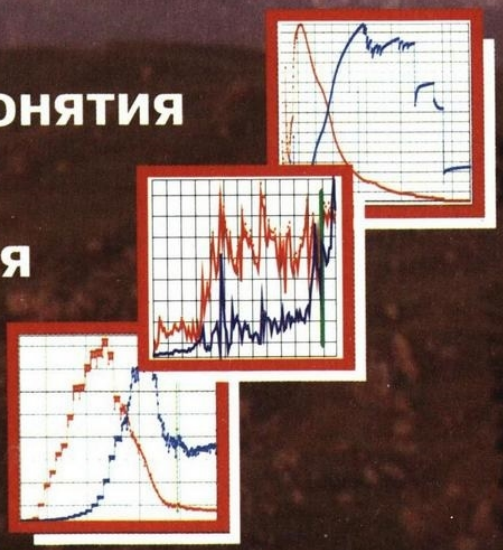
С.А. Серкеров

ГРАВИРАЗВЕДКА И МАГНИТОРАЗВЕДКА

- Основные понятия
- Термины
- Определения



С.А. Серкеров

ГРАВИРАЗВЕДКА И МАГНИТОРАЗВЕДКА

- **Основные понятия**
- **Термины**
- **Определения**

Допущено
Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых" направления подготовки дипломированных специалистов "Технология геологической разведки"

Москва НЕДРА 2006

УДК 528.026.3:550.838 (075)
ББК 26.21
С 32

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор *А.А. Никитин*,
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.А. Булычев*

Серкеров С.А.

С 32 Гравиразведка и магниторазведка. Основные понятия, термины, определения: Учеб. пособие для вузов. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2006. – 479 с.: ил.

ISBN 5-8365-0179-3

Описаны основные виды потенциалов притяжения и магнитных потенциалов на основе единой теории, наиболее важные интегральные теоремы и уравнения теории потенциала. Рассмотрены гравитационные и магнитные поля Земли, представления их в виде рядов сферических функций, аппаратура для их измерения.

Приведены основные способы преобразования полей, спектральные и энергетические характеристики аномалий. Рассмотрены вопросы определения однозначно определяемых параметров источников полей, закономерности отражения структур месторождений нефти и газа и залежей углеводородов в гравитационных и магнитных полях, а также вопросы методики полевых работ.

Весь материал книги изложен в предельно кратком виде, темы расположены в алфавитном порядке.

Для студентов геофизических специальностей вузов и магистрантов по направлению 553200 «Геология и разведка полезных ископаемых» (программы по разведочной геофизике), а также для инженерно-технических работников геолого-геофизических организаций.

ISBN 5-8365-0179-3

© Серкеров С.А., 2006
© Оформление.
ООО «Недра-Бизнесцентр», 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курсы «Гравиразведка» и «Магниторазведка» – специальные дисциплины профессиональной подготовки горных инженеров-геофизиков в области разведочной геофизики. Полученные при изучении данных курсов знания служат основой для углубленного изучения других дисциплин. Их можно также использовать на практике при решении различных задач теории и практики интерпретации. Учитывая относительно меньшее значение магниторазведки по сравнению с гравиразведкой при поисках и разведке месторождений нефти и газа, в нефтегазовых вузах и факультетах страны курсы «Гравиразведка» и «Магниторазведка» читают как единый курс «Гравиразведка и магниторазведка». В соответствии с программой курса «Гравиразведка и магниторазведка» учебное пособие составлено на основе единой теории гравитационного и магнитного потенциалов. Такое изложение материала позволяет избегать ненужных повторений, которые были бы обязательными при раздельном чтении методов гравиразведки и магниторазведки. Так как раздел сферических функций не читается в курсах по высшей математике, в книге кратко изложены элементы теории сферических функций и основы аппарата разложения функций по сферическим функциям. Рассмотрены также задачи представления потенциала силы тяжести и магнитного потенциала Земли в виде рядов сферических функций и вопросы применения полученных рядов. Для облегчения усвоения материала даны примеры применения наиболее важных и часто встречающихся формул.

Так как книга предназначена в основном для студентов и магистрантов, специализирующихся в области поисков и разведки нефтегазовых месторождений, в нее включены новые материалы, в которых изложены особенности и закономерности отражения залежей углеводородов и месторождений нефти и газа в потенциальных полях.

Учебное пособие предназначено для студентов геофизических специальностей вузов и в первую очередь нефтегазовых вузов и факультетов, а также для магистрантов по направлению 553200 «Геология и разведка полезных ископаемых». Оно может быть использовано также при подготовке студентов-геофизиков в других вузах и в практической работе геологов и геофизиков, работающих как в области газонефтяной, так и рудной геофизики.

ВВЕДЕНИЕ

В каждой точке Земли и околоземного пространства можно обнаружить действие гравитационных и магнитных сил.

В наблюдаемом поле различают его постоянную часть, подчиняющуюся закону всемирного притяжения Ньютона или аналогичному ему закону Кулона, и переменную часть, подчиняющуюся более сложным законам.

Силы, действующие в каждой точке Земли и в околоземном пространстве, являются составляющими сил, различных по происхождению. Основная часть этих сил вызывается Землей в целом как телом, обладающим значительной массой и большим магнитным моментом.

Изучением структуры гравитационного и магнитного полей Земли в целом как планеты занимаются гравиметрия – наука об изучении силы тяжести и магнитометрия – наука об изучении магнитного поля Земли, являющиеся разделами геофизики – науки о Земле.

Разведчика полезных ископаемых в основном интересуют только те части суммарного гравитационного или магнитного поля, которые связаны с распределением в земной коре горных пород, отличающихся одна от другой по гравитационным или магнитным свойствам. Методы, при помощи которых можно изучать эти части суммарных полей и истолковывать их геологическую сущность, получили название гравитационного метода разведки (гравиразведка) и магнитного метода разведки (магниторазведка).

В России гравиразведка и магниторазведка начали бурно развиваться, начиная с 1919 г., когда была создана Особая комиссия по изучению Курской магнитной аномалии, в состав которой вошли основоположники разведочной геофизики: П.П. Лазарев, П.М. Никифоров, А.А. Михайлов, Л.В. Сорокин, Г.А. Гамбурцев и др. Дальнейшее развитие этих методов разведки – наиболее мобильных и наименее дорогих – связано с созданием новой, более точной аппаратуры, разработкой новых, более надежных методов анализа и интерпретации аномалий геофизических полей, с внедрением компьютерных технологий и др.

Данное учебное пособие составлено на основе лекций, читаемых автором студентам-геофизикам в Российском государственном университете нефти и газа им. И.М. Губкина. При написании этой книги за основу взяты учебники и монография автора [11–16], использованы также некоторые книги, учебники и учебные пособия других авторов по теории потенциала, теории поля, по курсам гравиразведки и магниторазведки, например, К.В. Гладкого, Н.И. Идельсона, И.К. Овчинникова, А.К. Маловичко и В.И. Костыцина, К.Е. Веселова, М.У. Сагитова, Н.П. Грушинского, В.С. Миронова, А.А. Логачева и В.П. Захарова, Л.В. Сорокина, Б.М. Яновского и др.

Отличительной особенностью данного учебного пособия является то, что оно впервые в отечественной геофизической литературе написано в виде отдельных статей, данных в предельно кратком изложении. По объему они охватывают все основные вопросы программ курсов «Гравиразведка» и «Магниторазведка». Взаимозависимость статей друг от друга позволила расположить их в алфавитном порядке. В каждой статье дан список основной и дополнительной литературы. Все громоздкие выводы теоретического характера из текста исключены. Книга снабжена предметным указателем. Все эти качества учебного пособия позволяют быстрее найти, легче освоить и запомнить нужную тему, что делают его бесценным при самостоятельной работе студентов.

При записи кратных интегралов там, где нет необходимости в раздельном написании каждого интеграла, принята наиболее удобная и компактная форма записи: $\int_V$ – объемный (трехкратный) интеграл по объему V; $\int_S$ или $\int_\Sigma$ – поверхностный (двухкратный) интеграл по поверхности S или Σ; $\int_l$ – интеграл (криволинейный) по длине кривой или дуги l.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЬ ВЕРХНЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Аналитическое продолжение аномалий – один из важнейших способов трансформаций потенциальных полей. Значение его заключается не только в том, что с помощью операции аналитического продолжения можно найти значения исследуемого элемента гравитационного или магнитного поля в областях, в которых поле не измерено (в частности, в точках, близких к источникам поля), но и в том, что оно позволяет определить положение некоторых особых точек поля.

Задачей аналитического продолжения является задача восстановления значений некоторой аналитической функции (к числу которых принадлежат и гармонические функции) во всех точках пространства, в которых она определена, по заданным ее значениям в некоторой области, принадлежащей к области ее определения.

В гравиразведке и магниторазведке используются решения двух частных задач аналитического продолжения: 1) задачи нахождения аномалий в точках полупространства (полуплоскости – в двумерном случае) $z > 0$ по заданным значениям этих аномалий на плоскости (прямой) $z = 0$ и 2) задачи нахождения значений аномалий в точках горизонтального слоя (полосы) $0 > z > -H$, $H > 0$ по заданным их значениям на плоскости (прямой) $z = 0$. В качестве плоскости (прямой) $z = -H$ берется та, которая проходит через ближайшую к дневной поверхности ($z = 0$) особую точку.

Первая из этих частных задач получила название аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства, вторая – в области нижнего полупространства. Вторая задача – наиболее сложная. Основные ее положения решены В.Н. Страховым.

Рассмотрим трехмерную задачу. Пусть заданы значения некоторой гармонической функции $U(x, y)$ в точках бесконечной го-

ризонтальной плоскости $z = 0$. Требуется определить значения этой функции в точках полупространства $z > 0$. Эта задача решается интегралом Пуассона, который получается в результате решения задачи Дирихле для плоскости.

Задача Дирихле, или первая граничная задача теории гармонических функций, заключается в определении в некоторой области v гармонической функции U, если заданы ее значения на поверхности этой области S. Область v может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае эта область лежит вне поверхности S. Если область v конечная (внутри поверхности), задача является внутренней задачей Дирихле; если же эта область бесконечная (вне поверхности) – внешней задачей Дирихле. При решении внешней задачи Дирихле ставится условие, что функция U должна обращаться в нуль на бесконечности.

Интеграл Пуассона имеет вид

$$U'(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

где $U'(x, y, z)$ – значения гармонической функции в точке верхнего полупространства; $U(\xi, \eta, 0)$ – заданные значения гармонической функции в точках горизонтальной плоскости наблюдений.

Интеграл Пуассона для двумерной задачи имеет вид

$$U(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + z^2}. \qquad (1)$$

Этот интеграл определяет гармоническую функцию U на высоте z по заданным ее значениям на оси x, т.е. решает задачу аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства на высоту z для случая двумерной задачи. Частотные характеристики этой трансформации имеют следующий вид:

$$\Phi(\omega) = \exp(-|\omega| z),$$

$$\Phi(u, v) = \Phi(\rho) = \exp(-\rho z),$$

где $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Рассмотрим подробней решение двумерной задачи. Применять выражение (1) на практике в точном его виде невозможно из-за того, что неизвестно аналитическое выражение функции $U(\xi)$ – она задана на практике либо графически, либо таблично. Поэтому интеграл (1) решается приближенно различными способами численного интегрирования. Рассмотрим одно из таких решений.

Разбивая пределы интегрирования на три части: от $-\infty$ до $-x_m$, от $-x_m$ до $+x_m$ и от $+x_m$ до $+\infty$ (интервал $[-x_m, x_m]$ такой, что основная часть интеграла (1) заключена на нем), из формулы (1) при замене z на h (h – высота пересчета аномалий) получим

$$U(0,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-x_m}^{x_m} U(\xi)\,\frac{h}{\xi^2+h^2}\,d\xi + A_- + A_+,$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_-=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-x_m} U(\xi)\,\frac{h}{h^2+\xi^2}\,d\xi;$$

$$A_+=\frac{1}{\pi}\int_{x_m}^{\infty} U(\xi)\,\frac{h}{h^2+\xi^2}\,d\xi;$$

A_- и A_+ – остаточные члены.

Разбивая интервал от $-x_m$ до x_m на ряд малых отрезков, в пределах которых значения функции $U(\xi)$ можно считать постоянными, получим

$$U(0,\,h)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-m}^{m} U(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{h\,d\xi}{\xi^2+h^2}+A_-+A_+.$$

Произведя интегрирование, сможем написать

$$U(0,\,h)=\sum_{k=-m}^{m} C_k\,U(x_k)+A_-+A_+,$$

где

$$C_k=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_k}{h}-\operatorname{acrtg}\frac{x_{k-1}}{h}\right).$$

Эта формула является исходной для практического применения. При этом наиболее простым является случай, когда C_k – постоянная величина:

$$C_k=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_k}{h}-\operatorname{acrtg}\frac{x_{k-1}}{h}\right)=C.$$

Значения x_k/h отсюда можно определить по формуле

$$\frac{x_k}{h}=\operatorname{tg}(\pi k C). \qquad (2)$$

Задаваясь значением C, из выражения (2) находим x_k.

В качестве C, как это предложил Б.А. Андреев, удобнее брать то значение, которое получается из равенства (2) при $x_1/h = 0{,}1$.

В.Н. Страхов предложил несколько иную палетку, при построении которой частные интегралы в конечных пределах вычислялись с помощью квадратурных формул Гаусса, которые при заданном числе ординат являются наиболее точными.

Для нахождения остаточных членов в случае гравитационного поля ($U = V_z$) примем, что V_z за пределами $-x_m$ и x_m до бесконечности уменьшается обратно пропорционально x^2:

$$V_z(x) = \frac{V_z(x_m)}{x^2} x_m^2,$$

где $V_z(x_m)$ – значения V_z при $x = x_m$.

Применение аналитически продолженных в области верхнего полупространства значений аномалий основано на том, что при удалении от тел аномалии от них убывают по-разному. Быстрее всего убывают аномалии от неглубоко залегающих мелких объектов (локальные аномалии). Аномалии от глубоких тел и от крупных геологических образований (региональные аномалии) убывают медленнее. Поэтому в значениях аналитически продолженных в области верхнего полупространства аномалий остается в основном влияние глубоко залегающих и крупных тел, очищенных от локальных аномалий. Это видно из формы частотной характеристики трансформации: она, являясь экспонентной с отрицательной степенью, начинается с единицы и убывает достаточно быстро – тем быстрее, чем больше ω или ρ. Поэтому при определении спектра трансформированной аномалии она мало изменяет низкие частоты спектра аномалии, тогда как высокие частоты режет очень сильно. Низкочастотными являются региональные аномалии, высокочастотными – локальные. Высокочас-

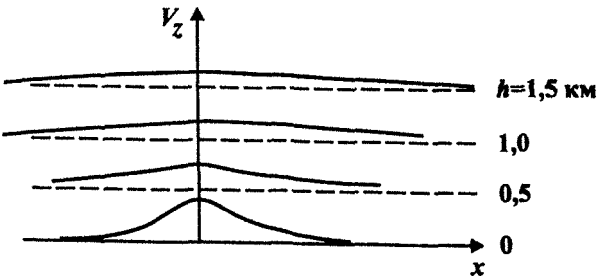


Рис. 1. Характер убывания поля с высотой

тотными являются и случайные погрешности измерений. Поэтому рассматриваемый способ трансформации не чувствителен и к погрешностям измерений – подавляет их достаточно сильно.

По результатам аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства строят карту локальных так называемых остаточных аномалий; например, в трехмерном случае

$$\Delta U(x, y) = U(x, y, 0) - U(x, y, h).$$

Значения ΔU являются разностью между исходными значениями рассматриваемого элемента поля и аналитически продолженными на высоту h.

Результаты аналитического продолжения аномалии на высоту показаны на рис. 1. Из рисунка видно, что при продолжении на высоту кривая аномалии сглаживается, на ней уменьшаются значения локальных аномалий, связанные с влиянием мелких неглубоко залегающих геологических тел. Кривая соответствует в основном аномалиям от объектов, вызывающих региональные поля. При продолжении в верхнее полупространство уменьшается интенсивность каждой отдельной аномалии суммарного поля, но увеличивается ее ширина.

Литература: [2, 3, 5–8, 14, 20].

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЬ НИЖНЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Задача определения значений гармонических функций на уровнях слоя, заключенного между дневной поверхностью ($z = 0$) и плоскостью, проходящей через ближайшую к дневной поверхности особую точку поля ($z = -H$), является одной из важнейших в гравиразведке и магниторазведке.

Аналитическое продолжение поля в нижнее полупространство сводится к построению его в точках некоторой произвольной горизонтальной плоскости $z = -h = \text{const}$, входящей в указанный горизонтальный слой $0 > z > -H$. Значение H здесь соответствует глубине залегания ближайшей к поверхности особой точки поля. Решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения Пуассона:

в трехмерном случае

$$U(x, y, 0) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta, z)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + h^2]^{3/2}}$$

относительно значений $U(\xi, \eta, z)$;

в двумерном случае

$$U(x, 0) = -\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, z)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + h^2}$$

относительно значений $U(\xi, z)$.

Предположим, что функции $U(x, y, z)$, и $U(x, z)$ соответственно для трехмерного и двумерного случаев удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, y, z)|^2\, dx\, dy < +\infty, \quad z > -H,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, z)|^2\, dx < +\infty, \quad z > -H.$$

В этом случае для симметричных относительно вертикальной оси аномалий получим

$$U(r,-h)=\int_0^\infty \rho e^{\rho h} J_0(\rho r)d\rho \int_0^\infty \tau U(\tau) J_0(\rho\tau)d\tau,$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \ \tau=\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

В двумерном случае при $x=0$

$$U(0,-h)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{|\omega|h}d\omega\int_0^\infty U(\xi)\cos\omega\xi d\xi. \qquad (1)$$

Численное решение этого уравнения легче всего получить, пользуясь рядом Котельникова [2, 14]:

$$U(0,-h)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k[U(k\Delta x)+U(-k\Delta x)], \qquad (2)$$

где значения коэффициентов

$$C_k=\frac{h\Delta x}{\pi}[(-1)^k\exp(\pi h/\Delta x)-1]/[h^2+(k\Delta x)^2].$$

Для примера приведем значение коэффициента C_0 при $h=\Delta x$:

$$C_0=[\exp(\pi)-1]/\pi=7{,}05.$$

Формула (2) является формулой Рейнбоу для аналитического продолжения аномалий в области нижнего полупространства на глубину h. Она дает приближенное решение уравнения (1). При замене бесконечных пределов интегрирования в равенстве (2) достаточно большими конечными получается вычислительная схема Рейнбоу. Подобную формулу можно получить и при решении трехмерной задачи. Кроме вычислительной схемы Рейнбоу существует еще ряд других. Среди них несколько формул В.Н. Страхова, формулы Тсубои и Фусчида, С.В. Шалаева, способ сеток и другие.

Литература: [2, 3, 13, 14, 16].

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЬ НИЖНЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ЭФФЕКТ РАСПАДЕНИЯ ПОЛЯ

Из-за дискретности задания аномалий и наличия ошибок наблюдений в исходных данных поля при аналитическом продолжении на уровни, совпадающие с глубиной залегания особых

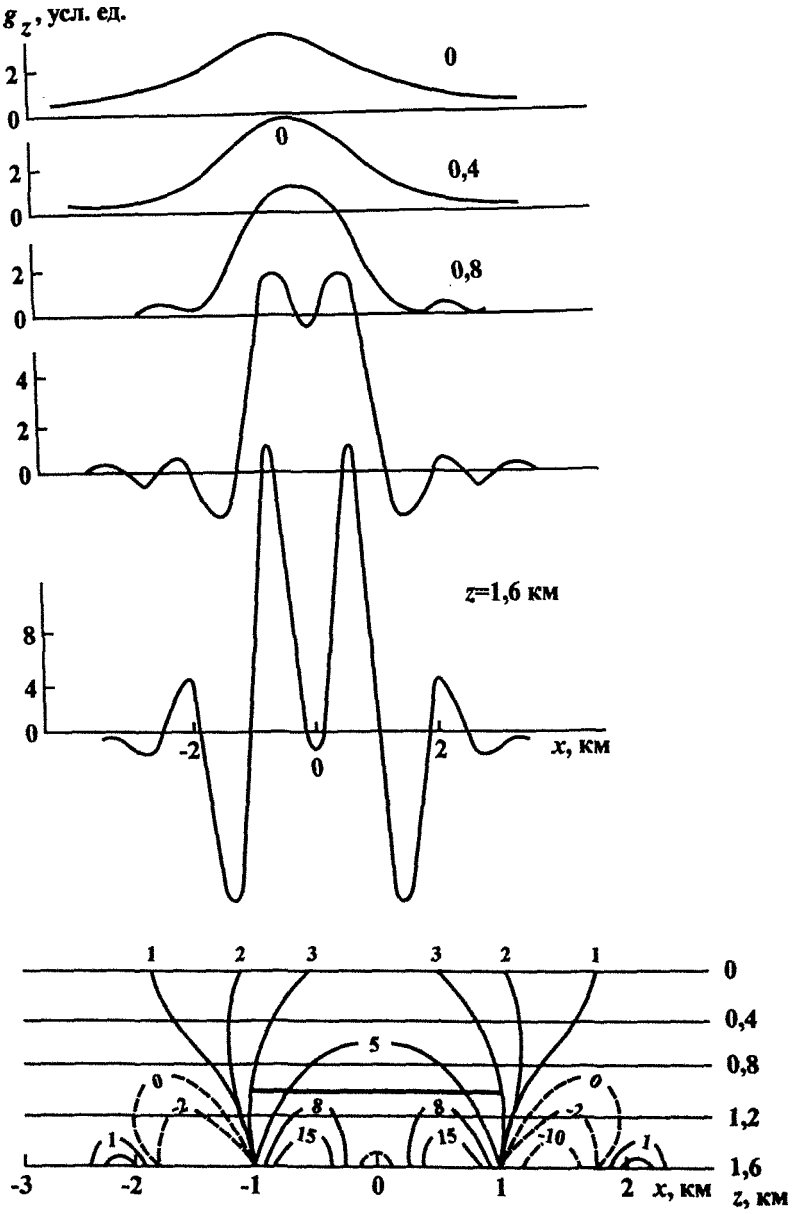


Рис. 2. Эффект распадения поля материальной пластины при приближенном аналитическом продолжении его через массы (по В.Н. Страхову)

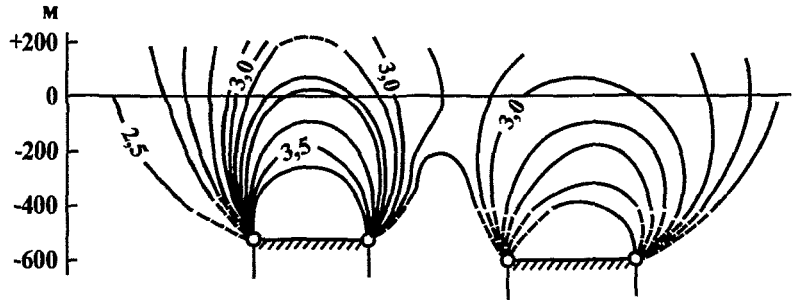


Рис. 3. Схема экстраполяции изолиний гравитационного поля

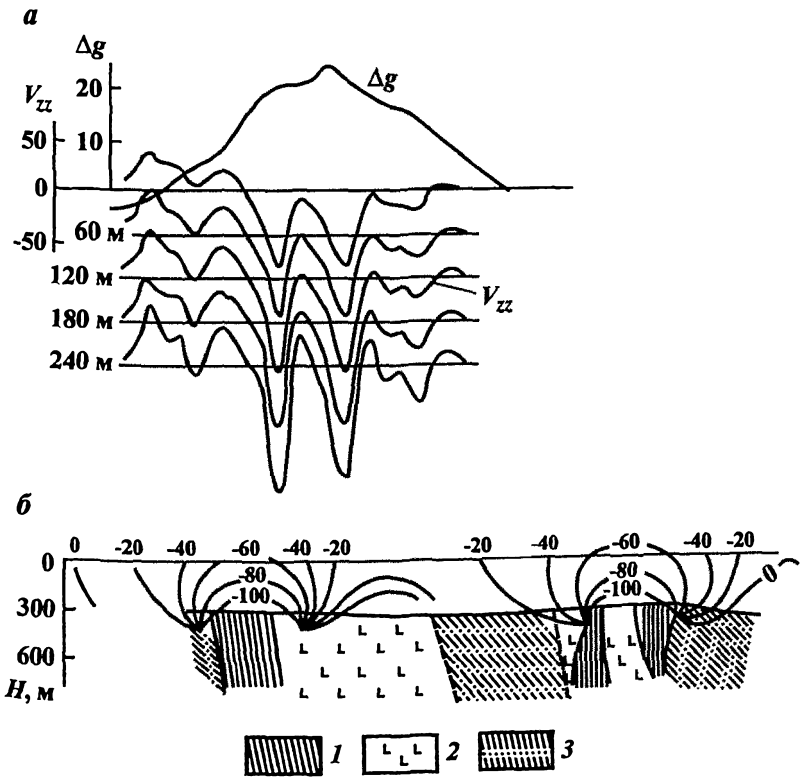


Рис. 4. Использование метода аналитического продолжения поля V_{zz} при интерпретации гравитационных аномалий от крутопадающих пластов на железорудном месторождении (по В.Н. Страхову):
а – графики Δg и V_{zz} на различных горизонтах; *б* – карта изолинии V_{zz} в вертикальной плоскости и геологический разрез: *1* – кварцит; *2* – ультраосновные породы; *3* – сланцы

точек аномалий, и глубже наблюдается так называемый ***эффект распадения поля***, выражающийся в появлении изолиний, группирующихся вокруг периодически повторяющихся некоторых центров. При этом на картах изолиний в вертикальной плоскости в перпендикулярных к уровням направлениях изолинии, состоящие из положительных и отрицательных значений, становятся почти параллельными друг другу. Эффект распадения поля проявляется, как было отмечено выше, во-первых, ошибками, усиливающимися при трансформации от уровня к уровню и, во-вторых, прохождением особенностей. Влияние ошибок наблюдений можно уменьшить сглаживанием. Появление эффекта распадения поля может служить признаком того, что или особые точки пройдены, или они близки к прохождению. Эффект распадения поля иллюстрирует рис. 2.

При практических построениях для отыскания положения особых точек поля изолинии аномалий с уровнем, ближайших тем, с которых начинается эффект распадения поля, необходимо экстраполировать до глубин залегания особой точки, учитывая поведение изолиний на всех вышерасположенных уровнях. Пример такой экстраполяции изолиний магнитного поля приведен на рис. 3.

Пример использования аналитического продолжения поля в нижнее полупространство при интерпретации гравитационных аномалий V_{zz} от крутопадающих рудных пластов на железорудном месторождении показан на рис. 4.

Литература: [2, 3, 7, 14].

2. ПОСТРОЕНИЕ КАРТЫ АНОМАЛИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

По результатам измерений строят карту аномалий поля на поверхности наблюдений. Аналитически продолжая это поле в области верхнего и нижнего полупространств, можно определить распределение его значений на уровнях, расположенных выше или ниже этой поверхности. По этим значениям поля можно построить карту аномалий в вертикальной плоскости. При этом удобно рассматривать сечение, проходящее через экстремальные точки наблюденного поля. Такую карту можно использовать при интерпретации.

Возможность построения карты аномалий в вертикальной плоскости и методика ее использования при интерпретации были разработаны и внедрены в практику В.Н. Страховым.

Аналитическое продолжение аномалий в основном применя-

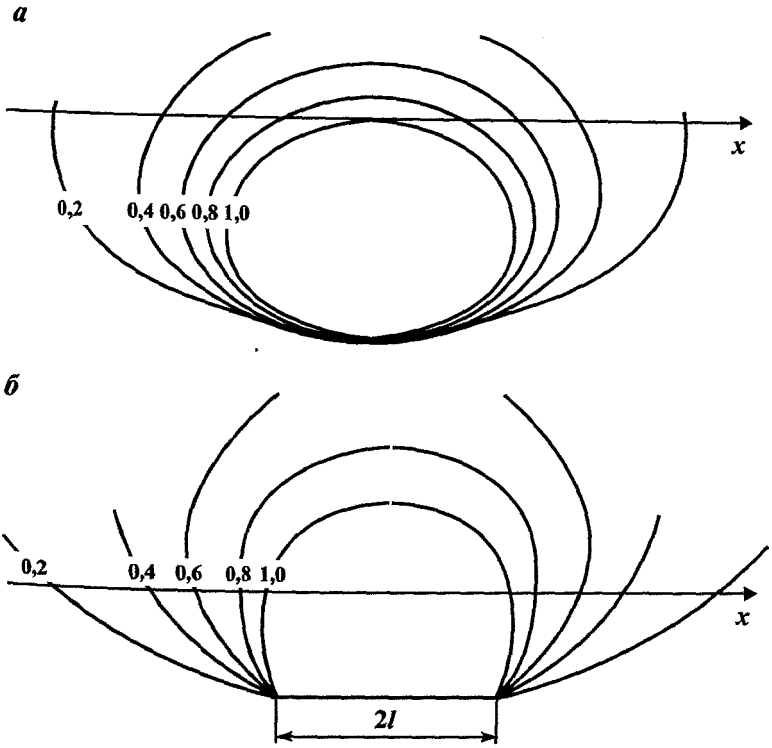


Рис. 5. Распределение поля V_z в вертикальной плоскости для:
а – шара; *б* – бесконечной горизонтальной материальной полосы; *в* – вертикального уступа; *г* – двумерного тела прямоугольного сечения

ется для разделения аномалий и нахождения источников аномалий. Первая из этих задач решается в любых условиях. Вторая задача сложнее, и при ее решении необходимо различать случаи рудных и структурных задач. Характер связи особых точек поля с источниками поля в этих задачах различный. При рудных задачах особые точки поля расположены внутри или на границе возмущающих геологических объектов (всякая точка поверхности, не являющаяся гладкой, является особой точкой поля). В структурных задачах граничные поверхности пластов – гладкие функции координат и поэтому особые точки поля могут располагаться вне пластов, причем сколь угодно ниже их. Но и в этих условиях на поверхностях структур могут находиться точки потери гладкости (точки излома, угловые точки и другие), которые являются особыми для любого элемента поля. Бывают задачи и

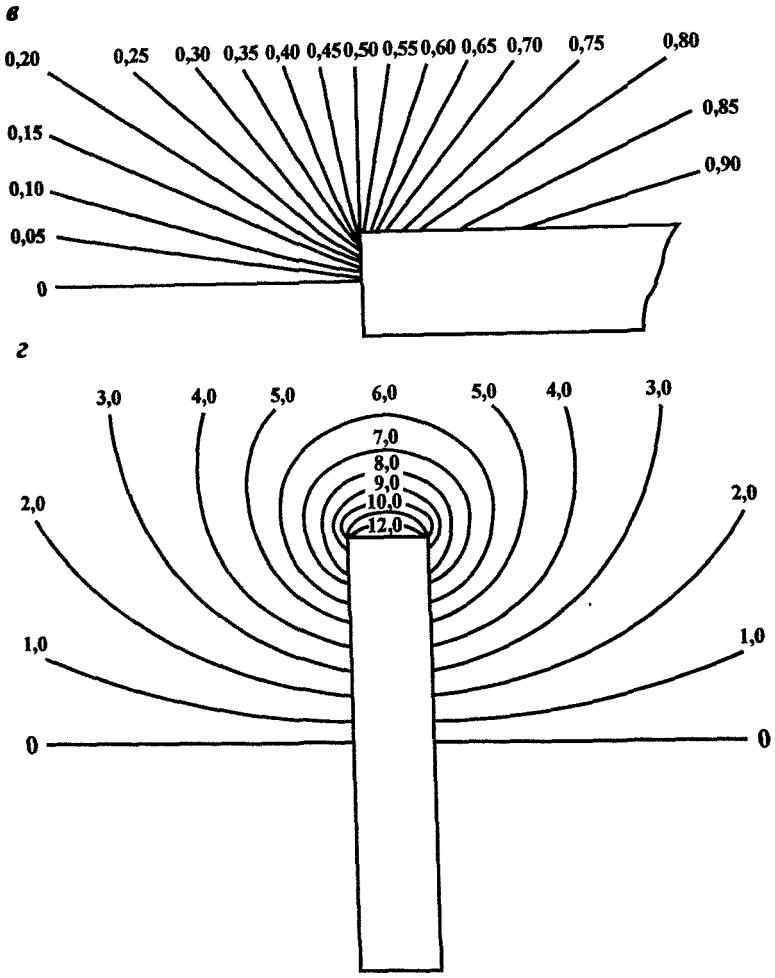


Рис. 5. Продолжение

смешанного характера, когда условия рудных и структурных задач встречаются вместе. Положение особых точек поля определяют, сравнивая форму изолиний в вертикальной плоскости с особенностями распределения поля для простейших моделей. Форма изолиний гравитационного поля V_z для некоторых простейших модельных тел приведена на рис. 5. Из рисунков видно,

что особые точки поля обладают фокусирующим действием. Изолинии поля ведут себя особым образом вокруг этих точек, причем форма изолиний зависит от формы тел. Например, для шара и бесконечного горизонтального кругового цилиндра особые точки служат точками касания изолиний аномалии V_z, для горизонтальных бесконечных материальной полосы и полуплоскости – точками пересечения изолиний.

Для тел более сложной формы форма изолиний будет сложнее, но фокусирующее свойство особых точек будет наблюдаться во всех случаях. Особые точки поля можно определить не только по значениям исходных аномалий, но и по их производным. При этом чем выше порядок производной, тем сильнее проявляется в изолиниях аномалий в вертикальной плоскости одна и та же особая точка поля

Из-за сильной чувствительности к ошибкам наблюдений способов аналитического продолжения аномалий в нижнее полупространство при практических расчетах выгоднее делать не прямой пересчет с поверхности наблюдений на каждый данный уровень, а последовательный пересчет с уровня на уровень с применением сглаживания пересчитанных значений аномалии на каждом промежуточном уровне.

Литература: [3, 14].

3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции имеет вид

$$U(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U(M)\,dS,\ M \in S,$$

где S – сфера; R – ее радиус; M – точка сферы; точка 0 – центр сферы (рис. 6, *а*). Из нее можно найти гармоническую функцию в центре сферы по ее значениям на поверхности сферы. Эта формула имеет широкое применение в гравимагниторазведке, в частности при определении аналитически продолженных значений потенциального поля. С этой целью на поверхности сферы берут шесть точек и среднее значение по поверхности сферы определяется как среднее по этим точкам (см. рис. 6, *а*):

$$U(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U(M)\,dS \approx \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} U(k).$$

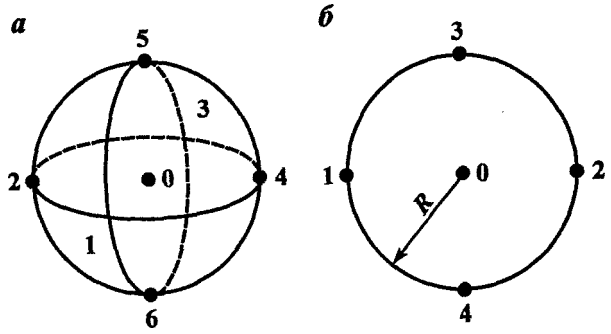


Рис. 6. Схема расположения точек:
а – на сфере; *б* – на окружности

Здесь точки 0 и 1–4 совпадают с точками поверхности наблюдений, точки 5 и 6 расположены на полюсах: точка 5 – в верхнем полупространстве, точка 6 – в нижнем.

Обозначим: $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} U(k) = \overline{U(R)}$ – среднее значение по окружности радиуса R. Тогда

$$U(6) = 6U(0) - 4\overline{U(R)} - U(5).$$

Отсюда можно определить значение гармонической функции в точке 6 (на глубине R), зная его значение в точке 5 – точке верхнего полупространства.

Эта формула получила название метода сеток, т.е. если заданы значения функции U в узлах параллельных и одинаково расположенных на плоскостях $Z = R = h = \text{const}$ и $z + h$ квадратных сеток, то она позволяет найти значения функции U в узлах таких же сеток на плоскостях $z - h$, $z - 2h$, $z - 3h$ и т.д.

При решении двумерной задачи интегральное среднее поле по сфере заменяется на среднее по окружности и вместо найденного выше равенства получим следующее (рис. 6, *б*):

$$U(4) = 4U(0) - U(1) - U(2) - U(3).$$

Литература: [14–16].

4. РЯД ТЕЙЛОРА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Применение ряда Тейлора для получения вычислительных схем заключается в следующем. Для точек, расположенных над и под началом координат на расстоянии h, т.е. на высоте $+h$ и на глубине $-h$, ряды Тейлора функции U по степеням h имеют вид

$$U(0, h) = U(0) + \frac{h}{1!}\frac{\partial U(0)}{\partial z} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U(0)}{\partial z^2} + \dots$$

$$U(0, -h) = U(0) - \frac{h}{1!}\frac{\partial U(0)}{\partial z} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U(0)}{\partial z^2} - \dots$$

Складывая и отнимая эти выражения, найдем

$$U(0, h) + U(0, -h) = 2U(0) + 2\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U(0)}{\partial z^2} + \dots$$

$$U(0, h) - U(0, -h) = 2\frac{h}{1!}\frac{\partial U(0)}{\partial z} + 2\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 U(0)}{\partial z^3} + \dots$$

Из этих выражений можно найти формулы, позволяющие определить значения U в области нижнего полупространства, зная значения входящих в них производных.

Литература: [3, 14, 16].

АНОМАЛИИ БУГЕ И ФАЯ, УЧЕТ ПОПРАВОК

1. АНОМАЛИИ БУГЕ И ФАЯ. ПРИМЕРЫ НЕКОТОРЫХ АНОМАЛИЙ

Нормальные значения гравитационного поля, которые определяются по теоретически полученным формулам, относятся к поверхности сфероида или эллипсоида вращения. Тогда как измеренные значения поля относятся к точкам физической поверхности. Поэтому для определения аномалий силы тяжести необходимо привести нормальные значения поля к уровню пунктов наблюдений. С этой целью учитывают поправку за высоту пунктов наблюдений (поправка за приведение силы тяжести в свободном воздухе), или поправку Фая (Фай – французский астроном-геодезист). С другой стороны, на измеренные значения гравитационного поля повлияли массы, заключенные в слое между уровнем пункта наблюдений (между физической поверхностью) и теоретической поверхностью Земли. Это влияние не вошло в значения нормального гравитационного поля. Поэтому для определения аномалий силы тяжести из измеренных значений гравитационного поля нужно вычесть влияние указанных масс.

Эту поправку учитывают в два приема. На первом этапе учитывают влияние неровностей рельефа физической поверхности Земли. С этой целью мысленно проводят через точку наблюдений вспомогательную поверхность параллельно теоретической поверхности Земли (сфероида или эллипсоида вращения). В ближайших к точке наблюдений зонах эту поверхность принимают за горизонтальную. При введении этой поправки за неровности дневного рельефа, если около пункта наблюдений находится впадина (физическая поверхность расположена ниже вспомогательной), то учитывают недостаток масс, если холм – то избыток масс. На втором этапе учитывается влияние масс, расположенных в слое, заключенном между рассмотренной вспомогательной поверхностью Земли и уровнем моря. Слой этот берется в виде бесконечного плоскопараллельного слоя и называет-

ся ***промежуточным слоем***. Таким образом, при определении аномалий силы тяжести таким путем необходимо учесть три поправки: поправку за высоту пунктов наблюдений, за влияние масс промежуточного слоя и за рельеф местности.

При практических расчетах вследствие отсутствия уверенных данных об отклонениях высот геоида над уровнем теоретической поверхности Земли (сфероида или эллипсоида вращения) значения высот h берут не от уровня теоретической поверхности Земли, как это должно было быть, а от уровня геоида (от уровня моря) (рис. 7). В переводе ***геоид*** означает землеподобный. Под геоидом понимается поверхность, совпадающая с невозмущенной поверхностью воды в открытых морях и океанах. Отклонения геоида от эллипсоида вращения колеблются примерно от −60 м до +60 м [4], эти отклонения происходят очень плавно в пределах больших площадей, и поэтому погрешностью, связанной с пренебрежением отклонениями между этими поверхностями, при геологоразведочных работах в пределах ограниченных территорий можно пренебречь.

Обозначим значения поученных поправок за высоту пунктов наблюдений, за влияние масс промежуточного слоя и за рельеф соответственно через $\Delta_1 g$, $\Delta_2 g$, $\Delta_3 g$. Измеренные значения ускорения свободного падения обозначим через $g_и$, а нормальные значения поля через γ. Примем, что высота точки наблюдений $h > 0$.

Аномалии Буге и Фая – это разность между измеренным значением поля и нормальным значением, приведенным к уровню пунктов наблюдений с учетом всех соответствующих поправок. Если при этом учтем только одну поправку $\Delta_1 g$ (поправка Фая), то получим ***аномалию Фая***

$$g_Ф = g_и - (\gamma - \Delta_1 g) = g_и - \gamma + \Delta_1 g = g_и - \gamma + 0{,}3086\, h.$$

Учтя все поправки, найдем

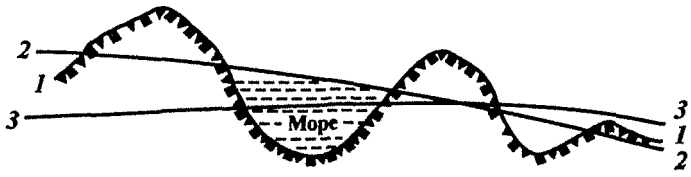


Рис. 7. Схема относительного расположения поверхностей:
1 – физическая поверхность Земли; *2* – поверхность геоида; *3* – поверхность теоретической Земли

$$g_Б = g_и - (\gamma - \Delta_1 g) - \Delta_2 g + \Delta_3 g = g_и - \gamma +$$

$$+ (\Delta_1 g - \Delta_2 g + \Delta_3 g) = g_и - \gamma + \Delta g_Б,$$

где суммарная поправка

$$g_Б = \Delta_1 g - \Delta_2 g + \Delta_3 g = (0{,}3086 - 0{,}0419\ \sigma)h + \Delta_3 g$$

называется ***поправкой Буге***, а аномалия $g_Б$, полученная с этой поправкой, называется ***аномалией Буге*** в честь французского ученого, впервые применившего его в своих исследованиях. В этом выражении при определении аномалий ускорения свободного падения в качестве плотности промежуточного слоя выбирают следующие значения: 1) $\sigma = 2{,}3$ г/см^3 при построении сводной карты аномалий силы тяжести для территории всей страны. Значение $\sigma = 2{,}3$ г/см^3 – это средняя плотность осадочных отложений; 2) $\sigma = 2{,}67$ г/см^3 (средняя плотность пород верхней части земной коры); 3) $\sigma = \sigma_и$, где $\sigma_и$ – значение истинной плотности пород промежуточного слоя, которое используют для правильной интерпретации аномалий ускорения свободного падения. Значение $\sigma_и$ нужно определить или в лабораторных условиях по образцам пород, отобранных из естественных обнажений пород

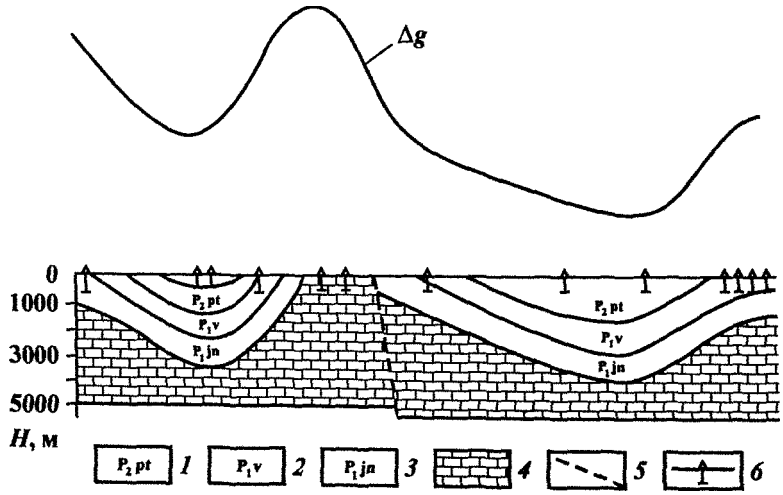


Рис. 8. Геологический разрез и кривая Δg по профилю через северную часть гряды Чернышова и Роговское поднятие в Печорском угленосном бассейне (по Б.Д. Полетаеву):

1 – печорская серия; *2* – воркутская серия; *3* – юньягинская серия; *4* – доперм-ские известняки; *5* – тектонические нарушения; *6* – скважины

либо полученных в процессе бурения, или непосредственно из гравиметрических данных соответствующими способами.

Рассмотрим некоторые аномалии силы тяжести.

На рис. 8 показан аномалия Буге в сопоставлении с особенностями геологического строения одного из районов Печорского угленосного бассейна. Из рисунка видно, что впадины пермской продуктивной толщи отражаются в гравитационном поле минимумами, а поднятия допермских пород – четкими максимумами силы тяжести (плотности терригенной толщи перми $\sigma = 2{,}5$ г/см^3, карбонатной толщи карбона $\sigma = 2{,}7$ г/см^3, избыточная плотность $\Delta\sigma = 0{,}2$ г/см^3).

По такой аномалии можно изучить строение угленосных бас-

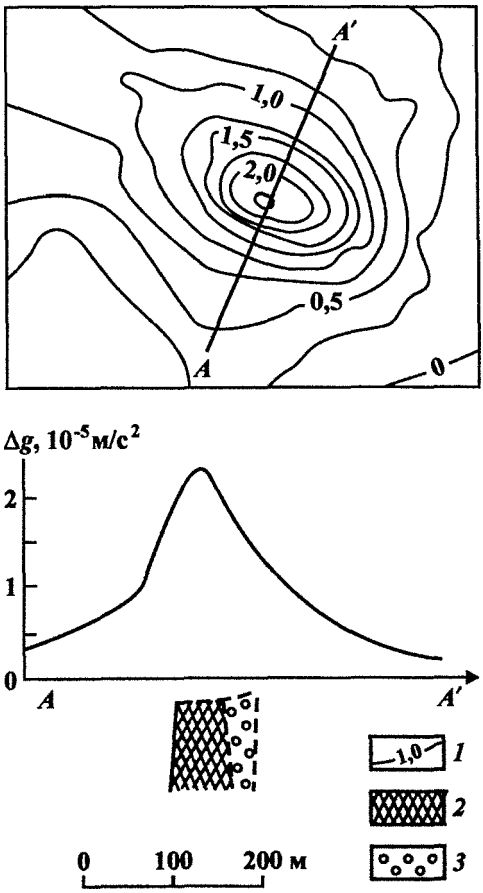


Рис. 9. Гравитационная аномалия над сульфидным телом (по С. Вернеру):
1 – изоаномалы $\Delta g \cdot 10^{-5}$ м/с^2; *2* – сплошные и *3* – вкрапленные сульфидные руды

сейнов – определить их границы, выделить и оконтурить отдельные структурные элементы, определить мощность продуктивной толщи.

Гравитационная аномалия V_z от отдельного изолированного рудного тела в изолиниях по площади и по профилю, проходящему через центральную часть аномалии, показана на рис. 9. Аномалия соответствует сульфидному телу. Она достаточно интенсивная (плотность сплошных сульфидных руд составляет 4,2–4,7 г/см^3, средняя плотность различных по составу вмещающих руду пород равна 2,6–2,8 г/см^3, т.е. избыточная плотность достаточно большая – достигает 1,6–1,9 г/см^3). Бурение установило в районе аномалии наличие сплошных и вкрапленных сульфидных руд.

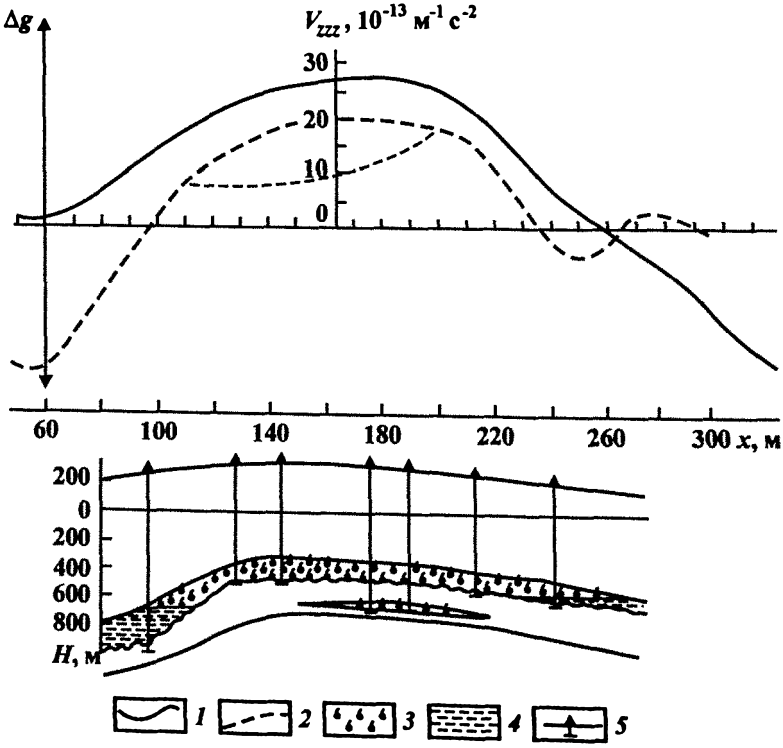


Рис. 10. Кривые Δg и V_{zzz} для Северо-Ставропольского газового месторождения (по В.М. Березкину):
1 – кривая Δg; *2* – кривая V_{zzz}; *3* – газовая залежь; *4* – водоносный слой; *5* – скважины

На рис. 10 приведены графики изменения значений элементов гравитационного поля V_z и V_{zz} над Северо-Ставропольским газовым месторождением (В.М. Березкин). Аномалия V_z от данного месторождения газа достаточно большая. Ее амплитуда достигает 1 мГал. Значительной и достаточно четкой является и вычисленная от V_z аномалия второй вертикальной производной V_{zz} над месторождением. Отличительной особенностью этой последней аномалии является то, что на ней четко выделяется в виде минимума отрицательная аномалия от газовой залежи (мощность продуктивных пластов составляет 90–135 м, эффективная плотность залежи равна 0,16 г/см^3 – эффективная плотность залежи определяется как произведение разности плотностей пластовой воды и нефти или газа на коэффициенты пористости и нефтегазонасыщения).

Аномалии от залежей нефти и газа являются отрицательными. Они приводят обычно к выполаживанию наблюдаемых над месторождениями аномалий силы тяжести. В благоприятных случаях они отражаются в виде небольших минимумов на измеренных значениях поля V_z – на фоне аномалий от структур.

Литература: [3, 6, 9, 14].

2. ПОПРАВКА ЗА ИЗМЕНЕНИЕ ВЫСОТ ПУНКТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Как известно, значения силы тяжести уменьшаются с удалением от Земли. Величину этого изменения можно определить, беря производную от силы тяжести по направлению нормали к поверхности Земли. В пределах погрешности измерений производную по нормали можно заменить производной по направлению радиуса-вектора ρ. Поэтому изменение значений силы тяжести с высотой h можно определить величиной

$$dg/dh = dg/d\rho,$$

где g – ускорение свободного падения. Его можно представить в виде двух составляющих:

$$g = \gamma + g_a,$$

где γ – нормальные значения силы тяжести; g_a – аномальные значения. Так как

$$\gamma = -dW/d\rho,$$

где W – потенциал ускорения свободного падения, то

$$dg/dh = -d^2W/d\rho^2 + dg_a/d\rho.$$

Если возьмем в качестве γ значение силы тяжести на широте 45°, равное 980,6 см/с^2, а для радиуса Земли ρ = 6370 км, то получим

$$d^2W/d\rho^2 = 0{,}3086 \text{ мГал/м}.$$

При этом значении поправки вычислим

$$dg/dh = -0{,}3086 + dg_a/d\rho.$$

В этой формуле первый член учитывает величину ***нормального вертикального градиента силы тяжести***, второй член – величину ***аномального вертикального градиента***. Если определить величину нормального вертикального градиента более точно, т.е. если учесть сжатия Земли и ее суточное вращение, то после интегрирования из последнего равенства можно получить

$$\Delta g = -0{,}3086h + (dg_a/d\rho)h.$$

Так как $dg_a/d\rho = -(V_{zz})_a$, окончательно получим

$$\Delta g = -[0{,}3086 + (V_{zz})_a]h.$$

Эта формула определяет влияние высоты пунктов наблюдений на значения гравитационного поля. В ней для того, чтобы получить Δg в миллигалах, необходимо брать значения h в метрах. Знак «минус» перед формулой указывает на то, что с увеличением высоты h значения Δg уменьшаются.

Если в последней формуле отбросить второй член, т.е. если не учитывать аномальность вертикального градиента, то она будет определять величину поправки за свободный воздух (иначе ее называют ***поправкой Фая или Гельмерта***). Вводя ее в значения нормального поля, приводят их к уровню пунктов наблюдений при вычислениях гравитационных аномалий.

Об изменении аномального вертикального градиента можно судить по данным следующего примера. Пусть задана бесконечная горизонтальная материальная линия, вызывающая над ней аномалию силы тяжести в 5 мГал (максимальное значение). Глубинам ее залегания в 0,5 и 0,2 км будут соответствовать максимальные значения аномального вертикального градиента 0,01000 и 0,0250 мГал/м.

Аномальный вертикальный градиент учитывают в необходимых случаях при исследовании отдельных аномалий, при построении же карт аномалий его не учитывают. В этом случае пользуются только первой частью формулы, т.е. выражением

$$\Delta g = -0{,}3086h.$$

Эту поправку вводят в нормальные значения ускорения свободного падения и поэтому для того, чтобы привести нормальное поле к уровню пунктов наблюдений, ее нужно брать при $h > 0$ со знаком «минус». Таким образом, приведенное к уровню пунктов наблюдений значение нормального поля будет равно $\gamma - 0{,}3086h$.

Литература: [2, 3, 6, 14].

3. ПОПРАВКА ЗА ПРИТЯЖЕНИЕ МАСС ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ

Поправку за притяжение масс промежуточного слоя определяют как притяжение бесконечного плоскопараллельного слоя, нижней границей которого является уровень моря, верхняя граница проходит через уровень пункта наблюдений. Притяжение такого слоя

$$\Delta g = 2\pi G\sigma h.$$

Это выражение и определяет притяжение бесконечного плоского параллельного слоя мощности h. Если в этом равенстве возьмем h в метрах, а Δg_z определим в миллигалах, то получим

$$\Delta g = 0{,}0419\ \sigma h.$$

Эту поправку вводят в измеренное значение поля силы тяжести и поэтому ее нужно брать со знаком «минус».

Литература: [2, 3, 6, 14].

4. ПОПРАВКА ЗА ОКРУЖАЮЩИЙ РЕЛЬЕФ

При определении поправки за рельеф необходимо представить неровности вокруг точки наблюдений в виде совокупности элементарных тел простой геометрической формы, влияние которых можно выразить аналитически.

Представим массы, составляющие рельеф, в виде секторов цилиндрического кольца, заключенного между двумя прямыми вертикальными цилиндрами с радиусами r_i и r_{i+1}, ось которых совпадает с точкой наблюдений (рис. 11). Нижняя граница цилиндров совпадает с уровнем моря, верхняя граница (горизонтальная плоскость) проходит через пункт наблюдений.

Влияние масс всего цилиндрического кольца можно определить из выражения

$$V_z(0,0) = 2\pi G\sigma\left[\sqrt{r_i^2 + h^2} - r_i - \sqrt{r_{i+1}^2 + h^2} + r_{i+1}\right].$$

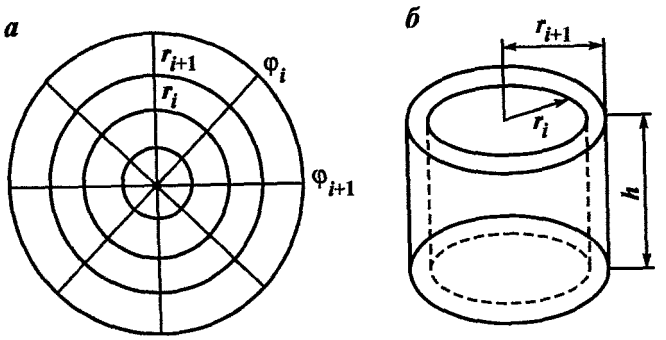


Рис. 11. Схема учета влияния окружающего рельефа (*а*) и элементарный кольцевой цилиндр (*б*)

Влияние центральной зоны из этого выражения получим при $r_i = 0$ и $r_{i+1} = r_1$:

$$V_z(0,0) = 2\pi G\sigma\left(h^2 + r_1^2 - \sqrt{r_1^2 + h^2}\right).$$

Аналогичные выражения можно получить и в других системах координат.

Для случая одного кольцевого сектора величину гравитационного эффекта найдем, разделив полученные выражения на общее количество секторов в кольце n.

Существуют различные способы учета поправки за рельеф (П.И. Лукавченко, В.М. Березкина, А.И. Пришивалко, Е.А. Мудрецовой и др.), заключающиеся в различных способах вычислении интеграла. В настоящее время вся работа по учету поправки за рельеф выполняется с применением современных ЭВМ.

При учете поправки за рельеф местности $\Delta_3 g$ нужно рассмотреть два случая: 1) примем (рис. 12), что около пункта наблюде-

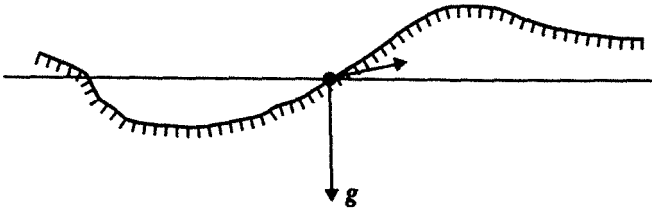


Рис. 12. К определению влияния рельефа на изменение силы тяжести

ний находится холм, массы возвышенности или холма уменьшают измеренное значение силы тяжести и поэтому поправку за рельеф нужно учесть со знаком «плюс»; 2) пусть около пункта наблюдений находится впадина. В этом случае в ней отсутствуют массы, следовательно, и нет их влияния. Но, учитывая поправку за влияние масс промежуточного слоя в виде бесконечного плоскопараллельного слоя, мы вычли влияние отсутствующих во впадение масс, тем самым уменьшили силу тяжести. Поэтому и в этом случае значение поправки за рельеф нужно учитывать со знаком «плюс». Таким образом, во всех случаях поправку за рельеф нужно брать со знаком «плюс».

Литература: [2, 3, 6, 14].

5. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ АТМОСФЕРНЫХ МАСС

Изменение плотности атмосферных масс влияет на величину ускорения силы тяжести, во-первых, из-за изменения их притяжения, во-вторых, из-за деформации поверхности Земли при изменениях в атмосфере. Из этих двух причин основной является первая, поэтому рассмотрим ее более подробно. При этом пренебрежем влиянием сферичности Земли вследствие малого ее влияния.

Если атмосферные массы действуют на показания гравиметра как бесконечный плоскопараллельный слой, то в этом случае можно пользоваться формулой

$$\Delta g = 0{,}426 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta P.$$

Из этого равенства видно, что если изменение давления ΔP составляет 30 мбар, то значение Δg изменится на 0,013 мГал, если же ΔP = 46 мбар, то Δg = 0,02 мГал, т.е. является вполне ощутимой величиной. Поэтому учитывать влияние изменения атмосферных масс нужно обязательно. Отсюда следует, что при гравиметрических наблюдениях высокой точности одновременно с показаниями гравиметров необходимо еще записывать на пунктах измерений и величину давления воздуха.

В случаях, когда давление воздуха меняется сильно в различных точках площади наблюдений, поправку за изменение атмосферных масс можно учесть по специально построенным палеткам по методике, аналогичной методике определения поправки за рельеф местности (вместо высот пунктов наблюдений в ячейках палетки берутся значения разности давления).

Приводимые здесь результаты годны только для учета поправок в районах, далеких от морских побережий. Для участков,

близких к морским побережьям, решать указанную задачу очень трудно. Во-первых, из-за сложности учета изменения уровня моря при волнениях; во-вторых – из-за невозможности учета всех факторов, имеющих место на морях при изменении давления атмосферы. Поэтому при создании пунктов высокоточной гравиметрической съемки необходимо, по возможности, избегать морских побережий.

Литература: [6, 14].

6. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Из-за непрерывного круговорота воды на Земле верхние слои земной коры то впитывают воду, то теряют ее, что приводит к непрерывному изменению плотности или массы слоев у земной поверхности. Это, в свою очередь, приводит к соответствующему изменению ускорения свободного падения на поверхности Земли. Такие изменения зависят от времени и по-разному происходят в разные годы, в разные времена года и в различных местах.

Влияние изменения массы подземных вод впервые в отечественной литературе было подробно рассмотрено Б.В. Вихиревым, и им показано, что оно может достигать 0,05–0,07 мГал. Поэтому учитывать это влияние совершенно необходимо. Как известно, подземные воды подразделяются на почвенные, грунтовые и межпластовые. Выделяют также жильные и карстовые воды.

Почвенные воды находятся в почвенном слое, пропитывая его на небольшую глубину, и залегают у самой дневной поверхности. Грунтовыми являются воды, залегающие на первом от дневной поверхности водоупорном слое. Грунтовый слой, находящийся между почвенными и грунтовыми водами и не содержащий воды, называют зоной аэрации. Воды, находящиеся в водоносных пластах, залегающих между пластами водоупорных слоев, являются межпластовыми водами. Эти воды обычно образуют артезианские бассейны. Все указанные воды находятся в порах, трещинах или других сообщающихся друг с другом пустотах горных пород. Жильные и карстовые воды заполняют соответственно изолированные зияющие трещины и карстовые пустоты.

Уровень грунтовых вод может меняться в значительных пределах (до 1,8 м в год и более). Этим изменениям уровня грунтовых вод соответствуют и ощутимые изменения в значениях гравитационного поля. Поэтому, учитывая, что в каждом районе в одно и то же время года уровень грунтовых вод может быть различным, высокоточные гравиметрические наблюдения нужно проводить одновременно с наблюдениями за изменением уровня

грунтовых вод и влияние этих изменений необходимо учесть в значениях гравитационного поля. Такие наблюдения помогут учесть и влияние эпизодических колебаний уровня грунтовых вод, вызываемых оттепелями, ливнями и другими причинами.

Изменение уровня грунтовых вод приводит к изменению массы воды в горных породах, к приближению или к удалению их от поверхности, что в свою очередь приводит к изменению значений силы тяжести. Это положение иллюстрируется, например, данными рис. 13, на котором показана зависимость между изменениями уровня грунтовых вод в скважине, пробуренной на территории Токийского университета, и изменениями разности силы тяжести между двумя точками, одна из которых находится в опорном пункте Токийского университета, а другая – в гравиметрическом пункте Какиока за пределами Токио (Т. Цубои).

В этом примере скорости изменения ускорения свободного падения и понижения уровня воды в скважине составляют соответственно 0,011 мГал/год и 2 м/год. При примерно горизонтальном положении водоносного пласта и относительно большой его площади (по сравнению радиуса площади с глубиной ее залегания) влияние понижения уровня грунтовых вод на силу тяже-

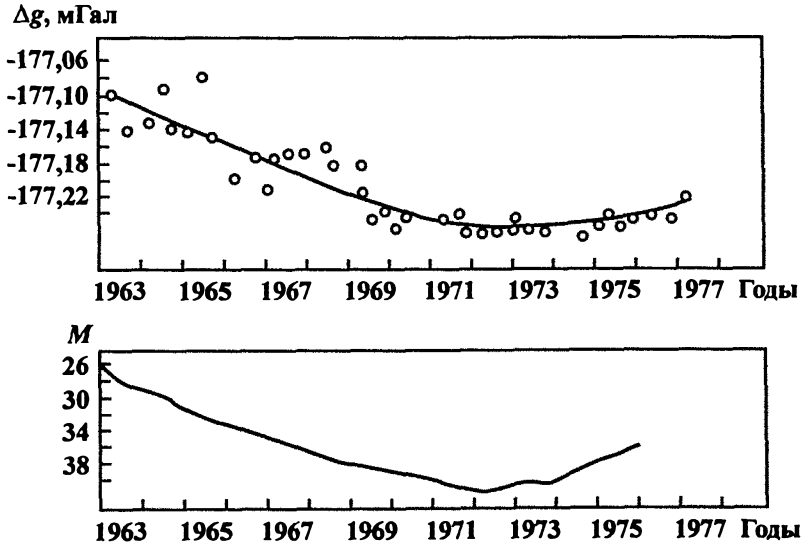


Рис. 13. Сравнение изменений силы тяжести с изменением уровня грунтовых вод

сти можно оценить по формуле материального горизонтального диска при $\mu = \sigma \cdot h$:

$$\Delta g = 2\pi G \sigma h \left[1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}}\right],$$

где h – толщина диска; Z – глубина его залегания; σ – плотность; R – радиус диска. Если коэффициент пористости пород принять равным 15 %, то понижению уровня воды в породах на 2 м будет соответствовать слой мощностью

$$h = 200 \cdot 0{,}15 = 30 \text{ [см]}.$$

Тогда при $\sigma = 1$ г/см^3, $Z = 30$ м и $R = 250$ м этому слою воды будет соответствовать сила тяжести

$$\Delta g = 2\pi G \cdot 30\left(1 - \frac{30}{252}\right) = 2\pi G \cdot 30 \cdot 0{,}88 = 0{,}011 \text{ мГал},$$

то есть такая же величина, как и наблюдается. Проблема учета влияния грунтовых вод является достаточно сложной. Эта формула годится только для различных приблизительных оценок. В действительности же для учета влияния изменения уровня грунтовых вод необходимо учесть конкретную форму и размеры водоносных пластов. Задача сводится к созданию моделей пластов, отвечающих реальным условиям, и к теоретическому определению соответствующих им значений силы тяжести.

Кроме того, необходимо учесть еще и ***сезонный характер изменения массы грунтовых вод***. Например, в засушливый период (больше всего летом) масса воды значительно меньше, в дождливый (весной и осенью) – больше. При измерениях силы тяжести после сильных дождей можно получить одни значения, перед ними – другие (после дождей, если вода накапливается в пласте, масса грунтовых вод больше, до дождей – меньше). Оценим величину возможных изменений силы тяжести, связанных с сезонным характером массы грунтовых вод.

Предположим, что дождь выпал на территории с радиусом в 10 км и более и что вода накапливается в горизонтальных слоях. Тогда значение изменения силы тяжести можно оценить по формуле бесконечного плоскопараллельного слоя

$$\Delta g = 2\pi G \sigma h.$$

Полагая толщину накопившейся воды $h = 10$ см, найдем

$$\Delta g = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ мГал}.$$

Если принять, что вся вода накапливается на глубине Z = = 25 м в горизонтальном пласте шириной $a = 2l$ при длине $b > (8 \div 10) \cdot a$, то в центре пласта при $l = 50$ м влияние изменения массы воды толщиной 10 см можно определить по формуле для аномалии от бесконечной материальной горизонтальной полосы при $x = 0$:

$$\Delta g = 4\pi G \sigma h \operatorname{arctg} \frac{l}{Z} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мГал.}$$

Кроме того, если измерения проводить перед сильным дождем и после него, то нужно учитывать, что в первом случае добавочная масса воды, находясь в слое облаков, действует на гравиметр с одним знаком, а после дождя, находясь в пласте, действует с противоположным знаком, поэтому получаемые значения будут еще больше.

Литература: [6, 14].

АНОМАЛИИ ИЗОСТАТИЧЕСКИЕ И ТЕОРИЯ ИЗОСТАЗИИ

1. ТЕОРИЯ ИЗОСТАЗИИ

Аномальная часть гравитационного поля неодинакова в различных областях Земли. Особенно сильно различается она для горных и океанических областей. Например, аномалии Буге для горных областей отрицательны, а для океанов – резко положительны. Аномалии Фая, наоборот, для горных областей положительны, а для океанов близки к нулю.

Поправка Буге убирает притяжение масс промежуточного слоя и поэтому, казалось бы, значения аномалий Буге не должны корректироваться с рельефом физической поверхности. Это в самом деле так, если рассматривать небольшие по размерам области, за исключением тех случаев, когда рельеф поверхности Земли косвенно отражает распределение масс в земной коре. Если же рассматривать области земной поверхности относительно больших размеров, то проведенный различными исследователями анализ зависимостей между усредненными значениями аномалий Буге и высот рельефа по квадратам с размерами 1°×1° показывает, что между этими значениями существует достаточно тесная связь. Такой связи не наблюдается между усредненными значениями аномалии Фая и высот рельефа. Отсюда следует, что в региональном плане массы, составляющие рельеф, не оказывают особого влияния на значения гравитационного поля. Это может быть только в том случае, когда существует компенсация масс: избытку масс над земной поверхностью (горным массивам) соответствует недостаток масс под ней и, наоборот, недостатку масс на дневной поверхности соответствует избыток масс под поверхностью Земли. На наличие компенсации масс указывает и факт наличия значительных отрицательных аномалий Буге в горных областях и положительных – в областях с пониженным рельефом. Наличие такой компенсации масс привело к возникновению ***теории изостазии*** (изостазия в переводе означает состояние равновесия). Под изостазией понимается равновесное со-

стояние, в котором находятся земная кора и верхняя мантия. Согласно этой теории, на некоторой определенной глубине должна существовать поверхность равного давления со стороны вышележащих масс – ***поверхность компенсации.***

Земная кора имеет различную толщину и плотность, подчиняющиеся определенным закономерностям. Одинаковые по площади основания отдельных вертикальных блоков земной коры должны оказать одинаковое давление на поверхность компенсации. Эта поверхность равного давления называется изостатической поверхностью или ***поверхностью изостатической компенсации масс.*** Существует несколько гипотез изостатической компенсации – гипотеза Пратта, Эри, Вейнинг-Мейнеса.

По ***схеме изостазии Пратта*** предполагается, что земная кора состоит из отдельных блоков различной плотности (рис. 14). Считается, что все блоки имеют одинаковую массу. Поэтому более высокий блок должен иметь меньшую плотность. Глубину поверхности компенсации обозначим через T. Тогда условие равновесия (равенство давлений) по Пратту можно записать следующим образом:

для континентов

$$\sigma(T + H) = C = \text{const};$$

для океанов

$$\sigma(T - h) + 1{,}03h = C,$$

где H – высота физической поверхности Земли; h – глубина моря; 1,03 – плотность морской воды, г/см^3; σ – значение плотности пород блока.

В ***гипотезе Эри*** принимается, что земная кора состоит из различных блоков одинаковой плотности. Эти блоки плавают в более плотной магме. Согласно закону Архимеда, чем выше блок, тем глубже он погружается в магму. Отсюда следует, что мощность земной коры для горных областей должна быть больше (т.е. существуют корни гор), для океанических областей – меньше. Согласно этой гипотезе,

$$\sigma_к h_к = \sigma_м h_м,$$

где $\sigma_к$ и $h_к$ – плотность и мощность коры; $\sigma_м$ и $h_м$ – плотность верхней мантии и глубина погружения коры в мантию. Поверхность одинакового давления в данном случае проходит на глубине погружения самого высокого блока. Из рис. 14 видно, что нижняя граница земной коры повторяет в обратную сторону физическую поверхность Земли – чем больше высота дневной по-

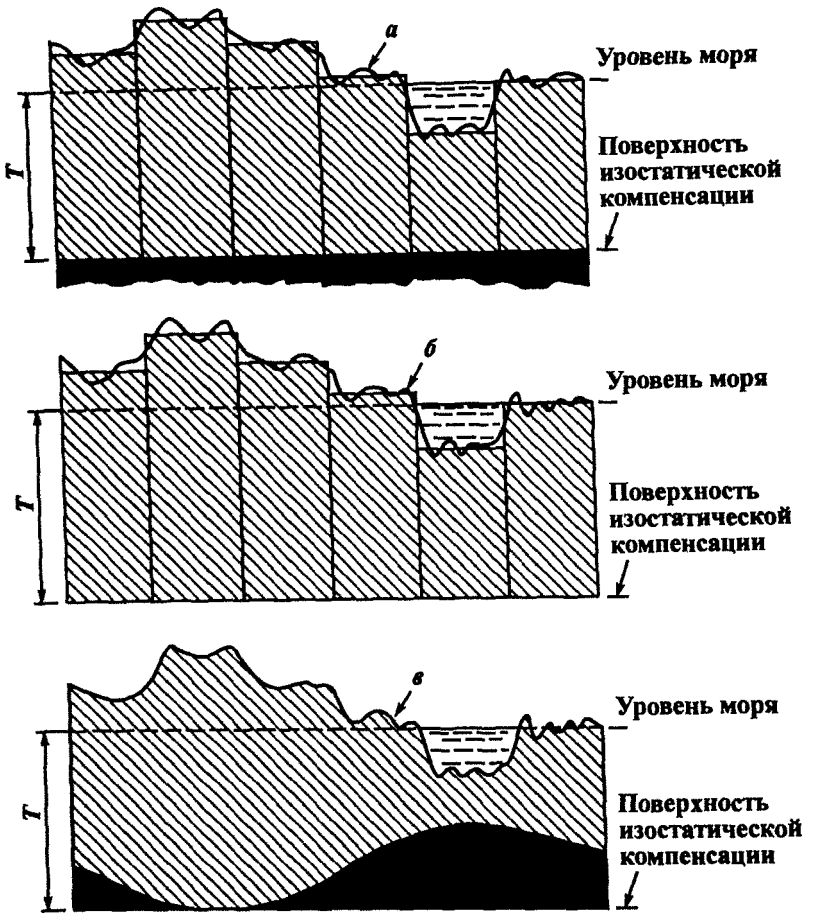


Рис. 14. Строение земной коры по гипотезе изостазии:
а – Пратта, *б* – Эри, *в* – Вейнинг-Мейниса

верхности, тем глубже залегает нижняя граница земной коры и наоборот.

Из этих двух гипотез наиболее правдоподобной является гипотеза Эри. Основными недостатками этих схем являются допущение о том, что земная кора находится в реальном равновесном состоянии, и, самое главное, пренебрежение силами сцепления между соседними блоками.

Усовершенствованная гипотеза Эри, учитывающая механические свойства земной коры, была предложена ***Вейнингом-Мейнесом***. Она учитывает силы сцепления между отдельными частями земной коры. По этой гипотезе земную кору рассматривают в виде некоторой упругой плоской пластины, которая прогибается под действием масс, возвышающихся над уровнем моря. Основные элементы этой схемы подтверждаются имеющимися в настоящее время сведениями о глубинном строении земной коры, полученными сейсмическими методами. По этим сведениям мощность земной коры под континентами меняется в основном от 30 до 70 км, причем для пористых областей она больше. Под океанами она меняется всего от 5 до 15 км. Горы поднимаются над уровнем моря на 4–8 км, а земная кора под ними погружается в среднем на глубину 40–60 км. Под континентами она углубляется на 30–35 км. Толщина же океанической земной коры изменяется от 4–5 до 15–17 км.

Литература: [6, 14].

2. ИЗОСТАТИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ

Изостатические аномалии – это аномалии, полученные с учетом изостатической поправки. Изостатическую аномалию вычисляют следующим образом.

На первом этапе вычисляют и исключают из наблюденных значений силы тяжести составляющую за влияние всех масс, возвышающихся над уровнем моря. Поправка, учитывающая влияние этих масс, называется ***топографической, или поправкой за топографию***. На втором этапе в наблюденные значения силы тяжести добавляют влияние удаленных масс, но разместив их между поверхностью геоида и глубиной компенсации и распределив в вертикальные блоки земной коры согласно принятой гипотезе. Кроме того, учитывают еще и поправку Фая. При вычислениях в отличие от поправки Буге влияние топографических масс учитывают в пределах всей поверхности Земли. При этом ближайшие участки принимают плоскими, а в дальних зонах учитывают сферичность Земли. Критерием правильного выбора глубины компенсации является близость изостатических аномалий к нулю. Значения изостатических аномалий должны быть заключены между аномалиями Фая и аномалиями Буге. При этом обязательным условием изостатической компенсации является то, что аномалии Фая в данной области должны быть положительными, а Буге – отрицательными. Если же обе эти аномалии положительны или отрицательны, то область не компенсирована. Иссле-

дование этого вопроса показало, что в целом земная кора находится в состоянии гидростатического равновесия, но это равновесие наблюдается в региональном масштабе для весьма обширных территорий. Есть и районы, в которых изостатическое равновесие не наблюдается. К ним относятся, например, Западный Кавказ, Крым, о. Кипр. Есть такие районы и в Сирии, Индии, в переходных зонах от континентов к океану, например, в районе Курило-Камчатской островной дуги.

Литература: [6, 14].

АНОМАЛИИ ПРИ МОРСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ И ИЗМЕРЕНИЯХ В ШАХТАХ

Как известно, морские измерения силы тяжести производят на кораблях, в подводных лодках, на дне мелководных морей. Если измерения проводят на надводном судне, то прибор может находиться несколько выше или ниже уровня моря, при измерениях в подводных лодках он может находиться на несколько десятков метров ниже уровня моря.

При измерениях на дне моря аномалия Буге определяется по формуле

$$g_Б = g_и - \gamma - 0{,}3086h + 2 \cdot 0{,}0419\ \sigma_в\ h + 0{,}0419(\sigma - \sigma_в)h,$$

где h – глубина пункта наблюдений на дне моря; $\sigma_в$ = = 1,03 г/см^3 – плотность морской воды; σ – плотность пород, залегающих между уровнем наблюдений и уровнем приведения. В этом равенстве величина $2 \cdot 0{,}0419\ \sigma_в h$ определяет притяжение морской воды. Она удваивается из-за того, что, находясь над точкой наблюдений, слой воды уменьшает силу тяжести, а если бы он находился под точкой наблюдений, то увеличивал бы силу притяжения на ту же величину. Поправка Буге соответствует тому, что море «засыпано» массами, плотность которых равна $\sigma - \sigma_в$.

При измерениях на борту надводного судна аномалия Буге определяется по формуле

$$g_Б = g_и - \gamma + 0{,}3086h_1 + 0{,}0419(\sigma - 1{,}03)h,$$

где h_1 – высота точки наблюдения над уровнем моря; h – глубина морского дна.

При измерениях внутри моря на глубине h_2 от уровня моря аномалия Буге

$$g_Б = g_и - \gamma - 0{,}3086h_2 + 0{,}0838\ \sigma_в h_2 + 0{,}0419(\sigma - \sigma_в)h,$$

где h – глубина морского дна от уровня моря.

Если измерения проводятся с гравиметром в скважинах, шахтах или в других горных выработках, то приведение значения

силы тяжести к уровню геоида осуществляется при помощи ***поправки Прея***. Она учитывает увеличением силы тяжести с глубиной и уменьшение ее значений из-за влияния масс, расположенных выше точек наблюдений. Поправка Прея имеет вид

$$\Delta g_{\text{П}} = 0{,}3086h - 2 \cdot 0{,}0419\ \sigma h, \qquad (1)$$

где h – глубина точки наблюдений в шахте от уровня моря. Аномалия Прея получается при учете поправки Прея

$$g_{\text{П}} = g_{\text{н}} - \gamma + 0{,}3086h - 0{,}0838\ \sigma h.$$

При необходимости нужно учесть еще и поправку за влияние рельефа морского дна.

Выражение (1) можно использовать для определения плотности промежуточного слоя

$$\sigma = (0{,}3086h - \Delta g_{\text{П}})/0{,}0838h.$$

Аномалию Фая, получаемую с учетом только поправки Фая, можно определить из всех приведенных здесь равенств, если в выражениях поправок, входящих в них, оставить только член с коэффициентом 0,3086.

Литература: [2, 3, 6, 14].

ВАРИАЦИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Рассматривая гравитационное поле в целом, можно отметить, что величина и направление силы тяжести в любой точке поверхности Земли непрерывно изменяются с течением времени. Эти изменения, или вариации силы тяжести, являются следствиями различных причин. Среди них и внутренние причины, связанные с развитием и динамикой Земли, различными процессами, происходящими в ее недрах, и внешние причины, связанные с влиянием различных небесных тел, явлениями, происходящими на них.

Вариации, связанные с внешними причинами, вызываются в основном притяжением Луны и Солнца. Эти вариации зависят от периодически изменяющихся над данной точкой земной поверхности положений Луны и Солнца. Поэтому и вариации являются ***периодическими***, иначе их называют ***приливными*** (по аналогии с явлением земных приливов). Они имеют относительно большую амплитуду, поэтому их нетрудно измерить. Периодические вариации силы тяжести экспериментально измеряются в соответствующих обсерваториях, их теоретически вычисляют для любого наперед заданного момента времени для любой точки Земли. По этим данным строят соответствующие таблицы и графики, по которым учитывают поправку за солнечно-лунное притяжение при высокоточных гравиметрических измерениях.

Кроме того, изучение приливных вариаций силы тяжести имеет и самостоятельное значение. Дело в том, что если бы Земля была абсолютно жестким телом, то вычисленные значения вариаций, вызванных положениями Луны и Солнца, точно совпали бы с измеряемыми на поверхности Земли значениями. В действительности же измеряемые значения вариаций силы тяжести больше вычисленных для жесткой Земли. Эти отклонения связаны с упругой деформацией Земли, вызванной влиянием приливных сил. Поэтому изучая их, можно определить упругость вещества земных недр.

Непериодические или неприливные изменения силы тяжести имеют относительно меньшую амплитуду – амплитуду, соизмеримую с погрешностями измерений. Поэтому до сравнительно

недавнего времени их наличие ставили под сомнение. Только в последние годы, когда стало возможным вести гравиметрические измерения с высокой степенью точности, был доказан факт их существования и измерение неприливных вариаций силы тяжести приобрело практическое значение. Причиной неприливных вариаций силы тяжести могут быть изменения высот пунктов наблюдений в результате опусканий и подъемов земной поверхности, изменения уровня грунтовых вод, плотности масс атмосферных слоев, плотности пород в недрах Земли в результате расширения вещества из-за радиоактивного разогрева, фазовых превращений, перемещения масс в результате конвекций, перераспределение масс в глубинных слоях Земли, явления, связанные с землетрясениями, вулканическая деятельность и некоторые другие. Например, вертикальные движения земной поверхности могут достигать для некоторых районов нескольких сантиметров в год.

Если предположить, например, что пункт наблюдения поднялся или опустился на 10 см, то сила тяжести в этом пункте изменится на 0,03 мГал. Если в 100-километровом плоском слое плотность изменится на 0,00001 г/см^3, то сила тяжести на поверхности изменится на 0,04 мГал.

Изменение положения масс в недрах Земли при извержениях вулканов, землетрясениях также должно приводить к изменению силы тяжести. В Японии, в районе активных вулканов, были установлены факты скачкообразного изменения силы тяжести более, чем на 0,1–0,2 мГал. Причины этих изменений объясняются подъемом магмы, плотность которой отличается от плотности окружающих масс.

Изучение неприливных вариаций силы тяжести приобрело особо важное значение в последние годы, когда работами ряда авторов была показана возможность осуществления эффективного контроля за режимом эксплуатации месторождений нефти и газа и газохранилищ, слежения за перемещениями масс в пределах месторождения. Результаты исследования вариаций гравитационного поля позволили предсказать ранее неизвестные пути миграции газа, определить направления изменчивости коллекторских свойств пород, фиксировать факты обводнения пластов в результате эксплуатации месторождения.

Литература: [2, 6, 14].

1. ПРИЛИВНЫЕ ВАРИАЦИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Из небесных тел ощутимое влияние на земную поверхность оказывают Луна и Солнце. Приливные вариации силы тяжести зависят от их суммарного влияния и от деформации поверхности Земли под действием их притяжения. Этот вид вариаций силы тяжести имеет амплитуду, в несколько раз превышающую погрешность единичного измерения гравиметров, их можно фиксировать и они хорошо изучены.

Так как при вращении Земли вокруг своей оси положение какой-то выбранной на земной поверхности точки наблюдения меняется периодически по отношению к Луне и Солнцу, то меняются периодически и вызываемые этими телами в рассматриваемой точке ускорения свободного падения.

Примем, что центр тяжести Земли испытывает в течение суток одинаковое притяжение. Тогда влияние силы притяжения данного небесного тела в рассматриваемой точке земной поверхности можно определить как разность силы его притяжения в центре масс Земли и в данной точке на поверхности.

Для вертикальной составляющей (изменения ускорения свободного падения) получим следующие выражения:

для Луны

$$\Delta g = 0{,}165\left(\cos^2 z - \frac{1}{3}\right);$$

для Солнца

$$\Delta g = 0{,}076\left(\cos^2 z - \frac{1}{3}\right).$$

В этих формулах z – зенитное расстояние – угол между направлениями из центра масс Земли на точку наблюдений и на центр масс рассматриваемого небесного тела.

Вследствие притяжения Луны и Солнца фигура Земли деформируется. Она растягивается по направлению к светилу и сжимается в перпендикулярном направлении. При этом, во-первых, происходит перераспределение массы в теле Земли и, во-вторых, точки на ее поверхности смещаются по высоте. Эти две причины приводят к изменению силы притяжения рассматриваемых тел, но при получении формул они не учтены. Формулы получили, считая, что Земля представляет собой абсолютно твердое тело. Для случая реальной Земли необходимо учесть и изменения силы притяжения, возникающие при деформации земного шара. Высокоточные гравиметрические наблюдения по-

казывают, что в силу указанных причин наблюдаемые значения лунно-солнечного притяжения больше вычисляемых по формулам на 15–25 %. Поэтому при определении значений лунно-солнечного притяжения практически достаточно пользоваться этими формулами, но после увеличения численных значений коэффициентов в них на 15 % (А.К. Маловичко), т.е. следующими формулами:

для Луны

$$\Delta g = 0{,}190\left(\cos^2 z - \frac{1}{3}\right);$$

для Солнца

$$\Delta g = 0{,}087\left(\cos^2 z - \frac{1}{3}\right).$$

Величину поправки Δg в каждый данный момент времени нужно определять как сумму влияний Луны и Солнца. Временная зависимость Δg определяется совместным движением Луны и Солнца по небесной сфере, т.е. является сложной функцией времени. Эту сложную зависимость можно представить в виде большого числа синусоидальных составляющих, среди которых можно выделить долгопериодические и короткопериодические. Примерами короткопериодических волн могут служить лунный прилив длительностью в половину лунных суток (12, 42 ч) и лунно-солнечный суточный прилив длительностью 23, 93 ч. К долгопериодическим вариациям силы тяжести относятся изменения с периодом обращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца. Существуют изменения еще большего периода. Деление на периодические и вековые изменения силы тяжести условно, например, многие долгопериодические изменения можно рассматривать как вековые.

Точность современных измерений силы тяжести требует учета вариаций силы тяжести. С целью учета поправки за лунно-солнечное влияние в измеренные значения силы тяжести для каждой широты местности рассчитывают на год для каждых суток графики суточных изменений силы тяжести, обусловленных притяжением Луны и Солнца. Примерный вид таких графиков показан на рис. 15. Из рисунка видно, что амплитуда изменения силы тяжести возрастает с уменьшением широты точки наблюдения.

Если учтем перераспределение массы в Земле и изменение высоты пунктов, вызванные притяжением Луны и Солнца, то получим следующую формулу (А.К. Маловичко):

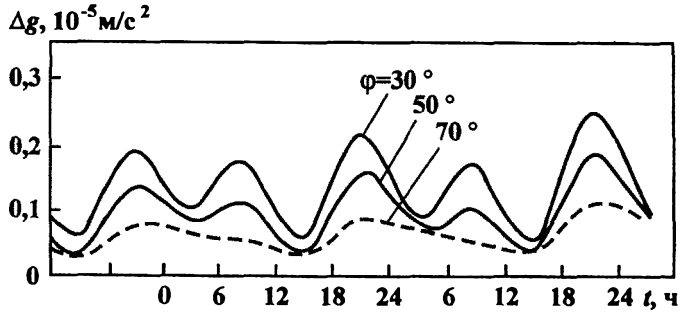


Рис. 15. Графики суточных изменений силы тяжести, вызванных притяжением Луны и Солнца на трех различных широтах

$$\Delta g = \Delta g_0 \left(1 - \frac{3}{2}k + q\right) = \beta \Delta g_0,$$

где $\beta = 1 - 3k/2 + q$; Δg_0 – значение, получаемое без учета деформации Земли; k – коэффициент пропорциональности, связанный с перераспределением массы в Земле; q – коэффициент пропорциональности изменения силы притяжения в зависимости от изменения высоты пункта.

Безразмерные коэффициенты k и q зависят от упругих свойств Земли. Если бы Земля была твердой, т.е., если б не было деформации, то k и q были бы равны нулю.

Из последнего равенства видно, что ожидаемое значение изменения силы тяжести в β раз отличается от значения Δg_0, соответствующего предположению, что Земля идеально жесткая, а земные приливы отсутствуют. Измеряемые значения вариаций силы тяжести во время приливов меняются примерно на 0,1 мГал. Сравнивая наблюдаемые и расчетные значения, можно определить коэффициент β. Найденные Х. Такеучи значения β меняются в пределах от 1,15 до 1,17. Но как отмечено в работах японских геофизиков, коэффициент β может меняться и во времени, например, при землетрясениях. Отмечено, что до землетрясения вблизи полуострова Идзу β равнялся в среднем 1,2; после землетрясения в течение нескольких дней он составлял 1,6; через 20 дней он опять стал равным 1,2. Кроме того, изменение этого коэффициента удовлетворительно коррелируется с изменением вулканических микросейсм.

Коэффициент β может меняться и в различных точках земной поверхности, что указывает на наличие местной неоднородности в строении Земли.

Литература: [6, 14].

2. СОСТАВЛЯЮЩИЕ НЕПРИЛИВНЫХ ВАРИАЦИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ВО ВРЕМЕНИ

Вариации гравитационного поля можно разделить на относительно низкочастотную (региональную) и высокочастотную (локальную) составляющие при анализе значений поля вдоль профиля или по площади и на относительно линейную и периодическую составляющие при анализе значений поля во времени на одном и том же пункте.

Анализ значений неприливных вариаций силы тяжести на пункте наблюдений показывает, что их можно представить в виде суммы двух частей – линейной и периодической. Ранее изучение изменчивости неприливных вариаций силы тяжести проводили без разделения на линейную и периодическую части. Такое изучение не является достаточно эффективным. Для исследования закономерностей изменения периодической части неприливных вариаций силы тяжести необходимо из наблюденных данных исключить линейную часть. Изучение характера изменений самой линейной части также представляет интерес. Это следует из того, что величина углового коэффициента изменения линейной части зависит от геодинамических неоднородностей осадочного чехла (С.А. Серкеров, А.В. Кононков).

Обозначим через Δg_t наблюденные значения неприливных вариаций силы тяжести, $\Delta g_л$ – линейную часть, а через $\Delta g_п$ – периодическую часть. Тогда

$$\Delta g_t = \Delta g_л + \Delta g_п.$$

Согласно отмеченному выше, примем, что

$$\Delta g_л = Bt + b,$$

$$\Delta g_п = A \cos(at + \varphi),$$

где B – значение углового коэффициента линейной части; a, A и φ – частота, амплитуда и фаза переменной части.

В общем виде запишем

$$\Delta g_t = Bt + A \cos(at + \varphi) + b.$$

Отсюда видно, что коэффициент B можно определить как среднее значение производной $\Delta g_t'$:

$$B = (\overline{\Delta g_t'}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\Delta g').$$

Зная B, можно определить разность

$$\Delta g_t - Bt = b + A\cos(at + \varphi).$$

По значениям этой разности можно определить значение коэффициента b как среднее его значение по t:

$$B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(\Delta g_t)_i - Bt_i].$$

Зная коэффициенты B и b, можно определить все значения линейной составляющей вариаций гравитационного поля. Затем, вычитая из Δg_t значения линейной составляющей, можно определить периодическую составляющую вариаций гравитационного поля. При этом коэффициент A можно определить по экстремальным значениям остаточной (периодической) составляющей вариаций гравитационного поля. Относительно легко определяются и постоянные a и φ.

При анализе вариаций гравитационного поля над нефтегазовыми месторождениями все коэффициенты формулы имеют определенный смысл и все они связаны с процессами, происходящими в нефтегазовых пластах – с изменением напряженно-деформационных свойств осадочного чехла, с движением флюидов в пластах и др. Анализ реальных значений вариаций над месторождениями нефти и газа в различных районах показывает, что в местах активных геодинамических процессов меняется амплитуда и период периодической составляющей, наклон к оси t линейной составляющей вариаций гравитационного поля.

Литература: [2, 14].

ВЫПОЛНЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Способы решения различных интегралов, приводящие к получению вычислительных схем, можно рассматривать как некоторые пути получения алгоритмов при выполнении трансформаций в области полей с применением ЭВМ. Однако в последние годы, когда почти все операции по трансформации полей проводятся с применением ЭВМ, более точные результаты преобразования аномалий можно получить в частотной области.

Выполнение трансформаций в частотной области удобней, проще и дает более точные результаты. Схема выполнения трансформаций при этом очень простая. Она показана на рис. 16 и состоит из следующих операций, выполняемых последовательно:

1) вычисление спектра S по аномалии;

2) определение или задание частотной характеристики трансформации Ф;

3) вычисление спектра трансформированной аномалии $S_т$;

4) вычисление значений трансформированной аномалии $f_т$.

Рассмотрим более подробно эти операции.

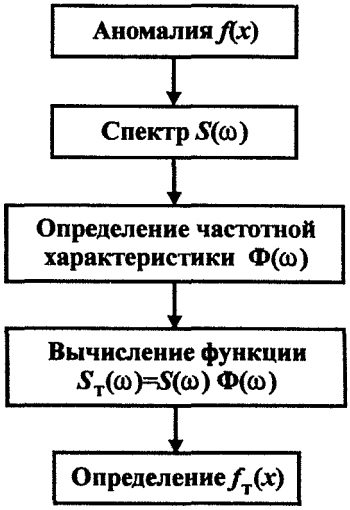
1. **Вычисление спектров.** При вычислении спектра можно пользоваться следующими правилами. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то лучше всего определить спектр, непосредственно вычисляя интеграл

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(-i\omega x) dx.$$

Такое прямое интегрирование является самой быстрой и точной операцией. В необходимых случаях нужно пользоваться теоремами о спектрах, таблицами преобразований Фурье.

Если функция $f(x)$ задана таблично или графически, то хорошие результаты можно получить, аппроксимируя ее различными аналитическими выражениями, иногда и несколькими – двумя

Рис. 16. Схема вычислений поля с применением преобразований Фурье



или тремя (на различных интервалах горизонтальной оси). Спектр такой функции можно определить прямым интегрированием.

При вычислениях лучше всего использовать простейшие выражения, соответствующие прямой линии, параболам, экспоненте, частям тригонометрических функций. В случаях, когда трудно или невозможно выразить заданную функцию $f(x)$ аналитически, необходимо пользоваться численными способами интегрирования с использованием различных алгоритмов.

Существуют различные способы, позволяющие вычислить значения спектров с применением ЭВМ. К ним относятся способы, реализующие непосредственно выражения интегралов, способ быстрого преобразования Фурье (БПФ) и другие. Главное преимущество способа БПФ перед другими состоит в увеличении скорости вычислений из-за меньшего числа операций; точность получаемых значений спектра при этом не увеличивается. Описание этих способов можно найти в соответствующих работах. Отметим лишь, что при вычислении энергетических спектров хорошие результаты дает так называемый способ максимальной энтропии. Он является адаптивным, лучше передает частотный состав функции и обладает боле высокой разрешающей способностью.

Во всех случаях вычисления спектров получаемые значения спектров рекомендуется сглаживать.

2. **Определение частотной характеристики.** При пользовании

способами трансформации, частотные характеристики которых не зависят от характера преобразуемой аномалии (способы аналитического продолжения аномалий, вычисления высших производных и др.), известна частотная характеристика трансформации Ф, и необходимо только в определенных случаях задаваться параметрами трансформации, например, значением высоты или глубины аналитического продолжения аномалий. В других случаях, когда значения частотной характеристики зависят от характера изменения исходной аномалии, ее значения вычисляются в процессе трансформации, например, частотные характеристики оптимальных фильтров выделения аномалий, фильтров сглаживания, адаптивных фильтров и др.

3. **Определение спектра трансформированной аномалии.** Значения спектра трансформированной аномалии $S_т$ определяются согласно выражению

$$S_т(\omega) = S(\omega)\Phi(\omega),$$

где $\Phi(\omega)$ – частотная характеристика.

4. **Вычисление значений трансформированной аномалии.** Значения преобразованной или трансформированной аномалий определяются по равенству

$$f_т(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S_т(\omega)\exp(i\omega x)d\omega.$$

Эта формула и формула вычисления спектра похожи по своей структуре, вычисляются по схожим алгоритмам и поэтому не требуют специального рассмотрения. Так же, как и вычисление спектра, существуют различные программы, реализующие обратное преобразование Фурье, обеспечивающее достаточную точность вычислений.

В случаях вычисления таких трансформаций, как высшие производные, аналитическое продолжение аномалий в нижнее полупространство и им подобные, частотные характеристики которых возрастают с увеличением частоты, получаемые значения необходимо сгладить. С этой целью подынтегральные выражения формул необходимо умножить еще и на частотную характеристику способа сглаживания.

Аналогично проводят вычисления и в трехмерном случае.

Литература: [13, 14, 16].

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Аномалии производных от некоторого исходного элемента гравитационного или магнитного поля обладают повышенной чувствительность к неглубоко залегающим аномальным массам и поэтому подчеркивают локальные особенности исследуемой территории. Происходит это из-за того, что значения производных быстрее затухают с расстоянием, чем исходные аномалии, причем тем быстрее, чем выше порядок производной. А чем выше степень затухания аномалии, тем меньше передается ее влияние в область действия других соседних источников. Из-за этого на картах производных места расположения неглубоко залегающих отдельных источников в плане локализуются четко. Этим объясняется также высокая горизонтальная разрешающая способность производных (способность обнаружения расположенных по горизонтали близко друг к другу тел) (рис. 17).

Возможности производных в разделении полей более наглядно можно показать следующим образом. Известно, что значения горизонтальной и вертикальной производных можно определить из выражений

$$U_x(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [U(x + \Delta x, z) - U(x, z)]/\Delta x,$$

$$U_z(x) = \lim_{\Delta z \to 0} [U(x, z + \Delta z) - U(x, z)]/\Delta z.$$

Рассмотрим приближенные значения этих производных, определяемых при некоторых малых конечных значениях Δx и Δh. Эти значения будут равны разности исходной функции (рис. 18) и той же функции, смещенной относительно исходной на небольшое расстояние Δx и Δh, поделенной на это расстояние. Причем чем меньше Δx и Δh, тем точнее получим значения производных.

