергается.

6.7. Сравнение параметрических и непараметрических критериев

Чтобы завершить это введение в совместное применение номинальных и порядковых критериев, отметим, что если бы в вышеприведенном примере длины всех галек измерялись в шкале

отношений и предполагалось, что они имеют распределение Гаусса, то для проверки различий между математическими ожиданиями можно было бы применять введенный в гл. 5 параметрический t -критерий Стьюдента. Тогда вычисленное значение $t=3,85$ требует отвергнуть нулевую гипотезу для двусторонней критической области гораздо *меньшего* размера ($0,001$). Мы уже отмечали, что обычно параметрические критерии имеют большую мощность по сравнению с соответствующими им непараметрическими критериями, и приведенный пример можно использовать для демонстрации этой закономерности. Примечательно, однако, что предварительная проверка распределений на нормальность сопряжена с гораздо большим объемом вычислений. Важнее обратить внимание на то, что выборка галек была специально подобрана так, чтобы обеспечить демонстрацию увеличения мощности вышеприведенных критериев. Эта «подгонка» выборки состояла лишь в том, что три самые большие «осадочные» гальки были исключены из исходной выборки, без чего *ни один* из критериев (включая критерий Стьюдента) не привел бы к отказу от нулевой гипотезы даже для большой критической области размером $0,05$. Хотя в данном случае «подгонка» была произвольной, *такое может легко случиться в результате небрежного проведения выборочной процедуры*. Тем самым становится очевидным, что для применения более мощного критерия весьма существенно, чтобы в его основе лежал более продуманный выборочный план. Более подробно об этом сказано в гл. 10.

6.8. τ -статистика Кендалла: мера порядковой корреляции

В заключение этой главы описывается быстрый способ сравнения измерений, выполненных в двух разных порядковых шкалах, по «корреляции» между ними. Для иллюстрации понятия **корреляция** предположим, что выборка, состоящая из галек, упорядочена так, что на одном конце ряда находится самая длинная галька, а на другом — самая короткая. Следовательно, длина галек измерена в порядковой шкале. Предположим также, что ряд, полученный в результате такого упорядочения, чем-то похож на ряд, полученный ранжированием галек по возрастанию их ширины. Тогда мы можем сказать, что длина и ширина галек тесно коррелированы и что корреляция в этом случае «положительная», т. е. более длинные гальки одновременно являются и более широкими. Если порядок галек в ряду, упорядоченном по возрастанию их ширины, полностью противоположен их порядку в ряду, построенном по возрастанию длины, то снова можно сказать, что длина и ширина тесно коррелированы, но на этот раз «отрицательно», т. е. более длинные гальки одновременно явля-

ются и более узкими. Если бы ранжирование галек по возрастанию ширины приводило бы к полному перемешиванию их длин, то длина и ширина были бы «некоррелированы», т. е. были бы двумя переменными, между которыми нет видимой связи.

Таблица 6.4. Длина и ширина 24 долеритовых галек, измеренные в порядковых шкалах

Ранги ширины	Ранги длины	Число наблюдений, ранги которых больше заданного ¹	Число наблюдений, ранги которых меньше заданного	Разность значений столбцов 3 и 4
1	2	3	4	5
1	2	22	1	+21
2	1	22	0	+22
3	3	21	0	+21
4	6	18	2	+16
5	7	17	2	+15
6	5	17	1	+16
7	17	7	10	-3
8	12	11	5	+6
9	4	15	0	+15
10	14	9	5	+4
11	13	9	4	+5
12	8	12	0	+12
13	9	11	0	+11
14	11	9	1	+8
15	19	5	4	+1
16	18	5	3	+2
17	16	5	2	+3
18	15	5	1	+4
19	10	5	0	+5
20	21	3	1	+2
21	24	0	3	-3
22	20	2	0	+2
23	23	0	1	-1
24	22	0	0	0
				Сумма S=+184

¹ Способ вычисления значений в столбцах 3 и 4 подробно описывается в тексте. — Прим. перев.

Таблица 6.5. Критические значения статистики U критерия Манна — Уитни

$N_1 \backslash N_2$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0 — — —							
4	0 — — —	1 0 — —						
5	1 0 — —	2 1 0 —	4 2 1 0					
6	2 1 — —	3 2 1 0	5 3 2 1	7 5 3 2				
7	2 1 0 —	4 3 1 0	6 5 3 2	8 6 4 3	11 8 6 4			
8	3 2 0 —	5 4 2 1	8 6 4 3	10 8 6 4	13 10 8 6	15 13 10 8		
9	3 2 1 0	6 4 3 1	9 7 5 3	12 10 7 5	15 12 9 7	18 15 11 9	21 17 14 11	
10	4 3 1 0	7 5 3 2	11 8 6 4	14 11 8 6	17 14 11 9	20 17 13 11	24 20 16 13	27 23 19 16
11	5 3 1 0	8 6 4 2	12 9 7 5	16 13 9 7	19 16 12 10	23 19 15 13	27 23 18 16	31 26 22 18
12	5 4 2 1	9 7 5 3	13 11 8 6	17 14 11 9	21 18 14 12	26 22 17 15	30 26 21 18	34 29 24 21
13	6 4 2 1	10 8 5 3	15 12 9 7	19 16 12 10	24 20 16 13	28 24 20 17	33 28 23 20	37 33 27 24
14	7 5 2 1	11 9 6 4	16 13 10 7	21 17 13 11	26 22 17 15	31 26 22 18	36 31 26 22	41 36 30 26
15	7 5 3 2	12 10 7 5	18 14 11 8	23 19 15 12	28 24 19 16	33 29 24 20	39 34 28 24	44 39 33 29
16	8 6 3 2	14 11 7 5	19 15 12 9	25 21 16 13	30 26 21 18	36 31 26 22	42 37 31 27	48 42 36 31
17	9 6 4 2	15 11 8 6	20 17 13 10	26 22 18 15	33 28 23 19	39 34 28 24	45 39 33 29	51 45 38 34
18	9 7 4 2	16 12 9 6	22 18 14 11	28 24 19 16	35 30 24 21	41 36 30 26	48 42 36 31	55 48 41 37
19	10 7 4 3	17 13 9 7	23 19 15 12	30 25 20 17	37 32 26 22	44 38 32 28	51 45 38 33	58 52 44 39

Таблица разделена на ряд прямоугольников. Каждому столбцу прямоугольников соответствует заданное число наблюдений в выборке 1 (N_1), а каждой строке прямоугольников — заданное число наблюдений в выборке 2 (N_2). Если объемы двух выборок не равны, то, применяя критерий, в качестве N_1 следует указывать минимальный из объемов двух выборок. Каждый прямоугольник содержит четыре критических значения статистики U , расположенных следующим образом:

	Одностороннее	Двустороннее
Размер критической области	0,05 0,01	

11	12	13	14	15	16	17	18	19
34 30								
25 21								
38 33	42 37							
28 24	31 27							
42 37	47 41	51 45						
31 27	35 31	39 34						
46 40	51 45	56 50	61 55					
34 30	38 34	43 38	47 42					
50 44	55 49	61 54	66 59	72 64				
37 33	42 37	47 42	51 46	56 51				
54 47	60 53	65 59	71 64	77 70	83 75			
41 36	46 41	51 45	56 50	61 55	66 60			
57 51	64 57	70 63	77 67	83 75	89 81	96 87		
44 39	49 44	55 49	60 54	66 60	71 65	77 70		
61 55	68 61	75 67	82 74	88 80	95 86	102 93	109 99	
47 42	53 47	59 53	65 58	70 64	76 70	82 75	88 81	
65 58	72 65	80 72	87 78	94 85	101 92	109 99	116 106	123 113
50 45	56 51	63 57	69 63	75 69	82 74	88 81	94 87	101 93

Критическая область содержит значения U , меньшие или равные критическому значению.

τ -статистика Кендалла является мерой коррелированности измерений, выполненных в порядковой шкале, и изменяется от $+1$ при тесной положительной корреляции, через 0 в случае некоррелированных переменных, до -1 при тесной отрицательной корреляции. Способы вычисления иллюстрируются на примере, приведенном в табл. 6.4. Этапы вычислений следующие:

1) Ранжируем наблюдения по возрастанию значений первой переменной (длины), при этом каждому элементу ряда присваивается соответствующий ранг: от 1 для минимального значения до N для максимального.

2) Снова ранжируем наблюдения, но теперь в порядке возрастания значений второй переменной (ширины), и в столбце 2 табл. 6.4 записываем в соответствии с новым порядком ранги первой переменной (длины).

3) По очереди для каждого наблюдения (гальки) просматриваем столбец 2 *вниз* от ранга, соответствующего этому очередному наблюдению, и подсчитываем число рангов, *превышающих* его. Результаты помещаем в столбец 3 табл. 6.4.

4) Повторяем этап 3, но на этот раз подсчитывая число рангов, которые меньше ранга очередного наблюдения. Результаты заносим в столбец 4.

5) Из значений столбца 3 вычитаем соответствующие им значения столбца 4 и результаты заносим в столбец 5. Находим сумму чисел в столбце 5, и пусть она равна S .

6) τ -статистика Кендалла определяется формулой

$$\tau = 2S/[N \times (N - 1)]. \quad (6.3)$$

В нашем примере $S=184$ и $N=24$, поэтому $\tau=+0,67$. Таким образом, оказывается, что в этой выборке «длина» и «ширина» положительно коррелированы. Однако возможно, что наблюдаемое значение τ является результатом флуктуаций отбора наблюдений из генеральной совокупности, в которой на самом деле «длина» и «ширина» некоррелированы (т. е. $\tau=0$). Следовательно, мы должны проверить, значимо ли отличается τ от нуля. Для выборок, объем которых не менее 10, можно воспользоваться статистикой критерия z , вычисляемой по формуле

$$z = \tau \times \sqrt{[9 \times N \times (N - 1)]/[2 \times (2N + 5)]}. \quad (6.4)$$

(См. «Замечания о вычислениях по формулам» в начале книги.) Критические значения z приведены в табл. 5.3, а критическая область содержит значения z , превышающие критическое. В данном примере $z=+4,59$; следовательно, нулевая гипотеза, утверждающая, что $\tau=0$, отвергается для односторонней критической области размером $0,01$.

6.9. Совпадающие наблюдения при измерении в порядковой шкале

Применение всех вышеперечисленных порядковых методик всегда предусматривает вероятность того, что два или более наблюдений, измеренных в порядковой шкале, совпадут. Если такие совпадения нечасты, они редко вызывают неудобства в практической работе, и, если число таких совпадений мало, ими спокойно можно пренебречь. Информацию о маловероятной ситуации с большим числом совпадений читатель может найти в работе [19], где рассмотрены способы внесения соответствующих поправок.

Корреляция и регрессия

Предметом настоящей книги являются методики, предназначенные для непосредственного применения на месте сбора данных; методикам же, упоминаемым в этой главе, такое применение не свойственно. Причиной тому являются трудоемкость измерений в шкале отношений и трудоемкость необходимых вычислений. Цель данного краткого обзора обусловлена в большей степени связью этих методик с более сложными (обычно машинными) методами и в меньшей степени с возможностями их применения в простейших лабораторных исследованиях.

7.1. Одномерные, двухмерные и многомерные генеральные совокупности

Каждое наблюдение в выборке может быть измерено больше чем в одной шкале. Мы уже видели пример измерения галек по длине и слагающему их типу пород; одно измерение проводилось в шкале отношений, другое — в номинальной шкале. Поскольку в этом случае мы измеряем две переменные, то говорим, что отбор производится из «двухмерной» генеральной совокупности. Большинство примеров в этой книге относится к «одномерным» генеральным совокупностям (измеряется одна переменная). Строго говоря, мы не ограничены в выборе шкалы измерения (номинальной, порядковой или шкалы отношений), но при смешении шкал разных типов могут возникать сложности. Поэтому применение двухмерных и многомерных корреляционных и регрессионных методов обычно ограничивается измерениями в шкале отношений. Примерами такого изучения может быть сравнение различных размеров (например, длины, ширины, высоты и т. п.) в выборке, составленной из ископаемых остатков, принадлежащих одному виду, или распределение химических элементов в свите пород. Последнее, однако, может осложняться тем, что сумма концентраций химических элементов постоянна в каждой конкретной породе (обычно она принимается равной 100%). Эти задачи обсуждаются в работах Чейса [2] и Девиса [5].

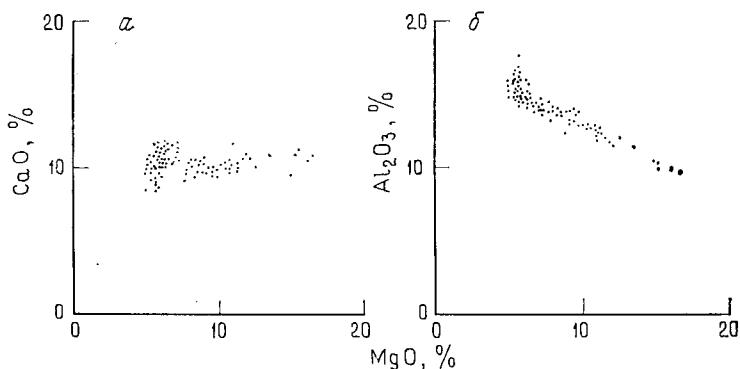


Рис. 7.1. Диаграммы рассеяния. Точки представляют собой 106 наблюдений из многомерной выборки, горизонтальные координаты которых пропорциональны одной переменной, а вертикальные координаты — другой. Выборка состоит из любезно предоставленных д-ром А. Н. Бакстером результатов химического анализа базальтовых лав с острова Маврикий. На диаграмме *а* коэффициент корреляции Пирсона r , равный $-0,09$, незначимо отличается от нуля. Следовательно, концентрации CaO и MgO некоррелированы. На диаграмме *б* значение того же коэффициента равно $-0,93$, что указывает на тесную отрицательную корреляцию между концентрациями Al_2O_3 и MgO . Обратите внимание, что по петрологическим причинам были исключены наблюдения с концентрациями MgO ниже 5%.

7.2. Корреляция

Диаграмма рассеяния (рис. 7.1) — удобный способ графического представления двухмерной выборки или значений двух переменных, взятых из многомерной выборки. Каждое наблюдение изображается точкой, горизонтальная и вертикальная координаты которой пропорциональны измерениям данного наблюдения, выполненным в двух шкалах отношений. По расположению облака точек на такой диаграмме можно сделать предположение о том, существует ли какая-либо зависимость (или «корреляция») между значениями изображенных переменных. Так, из рис. 7.1, *б* видно, что в этой конкретной выборке содержание Al_2O_3 в породе в среднем уменьшается с ростом содержания MgO , т. е. имеет место «отрицательная корреляция». Совместное уменьшение значений двух переменных свидетельствовало бы о «положительной корреляции» между ними. На рис. 7.1, *а* с ростом содержания MgO , по-видимому, не происходит в среднем ни увеличения, ни уменьшения содержания CaO . В этом случае можно предполагать, что переменные «некоррелированы».

Полезно иметь возможность охарактеризовать силу и знак корреляции (положительная или отрицательная) между двумя

переменными. Теоретически такой «коэффициент корреляции» менялся бы от максимального значения, равного $+1$ (при полной положительной корреляции), через 0 (для некоррелированных переменных) до минимального значения, равного -1 (при полной отрицательной корреляции). В том случае, когда по выборке, извлеченной из генеральной совокупности, в которой переменные на самом деле некоррелированы, получается ложное конечное значение коэффициента корреляции, нужен элементарный способ проверки значимости отличия от нуля выборочного значения коэффициента корреляции. Короче говоря, нужен критерий, позволяющий принять или отвергнуть нулевую гипотезу о нулевой корреляции против альтернативной гипотезы о существовании конечной корреляции. Ниже с учетом таких критериев рассматриваются три вида коэффициентов. Приводя значения коэффициентов корреляции, необходимо всегда указывать, какой именно коэффициент использовался, потому что для заданной выборки они имеют различные значения. К сожалению, многие авторы опускают эту важную деталь.

7.2.1. Коэффициент корреляции Кендалла τ . Этот «ранговый» коэффициент корреляции (т. е. применимый к порядковым или ранжированным переменным) с соответствующим критерием был введен выше (разд. 6.8). Критерий легко применим, но вычисление самого коэффициента довольно громоздко. Однако он имеет преимущество для многомерных выборок. В таких выборках всегда может оказаться, что переменные x и y сильно коррелированы, но обусловлено это не внутренней связью, а тем, что каждая из них в отдельности тесно коррелирована с третьей переменной z . Исследователям следует с осторожностью относиться к такой сопряженности переменных, которую можно получить при использовании «частного» рангового коэффициента корреляции Кендалла, вычисленного способом, близким вышеописанному. Более подробное рассмотрение этой величины выходит за рамки нашей книги, но его можно найти в работах [25, 19].

7.2.2. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Достоинством этого коэффициента, как и коэффициента Кендалла τ , является простота вычисления, но он имеет и два недостатка, заключающихся в отсутствии доступного критерия и эквивалентной частной формы. Подробнее об этом см. в работе [25].

7.2.3. Коэффициент корреляции Пирсона r . Этот коэффициент применим к измерениям, выполненным в шкале отношений; теоретики же считают, что с ним легко обращаться алгебраически, почему он и получил большое распространение. Однако помимо трудоемкости измерений в шкале отношений он долго вычисляется, хотя способ вычисления описан в табл. 7.1. Значимость отличия эмпирического значения коэффициента корреля-

Таблица 7.1. Вычисление коэффициента корреляции Пирсона r , констант регрессии и фидуциальных границ (границы надежности)

Пусть линия регрессии задается уравнением $y = a + bx$.

Вычисления выполняются для 30 результатов химических анализов на Al_2O_3 и MgO , использованных при построении рис. 7.1, б. Пусть независимой переменной x будет концентрация MgO , а зависимой переменной y — концентрация Al_2O_3 .

1) Вычисляем следующие величины:		$N = 30$
Сумму иксов	$\Sigma(x)$	217,74
Сумму игреков	$\Sigma(y)$	427,36
Сумму квадратов иксов	$\Sigma(x^2)$	1780,5104
Сумму квадратов игреков	$\Sigma(y^2)$	6151,3084
Сумму произведений икс на игрек	$\Sigma(xy)$	3000,9713
2) Из этих величин получаем:		
Среднее по икс	$\bar{M}_x = \Sigma(x)/N$	7,258
Среднее по игрек	$\bar{M}_y = \Sigma(y)/N$	14,245
Дисперсию по икс	$s_x^2 = \Sigma(x^2)/N - \bar{M}_x^2$	6,67
Дисперсию по игрек	$s_y^2 = \Sigma(y^2)/N - \bar{M}_y^2$	2,19
Ковариацию икса и игрека	$s_{xy} = \Sigma(xy)/N - \bar{M}_x \bar{M}_y$	-3,36
Коэффициент корреляции r	$r^2 = 1 - \frac{N-1}{N-2} \left\{ 1 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} \right\}$	0,79
	r (знак соответствует знаку ко- вариации)	-0,89
Остаточную дисперсию S_y^2	$S_y^2 = s_y^2 (1 - r^2)$	0,67
Отрезок регрессии a	$a = \bar{M}_y - \bar{M}_x s_{xy}/s_x^2$	17,9
Стандартную ошибку e_a	$e^2 = S_y^2/N$	$\pm 0,12$
Наклон регрессии b	$b = s_{xy}/s_x$	-0,50
Стандартную ошибку e_b	$e^2 = S_y^2/(s_x^2 N)$	$\pm 0,047$
3) Для удобных значений x вычисляем соответствующие значения S_r :		

$$S_r^2 = S_y^2 [1 + (x - \bar{M}_x)^2 / s_x^2] / N$$

Эти значения определяют верхние и нижние фидуциальные границы прогнозируемых значений y :

$$a + bx \pm S_r t,$$

где значения t -статистики Стьюдента берутся из табл. 5.5. для степеней свободы $\nu = N - 2$

ции от нуля может быть проверена путем вычисления t -статистики Стьюдента:

$$t = r \times \sqrt{(N-2)/(1-r^2)}. \quad (7.1)$$

Критические значения t находятся по табл. 5.5, число степеней свободы ν равно $N-2$.

7.3. Регрессия

Анализ точечных структур на диаграммах рассеяния, или вычисление коэффициентов корреляции, или и то и другое позволяют предположить, что две переменные связаны функциональной зависимостью, т. е. эта зависимость может быть выражена с помощью уравнения. Обычно такое уравнение «линейно», т. е. его графиком является прямая линия:

$$y = a + (b \times x), \quad (7.2)$$

в котором a и b — константы, называемые соответственно отрезком регрессии (т. е. значением, отсекаемым регрессионной прямой на вертикальной оси) и наклоном (или коэффициентом) регрессии. Говорят, что x — «независимая» переменная, а y — «зависимая» переменная (зависящая от x). Если мы предполагаем, что эта связь нелинейна, то одну любую или обе переменные можно заменить некоторой функцией (например, $\log(x)$, $\sqrt{y}$), чтобы уравнение (7.2) стало линейным.

Задача вычисления констант a и b является главной частью «регрессионного анализа», называемого так в связи с тем, что впервые он был применен при статистическом изучении регрессивных тенденций в росте отцов и сыновей. Способ вычисления основан на методе «наименьших квадратов», в котором a и b выбираются таким образом, что сумма квадратов разностей между наблюдаемыми и теоретическими значениями зависимой переменной минимальна.

В символических обозначениях сумма $\sum [y_{\text{набл}} - (a + bx)]^2$ минимальна. Схема вычисления приведена в табл. 7.1, а результаты представлены в графическом виде на рис. 7.2.

Вычисленные значения констант регрессии можно использовать как описательные параметры, для которых следует также вычислять и указывать стандартные ошибки оценок. Умножение этих стандартных ошибок на 1,96 или 2,58 (табл. 5.3) позволит исследователю построить доверительные интервалы уровня 0,95 или 0,99 соответственно. Для того чтобы предсказывать значения переменной y , можно, наоборот, в уравнение (7.2) подставить значения констант регрессии и переменной x . В этом случае исследователю хотелось бы знать доверительный интервал для прогнозируемого значения y . Эти вычисления достаточно гро-

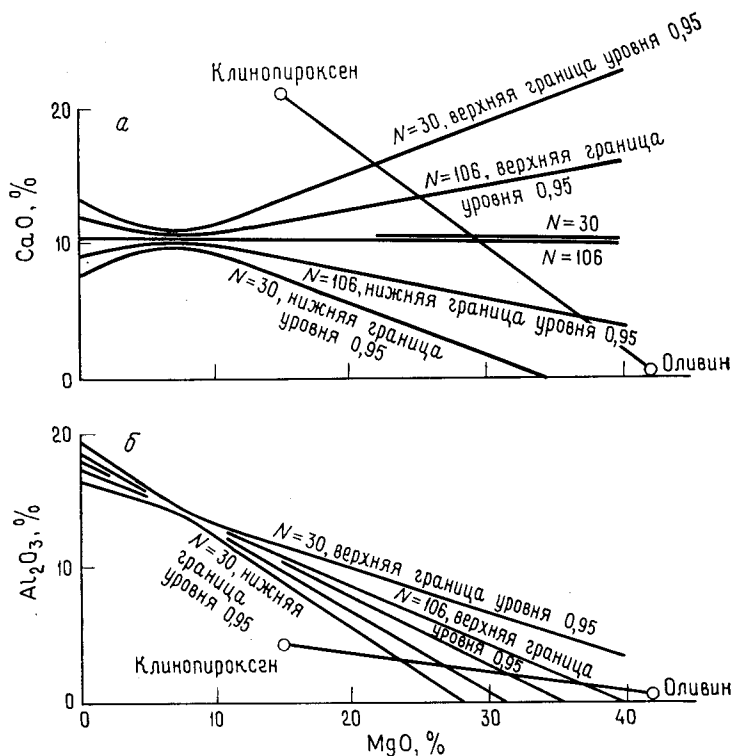


Рис. 7.2. Линии регрессии с фидуциальными границами, построенные по тем же данным, что и рис. 7.1. Эти базальтовые лавы содержат фенокристаллы оливина и клинопироксена, положение которых дано в координатах концентраций CaO , Al_2O_3 и MgO . По разбросу точек, изображенных на рис. 7.1, можно предположить, что лавы эволюционировали в результате дифференциации определенного, но неизвестного соотношения между оливином и пироксеном. Если предположить, что процесс дифференциации линейен (т. е. описывается прямой линией), и принять концентрацию MgO в качестве показателя дифференциации, то линия регрессии, продолженная до пересечения с отрезком, соединяющим оливин и клинопироксен, даст оценку объемного состава выделяющихся фаз. Линии регрессии вычислялись как по полной выборке объемом 106 наблюдений, так и по подвыборке, составленной из 30 случайно отобранных наблюдений. Для сравнения были вычислены фидуциальные границы уровня 0,95 (т. е. 95%-ные границы). Обратите внимание, как с увеличением расстояния экстраполяции резко растет ширина фидуциальной полосы (расстояние между верхней и нижней фидуциальными границами). Пересечения линий регрессии и их фидуциальных полос с отрезком, соединяющим оливин и клинопироксен, позволяют оценить соотношения выделяющихся кристаллов.