В качестве источника поля возьмем бесконечную горизонтальную призму (вертикальный пласт). Тогда смещенное аномальное поле будет характеризовать притяжение такого же пла-

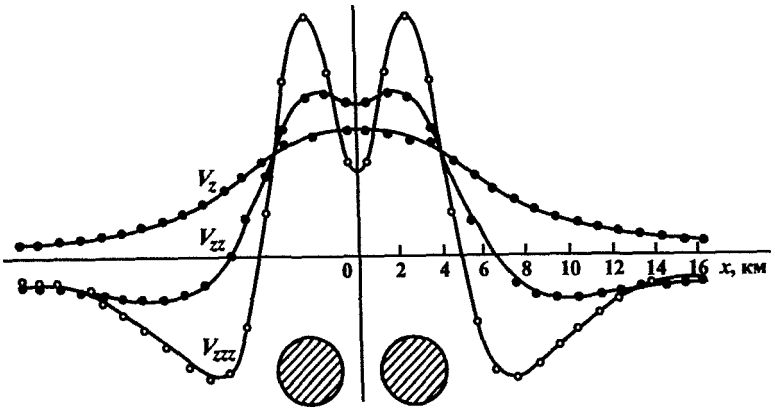


Рис. 17. Изменение первых, вторых и третьих производных потенциала над двумя цилиндрическими телами

ста, но смещенного относительно исходного на расстояние Δx влево или на Δh вверх. Значения разностного поля будут характеризовать тела в виде узких вертикальных или горизонтальных полосок, получаемых после отнятия от смещенного пласта исходного пласта. Действия этих полосок будут противоположными по знаку.

Таким образом, в случае, когда аномальным телом является бесконечная горизонтальна призма, производная по x будет представлять поле, образованное двумя прямоугольными полосками шириной Δx.

Для значений вертикальной производной таким аномальным источником будет элементарное тело, состоящее из двух смещенных по вертикали элементарных полосок (слоев). Так как при удалении тел их влияние уменьшается, то основное действие на поле будут оказывать ближайшие к поверхности наблюдений части полосок (в случае вертикальной производной – ближайшая к поверхности положительная полоска пласта, влияние нижней дальней полоски значительно уменьшается). Все это будет верно не только для пласта, но и для тел сложной формы или для нескольких тел. Это же в большей степени относится и к производным высших порядков, причем, чем выше порядок производной, тем сильнее она отражает влияние неглубоко залегающих масс. При этом влияние глубоко залегающих крупных объектов мало сказывается на значениях производных высших порядков. Таким образом, в полях производных подчеркиваются значения

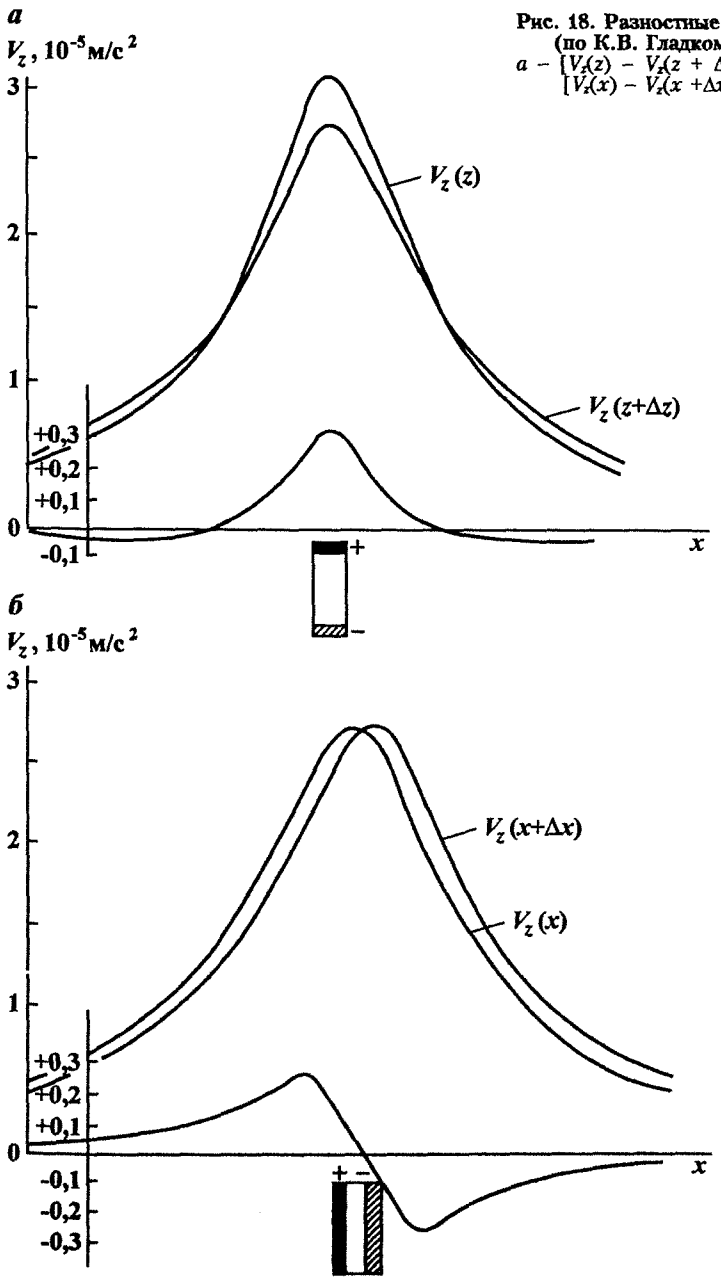


Рис. 18. Разностные кривые (по К.В. Гладкому):
а – $[V_z(z) - V_z(z + \Delta z)]$; *б* – $[V_z(x) - V_z(x + \Delta x)]$

локальных аномалий. Значения же региональных составляющих в зависимости от степени их плавности либо исключаются, либо подавляются.

Формулы, устанавливающие связь между различными производными гармонической функции $U(x, z)$ и самой этой функцией, заданной на горизонтальной плоскости наблюдений, можно получить на основе дифференцирования интегралов, получаемых при решении задач Дирихле и Неймана. Например, задача Неймана для бесконечной горизонтальной плоскости решается при помощи интеграла

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_z(\varepsilon, \eta, 0) \frac{1}{r} d\xi d\eta,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$.

Дифференцируя это выражение по x, y и z соответственно m, n и l раз, найдем

$$\frac{\partial^{m+n+l} U(x, y, z)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_z(\varepsilon, \eta, 0) \frac{\partial^{m+n+l} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l}.$$

Для практических расчетов удобнее пользоваться цилиндрической системой координат R, φ, z. Например, при вычислении значений U_{zz} в начале координат справедливо равенство

$$U_{zz}(0, 0, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} U_z(R, \varphi, 0) \frac{(R^2 - 2z^2) R dR d\varphi}{(R^2 + z^2)^{5/2}}. \qquad (2)$$

При решении двумерной задачи вместо этих выражений получим

$$\frac{\partial^{m+l} U(xz)}{\partial x^m \partial z^l} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_z(\xi, 0) \frac{\partial^{m+l} \{\ln[z^2 + (x-\xi)^2]\} d\xi}{\partial x^m \partial z^l},$$

$$U_{zz}(0, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_z(\xi, 0) \frac{\xi^2 - z^2}{(\xi^2 + z^2)^2} d\xi. \qquad (3)$$

Интегралы (2) и (3) при $z = 0$ сходятся только при определенных предположениях о характере изменения функции U_z, так как при R или ξ, стремящихся к нулю, подынтегральные выражения стремятся к бесконечности. Этого можно избежать, если под интегралами брать разности

$$U_z\ (R, \varphi, 0) - U_z(0, 0, 0),\ U_z(\xi, 0) - U_z(0, 0).$$

Нетрудно показать, что такая замена не изменяет значения рассматриваемых интегралов. При этом формулы (2) и (3) примут вид

$$U_{zz}(0, 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [U_z(R, \varphi, 0) - U_z(0, 0, 0)] \frac{dR d\varphi}{R^2}, \qquad (4)$$

$$U_{zz}(0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [U_z(\xi, 0) - U_z(0, 0)] \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

При построении вычислительных схем выражение (4) записывают в следующем виде:

$$U_{zz}(0, 0, 0) = \int_0^{\infty} [\overline{U_z(R)} - U_z(0, 0, 0)] \frac{dR}{R^2},$$

где $\overline{U_z(R)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_z(R, \varphi) d\varphi$ – среднее значение аномалии U_z на окружности радиусом R.

При построении вычислительных схем для определения U_{zz} всю область интегрирования разбивают на ряд зон. Влияние нулевой и дальней зон учитывают в виде поправок за нулевую зону и за бесконечность. Учитывая, что существуют универсальные способы получения вычислительных схем и то, что расчеты можно вести и без них с применением только частотных характеристик трансформаций в частотной области, способы получения известных в литературе вычислительных схем здесь не рассматриваются.

Рассмотрим ниже вопросы вычисления значений горизонтальных и вертикальных производных аномалий не на основе применения интегральных формул, а с применением различных интерполяционных формул, использующих значения конечных разностей различных порядков. Прежде всего рассмотрим вопросы вычисления горизонтальных производных первого и второго порядков.

Горизонтальную производную первого порядка можно вычислить по формуле (1), но для этого необходимо точки брать через малые расстояния Δx. В случаях конечных и достаточно больших значений Δx можно пользоваться следующей интерполяционной формулой:

$$U_x(x) = \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta U(x) - \frac{1}{6}\Delta^3 U(x) + \ldots\right], \qquad (5)$$

где ΔU – конечная разность первого порядка (разность между двумя последовательными значениями функции, соответствующими двум соседним точкам профиля (Δx – расстояние между ними); $\Delta^2 U$ – конечная разность второго порядка – разность между двумя последовательными значениями первой разности и т.д.

Аналогично значения второй горизонтальной производной аномалии $U(x)$ определяются из формулы

$$U_{xx}(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\Delta^2 U(x) - \frac{1}{12}\Delta^4 U(x) + \ldots\right]. \qquad (6)$$

Если выразим значения конечных разностей, входящих в эти равенства, через исходные значения аномалии, то получим следующее выражение:

$$U_x(x) = \frac{1}{12\Delta x}[U(x - 2\Delta x) - U(x + 2\Delta x) +$$

$$+ 8U(x + \Delta x) - 8U(x - \Delta x)].$$

Если бы в ряде (5) ограничились только разностью первого порядка, то получили бы формулы

$$U_x(x) = [U(x + \Delta x) - U(x - \Delta x)]/2\Delta x,$$

$$U_{xx}(x) = \{4[U(x + \Delta x) + U(x - \Delta x)]/3 - 5U(x)/2 -$$

$$- [U(x + 2\Delta x) + U(x - 2\Delta x)]/12\}. \qquad (7)$$

Ограничившись в равенстве (6) только первым членом, получим выражение

$$U_{xx}(x) = [U(x + \Delta x) + U(x - \Delta x) - 2U(x)]/\Delta x^2. \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь вопросы определения значений вторых вертикальных производных. Для решения этой задачи можно воспользоваться уравнением Лапласа

$$U_{zz}(x, y) + U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y) = 0. \qquad (9)$$

Отсюда можно определить U_{zz} по известным значениям U_{xx} и U_{yy}. Значения этих горизонтальных производных можно определить из равенства (6). Таким путем получаются известные формулы М.У. Сагитова, А.К. Маловичко. Если же воспользоваться урав-

нением (9), записав его в полярных координатах, то, применяя способ наименьших квадратов, можно получить известные вычислительные схемы Элкинса.

Для двухмерных аномалий из уравнения (9) получим

$$U_{zz}(x) = -U_{xx}(x).$$

Поэтому для определения вторых вертикальных производных аномалий U в двумерном случае можно воспользоваться готовыми выражениями (7) и (8).

Точность вычисления значений производных потенциальных полей тем выше, чем меньше расстояние Δx. Но уменьшить величину Δx ниже определенного предела нельзя, так как в этом случае резко возрастает чувствительность вычислительных схем к ошибкам наблюдений. Эта чувствительность тем меньше, чем больше Δx.

Ниже приведены две из основных вычислительных схем, применяемых на практике:

формула М.У. Сагитова

$$U_{zz} = 4[U(0) - \overline{U(S)}]/S^2;$$

формула А.К. Маловичко

$$U_{zz} = [5U(0) - 5{,}33\overline{U(S)} + \overline{0{,}33U(2S)}]/S^2,$$

где S – расстояние между пунктами наблюдений.

Литература: [2, 6, 14, 16].

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ И ИХ ПОЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим универсальные способы получения вычислительных схем.

Во всех этих способах построение вычислительных схем сводится к построению их частотных характеристик. Зная выражения частотных характеристик, можно перейти и к самым вычислительным схемам:

частотные характеристики

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cos(\omega x_k),$$

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho x_k);$$

вычислительные схемы

$$f_т(0) = \sum_{k=0}^{n} C_k \overline{f(x_k)},$$

$$f_т(0) = \sum_{k=0}^{n} C_k \overline{f(r_k)},$$

где C_k – коэффициенты вычислительных схем; x_k и r_k – радиусы усреднений. Черточка над функцией f указывает на усреднение (в двумерном случае по двум точкам, отстоящим симметрично от начала координат на расстояние x_k, в трехмерном случае – по окружности радиусом r_k). Первые два выражения – не что иное, как некоторые усеченные ряды косинусов и ряды бесселевых функций, совпадающих с точной частотной характеристикой трансформации до некоторой граничной частоты $\omega_г$ или $\rho_г$ (рис. 19).

Отсюда следует, что частотные характеристики вычислительных схем, а следовательно, и сами вычислительные схемы, можно получить разложением частотной характеристики точной трансформации в ряды бесселевой функции первого рода нуле-

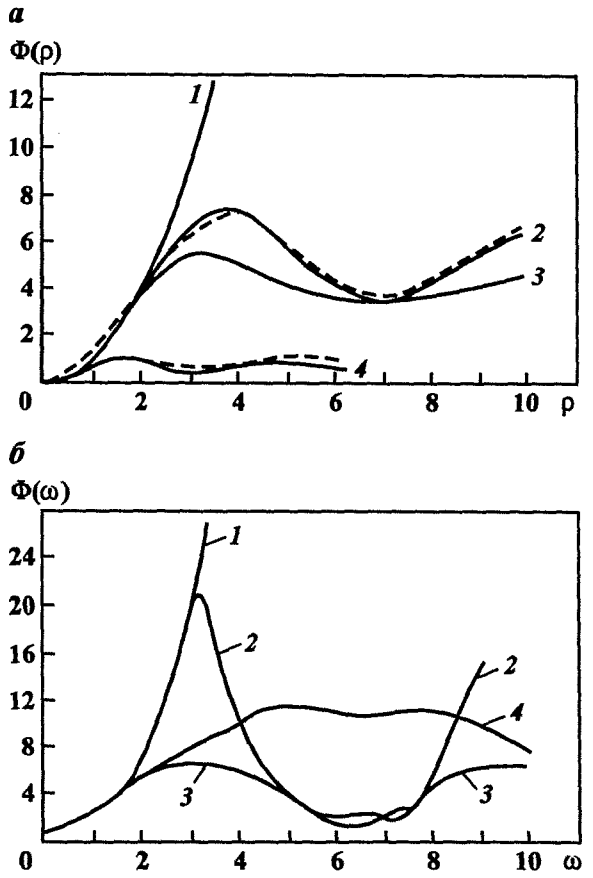


Рис. 19. Частотные характеристики вычислительных схем:
а – способы вычисления вторых вертикальных производных (трехмерный случай): *1* – точная; *2, 3, 4* – способы А.К. Маловичко, Розенбаха, Элкинса; *б* – способы аналитического продолжения аномалий в нижнее полупространство: *1* – точная; *2, 3, 4* – способы Рейнбоу, сеток, В.Н. Страхова

вого порядка и в ряды Фурье по косинусам на интервале частот ω или ρ от 0 до $\omega_т$ или $\rho_т$. Впервые на эту возможность было указано В.Н. Страховым.

К рядам бесселевой функции относятся ряды Фурье – Бесселя, Шлемильха и Дини. Наиболее приемлемы ряды Фурье – Бесселя и Шлемильха.

Рассматриваемые ряды являются бесконечными, но быстро

сходящимися для большинства применяемых на практике трансформаций.

Учитывая это, их можно сделать конечными, ограничив число членов при некотором значении $k = n$ (при достаточно малом значении коэффициента C_k). При этом коэффициенты необходимо несколько изменить с тем, чтобы сумма коэффициентов равнялась значению частотной характеристики точной трансформации Ф в начале координат, а сама частотная характеристика несущественно отличалась бы от частотной характеристики на интервале частот $(0, \omega_г)$. Как показывает опыт, эта операция несложная, и практически можно ограничиться значением n, меньшим пяти – шести.

Ниже даны разложения частотных характеристик некоторых трансформаций в ряды Фурье – Бесселя и косинусов

$$|\omega| = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_г},$$

где

$$C_0 = \omega_г / 2, \quad C_k = \frac{2\omega_г}{\pi^2} \frac{(-1)^k - 1}{k^2},$$

где

$$\omega^2 = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_г},$$

где

$$C_0 = \omega_г^2 / 3, \quad C_k = \frac{4\omega_г^2}{\pi^2 k^2} (-1)^k;$$

$$\rho^2 = C_0 - \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\rho r_k),$$

где

$$C_0 = \rho_г^2, \quad C_k = 8\rho_г^2 / [(\rho_г r_k)^3 J_1(\rho_г r_k)];$$

$$\exp(|\omega| H) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{k\pi\omega H}{A},$$

где

$$C_0 = \frac{1}{A}(e^A - 1), \quad C_k = \frac{2A}{A^2 + \pi^2 k^2}[e^A(-1)^k - 1], \quad A = \omega_г H.$$

Если изменить в последнем равенстве знаки A и H на обратные, то можно получить случай разложения частотной характеристики $\exp(-|\omega|H)$. Из написанных равенств при разных значениях ω_r можно получать разные вычислительные схемы. При этом, чем больше ω_r, ρ_r, тем точнее вычислительная схема, но увеличение граничной частоты приводит к росту коэффициентов, что, в свою очередь, приводит к увеличению степени ее чувствительности к ошибкам наблюдений.

В.Н. Страхов предложил и ряд других универсальных способов получения вычислительных схем. В частности, в них к условиям получения коэффициентов при решении двумерной задачи относятся следующие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|H} \left| \Phi(\omega, h) - \sum_{-N}^{N} C_k^{(N)} e^{ik\omega\Delta x} \right| d\omega = \min,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\omega|H} \left| \Phi(\omega, h) - \sum_{-N}^{N} C_k^{(N)} e^{ik\omega\Delta x} \right|^2 d\omega = \min,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|H} \left| \Phi(\omega, h) - \sum_{-N}^{N} C_k^{(N)} e^{ik\omega\Delta x} \right|^2 d\omega = \min,$$

$$\int_{-a}^{a} \left| \Phi(\omega, h) - \sum_{-N}^{N} C_k^{(N)} \exp(ik\Delta x\omega) \right|^2 d\omega = \min,$$

где $a = \pi/\Delta x$.

В этих равенствах в виде сумм записаны приближенные выражения частотных характеристик. Параметр H соответствует глубине залегания ближайшей к поверхности особой точки поля.

Рассматривая в целом проблему построения и применения вычислительных схем, необходимо отметить следующее. Прежде всего легко понять, что если известна частотная характеристика вычислительной схемы, то известна и сама вычислительная схема. Между ними существуют указанные выше прямые соотношения перехода от частотной характеристики к вычислительной схеме и наоборот. Если использовать при построении вычислительных схем рассмотренные выше бесконечные ряды, то может оказаться, что вычислительная схема будет громоздкой. Но почти всегда любую громоздкую схему можно упростить, заменить более простой вычислительной схемой, не снижая точности результатов преобразования. Это можно сделать, сохраняя несколько

первых основных членов разложения, с приведением суммы оставшихся коэффициентов к значению частотной характеристики точного преобразования в начале координат при $\omega = 0$ или $\rho = 0$. Причем коэффициенты нужно изменить так, чтобы частотная характеристика упрощенной вычислительной схемы на интервале $(0, \omega_т)$ или $(0, \rho_т)$ не существенно отличалась бы от частотной характеристики истинного преобразования. При этом можно достаточно удовлетворительно аппроксимировать точную частотную характеристику с помощью двух, трех, а иногда и большего числа членов.

Такие более простые формулы хорошо известны и давно применяются с успехом в практике, например, формулы Б.А. Андреева, М.У. Сагитова, В. Грифина и др. В настоящее время, когда в практику вычисления широко внедрены ЭВМ, большое число членов не вызывает особых затруднений при расчетах, и этот вопрос потерял свою остроту. Однако при практически одинаковой точности получаемых результатов простейшие вычислительные схемы с малым числом членов более удобны, незаменимы при оценках значений получаемых результатов и особенно при расчетах в полевых условиях. Многими исследователями было показано, что применение простейших вычислительных схем и многочленных дает практически идентичные результаты. Особенно это верно при массовых расчетах значений суммарных полей, осложненных влиянием различных тел локальной и региональной форм. В этих случаях при обнаружении влияния различных тел, при построении карт локальных и региональных аномалий важно иметь простой, но хорошо работающий механизм. Известно, что во многих случаях очень хорошие результаты можно получить именно с применением простых способов и несложных приемов. Учитывая это, приведем ниже некоторые из простых способов трансформации полей.

1. **Способ вариаций Б.А. Андреева:**

$$\Phi(\omega) = 1 - \cos \omega R,$$

$$U_т(x) = U(x) - [U(x + R) + U(x - R)]/2. \qquad (1)$$

2. **Способ В. Грифина (трехмерный вариант формулы (1)):**

$$\Phi(\rho) = 1 - J_0(\rho R),$$

$$U_т(0) = U(0) - \overline{U(R)},$$

где $\overline{U(R)}$ – среднее значение поля на окружности радиусом R.

3. **Способ:**

$$\Phi(\rho) = [J_0(\rho R_1) - J_0(\rho R_2)]/(R_2 - R_1),$$

$$U_т(0) = [\overline{U(R_1)} - \overline{U(R_2)}]/(R_2 - R_1).$$

4. **Способ М.У. Сагитова:**

$$\Phi(\rho) = 4[1 - J_0(\rho R)]/R^2,$$

$$U_{zz}(0) = 4[U(0) - \overline{U(R)}]/R^2.$$

Из этих способов способы 1–3 дают значения локальных аномалий. При этом результаты, получаемые из 3-го способа имеют размерность значений производных первого порядка. Способ М.У. Сагитова определяет значения вторых вертикальных производных. Если не учитывать размерность получаемых значений, то все эти выражения определяют локальные аномалии потенциальных полей. Поэтому их можно записать в следующем общем виде:

в двумерном случае

$$\Phi(\omega) = [\cos(\omega x_1) - \cos((\omega x_2)]/C,$$

$$U_т(0) = [\overline{U(x_1)} - \overline{U(x_2)}]/C,$$

где $\overline{U(x_1)}$ и $\overline{U(x_2)}$ – средние значения аномалий по двум точкам, отстоящим от начала координат симметрично на расстояния x_1 и x_2; C – некоторый постоянный коэффициент;

в трехмерном случае

$$\Phi(\rho) = [J_0(\rho R_1) - J_0(\rho R_2)]/C,$$

$$U_т(0) = [\overline{U(R_1)} - \overline{U(R_2)}]/C. \qquad (2)$$

В этих выражениях первый радиус x_1 или R_1 берется с целью уменьшения влияния погрешностей в значениях исходного поля. При этом оптимальное значение x_1 или R_1 должно равняться радиусу корреляции ошибок наблюдений. Если ошибка наблюдений мала, то значения x_1 или R_1 должны равняться нулю. Что же касается значений x_2 или R_2 и C, то их нужно выбирать, исходя

из решаемой задачи и конкретной геологической ситуации. При этом коэффициент C может быть безразмерным и иметь размерность расстояния или квадрата расстояния. Оптимальное значение x_2 или R_2 должно равняться радиусу корреляции выделяемой аномалии или быть несколько больше этой величины. Выражение (2) можно приспособить и к квадратной сетке наблюдений, средние ее значения, определяемые по соответствующим точкам, расположенным в узлах сетки.

Литература: [14, 16].

ГАРМОНИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ АНОМАЛЬНЫХ ТЕЛ

К параметрам аномальных тел, определяемых однозначно по значениям гравитационного поля, относятся их гармонические моменты. Гармонические моменты имеют важное значение при интерпретации аномалий. Они связаны с такими основными характеристиками аномальных тел, как суммарная масса, горизонтальные координаты центра тяжести и с некоторыми другими. Поэтому знание их, кроме определения указанных характеристик, позволяет сузить класс возможных решений обратной задачи.

Гармоническим моментом масс называется интеграл вида

$$L_n = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) D_n(\xi, \eta, \zeta) dv,$$

где $D_n(\xi, \eta, \zeta)$ – гармонический полином степени n. От степени полинома зависит и степень гармонического момента. Например, если $D_n(\xi, \eta, \zeta) = E = 1$, то получим гармонический момент нулевого порядка

$$L_0 = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) dv = M.$$

Он определяет суммарную массу аномального тела. При $D_n(\xi, \eta, \zeta) = E_1 = \xi$ получим гармонический момент первого порядка

$$L_1 = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) \xi dv = \xi_0 M.$$

Он определяет, как известно из механики, произведение координаты центра тяжести ξ_0 аномального тела на значение его суммарной массы. Аналогично при $E_1 = \eta$, $E_1 = \zeta$ получим другие два гармонических момента первого порядка, которые равны соответственно произведениям координат центра тяжести по направлениям осей y и z на значение общей массы M:

$$L_1 = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta)\eta\, dv = \eta_0 M; \quad L_1 = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta)\zeta d\zeta = \zeta_0 M,$$

т.е. зная гармонические моменты масс нулевого и первого порядков, можно определить из них суммарную массу и горизонтальные координаты центра тяжести аномальных тел.

Гармонические моменты связаны с коэффициентом разложения элементов гравитационного поля в ряд по сферическим функциям и входят в состав этих коэффициентов.

Для двумерных аномалий гармонические моменты связаны и с коэффициентами разложения выражения комплексной напряженности гравитационного или магнитного поля в ряд.

Выражая гармонические моменты через значения гравитационной аномалии V_z, получим (при $n = 0$ и $n = 1$)

$$M = +\frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V_z\, dS,$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi GM}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi V_z(\xi, \eta, \zeta) dS.$$

Аналогично, полагая $E = \eta$, найдем

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi GM}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \eta V_z\, dS.$$

Из этих формул можно определить горизонтальные координаты центра тяжести аномального тела.

В двумерном случае получим

$$\lambda = \frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x) dx,$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi G\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} xV_z(x) dx.$$

Для двумерных аномалий гармонические моменты связаны и с коэффициентами разложения выражения комплексной напряженности гравитационного или магнитного поля в ряд. Рассмотрим такие ряды более подробно.

Для гравитационного поля комплексная напряженность

$$E(\gamma) = F_z(x, z) + iF_x(x, z); \quad \gamma = x + iz.$$

Аналогично для магнитного поля

$$T(\gamma) = Z(x, z) + iH(x, z).$$

Рассмотрим двумерные тела произвольного сечения S. Комплексную напряженность гравитационного поля от такого тела можно записать в виде

$$E(\gamma) = 2iG \int_S \frac{\sigma(\delta)dS}{\delta - \gamma}, \qquad (1)$$

где $\delta = \xi + i\zeta$; $\sigma(\delta) = \sigma(\xi, \zeta)$ – плотность масс в области S.

Аналогично для комплексной напряженности магнитного поля от рассматриваемого тела произвольного сечения S найдем

$$T(\gamma) = 2i \int_S \frac{J(\delta)\,dS}{(\delta - \gamma)^2}, \qquad (2)$$

где $J(\delta) = J(\xi, \zeta) = J_x(\xi, \zeta) + iJ_z(\xi, \zeta)$ – намагниченность масс в области S.

Рассмотрим вначале выражение (1).

Разлагая знаменатель этого равенства в ряд как бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и интегрируя этот ряд почленно, получим

$$E(\gamma) = -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(0)}{\gamma^{n+1}}. \qquad (3)$$

Здесь

$$M_n(0) = \int_S \sigma(\delta)\delta^n dS \qquad (4)$$

– комплексный гармонический момент аномальных масс порядка n относительно начала координат. Из равенства (4) видно, что гармонический момент нулевого порядка при постоянном значении плотности

$$M_0(0) = \sigma \int_S dS = \sigma S = \lambda,$$

т.е. определяет массу единицы длины тела λ. При $n = 1$ из выражения (4) получим

$$M_1(0) = \sigma \int_S \delta dS = \sigma \int_S (\xi + i\zeta)dS = \sigma \int_S \xi dS + i\sigma \int_S \zeta dS =$$

$$= \lambda(x_0 + iz_0) = M_0(0)\,\gamma_0. \qquad (5)$$

Здесь $\gamma_0 = x_0 + iz_0$ – комплексная координата центра масс аномального объекта. Из равенства (5) можно определить однозначно координату центра масс:

$$\gamma_0 = M_1(0)/ M_0(0).$$

Это выражение верно для тел с ограниченным замкнутым сечением S. Для случаев бесконечных объектов типа контактной поверхности значение γ_0 не совпадает с центром масс. Например, для конхоиды Слюза оно характеризует центр производящей окружности конхоиды.

Таким образом, гармонические моменты возмущающих масс нулевого и первого порядков приводят к определению наиболее важных интегральных характеристик – избыточной массы и координат центра тяжести аномального тела. Эти интегральные характеристики являются характеристиками низшего порядка. Интегральные характеристики высшего порядка (второго и более высоких порядков) определяются не так легко и имеют более сложную и неоднозначную интерпретацию. Второй комплексный момент приводит к интегральным характеристикам

$$\beta = \sqrt{|M_2(\gamma_0)/M_0(0)|}, \tag{6}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\arg[M_2(\gamma_0)/M_0(0)], \tag{7}$$

Здесь при постоянной плотности параметр β определяет меру вытянутости аномального тела вдоль оси OX, а параметр θ определяет угол падения тела (угол между длинной осью тела и осью OX).

В частности, для прямоугольника со сторонами a_1 и a_2 ($a_1 > a_2$) и эллипса с полуосями b_1 и b_2 ($b_1 > b_2$) соответственно

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 - a_2^2)/3}; \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - b_2^2}.$$

В общем случае параметры β и θ характеризуют как форму тела, так и распределение в нем плотности.

Третий комплексный момент приводит к определению степени отличия формы поперечного сечения аномального тела от сечения тела с двумя осями симметрии. Гармонические моменты выше второго порядка определяются по наблюденному полю недостаточно точно и поэтому на практике применяются редко.

По результатам определения интегральных характеристик исходное поле можно аппроксимировать полями некоторых простейших тел, гармонические моменты которых совпадают с най-

денными по значениям поля соответствующими моментами исследуемого объекта. В качестве таких тел могут служить многоугольники, области с границей в форме эллипсов, области с границей в форме эллиптической лемнискаты Бута или так называемые эквивалентные системы точечных масс (совокупности точечных масс постоянной величины, расположенные в узлах квадратной или кубической сетки – двумерные или трехмерные случаи, эквивалентные по внешнему полю всей совокупности гармонических моментов).

Рассмотрим теперь выражение (2). Разлагая его в ряд аналогично выражению (3), получим

$$T(\gamma) = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_л(0)(n+1)}{\gamma^{n+2}}, \qquad (8)$$

где

$$m_л(0) = \int_S J(\delta)\delta^n dS;$$

$m_л$ – гармонический момент намагниченных масс порядка n относительно начала координат. Относительно некоторой другой заданной точки δ_0 выражение для момента можно записать в виде

$$m_л(\gamma_0) = \int_S J(\delta)(\delta - \gamma_0)^n dS.$$

Аналогично ряд (8) примет вид

$$T(\gamma) = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)m_л(\gamma_0)}{(\gamma - \gamma_0)^{n+2}}.$$

Этот ряд является ***рядом Лорана.***

Для однородного намагничивания комплексный момент нулевого порядка равен магнитному моменту тела:

$$m_0(0) = J \int_S dS = JS = m.$$

Момент первого порядка запишем аналогично выражению (5)

$$m_1(0) = J \int_S \delta dS = J \int_S (\xi + i\zeta) dS = m_0(0)(x_0 + iz_0) = m_0(0)\gamma_0,$$

где γ_0 – комплексная координата центра тяжести сечения S.

Момент второго порядка

$$m_2(0) = J \iint_S (\xi + i\zeta)^2 dS.$$

Он также приводит к интегральным характеристикам β и θ, имеющим тот же физический смысл, что и выше в случаях (6) и (7). Если сечением тела S является прямоугольник со сторонами a и b, то (В.Н. Страхов, Ю.И. Блох)

$$m_2(0) = m_0(0)\frac{a^2-b^2}{3}\exp(2i\theta).$$

Рассмотренные выше комплексные моменты приводят к определению суммарной массы и горизонтальных координат центра тяжести. Выражения, позволяющие определить вертикальную координату центра тяжести аномальных тел, также получены рядом авторов (Г.А. Гамбурцев, А.А. Заморев и др.), но они являются более трудными и неудобными для практического пользования и поэтому их здесь же приводим. Их трудно использовать, прежде всего, из-за того, что в них входят элементы поля, непосредственно не измеряемые гравиметрической аппаратурой, например, значения потенциала поля и вертикальной производной второго порядка от потенциала. Вертикальная координата центра тяжести относительно легко определяется через значения спектров. Такие выражения будут рассмотрены в одном из следующих разделов.

Литература: [13, 14, 16].

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Функция U, непрерывная внутри области v вместе с ее первыми и вторыми производными и удовлетворяющая во всех точках области v уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

называется гармонической функцией в области v. Таких функций существует бесконечное множество. Например, функция $1/r$ гармоническая во всех точках области v, кроме полюса, где обращается в нуль. Постоянная, очевидно, также является гармонической функцией.

Если функция U не зависит от одной из координат, например, от y, то уравнение Лапласа можно записать как

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

В этом случае U сохраняет одно и то же значение на всякой прямой, параллельной оси y (картина значений U в плоскостях, параллельных плоскости $x0z$, одна и та же, поэтому достаточно рассмотреть лишь плоскость $x0z$).

Рассмотрим основные свойства гармонических функций. Многие из этих свойств непосредственно следуют из интегральных формул Грина [12].

1. Если функция $U(M)$ – гармоническая в области v, а S – замкнутая поверхность некоторой другой области, принадлежащей v, то

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0, \qquad (1)$$

т.е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности S равен нулю.

Справедливо и обратное утверждение: если функция U непрерывна в области v вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно и обладает тем свойством, что равенство (1) справедливо для любой ограниченной области с кусочно-гладкой поверхностью S из области v, то функция $U(M)$ в области v удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией. Условие (1) необходимо и достаточно для того, чтобы непрерывная функция $U(M)$, имеющая в области v непрерывные частные производные до второго порядка включительно, была гармонической в этой области.

2. Если функция $U(P)$ является гармонической в некоторой ограниченной области v с поверхностью S, то ее значение в любой точке вне области, на поверхности или внутри выражается через значения этой же функции и ее нормальной производной на поверхности формулой

$$\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS - \int_S U\frac{\partial U}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ 2\pi U, & P \in S, \\ 4\pi U, & P \in v. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь v_1 – область, внешняя по отношению к S.

Так как интегралы в этой формуле (также и в формуле (1)) не содержат производные второго порядка функции U, то для применения этих равенств достаточно предположить, что гармоническая функция U непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до поверхности S. В частном случае, когда поверхность S – сфера, равенство (2), написанное для внутренней области, приводит к очень важной по своему применению формуле, которая гласит: если функция U является гармонической в области v, то ее значение во всякой внутренней точке P равно интегральному среднему ее значению, взятому по поверхности S любой сферы радиуса R с центром в точке P, лежащей целиком внутри области v:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_S U\,dS. \qquad (3)$$

Эта формула выражает ***теорему Гаусса о среднем значении гармонической функции***. Из нее можно определить значение гармонической функции в центре сферы по ее значениям, заданным на поверхности сферы. Верна и теорема, обратная теореме Гаусса: если функция $U(M)$ непрерывная вместе с ее первыми и вторыми производными в области v, удовлетворяет во всех точках этой области теореме Гаусса о среднем, то она является гармонической в области v.

Совершенно аналогичные свойства получаются и для гармонической функции на плоскости [12]. В данном случае формула (3) будет иметь следующий вид:

$$U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_l U\, dl,$$

где R – радиус окружности; l – длина окружности (интегрирование проводится по длине окружности) и в правой части формулы находится среднее значение аномалии на окружности).

В полярных координатах

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(R, \varphi)\, d\varphi.$$

Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции широко применяется при решении различных задач теории потенциала, в частности ее можно применить и при определении аналитически продолженных значений гравитационной или магнитной аномалии. С этой целью по поверхности сферы берутся шесть точек и среднее по поверхности сферы определяют как среднее по этим шести точкам.

3. Функция гармоническая внутри области и непрерывная вплоть до границы области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная.

4. Гармоническая функция, имеющая постоянное значение $U = C$ во всех точках некоторой замкнутой поверхности S, является постоянной в области v, ограниченной поверхностью S.

Верна и следующая теорема: если функция U, гармоническая во всем пространстве, ограничена сверху или снизу, то $U = \text{const}$ (теорема Лиувилля).

5. Гармоническая функция, нормальная производная которой обращается в нуль во всех точках поверхности S, является постоянной во всей области v. Это свойство сводится к предыдущему и доказывается аналогично.

6. Функция U, являющаяся гармонической во всем пространстве и регулярной на бесконечности, может равняться только нулю.

7. Если существует гармоническая функция U, принимающая на поверхности S заданную совокупность значений U, то она есть единственная, т.е. не может существовать другая такая гармоническая функция (теорема единственности).

8. Две гармонические функции, имеющие одинаковые нормальные производные во всех точках заданной поверхности S, могут различаться только на постоянную величину по всей об-

ласти, в которой они гармоничны, т.е. заданием значений $\partial U/\partial n$ на поверхности S, гармоническая функция U в области v определяется только с точностью до некоторой постоянной величины.

9. Всякая гармоническая в некоторой области функция бесконечно дифференцируема в этой области.

10. Любая производная от гармонической в некоторой области функции U есть также функция, гармоническая в этой области.

Последние два свойства следуют из утверждения об аналитической природе гармонических функций. Их можно доказать также исходя из свойств интеграла Пуассона или из свойств его ядра.

Проиллюстрируем все рассмотренные свойства на примере простейшей гармонической функции – линейной функции

$$U = \alpha x + \beta,$$

где α и β – некоторые постоянные.

Она является гармонической – имеет непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \partial^2 U/\partial x^2 = 0.$$

Если принять за направление внешней нормали $\vec{n}$ к границе некоторого отрезка $[a, b]$, где задана функция, направление этого отрезка в точке b, а в точке a – противоположное направление, то для любой линейной функции сумма значений первых производных этой функции по направлению $\vec{n}$ в концах отрезка будет равна нулю.

Если функция $U(x)$ линейна на отрезке $[a, b]$, то она не может принимать свое наибольшее либо наименьшее значение внутри отрезка, за исключением того случая, когда $U(x) = \text{const}$. Наибольшее и наименьшее значения линейной функции достигаются на концах отрезка.

Значение линейной функции в середине интервала $[a, b]$ равно среднему из двух значений, взятых на границах интервала

$$U\left(\frac{a+b}{2}\right) = [U(a) + U(b)]/2.$$

Линейная функция однозначно определяется на отрезке $[a, b]$ своими значениями, заданными на концах интервала

$$U(x) = \frac{b-x}{b-a}U(a) + \frac{x-a}{b-a}U(b).$$

Все эти свойства очевидны для линейной функции. Всеми этими свойствами обладают и любые другие гармонические функции нескольких переменных.

Литература: [12, 15].

ГРАНИЧНЫЕ ЧАСТОТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Как было показано в работах [11, 13], приближенные вычислительные схемы для любых трансформаций могут быть получены приближением на интервале от нуля до некоторой граничной частоты ω_r или ρ_r модуля частотной характеристики искомой вычислительной схемы к идеальной частотной характеристике трансформации. Эти граничные частоты соответствуют вычислительным схемам, т.е. тем значениям ω_r или ρ_r, до которых точно совпадают частотные характеристики точной трансформации и вычислительных схем. В отличие от граничных частот вычислительных схем под граничной частотой аномалии понимают значения ω_r или ρ_r, которыми ограничены спектры аномалий.

Чем больше граничная частота, тем точнее вычислительная схема, однако чрезмерное увеличение ее значения неизбежно ведет к усилению погрешностей наблюдений, связанных со значениями трансформируемого элемента поля, что также нежелательно. В работе [16] дан способ определения граничных частот, исходя из некоторой малой заранее заданной величины относительной потери энергии спектра трансформированной аномалии за граничной частотой, т.е. из следующих равенств:

в двумерном случае

$$a = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\int_{\omega_r}^{\infty} [S(\omega)\Phi(\omega)]^2 \, d\omega}{\int_{0}^{\infty} [S(\omega)\Phi(\omega)]^2 \, d\omega}; \qquad (1)$$

в трехмерном случае

$$a = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\int_{\rho_r}^{\infty} \rho[S(\rho)\Phi(\rho)]^2 \, d\rho}{\int_{0}^{\infty} \rho[S(\rho)\Phi(\rho)]^2 \, d\rho}. \qquad (2)$$

Здесь ΔE – энергия, соответствующая отброшенной части спектра S за граничной частотой, E – полная энергия спектра, a – относительное значение потери энергии аномалии, Φ – частотная характеристика трансформации. С учетом того, что значения произведения функций S и Φ определяют спектр трансформированной аномалии, а квадрат этого произведения – энергетический спектр трансформированной аномалии $Q_т$, найдем

$$a = \int_{\omega_r}^{\infty} Q_т(\omega)d\omega / \int_{0}^{\infty} Q_т(\omega)d\omega,$$

$$a = \int_{\rho_r}^{\infty} \rho Q_т(\rho)d\rho / \int_{0}^{\infty} \rho Q_т(\rho)d\rho.$$

Решая эти уравнения относительно ω_r или ρ_r при заранее заданной некоторой малой величине a и заданном виде энергетического спектра аномалии $Q(\omega)$, можно определить граничные частоты для трансформаций с частотными характеристиками $\Phi(\omega)$ или $\Phi(\rho)$. Таким образом, значения ω_r или ρ_r определяются из энергетических величин, которые в свою очередь определяются через значение среднего квадрата амплитуд аномалии. И поэтому относительная потеря энергии является как бы аналогом относительной величины некоторой средней погрешности, связанной с отброшенной за граничной частотой частью спектра. Однако в некоторых случаях необходимо определять граничные частоты, исходя из оценок погрешностей в максимальном значении аномалий. Особенно это нужно тогда, когда периферийные части аномалий с малыми абсолютными ее значениями искажены влиянием боковых возмущающих объектов. В таких случаях относительная средняя квадратичная погрешность вряд ли будет достаточно представительной для оценки искажения аномалии в результате ограничения ее спектра по частоте. Поэтому рассмотрим искажения аномалии в максимуме.

Максимальное значение трансформированной аномалии в двумерной задаче определяется равенством

$$F_т = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\Phi(\omega)d\omega. \qquad (3)$$

Погрешность, соответствующая отброшенной части спектра справа и слева (части спектра за граничной частотой), можно определить из равенства

$$\Delta F_т = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_r}^{\infty} S(\omega)\Phi(\omega)d\omega. \qquad (4)$$

Величина относительной погрешности определения максимального значения трансформированной аномалии определяется равенством

$$\varepsilon = \Delta F_{\text{т}}/F_{\text{т}}.$$

Подставляя соответствующие выражения $\Delta F_{\text{т}}$ и $F_{\text{т}}$, отсюда можно определить значения граничной частоты вычислительных схем $\omega_{\text{г}}$. Аналогично поступают и в трехмерной задаче.

Ввиду того, что в общем случае задача не может быть разрешена в элементарных функциях, найдены оценки для аномалий от тел простейшей формы – шара и цилиндра. Так как ширина спектров аномалий от этих тел наибольшая среди спектров аномалий от любых других тел, оценки, проводимые ниже, будут предельными и годными для возмущающих тел любой произвольной формы.

Для наиболее употребляемых в практике трансформаций: вычисление первых и вторых вертикальных производных аномалий силы тяжести, аналитическое продолжение в верхнее и нижнее полупространства в работах [11, 13, 16] получены аналитический аппарат и методика определения граничных частот граничных вычислительных схем.

Литература: [11, 13, 14, 16].

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

В международной системе СИ единица ускорения свободного падения имеет размерность $м \cdot с^{-2}$, а единица составляющих градиента ускорения силы тяжести – $с^{-2}$. Для численного представления отклонений гравитационного поля относительно поля некоторой модели и оценки точности измерений в геодезии и геофизике применяются внесистемные единицы

$$1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \quad \text{и} \quad 1 \text{ мкГал} = 10^{-8} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

соответственно тысячная и миллионная доли единицы Гал, названной так в честь итальянского ученого Галилея (1 Гал = $= 1 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$).

Для гравитационного градиента часто используется единица этвеш

$$1\text{E} = 10^{-9} \text{ с}^{-2} = 0{,}1 \text{ мГал/км},$$

которая также не входит в систему СИ.

Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в единицах СИ выражается в А/м (ампер на метр). Единицей измерения магнитной индукции в СИ является **тесла** (Тл). В магниторазведке в качестве рабочих единиц магнитной индукции используется **нанотесла** (нТл), которая равна 10^{-9} Тл, и реже микротесла (10^{-6} Тл). размерность намагниченности $\vec{J}$ в единицах СИ совпадает с размерностью напряженности поля. Напряженность и магнитная индукции в системе СИ связаны соотношением

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J},$$

где $\vec{J}$ – вектор намагниченности; μ_0 – магнитная постоянная (магнитная проницаемость) вакуума ($4\pi\ 10^{-7}$ Гн/м (Генри на метр)). В вакууме

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0.$$

В отличие от ранее использовавшейся системы СГС в системе СИ выражения для потенциала поля и его производных содержат множитель $1/4\pi$. Кроме того, у магнитной проницаемости вакуума μ_0 появляется размерность (в системе СГС она была безразмерной и равной единице), и в наблюдениях вместо напряженности поля H (А/м), пользуются напряженностью, равной магнитной индукции в вакууме, которая измеряется в теслах.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СФЕРЫ И ПЛОСКОСТИ. ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Определение функции U, гармонической в области v, если заданы ее значения на поверхности S этой области, называется первой граничной задачей теории гармонических функций или задачей Дирихле. Область v может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае область v лежит вне поверхности S. В случае конечной области (внутри поверхности) задача является внутренней задачей Дирихле, в случае бесконечной (вне поверхности) – внешней задачей Дирихле.

Предельное условие в задаче Дирихле записывают в виде

$$U|_S = f(M),$$

т.е. на поверхности S задана непрерывная функция $f(M)$, где M – переменная точка этой поверхности. Во внешней задаче Дирихле ставится еще условие, чтобы функция U обращалась в нуль на бесконечности. Есть и другая задача: на поверхности S заданы значения нормальной производной гармонической функции

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = f(M).$$

Задача нахождения гармонической функции по значениям ее нормальной производной, заданной на поверхности S, называется задачей Неймана.

Рассмотрим задачу Дирихле для двух простейших поверхностей – для сферы и плоскости [12]. В общем случае решение задачи Дирихле дает фундаментальная формула Грина, из которой получим [14]

$$4\pi U(P) = -\int_S U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} + h\right) dS = -\int_S U \frac{\partial Q}{\partial n} dS,$$

где $Q = 1/r + h$, h – гармоническая функция.

Функция Q называется функцией Грина. В полученной формуле отсутствует интеграл со значениями нормальной производной функции U и поэтому с помощью этой функции Q потенциал определяется только по его значениям, заданным на поверхности S.

Функция Грина Q равна нулю на поверхности S и сумме $1/r + h$ всюду в рассматриваемой области задания функции U. Она гармоническая всюду, кроме точки $r = 0$, где $Q \to \infty$. Очевидно, что Q определяется однозначно. При решении уравнения в зависимости от формы поверхности S необходимо найти соответствующую ей функцию Q. Построение функции Q в принципе возможно, но является довольно трудной задачей и поэтому она найдена для весьма немногих поверхностей.

1. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СФЕРЫ

Рассмотрим решение внутренней задачи Дирихле для сферы. Пусть S – сфера радиуса R, а $U|_S = U(M)$ – заданные предельные значения гармонической функции на поверхности сферы, причем точка M – переменная точка этой поверхности. Точку P возьмем внутри поверхности S.

Для сферы нормальная производная

$$\partial Q/\partial n = (\rho^2 - R^2)/R \cdot r^3.$$

Подставляя это найденное значение нормальной производной $\partial Q/\partial n$ под интеграл и деля на 4π, окончательно найдем

$$U(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_S \frac{U(M)}{r^3} dS. \qquad (1)$$

Полученный интеграл называется интегралом Пуассона. Он дает значение гармонической функции U для данной точки P внутри сферы по заданным значениям U на поверхности сферы, т.е. решение первой граничной задачи Дирихле. Правда, для проверки нужно еще доказать то, что полученная функция удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией, и что на поверхности сферы значения $U(P)$ совпадают с теми, которые заданы. Такое доказательство приведено в различных работах и из-за громоздкости записей здесь не приводится.

Формула (1) определяет решение внутренней задачи Дирихле для сферы. Совершенно аналогично решается внешняя задача

Дирихле, определяющая значения гармонической функции в точках вне сферы. Формула, определяющая решение внешней задачи Дирихле для сферы, такая же, как и (1), только отличается знаком правой части. Это вызвано тем, что нормаль, внешняя по отношению к сфере, для наружного пространства становится внутренней нормалью.

Из интеграла Пуассона (1) можно получить и теорему Гаусса о среднем значении гармонической функции. В самом деле, при $\rho = 0$ и $r = R$ (в центре сферы) из равенства (1) получим

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U dS,$$

т.е. теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции является частным случаем интеграла Пуассона.

2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

Требуется найти функцию $U(x, y, z)$, гармоническую в точке P полупространства $z > 0$, если известны ее предельные значения на плоскости $z = 0$.

Пусть r – расстояние от переменной точки $M(\xi, \eta, 0)$ до точки $P(x, y, z)$ и r_1 – расстояние от переменной точки M до сопряжений точки P_1, симметричной с P относительно плоскости $\zeta = 0$.

В данном случае функция Грина

$$Q = 1/r - 1/r_1.$$

Нормальная производная от этой функции

$$\partial Q/\partial n = -2\, z/r^3.$$

Рассматривая функцию Грина Q для бесконечной плоскости, отметим следующее. Функции $1/r$ и $1/r_1$ гармонические во всех точках пространства, кроме точки $r = 0$ и $r_1 = 0$. На бесконечности они являются и регулярными. Поэтому функция Грина для плоскости также является гармонической и регулярной на бесконечности функцией. На поверхности S, т.е. в точках рассматриваемой плоскости, она равна нулю, так как значения $r = r_1$. В бесконечности, т.е. при $M \to \infty$, функция $Q \to 0$.

При этом значении нормальной производной функции Грина окончательно получим

$$U(P) = \frac{z}{2\pi} \int_S \frac{U(\xi, \eta, 0)}{r^3} dS, \qquad (2)$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}.$$

Этот интеграл является интегралом Пуассона для плоскости. По этой формуле можно определить значения гармонической функции в точках пространства на высоте z. Причем интегрирование распространяется на всю плоскость, т.е. производится в бесконечных пределах.

Формулу (2) можно получить из равенства (1), приняв плоскость за сферу бесконечного радиуса.

Для удобства применения запишем формулу (2) в прямоугольной и цилиндрической системах координат. В прямоугольной системе координат

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

В цилиндрической системе координат с началом в точке, являющейся проекцией точки P на плоскости,

$$U(0, 0, z) = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\rho, \varphi, 0) \rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho)^{3/2}}.$$

В полученных формулах для бесконечной горизонтальной плоскости, когда функция $U(\xi, \eta, 0)$ постоянная, интеграл

$$\frac{z}{2\pi} \int_S \frac{dS}{r^3} = 1$$

при бесконечных пределах интегрирования. Поэтому все они не изменяются, если написать их в следующем виде (на примере формулы (2)):

$$U(P) - U_0 = \frac{z}{2\pi} \int_S [U(\xi, \eta, 0) - U_0] \frac{dS}{r^3},$$

где U_0 – любая постоянная (например, является значением функции U в начале координат). Формулой в таком виде пользуются, например, при получении вычислительных схем для определения значений первой вертикальной производной от функ-

ции U в точках самой плоскости. Для этого случая, дифференцируя последнюю формулу по z и после принимая $z = 0$, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_S [U(\xi, \eta, 0) - U(0, 0, 0)] \frac{dS}{r^3},$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. В полярных координатах эта формула выразится в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_S [U(\rho, \varphi, 0) - U(0, 0, 0)] \frac{d\rho d\varphi}{\rho^2}.$$

Случай плоского или двухмерного поля. В этом случае [14, 15]

$$U(P) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(M) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + z^2}.$$

Эта формула решает задачу Дирихле для случая плоского поля и является также интегралом Пуассона. В данном случае этот интеграл определяет значения поля на высоте z по заданным на оси x значениям функции $U(x, 0)$, т.е. решает задачу аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства на высоту z.

Решение задачи Неймана подробно описано в книге [15], поэтому здесь опускается.

Литература: [12, 14, 15].

ИЗМЕНЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ВНУТРИ ЗЕМЛИ

Сила притяжения внутри однородного шара выражается уравнением прямой, проходящей через начало координат. Поэтому сила притяжения внутри Земли как однородного шара уменьшается линейно до его центра; в центре она равна нулю. Это верно только для случая однородного по плотности шара. Но в случае реальной Земли сила тяжести внутри нее зависит от того, как распределена плотность в различных ее слоях. Из того, что средняя плотность Земли больше плотности наружных ее слоев, следует, что плотность внутри Земли должна быть больше ее средней плотности. Отсюда следует, что и изменение силы тяжести с приближением к центру Земли (с уменьшением ρ) не может быть линейным или равномерным.

Примем, что Земля состоит из ряда концентрических слоев различной плотности. В этом случае изменения силы тяжести внутри Земли можно определить по формуле [14]

$$g = \frac{3g_0}{\sigma_c R\rho^2}\int_0^{\rho} \sigma\rho^2 d\rho.$$

Для определения g из этого выражения необходимо задаться законом изменения σ в зависимости от ρ.

Исследованием закона изменения плотности Земли с глубиной занимались многие ученые (Лежандр, Рош, Буллен, Буллард, Вихерт, Хаальк и др.). Сформулировать однозначно этот закон по данным наблюдений на поверхности Земли невозможно. Однако существуют некоторые условия, которым должна удовлетворять плотность как функция радиуса r. Эти условия следующие.

1. Функция $\sigma(\rho)$ должна соответствовать известным значениям плотности для поверхностных слоев Земли (в качестве плотности пород земной коры обычно принимают значение 2,8 г/см^3, пород кровли мантии – 3,3 г/см^3).

2. Она должна давать правильное значение средней плотности Земли:

$$\sigma_c = \frac{M}{v} = \frac{1}{v} 4\pi \int_0^R \sigma\rho^2 d\rho = \frac{3}{R^3} \int_0^R \sigma\rho^2 d\rho = 5{,}52 \text{ г/см}^3,$$

где $v = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем Земли.

3. Она должна удовлетворять так называемому дифференциальному уравнению Клеро.

Если в первом приближении предположить, что плотность непрерывно меняется с глубиной, то в качестве закона ее изменения с глубиной можно принять, например, выражения, предложенные Лежандром и Рошем. Рош принял, что плотность меняется по закону

$$\sigma = \sigma_0 [1 - 0{,}76(\rho/R)^2],$$

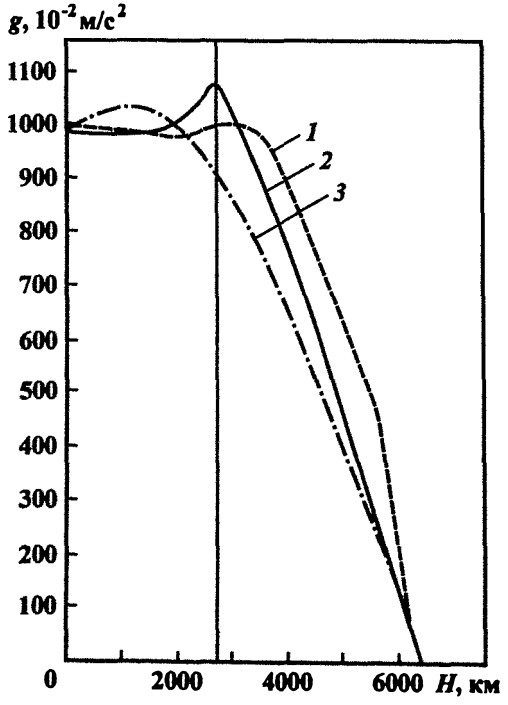


Рис. 20. Изменение силы тяжести с глубиной: *1* – по Буллену (модель *X*); *2* – по Булларду (модель *f*); *3* – по Лежандру

где σ_0 – плотность в центре Земли (σ_0 = 10,1 г/см^3). По Лежандру,

$$\sigma = \sigma_0 [\sin (nr)/nr)],$$

где σ_0 = 11 г/см^3.

В других, наиболее соответствующих действительности гипотезах принимают, что плотность с глубиной возрастает плавно, но отдельными скачками. Величины скачков плотности и границы, на которых они происходят, определяют на основании изучения закономерностей распространения сейсмических волн с глубиной.

Графики изменения силы тяжести в Земле при различных законах изменения плотности с глубиной приведены на рис. 20. Большинство исследователей придерживаются того мнения, что на границе ядра Земли сила тяжести имеет небольшой максимум, а затем быстро уменьшается к центру.

Литература: [14].

ИЗМЕРЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Методы измерения элементов гравитационного и магнитного полей можно подразделить на динамические и статические. Динамическими методами изучают параметры движения тела в гравитационном или магнитном поле (время, частота колебания и др.). Статическими методами изучают изменение положения равновесия тела, на которое действует сила и непосредственно измеряемой величиной является линейное или угловое смещение. К динамическим методам измерения относятся методы наблюдений над свободным падением тел, над качанием маятника, наблюдения частоты процессии вектора ядерного намагничивания и другие. К статическим методам измерения сила тяжести относятся методы, в которых сила тяжести сравнивается с силой деформации упругих материалов (пружин), с силой упругости газа, магнитного и электрического полей, с центробежными и капиллярными силами и т.п. В статических методах измерения элементов магнитного поля момент вращения магнитной стрелки, обусловленный действием земного магнитного поля, сравнивается с моментами силы тяжести, кручения нити или пружины.

Измерения элементов гравитационного и магнитного полей подразделяются на абсолютные и относительные. При абсолютных измерениях определяется полное значение изучаемого элемента поля. При относительных измерениях определяют значение разности или отношении изучаемого элемента поля в данном пункте наблюдений и в некотором другом пункте, принятом за исходный или опорный.

Начиная с 30-х годов прошлого столетия при поисках залежей нефти и газа в основном стали применять статические гравиметры. Они построены по принципу пружинных весов; сила тяжести или ее момент всегда уравновешивается упругой силой или ее моментом. В практике гравиразведочных работ наиболее распространены кварцевые астазированные гравиметры вращательного типа, построенные по принципу вертикального сейсмографа Голицына.

ИЗМЕРЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЕЛ (ДИНАМИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ)

К динамическим способам измерения ускорения свободного падения относятся способ свободного падения тел, маятниковый способ и измерения струнными гравиметрами.

1. МАЯТНИКОВЫЙ СПОСОБ

Математическим маятником называется маятник, образованный из точечной массы, подвешенной на невесомой, нерастяжимой и не создающей упругого момента нити длиной l (рис. 21). Выражение для периода колебания математического маятника можно представить в виде бесконечного ряда

$$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\ldots\right). \qquad (1)$$

Для реального или физического маятника (тело, способное вращаться без трения вокруг горизонтальной оси) в выражении (1) длина заменяется приведенной длиной $L = I/ma$, где I – момент инерции относительно оси качания маятника; a – расстояние от оси качания до центра тяжести тела.

Если по разные стороны от центра тяжести O (рис. 22) подобрать точки C и C' таким образом, чтобы периоды колебаний маятника вокруг них равнялись друг другу, то расстояние CC' будет представлять собой приведенную длину физического маятника. При этом точка C' называется центром качаний. Маятник, имеющий две оси качания, периоды колебаний относительно которых равны, называют оборотным. В случаях оборотных маятников для определения приведенной длины достаточно измерить расстояние между осями их качания, тогда как в случае обычного физического маятника определение приведенной длины является трудной задачей, так как в реальном теле нелегко установить положения оси вращения и центра тяжести.

Рис. 21. Математический маятник

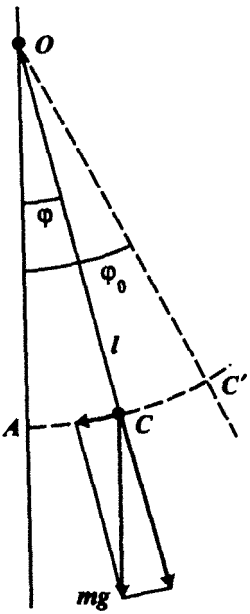
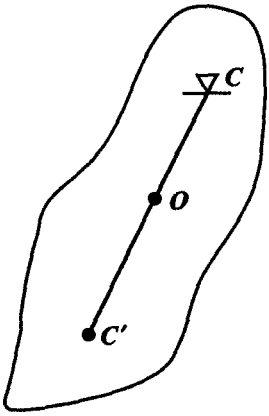


Рис. 22. Физический маятник



Принимая амплитуду колебаний маятника малой, выражение (1) можно записать в виде

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\frac{9}{1024}\varphi_0^4+\ldots\right). \qquad (2)$$

В гравиметрии за период колебаний принимают время, в течение которого маятник проходит от одного крайнего своего положения до другого. Амплитуда колебаний маятника составляет примерно 0,01 рад. Поэтому во многих случаях в выражении (2) достаточно ограничиться вторым членом.

При абсолютных определениях необходимо знать период колебания маятника в точке измерений и приведенную длину маятника. При относительных измерениях достаточно определить лишь период колебания маятника в двух пунктах наблюдений. В этом случае, ограничиваясь в формуле (2) только первым членом, найдем

$$\Delta g = g_2 - g_1 = -2g_1\frac{\Delta T}{T_1}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\Delta T}{T_1}\right),$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$; g_2, g_1 и T_2, T_1 – значения ускорения свободного

падения и периода колебаний маятника в двух пунктах наблюдений.

В настоящее время в СНГ применяется относительный маятниковый комплекс «Агат» (ЦНИИГАиК), включающий в себя три двухмаятниковых, термостатированных и вакуумированных прибора. Определение ускорения свободного падения в нем осуществляется методом Вейнинг – Мейнеса (наблюдают колебания так называемого разностного маятника, состоящего из двух маятников, запускаемых в противофазе), мало чувствительного к влиянию движений подставки. Средняя квадратическая погрешность измерения Δg одним прибором составляет 0,08 мГал, а их комплексом – 0,05 мГал.

2. МЕТОД СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

В настоящее время, когда измерения малых интервалов путей и времени достигли высокой точности, стали возможными измерения абсолютных значений ускорения свободного падения тел с применением падающего груза или баллистическим способом. Он основан на использовании зависимости

$$S = v_0 t + gt^2/2, \qquad (3)$$

где v_0 – начальная скорость свободно падающего тела; S – путь; t – время. В этом равенстве величины S и t могут быть измерены, а величины g и v_0 необходимо определить. Для этого необходимо измерить по крайней мере два отрезка пути падения S_1 и S_2 в соответствующие моменты времени t_1 и t_2. Используя эти величины, из равенства (3) найдем

$$g = 2(S_2 t_1 - S_1 t_2)/t_1 t_2 (t_2 - t_1).$$

Рассмотрим принцип действия баллистического гравиметра, разработанного в институте автоматики и электрометрии б. СО АН СССР, в котором применяется схема двуплечевого интерферометра Майкельсона с газовым лазером [14] (рис. 23). В вертикальной цилиндрической вакуумной камере *1* падает уголковый отражатель *2* (применение уголкового отражателя уменьшает вращение падающего тела). Луч света от лазера *3*, пройдя коллиматор *4*, раздваивается на зеркале *5*. Одна часть света проходит через полупрозрачное зеркало *5* и сразу попадает в фотоумножитель. Вторая часть света, отразившись от одного из зеркал *5* попадает на уголковый отражатель *2*, отражается от него и вторым зеркалом *5* направляется также в фотоумножитель *6*. Сиг-

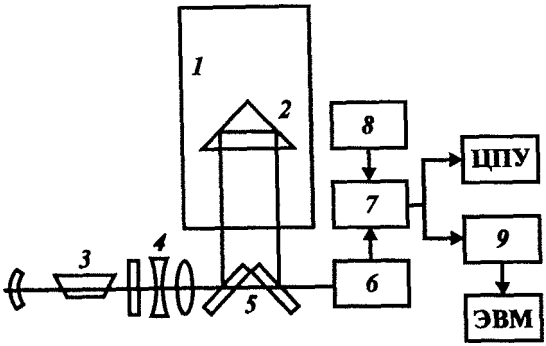


Рис. 23. Схема баллистического гравиметра:
1 – вакуумная трубка; *2* – уголковый отражатель; *3* – лазер; *4* – коллиматор; *5* – полупрозрачные зеркала; *6* – фотоумножитель; *7* – счетный блок; *8* – генератор меток времени; *9* – перфоратор; ЦПУ – цифропечатающее устройство

нал от фотоумножителя усиливается и подается на счетный блок, измеряющий путь и время. Такое устройство прибора приводит к тому, что рассматриваемые два пучка света проходят различные пути, затем сводятся вместе, что приводит к образованию интерференционной картины. Число интерференционных полос N связано с разностью хода оптических лучей Δ и длиной волны света λ выражением $\Delta = N\lambda$. Зная изменение числа интерференционных полос, по этому выражению можно определить пути, проходимые падающей призмой в различные моменты времени.

В течение 1 часа (включая паузы) на приборе можно осуществить 200 циклов измерений (один цикл измерения включает падение, подъем уголкового отражателя и обработку полученного результата и занимает время около 12 с). При этом погрешность одного измерения несколько меньше 1 мГал. Для доведения погрешности измерения ускорения свободного падения до величины 0,02 мГал необходимо провести около 250 циклов измерений. Масса прибора составляет несколько сотен килограммов.

Различные типы баллистических гравиметров разработаны и за рубежом в различных странах. В настоящее время этот способ измерения значений ускорения свободного падения находится на стадии интенсивного развития и совершенствования. Поэтому можно ожидать создания в ближайшее время высокоточных, легких и удобных для транспортировки приборов.

Литература: [1, 3, 6, 14].

3. СТРУННЫЕ ГРАВИМЕТРЫ

Если на тонкой металлической нити (струне) с верхним концом, закрепленным неподвижно, подвесить массу, то натяжение струны и период ее колебаний будут зависеть от веса подвешенной массы (следовательно, от ускорения свободного падения), длины и веса струны. При постоянных параметрах струны и груза частота поперечных колебаний струны будет зависеть от значений ускорения свободного падения. В струнных гравиметрах измеряется частота, но масса не перемещается в гравитационном поле, т.е. изучаются не параметры движения тела, а сила, приходящаяся на единицу массы. Поэтому струнные гравиметры можно отнести и к статическим гравиметрам.

Схема устройства струнного гравиметра показана на рис. 24. Он состоит из струны *2*, проходящей между полюсами постоянного магнита *3*. На струне *2* подвешена масса *1*. Из-за наличия магнита *3* колебания струны приводят к появлению в ней переменного тока. Для того, чтобы сделать колебания струны незатухающими, она включена в контур с усилителем и положительной обратной связью. При подаче на концы струны переменного напряжения она начнет вибрировать. При этом изменение силы

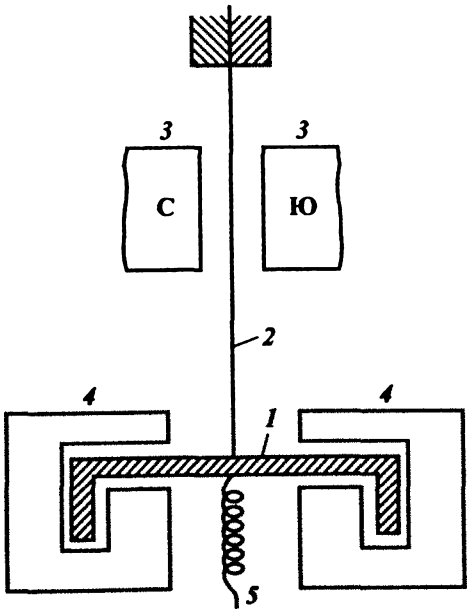


Рис. 24. Схема струнного гравиметра

тяжести на пунктах наблюдений приводит к изменениям частоты полученного в цепи струнного генератора. Эти изменения можно регистрировать, сравнивая их с частотой эталонного генератора. Для уменьшения затухания колебаний струны ее помещают в вакуумированный объем. Струна может совершать продольные и поперечные колебания. Для их демпфирования груз *1* делают из красной меди в виде полого цилиндра и помещают в зазорах сильного постоянного магнита *4*. Кроме того, для устранения маятниковых колебаний груза, он удерживается от раскачивания очень тонкими плоскими пружинами *5*.

Частота колебаний идеально гибкой струны связана с ускорением свободного падения выражением

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{mg/\lambda} = \frac{1}{2l}\sqrt{mg/\sigma S},$$

где m – масса груза; l – длина струны; λ и σ – линейная и объемная плотности струны; S – площадь ее поперечного сечения.

Изменения напряженности гравитационного поля Δg и частоты колебаний струны Δf связаны квадратичной зависимостью

$$\Delta g = C\Delta f + C\Delta f^2/2f_0,$$

где C и f_0 – постоянные, зависящие от входящих в выражение параметров.

В современных конструкциях струнных гравиметров применяют металлические струны из специальных сплавов (бериллиевая бронза). К преимуществам струнного гравиметра относятся практически неограниченный диапазон измерений, малая зависимость колебаний струны от упругости, малое влияние температуры на показания и удобства для телеизмерений и цифровой регистрации. К недостаткам прибора относятся малая устойчивость к влиянию вибраций и других инерционных помех, нелинейная зависимость между изменениями g и частоты f. В настоящее время струнные гравиметры успешно применяют в качестве скважинных (погрешность измерений при этом может достигать 0,05 мГал). Применяют их также при измерениях на самолетах и морских судах, правда, еще не так успешно.

Литература: [1, 3, 6, 14].

ИЗМЕРЕНИЯ КВАРЦЕВЫМИ АСТАЗИРОВАННЫМИ ГРАВИМЕТРАМИ

В практике гравиметрических работ как в нашей стране, так и за рубежом в настоящее время основное распространение получили кварцевые астазированные гравиметры с упругими системами вращательного типа, построенные по принципу вертикального сейсмографа Голицына. Все эти гравиметры имеют одинаковую принципиальную основу и различаются лишь конструкцией, технологией изготовления и компоновкой отдельных узлов.

Упругая система (пружинные весы) всех гравиметров изготовлена из чистого плавленого кварца, исключением является лишь металлическая навеска на рычаге и металлическая нить температурного компенсатора.

Первым отечественным кварцевым астазированным гравиметром был ГАК-3М, разработанный К.Е. Веселовым в 1953 г. На его базе стали выпускать и в дальнейшем другие боле усовершенствованные, следовательно, и более точные марки гравиметров.

В настоящее время отечественной промышленностью выпускаются гравиметры марок ГНУК (гравиметр наземный узкодиапазонный кварцевый), ГНШК (широкодиапазонный) классов точности А, В, С, ГНКК (комбинированный) и «Дельта». Из них больше всего применяются гравиметры ГНУК.

Первым иностранным кварцевым астазированным гравиметром был гравиметр Мотт-Смитта. На его базе были созданы гравиметры Уорден, Шарп, Содин.

Рассмотрим принцип действия и дадим краткое описание устройства гравиметра. Полную схему упругой кварцевой системы кварцевых астазированных гравиметров рассмотрим на примере схемы гравиметра ГНУК-С. (Класс гравиметра характеризует его точность, например, погрешность измерения силы тяжести в рейсах продолжительностью 4 часа составляет для гравиметров ГНУК-А, ГНУК-В и ГНУК-С соответственно 0,02, 0,03 и 0,06 мГал).

Чувствительным элементом гравиметра является (рис. 25)

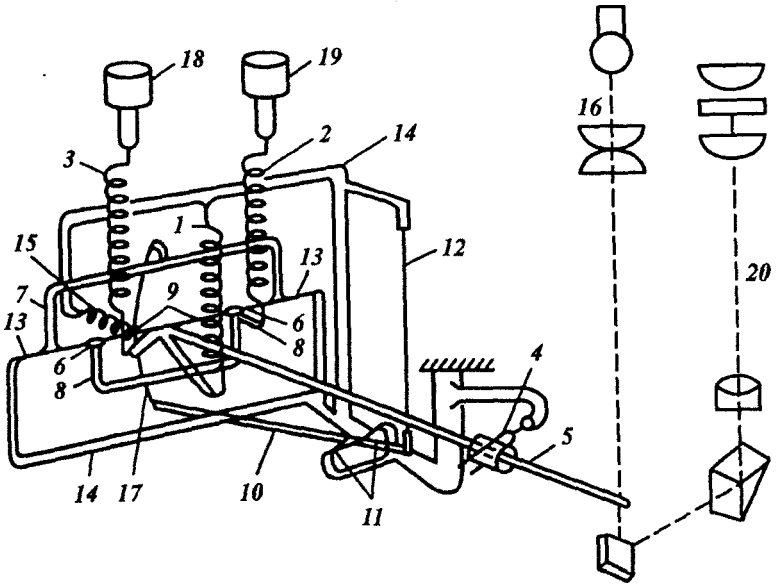


Рис. 25. Схема кварцевой системы гравиметра ГНУК-С:
1 – главная пружина; *2* – измерительная пружина; *3* – диапазонная пружина; *4* – ограничитель; *5* – рычаг; *6* – нити подвеса измерительной рамки; *7* – подвижная рамка температурного компенсатора; *8* – измерительная рамка; *9* – нити подвеса рычага; *10* – рычаг температурного компенсатора; *11* – нити повеса рычага температурного компенсатора; *12* – металлическая нить температурного компенсатора; *13* – нити подвеса подвижной рамки температурного компенсатора; *14* – каркас кварцевой системы; *15* – пружина компенсатора криволинейности; *16* – осветитель; *17* – лукообразная нить компенсатора криволинейности; *18* – диапазонное устройство; *19* – измерительное устройство; *20* – микроскоп

рычаг *5* с грузом, удерживающийся в равновесии упругой силой главной (астазирующей) пружины *1* и силой закручивания нитей подвеса *9* (ось вращения рычага), а также силой компенсационных пружин *2* и *3*.

Управление движением рычага осуществляется двумя компенсационными пружинами: измерительной *2* и диапазонной *3*. Верхний конец измерительной пружины крепится к отсчетному устройству, верхний конец диапазонной пружины – к диапазонному винту, не имеющему, как правило (за исключением гравиметра ГНШК), отсчетного устройства. Принцип измерения силы тяжести в гравиметрах компенсационный: при изменении значений ускорения свободного падения рычаг отклоняется от положения равновесия на некоторый угол вниз или вверх, что приво-

дит к закручиванию нитей подвеса рычага. Вращением головки отсчетного устройства (микрометрического винта) сокращают или растягивают измерительную пружину, что приводит к обратному закручиванию нитей подвеса. Таким путем, полностью компенсируя влияние изменения ускорения свободного падения действием измерительной пружины, рычаг выводят в горизонтальное положение. Мерой удлинения измерительной пружины и, следовательно, мерой приращения ускорения свободного падения является угол поворота микрометрического винта счетчика оборотов, установленного на внешней панели гравиметра.

Чувствительность гравиметра. Уравнение равновесия системы гравиметра имеет вид

$$M_2(x) + gM_1(x) = 0,$$

где $gM_1(x)$ – момент внешних сил, действующих на систему; $M_2(x)$ – момент внутренних сил, возникающих при деформации элементов упругой системы гравиметра; x – упругая реакция (величина деформации) системы гравиметра на изменение силы тяжести; g – напряженность гравитационного поля.

Для определения механической чувствительности из этого уравнения получим

$$\frac{dx}{dg} = -M_1\left(\frac{\partial M_2}{\partial x} + g\frac{\partial M_1}{\partial x}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Как следует из уравнения равновесия, производные в правой части выражения (1) должны иметь разные знаки. Уменьшая знаменатель в равенстве (1) чувствительность гравиметра dx/dg можно сделать сколь угодно большой. Такие системы называются астазированными. Системы, имеющие постоянную механическую чувствительность, называются неастазированными.

У астазированных гравиметров знаменатель в выражении (1) достаточно мал и меняется с изменением напряженности гравитационного поля. У неастазированных гравиметров знаменатель велик и имеет постоянное значение.

Механическая чувствительность гравиметра имеет четкую связь с периодом собственных колебаний его упругой системы. Эта связь выражается равенством

$$C = T^2/4\pi^2\, l_{\text{пр}}, \qquad (2)$$

где $C = d\varphi/dg$ – угловая чувствительность гравиметра; φ – угол отклонения рычага прибора от горизонтального положения; T – период собственных колебаний; $l_{\text{пр}}$ – приведенная длина рычага (отношение момента инерции к моменту массы рычага).

Из равенства (2) видно, что механическая чувствительность гравиметра тем больше, чем короче рычаг и чем больше период его собственных колебаний. Поэтому у астазированных гравиметров период собственных колебаний равен десяткам секунд. Выражение (2) можно использовать для оценки чувствительности гравиметров в полевых условиях.

Влияние наклона гравиметра. При малых углах наклона оси чувствительности гравиметра от вертикали φ можно записать как

$$dg = -g\varphi\, d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, найдем

$$\Delta g = g\varphi^2/2. \qquad (3)$$

Эта зависимость будет верна как при отклонении оси вращения рычага прибора от горизонтальной плоскости, так и при наклоне самого рычага. В последнем случае легко получить выражение (рис. 26)

$$\Delta g = -g(1 - \cos\varphi),$$

соответствующее разности показаний гравиметра в наклонном и в горизонтальном положениях его рычага. При малых углах φ, переходя от косинуса угла к синусу, можно легко получить зависимость (3). Выражение (3) можно использовать для определения цены деления гравиметра.

Влияние температуры. Влияние температуры на изменение упругости материалов можно выразить формулой

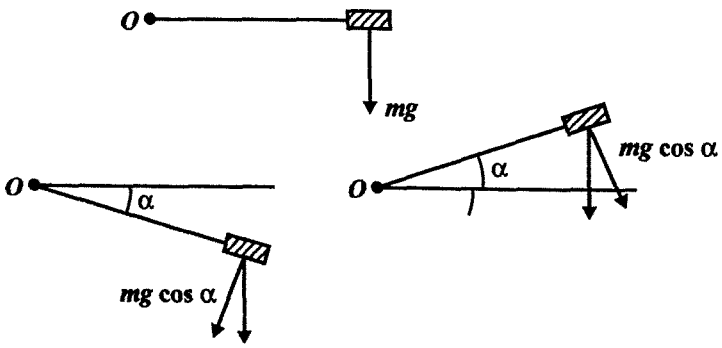


Рис. 26. Влияние наклона на отсчеты гравиметра

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \beta_1 t + \beta_1 t^2 + ...),$$

где t – температура; γ_0 – модуль упругости при температуре 0 °С; β_1 и β_2 – линейный (термоэластический) и квадратичный температурные коэффициенты упругости. Законами этого вида выражаются и изменения линейных размеров элементов упругой системы, а также отсчетов гравиметра при изменении температуры.

В настоящее время пружины в гравиметрах изготовляют в основном из сплавов типа элинвара и плавленого кварца. Эти сплавы имеют стабильные во времени упругие свойства и малые термоэластические коэффициенты. Недостатком элинвара является его магнитность и зависимость коэффициента β_1 от температуры.

Плавленый кварц имеет большую прочность, малый коэффициент линейного расширения, немагнитен и обладает незначительным упругим последействием. Он легко поддается обработке. Недостатком плавленого кварца является большой термоэластический коэффициент, зависящий от температуры и, кроме того, он обладает относительно большей ползучестью. Для уменьшения влияний температуры на упругую систему кварцевых гравиметров ее помещают в сосуд Дьюара и сверху применяют еще теплоизолирующие материалы.

Цена деления гравиметра. В результате измерений отсчеты гравиметра получают в оборотах микрометрического винта. Определение цены деления гравиметра (градуирование гравиметра) – это определение коэффициента (при линейной шкале отсчетного устройства) или некоторой функции (при нелинейной шкале), переводящих количество оборотов микрометрического винта в миллигалы.

Цену деления гравиметров можно определить двумя способами: по измерениям на пунктах с известными значениями гравитационного поля и по способу наклона.

В случае линейной шкалы по первому способу цена деления гравиметра равна отношению приращения силы тяжести к приращению отсчетов по микрометру:

$$C = (g_2 - g_1)/(S_2 - S_1) = \Delta g/\Delta S,$$

где g_1 и g_2 – значения силы тяжести в двух пунктах, S_1 и S_2 – отсчеты по микрометру в этих точках. Из этого выражения видно, что для определения цены деления гравиметра необходимо знать значения g_1 и g_2 и при этих известных значениях снять отсчеты гравиметра.

Большое распространение при определении цены деления гравиметров получил второй способ – способ наклона, сущность

которого заключается в использовании формулы (3). Для этого необходимо снять отсчеты гравиметра в горизонтальном его положении и при наклоне на угол φ.

Для осуществления наклона и измерения угла φ гравиметр устанавливают на так называемый экзаменатор, представляющий собой массивную металлическую плиту, опирающуюся на три подъемных винта. В принципе, роль экзаменатора может играть основание гравиметра с подъемными винтами, однако в этом случае измерение цены деления производится менее точно. При помощи подъемных винтов гравиметр можно наклонять как в плоскости движения рычага, так и в плоскости оси его вращения.

В практике, как правило, наклон производится в плоскости оси вращения, так как при наклоне в плоскости движения рычага чувствительность гравиметра может изменяться вплоть до неустойчивости.

Зависимость отсчетов гравиметра S от наклона n имеет вид, показанный на рис. 27. При наклоне прибора в плоскости движения рычага (по продольному уровню) отсчеты дают возможность построить только одну ветвь параболы (вторая ветвь не получается из-за резкого возрастания чувствительности упругой системы). На рис. 27 n – это количество оборотов установочного винта гравиметра, по которому наклоняют гравиметр (угол наклона φ прямо пропорционален n).

Кроме чувствительного и измерительного элементов, в корпусе кварцевой системы помещено устройство для компенсации влияния изменения температуры. Схема действия этого устройства следующая (рис. 28). С увеличением температуры плавленый кварц, из которого изготовлена упругая система гравиметра,

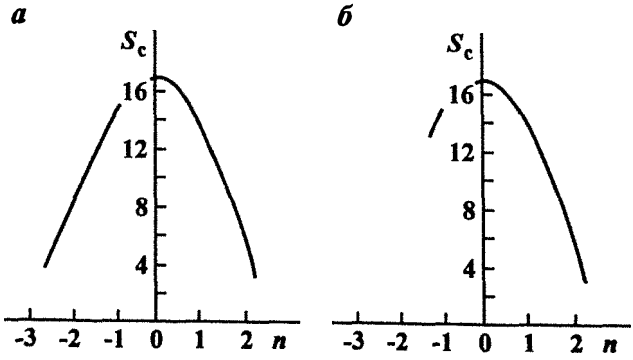


Рис. 27. Графики зависимости отсчетов гравиметра от наклона: *а* – поперечного; *б* – продольного

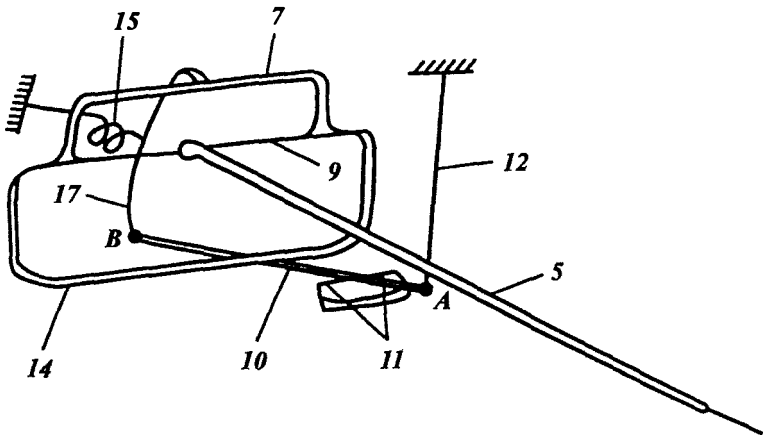


Рис. 28. Схема устройства системы температурной компенсации гравиметра ГНУК-С. (Условные обозначения см. на рис. 25)

сжимается, что приводит к увеличению жесткости или упругости нити подвеса рычага и кварцевых пружин (главной и диапазонной). Кроме того, при увеличении температуры укорачивается длина рычага. По этим причинам рычаг должен подняться вверх. В то же время с увеличением температуры удлиняется металлическая нить *12*, за счет чего конец рычага температурного компенсатора *10* (точка *A*) переместится вниз. Тогда противоположный его конец (точка *B*) поднимется, повернув рамку температурного компенсатора *7* и, следовательно, закрутит на определенный угол нити подвеса рычага, что приведет к опусканию рычага упругой системы *5*. Очевидно, что возникшее при этом приращение упругого момента нитей подвеса *9* должно быть равно и противоположно по знаку изменений момента силы тяжести, действующей на рычаг, упругого момента нити подвеса рычага и упругих сил главной и диапазонной пружин кварцевой системы, вызванных тем же изменением температуры. При понижении температуры все явления происходят в обратном порядке.

В общем случае зависимость отсчетов гравиметра от температуры весьма сложная, но с достаточной для практики точностью может быть представлена полиномом второй степени:

$$\Delta g_1 = k_1(T_2 - T_1) + k_2(T_2^2 - T_1^2),$$

где k_1, k_2 – температурные коэффициенты; T_1, T_2 – значения температур.

Основная часть влияния температуры на показание прибора может быть представлена еще проще: $\Delta g = k_1(T_2 - T_1)$, так как k_1 намного больше k_2. Поэтому, если бы нить гравиметра ГНУК-С не имела прогиба, создаваемого пружиной *15*, то система температурной компенсации учитывала бы только коэффициент k_1 и была бы линейной. Создавая прогиб нити *17* (при помощи пружины *15*), устройство температурной компенсации становится нелинейным. Действия диапазонной и главной пружин направлены в разные стороны, но главная пружина примерно в 100–200 раз жестче диапазонной, поэтому ее температурное влияние сильнее. Несмотря на то, что кварцевая система гравиметра имеет описанное устройство температурной компенсации и, кроме того, помещена в сосуд Дьюара и окружена теплоизолирующим материалом, некоторая часть температурного влияния сохраняется (полная компенсация влияния температуры может происходить только в так называемой точке температурной компенсации при определенном диапазоне изменения температуры внутри прибора).

Оставшееся влияние температуры учитывается поправкой за нуль-пункт.

Несколько иную и более совершенную форму имеет система температурной компенсации гравиметра ГНУК-В (рис. 29). Главное ее отличие заключается в том, что компенсирующий момент температурного компенсатора подается не на подвижную рамку температурного компенсатора *7*, а на главную пружину *1* (см. рис. 25). При этом под влиянием температуры изменяется длина металлической нити *ДС*, что приводит к повороту первого рычага температурного компенсатора *СВ*. Этот поворот через нить *АВ*, изогнутую пружиной *Е*, приводит в движение второй рычаг температурного компенсатора *АО"F*, при повороте которого удлиняется или укорачивается главная пружина f_1, что приводит, в свою очередь, к компенсации влияния температуры.

Упругая система гравиметров этого типа является астазированной, что существенно повышает ее чувствительность. Астазированными, как было отмечено выше, называют пружинные весы, у которых чувствительность не пропорциональна полной деформации, изменяется при изменении силы тяжести (при изменении положения рычага) и зависит от угла наклона рычага. Они – нелинейные. Нелинейность позволяет добиться того, чтобы малым изменениям силы тяжести соответствовали большие деформации главной пружины и, следовательно, большие углы поворота рычага. Для таких систем характерна высокая чувствительность к изменению силы тяжести.

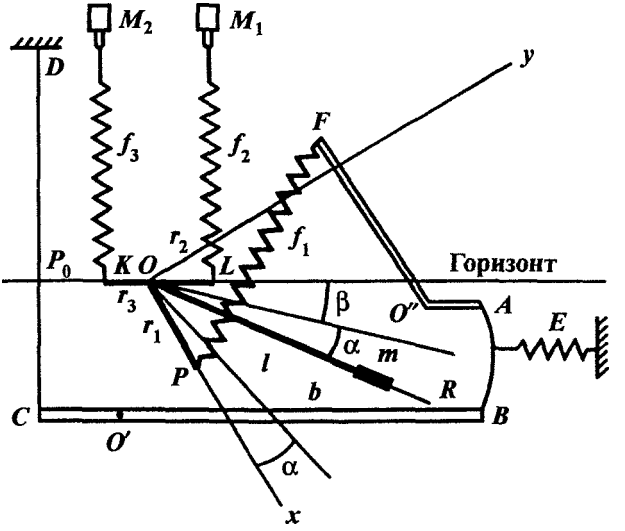


Рис. 29. Схема гравиметра ГНУК-В в проекции на плоскость, перпендикулярную к оси вращения рычага:
OR – рычаг с массой *m*; *OP*, *OK* – отростки; f_1 – главная пружина; α – угол отклонения рычага от исходного положения; β – угол отклонения исходного положения рычага от горизонтали. Температурный компенсатор: *BO'C* – первый рычаг; *AO''F* – второй рычаг; *AB* – лукообразная нить компенсатора криволинейности; *E* – пружина; *ДС* – металлическая нить температурного компенсатора; f_2 – измерительная пружина; f_3 – диапазонная пружина; *OL* – измерительная рамка; M_1 – измерительное микрометрическое устройство; M_2 – диапазонное микрометрическое устройство

Принцип астазирования гравиметров заключается в следующем (рис. 30). Предположим, что под действием приращения силы тяжести рычаг отклоняется вниз. Так как главная пружина соединяется с рычагом через отросток под некоторым постоянным углом, отросток рычага отклонит главную пружину от первоначального положения, как показано на рис. 30, что приведет к уменьшению плеча момента силы главной пружины *OK* до величины *OK'* и, следовательно, к уменьшению момента силы главной пружины.

В результате этого рычаг получит некоторое дополнительное перемещение вниз. Таким путем механически повышается чувствительность системы. При отклонении рычага вверх от исходного положения плечо момента упругой силы главной пружины увеличивается, в результате чего момент ее возрастает и рычаг получает дополнительное перемещение вверх.

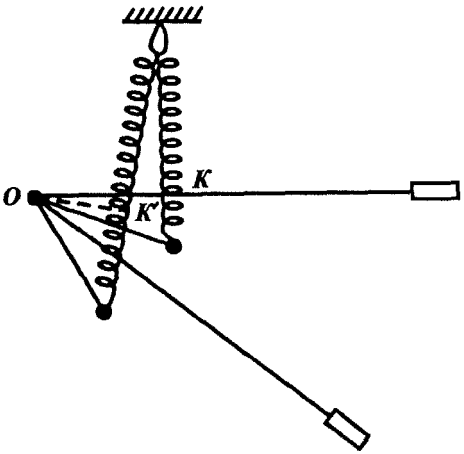


Рис. 30. Схема астазирования гравиметра

Конструктивное оформление гравиметра заключается в следующем. Гравиметр состоит из внешнего кожуха и средней части – собственно гравиметра. Внешний кожух гравиметра – это пустотелый металлический цилиндр, ко дну которого прикреплены три установочных (подъемных) винта. Сверху цилиндр закрывается крышкой. По дну и стенкам проложен теплоизолирующий материал. Внутрь цилиндра вставлен сосуд Дьюара, в который, в свою очередь, помещается средняя часть гравиметра.

Средняя часть состоит из трех отделяемых при разборке частей: корпуса кварцевой системы, теплозащитного столба и верхней панели.

Основные функции теплозащитного столба – защита кварцевой системы от температурных влияний, соединение корпуса кварцевой системы с верхней панелью; размещение отдельных элементов измерительной системы и оптики. В боковой части теплозащитного столба имеется окошко, открывающее доступ к вакуумному крану.

На верхней панели укреплены счетчик оборотов отсчетного устройства (микрометра), продольной и поперечный уровни, тубус микроскопа с окуляром, патрон осветительной лампочки, шкала термометра.

Продольный уровень расположен параллельно рычагу чувствительной системы, поперечный – параллельно его оси вращения. На панели гравиметра поперечный уровень установлен так, что его ось параллельна линии, соединяющей центры двух подъемных винтов.

К кварцевым астазированным гравиметрам, выпускаемым за рубежом, относится гравиметр Уордена – один из наиболее совершенных бестермостатных гравиметров. По оформлению и конструкции на него похожи гравиметры Шарп и Содин. Они отличаются малым изменением нуль-пункта и могут дать стабильную высокую точность. Погрешность измерения доходит до 0,01–0,03 мГал. Гравиметры Уордена выпускаются в четырех модификациях – «Мастер», «Ученик», «Геодезист», «Разведчик».

Разработаны также и металлические гравиметры. В СНГ применяют гравиметр металлический термостатированный (ГМТ), разработанный во ВНИИГеофизике. Он имеет астазированные металлические пружинные весы.

К наиболее распространенным металлическим гравиметрам, выпускаемым за рубежом, относятся гравиметры «Северная Америка» и «Ла-Коста-Ромберга». Они имеют металлические пружинные весы, построенные по принципу вертикального сейсмографа Голицына. Весы заключены в электрический термостат. Отличительной особенностью этих гравиметров является малое смещение нуль-пункта и высокая точность. Например, нуль-пункт у гравиметра Ла-Коста-Ромберга изменяется всего на 0,5–2 мГал в месяц, а погрешность наблюдений составляет 0,01–0,03 мГал. Есть модификации этого гравиметра, разработанные для измерения вариаций силы тяжести. Погрешность наблюдений на них достигает тысячных долей миллигала.

Литература: [1, 2, 3, 6, 14].

ИЗМЕРЕНИЯ НА МОРЯХ И ОКЕАНАХ

Более 70 % поверхности Земли покрыто водой. Поэтому большое значение имеют измерения элементов гравитационного поля на морях и океанах. Только зная распределение значений силы тяжести на всей поверхности Земли, можно решать задачи, связанные с определением фигуры Земли, изучать особенности строения земной коры и верхней мантии вне континентов и решать другие задачи. Измерения гравитационного поля на морях играют важную роль, особенно в последние годы в связи с осваиванием месторождений полезных ископаемых (в первую очередь нефти) в пределах континентального шельфа. Однако эта задача является чрезвычайно сложной, так как при движении судна на чувствительную систему гравиметра влияют как значения ускорения свободного падения, так и равномерное прямолинейное движение судна и ряд периодических и непериодических ускорений, связанных с движением судна и отдельных его частей. Процесс измерения осложняется и периодическим изменением наклона корабля, из-за чего упругая система гравиметра регистрирует уменьшенные значения силы тяжести (значения, умноженные на косинус угла наклона).

Значения возмущающих ускорений движения судна в тысячи и более раз превосходят аномалии ускорения свободного падения. Для исключения влияния изменения наклона прибора применяются подвесы Кардана или гироскопически стабилизированные платформы.

На практике при измерениях напряженности гравитационного поля на море для стабилизации ориентировки прибора применяют гироскопическую стабилизацию, а для борьбы с мешающими влияниями ускорений движения – способы частотной фильтрации, учитывающие, что ускорение свободного падения меняется с относительно низкой частотой, а инерционные ускорения – с более высокой. При этом суммарный сигнал, состоящий из ускорения свободного падения и инерционных ускорений на стадии измерения и регистрации фильтруется демпфированием измерительного элемента прибора (жидкостное, воздушное, электромагнитное) и применением электрических фильтров, на стадии об-

работки – применением цифровой фильтрации. Сильное затухание упругой системы гравиметра приводит к подавлению влияния относительно высокочастотных ускорений по сравнению с низкочастотными, а применение электрического фильтра низких частот позволяет регулировать степень затухания (демпфирования) в зависимости от ожидаемого на участке работ периода возмущающих ускорений.

1. ВЛИЯНИЕ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ (ПОПРАВКА ЭТВЕША)

Кроме рассмотренных искажений, изменения в показаниях прибора возникают и за счет изменения величины центробежной силы, действующей на гравиметр в результате равномерного прямолинейного движения корабля по поверхности вращающейся Земли. Этот эффект называется эффектом Этвеша. При движении корабля вдоль меридиана на север или юг этого влияния не будет – в этом случае в результате смещения пункта измерения по широте меняется только нормальное значение силы тяжести, которое учитывается обычным путем. При движении же корабля с запада на восток происходит увеличение центробежной силы, с востока на запад – ее уменьшение, так как скорость судна в первом случае добавляется к скорости вращения Земли, во втором случае – вычитается.

Значение поправки определяют по формуле

$$\Delta g = \pm 4{,}049\ v \cos\varphi \sin A, \qquad (1)$$

где v – скорость движения корабля; A – азимут направления движения корабля; φ – широта.

Значения Δg получим в мГал, если скорость v выражена в километрах на час. Чтобы выразить скорость в узлах, правую часть выражения (1) нужно умножить еще на 1,85, т.е.

$$\Delta g = \pm 7{,}503\ v \cos\varphi \sin A. \qquad (2)$$

Это выражение верно для малых скоростей движения судна (до 30 км/ч). Если скорость движения корабля больше этой величины, то в правые части выражений (1), (2) нужно добавить еще член v^2/r. При этом, например, численное значение этого члена в формуле (1) будет равно $0{,}00415\ v^2$.

Поправка, определяемая формулами (1) или (2), называется ***поправкой Этвеша***. Из выражений (1) и (2) видно, что с увеличением широты значение поправки уменьшается.

Литература: [2, 3, 6, 14].

2. КРОСС-КАПЛИНГ ЭФФЕКТ

На гравиметр с горизонтальным рычагом в момент измерения не должна действовать горизонтальная составляющая инерционных ускорений. Но из-за постоянного воздействия меняющейся во времени вертикальной составляющей ускорения рычаг гравиметра наклоняется, и начнет сказываться влияние горизонтальной составляющей. При этом переменные горизонтальная и вертикальная составляющие инерционных ускорений могут взаимодействовать друг с другом таким образом, что создадут постоянную по знаку силу, отклоняющую рычаг гравиметра от горизонтального положения в ту или иную сторону. Таким путем возникает систематическая составляющая, искажающая отсчеты. Этот эффект называется ***Кросс-Каплинг эффектом*** или эффектом совместного влияния горизонтальных и вертикальных ускорений. Этот эффект можно устранить, если вести измерения двумя одинаковыми гравиметрами, поставленными на гироплатформу, повернув их друг относительно друга на 180°. Под действием эффекта взаимных связей рычаги гравиметров повернутся на один и тот же угол, но разного знака (рис. 31). При этом показание одного гравиметра будет заниженным, другого – завышенным, а среднее значение отсчета будет свободно от влияния указанного эффекта.

Как было отмечено выше, для уменьшения влияний мешающих ускорений и наклона гироплатформы берутся усредненные значения отсчетов, следовательно, усредняются в течение некоторого промежутка времени значения всех помех, что приводит к уменьшению их амплитуды. Влияния остающихся помех учитывают в виде поправок. С этой целью горизонтальные ускорения регистрируют при помощи горизонтальных акселерометров, а для регистрации наклонов используют наклономерные маятники.

Литература: [2, 3, 6, 14].

Рис. 31. Действие ускорений на сдвоенную упругую систему

3. ДОННЫЕ КВАРЦЕВЫЕ ГРАВИМЕТРЫ

Измерение значений гравитационного поля в районах прибрежных или мелководных частей морей, озер и водохранилищ производится при помощи донных гравиметров. Они разработаны на основе наземных гравиметров с добавлением устройств для дистанционного нивелирования, арретирования и регистрации изменения значений силы тяжести.

С целью автоматического нивелирования прибор помещают в карданный подвес или в подвес с принудительной установкой гравиметра в горизонтальное положение. Карданный подвес закреплен внутри скафандра – водонепроницаемой камеры, выдерживающей большое внешнее давление. Скафандр имеет треногу, предназначенную для установки прибора на дне водоема. Для управления гравиметром на борту корабля имеется специальный пульт, соединенный кабелем с упругой системой прибора.

При помощи разработанных донных гравиметров измерения можно проводить на глубинах от нескольких метров до нескольких сот метров.

Первые измерения силы тяжести донными гравиметрами были проведены в 1949 г. На базе существующих наземных гравиметров был создан ряд донных гравиметров. В настоящее время применяются донные гравиметры ГДК и ГМТД.

Кварцевый донный гравиметр ГДК создан на базе гравиметра ГНУК-С. Он состоит из трех частей: собственно гравиметра, скафандра с подвесом Кардана и пульта управления.

Основные детали кварцевой системы такие же, как у гравиметра ГНУК-С. Устройство для фиксации (рис. 32) горизонтального положения рычага работает следующим образом. Свет от лапочки *14*, отражаясь от зеркала *23*, укрепленного на рычаге гравиметра *24*, попадает в устройство, состоящее из двух фотоэлементов *16*, подключенных к гальванометру. Если рычаг гравиметра занимает горизонтальное положение, то освещенность двух фотоэлементов *16* одинаковая и разностный ток в цепи фотоэлементов равен нулю и стрелка гальванометра будет находиться на нуле. При отклонении рычага от горизонтального его положения фотоэлементы освещаются по-разному и в их цепи появляется ток, который регистрируется гальванометром.

При измерениях микрометрический винт *9* вращается электродвигателем *11* через редуктор *10*. Число оборотов микрометрического винта преобразуется в электрическое сопротивление при помощи кругового многооборотного потенциометра *12*, вал

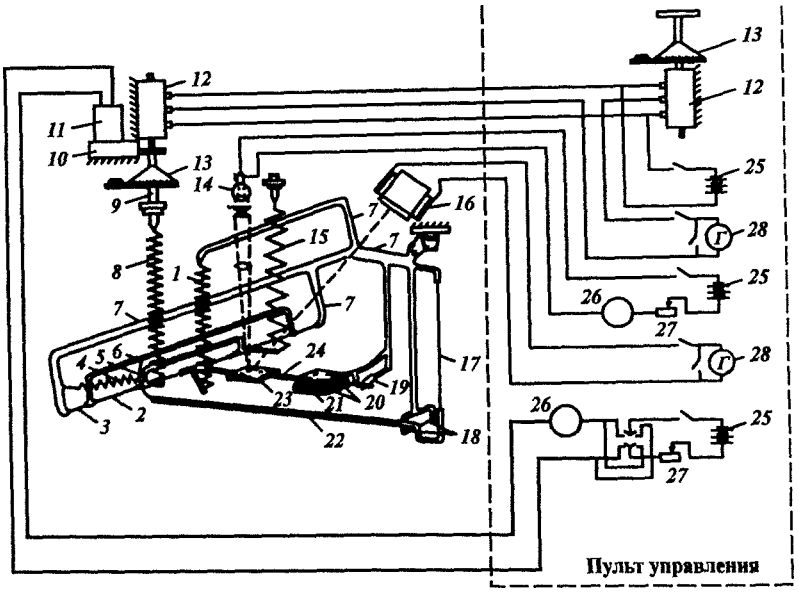


Рис. 32. Схема гравиметра ГДК:
1 – главная пружина; *2* – нити подвеса измерительной рамки; *3* – нити подвеса подвижной рамки термокомпенсатора; *4* – пружина компенсатора криволинейности; *5* – измерительная рамка; *6* – подвижная рамка термокомпенсатора; *7* – каркас; *8* – измерительная пружина; *9* – микроскопический винт; *10* – редуктор; *11* – двигатель; *12* – потенциометр; *13* – счетчик оборотов; *14* – электрическая лампочка; *15* – диапазонная пружина; *16* – фотоэлемент; *17* – металлическая нить температурного компенсатора; *18* – нити подвеса рычага температурного компенсатора; *19* – ограничитель; *20* – неподвижная демпферная пластина; *21* – подвижная демпферная пластина; *22* – рычаг температурного компенсатора; *23* – зеркало; *24* – рычаг; *25* – источник электропитания; *26* – миллиамперметры; *27* – реостат; *28* – гальванометр

которого связан с измерительным микровинтом. Электрическое сопротивление измеряется мостом сопротивлений.

Погрешность измерений с гравиметром составляет 0,15 мГал. Масса всего прибора (без кабеля) составляет около 100 кг.

На базе металлического гравиметра ГМТ-1 разработан гравиметр металлический телевизионный донный ГМТД-2 (ВНИИГеофизики). В приборе использовано телевизионное устройство, при помощи которого осуществляются необходимые для измерений операции (установка уровней, арретирование и дезарретирование прибора, снятие отсчетов и др.). На пульте управления имеется телевизионный экран. Установочные винты гравиметра

вращаются электродвигателями, а отсчет берется так же, как на наземном гравиметре. Преимуществом прибора является то, что он свободен от погрешностей, возникающих от свободных колебаний подвеса Кардана и от погрешностей стрелочных электроизмерительных приборов при качке корабля. Погрешность единичного измерения гравиметра составляет 0,05–0,10 мГал при продолжительности рейса до суток.

За рубежом разработаны и применяются донные гравиметры Уорден, «Северная Америка», Ла-Коста-Ромберга и др.

Донные гравиметры перевозят на палубе корабля в амортизаторе. Спускают и поднимают их при помощи стрелы с лебедкой.

Литература: [1, 2, 3, 6, 14].

4. МОРСКИЕ НАБОРТНЫЕ ГРАВИМЕТРЫ

Основные требования, предъявляемые к морским набортным гравиметрам, следующие: автоматическая ориентация оси чувствительности по вертикали; различная (избирательная) чувствительность к влиянию на систему гравиметра быстро и медленно изменяющихся сил; широкий диапазон измерений.

Пружинные морские сильно демпфированные гравиметры впервые в мире были разработаны К.Е. Веселовым и Л.П. Смирновым (ВНИИГеофизика, 1953–1956 гг.). В настоящее время заводом НЕФТЕКИП (г. Москва) выпускается морской набортный гравиметр ГМН-К. Это прибор с автоматической обратной связью. Основой его является термостатированный кварцевый астазированный пружинный гравиметр. В его состав входят маятниковый гироскопический стабилизатор, регистратор и блок питания.

Принципиальная схема гравиметра [2] ГМН-К показана на рис. 33. К рычагу *1* гравиметра прикреплены зеркало *14*, вертикальна пластина *4*, нижний конец измерительной пружины *3*, навеска *15* и горизонтальная демпферная пластина *9'*. Рычаг *1* удерживается в горизонтальном положении моментами упругой силы главной пружины *2* и нитей подвеса. Нижний конец микрометрического устройства прикреплен к верхнему концу пружины *3* и к пластине *4*, параллельной пластине *4'*. С целью осуществления сильного демпфирования и температурной компенсации вся кварцевая система прибора погружена в масло. При помощи устройства *9''* можно изменить расстояние между пластинами *9* и *9'*, тем самым можно изменить силу демпфирования.

При изменении положения рычага под влиянием силы тяжести или сил инерции луч света, падающий от лампочки на зерка-

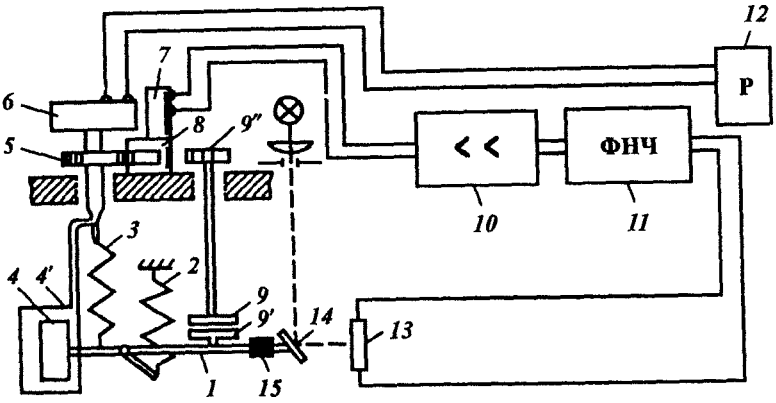


Рис. 33. Принципиальная схема морского набортного кварцевого гравиметра ГМН-К

ло *14*, будет перемещаться по поверхности фотосопротивления *13*. При этом, если сила тяжести увеличивается, то рычаг гравиметра пойдет вниз и тогда луч света будет освещать в основном нижнюю половину фотосопротивления *13*. Неравенство сопротивлений верхней и нижней его половин приводит к появлению электрического сигнала, который попадает на электрический фильтр *11*. После фильтрации и усиления в усилителе *10* он подается на электродвигатель *7*. Последний связан с редуктором *8* и через него вращает микрометрический винт *5*, тем самым изменяя длину измерительной пружины *3*. Это, в свою очередь, приводит к компенсации изменения напряженности гравитационного поля. При этом осуществляется отрицательная обратная связь. При положительном сигнале электродвигатель сжимает измерительную пружину, что приводит к поднятию рычага гравиметра. Компенсирующая сила является линейной функций от угла поворота микрометрического винта. Число оборотов последнего измеряется многооборотным потенциометром *6*. Изменение сопротивления потенциометра преобразуется в электрический ток, регистрируемый непрерывно самописцем *12*.

Автоколебания в приборе подавляются с помощью так называемого форсирующего устройства. Оно состоит из вертикальной пластины *4*, прикрепленной к рычагу гравиметра, и параллельной ей пластины *4'*, жестко связанной с микрометрическим винтом. При изменении положения измерительной пружины *3* (через микрометрический винт) перемещается и пластина *4'*. Эти дви-

жения из-за наличия вязкого трения в жидкости передаются пластине *4*, а через нее и рычагу *1*. Таким путем форсирующее устройство создает дополнительную обратную связь, которая приводит к подавлению автоколебаний и, следовательно, обеспечивает устойчивость системы автоматического регулирования среднего положения рычага.

До гравиметра ГМН-К были разработаны и применялись другие типы пружинных гравиметров (СЗ-3, ГАЛ (ИФЗ), ГМПК и др.). В настоящее время за рубежом применяются гравиметры фирм «Аскания» ФРГ (ГС-12, ГСС-3) и «Ла-Коста-Ромберга» (США) [2].

Кроме сильно демпфированных пружинных гравиметров, применяются еще и струнные набортные гравиметры (СНГ и Япония). Для создания сети опорных пунктов применяются и морские маятниковые приборы.

Литература: [1, 2, 3, 6, 14].

ИЗМЕРЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Приборы для определения вторых производных потенциала силы тяжести называются гравитационными вариометрами и градиентометрами. Гравитационным вариометром измеряют вторые производные W_{xz}, W_{yz}, W_{xy} и $W_{\Delta} = W_{xx} - W_{yy}$, гравитационным градиентометром – только вторые производные W_{xz} и W_{yz}, т.е. измеряют кривизны уровенной поверхности и горизонтальные градиенты (W_{xz}, W_{yz}) силы тяжести.

Вторые производные определяют степень неоднородности гравитационного поля. Для характеристики этой неоднородности необходимо рассматривать силы, действующие на две массы, помещенные в разных точках некоторой малой области. Поэтому чувствительная система гравитационного вариометра представляет собой равноплечее коромысло с грузами на концах, подвешенное на тонкой, вертикально расположенной нити.

Угол закручивания нитей подвеса коромысла является мерой разности сил, действующих на грузы. В однородном гравитационном поле нить не будет закручиваться (угол закручивания равен нулю), так как значения вторых производных потенциала силы тяжести будут равны нулю. В неоднородном гравитационном поле на грузы будут действовать разные по величине и направлению силы. Их составляющие в горизонтальной плоскости создадут пару сил, которая будет закручивать коромысло до тех пор, пока ее действие не будет уравновешено упругим моментом нити подвеса. Непосредственно измеряемым параметром в гравитационных вариометрах и градиентометрах является угол закручивания нити подвеса коромысла. В применяемых на практике приборах используются коромысла различной формы. Некоторые из них показаны на рис. 34.

К типам вариометров, получивших наибольшее распространение на практике, относятся вариометры S-20 (впоследствии выпускался под маркой ВГ-1), Z-40, E-60, градиентометр ГРБМ-2. Гравитационные вариометры и градиентометры из-за их гро-

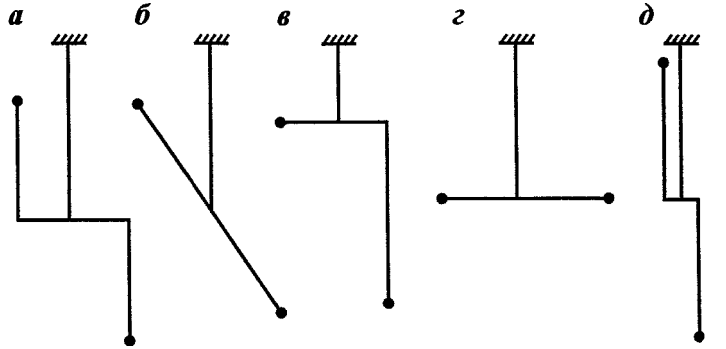


Рис. 34. Схемы крутильных весов для измерения вторых производных гравитационного потенциала на вертикальных нитях подвеса (коромысла).
Коромысла: *а, д* – *z*-образное; *б* – наклонное; *в* – *L*-образное; *г* – горизонтальное

моздкости, неудобств в транспортировке и необходимости высокой квалификации работающих с ними почти не применяются в настоящее время в нефтяной разведке. Поэтому подробное их описание, принцип устройства, методика наблюдений и обработки результатов здесь не рассматриваются. Более подробные сведения о них можно найти в книгах [1, 3] и в специальных руководствах. В работе [1] можно найти и сведения о крутильных

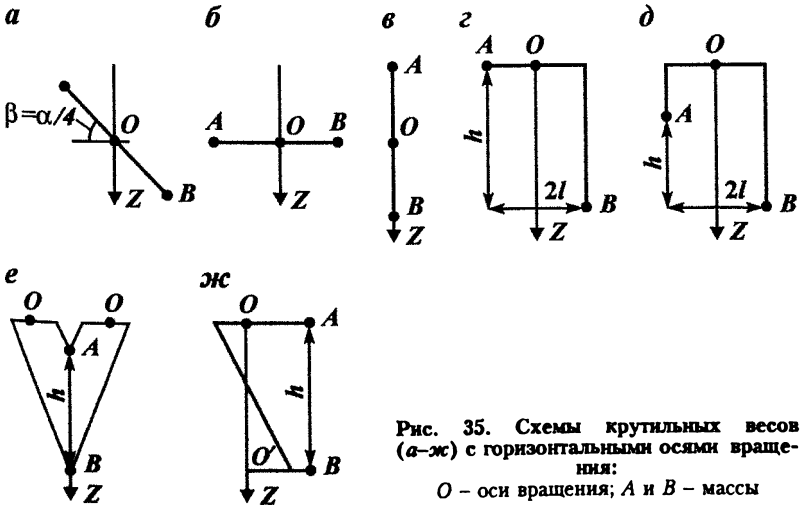


Рис. 35. Схемы крутильных весов (*а–ж*) с горизонтальными осями вращения:
O – оси вращения; *A* и *B* – массы

весах с горизонтальными осями вращения, а также сведения о возможности измерения вторых производных динамическим способом. (Описанные выше способы измерения вторых производных являются статическими).

Для разведочных целей имеет важное значение непосредственное измерение значений вертикального градиента силы тяжести W_{zz}. Но, к сожалению, к настоящему времени для измерения вертикального градиента напряженности гравитационного поля специальной аппаратуры не разработано. Значения W_{zz} можно определить при помощи приборов с крутильными системами, показанными на рис. 35. Крутильная система типа, указанного на рис. 35, *а*, *г*, позволяет измерить производные W_{xz}, W_{yz}, и W_{zz}. Если в ней значительно уменьшить горизонтальное расстояние между грузами по сравнению с вертикальным, то влиянием производных W_{xz} и W_{yz} можно пренебречь и тогда можно определять только значения производной W_{zz}. Крутильные системы рис. 35, *в*, *д*, *ж* дают возможность определить только производную W_{zz}.

В настоящее время значения W_{zz} можно найти по результатам измерений гравиметра на двух уровнях. С этой целью можно пользоваться специальными треногами. Рассмотрим следующий пример. Пусть высота треноги равна 3 м, а погрешность измерения гравиметра составляет 0,01 мГал. Тогда ошибка определения W_{zz} составит 30 Е. Эту ошибку можно уменьшить многократными повторными измерениями и увеличением чувствительности гравиметров.

Литература: [1, 6, 14].

ИЗМЕРЕНИЯ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ НА САМОЛЕТЕ

Значение аэрогравиметрии очень велико и особенно из-за большой производительности труда и возможности изучения пространственного распределения элементов поля. При измерениях на борту самолета, как и на корабле, гравиметры подвержены действию ускорений движения. Влияние их уменьшают применением частотной фильтрации. Однако при больших скоростях полета на приборы действует часть инерционных ускорений, имеющих частоты, близкие или совпадающие с частотами ускорения свободного падения. Для устранения влияния последних необходимо измерить высоту полета самолета или его вертикальную скорость.

Для обработки результатов аэрогравиметрической съемки необходимо знать абсолютные значения высот полета и точные значения координат траектории полета в плане. Координаты полета необходимо иметь для учета инерциальных ускорений (поправки Этвеша), величина которой при измерениях на самолете в 15–30 раз больше, чем при морских измерениях.

В б. СССР разработан комплект аппаратуры для аэрогравиметрической съемки и выполнены опытно-производственные работы в труднодоступных районах со средней квадратической погрешностью 5–6 мГал (время усреднения показаний 4 мин). В комплект аппаратуры входят быстродействующие, имеющие большой динамический диапазон, струнные гравиметры с жидкостным демпфированием груза. Применение сильного жидкостного демпфирования делает систему малочувствительной к механическим воздействиям, позволяет освободиться от вибрации деталей самолета, делает линейной зависимость между изменениями натяжения струны и изменениями ее частоты.

Дальнейшее развитие аэрогравиметрии зависит от применения более точных навигационных систем, инерциальных стабилизаторов оси чувствительности гравиметра, от более точного определения высоты и вертикальной скорости полета самолета, от применения более совершенных регистрирующих и обрабатывающих систем и т.д.

Литература: [1, 6, 14].

ИЗМЕРЕНИЯ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ СКВАЖИННЫМИ ГРАВИМЕТРАМИ

Возможности гравиразведки намного возрастают, если проводить измерения ускорения свободного падения вне объекта исследования (снизу, сверху и с боков) и внутри него. Получаемые таким путем данные измерений позволяют определить значения плотности пород, более устойчиво решать обратную задачу гравиразведки, позволяют изучить геологические объекты, создающие малые аномалии (из-за приближения аппаратуры измерений к источникам гравитационных аномалий).

Скважинные измерения. Идея измерений силы тяжести в скважинах (гравитационный каротаж) впервые была высказана П.И. Лукавченко, он же начал разрабатывать ее в нашей стране. Первые измерения приращения напряженности гравитационного поля в скважинах были проведены в б. СССР уже в конце 50-х годов прошлого века.

По результатам измерений напряженности гравитационного поля в скважине строят вдоль ствола скважины графики изменения силы тяжести, вертикального градиента силы тяжести и кажущейся плотности. В скважинах, расположенных вдоль профиля, можно строить вертикальные плотностные разрезы. Если же скважины распределены вдоль площади, то строят карты изоденс для отдельных геологических границ.

С применением гравитационного каротажа можно решать следующие задачи: определять значения кажущейся плотности пачек пород, проводить корреляцию геологических разрезов, устанавливать положение и размеры аномальных тел, находить значения горного давления, в благоприятных случаях можно обнаружить залежи нефти и газа и других полезных ископаемых, совместно с другими видами каротажа можно решать ряд более тонких задач (оценка упругих характеристик пород, выделение зоны повышенной пористости и т.п.).

Совместное использование результатов гравитационного каро-

тажа и наземных гравиметрических съемок значительно увеличивает точность и достоверность решения обратной задачи.

Приведем формулу, позволяющую определить значение плотности пород по данным гравитационного каротажа. Пусть Δg – измеренная разность силы тяжести между двумя точками наблюдений A и B, в вертикальной скважине, σ – средняя плотность пород пласта, h – мощность слоя меду точками наблюдений A и B, $\Delta g_р$ – разность влияний рельефа земной поверхности в точках A и B, ε – разность влияний других помех в этих точках. Тогда значение средней кажущейся плотности пород можно определить из выражения

$$\sigma_k = \frac{1}{4\pi C h \cos^2\beta}\left(\Delta g + \frac{\partial q}{\partial z}h + \Delta g_р + \varepsilon\right).$$

Если пласт горизонтальный и $\Delta g_р = 0$, $\varepsilon = 0$, то

$$\sigma_k = (\Delta g + 0{,}3086h)/0{,}0836h.$$

Скважинные гравиметры должны удовлетворять следующим требованиям: быть телеуправляемыми, компактными для спуска в скважину, выдерживать давления до 10^3 Па, изменения температур до 300 °С и выше, быть работоспособными при больших (до 20°) наклонах скважин и иметь диапазон измерений без перестройки в несколько сотен миллигал. Этим требованиям современные скважинные гравиметры удовлетворяют не полностью, поэтому в настоящее время разрабатываются гравиметры различных диаметров для различных пределов измерения температуры, давления, наклонов скважин и различных пределов изменения напряженности измеряемого поля.

В качестве скважинных гравиметров используются гравиметры, построенные по принципу пружинных весов, и струнные гравиметры. В СНГ применяются скважинные гравиметры ГС-110. Кварцевая система гравиметра такая же, как и у ГНУК-С. Она заключена в металлический герметичный корпус и устанавливается в подвесе Кардана, который помещается в скважинный снаряд. Последний находится в сосуде Дьюара. Для повышения теплоемкости и ускорения затухания колебаний устройства сосуд Дьюара заполняется жидкостью (трансформаторным маслом). Для телеуправления гравиметром используется семижильный бронированный кабель. Гравиметр можно применять для измерений в скважинах глубиной до 3500 м, с углами наклона до 6–8° при температуре до 80 °С. Погрешность единичного измерения составляет 0,15–0,30 мГал. Более подробные сведения о скважинных гравиметрах можно найти в работе [1].

Литература: [1, 3, 6, 14].

ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из элементов магнитного поля Земли можно измерить абсолютные значения вектора $\vec{T}$, магнитные склонения, наклонения и горизонтальную составляющую поля. Что же касается вертикальной составляющей поля, то в настоящее время измеряются главным образом относительные значения. В магниторазведке используют в основном измеренные значения вертикальной и горизонтальной составляющих магнитного поля, а также значения модуля вектора $\vec{T}$ и аномалии ΔT.

При наземных, морских и аэромагнитометрических измерениях используют квантовые магнитометры, магнитометры с феррозондовыми магниточувствительными элементами и оптико-механические магнитометры. Ниже рассмотрим основные элементы устройства наиболее применяющихся в практике магниторазведки приборов – М-27м, квантовых и феррозондовых магнитометров.

1. АЭРОМАГНИТОМЕТРЫ

Большое значение для магниторазведки имело изобретение и внедрение в практику разведочных работ аэромагнитометров, позволивших резко увеличить производительность. Впервые аэромагнитометры (индукционный Z-магнитометр) были сконструированы А.А. Логачевым у нас в стране, и первая аэромагнитная съемка была проведена А.А. Логачевым и А.Т. Майбородой по маршруту Новгород – Валдай в 1936 г. Первые аэромагнитометры А.А. Логачева были предназначены для измерения значений вертикальной составляющей магнитного поля Z и применялись до конца 40-х годов, затем они были заменены более точными T-аэромагнитометрами, измеряющими значения ΔT.

Наибольшее распространение у нас в стране и за рубежом получили феррозондовые аэромагнитометры, в которых магниточувствительным элементом служили феррозонды. Феррозонды основаны на применении стержней из пермаллоя (железо-нике-

левый сплав), обладающих очень высокой проницаемостью, высоким полем насыщения. Феррозондовые аэромагнитометры были предназначены для измерения приращений модуля вектора геомагнитного поля ΔT. Они имели нестабильный дрейф, достаточно большой после включения прибора и уменьшающийся затем нелинейно до 5–10 нТл/ч. Кроме того, инерционность приборов искажала аномалии в полях с большими градиентами. Поэтому на практике в магниторазведке применяют больше всего квантовые и протонные аэромагнитометры.

Протонные аэромагнитометры применяют для измерения модуля вектора $\vec{T}$ и его приращений ΔT. Они практически не имеют дрейфа (смещения нуль-пункта). Отчеты – дискретные. К протонным аэромагнитометрам относятся приборы ММС-213, ММС-214 и ММВ-215. Из них более новым является аэромагниометр ММВ-215. Поэтому рассмотрим его характеристики.

Протонный аэромагнитометр ММВ-215 [7] предназначен для измерения модуля полного вектора геомагнитного поля $\vec{T}$. Он основан на применении явления прецессии протонов с использованием метода динамической поляризации. В методе динамической поляризации ядер применяется эффект Оверхаузера, который заключается в том, что в некоторых веществах с сильным взаимодействием ядерных спинов с электронными можно создать дополнительную поляризацию одной из этих спиновых систем за счет поляризации другой, например, ядерной за счет электронной. Для этого необходимо, чтобы рабочее вещество содержало взаимодействующие ядерные и электронные спиновые магнитные моменты, т.е. имело протоны и было парамагнитным. К таким веществам относятся, например, растворы натрия в аммиаке, соль Фреми и др. Эти вещества дают возможность наблюдать динамическую поляризацию в слабых полях, в том числе и в земном магнитном поле.

При измерениях рабочее вещество возбуждается при помощи переменного радиочастотного поля, примерно перпендикулярного к полю $\vec{T}$. При определенном значении частоты этого поля создаются условия парамагнитного резонанса. В момент парамагнитного резонанса наблюдается максимальное поглощение энергии переменного поля, при этом возникают сильные внутренние магнитные поля, которые приводят протоны к общей их ориентировке по полю $\vec{T}$, вещество поляризуется.

Основными частями магнитометра являются гондола с магнитным преобразователем, блок обработки сигналов. Регистрация измеряемых величин производится на магнитную ленту, магнитометр устанавливается на самолете АН-2. Продолжительность цикла измерений составляет 0,2; 0,5 и 1,0 с. Погрешности изме-

рений при этих циклах измерений равны соответственно ±0,8; ±0,2 и ±0,05 нТл. Систематическая погрешность прибора равна ±1,5 нТл. Средняя квадратическая погрешность съемки составляет 2–10 нТл.

Квантовый аэромагнитометр ММ-01. Аэромагнитометр ММ-01 или ММС-306 является новой усовершенствованной моделью аэромагнитометра ММ-305. Он предназначен для измерения значений модуля полного вектора геомагнитного поля $\vec{T}$ и его приращений ΔT. Аэромагнитометр выпускается в двух модификациях – с выпускной гондолой на гибком кабеле и с жестким креплением преобразователя. Для измерения магнитного поля используется трехкамерный самогенерирующий преобразователь, работающий на парах цезия. В приборе используется метод оптической накачки.

Аэромагнитометр устанавливается на самолете АН-2. Вид регистрации измеряемых величин – цифровая на магнитную ленту и аналоговая. Продолжительность цикла измерений при погрешности отсчитывания (цена 1 мм длины аналоговой записи) 0,1 нТл равна 0,2 и 0,5 с, при погрешности отсчитывания 1 нТл – 1 и 2 с. Средняя квадратическая погрешность съемки в благоприятных случаях составляет 1–5 нТл.

Литература: [7, 14, 20].

2. МАГНИТОМЕТРЫ ДЛЯ НАЗЕМНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. МАГНИТОМЕТР ПЕШЕХОДНЫЙ ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ М-27М

Принцип действия и краткое описание устройства магнитометра. Магнитометр полевой переносной высокоточный М-27М предназначен для измерения приращений вертикальной оставляющей (Z) напряженности магнитного поля Земли.

Чувствительным элементом магнитометра является подвижный постоянный магнит (рис. 36) *10*, вращающийся на горизонтальной металлической нити (растяжке) *8*. Последняя закреплена своими концами на пружинных амортизационных стойках *18* металлического стержня *12*. Магнит закреплен в оправе *9*, к верхней части которой прикреплено зеркало. Зеркало служит для установления положения подвижного магнита относительно горизонтальной плоскости.

Вращающий момент, создаваемый магнитным полем (его вертикальной составляющей Z), под действием которого подвижной магнит *10* отклоняется на некоторый угол, уравновешивается

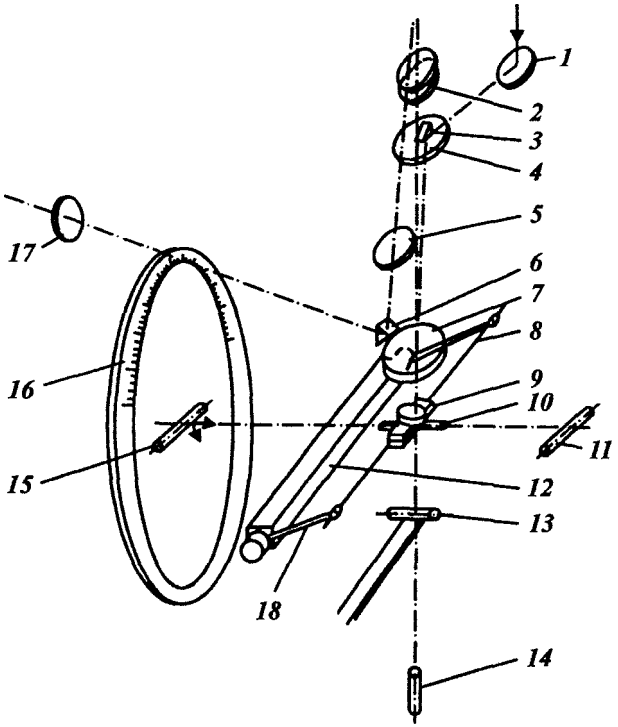


Рис. 36. Схема устройства магнитометра М-27м

(компенсируется) вращающими моментами полей компенсационных постоянных магнитов *15*, *11* и моментом кручения металлической нити *8*.

За момент полной компенсации измеряемого поля условно принят тот, при котором подвижный магнит устанавливается горизонтально (угол *i* между осью магнита и плоскостью горизонта равен нулю).

Горизонтальное положение магнита определяется визуально с помощью отсчетного устройства, состоящего из оптической трубы и шкалы *16* измерительного магнита *15*. Оптическая труба имеет окуляр *2*, объектив *7* (для получения изображения подвижного индекса в фокальной плоскости окуляра) и объектив *5* (для изображения шкалы компенсационного магнита в той же плоскости). Зеркало *17* и призма *6* предназначены для подсветки шкалы, а зеркало *1* и призма *3* – для подсветки подвижного ин-

декса на пластине *4*. Горизонтального положения магнита достигают, совмещая центр подвижного индекса (освещенного и видимого в окуляре), находящегося между его двумя параллельными штрихами, с нулевой неподвижной линией (также в поле зрения окуляра) (рис. 37).

Компенсация магнитного поля осуществляется двумя магнитами. Плавная компенсация в пределах ±3000 нТл осуществляется измерительным магнитом *15*, вращающимся в вертикальной плоскости. Если диапазон изменения магнитного поля в районе превышает 6000 нТл, пределы измерения магнитометра можно расширить введением ступенчатой компенсации (диапазонным магнитом *11*). Переключение ступенчатой компенсации (по 6 ступеней в сторону увеличения и уменьшения магнитного поля) выполняется поворотом ручки диапазонного магнита.

Магнит *13*, укрепленный на биметаллической пластине, служит для компенсации влияния изменений температуры на магнитные моменты магнитов. Магнит *14* – юстировочный.

Так как при компенсации Z магнитная ось подвижного магнита выводится в горизонтальное положение и, следовательно, горизонтальная составляющая геомагнитного поля H не влияет на показания прибора, то отпадает необходимость в ориентировке прибора по буссоли. Однако горизонтальное положение подвижного магнита достигается с некоторой погрешностью, и поэтому при $i \neq 0$ горизонтальная составляющая будет оказывать некоторое влияние на положение магнита. Поэтому при проведении

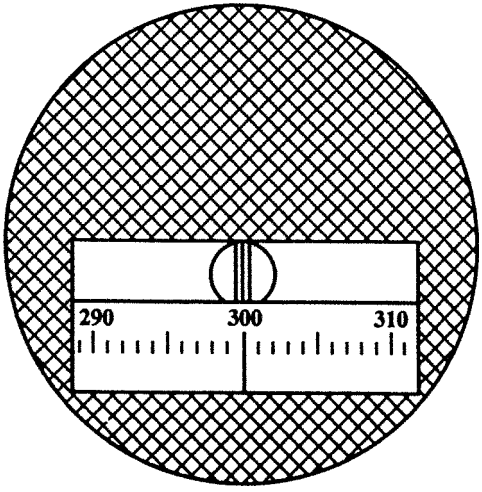


Рис. 37. Вид шкалы с подвижным индексом (бликом) магнитометра М-27м

высокоточных съемок возникает необходимость ориентировать магнитометр по азимуту. Для установления оптимального азимута ориентировки магнитометра строят ***азимутальную кривую***. Для этого на какой-либо точке площади съемки устанавливают прибор в различных азимутах через 30° и в каждом положении производят отсчет. Определяют приращение значений в каждом из азимутов по отношению к одному из них, выбранному за исходный.

По полученным данным строят азимутальную кривую. Если отклонение от азимутальной кривой невелико, ориентации магнитометра не требуется. Если отклонения превышают 10 нТл и требуется провести высокоточную съемку, магнитометр необходимо ориентировать по направлению, в котором азимутальная кривая образует наиболее пологий ход. Так, в случае, изображенном на графике (рис. 38), если магнитометр ориентируется по азимуту 200° с ошибкой ±15°, то ошибка в измерении за счет ориентации будет меньше 5 нТл. Прибор устанавливается в горизонтальное положение по двум цилиндрическим уровням.

Конструктивное оформление магнитометра М-27. Все детали и узлы магнитометра размещены в металлическом немагнитном корпусе (рис. 39). В верхней части корпуса крепятся: оптическая труба *2* с окуляром *11*, вращением которого добиваются отчетливой видимости шкалы, и зеркалом подсветки подвижного индекса *8*, термометр *10*, два цилиндрических уровня *1*.

На боковую поверхность корпуса выведены ручки арретира *4* со стопором, управления магнитами плавной компенсации *7* и диапазонным *16*. Над ручкой управления диапазонным магнитом укреплена шкала ступенчатой компенсации *15*, над ручкой магнита плавной компенсации находится круглое окно подсветки шкалы *5*. На корпус прибора надевается теплоизоляционный кожух с изоляцией из пенополистирола *12*.

Столик *9*, к которому крепится магнитометр, позволяет вра-

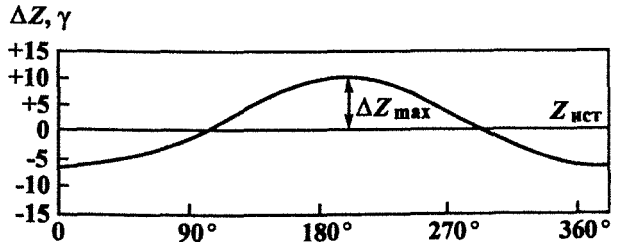


Рис. 38. Азимутальная кривая магнитометра

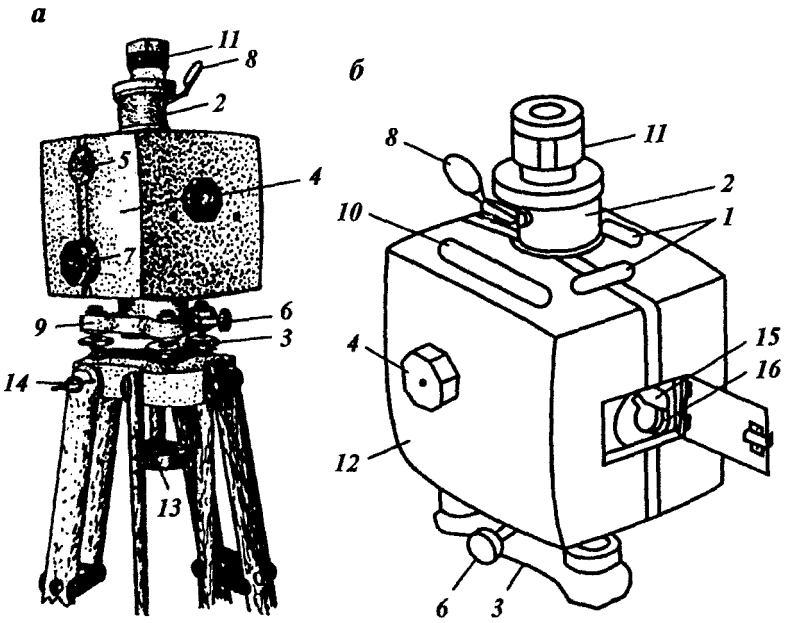


Рис. 39. Магнитометр М-27м:
а – внешний вид с треногой; *б* – схема устройства

щать прибор на 360°. На столике имеются три установочных винта *3* для нивелировки прибора и стопорный винт *6*. Прибор со столиком устанавливается и укрепляется на треноге с помощью невыпадающего центрального винта с ручкой *13*. Ножки треноги закрепляются зажимными винтами *14*. При переходе с одной точки наблюдения на другую нет необходимости снимать прибор с треноги.

Порядок наблюдения на точке с магнитометром М-27м:

1. Прибор укрепляют на треноге с помощью невыпадающего центрального винта. Высота ножек треноги устанавливается в соответствии с ростом наблюдателя и закрепляются они зажимными винтами.

2. Магнитометр устанавливают в произвольном азимуте, если не требуется максимальной точности измерений, и закрепляют стопорным винтом столика.

Если требуется максимальная точность измерений, магнитометр устанавливают приблизительно, на глаз, в одном и том же

азимуте для всех точек профиля по азимутальной кривой. При этом не рекомендуется устанавливать магнитометр в азимуте 180° (северным полюсом подвижного магнита на юг), так как в этом случае затрудняется выведение магнитной системы в горизонтальное положение. (В случае, если северный полюс подвижного магнита обращен на юг, небольшое отклонение его оси от горизонтали приведет к резкому увеличению момента горизонтальной составляющей напряженности геомагнитного поля, стремящегося вывести стрелку из горизонтального положения).

Магнитометр нивелируется по двум цилиндрическим уровням вращением установочных винтов.

3. Магнитометр дезарретируется поворотом ручки арретира. На ручке арретира сверху стоит буква А, если прибор арретирован, и буква Р, если прибор разарретирован. Внимание: запрещается перемещать магнитометр в разарретированном положении.

4. Вращая ручку управления плавной компенсацией, выводят подвижный магнит в горизонтальное положение, что фиксируется совпадением нулевой линии шкалы с серединой подвижного индекса. Берется отсчет по шкале, видимой в оптической трубе. Шкала имеет 600 делений; цена делений приблизительно равна 10 нТл, точность отсчета ±0,5 деления.

5. Магнитометр арретируется.

6. Записывают в журнал результаты измерения и значение температуры в магнитометре.

7. При переносе на следующую точку измерений прибор с треноги можно не снимать, но обязательно арретировать и закреплять ручку арретира стопорным винтом.

Ниже приведен бланк журнала наблюдений (табл. 1).

Таблица 1

Журнал наблюдений с магнитометром

Дата _____ № рейса _____

Наблюдатель _____
(фамилия, имя, отчество)

Магнитометр М-27 № _____

Цена деления магнитометра _____

№ п/п	Номер точки	Время наблюдения		Температура	Отсчет по шкале	Примечание
		час	мин			
1	2	3	4	5	6	7

Таблица 2

Определение цены деления магнитометра

№ п/п	I	S_0	S	C

Определение цены деления шкалы магнитометра. Цена деления шкалы магнитометра определяется числом нанотесл, приходящихся на одно ее деление.

Цена деления шкалы определяется при помощи колец Гельмгольца, являющихся основной деталью градуировочного комплекта КГ-1.

Кольца Гельмгольца устанавливают так, чтобы их геометрический центр совпадал с осью вращения подвижного магнита магнитометра.

Этим обеспечивается наиболее однородное поле при градуировке. В кольцах создается магнитное поле известной напряженности, и вращением ручки управления измерительным магнитом магнитометра подвижный магнит возвращается в нулевое (горизонтальное) положение.

Цену деления шкалы определяют по формуле

$$C = kI/(S - S_0),$$

где k – постоянная колец Гельмгольца, нТл/мА; I – сила тока, пропускаемого по обмоткам колец, мА; S, S_0 – отсчеты по шкале до и после включения тока в кольца Гельмгольца.

Для более достоверного определения цены деления шкалы магнитометра берут отсчеты при разных значениях I. Для каждого значения I определяют цену деления C, а затем по полученным значениям вычисляют среднее $C_{ср}$.

Форма записи наблюдений показана в табл. 2.

2.2. МАГНИТОМЕТР ПОЛЕВОЙ ПРОТОННЫЙ ММП-203

Магнитометр ММП-203 является высокоточным полевым магнитоизмерительным прибором. Он служит для измерения абсолютного значения вектора $\vec{T}$ и относится к протонным магнитометрам, основанным на использовании явления свободной ядерной процессии.

Прибор портативен и очень удобен в работе. Систематическая погрешность абсолютных измерений составляет не более ±2,5 нТл, отсчетная погрешность прибора равна ±1 нТл, время

одного измерения – не более 3 с, масса рабочего комплекта равна 6 кг. Отсчеты берутся по цифровому табло; обслуживает магнитометр один оператор. Источником питания является батарея сухих элементов напряжением 13±3 В. Общий вид прибора показан на рис. 40.

Явление свободной ядерной прецессии заключается в следующем. Вектор магнитного момента ядер веществ прецессирует (вращается) вокруг вектора магнитного поля Земли $\vec{T}$ с частотой (соотношение Лармора)

$$\omega = \frac{\gamma}{2\pi}(1-\sigma)T,$$

где γ – гиромагнитное отношение ядра (отношение его магнитного момента к механическому); σ – некоторая малая величина, определяющая степень магнитной экранировки ядра электронной оболочкой. Из этого равенства видно, что частота прецессии ω зависит для ядер данного вещества только от внешнего магнитного поля $\vec{T}$ (γ – постоянная).

Введем обозначение:

$$K = \gamma(1 - \sigma)/2\pi.$$

Тогда получим

$$\omega = KT.$$

Отсюда видно, что, определяя значение ω, можно определить и значение модуля вектора $\vec{T}$.

В качестве материала для создания эффекта прецессии используются богатые протонами жидкости (вода, спирт, керосин, бензол и др.). Если поместим сосуд с такой жидкостью в катушку индуктивности, то в последней возникнет ЭДС с частотой,

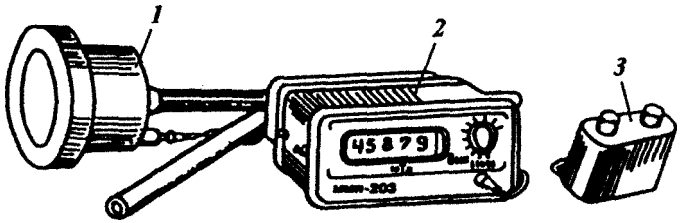


Рис. 40. Магнитометр ММП-203:
1 – магнитоизмерительный преобразователь (МИП); *2* – измерительный пульт; *3* – кассета

равной частоте прецессии протонов, только амплитуда такой ЭДС будет очень малой и поэтому ее трудно измерить. Для усиления интенсивности сигнала используют искусственно создаваемое достаточно сильное постоянное магнитное поле. Такое поле H создается при помощи катушки (соленоида), внутри которой помещают сосуд с жидкостью. Направление такого поля приблизительно перпендикулярно к направлению вектора магнитного поля Земли $\vec{T}$.

С момента создания искусственного поля H, оно начнет экранировать сосуд с жидкостью от внешнего магнитного поля, и вектор ядерного намагничивания ядер начнет ориентироваться в направлении, близком к направлению искусственного поля H. После резкого выключения поля H вектор ядерного намагничивания снова начнет ориентироваться по направлению прежнего магнитного поля – по направлению вектора $\vec{T}$. Время перехода вектора ядерного намагничивания из направления H в направление T называется ***временем релаксации***.

Протоны – ядра атомов водорода. Они обладают некоторым моментом количества движения (спин) и магнитным моментом. Находясь в магнитном поле, протоны двигаются вокруг силовых линий этого поля таким образом, что их ось вращения (направление вектора магнитного момента) описывает коническую поверхность. Это движение подобно движению отклоненной от вертикали оси вращения волчка вокруг вертикальной оси и называется ***прецессией***. Прецессия, происходящая без воздействия внешней силы, называется свободной. Частота свободной прецессии протонов в магнитном поле, как было отмечено выше, прямо пропорциональна модулю вектора напряженности этого поля.

Вектор магнитного момента протонов (вектор ядерного намагничивания) после снятия поля H, прецессируя вокруг вектора $\vec{T}$, наводит переменную ЭДС в приемной катушке, внутри которой находится сосуд с жидкостью. В магнитометре катушка возбуждения (поляризации) является одновременно и приемной катушкой. Интенсивность индуктируемой ЭДС убывает за время релаксации по экспоненциальному закону. Время релаксации исчисляется долями секунды, но оно вполне достаточно для измерений. Сигнал усиливают и подают на частотомер. Измеряют частоту, а по ее значению – и значение модуля вектора $\vec{T}$.

Время измерения равняется нескольким секундам.

В магнитометре ММП-203 в качестве рабочего вещества применен керосин. Он имеет относительно малое время релаксации (около 1,2 с) и низкую температуру замерзания (−70 °С). Конструктивно магнитометр ММП-203 состоит из двух блоков – маг-

ниточувствительного преобразователя (МИП) и измерительного пульта.

В измерительном пульте имеется отсек для размещения батареи сухих элементов.

Литература: [7, 14, 20].

2.3. МАГНИТОМЕТРЫ КВАНТОВЫЕ ПЕШЕХОДНЫЕ

Эти магнитометры М-33, ММП-303 и ММП-304 основаны на использовании принципа оптической накачки и применяются для определения значений модуля вектора $\vec{T}$ [7].

Принцип оптической накачки атомов связан с известным квантовым эффектом Зеемана, который заключается в том, что уровни энергией атомов, обладающих магнитным моментом, расщепляются в магнитном поле на несколько подуровней, например, E_1, E_2, ..., E_n. Разность энергий ΔE между уровнями зависит от напряженности магнитного поля:

$$\Delta E = h\gamma T,$$

где γ – отношение магнитного момента атома к механическому; h – постоянная Планка.

Частота перехода квантов ω между энергетическими уровнями E_1 и E_2 пропорциональна разности значений энергий $E_1 - E_2$:

$$\omega = (E_1 - E_2)/h = \Delta E/h,$$

где $\Delta E = E_1 - E_2$.

Подставляя это значение отношения $\Delta E/h$ найдем

$$\omega = \gamma T,$$

Отсюда следует, что частота излучения или поглощения при переходе электрона атомов с одного подуровня на другой пропорциональна величине $|\vec{T}|$. Этот принцип и положен в основу измерений магнитного поля квантовыми магнитометрами. При этом для возбуждения атомов, находящихся в магнитном поле, применяется метод так называемой оптической накачки. Он заключается в следующем. Через стеклянную трубку, заполненную парами щелочного металла, находящуюся в магнитном поле Земли, пропускают поляризованный свет с длиной волны, соответствующей одной из спектральных линий данного металла. Свет будет поглощаться парами металла, чему будет соответствовать переход атомов металла с нижнего уровня на высший, т.е. атом рабочего вещества, поглотив квант света или фотон, переходит из основного состояния в ближайшее возбужденное и излучив та-

кой же квант света почти сразу же возвращается обратно в исходное свое состояние. Но существует один из энергетических подуровней – такой, что атомы вещества, находящиеся на нем, не могут поглощать кванты, т.е. переходы с данного подуровня «запрещены». При обратном переходе атомы распределяются на всех подуровнях равномерно. В силу этого все атомы будут скапливаться на том подуровне, с которого переходы «запрещены». Таким образом, под влиянием пучка света произошло «накачивание» атомов на один из подуровней.

Ориентировка магнитных моментов атомов на этом уровне будет одинаковой (по направлению магнитного поля Земли), пары рабочего вещества окажутся намагниченными и перестанут поглощать кванты света. Если при этом воздействовать на стеклянную трубку переменным магнитным полем с частотой, равной частоте квантового перехода атомов между подуровнями, то атомы начнут покидать тот «населенный» атомами подуровень и в следующий момент времени они перейдут в исходное свое нормальное состояние. После этого пары рабочего вещества в стеклянной трубке снова начнут поглощать кванты света и рассеивать свет. Наблюдая при этом в проходящем свете его интенсивность при различных частотах переменного поля, можно заметить резкое уменьшение интенсивности света в момент резонанса. Измеряя эту резонансную частоту переменного поля, можно определить модуль полного вектора $\vec{T}$.

В магнитометре М-33 чувствительным элементом является самогенерирующий преобразователь, содержащий спектральную лампу, поглощающую стеклянную трубку с парами цезия, помещенную в катушку обратной связи и фотодетектор. Общий вид прибора показан на рис. 41.

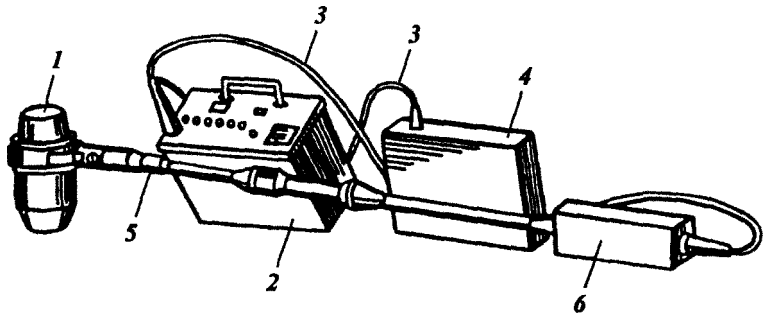


Рис. 41. Магнитометр М-33:
1 – магниточувствительный блок; *2* – измерительно-регистрирующий блок; *3* – кабель; *4* – аккумулятор; *5* – штанга; *6* – предварительный усилитель

Амплитуда сигнала в самогенерирующем преобразователе зависит от величины угла α между оптической осью преобразователя и направлением внешнего магнитного поля. Эта зависимость имеет вид [7]

$$A = A_0 \sin \alpha \cos \alpha,$$

где A_0 – максимальная амплитуда сигнала. Отсюда видно, что сигнал равен нулю при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$, амплитуда сигнала максимальная при $\alpha = 45°$, поэтому при измерениях оптическую ось самогенерирующего преобразователя необходимо располагать под углом 45° к измеряемому полю.

Масса прибора равна 12 кг. Погрешность единичного измерения при отсчетной величине 1 нТл составляет ±1,5 нТл, при отсчетной величине 0,1 нТл – ±0,2 нТл. Погрешность из-за неправильной ориентации магнитометра может изменяться от 0 до 8 нТл, нестабильность показаний во времени может равняться 0,35 нТл.

На базе магнитометра М-33 разработан усовершенствованный его вариант магнитометр М-33м или ММП-303. Он относительно надежнее в работе, его погрешность в ориентации в 1,5–2 раза меньше, чем у магнитометра М-33. При измерениях его магнитоизмерительный преобразователь нужно располагать по направлению вектора $\vec{T}$, а не под углом 45° к $\vec{T}$, как у магнитометра М-33.

Усовершенствованным вариантом магнитометра ММП-303 является магнитометр ММ-60, или ММП-304. В отличие от магнитометра ММП-303 он снабжен оперативным запоминающим устройством. Технические характеристики у него такие же, как и у магнитометра ММП-303, за исключением цикличности работы в автоматическом режиме.

Литература: [7, 14, 20].

3. МАГНИТОМЕТРЫ ДЛЯ СЪЕМОК АВТОМОБИЛЬНОЙ И ГИДРОМАГНИТНОЙ

Автомобильная магнитная или автомагнитная съемка – метод измерения элементов магнитного поля Земли с борта движущегося автомобиля был разработан и впервые применен в нашей стране. Основная сложность работы заключается в том, что измерения проводят в условиях девиационного влияния несущей платформы. Магниточувствительные преобразователи автомобильных магнитометров должны быть устойчивыми в условиях

тряски и вибрации. Они не должны быть чувствительными к пространственной ориентации. Такими приборами являются протонные и квантовые магнитометры.

Автомобильный магнитометр состоит из магниточувствительного преобразователя (протонного или квантового); измерительного устройства (дискретный частотомер, преобразующий информацию в единицы магнитного поля); цифропечатающего регистратора и устройства, управляющего магнитометром в процессе движения автомобиля. Методика измерений заключается в следующем. В процессе движения автомобиля по профилю через заданный интервал пути автоматически на бумажной ленте производятся измерения значений геомагнитного поля. Кроме значений поля, на ленте регистратора автоматически наносятся метки времени и, по желанию оператора, реперные отметки.

Для уменьшения девиационных помех, создаваемых автомобилем, магниточувствительный преобразователь магнитометра устанавливается на специальном прицепном устройстве, изготовленном из слабомагнитных материалов. Автомагнитная съемка в настоящее время может производиться с погрешностью ±(3÷5) нТл.

В последние годы из-за отсутствия автомагнитометров (в связи с прекращением их выпуска) некоторые операторы приспосабливают к автомобильной съемке пешеходные магнитометры типа М-33 или ММП-303, устанавливая их на прицепных устройствах.

Гидромагнитная съемка. При морских магнитных съемках также используют протонные и квантовые магнитометры. Измерения проводят с движущихся судов или стационарных носителей как на поверхности моря, так и на некоторой глубине, в том числе и на дне моря. Магнитометры для гидромагнитных съемок в зависимости от измеряемых элементов поля разделяются на модульные, компонентные и дифференциальные (градиентометры), причем больше всего применяют модульные магнитометры.

Модульные магнитометры – это магнитометры, служащие для измерения значений модуля полного вектора геомагнитного поля $\vec{T}$. Компонентные магнитометры служат для измерения вертикальной и горизонтальной составляющих вектора $\vec{T}$ – значений Z и H. Эти измерения проводят в основном при проведении специальных исследований. Дифференциальные магнитометры применяют для измерений конечных разностей какого-то элемента магнитного поля Земли. По этим разностям, поделив их на расстояние между точками измерений по вертикали или по горизонтали, определяют значения вертикального или горизонтального градиента измеряемого элемента поля. Значения градиентов

магнитного поля, определяемые по значениям разностей, не зависят от вариационных помех. В настоящее время более точно можно измерить значения горизонтального градиента в направлении движения судна ($\partial T/\partial x$).

Магнитометры для морских магнитных съемок состоят из набортной части (электронный блок, блок питания, аналоговый регистратор, цифропечатающая машина или ленточный перфоратор), забортной части (герметичная гондола с магниточувствительным преобразователем) и соединяющего их кабеля с электростатическим и магнитным экранированием. Кроме магнитометров (основная аппаратура), при морских магнитных измерениях используется и вспомогательная аппаратура – буйковые автономные морские вариационные станции, устанавливаемые в районе выполнения гидромагнитных съемок.

Для снижения влияния магнитных масс судна на показания магнитометров их гондолы буксируются на кабеле, длина которого в 2–3 раза больше длины судна. Полностью влияние судна на измерения магнитометров при этом не исключается, для его исключения необходимо учесть девационные поправки для различных направлений профиля.

Литература: [7, 14, 20].

ИНТЕРВАЛ ОГРАНИЧЕНИЯ СПЕКТРОВ АНОМАЛИЙ И ЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Под интервалом ограничения спектров будем понимать интервал $(-\omega_r, \omega_r)$ или $(-\rho_r, \rho_r)$, где ω_r или ρ_r – граничная частота спектров аномалий. Таким образом, задача определения интервала ограничения спектров аномалий сводится к задаче определения граничных частот спектров.

Под граничной частотой спектра аномалии понимается та величина ω_r или ρ_r, начиная с которой без ущерба для заданной точности можно отбросить значения спектра. Граничная частота спектров является одним из важных параметров, применяемых, например, при оценке точности вычисления спектров, при определении шага дискретизации аномалий и при решении некоторых других задач.

Значения граничных частот спектра аномалий можно определить двумя способами: во-первых, из значений некоторой малой величины относительной потери энергии спектра исходной аномалии за граничной частотой (по К.В. Гладкому) и, во-вторых, из данных относительной погрешности определения максимального значения аномалии. На практике необходимо иметь выражения для определения значений ω_r или ρ_r спектров аномалий и первым, и вторым способами. Получаемые оценки взаимно дополняют друг друга. При этом выражения первого способа желательно применять в случаях, когда необходимо получить некоторую среднюю точность в целом в пределах заданного отрезка профиля или участка площади и когда периферийные части аномалии не осложнены влиянием боковых источников, выражения же второго способа больше применимы при необходимости получения требуемой точности максимального значения аномалии. Кроме того, погрешности, определяемые вторым способом, помогут привязаться к величине погрешности максимального значения аномалии, получаемой первым способом.

Поэтому рассмотрим последовательно оба эти способа.

1. Относительную потерю энергии аномалий за граничной

частотой в двухмерном и трехмерном случаях можно определить из равенств

$$a = \Delta E/E = \int_{\omega_r}^{\infty} S^2(\omega)d\omega / \int_0^{\infty} S^2(\omega)d\omega,$$

$$a = \Delta E/E = \int_{\rho_r}^{\infty} \rho S^2(\rho)d\rho / \int_0^{\infty} \rho S^2(\rho)d\rho.$$

Эти равенства можно переписать и через значения энергетических спектров аномалий:

$$a = \Delta E/E = \int_{\omega_r}^{\infty} Q(\omega)d\omega / \int_0^{\infty} Q(\omega)d\omega,$$

$$a = \Delta E/E = \int_{\rho_r}^{\infty} \rho Q(\rho)d\rho / \int_0^{\infty} \rho Q(\rho)d\rho.$$

Принимая в качестве $S(\omega)$ и $S(\rho)$ значения спектров аномалий силы тяжести от бесконечной горизонтальной материальной линии и от точечной массы, обладающие наибольшей шириной, из этих равенств получены аналитические выражения, позволяющие определить граничные частоты спектров аномалий. Соотношения для их определения для малых значений a = 0,01 и a = 0,001 приведены в работах [11, 13, 16].

Литература: [11, 13, 14, 16].

КОМПЛЕКСНАЯ НАПРЯЖЕННОСТЬ И КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ

Введем на плоскости $x0z$ комплексную переменную (ось направлена вверх)

$$\gamma = x + iz.$$

Переменную точки M в области, в которой дано распределение масс, обозначим через

$$\sigma = \xi + i\,\zeta.$$

Операцию сопряжения обозначим с черточкой над переменной:

$$\overline{\gamma} = x - iz, \quad \overline{\delta} = \xi - i\zeta.$$

Обозначим через $F_x(x, z)$ и $F_z(x, z)$ составляющие вектора напряженности гравитационного или магнитного поля $\vec{F}$. Тогда ***комплексной напряженностью*** поля будем называть функцию

$$E(\gamma) = F_z(x, z) + iF_x(x, z).$$

В областях, свободных от масс, двумерная или плоская потенциальная функция $\vec{F}$ должна удовлетворять уравнениям поля

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{F} = 0,$$

т.е. должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0.$$

Эти равенства выражают рассмотренные выше условия Коши – Римана. Как было показано там, если функция $E(\gamma)$ имеет действительную и мнимую части с непрерывными частными производными первого порядка в точках некоторой области и удовлетворяет в них условиями Коши – Римана, то такая функция является в этой области аналитической функцией.

Комплексный потенциал векторного поля $\vec{F}$, соответствующий комплексной его напряженности

$$E(\gamma) = F_z(x, z) + iF_x(x, z),$$

определяется выражением

$$q(\gamma) = V(x, z) + iN(x, z).$$

Здесь функции $V(x, z)$ – скалярный потенциал поля

$$\vec{F} = \operatorname{grad} V,$$

т.е. $\partial V/\partial x = F_x$, $\partial V/\partial z = F_z$; функция же $N(x, z)$ – гармоническая функция, связанная с $V(x, z)$ условиями Коши – Римана и определяемая через проекции поля $\vec{F}$ и производных потенциала V выражениями

$$\partial N/\partial z = F_x = \partial V/\partial x, \quad -\partial N/\partial x = F_z = \partial V/\partial z.$$

Производная от функции q по комплексной переменной γ

$$\partial q(\gamma)/\partial\gamma = iE(\gamma).$$

Отсюда следует, что комплексный потенциал поля $\vec{F}$ – это функция, производная от которой по комплексной переменной γ равна комплексной напряженности поля $E(\gamma)$, умноженной на i. Действительная часть комплексного потенциала равна потенциалу исходного поля $\vec{F}$, а мнимая часть определяется через этот потенциал из условий Коши – Римана.

На использовании понятий комплексных потенциала и напряженности основано применение интегралов типа Коши, которые имеют важное значение при исследовании полей с применением аппарата теории функций комплексного переменного и особенно в теории логарифмического потенциала.

Литература: [3, 7, 14].

КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ АНОМАЛЬНЫХ ТЕЛ

Рассмотрим теперь вопросы определения координат центра тяжести тел. Формулы, определяющие координаты центра тяжести, легче всего получить по спектрам аномалий. При этом нужно помнить, что горизонтальная координата всегда определяется однозначно, вертикальная – нет. Рассмотрим вначале двумерную задачу.

В общем виде аномалию V_z можно определить из равенства

$$V_z(x) = 2G \int_S \sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta - z}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} d\xi d\zeta.$$

Спектр этой аномалии при $z = 0$

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_z(x) \exp(-i\omega x) dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} G \int_S \sigma(\xi, \zeta) \exp(-i\omega\xi) \exp(-|\omega|\zeta) d\xi d\zeta.$$

Отсюда можно определить значения координат центра тяжести. Обозначим значения производных по ω от самого спектра и от модуля спектра аномалий через $S'(0)$ и $|S(0)|'$ соответственно. Получим

$$\zeta_0 = \int_S \sigma(\xi, \zeta) \zeta d\xi d\zeta \Big/ \int_S \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = -|S(0)|' / S(0),$$

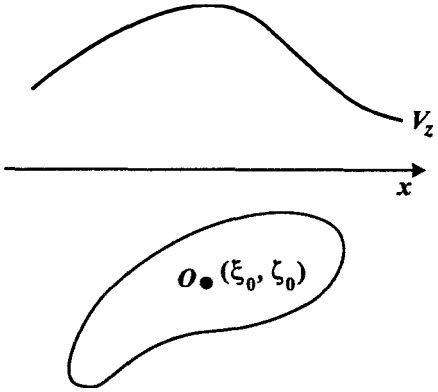
$$-\frac{S'(0)}{S(0)} = \frac{1}{\lambda} \left[\int_S \sigma(\xi, \zeta) \zeta d\xi d\zeta + i \int_S \sigma(\xi, \zeta) \xi d\xi d\zeta \right] = \zeta_0 + i\xi_0,$$

где ξ_0 – горизонтальная координата центра тяжести тела (рис. 42); ζ_0 – вертикальная координата.

Отсюда видно, что

$$\zeta_0 = \mathrm{Re}[-S'(0)/S(0)],$$

Рис. 42. К определению ξ_0 и ζ_0



$$\xi_0 = Jm[-S'(0)/S(0)].$$

Кроме того,

$$\left|\frac{S'(0)}{S(0)}\right|^2 = \zeta_0^2 + \xi_0^2.$$

Из этого равенства можно определить сумму квадратов координат центра тяжести аномального тела. Кроме того,

$$|S'(0)/S(0)|^2 = [|S(0)|'/S(0)]^2 + \xi_0^2.$$

Из этого равенства сразу можно определить ξ_0. Через значения исходного поля

$$\xi_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xV_z(x,z)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} V_z(x,z)dx}.$$

В случае трехмерной задачи для удобства перепишем выражение для спектра в полярных координатах при $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, $dudv = \rho d\rho d\varphi$, $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$, $d\xi d\eta = rdrd\theta$:

$$S(\rho, \varphi) = G\int_v \sigma(\rho, \varphi)\exp(-\rho\zeta)\exp[-i\rho r\cos(\theta - \varphi)]dv.$$

Отсюда получим

$$\zeta_0 = -|S(0, 0)|'/S(0, 0),$$

$$-S'(0, 0)_u/S(0, 0) = \zeta_0 + i\xi_0,$$

$$-S'(0, 0)_v/S(0, 0) = \zeta_0 + i\eta_0,$$

где индексы u и v указывают на случаи дифференцирования по переменным u и v.

Из этих равенств можно определить значения координат центра тяжести аномального тела произвольной формы ξ_0 и η_0.

Через значения исходного поля

$$\xi_0 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xV_z(x,y,z)dx\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V_z(x,y,z)dx\,dy}.$$

При замене в этом выражении под интегралом в числителе x на y получим формулу, определяющую величину η_0.

В заключение отметим, что горизонтальная координата центра тяжести аномальных тел всегда определяется однозначно.

Литература: [13, 14, 16].

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Магнитное поле описывается векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$, связанными между собой соотношением

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

где $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции; $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля; μ – магнитная проницаемость среды.

Наблюдаемое на поверхности Земли магнитное поле является суммой нескольких полей, различающихся своей природой:

$$\vec{H}_T = \vec{H}_D + \vec{H}_m + \vec{H}_a + \vec{H}_l + \overrightarrow{\delta H}_i,$$

где $\vec{H}_D$ – поле, создаваемое однородной намагниченностью земного шара (оно называется также ***дипольным***); $\vec{H}_m$ – поле, вызываемое влиянием неоднородностей глубоких слоев земного шара (его называют иначе полем недипольным, а также полем ***мировых или материковых аномалий***, имея в виду его огромные размеры); $\vec{H}_a$ – поле, вызываемое намагниченностью верхних частей земной коры, его называют ***аномальным магнитным полем Земли***; $\vec{H}_l$ – поле, создаваемое внешними причинами; $\overrightarrow{\delta H}$ – поле вариаций, также связанное с внешними причинами. Сумму дипольного и недипольного полей называют ***главным магнитным полем Земли***:

$$\vec{H} = \vec{H}_D + \vec{H}_m.$$

Сумму же полей однородного намагничивания $\vec{H}_D$, мировых аномалий $\vec{H}_m$ и внешнего поля $\vec{H}_l$ называют нормальным магнитным полем Земли:

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_D + \vec{H}_m + \vec{H}_l.$$

Здесь величина H_l мала, поэтому ею можно пренебречь. В таких случаях нормальное поле совпадает с главным магнитным полем Земли.

С учетом нормального поля наблюдаемое на поверхности Земли поле можно записать в виде

$$\vec{H}_T = \vec{H}_0 + \vec{H}_a + \overrightarrow{\delta H}.$$

Отсюда видно, что если исключить поле вариаций, то наблюдаемые значения магнитного поля являются значениями нормального и аномального магнитного полей Земли.

Если рассмотреть магнитное поле Земли как сумму двух частей – постоянной и переменной, то можно записать

$$\vec{H}_T = \vec{H} + \sum_i \overrightarrow{\delta H}_i \sin[(2\pi t/L_i) + \varphi_i],$$

где $\vec{H}_T$ – рассмотренная выше полная напряженность магнитного поля; $\vec{H}$ – напряженность постоянного поля (главного магнитного поля Земли); $\overrightarrow{\delta H}_i$ – амплитуда i-й гармоники переменного поля; L_i – период; φ_i – фазовый угол. Эта формула верна для промежутков времени, малых по сравнению с историческими эпохами. Значение периода L_i может меняться от сотых долей секунд до нескольких лет. Максимальные значения амплитуды $\overrightarrow{\delta H}_i$ наблюдаются для вариаций с периодами 10^4–10^2 с, эти значения не превышают сотых долей величин H. Поэтому при решении многих задач можно принять, что $H \gg \delta H_i$, т.е. можно пренебречь переменной частью магнитного поля Земли.

Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в единицах СИ выражается в А/м (ампер на метр). Единицей измерения магнитной индукции в СИ является ***тесла*** (Тл). В магниторазведке в качестве рабочих единиц магнитной индукции используется ***нанотесла*** (нТл), которая равна 10^{-9} Тл, и реже микротесла (10^{-6} Тл). Размерность намагниченности $\vec{J}$ в единицах СИ совпадает с размерностью напряженности поля. Напряженность и магнитная индукция в системе СИ связаны соотношением

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J},$$

где $\vec{J}$ – вектор намагниченности; μ_0 – магнитная постоянная (магнитная проницаемость) вакуума ($4\pi\ 10^{-7}$ Гн/м (Генри на метр)). В вакууме

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0.$$

В отличие от ранее использовавшейся системы СГС в системе СИ выражения для потенциала поля и его производных содержат множитель $1/4\pi$. Кроме того, у магнитной проницаемости вакуума μ_0 появляется размерность (в системе СГС она была безразмерной и равной единице), и в наблюдениях вместо напряженности поля H (А/м) пользуются напряженностью, равной магнитной индукции в вакууме, которая измеряется в теслах.

Литература: [5, 7, 14, 20].

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ КАК ПОЛЕ ОДНОРОДНОГО НАМАГНИЧЕННОГО ШАРА

Перейдем от обозначения $\vec{H}$, принятого в учении о геомагнетизме, к обозначению $\vec{T}$, принятому в магниторазведке. Рассмотрим составляющие полного вектора напряженности геомагнитного поля $\vec{T}$. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в точке измерений, ось z направим вертикально вниз (рис. 43), ось x – на географический север, ось y – перпендикулярно на восток. В такой системе координат проекции вектора $\vec{T}$ на направления осей x, y, z называют соответственно северной, восточной и вертикальной составляющими магнитного поля Земли и обозначают буквами X, Y, Z. Проекция полного вектора напряженности на горизонтальную плоскость xoy называется горизонтальной составляющей магнитного поля и обозначается буквой H. Как видно из рис. 43,

$$\vec{H} = \vec{X} + \vec{Y}, \quad H^2 = X^2 + Y^2;$$

$$T^2 = H^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Направление $\vec{H}$ определяет направление магнитного меридиана, а плоскость, в которой лежат векторы $\vec{H}$ и $\vec{T}$, называется плоскостью магнитного меридиана. Угол между направлением магнитного меридиана в данной точке и некоторым заданным направлением называется ***магнитным азимутом*** (он отсчитывается от направления магнитного меридиана по часовой стрелке).

Угол D между направлениями географического и магнитного меридианов называется ***магнитным склонением*** (он отсчитывается от направления оси x по направлению движении часовой стрелки), а угол I между направлениями векторов $\vec{H}$ и $\vec{T}$ называется ***магнитным наклонением*** (он отсчитывается от горизонтальной плоскости вниз; в северном полушарии вектор $\vec{T}$ направлен вниз, поэтому угол I – положительный; в южном по-

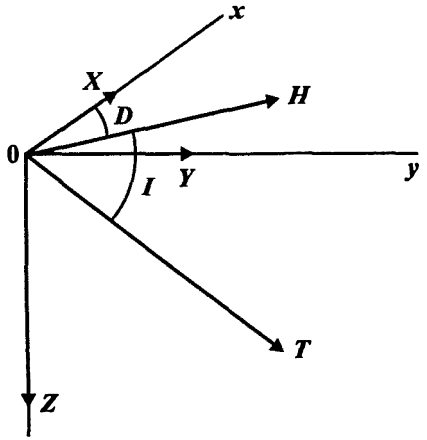


Рис. 43. Вектор напряженности магнитного поля и его составляющие

лушарии, наоборот, $\vec{T}$ направлен вверх, поэтому угол I – отрицательный). Рассмотренные составляющие X, Y, Z, H, D, I являются элементами земного магнетизма.

В первом приближении магнитное поле Земли можно рассматривать как поле шара, намагниченного по оси, отклоняющейся от оси вращения приблизительно на 11°5′. При этом магнитный потенциал шара можно определить как потенциал диполя

$$U = M\frac{1}{R^2}\cos\theta,$$

где M – магнитный момент Земли; R – радиус Земли, а угол $\theta = 90° - \varphi$ (φ – магнитная широта).

Напряженность магнитного поля Земли $\vec{T}$ и значения его вертикальной составляющей $\vec{Z}$ и горизонтальной составляющей $\vec{H}$ можно определить из равенств

$$Z = -\partial U/\partial R = \frac{2M}{R^3}\cos\theta,$$

$$H = -\frac{\partial U}{R\partial\theta} = (M/R^3)\sin\theta.$$

Полный вектор $\vec{T}$ достигает наибольшего значения на плюсах ($\theta = 0°, 180°$), а наименьшего – на экваторе ($\theta = 90°, 270°$):

на магнитных полюсах

$$|\vec{T}| = |\vec{Z}| = 2M/R^3, \quad H = 0;$$

на магнитном экваторе

$$|\vec{T}| = |\vec{H}| = M/R^3,\ Z = 0.$$

Магнитная стрелка у магнитных полюсов займет вертикальное положение, а на магнитном экваторе – горизонтальное.

Элементы магнитного поля Земли можно определить из приведенных формул лишь приближенно. В действительности оно содержит большое количество аномалий различных размеров и различного характера.

В настоящее время основной причиной земного магнетизма считают электрические токи, которые генерируются в ядре Земли, обладающем высокой электропроводностью.

Литература: [2, 5, 7, 14, 20].

МАГНИТНЫЕ АНОМАЛИИ ΔT И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В магниторазведке высокоточные магнитометры измеряют различные составляющие поля, в том числе модуль вектора $\vec{T}$ и величину ΔT – разницу между значениями модуля $\vec{T}$ в данной точке и в опорной точке. Выведем формулы, определяющие ΔT, и одновременно рассмотрим системы координат, применяющиеся в магниторазведке.

1. СИСТЕМЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В МАГНИТОРАЗВЕДКЕ

В ***геомагнитной системе координат*** ось x направляют по магнитному меридиану, определяющемуся направлением горизонтальной составляющей нормального поля H_0, ось y направляют на восток, а ось z – вертикально вниз. Поэтому в этой системе координат составляющие вектора напряженности нормального поля $\vec{T}_0$ можно определить из выражений

$$H_0 = T_0 \cos I_0, \quad Z_0 = T_0 \sin I_0, \tag{1}$$

где I_0 – угол нормального наклонения (если сравнить этот случай с рис. 43, то углы $D = 0$, $I = I_0$).

В ***географической системе координат*** ось x направляют на географический север, т.е. она совпадает с географическим меридианом, ось y – на восток. Эта система координат совпадает с системой, показанной на рис. 43. При $D = D_0$, $I = I_0$ для определения составляющих полного вектора напряженности нормального поля в этой системе координат получим следующие выражения:

$$X_0 = H_0 \cos D_0 = T_0 \cos I_0 \cos D_0,$$

$$Y_0 = H_0 \sin D_0 = T_0 \cos I_0 \sin D_0,$$

$$Z_0 = T_0 \sin I_0.$$

От этих формул можно перейти к формулам, определяющим составляющие вектора напряженности магнитного поля в местной системе координат, если заменить угол D_0 на угол δ. В этой прямоугольной системе координат ось x направляют по некоторому выбранному из каких-то соображений направлению, а угол δ будет являться магнитным азимутом оси x. Особенно удобна эта система координат при интерпретации двумерных магнитных аномалий. В этом случае ось y направляют, как обычно, по простиранию тела, а ось x – в перпендикулярном направлении. Тогда горизонтальная составляющая поля будет направлена по оси x, составляющая по оси y равна нулю. В этом случае проекция полного вектора напряженности нормального магнитного поля $\vec{T}_0$ на плоскость xoz будет определяться углом i, который определяется через углы I_0 и δ по формуле

$$\operatorname{ctg} i = \operatorname{ctg} I_0 \cos \delta.$$

Здесь по-прежнему I_0 – угол нормального наклонения, δ – магнитный азимут профиля.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ΔT

Значения T можно определить из выражения (рис. 44)

$$\Delta T = |\vec{T}| - |\vec{T}_0|.$$

При небольших значениях $|\vec{T}_a|$ аномальная составляющая ΔT является проекцией $\vec{T}_a$ на направление нормального поля. Определим теперь значение ΔT в прямоугольной геомагнитной системе координат, в которой ось x совпадает с направлением H_0, т.е. поместим вектор $\vec{T}_0$ в плоскость xoz (рис. 45).

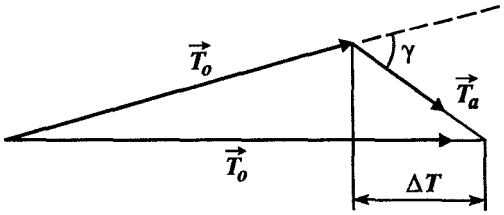
В этом случае получим

$$\Delta T = T_0\left[\sqrt{1+2\left(\frac{Z_a}{T_0}\sin i+\frac{H_a}{T_0}\cos i\cos A_0\right)+\left(\frac{T_a}{T_0}\right)^2}-1\right].$$

Как и выше, полагая $T_a \ll T_0$, т.е. считая, что второй член в подкоренном выражении этого равенства по сравнению с единицей мал, а третьим членом можно пренебречь, получим

$$\Delta T = Z_a \sin i + H_a \cos i \cos A_0. \qquad (2)$$

Рис. 44. К определению ΔT



Это выражение определяет значения ΔT через известные значения Z_a и H_a. Угол i в этих формулах (угол наклонения вектора T_0) соответствует углу I_0 в равенствах (1). Магнитные аномалии, наблюдаемые над дневной поверхностью (за исключением территорий с сильномагнитными образованиями) не превышают по своей амплитуде нескольких тысяч нанотесла. Поэтому в большинстве случаев можно принять $T_a \ll T_0$. В общем случае функция ΔT не является потенциальной, но функция, определяемая выражениями (2) – потенциальная. Равенство (2) верно для тела любой формы, в том числе и для тел, близких к изометричным.

Приведем еще выражения, позволяющие выразить ΔT через значения составляющих магнитного поля при вертикальном намагничивании. Рассмотрим только двумерную задачу. В этом случае воспользуемся уравнением Пуассона о связи между гравитационным и магнитным потенциалами при обозначениях

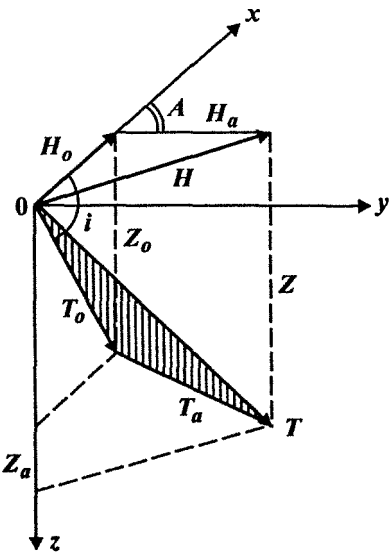


Рис. 45. Составляющие магнитного поля

$$J_x/J = \cos\varphi \cos A, \quad J_z/J = \sin\varphi,$$

где J_x и J_z – проекции вектора намагничивания $\vec{J}$ на оси x и z; A – угол между осью x и проекцией вектора намагниченности на горизонтальную плоскость; φ – угол наклонения вектора $\vec{J}$ (угол между вектором $\vec{J}$ и горизонтальной плоскостью). Обозначая через $Z_в$ и $H_в$ значения составляющих Z и H при вертикальном намагничивании, нетрудно получить выражения

$$H_а = -Z_в \cos A \cos\varphi + H_в \sin\varphi,$$

$$Z_а = Z_в \sin\varphi + H_в \cos A \cos\varphi.$$

Эти равенства выражают значения составляющих Z и H при косом намагничивании через их значения при вертикальном намагничивании для случая двумерной задачи. Если намагниченность совпадает по направлению с современным земным магнитным полем, то угол A является магнитным азимутом линии профиля (оси x). Если простирание тела широтное, то $A = 0°$, при меридиональном простирании $A = 90°$.

Подставляя значения $H_а$ и $Z_а$ из последних равенств в формулу (2), можно выразить и выражение для определения ΔT через значения составляющих магнитного поля при вертикальном намагничивании $Z_в$ и $H_в$. Осуществив такую подстановку, получим формулу следующего вида:

$$\Delta T = C_1 Z_в + C_2 H_в.$$

Такой же вид имеет и равенство

$$Z_а = K_1 Z_в + K_2 H_в.$$

В этих выражениях C_1 и C_2, K_1 и K_2 – некоторые коэффициенты, зависящие от постоянных i, A_0, φ и A. Из этих равенств видно, что они по своей форме подобны друг другу, только отличаются разными коэффициентами C и K. Поэтому все способы интерпретации, разработанные для значений вертикальной составляющей магнитного поля, можно перенести с учетом различия коэффициентов и на аномалии ΔT.

Из наличия разных коэффициентов в последних двух формулах следует, что в общем случае значения аномалий $Z_а$ и ΔT от одного и того же аномального тела могут быть различными и существенно могут отличаться друг от друга. Степень этого отличия наиболее высокая при широтном простирании намагниченных тел ($A_0 = 0$), особенно в экваториальных областях. При меридиональном простирании тел ($A_0 = 90°$) степень этого отличия небольшая, над центральными частями тел кривые ΔT и $Z_а$

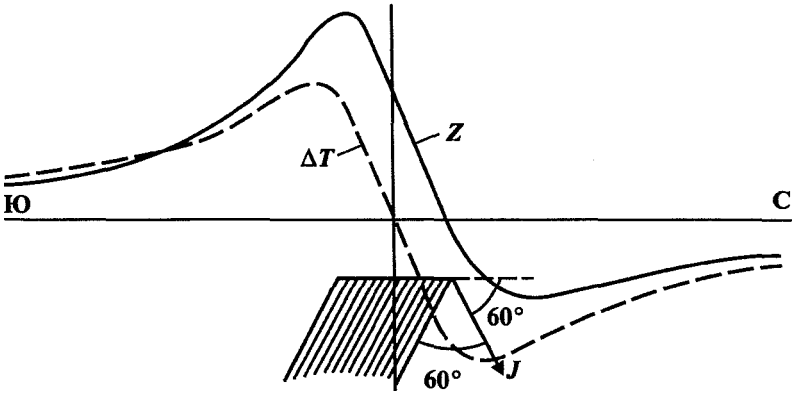


Рис. 46. Кривые ΔT и Z над пластом широтного простирания

подобны друг другу и отличаются только постоянным множителем. При $i = 90°$ (территории в высоких широтах) выражения для ΔT и Z_a не отличаются друг от друга, т.е. вблизи магнитных полюсов Земли при $T_a \ll T_0$ для тел большого простирания при любых направлениях их простирания и намагниченности кривые

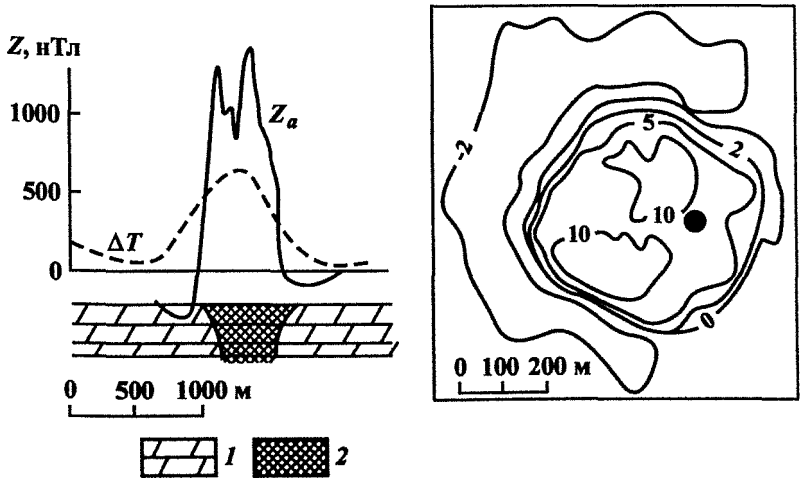


Рис. 47. Магнитная аномалия над кимберлитовой трубкой (по А.А. Логачеву и В.П. Захарову).

Измерения: Z_a – наземные; ΔT – с самолета на высоте 100 м; *1* – карбонатные породы; *2* – кимберлиты

ΔT и Z_a мало отличаются друг от друга (в экваториальных областях при $i = 0$, кривые ΔT будут подобны кривым H_a).

Наименьшее значение угла i на территории нашей страны несколько меньше 60°. В этих условиях графики изменения аномалий ΔT и Z от намагниченного по направлению земного поля пласта, падающего на юг под углом 60°, имеют вид, показанный на рис. 46. Из рисунка видно, что кривые ΔT и Z подобны друг другу и что осевой линии намагниченного тела соответствуют точки перехода кривой ΔT от положительных значений к отрицательным.

На рис. 47 показаны графики изменения наблюденных значений аномалий ΔT и Z над намагниченным телом – кимберлитовой трубкой. Аномалия Z измерена при наземной съемке, а аномалия ΔT – с самолета на высоте 100 м. Аномалии ΔT и Z четко отбивают контуры намагниченного тела. По ним можно определить глубину залегания, форму и другие параметры аномальных тел.

Литература: [5, 7, 14, 20].

МАГНИТНЫЕ АНОМАЛИИ И КАРТЫ

Аномалиями элементов магнитного поля являются отклонения измеренных их значений от нормальных. Карты нормального поля по всем элементам магнитного поля Земли строят по результатам их измерений в точках дневной поверхности по определенной сетке (20×20 км). Полученные значения усредняют в пределах площади трапеций размером 1° по долготе и 2° по широте с целью устранения влияния геологических образований.

Такие карты нормального поля для элементов магнитного поля Земли относят к определенной эпохе (к середине определенного года), что вызвано наличием значительного векового хода. Карты нормального поля обновляются через каждые пять–десять лет. При применении этих карт снятое с них значение с целью определения аномалий исправляют на величину векового хода с некоторым коэффициентом. Этот коэффициент берется равным разности между годом использования и эпохой карты. Значения векового хода снимают с карты изопор. Если площадь исследований охватывает значительную площадь, то приходится учитывать изменение нормального поля, т.е. вводят поправку за градиент изменения нормального поля (нормальный градиент). Для средних широт территории страны горизонтальный градиент Z_0 составляет около 5 нТл/км, вертикальный – около 23 нТл/км; горизонтальный градиент H_a составляет 4 нТл/км, вертикальный – около 7 нТл/км.

На картах элементов магнитного поля Земли линии равных значений T, Z и H называются ***изодинамами*** T, Z и H, линии равных значений склонения D – ***изогонами***, равных значений наклонения – ***изоклинами***. Нулевая изоклина носит название магнитного экватора.

Магнитные аномалии связаны с влиянием геологических образований, отличающихся от окружающих пород своей намагниченностью и залегающих в земной коре. В настоящее время точно не установлено, до каких значений может доходить глубина залегания пород, создающих магнитные аномалии. Если брать градиент измерения температуры с глубиной равным 33 градуса на 1 км, то такие породы могут залегать на глубинах не более

первых десятков километров, так как ниже температура пород будет выше температуры точки Кюри (точка Кюри для железа равна 770 °С). Результаты практических определений глубин по некоторым крупным аномалиям на территории нашей страны и США показывают, что нижняя граница залегания намагниченных геологических образований находится на глубинах 20–25 км. Характер изменения магнитных аномалий (как по горизонтали, так и по вертикали) показан на рис. 48, на котором приведены результаты аэромагнитной съемки, проведенной на различных высотах для части одного из профилей, пересекающих Кольский полуостров [20]. Из рисунка видно, что мелкие аномалии (с поперечником менее 1 км) очень быстро пропадают с увеличением высоты – они уже не фиксируются на высотах 300–500 м.

Магнитные аномалии в общем случае обусловлены намагниченностью, вызванной действием современного нормального геомагнитного поля и естественной остаточной намагниченностью, которую породы приобрели в предшествующее геологическое время, т.е. в целом

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_n,$$

где J_i – индуктивная или индуцированная намагниченность, вызванная действием современного нормального геомагнитного поля (ее значение однозначно связано с магнитной восприимчивостью χ); $\vec{J}_n$ – остаточная намагниченность, существующая в горной породе в настоящее время.

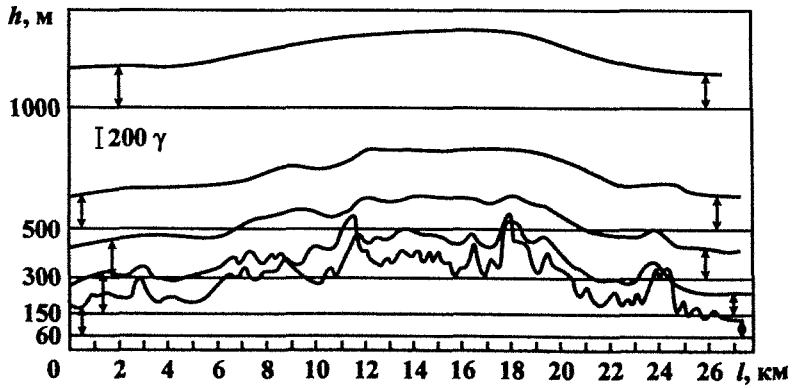


Рис. 48. Результаты магнитной съемки на различных высотах на Кольском полуострове (по Б.М. Яновскому).
Стрелками указана привязка к высоте

Направления $\vec{J}_i$ и $\vec{J}_n$ в общем случае не совпадают друг с другом. Направление $\vec{J}_i$ совпадает с направлением современного намагничивающего, т.е. нормального поля, за исключением тех случаев, когда наблюдается магнитная анизотропия.

Горные породы при их остывании в слабом магнитном поле приобретают высокую и устойчивую естественную остаточную намагниченность J_n. Предметы древней культуры (кирпичи и керамические изделия) при их обжиге в древнем магнитном поле также приобретают остаточную намагниченность J_n. Определив J_n этих предметов, по направлению $\vec{J}_n$ можно получить представление о древнем поле. Такие работы проводят при ***археомагнитных исследованиях***.

Первоначальную намагниченность различных горных пород определяют при ***палеомагнитных исследованиях***. Интенсивность остаточной намагниченности горных пород во многих случаях бывает более высокой и более устойчивой. Если предположить, что главное магнитное поле Земли всегда было дипольным и что среднее направление магнитной оси диполя совпадало с осью вращения Земли, а породы намагничивались только по полю, то по намагниченности горных пород можно определить направление древнего магнитного меридиана и магнитной широты точки отбора образца. По этим данным можно установить и положение древнего магнитного полюса. Так, например, древний магнитный полюс, установленный по образцам молодых кайнозойских пород, был расположен близко к современному географическому полюсу.

Современное положение точек магнитных полюсов (на 1980 г.) такое: северного (в южном полушарии Земли) – 143° в.д. и 68° ю.ш., южного (в северном полушарии) – 100° з.д. и 73° с.ш.

1. ПРИМЕРЫ НЕКОТОРЫХ МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Ниже (рис. 49) показаны выкопировка из карты магнитного поля и кривая изменения аномалии Z_a по профилю *АБ*.

Аномалия относится к источникам кристаллического фундамента, залегающего в данном районе примерно на глубине 1800 м.

На рис. 50 приведены кривые изменения горизонтальной и вертикальной составляющих магнитного поля над одним из месторождений бокситов платформенного типа. Магниторазведка успешно применяется при разведке и эксплуатации подобных месторождений. По результатам магнитной съемки удается оце-

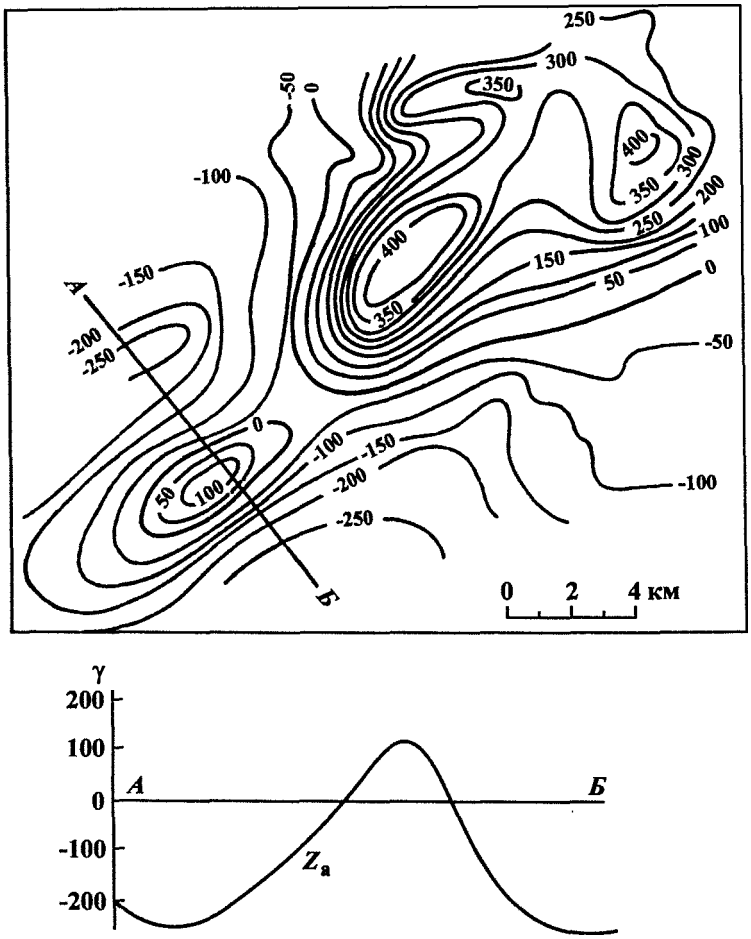


Рис. 49. Выкопировка из карты магнитного поля и кривая Z_a по профилю *АБ* (по А.А. Логачеву и В.П. Захарову)

нить степень насыщенности того или иного блока рудного тела лучшей рудой (каменистым бокситом) и уточнить контур развития этой руды в плане.

Рассмотрим более подробно следующий пример (рис. 51). Здесь приведены график изменения по линии *АБ* значений магнитной аномалии ΔT и распределение значений вертикальной составляющей магнитного поля Z в вертикальной плоскости.

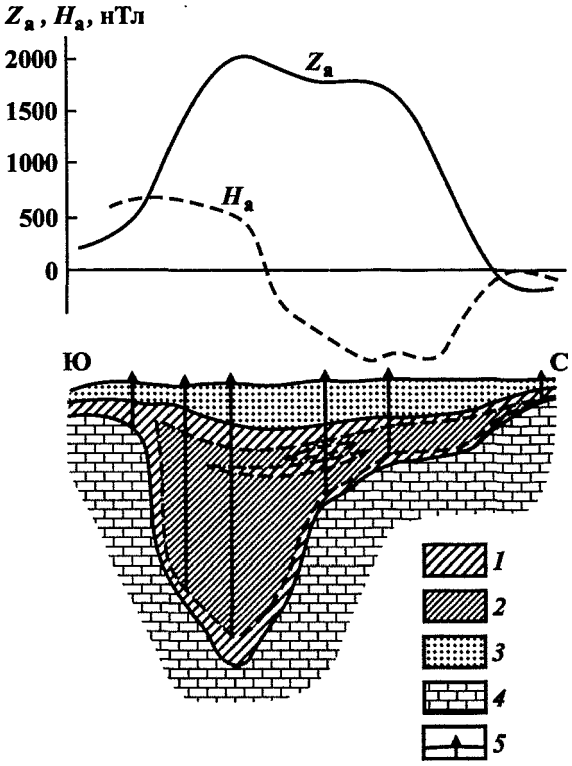


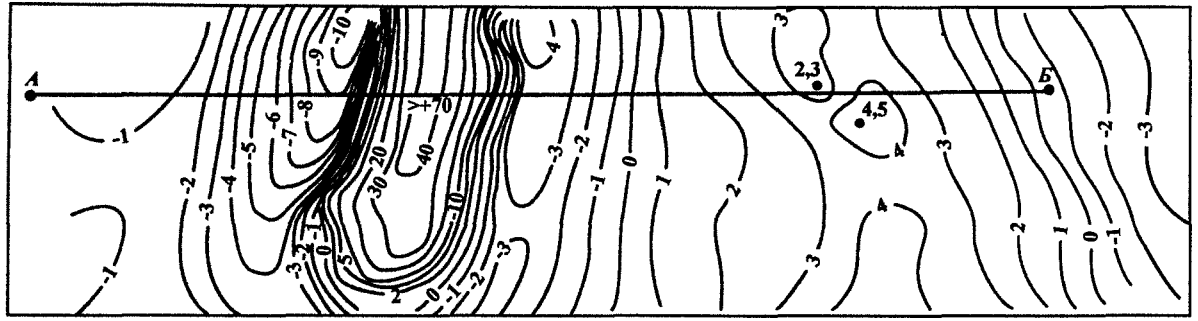
Рис. 50. Кривые Z_a и H_a над одним из месторождений боксита платформенного типа (по Н.А. Иванову).
1 – бедные бокситовые руды; *2* – боксит; *3* – песчано-глинистые рыхлые породы; *4* – известняки; *5* – скважины

Значения ΔT соответствуют результатам аэромагнитной съемки масштаба 1:50 000, а значения Z – результатам наземной съемки.

Район аномалий расположен несколько севернее Череповца, длина профиля 30 км.

Из рисунка видно, что на кривой ΔT выделяются несколько четких аномалий. Глубина залегания намагниченных тел, найденная по значениям этой аномалии, равна 1 км. С целью более точной интерпретации значения аномалии Z аналитически продолжены на ряд уровней верхнего и нижнего полупространства.