моздки, но они приведены в табл. 7.1. Можно вычислить верхние и нижние доверительные границы для множества значений x , а результаты вместе с линией регрессии представить на графике. Это сделано на рис. 7.2, а получающиеся кривые образуют **фидуциальные границы** (границы надежности) для прогнозируемых значений y .

7.4. Применение и разработка

Об удобстве использования корреляции переменных, измеренных в шкале отношений, в алгебраических операциях уже говорилось. С развитием вычислительной техники и автоматизации или полуавтоматизации методов измерений в шкалах отношений статистическая обработка многомерных выборок привлекла большое внимание, особенно в экономических задачах. Это способствовало резкому увеличению числа печатных работ и разработке множества различных многомерных методов. Хотя все эти методы очень важны, «в поле» они недоступны геологу по разным причинам, поэтому здесь мы их не рассматриваем. Введение в многомерный анализ дано в работе [8].

Ориентировки в двухмерном пространстве

В разд. 1.2.5 мы коснулись сущности ориентировок, определив такие понятия, как «ориентировка», «направление», «ось», и привели ряд примеров. Обычно наиболее наглядной формой графического представления ориентировок в двухмерном пространстве (распределенных по окружности) является круговая диаграмма, введенная в разд. 1.3.7. Мы видели, что определенные линейные данные, обладающие цикличностью, могут быть преобразованы в ориентировки в двухмерном пространстве и обработаны как угловые величины. Исходя из этого, мы рассмотрим в данной главе различные критерии, применяемые для анализа данных, распределенных по окружности, предварительно познакомившись с некоторыми их особыми свойствами, в частности с понятием «равномерности». Применение всех критериев укладывается в схему из шести этапов, приведенную в разд. 2.3. Часть критериев непараметрические, но в конкретных условиях, опираясь на теоретические распределения, можно построить более мощные параметрические критерии. Некоторые методики основаны на не слишком глубоких знаниях тригонометрии и требуют небольших познаний в элементарной векторной алгебре. Однако в связи с тем, что ориентировки составляют большую часть данных во всех отраслях геологии в целом, необходимо приложить усилия для уверенного владения этими методами. Перед проведением вычислений по формулам необходимо обратиться к замечаниям в начале книги.

8.1. Классы критериев, равномерное распределение и предпочтительная ориентировка

Как и для линейных шкал измерений, наши критерии будут: как параметрическими, так и непараметрическими; как для одной выборки, так и для двух выборок; как односторонними, так и двусторонними. Кроме того, при оценке значений параметров генеральных совокупностей полезно вычислять доверительные интервалы. Однако начнем мы с введения нового понятия — **равномерного распределения**. Имея дело с замерах ориентировок, можно представить себе ситуацию, когда плотность

направлений, изображаемых в виде радиусов окружности или сферы, примерно одинакова на всей окружности (в двумерном случае) или на всей поверхности сферы (в трехмерном случае). Если наши выборки не являются «равномерно распределенными» в указанном смысле, то они должны показать одно или более заметных сгущений или других признаков существования «предпочтительных ориентировок». Следовательно, в дополнение к вышеупомянутым классам критериев мы познакомимся с новым классом — критериями равномерности распределения. Во всех критериях равномерности нулевая гипотеза утверждает, что выборка извлечена из генеральной совокупности, имеющей распределение с равномерной плотностью, а отдельные критерии чувствительны к различным типам отклонений от равномерности. Сначала я введу три непараметрических критерия, затем функцию распределения фон Мизеса, а после этого различные параметрические критерии, основанные на этом распределении. Дополнительные сведения об этих критериях можно найти в блестящей книге Мардиа [14]¹, хотя математическая форма изложения в ней, возможно, не сразу окажется доступной большинству геологов.

Построение круговых диаграмм, являющееся первым логическим шагом во всех случаях (разд. 1.3.7), полезно при использовании большинства критериев, описываемых в этой главе.

8.2. Критерии равномерности

8.2.1. Критерий Ходжеса — Айне. Эти авторы разработали быстро применимый, но маломощный критерий равномерности. Применение этой методики требует построения круговой диаграммы, диаметр которой располагается таким образом, что по одну сторону от него находится минимальное число замеров m . В примере с раковинами гониатитов, изображенном на рис. 1.10, диаметр ориентирован приблизительно с запада на восток, и по одну его сторону располагается 11 точек, а по другую 25. Число m подходит в качестве статистики критерия; критические значения его приведены в табл. 8.1. Заметим, что формулировка альтернативной гипотезы требует аккуратности в связи с тем, что этот критерий не чувствителен к отклонениям распределений от равномерности в сторону двусторонне-симметричных распределений.

8.2.2. Критерий Куипера. Более мощный критерий разработан Куипером; в табл. 8.2 и на рис. 8.1 показаны требующиеся при

¹ К сожалению, книга К. Мардиа [14] издана на русском языке в сильно сокращенном виде. Не исключено поэтому, что читателю придется обращаться к английскому изданию книги. — *Прим. ред.*

Таблица 8.1. Критические значения m в критерии Ходжеса — Айне. Критическая область содержит значения m , не превышающие критического значения

m	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	m	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
0	$N=0-11$	$N=0-14$	7	~ 30	~ 35
1	12—14	15—17	9	~ 35	~ 40
2	15—17	18—21	10	~ 40	~ 45
3	18—20	22—24	12	~ 45	~ 50
4	21—23	~ 25	14	~ 50	
5	24—25	~ 30			

Таблица 8.2. Ориентировки устьев 36 раковин гониатитов в слое породы. Круговая диаграмма, построенная по этим данным, приведена на рис. 1.5. Значения индекса i соответствуют номерам наблюдений, упорядоченным по возрастанию значений углов X_i

X°	i	U_i	i/N	$U_i - i/N$	X°	i	U_i	i/N	$U_i - i/N$
1	1				176	19			
8	2				188	20			
12	3				198	21			
14	4				214	22			
17	5				236	23			
21	6				245	24			
23	7				259	25			
32	8				274	26	0,761	0,722	+0,039
36	9				294	27	0,817	0,750	+0,067*
47	10	0,131	0,278	-0,147	304	28	0,844	0,778	+0,067
58	11	0,161	0,306	-0,144	313	29	0,869	0,806	+0,064
65	12	0,181	0,333	-0,153	320	30	0,889	0,833	+0,056
72	13	0,200	0,361	-0,161	330	31	0,917	0,861	+0,056
81	14	0,225	0,389	-0,164*	332	32			
98	15	0,272	0,417	-0,144	339	33			
119	16	0,331	0,444	-0,114	345	34			
146	17				349	35			
164	18				354	36			

этом операции. Действие критерия Куипера похоже на действие критерия Колмогорова — Смирнова для одной выборки, применяемого к линейным данным. Прежде всего, замеры ориентировок располагаются в порядке возрастания их величины «по модулю 360° » (т. е., если замеры не повторяются через 360° , их следует соответствующим образом преобразовать: в случае ориен-

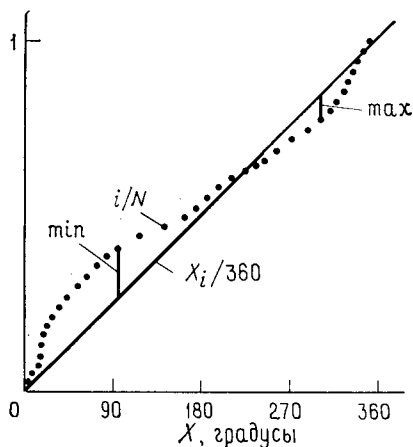


Рис. 8.1. Выборка, подготовленная к применению критерия Куипера. На горизонтальной оси переменная X принимает значения от 0 до 360° . Вертикальная ось проградуирована от 0 до 1, что облегчает построение графика, если его высота составляет N единиц (например, миллиметров). Прямая проводится из начала координат до точки с горизонтальной координатой 360° и вертикальной координатой 1. Для каждого измеряемого направления точки принимают значения i/N . Их горизонтальная координата определяется соответствующим направлением X_i , а вертикальная — соответствующим значением i/N или значением i , если высота вертикальной оси составляет N единиц. *min* означает максимальное расстояние до точек, расположенных над прямой; *max* — максимальное расстояние до точек, расположенных под прямой.

прямой. Статистика критерия определяется формулой

$$V_N = \max(U_i - i/N) - \min(U_i - i/N) + 1/N, \quad (8.1)$$

где *max* означает наибольшее положительное значение, а *min* — наибольшее отрицательное значение. График, изображенный на рис. 8.1, можно использовать для приблизительной оценки значений V_N . Если необходимо получить значения с большей точностью, то следует произвести вычисления в соответствии с табл. 8.2, где звездочками отмечены строки, приблизительно по-

тировок осей замеры углов, как показано в разд. 1.3.9, должны быть удвоены). Построение круговой диаграммы упрощает этот первый шаг. Затем точки замеров нумеруются от $i=1$ до $i=N$ так же, как в первом и втором столбцах табл. 8.2. Если построить график, изображенный на рис. 8.1, то на данном этапе, вероятно, удастся сэкономить время. Прямая линия представляет собой график зависимости $U_i = X_i/360^\circ$, являющейся функцией от X_i , где X_i — отдельные направления. Она воплощает в себе теоретическую модель равномерного распределения, относительно которой проверяется выборка. Семейство точек показывает, как в зависимости от значений X_i изменяется величина i/N (эти точки легко нанести на график, если вертикальную шкалу проградуировать через N единиц). Очевидно, что если бы выборочное распределение было равномерно, то в любой точке величина i/N равнялась бы величине $X_i/360^\circ$ в этой же точке, а все семейство точек совпадало бы с прямой линией. Чем больше распределение отклоняется от равномерного, тем дальше отстоят точки от

казывающие части таблицы, необходимые для вычисления максимального и минимального значений в формуле (8.1). В данном примере

$$V_N = +0,067 - (-0,164) + 1/36 = 0,259.$$

Критические значения V_N приведены в табл. 8.3 [22]. По этой таблице находим, что для критической области размером 0,05 критическое значение равно 0,282, и, следовательно, принимаем нулевую гипотезу о равномерности распределения направлений раковин гониатитов.

Таблица 8.3. Критические значения статистики критерия V_N ; наблюдаемые значения в критической области равны критическим значениям или больше их

Критическое значение $V_N = V_N^* / [\sqrt{N} + 0,155 + 0,24/\sqrt{N}]$	(8.2)	
Критическая область $\alpha = 0,05$	0,01	
$V_N^* = 1,75$	2,00	

8.2.3. U^2 -критерий Ватсона. Данный критерий, по-видимому, более мощный непараметрический критерий, требующий, правда, большого объема вычислений. Замеры ориентировок упорядочиваются, как и в вышерассмотренных критериях, по возрастанию их величины по модулю 360° ; непосредственно по ним следующим образом вычисляется статистика критерия:

$$U^2 = \sum_{i=1}^{i=N} (U_i^2) - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{i=N} i \times U_i + \bar{U} + (\bar{U} - \bar{U}^2 + 1/12) \times N, \quad (8.3a)$$

где U_i то же, что и в критерии Куипера (т. е. $X_i/360^\circ$), а $\bar{U}$ — среднеарифметическое значений U_i :

$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (U_i). \quad (8.3b)$$

И снова с ростом отклонения выборочного распределения от равномерного увеличивается значение статистики критерия. Если вычислить видоизмененную статистику:

$$U^{*2} = [U^2 + (1/N^2 - 1/N)/10] \times (1 + 0,8/N), \quad (8.4)$$

то критические значения для нее можно найти в табл. 8.4 [22].

Таблица 8.4. Критические значения видоизмененной статистики критерия U^{*2} ; критическая область содержит значения, большие критических. Приближенная формула (8.4) сохраняет силу при $N > 8$

$\alpha = 0,05$	0,01
$U^{*2} = 0,187$	0,267

В нашем примере наблюдаемое значение U^{*2} равно 0,207; следовательно, для критической области размером 0,05 нулевую гипотезу можно отвергнуть.

8.2.4. Критерий серий Вальда — Вольфовитца. Завершить перечень непараметрических критериев, применение которых не требует много времени, можно кратким упоминанием критерия серий Вальда — Вольфовитца для двух выборок, детально рассмотренного в разд. 6.4. Если две выборки явно различаются на круговой диаграмме, то, начиная с точки, в которой две серии совпадают, можно быстро определить число серий.

8.3. Распределение фон Мизеса

8.3.1. ФПВ, ее параметры и оценка. Вероятно, наиболее важным теоретическим распределением на окружности является распределение фон Мизеса, выполняющее ту же роль, что и распределение Гаусса для данных, распределенных на прямой. Его функция плотности вероятности, приводимая здесь лишь для сведения, имеет следующий вид:

$$f(X) = \exp[k \times \cos(X - X_0)] / [2 \times \pi \times J_0(k)], \quad (8.5)$$

где *параметрами* распределения является X_0 — **круговое среднее направление** и k — **концентрация**, которые обсуждаются ниже; X — переменная, измеренная в угловых величинах (по модулю 360°), а $J_0(k)$ — константа (функция Бесселя, о содержании которой можно не беспокоиться), зависящая от концентрации k .

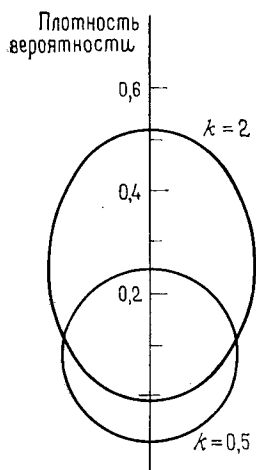


Рис. 8.2. ФПВ распределения фон Мизеса. Один из примеров, изображенных на диаграмме в полярных координатах, имеет параметр концентрации $k=0,5$, а другой — параметр $k=2$. Обратите внимание на увеличение эксцентриситета с ростом k .

Символ $\exp(a)$ означает число e (основание натуральных логарифмов), возведенное в степень с показателем a .

На рис. 8.2 в полярных координатах показаны ФПВ двух распределений фон Мизеса. Они двусторонне-симметричны относительно среднего направления, и каждое из них имеет одну моду (максимальную плотность вероятности) и одну антимоду (минимальную плотность вероятности). Параметр концентрации k может изменяться от нуля до плюс бесконечности, и с его ростом форма ФПВ распределения фон Мизеса все дальше отклоняется от окружности. Следовательно, параметр k можно сопоставить с параметрами рассеяния данных на прямой (например, со стандартным отклонением), но его также можно использовать и как меру «предпочтительной ориентировки»: чем выше значение k , тем ярче выражена предпочтительная ориентировка. Если предположить, что выборка извлекается из генеральной совокупности, имеющей распределение фон Мизеса, то его параметры можно оценить следующим образом:

1) Средние значения косинусов и синусов выборочных направлений вычисляем по формулам

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (\cos X_i), \quad (8.6a)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (\sin X_i). \quad (8.6b)$$

2) Вычисляем «среднюю результирующую длину»:

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}. \quad (8.7)$$

3) Вычисляем косинус и синус оценки кругового среднего направления:

$$\cos \bar{X}_0 = \bar{C}/\bar{R}, \quad (8.8a)$$

$$\sin \bar{X}_0 = \bar{S}/\bar{R}. \quad (8.8b)$$

Обратите внимание, что знание простых тригонометрических формул и знаков при косинусах и синусах помогает определить, какой из четырех квадрантов окружности содержит оцениваемое среднее направление. Рассматривавшиеся до сих пор методы являются методами элементарной векторной алгебры, их изложение можно найти в приложении А.

4) Для оценки параметра концентрации приводится грубая

аппроксимация, достаточная для получения результата с двумя значащими цифрами:

$$\bar{k} = \bar{R} \times (12 + 6 \times \bar{R}^2 + 5 \times \bar{R}^4)/6 \quad (8.9a)$$

$$(\bar{R} < 0,65),$$

$$1/\bar{k} = 2 \times (1 - \bar{R}) - (1 - \bar{R})^2 - (1 - R)^3 \quad (8.9b)$$

$$(\bar{R} > 0,65).$$

К счастью, необходимость получения точных оценок возникает весьма редко.

Для направлений раковин гониатитов, приведенных в табл. 8.2, значения $\bar{C}$ и $\bar{S}$ соответственно равны +0,313 и +0,007, и, следовательно, $\bar{R} = 0,313$, откуда прогнозируемое значение кругового среднего направления, равное $0,5^\circ$, отсчитывается от северного направления по часовой стрелке, что хорошо согласуется с медианным направлением, показанным на рис. 1.5. По формуле (8.9a) $\bar{k} = 0,66$.

Хотя многие эмпирические распределения на окружности хорошо аппроксимируются распределением фон Мизеса, из-за сложностей, связанных с вычислением его ФПВ или ИФР, предлагается статистическая проверка этого соответствия. Следовательно, если выборочная круговая диаграмма имеет приблизительно двусторонне-симметричную форму и на диаграмме наблюдается достаточно плавное уменьшение плотности наблюдений от модального направления к антимодальному, то желательно предположить, что наша выборка извлечена из генеральной совокупности с распределением фон Мизеса. Для выборок, показанных на рис. 1.5 и 1.8, предположение о том, что в их основе лежит распределение фон Мизеса, весьма правдоподобно. Это предположение создает возможность применения ряда полезных параметрических методик, которым посвящен следующий раздел.

8.3.2. Критерии, основанные на распределении фон Мизеса. Первым из этих критериев является параметрический критерий равномерности Рэля. В качестве статистики этого критерия используется величина $\bar{R}$ и проверяется нулевая гипотеза о равномерности распределения (при $\bar{R} = 0$) против альтернативной гипотезы о том, что выборка извлечена из генеральной совокупности с распределением фон Мизеса (при $\bar{R}$, значимо отличающемся от нуля). Критические значения $\bar{R}$ приведены в табл. 8.5.

Так как для выборки из 36 раковин гониатитов наблюдаемое значение $\bar{R}$ равно 0,313, а критическая область размером 0,05 содержит значения $\bar{R}$, равные 0,29 или больше, то нулевая гипотеза отвергается.

Таблица 8.5. Критические значения $\bar{R}$ в критерии равномерности Рэля. Критическая область содержит значения $\bar{R}$, большие чем критические, а удовлетворительное приближение достигается при $N > 15$

	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
Критическое значение $\bar{R}$	$\sqrt{3,00/N}$	$\sqrt{4,61/N}$

После оценки среднего направления нам, конечно, хотелось бы определить соответствующий доверительный интервал, как это делалось в разд. 5.5. Для выборок средних объемов, в которых предпочтительная ориентировка выражена умеренно, доверительный интервал для среднего направления вычисляется просто. Приводимая ниже формула дает удовлетворительный результат для выборок, в которых произведение $N \times \bar{R} \times \bar{k}$ не менее 6:

$$d^\circ = K / \sqrt{N \times \bar{R} \times \bar{k}}, \quad (8.10)$$

где константа K определяется следующим образом:

$1 - \alpha:$	0,99	0,95
$K:$	148	112

Тогда доверительный интервал распространяется от $\bar{X}_0 - d^\circ$ до $\bar{X}_0 + d^\circ$.

В примере с гониатитами, где $N=36$, $\bar{R}=0,31$ и $\bar{k}=0,66$, $d^\circ=41^\circ$ для доверительного интервала уровня 0,95. Следовательно, доверительный интервал распространяется на 41° в обе стороны от оценки среднего направления.

В случае двух выборок естественно было бы проверить нулевую гипотезу, т. е. что две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности с распределением фон Мизеса, в противовес альтернативной гипотезы, утверждающей, что выборки извлечены из разных генеральных совокупностей, имеющих распределения фон Мизеса, которые различаются либо средними направлениями, либо параметрами концентрации. В обоих критериях необходимо вычислить среднюю результирующую длину объединенных выборок. При этом следует помнить, что средние результирующие длины двух выборок являются векторами, поэтому арифметические операции над ними мы должны выполнять соответствующим образом, применяя для сложения векторов правило параллелограмма (рис. 8.3). Используя величины $\bar{C}$, $\bar{S}$ и $\bar{R}$, вычисляемые по формулам (8.6а), (8.6б) и (8.7), для значений, относящихся к объединенной выборке, и обозначая соот-

ветствующие величины в отдельных выборках индексами 1 и 2, по правилам сложения векторов получаем

$$N \times \bar{C} = (N_1 \times \bar{C}_1) + (N_2 \times \bar{C}_2), \quad (8.11a)$$

$$N \times \bar{S} = (N_1 \times \bar{S}_1) + (N_2 \times \bar{S}_2), \quad (8.11b)$$

откуда следует, что

$$\bar{R} = \bar{C}^2 + \bar{S}^2. \quad (8.12)$$

В критерии равенства средних направлений предполагается, что генеральные совокупности, из которых извлекаются две выборки, имеют также равные параметры концентрации, поэтому сначала необходимо проверить равенство концентраций. Математическое выражение критерия в общем виде столь сложно, что в критериях, применяемых на практике, используется одна из трех форм [14] в зависимости от значения $\bar{R}$. Во всех случаях объемы обеих выборок должны быть близки.

Для $\bar{R} < 0,45$ можно вычислить статистику критерия z :

$$z = 1,155 \times [g(\bar{R}_1) - g(\bar{R}_2)] / \sqrt{(N_1 - 4)^{-1} + (N_2 - 4)^{-1}}, \quad (8.13)$$

где $g(\bar{R}_i) = \arcsin(1,225 \times \bar{R}_i)$. (Заметим, что до вычисления функции $\arcsin$ углы выражаются в радианах и что x^{-1} означает обратное значение x , т. е. $1/x$.)

Критические значения z приведены в табл. 5.3, причем критическая область содержит значения, превышающие критические.

Когда $\bar{R}$ больше 0,45, но меньше 0,70, z определяется по формуле

$$z = [g(\bar{R}_1) - g(\bar{R}_2)] / [0,893 \times \sqrt{(N_1 - 3)^{-1} + (N_2 - 3)^{-1}}], \quad (8.14)$$

в которой функция $g(\bar{R}_i)$ определяется следующим образом:

$$g(\bar{R}_i) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$x = (\bar{R}_i - 1,089) / 0,258$$

Критические значения z определяются так же, как указано выше.

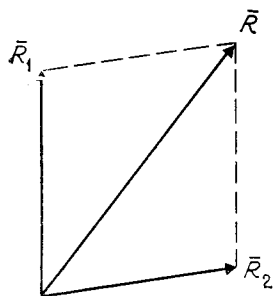


Рис. 8.3. Правило параллелограмма для сложения векторов: $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$.

Наконец, когда $\bar{R}$ больше 0,70, статистика критерия F задается формулой

$$F_{N_1-1, N_2-1} = N_1 \times (1 - \bar{R}_1) \times (N_2 - 1) / [N_2 \times (1 - \bar{R}_2) \times (N_1 - 1)], \quad (8.15)$$

где F_{v_1, v_2} — дисперсионное отношение Фишера (критические значения его даны в табл. 8.7). При вычислении статистики F индекс 1 должен быть присвоен выборке меньшего объема.

Если нулевая гипотеза об извлечении выборок из генеральных совокупностей с равными концентрациями не отвергается, можно перейти к проверке равенства средних направлений. Статистика критерия t вычисляется по формуле

$$t^2 = [1 + 3/(8\bar{k})] \times (N - 2) \times (N_1 \times \bar{R}_1 + N_2 \times \bar{R}_2 - N \times \bar{R}) / (N - N_1 \times \bar{R}_1 - N_2 \times \bar{R}_2), \quad (8.16)$$

где $\bar{k}$ — параметр концентрации объединенной выборки. Критические значения t приведены в табл. 5.5 при $v = N - 2$.

Пример. Замеры ориентировок в выборке из 36 стеблей ископаемых растений и в выборке из 100 раковин гониатитов из одного слоя приведены в табл. 8.6 и изображены на рис. 8.4. Обе выборки состоят из замеров типа «осей», поэтому на рис. 8.4 они приведены в соответствие по модулю 180° (т. е. один полный оборот на диаграмме соответствует 180°). Мы можем сравнить эти выборки, используя вышеприведенные критерии.

Во-первых, на диаграмме умеренно проявляется одномодальность и нет заметных разрывов плотности замеров; поэтому пред-

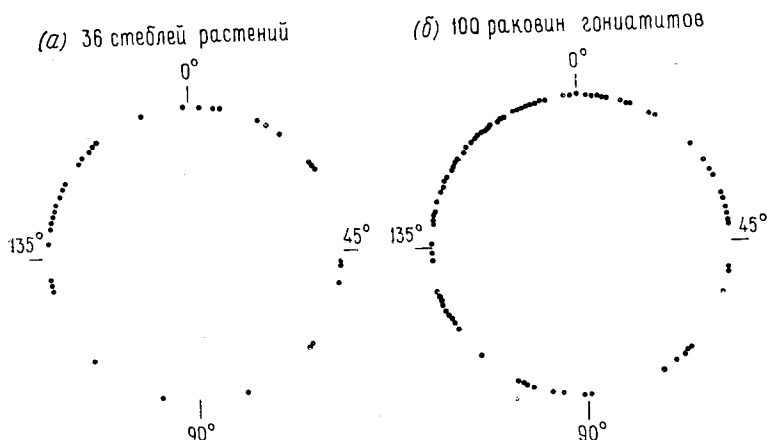


Рис. 8.4. Две круговые диаграммы, изображающие ориентировки, преобразованные по модулю 180° .

Таблица 8.6. Ориентировки (по модулю 180°) стеблей растений и раковин гониатитов в одном слое (данные любезно предоставлены д-ром У. Б. Хелтон-столлом)

Стебли растений, $N = 36$		Гониатиты, $N = 100$			
002	144	002	068	141	162
004	145	004	071	142	164
005	152	004	074	142	164
014	154	005	088	144	165
016	155	006	090	146	165
019	155	009	094	147	165
028	156	011	096	148	167
028	158	011	101	149	168
028	159	015	101	151	168
048	159	016	102	152	168
048	171	025	103	152	169
051	179	029	112	152	169
064		031	119	153	169
064		032	120	155	170
080		037	121	156	170
097		037	122	157	171
113		039	123	158	171
130		040	124	158	171
130		042	125	160	173
131		042	126	160	173
138		050	127	160	173
142		051	133	161	174
142		055	134	161	178
143		068	136	162	179
		068	141	162	179

положение, что обе выборки извлечены из генеральной совокупности с распределением фон Мизеса, представляется уместным. Удваивая углы в табл. 8.6 и применяя формулы (8.6а), (8.6б) и (8.7), получаем

$$\overline{R}_p = 0,362,$$

$$\overline{R}_r = 0,419,$$

где индексы «р» и «г» обозначают соответственно растения и гониатиты.

Используя критерий равномерности Рэля и данные табл. 8.5, находим, что критические области размером 0,01 содержат зна-

чения $\bar{R}$ для растений, равные 0,358 или больше, а для гониатитов — равные 0,215 или больше. Следовательно, можно отвергнуть нулевую гипотезу об извлечении обеих выборок из генеральных совокупностей с равномерным распределением и приступить к анализу концентраций и средних направлений. Приближенные значения концентраций, вычисленные по формуле (8.9а), равны

$$\bar{k}_p = 0,78,$$

$$\bar{k}_r = 0,92.$$

Следовательно, ориентировки раковин гониатитов имеют, по-видимому, более высокое значение концентрации (лучше выраженную «предпочтительную ориентировку»), чем ориентировки стеблей растений. Чтобы проверить это, необходима прежде всего средняя результирующая длина, вычисляемая по формулам (8.11а), (8.11б) и (8.12):

$$\bar{R} = 0,404.$$

Таблица 8.7. Критические значения дисперсионного отношения Фишера F_{ν_1, ν_2} (ν_1 и ν_2 — «степени свободы»). Формулы должны быть составлены с учетом того, что ν_1 — минимальное из двух чисел степеней свободы. Критические области содержат значения F , большие чем критическое значение. Верхняя строчка: $\alpha = 0,05$, нижняя: $\alpha = 0,01$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	2	4	8	16	32	64	128
2	19,0 99,2	6,95 18,1	4,46 8,65	3,63 6,24	3,30 5,34	3,14 4,95	3,07 4,78
4	19,3 99,4	6,39 16,0	3,84 7,01	3,01 4,77	2,67 3,97	2,52 3,62	2,44 3,47
8	19,4 99,5	6,04 14,8	3,44 6,03	2,59 3,89	2,24 3,13	2,09 2,80	2,01 2,65
16	19,4 99,6	5,84 14,2	3,20 5,48	2,33 3,37	1,97 2,62	1,80 2,29	1,72 2,14
32	19,5 99,6	5,74 13,9	3,07 5,18	2,18 3,08	1,80 2,32	1,62 1,98	1,53 1,83
64	19,5 99,6	5,68 13,7	3,00 5,01	2,10 2,93	1,71 2,15	1,51 1,80	1,41 1,63
128	19,5 99,6	5,66 13,6	2,96 4,93	2,06 2,84	1,65 2,06	1,45 1,70	1,34 1,51

Так как она меньше 0,45, статистика критерия z вычисляется по формуле (8.13):

$$z = -0,450.$$

Помня, что альтернативная гипотеза характеризуется «направлением» ($\bar{k}_r$ больше, чем $\bar{k}_p$), находим в табл. 5.3 для критической области размером 0,05 критическое значение z , равное $-1,64$. Следовательно, принимаем нулевую гипотезу о равенстве двух параметров концентраций.

Наконец, мы должны проверить равенство средних направлений ориентировок гониатитов и стеблей растений, вычисленные значения которых оказались соответственно равными 165 и 162° (вычисления проводились по формуле (8.8), при этом получающиеся углы делились на 2, так как исходные замеры были преобразованы по модулю 180°). Статистика критерия t определяется формулой (8.16) (для вычисленного по формуле (8.9а) значения $\bar{k}$, равного 0,88):

$$t = 0$$

(в выражении, стоящем в последних скобках числителя формулы (8.16), использовано его приближенное значение). Таким образом, принимаем нулевую гипотезу о равенстве средних направлений.

Ориентировки в трехмерном пространстве

Каждому из нас в начале самостоятельной работы вручается компас с угломером и в лучшем случае краткие инструкции по его использованию. Изредка намекают на качество и количество данных, которые следует собрать с его помощью. Следствием этого являются исследования, в которых объем выборок колеблется от дюжины до 10 тыс. и более наблюдений, причем многим представляется неудачным, если «статистический» подход соответствует объемам, превышающим последнюю цифру. Ориентировки в трехмерном пространстве часто и естественно появляются во многих геологических исследованиях; поэтому в данной главе рассматривается набор методик (хотя и не исчерпывающий), в которых могут применяться статистические выводы. К сожалению, среди них отсутствуют непараметрические методы; поэтому математика может стать мучительной для исследователя.

Ориентировки могут быть как «направлениями», так и «осями», что показано в разд. 1.2.2. Наглядный способ графического изображения ориентировок в трехмерном пространстве — это стереографическая или какая-либо подобная ей проекция, на которой точки соответствуют линиям в пространстве или нормальям к плоскостям. Такое представление исходных данных, так же как и круговая диаграмма, — наиболее удобный и объективный способ их изображения. Для повышения наглядности таких диаграмм было предложено множество способов проведения линий равной плотности точек, но только один из них приводит к методике проверки статистических гипотез, поэтому я сосредоточусь лишь на нем. Но сначала приведу несколько замечаний об ориентировках на сфере и их распределениях.

9.1. Ориентировки на сфере и их распределения

Ориентировки типа «направлений», в которых важен «знак», появляются в геологии при палеомагнитных исследованиях, изучении седиментационных палеопотоков и др. Геологическими примерами ориентировок типа «осей», для которых «знак» безразличен, могут служить линейность в метаморфических поро-

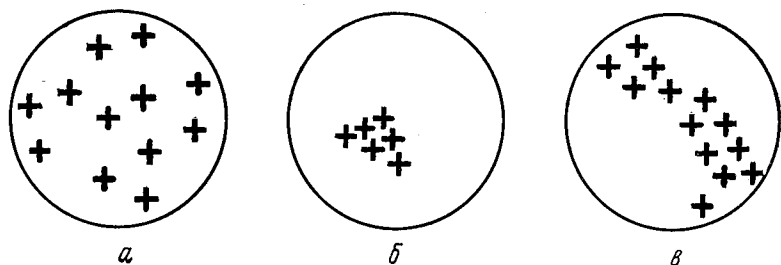


Рис. 9.1. Наглядное представление трех типов ориентировок на сфере, изображаемых на сферических диаграммах. *а* — равномерный: точки имеют тенденцию к равномерному распределению на равноплощадной проекции; *б* — полюсной: точки стремятся сгруппироваться вокруг общей оси (полюса); *в* — поясной: точки стремятся образовать пояс вдоль большого круга.

дах, нормали к плоскостям напластования или рассланцевания и т. п. Применение преобразования по модулю к ориентировкам, распределенным на окружности, приводит к тому, что различие между «осями» и «направлениями» исчезает, но для ориентировок, распределенных на сфере, соответствующей операции не существует. При построении проекций как «направленных», так и «косевых» ориентировок, распределенных на сфере, распознаются три не очень четких и взаимно перекрывающихся типа распределений (рис. 9.1).

Нас интересуют статистические ответы на следующие вопросы: отличается ли значимо конкретное распределение от равномерного и, если отличается, к какому типу распределений оно ближе — к «полюсному» или «поясному»? Для распределений «полюсного» и «поясного» типов нужно определить оси симметрии вращения и соответствующие меры параметра «концентрации» (или предпочтительной ориентировки). Для отдельных выборок желательно знать доверительные области для осей симметрии (т. е. области на стереопроекции, в которые «истинная» ось симметрии попадает с заданной вероятностью). Наконец, для двух выборок надо ответить на уже обычный для нас вопрос: представляют ли обе выборки одну и ту же генеральную совокупность?

9.2. Линии равной плотности точек

Кэмб [9] предложил способ, с помощью которого изолинии плотности можно провести так, что они покажут сгущения точек, значительно отличающиеся от равномерного распределения. На рис. 9.2, *а* изображена равноплощадная проекция, содержащая малый «подсчетный круг», площадь которого составляет долю

H площади проекции, причем H может принимать любое значение от 0 до 1. Если проекция содержит всего N точек наблюдения и предполагается, что они извлечены из генеральной совокупности с равномерным распределением, то можно ожидать, что внутри подсчетного круга окажется $(H \times N)$ точек, а вне его $(1 - H) \times N$ точек. Если R — наблюдаемое число точек внутри подсчетного круга и если оно значительно больше ожидаемого числа $H \times N$, то нулевая гипотеза о равномерности распределения отвергается и принимается альтернативная гипотеза, согласно которой множество точек содержит одну или более значимых группировок. Выборочное распределение R является биномиальным, и поэтому вероятности различных значений R могут быть вычислены по формуле (2.1). Если $H = 1/N$, то для $N > 10$ значения R , равные или большие 4 (либо равные или большие 5), встречаются с вероятностью 0,01 или меньше (либо 0,001 или меньше соответственно) при условии справедливости нулевой гипотезы независимо от объема выборки. Применение критерия на практике можно представить в следующем виде:

1) Замеры ориентировок наносим на равноплощадную проекцию.

2) Измеряем радиус r большого круга проекции и вычисляем радиус $r/\sqrt{N}$ «подсчетного круга» (т. е. его площадь становится равной $1/N$ площади большого круга).

3) Для поиска таких сгущений, в которых четыре, пять или более точек (в зависимости от выбранного размера критической области) попадают внутрь подсчетного круга, либо вокруг каждой точки наблюдения строится круг указанного радиуса, либо с помощью подсчетного круга просматривается вся площадь проекции. Применение обоих способов на краях проекции облегчается использованием двух подсчетных кругов, нарисованных на кальке (рис. 9.2, б) так, что расстояние между их центрами равно $2r$. Прямая, соединяющая центры подсчетных кругов, совмещается с диаметром большого круга, а плотность точек измеряется подсчетом и суммированием точек внутри обоих кругов.

4) Проводим линии, отделяющие области с плотностью четыре, пять или более точек на подсчетный круг от областей, в которых плотность точек меньше четырех или пяти.

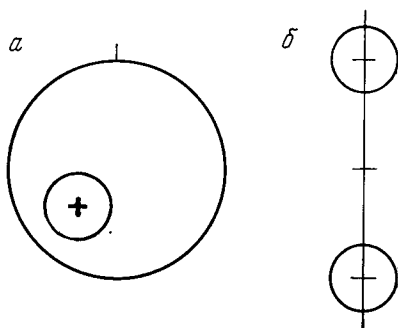


Рис. 9.2. «Подсчетные круги» для измерения плотности точек. Объяснение см. в тексте.

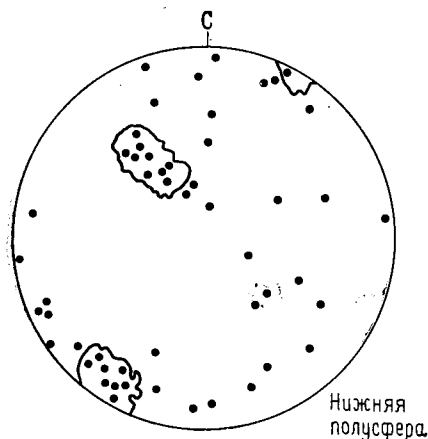


Рис. 9.3. Массив Эдинбург—Касл-Рок или, вернее, равноплощадная проекция нижней полусферы с ориентированными вниз нормальными к 50 плоскостям трещин на южном склоне массива. Контуры неправильной формы ограничивают области, в которых плотность точек значительно отличается от плотности равномерного распределения.

5) Для участков с высокой плотностью точек отвергаем нулевую гипотезу о равномерной плотности точек для критических областей с размерами 0,01, или 0,001, или меньше.

Пример диаграммы, построенной таким способом, приведен на рис. 9.3, изображающем на равноплощадной проекции нижней полусферы ориентировки направленных вниз нормалей к 50 трещинам на южном склоне массива Эдинбург—Касл-Рок. Здесь имеют место два сгущения точек, в которых плотность значительно превышает плотность равномерного распределения. Строго говоря, «подсчетный круг», используемый в этой методике, должен иметь форму эллипса постоянной площади, но с эксцентриситетом, меняющимся в зависимости от его положения на проекции. Однако такие ограничения в практической работе выглядят как проявление педантизма¹.

9.3. Численное представление ориентировок, распределенных на сфере

Для описания структур ориентировок, отклоняющихся от «равномерности» в сторону «полюсного» или «поясного» распределения, воспользуемся теоретическими распределениями Фишера или Бингхема — эти распределения введены ниже. Однако,

¹ Давно доказано, что плотности ориентировок в трехмерном пространстве могут быть подсчитаны без искажений только непосредственно на сфере, а не на ее проекциях на плоскость. При этом «подсчетный круг» всегда остается кругом. Такая процедура, однако, может быть выполнена только на ЭВМ. В упрощенном полевом варианте обработки ориентировок, описываемым Р. Ф. Чини, можно игнорировать изменение формы «подсчетного эллипса» при его перемещении по проекции. — *Прим. ред.*

прежде чем продолжать обработку ориентировок, получаемых по обычной методике в ходе геологических исследований, необходимо ввести иной способ их численного представления. Почти все ориентировки в трехмерном пространстве могут быть отнесены либо к **линейному**, либо к **плоскостному** типу, т. е. физические свойства, ориентировку которых мы хотим установить, геометрически можно изобразить в виде линий или плоскостей.

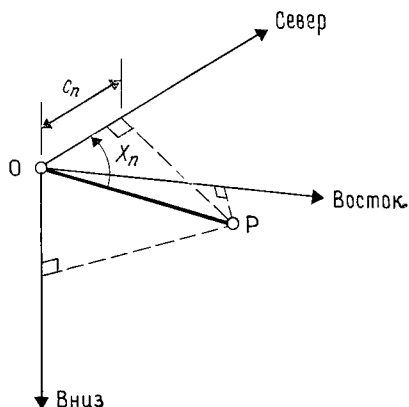


Рис. 9.4. Направление изображается отрезком OP . Для удобства вычисления это направление задается длинами ортогональных проекций отрезка OP на координатные оси, которые указывают на «север», на «восток» и «вниз». Эти длины называются направляющими косинусами. Объяснение см. в тексте.

Обычно ориентировку плоскости на сферической проекции удобно характеризовать ориентировкой нормали к ней. Далее для линейных элементов измеряется **угол наклона** (угол падения), принимающий положительные значения при отсчете от горизонтали вверх (отрицательные — при отсчете вниз), и **азимут** — угол, отсчитываемый по часовой стрелке от северного направления до проекции линии на горизонтальную плоскость. Ориентировки плоскостей обычно задаются «углом падения», отсчитываемым от горизонтали вниз до линии максимального наклона плоскости, и азимутом (или «направлением падения»), который измеряется по часовой стрелке от северного направления до проекции линии максимального наклона на горизонтальную плоскость. Однако такие численные представления ориентировок неудобны для непосредственной статистической обработки.

На рис. 9.4 показана система координат для соответствующего преобразования обычных геологических замеров ориентировок. Прежде всего нам нужны три взаимно перпендикулярные координатные оси, положительные направления которых указывают на «север», на «восток» и «вниз». Допустим, что в этой системе координат отрезок OP обозначает интересующее нас направление: один из линейных элементов или нормаль к одной из плоскостей. Пусть длина отрезка OP равна единице, т. е. он становится **единичным вектором**, и пусть из точки P опущены перпендикуляры на каждую из трех координат (т. е. проецируем отрезок OP на каждую из трех координатных осей). Если X_n ,

X_e и X_d — углы, образованные отрезком OP с координатными осями, которые указывают соответственно на «север», на «восток» и «вниз» (большинство из них на рис. 9.4 опущено для упрощения чертежа), то длины проекций вектора OP на координатные оси равны:¹

$$\begin{aligned}c_n &= \cos X_n, \\c_e &= \cos X_e, \\c_d &= \cos X_d.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Эти величины известны как **направляющие косинусы** и могут быть вычислены, как показано в табл. 9.1, по обычным геологическим замерам ориентировок.

Таблица 9.1. Формулы перехода от обычных геологических координат к направляющим косинусам. *inc* — угол наклона структурных элементов, называемый «погружением» в случае линейных элементов и «падением» в случае плоскостных. *az* — азимут, измеряемый по часовой стрелке от северного направления до направления погружения или падения

Линейные элементы	Нормали к плоскостям
$c_n = \cos (inc) \times \cos (az)$	$c_n = -\sin (inc) \times \cos (az)$
$c_e = \cos (inc) \times \sin (az)$	$c_e = -\sin (inc) \times \sin (az)$
$c_d = \sin (inc)$	$c_d = \cos (inc)$

Так как при подобных исследованиях высокая степень точности не требуется, сообразительный читатель догадается, что можно поступить иначе, построив на сферической проекции специальную сеть, состоящую из трех семейств малых окружностей с центрами в точках, соответствующих направлениям на «север», на «восток» и «вниз». Эти малые окружности можно проградировать не в угловых величинах, а в значениях косинусов углов, так что значения трех направляющих косинусов, соответствующих точке на проекции, можно считать непосредственно с проекции с точностью до трех значащих цифр.

¹ Подстрочные индексы *n*, *e* и *d* являются первыми буквами названий координатных осей North, East и Down (рис. 9.4). Примечание в общем-то касается только последней оси Down (вниз), введение которой означает, что все задачи в главе рассматриваются в проекции на нижнюю полусферу. Советский читатель должен помнить, что в отечественной литературе по структурной геологии в подавляющем большинстве случаев используются проекции на верхнюю полусферу. Это нужно иметь в виду при изучении иллюстраций к данной главе. Читатель поймет разницу между двумя проекциями, если мысленно построит по данным табл. 9.3 диаграммы рис. 9.5 по привычной, «домашней» методике. — *Прим. ред.*

9.4. Распределение Фишера

Направления, как противоположность осям, тяготеющие к полюсному типу распределения (рис. 9.1, б), полезно обрабатывать с помощью распределения Фишера на сфере. Это распределение можно рассматривать как сферический аналог распределения фон Мизеса на окружности. Его функция плотности вероятности, приводимая здесь ради полноты изложения, имеет следующий вид:

$$f(c) = k \times \exp(k \times c \cdot I) / [2 \times \sinh(k)], \quad (9.2)$$

где параметрами являются k — концентрация и I — единичный вектор, определяющий сферическое среднее направление; c — единичный вектор, извлеченный из генеральной совокупности случайным образом; $c \cdot I$ — скалярное произведение (см. работу [13] или любое другое пособие по элементарной векторной алгебре) и $\sinh(k)$ — функция гиперболического синуса от аргумента k .

9.4.1. Параметры и их оценка. Параметр концентрации, как и в распределении фон Мизеса, изменяется от нуля для равномерного распределения до плюс бесконечности для распределения, в котором все векторы ориентированы одинаково. Таким образом, он является параметром рассеяния и может служить мерой предпочтительной ориентировки. Единичный вектор I , определяющий среднее направление, может быть также представлен своими направляющими косинусами l_n , l_e и l_d , которые помогают определить его положение на сферической проекции. Если предполагается, что выборка извлечена из генеральной совокупности с распределением Фишера, то среднее направление и параметр концентрации можно оценивать следующим образом:

1) Определяем

$$\bar{c}_n = \Sigma (\cos X_n) / N = \Sigma (\bar{c}_n) / N. \quad (9.3)$$

По таким же формулам определяем $\bar{c}_e$ и $\bar{c}_d$, причем суммирование (Σ) осуществляем по всей выборке, т. е. вычисляем среднеарифметические направляющих косинусов, соответствующих направлениям на «север», на «восток» и «вниз».

2) Вычисляем среднюю результирующую длину $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{c}_n^2 + \bar{c}_e^2 + \bar{c}_d^2}. \quad (9.4)$$

3) Направляющие косинусы оцениваемого среднего направления определяются по формулам

$$\bar{l}_n = \bar{c}_n / \bar{R}, \quad \bar{l}_e = \bar{c}_e / \bar{R}, \quad \bar{l}_d = \bar{c}_d / \bar{R}, \quad (9.5)$$

откуда может быть найдено среднее направление.

4) Для оценки концентрации $\bar{k}$ вычисления обычно трудны, но если $\bar{k}$ больше 0,65, то можно удовлетвориться приближенной формулой

$$\bar{k} \approx 1/(1 - \bar{R}). \quad (9.6)$$

Пример. В табл. 9.2 представлены замеры ориентировок слоистости и кливажа в 15 южношотландских обнажениях, прослеживающихся на протяжении 1 км и сложенных граувакками силурийского возраста. Углы падения, превышающие 90°, означают, что слоистость или кливаж имеют «опрокинутое» залегание; ориентировка кливажа измеряется в направлении омоложения пересекаемых им пластов. На рис. 9.5 дается графическое представление замеров, причем точки соответствуют нормальям к плоскостям на проекции нижней полусферы.

Формула (9.3) дает следующие значения среднеарифметических направляющих косинусов для замеров ориентировки слоистости:

$$\bar{c}_n = -11,729/15 = -0,782,$$

$$\bar{c}_e = +7,211/15 = +0,481,$$

$$\bar{c}_d = -4,764/15 = -0,318.$$

Таблица 9.2. Замеры ориентировок слоистости и кливажа в разных пунктах Южной Шотландии

Номер пункта	Слоистость (угол падения/азимут)	Направляющие косинусы нормалей, направленных вниз по разрезу			Кливаж (угол падения/азимут)
		c_n	c_e	c_d	
1	119/335	-0,733	+0,370	-0,485	108/357
2	119/331	-0,765	+0,424	-0,485	109/341
3	105/343	-0,924	+0,282	-0,259	110/330
4	114/325	-0,748	+0,524	-0,407	105/334
5	87/321	-0,776	+0,628	+0,052	84/345
6	107/326	-0,793	+0,535	-0,292	107/341
7	102/322	-0,771	+0,602	-0,208	111/343
8	109/326	-0,784	+0,529	-0,326	104/339
9	118/331	-0,772	+0,428	-0,469	119/345
10	125/333	-0,730	+0,372	-0,574	119/347
11	122/327	-0,711	+0,462	-0,530	109/348
12	81/337	-0,909	+0,386	+0,156	80/341
13	110/313	-0,641	+0,687	-0,342	
14	100/332	-0,870	+0,462	-0,174	
15	115/325	-0,742	+0,520	-0,423	124/348
Сумма		-11,729	+7,211	-4,764	

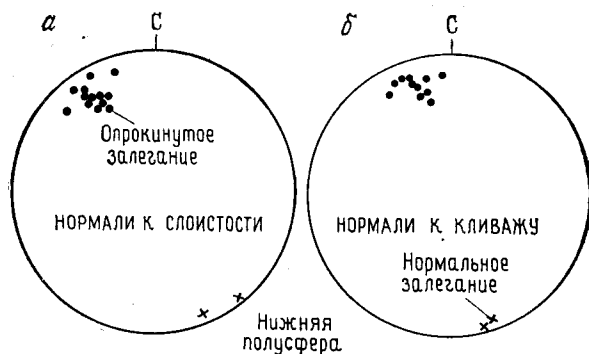


Рис. 9.5. Направленные вниз нормали к плоскостям слоистости (а) и кливажа (б) в южноотландской граувакковой формации силурийского возраста. Черные точки — нормали к слоям в опрокинутом залегании или к нижним поверхностям кливажа, крестики — нормали к слоям в нормальном залегании или к верхним поверхностям кливажа.