а



б

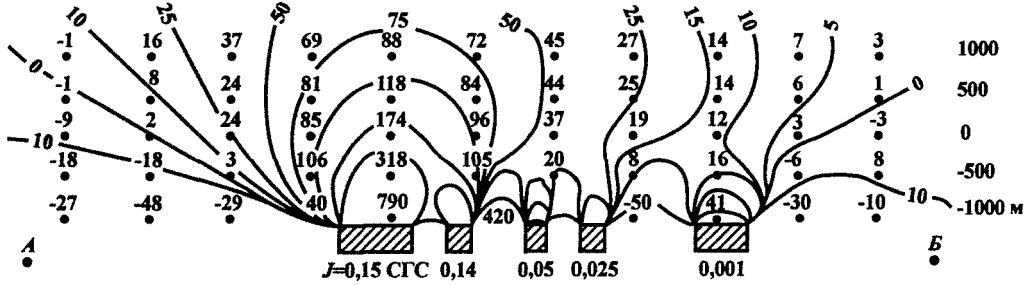


Рис. 51. Магнитная аномалия ΔT вблизи г. Череповца (по В.Н. Зандеру) – *а*; ее значения в вертикальном разрезе по линии *АБ* (по И.Г. Александрову) – *б*.
Значения ΔT даны на милиэрстедах

По результатам аналитического продолжения построена карта аномалий в вертикальной плоскости. По точкам пересечения изолиний этой карты найдены угловые точки намагниченных тел, которые можно аппроксимировать вертикальными пластами. Верхняя граница этих тел расположена на глубине 1 км. Таким образом, аналитическое продолжение аномалий позволило более точно определить глубину залегания, горизонтальную мощность и форму аномальных тел.

Литература: [6, 8, 14, 20].

МАГНИТНЫЕ ВАРИАЦИИ

Как было рассмотрено выше, магнитное поле, наблюдаемое на поверхности Земли, является суммой нескольких полей, а именно: поля однородно намагниченного шара или дипольного поля (рассмотренного выше), поля, связанного с неоднородностью глубоких слоев земного шара – недипольного поля (его из-за огромных размеров называют также полем мировых или материковых аномалий), поля, создаваемого намагниченностью верхних частей земной коры, и поля, вызываемого внешними по отношению к Земле причинами.

Все элементы магнитного поля Земли меняются с течением времени. Эти изменения называются вариациями элементов земного магнетизма. Вариации магнитного поля имеют различные периоды и характер изменения. Медленные вариации элементов земного магнетизма (изменения среднегодовых значений геомагнитного поля), периоды которых измеряют отрезками времени в сотни лет, называются ***вековыми***. Эти вариации связаны с источниками, находящимися внутри земного шара, и вызваны теми же причинами, что и магнитное поле Земли. Поле, вызванное внешними источниками (токовыми системами в околоземном пространстве), или просто внешнее поле имеет характер быстротечных вариаций (суточные вариации магнитного поля – солнечно-суточные, лунно-суточные, магнитные бури и другие изменения, годовые вариации). В среднем доля главного поля в общем магнитном поле Земли составляет более 95 %, аномального поля – около 4 % и внешнего поля – менее 1 %. Внешнее поле Земли является переменным электромагнитным полем Земли, так как оно является не только магнитным, но и электрическим. В то же время главное и аномальное поля за короткие промежутки времени можно принять за постоянное геомагнитное поле (главное магнитное поле Земли подвержено вековым изменениям, но за короткие промежутки времени ими можно пренебрегать).

Таким образом, магнитное поле Земли в промежутках времени, малых по сравнению с историческими эпохами, можно рассматривать как постоянное поле (главное магнитное поле Земли)

с наложением на него переменного, амплитуда которого на несколько порядков меньше постоянного. Поэтому в большинстве случаев при изучении земного магнетизма можно пользоваться законами стационарного (постоянного) поля. В то же время переменная часть магнитного поля вызывает изменения во времени главного магнитного поля. Хотя эти изменения по сравнению с изменениями постоянной части и незначительны, тем не менее, будучи связаны с другими геофизическими явлениями, происходящими в ионосфере, они дают возможность судить и об этих явлениях и их причинах. Поэтому изучение переменной части поля и закономерностей ее изменения представляет большой научный и практический интерес, хотя бы потому, что от состояния ионосферы зависит слышимость радиопередающих устройств.

Периоды ***солнечно-суточных*** и ***лунно-суточных вариаций*** равны соответственно солнечным и лунным суткам. Амплитуда лунно-суточных вариаций небольшая (около 1 нТл), их влиянием можно пренебречь. Поэтому в качестве ***суточных вариаций*** можно рассматривать солнечно-суточные вариации. На территории нашей страны их амплитуда может достигать 40 нТл, поэтому их необходимо учитывать.

Характер изменения суточных вариаций показан на рис. 52 на котором приведены усредненные по наблюдениям за много лет значения вариаций элементов Z, H и D за декабрь и июнь по записям на одной из магнитных обсерваторий [7].

Интенсивность суточных вариаций магнитного поля днем больше, чем ночью; больше также в летнее время, меньше – в зимнее, т.е. интенсивность вариаций находится в прямой зависимости от длительности времени солнечного освещения. Интенсивность суточный вариаций зависит также от широты точки наблюдений. Например, интенсивность вариаций вертикальной составляющей магнитного поля возрастает по мере приближения к магнитным полюсам.

Апериодические вариации (непериодические возмущения) магнитного поля – ***магнитные бури*** могут охватить весь земной шар, но больше всего они наблюдаются на ограниченных территориях высоких широт. Наиболее часто интенсивные магнитные бури наблюдаются за полярным кругом, и их активность уменьшается в направлении к югу. Интенсивность изменения вертикальной и горизонтальной составляющих поля во время магнитных бурь может достигать сотен, а иногда и тысяч нанотесла. Продолжительность их может колебаться от нескольких часов до двух-трех суток. При этом резкие изменения напряженности поля происходят в течение короткого интервала времени – в течение нескольких минут.

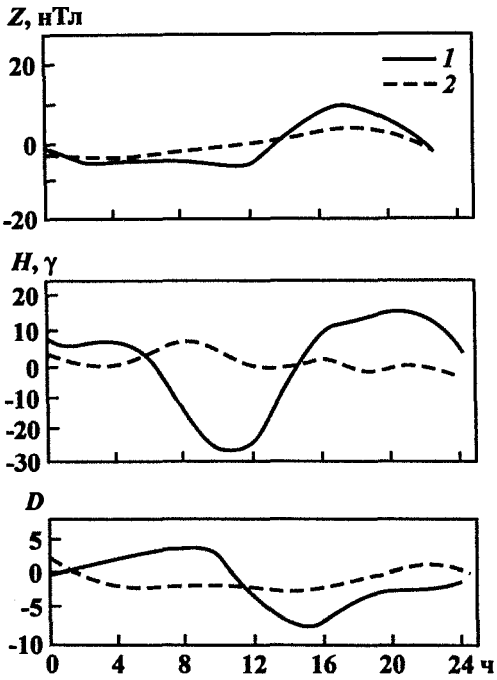


Рис. 52. Средние суточные вариации элементов земного магнетизма на широте 60 градусов: *1* – июнь; *2* – декабрь

Магнитные вариации связаны с ионизацией атмосферы на высоте первых сотен километров, которая возникает под действием излучения Солнца. Это и определяет зависимость интенсивности вариаций от времени суток и времени года, а также их зависимость от степени солнечной активности.

Вековые вариации элементов магнитного поля Земли представляют собой плавные, но достаточно интенсивные изменения среднегодовых значений элементов земного магнетизма во времени с периодом в несколько сотен лет. ***Вековой ход*** – это изменение среднегодовых значений некоторого элемента магнитного поля, приходящееся на один год. Эти изменения также меняются с течением времени. По результатам измерений в магнитных обсерваториях строят карты изолиний векового хода – ***карты изопор***. Исследования этих карт показали, что изолинии на картах изопор концентрируются вокруг нескольких центров (фокусов). Их так и называют – ***центрами*** или ***фокусами векового хода***. Исследование карт изопор также показало, что вековые вариации имеют характер как регионального (мирового), так и локального изменения [7, 20]. Мировой характер изменения векового хода

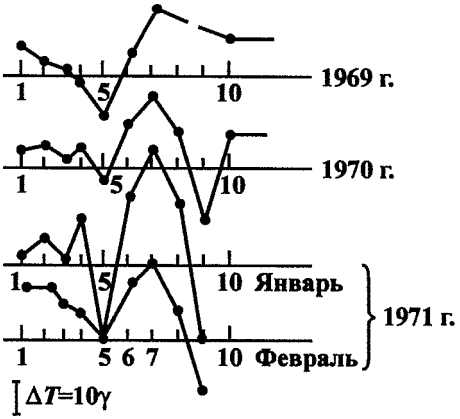


Рис. 53. Изменение геомагнитного поля перед землетрясением [20].
Расстояние между точками по маршруту 5 км; за начало отсчета принят уровень 1968 г.; землетрясение произошло в начале февраля 1971 г. в районе пунктов 6–7

проявляется в изменении магнитного момента Земли, а локальные изменения отражаются на изменении недипольной части главного магнитного поля Земли.

Положения фокусов также меняются во времени – они непрерывно перемещаются, меняются их размеры, форма; некоторые фокусы исчезают, появляются новые и т.д. Причиной их изменения могут быть источники, залегающие на границе ядра Земли. Кроме того, отмечено, что некоторые скачкообразные нарушения плавного векового хода приурочены к зонам глубинных разливов (Средняя Азия, Карпаты).

Как отмечено, смещение фокусов векового хода и изменение их интенсивности похожи на смещение центров мировых аномалий к западу (явление западного дрейфа). Более подробные исследования показывают, что западному дрейфу подвержены больше всего вариации с периодом около 600 лет.

Кроме вековых изменений элементов магнитного поля Земли, могут отмечаться просто отдельные локальные изменения магнитного поля, связанные, например, с землетрясениями. Интервал времени таких локальных изменений геомагнитного поля оценивается несколькими месяцами. Такие изменения были зафиксированы в районе г. Ташкента (рис. 53) [20]. Землетрясение произошло в начале февраля в районе пунктов 6–7 (расстояние между пунктами 5 км). Последние измерения произведены в феврале спустя две недели после землетрясения. На рисунке видны возрастание и спад интенсивности аномалии в январе и феврале, связанные с развитием очага землетрясения.

Литература: [14, 20].

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Рассмотрим вначале зависимость намагниченности горных пород с большим значением магнитной восприимчивости от формы тела.

1. КОЭФФИЦИЕНТ РАЗМАГНИЧИВАНИЯ

Для слабомагнитных материалов величина намагниченности J прямо пропорциональна напряженности намагничивающего поля H:

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость. Для тел с большей магнитной восприимчивостью значение J зависит от формы тела. Причина такой зависимости заключается в следующем. Если тело конечных размеров поместить в поле H, то оно намагничивается, т.е. на его противоположных концах возникают магнитные полюсы. Эти полосы в свою очередь создают внутри тела поле H', которое направлено навстречу внешнему полю H. Из-за этого напряженность тела внутри него уменьшается. Поэтому поле H' называется размагничивающим, а напряженность H' получила название напряженности внутреннего размагничивающего поля. Суммарное поле внутри тела

$$H_в = H - H'.$$

Здесь величина H' пропорциональна намагниченности: $H' = JN$. Поэтому $H_в = H - JN$.

В этой формуле коэффициент пропорциональности N называется коэффициентом размагничивания. Учитывая соотношение

$$J = \chi H_в,$$

найдем

$$H_в = H - \chi N H_в.$$

Отсюда

$$H_в = H/(1 + \chi H).$$

Умножая обе части этого равенства на χ, получим

$$J = \chi H/(1 + \chi H).$$

Коэффициент размагничивания N зависит только от формы тела. Его значение может меняться от 0 до 4π. Для шара $N = \frac{4}{3}\pi$, для кругового цилиндра, намагниченного перпендикулярно к его оси, $N = 2\pi$.

Из полученных выражений видно, что в общем случае направление вектора $\vec{J}$ может не совпадать с направлением намагничивающего поля и при однородном намагничивании. Кроме того, напряженность внутреннего размагничивающего поля в разных точках тела может иметь разные направления относительно направления внешнего намагничивающего поля. Поэтому и направления вектора намагниченности внутри тела могут быть разными, следовательно, в общем случае тело может намагничиваться неоднородно.

Направление $\vec{J}$ совпадает с направлением намагничивающего поля, например, в случаях однородного намагниченного шара (коэффициенты N равны по всем осям), трехосного эллипсоида, когда направление внешнего поля совпадает с одной из его главных осей (составляющие поля H по другим осям будут равны нулю). Кроме того, при вычислении намагниченности горных пород в земном магнитном поле по значению магнитной восприимчивости для случаев относительно больших значений χ необходимо учесть влияние коэффициента размагничивания.

2. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Горные породы, слагающие земную кору, в зависимости от их петрографического состава, структуры, физико-химических условий, в которых они залегают, имеют различные магнитные свойства.

Все вещества по своим магнитным свойствам разделяются на диамагнитные, парамагнитные и ферромагнитные. Эти вещества, находясь в магнитном поле Земли, намагничиваются в различной степени. Степень намагниченности горных пород определяется их магнитной восприимчивостью, т.е. способностью тела намагничиваться. При этом магнитная восприимчивость χ диамагнит-

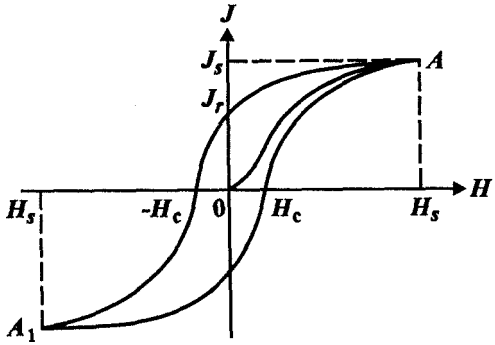


Рис. 54. Кривая намагниченности ферромагнетика

ных веществ имеет отрицательное значение, для парамагнитных и ферромагнитных веществ – положительное значение, причем последние имеют высокое значение магнитной восприимчивости.

К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт и многие сплавы. Зависимость намагниченности J от значений намагничивающего поля H для типичного ферромагнетика показана на рис. 54. На рисунке: J_S – намагниченность насыщения, J_r – остаточная намагниченность, H_c – коэрцитивная сила, кривая OA – начальная кривая намагничивания, вся замкнутая кривая – петля гистерезиса.

Магнитные свойства горных пород зависят в основном от количества входящих в них ферромагнитных минералов. К ним относятся, например, магнетит, титаномагнетит, пирротин, гематит, маггемит.

Таблица 3

Магнитная восприимчивость изверженных горных пород

Порода	Содержание магнетита					
	минимальное		максимальное		среднее	
	%	$\chi \cdot 10^{-5}$, ед. СИ	%	$\chi \cdot 10^{-5}$, ед. СИ	%	$\chi \cdot 10^{-5}$, ед. СИ
Гранит	0,2	800	1,9	7200	0,90	2400
Нефелин	0	0	6,6	25 000	2,71	10 000
Пироксен	0,9	3800	8,4	32 000	3,51	13 200
Габбро	0,9	3800	3,9	15 000	2,40	9100
Кварцевый диорит	1,6	5800	8,0	29 000	3,48	13 100
Андезит	2,6	9800	5,8	21 000	4,50	17 000
Диорит	1,2	4500	7,2	28 000	3,45	13 100
Перидотит	1,6	5800	7,2	28 000	4,60	17 800
Базальт	2,3	8700	8,6	32 000	4,76	18 300
Диабаз	2,3	8700	6,3	24 000	4,35	16 500

Осадочные горные породы слабо дифференцированы по магнитным свойствам и редко бывают причиной магнитных аномалий. Магнитные их свойства определяются в основном содержанием ферромагнитных минералов.

В табл. 3 приведены значения магнитной восприимчивости некоторых изверженных горных пород в зависимости от процентного содержания в них магнетита. Из таблицы видно, что магнитная восприимчивость изверженных горных пород изменяется в широких пределах. При этом наблюдается общее возрастание магнитной восприимчивости от кислых пород к породам основного состава.

Значения магнитной восприимчивости метаморфических пород обычно не превышают $(80 \div 160) \cdot 10^{-5}$ ед. СИ. Осадочные породы, не содержащие заметных включений ферромагнитных минералов, имеют слабую магнитную восприимчивость, равную $(0 \div 40) \cdot 10^{-5}$ ед. СИ. Таким образом, магнитная восприимчивость метаморфических и осадочных пород на несколько порядков меньше, чем магнитная восприимчивость изверженных пород.

Нефтегазовые залежи могут создавать слабые магнитные аномалии. Магнитная восприимчивость нефти составляет $(6 \div 8) \cdot 10^{-5}$ ед. СИ, газа – $(8 \div 10) \cdot 10^{-5}$ ед. СИ.

Литература: [6, 8, 14].

МЕСТОРОЖДЕНИЯ НЕФТИ И ГАЗА И ИХ ОТРАЖЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Залежи нефти и газа могут находиться в ловушках, связанных с антиклинальными структурами, соляными куполами, рифогенными массивами, тектоническими нарушениями, стратиграфическими несогласиями, литологическим замещением пород и т.д. Основным условием образования залежей нефти и газа является наличие пород-коллекторов, перекрытых непроницаемыми породами-покрышками. В большинстве случаев коллекторы имеют форму пластов.

Гравитационное поле над месторождениями нефти и газа зависит от многих факторов. Основными из них являются влияние структуры, в которой находится залежь, неоднородностей части разреза, залегающих выше залежи, влияние самой залежи нефти и газа, рельефа и неоднородностей фундамента. Влияние структуры зависит как от ее формы, так и от неоднородностей ее плотностного строения. К плотностным неоднородностям структур относится разуплотнение их и уплотнение пород отдельных ее слоев от крыльев к своду. Гравитационное влияние разуплотнения пород аналогично влиянию залежи нефти и газа уменьшает значения аномалии силы тяжести над месторождением. В большинстве случаев влияние структуры в этом поле сильнее, чем влияние залежи, но известны случаи, когда влияние залежи больше влияния структуры.

Эффект разуплотнения проявляется обычно в отдельных слоях, не захватывая больших толщ. При этом плотность в этих слоях изменяется постепенно от крыльев к своду структуры. В случаях, если в структуре находится залежь, на контактах вода – нефть или вода – газ уменьшение плотности происходит достаточно резким скачком. Этот скачок отражается во многих случаях и на гравитационном поле, поэтому может быть выделен при трансформациях.

Во многих районах основным фактором, определяющим характер гравитационного поля над месторождениями нефти и га-

за, является влияние рельефа фундамента и неоднородностей его петрографического состава. Это влияние может значительно превосходить суммарное влияние структуры и находящейся в ней залежи. Поэтому часто аномалии от структуры и залежи, сравнительно небольшой величины, наблюдаются на фоне значительных положительных аномалий от фундамента.

1. МЕСТОРОЖДЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СОЛЯНЫМИ КУПОЛАМИ

Большое количество месторождений нефти и газа приурочены к солянокупольным областям. Это вызвано тем, что соленосные породы и солянокупольные структуры играют большую роль в генерации, миграции и аккумуляции нефти и газа, следовательно, и в формировании и разрушении месторождений нефти и газа.

Благодаря своей малой проницаемости, соленосные отложения способствуют образованию залежей нефти и газа больших размеров в подсолевых отложениях. Соляные купола бывают большой мощности, и их основания часто залегают на больших глубинах. При глубоком залегании соляных куполов в надсолевых отложениях могут образоваться антиклинальные ловушки малой амплитуды. На склонах и в надсводовых участках соляных куполов при их росте могут образоваться ловушки нефти и газа неструктурного типа. Нефтегазовые залежи антиклинального типа могут образоваться в межкупольных мульдах из-за оттока соли из краевых частей в соседние купола. Ловушки нефти и газа могут образоваться и в воронках, образующихся под сводами соляных структур при вымывании соли подземными водами, когда эти воронки заполняются породами достаточной пористости.

Соляной купол состоит из соляного ядра, ангидритогипсовой покрышки и надсолевой структуры, разбитой на части системой сбросов. Ядро купола (соляной массив или шток) имеет довольно большую высоту, доходящую иногда до 8 км. Покрышка купола или «шляпа», состоящая в основном из ангидрита и гипса, называется кепроком. Кепрок образуется из нерастворимых компонентов соли, мощность ее невелика – она определяется десятками метров, только в отдельных случаях может достигать 200–300 м. Иногда кепрок может отсутствовать.

Плотность соли может меняться от 2 до 2,2 г/см^3. Плотность вмещающих пород зависит от глубины их залегания и может меняться от 1,75 до 2,8 г/см^3. Плотность кепрока меняется от 2,6 до 2,8 г/см^3. Отсюда следует, что при малых глубинах (например, до 300 м) плотность соли может быть больше плотности вмещаю-

щих пород, а на больших глубинах – меньше. Наиболее гравиактивными являются границы соль – надсолевые отложения и нижняя граница соли.

Из-за значительной разницы в плотностях и большой мощности соляных массивов над куполами наблюдаются довольно интенсивные (до десятков миллигал) и хорошо локализованные отрицательные аномалии силы тяжести. Из-за этого гравиметрический метод разведки является одним из основных при поисках соляных куполов. В то же время форма соляных куполов с козырьками различной конфигурации достаточно сложная. Кроме того, наличие различных тектонических нарушений, литологических факторов и других причин, осложняющих поля, затрудняют применение гравиразведки при определении формы крутых склонов, козырьков соли и решении более тонких задач. Поэтому при решении этих задач гравиразведку нужно применить в комплексе с сейсморазведкой, результаты которой в сводовой части структур не всегда надежны. Такое совместное применение гравиразведки и сейсморазведки позволяет построить более точные согласованные сейсмогравиметрические модели геологического разреза.

Соляные купола развиты в Днепровско-Донецкой впадине, в Прикаспийской впадине, в районах Восточной Сибири, в Румынии, Западной Германии, на побережье Мексиканского залива в США, в Иране и в других районах.

Примеры аномалий гравитационного поля над соляными куполами показаны на рис. 55. Здесь на верхнем рисунке показана аномалия силы тяжести над соляным куполом, осложненная влиянием кепрока – на фоне общего минимума от соляных отложений наблюдается в плане кольцевой максимум силы тяжести. На нижнем рисунке показаны типичные кривые $V_z(\Delta g)$ и значения ее горизонтальной производной V_{xz} над соляным куполом.

На рис. 56 приведен схематический разрез солянокупольного нефтяного месторождения (по А.К. Маловичко). Здесь залежи нефти и газа показаны в надсолевой толще, разбитой сбросами и разломами на части, в кепроке и в приподнятых частях песчаных пластов, прилегающих к соляному массиву.

Основной метод изучения соляных куполов по данным гравиразведки – способ подбора, основанный на минимизации функционала

$$F = \sum_{i=1}^{n} [\Delta g_{\text{н}}(x_i, y_i) - \Delta g_{\text{т}}(x_i, y_i)]^2,$$

где $\Delta g_{\text{н}}$ – значения наблюденной аномалии; $\Delta g_{\text{т}}$ – теоретические или подбираемые значения силы тяжести; n – количество точек

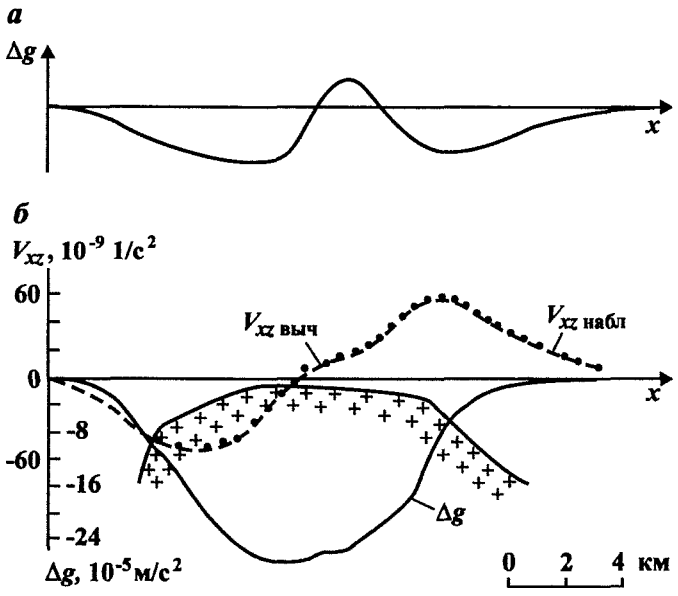


Рис. 55. Аномалии силы тяжести над соляными куполами:
а – аномалия силы тяжести над соляным куполом с кепроком; *б* – определение формы соляного купола по гравитационным данным (по Э.Э. Фотиади)

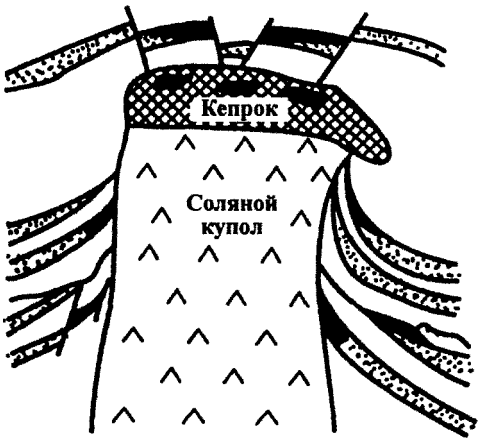


Рис. 56. Схема соляно-купольного нефтяного месторождения (по А.К. Маловичко)

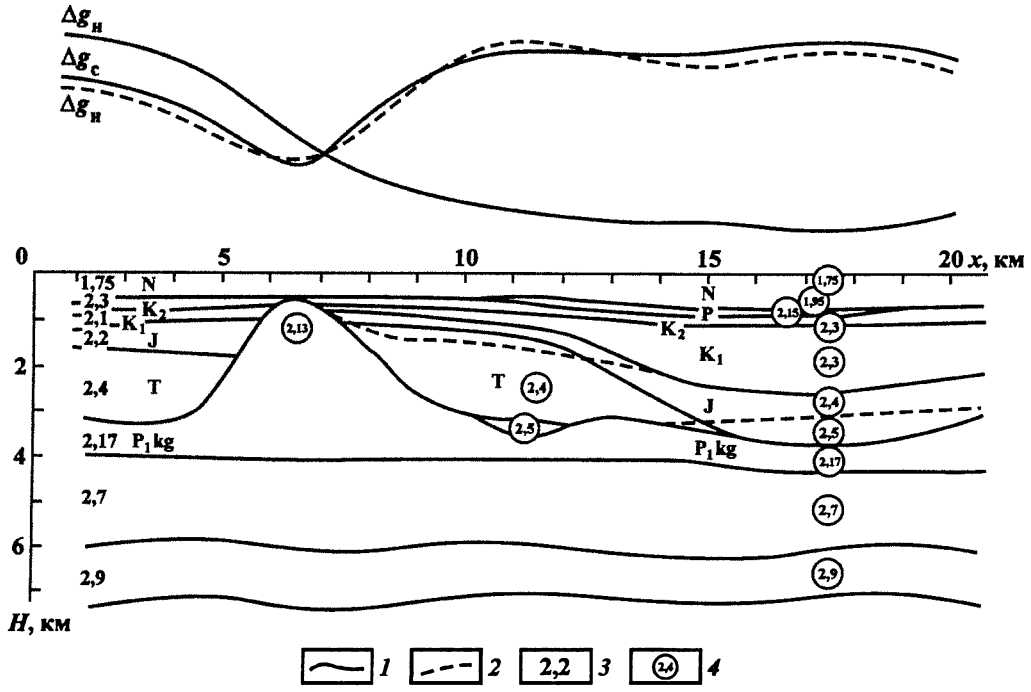


Рис. 57. Построение согласованной сейсмо-гравиметрической модели разреза (по А.А. Чернову):
1 – границы согласованной модели разреза; *2* – границы исходной сейсмической модели по общей глубинной точке; *3* – исходные данные плотностей в г/см^3; *4* – плотности согласованной модели в г/см^3; $\Delta g_н$ – наблюденные аномалии Буге; $\Delta g_и$ – исходная расчетная аномалия Буге; $\Delta g_с$ – расчетная аномалия Буге для согласованной модели

подбора. Надежные результаты при подборе можно получить, когда используются дополнительные сведения по результатам бурения, сейсморазведки или других геофизических методов разведки.

На рис. 57 приведена согласованная сейсмогравиметрическая модель среды. В результате такого моделирования удается уточнять не только форму поверхности, но и значения плотности слоев.

Литература: [3, 6, 14].

2. МЕСТОРОЖДЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С АНТИКЛИНАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Рассмотрим вначале обобщенную схему или модель распределения физических свойств в пределах антиклинального нефтегазового месторождения платформенного типа (рис. 58) (по В.М. Березкину). Согласно этой модели, в области месторождения можно выделить семь различных факторов, влияющих на геофизические поля над месторождением – это влияния: 1) залежи нефти и газа, 2) запечатывающего слоя, 3) ореола вторжения углеводородов (зоны АВПД), 4) разуплотнения пород в сводах структур, 5) субвертикальных зон неоднородностей (разнонапряженных состояний) пород, 6) опорных границ и 7) фундамента. Рассмотрим особенности влияний некоторых из указанных факторов. Более подробные сведения о них можно найти в работах В.М. Березкина.

1. **Залежь нефти и газа.** Аномальные свойства залежи зависят от особенностей физических свойств нефти и газа и особенностей строения пород коллектора. Физические свойства пород коллектора меняются под влиянием вторичных процессов уплотнения, цементации, минералообразования в поровом пространстве и в трещинах. Нефть же, обладая консервирующими свойствами, затормаживает, а иногда и полностью прекращает процессы аутогенного минералообразования, которые могли бы происходить при наличии воды в порах. Из-за этого скелет породы в водоносной части станет более жестким, чем в области залежи, что приводит к различию физических свойств. В то же время консервирующие свойства нефти сохраняют коллекторские свойства пород без каких-то особых изменений. Значение эффективной плотности залежи рассмотрим в конце раздела.

Магнитные аномалии от залежей невелики, и они вызваны различием магнитной восприимчивости углеводородов и законтурных вод, а также пород коллектора в области залежи и вне ее.

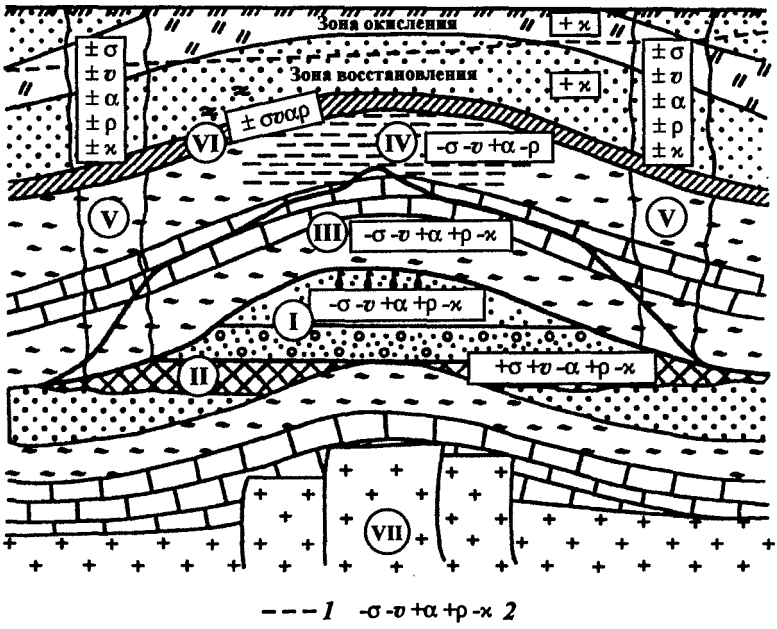


Рис. 58. Схема распределения физических свойств пород в пределах нефтегазоносных структур платформенного типа (по В.М. Берзкину):
I – залежь нефти и газа; *II* – запечатывающий слой; *III* – ореол вторжения; *IV* – зона разуплотнения пород в своде структуры; *V* – субвертикальные зоны неоднородностей (разнонапряженных состояний); *VI* – опорные границы между породами с различными физическими свойствами; *VII* – фундамент; *1* – граница между зонами окисления и восстановления; *2* – физические свойства пород (относительно пород законтурной части залежи): σ – плотность; *υ* – скорость; ρ – удельное электрическое сопротивление; α – коэффициент поглощения; χ – магнитная восприимчивость пород

2. **Запечатывающий слой.** Запечатывающий слой образуется в области контактов углеводородов с водой. В этой области происходят процессы растворения минералов, образование кальцита, кварца, пирита и других минералов. Под действием этих процессов уменьшается пористость и увеличивается плотность пород. Все это приводит к образованию слоя закрывающего или запечатывающего залежь. Мощность такого слоя от нескольких метров до сотен метров. Плотность слоя по сравнению с плотностью пород области залежи увеличивается на 0,20–0,40 г/см^3, а иногда доходит и до 0,60 г/см^3.

Магнитные свойства пород запечатывающего слоя мало отличаются от магнитных свойств пород в области залежи.

3. **Ореол вторжения углеводородов.** Под действием различных процессов при затрудненной миграции флюидов в пластах образуется зона аномально высокого пластового давления (АВПД) – на 10–20 % выше нормального гидростатического давления. Под влиянием АВПД в нижней части глинистой толщи-покрышки появляется ореол вторжения углеводородов.

В ореоле вторжения углеводородов увеличивается пористость, уменьшается плотность, повышается нефтегазонасыщенность. Такие же изменения физических свойств могут происходить и в локальных глинистых отложениях внутри залежи, увеличивается пористость и пород-коллекторов залежи углеводородов.

4. **Разуплотнение пород в сводах структур.** В пределах отдельных структур наблюдается увеличение песчанистости терригенных пород по направлению от крыльев структуры к ее своду, т.е. эти породы становятся грубее. В случае карбонатных отложений известняки больше всего залегают на сводах структур, а доломиты – на крыльях.

Такие литолого-фациальные изменения пород могут привести к изменению физических свойств пород в горизонтальном направлении, в частности в большинстве случаев плотность пород уменьшается от крыльев структуры к ее своду. Это явление впервые было выявлено Б.А. Андреевым. Оно получило название послойной зональности или латеральной зональности.

Изменение плотности может достигать значительных величин, например, для структур Татарии оно равно 0,06–0,19 г/см^3 (З.М. Слепак), для структур Азербайджана и Северного Кавказа – 0,15–0,25 г/см^3 (И.О. Цимельзон).

Магнитные свойства пород в зонах, расположенных выше залежей [8], зависят в основном от окислительно-восстановительных процессов, происходящих в них. Здесь выделяются две зоны. Верхняя является зоной окисления, нижняя – зоной восстановления. Верхняя зона обогащена кислородом, азотом, углекислотой, нижняя – углеводородами, азотом и сероводородом. Процессы в зоне окисления приводят к увеличению магнитной восприимчивости пород, а в зоне восстановления – к ее уменьшению по сравнению с породами вне области над залежью. Кроме того, при действии углеводородов, мигрирующих из залежи, над ней накапливается вторичный магнетит. Все это может привести к появлению над залежью магнитных аномалий незначительной интенсивности и различных знаков. При этом наличие вторичного магнетита приводит к образованию над залежью характерных пилообразных аномалий.

5. **Субвертикальные кольцеобразные зоны неоднородностей пород.** Эти зоны располагаются по периметру залежей углеводо-

родов в крыльевых частях структур, испытывающих наибольшее статическое напряжение с деформациями растяжения и сжатия. Они характеризуются аномально высокими и низкими напряжениями горных пород, которые приводят к увеличению и уменьшению пористости и плотности пород. Например, при растяжении породы дробятся, повышается их трещиноватость и пористость, что приводит к уменьшению их плотности.

Особенностью этих зон является то, что они протягиваются по всему разрезу и отличаются повышенной проницаемостью из-за наличия трещин. По ним происходит перенос вод с различными элементами, повышенный перенос углеводородов при наличии залежей. Под действием процессов, происходящих в них, могут нарушаться первоначальные магнитные свойства пород.

Эти зоны проявляются в гравитационных и магнитных полях изрезанностью кривых, небольшими положительными и отрицательными аномалиями.

6. **Опорные границы.** К ним относятся выдержанные в горизонтальном направлении границы осадочной толщи, разделяющие породы с разными физическими свойствами. Их может быть в разрезе много (до 10–15), но основных из них несколько. Перепад плотностей на них может доходить до 0,3–0,5 г/см^3. Эти границы являются гравиактивными, и аномалии от нефтегазовых залежей наблюдаются на их фоне.

7. **Фундамент.** Основными факторами, определяющими величину и особенности измеряемых на дневной поверхности элементов гравитационных и магнитных полей, являются влияния поверхностей фундамента и неоднородностей его внутреннего строения. Осложняют наблюдаемые поля различные зоны нарушений и разломов в фундаменте, прослеживаемые в осадочной толще. Поэтому при изучении залежей особое внимание нужно уделить влиянию рельефа фундамента и особенностям его строения.

В настоящее время накоплен значительный материал по результатам высокоточных гравиметрических съемок над месторождениями нефти и газа антиклинального типа. По результатам этих съемок нефтегазоносные локальные поднятия отражаются в гравитационном поле за редким исключением локальными максимумами различной интенсивности на фоне регионального поля различной конфигурации. Такая картина наблюдается в пределах Волго-Уральской нефтегазоносной провинции, Приуральской части Западно-Сибирской низменности, Южного Мангышлака, Северного Предкавказья (за исключением части Западно-Кубанского прогиба) и в пределах многих других районов. Есть и исключения из этого правила. Например, в южной части Западно-

Кубанского прогиба положительным структурам в гравитационном поле соответствуют локальные минимумы. Локальные поднятия отмечаются в гравитационном поле локальными минимумами в Обь-Иртышском междуречье Западно-Сибирской платформы, на Аншеронском полуострове (рис. 59, *I*) и в некоторых других районах.

На фоне локальных максимумов, связанных с влиянием поднятия часто выделяются меньших размеров локальные минимумы иногда значительной амплитуды. Значения минимумов над некоторыми нефтегазоносными структурами различных районов приведены в табл. 4. Вид аномалий силы тяжести над некоторыми из них показан на рис. 59, *II*.

Примеры гравитационных аномалий взяты из книги З.М. Сленака.

Из таблицы видно, что амплитуда локального минимума, выделенного на фоне аномалии от структуры, доходит иногда до 1,5–2 мГал. Расчеты показывают, что гравитационный эффект, обусловленный влиянием залежей углеводородов, значительно ниже этой величины. Поэтому основная часть этого минимума вызвана разуплотнением пород в сводовой части структуры.

При вычислениях гравитационного эффекта от залежи необходимо пользоваться значением эффективной плотности залежи, эффективная плотность залежи определяет уменьшение плотности в области залежи и водоносной части коллектора. Значение эффективной плотности залежи можно определить по формуле

$$\sigma_{эф} = (\sigma_в - \sigma_{нг})k_п k_{нг},$$

где $\sigma_в$ – плотность пластовой воды; $\sigma_{нг}$ – плотность нефти или газа в естественных условиях, $k_п$ – коэффициент пористости, $k_{нг}$ – коэффициент нефтегазонасыщения. При расчетах $k_п$, $k_{нг}$ берутся в долях единицы.

Плотность пластовой воды в зависимости от количества растворенных в ней солей может изменяться от 1,00 до 1,26 г/см^3. Плотность нефти может изменяться от 0,76 до 0,96 г/см^3. Плотность сухого газа равна 0,00128 г/см^3. В пластовых условиях плотности нефти может составлять 0,5 г/см^3 и даже меньше, в зависимости от количества растворенного в ней газа, температуры и давления. Плотность газа в пластовых условиях может достигать 0,4–0,5 г/см^3, т.е. может приближаться к значению плотности нефти.

Если примем, что $\sigma_в$ = 1,1 г/см^3, $\sigma_{нг}$ = 0,7 г/см^3, $k_п$ = 0,25, $k_{нг}$ = 0,7, то для эффективной плотности залежи получим $\sigma_{эф}$ = = 0,07 г/см^3. Для газовых залежей значение $\sigma_в - \sigma_г$ может рав-

Таблица 4

Некоторые нефтегазоносные структуры и значения локального минимума силы тяжести над ними

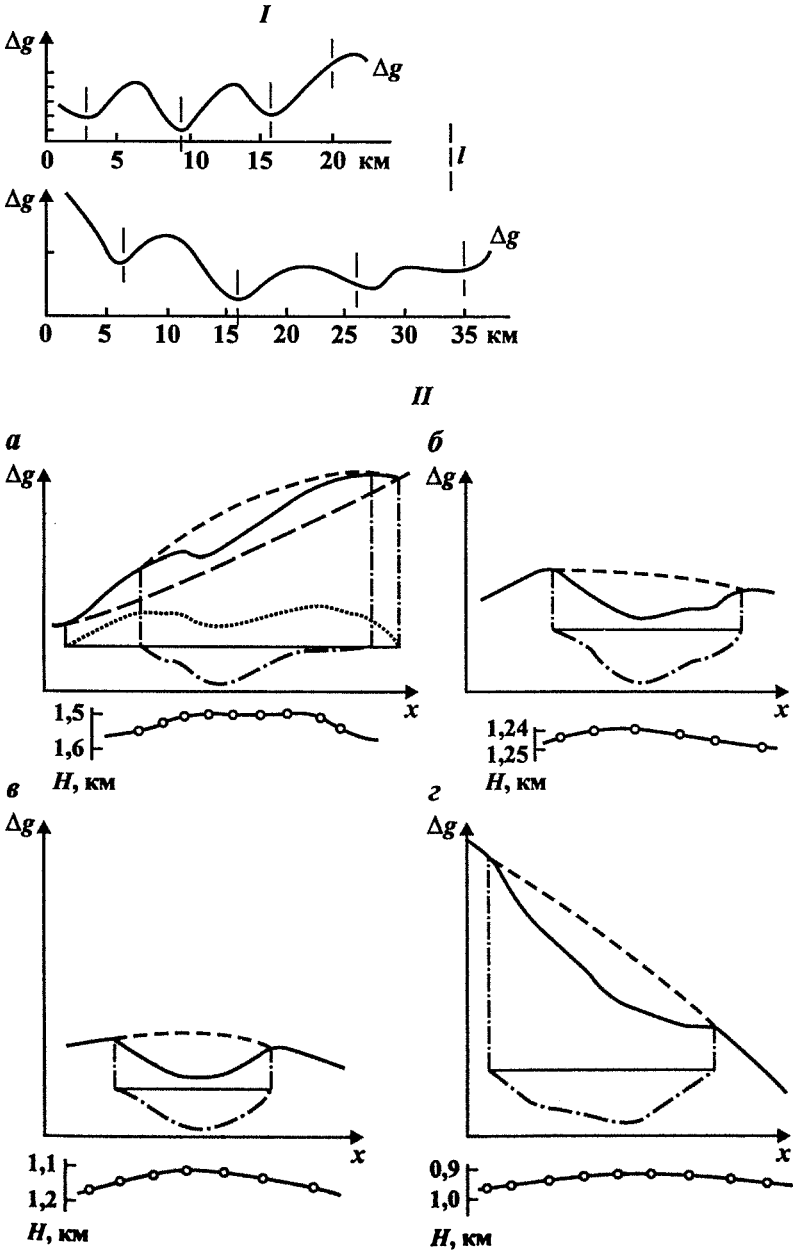
Название структуры	Область, где расположена структура	Значение локального минимума над структурой, мГал
Ямашинская	Татарстан	1,5
Бондюжская	Татарстан	1,5
Актанышская	Татарстан	1,0
Крым-Сарайская	Татарстан	0,7
Александровская	Татарстан	1,8
Нурлатская	Татарстан	1,0
Эштебенькинская	Татарстан	2,0
Кулешовская	Самарская область	0,9
Герасимовская	Оренбургская область	0,7
Степновская	Саратовская область	1,8
Урицкая	Саратовская область	0,9
Любимовская	Саратовская область	1,8
Слепцовская	Саратовская область	1,0
Первомайская	Саратовская область	1,0
Коробковская	Волгоградская область	1,5
Арланская	Башкортостан	0,5
Гремихинская	Удмуртия	1,3
Киенгопская	Удмуртия	0,8
Козубаевская	Пермская область	0,5
Мазунинская	Пермская область	0,5
Кыласовская	Пермская область	0,4
Газлинская	Узбекистан	2,0
Узеньская	Южный Мангышлак	0,7
Жетыбайская	Южный Мангышлак	0,8
Хошмензилская	Дагестан	2,0

няться 1,0 г/см^3, тогда значение эффективной плотности для этих условий может составлять 0,18 г/см^3. В среднем эффективная плотность для газовых залежей может достигать 0,20 г/см^3, для нефтяных залежей – 0,10 г/см^3. В табл. 5 приведены значения эффективной плотности и значения аномалии силы тяжести, обусловленные залежами, для некоторых месторождений нефти и газа.

Рис. 59. Гравитационные аномалии:

I – над антиклинальными складками Апшеронского полуострова (по И.О. Цимельзону) (*I* – положение осей антиклинальных складок); *II* – над месторождениями нефти и газа.

Месторождения: *а* – Бендюжинское; *б* – Актанышское; *в* – Крым-Сарайское; *г* – Александровское; *д* – Нурлатское и Эштебеньское; *е* – Кулешовское; *ж* – Герасимовское; *з* – Степановское; *и* – Слепцовское; *к* – Арланское; *л* – Урицкое; *м* – Первомайское; *н* – Гремихинское; *о* – Любимовское: *1* – наблюденная аномалия силы тяжести; *2* – кривая востановленной аномалии; *3* – региональный фон; *4* – локальная аномалия силы тяжести (максимум); *5* – локальный минимум; *6* – поверхность одной из гравиактивных границ


I
Δg
Δg
0 5 10 15 20 км
l
Δg
Δg
0 5 10 15 20 25 30 35 км
II
а
Δg
x
1,5
1,6
H, км
б
Δg
x
1,24
1,25
H, км
в
Δg
x
1,1
1,2
H, км
г
Δg
x
0,9
1,0
H, км

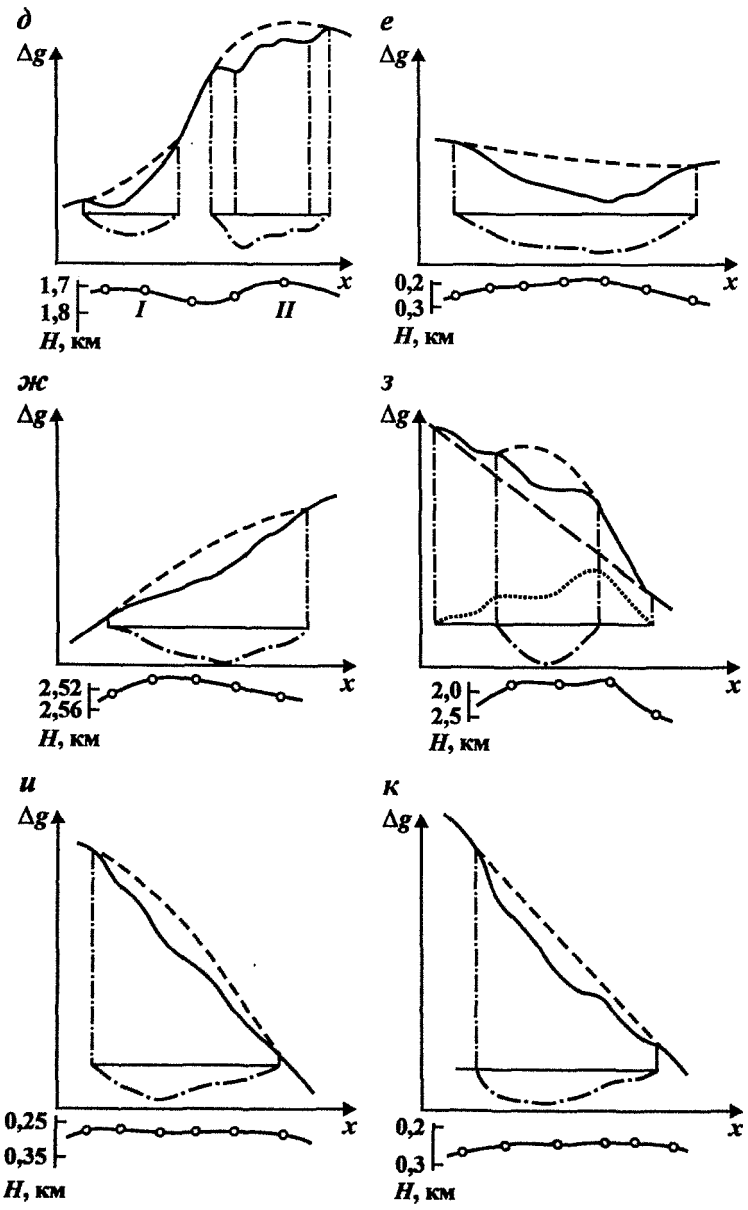
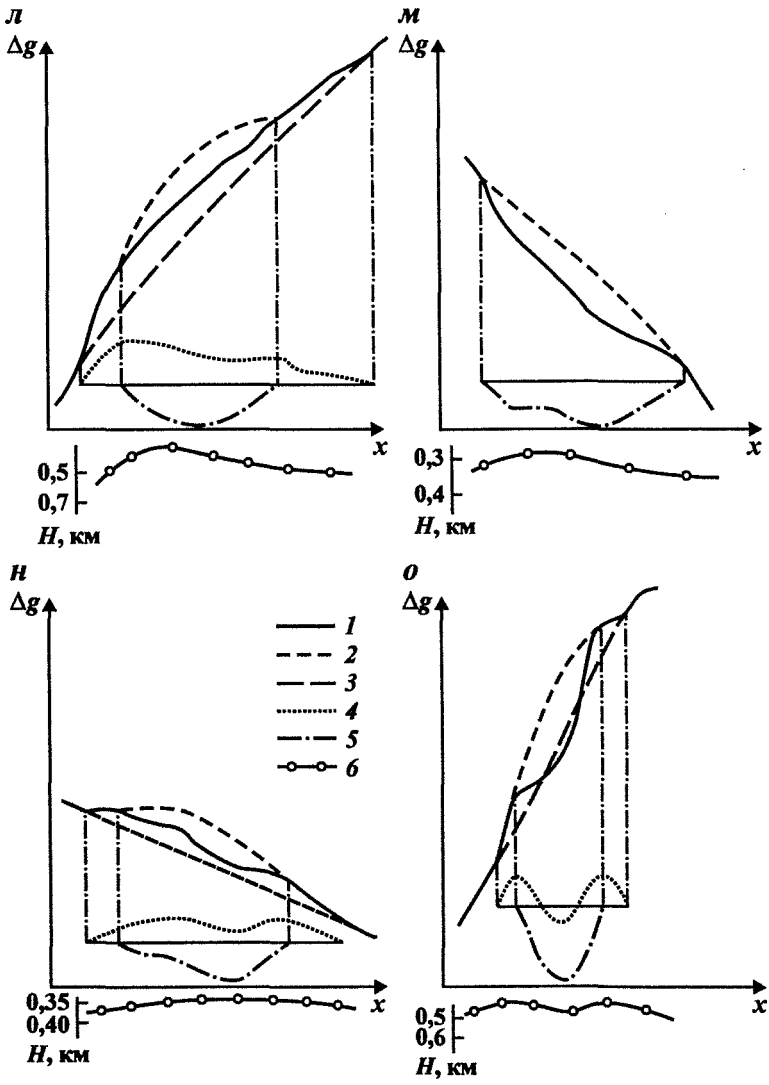


Рис. 59. Продолжение



Более подробно вид гравитационных аномалий над месторождением нефти и газа одной из площадей Волго-Уральской провинции (по Л.Д. Немцову) показан на рис. 60. Локальное поднятие этой площади представляет собой типичную брахиантикли-

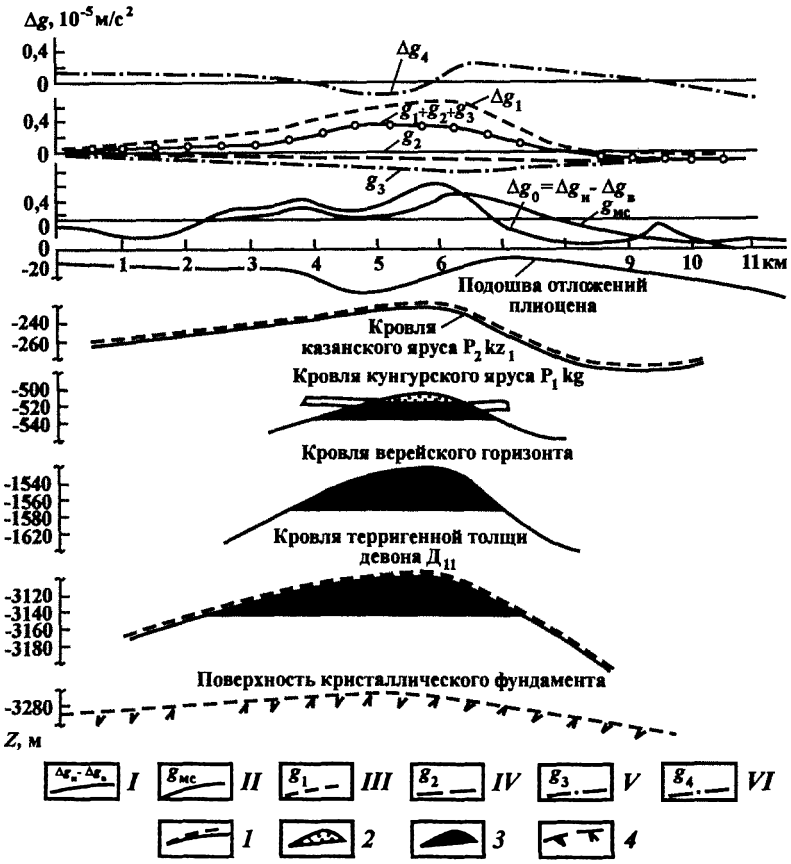


Рис. 60. Результаты сопоставления остаточной аномалии силы тяжести и кривых модельного гравитационного поля (по Л.Д. Немцову):

I – кривая остаточной аномалии силы тяжести ($\Delta g_0 = \Delta g_и - \Delta g_в$) разность наблюденной аномалии силы тяжести и восстановленного графика регионального фона); *II* – суммарный гравитационный эффект ($g_{мс} = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$); *III* – гравитационный эффект кровли карбонатного комплекса (g_1); *IV* – гравитационный эффект кровли нижнего терригенного комплекса (g_2); *V* – суммарное гравитационное влияние залежей нефти и газа (g_3); *VI* – гравитационный эффект поверхности размыва (g_4): *1* – литолого-стратиграфических комплексов (гравиактивные контакты); *2* – газовая шапка; *3* – нефтяные залежи; *4* – поверхность кристаллических пород

Таблица 5

Эффективная плотность и аномалия силы тяжести, обусловленные залежами, для некоторых месторождений

Месторождение	Мощность продуктивных пластов, м	Характер залежи	$\sigma_{эф}$, г/см^3	Расчетная аномалия силы тяжести, мГал
Шебелинское	220	Газ	0,07	1,2
Северо-Ставропольское	90–135	Газ	0,16	1,5
Урицкое	80	Газ	0,11–0,16	0,14–0,35
Восточно-Суслевское	30	Газ	0,18	0,15
Первомайское	18	Газ	0,20	0,10
Степановское	54	Газ	0,12	0,28
Газлинское	270	Газ	0,15	1,5–2,0
Дмитровское	84	Нефть	0,05–0,08	0,10
Жетыбайское	200	Нефть	0,05–0,08	0,68
Анастасиевское	100	Нефть, газ	0,15–0,20	0,30

наль широтного простирания с размерами (по кровле Калиновской свиты) 19 км по длинной оси и 4 км по короткой. Суммарная мощность нефтесодержащих коллекторов приблизительно 120 м. Месторождение включает залежь в пермских отложениях (кунгурский ярус, мощность около 20 м) с газовой шапкой (мощность 10 м), несколько нефтяных залежей в каменноугольных отложениях (верейский горизонт, мощность около 50 м), нефтяные залежи в терригенном девоне (суммарная мощность около 50 м).

На рисунке показаны основные гравиактивные границы площади и кривые их гравитационных влияний. Амплитуда влияния нефтяных и газовых залежей составляет 0,2 мГал и практически совпадает с интенсивностью локального минимума силы тяжести над месторождением. Отмечается некоторое несовпадение местоположения этих минимумов, что может быть связано с изменением значения избыточной плотности пород в сводовых частях структуры в горизонтальном направлении (при расчетах брались постоянные значения плотностей, изменение плотностей в горизонтальном направлении не изучалось).

Литература: [3, 6, 14].

3. МЕСТОРОЖДЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НЕСТРУКТУРНЫМИ ЛОВУШКАМИ

К ловушкам неструктурного или неантиклинального типа относят в основном ловушки литолого-стратиграфического и тектонического типов (рис. 61), а также рифы.

Литолого-стратиграфические ловушки образуются в результате фациального замещения пород коллекторов другими непроницаемыми породами. Такое замещение может происходить из-за трансгрессивного перекрытия или литологического изменения состава пород в самом коллекторе. Аномалии от зон таких ловушек достаточно слабые (первые десятые доли миллигала) и их трудно обнаружить и выделить из наблюдаемых полей. По гравитационным аномалиям в благоприятных случаях можно выявить зоны замещения, в которых могут находиться подобные ловушки.

Ловушки нефти и газа литологического, стратиграфического и комбинированного типов могут быть развиты в различных геотектонических областях земной коры – в пределах платформ, в зонах погружений горноскладчатых образований, в предгорных и межгорных прогибах и впадинах и имеют широкое распространение в различных нефтегазоносных провинциях России и других стран. Иногда в пределах одного месторождения могут встречаться залежи нескольких типов (структурной, стратиграфической, литологической и др.).

Пример аномалии силы тяжести над одним из месторождений нефти неструктурного типа приведен на рис. 62 (по В.М. Березкину). Профиль, которому соответствует эта аномалия, пересекает в плане месторождения Асфальтовая Гора и Широкая Балка (Хадыженская группа месторождений нефти в Краснодарском крае). Общий региональный фон – сложный, имеет вид гравитационной ступени. На этом фоне сильного уменьшения поля наблюдается локальная отрицательная аномалия силы тяжести в зоне пикетов 18–44. В области этого минимума (в зонах пикетов 20–28) выделяется локальная положительная аномалия интенсивностью около 1 мГал.

Рифогенные образования встречаются на борту Прикаспийской впадины, в Предуралье, в системе Камско-Кинельских впадин, на Северном Кавказе, в Тимано-Печерской провинции, в Бухаро-Хивинской области, в Канаде, США и в других районах.

Гравиразведку успешно применяют в благоприятных случаях и при поисках и изучении рифов, в которых могут находиться залежи нефти и газа. Часто породы, залегающие над рифами, в значительной степени неоднородны по плотности. Из-за этого

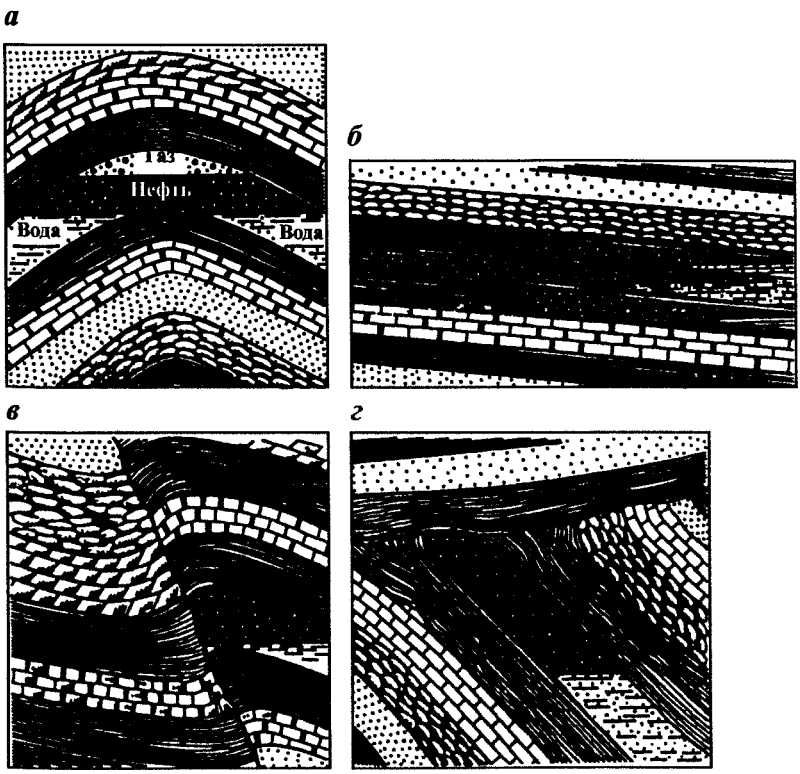


Рис. 61. Типы ловушек:
а – сводовая; *б* – литологически экранированная; *в* – тектонически экранированная; *г* – стратиграфически экранированная

гравитационные аномалии, вызываемые этими породами, более интенсивные, чем аномалии от рифовых массивов. Тем не менее в гравитационном поле рифы проявляются более четко, чем многие неструктурные ловушки, образованные выклиниванием пластов.

Рифовые тела (плотность 2,5 г/см^3) могут находиться в толще соли (плотность в среднем 2,1–2,3 г/см^3), в толще известняков (плотность 2,6–2,7 г/см^3) В этих случаях над рифовыми массивами могут возникать положительные и отрицательные локальные аномалии значительной интенсивности (до 1 мГал и более). В случаях, когда рифовые тела находятся в толще глинистых сланцев, избыточная плотность может равняться нулю и грави-

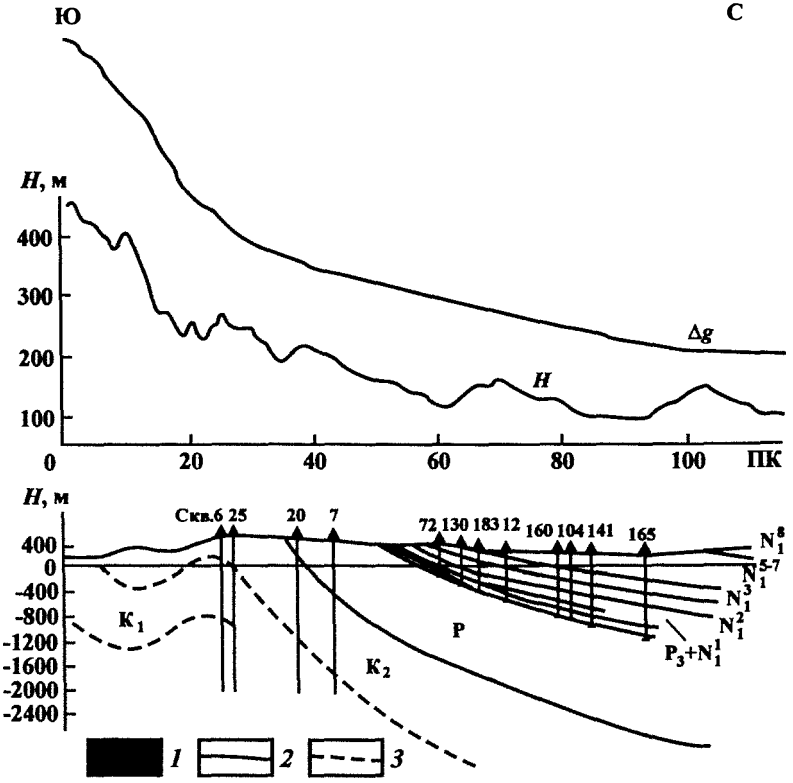


Рис. 62. График Δg, кривая дневного рельефа *H* и геологический разрез по профилю *I–I* (по В.М. Березкину):
1 – нефтяные залежи; *2* – границы комплексов пород; *3* – предполагаемые границы комплексов пород в отложениях мела

тационная аномалия может не наблюдаться. Но бывают случаи, когда глинистые сланцы, расположенные выше и с боковых сторон рифов, уплотнены в зависимости от глубины их залегания. В этих случаях над рифовыми телами могут возникать положительные локальные аномалии интенсивностью в первые десятые доли миллигала. Кроме положительных и отрицательных аномалий, над рифовыми образованиями могут наблюдаться аномалии типа «сомбреро» – положительные локальные аномалии, имеющие по краям отрицательные аномалии меньшей интенсивности, а также отрицательные аномалии с максимумом в центре.

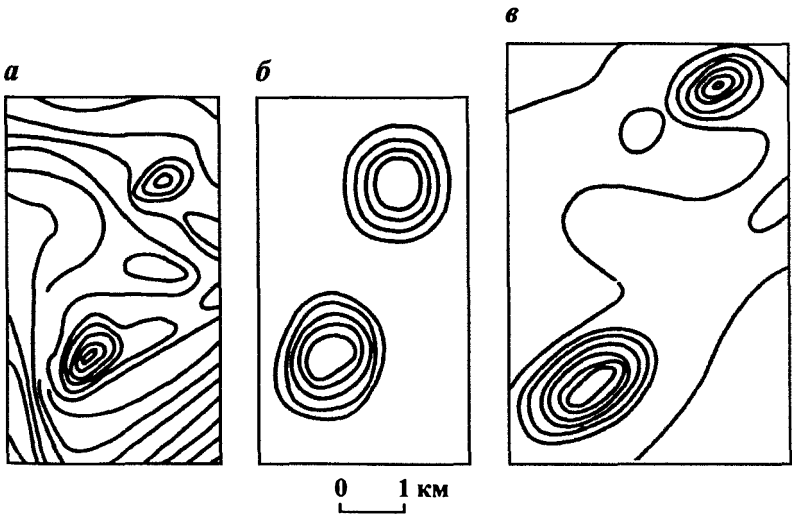


Рис. 63. Риф Даун (США):
а – карта аномалий Буге (сечение через 0,1 мГал); *б* – карта остаточных аномалий (сечение через 0,1 мГал); *в* – структурная карта поверхности рифа (сечение 50 м)

Один из примеров, иллюстрирующих вид аномалий силы тяжести над рифом, приведен на рис. 63. Здесь гравитационная аномалия соответствует рифовому массиву, залегающему на небольшой глубине (около 0,5 км) в соленосных породах, плотность которых на 0,3 г/см^3 меньше плотности пород рифа.

На рис. 64 приведен пример гравитационной аномалии силы тяжести Δg_a, измеренной по одному из профилей над газовым месторождением Уртабулак (Бухарская область Узбекистана). Месторождение приурочено к Уртабулакской антиклинальной структуре. Здесь отмечается резкое несоответствие структурных планов в надсолевых и подсолевых отложениях. Плотность плотных известняков келловей-оксфорда (подрифовых и надрифовых) составляет 2,67 г/см^3, а для пористых известняков она равна 2,45 г/см^3.

На рисунке показан и график изменения вариаций силы тяжести по способу Б.А. Андреева $\delta\Delta g$, полученных с радиусом усреднения 2 км.

Аномальное гравитационное поле этого месторождения обусловлено влиянием продуктивной толщи, плотностными неодно-

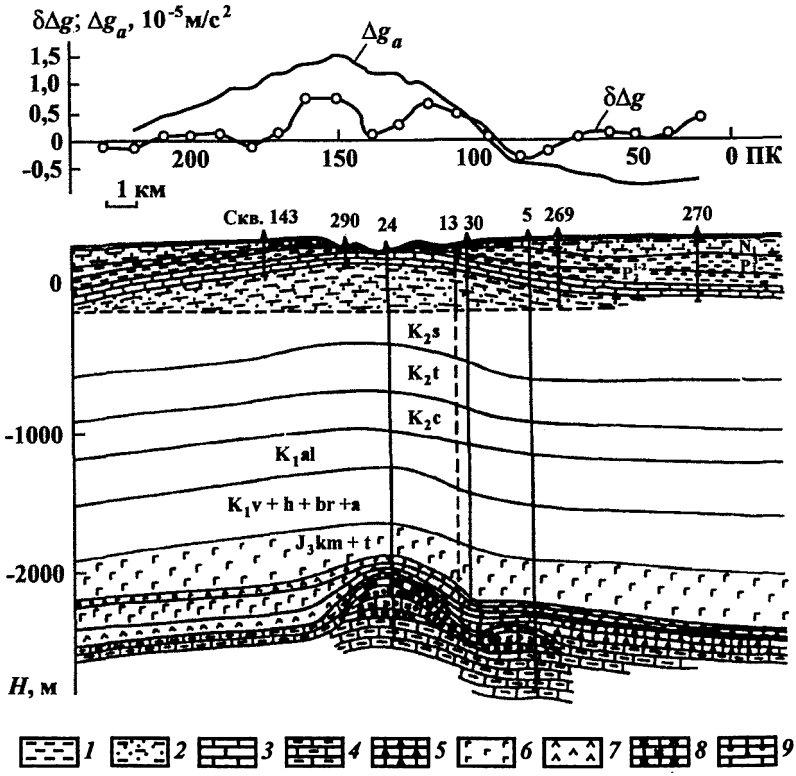


Рис. 64. Графики δΔg, Δg_a и геологический разрез по профилю *II–II* (по А.С. Орловскому, М.А. Высоцкому, В.А. Каплун):
1 – глина; *2* – песчаник; *3* – известняк; *4* – известняк с прослоями глин; *5* – известняк плотный, трещиноватый с прослоями глин и мергелей; *6* – каменная соль; *7* – ангидрид; *8* – известняк высокопористый (рифтогенный); *9* – известняк, насыщенный газом

родностями осадочной толщи и складчатого фундамента. Осложняющим фактором здесь является смещение структурных планов надсолевых и подсолевых отложений.

Литература: [3, 6, 14].

МЕСТОРОЖДЕНИЯ НЕФТИ И ГАЗА И ИХ ОТРАЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Осадочные породы практически немагнитны. Поэтому в шестидесятых и семидесятых годах прошлого века магниторазведка применялась в основном для изучения рельефа и источников внутреннего строения кристаллического фундамента, и эти результаты использовались при поисках нефтегазоносных структур другими методами геофизики, например, гравиразведки. Только в тех случаях, когда в полого залегающих складках имеются слои намагниченных пород, когда локальные поднятия с залежами нефти и газа приурочены к очагам платформенного магнетизма или к приразломным зонам, отраженным в поле линейными магнитными максимумами, привлечение магниторазведки для прогнозирования нефтегазоносных структур было более эффективно.

Например, в пределах Южно-Каспийской впадины над месторождениями нефти и газа залегают отложения акчагыльского и апшеронского ярусов с повышенной намагниченностью. Поэтому над месторождениями, связанными с пологими антиклинальными складками, отмечается общее повышение магнитного поля, которое уменьшается от свода структур к ее крыльям в зависимости от погружения пород акчагыльского и апшеронского ярусов (рис. 65). Если породы на своде складок размыты, то отмечаются аномалии, картирующие крылья складок.

Район Южно-Каспийской впадины характеризуется тем, что в нем широко развито явление грязевого вулканизма, приуроченного преимущественного к зонам продольных разрывных нарушений антиклинальных складок, причем вулканы генетически связаны с залежами нефти и газа на глубине. В этих зонах происходит дробление пород, ферромагнитные минералы частично разрушаются или приобретают хаотическую ориентировку. Поэтому эти зоны выделяются небольшими отрицательными аномалиями магнитного поля, вытянувшимися вдоль линий нарушений. Грязевые вулканы выделяются изометричными отрицательными аномалиями интенсивностью 10–50 нТл.

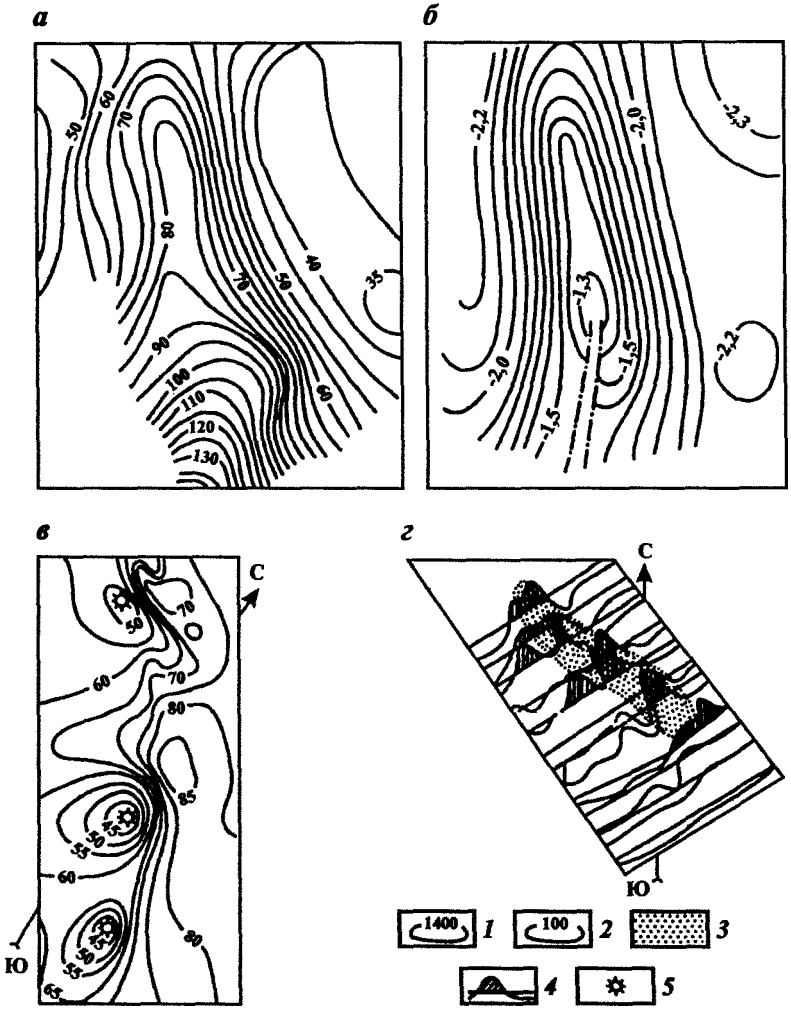


Рис. 65. Применение магниторазведки при поисках антиклинальных структур по А.А. Дзабаеву:

а – поле *T* (*нТл*); *б* – структурная карта по подошве акчагыльского яруса Южно-Куринского поднятия в акватории Каспийского моря; *в* – магнитные аномалии над грязевыми вулканами; *г* – магнитные аномалии над антиклиналью с размытым сводом: *1* – линии равных глубин в км; *2* – изодинамы *T* (*нТл*); *3* – области размыва свода; *4* – графики *T*; *5* – грязевые вулканы

Магнитные аномалии можно применить и при поисках солянокупольных поднятий, к краевым частям которых бывают приурочены месторождения нефти и газа. Например, на Украине контуры солянокупольных тел характеризуются мозаичными полями разных знаков (рис. 66), связанными с глыбами эффузивов, расколотых в процессе образования купола.

Магнитные аномалии в благоприятных случаях можно применить и при поисках рифовых тел. Рифогенные образования с высоким коэффициентом карбонатности практически немагнитны, тогда как породы глинисто-карбонатного бассейнового комплекса, а в большей степени отложения терригенного комплекса, занимающие внутренние части прогибов и составляющие межрифовый рельеф, отличаются повышенной магнитной восприимчивостью. Поэтому сокращение мощности терригенной толщи над рифами отмечается в магнитном поле локальными минимумами слабой интенсивности, например, в Актаныш-Чишминском прогибе Камско-Кинельской системе прогибов (рис. 67). В случаях, когда породы терригенного состава с повышенной магнитной восприимчивостью расположены над рифовым телом, над ними будут наблюдаться слабые максимумы магнитного поля (до 20 нТл), например, над нижнепермскими рифовыми массивами на территории Предуральского краевого прогиба.

В ряде районов рифовые тела приурочены к очагам платфор-

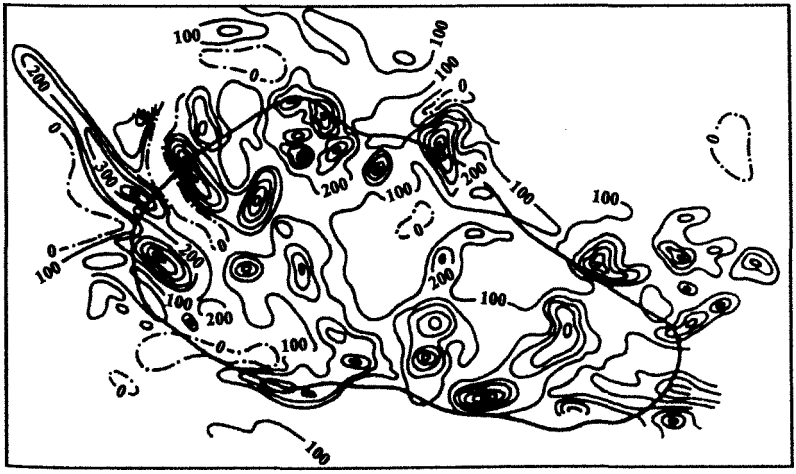


Рис. 66. Магнитное поле над соляным поднятием.
Изолинии даны в *нТл*. Жирной линией показан контур подошвы поднятия

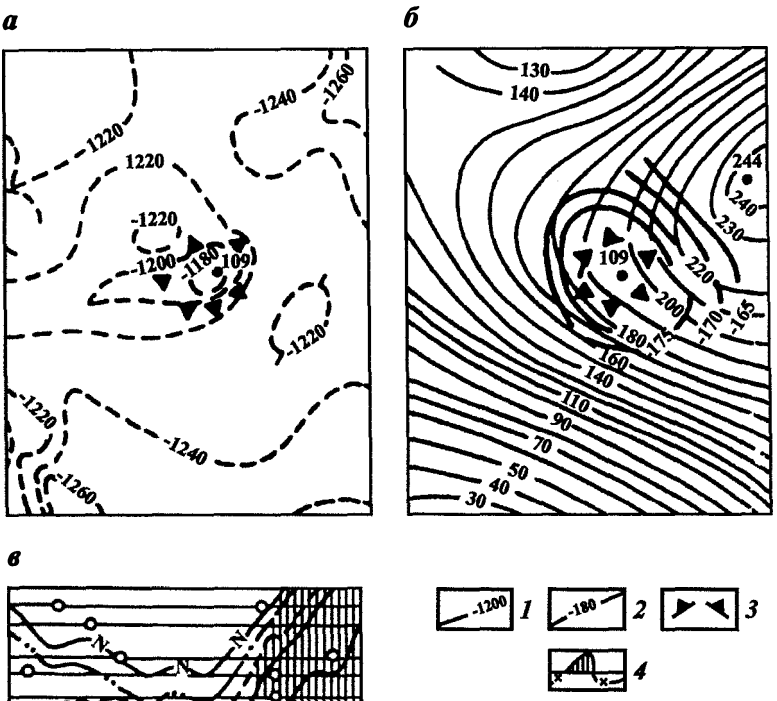


Рис. 67. Схемы магнитного поля Дмитриевского верхнедевонского рифа. Башкирская АССР (по В.Г. Мавричеву):
а – структура отражающего горизонта; *б* – изодинамы магнитного поля; *в* – графики локальных аномалий магнитного поля; *1* – изогипсы по отражающему горизонту в *м*; *2* – изогипсы кровли сакмарского яруса в *м*; *3* – контур рифогенного массива; *4* – графики локальных аномалий магнитного поля

менного магнетизма или к приразломным зонам, с которыми связаны цепочки положительных аномалий магнитного поля.

Во многих случаях обнаружение и выделение таких аномалий малой интенсивности стало возможным из-за существенного по-

вышения точности магнитометрической аппаратуры, а также из-за накопления новых данных о магнитных свойствах пород осадочной толщи, пород, вмещающих залежи нефти и газа. Эти причины расширили в последние годы возможности магниторазведки при поисках залежей углеводородов и дали возможность для прямого прогнозирования залежей нефти и газа.

Магнитные аномалии над месторождения нефти и газа зависят от наличия в породах магнитных минералов – магнетита, маггемита, гематита и др. Они вызваны влиянием следующих четырех зон рассмотренной выше модели месторождения нефти и газа – влиянием залежи и вмещающего ее коллектора, зоны восстановления, зоны субвертикальных неоднородностей и зоны окисления.

Магнитные аномалии от залежей обусловлены различными значениями магнитной восприимчивости углеводородов и законтурных вод, а также пород-коллекторов в зоне залежи и вне ее. Эти аномалии невелики – могут достигать 3–4 нТл и являются отрицательными.

Процессы в зоне восстановления приводят к уменьшению магнитной восприимчивости пород в ней по сравнению с породами вне зоны восстановления. Это уменьшение χ может достигать $(400-600)\cdot10^{-6}$ ед. СИ и более. Основными причинами уменьшения χ являются переход железистых соединений в зоне восстановления в более растворимые двухвалентные формы железа, что способствует их выносу к краям зоны или за ее пределы, и частичное восстановление оксидных и гидрооксидных форм железа до сульфидов, например, до пирита. В силу этих причин зона восстановления вызывает появление относительно отрицательных магнитных аномалий интенсивностью до десятков нанотесл.

В зоне окисления железистые соединения находятся в трехвалентном состоянии, что приводит к снижению их миграционных свойств. Поэтому значение магнитной восприимчивости в этой зоне выше, чем в зоне восстановления.

В последние годы, кроме того, установлено, что в областях, находящихся над залежами углеводородов, накапливается вторичный магнетит. Образование вторичного магнетита связывают с процессами жизнедеятельности особых бактерий, проникающих в породы вместе с атмосферными водами на глубины до 300 м и более (возможно, до 1500 м). Они поглощают углеводороды и способствуют образованию сероводорода. А сероводород, реагируя с обогащенными железом породами, образует в зависимости от его концентрации пирит и оксид железа. Последний, реагируя с гематитом, образует магнетит. В общем могут существовать и

другие пути образования и накопления вторичного магнетита над залежами.

Зона окисления, обладая повышенными значениями магнитной восприимчивости, способна вызывать положительные аномалии магнитного поля различной интенсивности в зависимости от значения магнитной восприимчивости пород законтурной части залежи.

Вторичный магнетит, который накапливается над залежами, вызывает пилообразные аномалии небольшой интенсивности, которые можно фиксировать только аппаратурой высокой точности (рис. 68). В США аэромагнитной съемкой, проведенной на небольшой высоте (100–120 м), закартированы многие известные нефтяные и газовые месторождения [7].

В зонах субвертикальных кольцеобразных неоднородностей под действием различных процессов, связанных с повышенной проницаемостью этих зон, нарушаются первоначальные магнитные свойства пород и увеличивается их неоднородность. Все это повышает изрезанность магнитного поля над этими зонами.

В целом под воздействием различных указанных выше факторов над месторождениями нефти и газа могут наблюдаться различные аномалии: относительные минимумы величиной до десятков нанотесл и знакопеременные аномалии, которые во всех случаях осложняются действием вторичного магнетита.

В настоящее время все еще остается дискуссионным вопрос об образовании магнитных аномалий над залежами нефти и газа. Пока все еще отсутствуют четкие физические представления о механизме образования этих аномалий над залежами. Но несомненно, что важная роль в образовании локальных магнитных

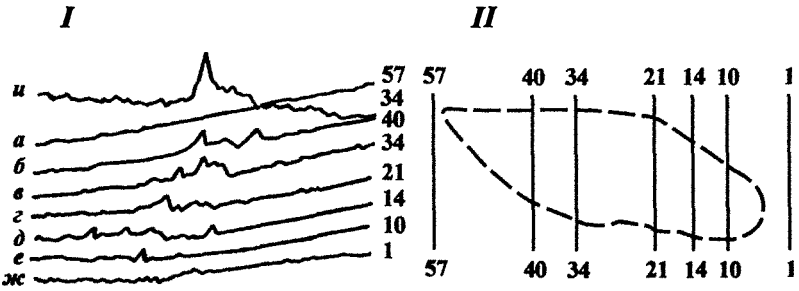


Рис. 68. Магнитные кривые (*а–ж*) по ряду профилей над нефтегазовым месторождением (США) и кривая (*и*) гамма-излучения по профилю 34 (*I*) и контур месторождения (*II*) (по Т. Дж. Доновану и др.)

аномалий над залежами принадлежит вторичному образованию магнитных минералов.

Во вторичном минералообразовании, кроме микробиологических процессов, большую роль играют процессы, связанные с мигрирующими из залежи углеводородными (C_nH_m) и неуглеводородными соединениями.

Наиболее важное значение среди них имеют метан CH_4 и сероводород H_2S. При этом минералы образуются во всем разрезе, но наиболее активно этот процесс происходит в верхних (до 1,5–2,0 км) терригенных отложениях, содержащих первичные железистые соединения (в частности, гематит Fe_2O_3). В этих отложениях под воздействием углеводородов образуются различные магнитные минералы (магнетит Fe_3O_4, магнитный пирротин Fe_7S_8, грейгит Fe_3S_4 и др.), а также и немагнитные минералы (пирит FeS_2, сидерит $FeCO_3$ и др.).

Магнитные минералы приводят к образованию в наблюденном поле локальных аномалий порядка 15–20 нТл, а иногда и несколько большей амплитуды.

На основании анализа накопленного геолого-геофизического материала составлена геомагнитная модель нефтегазового месторождения антиклинального типа, показанная на рис. 69 (по В.М. Березкину, А.Г. Будагову, В.Г. Филатову и др.).

Структура месторождения расположена над фундаментом с унаследованием его строения. Вторичное образование минералов происходит в основном в пласте, обогащенном гематитом (на рисунке – второй сверху).

Форма возможных локальных аномалий довольно различная. Некоторые из видов возможных аномалий показаны на рис. 69. Здесь кривая *1* «двугорбая», максимумы связаны с источниками, образованными при более интенсивной миграции углеводородов в субвертикальных зонах, чем в центральной части. Кривая *2* – «пилообразная» аномалия. Она связана с наличием отдельных, достаточно изолированных магнитоактивных тел. Кривая *3* – относительно спокойная положительная аномалия может быть связана с достаточно компактной намагниченностью отдельных объемов пород. Крива *4* – относительно отрицательная магнитная аномалия, довольно часто встречающаяся. Она может быть вызвана замещением магнитного минерала гематита над залежью в пласте (в области отрицательных значений аномалии) немагнитными минералами (пирит, сидерит). Положительная и отрицательная аномалии – кривые *5* и *6* являются аномалиями от фундамента – случаи, когда $\varkappa_1 > \varkappa_2$ и $\varkappa_1 < \varkappa_2$ ($\varkappa$ – магнитная восприимчивость).

Аномалии *5* и *6* относительно более интенсивные и протя-

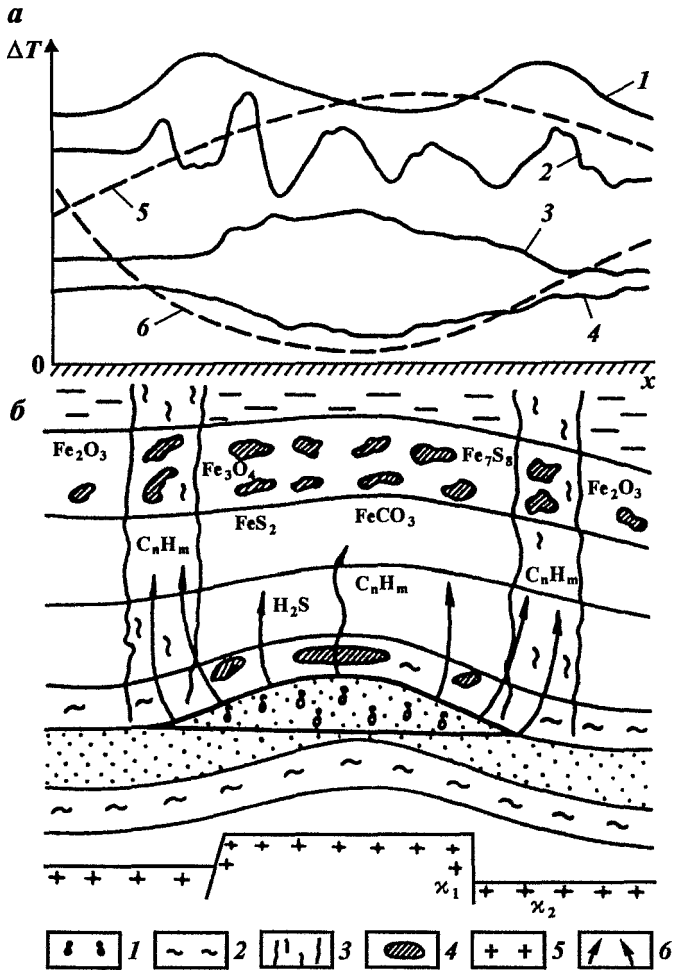


Рис. 69. Геомагнитная модель нефтегазового месторождения (по В.М. Березкину, А.Г. Будагову, В.Г. Филатову и др.):

а – возможные кривые ΔT на высоте полета (100–300 м): *1, 2, 3, 4* – кривые ΔT от вторичных минеральных форм; *5* – кривая ΔT от фундамента при $\chi_1 > \chi_2$; *б* – кривая ΔT от фундамента при $\chi_1 < \chi_2$; *6* – геологический разрез: *1* – нефтегазовая залежь; *2* – пласты-покрышки; *3* – зоны субвертикальных неоднородностей; *4* – вторичные минералы; *5* – фундамент; *6* – потоки углеводородов и других элементов

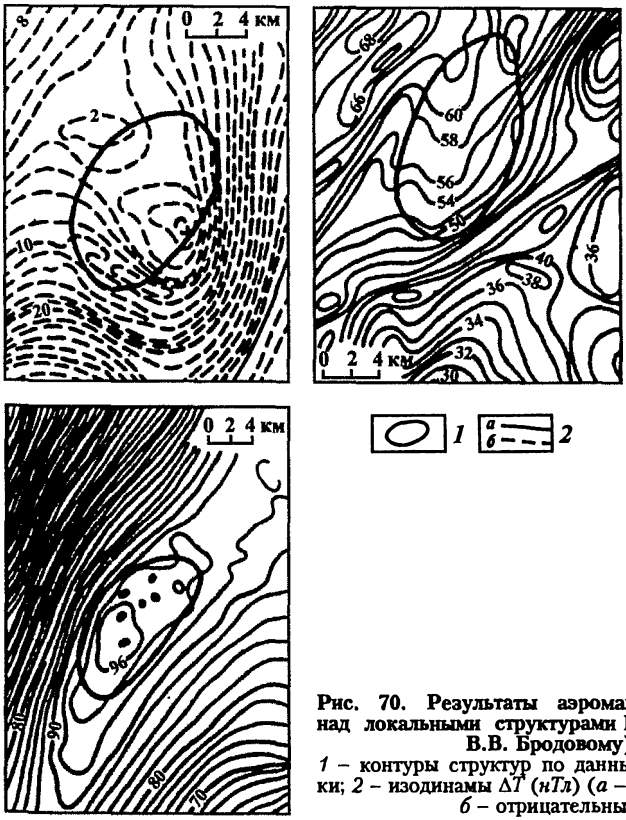


Рис. 70. Результаты аэромагнитной съемки над локальными структурами Мангышлака (по В.В. Бродовому):
1 – контуры структур по данным сейсморазведки; *2* – изодинамы ΔT (*нТл*) (*а* – положительные, *б* – отрицательные)

женные. Локальные аномалии магнитного поля, вызванные вторичными магнитными образованиями, будут наблюдаться на их фоне. Поэтому суммарная магнитная аномалия будет иметь относительно сложный вид.

На основании того, что магнитные аномалии над областью нахождения залежей нефти и газа являются относительно малыми, до их выделения необходимо учесть все поправки за соответствующие техногенные факторы, имеющие место в пределах месторождений нефти и газа – поправки за влияния буровых вышек, трубопроводов, железных дорог, обсадных колонн буровых скважин и т.д.

Роль магниторазведки особо значима в случаях унаследованности структурного плана продуктивных осадков рельефа фун-

дамента. Так, в Западно-Сибирском регионе установлена устойчивая корреляционная связь между нефтеперспективными структурами и магнитными аномалиями – минимумами в 20–100 нТл, обусловленными приподнятыми блоками, сложенными слабомагнитными гранитоидами. В условиях Мангышлака унаследованные структуры осадочного чехла типа валов и впадин отмечаются максимумами и минимумами магнитного поля до ±100 нТл. Высокоточной съемкой (0,5–1 нТл) в пределах поднятий выявлены небольшие выступы допермского фундамента и соответствующие им унаследованные локальные структуры, которым отвечают локальные аномалии до 3–4 нТл или раздувы, изгибы изолиний с амплитудой 6–8 нТл (рис. 70) (В.В. Бродовой).

Литература: [7, 14].

МЕТОДИКА ГРАВИРАЗВЕДОЧНЫХ И МАГНИТОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

1. НАЗЕМНЫЕ ГРАВИРАЗВЕДОЧНЫЕ И МАГНИТОРАЗВЕДОЧНЫЕ РАБОТЫ

Методика проведения гравиразведочных и магниторазведочных работ с целью поисков и разведки полезных ископаемых определяется поставленной геологической задачей.

Перед гравитационной и магнитной съемками, в частности, могут быть поставлены следующие задачи.

1. Тектоническое и литолого-петрографическое районирование изучаемой территории при геологическом картировании и составлении прогнозных карт. Объектами исследования при этом могут быть кристаллические щиты, массивы, поднятия фундамента, депрессии, области накопления мощных толщ осадочных отложений, границы платформ и геосинклиналий, глубинные разломы земной коры.

2. Выделение зон и участков, перспективных для постановки на них более детальных геологических и геофизических работ. Объектами исследования при этом могут быть сложенные горными породами, отличающимися по своей плотности или намагниченности, толщи, свиты или горизонты, являющиеся маркирующими в литолого-петрографическом отношении, представляющие собой крупные залежи полезных ископаемых или вмещающие и контролирующие месторождения полезных ископаемых (нефтегазоносные, рудоносные, угленосные и др.); интрузии и прилегающие к ним зоны изменения пород; эффузивные образования; литолого-стратиграфические и тектонические контакты пород с различной плотностью или намагниченностью; особенности погребенного рельефа тектонического или эрозионного происхождения.

3. Выявление локальных структурных форм, благоприятных для скопления полезных ископаемых, а также непосредственно локальных залежей полезных ископаемых (железных, сульфид-

ных, медно-никелевых, оловянных, хромитовых, полиметаллических и других руд, бокситов и др.).

4. Определение в особо благоприятных случаях формы, элементов залегания и размеров залежи полезных ископаемых с оценкой запасов, а также формы и элементов залегания структуры, вмещающей или контролирующей залежь.

Характеристика горнотехнических условий эксплуатации месторождений.

Эффективность применения гравиразведки и магниторазведки определяется следующими факторами:

1) разностью плотностей или намагниченностей изучаемого объекта и вмещающих пород или контактирующих сред, если объектом изучения являются их границы;

2) размерами объекта и глубиной его залегания;

3) наличием и характером других объектов, вызывающих гравитационные или магнитные аномалии в пределах территории исследования, являющихся помехами для изучения основного объекта;

4) формой и элементами залегания объекта относительно поверхности, на которой производятся измерения;

5) для гравиметрической разведки – характером рельефа поверхности, на которой производятся измерения, для магнитной разведки рельеф местности имеет меньшее значение.

Благоприятными условиями для применения гравиметрической и магнитной разведок является сочетание этих факторов, обеспечивающих уверенное выделение аномалий, обусловленных исследуемым объектом. Гравиметрическая и магнитная разведки будут тем эффективней, чем больше избыточная (недостаточная) плотность или намагниченность, круче наклон границ раздела, больше размеры изучаемых тел, меньше глубина их залегания и спокойнее поверхностный рельеф.

При проведении гравиметрической и магнитной разведок необходимо:

1) возможно более полное изучение плотности, пористости и магнитных свойств горных пород и полезных ископаемых района с использованием всех имеющихся данных, а в случае недостаточности данных – проведение специальных дополнительных определений;

2) тщательное изучение всех имеющихся геологических и геофизических сведений о геологическом строении района и вскрытых залежей полезных ископаемых;

3) исследование генетического типа месторождений для установления наиболее характерной морфологии залежей, геологической обстановки, генезиса, характера вмещающих пород и их из-

менений в процессе образования залежей, возможной связи рудообразования с интрузиями определенного состава и тектоническими структурными формами погребенного рельефа и др.;

4) изучение промышленного типа месторождений для определения требований к размерам промышленных рудных тел (запасам), соотношений между этими телами и глубиной их залегания, предельной глубины залегания с целью использования этих данных для оценки предполагаемой интенсивности гравитационных и магнитных аномалий, вызываемых этими телами.

Для наиболее уверенного и полного решения геологических задач предпочтительно применять гравиразведку и магниторазведку в комплексе с другими геофизическими методами. Например, при региональных исследованиях целесообразно сочетать гравиразведку с аэромагнитной съемкой, региональными сейсмическими профилями, сейсмозондированиями и различными модификациями электроразведки. При поисках нефтегазовых структур рационально использовать гравиразведку с сейсморазведкой. При поисках рудных тел эффективен комплекс гравиразведки, магниторазведки и электроразведки.

В методику проведения гравитационных и магнитных съемок входит решение следующих вопросов: выбор вида съемки, расположение пунктов и профилей наблюдений по площади съемки, точность и контроль наблюдений, расположение опорных пунктов и густота сети рядовых наблюдений, топографо-геодезическая привязка, изображение результатов съемки и масштаб отчетных материалов. Все эти вопросы тесно связаны друг с другом. Действующая ныне инструкция по гравиметрической съемке в качестве ведущего признака классификации гравиметрических съемок устанавливает сечение изоаномал отчетной карты, которое является определяющим для решения той или иной геологической задачи.

Для магнитных съемок основным классификационным признаком инструкцией установлен условный масштаб, который выбирают в зависимости от поставленных на разрешение геологических задач. При этом масштаб отчетной карты может и не совпадать с условным масштабом, однако по возможности следует стремиться к тому, чтобы эти масштабы совпадали.

Такое различие в подходе к классификации съемок объясняется некоторыми особенностями магнитных измерений по сравнению с гравитационными.

При проведении магниторазведочных работ, как правило, приборная точность и точность вычисления аномалии совпадают, и вместо семи градаций точности, устанавливаемых для гравитационных съемок, которым в соответствие может быть поставлено

семь градаций густоты сети наблюдений, можно ограничиться тремя градациями точности, а именно:

съемки с пониженной точностью со средней квадратической погрешностью от ±15 нТл;

съемки средней точности со средней квадратической погрешностью в пределах ±(5–15) нТл;

съемки повышенной точности с погрешностью, меньшей чем 5 нТл.

Густота сети в магниторазведочных работах в соответствии с геологическими задачами, решаемыми ими, имеет более широкий диапазон, чем в гравиразведке, и большую дробность. Поэтому ее трудно поставить в прямое соответствие с точностью, а следовательно, и с сечением изолиний, как это принято для гравитационных съемок.

При исследовании магнитных аномалий большой интенсивности относительная точность магнитометров составляет несколько процентов, а иногда и доли процента, поэтому тщательного выполнения описываемых ниже методических приемов при таких съемках не требуется. В случае исследования слабых аномалий порядка первых десятков нанотесла методические приемы, необходимые для достижения высокой точности, в равной мере относятся как к гравитационным, так и к магнитным съемкам.

Литература: [3, 5, 6, 7, 14].

2. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ И ПУНКТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Расположением профилей и пунктов наблюдений определяется характер съемки. Предпочтительнее при этом площадная съемка, которая дает наиболее полную характеристику гравитационного или магнитного поля и позволяет построить карту изолиний измеряемого элемента поля на всю площадь исследования.

При этом площадная съемка может быть равномерной, когда сеть наблюдений близка к квадратной, и неравномерной в том случае, когда известно, что подлежащие исследованию структуры вытянуты по какому-либо направлению. В последнем случае вкрест предполагаемого простирания прокладывается сеть профилей, пункты наблюдений на которых располагаются гуще, чем расстояние между профилями. Соотношение расстояний между профилями и пунктами наблюдений на них для достоверности построения карты изолиний не должно быть меньше 1:5. Для наземных магнитных точек для большинства случаев допускается небольшое уменьшение этого расстояния.