Средняя результирующая длина $\bar{R}$ равна корню квадратному из суммы квадратов этих трех чисел [формула (9.4)]:

$$\bar{R} = 0,971;$$

поэтому направляющие косинусы оцениваемого среднего направления вычисляются по формулам (9.5):

$$\bar{I}_n = -0,782/0,971 = -0,805 (143^\circ),$$

$$\bar{I}_e = +0,481/0,971 = +0,495 (60^\circ),$$

$$\bar{I}_d = -0,318/0,971 = -0,327 (109^\circ).$$

В скобках приводятся значения углов, соответствующие значениям направляющих косинусов. Эти углы могут быть использованы для определения положения оцениваемого среднего направления на сферической проекции путем построения малых окружностей с радиусами, равными соответственно 143° , 60° и 109° , вокруг точек, соответствующих направлениям на «север», на «восток» и «вниз» (рис. 9.6). Другой путь — преобразование уравнений в табл. 9.1 и их решение, что дает:

$$(dip) \text{ угол падения} = \arccos(\bar{I}_d) = 109^\circ,$$

$$\text{азимут падения} = \arccos[\bar{I}_n / -\sin(dip)] = 33^\circ \text{ или } 327^\circ,$$

$$= \arcsin[\bar{I}_e / -\sin(dip)] = 213^\circ \text{ или } 327^\circ$$

(помните, что обратные тригонометрические функции неоднозначны). Таким образом, среднее направление слоистости имеет угол падения 109° по азимуту 327° . Наконец, по формуле (9.6) оценивается концентрация: $\bar{k}=35$.

Аналогичные вычисления для замеров кливажа дают следующие значения: $\bar{R}=0,972$, среднее направление падает под углом 107° по азимуту 343° и концентрация $\bar{k}=36$.

9.4.2. Доверительные интервалы и доверительные конусы. Оценив эти параметры, полезно было бы указать для них доверительные интервалы. Здесь, как и в случае с распределением фон Мизеса, трудно вычислять доверительные интервалы для параметра концентрации, к тому же они имеют вспомогательное прикладное значение. Однако легко вычисляется **доверительный конус** для среднего направления, и это особенно полезно, например, при палеомагнитных исследованиях, а также в исследованиях, рассмотренных выше. Поскольку распределение Фишера имеет круговую симметрию относительно среднего направления, то и доверительный интервал для этого направления имеет круговую симметрию и геометрически может быть представлен в виде кругового конуса, соосного со средним направлением. На сферической проекции доверительный конус выглядит как малая

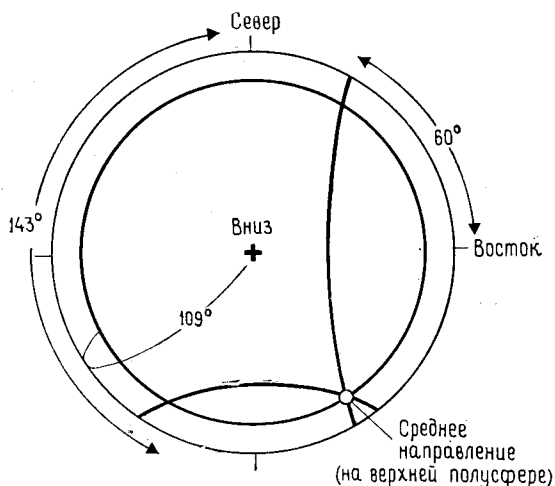


Рис. 9.6. Построения на проекции, необходимые для определения положения среднего направления слоистости по данным, приведенным в табл. 9.2. Вокруг центров, указывающих направление на «север», на «восток» и «вниз», строятся малые окружности, радиусы которых соответственно равны 143, 60 и 109° . Их пересечение дает искомое среднее направление. Обратите внимание, что угол, противоположный оси, указывающий «вниз», превышает 90° , поэтому получающееся среднее направление оказывается в верхней полусфере.

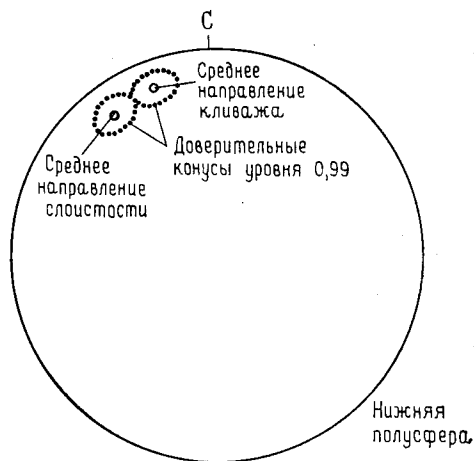


Рис. 9.7. Доверительные конусы уровня 0,99, построенные на равноплощадной проекции для данных, приведенных в табл. 9.2. Подробнее о методе построения см. в тексте.

окружность со средним направлением в качестве центра (рис. 9.7). Если произведение $N \times R \times k > 3$, то половина угла при вершине конуса определяется по формуле

$$d = \arccos \left[1 + \ln a / (N \times \bar{R} \times \bar{k}) \right], \quad (9.7)$$

где $a=0,01$ для доверительного уровня 0,99 и $a=0,05$ для доверительного уровня 0,95. Вычисляя по этой формуле, соблюдайте приоритеты арифметических действий (см. замечание в начале книги).

Для выборок, приведенных в табл. 9.2, в обоих случаях половины углов при вершинах доверительных конусов уровня 0,99 равны $d=8^\circ$. Следовательно, вокруг оцениваемых средних направлений как вокруг центров можно построить малые окружности этого радиуса, как показано на рис. 9.7. Таким образом, вероятность обнаружить «истинные» средние направления внутри этих малых окружностей равна 0,99.

9.4.3. Критерии для двух выборок. Для выборок, извлеченных из генеральных совокупностей с распределением Фишера, можно построить критерии сравнения параметров концентрации и средних направлений в двух выборках, причем они во многом похожи на критерии, основанные на генеральных совокупностях с распределением фон Мизеса (разд. 8.3.2). Как и в случае с распределением на окружности, критерий проверки различия средних направлений предполагает равенство параметров концентрации; поэтому сначала следует выполнить проверку последнего. Как в критерии сравнения концентраций, так и в критерии сравнения средних направлений используется вычисление средней результирующей длины объединенных выборок, которое

выполняется точно таким же способом, как и для распределений на окружности, по формулам (8.11а), (8.11б) и (8.12). В рассматриваемом примере имеем:

Суммы направляющих косинусов:	c_n	c_e	c_d
Слоистость (15 замеров):	-11,729	+7,211	-4,764
Кливаж (13 замеров):	-11,553	+3,533	-3,704
Суммы (28 замеров):	-23,282	+10,744	-8,468
Среднеарифметические направляющих косинусов (т. е. суммы, деленные на 28):	-0,832	+0,384	-0,302

Поэтому средняя результирующая длина объединенной выборки равна

$$-\bar{R} = \sqrt{(-0,832)^2 + (+0,384)^2 + (-0,302)^2} = 0,965.$$

Критерии для двух выборок, как и в случае с распределениями на окружности, базируются на вычислениях по приближенным формулам [14, с. 263]; приводимые же ниже формулы для вычисления статистик критериев приемлемы, когда значения средней результирующей длины в объединенной выборке больше 0,65, в противном случае эти вычисления очень громоздки. Для того чтобы проверить равенство параметров концентрации, вычисляется статистика критерия F :

$$F_{v_1, v_2} = N_1 \times (1 - \bar{R}) \times (N_2 - 1) / [N_2 \times (1 - \bar{R}) \times (N_1 - 1)], \quad (9.8)$$

где выборка с индексом 1 меньшая из двух, а степени свободы v_1 и v_2 распределения Фишера равны: $v_1 = 2 \times (N_1 - 1)$ и $v_2 = 2 \times (N_2 - 1)$.

В нашем примере $N_1 = 13$, $N_2 = 15$, $\bar{R}_1 = 0,971$, $\bar{R}_2 = 0,972$ и $\bar{R} = 0,965$. Следовательно, распределение статистики F имеет $v_1 = 2 \times (N_1 - 1) = 24$ и $v_2 = 2 \times (N_2 - 1) = 28$ степеней свободы. Табл. 8.7 для критической области размером 0,01 дает приближенное критическое значение $F = 2,66$, а наблюдаемое значение статистики критерия, вычисленное по формуле (9.8), равно $F = 1,05$. Это число не попадает в критическую область; поэтому принимается нулевая гипотеза о равенстве параметров концентрации и утверждается, что выборки однородны.

Статистикой критерия сравнения средних направлений в двух выборках [14, с. 263] также является величина F , вычисляемая по формуле

$$F_{2, 2 \times N - 2} = (N - 1) \times (N_1 \times \bar{R}_1 + N_2 \times \bar{R}_2 - N \times \bar{R}) / (N - N \times \bar{R}), \quad (9.9)$$

где N — объем объединенной выборки.

В настоящем примере F имеет 2 и 54 степени свободы; поэтому критическое значение для критической области размером 0,01 приблизительно равно 5¹. Подстановка соответствующих значений в формулу (9.9) дает наблюдаемое значение статистики критерия $F=5,04$. Данная величина очень близка к нашему приближенному критическому значению. Мы совершенно уверены, что это значение лежит в критической области размером 0,05 (для нее критическое значение равно примерно 3,2), но следует все же обратиться к более полной таблице. Можно, однако, заметить, что точное значение $F_{2, \nu}$ определяется формулой

$$F_{2, \nu} = \nu/2 \times (a^{-2/\nu} - 1), \quad (9.10)$$

где a — выбранный размер критической области (заметим, что $a^{-1} = 1/a^1$).

Подставляя числовые значения в формулу (9.10), получаем точное критическое значение статистики критерия: $F=5,02$, что заставляет отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве средних направлений для критической области размером 0,01.

9.5. Распределение Бингхема

9.5.1. Введение. Распределение Бингхема [1] — это обычное распределение ориентировок осевого типа, и в соответствии со значениями параметров оно может служить количественной характеристикой любого из трех типов распределений, изображенных на рис. 9.1, или любого промежуточного типа, обладающего орторомбической симметрией (т. е. такого распределения, которое имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии). Следовательно, стереографическая проекция в изолиниях плотности может иметь вид, изображенный на рис. 9.8. Если представить себе, что такое распределение имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то они пересекаются по трем взаимно перпендикулярным осям. Если бы можно было установить положение этих трех **главных осей** и оценить плотность замеров ориентировок в этих направлениях, то у нас было бы потенциально очень полезное численное представление всего распределения. Заметим здесь, что последующее изложение может оказаться весьма трудным. Применение распределения Бингхема основывается на знании матричной алгебры, для это-

¹ Таблица критических значений F -статистики (табл. 8.7) дана в сильно сокращенном виде; поэтому при ее использовании нужно прибегать к линейной интерполяции, по которой значения получаются довольно грубыми. Полные таблицы можно найти во многих руководствах (например, см. [12, 25] или *Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики.* — М.: Наука, 1983); правда, формат этих справочников вряд ли подходит для использования их в полевых условиях. — *Прим. ред.*

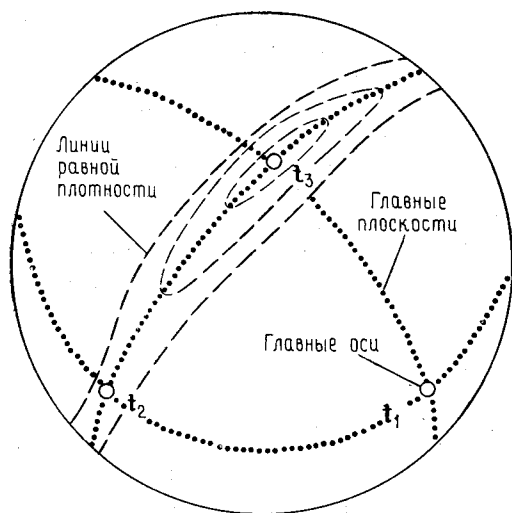


Рис. 9.8. Некоторые особенности симметрии распределения Бингхема, обсуждающиеся в тексте.

го в приложении А приводится краткий словарь терминов, можно также воспользоваться любым простейшим пособием, например книгой Холла [7].

Формально распределение Бингхема задается своей функцией плотности вероятностей, которая приводится снова только для сведения:

$$f(c) = [4 \times \pi \times d(K)]^{-1} \times \exp [K_1 \times (c \cdot t_1)^2 + K_2 \times (c \cdot t_2)^2 + K_3 \times (c \cdot t_3)^2], \quad (9.11)$$

где c — вектор, представляющий ось, случайным образом извлеченную из генеральной совокупности, а *параметры* генеральной совокупности определяются диагональной матрицей *концентраций* K (с диагональными элементами K_1 , K_2 и K_3) и тремя взаимно перпендикулярными *главными осями*, представленными векторами t_1 , t_2 и t_3 . (Толкование незнакомых терминов см. в приложении А.)

Любая выборка, извлекаемая из распределения Бингхема, может быть описана шестью числовыми характеристиками, вычисленными непосредственно по выборочным замерам ориентировок осей. Эти числа можно представить в виде симметрической матрицы T порядка $(3,3)$. С матрицей T связаны три собственных вектора, определяющих направления главных осей (t_1 , t_2 и t_3) исходной генеральной совокупности, а каждому из трех собственных векторов соответствует собственное число τ , пропорциональное плотности ориентировок в этом направлении. Три

Таблица 9.3. Классификация распределений Бингхема

Класс	Собственные числа τ
Равномерный	Все приблизительно равны друг другу
Полюсной (или биполярный)	τ_1 и τ_2 малы и приблизительно равны друг другу, τ_3 большое
Поясной	τ_1 мало, τ_2 и τ_3 большие и приблизительно равны друг другу

собственных числа — τ_1 , τ_2 и τ_3 — принято обозначать в порядке возрастания их величины. Эти числа можно использовать для вычисления матрицы параметров концентрации K , однако на практике необходимость в этом возникает нечасто; достаточно заметить, что относительные величины собственных чисел приблизительно такие же, как относительные величины соответствующих элементов матрицы K . Благодаря последнему свойству относительные величины собственных чисел используются для классификации распределений в соответствии с табл. 9.3.

9.5.2. Параметры и их оценка. Вычисление оценок параметров распределения Бингхема выполняется в такой же последовательности, как и вычисление оценок параметров распределения Фишера, но из-за большего числа арифметических операций трудоемкость вычисления возрастает почти в три раза. Выполнение этого вычисления «вручную» с помощью простейшего калькулятора не представляет больших трудностей, использование же программируемых калькуляторов значительно его ускоряет. В общих чертах: на первом этапе выполняются тригонометрические преобразования замеров ориентировок, для того чтобы получить матрицу T (ср. с формулами суммирования синусов и косинусов для распределения Фишера); на втором этапе вычисляются ориентировки главных осей (ср. с вычислением среднего направления); на третьем этапе находятся собственные векторы (ср. с вычислением средней результирующей длины), по которым при необходимости можно определить параметры концентрации. В методике, описываемой ниже, для удобства применения второй и третий этапы объединены, а ее использование иллюстрируется «живым» примером, построенным на распределении ориентировок направленных вниз нормалей к плоскостям напластования, показанных на рис. 9.9, в палеозойских породах вблизи Аймута (Берикшир), смятых в синклинальную складку. Этапы вычислений, описанные выше, в общих чертах можно проследить в табл. 9.4.

1) Вычисляем *направляющие косинусы* замеров ориентировок (разд. 9.3). Вместе с соответствующими углами они приводятся

Таблица 9.4. Вычисление собственных векторов и собственных чисел по выборке ориентировок осей

		X_n	cos	X_e	cos	X_d	cos	Про- верка	Примечания
Номер наблюдения на синклинали	1	19°	+946	106°	—276	80°	+174	1,001	(1)
	2	31	+857	121	—515	90	000	1,000	
	3	38	+788	124	—559	75	+259	1,001	
	4	26	+899	111	—358	74	+276	1,013	
	5	25	+906	86	+070	65	+423	1,005	
	6	32	+848	80	+174	60	+500	0,999	
	7	50	+643	58	+530	56	+559	1,006	
	8	70	+342	40	+766	57	+545	1,001	
	9	100	—174	23	+921	70	+342	0,995	
	10	97	—122	22	+927	69	+358	1,002	
	11	106	—276	27	+891	70	+342	0,987	
	12	111	—358	27	+891	75	+259	0,989	
									(2)
							$\bar{T} =$	+5,378 —1,616 +1,680	
								—1,616 +4,980 +1,721	
								+1,680 +1,721 +1,641	
									(3)
								—6,622 —1,616 +1,680	
							$\bar{T} - 121 =$	—1,616 —7,020 +1,721	
								+1,680 +1,721 —10,359	

Собственный век- тор, итерация	t_1	0	112°	-375	123°	-545	41°	+755	+4,632	+5,731	-9,389	(4)
		1	113	-388	119	-480	38	+787	+4,667	+5,351	-9,630	
		2	113	-390	117	-447	36	+805	+4,657	+5,154	-9,763	
		3	113	-388	115	-430	36	+814	+4,632	+5,047	-9,824	
	$t_1 =$	113	-387	115	-421	35	+820	-0,023	-0,060	-0,029		
	t_3	0	54	+588	54	+588	56	+599	+3,151	+2,940	+2,917	(5)
		1	53	+606	56	+565	56	+561	+3,289	+2,800	+2,911	
		2	51	+631	58	+537	56	+559	+3,465	+2,617	+2,902	
		3	48	+664	60	+501	56	+556	+3,695	+2,379	+2,890	
		4	45	+702	63	+452	57	+549	+3,967	+2,061	+2,858	
	$t_3 =$	42	+748	67	+388	57	+539					
	t_3	0	36	+809	126	-588	85	+087	+5,447	-4,086	+0,490	(6)
		1	37	+798	127	-598	86	+072	+5,379	-4,144	+0,430	
		2	38	+791	128	-609	86	+063	+5,344	-4,203	+0,384	
	$t_3 =$	38	+785	128	-617	87	+056	+5,313	-4,245	+0,349		
	$t_2 =$	61	+482	48	+665	55	+569	+2,473	+3,512	+2,888		

Примечания. (1) Формируем матрицу нормалей к слоистости. Вводим направляющие косинусы. (2) Формируем матрицу T . В качестве проверки суммируем диагональные элементы для всех 12 наблюдений. (3) Из матрицы T вычитаем матрицу $12I$. (4) Используя начальное приближение (итерация 0) для вектора t_1 , находим минимальное собственное число τ_1 . Выполняем операции с матрицей $T - 12I$. (5) Используя начальное приближение для вектора t_3 и выполняя операции с матрицей $\bar{T}$, находим максимальное собственное число τ_3 . Замечаем, что результаты последовательных итераций быстро расходятся. Повторяем все сначала, используя более хорошее начальное приближение. (6) Находим вектор t_2 как ортогональный к двум другим собственным векторам.

в верхней части таблицы. Для экономии места запятые, отделяющие целую часть числа от дробной, опущены, и дробная часть представлена только тремя первыми десятичными цифрами. Если вычисления выполнены правильно, то в каждом наблюдении сумма направляющих косинусов должна быть близкой к единице.

2) Формируем матрицу T . Если D — матрица направляющих косинусов, то T получаем умножением матрицы D слева на транспонированную к ней D' (приложение А); следовательно, $T = D' \times D$. Если вы впервые столкнулись с методами матричной алгебры, не пугайтесь: эти действия с матрицами состоят всего лишь в сложении квадратов и произведений косинусов. Частичной проверкой может служить суммирование диагональных элементов матрицы T ($+5,378 + 4,980 + 1,641 = 11,999$), которое должно дать число, близкое к 12 — объему выборки N .

3) Вычисляем матрицу $T - N \times I$. Объем выборки $N = 12$, а I — единичная матрица третьего порядка. Следовательно, из каждого диагонального элемента матрицы T вычитаем 12. По такой матрице удобно находить собственный вектор t_1 и соответствующее ему минимальное собственное число τ_1 .

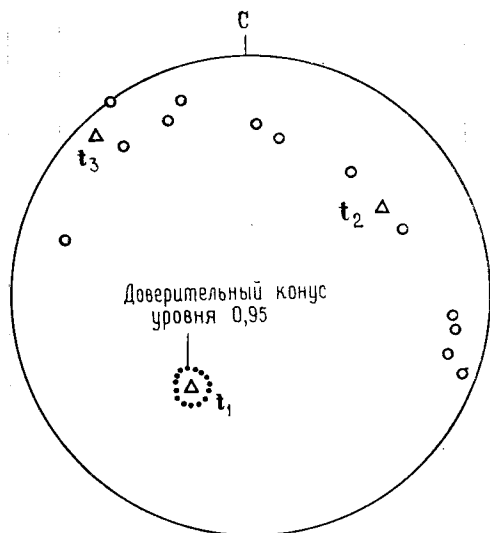


Рис. 9.9. Проекция на нижнюю полусферу ориентированных вниз нормалей (отмеченных светлыми кружками) к слоистости в силурийской граувакковой формации вблизи Аймута (Берикшир, Шотландия). Светлые треугольники отмечают главные оси распределения. Главная ось, соответствующая минимальному собственному числу τ_1 , обозначена символом t_1 и окружена доверительным конусом уровня 0,95. Эта ось представляет собой наилучшую оценку направления оси складчатости.

4) Для нахождения вектора t_1 начинаем с того, что выбираем для него начальное приближение. Подходящее приближение легко находится на сферической проекции замеров ориентировок определением «на глазок» положения полюса аппроксимирующего их большого круга. В этом примере использованы значения $X_n=112^\circ$, $X_e=123^\circ$ и $X_d=41^\circ$. В соответствии с методикой вычисления собственных чисел и собственных векторов, описанной в приложении А, четырех итераций оказалось достаточно, чтобы получить приближение вектора t_1 с удовлетворительной точностью.

5) Для того чтобы найти собственный вектор t_3 и соответствующее ему собственное число τ_3 , выполняем действия с самой матрицей T , начиная, как и выше, с того, что на проекции в месте, где плотность замеров кажется максимальной, выбираем начальное приближение для t_3 . В этом примере первое приближение оказалось неудачным, потому что последующие итерации дали сильное отклонение от него. Вновь выбранное начальное приближение оказалось более подходящим.

6) Для нахождения собственного вектора t_2 выносим на проекцию уже найденные собственные векторы t_1 и t_3 и находим направление, перпендикулярное каждому из них. Способ нахождения соответствующего собственного числа τ_2 описан в приложении А.

Собственные числа τ_1 , τ_2 и τ_3 , вычисленные в этом примере, равны соответственно 0,0705, 5,176 и 6,811. Для окончательной проверки можно использовать сумму собственных чисел, которая приблизительно должна равняться объему выборки N . Оценки собственных чисел и собственных векторов генеральной совокупности могут быть использованы в трех аспектах. Во-первых, сравнение полученных собственных чисел с указанными в табл. 9.3 подтверждает, что эта выборка, вероятно, извлечена из генеральной совокупности, имеющей поясное распределение. Во-вторых, можно собственные векторы нанести на проекцию (рис. 9.9) и, если надо, провести через векторы t_2 и t_3 аппроксимирующий большой круг. В-третьих, что наиболее полезно, вокруг вектора t_1 , являющегося полюсом аппроксимирующего большого круга, можно построить доверительный конус.