В некоторых случаях проводится съемка по отдельным профилям, отстоящим один от другого на таком расстоянии, на котором построение достоверной карты изолиний невозможно. Такая съемка называется профильной. Профильную съемку можно проводить при рекогносцировке для выяснения возможностей метода, а также при детализации, когда прокладываются отдельные профили повышенной точности с целью количественной интерпретации результатов съемки.

3. СЕЧЕНИЕ ИЗОЛИНИЙ И ТОЧНОСТЬ НАБЛЮДЕНИЙ

При оценке точности следует различать: инструментальную точность, т.е. ту точность, которую способен дать прибор при данных условиях проведения работ, и точность определения аномального значения в пункте наблюдения, включающую в себя точность определения аномального значения в любой точке исследуемой площади, зависящую от ошибки интерполяции.

Ввиду того, что рельеф поверхности на показания магнитометра практически не влияет, а погрешности определения аномального вертикального градиента и нормального поля относительно невелики, можно считать, что для магниторазведки точность определения аномального значения и инструментальная точность совпадают.

Точность интерполированного значения является определяющей, так как интерпретация проводится по картам или профилям, на которые нанесены интерполированные значения аномалий. Точность интерполированного значения связана с сечением изолиний карты соотношением $\Delta = 2{,}5\varepsilon_{и}$, где $\varepsilon_{и}$ – средняя квадратическая погрешность интерполированного значения аномалии.

Однако основная погрешность, которая не может быть уменьшена или устранена юстировкой прибора в полевых условиях, это погрешность за счет сползания нуль-пункта. Влияние этой погрешности учитывается специальными методическими приемами ведения гравиразведочных и магниторазведочных работ.

Надежное определение характера изменения нуль-пункта как при измерениях с гравиметром, так и при магнитных съемках и правильный учет этого влияния являются важнейшими моментами, определяющими итоговую погрешность. Кроме того, что само смещение нуль-пункта в силу ряда причин происходит нелинейно (а при введении поправок за изменение нуль-пункта

обычно принимается линейное изменение) и незакономерно от рейса к рейсу, в поправку за нуль-пункт входят все недоучтенные систематические и случайные погрешности, рассмотренные выше.

Смещение нуль-пункта определяется либо по разностям известных заранее значений поля на опорных пунктах и значений поля на тех же пунктах, определенных из наблюдений в рейсе, либо по повторным наблюдениям в рейсе. При этом значения на опорных пунктах должны быть определены в 2–2,5 раза, в крайнем случае не менее чем в 1,5 раза точнее рядовых. Это достигается многократными наблюдениями, использованием при разбивке опорной сети нескольких приборов и применением относительно скоростных видов транспорта (самолеты, вертолеты, автомашины, катера).

При проведении магнитных съемок пониженной точности, когда создание опорной сети не обязательно, смещение нуль-пункта учитывается по изменениям в начале рейса и в конце его на контрольном пункте, установленном по возможности в спокойном магнитном поле, близком к нормальному.

Определить величину инструментальной погрешности можно путем постановки независимых контрольных наблюдений, выполняемых либо специальными контрольными рейсами, либо попутно при проведении смежных рейсов. Контрольные наблюдения проводятся в количестве от 5 до 10 % от общего числа пунктов, но не менее 50, и должны равномерно располагаться по площади съемки, захватывая, по возможности, середины рейсов, так как наиболее вероятно получить наибольшую погрешность именно в середине рейса.

Средняя квадратическая погрешность по независимым контрольным наблюдениям вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\sum \delta^2/(m-n)},$$

где δ – отклонение от среднего значения; n – число повторенных точек; m – число наблюдений на них. В случае двойных наблюдений эта формула преобразуется к виду

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\sum \Delta^2/2n},$$

где Δ – отклонения между двумя значениями поля на данной точке. Погрешность определения аномального значения складывается из инструментальной погрешности, погрешности привязки местной опоры к исходным опорным пунктам, погрешностей определения превышений рельефа, погрешностей определения пла-

нового положения точек наблюдений и рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_{\text{п}} = \pm\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2},$$

где ε_1 – средняя квадратическая ошибка наблюдений силы тяжести (инструментальная погрешность); ε_2 – средняя квадратическая ошибка привязки местной опоры к исходным опорным точкам; ε_3 – средняя квадратическая ошибка, зависящая от ошибки определения высот пунктов наблюдений и окружающего рельефа; ε_4 – средняя квадратическая ошибка, зависящая от ошибки определения координат.

Как уже указывалось выше, погрешности при проведении магнитных съемок не имеют существенного значения и при проведении съемок пониженной и средней точности могут не учитываться.

Средняя квадратическая ошибка, зависящая от ошибки определения высот наблюдений, может быть определена следующим образом.

Дифференцируя формулу поправок Буге и переходя в соответствии с теорией ошибок от дифференциалов к среднеквадратическим ошибкам, получим

$$\varepsilon_3 = (0{,}3086 - 0{,}0419\ \sigma)\varepsilon_{\text{н}}.$$

Если, например, принять, что $\sigma = 2{,}3$ г/см^3 и среднеквадратическая ошибка определения высоты $\varepsilon_{\text{н}} = 0{,}1$ м, то, согласно формуле, средняя квадратическая ошибка, зависящая от ошибки определения высоты, будет равна 0,02 мГал.

Подобным образом будем рассуждать при определении средней квадратической ошибки, зависящей от ошибки определения координат. Для этого продифференцируем формулу нормального значения силы тяжести Гельмерта 1901–1909 гг.

$$d\gamma_0 = 978030\,(0{,}005302 \sin 2\varphi - 0{,}000007 \sin 4\varphi)\, d\varphi.$$

Переходя к среднеквадратическим погрешностям, будем иметь

$$\varepsilon_k = 978030\sqrt{0{,}005302^2 \cdot \sin^2 2\varphi - 0{,}000007 \sin^2 4\varphi}\,\varepsilon_\varphi.$$

Максимальное значение погрешности получим при $\varphi = 45$:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_\varphi\, 5186,$$

где ε_φ – среднеквадратическая погрешность определения широты в радианах. Переходя к угловым секундам, получим, что для это-

го случая ошибка в определении широты на 1 сек даст ошибку в определении нормального значения силы тяжести 0,026 мГал.

Аналогичным образом оценивается погрешность при учете окружающего рельефа. Так, для зоны, ограниченной радиусом 1000 м, при среднем угле наклона рельефа, равном примерно 5°, при погрешности определения превышений в 5 м получим погрешность определения поправки за рельеф, примерно равную 0,04 мГал. При этом наибольшая погрешность будет для центральной зоны, ограниченной небольшим радиусом. Следовательно, определение высот для центральной зоны должно вестись особенно тщательно.

Как отмечалось выше, повышение точности наблюдений на пунктах рядовой сети при соблюдении всех прочих условий, определяемых техническими требованиями по обращению с приборами и по режиму их эксплуатации, может быть достигнуто либо путем увеличения кратности наблюдений на пунктах, либо увеличением количество приборов.

Второй путь и технически, и экономически более выгодный, так как, во-первых, увеличение кратности наблюдений ведет к увеличению продолжительности рейсов, а следовательно, к понижению точности учета изменения нуль-пункта, во-вторых, при этом не уменьшается роль систематических для данного прибора погрешностей, в-третьих, увеличение кратности ведет к снижению производительности по сравнению с увеличением количества приборов, так как основное время расходуется на перемещение между пунктами, и, в-четвертых, увеличение кратности, ввиду увеличения при этом пройденного пути, ведет к увеличению транспортных затрат.

При наблюдениях с несколькими приборами можно добиться рационального размещения опорных пунктов и в некоторых случаях уменьшения их количества, совмещая опорную сеть, создаваемую до начала работ, с узловой сетью, создаваемой в процессе работы, либо разбивая опорную сеть в два приема – редкую, до начала работ, и более густую после окончания их.

4. СЕТЬ НАБЛЮДЕНИЙ

Выбор оптимальной густоты сети наблюдений является одним из сложнейших и до некоторой степени еще дискуссионных вопросов методики гравиразведочных и магниторазведочных работ.

Большой практический опыт, накопленный при проведении съемок в различных геологических условиях, позволил сформулировать некоторые основные положения и установить рацио-

нальное соотношение между точностью и густотой сети наблюдений.

Проектная точность съемки (средняя квадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести) выбирается в зависимости от интенсивности предполагаемых или исследуемых аномалий, а также от условий работ и заданного масштаба съемки.

При площадной съемке средняя квадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести должна составлять 0,4 интервала сечения изоаномал отчетной карты, в горных районах – 0,5 интервала сечения изоаномал.

Средняя квадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести или ее производных не должна превышать при поисковой съемке 1/5, а при региональной – 1/3 минимальной величины локальных аномалий гравитационного поля, создаваемых искомыми объектами.

По интерпретационным профилям точность определения аномалий должна быть выше.

Для решения поставленных задач интервал сечения изоаномал отчетной карты при региональных и детальных поисковых съемках должен быть меньше амплитуды исследуемых аномалий, а при детальных разведочных съемках – в 2–3 раза меньше амплитуды исследуемых аномалий.

Профили наблюдений при площадной съемке, как правило, должны быть прямолинейными. Они ориентируются вкрест простирания изучаемых объектов и связываются между собой не менее чем двумя-тремя профилями.

При наличии на исследуемой площади профилей других геофизических методов и бурения гравиметрические профили должны быть совмещены с ними.

Густота сети пунктов наблюдений зависит от задач съемки, размеров и интенсивности ожидаемых аномалий и выбранного сечения изоаномал отчетной карты. Густота сети должна обеспечивать выявление искомых аномалий силы тяжести и ее производных, представляющих интерес для поисков и разведки.

Аномалия силы тяжести считается достоверной, если она выделена не менее чем на трех пунктах различных звеньев и имеет амплитуду, не меньшую сечения изоаномал карты. В случае корелируемости более слабых аномалий на трех и более профилях они могут считаться достоверными.

На участках выявленных аномалий рекомендуется сгущение сети пунктов наблюдений. Сгущение сети рекомендуется также для подтверждения аномалий, соизмеримых с точностью наблюдений.

Таблица 6

Масштаб отчетных карт и графиков	Сечение изоаномал, мГал	Средняя квадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести в редукции Буге, мГал	Средняя квадратическая погрешность определения наблюденных значений силы тяжести, мГал	Полная погрешность интерполяции, мГал	Средняя квадратическая погрешность определения высот, м	Средняя квадратическая погрешность определения координат пунктов относительно Государственной геодезической сети, м	Густота сети	
							Число пунктов на 1 кв. км	Расстояние между пунктами при наблюдениях по профилям, м
А. *Для равнинных районов*								
1:500 000	5	±1,5	±0,5	±2,0	±5,0	±200	0,04–0,10	2500–5000
1:200 000	2	±0,8	±0,4	±1,0	±2,5	±100	0,10–0,25	1000–2000
1:100 000	1	±0,4	±0,3	±0,5	±1,2	±80	0,25–1,00	500–1000
1:50 000	0,50	±0,20	±0,15	±0,35	±0,70	±40	2–3	100–500
	0,25	±0,10	±0,07	±0,20	±0,35	±40	4–50	50–250
1:25 000	0,25	±0,10	±0,06	±0,20	±0,35	±20	12–60	50–250
	0,20	±0,08	±0,06	±0,15	±0,25	±20	16–80	20–100
1:10 000	0,20	±0,08	±0,06	±0,15	±0,20	±1	20–100	20–100
	0,10	±0,04	±0,03	±0,07	±0,10	±4	25–200	10–50
1:5000	0,10	±0,04	±0,030	±0,07	±0,10	±2	50–250	10–50
	0,05	±0,02	±0,015	±0,03	±0,05	±2	100–500	5–25
Б. *Для горных районов*								
1:500 000	5	±2,0	±0,5	±3,0	±3,00	±120	0,04–0,10	2500–5000
1:200 000	2	±1,0	±0,40	±1,50	±3,00	±100	0,10–0,25	1000–2000
1:100 000	1	±0,50	±0,25	±0,70	±1,80	±100	0,25–1,0	500–1000
1:50 000	1	±0,50	±0,25	±0,70	±1,60	±50	1,0–10,0	100–500
	0,50	±0,25	±0,12	±0,35	±0,90	±50	2–30	50–250
1:25 000	0,50	±0,25	±0,12	±0,35	±0,90	±25	4–50	50–250
	0,25	±0,12	±0,06	±0,20	±0,45	±25	12–60	20–100
1:10 000	0,20	±0,10	±0,06	±0,15	±0,25	±5	20–100	20–100
1:5000	0,10	±0,05	±0,03	±0,07	±0,12	±2	50–250	10–50

Аномалия на профиле считается достоверной, если она подтверждается не менее чем тремя проконтролированными пунктами.

На интерпретационных профилях шаг наблюдений устанавливается таким, чтобы изменение аномалий силы тяжести между двумя соседними пунктами не превышало тройной погрешности их определения.

Соотношения между масштабом отчетных карт и графиков, сечением изоаномал, среднеквадратической погрешностью определения аномальных и наблюденных значений силы тяжести, густота пунктов наблюдений для равнинных и горных районов приведены в табл. 6.

Приведенные в таблице погрешности не включают погрешностей исходных опорных пунктов.

Под горными понимаются районы с резкими формами рельефа при наличии относительных превышений в 400 м и более в пределах трапеции масштаба 1: 25 000.

Требование к густоте сети при проведении магниторазведочных работ, как указывалось выше, формально определяется условным масштабом (табл. 7).

Для систематического контроля за техническим состоянием магнитометров и в качестве исходной точки, относительно которой измеряют приращения измеряемого элемента магнитного поля, вблизи базы партии выбирают контрольный пункт или контрольную точку, причем по возможности в нормальном поле. Измерения на этом пункте проводят перед уходом с базы на

Таблица 7

Масштабы магнитных съемок

Масштаб съемки	Категория масштаба	Расстояние между маршрутами (профилями), м		Расстояние между точками наблюдений для наземных съемок, м
		аэромагнитная съемка	наземная съемка	
1:2 500 000	Мелкий	25 000	–	–
1:2 000 000	»	20 000	–	–
1:1 000 000	»	10 000	–	–
1:500 000	»	5000	–	–
1:200 000	Средний	2000	–	–
1:100 000	»	1000	1000	100–200
1:50 000	Крупный	500	500	50–100
1:25 000	»	250	250	20–50
1:10 000	»	100	100	10–40
1:5000	»	–	50	5–20
1:2000	»	–	20	5–10
1:1000	»	–	10	2–5

съемку и по возвращении со съемки. В качестве опорного значения поля на контрольном пункте для последующего приведения к нему наблюдений на рядовых пунктах принимают среднемесячное значение поля на нем.

Для выполнения всех высокоточных магнитных съемок необходимо создать в обязательном порядке опорные сети. Основные требования к ним такие же, как и в случае гравиметрических измерений.

Для съемок средней точности расстояние между опорными точками должно быть таким, чтобы наблюдатель в процессе рядовой съемки мог не реже чем через каждые 2–3 часа заходить на опорные точки для контрольных наблюдений. Эти наблюдения должны сопровождаться учетом вариаций магнитного поля.

Литература: [3, 5, 6, 7, 14].

5. СЪЕМКИ АЭРОМАГНИТНЫЕ

Как известно, современная высокоточная аэромагниторазведка решает широкий круг геологических задач. В благоприятных условиях (спокойный рельеф, невысокие градиенты магнитного поля и др.) современные аэромагнитометры позволяют выявлять и прослеживать аномалии амплитудой 0,7–2,0 нТл и количественно интерполировать аномалии 5 нТл и выше.

Методика аэромагнитной съемки отличается от методики наземной магнитной съемки и поэтому рассматривается отдельно. Эти различия обусловлены тем, что наблюдения составляющих магнитного поля проводятся непрерывно на некоторой высоте над поверхностью при значительной скорости движения магнитометра. Высота полета, межмаршрутные расстояния и масштаб съемки составляют основу методики аэромагнитной съемки и устанавливаются в зависимости от поставленной геологической задачи. В табл. 8 даны принятые инструкцией соотношения между высотой полета, межмаршрутными расстояниями и категорией масштаба в зависимости от решаемой геологической задачи.

Выбор высоты полета – один из наиболее трудных моментов методики аэромагнитной съемки. В общем случае при выборе высоты полета должны учитываться глубина залегания магнитных пород, размеры и интенсивность аномалий, точность и скорость записи магнитометра, тип самолета и его скорость, строение рельефа местности, способ плановой привязки маршрутов и др. Нередко эти требования противоречивы и даже взаимоисключаются. Поэтому не существует универсального правила для выбора высоты полета. В каждом отдельном случае необходимо

Таблица 8

Задачи и особенности аэромагнитных съемок в районах разного геологического строения

Район работ	Средняя квадратическая погрешность съемки, нТл	Решаемая геологическая задача	Масштаб съемки	Характерная высота полета, м	Система залета площадей
Депрессия с глубокопогруженным кристаллическим основанием и мощной толщей осадочных пород	0,5–5	Картирование осадочных пород, структур и полезных ископаемых осадочного комплекса, изучение рельефа и состава фундамента	1:200 000–1:10 000	100–300	Полеты на постоянной барометрической высоте
Геологически закрытый с осадочным комплексом мощностью 25–300 м	0,5–5	Картирование пород и структур фундамента, реже осадочных пород, прямые и косвенные поиски руд	1:200 000–1:10 000	50–100	То же
Геологически открытый со слабомагнитными породами и с небольшими градиентами магнитного поля	0,5–5	Картирование, прямые и косвенные поиски руд	1:50 000–1:10 000	50–300	В зависимости от рельефа, особенностей магнитного поля и высоты полетов
Геологически открытый с высокими градиентами магнитного поля	2–10	Картирование, прямые и косвенные поиски руд	1:50 000–1:10 000	100–1000	То же
Район развития траппов и лавовых покровов	2–15	Картирование, прямые и косвенные поиски руд, реже изучение подстилающих пород и их структур, поиски трубок взрыва	1:50 000–1:10 000	100–1000	»

Таблица 9

Местность	Минимально допустимая высота полета (безопасная высота), м
Равнинная, холмистая, лесистая и горные равнины (плато) с колебаниями высот рельефа до 200 м	25
Холмистая и горная равнины (плато) с колебаниями рельефа от 250 до 500 м	50
Пересеченная горная местность с колебаниями высот свыше 500 м	75
Местность с абсолютной высотой более 2000 м	100

найти оптимальное решение, наилучшим образом удовлетворяющее многим требованиям одновременно, чтобы в конечном счете была успешно выполнена поставленная геологическая задача.

Межмаршрутные расстояния также зависят от перечисленных факторов. Таким образом, высота полета и межмаршрутные расстояния должны выбираться на основании опыта съемок на аналогичных территориях или на основании рекогносцировочных

Таблица 10

Виды аэромагнитных маршрутов

Маршрут	Обозначение	Назначение маршрута и особенности его выполнения
Рядовой	РМ	Основной маршрут (профиль) площадной съемки
Расчетный	РЧМ	Специально для количественной интерпретации аномалий; выполняют через эпицентры аномалий (вкрест их простирания); горизонтален
Повысотный расчетный	ПРЧМ	Для изучения вертикального градиента магнитного поля и выбора высоты полетов; горизонтален; высоты последовательно удваивают (например, 100; 200; 400 м)
Повторный	ПМ	Для внутренней увязки, если создание опорных сетей невозможно; съемку на маршруте выполняют 2 раза или более; располагается на участке съемки; выбирают в нормальном поле
Контрольный	КМ	Для проверки аппаратуры; вид ПМ; располагают на подлете к участку
Опорный	ОМ	Для внутренней увязки; примерно ортогонален к РМ; выбирают по возможности в нормальном поле; залет выполняют 2 раза и более
Связующий	СВМ	Связывают ОМ в опорную сеть, например, если ОМ создают в форме замкнутых полигонов по правилам, разработанным во ВНИИГеофизике

полетов на разных высотах. Этот выбор ограничен требованиями инструкции, в которой обобщен большой опыт проведения магниторазведочных работ в различных геологических и орографических условиях.

Следует обращать внимание на выбор высоты полета при крупномасштабных съемках, особенно в горной местности, где повышается требование обеспечения безопасности полета.

Нормами установлены следующие минимально допустимые истинные высоты полетов над рельефом местности, препятствиями и вершинами деревьев (табл. 9).

В этих условиях съемки выполняются либо с обтеканием рельефа на минимально допустимой истинной высоте, либо вдоль горизонталей рельефа. В последнем случае самолет (вертолет) летит по криволинейному маршруту, близкому к направлению горизонталей, отображающих рельеф местности, на одной абсолютной высоте.

Основные типы маршрутов, выполняемых при аэромагнитной съемке, указаны в табл. 10.

Для площадных съемок, выполняемых прямолинейными параллельными маршрутами, масштаб М можно определить по формуле [7]: $M = 1/100\ d$, где d – расстояние в метрах между маршрутами. Для сложных видов аэромагнитных съемок, в том числе с криволинейными маршрутами, масштаб можно определить по формуле

$$M = L/100\ 000 = l/100\ 000,$$

где L – общее число километров рядовых маршрутов на участке площадью S (км^2); l – плотность съемки (среднее число километров рядовых маршрутов, приходящихся на 1 км^2 площади съемки).

Диапазон оптимальной протяженности маршрутов составляет 30÷100 км.

Литература: [5, 7, 14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Найдем силу тяжести на поверхности сфероида. Так как на уровенной поверхности сила тяжести направлена во всех точках по нормали в сторону увеличения поля, то

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial \rho}\cos(\rho, n).$$

Здесь ρ – это направление в центр масс Земли, а угол между направлением ρ и плоскостью экватора равен геоцентрической широте φ; $\vec{n}$ – внешняя нормаль, а угол между направлением $\vec{n}$ и плоскостью экватора равен географической широте φ'. Разность $\varphi'-\varphi$ достигает максимального значения в 11′6 под широтой 45°, причем $\cos 11'6 = \cos(\rho, n) = 0{,}999995$. Поэтому можно записать

$$g \approx -\partial W/\partial \rho.$$

Дифференцируя выражение потенциала силы тяжести на поверхности земного сфероида (двухосный элипсоид вращения) по ρ [15], получим

$$W = G\frac{M}{\rho} + \frac{G\mu a^2}{2\rho^3}(1-3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2\rho^2}{2}\cos^2\varphi. \qquad (1)$$

Отбрасывая члены малости второго порядка, после небольших преобразований получим

$$g = \frac{GM}{a^2}[1+3m-q+(2q-3m)\sin^2\varphi],$$

где a – радиус экватора; μ – воображаемая добавочная масса, расположенная вдоль земного экватора,

$$\mu/2M = m, \quad \omega^2 a^3/GM = q.$$

Здесь $q = \omega^2 a / \frac{GM}{a^2}$ представляет собой отношение центробежной силы на экваторе к силе притяжения шара массы M на земном экваторе (с точностью до малых второго порядка q является отношением центробежной силы к силе тяжести на земном экваторе).

На экваторе $\varphi = 0$ и поэтому значение силы тяжести на экваторе равно

$$g_e = \frac{GM}{a^2}(1 + 3m + q).$$

Тогда

$$g = g_e(1 + \beta \sin^2 \varphi), \qquad (2)$$

где

$$\beta = 2q - 3m.$$

Используя коэффициент сжатия Земли α, получим

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha. \qquad (3)$$

Значение β можно определить, используя значение силы тяжести на полюсе g_p, при $\varphi = 90°$:

$$\beta = (g_p - g_e)/g_e.$$

Поэтому β – это относительный избыток силы тяжести на полюсе по сравнению с экватором. Формулы (2), (3) составляют теорему Клеро. Первая из них определяет закон нормального распределения силы тяжести на поверхности сфероида (нормального сфероида), а вторая определяет сжатие земного сфероида через величину g.

Уравнение этого типа можно получить также, предположив, что Земля – это трехосный эллипсоид с малым экваториальным сжатием.

Коэффициенты подобных формул определяют по данным наблюдений на многих пунктах земной поверхности, пользуясь способом наименьших квадратов. Этим добиваются, во-первых, уменьшения влияния ошибок наблюдений, во-вторых, и самое главное, уменьшения влияния местных (локальных) аномалий, связанных с различными неоднородностями в земной коре. Подставляя найденные таким способом численные значения коэффициентов в исходное равенство, получим формулу, определяю-

щую распределение значений ускорения свободного падения на поверхности некоторой идеальной теоретической Земли, соответствующей выбранной модели. Естественно, эта идеальная Земля будет тем ближе к реальной, чем ближе приближенное выражение потенциала силы тяжести (которое берется за основу при выводе значений g) к точному выражению потенциала силы тяжести реальной Земли.

Вычисляемые по подобным формулам значения силы тяжести для поверхности теоретической Земли называют нормальными значениями силы тяжести и обозначают в отличие от измеренных через γ.

Формулы для определения нормальных значений силы тяжести были получены многими авторами (Гельмертом, Кассинисом, И.Д. Жонголовичем, Гейсканеном, Н.П. Грушинским и др.), но практическое применение нашли лишь две из них – формула Гельмерта 1901–1909 гг. для эллипсоида вращения и формула Кассиниса 1930 г., принятая в качестве международной.

В России пользуются преимущественно формулой Гельмерта (из-за того, что входящее в нее сжатие очень близко к сжатию эллипсоида Красовского α = 1:298,3, принятого для обработки всех геодезических сетей на территории России). Сейчас в формулу Гельмерта вносится поправка на новую потсдамскую систему (она равна – 14 миллигал).

Литература: [3, 4, 6, 14].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Фигуру Земли можно определить как уровенную поверхность потенциала силы тяжести

$$W = C = \text{const.}$$

Постоянная C берется таким образом, чтобы уровенная поверхность совпадала хотя бы в одной точке с земным экватором, вернее, чтобы на земном экваторе радиус уровенной поверхности равнялся a. В качестве такой точки выберем точку с координатами $\varphi = 0$ и $\rho = a$. Для этой точки из равенства (1), определив C и отбросив члены второго порядка малости, после небольших преобразований получим

$$\rho/a = 1 - (3m + q/2)\sin^2 \varphi. \qquad (4)$$

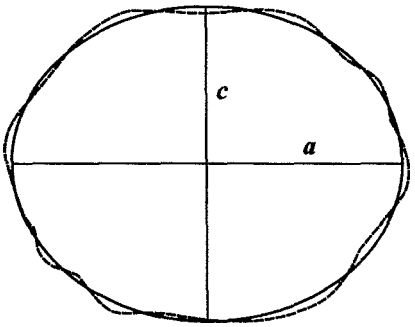


Рис. 71. Земной сфероид (сплошная линия) с экваториальной и полярной осями *a* и *c*, а также гипотетический геоид (штриховая линия)

Легко показать, что это – уравнение сфероида (рис. 71)

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$$

со сжатием

$$\alpha = (a - b)/a = 3m + q/2.$$

Литература: [4, 14, 15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО УРОВНЯ АНОМАЛИЙ

При вычислении автокорреляционных функций существенное значение имеет исключение постоянного фона в исходных данных – правильный выбор нулевого уровня аномалий. Рассмотрим детерминированную центрированную аномалию $f(x)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

Предположим, что значения исходной гравитационной и магнитной аномалий $f_{и}(x)$ равны

$$f_{и}(x) = f(x) + a,$$

где a – некоторая постоянная, заданная на интервале существования аномалии от $-x_{гр}$ до $+x_{гр}$:

$$a = \begin{cases} a \text{ при } -x_{гр} \le x \le x_{гр}, \\ 0 \text{ при } x < -x_{гр},\ x > x_{гр}. \end{cases}$$

Тогда

$$B_{и}(\tau) = B(\tau) + C,$$

где $B(\tau)$ – автокорреляционная функция аномалии $f(x)$; C – постоянная.

Так как C – положительная величина, то из последнего равенства видно, что любое ее значение увеличивает $B(\tau)$, а функция $B_{и}(\tau)$ будет иметь минимальные значения, равные $B(\tau)$ только при $C = 0$, т.е. при $a = 0$. С учетом этого условия в качестве правильного нулевого уровня аномалии $f_{и}(x)$ нужно выбрать такое значение a (положительное или отрицательное), при котором функция $B_{и}(\tau)$ имеет минимальные значения (абсцисса точки перехода через нуль такой автокорреляционной функции будет иметь также минимальное значение). С этой целью необходимо

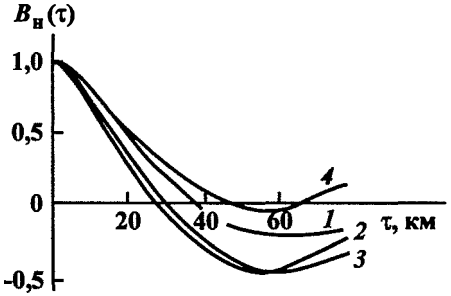


Рис. 72. Графики нормированных автокорреляционных функций Ольховской магнитной аномалии ΔZ при разных нулевых уровнях Z_0, (по Г.Н. Карелиной):
1 – Z_0 = 200 нТл; *2* – Z_0 = 250 нТл; *3* – Z_0 = 300 нТл; *4* – Z_0 = 400 нТл

строить графики автокорреляционных функций аномалии $f_н(x)$ при различных значениях a и по ним определять искомую величину.

Указанный признак справедлив и для случайных центрированных гравитационных или магнитных аномалий, только в этом случае в последнем равенстве вместо величины C будет значение a^2. На рис. 72 дан пример выбора значения a для Ольховской магнитной Z аномалии (Волгоградское Поволжье), рассчитанный Г.Н. Карелиной. На рисунке кривые нормированных автокорреляционных функций рассчитаны при четырех значениях Z_0 = = a: 200, 250, 300 и 400 нТл. Как видно из рисунка, на основании указанного признака правильное значение a соответствует 250 нТл.

Если автокорреляционная функция при увеличении τ стремится к некоторому постоянному уровню, а не к нулю, то ее нулевой уровень можно определить как значение $B(\tau)$, к которому стремится автокорреляционная функция в бесконечности. Если же наблюдаются периодические изменения кривой $B(\tau)$, то это говорит о наличии в кривой $f(x)$ скрытой периодичности.

Литература: [14, 16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОРОД ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ГРАВИМЕТРАМИ

Ошибка в значении плотности промежуточного слоя в 0,1 г/см^3 вызывает искажение значений аномалии Буге на 0,04 мГал при разности высот между пунктами наблюдений на 10 м. Поэтому важное значение в гравиметрической разведке имеет знание истинной плотности промежуточного слоя.

Вопросами определения плотности из гравиметрических данных занимались многие исследователи (Л.Т. Бережная, В.М. Березкин, К.В. Гладкий, П.И. Лукавченко, Л.Д. Немцов, А.И. Пришивалко, С.А. Серкеров, В.П. Степанов, М.А. Телепин и др.).

Многими экспериментами и их анализом установлено, что определение плотности приповерхностного слоя горных пород путем измерения гравиметрическими приборами при соблюдении ряда условий более достоверно и более экономично, чем определение ее по образцам, извлеченным из этой толщи пород.

Наблюденное на поверхности Земли суммарное гравитационное поле даже в пределах точности наблюдений зависит от множества факторов, из которых в данном случае выделим три, а именно: влияние плотностных неоднородностей всей толщи пород под поверхностью приведения, влияние промежуточного слоя и погрешностей наблюдений как в измеренных значениях самого поля, так и в превышениях дневного рельефа. В этом случае наблюденное значение силы тяжести может быть выражено следующим образом:

$$g_н = g_Б - KH + \varepsilon, \qquad (1)$$

где $g_н$ – наблюденное значение силы тяжести; $g_Б$ – аномалия Буге; H – превышения пунктов наблюдения над поверхностью приведения; $K = 0{,}3086 - 0{,}0419\sigma$ – коэффициент, характеризующий изменение силы тяжести с высотой над поверхностью приведения и притяжение промежуточного слоя; ε – суммарная погрешность определения силы тяжести.

Далее под определением плотности будем понимать определение коэффициента K, так как зная K, легко определить и значение плотности:

$$\sigma = (0{,}3086 - K)/0{,}0419.$$

Способы определения K заключаются в нахождении такой операции A (суммы операций), при которой значение аномалии Буге и погрешностей при некоторых предположениях о характере их изменения было бы сведено к минимуму δ, т.е.

$$A[g_н] = A[g_Б - KH + \varepsilon] = -KA[H] + \delta, \qquad (2)$$

где $\delta \to 0$.

Тогда в пределах точности

$$K = -A[g_н]/A[H].$$

Минимум может быть оценен, в частности, среднеквадратичным уклонением, т.е. надо потребовать от оператора A и входящих в уравнение (2) неизвестных выполнения условия

$$A\left\{\sum_{i=0}^{n}[g_н(x_i) - g_Б(x_i) + KH(x_i) + \varepsilon(x_i)]\right\} = \min.$$

В зависимости от характера поведения $g_Б(x_i)$ и $\varepsilon(x_i)$ может быть найдено множество операторов, удовлетворяющих этому уравнению, откуда и множество опубликованных и опробованных на практике способов определения плотностей. Следует отметить, что приведенную формулу можно переписать в более общем виде, если в нее вместо значений $g_н$, $g_Б$ и H подставить величины $\Delta^m g_н$, $\Delta^m g_Б$ и $\Delta^m H$, которые являются разностными значениями исходных величин, образованными по соседним точкам (порядок разности равен m: $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Например, для $g_н$:

$$\Delta^0 g_н = g_н,$$

$$\Delta^1 g_н = g_н(x_{i+1}) - g_н(x_i);$$

$$\Delta^2 g_н = \Delta^1 g_н(x_{i+1}) - \Delta^1 g_н(x_i),$$

где x_i и x_{i+1} – координаты точек, в которых заданы соответственно значения $g_н$ и $\Delta^1 g_н$. Аналогично образуют конечные разности порядка m и для значений высот H:

$$\Delta^0 H = H,$$

$$\Delta^1 H = H(x_{i+1}) - H(x_i),$$

$$\Delta^2 H = \Delta^1 H(x_{i+1}) - \Delta^1 H(x_i).$$

Получаемые каждый раз значения конечной разности нужно приписать середине интервала между двумя точками, по которым образуются эти разности.

По значениям конечных разностей выражение (1) примет вид

$$\Delta^m g_н = \Delta^m g_Б - K\Delta^m H + \varepsilon. \qquad (3)$$

Применение разностных значений наблюденных данных примечательно тем, что разность порядка m снижает порядок всех функций, в том числе и порядок аномалии Буге, на величину m. В то же время увеличивает погрешности счета, что требует проведения сглаживания получаемых значений. Из-за этого можно применить конечные разности не более второго-третьего порядков.

Условие исключения из выражения (3) функции $\Delta^m g_Б$ в интегральном виде запишем следующим образом:

$$\int_0^a \Delta^m g_Б f(x)dx = 0,$$

где $f(x)$ – некоторая функция, отвечающая этому условию (т.е. в качестве указанного выше оператора берется операция умножения выражения (3) на функцию $f(x)$ и интегрирования в пределах от 0 до a). Разбивая интервал профиля (0, a) на ряд элементарных участков (таким образом, чтобы в середину каждого участка попадала точка наблюдений), можно записать этот интеграл в виде суммы

$$\sum_{i=1}^n \Delta^m g_{Бi} C_i = 0,$$

где n – количество интервалов; $\Delta^m g_{Бi}$ и C_i – это значения функций $\Delta^m g_Б$ и $f(x)$ в середине каждого элементарного участка, т.е. в пунктах задания этих функций.

Умножая обе части равенства (3) на $f(x)$, интегрируя его в пределах от 0 до a при $\varepsilon = 0$, найдем

$$K = -\int_0^a \Delta^m g_н(x) f(x)dx / \int_0^a \Delta^m H(x) f(x)dx.$$

Переходя отсюда от интегралов к суммам, найдем

$$K = -\sum_{i=1}^n (\Delta^m g_н)_i C_i / \sum_{i=1}^n \Delta^m H_i C_i. \qquad (4)$$

Все ныне существующие основные способы определения σ можно свести к формуле вида (4).

Для определения K по формуле (4) можно пользоваться и графическим приемом, откладывая по оси абсцисс значения отдельных слагаемых знаменателя, по оси ординат – отдельные слагаемые числителя, соответствующие значениям слагаемых знаменателя. На таких графиках мы должны получать прямую, угловой коэффициент которой, как видно из формулы (4), и должен равняться значению K.

Способ Неттлетона. На интервале профиля, проходящего через наиболее пересеченный участок – через овраги, возвышенности и впадины строятся графики аномалии Буге при различных значениях коэффициента K. Предположим, что аномалия Буге имеет линейный характер изменения. Тогда при истинном значении K график аномалии Буге будет максимально отличаться от рельефа местности. В случае завышения K (при занижении значения плотности σ) кривая аномалии Буге в некоторой степени будет повторять форму рельефа местности, при заниженном же значении K (при завышенном значении плотности σ) она будет иметь форму, обратную рельефу. Сказанное хорошо иллюстрирует графики на рис. 73, где истинное значение $\sigma = 1{,}8$ г/см^3.

Способ Неттлетона годится только в том случае, когда функция аномалии Буге является кривой порядка не выше первого.

Корреляционный способ. Если отсутствует корреляции между значениями высот и аномалией Буге, то при

$$f(x) = \Delta^m H(x) - \overline{\Delta^m H},$$

где $\overline{\Delta^m H}$ – среднее значение высот на интервале профиля $(0; a)$, из выражения (4) получим корреляционный способ нахождения K. Переходя от интегралов к суммам, согласно (4) найдем при $C_i = f(x_i)$

$$K = -\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta^m g_н)_i (\Delta^m H_i - \overline{\Delta^m H})}{\sum_{i=1}^{n} (\Delta^m H_i - \overline{\Delta^m H})^2}.$$

К другим применяемым на практике способам относятся ***способ наименьших квадратов К.В. Гладкого*** (1949 г.), ***способ конечных разностей*** и др.

Часто на практике хорошие результаты дают простейшие способы, например, определение по наблюдениям в двух точках или в трех точках.

Если наблюдения вести у подножия скалы в точке A и на ее вершине в точке B при малом горизонтальном расстоянии между ними, то

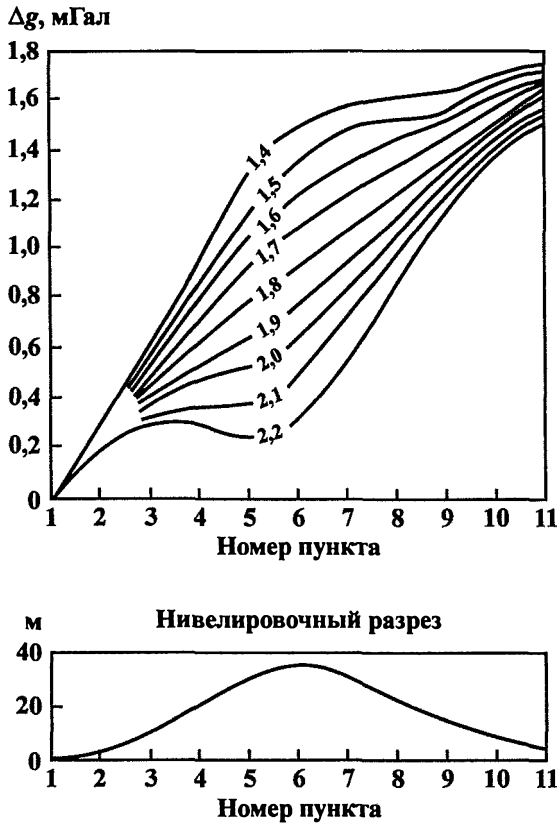


Рис. 73. Определение плотности из наблюдений с гравиметрами графическим методом Неттлетона

$$K = -\frac{g_н(A) - g_н(B)}{H_A - H_B}.$$

По наблюдениям в трех точках

$$K = -\frac{(g_н)_1 + (g_н)_3 - 2(g_н)_2}{H_1 + H_2 - 2H_2}.$$

Во всех приведенных выше формулах считается, что учтены значения нормального поля и поправки за рельеф (при приближении значении плотности).

Литература: [2, 6, 14, 16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТИ ЗЕМЛИ

Для определения значения средней плотности Земли воспользуемся выражением потенциала силы тяжести

$$W = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + G\int_v \sigma \frac{dv}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

После небольших выкладок и преобразования отсюда можно получить формулу для определения плотности [14, 15]:

$$\sigma = \frac{\omega^2}{2\pi G} + \frac{1}{4\pi G v}\int_v g dS.$$

Предположим, что S – сфера радиуса R. Тогда учитывая, что значение

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_v g\, dS = g_{ср}$$

является интегральной средней от ускорения свободного падения по поверхности сферы, найдем

$$\sigma = \frac{\omega^2}{2\pi G} + \frac{R^2}{Gv} g_{ср} = \frac{\omega^2}{2\pi G} + \frac{3}{4}\frac{g_{ср}}{\pi G R}.$$

Отсюда можно определить значение средней плотности Земли.

Литература: [12, 14, 15].

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ ВЫДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

Оптимальные фильтры выделения аномалий, обеспечивающие минимум средней квадратической ошибки воспроизведения полезной аномалии (фильтры Колмогорова – Винера), могут решать задачи низкочастотной, высокочастотной фильтрации полей и полосовых фильтров, т.е. в зависимости от решаемой задачи с помощью оптимальных фильтров можно выделить полезный сигнал (например, локальную аномалию) на фоне или региональной аномалии, или ошибок наблюдений, или одновременно на фоне тех и других помех.

Предположим, что суммарная аномалия состоит из трех компонент:

$$f(x, y) = f_л(x, y) + f_р(x, y) + f_о(x, y),$$

где индексы «л», «р» и «о» указывают на случаи локальной, региональной аномалий и ошибок наблюдений (под ошибками наблюдений понимается сумма погрешностей определения аномалий и геологических помех). Допустим далее, что нужно выделить локальную составляющую поля на фоне региональной аномалии и ошибок наблюдений.

Частотная характеристика фильтра Колмогорова – Винера, обеспечивающего наилучшее выделение полезного сигнала (по выбранному критерию) из суммарного поля $f(x, y)$, имеет вид

$$\Phi(u, v) = Q_{лf}(u, v)/Q_f(u, v), \qquad (1)$$

где взаимный энергетический спектр функции $f_л(x, y)$ и суммарной аномалий $f(x, y)$

$$Q_{лf}(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{лf}(\xi, \eta)\exp[-i(u\xi + v\eta)]d\xi d\eta;$$

энергетический спектр суммарной аномалии

$$Q_f(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_f(\xi, \eta) \exp[-i(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta; \qquad (2)$$

взаимная корреляционная функция аномалий $f_л(x, y)$ и $f(x, y)$

$$B_{лf}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_л(x, y) f(x - \xi, y - \eta) dx dy;$$

автокорреляционная функция аномалии $f(x, y)$

$$B_f(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) f(x - \xi, y - \eta) dx dy. \qquad (3)$$

Примем, что локальная и региональная аномалии корреляционно не связаны с ошибками наблюдений. При этом предположении рассмотрим частные случаи частотной характеристики (1).

1. Пусть в суммарном поле отсутствует региональная аномалия, т.е.

$$f(x, y) = f_л(x, y) + f_o(x, y).$$

Тогда фильтр для выделения локальной аномалии на фоне помех

$$\Phi(u, v) = Q_л(u, v)/[Q_л(u, v) + Q_o(u, v)]. \qquad (4)$$

Здесь энергетические спектры локальной аномалии и ошибок наблюдений $Q_л$ и Q_o можно вычислить по формуле (2), если заменить под интегралом в правой части равенства функцию B_f соответственно на $B_л$ и B_o. Значения последних можно определить из равенства (3) при замене функции f под интегралом на $f_л$ и f_o.

2. Случай, когда в суммарном поле отсутствуют ошибки наблюдений, т.е.

$$f(x, y) = f_л(x, y) + f_p(x, y).$$

В этом случае

$$\Phi(u, v) = [Q_л(u, v) + Q_{лf}(u, v)]/Q_f(u, v),$$

где $Q_{лр}(u, v)$ – взаимный энергетический спектр локальной и региональной аномалий. Этот случай выделения локальной аномалии на фоне региональной можно упростить и записать в виде

$$\Phi(u, v) = S_л(u, v)/S_f(u, v),$$

где $S_л$ и S_f – спектры или трансформанты Фурье аномалий $f_л$ и f.

Наиболее общий случай фильтра Колмогорова – Винера, выделяющего полезную аномалию на фоне как высокочастотных случайных помех, так и мешающих низкочастотных аномалий (причем как в трехмерном, так и двумерном случаях) был впервые рассмотрен С.А. Серкеровым (1965 г.).

Рассмотренные равенства легко перенести и на двумерный случай. Например, равенства (1) и (4) примут вид

$$\Phi(\omega) = Q_{лf}(\omega)/Q_f(\omega),$$

$$\Phi(\omega) = Q_л(\omega)/[Q_л(\omega) + Q_o(\omega)]. \qquad (5)$$

Если в качестве ошибок наблюдений брать белый шум, а в качестве полезной аномалии аномалию от бесконечной горизонтальной материальной линии или от горизонтального кругового цилиндра, то выражение (5) примет вид

$$\Phi(\omega) = \frac{2\exp\left(-\frac{2}{\pi}|\omega| r_л\right)}{2\exp\left(-\frac{2}{\pi}|\omega| r_л\right) + mk},$$

где $m = r_o/r_л$; $k = B_o(0)/B_л(0)$; r_0 и $r_л$ – радиусы корреляции ошибок наблюдений и локальной аномалии; $B_o(0)$ и $B_л(0)$ – значения средних квадратов амплитуд ошибок наблюдений и локальной аномалии.

Для иллюстрации возможностей применения оптимальных фильтров выделения аномалий на рис. 74 показаны кривые частотных характеристик, рассчитанных для некоторых конкретных геологических ситуаций в трехмерном осесимметричном случае.

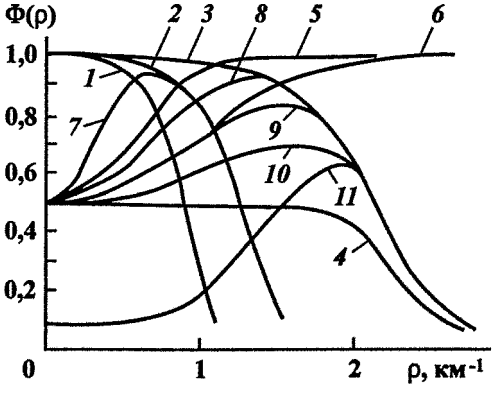
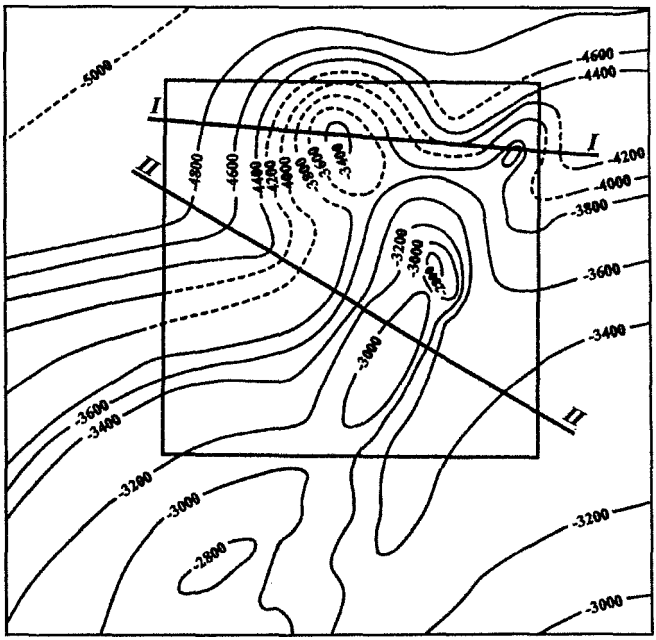


Рис. 74. Графики частотных характеристик оптимального фильтра выделения аномалий

а



б

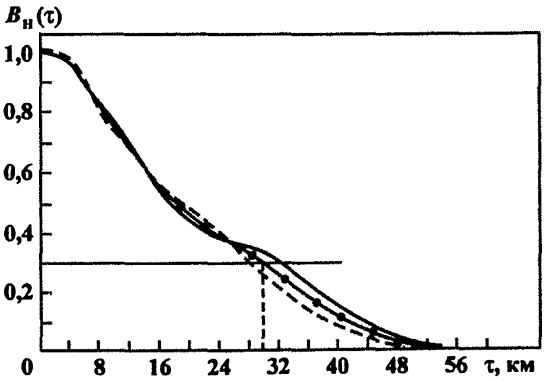


Рис. 75. Структурная схема поверхности кристаллического фундамента одного из участков центральной части Московской синеклизы (трехмерная задача) (*а*) и нормированные значения автокорреляционных функций по профилям *I* и *II* (*б*).

(Изолинии даны в метрах)

Из рисунка видно, что кривые *1–4* являются частотными характеристиками фильтров, выделяющих полезную аномалию на фоне случайных помех, причем в случае кривой *4* аномалия по своей амплитуде соизмерима со средним квадратическим значением помех. Кривые *5* и *6* являются частотными характеристиками преобразований, выделяющих локальную аномалию на фоне региональной при отсутствии случайных помех. Кривые *7–11* соответствуют полосовым фильтрам, оптимально выделяющим полезную (локальную) аномалию на фоне мешающих региональной аномалии и ошибок наблюдений. Таким образом, оптимальный фильтр выделения аномалий в зависимости от конкретной геологической ситуации может принимать вид любой произвольной трансформации.

Задачу выделения полезной аномалии на фоне высокочастотных помех можно условно разбить на две – выделение аномалии на фоне больших соизмеримых помех, когда значительно искажается амплитуда полезной выделяемой аномалии, и сглаживание аномалий, когда амплитуда полезной аномалии искажается незначительно и в основном из-за эффекта усреднения, которому подвергается аномалия в процессе применения фильтров. По значениям частотной характеристики эти две задачи отличаются друг от друга тем, что в случае выделения сигнала на фоне соизмеримых помех максимальное значение частотной характеристики (при $\omega = 0$ или $\rho = 0$) меньше единицы, тогда как в случае фильтров сглаживания оно близко или равно единице. Поэтому

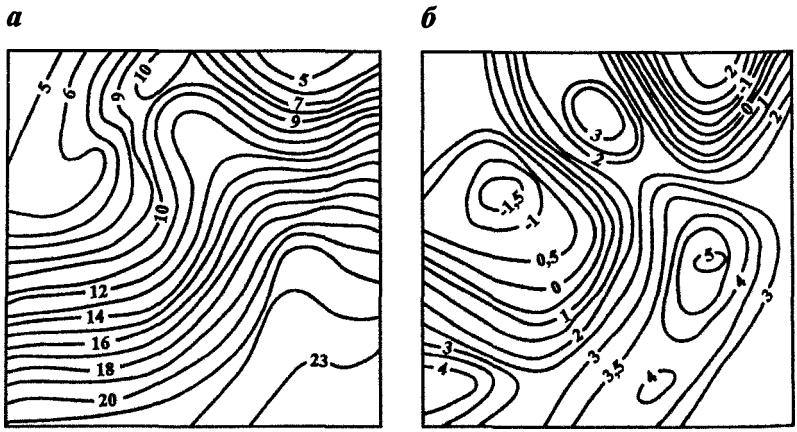


Рис. 76. Схемы суммарного гравитационного поля (*а*) и результатов опробования оптимального фильтра (*б*)

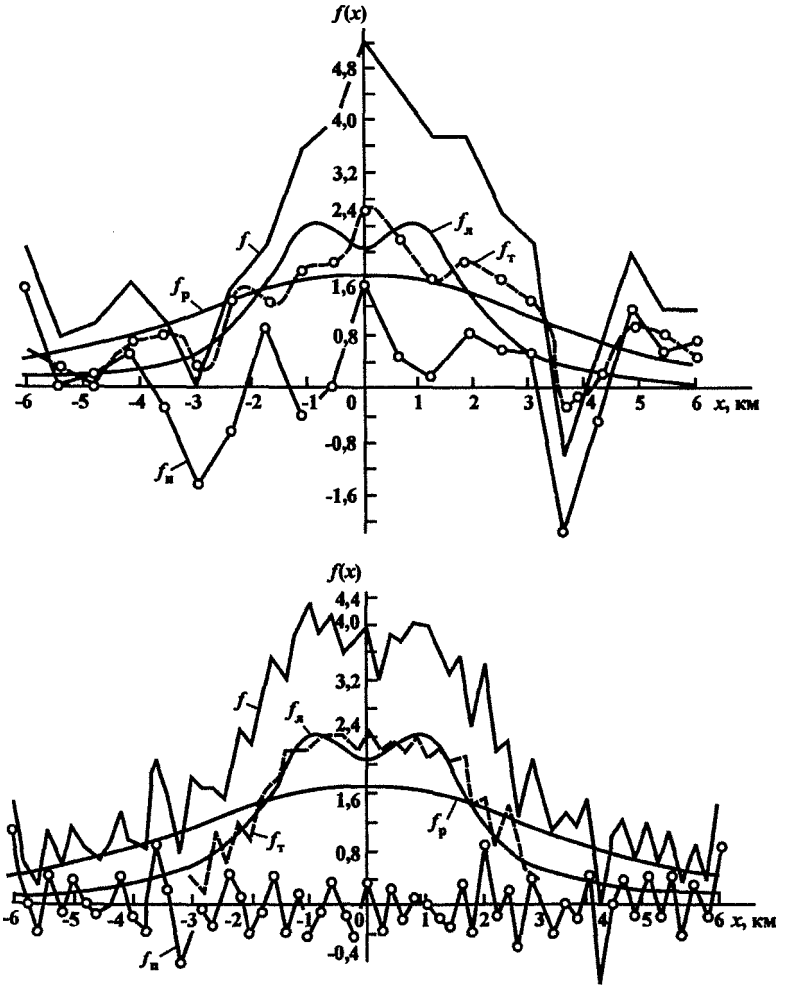


Рис. 77. Примеры опробования оптимального фильтра выделения локальной аномалии при разных уровнях случайных помех

в первом случае амплитуда аномалии уменьшается и из-за эффекта усреднения, но больше всего из-за того, что частотная характеристика трансформации при низких частотах меньше единицы, что приводит как бы к отсеканию аномалии на некоторую величину.

Следующий пример (трехмерная задача) относится к реальным данным одного из участков Московской синеклизы. В данном случае была поставлена задача наилучшего выделения влияния локальных поднятий фундамента на фоне гравитационного эффекта границы, соответствующей региональному изменению его глубины, влияния кровли казанского яруса и погрешностей наблюдений. По сравнению с поверхностью фундамента поверхность казанского яруса несущественно изменяет параметры фильтра. Поэтому при расчете это влияние не учитывалось.

Для расчета фильтра были использованы два профиля *I* и *II* (рис. 75), по которым вычислялись корреляционные функции поверхности кристаллического фундамента, средние глубины залегания региональной поверхности фундамента, поверхности локальных поднятий фундамента и их средние квадраты [11]. Значения радиусов корреляции определялись по автокорреляционным функциям, вычисленным по профилям *I* и *II* (рис. 75, *б*).

На основании результатов вычислений был построен и опробован оптимальный фильтр. Полученный результат приведен на рис. 76, *б*. На рис. 76, *а* показано суммарное поле, из которого выделены аномалии, соответствующие локальным поднятиям поверхности кристаллического фундамента. Из анализа полученных данных (сравнивая их с данными решения прямой задачи) следует, что в трансформированном поле не только оконтурились места расположения локальных поднятий, но и выдержалась достаточно хорошо амплитуда аномалий от них.

Рассмотрим два модельных примера опробования оптимального фильтра, раскрывающие его возможности (рис. 77). Примеры соответствуют случаю выделения локальной аномалии $f_л$ на фоне региональной аномалии $f_р$ и случайных погрешностей наблюдений $f_п$ разной интенсивности ($f = f_л + f_р + f_п$ – суммарная аномалия). Пунктиром показана выделенная аномалия $f_т$, которая, как видно из рисунка, по своей амплитуде хорошо соответствует $f_л$ (точной аномалии).

Литература: [13, 14, 16].

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ

Нередко для решения геологической задачи, особенно поискового характера, достаточно извлечь из наблюденного суммарного поля информацию о наличии и местоположении полезного сигнала.

Рассмотрим оптимальный фильтр, обеспечивающий получение максимального отношения значений квадрата полезной аномалии к среднему квадратичному значению помехи. Этот фильтр относится к фильтрам обнаружения аномалий. В отличие от фильтра выделения аномалии на фоне помех, задачей которого является сохранение полезной аномалии по возможности в чистом виде, оптимальный фильтр обнаружения аномалии может исказить сигнал, но должен привести его к такому виду, который обеспечит максимальное отношение сигнал/помеха.

Частотная характеристика такого фильтра определяется равенством

$$\Phi(\omega) = C\frac{S(-\omega)_а}{Q(\omega)_п},$$

где C – некоторая произвольная постоянная, индексы «а» и «п» указывают на случаи полезной аномалии и помехи. При этом в общем случае спектр аномалии может являться комплексной функцией. Таким образом, фильтр, максимизирующий отношение сигнал/помеха, определяется отношением спектра полезной аномалии $S(-\omega)_а$ [$S(-\omega)$ – величина, комплексно сопряженная со спектром аномалии $S(\omega)$] к энергетическому спектру помехи.

Рассмотренный фильтр обеспечивает получение после фильтрации максимального отношения квадрата значений полезной аномалии к среднему квадратичному значению помехи. Можно построить другой фильтр, обеспечивающий получение максимального отношения средних квадратов полезной аномалии и помехи после трансформации и до нее. Примем, что суммарная аномалия состоит из трех составляющих:

$$f(x, y) = f_р(x, y) + f_л(x, y) + f_п(x, y),$$

где индексы «р», «л» и «п» относятся к случаям региональной, локальной аномалий и ошибок наблюдений (помех). Обозначим средние квадраты аномалий с соответствующими индексами как $\overline{A^2}$, а после фильтрации в индекс добавим еще и букву «ф». Тогда отношение сигнал/помеха будем характеризовать отношением среднего квадрата амплитуд: до фильтрации

$$\alpha = \overline{A_л^2} / \overline{A_р^2}, \quad \beta = \overline{A_л^2} / \overline{A_п^2},$$

а после фильтрации

$$\alpha_ф = \overline{A_{лф}^2} / \overline{A_{рф}^2}, \quad \beta_ф = \overline{A_{лф}^2} / \overline{A_{пф}^2}.$$

Последние величины должны быть бóльшими или равными некоторому числу. Практика показывает, что аномалия может быть обнаружена тогда, когда среднее квадратичное значение искомой аномалии (в нашем случае локальной) превышает среднее квадратичное значение любой помехи (региональной аномалии, погрешностей наблюдений) в 3 раза, т.е. в результате трансформации (фильтрации) должно быть

$$\alpha_ф \geq 9, \quad \beta_ф \geq 9.$$

Принимая этот критерий, составим отношения, характеризующие усиление локальной составляющей по сравнению с помехами в результате фильтрации:

$$F = \alpha_ф/\alpha, \quad \varphi = \beta_ф/\beta$$

или

$$F = \overline{A_{лф}^2}\,\overline{A_р^2} / \overline{A_л^2}\,\overline{A_{рф}^2}, \quad \varphi = \overline{A_{лф}^2}\,\overline{A_п^2} / \overline{A_л^2}\,\overline{A_{пф}^2}.$$

Следует учесть, что при линейной фильтрации операции «усиления» будут противоречивыми в том случае, когда помехи располагаются в частотном диапазоне по обе стороны от «полезного» сигнала.

Усиливая в результате фильтрации полезный сигнал по сравнению с помехой, вызванной региональным фоном, мы одновременно неизбежно ослабляем отношение полезного сигнала к погрешностям наблюдений и наоборот. Учитывая это, полезно ввести отношение

$$F\varphi = F/(1/\varphi).$$

Это отношение показывает, во сколько раз «усиление» локальной аномалии по сравнению с региональной превышает «усиление» ошибок наблюдений по сравнению с локальной аномалией в результате той же фильтрации.

Частотную характеристику рассматриваемого оптимального фильтра обнаружения аномалий представим в виде ряда, имеющего вид частотной характеристики дискретных вычислительных схем:

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cos \omega x_k,$$

где $n + 1$ – количество членов вычислительной схемы; C_k и x_k – коэффициенты и радиусы вычислительной схемы. Аналогично в трехмерном случае можно принять

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho r_k).$$

Для этих частотных характеристик получим следующие выражения для функций F и φ:

$$F_\omega = \frac{\int_0^\infty Q_л(\omega)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k \cos\omega x_k\right]^2 d\omega \int_0^\infty Q_р(\omega)d\omega}{\int_0^\infty Q_р(\omega)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k \cos\omega x_k\right]^2 d\omega \int_0^\infty Q_л(\omega)d\omega},$$

$$F_\rho = \frac{\int_0^\infty \rho Q_л(\omega)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho r_k)\right]^2 d\rho \int_0^\infty \rho Q_р(\rho)d\rho}{\int_0^\infty \rho Q_р(\rho)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho r_k)\right]^2 d\rho \int_0^\infty \rho Q_л(\rho)d\rho},$$

$$\varphi_\omega = \frac{\int_0^\infty Q_л(\omega)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k \cos\omega x_k\right]^2 d\omega \int_0^\infty Q_п(\omega)d\omega}{\int_0^\infty Q_п(\omega)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k \cos\omega x_k\right]^2 d\omega \int_0^\infty Q_л(\omega)d\omega},$$

$$\varphi_\rho = \frac{\int_0^\infty \rho Q_л(\omega)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho r_k)\right]^2 d\rho \int_0^\infty \rho Q_п(\rho)d\rho}{\int_0^\infty \rho Q_п(\rho)\left[\sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho r_k)\right]^2 d\rho \int_0^\infty \rho Q_л(\rho)d\rho}.$$

Подставляя в приведенные равенства выражения для энергетических спектров аномалий $Q_р$, $Q_л$ и $Q_п$, раскрывая интегралы,

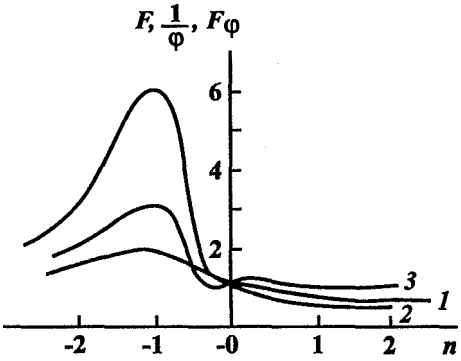


Рис. 78. Графики изменения функции F, $1/\varphi$ и $F\varphi$ (соответственно кривые (*1*, *2*, *3*)

можно определить функции F и φ, характеризующие степень усиления в результате фильтрации полезной локальной аномалии по сравнению с мешающей региональной аномалией и погрешностями наблюдений. Далее, анализируя совместно функции F и φ, выбирают параметры C_k, x_k или r_k вычислительных схем, такие, которые обеспечили бы максимальное значение произведения $F\varphi$. Полученные таким образом вычислительные схемы и будут оптимальными для обнаружения полезных аномалий в суммарном наблюденном поле.

Методику выбора параметров вычислительных схем можно показать на следующем примере. Примем, что количество членов вычислительной схемы равно двум. Тогда параметрами вычислительной схемы будут величины C_0, C_1, x_0 и x_1. Далее примем, что $x_0 = 0$, $x_1 = r_л$, $r_р = 2r_л$ и $r_п = 0{,}2r_л$ (r – радиус корреляции аномалии). При этих заданных значениях постоянных определим оптимальное значение отношения $n = C_1/C_0$. На рис. 78 приведены полученные для закона изменения энергетических спектров аномалий по формуле квадратичной экспоненты значения функций F, $1/\varphi$ и $F\varphi$. Как видно из рисунка, полезная локальная аномалия после фильтрации усиливается больше всего по сравнению с региональной аномалией при $n = -1$. При этом значении n происходит и наибольшее увеличение ошибок наблюдений (см. кривую $1/\varphi$), но только при $n = -1$ происходит усиление локальной аномалии по сравнению с региональной большее, чем усиление ошибок наблюдений по сравнению с локальной аномалией. Это видно из того, что максимальное значение произведения $F\varphi$ наблюдается именно при $n = -1$. Поэтому оптимальным для вычислительных схем с двумя членами будет $n = -1$. Таким же образом можно, например, показать, что оптимальное значение $x_0 = r_0$.

Литература: [11, 13, 14, 16].

ПЛОТНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНЫХ ТИПОВ ГОРНЫХ ПОРОД

Плотность горных пород в лабораторных условиях определяют по образцам гидростатическим взвешиванием на денситометре. Плотностная характеристика основных групп горных пород приведена ниже в табл. 11.

Как видно из таблицы, породы даже одного и того же типа, в зависимости от различных примесей и вариаций состава, значительно меняют свою плотность.

Плотность осадочных пород зависит в основном от пористости, а не от входящих в их состав минералов. Пористость осадочных пород меняется в очень больших пределах для одних и тех же петрографических групп. Кристаллические породы имеют очень малую пористость. Их плотность зависит главным образом от минералогического их состава и структуры.

За счет уменьшения пористости плотность осадочных пород растет с глубиной. Такое увеличение плотности замедляется и ограничивается глубинами 4–6 км. Ниже этих глубин осадочные породы достигают предела уплотнения, приближаясь по плотности к метаморфическим, например, плотность глин на глубинах 4–5 км может равняться 2,5 г/см^3, что становится близким к плотности глинистых сланцев.

График изменения плотности осадочных пород с глубиной может иметь вид, показанный на рис. 79, *а* (по В.И. Шрайбману). Сведения о значениях плотности пород, залегающих на различных глубинах, могут быть получены также с помощью графиков зависимости скоростей сейсмических волн от плотности, построенных экспериментальным путем. Такие зависимости (рис. 79, *б*) получены различными авторами для отдельных районов с различным геологическим строением.

При определении плотности в лабораторных условиях по образцам в абсолютно сухом состоянии необходимо привести получаемые значения к условиям естественного залегания пород. С

Таблица 11

Классы	Название породы	Плотность, г/см^3		
		min	max	средняя
I	Эффузивные и интрузивные			
	а) Основные и ультраосновные:			
	базальты	2,6	3,0	2,8
	габбро	2,9	3,1	3,0
	гипербазиты	2,8	3,0	2,9
	периодотиты	3,1	3,3	3,2
	б) Кислые:			
	граниты	2,55	2,7	2,6
	сиениты	2,55	2,65	2,6
	гранодиориты	2,65	2,75	2,70
II	Метаморфические:			
	сланцы	2,6	2,9	2,7
	гнейсы	2,6	2,9	2,75
	мраморы	2,65	2,75	2,7
III	Осадочные			
	а) Терригенные:			
	глина	1,5	2,2	1,9
	песок	1,4	2,0	1,7
	песчаник	2,1	2,8	2,4
	б) Органогенные и гидрохимические:			
	известняк, доломит	2,3	3,0	2,7
	ангидрит	2,8	3,0	2,9
	гипс	2,2	2,4	2,3
	каменная соль	2,0	2,2	2,1
IV	Некоторые полезные ископаемые:			
	газ	0,001	0,002	–
	нефть	0,7	1,1	0,9
	уголь:			
	антрацит	1,4	1,5	–
	каменный	1,3	1,4	–
	бурый	0,8	1,2	–
	Торф	–	–	0,7
	Каменная соль (галит)	2,1	2,2	2,1
	Железные руды	3,7	4,3	4,0
	Хромиты	3,3	4,4	4,0
	Полиметаллические руды (свинец, цинк)	3,2	5,5	4,0

этой целью необходимо учесть ***поправки за усадку и за влажность породы.***

Если известны значения плотностей n горизонтов, слагающих данную толщу, то в качестве плотности пород толщи принимают средневзвешенное по мощности значение

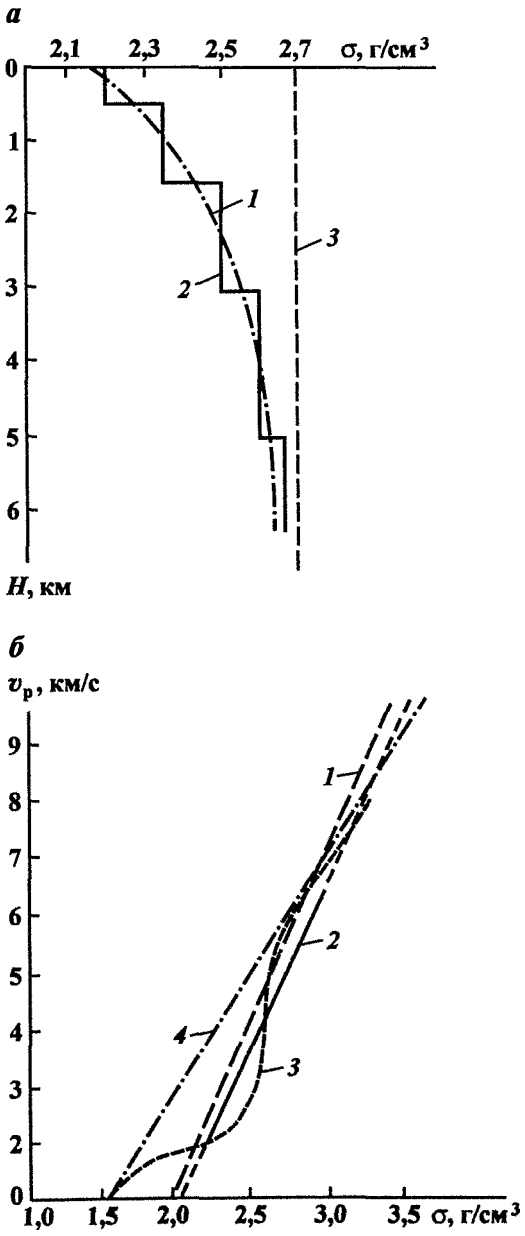


Рис. 79. Изменение плотности осадочных пород:
а – чехла Туранской плиты с глубиной (по В.И. Шрайбману): *1* – кривая изменения плотности с глубиной (по В.М. Добрынину); *2* – график изменения плотности с глубиной, установленной на основе корреляции плотности и скорости; *3* – плотность пород фундамента; *б* – в зависимости от скорости распространения продольных волн: *1* – по Н.Н. Пузыреву; *2* – по П.М. Сычеву и А.Э. Первиайнеру; *3* – по Булларду; *4* – по И.С. Вольвовскому, В.З. Рябому, В.И. Шрайбману

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i h_i / \sum_{i=1}^{n} h_i,$$

где σ_i и h_i – значения плотности и мощности i-го горизонта толщи. В знаменателе этого выражения находится мощность толщи.

Плотность пород можно определить также по наблюдениям с гравиметрами в шахтах, скважинах и на дневной поверхности в точках так называемого параметрического профиля.

Литература: [3, 6, 14].

ПОГРЕШНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ И ИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под погрешностями наблюдений понимаются сумма случайных погрешностей наблюдений и влияний самых верхних плотностных неоднородностей. Рассмотрим основные энергетические характеристики погрешностей наблюдений.

Высокочастотные случайные помехи можно аппроксимировать белым шумом с ограниченной полосой частот, для которой

$$B_{\text{п}}(\tau) = B_{\text{п}}(0)[\sin(\pi\tau/\Delta x)](\pi\tau/\Delta x), \qquad (1)$$

где Δx – расстояние между пунктами наблюдений; $B_{\text{п}}(0)$ – максимальное значение автокорреляционной функции – средний квадрат ошибок наблюдений. Это для случая, когда радиус корреляции погрешностей наблюдений $r = \Delta x$. В остальных случаях, т.е. когда $r > \Delta x$, автокорреляционную функцию погрешностей наблюдений можно выразить функциями

$$B_{\text{п}}(\tau) = B_{\text{п}}(0)\exp[-(\tau/d)^2], \qquad (2)$$

$$B_{\text{п}}(\tau) = B_{\text{п}}(0)\exp[-\tau/d_1], \qquad (3)$$

где d и d_1 – постоянные, зависящие от радиуса корреляции ошибок наблюдений r.

Если ошибки между пунктами наблюдений взаимонезависимы, то

$$r = \Delta x.$$

Но обычно $r > \Delta x$, и это происходит из-за наличия в погрешностях наблюдений, кроме некоррелируемых между соседними точками измерений помех (ошибка в отсчете, ошибка в нивелировке и др.), случайной составляющей, коррелируемой между несколькими пунктами наблюдений. Последняя может быть обусловлена неравномерными в течение рейса условиями транспортировки, неравномерным изменением температуры, неравномерными атмосферными условиями (ветер, дождь), ошибками учета нуль-

пункта и др. Для определения более правильных законов изменения автокорреляционной функции, энергетического спектра ошибок наблюдений и оценки соотношения между r и Δx были получены экспериментальные данные погрешностей наблюдений с гравиметрами (выборка из 400 значений).

Анализ этих данных показал, что их наилучшим образом можно аппроксимировать выражением

$$B_{\text{п}}(\tau) = B_{\text{п}}(0)\exp(-\alpha\tau)\cos\beta\tau \qquad (4)$$

при значениях постоянных

$$\alpha = 0{,}80/r, \quad \beta = \pi/2r.$$

Значения радиуса корреляции погрешностей наблюдений r, найденные по этим экспериментальным данным, колеблются от 1,3 Δx до 2,0 Δx (при разных выборках из 400 – при 50, 100, 200 и 400 значениях). При этом среднее и наиболее вероятное значение r = 1,6 Δx (это значение соответствует и кривой автокорреляционной функции, построенной по всем 400 значениям погрешностей наблюдений). Поэтому здесь и в дальнейшем в качестве радиуса корреляции ошибок наблюдений r будет принято это уточненное значение r = 1,6 Δx. Что же касается систематически ошибок, то для определения их радиуса корреляции можно воспользоваться формулой для определения радиуса корреляции суммарного поля, полагая, что

$$f_{\text{п}}(x) = f_{\text{с}}(x) + f_{\text{о}}(x),$$

где индексы «с» и «о» указывают соответственно на случаи систематических ошибок и инструментальных ошибок, не коррелирующих между двумя соседними пунктами наблюдений. При значениях их средних квадратов $B_{\text{с}}(0)$, $B_{\text{о}}(0)$ значение $r_{\text{п}}$ можно определить из равенства

$$r_{\text{п}} = [r_{\text{с}}B_{\text{с}}(0) + B_{\text{о}}(0)\Delta x]/[B_{\text{с}}(0) + B_{\text{о}}(0)].$$

Данные анализа наблюденных погрешностей показывают, что $B_{\text{с}}(0) \approx B_{\text{о}}(0)$. Поэтому

$$r_{\text{п}} = (r_{\text{с}} + \Delta x)/2.$$

Отсюда

$$r_{\text{с}} = 2r_{\text{п}} - \Delta x.$$

Подставляя сюда вместо $r_п$ предельные значения $r_п = 1{,}3\Delta x$ и $r_п = 2\Delta x$, найдем $r_с = 1{,}6\Delta x$ и $r_с = 3\Delta x$, т.е. можно принять, округляя до целых, что $r_с$ меняется примерно от $2\Delta x$ до $3\Delta x$.

Некоторые авторы полагают, что $r_с$ должен меняться от Δx до $2\Delta x$. Более уточненные данные показывают, что $r_с$ меняется от $2\Delta x$ до $3\Delta x$ (значению $r_п = 1{,}6\Delta x$ соответствует величина $r_с = 2{,}2\Delta x$). Эти же данные, как более обоснованные, можно принять за основу при исследованиях в дальнейшем.

Учитывая изложенное выше, в дальнейшем в зависимости от решаемой задачи в качестве автокорреляционной функции ошибок наблюдений будем принимать выражения, определяемые равенствами (1) и (4). Им соответствуют следующие выражения энергетических спектров.

Для равенства (1)

$$Q_п(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_п(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} B_п(0)/a = r_п B_п(0)/\sqrt{2\pi}, \omega_г < a, \\ 0, \omega_г > a, \end{cases}$$

для равенства (4)

$$Q_п(\omega) = \frac{B_п(0)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right].$$

Выражениями (2) и (3) также можно пользоваться, но с целью получения отдельных прикидочных оценок или менее громоздких выражений из интегралов.

Предполагая значения ошибок наблюдений симметричными относительно вертикальной оси, автокорреляционные функции ошибок наблюдений для законов, аналогичных равенствам (1) и (4) двумерного случая, запишем для трехмерных аномалий соответствующими формулами:

$$B_п(\tau)_и = 2 J_1(e\tau)/e\tau,$$

$$B_п(\tau)_и = \exp(-p\tau) J_0(t\tau)$$

при следующих наиболее вероятных значениях постоянных:

$$e = 2{,}4/\Delta x, \quad p = 0{,}5/\Delta x, \quad t = 1{,}5/\Delta x.$$

Для энергетических спектров ошибок наблюдений, определяемых этими равенствами, получим соответственно следующие выражения (из-за громоздкости выражения приводим только значение $Q_п(0)$):

$$Q_п(\rho) = \int_0^\infty B_п(\tau) J_0(\rho\tau)\tau d\tau = \begin{cases} 2B_п(0)/e^2 & \text{при } \rho < e, \\ 0 & \text{при } \rho > e; \end{cases}$$

$$Q_п(0) = P/(P^2 + t^2)^{3/2}.$$

Литература: [11, 13, 14, 16].

ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИТЯЖЕНИЯ В РЯДЫ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра. Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

где C – произвольная постоянная. При $C = 1/2^n \cdot n!$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Этот многочлен называется многочленом или полиномом Лежандра, а формула называется формулой Родрига.

Рассмотрим рис. 80, где $MP = r$, $OM = R$, $OP = \rho$, а угол $\angle MOP = \theta$; начало координат расположено в точке O; M – переменная точка интегрирования, в которой находится масса (точка M может быть внутри тела, на его поверхности, на какой-то линии, например при рассмотрении потенциалов притяжения объемных масс, простого слоя, линейных масс, или просто где-то в пространстве, например потенциал притяжения точечной массы). Точка P – это та фиксированная точка, в которой расположена единичная масса или в которой ищется значение потенциала.

Расстояние r – это расстояние между двумя точками $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $P(x, y, z)$.

Функцию $1/r$ легко представить в виде ряда сферических простейших функций – полиномов Лежандра [12]. Учитывая, что $1/r$ входит в формулы потенциалов притяжения всех рассмотренных видов, получаемый для $1/r$ ряд многочленов Лежандра можно использовать и при представлении этих потенциалов притяжения в виде ряда многочленов Лежандра.

Для функции $1/r$ при $\rho < R$ получим

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta).$$

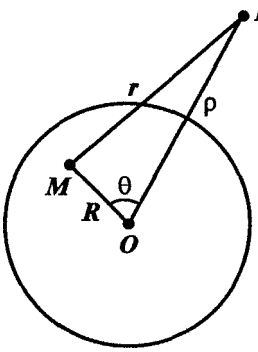


Рис. 80. Схема расположения точек *O*, *M*, *P* относительно сферы

Этот ряд является рядом сферических функций, а конкретнее – рядом полиномов Лежандра. Он сходится равномерно при всех значениях $\rho/R < 1$ или $\rho < R$ и при $0 \le \theta \le \pi$.

Если $\rho/R > 1$, т.е. $\rho > R$, то получим ряд

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

Область сходимости этого ряда определяется областью сходимости ряда Маклорена – он сходится равномерно при всех значениях

$$\rho/R > 1 \text{ или } \rho < R \text{ и } 0 \le \theta \le \pi.$$

Рассмотрим разложение других видов потенциалов притяжения в ряды полиномов Лежандра. В случаях, когда поле является симметричным относительно вертикальной оси z, можно перейти от разложения потенциала притяжения точечной массы в ряды полиномов Лежандра к более общим задачам. Применение полиномов Лежандра в этих случаях основано на использовании следующей аналогии.

Предположим, что потенциал напряжения $V(\rho, \theta)$ представлен в виде равномерно сходящегося для всех значений ρ и θ ряда

$$V(\rho,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\rho^n}{R^n} P_n(\cos\theta), \quad \rho < R$$

или

$$V(\rho,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad \rho > R,$$

где A_n и B_n – некоторые постоянные числа.

Каждый член этих рядов является гармонической функцией координат точки P. При $\theta = 0$ значения $P_n(\cos\theta) = 1$, $\rho = z$, поэтому для точек положительной части оси z получим

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n / R^n, \quad z < R$$

или

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{n+1} / z^{n+1}, \quad z > R.$$

На основании этих формул, если известно, что функция $V(\rho, \theta)$ является симметричной относительно оси z, и если заданы ее значения в точках этой оси, т.е. значения $V(\rho, \theta) = V(z)$ и представлены они в виде указанного ряда по степеням z^n или $1/z^{n+1}$, то механически с использованием коэффициентов этого ряда A_n или B_n можно перейти к более общим рядам с полиномами Лежандра, т.е. случаю $\theta \neq 0$. Таким путем можно найти функцию $V(\rho, \theta)$ гармоническую внутри или же вне сферы радиуса R. Для этого достаточно заменить в них значения

$$z^n \text{ на } \rho^n P_n(\cos\theta) \text{ при } \rho < R$$

или

$$1/z^{n+1} \text{ на } (1/\rho^{n+1}) P_n(\cos\theta) \text{ при } \rho > R.$$

Литература: [13, 15, 16].

ПОЛОСОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Полосовые фильтры – это фильтры, назначенные для выделения аномалии или ее отдельных составляющих в определенной полосе частот. Виды частотных характеристик полосовых фильтров показаны на рис. 81. Результаты применения таких фильтров зависят от формы частотной характеристики, значения частоты максимального значения частотной характеристики ω_0, значения разности $\omega_2 - \omega_1$, максимального значения самой частотной характеристики и др. Меняя значения этих параметров, можно построить полосовые фильтры, чувствительные к составляющим аномалий, занимающие различные полосы частот.

Реализовать на практике полосовые фильтры можно таким же образом, как и другие фильтры. Например, разлагая в ряды косинусов частотную характеристику прямоугольного полосового фильтра, для определения коэффициентов вычислительной схемы

$$U_\tau(0) = \sum_{k=0} C_k \overline{U(x_k)}$$

получим следующие выражения:

$$C_0 = \frac{A}{l}(\omega_2 - \omega_1),$$

$$C_k = \frac{2A}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi\omega_2}{l} - \sin\frac{k\pi\omega_1}{l}\right),$$

где A – максимальное значение частотной характеристики; l – граничная частота.

В гравиразведке и магниторазведке к полосовым фильтрам относятся также и оптимальные фильтры, выделяющие полезную аномалию на фоне мешающей более низкочастотной (региональной) аномалии и ошибок наблюдений, и способы вычисления производных на некоторой высоте. В последнем случае при вычислении вертикальных производных порядка n на высоте H частотная характеристика полосового фильтра имеет вид

$$\Phi(\omega) = |-\omega|^n \exp(-|\omega|H). \qquad (1)$$

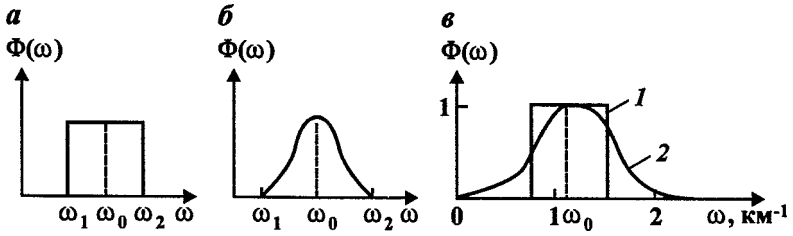


Рис. 81. Частотные характеристики полосовых фильтров:
а – прямоугольной формы; *б* – колокольной формы; *в* – аппроксимация частотной характеристики прямоугольного фильтра: *1* – точная; *2* – приближенная (аппроксимирующая точную)

Графики изменения этой функции при $n = 2$ и $H = 1{,}0$, $1{,}2$ и $2{,}0$ приведены на рис. 82. Аналогично для трехмерных аномалий

$$\Phi(\rho) = (-\rho)^n \exp(-\rho H).$$

Формулы для определения коэффициентов вычислительной схемы для частотной характеристики (1) при $n = 2$ имеют вид

$$C_0 = [2/t - e^{-t}(2 + t + 2/t)]/H^2,$$

$$C_k = \frac{2}{(d^2+1)H^2}\left\{(-1)^k e^{-t}\left[-t + 2\frac{d^2-1}{d^2+1} + \frac{2}{t}\frac{3d^2-1}{(d^2+1)^2}\right] - \frac{2}{t}\frac{3d^2-1}{(d^2+1)^2}\right\},$$

где $t = \pi H/\Delta x$; $d = k\Delta x/H$; $\Delta x = \pi/l$. С учетом этих выражений саму вычислительную схему, определяющую значения вторых вертикальных производных на высоте $H = \Delta x$, можно записать в виде

$$U_T(0) = (1/\Delta x^2)[0{,}389U(0) - 0{,}197\overline{U(\Delta x)} - 0{,}142\overline{U(2\Delta x)} -$$

$$-0{,}020\overline{U(3\Delta x)} - 0{,}018\overline{U(4\Delta x)} - 0{,}011\overline{U(5\Delta x)}]. \qquad (2)$$

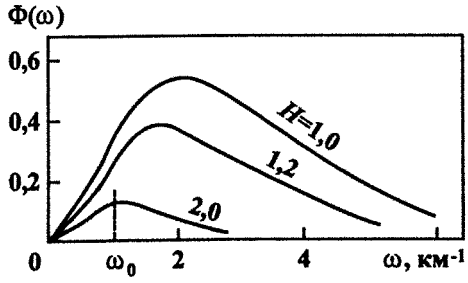


Рис. 82. Частотные характеристики точных способов вычисления второй вертикальной производной по высоте *H*

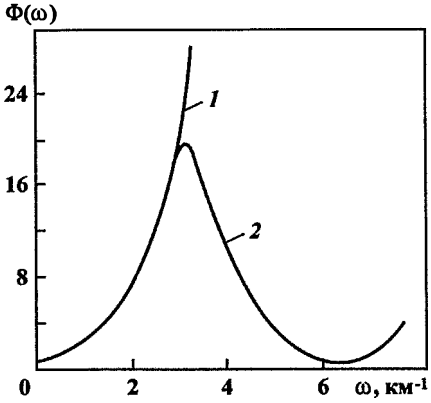


Рис. 83. Частотные характеристики способа аналитического продолжения аномалий в нижнее полупространство на глубину $H = 1$ км: *1* – точная; *2* – способ Рейнбоу

Основные преимущества полосовых фильтров, в частности способов вычисления высших производных на высоте, – их избирательность к определенным частотам и малая чувствительность к ошибкам наблюдений – были известны давно. Но широко они на практике не применялись. В тех случаях, когда вычисляли первую или вторую вертикальные производные на высоте, счет велся в два этапа – вначале аналитически продолжали исходную аномалию, затем вычисляли значения производных, или наоборот. Получаемые таким путем данные дважды осложнялись погрешностями счета. В настоящее время универсальные способы получения вычислительных схем дают возможность получить расчетные формулы, объединяющие два этих различных этапа в один – одной операцией выполняется и аналитическое продолжение и вычисление производных. Примером является формула (2). Малую чувствительность этой формулы к погрешностям наблюдений увидим, если сравним значения ее коэффициентов с коэффициентами вычислительной схемы, имеющей такую же граничную частоту $\omega_г = \pi/\Delta x$ для случая $H = 0$. Значения таких коэффициентов в несколько раз больше, чем в формуле (2).

К полосовым фильтрам можно отнести и некоторые вычислительные схемы способов аналитического продолжения аномалий в нижнее полупространство и вычисления высших производных на уровне $H = 0$, применяемые на практике. Это видно из рис. 83, кривую *2* на котором (частотная характеристика способа Рейнбоу) можно рассматривать как некоторой полосовой фильтр со значением $\omega_0 = \pi$. При этом вторым пиком, максимальное значение которого достигается при $\omega = 3\pi$, можно пренебречь из-за достаточной его удаленности от начала координат.

Литература: [11, 14, 16].

ПОТЕНЦИАЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Условия потенциальности поля. Обозначим через $\vec{F}$ вектор, соответствующий градиенту рассматриваемого скалярного поля V:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}.$$

Отсюда видно, что скалярное поле V порождает поле векторов $\vec{F}$. Такое векторное поле называется потенциальным, а скалярная функция V называется потенциалом поля $\vec{F}$. Отсюда следует, что

$$F_x = \partial V/\partial x, \quad F_y = \partial V/\partial y, \quad F_z = \partial V/\partial z, \tag{1}$$

т.е. потенциал поля V является функцией, частные производные которой по направлениям осей координат x, y, z равны проекциям силы $\vec{F}$ на эти же оси координат. Для существования потенциала необходимо выполнение условий, которые равносильны тому, что выражение

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

будет полным дифференциалом некоторой функции V. Для этого необходимо и достаточно выполнения условия

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0, \tag{2}$$

т.е. выполнение следующих трех условий, вытекающих из равенства нулю координат вектора $\operatorname{rot} \vec{F}$:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, поле называется потенциальным, если его ротор, или вихрь, в точках заданной области равен нулю. И обратно, если для поля $\vec{F}$ выполняется условие (2), т.е. если оно является потенциальным, то всегда найдется такая функция V, что для нее будет выполняться равенство (1). При этом связь между

проекциями вектора $\vec{F}$ и производными функции V по осям координат будет осуществляться по равенствам (1). Отсюда следует, что расчет потенциального поля $\vec{F}$ можно заменить расчетом его потенциала V. От последнего можно перейти к полю $\vec{F}$ дифференцированием функции V по координатам рассматриваемой точки. Практический смысл такого применения потенциала V состоит в том, что рассчитать и исследовать скалярное поле проще, чем векторное поле $\vec{F}$, определяемое совокупностью трех скалярных полей его компонент F_x, F_y и F_z.

Если исследуемое поле $\vec{F}$ является двумерным или плоским, то условие потенциальности поля rot $\vec{F}$ = 0 перепишется в декартовых координатах в следующем виде:

$$\partial F_x/\partial z = \partial F_z/\partial x.$$

Физический смысл потенциала. Для выяснения физического смысла потенциала запишем

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(l,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(l,y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(l,z).$$

Здесь косинусы являются направляющими косинусами линии l, поэтому с учетом равенства (1) получим

$$\frac{\partial V}{\partial l} = F_x\cos(l,x) + F_y\cos(l,y) + F_z\cos(l,z) = |\vec{F}|\cos(F,l) = F_l,$$

где F_l – проекция вектора $\vec{F}$ на направление l.

Отсюда видно, что производная потенциала по произвольному направлению равна составляющей вектора $\vec{F}$ по этому же направлению. Кроме того, из последнего равенства видно, что приращение $\partial V = F_l\,\partial l$.

Если здесь $\vec{F}$ – сила, то произведение силы F_l на путь ∂l равно работе. Поэтому приращение потенциала ∂V равно работе, которая производится силой при перемещении единичной массы из одной точки в другую на расстояние ∂l. На основании этого потенциал будет равен работе, совершаемой силой при перемещении единичной массы из некоторой точки r_0 в точку r.

Предположим теперь, что функция V такая, что $V \to 0$ при $r_0 \to \infty$. Примем, что в отдельности $x_0 \to \infty$, $y_0 \to \infty$ и $z_0 \to \infty$. В этом случае $V(r_0) = 0$. Равны нулю и значения $F_x(x, \infty, \infty)$, $F_y(x, y, \infty)$. Поэтому для таких функций значения V можно определить из следующей формулы:

$$V(x, y, z) = \int_{-\infty}^{z} F_z(x, y, z)dz.$$

Аналогично в двумерном случае

$$V(x, z) = \int_{\infty}^{z} F_z(x, z)dz.$$

В заключение отметим, что в отличие от рассмотренного потенциала существует еще и понятие ***векторного потенциала***. Для случая вихревого поля $\vec{F}$ можно найти такой вектор, что всегда

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{C} = 0.$$

В этом равенстве $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{C}$; вектор $\vec{C}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{F}$. В отличие от векторного потенциала рассмотренный выше обычный потенциал называется ***скалярным***. Просто термин «потенциал» относится только к скалярному потенциалу. Необходимым условием существования векторного потенциала является условие равенства нулю дивергенции вектора $\vec{F}$. Векторный потенциал поля $\vec{F}$ является некоторой вспомогательной функцией, практическое применение которой заключается в том, что изучение векторного поля $\vec{F}$ сводится к изучению некоторого другого векторного поля $\vec{C}$. Такая замена одного исследуемого вектора другим облегчает процесс изучения, а иногда позволяет решать более просто ряд трудных задач.

Литература: [14, 16].

ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ И СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

1. ОБЪЕМНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ И ТОЧЕЧНАЯ МАССЫ

Будем считать, что массы, занимающие некоторую заданную область пространства (объем v), распределены в ней непрерывно с некоторой объемной плотностью σ таким образом, что существует предел

$$\lim_{\Delta v \to 0} (\sigma \Delta v) = \Delta m,$$

где Δv и Δm – элементы объема и массы, взятые с центром в некоторой точке объема $M(\xi, \eta, \zeta)$. Отсюда

$$\sigma = dm/dv.$$

Здесь плотность σ является функцией точки M, т.е. координат точки (ξ, η, ζ). Она всюду внутри поверхности S, ограничивающей объем v, является непрерывной и ограниченной функцией. Вне поверхности S она равна нулю, т.е. при переходе из внутренней области во внешнюю значение плотности меняется скачкообразно. Общая масса тела

$$m = \int_v \sigma dv.$$

Если значение плотности постоянное, то

$$m = \sigma v.$$

В случаях когда размерами тела можно пренебречь, т.е. когда расстояние между наиболее удаленными двумя точками тела намного меньше, чем r (r – расстояние между точкой M и точкой P, в которой рассматривается притяжение тела), массу тела можно принять за точечную и помещенную в точку.

2. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

Пусть задана область пространства v, ограниченная замкнутой поверхностью S. Переменную точку в области v обозначим через $M(\xi, \eta, \zeta)$. Будем считать, что точка M принадлежит массам и является центром притяжения, и потому будем называть ее притягивающей. И пусть точка P с координатами x, y, z является точкой, которая подвергается действию сил, т.е. является притягиваемой. Точка $P(x, y, z)$ обычно является фиксированной, она может находиться внутри поверхности S, на поверхности S или вне поверхности S.

Будем рассматривать силу притяжения как вектор, приложенный к точке P и направленный к точке M (к массам). За положительное направление радиуса-вектора r примем (там, где это специально не оговаривается) направление от точки M к точке P (от масс к притягиваемой точке), т.е. начало его будем совмещать с точкой $M(\xi, \eta, \zeta)$, а конец – с точкой $P(x, y, z)$:

$$\vec{r} = (x-\xi)\vec{i} + (y-\eta)\vec{j} + (z-\zeta)\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, имеющие направления осей координат; $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ – составляющие радиуса-вектора по осям координат.

Пусть в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ находится частица с массой m, а в точке $P(x, y, z)$ – единичная масса. В этом случае на точку P действует сила, равная (по закону Ньютона)

$$\vec{F} = -G\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

где G – гравитационная постоянная. Знак минус в этой формуле учитывает тот факт, что $\vec{F}$ и $\vec{r}$ направлены по одной и той же линии, но в противоположном направлении.

Потенциалом притяжения этой функции, который удовлетворяет условию

$$\vec{F} = \operatorname{grad} V,$$

является функция

$$V(P) = Gm/r. \tag{2}$$

Таким образом, потенциалом векторного поля (1) является функция, определяемая равенством (2). Это и есть потенциал массы m, заключенный в точке M (точечной массы), т.е. так называемый точечный потенциал силы притяжения или ***потенциал***

притяжения точечной массы. Значение этого потенциала, как видно, обратно пропорционально расстоянию r.

Отметим некоторые свойства потенциала точечной массы (2). Функция $V(P)$ конечная, непрерывна и однозначна во всем пространстве, за исключением точки M, где она обращается в бесконечность.

Частные производные любого порядка от функции $V(P)$ по координатам точки P также функции конечные, непрерывные и однозначные во всем пространстве, за исключением точки M, где все они обращаются в бесконечность.

Когда точка $P \to \infty$, функция $V(P)$ и любая частная производная от функции V стремятся к нулю. В случае потенциала V это видно из равенства (2) и связано с пределом

$$\lim_{r\to\infty}(1/r) = 0,$$

Во всем пространстве, за исключением точки M, функция V удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Отметим еще, что поверхностями уровня для потенциала притяжения точечной массы являются сферы, центры которых лежат в точке P.

3. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

Пусть задано некоторое конечное число k точек M_1, M_2, ..., M_k, со значениями заключенных в них масс m_1, m_2, ..., m_k (рис. 84).

Пусть r_1, r_2, ..., r_k – расстояния от некоторой фиксированной притягиваемой точки P соответственно до точек M_1, M_2, ..., M_k. Будем считать, что в точке P заключена единичная масса и она не совпадает ни с одной из точек $M_i (i = 1, 2, ..., k)$.

Тогда по закону Ньютона от точек M на точку P будут действовать силы

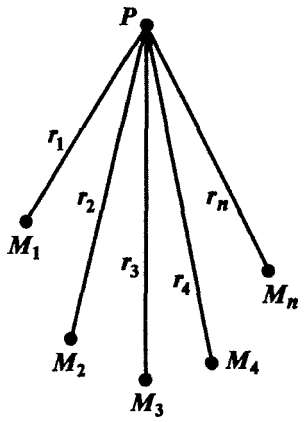
$$F_1 = -G(m_1/r_1^2),$$

$$F_2 = -G(m_2/r_2^2),$$

. . . . . .

$$F_k = -G(m_k/r_k^2).$$

Рис. 84. Точки M_i и расстояние между ними и точкой P



По правилу сложения сходящихся сил равнодействующая этих сил на точку P

$$F(P) = -G\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2} + \ldots + \frac{m_k}{r_2^k}\right) = G\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{r_i^2}. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что эти выражения F_x, F_y и F_z будут равны частным производным по осям координат x, y и z от функции

$$V(P) = G\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{r_i}, \qquad (4)$$

которая является потенциалом функции (3). Эту функцию $V(P)$ можно рассматривать как сумму потенциалов притяжения всех точечных масс данной материальной системы:

$$V = \sum_{i=1}^{k} V_i, \quad V_i = G\frac{m_i}{r_i}.$$

Потенциал, выраженный формулой (4) определяет потенциал притяжения системы точечных масс. Он обладает всеми перечисленными выше свойствами потенциала притяжения точечной массы. Надо только из области действия силы $\vec{F}$ и ее потенциала исключить не одну точку M, как выше, а все k точек M_i. Во всех этих точках функции F, F_x, F_y, F_z и V обращаются в бесконечность, и поэтому рассмотренные выше свойства действуют во всех точках пространства, кроме точек M_i. Некоторые из этих свойств рассмотрены более подробно в работе [15].

Что же касается уровенной поверхности, то она даже для системы, состоящей из двух точек, имеет сложный вид, но обладает всегда тем свойством, что направление равнодействующей сил притяжения, действующих на точку P, совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку. Это следует из равенств

$$\vec{F} = \text{grad } V, \quad \vec{F} = (\partial V/\partial n)\,\vec{n}_1$$

и

$$\partial F/\partial l = (\partial V/\partial n)\cos(l, n),$$

где $\vec{n}$ – нормаль в точке P к уровенной поверхности функции V; $\vec{n}_1$ – единичный вектор, имеющий направление этой нормали; l – некоторое произвольное направление.