9.5.3. Доверительные конусы. В связи с тем что распределение Бингхема обычно имеет орторомбическую, а не круговую симметрию, сечения доверительных конусов эллиптические, а не круговые; следовательно, d — половина угла при вершине конуса — зависит от меридионального угла m (рис. 9.10). Для конуса вокруг главной оси t_1 половина угла при вершине определяется следующим образом:

$$\sin^2 d = \tau_1 \times (a^{-2/(N-2)} - 1) / (\tau_2 \times \cos^2 m + \tau_3 \times \sin^2 m - \tau_1), \quad (9.12)$$

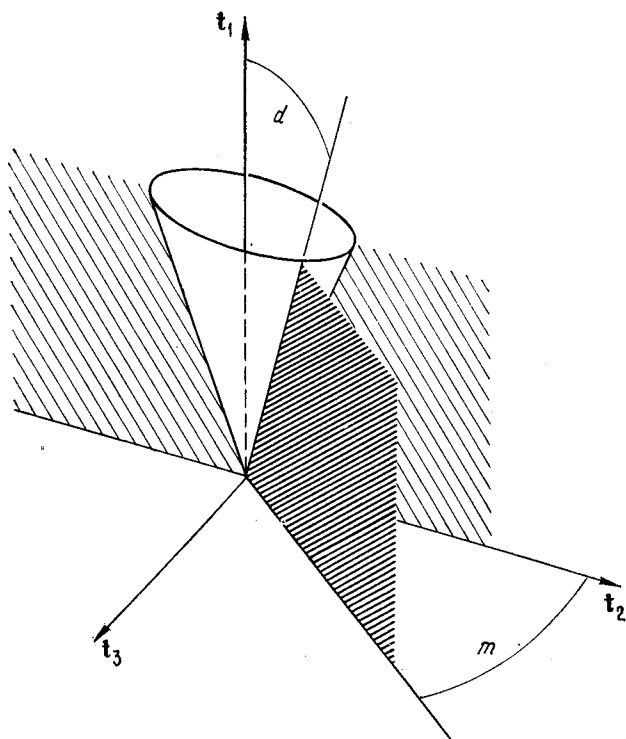


Рис. 9.10. Основа построения эллиптических доверительных конусов, получающихся при использовании распределения Бингхема. Редкая штриховка соответствует главной плоскости, содержащей оси t_1 и t_2 . Положение густозаштрихованной плоскости, проходящей через ось t_1 , определяется меридиональным углом m , измеряемым от оси t_2 до оси t_3 по часовой стрелке. В этой плоскости от оси t_1 измеряется угол d — половина угла при вершине конуса. Для доверительного конуса вокруг оси t_3 меняем местами оси t_1 и t_2 .

где $(1-a)$ — требуемый доверительный уровень. Следовательно, для удобных значений m можно вычислить значения d .

На рис. 9.10 показано, как углы d и m могут быть связаны с осями t_1 , t_2 и t_3 , которые служат системой координат для построения доверительных конусов на сферической проекции. В нашем примере построен доверительный конус уровня 0,95 (рис. 9.9). Так как значения t_2 и t_3 близки между собой, этот конус приближается к круговому, у которого половина угла d при вершине составляет около 6° .

Для распределений «полюсного» или «двухполюсного» типа, вероятно, более полезно построение доверительного конуса вокруг t_3 — главной оси, соответствующей максимальному собст-

венному числу n , следовательно, максимальной плотности ориентировок. Этот конус определяется формулой

$$\sin^2 d = -\tau_3 \times (a^{-2/(N-2)} - 1) / (\tau_1 \times \cos^2 m + \tau_2 \times \sin^2 m - \tau_3), \quad (9.13)$$

где $(1-a)$ — требуемый доверительный уровень. Теперь осью конуса является вектор t_3 , а угол m измеряется в направлении от вектора t_2 к вектору t_1 .

Вооружившись средствами вычисления доверительных конусов, легко построить критерии согласия одного выборочного распределения с теоретическими моделями. Как показано в работе [14], можно также построить критерии для двух выборок, что обеспечит возможность проверки множества гипотез, имеющих отношение к ориентировкам осей в трехмерном пространстве в тех случаях, когда нулевая гипотеза утверждает, что две выборки извлекаются из одной и той же исходной генеральной совокупности. Более трудными являются те примеры, в которых можно предположить, что две выборки извлекаются из генеральных совокупностей с распределениями Бингхема, имеющими явно различные характеристики, и для которых только требуется сравнить конкретные параметры. Я имею в виду такую задачу, в которой надо проверить, совпадает или нет ориентировка линейных структурных элементов, образующих одну выборку, с ориентировкой оси пояса, полученной по другой выборке, например проверить параллельность линейности и ориентировок главных шарниров складок. Это та область, в которой дальнейшие исследования были бы весьма полезны.

Гипотезы, выборки и решения

Предположим, что геолог, применяющий «на месте» статистические методы, делает это для того, чтобы дополнить ими другие средства и способы исследования, и что статистические методы не являются средством окончательного решения. Развитие многих научных исследований и повышение их достоверности до некоторой степени происходят циклически, при этом ранее высказанные идеи пересматриваются по мере поступления новых данных — так происходит с простейшими геологическими исследованиями, которые охватывают лишь малую часть геологии. Если одной из главных целей изучения является выработка объективного положения, то для того, чтобы проводимому ниже обсуждению методик сопутствовал успех, их следует разбить на циклически связанные этапы (рис. 10.1).

10.1. Возможные пути к объективности

На этапе 1 применения методики необходимо осознать область изучения и предварительно с ней ознакомиться (т. е. заинтересоваться этим исследованием). Таким образом, постановка задачи или разработка проекта исследований осуществляется по личной инициативе или в результате распоряжения руководящих органов, причем первые усилия направляются на сбор информации по литературным источникам, при личном общении, путем проведения опытных исследований и т. п. для предварительного описания. Это описание будет в дальнейшем стимулировать и определять возможные пути исследований, направляя их или воздействуя на них другими способами.

На этапе 2 необходимо навести порядок в появившихся ранее интуитивных догадках, т. е. превратить «блестящие идеи» в «надежные гипотезы». Здесь, вероятно, лучшим помощником будет соединение изобретательности с уже имеющимся (или приобретаемым) опытом. Для того чтобы интуицию исследователя поднять на уровень проверяемой статистической гипотезы, следует определить статистическую модель, а именно выделить и перечислить группу взаимосвязанных понятий, которые, как мы надеемся, позволят количественно описать часть или всю об-

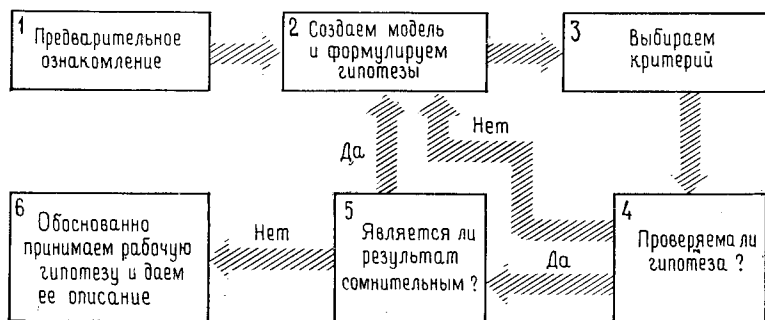


Рис. 10.1. Схема циклического подхода к решению статистических задач.

ласть изучения. Проще говоря, речь, вероятно, идет о том, чтобы указать типы и число переменных, которые можно измерить, и высказать некоторые утверждения относительно предполагаемых генеральных совокупностей. Например, изучение размера, формы и состава прибрежных галек могло бы основываться на трех переменных: длине, окатанности и типе пород. Следовало бы указать шкалу и способ измерения каждой переменной. Желательно было бы перечислить любые предположения, касающиеся распределения этих переменных в генеральных совокупностях. Следующей существенной составляющей статистической модели должно быть точное описание способа выбора наблюдений из генеральной совокупности; выбор наблюдений является столь важным моментом, что его более полное обсуждение я приведу в следующем разделе. Наконец, чтобы на этапе формирования статистической модели создать эффект обратной связи, что на рис. 10.1 показано петлей 2→3→4→2, ограничивается набор известных исследователю статистических критериев. Однако, как бы тщательно ни составлялась исходная модель, опыт, приобретенный на этапе выработки критериев, может привести к необходимости часто поверхностного, а иногда и существенного изменения модели. Многие модели, предложенные в начальной стадии, в дальнейшем становятся непригодными для тестирования; поэтому искусству моделирования и терпению исследователь больше всего учится в ходе ранних попыток приложения моделей.

Как только сделаны основополагающие предположения, выбор или создание соответствующего статистического критерия на этапе 3 не представляет трудностей. Обычно уже ясно, какой критерий необходим: для одной или для двух выборок, односторонний или двусторонний. Когда конкретная ситуация позволяет сделать выбор между параметрическими и непараметрическими

критериями, исследователь не должен забывать о том, что параметрические критерии обладают большей мощностью, но требуют при этом более строгих допущений, более точных шкал измерения и более точных выборочных планов, нежели применение эквивалентных им непараметрических критериев. Таким образом, выбирая *либо* быстро применимый непараметрический критерий, основанный на выборке малого объема, неточной шкале измерений и простом способе отбора наблюдений, *либо* более строгий и более трудоемкий параметрический критерий, исследователю хотелось бы знать, можно ли считать приводимые им работы «предварительными» или «окончательными». В связи с тем значением, которое может иметь экономия времени и затрачиваемых усилий, исследователь должен строго оценить трудоемкость отбора наблюдений и измерений относительно всех прочих целей исследования. Зачем измерять длину каждой из сотен галек с точностью до миллиметра, если достаточно упорядочить три дюжины галек по возрастанию их длины?

Лишь на этапе 4 исследователь по-настоящему старается «сделать» нечто практическое. На этапах 2 и 3 осуществляется планирование, и здесь возможны еще некоторые упущения. Каким бы опытным ни был исследователь, но на этапе 4 перед ним неизбежно возникнут проблемы. Когда для проверки предложенной им модели исследователь начинает применять выбранный критерий, то независимо от того, с простой или сложной ситуацией он сталкивается, легко могут обнаружиться недостатки в логическом построении модели или некоторая несовместимость ее с критерием. Этап 4 дает реальную возможность убедиться в том, что все в порядке, т. е. путем проверки показать, что в основу предложенного подхода положены здравые идеи, что этому подходу соответствует методика отбора наблюдений, что предполагаемый объем выборки достаточно велик или не очень велик и что шкалы измерений, которые требуется выполнить над элементами выборки, соответствуют требованиям, заложенным в критериях.

На практике может случиться так, что у геолога, опиравшегося на предварительное описание, которое было составлено на этапе 1, сложились конкретные представления и он выбрал методику проверки гипотез, формально или теоретически соответствующую его модели, лишь для того, чтобы обнаружить существование некой причины, по которой намеченный эксперимент не может быть выполнен. Например, может оказаться, что схема отбора наблюдений неприменима из-за трудностей в получении проб, или из-за того, что объем выборки, сформированной из отобранных наблюдений, недостаточен, или потому, что наблюдения не согласуются с теоретическим частотным распределением и т. п. Приступить к осуществлению методик отбора наб-

людений и измерений следует лишь в том случае, если вы уверены в их осуществимости. Причина отрицательных ответов на вопросы, возникающие на этапе 4, обычно состоит в том, что нулевая и альтернативная гипотезы чересчур сложны, что шкалы измерений и объемы выборок не удовлетворяют требованиям критерия и что предположения относительно генеральных совокупностей, по существу, не приемлемы. Трудности, как правило, удастся устранить, если, вернувшись к этапу 2, заново определить статистическую модель, либо упростить гипотезы, либо сделать и то и другое.

Осуществив выборочный план и применив критерий, переходим к этапу 5. Здесь наиболее трудная задача возникает в том случае, если значение статистики критерия оказывается близким к критическому значению. Конечно, определение критической области на этапе 5 методики проверки гипотез (разд. 2.3.5) дает основания для простого ответа: наблюдаемое значение статистики критерия либо *попадает* в критическую область, либо *не попадает*, и, следовательно, нулевая гипотеза соответственно либо *отвергается*, либо *принимается*. Однако даже профессиональный статистик едва ли достигнет успеха в столь неопределенной ситуации, так как он выбирает сам точное положение границы критической области и собственная оценка риска ошибиться (см. обсуждение в разд. 2.4) служит ему единственным руководством. Следовательно, если он обеспокоен такого рода неопределенностью, его, вероятно, не удовлетворит результат применения методики проверки гипотез. Если бы это было случайностью, то в теории выход прост: нужно увеличить мощность критерия. Это достигается двумя способами. Первый из них состоит в увеличении объема выборки N , второй — в выборе критерия, более мощного по существу. Как показано в разд. 2.4, мощность данного критерия возрастает с увеличением объема выборки, при этом вероятность ошибок I и II рода уменьшается. Если увеличение объема выборки непрактично, можно обратиться к более мощному критерию. При этом, однако, возникают неудобства, связанные с тем, что такие критерии требуют более строгого выборочного плана и более точных шкал измерения. В любом случае следует вернуться к этапу 2 (рис. 10.1).

На этапе 6 исследователь получает удовлетворительный результат применения критерия. Принятие нулевой или альтернативной гипотезы при условии, что может быть вычислена вероятность совершения ошибки, является его удачей. Короче говоря, он может заданную вероятность связывать с истинностью заданной гипотезы. Сформулированные таким образом вероятность и гипотеза, а также итоги предварительного ознакомления и описание статистической модели, выборочного плана и ссылка на выбранный статистический критерий могут представлять реаль-

ное достижение, о котором исследователь может говорить вполне обоснованно и которое впоследствии может быть использовано при разработке окончательной интерпретации.

10.2. Проблема выбора: введение и поучительная история

Грубо говоря, все, что остается сделать, это добавить несколько комментариев к задачам выбора, хотя я и отложил эту наиболее емкую проблему на самый конец. Выборочный план является фундаментальной частью изучения независимо от того, с какой целью мы применяем статистические методы. Ранее приведенный пример (разд. 6.7) показал, что использование непродуманной методики выбора может привести к формированию непредставительной выборки и последующему искажению результатов применения статистических критериев. Такое искажение может быть полностью скрыто как от самого исследователя, так и от читателей его отчета. Это особенно верно, как указывалось, в отношении наиболее мощных параметрических статистических критериев. Во всех приложениях, особенно в использующих мощные критерии, весьма существенно, чтобы *выборка, насколько это возможно, была представительной*.

Начну все-таки с краткой поучительной истории, чтобы показать, как незаметно могут возникать проблемы выбора. Группа геологов в феврале 1976 г. (во время топливного кризиса) возвращалась из экскурсии к востоку от Эдинбурга. Желая увеличить свой вклад в решение топливной проблемы, они решили, несмотря на почти нулевую температуру и полную темноту, остановиться в районе Аберледи-Бей, чтобы собрать учебный материал. Полевая машина заехала на пляж, и два участника группы («СЦ» и «КРГ») отправились с мешками собирать гальки. Им было дано задание собрать «случайным образом» с участка пляжа, освещенного фарами автомобиля, приблизительно по сотне галек. Вернувшись в машину, они проклинали отвратительную погоду и говорили, что многие гальки накрепко вмерзли в грунт.

В лаборатории была измерена длина (т. е. максимальный размер) всех галек в каждой из двух выборок и результаты представлены в виде графиков интегральных функций распределения (рис. 10.2). На том основании, что мешок с гальками, собранными «КРГ», был значительно тяжелее мешка «СЦ», было сделано предположение о непредставительности выбора, а смещение кривой «КРГ» относительно кривой «СЦ» на рис. 10.2 могло свидетельствовать в пользу того, что гальки «КРГ» в среднем крупнее. Используя последнее предположение в качестве альтернативной гипотезы, применили односторонний критерий Колмогорова — Смирнова для двух выборок, что привело к

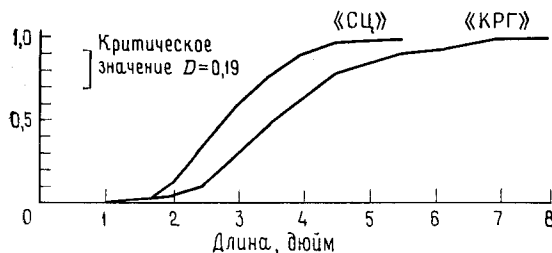


Рис. 10.2. Интегральные функции распределения длин галек, образующих две выборки, собранные с одного и того же участка пляжа. Обсуждение этих кривых см. в тексте. Длина вертикального отрезка соответствует критическому значению статистики D критерия Колмогорова — Смирнова для двух выборок.

отвержению нулевой гипотезы для критической области размером 0,01. Однако, несмотря на такой результат, восемь свидетелей видели, что оба коллектора опробовали в точности один и тот же участок пляжа. Напрашивался вывод, что простое устное указание «производить выбор случайным образом» воспринималось по-разному и что в процесс ручного выбора было внесено сильное искажение. Непредставительность выбора в этом случае частично может быть объяснена различием в телосложении коллекторов: «СЦ» — хрупкого сложения (рост 5 футов 4 дюйма); «КРГ» — крепкий мужчина (рост 6 футов 7 дюймов), и рука у «КРГ» соответственно сильнее.

Интересная особенность этих двух выборок состоит также в том, что, хотя они сильно смещены в отношении длины, каждую из них в отдельности можно сравнить с распределением Гаусса. После применения критерия хи-квадрат к такому явлению нулевая гипотеза может быть принята для критической области размером 0,01, так что оказалось, что обе выборки в отдельности удовлетворительно аппроксимируются распределением Гаусса. Следовательно, можно применить параметрические критерии, подобные t -критерию Стьюдента, для различия двух средних, что приводит к отвержению нулевой гипотезы о равенстве средних для критической области размером 0,001.

10.3. Проблема выбора: возможные решения

Статистики, занимающиеся практическими исследованиями, разработали множество схем выбора, причем некоторые из них отмечены большой изобретательностью; все они предназначены для конкретных целей. Геологи могут воспользоваться этими схемами, однако трудные условия сбора геологической информации и сложность выполнения геологических наблюдений могут выз-

вать определенные затруднения. Действительно, статистик, специализирующийся в более «домашних» областях науки, таких, как биометрия или социология, обычно испытывает меньше трудностей при выборе и увеличении объема выборки путем поиска дополнительных случаев или путем выращивания большого количества картофеля. Геолог, напротив, часто вынужден извлекать свои образцы из крепко сцементированной материнской породы и проводить наблюдения в трудных, иногда полных риска условиях, а выборки нередко оказываются как малого объема, так и недостаточно представительными. Лучшее, что может сделать геолог, это быть бдительным к возможным источникам пристрастности при выборе и стараться найти какой-либо способ уменьшения и даже полного исключения этого эффекта. Ситуации, в которых может происходить непредставительный выбор геологического материала, столь многочисленны в практической работе, что было бы неразумно перечислять их здесь: «передовую линию обороны» (против непредставительности выбора) образуют острая наблюдательность и сообразительность коллектора.

10.3.1 Цели формирования выборок. Выборка может быть извлечена из генеральной совокупности исключительно в целях описания, при этом над наблюдениями выполняются измерения, а их результаты без дальнейшей обработки изображаются в виде таблиц или графиков, поскольку они описывают и представляют исходную генеральную совокупность. Любое пристрастие, допущенное при выборе, приводит к искаженному представлению о генеральной совокупности.

Каждая генеральная совокупность может характеризоваться каким-либо параметром, отношением, пропорцией или какой-нибудь другой числовой характеристикой, значение которой оценивается по выборочным измерениям. Так как выборка, по которой делаются такие оценки, может быть малой частью генеральной совокупности, критический наблюдатель будет добиваться представительности выбора и с помощью задаваемого доверительного интервала предусмотрит некие рамки точности оцениваемого параметра, отношения и т. п. Большая часть теории выбора касается способов оценивания и их точности. Частично эта проблема рассмотрена под рубрикой «доверительные интервалы».

Наконец, много времени мы уделили методикам проверки гипотез. Эти методики базируются на выборках, и неправильное проведение выбора может привести к ошибочным решениям. Таким образом, цели выбора в общем могут быть как описательными, так и аналитическими.

10.3.2. Генеральные совокупности: изучаемая и опробуемая, бесконечная и конечная. Неотъемлемым начальным этапом вы-

борочного плана является определение (иногда строгое) тех свойств, которые должны быть обнаружены в наблюдении, чтобы включить его в интересующую нас генеральную совокупность. Сделать это нелегко, например в случае опробования «гранитов» на территории развития мигматитов, где присутствует множество переходных типов пород, часть которых в строгом смысле не являются «гранитами». В других ситуациях эту задачу можно решить непосредственно, например опробованием даек, внедрившихся в осадочные породы. Кроме того, геолог должен тщательно установить, вся ли определенная им генеральная совокупность фактически доступна для выбора. Кокрен [4] использует термины «изучаемая» и «опробуемая» генеральные совокупности, которые в идеальном случае совпадают. Однако на практике отнести их к тому или иному типу трудно и не всегда возможно. Например, формации пород могут залегать глубоко и даже перекрываться несогласно лежащими на них более молодыми осадочными отложениями. Такие формации технически доступны, например с помощью алмазного бурения, однако границы опробуемой генеральной совокупности будут определяться стоимостью буровых работ. Сходным же образом не доступны наблюдению те части формаций, которые ныне эродированы. Следовательно, в каждом случае необходимо тщательно рассмотреть степень перекрытия «изучаемой» и «опробуемой» совокупностей и оценить проблемы, возникающие в том случае, если это перекрытие мало.

До сих пор мы считали, что «генеральная совокупность» состоит из бесконечного множества наблюдений или индивидуумов. Однако такое представление не всегда обоснованно. Примером тому может служить совокупность пластов песчаника в каменноугольных породах Центральной Шотландии, где известно конечное число таких пластов. Следовательно, нужно различать «бесконечные» и «конечные» генеральные совокупности. На практике граница между ними устанавливается произвольно. Пока наша выборка составляет не более $\frac{1}{20}$ объема конечной генеральной совокупности, мы спокойно можем считать последнюю бесконечной.

Использование конкретных схем выбора в конкретных целях может повлечь за собой определенные трудности, но их рассмотрение выходит за рамки нашей книги. Вероятно, они будут интересны исследователям или геологам, имеющим узкоспециальное задание, и им будет полезно ознакомиться с работой Кокрена [4].

10.3.3. Основные принципы планирования схем выбора. Разработано много схем выбора, существенным элементом которых является чистая случайность при выборе индивидуумов или наблюдений. По таким схемам построены методики «вероятностного»

выбора в противоположность «невероятностным» методикам, таким, как ручной выбор или субъективный выбор «типичных» наблюдений. Последние два выбора не могут использоваться для получения хоть в какой-то мере объективных оценок генеральных совокупностей.

Определив общие цели исследования и четко указав границы генеральной совокупности, которую следует опробовать, принимаем решение об опорной сети, по которой наблюдения будут отбираться из генеральной совокупности. Во многих случаях наблюдения отбираются таким образом, чтобы они более или менее равномерно покрывали всю генеральную совокупность: образцы гранита будут покрывать обнажение гранитов с равномерной плотностью, образцы габбро из расслоенной серии следует отбирать так, чтобы они покрывали всю ее мощность с равномерной плотностью. Однако в других случаях наблюдения будут располагаться неравномерно по площади или по некоторому направлению даже при равномерном покрытии всей генеральной совокупности. Так будет, например, в том случае, когда интересующая нас переменная связана с расстоянием до границы обнажения, имеющего форму окружности, или со стратиграфической мощностью разреза, смятого в лежачие складки. Следовательно, нужно представлять себе, что в пределах генеральной совокупности с помощью «вех» или иным способом разбита опорная сеть. Формально эта операция состоит в расчленении генеральной совокупности на ряд взаимно исключающих единиц, площадей или приращений, физические размеры которых могут быть различными в разных частях генеральной совокупности. В иных случаях эта операция может заключаться в построении опорных осей, в направлении которых единицы измерения будут различаться. Приводимое ниже обсуждение некоторых примеров (разд. 10.3.4) проиллюстрирует те моменты, которые кажутся непонятными.

Последним и важным этапом является оценка требуемой степени точности (в описательных приложениях, где оцениваются параметры) или оценка размера критической области (в аналитическом приложении, где проверяются гипотезы). Здесь следует рассмотреть такие факторы, как шкала измерения интересующей нас переменной и общие затраты или реальная стоимость работ. Принятию подобных решений существенно помогает предшествующий опыт, который рекомендует либо применение «предварительного критерия», либо проведение «предварительного исследования» (до выполнения основного объема работ).