Первое из этих равенств говорит о том, что в потенциальном поле вектор $\vec{F}$ всегда направлен по направлению нормали к уровенной поверхности функции V, а из первого и второго равенств следует, что вектор $\vec{F}$ всюду имеет направление наиболее интенсивного изменения потенциала V.

Литература: [6, 12, 14, 15].

ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ МАСС, ОДНОРОДНЫХ ШАРА И ШАРОВОГО СЛОЯ

1. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ МАСС

Рассмотрим более сложный случай, когда притягивающая система состоит из бесчисленного множества материальных точек (материальных частиц), т.е. представляет собой непрерывно протяженное материальное тело.

Пусть внутри области v находится сплошное распределение масс. Плотность распределения масс σ меняется от точки к точке, т.е. является функцией координат точки. Пусть с уменьшением элемента объема Δv количество заключенной в ней массы $\Delta m \to 0$, таким образом, что

$$\lim_{\Delta v \to 0} (\Delta m / \Delta v) = \sigma,$$

т.е. масса m является не только непрерывной, но и дифференцируемой функцией координат. В этом случае производная от массы по объему приобретает значение плотности, т.е. можем написать, что

$$dm/dv = \sigma \quad \text{или} \quad dm = \sigma dv.$$

Принимая элемент объема за материальную точку, совпадающую с точкой M и обладающую массой dm, получим

$$dV = G(dm/r),$$

где через dV обозначен потенциал силы, с которой рассматриваемый элемент объема притягивает некоторую точку P, в которой находится единичная масса (точка P (рис. 85) может находиться вне масс, на поверхности и внутри масс). Заменив каждый элемент объема материальной точкой, получим систему неподвижных материальных точек. Так как потенциал системы точек равен сумме потенциалов составляющих точек, то суммируя значе-

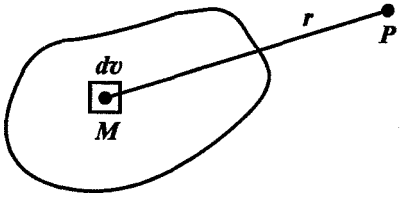


Рис. 85. Взаимное расположение точек M и P при выборе потенциала притяжения объемных масс

ние dV по всем элементарным объемам в пределе, когда $\Delta v \to 0$, а количество элементарных областей неограниченно возрастает, получим

$$V(P) = \int_v G\,dm/r = G\int_v \sigma\frac{dv}{r}. \qquad (1)$$

Это выражение и определяет потенциал притяжения объемных масс. Рассмотрим его основные свойства. Прежде всего отметим, что потенциал притяжения объемных масс в отличие от точечного, никогда не обращается в бесконечность, даже тогда, когда точка P лежит внутри области v (в этом случае расстояние r от точки P до одной из точек, в которой находится масса dm, обращается в нуль, из-за чего $1/r \to \infty$, но значение потенциала имеет конечную величину. Это будет показано в дальнейшем).

Потенциал притяжения объемных масс для всех точек пространства, расположенных вне притягивающих масс, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 + \partial^2 V/\partial z^2 = 0.$$

В этом легко убедиться, определив из выражения (1) соответствующие значения вторых производных.

Во всех внутренних точках объема v потенциал притяжения объемных масс

$$V = G\int_v \sigma\frac{dv}{r}$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi G\sigma.$$

Верна и теорема, обратная теореме Пуассона, а именно, если функция V, непрерывная во всем пространстве вместе с ее первыми производными, гармоническая вне области v и регулярная на бесконечности, удовлетворяет внутри v уравнению Пуассона,

то V является потенциалом притяжения объемных масс, распределенных в объеме v с плотностью σ, т.е. функцией

$$V = G\int_v \sigma \frac{dv}{r}.$$

Потенциал притяжения объемного тела также является функцией, регулярной на бесконечности, т.е.

$$\lim_{r\to\infty}(r,V) = Gm,$$

где m – общая масса рассматриваемого объемного тела. При этом сама функция V стремится у нулю:

$$\lim_{r\to\infty} V = 0.$$

Можно также показать, что для потенциала притяжения объемного тела

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = Gm.$$

Значения рассмотренных пределов дают право утверждать, что в случаях, когда расстояние r намного больше по сравнению с линейными размерами тела объема v произвольной формы, справедливы следующие приближенные равенства:

$$V \approx Gm/r, \quad \partial V/\partial r \approx -G\frac{m}{r^2},$$

где $m = \int_v dm$ – суммарная масса тела.

Таким образом, любое тело, когда точка P достаточно удалена от него, притягивает к себе совершенно так же, как и материальная точка M с массой m, удаленной от точки P на расстояние r. При этом точку M можно поместить в центр массы тела. На основании значений указанных пределов следует заключить, что, во-первых, потенциал объемных масс и его первая производная являются функциями координат точки P, ограниченными и непрерывными во всем пространстве и, во-вторых, при удалении точки P в бесконечность функция $V(P)$ стремится к нулю, как $1/r$, а функция $\partial V/\partial r$ стремится к нулю как $1/r^2$.

Рассмотрим несколько наиболее важных частных случаев формулы (1).

2. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ШАРА

Выражение потенциала притяжения объемных масс в каждой данной точке P зависит от формы тела, от его внутреннего строения. Интеграл (1) вычисляется в элементарных функциях только для отдельных тел простейшей формы. Рассмотрим его значение для однородного по плотности шара.

Из выражения потенциала притяжения объемных масс при постоянном значении σ легко определить выражение потенциала притяжения однородного шара радиуса R:

$$V(P)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}G\dfrac{m}{R}\left(1-\dfrac{\rho^2}{3R^2}\right), & \rho\le R,\\[2ex] G\dfrac{m}{\rho}, & \rho>R,\end{cases} \tag{2}$$

где m – масса шара.

Отсюда видно, что потенциал притяжения однородного шара для внешней по отношению к нему точки равен потенциалу притяжения точки с массой, равной массе шара и расположенной в его центре, т.е. однородный шар притягивает внешнюю точку так, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре. Это верно и для любого неоднородного шара, но состоящего из однородных концентрических слоев.

Функция (2) обладает всеми рассмотренными выше свойствами потенциала притяжения объемных масс. Рассмотрим некоторые из них на этом примере. Функция (2) ограничена и непрерывна во всем пространстве (и внутри шара, и вне его). При этом

$$V(0)=\frac{3}{2}G\frac{m}{R},\quad V(R)=G\frac{m}{R}$$

и при $\rho\to\infty$ значение $V\to 0$. Характер убывания этой функции (при $R=1$) показан на рис. 86, *а*.

Рассмотрим теперь характер изменения первых и вторых производных функций $V(P)$ по ρ (ρ совпадает с направлением нормали). Получим

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\begin{cases}-Gm\rho/R^3, & \rho\le R,\\ -Gm/\rho^2, & \rho>R,\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}=\begin{cases}-Gm/R^3, & \rho\le R,\\ 2Gm/\rho^3, & \rho>R.\end{cases}$$

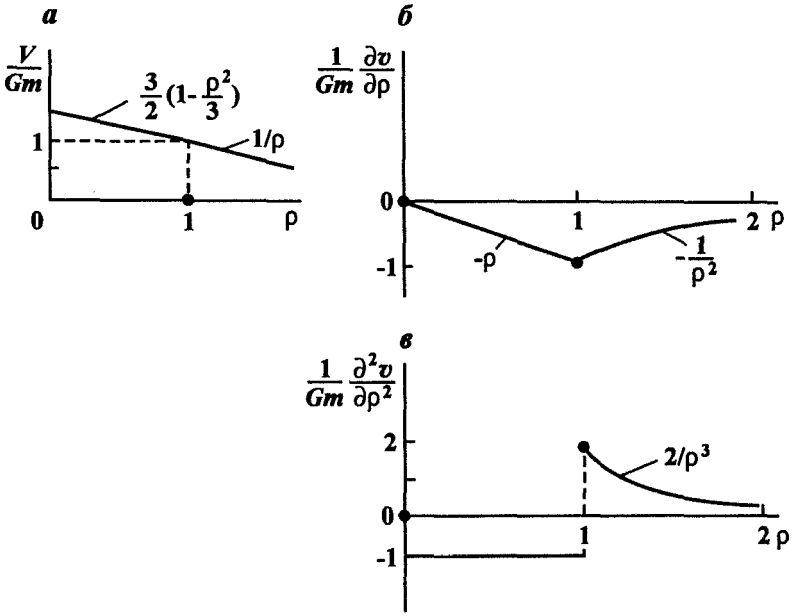


Рис. 86. Графики зависимости потенциала (*а*), производной первого порядка (*б*), производной второго порядка (*в*) от потенциала притяжения однородного шара

Исследуя характер изменения этих функций, можно отметить следующее (рис. 86, *б* и *в* – при $R = 1$). Первая производная потенциала является отрицательной функцией, ограничена во всем пространстве, на границе шара не терпит разрыва, в бесконечности равна нулю и, кроме того,

$$\partial V(0)/\partial\rho = 0, \quad \partial V(R)/\partial\rho = -Gm/R^2.$$

Вторая производная от V по ρ является знакопеременной функцией, на границе шара терпит разрыв, внутри шара равна постоянной величине. Скачок функции на границе шара при переходе точки P из внутренней области во внешнее пространство составляет

$$B = -Gm/R^3 - 2Gm/R^3 = -3Gm/R^3.$$

Так как $m = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma$, то

$$B = -4\pi G\sigma.$$

Эта величина соответствует тому, что внутри шара (внутри масс) функция V удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma,$$

вне шара (вне масс) – уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0.$$

В декартовых координатах, если возьмем начало координат на горизонтальной плоскости наблюдений, обозначим координаты центра шара через ξ, η, ζ, а координаты точки P, в которой рассматриваем значения поля, через x, y, z, то выражение потенциала притяжения шара для внешних точек запишем в следующем виде:

$$V(x,y,z) = Gm/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} = Gm/r.$$

Располагая начало координат над центром шара ($\xi = \eta = 0$), беря производную по z и полагая после этого $z = 0$, получим

$$V_z(x, y, 0) = \partial V/\partial z = Gm\zeta/r^3.$$

Аналогично можно определить значения и других производных различных порядков (в гравиразведке и магниторазведке принято обозначать производные с индексами при потенциалах, т.е. $V_{xz} = \partial^2 V/\partial x \partial z$, $V_{zz} = \partial^2 V/\partial z^2$ и т.д.), например при $\xi = \eta = 0$

$$V_{xz}(x, y, 0) = -3Gmx\zeta/[x^2 + y^2 + \zeta^2]^{5/2},$$

$$V_{zz}(x, y, 0) = Gm(2\zeta^2 - x^2 - y^2)/[x^2 + y^2 + \zeta^2]^{5/2}.$$

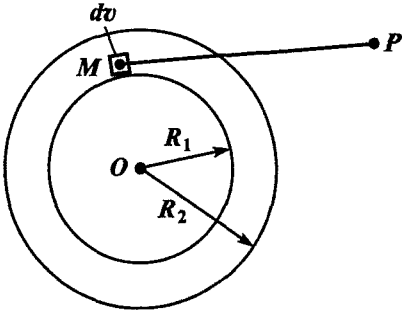
В гравиразведке и магниторазведке потенциал не является непосредственно измеряемой величиной, измеряются значения только его некоторых производных.

3. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ШАРОВОГО СЛОЯ

Потенциал притяжения однородного по плотности шарового слоя, заключенного между сферами с радиусами R_1 и R_2 (рис. 87) определяется выражением [15]

$$V(P) = \begin{cases} 2\pi G\sigma(R_2^2 - R_1^2), & \rho \le R, \\ \frac{4}{3}\pi G\sigma\frac{1}{\rho}(R_2^3 - R_1^3), & \rho > R. \end{cases}$$

Рис. 87. Шаровой слой и элемент объема в нем



Отсюда видно, что для случая внутренних точек потенциал притяжения является постоянной величиной, поэтому однородный шаровой слой не притягивает точки, расположенные в его внутренней полой области (в сфере радиуса R_1). Что же касается внешних точек, то легко показать, что однородный шаровой слой массы m притягивает их как точечная масса m, расположенная в его центре.

Можно показать, что все приведенные формулы будут верны не только для одного слоя, но и для любого конечного числа шаровых слоев с центром в одной и той же точке. При этом можно допускать, что слои неоднородные и их плотности могут меняться в направлении нормали к поверхности. Например, если взять k однородных шаровых слоев, то для случая внешней по отношению к ним точки P (внешняя по отношению к сфере наибольшего радиуса) их суммарной потенциал притяжения будет определяться выражением

$$V = G(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)/\rho = \frac{G}{\rho}\sum_{i=1}^{k} m_i,$$

где m_i – масса i-го слоя.

Любой шаровой слой или полный шар, в котором плотность меняется только в зависимости от ρ (по направлению нормали к поверхности), можно представить в виде ряда бесконечно тонких однородных слоев. Тогда для всего шарового слоя или шара

$$V = G\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{k} m_i = Gm/\rho,$$

где i – номер любого элементарного тонкого слоя; m – масса всего шарового слоя или шара. Эти же формулы можно использовать и для нахождения значения силы притяжения.

Зная потенциал, силу притяжения можно определить из равенства

$$\vec{F} = \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}.$$

Проекции силы по направлениям осей координат можно определить из выражений

$$F_x = \partial V/\partial x, \quad F_y = \partial V/\partial y, \quad F_z = \partial V/\partial z.$$

Литература: [3, 6, 14, 15].

ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРОСТОГО СЛОЯ И ЛИНЕЙНЫХ МАСС

Поверхностная масса. Примем, что массы распределены на некоторой поверхности S в виде тонкого слоя толщиной h. Предположим, что когда толщина слоя бесконечно уменьшается, существует предел

$$\lim_{h \to 0} \sigma h = \mu.$$

Величина μ – плотность масс, конденсированных на поверхность S. Она называется поверхностной плотностью распределения масс или массой единицы поверхности тела. Величина μ является непрерывной и конечной функцией координат текущей точки M поверхности S. Поверхностная плотность имеет реальное применение, когда рассматривают тела, один из трех размеров которых мал по сравнению с другими – материальный диск, материальные полосы и др.

Всю массу, распределенную на поверхности S, можно определить из равенства

$$m = \int_S \mu \, dS.$$

Если $\mu = \text{const}$, то

$$m = \mu S.$$

1. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРОСТОГО СЛОЯ

Допустим, что действующие массы сосредоточены на поверхности S (она может быть и замкнутой и не замкнутой) в виде слоя незначительной толщины h (рис. 88). Пусть dS – элемент поверхности слоя. Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка $dv = hdS$. Примем, что при $h \to 0$ поверхностная плотность распределения масс на S равна μ (μ – непрерывная и конечная функция координат точки M на поверхности S).

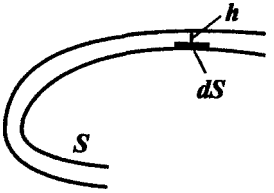


Рис. 88. К выводу потенциала притяжения простого слоя

Если применить к такому заданному слою формулу потенциала притяжения объемных масс, то при заданных условиях интеграл превратился в интеграл по поверхности, и окончательно получим

$$V(P) = \lim_{h\to 0} G \int_v \sigma \frac{dv}{r} = G \int_S (\lim_{h\to 0} \sigma h) \frac{dS}{r} = G \int_v \mu \frac{dS}{r}.$$

Эта функция носит название потенциала притяжения простого слоя (в отличие от потенциала так называемого двойного слоя, который рассмотрим в дальнейшем), лежащего на поверхности S, и для любой точки, не принадлежащей поверхности S, является конечной, непрерывной и однозначной функцией координат и имеет непрерывные частные производные любого порядка. Последние можно получить, дифференцируя выражения потенциала под знаком интеграла.

Рассмотрим потенциал притяжения простого слоя для некоторых наиболее важных случаев поверхностей.

1.1. ОДНОРОДНЫЙ МАТЕРИАЛЬНЫЙ ДИСК

Потенциал притяжения масс однородного по плотности кругового материального диска радиуса R в точке P, расположенной на прямой, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости (рис. 89) определяется выражением [15]

$$V(P) = G\mu \int_v \frac{dS}{r} = G\mu \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} = 2\pi G\mu \int_0^R \frac{\rho dR}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} =$$

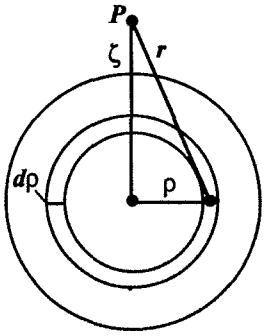
$$= 2\pi G\mu (\sqrt{R^2+\varphi^2} - |\zeta|).$$

В центре диска при $\zeta = 0$

$$V = 2\pi G\mu R.$$

Определим теперь величину проекции силы притяжения в точке P. Получим:

Рис. 89. Однородный круглый материальный диск и расстояния ρ и r



$$F_z = G\mu \int_v \frac{\zeta dS}{r^3} = G\mu \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\zeta \rho d\rho d\varphi}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}} = 2\pi G\mu \left(\frac{1}{|\zeta|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+\zeta^2}} \right).$$

Эта функция во всех точках оси диска, за исключением его поверхности, является конечной, непрерывной и однозначной; в бесконечности равна нулю. На поверхности диска она испытывает разрыв непрерывности, при переходе через поверхность величина скачка в значениях функции равна $4\pi G\mu$.

1.2. ОДНОРОДНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ СЛОЙ

Пусть S однородный сферический слой радиуса R (μ = const). Для этого случая потенциал притяжения определяется формулой [3, 14]:

$$V(P) = \begin{cases} Gm/R \text{ при } \rho \le R, \\ Gm/\rho \text{ при } \rho > R. \end{cases}$$

Это же выражение можно было получить и из равенств для однородного шара, полагая для внутренних точек $\rho = R$ и заменяя в них массу массой сферического слоя.

Из полученного равенства видно, что потенциал однородного сферического слоя для внутренней точки является постоянной величиной, не зависит от ρ и поэтому однородный сферический слой внутреннюю точку не притягивает.

Это замечательное положение было впервые высказано Ньютоном. Справедливость этого положения геометрически можно понять из следующего. Пусть P – данная внутренняя точка. Возьмем на поверхности сферы произвольный по очертанию бесконечно малый контур, ограничивающий элемент поверхности dS_1 (рис. 90). Проведем из всех точек этого контура прямые че-

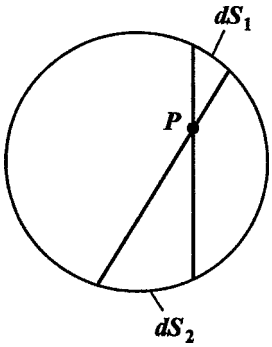


Рис. 90. Взаимное расположение элементов поверхности dS_1 и dS_2 на сферическом слое

рез точку P и продолжим их до пересечения со сферическим слоем. Тогда на противоположной стороне рассматриваемого сферического слоя получим контур элемента поверхности dS_2. Ньютоном геометрически было доказано, что силы притяжения масс элементов поверхности dS_1 и dS_2 равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому притяжение каждого элемента сферического слоя будет уравновешиваться притяжением противоположного элемента; тогда все силы притяжения друг друга уравновесят, и никакого действия на точку не останется. Но на внешнюю точку они действуют так, как будто вся масса сферического слоя заключена в его центре (т.е. как материальная точечная масса m).

Рассмотрим, как меняются производные первого порядка функции V. Рассмотрим только производную по ρ (ρ совпадает с направлением нормали)

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \begin{cases} 0 & \text{внутри } S, \\ -Gm/\rho^2 & \text{вне } S. \end{cases}$$

Полученные значения силы притяжения (первая и вторая строки формулы) подтверждают, что однородный сферический слой не притягивает внутреннюю точку и что внешнюю точку притягивает так, как если бы вся масса этого слоя была сосредоточена в его центре (как точечная масса). Кроме того, из последних двух формул видно, что при переходе через сферический слой (на границе) потенциал однородного сферического слоя не терпит разрыва, т.е. он является непрерывной функцией координат. Но первая же производная по ρ уже терпит разрыв. При этом разность между значениями производных на поверхности слоя равна (при $\rho = R$)

$$\alpha = -Gm/\rho^2 = -Gm/R^2.$$

Так как $m = 4\pi R^2\mu$, то

$$\alpha = -4\pi G\mu.$$

Таким образом, производная по ρ потенциала однородного сферического слоя при переходе точки P через слой терпит разрыв на величину $-4\pi G\mu$. Это положение верно не только для сферического слоя, но и для слоев несферической формы, причем поверхностная плотность распределения массы μ будет равняться ее значению в той точке, через которую точка P переходит по нормали извне.

Литература: [3, 6, 14, 15].

2. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МАСС

Линейные массы. Если задано тело, двумя размерами которого можно пренебречь по сравнению с третьим (например, шириной и толщиной по сравнению с длиной), то массу такого тела можно принять за линейную, т.е. за массу, распределенную вдоль какой-то линии L. В этом случае элемент поверхности можно записать в виде

$$dS = d\,dl,$$

где dl – элемент дуги (линии); d – толщина тела. В пределе, когда $d \to 0$, значение плотности μ масс, распределенных на поверхности будет стремиться к бесконечности, но так же, как и в рассмотренных выше случаях, примем, что существует предел

$$\lim_{d\to 0}(\mu d) = \lambda.$$

Эта величина λ называется линейной плотностью тела или массой его единицы длины. Она является непрерывной и конечной функцией координат переменной точки линии L. Суммарную массу такой линии можно определить из равенства

$$m = \int_L \lambda\, dl.$$

Если λ – постоянная величина, то

$$m = \lambda L,$$

где L – длина линии.

Возьмем теперь массы, как бы лежащие на бесконечно тонкой линии L. Пусть λ – это масса, приходящаяся на единицу ее длины, или линейная плотность масс (рис. 91).

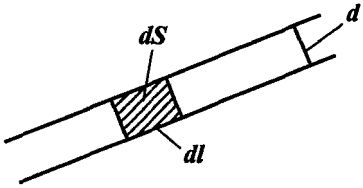


Рис. 91. Линейные массы

Представим линию в виде вытянутой в одну сторону узкой площадки шириной d с распределенными на ней массами, плотность которых (поверхностная) равна μ. Если dl – элемент длины этой площадки, то

$$dS = ddl.$$

Допустим, что при $d \to 0$ значение поверхностной плотности $\mu \to \infty$, но таким образом, что

$$\lim_{d \to 0}(\mu d) = \lambda,$$

причем λ – непрерывная функция координат точки M на поверхности рассматриваемой линии.

Для заданных таким образом масс из выражения потенциала притяжения для простого слоя получим выражение потенциала притяжения линейных масс, лежащих на бесконечно тонкой линии L (в пределе поверхностный интеграл превращается в интеграл по длине линии L)

$$V(P) = \lim_{d \to 0} G \int_S \mu \frac{dS}{r} = \lim_{d \to 0} G \int_S (\mu d) \frac{dl}{r} = G \int_L \lambda \frac{dl}{r}.$$

Литература: [3, 6, 14, 15].

ПОТЕНЦИАЛЫ ДИПОЛЯ, ОБЪЕМНОГО НАМАГНИЧЕННОГО ТЕЛА И ДВОЙНОГО СЛОЯ

1. ЗАКОН КУЛОНА, МАГНИТНЫЕ МАССЫ

Закон Кулона. Взаимодействие между двумя изолированными элементарными магнитными массами (точечными массами) с зарядами m_1 и m_2 в изотропной однородной среде происходит согласно закону Кулона:

$$F = m_1 m_2 / \varepsilon r^2.$$

где r – расстояние между точками, в которые заключены массы; ε – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей массы. Примем, что масса $m_1 = m$ находится в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, а $m_2 = 1$ – в точке $P(x, y, z)$. Тогда для этих масс при $\varepsilon = 1$ (в вакууме) закон Кулона примет вид

$$F = m/r^2.$$

Эта сила, с которой масса m действует на единичную массу (на единичный положительный заряд), помещенную в точку P, характеризует напряженность поля. Следует отметить, что магнитные массы изолированными не бывают, поэтому необходимо учесть и влияние отрицательных масс.

Магнитные массы. В отличие от гравитационных масс, которые имеют в природе только один знак, магнитные массы существуют не изолированно, а всегда совместно – любой положительной массе соответствует такая же отрицательная масса. Только в случае, когда один из полюсов магнита находится в бесконечности, можно считать, что действует магнитная масса одного знака. Нас интересуют в качестве источников магнитного поля только намагниченные тела.

Под действием внешнего магнитного поля, в частности магнитного поля Земли, горные породы намагничиваются в различной степени. Степень намагниченности горных пород зависит от

их магнитной восприимчивости, т.е. от их способности намагничиваться. Каково бы ни было значение намагниченности и ее распределение внутри, магнитное поле от намагниченного тела можно рассматривать как поле совокупности большого числа элементарных магнитных диполей. При этом магнитный момент каждого элемента объема тела совпадает с магнитным моментом соответствующего ему диполя.

Векторная сумма всех моментов, соответствующих элементам объема тела (элементарных моментов тела), называется магнитным моментом этого тела. Если обозначить магнитный момент элемента объема тела dv через $\overrightarrow{dM}$, то величина

$$\vec{J} = \overrightarrow{dM}/dv$$

называется ***намагниченностью*** тела. Будем считать, что $\vec{J}$ является функцией, непрерывно дифференцируемой всюду внутри тела вплоть до его поверхности.

Если тело объемом v является однородно намагниченным, то его полный момент

$$\vec{M} = \vec{J}v.$$

Магнитный момент элементарного диполя

$$\overrightarrow{dm} = \lim_{d\to 0}(md)\vec{l}_1 = \vec{\nu},$$

где m – интенсивность точечного источника, заключенного в положительном полюсе диполя; d – длина диполя; $\vec{l}_1$ – единичный вектор, направленный по оси диполя от отрицательной массы $(-m)$ к положительной $(+m)$.

Магнитный момент единицы длины двумерных магнитных масс сечения dS

$$\overrightarrow{dp} = \vec{J}dS.$$

Если задан однородно намагниченный бесконечный горизонтальный круговой цилиндр сечения S (направление вектора $\vec{J}$ совпадает с плоскостью сечения), то магнитный момент единицы его длины

$$\vec{p} = \vec{J}S.$$

2. ПОТЕНЦИАЛ ДИПОЛЯ

Пусть нам заданы две точки M_1 и M_2, в которых помещены две равные по величине, но противоположные по знаку массы $+m$ и $-m$ (рис. 92).

Возьмем положительное направление линии $\vec{l}$, соединяющей массы и идущей от отрицательной массы к положительной. Расстояния PM, PM_1, PM_2 и M_1M_2 обозначены соответственно через r, r_1, r_2, d. Точка M делит расстояние M_1M_2 пополам. При заданных таким образом массах образуется диполь (при $d \ll r$). При этом расстояние d называют длиной диполя, прямую l – осью диполя, точку M – центром диполя, точки M_1 и M_2 (иногда массы $+m$, $-m$) – полюсами диполя. Плоскость, перпендикулярную линии l и проходящую через точку M, называют ***экваториальной плоскостью.***

Требуется найти потенциал от заданных таким образом двух точечных масс в точке P. Обозначим значения магнитного потенциала через U. Применяя формулу потенциала от системы точечных масс $+m$ и $-m$, найдем (так как рассматривается потенциал магнитного диполя, коэффициент G здесь опускается), что

$$U(P) = (m/r_1 - m/r_2) = m(1/r_1 - 1/r_2).$$

Выражение потенциала диполя получим отсюда в пределе, когда $d \to 0$ (что имеет место при $d \ll r$) [15]:

$$U(P) = \nu \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) = -\nu \frac{1}{r^2}\cos\theta, \qquad (1)$$

где θ – угол между направлениями r и l;

$$\lim_{d \to 0}(md) = \nu.$$

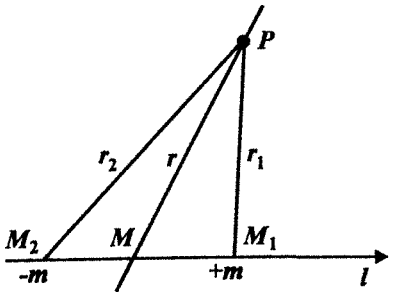


Рис. 92. Диполь

В выражении потенциала притяжения диполя величина ν называется ***моментом диполя***. В общем случае ν – это вектор

$$\vec{\nu} = \lim_{d \to 0} (md \cdot \vec{l}),$$

где $\vec{l}$ – единичный вектор, имеющий направление l. Принимается, что вектор $\vec{\nu}$ всегда направлен в сторону положительной массы m. Абсолютная величина момента диполя равна произведению массы положительного полюса на длину диполя.

Запишем выражение (1) в более удобной векторной форме:

$$U(P) = \left(\vec{\nu} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right).$$

В отличие от поля точечной массы потенциал диполя убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r. Кроме того, потенциал диполя зависит от угла отклонения радиуса-вектора $\vec{r}$ от направления момента диполя.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть угол θ равен нулю, т.е. r направлен по направлению оси диполя l. Тогда

$$U(P) = \nu / r^2.$$

В этом случае потенциал $U(P)$ имеет максимальное значение и убывает обратно пропорционально r^2.

2. Пусть $r \perp l$, т.е. $\theta = 90°$. В этом случае, как видно из равенства (1), $U(P) = 0$, т.е. в точках экваториальной плоскости диполя значения его потенциала равны нулю.

Для определения напряженности поля диполя примем, что ось x направлена по оси диполя и что начало координат взято в самом диполе, т.е. координаты $\xi = \eta = \zeta = 0$ и

$$\cos \theta = \cos(r, l) = \cos(r, x) = x/r.$$

Тогда из равенства (1) найдем

$$U(P) = -\nu x / r^3.$$

Напряженность диполя получим из выражения

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U,$$

т.е.

$$F_x = \partial U / \partial x, \quad F_y = \partial U / \partial y, \quad F_z = \partial U / \partial z.$$

Поэтому, дифференцируя выражение для U по переменным x, y, z, найдем

$$F_x = -\nu/r^3 + 3\nu x^2/r^5,$$

$$F_y = 3\nu xy/r^5,$$

$$F_z = 3\nu xz/r^5.$$

Рассмотрим два частных случая.

А. Примем, что точка P находится на продолжении оси диполя, т.е. $y = 0$, $z = 0$, $r = x$. Тогда $F_y = 0$, $F_z = 0$, $F_x = -\nu/r^3 + 3\nu r^2/r^5 = 2\nu/r^3$. Поэтому

$$\vec{F} = 2\vec{\nu}/r^3.$$

Б. Примем, что точка P находится в экваториальной плоскости, т.е. $x = 0$. Подставляя это значение x в полученные выше выражения для проекций F_x, F_y и F_z, найдем $F_x = -\nu/r^3$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. Отсюда

$$\vec{F} = -\vec{\nu}/r^3.$$

Из полученных в частных случаях выражений $\vec{F}$ видно, что вектор силы, действующий на точку P со стороны диполя, обратно пропорционален кубу расстояния от точки P до диполя и направлен или параллельно оси диполя, или в противоположную сторону.

Литература: [12, 15].

3. ПОТЕНЦИАЛ ОБЪЕМНОГО НАМАГНИЧЕННОГО ТЕЛА

Ознакомившись с потенциалами притяжения отдельного диполя, можно найти и потенциал сплошного намагниченного тела, которое можно рассматривать как систему бесконечно большого числа магнитных диполей с упорядоченно расположенными магнитными осями.

Если объем намагниченного тела v, вектор намагниченности $\vec{J}$, а $\vec{J}dv$ – магнитный момент дифференциально малого объема dv, то

$$d\vec{\nu} = \vec{J}dv.$$

Найдем $dU = \left(\vec{J} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dv$, где dU – магнитный потенциал, создаваемый элементом dv.

Интегрируя выражение для dU по всему объему намагниченного тела, определим созданный им потенциал:

$$U(P) = \int_v \left(\vec{J} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dv.$$

Другие формы этого равенства получим, пользуясь выражениями (1) и интегрируя полученные значения по объему v:

$$U(P) = \int_v J \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) dv = -\int_v J \frac{\cos\theta}{r^2} dv.$$

Вектор $\vec{J}$ имеет направление $\vec{\nu}$, т.е. совпадает с направлением $\vec{l}$.

3.1. ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННЫЙ ШАР

В этом случае потенциал определяется формулой [14, 15]:

$$U(P) = \begin{cases} -(M/\rho^2)\cos\theta, & \rho \geq R, \\ -(M/R^3)\rho\cos\theta, & \rho < R, \end{cases} \qquad (2)$$

где θ – угол между направлениями ρ и вектора $\vec{J}$ или линии l; $\vec{J}v = \vec{M}$, $\vec{M}$ – магнитный момент шара.

На поверхности шара при $\rho = R$ обе строки формулы (2) дают одно и то же выражение

$$U(P) = (M/R^2)\cos\theta.$$

Из сравнения полученной формулы при $\rho \geq R$ с формулой для потенциала диполя видно, что потенциал однородно намагниченного шара на внешнюю точку равен потенциалу диполя с тем же моментом M, помещенным в центр шара.

Определим теперь силу $\vec{T}$ (напряженность поля). С этой целью разложим эту силу на две составляющие – по направлению нормали (вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Z) и по направлению касательной вдоль магнитного меридиана (горизонтальная составляющая напряженности H):

$$Z = \partial U/\partial\rho, \quad H = (1/\rho)\partial U/\partial\theta.$$

Дифференцируя выражение потенциала, соответствующее значению $\rho \geq R$, найдем

$$Z = 2M \cos \theta/\rho^3,$$

$$H = M \sin \theta/\rho^3.$$

Для точек, находящихся на шаре при $\rho = R$, получим

$$Z = 2M \cos \theta/R^3,$$

$$H = M \sin \theta/R^3.$$

Полный вектор напряженности

$$|\vec{T}| = \sqrt{Z^2 + H^2} = \frac{M}{R^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

На магнитных полюсах $\theta = 0$ и 180°, поэтому

$$H = 0, \quad Z = \pm 2M/R^3,$$

$$|\vec{T}| = Z_{max} = 2M/R^3.$$

На магнитном экваторе $\theta = 90$ или 270°, следовательно

$$Z = 0, \; H = \pm M/R^3,$$

$$|\vec{T}| = H_{max} = M/R^3.$$

Обозначив через Z_P значение вертикальной составляющей на северном полюсе, через H_e – значение горизонтальной составляющей на магнитном экваторе, найдем

$$Z_P/H_e = 2.$$

Обозначим через I угол между направлением полного вектора напряженности магнитного поля и касательной к меридиану в точке P (угол магнитного наклонения), тогда

$$\operatorname{tg} I = Z/H.$$

Для определения магнитного момента шара получим

$$M = H_e R^3 = Z_P R^3/2.$$

Приведенные формулы имеют важное значение, ими можно аппроксимировать в первом приближении магнитное поле Земли.

Литература: [5, 14, 15].

4. ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ

При выводе формулы потенциала диполя рассматривалось влияние как положительных, так и отрицательных масс. Для магнитных масс это естественно. Но при решении некоторых задач принимают, что и гравитационные массы могут быть отрицательными, например, при определении потенциала так называемого двойного слоя.

Понятие двойного слоя для теории притяжения гравитационных масс является только некоторым чисто математическим понятием, но оно весьма удобно и имеет широкое применение. Дадим определение двойного слоя. Пусть задана некоторая поверхность S (рис. 93). Представим себе две другие поверхности S_1 и S_2, расположенные с обеих сторон поверхности S на малых, но равных расстояниях от нее, отсчитываемых по нормали n к ней. Каждой точке M поверхности будут соответствовать на поверхностях S_1 и S_2 точки M_1 и M_2, находящиеся на одной нормали n с точкой M. Расстояние M_1M_2 обозначим через d (точка M делит его пополам).

Пусть на поверхностях S_1 и S_2 расположены массы с плотностями μ_1 и μ_2, причем $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = -\mu$. Такая совокупность поверхностных масс, распределенных на S_1 и S_2, в пределе при $d \to 0$ представляет собой так называемый двойной слой, расположенный на поверхности S (название «двойной слой» дано в отличие от рассмотренного выше названия «простой слой»). Расстояние d называется толщиной двойного слоя. Потенциал двой-

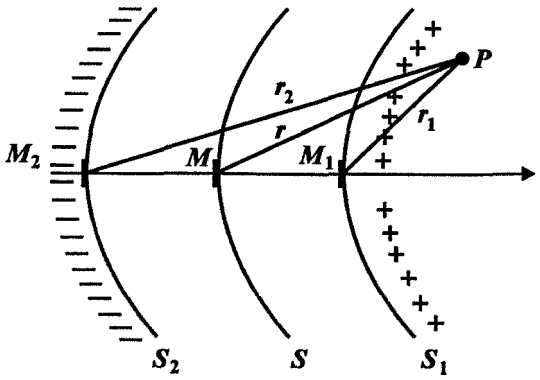


Рис. 93. Двойной слой

ного слоя подробно рассмотрен в работе [15], поэтому рассматривать его здесь не будем, приведем лишь выражение потенциала:

$$U(P) = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -G \int_S \beta \frac{1}{r^2} \cos(r,n)\, dS,$$

где $\beta = \lim_{d \to 0} (\mu d)$ – плотность двойного слоя.

Литература: [5, 14, 15].

ПОТЕНЦИАЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ

К логарифмическим потенциалам притяжения относятся потенциалы притяжения аномалий от тел двумерной формы. Рассмотрим основные из них.

1. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим частный случай формулы потенциала притяжения линейных масс

$$U(P) = G \int_L \lambda \frac{1}{r} dl,$$

когда прямая L (рис. 94) с постоянным значением λ, залегает на глубине ζ и проходит под началом координат параллельно оси y. Элемент длины $dl = d\eta$ возьмем в точке $M(0, \eta, \zeta)$, а точка $P(x, 0, 0)$, в которой рассматривается значение потенциала, находится на оси x.

Значение потенциала V от такой линии L длиной $2l$, заданной на интервале $(-l, l)$,

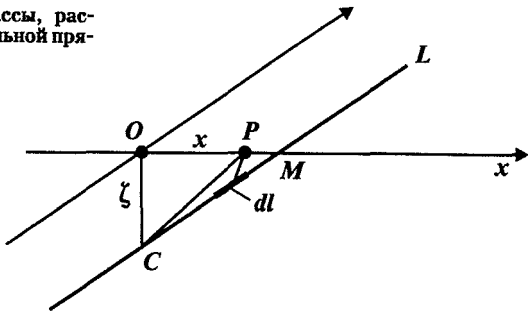
$$V(P) = G\lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + l^2 + \zeta^2} + l}{\sqrt{x^2 + l^2 + \zeta^2} - l},$$

где G – постоянная. По этой формуле можно определить значение потенциала V в точке P от прямой линии конечной длины $2l$. При $l \gg \sqrt{x^2 + \zeta^2}$ отсюда получим

$$V(P) = G\lambda \ln \frac{4l^2}{x^2 + \zeta^2} = G\lambda \left[\ln (4l^2) + \ln \frac{1}{x^2 + \zeta^2} \right] =$$

$$= 2G\lambda \ln 2l + 2G\lambda \ln \frac{1}{x^2 + \zeta^2}.$$

Рис. 94. Однородные массы, расположенные на горизонтальной прямой линии L



Здесь при $l \to \infty$ также стремится к бесконечности слагаемое $2G\lambda \ln (2l)$, но несмотря на это эта величина постоянная и ее можно не учитывать, так как теоретическое и практическое значение имеет не абсолютное значение потенциала, а его разность между точками поля и градиент потенциала. В обоих этих случаях слагаемое $2G\lambda \ln (2l)$, от которого зависит только абсолютное значение потенциала, исчезает и поэтому потенциал бесконечной однородной линии или однородного бесконечного тонкого стержня, проходящего на глубине ζ параллельно оси y, можно определить выражением

$$V(P) = 2G\lambda \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + \zeta^2}} = 2G\lambda \ln \frac{1}{r},$$

где в общем случае

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Это выражение определяет потенциал притяжения простейшего двумерного тела бесконечной горизонтальной материальной линии и называется логарифмическим. Он не зависит от направления y, с которым совпадает направление простирания линии.

Логарифмический потенциал обладает теми же свойствами, что и выше рассмотренные виды потенциалов притяжения за исключением того, что в бесконечности он обращается в бесконечность, взятую со знаком минус. Это связано с тем, что массы, создающие поле, занимают бесконечную область.

В частности, можно показать, что выражение логарифмического потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial \zeta^2 = 0$$

во всех точках пространства, кроме точек, в которых $r \to 0$ и $r \to \infty$. Это следует из того, что во всех этих точках

$$\Delta\left(\ln\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Проекции силы притяжения по осям координат имеют вид

$$F_x = \partial V/\partial x = 2G\lambda(\xi - x)/r^2,$$

$$F_z = \partial V/\partial z = 2G\lambda(\zeta - z)/r^2.$$

Тогда вектор

$$\vec{F} = 2G\lambda\,\vec{r}/r^2.$$

Литература: [5, 14, 15].

2. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ОБЪЕМНЫХ МАСС

Пусть задано некоторое двумерное тело сечения S, простирающееся до бесконечности по направлению оси y. Плотность σ меняется только по сечению S (не меняется по простиранию) и является непрерывной и конечной функцией координат точек сечения. Такое тело можно разбить на множество бесконечных материальных линий, направление простирания которых совпадает с направлением самого тела.

Потенциал притяжения такого двумерного тела можно представить в виде суммы потенциалов бесконечных горизонтальных материальных линий. Полагая $\lambda = \sigma dS$, получим

$$V(P) = 2G\int_S \sigma \ln\frac{1}{r}\,dS.$$

Эта формула определяет потенциал притяжения бесконечного горизонтального тела сечения S и является также логарифмическим потенциалом. Кроме того, она является потенциалом притяжения объемных масс, и в теории потенциала при решении двумерных (или плоских) задач имеет такое же значение, что и потенциал объемных масс в трехмерном случае. Для составляющих силы притяжения по осям координат x и z найдем

$$F_x = \partial V/\partial x = 2G\int_S \sigma\frac{\xi - x}{r^2}\,dS,$$

$$F_z = \partial V/\partial z = 2G\int_S \sigma(\zeta - z)/r^2\, dS,$$

$$\vec{F} = -2G\int_S \sigma\frac{\vec{r}}{r^2}\, dS.$$

Как видно из полученных равенств, они определяют составляющие силы притяжения по осям координат x и z от горизонтально залегающего двумерного тела произвольного сечения S.

Литература: [5, 14, 15].

3. ПОТЕНЦИАЛЫ НАМАГНИЧЕННЫХ МАСС

3.1. ДИПОЛЬ ДЛЯ ПОЛЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Диполь и двойной слой для поля с логарифмическим потенциалом называют плоскими в отличие от объемных, рассмотренных выше. Плоский диполь образуют две близко расположенные параллельные линии *1* и *2* (рис. 95) с массами разного знака, но одинаковой постоянной плотности λ. Значение потенциала притяжения массами линий *1* и *2* точки P в соответствии с обозначениями рис. 95 запишем в следующем виде:

$$V(P) = 2G\lambda\left(\ln\frac{1}{r_1} - \ln\frac{1}{r_2}\right),$$

где r – расстояние от точки P до центра диполя. Аналогично тому, как это делалось в случае объемного двойного слоя, умножая и деля правую часть последнего равенства на d (d – длина диполя), в пределе, когда $d \to 0$, найдем (при $G = 1$)

$$V(P) = 2P\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

где, как и выше, $P = \lim\limits_{d\to 0}(\lambda d)$ – момент диполя, направленный от отрицательной линии к положительной; $\vec{n}$ – нормаль, направленная от отрицательной массы к положительной, или

$$V(P) = 2P\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n} = -2P\frac{1}{r}\cos\varphi, \qquad (1)$$

где φ – угол между направлениями n и r.

Это равенство определяет потенциал притяжения плоского диполя или логарифмический потенциал диполя. В отличие от

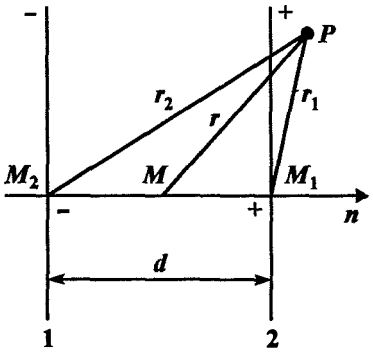


Рис. 95. Плоский диполь

выше рассмотренных видов логарифмических потенциалов притяжения этот потенциал равен нулю на бесконечности. Это выражение соответствует магнитному потенциалу бесконечной горизонтальной дипольной или двухполюсной линии, залегающей на глубине ζ, магнитный момент единицы длины которой равен $\vec{P}$.

Литература: [12, 15].

3.2. ПОТЕНЦИАЛ ДВУМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ МАСС

Пусть задано некоторое двумерное магнитное тело произвольного сечения S, простирающееся до бесконечности по направлению оси y. Пусть далее магнитный момент единицы длины этого тела является непрерывной, конечной и однозначной функцией координат точек сечения. Вектор $\vec{J}$ лежит в плоскости сечения. Примем, что он не меняется по направлению простирания, т.е. в каждом сечении тела имеет одно и то же направление и величину. Такое тело можно разбить на множество бесконечных горизонтальных дипольных линий и его потенциал можно определить как сумму потенциалов этих дипольных линий. Поэтому, полагая $\vec{P} = \vec{J}\,dS$, где $\vec{J}$ – вектор намагниченности ($\vec{J}$ направлен по $\vec{n}$), при $V = U$ найдем из (1)

$$U(P) = -2\int_S J\frac{\cos\varphi}{r}dS,$$

где φ – угол между направлениями вектора намагниченности $\vec{J}$ и радиуса-вектора $\vec{r}$. Найденная формула определяет значение потенциала двумерных магнитных масс произвольного сечения S, залегающих горизонтально, и является магнитным потенциалом

двумерного тела. Этой формулой можно пользоваться при определении потенциала и вертикальной и горизонтальной составляющих магнитного поля двумерных тел известного сечения S. Рассмотрим следующие примеры.

а) Бесконечный горизонтальный намагниченный цилиндр. Для бесконечного горизонтального кругового цилиндра радиуса R, намагниченного перпендикулярно оси, интегрируя это выражение по площади круга S, найдем

$$U(P) = -\frac{2\mu}{r}\cos\varphi,$$

где $\vec{\mu} = \pi R^2 \vec{J}$ – магнитный момент единицы длины цилиндра; r – расстояние от точки P до оси цилиндра.

Это выражение не зависит от радиуса сечения цилиндра, а определяется его магнитным моментом $\vec{\mu}$. Бесконечный горизонтальный круговой цилиндр притягивает так же, как и бесконечная полюсная линия такого же момента, совпадающая с осью цилиндра.

Положим, что вектор намагниченности составляет с вертикальной осью угол φ_0, а радиус-вектор с этой осью – угол φ_1. Тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ и поэтому

$$U = -\frac{2\mu}{r}(\cos\varphi_1\cos\varphi_0 + \sin\varphi_1\sin\varphi_0).$$

В прямоугольных осях координат, учитывая что

$$\cos\varphi_1 = \frac{\zeta}{r} = \frac{\zeta}{\sqrt{x^2+\zeta^2}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\zeta^2}},$$

найдем

$$U(P) = -2\mu\left(\frac{\zeta\cos\varphi_0}{x^2+\zeta^2} - \frac{x\sin\varphi_0}{x^2+\varphi^2}\right).$$

Отсюда можно определить и полный вектор напряженности магнитного поля T и его составляющие Z и H:

$$\vec{T} = \operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial n}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r},$$

$$Z = T\cos(T,Z) = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad H = T\cos(T,x) = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

При вертикальной намагниченности

$$Z = 2\mu(\zeta^2 - x^2)/(x^2 + \zeta^2)^2,$$
$$H = 4\mu\,\zeta x/(x^2 + \zeta^2)^2.$$

Литература: [5, 7, 15, 20].

ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Сила тяжести (ускорение свободного падения) $\vec{g}$ – равнодействующая силы притяжения масс Земли $\vec{F}$ и центробежной силы $\vec{C}$, вызванной вращением Земли вокруг своей оси:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}.$$

Соответственно этому и потенциал силы тяжести W будет равняться сумме потенциалов силы притяжении и центробежной силы (рис. 96)

$$W = V + Q. \tag{1}$$

Потенциал силы притяжения Земли можно определить как потенциал притяжения объемных масс:

$$V = G \int_v \sigma \frac{dv}{r},$$

где интегрирование проводится по всему объему Земли v. Потенциал центробежной силы, возникающей при вращении Земли вокруг своей оси, определяется равенством

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Потенциал силы тяжести найдем, складывая правые части последних двух равенств:

$$W = G \int_v \sigma \frac{dv}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{2}$$

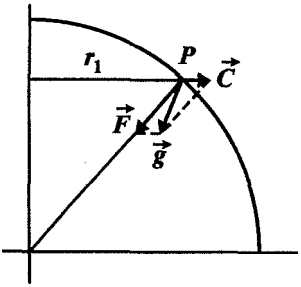
Значения ускорения свободного падения g связаны с потенциалом W соотношением

$$\vec{g} = \operatorname{grad} W,$$

т.е.

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x},$$

Рис. 96. Сила тяжести и ее составляющие



$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Через значения нормальной производной получим

$$\vec{g} = \frac{\partial W}{\partial n}\vec{n}_1,$$

где $\vec{n}_1$ – единичный вектор, имеющий направление внутренней нормали (сила тяжести увеличивается в сторону масс). Значение g на поверхности Земли меняется от 9,78 м/с^2 (на экваторе) до 9,832 м/с^2 (на полюсах). Отношение максимального значения центробежной силы, которое она имеет на экваторе, к значению силы тяжести на экваторе g_e равно

$$\omega^2 R_e / g_e,$$

где R_e – радиус экватора, которое равно примерно 1:288,4 (при R_e = 6378,245 км, g_e = 9,78049 м/с^2, $\omega = \frac{2\pi}{86164}\frac{1}{\text{с}}$), т.е. отношение максимального значения центробежной силы к минимальному значению силы тяжести является относительно малой величиной. Однако, если на долю изменения силы притяжения от полюсов к экватору, объясняемого в основном сплюснутостью Земли, приходится всего около 1800 мГал, то на долю изменения центробежной силы от полюсов к экватору приходится ≈3400 мГал, т.е. доля центробежной силы в изменении силы тяжести от полюсов к экватору значительно больше, чем доля изменения силы притяжения.

Формула потенциала силы тяжести является очень важной и широко применяется при определении нормальных значений си-

лы тяжести, при определении фигуры Земли и при решении различных других задач гравиметрии и гравиразведки. Потенциал силы тяжести как любая потенциальная функция обладает всеми рассмотренными выше свойствами.

Исключение составляет то, что при $r \to \infty$ значение W стремится к бесконечности, а не к нулю из-за увеличения центробежной силы. Однако поведение силы тяжести на таких больших расстояниях от Земли нас не интересует, так как не имеет практического значения. Кроме того, при рассмотрении уравнений Пуассона и Лапласа для потенциала силы тяжести необходимо учесть, что для потенциала центробежной силы

$$\partial^2 Q/\partial x^2 + \partial^2 Q/\partial y^2 + \partial^2 Q/\partial z^2 = \Delta Q = 2\,\omega^2,$$

т.е. функция Q не удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому, например, для случая внутренних точек Земли

$$\Delta W = -4\pi G\sigma + 2\omega^2.$$

Формулой (2) в таком виде, в каком она написана, не всегда можно пользоваться из-за того, что интеграл в правой части выражения, определяющий потенциал притяжения объемных масс, раскрывается в элементарных функциях для сравнительно небольшого числа геометрических тел простейшей формы. Поэтому на практике при изучении гравитационного поля Земли пользуются рядом, получаемым при разложении потенциала в сферические функции.

Литература: [3, 4, 6, 14, 15].

ПОТЕНЦИАЛ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ

Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому на тела, находящиеся на поверхности Земли, действует и центробежная сила, возникающая из-за суточного вращения Земли вокруг своей оси. Центробежную силу можно определить из равенства

$$C = a^2 m / r_1, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где a – линейная скорость движения точки P; r_1 – расстояние от точки P на поверхности Земли, в которой заключена масса m, до оси вращения Земли (радиус вращения). Через угловую скорость вращения Земли

$$a = \omega r_1,$$

получим

$$C = m \omega^2 r_1,$$

где угловая скорость вращения

$$\omega = 2\pi / 86\ 164 \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}.$$

Здесь 86 164 – это число секунд в 24 звездных часах. Примем, что масса m равна единице. Тогда

$$C = \omega^2 r_1$$

будет характеризовать напряженность центробежной силы или центробежное ускорение.

Если Q – потенциал центробежной силы, то должно выполняться равенство

$$\vec{C} = \operatorname{grad} Q,$$

т.е.

$$\partial Q / \partial x = C_x, \quad \partial Q / \partial y = C_y, \quad \partial Q / \partial z = C_z.$$

Легко убедиться, что этим условиям при значениях проекций C_x, C_y и C_z, удовлетворяет функция

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Литература: [2–4, 6, 14, 15].

1. ПРОИЗВОДНАЯ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ

Положение о том, что производные потенциала силы тяжести по переменным x, y, z равны проекциям силы тяжести по направлениям этих же осей, верно не только для этих осей, но и для некоторого произвольного направлении в пространстве l. В общем случае, если g – сила тяжести, а W – ее потенциал, справедливо равенство

$$\partial W/\partial l = g\cos(g, l) = g_l,$$

т.е. производная потенциала силы тяжести по любому направлению равна ее проекции по этому направлению.

Рассмотрим два частных случая полученной формулы.

А. Пусть $l \perp g$, т.е. $\cos(g, l) = 0$. Тогда

$$\partial W/\partial l = 0, \text{ т.е. } W = C = \text{const}.$$

Это выражение определяет уравнение поверхности с равными значениями потенциала силы тяжести, т.е. ***уровенной поверхности потенциала силы тяжести***. Как всякая уровенная поверхность потенциала, она обладает тем свойством, что в каждой ее точке сила (в данном случае сила тяжести) направлена по нормали к поверхности. Это свойство следует из равенства

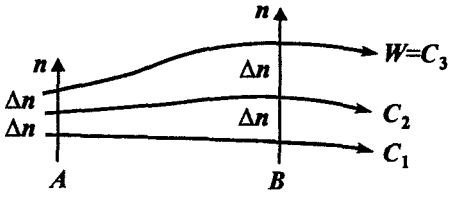
$$\vec{g} = \text{grad}\, W.$$

Различным значениям постоянной в уравнении уровенной поверхности соответствуют различные уровенные поверхности или семейство уровенных поверхностей. Значение постоянной можно определить таким образом, что уровенная поверхность потенциала силы тяжести совпадает с невозмущенной поверхностью воды в океанах. Такая поверхность называется ***геоидом*** и она определяет поверхность или фигуру некоторой идеальной Земли.

Б. Пусть $l \parallel g$, т.е. $\cos(g, l) = 1$. В этом случае

$$\partial W/\partial l = g.$$

Рис. 97. Линии уровенных поверхностей потенциала силы тяжести



Переходя к конечным пределам, запишем

$$\Delta W = g\Delta l.$$

Так как $l \| g$, а значения g направлены по нормали, то и l направлен по нормали $\vec{n}$. Тогда

$$\Delta W = g\Delta n.$$

Здесь исходя из определения производной, ΔW – приращение функции W между двумя точками, взятыми на направлении нормали, тогда величина Δn (приращение аргумента) будет соответствовать расстоянию между взятыми точками по нормали. Если далее изобразить скалярное поле потенциала силы тяжести уровенными поверхностями, взятыми с сечением или шагом $\Delta W = \text{const}$, то величина Δn будет равна расстоянию между двумя ближайшими друг к другу или соседними уровенными поверхностями. Из последнего равенства видно, что расстояние Δn обратно пропорционально величине g и поэтому уровенные поверхности приближаются друг к другу в точках, где величина g больше, и удаляются в точках с меньшими значениями g (рис. 97).

Литература: [2, 3, 4, 6, 14, 15].

2. ПРОИЗВОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ, ИХ ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Рассмотрим физический смысл производных потенциала силы тяжести Земли W. Первые три производные функции W по осям координат x, y и z

$$\partial W/\partial x,\ \partial W/\partial y,\ \partial W/\partial z$$

определяют скорости изменения потенциала силы тяжести по направлениям этих осей и равны проекциям ускорения свободного падения на эти же оси.

Что же касается вторых производных, то их у потенциала силы тяжести шесть:

$$W_{xx} = \partial^2 W/\partial x^2, \quad W_{yy} = \partial^2 W/\partial y^2, \quad W_{zz} = \partial^2 W/\partial z^2,$$

$$W_{xy} = \partial^2 W/\partial x\, \partial y, \quad W_{xz} = \partial^2 W/\partial x\, \partial z, \quad W_{yz} = \partial^2 W/\partial y\, \partial z.$$

Физический смысл производных W_{xz}, W_{yz}, W_{zz} легко понять из выражений

$$W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$W_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial z},$$

в которых учтено, что $\partial W/\partial z \approx g$. Отсюда видно, что W_{xz}, W_{yz} и W_{zz} являются производными ускорения свободного падения g по осям координат и определяют скорости изменения g по направлениям этих осей. Величина $N = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}$ носит название ***горизонтального градиента силы тяжести***:

$$N = \partial g/\partial S,$$

где S – направление максимального изменения силы тяжести в горизонтальной плоскости. Полная величина скорости изменения g определяется из равенства

$$K = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2 + W_{zz}^2}.$$

Физический смысл трех других вторых производных потенциалов силы тяжести W_{xx}, W_{yy}, W_{xy} следующий: они определяют форму уровенной поверхности потенциала в данной точке P, а именно кривизну нормального сечения уровенной поверхности, т.е. геометрию уровенной поверхности.

Литература: [3, 6, 14, 15].

ПРЕДЕЛЬНАЯ ГЛУБИНА ЗАЛЕГАНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ТЕЛ

Существует множество формул оценки глубины залегания ближайших к поверхности особых точек аномалий. Формулы достаточно просты и легко применяются на практике. Получаемые по ним оценки сужают область решения обратной задачи гравимагниторазведки и тем самым уменьшают неоднозначность решения обратной задачи.

Определяемые по ним значения глубин называют предельными – это глубина, ниже которой не может находиться данная особая точка аномалий:

$$h \le H, \tag{1}$$

где h – глубина залегания ближайшей к поверхности особой точки; H – значение предельной глубины (рис. 98). Точка O на рисунке – это центр шара, бесконечного горизонтального кругового цилиндра, угловая точка горизонтальной призмы, совпадающая с глубиной залегания верхней ее границы, или ближайшая к поверхности особая точка аномалии любого другого источника.

Между линиями *1* и *2* можно провести множество других линий, определяющих предельную глубину залегания тел. Наилучшей из них является та, которая ближе всего расположена к линии *1*. Другими словами, если по одной и той же аномалии различными способами определяется предельная глубина залегания тел, то наилучшей оценкой будет минимальное значение из всех полученных величин.

Отдельные формулы, подобные (1), полученные для определенных источников полей, были известны давно, но широкое применение на практике способы, определяющие предельную глубину залегания тел, получили после исследований В.Н. Страхова.

Идея получения таких способов заключается в следующем. Рассмотрим выражение

$$U(x, y, z) = A[f(x, y, z)], \tag{2}$$

где $f(x, y, z)$ – функция, определяющая какой-то заданный исход-

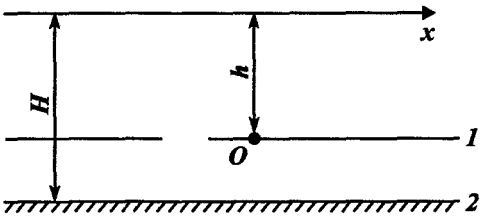


Рис. 98. К определению предельной глубины залегания тел

ный элемент гравитационного или магнитного поля; $U(x, y, z)$ – функция, полученная от f в результате действия некоторой операции A (интегрирования, дифференцирования, других способов трансформации полей и др.).

В равенстве (2), согласно некоторому определенному предположению, изменяют (увеличивают) правую часть. Тогда в правой части равенства (2) будет некоторая другая функция f_1 и само равенство превратится в неравенство

$$U \le A[f_1(x, y, z)]. \qquad (3)$$

При этом предполагают, что максимально упрощается функция f и превращается в более простую функцию f_1. После чего из неравенства (3) определяют h и таким путем получают неравенство (1).

В других случаях в равенстве (2) операция $A = 1$ и функция f равна элементу поля U от источника, который соответствует предельному случаю аномалии. Тогда для всех других источников равенство (2) при максимальном значении его правой части превратится в неравенство, из которого также определяют h, и таким путем снова получается неравенство вида (1).

И, наконец, следует отметить, что выражения, подобные (1)–(3), справедливы и для частотной области. Тогда значения предельной глубины залегания можно определить, пользуясь спектрами аномалий.

В общем случае в зависимости от характера операции A функция U в равенстве (2) может равняться не только какому-либо элементу потенциального поля, но и любой другой функции, полученной из него при помощи преобразования полей, или может равняться выражению, определяющему какие-то характеристики аномалий, например, значения корреляционных функций, радиуса корреляции аномалий и т.д. С применением этих функций в работах [11, 13, 16] получен ряд новых способов определения предельной глубины.

Рассмотрим несколько примеров для двумерных аномалий.

1. Для гравитационных аномалий от вертикальной ступени, верхняя и нижняя границы которой залегают на глубинах h_1 и h_2 (рис. 99) известны соответствующие выражения

$$a = V_z(+\infty) - V_z(-\infty) = 2\pi G\sigma(h_2 - h_1), \tag{4}$$

$$V_{xz}(0) = (V_{xz})_{max} = 2G\sigma \ln(h_2/h_1). \tag{5}$$

Равенство (5) соответствует только аномалиям от вертикальной ступени. Для любого другого тела значение $(V_{xz})_{max}$ будет меньше. Поэтому для всех двумерных источников справедливо неравенство

$$(V_{xz})_{max} \le 2G\sigma \ln(h_2/h_1). \tag{6}$$

Из равенств (4) и (5) найдем

$$h_1 = a/2\pi G\sigma\{\exp[(V_{xz})_{max}/2G\sigma] - 1\}.$$

С учетом неравенства (6) получим

$$h_1 \le a/2\pi G\sigma\{\exp[(V_{xz})_{max}/2G\sigma] - 1\}. \tag{7}$$

В этом примере при получении неравенства (7) аномальные источники заменены предельным случаем – вертикальной ступенью, только для которой будет наблюдаться максимальное зна-

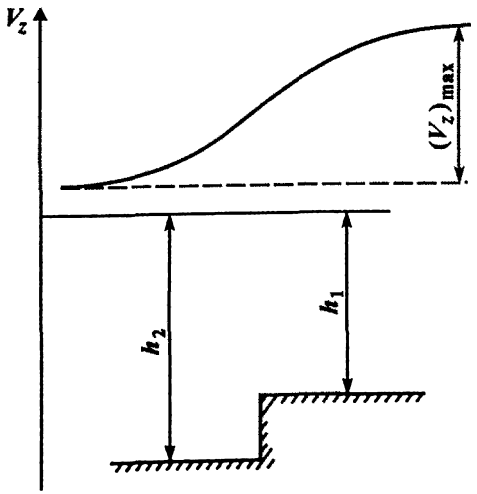


Рис. 99. К получению неравенства Фишера – Люстиха

чение V_{xz} из всех возможных. Знак равенства в выражении (7) будет именно для вертикальной ступени.

2. Рассмотрим выражение автокорреляционной функции аномалии $V_z(x)$ от бесконечной горизонтальной материальной линии

$$B(\tau) = B(0)\frac{4h^2}{4h^2 + \tau^2}, \tag{8}$$

где h – глубина залегания линии.

Из теории потенциала известно, что из всех аномалий двумерных источников при условии равенства их максимальных значений наиболее узкой при всех значениях x будет аномалия от бесконечной горизонтальной материальной линии. Это же касается и значений автокорреляционных функций. Поэтому, если обобщить равенство (8) на все виды двумерных источников, то при любом значении τ выражение (8) превратится в неравенство

$$B_н(\tau) = B(\tau)/B(0) \geq \frac{4h^2}{4h^2 + \tau^2}. \tag{9}$$

Отсюда получим

$$h^2 \leq \min \frac{1}{4}\frac{\tau^2 B_н(\tau)}{1 - B_н(\tau)}.$$

При $\tau \to \infty$ значение $B(\tau) \to 0$, поэтому

$$h^2 \leq \lim_{\tau\to\infty} \tau^2 B_н(\tau)\frac{1}{4}.$$

Знак равенства в полученных выражениях будет для аномалии от бесконечной горизонтальной материальной линии. Аналогичные соотношения можно получить, исходя из выражений производных V_{xz} и V_{zz}. Все это можно обобщить и на трехмерные аномалии, предельным случаем источников (по узости аномалий) является точечная масса или шар.

3. Из свойств преобразований Фурье следует, что чем уже аномалия (автокорреляционная функция), тем шире его спектр (энергетический спектр) и наоборот. Поэтому для энергетического спектра $Q(\omega)$ аномалии $V_z(x)$ от бесконечной горизонтальной материальной линии в соответствии с выражением (9) получим

$$Q(\omega) \leq Q(0) \exp(-2|\omega| h).$$

Это неравенство учитывает тот факт, что энергетический спектр аномалии силы притяжения от любого двумерного тела в точках ω меньше или равен энергетическому спектру аномалии от бесконечного горизонтального кругового цилиндра или маг-

нитных аномалий от бесконечной однополюсной линии, обладающей таким же максимальным значением $Q(0)$, что и рассматриваемая аномалия. Отсюда получим

$$h \le \min \frac{1}{2|\omega|} \left| \ln \frac{Q(0)}{Q(\omega)} \right|.$$

4. Ниже приведены наиболее часто применяемые на практике соотношения, полученные В.Н. Страховым для определения значений предельных глубин; с применением интеграла Пуассона, равенств Парсеваля и других выражений:

$$h \le \min[V_z(x)/|V(x)_{zz}|],$$

$$h \le \min \int_{-\infty}^{\infty} V_z(x)dx/\pi V_z(x) = 2G\lambda/[V_z(x)_{\max}],$$

$$h^2 \le \min \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x,0)dx}{\pi |V_{zz}(x,0)|} = \frac{2G\lambda}{|V_{zz}(x,0)|_{\max}},$$

$$h^2 \le \min \frac{Q\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x,0)dx}{|V_{xz}(x,0)|} = \frac{2G\lambda Q}{|V_{xz}(x,0)|_{\max}},$$

$$h \le \min \frac{V_z(x,0)}{|V_{zz}(x,0)|},$$

$$h \le \min \frac{V_z(x,0)}{|V_{xz}(x,0)|}, \qquad (10)$$

$$h \le \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x,0)dx\right]^2}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} V_z^2(x,0)dx} = \frac{2\pi G^2\lambda^2}{\int_{-\infty}^{\infty} V_z^2(x,0)dx},$$

$$h^3 \le \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x,0)dx\right]^2}{4\pi \int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x,0)dx} = \frac{\pi G^2\lambda^2}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x,0)dx},$$

$$h^3 \le \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x,0)dx\right]^2}{4\pi \int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}^2(x,0)dx} = \frac{\pi G^2\lambda^2}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}^2(x,0)dx}.$$

Здесь $Q = 0{,}6493$.

В случае магнитных аномалий, когда магнитные массы имеют один и тот же знак и сосредоточены на бесконечной горизонтальной прямой (линия полюсов, заряженные плоскость и полуплоскость), все выше написанные неравенства будут оставаться в силе, только нужно заменить V_z на Z; V_{zz} на $\partial Z/\partial z$ и V_{xz} на $\partial Z/\partial x = \partial H/\partial x$.

Для вертикально намагниченного двумерного тела произвольного сечения S, учитывая равенства, устанавливающие связь между производными гравитационного и магнитного потенциалов,

$$H = \frac{J}{G\sigma}V_{xz}; \quad Z = \frac{J}{G\sigma}V_{zz},$$

в которых J – интенсивность намагничивания, σ – объемная плотность, и то, что $\lambda = \sigma S$, $JS = m_S$ – магнитный момент единицы длины двумерного тела, получим:

$$h^2 \le \min \frac{2m_S}{|Z(x,0)|} = \min \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} xH(x,0)dx}{\pi|Z(x,0)|},$$

$$h^2 \le \min \frac{2Q m_S}{|H(x,0)|} = \min \frac{Q\int\limits_{-\infty}^{\infty} xH(x,0)dx}{\pi|H(x,0)|},$$

$$h^3 \le \min \frac{\pi m}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} H^2(x,0)dx} = \min \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} xH(x,0)dx\right]^2}{4\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} H^2(x,0)dx},$$

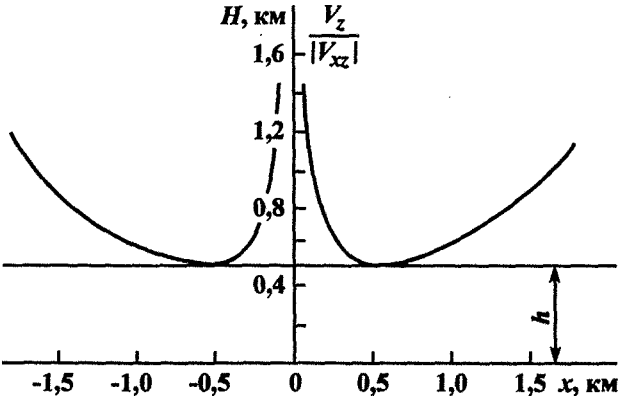


Рис. 100. К определению предельной глубины залегания источников

$$h^3 \leq \min \frac{\pi m}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z^2(x,0)dx} = \min \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} xH(x,0)dx\right]^2}{4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z^2(x,0)dx}.$$

Аналогичные равенства в случае гравитационных и магнитных аномалий можно написать и для трехмерного случая.

Во всех формулах, в которых участвует минимум, он берется по данным всей числовой оси $0x$. Большинство из написанных равенств при условии, что известно значение глубины залегания ближайшей к поверхности наблюдений особой точки возмущающего тела, можно использовать для оценки суммарной массы возмущающего тела или величины m_S.

На рис. 100 показан график изменения отношения $V_z/|V_{xz}|$, которое соответствует неравенству (10) при определении значения предельной глубины.

Литература: [11, 13, 14, 16].

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ В ВИДЕ РЯДА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Разложим потенциал силы тяжести

$$W = G\int_v \sigma\frac{dv}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \qquad (1)$$

в ряд сферических функций. Необходимость такого разложения следует из того, что формулой в том виде, как она написана, не всегда можно пользоваться из-за того, что интеграл в правой части выражения, определяющий потенциал притяжения объемных масс, раскрывается в элементарных функциях для сравнительно небольшого числа геометрических тел простейшей формы.

Возьмем прямоугольную систему координат, начало координат поместим в центр масс Земли, а ось z направим по оси вращения Земли. Тогда плоскость xy совпадет с плоскостью экватора. Точка $M(\xi, \eta, \zeta)$ – переменная точка тела, в которой берется элемент массы, и она может находиться при интегрировании внутри тела и на его поверхности. Точка $P(x, y, z)$ – фиксированная точка, в которой заключена единичная масса и в которой исследуется значение потенциала силы тяжести. Рассмотрим случай, когда точка P находится вне тела.

Формулу (1) можно записать в виде ряда сферических функций (так же, как и выражение любого вида потенциала притяжения), если в ней заменить функцию $1/r$ ее выражением, представленным в виде ряда полиномов Лежандра при $\rho > R$:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\rho} + \frac{R}{\rho^2}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^3}(3\cos^2\theta - 1) +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\theta),$$

где полиномы Лежандра первых четырех порядков P_0, P_1, P_2 и P_3 заменены их значениями.

Подставляя это значение $1/r$, найдем

$$W = G\int_v \frac{dm}{\rho} + G\int_v \frac{R}{\rho^2}\cos\theta\, dm + G\int_v \frac{R^2(3\cos^2\theta - 1)}{2\rho^3}\, dm +$$

$$+ \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + T,$$

где $T = G\sum_{n=3}^{\infty} \int_v \frac{R^n P_n(\cos\theta)\, dm}{\rho^{n+1}}$.

Рассмотрим по порядку первые три интеграла этого равенства, которые обозначим через Φ_1, Φ_2, Φ_3. Так как для данной фиксированной точки P ρ = const, то первый интеграл

$$\Phi_1 = G\int_v \frac{dm}{\rho} = \frac{G}{\rho}\int_v dm = G\frac{M}{\rho},$$

где M – масса Земли.

Второй интеграл

$$\Phi_2 = \frac{G}{\rho^2}\int_v R\cos\theta\, dm = 0.$$

Перейдем к третьему интегралу равенства

$$\Phi_3 = \frac{G}{2\rho^3}\int_v R^2(3\cos^2\theta - 1)\, dm.$$

Пусть A, B и C – моменты инерции Земли относительно осей координат x, y и z. В сферических координатах

$$x = \rho\cos\varphi\cos\lambda,$$

$$y = \rho\cos\varphi\sin\lambda,$$

$$z = \rho\sin\varphi,$$

где φ – ***геоцентрическая широта*** (угол между напряжением в центр масс Земли и плоскостью экватора, а ***географическая широта*** – это угол между нормалью и плоскостью экватора); λ – долгота (углы φ и λ отсчитываются от плоскости xz). После небольших математических выкладок и преобразований получим

$$\Phi_3 = \frac{G}{2\rho^3}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3}{4}\frac{G}{\rho^3}(B - A)\cos^2\varphi\cos 2\lambda.$$

Подставляя найденные значения интегралов Φ_1, Φ_2 и Φ_3 и учитывая выражение

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi,$$

найдем

$$W = \frac{GM}{\rho} + \frac{G}{2\rho^3}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3}{4}\frac{G}{\rho^3}(B - A)\cos^2\varphi \cos 2\lambda +$$

$$+ \frac{\omega^2\rho^2}{2}\cos^2\varphi + T. \qquad (1)$$

В полученной формуле первый член правой части представляет потенциал притяжения шара с массой, равной массе Земли. Второй член, зависящий от широты точки местности, учитывает действие добавочных масс, расположенных вдоль земного экватора.

Формула (1) только с первым и четвертым членами дает значение потенциала W на поверхности шарообразной Земли, с добавлением второго члена – на поверхности сфероидальной Земли. Третий член, содержащий долготу, учитывает неравномерное распределение масс по долгое. Формула (1) без значения T дает значение потенциала силы тяжести на поверхности трехосного эллипсоида, поскольку форма Земли больше соответствует трехосному эллипсоиду, чем эллипсоиду вращения или сфероиду.

Пренебрегая значением T и рассматривая Землю как тело вращения, мало отличающееся от шара (в этом случае моменты инерции относительно экваториальных осей равны $A = B$, и третий член формулы (1) исчезает), из последнего равенства получим значение потенциала силы тяжести для эллипсоида вращения или сфероида

$$W = G\frac{M}{\rho} + \frac{G}{2\rho^3}(C - A)(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2}{2}\rho^2\cos^2\varphi.$$

Величину $C - A$ (в случае Земли, сжатой у полюсов, $C > A$) можно определить так:

$$C - A = \mu a^2,$$

где a – радиус экватора; μ – воображаемая добавочная масса, расположенная вдоль земного экватора, которая делает C отличным от A и B (этот избыток массы можно представить в виде кольца, надетого на тело шара по экватору). По сравнению с массой Земли эта масса есть малая величина первого порядка, т.е. порядка сжатия Земли. Тогда

$$W = G\frac{M}{\rho} + \frac{G\mu a^2}{2\rho^3}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2\rho^2}{2}\cos^2\varphi.$$

Литература: [4, 14, 16].

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ В ВИДЕ РЯДА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В случае, когда магнитное поле имеет потенциальный характер (для источников, находящихся внутри земного шара), магнитный потенциал можно записать в виде

$$U = \int_v \frac{dm}{r}.$$

Пользуясь разложением функции $1/r$ в ряд сферических функций

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\rho} + \frac{R}{\rho^2}\cos\theta + \frac{R^2}{2\rho^3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots,$$

при $\rho > R$ найдем

$$U = \int_v \frac{dm}{r} = \frac{1}{\rho}\int_v dm + \frac{1}{\rho^2}\int_v R\cos\theta\, dm + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\rho^{n+1}}, \qquad (1)$$

где

$$A_n = \int_v R^n P_n(\cos\theta)\, dm.$$

Здесь первый член $\frac{1}{\rho}\int_v dm = 0$, так как сумма всех магнитных масс в каждой точке тела равна нулю. Поэтому формулу можно переписать в следующем виде:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n/\rho^{n+1}.$$

В частном случае при достаточно большом ρ эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$U = \frac{1}{\rho^2}\int_v R\cos\theta\, dm = \frac{M}{\rho^2}\cos\varphi.$$

Здесь интеграл $\int_v R\cos\theta\, dm$ – это проекция магнитного момента тела $\vec{M}$ на ось ρ (угол φ – это угол между направлениями $\vec{M}$ и ρ). Эта формула выражает потенциал однородного намагниченного шара. Отсюда следует, что всегда любое намагниченное тело (любой формы и с любым распределением в нем намагниченности) на достаточно большом расстоянии можно рассматривать как однородно намагниченный шар или диполь с таким же значением магнитного момента, что и данное тело. Это дает возможность при достаточно больших ρ ограничиваться рассмотрением поля диполя.

Коэффициенты

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda)P_n^k(\cos\theta),$$

где

$$a_{nk} = \frac{(n-k)!}{(n+k)!}C_n\int_v R^n P_n^k(\cos\gamma')\cos k\lambda' dm;$$

$$b_{nk} = \frac{(n-k)!}{(n+k)!}C_n\int_v R^n P_n^k(\cos\gamma')\sin k\lambda' dm.$$

Здесь γ, λ и γ', λ' – угловые координаты точек P и M.
Тогда ряд (1) перепишется в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\rho^{n+1}}(a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda)P_n^k(\cos\gamma).$$

В частном случае, когда тело имеет осевую симметрию (цилиндр, эллипсоид), эта формула не должна зависеть от λ, сто справедливо только при $k = 0$. В этом случае

$$A_n = a_n P_n(\cos\gamma).$$

Здесь

$$a_n = \int_v R^n P_n(\cos\gamma')dm,$$

и поэтому

$$U = \frac{a_1}{\rho^2} P_1(\cos\gamma) + \frac{a_2}{\rho^3}(\cos\gamma) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\gamma) =$$

$$= \frac{\cos\theta}{\rho^2} \int_v R\cos\gamma' \, dm + \frac{1}{2\rho^3}(3\cos^2\gamma - 1) \int_v R^2 \frac{3\cos^2\gamma' - 1}{2} \, dm + \ldots . \quad (2)$$

Если же намагниченное тело имеет и центр симметрии, то четные коэффициенты в этой формуле также будут равны нулю ($a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0$).

Литература: [16, 20].

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ В ВИДЕ РЯДОВ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Одной из важных задач при изучении магнитного поля Земли является представление его в виде аналитической зависимости компонент напряженности от координат точек земной поверхности. Зная такую функциональную зависимость, можно решать ряд задач научного и практического характера.

Первой попыткой такого представления была работа профессора Казанского университета И.М. Симонова, опубликованная в 1835 г. [20]. В ней И.М. Симонов, основываясь на результатах наблюдений того времени, высказывает предположение, что магнитное поле Земли является полем однородно намагниченного шара, магнитная ось которого проходит через центр земного шара параллельно линии, соединяющей магнитные поля. Несмотря на давность, работа И.М. Симонова не утратила своего значения и в настоящее время, так как большая часть магнитного поля Земли является полем однородно намагниченного шара, и поэтому при рассмотрении многих вопросов мы до сих пор принимаем, что земной шар намагничен однородно.

Следующим крупным шагом в аналитическом представлении земного магнитного поля явилась теория Гаусса (1838 г.), которая давала возможность представить магнитное поле Земли как функцию координат данной точки, оставляя совершенно в стороне физические причины возникновения этого поля. Теория Гаусса давала возможность решать ряд задач о структуре магнитного поля Земли, т.е. имело важное значение, которое она не потеряла и до сего времени.

Основанием теории Гаусса является предположение о том, что магнитное поле Земли вызывается источниками, которые находятся внутри земного шара и поэтому имеют потенциальный характер.

При этом потенциал магнитного поля можно представить в виде ряда сферических функций.

Введем обозначения [20]:

$$a_{nk} = R^{n+2}\,\alpha_{nk},\quad b_{nk} = R^{n+2}\,\beta_{nk},$$

где R – радиус Земли. Тогда

$$U = R\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{nk}\cos k\lambda + \beta_{nk}\sin k\lambda)P_n^k(\cos\theta).$$

Для точек, находящихся на поверхности земного шара, $\rho = R$, и поэтому

$$Z = R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{nk}\cos k\lambda + \beta_{nk}\sin k\lambda)P_n^k(\cos\theta). \qquad (1)$$

Составляющие напряженности магнитного поля по осям координат x, y и z можно найти, дифференцируя выражение (1) по соответствующей координате и полагая в нем $\rho = R$, $Z = -\partial U/\partial\rho$, $X = -\partial U/\partial\theta\rho$, $Y = (1/r\sin\theta)\partial U/\partial\lambda$:

$$Z = R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}[(n+1)\alpha_{nk}\cos k\lambda + (n+1)\beta_{nk}\sin k\lambda]P_n^k(\cos\theta),$$

$$X = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{nk}\cos k\lambda + \beta_{nk}\sin k\lambda)\frac{dP_n^k(\cos\theta)}{d\theta},$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k\alpha_{nk}\sin k\lambda - k\beta_{nk}\cos k\lambda)\frac{P_n^k(\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

Эти формулы и следуют из теории Гаусса. Из них видно, что в любой точке земной поверхности можно определить элементы земного магнетизма, если известны коэффициенты α_{nk} и β_{nk}. Число этих коэффициентов

$$N = n(n+2),$$

если в бесконечных рядах ограничиться членом порядка n. Поэтому для определения этих коэффициентов необходимо иметь N уравнений. Но для получения надежных результатов число уравнений должно быть гораздо больше, и их решают методом наименьших квадратов. Сам Гаусс ограничился членом четвертого порядка ($n = 4$). При этом количество неизвестных равно 24, и Гаусс определил их по данным наблюдений в 12 точках, решая 36 уравнений (в каждой точке наблюдалось три составляющих X, Y, Z). Фанзелау ограничился членом $n = 15$ (количество неиз-

вестных 255), решая систему уравнений из гораздо большего числа уравнений, чем 255, что стало возможным при появлении ЭВМ.

Разложение магнитного потенциала в ряд получило название ***сферического гармонического анализа***. Первые несколько членов этого разложения имеют определенный физический смысл [20]. Первый член разложения Гаусса представляет собой потенциал, создаваемый однородным намагниченным шаром, магнитный момент которого равен среднему моменту при неоднородном намагничивании.

Интерпретация остальных членов ряда впервые была дана Н.А. Умовым, который показал, что каждая из шаровых функций, входящих в ряд Гаусса, представляет магнитный потенциал особого распределения, называемого ***мультиполем*** и имеющего соответствующие оси, число которых определяется порядком функций. Кроме того, каждому мультиполю соответствует магнитный момент, который можно назвать магнитным моментом того же порядка, какой имеет сама функция. Например, члены второго порядка разложения Гаусса соответствуют потенциалу ***квадруполя***, который является совокупностью двух диполей, параллельных друг другу, но противоположно направленных и находящихся на некотором бесконечно малом расстоянии друг от друга. При этом сами диполи могут иметь любое направление и простирание.

Значение сферического гармонического анализа при различных геофизических и космических исследованиях постоянно возрастает. Современное применение сферического гармонического анализа основано на использовании большого количества экспериментального материала (иногда до 50–120 тысяч измеренных значений поля). В большинстве случаев получаемые сферические ряды ограничивают 8–10 членами (80÷120 коэффициентов), но есть примеры вычисления коэффициентов до 15, 23 порядков.

В настоящее время, так как на спутниках проводятся с достаточной точностью измерения только модуля полного вектора напряженности магнитного поля, сферический гармонический анализ применяется и для исследования этого элемента магнитного поля (***модульный анализ***). При этом за основу берут формулу, полученную из равенства

$$|\vec{T}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

при замене в нем функций X, Y и Z их выражениями, полученными через сферические гармонические ряды.

Коэффициенты сферического гармонического ряда, полученные по данным измерений в разное время, меняются от эпохи к эпохе. Систематическое изменение коэффициентов при этом указывает на то, что магнитное поле не остается постоянным, а непрерывно меняется, т.е. вековые изменения магнитного поля отражены и в изменении коэффициентов сферического ряда. Большое значение имеет для исследования природы геомагнитного поля знание закономерностей его изменения в большом временном интервале. Такие данные можно получить только на основе сферического гармонического анализа значений поля за прошлые эпохи. Но тогда измерения велись только по угловым элементам (склонения и наклонения – данные по измерениям склонения имеются с начала XVI в., а по измерениям наклонения – с XVIII в.). Кроме того, имеются еще и некоторые данные археомагнитных оценок. С использованием данных таких измерений, применяя иногда и экстраполирование, провели сферические гармонические анализы значений поля за прошлые эпохи, которые дали возможность более или менее удовлетворительно изучить перемещение геомагнитных полюсов и расположение магнитного центра Земли за 400-летний интервал. В общем данные сферического гармонического анализа значений геомагнитного поля дают возможность определить величину магнитного момента Земли и его направление, местоположение магнитного центра, их изменение со временем и другие общие свойства поля.

Данные сферического гармонического анализа при известных значениях коэффициентов ряда (после определения этих коэффициентов) дают возможность определить не только значения компонент поля X, Y и Z в разных точках пространства, но и различные градиенты этих компонент. Для этого необходимо продифференцировать выражения, определяющие эти компоненты через сферические ряды, по соответствующим сферическим координатам, а именно, необходимо определить следующие производные:

$$\frac{\partial Z}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Z}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial X}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial X}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \lambda}.$$

Здесь выражения первой строки определяют значения производных функций Z по осям координат x, y, z. Вторая и третья

строки соответственно определяют производные функций X, Y по этим же осям координат. Это следует из того, что для декартовых координат x, y, z, взятых в точке P на поверхности сферы с положительными направлениями (x – к северу по касательной к меридиану, y – к западу по касательной к параллели, z – перпендикулярно к центру сферы) дифференциалы равны соответственно

$$dz = -dr, \quad dx = -rd\theta, \quad dy = -r \sin \theta \, d\lambda.$$

Литература: [16, 20].

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Ряд Фурье. Заданную на интервале $(-l, l)$ периодическую функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ; \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

Этот ряд является рядом Фурье. Для него существует теорема Дирихле, которая гласит: если $f(x)$, заданная в промежутке $(-l, l)$, удовлетворяет в этом промежутке условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится во всем промежутке $(-l, l)$ и сумма этого ряда равна:

1) $f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, лежащих внутри промежутка;

2) $[f(x + 0) + f(x - 0)]/2$ во всех точках разрыва непрерывности;

3) $[f(-l + 0) + f(l - 0)]/2$ на концах промежутка, т.е. при $x = -l$ и $x = +l$.

Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, если:

а) интервал, на котором функция определена, можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна;

б) во всякой точке разрыва $f(x)$ существуют $f(x + 0)$ и $f(x - 0)$ – пределы функции справа и слева.

Если функция $f(x)$ – четная, то в ряде Фурье равны нулю коэффициенты b_k, для нечетной функции равны нулю a_k. В комплексной форме равенства для коэффициента объединяются в одно, и формула (1) перепишется в виде

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(i\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{4}$$

где

$$C_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\exp\left(-i\frac{k\pi x}{l}\right)dx. \tag{5}$$

Здесь k принимает и отрицательные, и положительные значения. Кроме того, из равенств (2), (3) и (5) видно, что

$$C_0 = a_0/2, \quad C_k = (a_k - ib_k)/2, \quad C_{-k} = (a_k + ib_k)/2.$$

Интеграл Фурье. Ряд Фурье дает разложение периодической функции по тригонометрическим функциям. Это разложение можно обобщить и на случай непериодической функции, рассматривая ее как предельный случай периодической функции при неограниченно возрастающем значении периода, т.е. когда промежуток $(-l, l)$, в котором изучается ряд Фурье, стремится к $(-\infty, \infty)$ – случай со значением $l \to \infty$. Остановимся на формулах для этого случая.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и непрерывна во всяком конечном промежутке и, кроме того, абсолютно интегрируемая на интервале $(-\infty, \infty)$, т.е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\exp(i\omega x)\,d\omega, \tag{6}$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\,dx. \tag{7}$$

Интеграл (6) называется интегралом Фурье функции $f(x)$. Формулы (6) и (7) известны как пара преобразований Фурье.

При этом формула (7) выражает прямое преобразование Фурье, формула (6) – обратное. Функцию $S(\omega)$ называют ***спектром функции*** $f(x)$ или ее ***трансформантой Фурье***.

Если ряд Фурье представляет периодическую функцию как сумму периодических же составляющих, то интеграл Фурье представляет непериодическую функцию суммой периодических составляющих (суммой бесконечно большого числа бесконечно малых колебаний, бесконечно близких по частоте).

Форма записи, выражающаяся равенствами (6) и (7), относится к так называемой несимметричной форме, заключающейся в наличии коэффициента $1/2\pi$ при одной формуле и в отсутствии его при другой. В симметричной форме пара преобразований Фурье записывается в виде

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\,dx, \tag{8}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\exp(+i\omega x)\,d\omega. \tag{9}$$

(Здесь и в дальнейшем будем пользоваться симметричной формой записи преобразований Фурье).

Для трехмерных аномалий существуют двукратные преобразования

$$S(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-i(ux+vy)]\,dx\,dy, \tag{10}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(u,v)\exp[i(ux+vy)]\,du\,dv. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) являются парой двукратных преобразований Фурье, написанных в симметричной форме (в несимметричной форме перед интегралом в первой формуле не будет коэффициента, перед интегралом второй формулы коэффициент будет равен $1/4\pi^2$).

В случае осесимметричного поля, т.е. когда функция $f(x, y)$ зависит только от переменной $r = \sqrt{x^2+y^2}$, равенства (10) и (11) упростятся и примут несколько иной вид:

$$S(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r)\,dr, \tag{12}$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} \rho S(\rho) J_0(\rho r)\,d\rho, \quad \rho = \sqrt{u^2+v^2}. \tag{13}$$

Эти формулы выражают пару преобразований Фурье для функции $f(x, y) = f(r)$, т.е. являются частным случаем общих формул двукратных преобразований Фурье. Формулы (12), (13) представляют собой также пары преобразований Ханкеля нулевого порядка.

Равенства эти справедливы, когда интеграл $\int_0^\infty r f(r)dr$ абсолютно сходится и когда $f(r)$ не терпит разрыва непрерывности в окрестности точки r. Если же $f(r)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки r, то формула (13) определяет значение $[f(r + 0) + f(r - 0)]/2$.

Литература: [2, 11, 13, 14, 16].

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

Под прямой задачей гравимагниторазведки понимается задача нахождения элементов гравитационного и магнитного полей (потенциалы полей и различные их производные) по известному распределению плотностных или магнитных неоднородностей в земной коре (источников полей).

Под обратной задачей понимается определение массы и пространственного положения тех же неоднородностей (источников) по заданным значениям гравитационного или магнитного поля.

В частном случае, когда источники поля вытянуты с практически одинаковым сечением в каком-то одном направлении (с этим направлением обычно совмещают ось y) на достаточно большие расстояния (теоретически до бесконечности), аномальные тела или источники полей называются ***двумерными***. Соответственно двумерными называются и соответствующие им поля. Такие поля не зависит от значений y и меняются только в зависимости от координат x и z, т.е. в плоскости xoz. Поэтому такие поля называются еще и ***плоскими***.

Аналитические выражения, определяющие значения любого элемента поля от любых источников, можно вывести, пользуясь выражениями гравитационного или магнитного потенциалов от точечной массы или от объемных масс, интегрируя по объему тела и дифференцируя по координатам x, y и z соответствующее число раз.

Выражения для некоторых элементов гравитационного или магнитного полей от наиболее применяемых на практике тел правильной формы приведены в табл. 12, где приняты следующие обозначения: ζ, ζ_1, ζ_2 глубины залеганий центра (осевой линии), верхней и нижней кромок аномальных тел; σ, λ, μ – объемная, линейная и поверхностная плотности; M – масса шара; M_1 – магнитный момент объемного тела; m – магнитная масса единицы длины тела; μ – поверхностная плотность намагниченного тела; J – вектор намагничивания; N – отношение максимальных значений аномалий V_{zz} и V_{xz} или Z и H.

Таблица 12

Гравитационные и магнитные аномалии от тел простейшей формы

№ п/п	Форма тела	Вид аномалии	Максимальное значение	Минимальное значение	Абсцисса точки нуля	N
1	Шар (при $y = 0$); вертикальный диполь (при $GM = M_1$: $V_{xx} = H$, $V_{zz} = Z$)	$V_z = GM\zeta/(x^2 + \zeta^2)^{3/2}$	GM/ζ^2, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	2,33
		$V_{xz} = -3GM\zeta x/(x^2 + \zeta^2)^{5/2}$	$0{,}859GM/\zeta^3$, $x = -\zeta/2$	$-0{,}859GM/\zeta^3$, $x = \zeta/2$	0, $\pm\infty$	
		$V_{zz} = GM(2\zeta^2 - x^2)/(x^2 + \zeta^2)^{5/2}$	$2GM/\zeta^3$, $x = 0$	$-0{,}036GM/\zeta^3$, $x = \pm 2\zeta$	$\pm\sqrt{2}\zeta$, $\pm\infty$	
2	Бесконечный круговой горизонтальный цилиндр, бесконечная дипольная линия при $G\lambda = m$: $V_{xx} = H$, $V_{zz} = Z$	$V_z = 2G\lambda\zeta/(x^2 + \zeta^2)$	$2G\lambda/\zeta$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	1,54
		$V_{xz} = -4G\lambda\zeta x/(x^2 + \zeta^2)^2$	$1{,}299G\lambda/\zeta^2$, $x = -\zeta/\sqrt{3}$	$-1{,}299G\lambda/\zeta^2$, $x = \zeta/\sqrt{3}$	0, $\pm\infty$	
		$V_{zz} = 2G\lambda(\zeta^2 - x^2)/(x^2 + \zeta^2)^2$	$2G\lambda/\zeta^2$, $x = 0$	$-0{,}25G\lambda/\zeta^2$, $x = \pm\sqrt{3}\zeta$	$\pm\zeta$, $\pm\infty$	
3	Тонкий вертикальный стержень ($\zeta_2 \to \infty$), $y = 0$. Точечный магнитный полюс при $G\lambda = m$: $V_{xx} = H$, $V_{zz} = Z$	$V_z = 2G\lambda\zeta/(x^2 + \zeta^2)$	$G\lambda/\zeta$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	2,60
		$V_{xz} = -G\lambda\zeta x/(x^2 + \zeta^2)^{3/2}$	$0{,}385G\lambda/\zeta^2$, $x = -\zeta/\sqrt{2}$	$-0{,}385G\lambda/\zeta^2$, $x = \zeta/\sqrt{2}$	0, $x \to \pm\infty$	
		$V_{zz} = G\lambda\zeta/(x^2 + \zeta^2)^{3/2}$	$G\lambda/\zeta^2$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	
4	Бесконечная материальная вертикальная полоса, магнитная полюсная линия при $G\mu = m_1$: $V_{xx} = H$, $V_{zz} = Z$	$V_{xz} = -2G\mu x/(x^2 + \zeta^2)$	$G\mu/\zeta$, $x = -\zeta$	$-G\mu/\zeta$, $x = \zeta$	0, $\pm\infty$	2,00
		$V_{zz} = 2G\mu\zeta/(x^2 + \zeta^2)$	$2G\mu/\zeta$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	

5	Бесконечная горизонтальная материальная полоса, заряженная полоса при $G\mu = m_1$: $V_z = Z$	$V_z = 2G\mu\left(\operatorname{arctg}\frac{x+l}{\zeta} - \operatorname{arctg}\frac{x-l}{\zeta}\right)$	$4G\mu \operatorname{arctg}\frac{l}{\zeta}$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	
6	Бесконечная материальная горизонтальная полуплоскость, горизонтальная заряженная полуплоскость при $G\mu = m_1$: $V_z = Z$	$V_z = 2G\mu\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{\zeta}\right)$	$2\pi G\mu$, $x \to +\infty$	0, $x \to -\infty$	$-\infty$	0,5
		$V_{xz} = 2G\mu\zeta/(x^2 + \zeta^2)$	$2G\mu/\zeta$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	
		$V_{zz} = 2G\mu x/(x^2 + \zeta^2)$	$G\mu/\zeta$, $x = \zeta$	$-G\mu/\zeta$, $x = -\zeta$	$0, \pm\infty$	
7	Вертикальный контакт, полубесконечный горизонтальный слой при $G\sigma = J$: $V_{xz} = H$, $V_{zz} = Z$	$V_z = 2G\sigma\left\|\zeta\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{\zeta}\right) + \frac{x}{2}\ln(x^2 + \zeta^2)\right\|_{\zeta_1}^{\zeta_2}$	$2\pi G\sigma(\zeta_2 - \zeta_1)$, $x \to +\infty$	0, $x \to -\infty$	$-\infty$	
		$V_{xz} = G\sigma\ln\frac{x^2 + \zeta_2^2}{x^2 + \zeta_1^2}$	$2G\sigma\ln\frac{\zeta_2}{\zeta_1}$, $x = 0$	0, $x \to \pm\infty$	$\pm\infty$	
		$V_{zz} = 2G\sigma\left(\operatorname{arctg}\frac{\zeta_2}{x} - \operatorname{arctg}\frac{\zeta_1}{x}\right)$	$2G\sigma(\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta_2/\zeta_1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta_1/\zeta_2})$, $x = \sqrt{\zeta_1\zeta_2}$	$2G\sigma(\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta_1/\zeta_2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta_2/\zeta_1})$, $x = -\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$	$0, \pm\infty$	

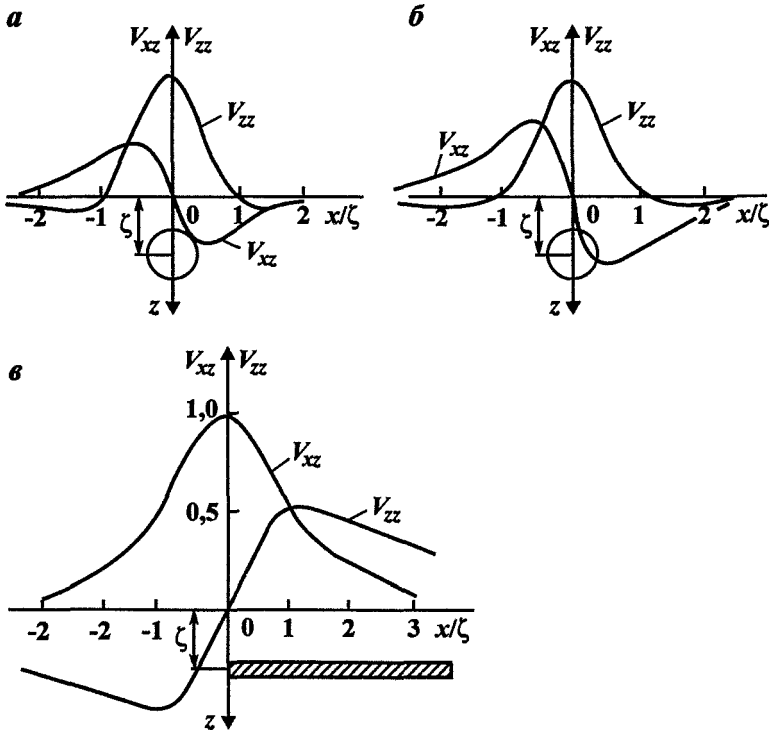


Рис. 101. Графики производных силы притяжения шара (*а*), бесконечного кругового цилиндра (*б*) и горизонтальной материальной полуплоскости (*в*)

Типичные кривые изменения значений аномалий V_{xz} и V_{zz} от шара, бесконечного горизонтального кругового цилиндра и бесконечной материальной полуплоскости приведены на рис. 101. Кривые магнитных аномалий Z и H от указанных тел (см. табл. 12) при вертикальном намагничивании будут иметь такой же вид, как и графики функций V_{zz}, V_{xz}.

Координаты характерных точек аномалий, приведенных в табл. 12, можно использовать при решении обратной задачи при известной форме источников полей. Приведем еще уравнения связи между значениями глубины залегания тел и $x_{1/2}$, где $x_{1/2}$ – это координата точки аномалии V_z, в которой аномалия равна половине максимального ее значения:

$$V_z(x_{1/2}) = \frac{1}{2}(V_z)_{max}.$$

Для шара и бесконечных горизонтальных кругового цилиндра, материальной полосы, вертикальной материальной полосы соответственно верны следующие выражения:

$$x_{1/2} = 0{,}77\zeta, \quad x_{1/2} = \zeta, \quad x_{1/2}^2 = \zeta^2 + l^2, \quad x_{1/2}^2 = \zeta_1 \zeta_2.$$

Рассмотрим теперь решение прямой задачи для тел произвольной формы. Все способы решения этой задачи основаны на замене действия аномального тела суммой действий тел простейшей формы, для которых уже известны аналитические выражения, решающие прямую задачу. В частном случае можно производить замену возмущающего тела одним или несколькими элементарными телами. Например, тонкие пласты можно заменить материальными полосами, тектонические нарушения – наклонными или вертикальными ступенями, вертикальные жилы и дайки – вертикальными цилиндрами или линиями и т.д.

В настоящее время составлено много программ, решающих прямую задачу. Все они основаны на указанной выше замене действия аномального тела суммой действий горизонтальных или вертикальных элементарных источников. Алгоритмы этих способов отличаются в основном выбором формы элементарного источника и способа численного интегрирования. На примере двумерной задачи рассмотрим ниже наиболее часто применяемые на практике формы этих тел при вычислении элементов полей.

Исходными являются выражения, полученные для этих аномалий в начале координат (начало координат совмещают с той точкой, в которой определяют значение аномалии) при постоянном значении плотности тела.

В прямоугольной системе координат

$$V_z = 2G\sigma \int_S \frac{\zeta d\xi d\zeta}{\xi^2+\zeta^2},$$

$$V_{xz} = 4G\sigma \int_S \frac{\xi\zeta d\xi d\zeta}{(\xi^2+\zeta^2)^2},$$

$$V_{zz} = -V_\Delta = 2G\sigma \int_S \frac{\zeta^2-\xi^2}{(\xi^2+\zeta^2)^2} d\xi d\zeta.$$

Формулы для H и Z здесь и далее могут быть получены из уравнения Пуассона, например для вертикального намагничивания

$$H = \frac{J}{G\sigma} V_{xz}; \quad Z = \frac{J}{G\sigma} V_{zz}.$$

В полярной системе координат

$$\xi = \rho \cos\varphi;\ \zeta = \rho \sin\varphi;\ d\xi\, d\zeta = \rho d\rho d\varphi,$$

$$V_z = 2G\sigma \int_S \sin\varphi d\rho d\varphi,$$

$$V_{xz} = 2G\sigma \int_S \frac{\sin 2\varphi}{\rho} d\rho d\varphi,$$

$$V_{zz} = -2G\sigma \int_S \frac{\cos 2\varphi}{\rho} d\rho d\varphi.$$

В системе координат, соответствующей обозначениям при $h > 0$ (коническая система координат по О.А. Шванку),

$$\xi = h \operatorname{tg}\varphi;\ \zeta = h;\ d\xi\, d\zeta = (h/\cos^2\varphi) dh\, d\varphi,$$

$$V_z = 2G\sigma \int_S dh d\varphi,$$

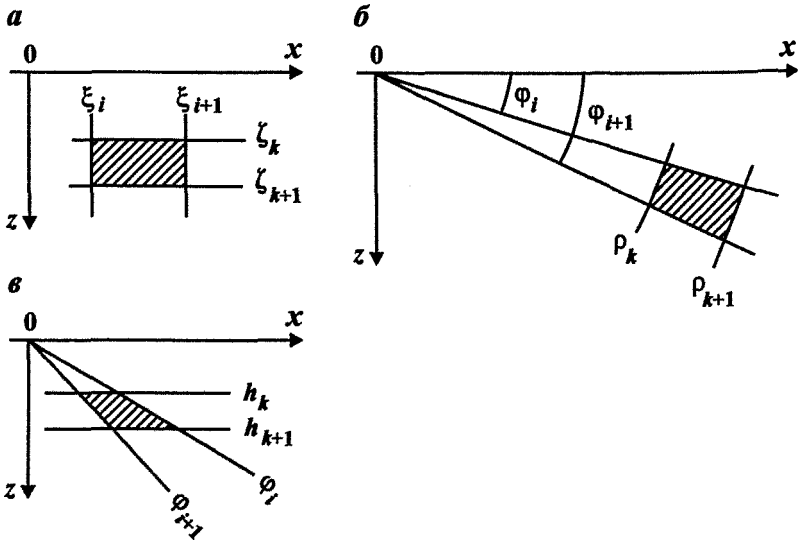


Рис. 102. Форма элементарных тел, аппроксимирующих источники полей в системах координат:
а – прямоугольной; *б* – полярной; *в* – конической

$$V_{xz} = 2G\sigma \int_S \frac{\sin 2\varphi}{h} dh d\varphi,$$

$$V_{zz} = 2G\sigma \int_S \frac{\cos 2\varphi}{h} dh d\varphi.$$

Вычисление прямого эффекта от тел сложной формы основано на численном интегрировании соответствующих интегральных выражений, т.е. на замене действия сложно построенного тела суммой действий тел простой формы. Для каждой элементарной площадки, на которые разбивается сечение возмущающего тела, значение вычисляемой составляющей считается постоянным.

В зависимости от принятой системы координат форма элементарных площадок и аналитические выражения их действия будут различны (рис. 102).

Литература: [3, 6, 14].

РАДИУС КОРРЕЛЯЦИИ АНОМАЛИЙ И ЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Одним из важных параметров гравитационных и магнитных аномалий является радиус корреляции, зависящий от ширины аномалий и характеризующий их коррелируемость. Этот параметр широко применяется при решении различных задач гравиразведки и магниторазведки – при разделении полей, районировании территорий, определении формы и глубины залегания источников и др. Наиболее полно вопросы определения радиуса корреляции рассмотрены и разработаны в работе [16]. Результаты этой работы позволяют определить рассматриваемый параметр как по данным аномалий, так и в частотной области по данным их энергетических спектров. Поэтому приведем здесь только конечные формулы.

Радиус корреляции r можно определить как половину основания прямоугольника с высотой $B(0)$ и площадью, образованной функций корреляции $B(\tau)$ и осью τ (рис. 103):

$$r = \frac{1}{2B(0)} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, d\tau. \qquad (1)$$

Если корреляционная функция является функцией двух переменных ξ, η, то при анизотропии радиусы корреляции r_1 и r_2 будут определяться как половины оснований параллелепипеда с высотой $B(0, 0)$ и объемом, равным объему тела, образованного поверхностью корреляционной функции $B(\xi, \eta)$ и плоскостью $\xi\,\eta$:

$$4 r_1 r_2 = \frac{1}{B(0,0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\,. \qquad (2)$$

В осесимметричном случае вместо площади основания параллелепипеда $4r_1r_2$ следует брать площадь основания цилиндра πr^2, и тогда радиус корреляции определится из следующего соотношения:

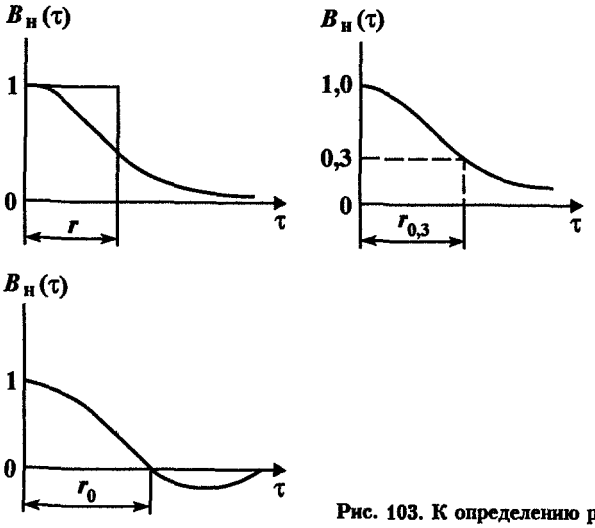


Рис. 103. К определению радиуса корреляции

$$r^2 = \frac{2}{B(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau B(\tau) d\tau, \tag{3}$$

где

$$\tau = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Однако для аномалий, автокорреляционные функции (АКФ) которых язляются знакопеременными, например, аномалий первых производных ускорения свободного падения от шара, бесконечного горизонтального кругового цилиндра и других, формулы (1)–(3) в написанном виде нельзя применять, так как интегралы их правых частей обращаются в нуль. В этом случае, т.е. когда знакопеременная автокорреляционная функция имеет одну нулевую точку (вторая находится в бесконечности) и когда $\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau = 0$, вместо формулы (1) необходимо пользоваться выражением

$$r = \frac{1}{B(0)} \int_{0}^{\infty} |B(\tau)| d\tau. \tag{4}$$

Аналогично в трехмерном случае

$$r_1 r_2 = \frac{1}{B(0,0)} \int_0^\infty \int_0^\infty |B(\xi,\eta)| d\xi d\eta, \tag{5}$$

$$r^2 = \frac{2}{B(0)} \int_0^\infty \tau |B(\tau)| d\tau. \tag{6}$$

Учитывая равенства, выражающие связь между автокорреляционными функциями и энергетическими спектрами, формулы (1)–(3) легко выразить через энергетические спектры $Q(\omega)$ или $Q(u, v)$:

$$r = \pi Q(0) / \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) d(\omega),$$

$$r_1 r_2 = \pi^2 Q(0,0) / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(u,v) du dv,$$

$$r^2 = 2Q(0) / \int_0^\infty \rho Q(\rho) d\rho,$$

где

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Если τ_0, ξ_0 и η_0 – горизонтальные координаты точек перехода автокорреляционной функции через нуль, то равенства (4)–(6) можно переписать в виде, при котором интегрирование ведется только до значений τ_0, ξ_0, η_0:

$$r = 2 \int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau / B(0),$$

$$r_1 r_2 = \frac{2}{B(0,0)} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} B(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{7}$$

$$r^2 = \frac{4}{B(0)} \int_0^{\tau_0} \tau B(\tau) d\tau.$$

Можно показать, что

$$r \le 2\tau_0,$$

$$r_1 r_2 \le 2\xi_0 \eta_0,$$

$$r^2 \le 2\tau_0^2, \text{ или } r \le \sqrt{2}\,\tau_0.$$

По другим определениям радиус корреляции r можно найти как значение τ, при котором нормированная функция $B_н(\tau) = 0{,}3$. Получаемое таким образом значение обозначим $r_{0,3}$ (см. рис. 103). Это для незнакопеременных корреляционных функций. Для случая знакопеременных функций применяется значение радиуса нулевой корреляции r_0 – значение τ, при котором (см. рис. 103)

$$B_н(\tau) = 0. \tag{8}$$

На рис. 104, *а* приведены графики изменения отношения r к r_1 (r и r_1 – соответственно радиусы автокорреляции исходной аномалии гравитационного поля и ее горизонтальной или вертикальной производной), которые используются при определении формы и глубины залегания источников поля. На рис. 104, *б* показан пример районирования по значениям $r_{0,3}$.

Радиусы корреляции $r_{0,3}$ и r_0 можно применять порознь для указанных отдельных классов аномалий. Но если на одной и той же площади находятся и незнакопеременные и знакопеременные аномалии, то для единой их характеристики трудно сравнивать $r_{0,3}$ и r_0 друг с другом, так как они определены при разных, несколько отличающихся друг от друга критериях. Эту трудность можно преодолеть, если поступить следующим образом.

В случае аномалий, функции $B(\tau)$ которых являются знакопеременными и $Q(0) = 0$, можно образовать несколько иную нормированную функцию, а именно:

$$B_н(\tau)_1 = \frac{B(\tau) + |B(\tau_{min})|}{B(0) + |B(\tau_{min})|},$$

где τ_{min} – абсцисса точки минимума функции $B(\tau)$. Тогда радиус корреляции можно определить по единой методике как значение τ, при котором

$$B_н(\tau)_1 = 0{,}3. \tag{9}$$

Таким путем и для знакопеременных корреляционных функций получим значение $r_{0,3}$.

Для незнакопеременных функций можно пользоваться этим же критерием. В этом случае

$$B_н(\tau)_1 = B_н(\tau), \text{ так как } B(\tau_{min}) = 0.$$

Опыт определения радиуса корреляции показывает, что значения $r_{0,3}$ и значения r, получаемые из интегральных формул, часто совпадают друг с другом, в остальных случаях не намного отличаются друг от друга. Но учитывая, что при определении радиуса

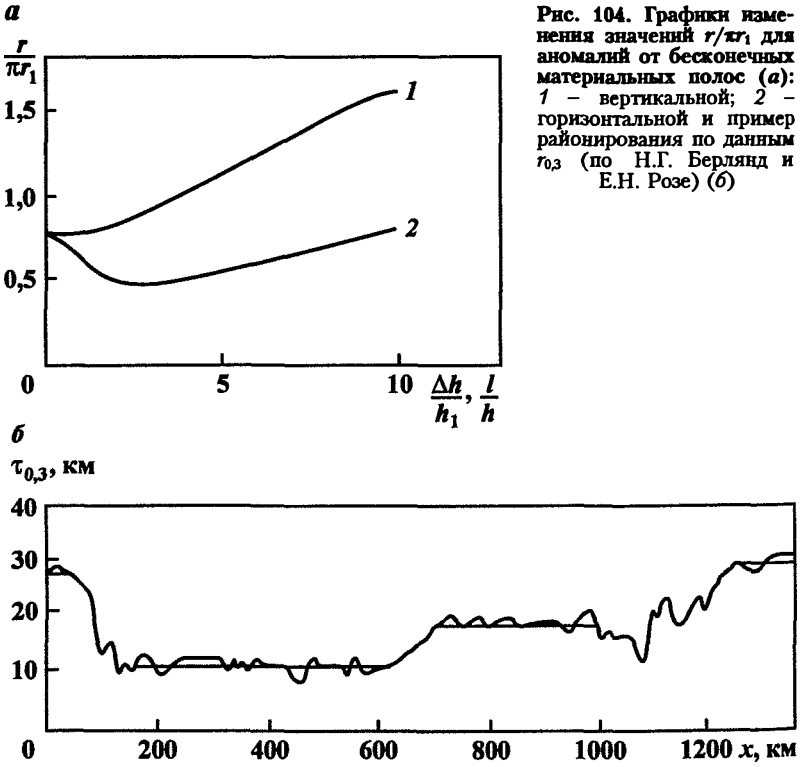


Рис. 104. Графики изменения значений $r/\pi r_1$ для аномалий от бесконечных материальных полос (*а*): *1* – вертикальной; *2* – горизонтальной и пример районирования по данным $r_{0,3}$ (по Н.Г. Берлянд и Е.Н. Розе) (*б*)

корреляции из интегральных способов используется вся корреляционная функция, а не отдельные ее значения, предпочтение нужно отдать интегральным способам и радиус корреляции нужно определить из них. Можно пользоваться и значениями радиуса корреляции $r_{0,3}$, но это следует делать только для определения r в первом приближении и для отдельных быстрых прикидок.

При практических расчетах могут быть случаи, когда автокорреляционная функция является знакопеременной осциллирующей функцией, имеющей множество точек нулевых значений при $Q(0) \neq 0$. В этом случае для определения радиуса корреляции необходимо применить формулу (4). Но использование этой формулы осложняется тем, что приходится считать площади при далеких осцилляциях автокорреляционной функции; кроме того, значения функции при очень больших значениях τ мало сказываются на коррелируемости аномалий. Поэтому, считая в таких

случаях площадь до второй нулевой точки автокорреляционной функции, иногда получаем несколько заниженные значения радиуса корреляции.

Формула (7), так же как и формула (9), выведена для случая, когда имеется только одна точка нуля (вторая точка находится в бесконечности) и когда выполняется равенство

$$\int_0^\infty B(\tau)d\tau = 0, \text{ т.е. } Q(0) = 0.$$

В рассматриваемом случае эти условия не выполняются, но тем не менее применение формул (7) для случаев таких осциллирующих функций дает хорошие результаты, совпадающие удовлетворительно одновременно со значениями, получаемыми из условий (8) и (9). Поэтому в таких случаях для определения радиуса корреляции также необходимо применять формулы (4)–(6) или (7). При этом под значением τ_0 нужно понимать первую нулевую точку автокорреляционной функции.

Рассмотренные выше формулы служат для определения радиуса корреляции по автокорреляционной функции и энергетическому спектру аномалии. В случае аномалии одного знака радиус корреляции можно определить и непосредственно по исходной гравитационной или магнитной аномалии $f(x)$, а именно, из формулы

$$r = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right]^2 / \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx. \qquad (10)$$

Как видно из этой формулы, она определяет значение радиуса корреляции аномалии непосредственно по значениям самой аномалии. Это важно, так как для определения радиуса корреляции не нужно строить автокорреляционную функцию.

Аналогично в трехмерном случае можно показать, что

$$4r_1r_2 = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y)dxdy},$$

где r_1 и r_2 – радиусы корреляций в двух взаимно перпендикулярных направлениях, совпадающих с направлениями x, y. В осесимметричном случае отсюда получим

$$r = 2\left[\int_0^\infty rf(r)dr\right]^2 / \int_0^\infty rf^2(r)dr.$$

Для четных аномалий равенство (10) можно переписать в следующем виде:

$$r = \left[\int_0^\infty f(x)dx\right]^2 / \int_0^\infty f^2(x)dx.$$

Аналитические выражения, определяющие радиусы корреляции аномалий от основных источников гравитационного и магнитного полей, приведены в работе [16].

Литература: [13, 16].

РАДИУС КОРРЕЛЯЦИИ СУММАРНОГО ПОЛЯ

Приведем еще формулы, позволяющие определить радиус корреляции суммарного поля через радиусы корреляции составляющих компонент.

Если суммарная аномалия

$$f(x, y) = f_{\text{р}}(x, y) + f_{\text{л}}(x, y) + f_{\text{п}}(x, y),$$

то

$$r_f = [r_{\text{р}}\sqrt{B_{\text{р}}(0)} + r_{\text{л}}\sqrt{B_{\text{л}}(0)} + r_{\text{п}}\sqrt{B_{\text{п}}(0)}]/\sqrt{B_f(0)}.$$

Здесь индексы р, л, п указывают на случай региональной и локальной аномалий и случайных помех.

Для двумерной аномалии

$$f(x) = f_{\text{р}}(x) + f_{\text{л}}(x) + f_{\text{п}}(x),$$

$$r_f = [\sqrt{r_{\text{р}}B_{\text{р}}(0)} + \sqrt{r_{\text{л}}B_{\text{л}}(0)} + \sqrt{r_{\text{п}}B_{\text{п}}(0)}]^2 / B_f(0).$$

Здесь через $B(0)$ обозначено максимальное значение автокорреляционной функции соответствующего сигнала.

Литература: [13, 16].

РАДИУСЫ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Значения радиусов автокорреляции или просто корреляции широко применяются на практике при анализе аномалий потенциальных полей. В литературе дана методика их определения, получены аналитические выражения, определяющие их для аномалий от наиболее часто применяющихся на практике источников правильной формы, приведены примеры их использования на практике при анализе и интерпретации аномалий гравитационных и магнитных полей.

В то же время радиусы взаимной корреляции, за редким исключением, не определялись и не применялись на практике.

Радиусы взаимной корреляции имеют на практике при интерпретации аномалий такое же значение, что и радиусы автокорреляции, поэтому их определение очень важно.

Определение радиусов взаимной корреляции. Способы определения радиусов корреляции аномалий потенциальных полей описаны выше. Эти же способы можно перенести и на определение радиусов взаимной корреляции аномалий. Рассмотрим более подробно методику их определения.

Радиус взаимной корреляции двух сигналов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будем определять по интегральному способу, обеспечивающему получение более надежных данных:

$$R_{12} = \int_0^\infty |B_{12}(\tau)_н| d\tau, \qquad (1)$$

где $B_{12}(\tau)_н$ – нормированная по максимуму взаимная корреляционная функция сигналов $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$B_{12}(\tau)_н = \frac{B_{12}(\tau)}{[B_{12}(\tau)]_{max}}.$$

Аналогично для трехмерных осесимметричных аномалий

$$R_{12}^2 = \int_0^\infty \tau |B_{12}(\tau)_н| d\tau.$$

Обозначим для простоты радиусы взаимной корреляции исходной аномалии f и ее производных f_x, f_z, а также производных f_x, f_z через R_1, R_2 и R_3. Запишем формулу (1) только для этих трех случаев.

1. Пусть $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f_x(x)$. Тогда

$$R_{12} = R_1 = \int_0^\infty |B_{f,f_x}(\tau)_н| d\tau.$$

2. При $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f_z(x)$ получим

$$R_{12} = R_2 = \int_0^\infty |B_{f,f_z}(\tau)_н| d\tau.$$

3. При $f_2(x) = f_x(x), f_2(x) = f_z(x)$ найдем

$$R_{12} = R_3 = \int_0^\infty |B_{f_x,f_z}(\tau)_н| d\tau.$$

Здесь радиусы взаимной корреляции соответствующих аномалий обозначены через R_1, R_2 и R_3 в отличие от обозначений радиусов автокорреляции исходной аномалии R и ее горизонтальной и вертикальной производных R'.

Радиус взаимной корреляции двух аномалий, так же как и радиус корреляции (автокорреляции) аномалий, имеет самостоятельное значение. Он является статистическим параметром и его можно применить при районировании территорий, при решении задач фильтрации аномалий и др. Но его можно применить и при интерпретации аномалий. Это основано на том, что радиус взаимной корреляции аномалий, являясь некоторой интегральной характеристикой, связан с шириной аномалии. Поэтому его можно рассматривать как некоторую горизонтальную координату, зависящую от ширины сигналов $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Характер изменения радиусов корреляции R_1, R_2 и R' показан на рис. 105. Рассматриваемые значения радиусов корреляции (сплошные линии) соответствуют гравитационной аномалии V_z от бесконечной вертикальной материальной полосы. Графики построены для одного и того же значения вертикальной мощности полосы $\Delta h = h_2 - h_1 = 10$ км. Пунктирные линии соответствуют аномалии от бесконечной горизонтальной материальной линии.

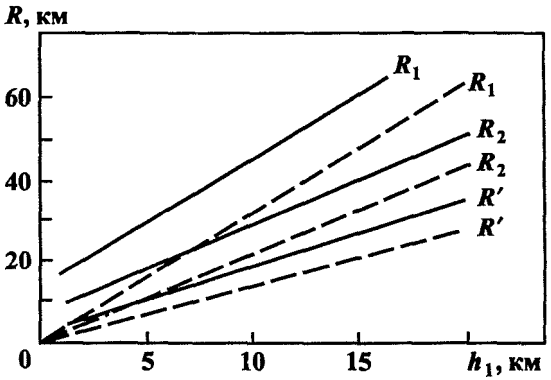


Рис. 105. Характер изменения радиусов корреляции R_1, R_2, R'

Из рисунка видно, что наибольшие значения радиуса взаимной корреляции имеет кривая R_1. Значения R_2 всегда меньше R_1. Наименьшие значения из рассматриваемых кривых имеет кривая для R'. Анализ полученных выражений показывает, что радиус автокорреляции исходной аномалии R мало отличается от R_1 (при больших значениях h величины R и R_1 равны друг другу). Это же положение верно и для случая бесконечной горизонтальной материальной полосы [16].

Литература: [11, 13, 14, 16].

РЯД ТЕЙЛОРА И ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Всякая функция $f(\gamma)$, аналитическая внутри некоторого круга с центром γ_0, может быть представлена единственным образом во всех точках внутри этого круга в виде степенного ряда

$$f(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\gamma - \gamma_0)^n,$$

где C_n – комплексные числа, определяемые формулой

$$C_n = f^n(\gamma_0)/n!.$$

Этот ряд является рядом Тейлора функции $f(\gamma)$ в окрестности точки γ_0.

При применении аналитических функций для интерпретации аномалий важное значение имеют особые точки этих функций, т.е. такие точки, в окрестности которых функция $f(\gamma)$ не может быть представлена в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Тейлора с центром в этой точке. Особые точки аналитической функции комплексного переменного разделяются на изолированные и неизолированные. Изолированная особая точка существует в том случае, когда внутри некоторого круга достаточно малого радиуса, проведенного с центром в этой точке, нет других особых точек этой функции. Если такие точки имеются, то особая точка является неизолированной. Изолированные особые точки бывают ***однозначного*** и ***многозначного характера*** (в зависимости от того, однозначна или многозначна рассматриваемая аналитическая функция в их достаточно малой окрестности).

Изолированные особые точки ***однозначного характера*** делятся на три типа:

1) устранимая особая точка, когда существует предел

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} f(\gamma) \neq \infty;$$

2) полюс, когда

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} f(\gamma) = \infty;$$

3) существенно особая точка, когда не существует предела

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} f(\gamma).$$

Если особые точки являются точками многозначного характера, то их называют также точками ветвления функции. Среди последних выделяют три следующих основных вида: 1) алгебраические точки ветвления; 2) логарифмические точки ветвления и 3) степенно-логарифмические точки ветвления.

Значение особых точек при интерпретации аномалий определяется в основном следующим: характер изменения полей зависит от закономерностей расположения особых точек; точность вычисления трансформированных значений аномалий зависит от расположения точек счета по отношению к особым точкам (чем они ближе, тем точность ниже); во многих случаях (например, для конечных двумерных тел правильной геометрической формы – выпуклые и звездные многоугольники и другие) особые точки располагаются внутри тела или на его границе и дают важную информацию о расположении самого тела.

Литература: [13, 14, 16].

РЯДЫ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Выше было рассмотрено разложение функции $1/r$ в ряд простейших сферических функций – полиномов Лежандра. Рассмотрим более общий случай разложения функции в ряд сферических функций общего вида.

Пусть $f(\theta, \lambda)$ – некоторая заданная на сфере единичного радиуса s функция сферических координат θ и λ произвольной точки M, которая представима в виде равномерно сходящегося ряда

$$f(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} [(A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) P_n^k (\cos\theta)].$$

Возможность разложения функции $f(\theta, \lambda)$ в ряд сферических функций следует из следующей теоремы: всякая функция $f(\theta, \lambda)_1$, гармоническая внутри сферы $R = 1$ и обращающаяся на этой сфере в заданную функцию $f(\theta, \lambda)$, разлагается для всякой внутренней точки сферы в бесконечный ряд многочленов $Y_n(\theta, \lambda)$, принадлежащих к заданной функции $f(\theta, \lambda)$. Такое же положение и для функций, гармоничных вне сферы. Для всех тех функций, с которыми приходится иметь дело на практике, такое разложение является единственным.

Запишем формулы для определения коэффициентов ряда:

$$A_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda) P_n^k (\cos\theta) \cos k\lambda \sin\theta \, d\theta \, d\lambda,$$

$$B_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda) P_n^k (\cos\theta) \sin k\lambda \sin\theta \, d\theta \, d\lambda,$$

где

$$\delta_0 = 2, \quad \delta_k = 1 \ (k > 0).$$

Таким образом, заданную на поверхности сферы единичного радиуса функцию $f(\theta, \lambda)$ можно представить в виде ряда (счита-

ем, что она отвечает соответствующим условиям – она конечная, непрерывная, однозначная) сферических функций.

Таким образом, при разложении некоторой функции $f(\theta, \lambda)$ (например, потенциала силы тяжести или магнитного потенциала) в ряд сферических функций ее представляют комбинацией знакопеременных на сфере функций, таких, которые в сумме дают исходную функцию $f(\theta, \lambda)$. При этом более мелкие (локальные) детали функции $f(\theta, \lambda)$ учитываются более высокими гармониками разложения (членами с большими номерами индексов n и k), низкие гармоники разложения учитывают детали, простирающиеся на большие площади [региональные особенности функции $f(\theta, \lambda)$].

Можно провести параллель между рядом Фурье и рядом сферических функций – совершенно так же, как ряд Фурье заменяет исходную функцию вдоль профиля суммой знакопеременных тригонометрических полиномов, ряд сферических функций заменяет функцию на сфере суммой знакопеременных на ней сферических функций.

Литература: [12, 14, 16, 20].

СВЯЗЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ

Теория функций комплексной переменной – хорошо разработанный, достаточно эффективный и наиболее удобный математический аппарат, применяемый при решении многих задач в различных областях естественных наук. Ее с успехом применяют и к решению некоторых достаточно трудных задач гравиразведки и магниторазведки и особенно в области двумерных или плоских полей, что основано на наличии связи между гармоническими и аналитическими функциями. Наиболее важные результаты получены, например, в работах В.Н. Страхова, М.С. Жданова, Г.М. Воскобойникова, Г.Я. Голиздры, С.В. Шалаева, А.В. Цирульского и ряда других исследователей.

Связь гармонических функций с аналитическими следует из условий Коши – Римана, которым удовлетворяют аналитические функции комплексного переменного. Напомним определение аналитической функции.

Если функция $y = f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторого круга с центром z_0 хотя бы произвольно малого радиуса (другими словами, в точке z_0 и в ее окрестности), то она называется аналитической в точке z_0. Функция называется аналитической в данной области, если она аналитическая во всех точках этой области.

Для того, чтобы заданная функция комплексного переменного

$$z = x + iy;$$

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

была аналитической (или регулярной) внутри области v, необходимо и достаточно, чтобы функции U и V имели внутри v непрерывные частные производные первого порядка по x и y и эти производные должны удовлетворять условиям Коши – Римана:

$$\partial U/\partial x = \partial V/\partial y; \quad \partial U/\partial y = -\partial V/\partial x.$$

Связь гармонических функций двух переменных с аналитическими функциями комплексного переменного заключается в следующем. Если функция

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

является аналитической, то ее вещественная часть U и мнимая часть V всегда являются гармоническими функциями. Таким образом, если функция $f(z) = U + iV$ аналитическая, то функции U и V являются гармоническими. Это всегда. Но не всегда заданные гармонические функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ образуют аналитическую функцию

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

Для этого функции U и V должны удовлетворять условиям Коши – Римана; этими условиями они взаимосвязаны. Из условий Коши – Римана для заданной любой гармонической функции $U(x, y)$ можно определить другую гармоническую функцию $V(x, y)$ с точностью до постоянной слагаемой. В совокупности эти функции U и V дадут аналитическую функцию, и, наоборот, по заданной гармонической функции V из условий Коши – Римана с точностью до постоянной можно определить и гармоническую функцию U.

Таким образом, вещественная и мнимая части аналитической функции суть гармонической функции и, наоборот, всякую гармоническую функцию можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции и при этом ее мнимая часть определяется с точностью до постоянной слагаемой, т.е. сама функция по вещественной ее части определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого.

Наличие связи между аналитическими и гармоническими функциями имеет важное значение и ее, как было указано выше, с успехом применяют при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Получаемые при этом для них функции комплексного аргумента называют комплексными напряженностями и комплексными потенциалами.

Литература: [12, 14, 15].

СГЛАЖИВАНИЕ АНОМАЛИЙ

Одной из наиболее применяемых на практике операций преобразования полей является сглаживание аномалий. Сглаживание применяют и при обработке наблюдаемых данных полевых съемок, и при выравнивании получаемых значений аномалий после других трансформаций или просто после каких-либо других расчетов. Особенно велико значение сглаживания при применении трансформаций, обладающих неустойчивостью, например, способов аналитического продолжения аномалий в области нижнего полупространства. Случайные погрешности наблюдений и влияние приповерхностных геологических образований при таких трансформациях растут значительно быстрее, чем значения полезной аномалии, и могут полностью затушевывать последние. Поэтому такие трансформации невозможны при применении без сглаживания. Важной ролью сглаживания объясняется и то, что оно является (например, в графическом виде) и одной из операций, применяемой в практике с первых же дней развития геофизических исследований.

Существуют различные способы сглаживания. К ним относятся и фильтры выделения аномалий на фоне высокочастотных помех при значении частотной характеристики $\Phi(0) \approx 1$, и фильтры с прямоугольной формой частотной характеристики при $\Phi(0) = 1$. Рассмотрим вначале способы сглаживания, наиболее часто применяемые в настоящее время на практике.

1. **Способы усреднения.** К основным способам усреднения аномалий относятся: усреднение по n равноотстоящим точкам ($n \geq 2$), интегральное усреднение на некотором интервале профиля, усреднение аномалий по окружности, по площади круга радиуса R, графическое усреднение аномалий и другие. Все операции этих видов усреднения аномалий и аналитические выражения их частотных характеристик приведены в работе [16] и поэтому здесь не приведены.

2. **Сглаживание по пяти равностоящим точкам** с использованием способа наименьших квадратов:

$$U_T(0) = \frac{17}{35}U(0) + \frac{24}{35}\overline{U(\Delta x)} - \frac{6}{35}\overline{U(2\Delta x)},$$

где $\overline{U(\Delta x)}$ и $\overline{U(2\Delta x)}$ – усредненные значения аномалии по двум точкам, отстоящим симметрично от начала координат на расстояния Δx и $2\Delta x$ (Δx – расстояние между точками наблюдений). Формулу, подобную этому выражению, можно получить и при другом количестве точек усреднений n.

3. **Способ сглаживания В.Н. Страхова.** Этот способ основан на выборе частотных характеристик вида

$$\Phi(\omega) = 1 - \left[1 - \left(\cos\frac{\omega\Delta x}{2}\right)^{2N}\right]^P.$$

Здесь постоянные N и P – параметры сглаживания. Варьируя ими, можно подобрать наиболее подходящую для решаемой задачи частотную характеристику $\Phi(\omega)$. Существует аналогичная формула и для трехмерной задачи.

4. **Квазиоптимальный способ В.И. Аронова.** Его частотная характеристика соответствует формуле

$$\Phi(\omega) = 1 - \{1 - \exp[-|\omega|(z - z')]\}^k.$$

Это выражение является набором частотных характеристик аналитического продолжения аномалий на различные уровни верхнего полупространства. Параметрами фильтра являются величины k и z'. Их определяют, исходя из соображений получения высокой точности и достаточной скорости сходимости.

5. **Прямоугольный фильтр.** Фильтру с прямоугольной формой частотной характеристики (прямоугольный фильтр) соответствует функция

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} a \text{ при } \omega \le \omega_1, \\ 0 \text{ при } \omega > \omega_1, \end{cases}$$

где a – некоторая постоянная. При замене ω на ρ получим прямоугольный фильтр для трехмерного осесимметричного случая. При сглаживании аномалий величина $a = 1$. При этом значении a и $\omega_1 < \omega_r = \pi/\Delta x$ приведенное выражение можно реализовать рядом косинусов

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(\omega k \Delta x),$$

коэффициенты которого определяются из выражений

$$C_0 = \omega_1/\omega_г = \Delta x\ \omega_1/\pi,$$

$$C_k = \frac{2}{\pi k}\sin(\omega_1 k\Delta x),$$

где $\omega = \pi/\Delta x$ – граничная частота спектра сглаживаемой аномалии.

Если, например, $\omega_1 = \omega_г/2$, то $C_0 = 0{,}50$,

$$C_k = \frac{2}{\pi k}\sin(k\pi/2).$$

Ограничимся в этом ряде пятью членами и учтем условие

$$\sum_{k=0}^{N} C_k = \Phi(0) = 1, \quad N = 4;$$

получим следующую расчетную формулу сглаживания:

$$U_т(0) = 0{,}50\,U(0) + 0{,}64\,\overline{U(\Delta x)} - 0{,}21\,\overline{U(3\Delta x)} +$$

$$+ 0{,}14\,\overline{U(5\Delta x)} - 0{,}07\,\overline{U(7\Delta x)}.$$

Графики изменения частотных характеристик этой формулы и точной для прямоугольного фильтра при $a = 1$ и $\omega_1 = \omega_г/2 = \pi/2\Delta x$ (условно при $\Delta x = 1$) показаны на рис. 106.

6. **Комбинированный фильтр С.А. Серкерова.** Известно, что при сглаживании аномалий уменьшается амплитуда полезной аномалии. Это происходит из-за того, что частотные характеристики способов сглаживания, за исключением прямоугольного фильтра, являются убывающими функциями прямо от начала координат. Это приводит в какой-то степени к урезанию низких

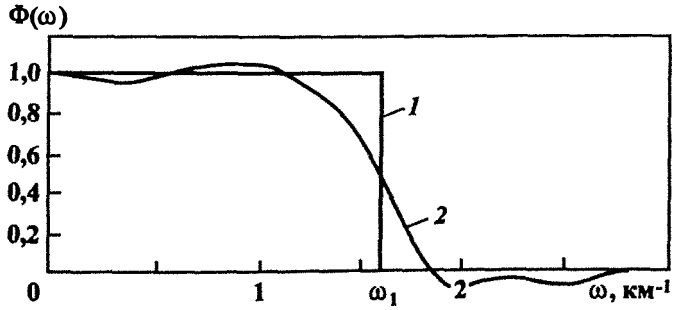


Рис. 106. Частотная характеристика фильтра прямоугольной формы: *1* – точная; *2* – приближенная (аппроксимирующая точную)

частот аномалий, что, в свою очередь, приводит к уменьшению их амплитуды. Поэтому оптимальными в наиболее широком смысле фильтрами сглаживания будут фильтры, составленные из комбинации прямоугольного фильтра и фильтра Колмогорова – Винера или комбинированные фильтры сглаживания.

В качестве фильтра Колмогорова – Винера рассмотрим фильтр, выделяющий сигнал на фоне случайных помех. Тогда частотную характеристику комбинированного фильтра можно записать в следующем виде (при замене индекса «л» на «а» – от слова «аномалия»):

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 1, \ 0 \le \omega \le \omega_1, \\ Q_a(\omega)/[Q_a(\omega) + Q_0(\omega)], \ \omega > \omega_1, \end{cases} \tag{1}$$

где значение частоты ω_1 необходимо специально выбрать, исходя из конкретной геологической ситуации. Выражение (1) соответствует случаю, когда помехи за значение частоты ω_1 аппроксимированы белым шумом.

Более упрощенный, но легко реализуемый вариант фильтра (1) можно построить следующим образом. Если ω_1 достаточно большое число, то в знаменателе выражения второй строки равенства можно пренебречь функцией $Q_a(\omega)$, в силу ее быстрого убывания. Тогда формула (1) примет вид

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 1, \ 0 \le \omega \le \omega_1, \\ Q_a(\omega)/Q_0(\omega), \ \omega > \omega_1. \end{cases} \tag{2}$$

В качестве первого приближения к этому фильтру можно рекомендовать фильтр, получаемый из равенства (2), определив в нем ω_1 из условия равенства выражений его первой и второй срок:

$$Q_a(\omega)/Q_0(\omega) = 1. \tag{3}$$

В общем случае ω_1 нужно определить, исходя из конкретной решаемой задачи. Если в качестве полезной аномалии принять аномалию силы притяжения от бесконечной горизонтальной материальной линии (это вполне допустимо, так как аппроксимируется удаленная часть частотной характеристики фильтра), то выражение (2) примет вид [13]

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 1, \ 0 \le \omega \le \omega_1, \\ \frac{2}{mk} \exp(-2|\omega| r_a/\pi), \ \omega > \omega_1. \end{cases} \tag{4}$$

Из условия (3) для определения ω_1 получим

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2r_a} \ln \frac{2}{mk}.$$

В этих выражениях r_a – радиус корреляции сглаживаемой аномалии, $m = r_0/r_a$, $k = B_0(0)/B_a(0)$, r_0 – радиус корреляции помех, $B_0(0)$ и $B_a(0)$ определяются из равенств

$$B_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} U_a^2(x)dx, \quad B_0(0) = \int_{-l}^{l} U_0^2(x)dx.$$

Здесь интервал (l, l) соответствует интервалу сглаживания аномалии на профиле, аномалия $U(x)$ считается ограниченной и изолированной по x. Если аномалия $U_0(x)$ является случайной, то нужно пользоваться выражениями

$$B_a(0) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} U_a^2(x)dx, \quad B_0(0) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} U_0^2(x)dx.$$

Аналогичные выражения существуют и в трехмерном варианте. Например, в трехмерном осесимметричном случае

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 1, \ 0 \le \rho \le \rho_1, \\ \dfrac{2{,}5}{km^2} \exp\left(-\rho \dfrac{r_a}{\sqrt{2}}\right), \ \rho > \rho_1, \end{cases}$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{2}}{r_a} \ln(2{,}5/km^2).$$

Реализовать на практике комбинированные фильтры можно по значениям известной функции $\Phi(\omega)$ или $\Phi(\rho)$ одним из способов построения вычислительных схем, в частности рядами. Графики изменения частотных характеристик комбинированного фильтра (4) (кривая *1*) при $k = 1$, $m = 0{,}1$ и $r_a = \pi$ и аппроксимирующей его вычислительной схемы (кривая *2*) приведены на рис. 107.

Результаты опробования комбинированного фильтра на практических и модельных примерах показали, что он меньше искажает полезную аномалию, чем фильтр Колмогорова – Винера, фильтр, полученный по способу наименьших квадратов и другие фильтры.

7. **Другие способы сглаживания.** Кроме рассмотренных выше, в качестве фильтров сглаживания можно применить и ряд дру-

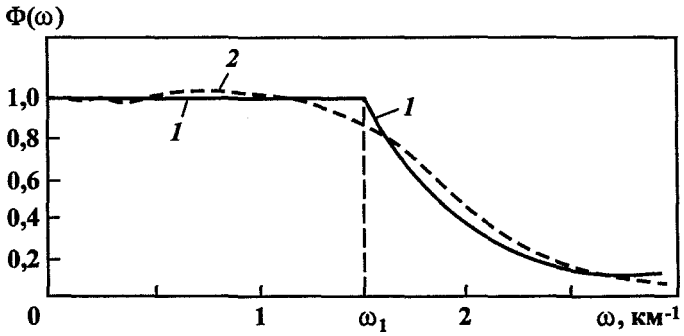


Рис. 107. Частотная характеристика оптимального фильтра:
1 – точная; *2* – приближенная (аппроксимирующая точную)

гих способов, например аналитическое продолжение аномалий на небольшие высоты h верхнего полупространства:

$$\Phi(\omega) = \exp(-|\omega|h);$$

способы с частотными характеристиками

$$\Phi(\omega) = \exp(-|\omega|a)^2,$$

$$\Phi(\omega) = \alpha^2/(\alpha^2 + \omega^2),$$

где a – параметр фильтра (относительно малая величина); α – параметр преобразования.

Литература: [6, 13, 14, 16].

СИЛА ПРИТЯЖЕНИЯ И ЗАКОН НЬЮТОНА

По закону Ньютона сила притяжения между двумя точечными массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии r друг от друга, определяется равенством

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где G – постоянная тяготения, равна $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$.

Сила притяжения $\vec{F}$ – векторная величина, т.е. характеризуется не только численным значением, но и направлением в пространстве.

Пусть в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ находится частица с массой m, а в точке $P(x, y, z)$ – единичная масса. В этом случае на точку P действует сила, равная

$$\vec{F} = -G\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (2)$$

Знак минус в этой формуле учитывает тот факт, что $\vec{F}$ и $\vec{r}$ направлены по одной и той же линии, но в противоположном направлении. Значение

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

В формуле (2) величина F численно равна ускорению и имеет размерность ускорения.

Таким образом, сила притяжения – это сила между двумя точечными массами, определяемая законом Ньютона (1). Массу тела можно принять за точечную и помещенную в точку в случаях, когда размерами тела можно пренебречь, т.е. когда расстояние между наиболее удаленными двумя точками тела намного меньше, чем r.

СИЛА ТЯЖЕСТИ

Сила, с которой всякое тело притягивается к Земле, называется ***силой тяжести***. Сила тяжести в данной точке Земли – равнодействующая двух сил: силы притяжения всей массой Земли и центробежной силы, вызванной суточным вращением Земли вокруг своей оси.

Если сила притяжения масс Земли $\vec{F}$, а центробежная сила C, то (рис. 108) сила тяжести

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}. \qquad (1)$$

Пусть v объем Земли. Переменную точку в области v обозначим через $M(\xi, \eta, \zeta)$. Будем считать, что точка M принадлежит массам и является центром притяжения, и потому будем называть ее притягивающей. И пусть точка P с координатами x, y, z является точкой, которая подвергается действию сил, т.е. является притягиваемой. Точка $P(x, y, z)$ обычно является фиксированной.

Будем рассматривать силу притяжения как вектор, приложенный к точке P и направленный к точке M (к массам). За положительное направление радиуса-вектора r примем (там, где это специально не оговаривается) направление от точки M к точке P (от масс к притягиваемой точке), т.е. начало его будем совмещать с точкой $M(\xi, \eta, \zeta)$, а конец – с точкой $P(x, y, z)$:

$$\vec{r} = (x-\xi)\vec{i} + (y-\eta)\vec{j} + (z-\zeta)\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, имеющие направления осей координат; $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ – составляющие радиуса-вектора по осям координат.

Величина

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Пусть в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ находится масса dm, а в точке $P(x, y, z)$ – единичная масса. В этом случае на точку P действует сила, равная (по закону Ньютона)

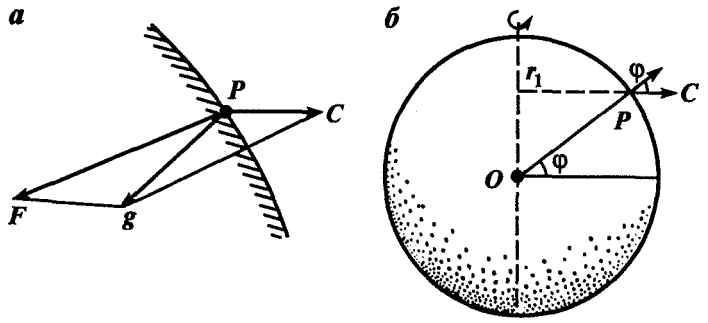


Рис. 108. Сила притяжения, центробежная сила, сила тяжести (*а*); центробежная сила и расстояние r_1 (*б*)

$$F = -G\int_v \sigma \frac{dv}{r^2}, \qquad (2)$$

где σ – плотность распределения масс; G – гравитационная постоянная.

Центробежная сила (рис. 108, *а*)

$$C = a^2 m/r_1, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где a – линейная скорость движения точки P; r_1 – расстояние от точки P на поверхности Земли, в которой заключена масса m, до оси вращения Земли (радиус вращения). Через угловую скорость вращения Земли

$$a = \omega r_1$$

получим

$$C = m\omega^2 r_1,$$

где угловая скорость вращения

$$\omega = 2\pi/86\ 164 \approx 7{,}3\cdot 10^{-5}\ \text{рад/с}.$$

Здесь 86 164 – это число секунд в 24 звездных часах. Примем, что масса m равна единице. Тогда

$$C = \omega^2 r_1 \qquad (3)$$

будет характеризовать напряженность центробежной силы или центробежное ускорение.

Суммируя выражения (2) и (3), найдем

$$\vec{g} = -G\int_v \sigma \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dv + \omega^2\vec{r}_1 = -G\int_v \sigma\frac{\vec{r}}{r^3}dv + \omega^2\vec{r}_1. \qquad (4)$$

В гравиразведке для краткости g называют силой тяжести, точным его названием является ***ускорение свободного падения***. Потенциалом ускорения свободного падения является функция

$$W = G\int_v \sigma\frac{dv}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Значения ускорения свободного падения g связаны с потенциалом W соотношением

$$\vec{g} = \operatorname{grad} W,$$

т.е.

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Из формулы (4) после соответствующего дифференцирования получим

$$g_x = -G\int_v \sigma\frac{x-\xi}{r^3}dv + \omega^2 x,$$

$$g_y = -G\int_v \sigma\frac{y-\eta}{r^3}dv + \omega^2 y,$$

$$g_z = -G\int_v \sigma\frac{z-\zeta}{r^3}dv.$$

Через значения нормальной производной получим

$$\vec{g} = \frac{\partial W}{\partial z}\vec{n}_1,$$

где $\vec{n}_1$ – единичный вектор, имеющий направление внутренней нормали (сила тяжести увеличивается в сторону масс). Величина

g на поверхности Земли меняется от значения 9,78 м/с^2 (на экваторе) до 9,832 м/с^2 (на полюсах). Отношение максимального значения центробежной силы, которое она имеет на экваторе, к значению силы тяжести на экваторе g_e равно

$$\omega^2 R_e / g_e ,$$

где R_e – радиус экватора, равен примерно 1:288,4 (при R_e = = 6378,245 км, g_e = 9,78049 м/с^2, $\omega = \frac{2\pi}{86164}\frac{1}{с}$), т.е. отношение максимального значения центробежной силы к минимальному значению силы тяжести является относительно малой величиной. Однако, если на долю изменения силы притяжения от полюсов к экватору, объясняемое в основном сплюснутостью Земли, приходится всего около 1800 мГал, то на долю изменения центробежной силы от полюсов к экватору приходится ≈3400 мГал, т.е. доля центробежной силы в изменении силы тяжести от полюсов к экватору значительно больше, чем доля изменения силы притяжения.

Сила тяжести в данной точке поверхности Земли не остается постоянной с течением времени. Эти изменения силы тяжести принято делить на приливные и неприливные. Как те, так и другие можно, в свою очередь, подразделить на вековые, периодические и непериодические.

Приливные изменения вызваны изменением взаимного положения Земли и других небесных тел, главным образом Луны и Солнца. Эти изменения силы тяжести уверенно регистрируются современной гравиметрической аппаратурой.

Неприливные изменения силы тяжести могут вызываться перераспределением масс внутри Земли, связанным с происходящими геологическими процессами, изменением физических свойств Земли, обязанным радиоактивному разогреву, фазовым превращениям, конвекции, периодическим колебаниям атмосферного давления, сезонным выпадениям осадков, колебаниям уровня грунтовых вод и др. Скачкообразные изменения силы тяжести отмечены при извержениях вулканов.

СЛУЧАЙНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ АНОМАЛИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Приведем вначале очень кратко некоторые элементарные сведения о случайных функциях. В природе встречается множество случайных процессов. Основным общим их свойством является неопределенность ожидаемого поведения для любой части процесса и наличие четких статистических свойств для совокупности большого числа наблюдаемых данных.

Случайной функцией (случайным процессом) называется такая функция, значения которой при каждом данном значении аргумента (или нескольких аргументов) является случайной величиной. В результате измерений случайная функция может принимать различные конкретные формы. Всякая функция, которой может равняться случайная функция в результате измерений, называется ***реализацией случайной функции***, она уже не является случайной функцией, так как ее значения совершенно четко определяются координатами. Изучая какое-либо физическое явление и производя группу опытов, мы можем получать каждый раз одну из реализаций данного явления, являющихся функцией координат, но каждый раз различные. Совокупность таких реализаций составляет «семейство» («ансамбль») реализаций изучаемого явления (рис. 109).

Наиболее типичным примером случайной функции в гравиразведке и магниторазведке являются случайные погрешности наблюдений. Это один из типичных примеров слабо коррелированной случайной функции. Действительно, мы никогда не сможем предсказать заранее, какое конкретное значение она будет принимать на данном пункте по значениям отсчетов на всех предыдущих. Об этой случайной функции мы знаем лишь то, что средний по множеству отсчет и среднее квадратическое ее значение в однородных условиях будут известными постоянными величинами.

Менее наглядны случайные функции, имеющие на некотором интервале корреляционную связь, к которым относятся также и

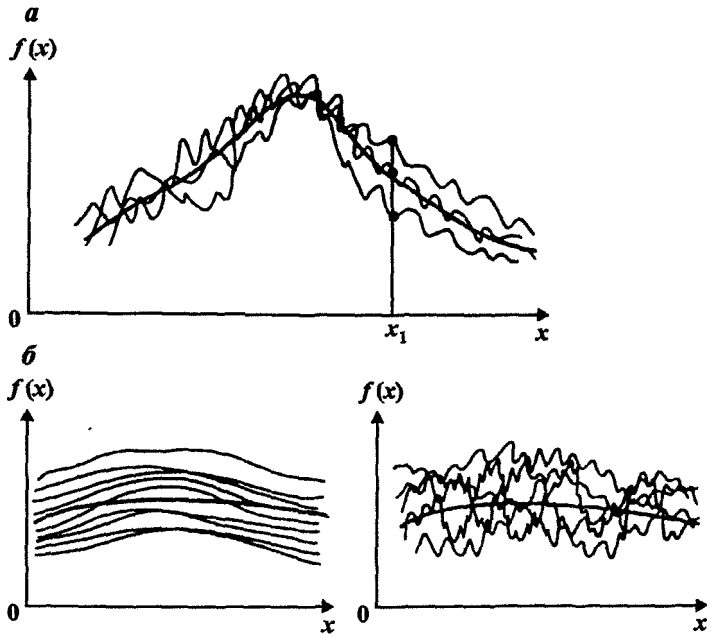


Рис. 109. Семейство реализаций случайной функции (*а*) и реализация двух разных случайных функций, имеющих одинаковое математическое ожидание и одинаковую дисперсию (*б*)

случайные гравитационные и магнитные аномалии. В самом деле, в определенных пределах по значениям предыдущих наблюдений можно предсказать значения последующих. Это, в частности, и обусловливает возможность их экстраполяции и интерполяции при помощи каких-то полиномов, но эти операции способны продолжить аномалии лишь в некоторых ограниченных пределах. Чем дальше мы находимся от исходного пункта, тем больше вероятность того, что наше заключение о значении функции будет ошибочным.

Расстояние, на котором корреляционная связь между значениями функции теряется, называется ***радиусом корреляции*** или интервалом корреляции. Радиус корреляции характеризует для случайных аномалий степень их изменчивости по площади или по профилю – чем меньше значение радиуса корреляции, тем сильнее меняется поле и наоборот.

В пределах больших площадей или длинных профилей до наблюдений гравитационные или магнитные аномалии можно рас-

сматривать как случайные функции координат. После того, как наблюдения проведены, они будут реализациями этих случайных функций.

В природе мы встречаемся в основном с суммарными аномалиями, вызванными одновременным действием нескольких возмущающих объектов. При этом не всегда известно, какую долю в эту наблюдаемую суммарную аномалию вносит каждый из них, т.е. для каждой из составляющих суммарного поля можно предположить в общем случае бесконечное множество реализаций. Это же относится и к причинам, вызывающим различные составляющие суммарного поля, т.е. к элементам геологического строения. Для последних также нельзя заранее предсказать с вероятностью, равной единице, точные их параметры в любой точке площади или профиля; чем дальше эти точки находятся от известных реализаций, тем меньше вероятность правильного их предсказания.

Случайные функции аналитически не выражаются точными функциональными зависимостями переменных. Поэтому случайная функция не может быть изображена на какой-либо координатной плоскости или в каком-либо координатном пространстве. Могут быть изображены лишь отдельные реализации или ее некоторые характеристики, к которым относятся ***среднее значение*** или ее ***первый момент, дисперсия или второй центральный момент, автокорреляционная функция*** или ***смешанный второй начальный момент*** и др. Из них наиболее полной и основной характеристикой является автокорреляционная функция.

В общей теории случайных функции рассматриваются и другие статистические характеристики, однако, поскольку в дальнейшем мы ограничимся исследованием лишь определенного класса случайных функций, можно ограничиться характеристиками, приведенными выше.

В природе нередко встречаются случайные процессы, для которых указанные выше статистические характеристики не зависят от начала отсчета, т.е. математическое ожидание и дисперсия для таких функций будут постоянными для всего интервала их рассмотрения, а автокорреляционная функция будет зависеть лишь от разности аргументов. Такие случайные функции называются ***стационарными случайными функциями***. Для стационарных случайных процессов среднее значение и дисперсию можно определить из данных автокорреляционной функции: среднее значение равно корню квадратному из асимптотического значения автокорреляционной функции, когда аргумент $\tau \to \infty$, а дисперсия равна разности значений автокорреляционной функции при $\tau = 0$ и $\tau = \infty$.

Случайные стационарные функции, для которых статистические характеристики, вычисленные по множеству реализаций, совпадают с теми же характеристиками, вычисленными по одной достаточно длинной реализации, получили название ***эргодических случайных функций***. Именно для этого ограниченного класса случайных функций, т.е. для эргодических стационарных, наиболее полно разработаны в настоящее время теория и ее приложения. Однако, как показывает опыт многих исследователей, математический аппарат, разработанный для ограниченного класса стационарных эргодических случайных функций, иногда с успехом может быть использован и для функций, не являющихся таковыми, при их исследовании и интерпретации.

Раздел теории, изучающий лишь те свойства случайных процессов, которые определяются их моментами первых двух порядков, называется ***корреляционной теорией***. В рамках этих разделов рассматриваются именно эти свойства гравитационных и магнитных аномалий.

Неслучайные функции обычно называют детерминированными. Они однозначно определяются координатами точек на плоскости или на профиле. Реализация случайных функций также является детерминированной функцией.

После этих элементарных сведений рассмотрим вопросы определения энергетических характеристик случайных аномалий. Автокорреляционные функции случайных аномалий $f(x)$ и $f(x, y)$ выражаются равенствами

$$B(\tau) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x) f(x-\tau) dx,$$

$$B(\xi, \eta) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x, y) f(x-\xi, y-\eta) dx dy.$$

При $\xi = \eta = 0$

$$B(0) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f^2(x) dx,$$

$$B(0, 0) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a} \frac{1}{2b} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f^2(x, y) dx dy.$$

Как видно из последних двух равенств $B(0)$ и $B(0, 0)$ являются средними значениями квадрата функций $f(x)$ и $f(x, y)$ соответственно по профилю и по площади.

Для простоты можно пользоваться другой формой записи равенств, в которой статистическое усреднение заменяется черточкой:

$$B(\tau) = \overline{f(x)f(x-\tau)},$$

$$B(\xi,\eta) = \overline{f(x,y)f(x-\xi,y-\eta)}.$$

Для двух случайных сигналов $f_р$ и $f_л$ функции взаимной корреляции для двумерного и трехмерного случаев определяются равенствами

$$B_{рл}(\tau) = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f_р(x)f_л(x-\tau)dx,$$

$$B_{рл}(\xi,\eta) = \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\frac{1}{2a}\frac{1}{2b}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f_р(x,y)f_л(x-\xi,y-\eta)dx\,dy.$$

Остальные равенства, при помощи которых определяют для случайных сигналов в двумерном и трехмерном случаях нормированную функцию автокорреляции, энергетический спектр, взаимный энергетический спектр, соотношения связи между функцией автокорреляции и энергетическим спектром, между функцией взаимной корреляции двух сигналов и взаимным энергетическим спектром, по своему виду такие же, как и в случае ограниченных по своим размерам аномалий, поэтому их здесь не приводим.

Если выразим энергетический спектр или спектральную плотность случайного сигнала $f(x)$ через текущий спектр его реализации, то получим следующие выражения:

$$Q(\omega) = \sqrt{2\pi}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}S_a(\omega)S_a(-\omega),$$

где

$$S_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(x)\exp(-i\omega x)dx$$

– текущий спектр реализации случайного процесса, т.е. такая функция, которая при $a \to \infty$ стремится к простому спектру реализации $S(\omega)$. Для взаимного энергетического спектра сигналов $f_р$ и $f_л$ получим:

$$Q_{рл}(\omega) = \sqrt{2\pi}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}S_{ар}(\omega)S_{ал}(-\omega),$$

где индексы р и л в текущих спектрах указывают на случаи реализаций сигналов $f_р(x)$ и $f_л(x)$.

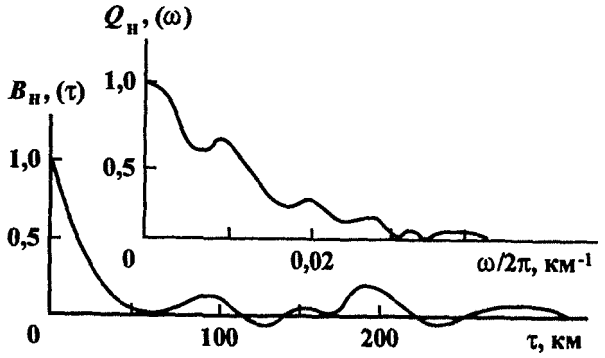


Рис. 110. Кривые нормированных функций $Q_н(\omega)$ и $B_н(\tau)$ магнитной аномалии ΔT вдоль одного из региональных профилей (по В.Н. Луговенко)

Аналогично в трехмерном случае справедливы равенства

$$Q(u, v) = 2\pi \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a2b} S_{ab}(u, v) S_{ab}(-u, -v),$$

где

$$S_{ab}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)]\, dx\, dy$$

– текущий спектр реализации случайного сигнала $f(x, y)$;

$$Q_{рл}(u, v) = 2\pi \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a2b} S_{авр}(u, v) S_{авл}(-u, -v),$$

где $S_{авр}$ и $S_{авл}$ – текущие спектры реализаций сигналов $f_р(x, y)$ и $f_л(x, y)$.

Найденные соотношения позволяют выразить энергетические или взаимные энергетические спектры случайных процессов через текущие спектры их реализаций.

Кривые изменения нормированных значений энергетического спектра и автокорреляционной функции случайной магнитной аномалии ΔT вдоль одного из региональных профилей показаны на рис. 110.

Выражения энергетических спектров случайных аномалий, которыми можно аппроксимировать гравитационные и магнитные поля, приведены в работе [16].

Литература: [11, 14, 16].

СОВМЕСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Совместная интерпретация данных гравитационных и магнитных аномалий основана на применении уравнений Пуассона о связи между потенциалами, когда и та, и другая аномалии вызваны одним и тем же возмущающим телом. В других случаях, т.е. когда аномалии вызваны влиянием разных тел, совместная интерпретация возможна только тогда, когда существует корреляция между аномалиями, вызванная косвенными причинами, связанными с условиями залегания аномальных тел (границ). Рассмотрим здесь случаи применения уравнений Пуассона о связи между гравитационными и магнитными потенциалами.

1. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА О СВЯЗИ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛАМИ В СПЕКТРАЛЬНОМ ВИДЕ

Уравнение связи между значениями гравитационного и магнитного потенциалов V и U и получаемые из него уравнения для производных имеют следующий вид:

$$U = -(1/G\sigma)(J_x V_x + J_y V_y + J_z V_z),$$

$$X = -\frac{\partial U}{\partial X} = (1/G\sigma)(J_x V_{xx} + J_y V_{xy} + J_z V_{xz}),$$

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial Y} = (1/G\sigma)(J_x V_{xy} + J_y V_{yy} + J_z V_{yz}),$$

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial Z} = (1/G\sigma)(J_x V_{xz} + J_y V_{yz} + J_z V_{zz}),$$

где J_x, J_y, J_z – проекции вектора намагниченности $\vec{J}$ по осям координат x, y, z; G – гравитационная постоянная; σ – плотность.

Обозначим через S спектр аномалии (индекс при спектре указывает на функцию, которой он соответствует). На основании

теорем о спектрах, спектры магнитных аномалий через спектр измеряемой на дневной поверхности одной гравитационной аномалии V_z можно записать в следующем виде:

$$S(u, v)_U = \frac{1}{G\sigma\rho}(-iuJ_x - ivJ_y + \rho J_z)S(u, v)_{V_z},$$

$$S(u, v)_x = \frac{1}{G\sigma\rho}(u^2 J_x + uvJ_y + iu\rho J_z)S(u, v)_{V_z},$$

$$S(u, v)_y = \frac{1}{G\sigma\rho}(uvJ_x + v^2 J_y + iv\rho J_z)S(u, v)_{V_z},$$

$$S(u, v)_z = \frac{1}{G\sigma\rho}(iu\rho J_x + iv\rho J_y - \rho^2 J_z)S(u, v)_{V_z}.$$

Эти равенства связывают спектры магнитных аномалий со спектром гравитационной аномалии V_z. В них u, v – волновые числа, $\rho^2 = u^2 + v^2$.

В двумерном случае при $J_y = 0$, $u = \omega$, $\rho = |\omega|$ найдем

$$S(\omega)_U = (1/G\sigma|\omega|)(-i\omega J_x + |\omega| J_z)S(\omega)_{V_z},$$

$$S(\omega)_H = (1/G\sigma)(|\omega| J_x + i\omega J_z)S(\omega)_{V_z},$$

$$S(\omega)_Z = (1/G\sigma)(i\omega J_x - |\omega| J_z)S(\omega)_{V_z}.$$

В этих равенствах, деля спектры магнитных аномалий на спектры гравитационной аномалии V_z, получим частотные характеристики способов вычисления магнитных аномалий U, H, Z по данным гравитационной аномалии.

Для энергетических спектров получим

$$Q(u, v)_U = A_1(u, v)Q(u, v)_{V_z},$$

$$Q(u, v)_x = A_1(u, v)u^2 Q(u, v)_{V_z},$$

$$Q(u, v)_y = A_1(u, v)v^2 Q(u, v)_{V_z},$$

$$Q(u, v)_z = A_1(u, v)\rho^2 Q(u, v)_{V_z},$$

где

$$A_1(u, v) = A(u, v)/(G\sigma\rho)^2,$$

$$A(u, v) = u^2 J_x^2 + v^2 J_y^2 + 2uvJ_x J_y + \rho^2 J_z^2.$$

При вертикальном намагничивании

$$A(u, v) = \rho^2 J^2, \quad A_1(u, v) = (J/G\sigma)^2.$$

В приведенных выше равенствах от энергетического спектра аномалии V_z можно перейти к энергетическим спектрам аномалий V_{xz}, V_{yz}, V_{zz}, используя соотношения, получаемые на основании теорем о спектрах производных.

Литература: [14, 16].

2. ПРИЗНАКИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОЙ И МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ ОДНОМУ И ТОМУ ЖЕ ТЕЛУ

Из некоторых приведенных выше выражений можно получить признаки принадлежности двух аномалий – гравитационной и магнитной одному и тому же аномальному телу:

$$A_1(u, v) = Q(u, v)_U / Q(u, v)_{V_z} = Q(u, v)_X / u^2 Q(u, v)_{V_z} =$$

$$= Q(u, v)_Y / v^2 Q(u, v)_{V_z} = Q(u, v)_z / \rho^2 Q(u, v)_{V_z} =$$

$$= Q(u, v)_X / Q(u, v)_{V_{xz}} = Q(u, v)_Y / Q(u, v)_{V_{yz}} =$$

$$= Q(u, v)_z / Q(u, v)_{V_{zz}}.$$

Можно показать, что все отношения приведенных здесь энергетических спектров гравитационных и магнитных аномалий не зависят от ρ, а зависят только от угла φ в полярных координатах. Поэтому, если функция $A_1(u, v)$, получаемая как отношение энергетических спектров гравитационной и магнитной аномалий, остается постоянной в пределах погрешности вычислений вдоль лучей, выходящих из начала координат, то рассматриваемые две аномалии принадлежат одному и тому же телу.

В двумерном случае

$$k^2 = Q(\omega)_U / Q(\omega)_{V_z} = Q(\omega)_H / \omega^2 Q(\omega)_{V_z} = Q(\omega)_Z / \omega^2 Q(\omega)_{V_z} =$$

$$= Q(\omega)_H / Q(\omega)_{V_{xz}} = Q_H / Q_{V_{xz}} = Q(\omega)_Z / Q(\omega)_{V_{xz}} = Q(\omega)_z / Q(\omega)_{V_{xz}} =$$

$$= Q(\omega)_{\Delta T} / a\omega^2 Q(\omega)_{V_z} = Q(\omega)_{\Delta T} / aQ(\omega)_{V_{xz}} = Q(\omega)_{\Delta T} / aQ(\omega)_{V_{xz}},$$

где $k = \frac{J}{G\sigma}$; a – постоянная.

Аналогично через автокорреляционные функции аномалий [16]

$$k^2 = B(\xi)_U / B(\xi)_{V_z} = B(\xi)_H / B(\xi)_{V_{xx}} =$$

$$= B(\xi)_H / B(\xi)_{V_{zz}} = B(\xi)_z / B(\xi)_{V_{xx}} =$$

$$= B(\xi)_z / B(\xi)_{V_{zz}} = B(\xi)_{\Delta T} / aB(\xi)_{V_{xx}} =$$

$$= B(\xi)_{\Delta T} / aB(\xi)_{V_{zz}}.$$

Автокорреляционные функции приведенных здесь гравитационных аномалий можно выразить через автокорреляционную функцию аномалии V_z. Из полученных выражений видно, что если построить вдоль оси ω график изменения какого-либо из приведенных в них отношений энергетических спектров или автокорреляционных функций магнитной и гравитационной аномалий, то постоянство получаемых значений будет служить признаком принадлежности исследуемых аномалий одному и тому же аномальному телу.

Эти условия равносильны равенству друг другу нормированных автокорреляционных функций или нормированных энергетических спектров соответствующих гравитационных и магнитных аномалий.

Другие соотношения по автокорреляционным функциям получим для трехмерных аномалий (при вертикальном намагничивании):

$$K^2 = B(\xi, \eta)_U / B(\xi, \eta)_{V_z} =$$

$$= B(\xi, \eta)_X / B(\xi, \eta)_{V_{xz}} =$$

$$= B(\xi, \eta)_Y / B(\xi, \eta)_{V_{yz}} =$$

$$= B(\xi, \eta)_z / B(\xi, \eta)_{V_{zz}}.$$

Если эти отношения автокорреляционных функций являются постоянной величиной или, если равны друг другу соответствующие им нормированные автокорреляционные функции, то гравитационные и магнитные аномалии принадлежат одному и тому же телу. А то, что получаемые значения отношения K равны друг другу для всех точек исследуемой площади, говорит о случае вертикального намагничивания.

Рассмотренные здесь признаки принадлежности гравитационных и магнитных аномалий одному и тому же телу являются достаточно широкими и их можно получить по любым элементам гравитационного и магнитного полей – по любой одной их паре.

Литература: [11, 14, 16].

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ВЕКТОРА НАМАГНИЧИВАНИЯ К ПЛОТНОСТИ И УГЛА НАМАГНИЧИВАНИЯ

Прежде всего рассмотрим определение значения параметра $K^2 = (J/G\sigma)^2$, следовательно и величины $|K|$. Этот параметр важен при совместной интерпретации данных гравитационных и магнитных аномалий. Он характеризует основные физические свойства аномального тела, и его часто применяют при районировании территорий. Полученные выше выражения позволяют определить его с наиболее общих позиций по совокупности любых двух магнитной и гравитационной аномалий, соответствующих одному и тому же источнику. Приведем некоторые из выражений, позволяющих определить K и углы намагничивания α, β, γ ($\cos\alpha = J_x/J$; $\cos\beta = J_y/J$; $\cos\gamma = J_z/J$; α, β, γ – углы, образованные вектором J с осями координат x, y, z). При $A_1(u, v) = A_1(\varphi) = P(\varphi)$ максимальное значение

$$P(\varphi)_{max} = K^2.$$

Минимальное значение

$$P(\varphi)_{min} = K^2 \cos^2\gamma.$$

(Здесь φ – это угол полярных координат на плоскости).

Кроме того,

$$P(0) = P(180°) = K^2(1 - \sin^2\beta),$$

$$P(90°) = P(270°) = K^2(1 - \sin^2\alpha),$$

$$P(\varphi) + P(\varphi + 90°) = P(\varphi)_{min} + P(\varphi)_{max} = K^2(1 + \cos^2\gamma),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}K^2(1 + \cos^2\gamma).$$

Из этих равенств можно определить значения K и значения косинусов или синусов углов α, β, γ.

Для частного случая двумерной задачи приведем ряд формул, позволяющих определить K через значения самих аномалий:

$$K^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,dx\right]^2 / \left[\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x)\,dx\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx\right]^2 / \left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{xx}(x)dx\right]^2 =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx\right]^2 / \left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}(x)\,dx\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(x)\,dx\right]^2 / \left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{xx}(x)dx\right]^2 =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(x)\,dx\right]^2 / \left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}(x)\,dx\right]^2,$$

$$K^2 = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x)\,dx / \int_{-\infty}^{\infty} V_z^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(x)\,dx / \int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Z^2(x)\,dx / \int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(x)\,dx / \int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Z^2(x)\,dx / \int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [Z^2(x) + H^2(x)]\,dx / \int_{-\infty}^{\infty} [V_{xz}^2(x) + V_{xz}^2(x)]\,dx.$$

После определения отношений компонент вектора намагниченности к плотности равенства, выражающие спектры элементов магнитного поля через спектры гравитационных аномалий, можно использовать и для определения псевдогравитационных или псевдомагнитных аномалий. Как видно из равенств, приведенных выше, для этого при известных значениях J_x/σ, J_y/σ, J_z/σ достаточно знать спектр одного из элементов гравитационного поля, в данном случае аномалии V_z. Определив через спектр этой аномалии спектры элементов магнитного поля X, Y, Z (их можно называть спектрами псевдомагнитных аномалий), пользуясь обратным преобразованием Фурье, можно найти и значения самих элементов магнитного поля X, Y, Z. И наоборот, определяя из указанных равенств спектр аномалии V_z (спектр псевдогравитационной аномалии) через спектр какого-то одного элемента магнитного поля, аналогично можно вычислить и псевдогравитационную аномалию.

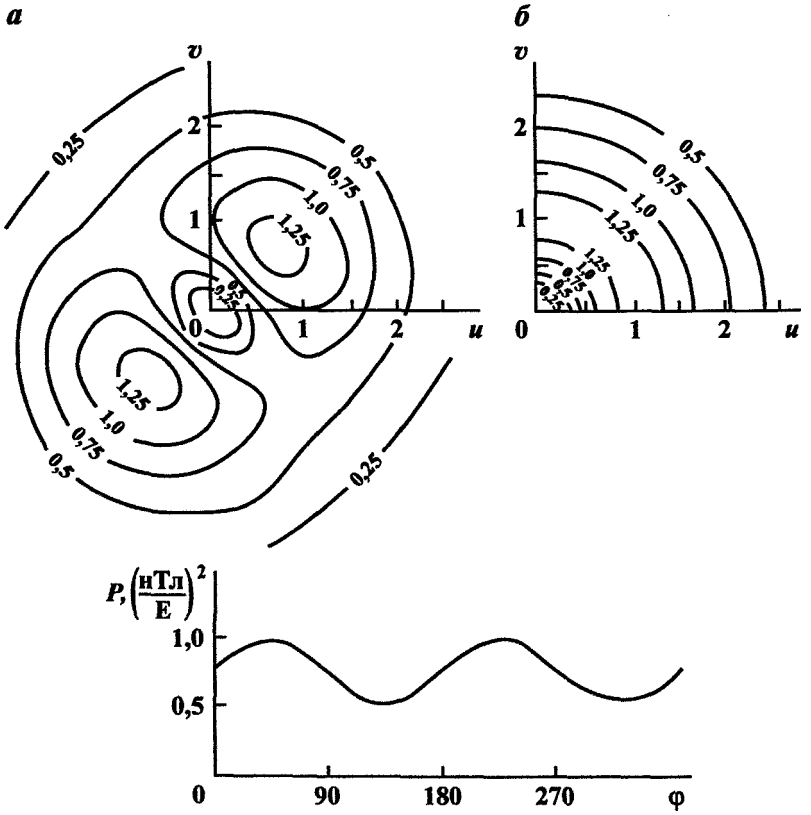


Рис. 111. Результаты определения коэффициента *K*.
Изолинии энергетического спектра: *а* – магнитной аномалии; *б* – гравитационной аномалии ускорения свободного падения; *в* – графики изменения функции *P*

Для иллюстрации некоторых приведенных положений рассмотрим модельный пример (рис. 111). Значения энергетического спектра магнитной аномалии Z, соответствующие однородно намагниченному шару, показанные на рис. 111, *а*, уменьшены в 1000 раз. Значения энергетического спектра гравитационной аномалии V_{zz} от того же тела в пределах одной четверти горизонтальной плоскости, также уменьшенные в 1000 раз, приведены на рис. 111, *б*. График изменения функции

$$Q(u,v)_z \,/\, Q(u,v)_{V_{zz}} = P(\varphi)$$

в зависимости от угла показан на рис. 111, *в*. По данным этого графика и по формулам, полученным из приведенных выше:

$$|K| = \sqrt{P(\varphi)_{max}};\ \cos\gamma = \sqrt{P(\varphi)_{min} / P(\varphi)_{max}};$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - P(0^\circ) / P(\varphi)_{max}};\ \sin\alpha = \sqrt{1 - P(90^\circ) / P(\varphi)_{max}},$$

определены значения искомых параметров: $|K| = 1$ нТл/Е; $|\cos\gamma| = 0{,}7$; $|\cos\beta| = 0{,}5$; $|\cos\alpha| = 0{,}5$; т.е. $\gamma = 45^\circ$; $\alpha = \beta = 60^\circ$. Эти данные совпадают с принятыми при расчетах.

Литература: [11, 14, 16, 20].

СОВМЕСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДАМИ ПОДБОРА ПО ГРАВИТАЦИОННЫМ И МАГНИТНЫМ ПОЛЯМ

Одним из результативных методов совместной интерпретации данных элементов гравитационного и магнитного полей при пуассоновском характере аномалиеобразующих объектов являются аппроксимационные методы, основанные на подборе полезных составляющих полей полями некоторого эквивалентного распределения масс. При совместной аппроксимации гравитационных и магнитных полей применяется смешанная мера аппроксимации, в качестве которой берется некоторый обобщенный функционал, являющийся взвешенной суммой двух функционалов, один из которых строится по данным наблюдений элементов гравитационного поля, другой – по данным наблюдений элементов магнитного поля. Методика применения этих методов при решении двумерной задачи для случая изолированных тел по наблюдаемым элементам гравитационных и магнитных полей, содержащих случайные и систематические погрешности, заключается в следующем.

Рассмотрим вначале способы, разработанные В.Н. Страховым.

Пусть заданы величины $U_k^н(x)$, которыми могут служить $g_k^н(x)$, $V_{k_n}^н(x)$ и $H_k^н(x)$ при $k = 1,2$; $n = 1,2$. Предполагается, что из априорных данных можно построить некоторую приближенную модель распределения источников с постоянной плотностью и намагниченностью J. Пусть далее значениями $U_k^м(x, D_0(P))$ будут $g_k^м(x, D_0(P))$, $V_{k_n}^м(x, D_0(P))$ и $H_k^м(x, D_0(P))$; при $k = 1,2$; $n = 1,2$ значения тех же элементов полей в точках X, соответствующие заданной области D_0 (заданной модели), определяемой вектором параметров P. Примем также, что значения наблюдаемых элементов полей содержат фоновую составляющую $U_k^ф$

(x, t_k), где $k = 1,2$ и t_k – вектор параметров для k-го элемента. Значения этих параметров неизвестны и подлежат определению вместе с вектором P. Тогда составляют функционал $\Phi_{g,m}$ и векторы параметров P и t_k определяю из условия

$$\Phi^2_{g,m}(P, \{t_k\}) = P_g \Phi^2_g + P_m \Phi^2_m = \min, \qquad (1)$$

где P_g и P_m – веса, с которыми берутся функционалы гравитационного и магнитного полей Φ_g и Φ_m соответственно. При этом каждый из этих функционалов имеет вид

$$\Phi^2(P, \{t_k\}) = \sum_{i=1}^{N} [U^{\text{н}}_k(x_i) - U^{\text{н}}_k(x_i, D_0(P)) - U^{\phi}_k(x_i, t_k)]^2, \qquad (2)$$

где N – число пунктов наблюдений. В зависимости от того, как берутся веса, как выбирают модельный класс источников, фоновые составляющие и какие параметры конкретно определяют, могут различаться друг от друга различные аппроксимационные методы. Рассмотрим основные из них.

В работе В.Н. Страхова и М.И. Лапиной веса определяют из выражений

$$P_g = \frac{\beta_g^2}{\beta_g^2 + \beta_m^2}; \quad P_m = \frac{\gamma^2 \beta_m^2}{\beta_g^2 + \beta_m^2},$$

где $\beta_g = \frac{(g_k)_{\max}}{\delta_{g_k}}$; $\beta_m = \frac{(H_k)_{\max}}{\delta_{H_k}}$; $\gamma = \frac{(g_k)_{\max}}{(H_k)_{\max}}$; $(g_k)_{\max}$, $(H_k)_{\max}$ – максимальные по модулю значения g_k и H_k, а δ_{g_k} и δ_{H_k} – средние квадратические значения случайных помех в наблюденных значениях полей. Значение фоновой составляющей поля аппроксимируется выражением

$$U^{\phi}_k(x) = A_k + B_k x_1 + C_k x_2, \quad (x_1 = x, x_2 = z).$$

Определяемыми при решении параметрами являются величины интегральных характеристик возмущающих масс, связанные с комплексными моментами источников:

1) по гравитационным аномалиям:

$$m = m_0(0), \quad S_g = \frac{m_1(0)}{m}, \quad \theta_g = \frac{1}{2} \arg \frac{m_2(S_g)}{m};$$

2) по магнитным аномалиям:

$$M = M_0(0), \quad S_m = \frac{M_1(0)}{M}, \quad \theta_m = \frac{1}{2} \arg \frac{M_2(S_m)}{M}.$$

Здесь m и M – суммарная масса и суммарный магнитный момент в области D; S_g, S_m – координаты центров тяготеющих и намагниченных масс; значения θ_g, θ_m характеризуют в общем случае и форму носителя масс и распределения в нем источников, в случае постоянной плотности (намагниченности) они характеризуют угол, составленный длинной осью носителя и осью OX. При этом исходные поля аппроксимируются полями некоторых задаваемых распределений масс, в качестве которых могут служить, например, распределения масс, носителями которых являются многоугольник, область с границей в форме эллипса, область с границей в форме эллиптической лемнискаты Бута или так называемые «каркасы», под которыми понимаются распределения в виде совокупности точечных источников с одинаковыми массами в случае гравитационной задачи и с одинаковыми моментами в случае магнитной задачи, рассматриваемые как некоторая связанная система.

Рассмотрим еще и методику совместной интерпретации данных гравитационного и магнитного полей, разработанную Ф.М. Гольцманом и Т.Б. Калининой. В ней, пользуясь методами теории статистических решений, на основании критерия максимального правдоподобия строится так называемая оптимальная функция отклика или функция достаточного приема $\lambda(P)$, по величине максимума которой и производится оценка неизвестных параметров. При этом выражение $\lambda(P)$ формально имеет такой же вид, что и правая часть формулы (1), с той лишь разницей, что веса $P_g = -1/\delta_g^2$, $P_m = -1/\delta_m^2$ и отсутствует в нем фоновая составляющая U^{Φ}. А в качестве модели экспериментальных данных задаются функции, соответствующие значениям гравитационного и магнитного полей от однородного по плотности и однородно намагниченного шара,

$$U_g^M(x_k) = G\sigma \frac{h}{(h^2 + x_k^2)^{3/2}} + n_g(x_k),$$

$$U_m^M(x_k) = M \frac{2h^2 - x_k^2}{(h^2 + x_k^2)^{5/2}} + n_m(x_k),$$

где σ – избыточная плотность; M – магнитный момент; h – глубина залегания центра шара.

С учетом этих функций выражение для $\lambda(P)$ примет вид

$$\lambda(M, h) = -\frac{1}{\delta_m^2} \sum_{k=1}^{N} \left[U_m^n(x_k) - M \frac{2h^2 - x_k^2}{(h^2 + x_k^2)^{5/2}} \right]^2 -$$

$$-\frac{1}{\delta_m^2} \sum_{k=1}^{N} \left[U_g^n(x_k) - G\sigma \frac{h}{(h^2 + x_k^2)^{3/2}} \right]^2.$$

Здесь значения δ считают известными; определяют величины M и h. Максимум этой функции в пространстве M и h дает искомые оценки неизвестных параметров.

Некоторые другие вопросы совместной интерпретации данных элементов гравитационного и магнитного полей даны в работах [5, 7, 9. 11 и др.].

В работе [13] изложено несколько различных спектральных методов совместной интерпретации данных гравитационных и магнитных аномалий. Все они основаны на применении энергетических характеристик аномалий и годятся для случаев произвольного намагничивания. Особенностью этих способов является то, что используемые при этом графики функций, соответствующие аномалиям от различных тел, или имеют разную форму, не позволяющую перепутать их друг с другом, или расположены в разных непересекающихся на плоскости чертежа областях, причем границей этих областей являются кривые, соответствующие аномалии бесконечной горизонтальной материальной линии.

К методам совместной интерпретации данных гравитационного и магнитного полей относятся и корреляционные методы интерпретации, основанные на: 1) установлении статистических связей между глубиной залегания изучаемой границы, заданной на некотором эталонном участке, и значениями элементов полей; 2) применении найденного оператора связи на других участках площади для определения там значений глубин залегания искомой границы по данным полей.

Литература: [14, 16].

СОВМЕСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПСЕВДОГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ И ПСЕВДОМАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Рассмотрим применение псевдогравиметрических и псевдомагнит-ных аномалий. Первые представляют вертикальные производные гравитационного потенциала, вычисленного на основе соотношения Пуассона по данным распределения магнитного поля (Z или ΔT) на плоскости измерений, вторые – производные магнитного потенциала, вычисленного на той же основе по распределению поля силы тяжести.

Сопоставление псевдогравиметрических и псевдомагнитных аномалий с соответствующими наблюденными полями позволяет более четко решить вопрос о природе возмущающих объектов. Если псевдо- и реальные аномалии совпадают, то магнитное и гравитационное поля обусловлены одними и теми же причинами.

Расхождения между этими аномалиями свидетельствуют о существовании отдельных только гравитирующих (или только магнитных) объектов, причем в ряде случаев по характеру псевдоаномалий можно судить о местоположении и физической природе последних.

Примеры характера псевдомагнитных аномалий в различных геологических условиях приведены на рис. 112.

Литература: [3, 14, 16].

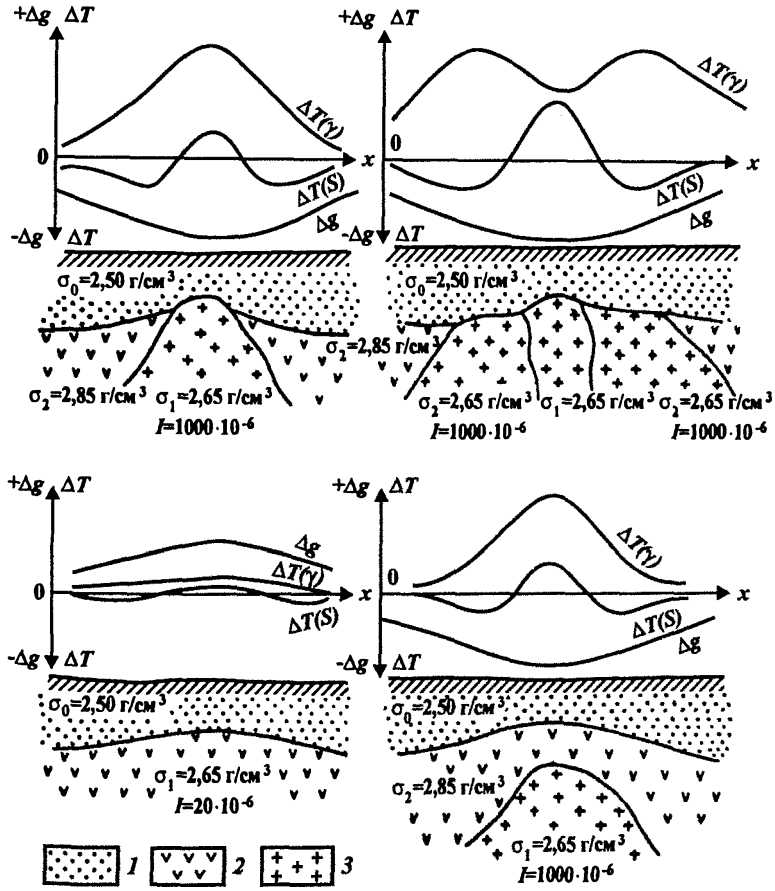


Рис. 112. Характер псевдомагнитных аномалий в различных геологических условиях (по Е.Д. Черновой):

1 – осадочные породы; *2* – интрузии; *3* – осадочно-метаморфическая толща; Δg – аномалия силы тяжести; $\Delta T(\gamma)$ – магнитная аномалия; $\Delta T(S)$ – псевдомагнитная аномалия

СПЕКТРЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Для различных аномальных источников ниже приведены выражения спектров гравитационных и магнитных аномалий V_z и Z при вертикальном намагничивании. Спектры других гравитационных и магнитных аномалий указанных тел (V_x, V_{xz}, V_{zz}, H, ΔT и др.), причем в случае магнитных аномалий как для вертикального, так и для косого намагничивания, можно определить по спектрам аномалий V_z и Z, пользуясь соответствующими частотными характеристиками.

Выражения для спектров определены по формулам

$$S(\omega) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx,$$

$$S(u, v) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy,$$

$$S(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} rf(r) J_0(\rho r) dr.$$

Примем следующие обозначения: G – гравитационная постоянная; h, h_1 и h_2 – соответственно глубина залегания центра (осевой линии), верхней и нижней кромок аномальных тел; σ, λ и μ – объемная, линейная и поверхностная плотности тел; m – магнитная масса единицы длины, m_1 – поверхностная плотность магнетизма, m_2 – магнитный момент объемного тела; выражения гравитационных и магнитных аномалий от наиболее применяемых на практике простейших тел и их спектров приведены в табл. 13.

Графики изменения значений модуля спектров аномалий от некоторых модельных тел правильной формы приведены на рис. 113. Рассмотрим спектры аномалий от возмущающих тел

Таблица 13

Спектры гравитационных и магнитных аномалий от наиболее применяемых простейших тел

Тело	Гравитационная или магнитная аномалия	Выражение для спектра
	Двумерная задача	
1. Бесконечная горизонтальная материальная линия, бесконечная линия полюсов или однополюсная линия (аномалия Z при $G\lambda = m$)	$V_z(x) = 2G\lambda h/(x^2 + h^2)$	$S(\omega) = \sqrt{2\pi}\, G\lambda \exp(-\lvert\omega\rvert h)$
2. Бесконечная дипольная линия	$Z(x) = 2m\dfrac{h^2 - x^2}{(x^2 + h^2)^2}$	$S(\omega) = \sqrt{2\pi}\, m\lvert\omega\rvert \exp(-\lvert\omega\rvert h)$
3. Бесконечная горизонтальная полоса шириной $2l$, бесконечная горизонтальная заряженная полоса (аномалия Z при $G\mu = m_1$)	$V_z(x) = 2G\mu\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+l}{h} - \operatorname{arctg}\dfrac{x-l}{h}\right)$	$S(\omega) = 2\sqrt{2\pi}\, G\mu\dfrac{\sin\omega l}{\omega} \times \exp(-\lvert\omega\rvert h)$
4. Бесконечная вертикальная материальная полоса высотой $\Delta h = h_2 - h_1$, вертикальная заряженная полоса (аномалия Z при $G\mu = m_1$)	$V_z(x) = G\mu \ln\dfrac{x^2 + h_2^2}{x^2 + h_1^2}$	$S(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\dfrac{1}{\lvert\omega\rvert} \times \times[\exp(-\lvert\omega\rvert h_1) - \exp(-\lvert\omega\rvert h_2)]$
5. Бесконечная горизонтальная дипольная пластинка шириной $2l$	$Z(x) = 4m_1 l(h^2 + l^2 - x^2)/ /[(x^2 + h^2 - l^2)^2 + 4l^2h^2]$	$S(\omega) = 2\sqrt{2\pi}\, m_1 \times \times(\lvert\omega\rvert/\omega)\sin(\omega l)\exp(-\lvert\omega\rvert h)$
6. Полубесконечная горизонтальная дипольная пластинка	$Z(x) = -2m_1 x/(x^2 + h^2)$	$S(\omega) = i\sqrt{2\pi}\, m_1 \times \times(\lvert\omega\rvert/\omega)\exp(-\lvert\omega\rvert h)$
7. Полубесконечный горизонтальный слой	$Z(x) = 2m_1\left(\operatorname{arctg}\dfrac{h_2}{x} - \operatorname{arctg}\dfrac{h_1}{x}\right)$	$S(\omega) = i\sqrt{2\pi}\,(m_1/\omega) \times \times[\exp(-\lvert\omega\rvert h_1) - \exp(-\lvert\omega\rvert h_2)]$
	Трехмерная задача	
8. Точечная масса или шар массой M, магнитный точечный полюс (аномалия Z при $G\mu = m_2$)	$V_z(r) = GMh/(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}$	$S(\rho) = GM\exp(-\rho h)$
9. Вертикальный диполь или вертикально намагниченный шар	$Z(x,y) = m_2\dfrac{2h^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}}$	$S(\rho) = m_2\exp(-\rho h)$

Продолжение табл. 13

Тело	Гравитационная или магнитная аномалия	Выражение для спектра
10. Вертикальная материальная линия, вертикальная линия полюсов (аномалия Z при $G\lambda = m$)	$Z(x,y) = G\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h_2^2}}\right)$	$S(\rho) = G\lambda\frac{1}{\rho}\times$ $\times[\exp(-\rho h_1) - \exp(-\rho h_2)]$
11. Вертикальный схематический магнит (два точечных полюса разного знака)	$Z(x,y) = \frac{mh_1}{(x^2+y^2+h_1^2)^{3/2}} - \frac{mh_2}{(x^2+y^2+h_2^2)^{3/2}}$	$S(\rho) = m[\exp(-\rho h_1) -$ $- \exp(-\rho h_2)]$
12. Горизонтальный прямоугольный параллелепипед ($2a$ – длина, $2b$ – ширина)		$S(u, v) = 4G\sigma[\exp(-\rho h_1) -$ $- \exp(-\rho h_2)] \times$ $\times \sin(ua)\sin(vb)/\rho uv$
13. Вертикальное круговое кольцо (R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы)		$S(\rho) = 2\pi G\sigma[\exp(-\rho h_1) -$ $- \exp(-\rho h_2)] \times$ $\times [R_2 J_1(\rho R_2) - R_1 J_1(\rho R_1)]/\rho^2$
14. Усеченный вертикальный цилиндр радиуса R		$S(\rho) = 2\pi G\sigma[\exp(-\rho h_1) -$ $- \exp(-\rho h_2)]RJ_1(\rho R)/\rho^2$ При $h_2 \to \infty$ $S(\rho) = 2\pi G\sigma\exp(-\rho h_1) \times$ $\times RJ_1(\rho R)/\rho^2$
15. Горизонтальный материальный диск радиусом R		$S(\rho) = 2\pi G\mu\exp(-\rho h) \times$ $\times RJ_1(\rho R)/\rho$

Примечание. Из-за громоздкости аналитических выражений аномалий для п. 12–15 приведены только значения спектров.

более сложной формы. Аномалия $V_z(x)$ от двумерного тела произвольного сечения S определяется выражением

$$V_z(x) = 2G\int_S \sigma\frac{\zeta - z}{r^2}\,ds,$$

где

$$\sigma = \sigma(\xi, \zeta);\quad ds = d\xi\,d\zeta;\quad r^2 = (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Спектр этой аномалии

$$S(\omega) = \sqrt{2\pi}G\int_S \sigma\exp(-i\omega\xi)\exp(-|\omega|\zeta)\,ds.$$

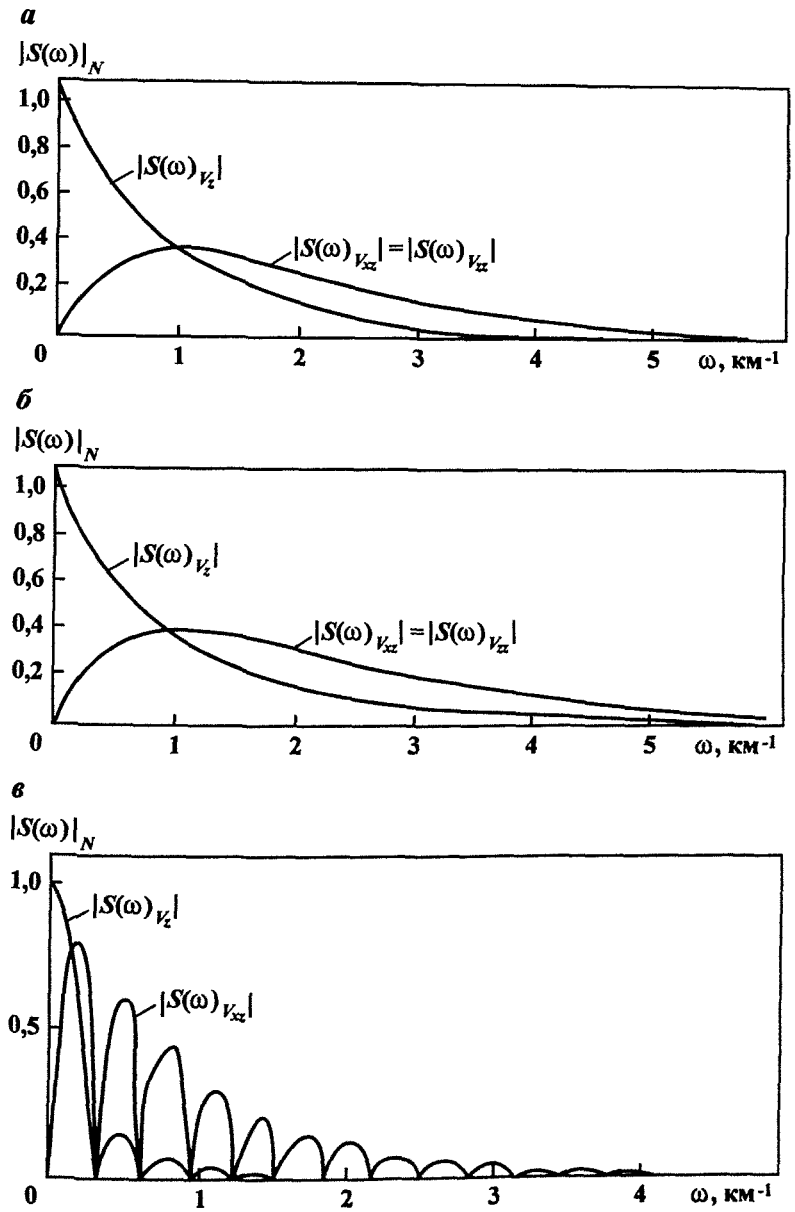


Рис. 113. Графики изменения модуля спектров аномалий, вызванных бесконечными материальными источниками (по К.В. Гладкому):
а – горизонтальной линией; *б* – вертикальной полосой; *в* – горизонтальной полосой

Для аномалии от трехмерного тела

$$V_z(x, y) = G \int_v \sigma \frac{(\zeta - z)\, dv}{r^3},$$

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, получим спектр

$$S(u,v) = G \int_v \sigma \exp[-i(u\xi + v\eta)] \exp(-\rho\zeta)\, dv,$$

где $\rho^2 = u^2 + v^2$.