10.3.4. Некоторые специальные схемы выбора. Как уже отмечалось, существенным элементом многих методов является чистая случайность выбора наблюдений, однако указывалось также, что разработано множество подобных методик или схем.

Основная причина такого разнообразия заключается в необходимости достичь максимальной эффективности и точности в условиях ограничений по таким параметрам, как стоимость, время, трудовые затраты, доступная аппаратура, квалификация исполнителей, доступность наблюдений и т. п. В связи с этим исследователь может столкнуться с обескураживающим выбором. Однако, твердо помня, что цель рассматриваемых здесь методик состоит в том, чтобы их можно было применять непосредственно «на месте» и как можно меньше при этом заниматься софистикой, рассмотрим лишь небольшое число схем выбора.

Простой случайный выбор. Этот метод выбора соответствует большинству приложений, выполняемых «на месте», и почти всем приложениям, предназначенным для проверки гипотез. Его можно представить себе как присвоение собственного идентифицирующего номера каждому наблюдению в генеральной совокупности, а для формирования выборки требуемого объема генерируется набор равномерно распределенных случайных чисел (т. е. чисел, имеющих равные вероятности появления в пределах заданного интервала). Предположим, например, что мы хотим составить выборку из 30 галек, отобранных на пляже или в русле реки. Один из способов мог бы состоять в том, чтобы протянуть по прямой линии рулетку, допустим, на 36 ярдов (английским мерам длины отдано предпочтение перед метрическими в связи с тем, что такой отрезок легче разделить несколько раз на шесть частей). Чтобы сгенерировать случайные числа, можно воспользоваться таблицами, в избытке имеющимися в стандартных руководствах по статистике (например, в трехтомном руководстве [25] массой 1,25 кг или в монографии [16] массой 1,16 кг). Однако большинство моих предполагаемых читателей оказались бы практичными людьми, если бы имели при себе игральные кости (массой 20 г) для заполнения периодов «геологического безделья», характерных для любых полевых работ. Каждой грани кости можно сопоставить целое число в интервале 1—6 включительно, а бросая кость, будем получать случайным образом одно из этих чисел. Это случайное число может быть сопоставлено с одним из 6-ярдовых интервалов, на которые можно разделить нашу 36-ярдовую рулетку. Бросание второй кости укажет 1-ярдовый интервал в пределах заданного 6-ярдового интервала и т. д., деля каждый меньший интервал на шесть частей столько раз, сколько нужно. Галька, попадающая на этот интервал, включается в выборку. Таким образом, последовательность чисел 1, 3, 6, 4, полученная в результате бросания кости, укажет гальку, находящуюся на расстоянии 2 ядра 33 дюйма от начала рулетки. Простая случайная выборка объемом 30 наблюдений, полученная таким способом, показана на рис. 10.3.

Одна из проблем, которая может возникать время от времени, состоит в том, что одно и то же наблюдение отбирается больше одного раза. В связи с этим мы определяем выбор с возвращением и выбор *без* возвращения в зависимости от того, возвращаем ли мы на место уже отобранное наблюдение, перед тем как продолжить отбор. Может показаться излишним, чтобы одно и то же наблюдение было представлено в выборке более одного раза, но на то имеются веские статистические причины. На практике, пока выборка остается меньше $1/20$ конечной генеральной совокупности, различие представляет чисто академический интерес.

Расслоенный случайный выбор. У некоторых исследователей могут возникнуть трудности в связи с тем, что формирование выборки путем простого случайного выбора может приводит как к группировке наблюдений на части опробуемого материала и образованию пустот в других местах, так и к случайному дублированию наблюдений, если производится выбор с возвращением. Способ уменьшения этого явления состоит в делении генеральной совокупности на ряд взаимоисключающих «подсовокупностей» или «слоев» в пределах интересующего нас интервала и в применении простого случайного выбора поочередно к каждому слою. На рис. 10.3 показано, как в нашем гипотетическом примере с отбором прибрежных галек в пределах 36-ярдового интервала распределяются по пять наблюдений внутри каждого 6-ярдового слоя.

Часто, однако, есть более весома причина применения схемы случайного расслоенного выбора, а именно повышение точности оценки некоторых параметров генеральной совокупности. Графический пример строится на основе данных, использованных в рис. 9.9. Цель состояла в том, чтобы совместно оценить

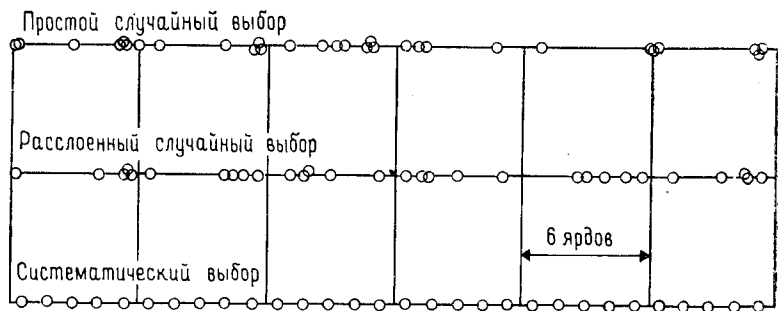


Рис. 10.3. 30 точек, отобранных на интервале длиной 36 ярдов по схеме простого случайного выбора, расслоенного случайного выбора (в которой каждый слой имеет длину 6 ярдов) и систематического выбора.

направление оси складки и его доверительный конус. Для этого выбор был спланирован так, чтобы получить приблизительно равномерное распределение точек вдоль пояса (на проекции), т. е. генеральная совокупность была расслоена в соответствии с ориентировкой. В результате получился доверительный конус, близкий к круговому, хотя изучаемая складка имеет протяженные, почти прямые крылья и узкий шарнир. Простой случайный выбор, примененный в такой структуре, дал бы отчетливое бимодальное распределение точек в пределах пояса, соответствующее крыльям складки, а доверительный конус для оценки осевого направления был бы эллиптическим. Подобные примеры, касающиеся оценок средних и других параметров, обсуждаются в работе [4].

Систематический выбор. Применение этого способа, так же как и применение расслоенного выбора, требует, чтобы генеральная совокупность была расслоена (разбита на слои), но слоев при этом должно быть столько, сколько наблюдений в выборке. Положение первого наблюдения, выбираемого из первого слоя, определяется случайным образом, а все последующие наблюдения отбираются из такого же места в соответствующих им слоях. Такое расположение наблюдений показано на рис. 10.3.

Систематический выбор привлекателен тем, что он сокращает трудовые затраты на осуществление отбора, но оценки, получающиеся на его основе, обычно характеризуются меньшей точностью по сравнению с другими способами.

Последовательный выбор. Главная задача, решаемая этим способом выбора, состоит в том, чтобы минимизировать объем выборки, согласующийся с поставленной целью, т. е. в достижении заданных уровней точности. Каждый раз объем выборки увеличивается на одно наблюдение, и после каждого добавления исследователь решает: принять ли нулевую гипотезу, альтернативную или продолжить выбор. Наблюдения могут отбираться по любой из вышеупомянутых схем. Этот выбор применим в множестве ситуаций [20].

Применение этой схемы в геологии перспективно при оценивании соотношений, которые будут использоваться в классификации, например при решении вопроса о том, больше или меньше 20% кварца от объема породы содержится в прозрачном шлифе и можно ли, следовательно, считать эту породу «гранитом» или «кварцевым сиенитом». В полевых условиях эту схему можно применить, например, для того, чтобы решить, достаточна ли концентрация рудного минерала для его промышленной разработки, указав при этом те соотношения, которые могут быть оценены способом «точечного подсчета». Схема проста в применении, если построить такую номограмму, которая изображена на рис. 10.4.

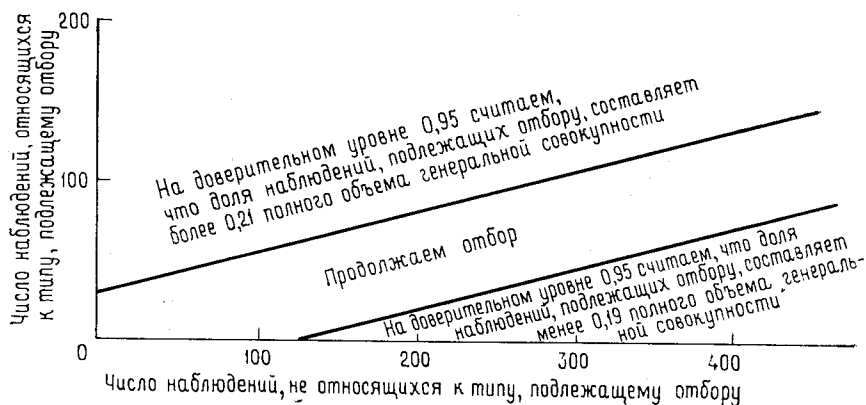


Рис. 10.4. Номограмма, позволяющая проверить, составляют ли отобранные наблюдения 20% генеральной совокупности. Прежде чем демонстрировать применение такой номограммы, исследователь должен признать, что невозможно определить, составляет ли доля отбираемых наблюдений больше или меньше *точно* 20% генеральной совокупности. На практике следует принять, что истинная доля, допустим, больше 21% или меньше 19%, или же продолжить выбор. Номограмма применяется следующим образом: начиная с нуля, исследователь проводит последовательность прямолинейных отрезков, параллельных осям (по одному для каждого отбираемого наблюдения). Если наблюдение относится к типу, который подлежит отбору (например, при подсчете по точкам попадает на «кварц»), то отрезок проводится вертикально вверх. Если наблюдение относится к типу, не подлежащему отбору (например, не попадает на «кварц»), то отрезок проводится горизонтально вправо. Как только «верхушка» ступенчатого графика, построенного таким образом, выходит из зоны продолжения отбора, может быть принята одна из двух гипотез. Из рисунка видно, что в общем виде номограмма состоит из областей, разделенных прямыми. Понятно, что на номограмме можно изобразить больше чем одну пару таких прямых и, следовательно, использовать ее в задаче многовариантной классификации.

Общее уравнение этих прямых имеет вид

$$y = \pm \frac{\log[(1-a)/a]}{\log(p_1/p_0)} + \left\{ \frac{p}{1-p} \right\} x,$$

где $1-a$ — доверительный интервал, p_1 и p_0 — соответственно верхняя и нижняя границы отношений, p — проверяемое отношение и x — горизонтальная координата, принимающая целочисленные значения.

10.3.5. Пример: проблемы формирования выборки в районе Сент-Болдред — Крейдл. Этот район ($2^{\circ}35'$ в. д., $56^{\circ}01'$ с. ш.) представляет собой невысокую возвышенность на волноприбойной платформе южного побережья Фёрт-оф-Форт, в юго-восточной Шотландии (рис. 10.5). Выход каменноугольных базальтовых порфиринов на поверхность, имеющий в плане форму, близкую к окружности диаметром 200 м, окружен нижнекаменноугольными осадочными породами, среди которых преобладают

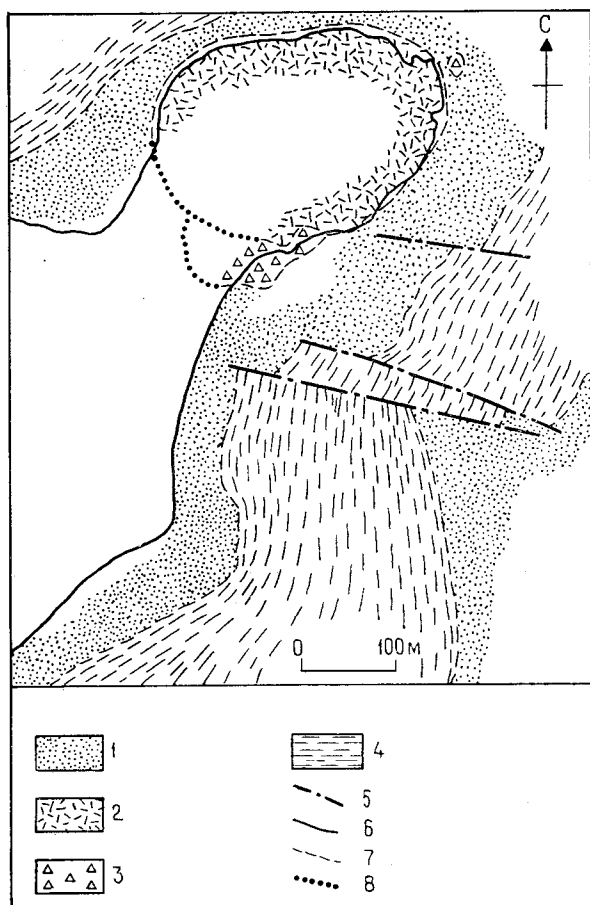


Рис. 10.5. Схематическая геологическая карта окрестностей Сент-Болдред—Крейдл (Ист-Лотиан, Шотландия). Незаштрихованные области не обнажены. 1 — формация маркирующих песчаников; 2 — базальтовые порфириды; 3 — агломераты; 4 — преимущественно аргиллитовые породы; 5 — разрывные нарушения; 6 — граница прилива; 7 — прослеженные геологические границы; 8 — предполагаемые геологические границы.

обломочные разности, имеющие пологие углы падения слоистости, за исключением области контакта с базальтовыми порфиридами, где слоистость концентрически падает к центру базальтового выхода под углами до 40° . По границам выхода базальтов местами развиты агломератовые породы. При детальном изучении этой территории возник ряд проблем, связанных с выбором наблюдений.

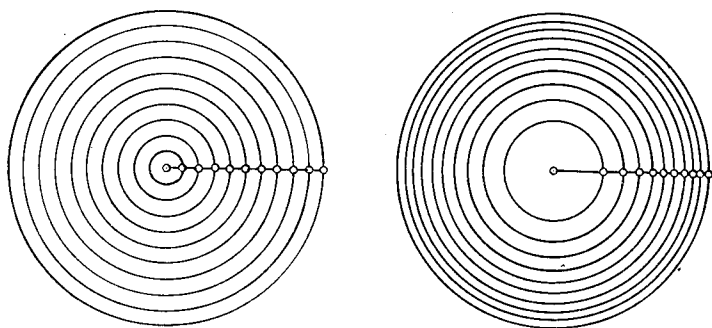


Рис. 10.6. Обнажение, имеющее форму окружности и разделенное на десять частей. Слева обнажение разделено окружностями, радиусы которых различаются на одну и ту же константу; справа окружности проводятся так, что площади образующихся колец одинаковы. Для того чтобы выборка, пересекающая обнажение по диаметру, была представительной для всей площади обнажения, пункты отбора наблюдений должны быть расположены по сети, изображенной на правом рисунке.

Во-первых, в тонкозернистой основной массе базальтов заключены компоненты, легко определяемые количественно в полевых условиях. Это миндалины и вкрапленники, представленные авгитом и оливином. Оливин частично замещен иддингситом. На основе субъективного визуального сравнения можно заключить, что соотношение составных частей базальтов, по-видимому, меняется от точки к точке в пределах их выхода. В рамках геологической модели, предполагающей, что соотношение вкрапленников различного состава и других компонентов зависит от расстояния до границы выхода базальтов, которые по крайней мере частично представляются интрузивными, схема выбора должна учитывать округлую форму обнажения. Если принять схему систематического выбора, то, как показано на рис. 10.6, сеть отбора наблюдений следует строить с осторожностью, чтобы центральные части выхода базальтов не были чрезмерно представлены в объеме выборки. Так, наблюдения, отбираемые вдоль диаметра, пересекающего выход базальтов, даже в случае систематического выбора будет располагаться не на равных интервалах друг от друга, что, как указано в разд. 10.3.3, свидетельствует о важности определения сети отбора. Если необходимо равномерно опробовать участки равной площади, то расстояния от центра обнажения до точек наблюдения должны быть распределены *неравномерно*. На рис. 10.7 показано, как такие расстояния можно получить случайным образом для схемы простого случайного выбора. Этот способ случайного выбора наблюдений из неравномерно распределенной совокупности является адапта-

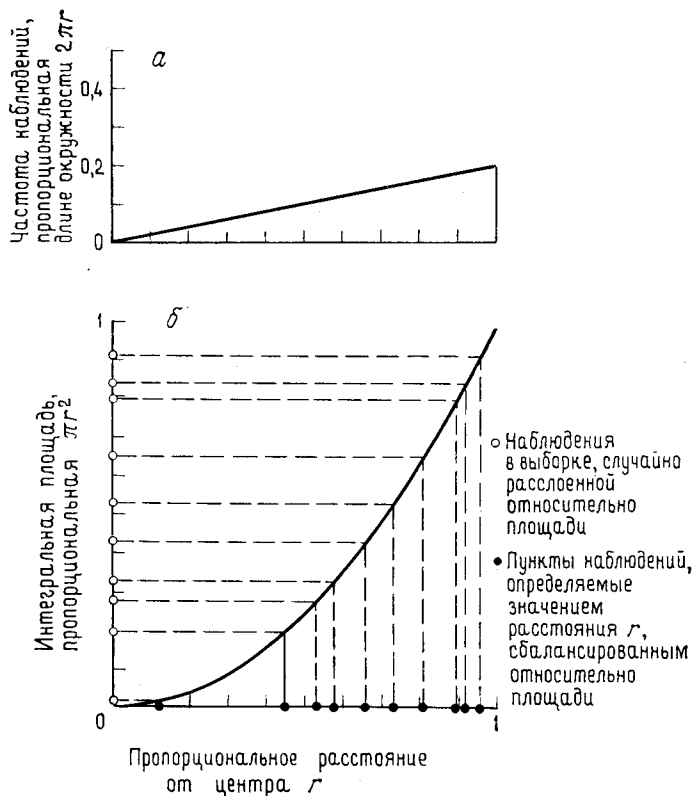


Рис. 10.7. Случайное генерирование расстояний от точек наблюдения до центра обнажения. *а* — частота наблюдений как функция их расстояний r от центра круглого по форме обнажения пропорциональна длине окружности $C=2\pi r$. Малым значениям r соответствуют небольшие числа наблюдений, потому что мала длина окружности, вдоль которой они расположены. Наибольшее число наблюдений для заданного r сосредоточено на границе обнажения; *б* — интегральное распределение площади обнажения A как функция от r , получаемое сложением значений вышеприведенной функции. Любое случайное значение части площади, получаемое из равномерного распределения, будет соответствовать значению r в неравномерном распределении. Следовательно, случайно отобранные точки (светлые кружки), равномерно распределенные по площади, могут быть расположены на местности в соответствии с их расстоянием от центра обнажения (черные точки).

цией способа, разработанного Мейером [16]. При необходимости подобным же способом можно получить набор чисел из генеральных совокупностей, имеющих распределение Гаусса или какое-нибудь другое.

Возвращаясь к базальтам, отметим, что с помощью способа «точечного подсчета» легко оцениваются объемные доли минда-

лин (или вкрапленников), принадлежащих двум фазам, и даются приближенные оценки доверительных интервалов. Если эти соотношения будут использоваться в какой-нибудь классификации (например, породы, в которых менее 5% олиновых вкрапленников замещено идингситом, классифицируются как «слабозмененные», а породы, содержащие более 5% таких вкрапленников, — как «среднеизмененные»), то возможно построение номограммы последовательного выбора.

Наконец, обнажения базальтов разбиты заметными трещинами. Создается впечатление, что эти трещины проявляются в виде серии субпараллельных разрывов, причем для каждого обнажения типично присутствие трех взаимно перпендикулярных серий таких трещин. Для того чтобы установить, что ориентировки этих систем трещин меняются от точки к точке, достаточно фрагментарных наблюдений, однако трудной проблемой является беспристрастный выбор наблюдений. Очевидно, «ручной выбор» поверхностей трещин для последующих замеров их ориентировок сопряжен с опасностью сильного искажения получающейся вероятностной выборки общей ориентировкой поверхностей обнажения, что ведет к образованию ложных предпочтительных ориентировок. Схему модифицированного систематического выбора можно применить следующим образом. Представим себе набор фиксированных взаимно перпендикулярных координатных осей, примыкающих к обнажению, причем каждая ось имеет единичную длину (допустим 1 м). Измеряем ориентировки только тех трещин, которые при продолжении пересекали бы координатные оси. Применение метровой линейки и фотографического штатива для ее укрепления делает этот способ удивительно эффективным при формировании выборок, совершенно не смещенных относительно ориентировки и плотности размещения поверхностей трещин в пространстве.

Материнские породы, к которым приурочены базальты, слагают мощный разрез, представленный в основном обломочными разностями осадочных пород. Две формации маркирующих песчаников разделены формацией, в которой преобладают аргиллиты. На рис. 10.8 показан фрагмент верхней части обнажающегося разреза. Ясно, что такие послойные описания разрезов давали бы ответ на любой статистически обоснованный вопрос, который можно было бы задать, но их построение является дорогостоящей и длительной операцией. Для решения конкретных вопросов почти всегда можно разработать схему выбора наблюдений. Вопросы, на которые необходимо ответить при изучении стратифицированных разрезов (независимо от того, сложены ли они осадочными, магматическими или метаморфическими породами), всегда будут включать в себя требование тщательной разработки схемы выбора наблюдений. Будут ли элементы этой

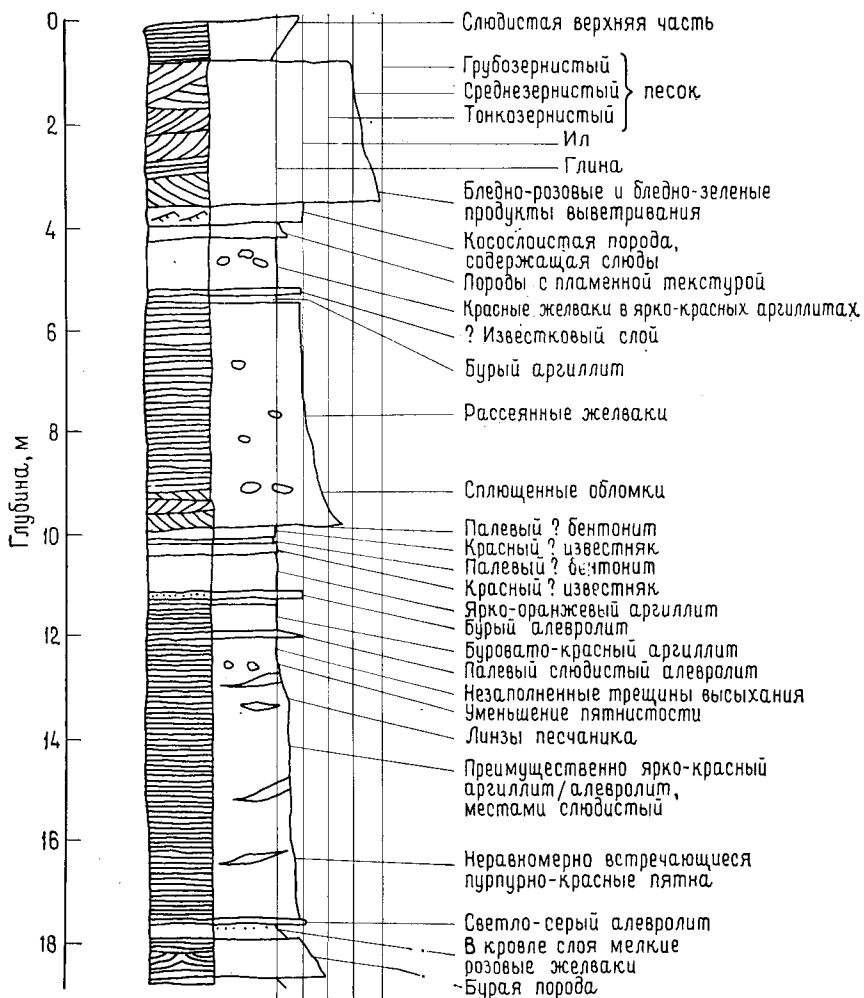


Рис. 10.8. Фрагменты небольшой части разреза осадочных пород в районе Сент-Болдред—Крейдл (Ист-Лотиан, Шотландия).

схемы представлены слоями (или пластами), либо стратиграфическим или структурным превышением над некоторым маркирующим горизонтом, либо некоторой группой фаций и т. п.? На разрезе, приведенном на рис. 10.8, отношение песчаников к аргиллитам должно быть различным в зависимости от того, являются ли элементами схемы выбора наблюдений «слои» или «стратиграфические мощности».

10.3.6. Заключительные замечания. При формировании выборок геологических данных трудности могут возникать даже при попытках ответить на простейшие вопросы. Разнообразие пород, минералов, ископаемых и структур столь велико, что давать какие-либо указания в отношении общего подхода было бы невыполнимой задачей. Интересное обсуждение этих вопросов и примеры конкретных схем приведены в работах [12, 10]. Однако, пока серьезному исследователю не повезет найти уже готовый метод, он вполне может обратиться к начальным понятиям, излагающимся в простых руководствах, таких, как книга Кокрена [4].

Приложение А

Словарь терминов по матричной и векторной алгебре

При пользовании этим словарем может возникнуть необходимость в многочисленных перекрестных ссылках. Более полное представление об интересующих вас терминах можно найти в работах [6, 7]. Последняя из них — отличный справочник, но во многих, более современных пособиях по статистике имеется информация на ту же тему.

Вектор. Физический параметр, величина которого связана с направлением, например скорость водного потока. **Компоненты вектора** — это его проекции на две или три координатные оси (в зависимости от того, является ли решаемая задача двумерной или трехмерной), что показано на рис. А.1. Компоненты вектора можно представить как **элементы матрицы-столбца** или, что более принято, — **матрицы-строки**. Вектор, длина которого равна 1, называется единичным вектором.

Сложение векторов состоит в присоединении начала одного вектора к концу другого без их вращения и в нахождении вектора, который соединяет начало первого вектора с концом последнего. Этот вектор называется результирующим, а его компоненты R_n и R_e являются суммами компонент векторов слагаемых I_1 и I_2 :

$$R_n = I_1 \times \cos X_{n1} + I_2 \times \cos X_{n2},$$

$$R_e = I_1 \times \cos X_{e1} + I_2 \times \cos X_{e2},$$

где X_{n1} — угол, образуемый вектором I_1 с осью, направленной на «север», и т. д.

Главная диагональ. Диагональ, состоящая из элементов матрицы (T_{11} , T_{22} , T_{33} , ...), первый из которых располагается в ее левом верхнем углу.

Диагональ. Ряд элементов матрицы, располагающихся от верхнего левого угла к правому нижнему углу матрицы (T_{11} , T_{22} , T_{33} , ...), или любой параллельный ему ряд элементов.

Единичная матрица. Матричный эквивалент числа, равного 1. **Квадратная матрица**, элементами главной диагонали которой являются единицы, а все другие элементы равны нулю. Единичная матрица обозначается прописной буквой I . Следова-

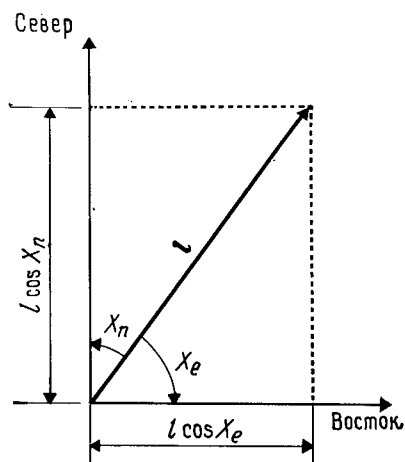


Рис. А.1. Проекция двумерного вектора на взаимно перпендикулярные координатные оси. Компонентами вектора являются $l \times \cos X_n$ и $l \times \cos X_e$.

тельно, единичная матрица порядка 3×3 имеет следующий вид:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица. Матрица, в которой число строк равно числу столбцов.

Компонента. Элемент вектора.

Матрица. Множество величин, расположенных в виде таблицы и наделенных рядом свойств. Элементами матрицы могут быть как неизвестные переменные или функции, так и числа, например:

$$T = \begin{bmatrix} \sin y & 0 & -1 \\ 10 & e^x & 7 \end{bmatrix}.$$

В практических исследованиях большинство матриц **квадратные**.

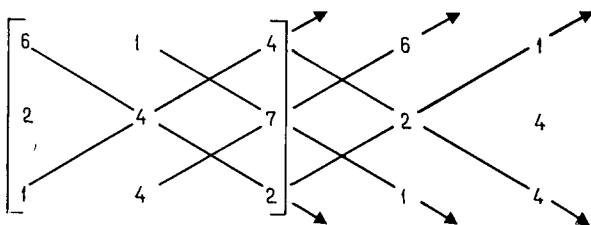
Минор, главный минор. Минор — это матрица, получаемая из исходной матрицы путем вычеркивания одной или более пар строк и столбцов. Если пара строка — столбец содержит элемент, расположенный на **главной диагонали** исходной матрицы, то минор называется **главным минором**.

Нормировка (вектора). Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его компонент. Следовательно, например, длина вектора с компонентами 5,447, —4,086 и 0,490 равна 6,827. Говорят, что вектор **нормирован**, когда каждая компонента вектора делится на его длину, так что длина нормированного вектора равна 1.

Обратная матрица. Для каждой матрицы, имеющей определитель, не равный нулю, существует соответствующая ей обратная матрица, такая, что произведение матрицы на обратную ей является единичной матрицей. Вычисление обратных матриц сложно; простой способ приведен в работе [6].

Окаймление. Операция добавления к матрице строк, или столбцов, или того и другого вместе, увеличивающая порядок матрицы.

Определитель. Функция матрицы, выражаемая одним числом. Определитель квадратной матрицы порядка 3×3 вычисляется следующим образом: записываем матрицу, а справа от нее еще раз записываем два ее первых столбца:



Перемножая тройки чисел, расположенные на каждой из трех стрелок, направленных вниз, получаем 48, 7 и 32. Складывая эти три числа, получаем 87. Повторяя те же операции для стрелок, направленных вверх, получаем 16, 168 и 4, а их сумма равна 188. Вычитая из суммы для стрелок, направленных вниз, сумму для стрелок, направленных вверх, получаем -101 , что и является искомым значением определителя. Для вычисления определителя квадратной матрицы порядка 2×2 действуем почти так же.

Порядок. Способ выражения размера матрицы. Так, матрица порядка $P \times Q$ состоит из P строк и Q столбцов.

Разбиение. В определенных матричных операциях необходимо выделять группы строк или столбцов. Это действие называется разбиением.

Симметрическая матрица. Матрица, симметричная относительно главной диагонали, так что элемент T_{ij} равен элементу T_{ji} . Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

След матрицы. Сумма элементов матрицы, стоящих на главной диагонали. Так, след вышеприведенной матрицы равен $1 + 0 + 6 = 7$.

Сложение. Складывать можно только матрицы одного **порядка**. Если суммой двух матриц **A** и **B** является матрица **C**, то $C = A + B = B + A$. **Элементы** матриц **A**, **B** и **C** связаны между собой следующим образом: $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Собственные числа, собственные векторы. С квадратной матрицей порядка $P \times P$ связывается P собственных чисел, с каждым из которых в свою очередь связывается собственный вектор, состоящий из P компонент. В том случае, когда матрица симметрическая, все элементы, стоящие на главной диагонали, положительны и порядок матрицы равен 3×3 , то ее можно представить графически в виде эллипсоида. Тогда собственные векторы соответствуют главным осям эллипсоида, а собственные числа — длинам главных осей. Вычисление собственных чисел и собственных векторов для матрицы порядка 3×3 в системе координат, оси которой направлены на «север», на «восток» и «вниз», показано в табл. А.1¹. Углы, образуемые векторами с этими осями, обозначаются соответственно X_n , X_e , X_d и измеряются от положительных концов этих осей. Первым вычисляется собственный вектор, связанный с максимальным собственным числом [табл. А.1 (а)]. Первой в таблицу помещаем матрицу **T**. Затем слева помещаем углы, образуемые начальным приближением к искомому собственному вектору с осями, направленными на «север», на «восток» и «вниз». Поскольку этот способ в конечном итоге всегда сходится к искомому решению, неважно, насколько точным является начальное приближение. Однако, чем оно лучше, тем быстрее решается задача. Записываем в таблицу значения косинусов этих углов: +0,809, —0,588 и +0,087; они являются компонентами вектора, который используется в качестве приближенного решения. Теперь умножаем матрицу **T** слева на матрицу-строку, состоящую из компонент приближенного решения, получая в результате +5,447, —4,086, +0,490. Эти числа являются компонентами нового вектора. Нормируем компоненты и помещаем их в следующую строку таблицы слева. Они равны +0,798, —0,598 и +0,072, а поскольку они нормированы, то являются направляющими косинусами вектора, который чуть ближе к искомому собственному вектору, чем наше

¹ Способ вычисления собственных чисел и собственных векторов, предложенный Р. Ф. Чини, ориентирован на конкретную задачу определения предпочтительной ориентировки и, на наш взгляд, не относится к числу наиболее простых. Чтобы у не очень искушенного читателя не создалось впечатления, что эта процедура жестко связана с тригонометрическими величинами, следует подчеркнуть, что собственные числа и собственные векторы можно вычислять для матриц, составленных из любых числовых величин, а для знакомства с более простым, по нашему мнению, способом вычисления можно рекомендовать работу [5]. Кроме того, в настоящее время мало кто занимается такими вычислениями вручную, предпочитая делать это с помощью ЭВМ. — Прим. перев.

Таблица А.1. Этапы вычисления собственных чисел и собственных векторов

(а) Матрица $T =$							$\begin{bmatrix} +5,378 & -1,616 & +1,680 \\ -1,616 & +4,980 & +1,721 \\ +1,680 & +1,721 & +1,641 \end{bmatrix}$		
	X_n	$\cos X_n$	X_e	$\cos X_e$	X_d	$\cos X_d$			
Начальное приближение	36°	+0,809	126°	-0,588	85°	+0,087	+5,447	-4,086	+0,490
Итерация 1	37	+0,798	127	-0,598	86	+0,072	+5,379	-4,144	+0,430
Итерация 2	38	+0,791	128	-0,609	86	+0,063	+5,344	-4,203	+0,384
Окончательное решение	38	+0,785	128	-0,617	87	+0,056	+5,313	-4,245	+0,349
(б) $T - \text{tr}(T) \times I =$							$\begin{bmatrix} -6,622 & -1,616 & +1,680 \\ -1,616 & -7,020 & +1,721 \\ +1,680 & +1,721 & -10,359 \end{bmatrix}$		
	X_n	$\cos X_n$	X_e	$\cos X_e$	X_d	$\cos X_d$			
Начальное приближение	112°	-0,375	123°	-0,545	41°	+0,755	+4,632	+5,731	-9,389
Итерация 1	113	-0,388	119	-0,480	38	+0,787	+4,667	+5,351	-9,630
Итерация 2	113	-0,390	117	-0,447	36	+0,805	+4,657	+5,154	-9,763
Итерация 3	113	-0,388	115	-0,430	36	+0,814	+4,632	+5,047	-9,824
Окончательное решение	113	-0,387	115	-0,421	35	+0,820	-0,023	-0,060	-0,029

начальное приближение. Чтобы завершить первую итерацию, находим углы, соответствующие этим направляющим косинусам, и помещаем их в таблицу: 37, 127 и 86°. Чтобы выполнить вторую итерацию, повторяем этот цикл вычислений, отмечая, что значение угла X_d то же, что и на первой итерации. Еще раз повторяем этот цикл и получаем углы 38, 128 и 87°. Первые два угла повторяют значения, полученные на второй итерации; третий угол слегка отличается, но его значения на первой и второй итерациях совпадали. Поскольку в большинстве практических задач точность в 1° считается удовлетворительной, заканчиваем последовательность вычислений и третью итерацию принимаем в качестве решения для искомого собственного вектора. Чтобы вычислить соответствующее собственное число, умножаем матрицу T слева на компоненты найденного собственного вектора и получаем в результате: +5,313, -4,245, +0,349. Искомое собственное число является длиной этого вектора, вычисляемой как квадратный корень из суммы квадратов трех его компонент. Следовательно, максимальное собственное число τ_3 равняется $\sqrt{5,313^2 + 4,245^2 + 0,349^2} = 6,810$.

Чтобы получить собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу, вычисляем матрицу $T - \text{tr}(T) \times I$, где $\text{tr}(T)$ — след матрицы T , а I — единичная матрица порядка 3×3 . Помещаем эту матрицу в табл. А.1 (б). Выполняем вычисления, аналогичные вышеописанным, и заканчиваем их, когда результаты итераций начинают повторяться. Есть, однако, два важных различия. Во-первых, векторы, получаемые умножением матрицы, помещенной в верхней части табл. А.1 (б), на векторы, используемые в качестве начальных приближений, имеют отрицательную третью компоненту (-9,389). При нормировке этих векторов умножаем их на -1, так что третья компонента нормированного вектора всегда положительна, а X_d , следовательно, всегда располагается на нижней полусфере стереографической проекции. Второе различие заключается в вычислении минимального собственного числа τ_1 . Как только получено решение для собственного вектора, исходная матрица T должна быть умножена слева на компоненты этого вектора, что определяет последние элементы табл. А.1 (б): -0,023, -0,060, -0,029. Тогда минимальное собственное число равняется квадратному корню из суммы квадратов этих трех чисел: $\tau_1 = 0,0705$.

Собственный вектор, соответствующий промежуточному собственному числу, ориентирован перпендикулярно двум уже найденным собственным векторам (которые, как мы надеемся, сами взаимно перпендикулярны). Следовательно, его легко найти простым графическим построением на стереографической проекции, что дает $X_n = 61^\circ$, $X_e = 48^\circ$ и $X_d = 55^\circ$; соответствующие направляющие косинусы (или компоненты вектора) равны: +0,482,

+0,665, +0,569. Тогда промежуточное собственное число получается умножением матрицы **T** слева на компоненты этого вектора, что дает произведения: +2,473, +3,512, +2,888, и извлечением квадратного корня из суммы квадратов этих трех чисел, что уже делалось ранее: $\tau_2 = 5,176$. Для окончательной проверки правильности арифметических действий используем определение следа матрицы:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \text{tr}(\mathbf{T}).$$

Столбец, матрица-столбец. Единственный столбец элементов матрицы. Матрица порядка $P \times 1$, где P — целое число.

Строка, матрица-строка. Единственная строка элементов матрицы. Матрица порядка $1 \times Q$, где Q — целое число.

Транспонирование. Транспонирование $\mathbf{T}'$ матрицы **T** достигается тем, что столбцы матрицы **T** записываются в виде строк матрицы $\mathbf{T}'$. Следовательно, если

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ то } \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Умножение. Матрицы можно умножать на константы или на другие матрицы. При умножении на константу каждый элемент матрицы умножается на константу. Следовательно, произведение единичной матрицы порядка 3×3 на число 12 равняется

$$12 \times \mathbf{I} = 12 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Есть два важных правила умножения одной матрицы на другую. Первое правило устанавливает связь между порядками матриц сомножителей и матрицы произведения. Эта связь состоит в том, что если порядок матрицы **A** равен $P \times Q$, то для выполнения равенства $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ матрица **B** должна быть порядка $Q \times R$, а матрица произведения **C** будет тогда порядка $P \times R$. Второе правило управляет вычислением элементов матрицы произведения и для начала иллюстрируется случаем, когда $P=R=1$, $Q=2$, т. е. когда матрица-строка умножается на матрицу-столбец:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = [1 \quad 2] [11] = \mathbf{C}.$$

В этом примере произведением, получающимся при умножении матрицы **A** на матрицу **B**, является матрица **C** порядка $1 \times$

$\times 1$, т. е. число. Это число определяется по следующему правилу: $1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$, т. е. отдельно перемножаются первые элементы матриц **A** и **B** и вторые элементы этих же матриц, а полученные произведения складываются.

Это простое правило умножения распространяется на матрицы более высоких порядков следующим образом:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Элементы матрицы **C** получаются умножением соответствующей строки матрицы **A** на соответствующий столбец матрицы **B**. Обращаем внимание на то, что при умножении **квадратных матриц** важна последовательность перемножения сомножителей. В этом примере матрица **B** умножалась слева на матрицу **A** (или, наоборот, матрица **A** умножалась справа на матрицу **B**). Если изменить последовательность сомножителей, то произведение, вообще говоря, будет другим:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Следовательно, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ не равно $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Элемент. Этот термин относится к любой из величин, из которых состоит **матрица**. Удобным способом обозначения элементов матрицы является указание номера **строки** и номера **столбца** в виде подстрочных индексов. Например, T_{rc} — это элемент, расположенный в r -й строке и в c -м столбце матрицы **T**. Принято, что первый индекс обозначает номер строки, а второй — номер столбца. Таким образом, T_{12} является элементом, находящимся в первой строке и во втором столбце, и читается как « T — один-два».

Приложение Б

Дополнительные упражнения

В тексте книги (особенно в начальных ее главах) приводится ряд упражнений, предназначенных для того, чтобы закрепить понимание конкретных методик. В этом приложении дана небольшая подборка дополнительных упражнений; из них одно или два представляют собой расширенный вариант уже встречавшихся ранее упражнений, а остальные охватывают темы двух или более глав, на которые книга искусственно поделена в силу необходимости. Упражнения построены так, чтобы их можно было использовать в практической работе, и читателю предлагается отыскать разные пути их решения, часть которых, я допускаю, приведет к не вполне удовлетворительному результату, но в любом случае должны быть испробованы. На деле же я надеюсь, что пытливый и опытный читатель найдет заслуживающими внимания те пути решения, которые я проглядел. И хотя объем этих упражнений невелик, читатели, уже имеющие по крайней мере небольшой опыт в геологии или связанных с ней областях, вскоре обнаружат, что многие задачи, стоящие перед ними, ведут к этим простейшим статистическим методикам.

Б.1. Порфиробласты амфибола в мусковитовом сланце

Обнажение этого типа пород освещается косыми лучами солнца. Ясно различается линейная текстура, обусловленная предпочтительной ориентировкой кристаллов мусковита (средний размер их около 0,5 мм). Из-за косого солнечного освещения порфиробласты амфибола (длиной до 30 мм) также создают *впечатление* предпочтительной ориентировки, параллельной ориентировке кристаллов мусковита, но гораздо менее сильно развитой, хотя вкрапленники амфибола широко развиты на плоскости расланцевания. В табл. Б.1 приведены углы между линейностью кристаллов мусковита и 63 порфиробластами амфибола. Это замеры типа осей; следовательно, они приводятся в соответствие по модулю 180° . Чтобы проверить, существует ли на самом деле *кажущаяся* предпочтительная ориентировка кристаллов амфибола, сначала строим круговую диаграмму, а затем применяем один или несколько критериев равномерности.

Таблица Б.1. Ориентировки длинных осей порфибластов амфибола в плоскости расщепления в мусковитовых сланцах, измеренные по часовой стрелке от ярко выраженного направления линейности, развитой в сланцеватой массе

000	010	026	045	064	094	129	145	164
001	010	027	046	068	095	129	147	164
002	012	033	050	071	109	133	149	168
005	016	035	051	075	111	134	150	169
006	019	036	051	076	113	136	151	171
009	021	042	054	088	116	139	161	174
009	022	044	055	090	119	143	161	177

Б.2. Ориентировка трилобитов

Плоскость напластования (изображение которой помещено на обложке книги Кларксона [3]) переполнена остатками трилобитов. Лишь несколько особей сохранились целиком; большее их число представлено грудным (thorax) и головным (cephalon) или грудным и хвостовым (pygidium) отделами скелета, но преобладающая масса — отдельные части скелета. На первый взгляд ориентировка полных и неполных остатков особей совершенно хаотична. Однако впечатление такого сорта *всегда* стоит проверять. Поэтому, используя данные табл. Б.2, подтвердим или опровергнем это впечатление. Отметим, что эти ориентировки являются направлениями, знак которых определяется передней частью скелета особи, и, следовательно, они приводятся в соответствие по модулю 360° . Было бы полезно, однако, с помощью соответствующего преобразования обрабатывать эти ориентировки как *оси* (следовательно, приводимые в соответствие по модулю 180°). Строим круговую диаграмму, применяем критерий равномерности и, если надо, оцениваем параметры распределения фон Мизеса (среднее направление и концентрацию с указа-

Таблица Б.2. Направления осей двусторонней симметрии раковин трилобитов (сохранившихся в плоскости напластования), измеренные по часовой стрелке от произвольно выбранного направления. Измерялись направления тех концов осей симметрии, которые направлены к передней части скелета особи

002	021	061	120	188	205	227	340
007	023	074	151	192	214	236	353
014	028	087	163	194	215	299	354
021	047	098	165	196	216	337	

нием доверительных интервалов). Возможно, у вас появится желание пофантазировать о палеоэкологическом значении полученных результатов!

Б.3. Стратиграфические разрезы. Часть I

В табл. Б.3 показан искусственно сформированный стратиграфический разрез, состоящий из трех типов пород: песчаника, известняка и аргиллита. В этом цикле, однако, много пропусков, поэтому необходима статистическая оценка.

Рассматриваем таблицу сопряженности, имеющую вид, показанный на рис. Б.1. Если бы переходы от одного типа породы к другому происходили случайно, ожидаемые частоты в любом столбце были бы пропорциональны соответствующим суммам по строкам или, наоборот, ожидаемые частоты в любой строке были бы пропорциональны соответствующим суммам по столбцам. В любом случае ожидаемая частота любого класса определяется суммой по столбцу, умноженной на сумму по строке и деленной на полный объем выборки. Постройте таблицу сопряженно-

Таблица Б.3. Искусственно сформированный стратиграфический разрез, состоящий из слоев аргиллита (А), известняка (ИИ) и песчаника (ППП)¹

Кровля	ППП	ИИ
ППП	ИИ	ППП
ИИ	А	ИИ
А	А	А
ППП	ППП	ППП
ППП	ИИ	ИИ
ИИ	А	А
А	ИИ	А
ППП	ИИ	ППП
А	А	ИИ
А	ППП	ППП
ППП	ИИ	ИИ
ИИ	ИИ	А
А	А	А
А	ППП	ППП
ППП	ИИ	ППП
ИИ	А	ППП
А	ППП	ППП
К следующему столбцу	К следующему столбцу	Подшва

¹ Р.Ф. Чини использовал одну, две и три одинаковые буквы в обозначениях слоев разного состава для более наглядного визуального представления последовательности слоев в разрезе. — *Прим. перев.*

	А	ППП	ИИ	Сумма
А				
ППП				
ИИ				
Сумма				

Рис. Б.1. Таблица сопряженности, показывающая частоты появления переходов от типа породы, обозначенного слева, к типу породы, обозначенному над верхней рамкой таблицы, при движении вверх по разрезу. В столбце «сумма» показано число переходов к данному типу породы; в строке «сумма» — число переходов от данного типа породы.

сти по данным, приведенным в табл. Б.3, вычислите ожидаемые частоты и примените критерий хи-квадрат. Вероятность перехода от одного типа породы к другому (возможен переход и к тому же самому типу породы) называется вероятностью перехода. Оценки таких вероятностей можно получить делением частот в таблице сопряженности на соответствующие им суммы по строкам. К сожалению, вероятность случая перехода к одному типу породы от другого (возможно, того же самого) также является вероятностью перехода, но в «обратной», а не в «прямой» последовательности. Эти вероятности перехода в «обратной» последовательности оцениваются делением частот на соответствующие им суммы по столбцам.

Держа в уме результат применения критерия хи-квадрат, полученный выше, оцените эти вероятности и решите, подтверждают ли они предположение о цикличности осадконакопления.

Б.4. Стратиграфические разрезы. Часть II

В табл. Б.4 приведен второй искусственно сформированный стратиграфический разрез, состоящий из слоев аргиллита, песчаника и известняка. Возможно, здесь нет сколько-нибудь выраженной регулярности в последовательности слоев, но такие последовательности, кажущиеся нерегулярными, всегда заслуживают проверки — ее результат что-нибудь да означает! Ис-

Таблица Б.4. Искусственно сформированный стратиграфический разрез, состоящий из пластов аргиллита (А), известняка (ИИ) и песчаника (ППП). Для каждого слоя указана его мощность (в метрах)

Кровля			
0,110 ИИ	0,120 ИИ	0,014 А	0,115 ИИ
0,668 ППП	0,528 ППП	0,532 ППП	0,693 ППП
0,100 ИИ	0,094 ИИ	0,424 ППП	0,528 ППП
0,019 А	0,014 А	0,113 ИИ	0,649 ППП
0,118 ИИ	0,256 ППП	0,459 ППП	0,105 ИИ
0,213 ППП	0,093 ИИ	0,018 А	0,367 ППП
0,536 ППП	0,132 ИИ	0,006 А	0,090 ИИ
0,014 А	0,137 ИИ	0,506 ППП	0,015 А
0,345 ППП	0,013 А	0,123 ИИ	0,507 ППП
0,107 ИИ	0,661 ППП	0,575 ППП	0,012 А
0,528 ППП	0,008 А	0,498 ППП	0,089 ИИ
0,544 ППП	0,493 ППП	0,122 ИИ	0,121 ИИ
0,076 ИИ	0,093 ИИ	0,156 ППП	0,015 А
0,013 А	0,372 ППП	0,112 ИИ	0,007 А
0,510 ППП	0,519 ППП	0,605 ППП	0,634 ППП
0,104 ИИ	0,142 ИИ	0,102 ИИ	0,013 А
0,424 ППП	0,457 ППП	0,014 А	0,585 ППП
0,008 А	0,608 ППП	0,022 А	0,660 ППП
0,600 ППП	0,094 ИИ	0,505 ППП	0,015 А
0,295 ППП	0,014 А	0,017 А	0,110 ИИ
0,086 ИИ	0,015 А	0,012 А	0,437 ППП
0,016 А	0,121 ИИ	0,112 ИИ	0,313 ППП
0,211 ППП	0,093 ИИ	0,016 А	0,018 А
0,098 ИИ	0,172 ППП	0,470 ППП	0,368 ППП
0,481 ППП	0,095 ИИ	0,833 ППП	0,160 ППП
0,134 ИИ	0,582 ППП	0,016 А	0,110 ИИ
0,132 ИИ	0,011 А	0,077 ИИ	0,085 ИИ
0,014 А	0,094 ИИ	0,380 ППП	0,516 ППП
0,101 ИИ	0,013 А	0,016 А	0,013 А
0,638 ППП	0,742 ППП	0,015 А	0,807 ППП
0,127 ИИ	0,122 ИИ	0,074 ИИ	0,102 ИИ
0,419 ППП	0,013 А	0,017 А	0,013 А
0,395 ППП	0,066 ППП	0,121 ИИ	0,085 ИИ
0,356 ППП	0,096 ИИ	0,014 А	0,050 ППП
0,095 ИИ	0,365 ППП	0,109 ИИ	0,116 ИИ
0,428 ППП	0,078 ИИ	0,609 ППП	0,010 А
0,722 ППП	0,562 ППП	0,018 А	0,014 А
			0,300 ППП
К следующему столбцу	К следующему столбцу	К следующему столбцу	Подошва

пользуя методику последнего примера, примените критерий хи-квадрат к переходам между самыми нижними 50 слоями. Затем примените тот же критерий к переходам между самыми верхними 50 слоями и сравните результаты.

Для слоев также указана их мощность. По каждому типу породы проверьте результаты этих измерений на нормальность распределения и, если такое соответствие будет установлено, оцените среднюю мощность и сопутствующий ей доверительный интервал.

Б.5. Размеры и форма некоторых ископаемых остатков

В табл. Б.5 приведены длины и высоты раковин моллюсков рода *Gryphaea* в двух выборках. Чтобы показать распределение этих величин, постройте диаграммы рассеяния; затем постройте

Таблица Б.5. Длины и высоты раковин двустворчатых моллюсков рода *Gryphaea* в двух выборках (размеры даны в миллиметрах)

Длина	Высота	Длина	Высота	Длина	Высота
Первая выборка					
91	86	78	74	85	79
75	66	63	52	71	69
56	49	68	54	85	75
36	34	60	62	87	86
84	80	53	45	101	97
36	32	55	52	84	85
52	49	55	50	42	49
48	48	58	49	95	85
53	39	41	37	64	50
39	37	54	43	21	21
53	46	42	45	34	34
38	29	39	35	109	108
48	39	23	16	87	78
36	30	22	16	62	52
35	31			80	71
36	33	Вторая выборка		72	66
68	62	98	91	34	33
		98	90	32	30
К следующему столбцу		К следующему столбцу			

критерий или несколько критериев для того, чтобы сравнить распределения длин в двух выборках, т. е. выяснить, могут ли раковины из одной выборки быть в целом крупнее, чем раковины из другой выборки?

Отношение высоты к длине может служить количественной характеристикой «формы» раковины. Вычислите это отношение для всех раковин в обеих выборках и для того, чтобы проверить существование различий между генеральными совокупностями, из которых извлекаются эти выборки, примените критерий серий и U -критерий Манна — Уитни. Внимательно проанализируйте результаты и прокомментируйте их.

Б.6. Порфиробласты граната и биотита

Используя обозначения гл. 4, частоты появления порфиробластов граната и биотита, рассмотренные в ней, обозначим следующим образом: $(BG)=7$, $(Bg)=26$, $(bG)=26$ и $(bg)=31$. Изучите связь этих видов порфиробластов и, в частности, сравните результаты, полученные для критических областей размером 0,05 и 0,01. Какова значимость симметрии таблицы сопряженности относительно ее диагонали, если такая симметрия имеется?

Б.7. Линейность в складчатых кварцитах

Складка, размах крыльев которой приближается к 1 км, развита в пределах формации метаосадочных кварцитов, в которых сохранились осадочные текстуры. Эти текстуры указывают на то, что стратиграфически более древние породы располагаются в ядре складки, определяя ее как антиклинальную. Удлинения зерен кварца, слагающих кварциты, имеют общую ориентировку, создавая, таким образом, видимую линейную структуру или линейность в имеющихся образцах породы. В табл. Б.6 приво-

Таблица Б.6. Ориентировки линейных структурных элементов и слоистости в складчатой формации кварцитов

Угол погружения/направление погружения (по часовой стрелке от «севера») линейных структурных элементов:

32/325	38/337	45/316	36/300	32/293	50/304
42/290	30/269	60/254			

Угол падения/направление падения (по часовой стрелке от «севера») слоистости:

65/181	73/193	80/206	53/197	85/225	48/196
59/214	49/210	52/223	49/230	49/232	62/251
36/264	45/265	48/268	43/269	49/280	39/290
30/304	30/312	34/001	73/053	64/028	69/030
78/011					

дятся ориентировки линейности в ряде пунктов наблюдения, расположенных в пределах складки, и ориентировки слоистости в несколько большем числе пунктов наблюдения.

Постройте стереографическую проекцию по этим замерам осей, которые являются нормальными к слоистости, направленными вниз. Для того чтобы найти среднее направление линейности (т. е. вектор t_3) и главные оси распределения нормалей к слоистости, примените методики получения оценок, связанные с распределением Бингхема. В связи с определением главных осей распределения вычислите и постройте на стереографической проекции доверительный конус уровня 0,95 для вектора t_1 , т. е. для лучшей оценки направления оси складки. Справедливо ли предположение о том, что линейность развивается параллельно шарниру антиклинали?

Точность и ошибки вычислений

Представьте себе, что в примере, рассматривавшемся в разделе, предшествовавшем введению «Замечания о вычислениях по формулам», число на дисплее калькулятора изображается с полным допустимым набором десятичных знаков. Тогда $d = 1,335802972 \text{ \AA}$.

Часть этих цифр, конечно, неверна. Вопрос состоит в том, сколько неверных цифр в этом числе? Ответ гласит: все цифры, за исключением двух, неверные. Это объясняется ниже.

Десятичные числа, которые мы подставляем в формулы, редко бывают абсолютно точными, потому что либо они «округлены», либо содержат в себе погрешность эксперимента. Следовательно, участвуя в нескольких этапах вычислений, эти неточности могут накапливаться до такой степени, что окончательный результат оказывается совершенно бессмысленным. Цель этого приложения состоит в том, чтобы вкратце показать, как можно округлять числа, как могут возрастать вытекающие из этого неточности и как может быть оценена точность окончательного результата (см. [17]).

В.1. Десятичные знаки и значащие цифры

Число цифр, следующих после десятичной запятой, включая нули, известно как число «десятичных знаков». Например, приводя химический анализ породы, принято концентрации окислов главных элементов давать с точностью до двух десятичных знаков, например $[\text{CaO}] = 12,08\%$.

Число «значащих» цифр — это полное количество цифр в числе, которые считаются верными. Таким образом, концентрация CaO , представленная как $12,08\%$, могла бы быть верной с точностью до четырех значащих цифр, но это зависит от применявшейся методики анализа.

В любом результате из-за неопределенности, возникающей при появлении в записи числа незначащих нулей, используемых просто для указания положения десятичной запятой, всегда следует ясно указывать число значащих цифр. Например, $[\text{CaO}] = 12,08\%$ (четыре значащие цифры). В той же самой породе

правильная концентрация рассеянного элемента, например $[Ba] = 1200$ г/т, могла бы быть задана тремя значащими цифрами. Например: $[Ba] = 1200$ г/т (три значащие цифры), $[Ba] = 0,00120\%$ (три значащие цифры). Внимательно изучите эти представления (особенно второе): какие нули значащие, а какие нет?

Можно избежать неопределенностей с нулями, если использовать представление числа в виде мантиссы и порядка (или так называемый научный способ представления числа). Например, $[Ba] = 1,20 \cdot 10^3$ г/т, $[Ba] = 1,20 \cdot 10^{-3}\%$. Принято считать, что все цифры, указываемые в мантиссе, значащие.

В.2. Округление

Приняв решение о том, сколько значащих цифр или сколько десятичных знаков будет содержать результат, мы можем отбросить любые цифры сверх заданных чисел путем «округления». Правило округления таково: чтобы выполнить округление до n значащих цифр (или десятичных знаков), сохраняем в представлении результата n значащих цифр, а остальные отбрасываем. Если отбрасываемые цифры составляют меньше половины единицы в n -м десятичном знаке, то n -ю цифру оставляем без изменения. Если отбрасываемая цифра больше половины единицы в n -м десятичном знаке, то к n -му знаку прибавляем единицу. Если отбрасываемая цифра равна половине единицы, то округление производится до ближайшей четной цифры. Цель последнего приема состоит в том, чтобы исключить систематическое смещение, т. е. в среднем числа будут округляться «с избытком» столь же часто, как и «с недостатком». Например, округление числа $d = 1,335802972$ до последовательно уменьшающегося числа десятичных знаков дает последовательность:

1,3358

1,336

1,34

1,3

Если на вашем калькуляторе есть режим автоматического округления, посмотрите, дает ли он ту же самую последовательность.

В.3. Абсолютные ошибки: сложение и вычитание

Абсолютной ошибкой числа является разность между его истинным и приближенным значениями. Следовательно, мы никогда не можем знать истинного значения абсолютной ошибки, но можем оценить ее максимальное значение, максимальную аб-

солютную ошибку. Например, определяя $d=1,34$ (с тремя значащими цифрами), мы утверждаем, что истинное значение d заключено между $1,344999...999$ и $1,335000...001$. Это же мы могли бы показать иначе: $d=1,34 \pm 0,005$, где максимальная абсолютная ошибка равняется $0,005$.

При сложении или вычитании чисел максимальная абсолютная ошибка результата равняется *сумме* максимальных абсолютных ошибок чисел, участвующих в операции.

Пример. Учитывая в этих числах значащие цифры, определяемые заданной точностью, найдите их сумму:

Число	Максимальная абсолютная ошибка
15,9	0,05
13,444	0,0005
10,7246	0,00005
Сумма 40,0686	0,05055

Таким образом, с точностью до значащих цифр результат равен 40,1. Твердо запомните, что округлять до суммирования нельзя (попробуйте сделать это, и вы поймете, почему это так).

В.4. Относительные ошибки: умножение и деление

Относительная ошибка — это отношение абсолютной ошибки к истинному значению числа. Мы снова не можем вычислить ее точно, но можем оценить максимальную относительную ошибку как отношение максимальной абсолютной ошибки к приближенному значению числа. Например, если $d=1,34$, то максимальная относительная ошибка составляет около $0,005/1,34=0,0037$ (что также содержит еще меньшую ошибку, которой можно пренебречь).

Как при умножении, так и при делении максимальная относительная ошибка результата равняется *сумме* максимальных относительных ошибок отдельных чисел, участвующих в этих операциях.

Пример. Чему равно значение d^3 , если $d=1,34$ (три значащие цифры)? Максимальная относительная ошибка d равна $0,0037$ (см. выше); следовательно, максимальная относительная ошибка d^3 равняется максимальной относительной ошибке d , умноженной на 3, т. е. равняется $0,0111$. d^3 равняется $1,34 \times 1,34 \times 1,34 = 2,406104$. Чтобы оценить максимальную абсолютную ошибку d^3 , умножим его значение на максимальную отно-

сительную ошибку: $2,406104 \times 0,0111 = 0,027 = 0,03$ (приближено). Таким образом, d^3 определяется с ошибкой ± 3 единицы во втором десятичном знаке, и верными являются только две значащие цифры: $d^3 = 2,4$.

В.5. Ошибки при вычислении функций

В перечислявшихся формулах содержатся такие функции, как $\log(x)$, $\sin(x)$ и др. «Аргумент» функции (x) может быть определен с ошибкой. Чему же тогда равна ошибка функции? В качестве приемлемого приближения можно принять, что изменение значения x на величину δx вызывает изменение значения функции $f(x)$, равное $f'(x)\delta x$, где $f'(x)$ — первая производная функции $f(x)$ по x . В данном контексте δx является максимальной абсолютной ошибкой x . Список первых производных для всех наиболее распространенных функций вы найдете в любых математических справочниках, содержащих раздел, посвященный вычислениям.

Пример. Замер угла x равен $35,2^\circ$ с точностью до всех указанных значащих цифр. Чему равен $\sin(x)$ с точностью до максимального числа значащих цифр?

Функция $f(x)$ равна $\sin(x)$, поэтому $f'(x) = \cos(x)$. Следовательно, максимальная абсолютная ошибка $\sin(x)$ равняется $\cos(x)$, умноженному на максимальную абсолютную ошибку x . В этом примере $\sin 35,2^\circ = 0,576432315$ по данным электронного калькулятора. Максимальная абсолютная ошибка x равна $0,05$; следовательно, максимальная абсолютная ошибка $\sin(x)$ равняется $\cos 35,2^\circ$, умноженному на $0,05$, и достаточно близка к $0,04$. Таким образом, это значение функции содержит ошибку ± 4 единицы во втором десятичном знаке, и его следует определить как $\sin 35,2^\circ = 0,6$.

В.6. Выводы

Можно легко оценить ошибки, возникающие из-за ограниченной точности десятичных чисел, необходимость их округления и проанализировать тот путь, которым эти ошибки разрастаются при вычислениях по формуле.

Пример. В формуле закона Брегга, приведенной в первом абзаце этого приложения, максимальная относительная ошибка числителя λ равна $0,005/1,54 = 0,0032$. Максимальная относительная ошибка знаменателя $2\sin 35,2^\circ$ равна $0,04/\sin 35,2^\circ = 0,071$. Тогда максимальная относительная ошибка частного приближено равна $0,0032 + 0,071 = 0,074$, а максимальная абсолютная ошибка составляет $0,074 \times 1,335802972 = 0,099$. Следовательно, $d = 1,3 \pm 0,1$, что противоречит результату, полученному на электронном калькуляторе ($d = 1,335802972$).

В.7. Ошибки округления при машинных вычислениях

Разные модели компьютеров и программируемых калькуляторов сильно различаются «точностью» хранящихся в них чисел и способами выполнения ими основных арифметических операций. Главным ограничивающим фактором является число двоичных разрядов, из которых состоит отдельная ячейка памяти, ограничивающая число значащих цифр, которые передаются от одного этапа вычислений к другому. В длинных вычислениях каждый промежуточный результат округляется до того числа десятичных знаков, которое присуще данной вычислительной машине, и поэтому ошибки округления могут накапливаться. В машинах с ограниченной точностью число десятичных цифр, передаваемых таким способом, может быть равно девяти или меньше. Вследствие этого длинные вычисления, такие, как вычисления по формулам (5.3а) — (5.3в) или по формулам табл. 9.4, могут иметь тенденцию к серьезной вычислительной неустойчивости. Аккуратный программист, перед тем как приступить к составлению конкретной программы, всегда проверит технические характеристики машины и проанализирует вероятное поведение выражений, по которым производятся вычисления.

Приложение Г

Обозначения

- A — площадь круговой гистограммы
 a — размер критической области; вероятность ошибки I рода; константа регрессии
 B — присутствие биотита
 b — отсутствие биотита; вероятность ошибки II рода; константа регрессии
 C — число классов в классификации
 $\bar{C}$ — арифметическое среднее косинусов
 c — направляющий косинус; свободный член уравнения регрессии (отрезок регрессии)
 c — единичный вектор
 χ^2 — (греческая буква «хи») статистика критерия хи-квадрат
 D — статистика критерия Колмогорова — Смирнова
 d — половина угла при вершине сектора или конуса
 d — подстрочный индекс, обозначающий направление «вниз» (down) (см. X)
 E — ожидаемая частота
 e — число 2,718 ..., являющееся основанием натуральных логарифмов (иногда для обозначения натурального логарифма используется в качестве подстрочного индекса в функции $\log$); подстрочный индекс, обозначающий направление на «восток» (east) (см. X)
 F — статистика дисперсионного отношения Фишера
 $F(x)$ — интегральная функция распределения (ИФР)
 f — частота; частота класса
 $f(x)$ — функция плотности вероятности (ФПВ) от x
 H — статистика критерия Крускала — Уоллиса; присутствие роговой обманки
 H_0 — нулевая гипотеза
 H_1 — альтернативная гипотеза
 h — отсутствие роговой обманки
 i — подстрочный индекс, обозначающий отдельные наблюдения, классы или выборки
 K — матрица концентраций
 k — параметр концентрации

- l — единичный вектор среднего направления
 M — математическое ожидание
 $\bar{M}$ — выборочная оценка математического ожидания (среднеарифметическое)
 $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ — оценки математических ожиданий в двух выборках
 M_e — медиана
 m — меридиональный угол; статистика критерия Ходжеса — Айне; наклон линии регрессии
 N — объем выборки
 N_1, N_2 — объемы выборок в задачах с двумя выборками
 n — подстрочный индекс, обозначающий направление на «север» (north) (см. X)
 O — наблюдаемая частота
 π — отношение длины окружности к диаметру круга ($\pi = 3,14159\dots$)
 R — число «гербов»; сумма рангов
 $\bar{R}$ — средняя результирующая длина
 r — радиус сектора круговой гистограммы; число серий; коэффициент корреляции Пирсона
 S — число выборок или подвыборок
 $\bar{S}$ — среднеарифметическое синусов
 s — стандартное отклонение генеральной совокупности
 $\bar{s}$ — выборочная оценка стандартного отклонения
 Σ — символ суммирования [см. формулы (1.2) или (4.2) и (4.3)]
 t — t -статистика Стьюдента
 $\mathbf{t}$ — совместно с подстрочным индексом обозначает главную ось распределения Бингхема
 τ — ранговый коэффициент корреляции Кендалла; собственное число в распределении Бингхема
 U — порядковая статистика критерия Манна — Уитни и различных критериев распределений на окружности
 V_N — статистика критерия Куипера
 ν — число степеней свободы
 w — ширина класса
 X — случайная переменная; совместно с подстрочными индексами n, e и d обозначает углы с координатными осями, направленными соответственно на «север», на «восток» и «вниз»
 X_0 — среднее направление в генеральной совокупности
 $\bar{X}_0$ — оценка среднего направления
 x — отклонение от среднего; переменная
 z — стандартизованное отклонение

Список литературы

1. *Bingham C.* 1964. Distributions on the sphere and on the projective plane, PhD thesis, Yale University.
2. *Chayes F.* 1971. Ratio correlation, Chicago: University of Chicago Press.
3. *Clarkson E. N. K.* 1979. Invertebrate palaeontology and evolution, London: George Allen & Unwin.
4. *Cochran W. G.* 1977. Sampling techniques, 5, New York: Wiley. (Имеется русский перевод более раннего издания: *Кокрен У.* Методы выборочного исследования. — М.: Статистика, 1976.)
5. *Davis J. C.* 1973. Statistics and data analysis in geology, New York: Wiley. (Имеется русский перевод: *Девис Дж.* Статистика и анализ геологических данных. — М.: Мир, 1977.)
6. *Frazer R. A., W. J. Duncan, A. R. Collar.* 1963. Elementary matrices, 112, Cambridge: Cambridge University Press.
7. *Hall G. G.* 1963. Matrices and tensors, London: Pergamon.
8. *Hope K.* 1968. Methods of multivariate analysis, London: University of London Press.
9. *Kamb W. B.* 1959. Ice petrofabric observations from the Blue glacier, Washington, in relation to the theory and experiment, J. Geophys. Res. 64, 1891—1909.
10. *Koch G. S., R. F. Link.* 1970. Statistical analysis of geological data, vol. 1. New York: Wiley.
11. *Koch G. S., R. F. Link.* 1971. Statistical analysis of geological data, vol. 11. New York: Wiley.
12. *Krumbein W. C., F. A. Graybill.* 1965. An introduction to statistical models in geology, New York: McGraw-Hill. (Имеется русский перевод: *Крамбейн У., Грейбилл Ф.* Статистические модели в геологии. — М.: Мир, 1969.)
13. *Macbeath A. M.* 1964. Elementary vector algebra, London: Oxford University Press.
14. *Mardia K. V.* 1972. Statistics of directional data, London: Academic Press. (Имеется русский перевод: *Мардуа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. — М.: Наука, 1978.)
15. *Mann H. B., D. R. Whitney.* 1947. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann. Math. Statist. 18, 50—60.
16. *Meyer S. L.* 1975. Data analysis for scientists and engineers, 167—9, 342—9, New York: Wiley.
17. *Noble B.* 1964. Numerical methods 1, 1—11, Edinburgh: Oliver & Boyd.
18. *Phillips F. C.* 1954. The use of the stereographic projection in geology, London: Edward Arnold.
19. *Siegel S.* 1956. Nonparametric statistics for the behavioral sciences, 6—17, New York: McGraw-Hill.
20. *Sprent P.* 1977. Statistics in action, 32, London: Penguin.
21. *Sprent P.* 1981. Quick statistics, an introduction to non-parametric methods, London: Penguin.
22. *Stephens M. A.* 1970. Use of Kolmogorov — Smirnov, Cramer — von Mises and related statistics without extensive tables, J. R. Statist. Soc. B32, 115—22.
23. *Till R.* 1974. Statistical methods for the earth scientist, London: Macmillan.
24. *Wetherill G. B.* 1966. Sequential methods in statistics, London: Methuen.
25. *Yule G. U., M. G. Kendall.* 1950. An introduction to the theory of statistics, Chs 1—3, London: Griffin.

Оглавление

Предисловие редактора русского перевода	5
Предисловие	8
Благодарности	10
Список таблиц	11
Список критических значений, используемых выражений и т. п.	13
Замечания о вычислениях по формулам	14
Введение	15
<i>Глава 1.</i> Слово, число, рисунок	21
<i>Глава 2.</i> Бросание монеты и стратиграфия	41
<i>Глава 3.</i> Методы проверки гипотез для одной и двух выборок	55
<i>Глава 4.</i> Номинальные статистики	61
<i>Глава 5.</i> Теоретические распределения и доверительные интервалы	72
<i>Глава 6.</i> Порядковые методы	87
<i>Глава 7.</i> Корреляция и регрессия	102
<i>Глава 8.</i> Ориентировки в двухмерном пространстве	109
<i>Глава 9.</i> Ориентировки в трехмерном пространстве	123
<i>Глава 10.</i> Гипотезы, выборки и решения	144
Приложение А. Словарь терминов по матричной и векторной алгебре	163
Приложение Б. Дополнительные упражнения	171
Приложение В. Точность и ошибки вычислений	179
Приложение Г. Обозначения	184
Список литературы	186

УВАЖАЕМЫИ ЧИТАТЕЛИ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Р. Ф. Чини

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ

Научные редакторы В. С. Краснова и Н. А. Никишина
Младший научный редактор Т. С. Егорова
Художник Г. А. Шипов
Художественный редактор А. Я. Мусин
Технический редактор Н. И. Манохина
Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 5757

Сдано в набор 18.10.85.

Подписано к печати 02.04.86.

Формат 60×90^{1/16}.

Бумага кн. журн. имп.

Печать высокая. Гарнитура литературная.

Объем 6,00 бум. л. Усл. печ. л. 12,00.

Усл. кр.-отт. 12,37. Уч.-изд. л. 11,22. Изд. № 5/4574.

Тираж 4000 экз. Зак. 760. Цена 1 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ

В своей книге Чини дает тщательно разобранные примеры решения различных геологических задач с помощью статистических методов, которые применимы как в лаборатории за микроскопом, так и в поле на обнажении. Главное внимание при этом уделяется таким статистическим методам, вычисления по которым могут уместиться «на обратной стороне почтового конверта». Впервые, пожалуй, в литературе по математической геологии главный акцент делается на непараметрические методы.