Выражение для аномалии $V_z(x, y)$ перепишем в следующем виде:

$$V_z(x, y) = G\sigma \int_\xi \int_\eta \int_{h_1}^{h_2} \frac{h\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}},$$

где h_1 и h_2 – глубины залегания верхней и нижней границ аномального тела.

Для этой аномалии выражение спектра примет следующий вид:

$$S(u,v) = \frac{G\sigma}{\rho} [\exp(-\rho h_1) - \exp(-\rho h_2)] \int_\xi \int_\eta \exp[-i(u\xi + v\eta)]\, d\xi\, d\eta.$$

По этой формуле можно определить значения спектров для аномалий от более сложных тел [16] (см. также табл. 13).

Рассматривая выражения спектров для последних четырех случаев табл. 13, заметим, что получаемые функции достаточно простые. В то же время выражения для соответствующих аномалий весьма громоздкие и в некоторых случаях даже не выражаются в элементарных функциях (например, пункты 13 и 14 табл. 13). В этом и заключается одно из преимуществ применения спектров при решении различных задач гравиразведки и магниторазведки.

Литература: [3, 13, 14, 16].

СПОСОБ (ГРАФИЧЕСКИЙ) ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АНОМАЛЬНЫХ ТЕЛ ПО СПЕКТРАМ

Спектральные способы анализа и интерпретации аномалий потенциальных полей изложены в работах [13, 16].

Наиболее применяемым различными исследователями спектральным способом определения параметров аномальных тел является графический способ, заключающийся в применении кривых логарифма модуля спектров аномалий.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда

$$|S(\omega)| = a \exp(-|\omega|h), \qquad (1)$$

где a – коэффициент, зависящий от массы тела; h – глубина залегания. Прологарифмировав обе части этого равенства, найдем

$$y = \ln|S(\omega)| = \ln a - |\omega|h.$$

Графиком этой функции является убывающая прямая с угловым коэффициентом $-h$, а величина $y(0) = \ln|S(0)| = \ln a$. Рассмотрим более сложный случай, когда аномалия состоит из влияний двух особых точек, залегающих по вертикали на глубинах h_1 и h_2 ($h_2 > h_1$):

$$|S(\omega)| = a\,[\exp(-|\omega|h_1) - \exp(-|\omega|h_2)]. \qquad (2)$$

В этом выражении при достаточно больших значениях ω (из-за того, что $h_2 > h_1$) влияние функции $\exp(-|\omega|h_2)$ можно пренебречь. Получим

$$|S(\omega)| \approx a \exp(-|\omega|h_1).$$

Отсюда следует, что если прологарифмировать обе части равенства (2) и построить график функции $y = \ln|S(\omega)|$, то асимптотой правой части получаемого графика будет прямая

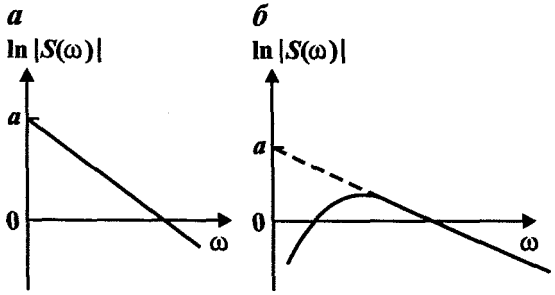


Рис. 114. Кривые логарифма модуля спектра аномалий, аппроксимируемые прямой:
а – при всех значениях частот; *б* – в области высоких частот

$$y_1(\omega)| = \ln a - |\omega| h_1,$$

угловой коэффициент которой равен $-h_1$, а $y_1(0) = \ln a$.

Вид графиков функций, соответствующих равенствам (1) и (2) показан на рис. 114.

Во всех случаях, когда пользуются областью высоких частот ω, необходимо все построения проводить со сглаживанием или с другими операциями, подавляющими помехи, например, с параллельным переносом одной части кривой под другую таким образом, что ошибки оказались в противофазе, и суммированием данных этих двух половин и др.

Типичные виды кривых логарифма модуля спектров реальных аномалий, применяемых на практике для определения глубины залегания ближайших к поверхности особых точек, показаны на рис. 115.

Параметры источников без графиков можно определить по формулам

$$b = \ln a = \frac{\sum_{i=1}^{m} y(\omega_i) \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2 - \sum_{i=1}^{m} \omega_i \sum_{i=1}^{m} \omega_i y(\omega_i)}{m \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \right)^2}.$$

Из этого выражения можно определить b, при этом отпадает

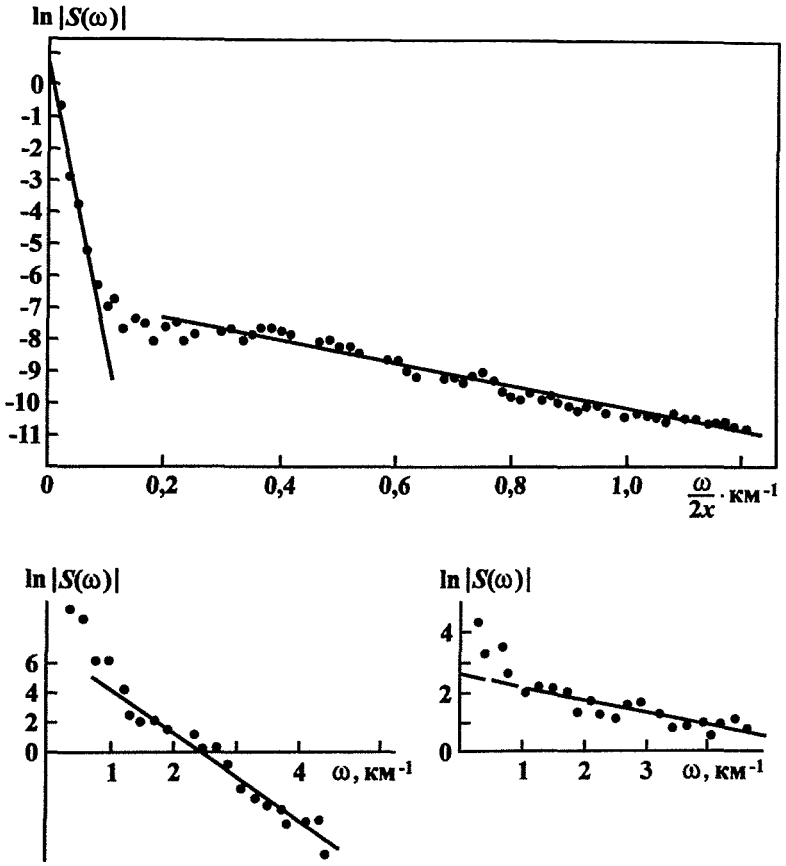


Рис. 115. Примеры кривых логарифма модуля спектров реальных аномалий

необходимость в построении графика прямой. Зная b можно определить a, а отсюда и массу тела. Величину h можно определить из равенства

$$h_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \omega_i \sum_{i=1}^{m} y(\omega_i) - m \sum_{i=1}^{m} \omega_i y(\omega_i)}{\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2\right)^2 - m \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2}.$$

Литература: [13, 16].

СУММАРНАЯ МАССА И МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ АНОМАЛЬНЫХ ТЕЛ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

С целью определения массы тела произвольной формы определим выражение спектра его аномалии V_z. Рассмотрим вначале двумерную задачу.

В общем виде аномалию V_z можно определить из равенства

$$V_z(x) = 2G \int_S \sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta - z}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} d\xi d\zeta.$$

Спектр этой аномалии при $z = 0$

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_z(x) \exp(-i\omega x) dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} G \int_S \sigma(\xi, \zeta) \exp(-i\omega\xi) \exp(-|\omega|\zeta)\, d\xi d\zeta. \qquad (1)$$

Отсюда при $\omega = 0$ получим

$$S(0) = \sqrt{2\pi} G \int_S \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \sqrt{2\pi} G \lambda,$$

где $\lambda = \int_S \sigma\, d\xi d\zeta$.

Из этого равенства можно найти массу λ двумерного тела произвольной формы:

$$\lambda = S(0)/\sqrt{2\pi} G. \qquad (2)$$

Учитывая, что

$$S(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_z(x) dx,$$

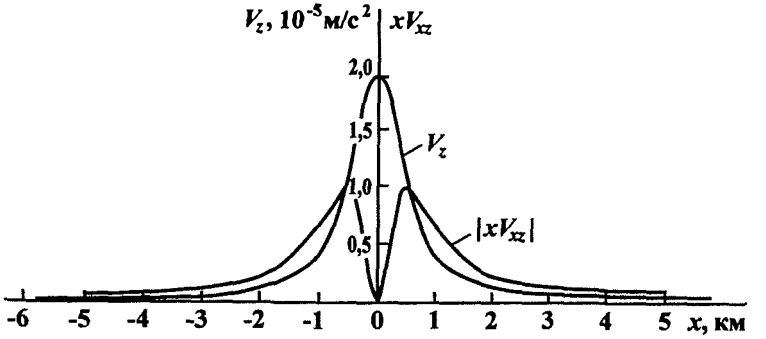


Рис. 116. Типичный вид кривых V_z и xV_{xz}

найдем

$$\lambda = \frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x)dx. \qquad (3)$$

Интегрируя это выражение по частям, найдем также

$$\lambda = \frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty} xV_{xz}(x)dx. \qquad (4)$$

Последние два интеграла являются интегралами Гамбурцева. Они позволяют определить значение суммарной или избыточной массы через значения элементов гравитационного поля V_z и V_{xz}. Типичный вид подынтегральных функций равенств (3) и (4) $V_z(x)$ и xV_{xz} показан на рис. 116.

В трехмерном случае для тела объемом v и массой M вместо равенств (1), (2) и (3) получим

$$S(u,v) = G\int_v \sigma\exp(-\rho\zeta)\exp[-i(u\xi + v\eta)]dv;$$

$$M = S(0, 0)/G,$$

где

$$M = \int_v \sigma dv;$$

$$M = \frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x,y)dx\,dy.$$

Пользуясь уравнением Пуассона, определяющим магнитную аномалию H через элементы гравитационного поля

$$H = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_{xx} + J_z V_{xz}), \tag{5}$$

в выражении (4) можно перейти от гравитационной аномалии к магнитной. В самом деле, определяя из равенства (5) V_{xz} и подставляя ее в равенство (4) при $V_{xx} = -V_{zz}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x V_{zz}(x)dx = 0$,

$$\lambda = \sigma S,\ m = JS,$$

получим

$$m = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x H(x)dx. \tag{6}$$

Из этого выражения можно определить магнитный момент m двумерного тела произвольного сечения S.

Формулы (3) и (6) можно получить и непосредственно вычисляя интегралы с применением выражений, определяющих $V_z(x)$ и $H(x)$ в общем виде для двумерного тела произвольного сечения S:

$$V_z(x) = 2G\int_S \sigma\frac{(\zeta - z)dS}{r^2},\quad H(x) = 2\int_S J\frac{2\xi(\zeta - z)dS}{r^4},$$

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2$.

При определении массы и магнитного момента по формулам (3), (4) и (6) их необходимо интегрировать в бесконечных пределах вдоль профиля или по площади наблюдений, тогда как элементы гравитационного и магнитного полей известны только в некоторых ограниченных пределах. Поэтому на практике интегрирование проводят в ограниченных пределах, например, от $-a$ до $+a$, а влияние дальних зон учитывают в виде поправок за бесконечность. Из теории потенциала известно, что на бесконечности каждый данный элемент поля убывает по такой же закономерности, что и элементы поля от элементарных источников. Например, гравитационные поля, как поля от бесконечной горизонтальной материальной линии в двумерном случае и поля от точечной массы – в трехмерном. Поэтому при определении поправки за бесконечность аномалию за пределами интервала $(-a, +a)$ аппроксимируют аномалией от бесконечной горизонтальной материальной линии при решении двумерной задачи и аномали-

ей от точечной массы или шара при решении трехмерной задачи. В случае же формулы (6) аномалию H можно аппроксимировать аномалией от намагниченного бесконечного горизонтального кругового цилиндра. При этом аномалию от материальной линии или от точечной массы выбирают таким образом, чтобы она совпадала с наблюденной в двух точках – в точке максимума и в точке с горизонтальной координатой, равной a.

Литература: [3, 6, 7, 14].

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Для тел произвольной формы выражением потенциала силы тяжести и магнитного потенциала в том виде, в каком они представлены в точном виде, невозможно пользоваться, так как входящие в эти формулы объемные интегралы не раскрываются в элементарных функциях. Только для весьма немногих тел простейшей формы получаются простые и удобные выражения. Поэтому в общем случае приходится прибегать к какому-либо способу приближенного представления функций объемных потенциалов.

Таким математическим аппаратом является аппарат бесконечных рядов того или иного вида, теория которых позволяет разложить потенциал на сумму бесчисленного множества простых слагаемых, из которых можно затем брать столько первых членов, сколько требуется в конкретной задаче. Весьма удобный способ представления потенциала в виде бесконечного ряда – классическое разложение его по так называемым сферическим, или шаровым, функциям.

Между рядами Фурье и сферических функций много общего. Если ряд Фурье заменяет на некотором интервале профиля или по площади исходную функцию суммой знакопеременных тригонометрических полиномов, то ряд сферических функций заменяет функцию на сфере суммой знакопеременных на ней сферических функций.

Сферические функции. Сферические функции появляются при изучении некоторых частных решений уравнения Лапласа. Пусть эти частные решения имеют вид ***однородного многочлена степени n*** (n – некоторое целое положительное число) с тремя независимыми переменными x, y, z. Многочлен нескольких переменных называется однородным многочленом степени n, если при умножении этих переменных на произвольную величину t многочлен умножается на t^n.

Такие однородные многочлены $U_n(x, y, z)$ в силу равенства

$$\Delta[U_n(x, y, z)] = 0$$

называются гармоническими многочленами степени n.

В сферических координатах при

$$x = \rho \sin\theta \cos\lambda, \quad y = \rho \sin\theta \sin\lambda, \quad z = \rho \cos\theta,$$

всякий однородный многочлен n-й степени можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от ρ, а другая только от координат θ и λ:

$$U_n = \rho^n \, Y_n(\theta, \lambda),$$

где

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k(\cos\theta)[A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda].$$

Если U_n является гармоническим многочленом, то он называется ***объемной сферической функцией***, а множитель $Y_n(\theta, \lambda)$ – ***поверхностной сферической функцией***, или просто ***сферической функцией порядка*** n. Из последнего равенства видно, что сферическая функция порядка n есть многочлен относительно синусов и косинусов углов θ и λ, каждый член которого является произведением функции одного только θ на функцию одной только λ. Простейшими сферическими функциями являются полиномы Лежандра или шаровые функции порядка n P_n, а также так называемые присоединенные функции Лежандра P_n^k. В зависимости от особенностей поведения на сфере сферические функции получили название **зональных секториальных** и **тессериальных**.

Литература: [4, 12, 14, 16, 20].

ТЕОРЕМА ГАУССА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции гласит: если функция U является гармонической в области v, то ее значение во всякой внутренней точке P равно интегральному среднему ее значений, взятому по поверхности S любой сферы радиусом R (с центром в точке P), лежащей целиком внутри области v. Действительно, если S – поверхность сферы, точка P – центр сферы, R – ее радиус, то при интегрировании по поверхности сферы $r = R = \text{const}$, получим

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U dS, \quad P \in v.$$

Эта формула выражает ***теорему Гаусса*** о среднем значении гармонической функции. Из нее можно определить гармоническую функцию в центре сферы по ее значениям, заданным на поверхности сферы.

Верна и теорема, обратная теореме Гаусса: если функция $U(M)$, непрерывная вместе с ее первыми и вторыми производными в области v, удовлетворяет во всех точках этой области теореме Гаусса о среднем, то она является гармонической в области v.

Совершенно аналогичны свойства гармонической функции на плоскости. В данном случае теорема Гаусса о среднем будет выражаться в виде

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_l U dl, \quad P \in v,$$

где R – радиус окружности; l – длина окружности (интегрирование проводится по длине окружности); в правой части формулы находится среднее значение аномалии на окружности.

В полярных координатах

$$U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} U(R, \varphi) d\varphi.$$

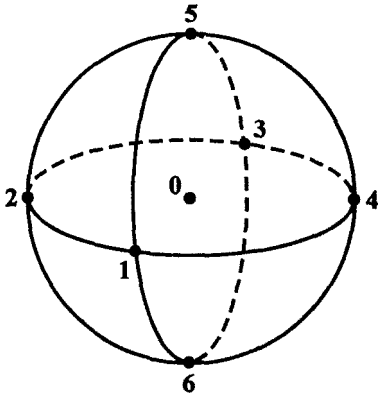


Рис. 117. Схема расположения точек 1–6 на сфере радиусом R

Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции широко применяется при решении различных задач теории потенциала, в частности и при определении аналитически продолженных значений гравитационной или магнитной аномалии. С этой целью на поверхности сферы берут шесть точек и среднее по поверхности сферы определяют как среднее по этим шести точкам.

Пусть радиус сферы R, а плоскость ее экватора совпадает с плоскостью наблюдений. На поверхности сферы возьмем шесть точек: четыре на экваторе (рис. 117, точки *1–4*) и две на полюсах – (точки *5* и *6*). Тогда по теореме Гаусса значение аномалии в центре сферы

$$U(0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_S U dS \approx \frac{1}{6}[U(1)+U(2)+U(3)+U(4)+U(5)+U(6)].$$

Обозначим

$$1/4[U(1) + U(2) + U(3) + U(4)] = \overline{U(R)},$$

где $\overline{U(R)}$ – среднее значение аномалии U на окружности радиуса R, совпадающей с поверхностью сферы в плоскости ее экватора. Тогда

$$6U(0) = 4\,\overline{U(R)} + U(5) + U(6),$$

Если $U(5)$ – значение U в точке верхнего полюса (аналитически продолженное в область верхнего полупространства значение U), то, зная его, из последнего равенства можно определить

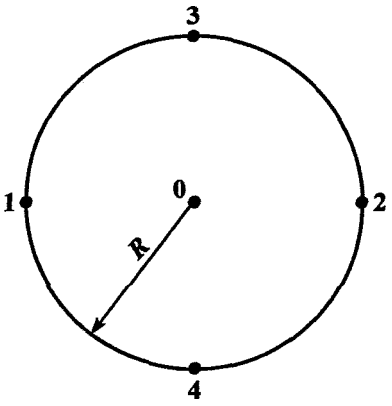


Рис. 118. Схема расположения точек 1–4 на окружности радиусом R

$$U(6) = 6U(0) - 4\overline{U(R)} - U(5),$$

т.е. можно продолжить значения наблюденной аномалии в область нижнего полупространства на глубину R. Аналогично, зная значение $U(6)$, можно определить $U(5)$, т.е. аналитически продолжить аномалию в область верхнего полупространства.

Для двумерных аномалий теорема Гаусса о среднем значении приводит к интегралу по окружности. Ограничиваясь четырьмя значениями аномалии U на окружности (с профилем наблюдений совпадают точки 1, 0, 2; точка 3 находится в верхнем полупространстве, а точка 4 – в нижнем (рис. 118) – аномалию считают не зависящей от направления переменной y), получим

$$U(0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} U(R,\varphi)\,d\varphi \approx [U(1)+U(2)+U(3)+U(4)]/4.$$

Из этого равенства по известным $U(0)$, $U(1)$, $U(2)$ и $U(3)$ можно определить $U(4)$ или, если известно $U(4)$, а $U(3)$ неизвестно, можно определить это последнее значение.

Литература: [3, 4, 13, 16].

ТЕОРЕМЫ О СПЕКТРАХ АНОМАЛИЙ

Приведем ниже некоторые важные теоремы о спектрах.

1. **Спектр смещенной функции.**

Пусть нам заданы функции $f(x - \xi)$ и $f(x - \xi, y - \eta)$, которые в двумерном и трехмерном случаях смещены по направлению осей координат X и Y на величины ξ и η относительно исходных функций $f(x)$ и $f(x, y)$ имеют преобразования Фурье, равные $S(\omega)$ и $S(u, v)$. В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$S_c(\omega) = e^{-iu\xi} S(\omega),$$

$$S_c(u, v) = e^{-i(ux + vy)} S(u, v), \qquad (1)$$

где $S_c(\omega)$ и $S_c(u, v)$ – спектры смещенных функций $f(x - \xi)$ и $f(x - \xi, y - \eta)$.

В полярных координатах при

$$u = \rho \cos\theta, \quad v = \rho \sin\theta, \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2};$$

$$\xi = r \cos\varphi, \quad \eta = r \sin\varphi, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

равенство (1) примет вид:

$$S_c(\rho, \theta) = e^{-i\rho r \cos(\theta - \varphi)} S(\rho, \theta).$$

2. **Соотношения между трансформантами Фурье самой функции и ее производных.**

Если функция $f(x)$ имеет преобразование Фурье или спектр $S(\omega)$, то преобразование Фурье n-й производной функции $f(x)\,\frac{d^n[f(x)]}{dx^n}$ (если существует эта производная) $S_n(\omega)$ определяется равенством

$$S_n(\omega) = (i\omega)^n S(\omega).$$

У функций, удовлетворяющих этому соотношению, первые $n - 1$ производные по x должны стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

Аналогично для n-й производной функции $f(x, y)$ по направлении оси x

$$S_n(u, v) = (iu)^n S(u, v),$$

по направлению оси y

$$S_n(u, v) = (iv)^n S(u, v).$$

3. Соотношения между трансформантами Фурье самой функции и ее производных по параметру.

Если функция $f(z) = \int_{-a}^{a} f(x, z)\,dx$ определена в интервале $-b \le z \le b$, а функция $f(x, z)$ непрерывна в прямоугольнике $-a \le z \le a$, $-b \le z \le b$, и имеет в этой области частную производную $\partial f/\partial z$, то при любом z в интервале $[-b, b]$ существует равенство

$$\int_{-a}^{a} \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\,dx = \frac{d}{dz}\int_{-a}^{a} f(x, z)dx.$$

Если это равенство верно при $a \to \infty$ и $b \to \infty$, то между преобразованиями Фурье функций $\partial f/\partial z$ и $f(x, z)$ – $S_z(\omega, z)$ и $S(\omega, z)$ существует соотношение

$$S_z(\omega) = \frac{\partial[S(\omega, z)]}{\partial z}.$$

4. Спектр функции, определяющийся интегралом свертки.
Функция

$$f_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)\,P(\xi)\,d\xi \qquad (1)$$

называется сверткой* функций $f(x)$ и $P(x)$ в интервале $(-\infty, \infty)$. Пусть функции $f_\tau(x)$, $f(x)$ и $P(x)$ имеют трансформанты Фурье, которые обозначим соответственно через $S_\tau(\omega)$, $S(\omega)$ и $\Phi(\omega)$.

Тогда справедливо равенство

$$S_\tau(\omega) = S(\omega)\,\Phi(\omega).$$

Таким образом, свертка функций вдоль направления x преобразуется в произведение их спектров в частотной области.

---

* Иногда сверткой функций называются просто интегралы правых частей формул (1), (2) (без коэффициентов).

Аналогично в трехмерном случае для свертки функций $f(x, y)$ и $P(x, y)$

$$f_\tau(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi, y-\eta) P(x,y)\, d\xi\, d\eta \qquad (2)$$

сможем написать:

$$S_\tau(u, v) = S(u, v)\ \Phi(u, v),$$

где $S_\tau(u, v)$, $S(u, v)$ и $\Phi(u, v)$ – преобразования или трансформанты Фурье функций $f_\tau(x, y)$, $f(x, y)$ и $P(x, y)$.

Формулы (1), (2) описывают линейные преобразования или трансформации исходных аномалий $f(x)$ и $f(x, y)$, в результате которых получаются некоторые трансформированные аномалии $f_\tau(x)$ и $f_\tau(x, y)$. При этом функции P является ядром преобразования и характеризует это преобразование.

Функции

$$\Phi(\omega) = \frac{S_\tau(\omega)}{S(\omega)},$$

$$\Phi(u, v) = \frac{S_\tau(u,v)}{S(u,v)},$$

являющиеся отношением трансформант Фурье или спектров трансформированной функции и исходной, называются ***частотной характеристикой*** или характеристической функцией преобразования. Она определяет вид трансформации и полностью характеризует ее.

Ядра интегралов $P(x)$ и $P(x, y)$ называются иначе переходными характеристиками. Как было отмечено выше, для интегралов сверток частотные характеристики $\Phi(\omega)$ и $\Phi(u, v)$ являются трансформантами или преобразованиями Фурье функций $P(x)$ и $P(x, y)$.

ТРАНСФОРМАЦИИ И ИХ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как известно, наблюденные гравитационные и магнитные поля являются сложными суммарными полями, состоящими из суммы влияний различных геологических объектов различной формы и плотности, залегающих на различных глубинах. При интерпретации же желательно иметь дело с влиянием отдельных аномальных тел. Поэтому задача выделения или подчеркивания влияний отдельных геологических объектов в суммарном поле – одна из важнейших. Эту задачу решают, совершая с полями некоторые операции, преобразующие или трансформирующие их. При этом аномалия от интересующего интерпретатора геологического тела является полезной, все остальные аномалии являются мешающими, или помехами. В результате преобразования или трансформации полей можно решать несколько частных задач. Например, получение полезной аномалии в наиболее «чистом» виде – очищенной от влияния других мешающих факторов с сохранением основных ее параметров (формы, амплитуды, размерности и т.д.). Эта задача является задачей выделения аномалий. В некоторых случаях можно поставить задачу выделения не самой исходной аномалии, а ее производных (вертикальной или горизонтальной).

Другая задача заключается в преобразовании или изменении исходного поля таким образом, чтобы подчеркнуть или усилить в нем аномалии от отдельных интересующих интерпретатора геологических объектов. При решении этой задачи наблюденное поле изменяется или «искажается», но таким образом, что в суммарном поле на фоне мешающих аномалий подчеркиваются полезные аномалии. При этом, безусловно, могут меняться форма, амплитуда и размерность полезной аномалии. С этой задачей связана и задача обнаружения аномалии, которая ставится как задача обнаружения наличия полезного сигнала в суммарном поле и в определении его местонахождения на оси x для функций одной переменной или на плоскости xoy для функций двух переменных. Обычно задача обнаружения аномалии ставится в

случаях, когда аномалия по своей интенсивности соизмерима с уровнем помех.

Таким образом, в результате трансформации подавляются мешающие аномалии и наиболее четко подчеркиваются полезные аномалии. Операцию трансформирования можно записать в виде некоторого оператора A, который преобразует суммарную аномалию в некоторую другую, удовлетворяющую условиям поставленной задачи:

$$f_т(x, y) = A\{f(x, y)\},$$

где $f(x, y)$ – исходная суммарная аномалия, заданная на плоскости $z = 0$; $f_т(x, y)$ – аномалия, полученная в результате трансформации поля, т.е. в результате действия оператора преобразования поля A. Это равенство можно записать и в виде интеграла свертки

$$f_т(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) P(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \qquad (1)$$

где $P(x, y)$ – ядро преобразования или так называемая переходная характеристика трансформации.

Для двумерных гравитационных и магнитных аномалий $f(x)$, заданных на прямой $z = 0$ (ось x) эти выражения можно записать в виде

$$f_т(x) = A\{f(x)\},$$

$$f_т(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P(x - \xi) d\xi. \qquad (2)$$

В виде равенств (1) и (2) можно записать линейные преобразования гравитационных и магнитных аномалий.

Если функции $f(x)$, $f(x, y)$, $P(x)$ и $P(x, y)$ такие, что имеют преобразования Фурье и спектрами их являются функции $S(\omega)$, $S(u, v)$, $\Phi(\omega)$ и $\Phi(u, v)$ соответственно, то на основании теоремы о спектре функции, определяемой интегралом свертки, для равенств (1) и (2) будут справедливы выражения

$$S_т(u, v) = S(u, v)\, \Phi(u, v),$$

$$S_т(\omega) = S(\omega)\, \Phi(\omega),$$

где $S_т(u, v)$ и $S_т(\omega)$ – спектры трансформированных аномалий $f(x, y)$ и $f(x)$. Здесь функции $\Phi(u, v)$ и $\Phi(\omega)$, как было отмечено выше, называются частотными характеристиками трансформа-

ций, и свойства трансформаций определяются как раз этими функциями. Из этих равенств найдем

$$\Phi(u, v) = S_\tau(u, v)/S(u, v),$$

$$\Phi(\omega) = S_\tau(\omega)/S(\omega).$$

С использованием частотных характеристик трансформаций выражения (1), (2) можно переписать в следующем виде

$$f_\tau(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(u,v)\,\Phi(u,v)\,\exp[i(ux + vy)]\,du\,dv;$$

в осесимметричном случае

$$f_\tau(r) = \int_0^\infty \rho\, S(\rho)\, J_0(\rho r)\, d\rho,$$

$$f_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,\Phi(\omega)\,\exp(i\omega x)\,d\omega.$$

Частотные характеристики самых простейших операций – операций смещения аномалии вдоль прямой (по оси x) на расстояние ξ и на плоскости $z = 0$ вдоль осей x и y на расстояния ξ и η, определяются равенствами

$$\Phi(\omega) = \exp(-i\omega\xi),$$

$$\Phi(u, v) = \exp[-i(u\xi + v\eta)];$$

в полярных координатах

$$\Phi(\rho, \theta) = \exp[-i\rho r \cos(\theta - \varphi)].$$

Частотные характеристики всех других трансформаций на плоскости $z = 0$ можно определить из этих равенств, подвергая их тем же операциям, что и трансформируемое поле.

В общем случае, когда $z \neq 0$, нужно пользоваться выражениями

$$\Phi(\omega) = \exp(-i\omega\xi)\exp(-\omega H),$$

$$\Phi(u, v) = \exp[-i(u\xi + v\eta)]\exp(-\rho H),$$

$$\Phi(\rho, \varphi) = \exp[-i\rho r \cos(\theta - \varphi)]\exp(-\rho H).$$

учитывающими смещение функции по осям координат x и y на величины ξ, η и одновременно смещение по вертикали на вели-

чину H в верхнее и нижнее полупространства. Тогда частотные характеристики всех других трансформаций гравитационных и магнитных аномалий можно получать из этих написанных выражений, подвергая их тем же трансформациям. Например, для получения частотных характеристик различных усреднений (как точных интегральных, так и дискретных) нужно соответствующим образом усреднить функцию Ф при $H = 0$. Для получения частотных характеристик высших вертикальных производных (производные по параметру) необходимо продифференцировать соответствующее число раз Ф по переменной H при $\xi = \eta = 0$. Для получения частотных характеристик высших горизонтальных производных по какому-то направлению нужно дифференцировать функцию Ф по переменным ξ, η или r при $H = 0$ соответствующее число раз, после чего необходимо приравнять значения смещений ξ и η нулю.

Если при получении частотных характеристик высших вертикальных и горизонтальных производных не положить $H = 0$, то получаются характеристики соответствующих способов вычисления производных на высоте H.

Что же касается частотных характеристик аналитического продолжения аномалий, то они получаются из выражения Ф как частотные характеристики смещений по вертикали при $\xi = \eta = 0$, только для аналитического продолжения аномалий в нижнее полупространство знак H нужно менять на обратный.

Применяя этот метод, можно получить частотные характеристики всех основных видов линейных трансформаций, применяемых на практике.

Ниже в табл. 14 даны частотные характеристики некоторых основных видов трансформаций гравитационных и магнитных аномалий. При этом, как и выше, выражения частотных характеристик с переменной ω относятся к двумерному случаю; с переменными u, v, ρ – к трехмерному. В таблице, кроме способов аналитического продолжения аномалий, все другие трансформации соответствуют плоскости $z = 0$. В ней приведены также аналитические выражения операций с полями, соответствующие той или иной трансформации, за исключением громоздких выражений.

При выводе всех выражений, соответствующих преобразованиям полей, как это принято в теории трансформаций, ось oz направлена вверх.

Следует отметить, что трансформация полей новой информации к той, которая имеется в исходном наблюденном поле, не добавляет. Трансформация полей лишь более наглядно представляет отдельные особенности полей, выделяет и подчеркивает де-

Таблица 14

Аналитическая связь трансформированных и исходных значений поля и частотные характеристики некоторых видов трансформаций

№ п/п	Вид трансформации	Операции, соответствующие трансформации и частотная характеристика трансформации
1	Усреднение аномалии вдоль профиля по двум точкам, отстоящим от начала координат на величину ξ	$f_т(x) = [f(x+\xi) + f(x-\xi)]/2$, $\Phi(\omega) = \cos(\omega\xi)$
2	Усреднение поля вдоль профиля по n равноотстоящим точкам, симметрично расположенным относительно середины профиля (Δx – расстояние между точками)	$f_т(x) = \frac{1}{n}\left\{f(x) + \sum_{k=1}^{n}[f(x+k\Delta x) + f(x-k\Delta x)]\right\}$, $\Phi(\omega) = \frac{1}{n}\frac{\sin(n\omega\Delta x/2)}{\sin(\omega\Delta x/2)}$
3	Интегральное усреднение на отрезке профиля $(-l, +l)$	$f_т(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\,d\xi$, $\Phi(\omega) = \sin(\omega l)/\omega l$
4	Вычисление вариации Андреева	$f_т(x) = f(x) - [f(x+l) + f(x-l)]/2$, $\Phi(\omega) = 1 - \cos(\omega l)$
5	Интегральное усреднение по окружности радиусом R	$f_т(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(R,\varphi)\,d\varphi$, $\Phi(\rho) = J_0(\rho R)$
6	Дискретное усреднение по n равноотстоящим точкам на окружности радиусом R	$f_т(R) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(R, k\Delta\varphi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(R, \frac{2\pi}{n}k\right)$, $\Delta\varphi = 2\pi/n$, $\Phi(\rho) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left[-i\rho R\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$
7	Трехмерный аналог способа вариаций Андреева (способ Грифина) – интегральный и дискретный варианты (R – радиус окружности усреднения, n – количество точек усреднения на окружности)	$f_т(R) = f(R) - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(R,\varphi)\,d\varphi$, $\Phi(\rho) = 1 - J_0(\rho R)$; $f_т(R) = f(R) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(R, \frac{2\pi}{n}k\right)$, $\Phi(\rho) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left[-i\rho R\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$

Продолжение табл. 14

№ п/п	Вид трансформации	Операции, соответствующие трансформации и частотная характеристика трансформации
8	Преобразования по вычислительным схемам (C_k – коэффициенты вычислительных схем, x_k и r_k – радиусы усреднения вдоль профиля по двум точкам и по окружности)	$f_т(0) = \sum_{k=0}^{n} C_k \overline{f(x_k)}$, $\overline{f(x_k)} = [f(x_k) + f(-x_k)]/2$, $\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cos(\omega x_k)$; $f_т(0) = \sum_{k=0}^{n} C_k \overline{f(r_k)}$, $\overline{f(r_k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_k, \varphi) d\varphi$, $\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{n} C_k J_0(\rho r_k)$
9	Усреднение поля по площади круга радиусом R	$f_т(0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r dr d\varphi$, $\Phi(\rho) = 2J_1(\rho R)/\rho R$
10	Аналитическое продолжение поля в верхнее полупространство на высоту H	Двумерная задача: $f_т(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{H d\xi}{(x-\xi)^2 + H^2}$, $\Phi(\omega) = \exp(-\lvert\omega\rvert h)$ Трехмерная задача: $f_т(x, y) = \frac{H}{2\pi} \times$ $\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2]^{3/2}}$, $\Phi(\rho) = \exp(-\rho H)$
11	Аналитическое продолжение поля в нижнее полупространство на глубину H (трехмерная аномалия осесимметричная)	Двумерная задача: $f_т(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lvert\omega\rvert H} \times$ $\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos\omega(x-\xi) d\xi \right] d\omega$, $\Phi(\omega) = \exp(\lvert\omega\rvert H)$ Трехмерная задача: $f_т(r) = \int_0^{\infty} \rho e^{\rho H} J_0(\rho r) \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) J_0(\rho\tau) \tau d\tau \right] d\rho$ $\Phi(\rho) = \exp(\rho H)$

Продолжение табл. 14

№ п/п	Вид трансформации	Операции, соответствующие трансформации и частотная характеристика трансформации
12	Вычисление вертикальной производной на плоскости или на профиле наблюдений	Двумерная задача: $$f_T(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi,$$ $$\Phi(\omega) = -|\omega|$$ Трехмерная задача: $$f_T(x, y) =$$ $$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y) - f(\xi, \eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi\, d\eta,$$ $$\Phi(u, v) = \Phi(\rho) = -\rho$$
13	Вычисление производных различных порядков на высоте H	Двумерная задача: $$f_T(x, z) = \partial^{n+l}(f(x))/\partial x^n \partial z^l,$$ $$\Phi(\omega) = (i\omega)^n (-|\omega|)^l \exp(-|\omega| H)$$ Трехмерная задача: $$f_T(x, y, z) = \partial^{n+m+l}[(f(x, y, z))]/\partial x^n \partial y^m \partial z^l,$$ $$\Phi(u, v) = (iu)^n (iv)^m (-\rho)^l \exp(-\rho H)$$
14	Вычисление первообразной поля по z (если $f(x) = V_z(x)$, то $f_T(x) = V$ – потенциал)	Двумерная задача: на прямой $z = 0$ $$f_T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ln|x - \xi|\, d\xi,$$ на высоте H $$\Phi(\omega) = -\frac{1}{|\omega|} \exp(-|\omega| H)$$ Трехмерная задача: на прямой $z = 0$ $$f_T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}}$$ на высоте H $$\Phi(u, v) = -\frac{1}{\rho} \exp(-\rho H)$$
15	Вычисление сопряженной гармонической функции на прямой или на плоскости $z = 0$ (если $f = V_z$, то $f_T = V_x$ и $f_T = V_y$	Двумерная задача: $$f_T(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} d\xi,$$ $$\Phi(\omega) = i \operatorname{sign} \omega$$ при определении V_x по V_z. Трехмерная задача: $$\Phi(u, v) = -iu/\rho$$ при определении V_x по V_z $$\Phi(u, v) = -iv/\rho$$ при определении V_y по V_z

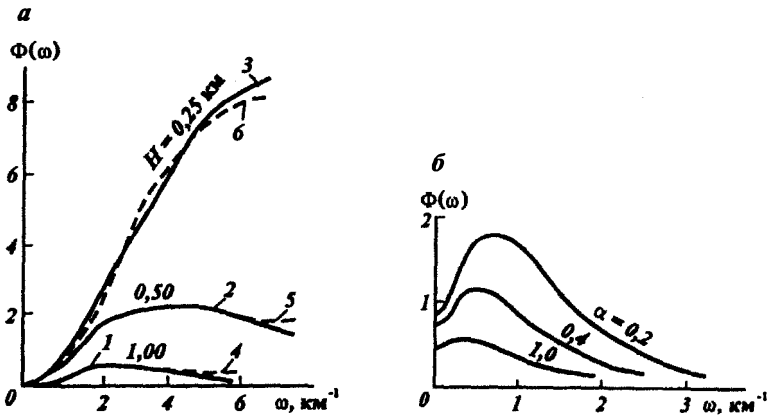


Рис. 119. Частотные характеристики некоторых видов трансформации полей: *а* – способы вычисления второй вертикальной производной на высоте *H*: *1, 2, 3* – кривые точной трансформации; *4, 5, 6* – кривые дискретных трансформаций; *б* – оптимальные фильтры выделения аномалий (α – параметр фильтра)

тали суммарных аномалий, связанные с особенностями расположения масс.

При реализации трансформаций на практике необходимо иметь в виду, что все способы трансформаций, частотные характеристики которых являются возрастающими функциями при больших значениях ω или ρ, например, способы аналитического продолжения полей в нижнее полупространство, вычисления производных полей, чувствительны к ошибкам наблюдений и могут их резко подчеркивать. Поэтому все такие способы необходимо реализовать на практике с соответствующими способами подавления высокочастотных помех. Графики изменения частотных характеристик некоторых видов трансформаций показаны на рис. 119.

Литература: [3, 6, 7, 13, 14, 16].

ФОРМУЛА СТОКСА И ИЗУЧЕНИЕ ГЕОИДА

Рассмотренные значения потенциала силы тяжести были получены на поверхности сфероида, или на поверхности некоторой идеальной Земли (идеального геоида). Реальные значения элементов поля силы тяжести, а также и реальная поверхность Земли будут, безусловно, отличаться от них. Для построения поверхности, более приближенной к поверхности реальной Земли, используется формула Стокса, полученная им в 1849 г. – одна из основных при изучении фигуры Земли. По значениям аномалий силы тяжести, заданным на поверхности Земли, формула Стокса позволяет определить отклонения геоида от более простой поверхности сфероида. Таким образом, изучение более сложной поверхности геоида сводится к определению по аномалиям силы тяжести отклонений от геометрически правильной фигуры сфероида. Поэтому поверхность сфероида в такой постановке задачи называется отсчетной поверхностью. При этом следует иметь в виду, что и отсчетная поверхность и поверхность геоида являются внешними поверхностями относительно масс Земли, что центры тяжести масс и сфероида, и геоида совпадают с началом координат и что скорости вращения обоих этих тел одинаковы.

Лемма Брунса. Представим потенциал силы тяжести реальной Земли в виде суммы двух потенциалов:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z),$$

где U – потенциал силы тяжести идеальной Земли, в данном случае нормального сфероида; T – потенциал масс, на который потенциал силы тяжести Земли отличается от потенциала сфероида, т.е. T – это часть потенциала силы тяжести реальной Земли, связанная со значениями аномалий силы тяжести на поверхности Земли. Иначе, потенциал T называется возмущающим потенциалом. Тогда уравнение $U(x, y, z) = C_1$, где C_1 – некоторая постоянная, определяющая поверхность, соответствует нормальному сфероиду, а уравнение

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) = C,$$

где C – также постоянная – уравнению геоида. При этом необходимо иметь в виду, что величина T в любой точке поверхности весьма мала по сравнению с величиной U.

Отсюда расстояние между точками P и P_1 (рис. 120)

$$\partial n = N = -T/(\partial U/\partial n) = T/\gamma,$$

где $\gamma = -\partial U/\partial n$ – нормальная производная функции U.

Из этой формулы видно, что всякое возмущение первоначального поля функцией T вызывает сдвиг его уровенных поверхностей на расстояние T/γ. Это положение определяет содержание леммы Брунса. Таким образом, для определения отклонений (расстояний N) геоида от положения нормального сфероида необходимо найти величину возмущающего потенциала T.

Изменение значений сил тяжести при переходе от точки P_1 к точке P определяется равенством

$$\Delta g = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n} T - \frac{\partial T}{\partial n}. \qquad (1)$$

Это уравнение называют также ***основным уравнением гравиметрии***. Оно и выражает связь аномалий силы тяжести с величиной возмущающего потенциала. В левой его части находится так называемая ***смешанная аномалия силы тяжести*** – смешанная из-за того, что в разности $\Delta g = g(P_1) - \gamma(P)$ первая величина относится к поверхности геоида, а вторая – к точке на отсчетной поверхности (поверхности сфероида), т.е. они относятся к разным поверхностям. В формуле (1) последний член выражает силу, развиваемую возмущающим потенциалом, а первый – поправку, учитывающую переход от сфероида к геоиду.

Для шарообразной Земли радиуса R значение

$$\Delta g = -2T/R - \partial T/\partial n.$$

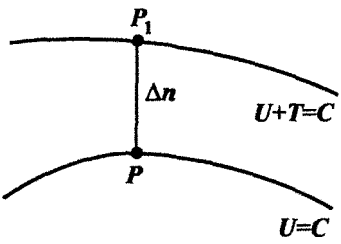


Рис. 120. Точки P и P_1 на уровенных поверхностях U и $U+T$

Это уравнение выражает граничные условия, которым должна удовлетворять функция T в точках поверхности относимости, в которых задана аномалия Δg.

Значение расстояния N можно определить через значения Δg по формуле

$$N = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int_S \Delta g \, S(\varphi) d\sum.$$

Эта формула и является ***формулой Стокса***. Она определяет отклонения геоида от сфероида по значениям аномалии силы тяжести. В ней функция

$$S(\varphi) = \operatorname{cosec}(\varphi/2) - 6 \sin(\varphi/2) + 1 - 5 \cos \varphi -$$

$$- 3 \cos \varphi \ln [\sin(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2)].$$

называется ***функцией Стокса для сферы***.

Формулу Стокса можно переписать в более удобном для практического применения виде:

$$N = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g \, F(\varphi) d\varphi dA,$$

где $(1/2) \sin \varphi \, S(\varphi) = F(\varphi)$.

Эта функция называется ***функцией Гельмерта***.

При применении этой формулы данные, наблюденные на физической поверхности Земли, необходимо привести к уровню моря или геоида. Кроме того, массы материков, выступающие над поверхностью геоида, необходимо или перенести внутрь геоида или распределить по его поверхности. Только тогда будут выполняться условия, отвечающие формуле Стокса. Полученная таким путем поверхность Земли будет уровенной поверхностью, и ее обычно называют ***регуляризованным геоидом***. Регуляризованный геоид отличается от действительного геоида на величину искажений, вызванных переносом масс, но эти искажения можно учесть. Данная формула Стокса соответствует поверхности сферы. Для эллипсоидальной уровенной поверхности обобщенная формула Стокса выведена Д.В. Загребиным с применением функций Ламэ.

Литература: [4, 13, 16].

ФОРМУЛЫ ГРИНА (ДВЕ ФОРМУЛЫ)

Пусть мы имеем две конечные и непрерывные функции координат U и V, заданные в некоторой ограниченной области пространства v и имеющие внутри этого объема конечные и непрерывные первые производные и конечные вторые производные, допускающие интегрирование. Возьмем вектор – вектор квазипотенциального поля

$$\vec{F} = U \operatorname{grad} V$$

и применим к нему формулу Остроградского. Тогда

$$\int_v [U \Delta V + (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V)] dv = \int_S U \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Эта формула является так называемой предварительной или первой формулой Грина. Левая ее часть не меняется от перестановки функций U и V. Поэтому, меняя местами U и V (т.е. для другого квазипотенциального поля $\vec{F} = V \operatorname{grad} U$), получим

$$\int_v [V \Delta U + (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V)] dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Из последних равенств, отнимая из первого второе, окончательно найдем

$$\int_v (U \Delta V - V \Delta U) dv = \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS.$$

Эта формула является второй формулой Грина. Если в ней взамен внешней нормали использовать внутреннюю, то в формуле изменится знак правой части.

В частном случае при $U = 1$ эта формула дает

$$\int_v \Delta V \, dv = \int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Рассмотрим несколько следствий этой формулы.

1. Пусть V – потенциал притяжения объемных масс. Тогда для точек области v, в которых находятся массы, согласно уравнению Пуассона,

$$\Delta V = -4\pi G\sigma.$$

Подставляя это значение ΔV, найдем

$$4\pi Gm = -\int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS,$$

где $m = \int_v \sigma dv$. Таким образом, если суммировать по всей поверхности S тела значения силы притяжения $-\frac{\partial V}{\partial n} = g$, то можно определить массу тела

$$m = \frac{1}{4\pi G} \int_S g dS.$$

2. Пусть $\Delta V = 0$, т.е. функция V является гармонической, что имеет место для потенциала притяжения в точках пространства вне масс. Тогда получим

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0,$$

т.е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности S равен нулю.

Литература: [3, 4, 6, 14, 15].

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

Фундаментальная формула Грина получается из его второй формулы при значениях функции U или V, равных $1/r$, где r – расстояние элементов объема и поверхности от точки P, в которой рассматривается значение функции U (рис. 121). Примем, что $V = 1/r$.

В этом случае получим

$$-\int_v \frac{1}{r}\Delta U\,dv + \int_S \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS - \int_S U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ 2\pi U(P), & P \in S, \\ 4\pi U(P), & P \in v. \end{cases} \qquad (1)$$

Эта формула называется ***фундаментальной формулой Грина***. Первая строка этой формулы позволяет определить значение потенциала U в точках области v_1, внешней по отношению к v. Вторая строка дает значение потенциала в точках P на поверхности S и третья строка определяет выражение потенциала U в любой внутренней точке P области v.

В фундаментальной формуле Грина интеграл

$$\int_v \frac{1}{r}\Delta U\,dv$$

является потенциалом притяжения объемных масс, если их плотность в каждой точке M объема v равна $\Delta U(M)$; интеграл

$$\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS$$

является потенциалом притяжения простого слоя, если величина $\partial U/\partial n$ равна плотности распределения масс на поверхности S (поверхностная плотность).

Интеграл

$$\int_S U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

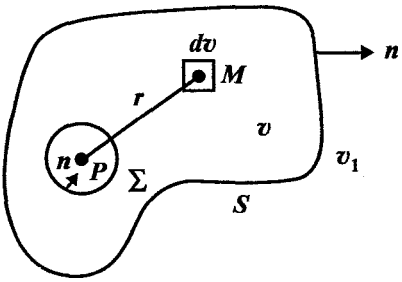


Рис. 121. Расположение точек M и P при выводе фундаментальной формулы Грина для случая внутренней точки

является потенциалом притяжения двойного слоя, момент которого в каждой точке M и на поверхности S равен U. Таким образом, в левой части фундаментальной формулы Грина находится сумма трех видов потенциалов притяжения – объемных масс, простого слоя и двойного слоя.

Рассмотрим частный случай формулы (1), когда $U = 1$. В этом случае из нее найдем

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ -2\pi, & P \in S, \\ -4\pi, & P \in v. \end{cases} \qquad (2)$$

В левой части этого равенства находится интеграл от нормальной производной функции $1/r$ по замкнутой поверхности. В зависимости от того, где находится точка P, он равен 0, -2π и -4π. Формула (2) является ***формулой Гаусса***. Подынтегральное выражение этой формулы имеет простое геометрическое значение. Оно определяет величину элементарного телесного угла или угла видимости элемента поверхности dS из точки P. Поэтому равенство (2) определяет величину полного телесного угла или угла видимости и является интегральной формой записи величины этого угла.

Литература: [4, 6, 12, 14, 16].

УРАВНЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ЗНАЧЕНИЯМИ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть задано некоторое тело объема v, однородное по плотности и однородно намагниченное (вектор J в каждой точке тела M имеет одно и то же направление и постоянную величину). Связь между значениями гравитационного и магнитного потенциалов определяется выражением

$$U(P) = \frac{J}{G\sigma}\frac{\partial}{\partial l}\left(G\int_v \sigma\frac{\partial v}{r}\right) = \frac{J}{G\sigma}\frac{\partial V}{\partial l}, \qquad (1)$$

где

$$V = G\int_v \sigma\frac{\partial v}{r}$$

является гравитационным потенциалом притяжения объемных масс. Таким образом, магнитный потенциал однородного по плотности и однородно намагниченного тела равен произведению отношения $J/G\sigma$ на производную гравитационного потенциала тела, полученную по направлению вектора намагниченности. Данным равенством можно пользоваться при решении различных задач магниторазведки, так как оно позволяет находить магнитный потенциал однородно намагниченного тела, если известен его гравитационный потенциал (при постоянной плотности этого тела).

Перепишем формулу (1) через производные гравитационного потенциала по осям координат x, y и z. По правилу дифференцирования сложной функции

$$U(P) = \frac{J}{G\sigma}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dl}\right) =$$

$$= \frac{J}{G\sigma}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(l,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(l,y) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(l,z)\right].$$

Так как направления $\vec{l}$ и $\vec{J}$ совпадают, то

$$U(P) = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_x + J_y V_y + J_z V_z), \qquad (2)$$

где $V_x = \partial V/\partial x$; $V_y = \partial V/\partial y$; $V_z = \partial V/\partial z$ – производные потенциала V по переменным x, y, z; J_x, J_y, J_z – проекции вектора $\vec{J}$ на оси координат:

$$J_x = |\vec{J}|\cos(J,x), \quad J_y = |\vec{J}|\cos(J,y), \quad J_z = |\vec{J}|\cos(J,z).$$

Формулы (1), (2), связывающие гравитационный и магнитный потенциал тела, являются уравнениями Пуассона и широко применяются при решении различных задач гравиразведки и магниторазведки.

Запишем теперь выражения, определяющие значения проекций силы магнитного поля $\vec{T}$ (напряженности поля) по направлениям осей координат. Так как

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial x}\vec{k},$$

используя равенство (2), найдем

$$T_x = X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_{xx} + J_y V_{xy} + J_z V_{xz}),$$

$$T_y = Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_{xy} + J_y V_{yy} + J_z V_{yz}),$$

$$T_z = Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_{xz} + J_y V_{yz} + J_z V_{zz}).$$

В случае двумерных гравитационных и магнитных аномалий при $J_y = 0$, $V_y = 0$ (равны нулю и все значения производных от V, в индексы которых входят y) из приведенных равенств, начиная с формулы (2) включительно, получим

$$U(P) = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_x + J_z V_z),$$

$$\vec{T} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

$$T_x = H = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_{xx} + J_y V_{xz}), \quad T_z = Z = \frac{1}{G\sigma}(J_x V_{xz} + J_z V_{zz}).$$

В приведенных формулах H – горизонтальная составляющая магнитного поля, Z – вертикальная составляющая. Для наиболее применяемого на практике случая вертикального намагничивания ($J_x = J_y = 0, J_z = J$ – трехмерные аномалии) найдем

$$U = \frac{1}{G\sigma} J V_z, \quad T_x = X = \frac{J}{G\sigma} V_{xz},$$

$$T_y = Y = \frac{J}{G\sigma} V_{yz}, \quad T_z = Z = \frac{J}{G\sigma} V_{zz}.$$

Для двумерных аномалий при вертикальном намагничивании будут справедливы эти же формулы, за исключением того, что проекция $T_y = 0$.

Литература: [5, 7, 11, 14, 16].

УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Изучение векторного поля $\vec{F}$ можно свести к изучению полей его скалярных компонент. Поэтому поведение поля $\vec{F}$ может быть определено тремя градиентами скаляров F_x, F_y, F_z или девятью производными от этих скаляров по трем направлениям x, y и z. Однако обычно векторное поле $\vec{F}$ характеризуют двумя объемными, или пространственными, производными – дивергенцией и ротором, которые выражаются через эти девять производных.

Уравнениями поля служат уравнения системы, описывающей поле (оно определяется одновременно и дивергенцией, и ротором):

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{A},$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = B,$$

где $\vec{A}$ – вектор; B – скаляр, являющиеся функциями точки пространства, в котором существует поле $\vec{F}$.

Любое векторное поле, обращающее эти уравнения в тождества, при заданных функциях A и B является решением этой системы уравнений. Здесь предполагается, что в области задания векторная функция $\vec{F}$ непрерывно дифференцируемая, т.е. имеет там непрерывные частные производные. Эта система упрощается для области v, в которой поле $\vec{F}$ не имеет вихрей, или источников. При отсутствии вихрей, т.е. когда поле $\vec{F}$ потенциальное,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0, \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = B.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, должна существовать, как было рассмотрено выше, такая скалярная функция U, для которой

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U,$$

причем

$$\partial U/\partial x = F_x, \quad \partial U/\partial y = F_y, \quad \partial U/\partial z = F_z,$$

т.е. проекция вектора $\vec{F}$ на оси координат равны производным функции U по направлениям этих же осей. Эта функция $\vec{F}$ и есть решение системы уравнений (1). Так как $\operatorname{div}\vec{F} = B$, то

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U,$$

т.е. решение сводится к решению уравнения

$$\Delta U = B.$$

Это уравнение является уравнением Пуассона, широко применяемым при изучении гравитационных и магнитных полей.

Наиболее простой вид имеет поле, в котором отсутствуют и вихри, и источники. В этом случае, т.е. когда поле и потенциальное, и соленоидальное,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0. \qquad (2)$$

Для такого поля из равенства (1) при $B = 0$ найдем

$$\Delta U = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = 0.$$

Это и есть уравнение Лапласа.

Уравнения Пуассона и Лапласа имеют важное значение в теории потенциала и широко применяются при изучении элементов гравитационного и магнитного полей. Уравнения Пуассона для случая потенциалов силы притяжения имеет вид

$$\Delta U = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = -4\pi G\sigma,$$

где σ – плотность распределения масс. Оно описывает скалярные поля потенциалов в точках областей, занятых массами, т.е. внутри масс. В общем случае согласно системе уравнений (1) и ее решению можно утверждать: если поле $\vec{F}$ удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot} F = 0$, $\operatorname{div} F = B$, то оно однозначно определяется одной функцией U, такой, что $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, а величина $\Delta U = B$ (в нашем случае $B = -4\pi G\sigma$).

В области отсутствия масс потенциал силы притяжения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = 0.$$

Это уравнение – частный случай уравнения Пуассона и получается из него при $\sigma = 0$.

Функции U, заданные в некоторой области пространства v и удовлетворяющие в ней уравнению Лапласа (при условии существования и непрерывности первых и вторых производных функции U по осям координат), называются ***гармоническими*** в этой области. Гармоническими называются и поля, удовлетворяющие условиям (2), т.е. являющиеся одновременно и потенциальными, и трубчатыми.

В случае двумерных аномалий, когда массы распределены с постоянной плотностью параллельно оси y (плоские поля), уравнения Пуассона и Лапласа примут вид

$$\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = -4\pi G\sigma,$$

$$\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = 0.$$

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Уравнение Лапласа является основным в теории гармонических функций. При рассмотрении свойств этих функций и при решении различных других задач теории потенциала применительно к гармоническим функциям приходится выражать уравнение Лапласа в различных координатах. Выражая его в цилиндрических координатах, т.е. определяя значения производных $\partial^2 V/\partial x^2$, $\partial^2 V/\partial y^2$, $\partial^2 V/\partial z^2$, где V – некоторая заданная потенциальная функция, через цилиндрические координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Перепишем это уравнение в несколько ином виде. Положим $V = R\Phi N$, где R, Φ и N соответственно являются функциями только координат ρ, φ, z. Подставляя это значение V в уравнение и деля его на $R\Phi N/\rho^2$, получим

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\rho^2}{N}\frac{d^2N}{dz^2} = 0.$$

Обозначим

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -n^2, \quad \frac{1}{N}\frac{d^2N}{dz^2} = \alpha^2.$$

Тогда

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + (\alpha^2\rho^2 - n^2)R = 0.$$

После подставки $\gamma = \alpha\rho$ окончательно получим

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial R}{\partial \gamma} + \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2}\right)R = 0.$$

Это дифференциальное уравнение является ***уравнением Бесселя***, а функции, которые являются решением этого уравнения, называются ***функциями Бесселя***.

Дифференциальное уравнение Бесселя является линейным уравнением второго порядка без правой части с непостоянными коэффициентами. Решение этого уравнения приводит к Бесселевым функциям, которые широко применяются при решении различных задач гравиразведки и магниторазведки, в частности, при построении вычислительных схем для различных трансформаций гравитационных и магнитных аномалий.

Аналогичным образом уравнение Лапласа можно выразить и через сферические координаты $x = \rho \sin\theta \cos\lambda$, $y = \rho \sin\theta \sin\lambda$, $z = \rho \cos\theta$. В этом случае получим

$$\Delta V = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}\right)\right] = 0.$$

Решение этого уравнения приводит к ***сферическим функциям***, применяемым при представлении выражений гравитационного и магнитного потенциалов в виде рядов сферических функций.

Таким образом, решение уравнения Лапласа, выраженного в цилиндрических координатах, приводит к функциям Бесселя и к рядам бесселевых функций, в сферических координатах – к сферическим функциям и к их рядам.

Литература: [3, 4, 6, 14, 16, 20].

УРОВЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть в точках M некоторой области v задано скалярное поле $V = V(M)$. Уровенной поверхностью или поверхностью уровня скалярной функции V называют поверхность S, во всех точках которой величина V имеет одно и то же постоянное значение. Соединяя в области v все точки с некоторым значением $V = C$, получим уровенную поверхность. Через каждую точку (не являющуюся особой или экстремальной) можно провести уровенную поверхность, положение которой определяется однозначно. Придавая постоянной C различные численные значения, получим семейство уровенных поверхностей (рис. 122)

$$V(M) = C = \text{cosnt}.$$

Семейством уровенных поверхностей часто пользуются для изображения поля V. С этой целью их проводят друг от друга через одинаковый интервал значений V (***сечение уровенных поверхностей***).

Часть пространства, заключенную между двумя уровенными поверхностями, называют ***уровенным слоем***. Расстояние по нормали между двумя уровенными поверхностями называют ***толщиной уровенного слоя***.

Максимальное значение производной скалярного поля будет наблюдаться только по направлению нормали. Обозначим: $\partial V/\partial n = a$, где n – нормаль к уровенной поверхности. Переходя к конечным пределам, напишем

$$\Delta V/\Delta n = a.$$

Отсюда

$$\Delta n = \Delta V/a.$$

Из этого равенства видно, что при $\Delta V = \text{cosnt}$ значение Δn обратно пропорционально нормальной производной функции V. Если $\Delta V = \text{const}$ – приращение значений функции V на двух ее

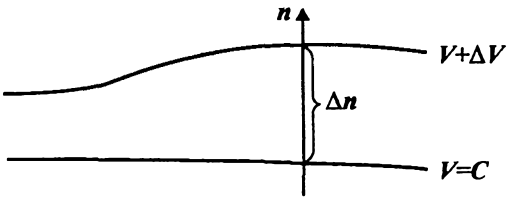


Рис. 122. Уровенные поверхности и расстояние Δn

соседних уровенных поверхностях (сечение уровенных поверхностей), то легко догадаться, что Δn – это расстояние между уровенными поверхностями, взятое по направлению нормали (толщина уровенного слоя). Поэтому при постоянном значении ΔV расстояние между уровенными поверхностями скалярного поля тем меньше, чем больше значение нормальной производной функции V в данной точке M.

Литература: [3, 4, 6, 14, 15].

ШИРИНА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ АНОМАЛИЙ И ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Из основных параметров энергетических спектров используются наиболее применяемые на практике, а именно, максимальное значение Q_{max}, горизонтальную координату максимального значения ω_{max} или ρ_{max} и ширину энергетического спектра аномалий P. Величины Q_{max} и ω_{max} или ρ_{max} не требуют специального рассмотрения, необходимо только рассмотреть формулы для определения параметра P, который имеет глубокий физический смысл и тесно связан с формой тела, для случая знакопеременных аномалий.

Протяженность аномалии по направлению оси x или y или ее ширина, которая зависит как от глубины залегания аномальных тел, так и от их горизонтальных и вертикальных размеров, определяется радиусом корреляции аномалий.

Для того, чтобы сделать правильные выводы, примем один и тот же критерий определения ширины аномалий и соответствующих им спектров, а именно, хорошо изученный и исследованный критерий определения радиуса корреляции. Перенесем его и на случаи спектров аномалий. Так как радиус корреляции определяют из значений автокорреляционных функций, то ширину спектров будем определять из данных связанных с ними энергетических спектров аномалий. Это позволит применить получаемые формулы как к детерминированным, так и к случайным аномалиям. Тогда

$$P = \frac{1}{2Q_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)\, d\omega = \int_{0}^{\infty} Q(\omega)_{н}\, d\omega,$$

где $Q(\omega)_{н} = Q(\omega)/Q_{max}$ – нормированный энергетический спектр аномалии. Из этой формулы видно, что ширину энергетического спектра аномалии или параметр P определяют как половину основания прямоугольника, высота которого равна Q_{max}, а площадь – площади, заключенной между нормированной функцией энергетического спектра и осью ω. Параметр P численно равен

половине площади, заключенной между кривой нормированного энергетического спектра и осью ω. Аналогично для трехмерной задачи ширину энергетического спектра можно определить из равенства

$$P_1 P_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty [Q(u,v)/Q_{max}]dudv,$$

где индексы *1* и *2* указывают на случаи, когда P отсчитывают по направлениям осей u и v соответственно.

Для аномалий, симметричных относительно вертикальной оси, получим

$$P^2 = (2/Q_{max})\int_0^\infty \rho Q(\rho)d\rho = 2\int_0^\infty \rho Q(\rho)_н\, d\rho.$$

Из этой формулы видно, что в осесимметричном случае величина P^2 равна квадрату радиуса вертикального кругового цилиндра с высотой Q_{max} и объемом, равным объему, заключенному между поверхностью $Q(\rho)$ и плоскостью u, v.

Определим связь между значениями ширины энергетического спектра P и радиусом корреляции аномалий r. Прежде всего отметим, что чем уже автокорреляционная функция (чем меньше радиус корреляции), тем шире энергетический спектр (тем больше ширина энергетического спектра аномалии) и наоборот. Это положение следует из свойств преобразований Фурье. Например, если $Q(\omega)$ – это энергетический спектр аномалии $f(x)$ (спектр функции $B(\tau)$), то энергетический спектр аномалии $f(ax)$ (спектр функции $B(a\,\tau)$)

$$Q_1(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty B(a\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau = \frac{1}{a}Q\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Из этого равенства видно, что если ширина автокорреляционной функции уменьшена в a раз, то в столько же раз возрастает ширина энергетического спектра и наоборот.

Рассмотрим вначале случай аномалий одного знака. Для этих аномалий

$$P = \pi B(0)/2\int_0^\infty B(\tau)d\tau.$$

С применением формулы, определяющей радиус корреляции r, получим

$$P = \pi/2r;\quad Pr = \pi/2.$$

Отсюда следует, что между параметрами P и r существует тесная связь. Из этого равенства можно определить P, зная r, и наоборот. Кроме того, произведение P на r для аномалий одного знака является постоянной величиной, и она равна $\pi/2$. Отсюда также видно, что если изменить аномалию таким образом, что ее параметр r увеличится в a раз, то параметр P уменьшится в a раз.

Для трехмерных аномалии одного знака

$$P^2 = 2B(0)/\int_0^\infty \tau B(\tau)d\tau.$$

С учетом равенств, определяющих радиус корреляции, получим

$$P_1P_2 = \pi^2/4r_1r_2 \quad \text{или} \quad P_1P_2r_1r_2 = \pi^2/4,$$

$$P^2r^2 = 4 \quad \text{или} \quad Pr = 2.$$

Из этих выражений видно, что и в данном случае для аномалий одного знака произведение параметров P и r является постоянной величиной и не зависит от формы тел.

Рассмотрим теперь случаи знакопеременных аномалий (первые производные от аномалий силы тяжести или магнитные аномалии). Для таких аномалий запишем сразу произведение P на r:

$$Pr = \sqrt{\pi/2}\int_0^\infty |B(\tau)|d\tau/Q_{max} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty |B(\tau)|d\tau/\int_0^\infty B(\tau)\cos(\omega_{max}\tau)d\tau. \qquad (1)$$

Из этой формулы видно, что из-за умножения на значения косинуса интеграл в знаменателе меньше, чем интеграл в числителе. Поэтому получим

$$Pr \geq \pi/2.$$

В общем случае

$$\pi/2 \leq Pr \leq \pi. \qquad (2)$$

Для знакопеременных аномалий произведение Pr является переменной величиной и пределы его изменения определяются равенством (2).

Для трехмерных осесимметричных аномалий

$$Q_{max} = \int_0^\infty \tau B(\tau) J_0(\rho\tau) d\tau,$$

а вместо равенства (2) справедливо следующее [16]:

$$2 \le Pr \le \sqrt{8}.$$

В этом неравенстве значение $\sqrt{8} = 2{,}83$ соответствует аномалии первой производной силы тяжести от точечной ассы. Более подробный анализ формулы (1) показывает, что предельные случаи неравенства (2) $\pi/2$ и π имеют место соответственно при $l \to \infty$ и $\Delta h \to \infty$ для аномалий первой производной силы тяжести от бесконечных материальных горизонтальной и вертикальной полос (здесь l – половина ширины, $\Delta h = h_2 - h_1$ – вертикальный размер полос). При $l \to 0$ и $\Delta h \to 0$ для этих аномальных тел величина $Pr = 2{,}40$ имеет такое же значение, что и для случая аномалии первой производной силы тяжести от бесконечной горизонтальной материальной линии.

Литература: [13, 14, 16].

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Как известно, обратная задача гравиразведки и магниторазведки решается неоднозначно.

Единственность решения обратной задачи гравиразведки или магниторазведки – это возможность однозначного нахождения источников по заданному элементу гравитационного или магнитного поля при определенных допущениях об этих источниках.

Эквивалентными называются распределения масс с одинаковыми внешними полями. Решение обратной задачи гравиразведки и магниторазведки является неоднозначным как раз из-за наличия таких эквивалентных по создаваемому полю распределений масс.

Существуют различные множества эквивалентных аномальных тел или эквивалентных семейных тел. Среди них можно выделить однопараметрические и двухпараметрические эквивалентные семейства, бывают и более сложные случаи. Однопараметрические эквивалентные семейства – это семейства, для которых задание только одного параметра (например, плотности) делает решение обратной задачи единственным. Примерами однопараметрических эквивалентных семейств являются бесконечное множество шаров или бесконечных горизонтальных круговых цилиндров с различной избыточной плотностью, но равными избыточными массами. Как известно, они создают в трехмерном и двумерном случаях одинаковые внешние поля. К однопараметрическим эквивалентным семействам также относятся семейства софокусных эллипсоидов и коаксиальных цилиндров и множество других. Примером двухпараметрических эквивалентных семейств, введенным В.Н. Страховым для двумерной задачи, является семейство контактных поверхностей в форме конхоиды Слюза. Это семейство обладает тем свойством, что для однозначного построения границы необходимо задавать два параметра – плотность и глубину залегания асимптоты конхоиды.

Более сложные ситуации возникают в случаях слоистых сред, состоящих из нескольких границ типа контактных поверхностей. При этом бывают и среды с такими криволинейными границами раздела, которые вообще не порождают внешние поля (значения избыточных плотностей на границах имеют разные знаки и поля от границ в сумме взаимно уничтожают друг друга). В этих случаях невозможно определить параметры сред, например, форму границ, значения избыточных плотностей на границах, число границ. Единственным условием решения задач в таких случаях является использование априорной информации. Наличие априорной информации позволяет значительно сузить пределы эквивалентности, может привести и к единственному решению. При решении обратной задачи большое значение имеют теоремы разделения полей. Они позволяют свести задачу, решаемую по суммарному полю от нескольких объектов, к решению задачи по полю от одного объекта.

Существуют несколько теорем о единственности решения обратной задачи. Основными из них для тел типа рудных являются теории П.С. Новикова и Раппопорта – Сретенского. Эти теоремы устанавливают единственность решения обратной задачи при заданных значениях избыточных плотностей соответственно для классов тел, звездных относительно заданной внутренней произвольной точки, и областей, обладающих средней плотностью. К классу звездных относительно некоторой внутренней точки тел (тела, для которых лучи, исходящие из этой точки, пересекают их поверхности только один раз) относятся призмы, уступы, шары, эллипсоиды и многие другие. Для задач типа структурных существуют также теоремы В.Н. Страхова, В.М. Новоселицкого, В.Г. Чередниченко и некоторых других авторов о единственности решения обратной задачи.

Рассмотренная выше эквивалентность характеризует так называемую теоретическую эквивалентность, от которой следует отличать еще чаще встречающуюся практическую эквивалентность. Если при теоретической эквивалентности внешние поля от разных тел совпадают абсолютно точно, то при практической эквивалентности поля могут отличаться друг от друга в дискретных точках на некоторую малую величину ε(ε – эквивалентность по В.Н. Страхову (рис. 123). Примером практической эквивалентности могут служить поле силы тяжести от бесконечной горизонтальной призмы и подобранное к нему поле от бесконечной горизонтальной материальной линии. Практическая неоднозначность решения обратной задачи, связанная с практической эквивалентностью, обусловливается погрешностями наблюдений, которыми осложнены наблюдаемые данные. В пределах величи-

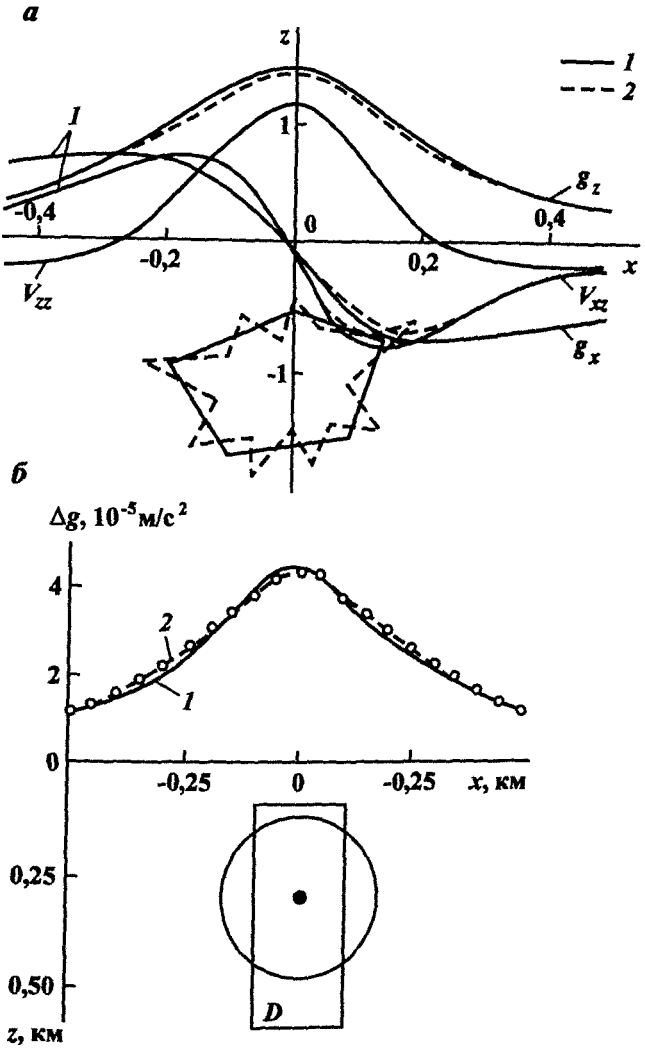


Рис. 123. Примеры эквивалентности в гравиразведке (по В.Н. Страхову): *а* – эквивалентность связана с высокочастотным возмущением контура тела постоянной плотности: *1* – контур звездного тела и различные производные гравитационного потенциала от этого тела; *2* – возмущенный контур тела и те же производные гравитационного потенциала от него; *б* – эквивалентность поля призмы *D* и поля точечного источника: *1* – поле призмы; *2* – поле точечного источника (точкой показано его положение)

ны этих погрешностей наблюдений (величины ε) одну и ту же аномалию можно интерпретировать разными телами.

Из-за наличия практической эквивалентности решение обратной задачи становится неустойчивым, т.е. малым изменениям в поле могут соответствовать большие изменения в распределении масс. Задача устойчивая, если малым изменениям в поле соответствуют малые изменения в распределении масс. Задачи математической физики делятся на корректно поставленные и некорректно поставленные (по Ж. Адамару). Задачу называют поставленной корректно, если решение: 1) существует, 2) оно единственно и 3) непрерывно зависит от входных данных. Задача называется некорректной, если нарушается хотя бы одно из указанных условий. Из этих условий следует и понятие неустойчивости задачи (это задача, в которой нарушаются второе и третье условия). Некорректные задачи можно решать только с привлечением априорной информации. При этом основой решения этих задач является сформулированный А.Н. Тихоновым общий принцип регуляризации.

Литература: [4, 6, 14, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ АНОМАЛИЙ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ

Пусть $f(x)$ – некоторая ограниченная вдоль профиля функция строго определенной формы, а $S(\omega)$ – ее трансформанта Фурье (предполагаем, что она существует) и пусть далее существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx.$$

Автокорреляционной функцией такого сигнала $f(x)$ является

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x-\tau)dx.$$

Определив преобразование Фурье такой функции $B(\tau)$, получим энергетический спектр (спектральную плотность) сигнала $f(x)$:

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau.$$

Тогда

$$B(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega.$$

Между автокорреляционной функцией $B(\tau)$ аномалии $f(x)$ и его энергетическим спектром $Q(\omega)$ существует связь, определяемая этой парой преобразований Фурье. Определяя функцию $Q(\omega)$ через значения простого спектра $S(\omega)$ аномалии $f(x)$, получим выражение

$$Q(\omega) = \sqrt{2\pi}\, S(\omega)S(-\omega) = \sqrt{2\pi}\, |S(\omega)|^2$$

(это в симметричной форме записи. В несимметричной форме записи коэффициент будет отсутствовать).

Перейдем к выражению взаимной корреляционной функции и взаимного энергетического спектра аномалий. Пусть $f_р(x)$, и $f_л(x)$ – два сигнала известной формы, а $S_р(\omega)$ и $S_л(\omega)$ – их трансформанты Фурье или спектры (предполагаем, что они существуют) и, кроме того, пусть существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_р(x) f_л(x) dx.$$

Для таких функций взаимной корреляционной функцией называется выражение вида

$$B_{рл}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_р(x) f_л(x-\tau) dx.$$

Преобразование Фурье функции $B_{рл}(\tau)$ называется взаимным энергетическим спектром (взаимной спектральной плотностью) сигналов $f_р(x)$, и $f_л(x)$:

$$Q_{рл}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_{рл}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau.$$

В этом случае

$$B_{рл}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{рл}(\omega) \exp(+i\omega\tau) d\omega,$$

$$Q_{рл}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, S_р(\omega)\, S_л(-\omega).$$

(Здесь, так же как и выше, функции $S(\omega)$ и $S(-\omega)$ являются взаимно сопряженными, т.е. $S(\omega) = S^*(\omega)$).

Нормированную автокорреляционную функцию можно определить из равенства

$$B_н(\tau) = B(\tau)/B(0).$$

Аналогичные выражения можно написать и для трехмерных аномалий. Пусть существует спектр $S(u, v)$ функции известной формы $f(x, y)$. И пусть существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y) dx dy.$$

Тогда автокорреляционная функция

$$B(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) f(x-\xi, y-\eta) dx dy.$$

Энергетический спектр

$$Q(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(\xi,\eta)\exp[-i(u\xi + v\eta)d\xi d\eta.$$

Кроме того,

$$B(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q(u,v)\exp[i(u\xi + v\eta)dudv.$$

Пусть спектры функций $f_р(x, y)$, $f_л(x, y)$ будут равны соответственно $S(u, v)$ и $S(u, v)$. Тогда при условии существования интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_р(x,y)f_л(x,y)dxdy.$$

для определения взаимных корреляционных функций и энергетического спектра получим следующие равенства:

$$B_{рл}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_р(x,y)f_л(x-\xi, y-\eta)dxdy,$$

$$Q_{рл}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{рл}(\xi,\eta)\exp[-i(u\xi + v\eta)d\xi d\eta,$$

$$B_{рл}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_{рл}(u,v)\exp[i(u\xi + v\eta)dudv.$$

$$Q(u, v) = 2\pi S(u, v)S(-u, -v) = 2\pi|S(u, v)|^2,$$

$$Q_{рл}(u, v) = 2\pi S_р(u, v)S_л(-u, -v).$$

Нормированная автокорреляционная функция

$$B_н(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)/B(0).$$

Для осесимметричных аномалий, т.е. когда функция $f(x, y)$ зависит только от переменной $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, соответственно получим

$$Q(\rho) = \int_0^{\infty} \tau B(\tau)J_0(\rho\tau)d\tau,$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \rho Q(\rho)J_0(\rho\tau)d\rho,$$

$$Q(\rho) = 2\pi\,|S(\rho)|^2.$$

Основные энергетические характеристики аномалий от применяемых на практике модельных тел и случайных гравитационных и магнитных аномалий – выражения их энергетических спектров и автокорреляционных функций приведены в работе [16].

Ниже приведем лишь выражения энергетических характеристик аномалий для наиболее применяемых на практике элементарных тел. В формулах n – порядок производной (горизонтальной или вертикальной); τ_0 и ω_{max} или ρ_{max} – горизонтальные координаты точки нуля автокорреляционной функции и максимального значения энергетического спектра при $n = 1$, r и r' – радиусы корреляции аномалий соответственно при $n = 0$ и $n = 1$, h – глубина залегания источника.

Бесконечная горизонтальная материальная линия, бесконечная линия полюсов или однополюсная линия (аномалия Z при $G\lambda = m$)

$$Q(\omega) = \sqrt{2\pi}\,2\pi(G\lambda)^2\omega^{2n}\exp(-2|\omega|h),$$

$n = 0$ (аномалия $V_z(x)$):

$$B_н(\tau) = 4h^2/(\tau^2 + 4h^2),$$

$$B(0) = \pi(2G\lambda)^2/2h;$$

$n = 1$:

$$B_н(\tau) = 16h^4/(4h^2 - 3\tau^2)/(4h^2 + \tau^2)^3,$$

$$B(0) = \pi(G\lambda)^2/h^3,$$

$$\tau_0 = 2h/\sqrt{3}; \quad \omega_{max} = \frac{1}{h}; \quad r = \pi h; \quad r' = 1{,}30h.$$

Точечная масса или шар массы M, магнитный точечный полюс (аномалия Z при $GM = m_2$)

$$Q(\rho) = 2\pi(GM)^2\rho^{2n}\exp(-2\rho h),$$

$n = 0$:

$$B_н(\tau) = 8h^3/[(2h)^2 + \tau^2]^{3/2};$$

$$B(0) = 2\pi(GM)^2/4h^2;$$

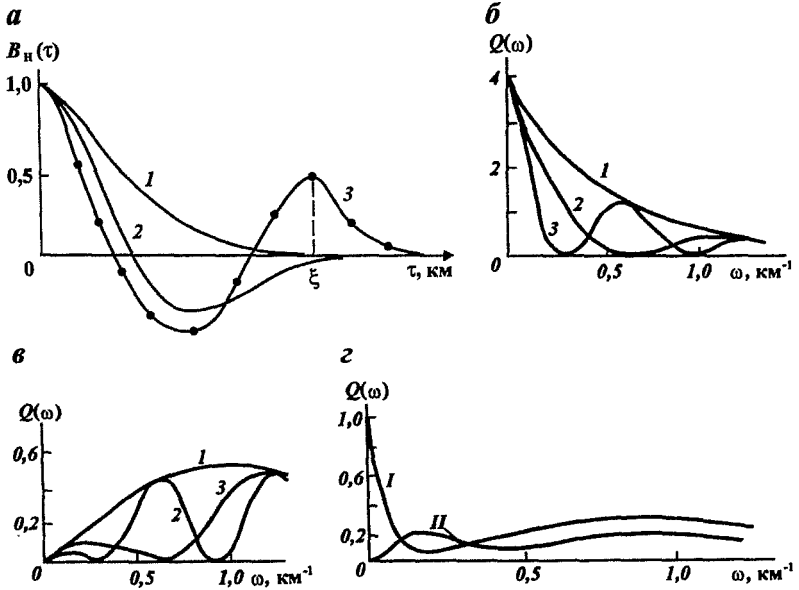


Рис. 124. Кривые энергетических спектров аномалий:

а, б – от смещенных по горизонтали источников – соответственно для исходной аномалии силы тяжести и для первой производной от исходной аномалии; *в* – от смещенных по вертикали источников: *I* – для первой производной аномалии от горизонтальных линий и полуплоскости, *II* – то же, от двух горизонтальных материальных линий; *1* – $\xi = 0$; *2* – $\xi = 5$ км; *3* – $\xi = 10$ км

$n = 1$:

$$B_н(\tau) = \frac{2(2h)^7 - 3(2h)^5\tau^2}{2[(2h)^2 + \tau^2]^{7/2}},$$

$$B(0) = 12\pi\frac{(GM)^2}{(2h)^4}, \quad \tau_0 = h\sqrt{8/3},$$

$$\rho_{max} = \frac{1}{h};$$

$$r = \sqrt{8}h; \quad r = 1{,}22h.$$

Для примера рассмотрим общий вид кривых нормированных автокорреляционных функций гравитационных и магнитных аномалий. На рис. 124, *а* приведен схематический вид кривых автокорреляционных функций аномалий. Кривая *1* соответствует положительной гравитационной аномалии, кривая *2* – знакопеременной (аномалии первых производных), кривая *3* – сумме знакопеременной и смещенной по горизонтали на расстояние ξ аномалий. Вторичный максимум кривой *3* вызван влиянием смещенной аномалии.

Вторичные максимумы могут появиться и на кривых энергетических спектров. Их появления в зависимости от наличия дополнительных источников поля, смещенных по горизонтали и по вертикали, показаны на рис. 124 (случаи *б*, *в* и *г*).

Литература: [13, 14, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АНОМАЛИЙ

Автокорреляционные функции случайных аномалий $f(x)$ и $f(x, y)$ выражаются равенствами

$$B(\tau) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(x) f(x-\tau)\, dx,$$

$$B(\xi,\eta) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,y) f(x-\xi, y-\eta)\, dx\, dy.$$

При $\xi = \eta = 0$

$$B(0) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f^2(x)\, dx,$$

$$B(0,0) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a}\frac{1}{2b} \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f^2(x,y)\, dx\, dy.$$

Как видно из последних двух равенств, $B(0)$ и $B(0, 0)$ являются средними значениями квадрата функций $f(x)$ и $f(x, y)$ соответственно по профилю и по площади.

Для простоты можно пользоваться другой формой записи этих равенств, в которой статистическое усреднение заменяется черточкой:

$$B(\tau) = \overline{f(x) f(x-\tau)},$$

$$B(\xi,\eta) = \overline{f(x,y) f(x-\xi, y-\eta)}.$$

Для двух случайных сигналов $f_р$ и $f_л$ функции взаимной корреляции для двумерного и трехмерного случаев определяются равенствами

$$B_{\text{рл}}(\tau) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f_{\text{р}}(x) f_{\text{л}}(x-\tau)\,dx,$$

$$B_{\text{рл}}(\xi,\eta) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a}\frac{1}{2b} \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f_{\text{р}}(x,y) f_{\text{л}}(x-\xi, y-\eta)\,dx\,dy.$$

Остальные равенства, при помощи которых определяют для случайных сигналов в двумерном и трехмерном случаях нормированную функцию автокорреляции, энергетический спектр, взаимный энергетический спектр, соотношения связи между функцией автокорреляции и энергетическим спектром, между функцией взаимной корреляции двух сигналов и взаимным энергетическим спектром, по своему виду такие же, как и в случае ограниченных по своим размерам аномалий, поэтому их здесь не приводим.

Если выразим энергетический спектр или спектральную плотность случайного сигнала $f(x)$ через текущий спектр его реализации, то получим следующее выражение:

$$Q(\omega) = \sqrt{2\pi} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} S_a(\omega)\, S_a(-\omega),$$

где

$$S_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) \exp(-i\omega x)\,dx$$

– текущий спектр реализации случайного процесса, т.е. такая функция, которая при $a \to \infty$ стремится к простому спектру реализации $S(\omega)$. Для взаимного энергетического спектра сигналов $f_{\text{р}}$ и $f_{\text{л}}$ получим

$$Q_{\text{рл}}(\omega) = \sqrt{2\pi} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} S_a(\omega)\, S_a(-\omega),$$

где индексы р и л в текущих спектрах указывают на случаи реализаций сигналов $f_{\text{р}}(x)$ и $f_{\text{л}}(x)$.

Аналогично в трехмерном случае справедливы равенства

$$Q(u,v) = 2\pi \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a2b} S_{ab}(u,v)\, S_a(-u,-v),$$

где

$$S_{ab}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,y) \exp[-i(ux+vy)]\,dx\,dy$$

– текущий спектр реализации случайного сигнала $f(x, y)$;

$$Q_{\text{рл}}(u,v) = 2\pi \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2a2b} S_{\text{авр}}(u,v) S_{\text{авл}}(-u,-v),$$

где $S_{\text{авр}}$ и $S_{\text{авл}}$ – текущие спектры реализаций сигналов $f_{\text{р}}(x, y)$ и $f_{\text{л}}(x, y)$.

На рис. 125 показан вид нормированных автокорреляционных функций случайной магнитной аномалии ΔT, найденных для различных высот.

На рис. 126 приведена схема районирования одной из впадин Тихого океана по автокорреляционным функциям магнитного поля.

При наличии вдоль профиля большого числа смещенных аномальных тел зависимость энергетических спектров суммарной аномалии от расстояния ξ будет слабее. Например, для случайной последовательности импульсов (отдельных аномалий) с одинаковой формой энергетического спектра $Q(\omega)$ верно равенство

$$Q_{\Sigma}(\omega) = 2a_1 Q(\omega),$$

где a_1 – величина, зависящая от среднего числа импульсов на единице длины профиля. Отсюда следует, что структура энергетического спектра случайной последовательности импульсов совпадает со структурой энергетического спектра одного отдельного импульса, т.е. форма Q_{Σ} определяется видом импульса и не зависит от расстояния между импульсами (от величины a_1 зависит только масштаб функции Q_{Σ}). Эта формула верна, когда нет взаимной корреляции между отдельными соседними импульсами. Ее можно объяснить тем, что при увеличении до бесконечности

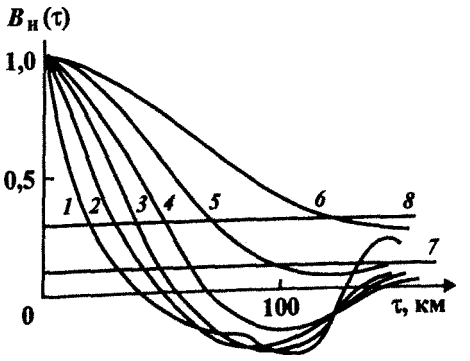


Рис. 125. Графики изменения функций $B_{\text{н}}(\tau)$ (по В.Н. Луговенко):
а – нормированные автокорреляционные функции; *1, 2, 3, 4, 5, 6* – соответственно при H = 0,5, 10, 20, 40, 60 км; *7, 8* – прямые нулевого уровня кривых *5* и *6*

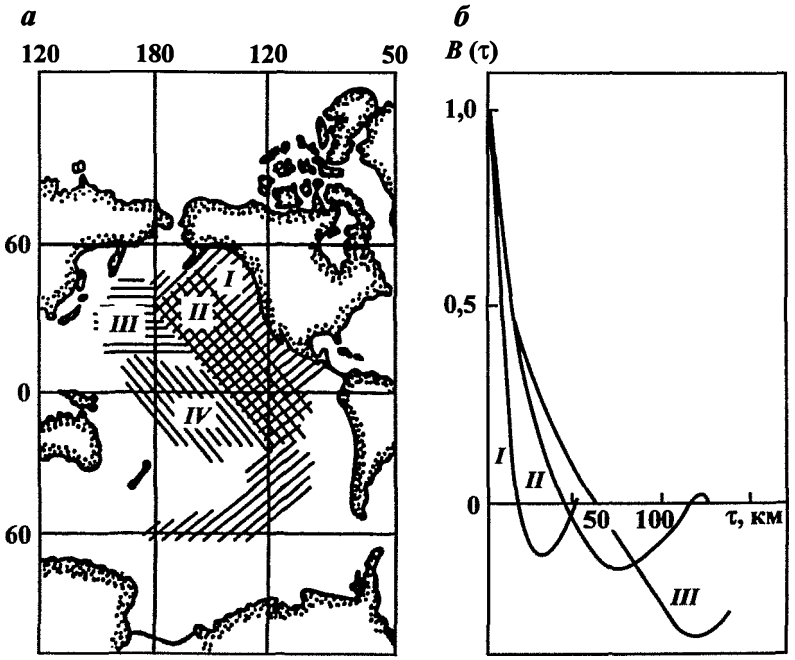


Рис. 126. Схема районирования одной из впадин Тихого океана по магнитным данным (по М.А. Эфендиевой):
а – области распространения автокорреляционных функций разных видов; *б* – графики нормированных автокорреляционных функций, соответствующие участкам *I*, *II* и *III*

количества случайно расположенных по горизонтали аномальных тел на энергетическом спектре суммарной аномалии отдельные, но уже многочисленные максимумы, сливаясь, дают одну плавную линию, совпадающую с кривой, огибающей их. Поэтому при интерпретации данных достаточно протяженных профилей в случае наличия на кривых энергетических спектров большого количества дополнительных максимумов, вызванных горизонтально расположенными источниками, можно пользоваться кривой, являющейся огибающей максимумов энергетического спектра. В таких случаях на огибающей кривой может наблюдаться один четко выраженный максимум, горизонтальная координата которого будет определяться в основном значением средней глубины залегания аномальных источников, расположенных в одном из горизонтов.

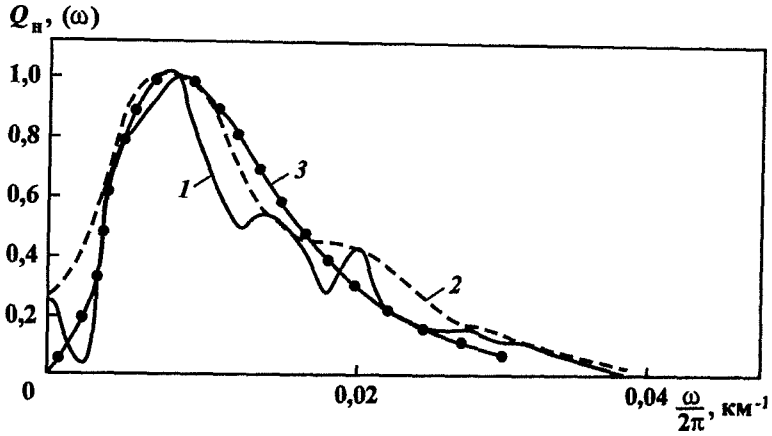


Рис. 127. Энергетический спектр магнитной аномалии (по В.Н. Луговенко). Кривые: *1* – вычисленная, *2* – огибающая максимумов, *3* – усредняющая

Пример, иллюстрирующий это положение, приведен на рис. 127. Кривая *1* на нем соответствует энергетическому спектру магнитной аномалии ΔT, взятой на профиле длиной 1800 км. Кривая *2* – огибающая максимумов, кривая *3* – усредняющая энергетический спектр суммарной аномалии (она проведена таким образом, чтобы сохранить амплитуду основного центрального максимума). Кривые *2* и *3* достаточно близки друг к другу и поэтому в реальных случаях, когда вычисляют спектры аномалий по длинным профилям, необходимо усреднять получаемые кривые энергетических спектров с сохранением положения основного максимума и брать за основу при интерпретации эту кривую.

Аналитические выражения энергетических спектров и автокорреляционных функций случайных аномалий, применяемых в гравимагниторазведке, приведены в работе [16].

Приведем ниже лишь аналитические выражения энергетических характеристик, наиболее часто применяющихся в гравимагниторазведке случайных функций.

1. $Q(\omega) = \begin{cases} A \text{ при } 0 \le \omega \le a, \\ 0 \text{ при } \omega > a, \end{cases}$

$$B(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} Aa \frac{\sin \tau a}{\tau a},$$

$$r = \tau_0 = \pi/a = \Delta x.$$

2. $Q(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} B(0) \frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2}$,

$$B(\tau) = B(0)\exp(-\beta\tau); \quad r = 1/\beta = T_c.$$

3. $Q(\omega) = \frac{B(0)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right]$,

$$B(\tau) = B(0)\exp(-\alpha|\tau|)\cos\beta\tau; \quad r = 1{,}56\Delta x.$$

4. $Q(\omega) = \frac{B(0)}{\sqrt{2\beta}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta}\right)$,

$$B(\tau) = B(0)\exp(-\beta\tau^2);$$

$$r = 0{,}5\sqrt{\pi/\beta}.$$

Содержание этих формул по пунктам сводится к следующему.

1. Значения энергетического спектра и автокорреляционной функции белого шума – случайного процесса с равномерным энергетическим спектром.

A – постоянная:

$$A = \left(\sqrt{2\pi}/2a\right)B(0),$$

где a – граничная частота. Иногда процесс называется белым шумом при $a \to \infty$, а при ограниченном значении a его называют белым шумом с ограниченной полосой. Реальное физическое значение имеет как раз этот случай.

2. Стационарный случайный процесс, характеризующийся тем, что на интервале T_k между двумя случайно расположенными точками процесс имеет случайное, но неизменное значение C_k.

Предлагается, что характер изменения сигнала внутри интервала T_k не зависит от того, что делается вне этого интервала, распределение числа нулей – пуассоново, среднее значение функции $f(x)$ по оси x равно нулю. В выражениях энергетического спектра и автокорреляционной функции средняя частота нулей функции $f(x)$

$$\beta = 1/T_{ср},$$

где $T_{ср}$ – средний интервал между соседними нулями.

3 и 4. Рассмотрены случайные аномалии, автокорреляционные функции которых имеют вид экспоненциально-косинусоидальной функции и вид квадратичной экспоненты (соответственно случаи

3 и 4). В формулах α и β – некоторые постоянные, зависящие от особенностей случайных функций. Энергетические характеристики для случаев, описанных в пунктах 2 и 4, годятся только для аппроксимации выражений автокорреляционных функций аномалий одного знака, например положительных аномалий силы тяжести; формула же для случая 3 при $\beta \neq 0$ годится для аппроксимации автокорреляционных функций знакопеременных аномалий, например аномалий производных силы тяжести, магнитных аномалий Z и H. Недостатком экспоненциальных корреляционных функций (случаи 2 и 3) является то, что их можно применить только для описания случайных процессов, у которых не существует производной. Это следует из того, что получаемое с применением энергетического спектра значение $B(0)$ для аномалий первых производных не существует, что противоречит природе гравитационных и магнитных аномалий. В то же время эти корреляционные функции можно применить для описания погрешностей наблюдений с гравиметрами, описания отдельных других сигналов, аппроксимации автокорреляционных функций наблюдаемых аномальных полей с целью формального определения параметров получаемых кривых, но они совершенно не приемлемы при совместном анализе данных исходного поля и его производных, данных гравитационного и магнитного полей.

Литература: [3, 11, 14, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ – ВЗАИМОСВЯЗЬ ИХ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОДНОГО ПОРЯДКА

Пусть $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ и $f_z(x, y)$ – производные по осям координат x, y и z от некоторой гравитационной или магнитной аномалии (от гравитационного или магнитного потенциала, от ускорения свободного падения и т.д.). Тогда, пользуясь теоремами о спектрах производной функции, после небольших преобразований получим

$$Q_{f_x}(u,v) + Q_{f_y}(u,v) = Q_{f_z}(u,v).$$

Практически наиболее важными являются случаи $f = U$ и $f = V_z$, где U – магнитный потенциал, V_z – ускорение свободного падения. Для этих случаев последнее равенство можно переписать в виде

$$Q_x(u, v) + Q_y(u, v) = Q_z(u, v),$$

$$Q_{V_{xz}}(u,v) + Q_{V_{yz}}(u,v) = Q_{V_{zz}}(u,v).$$

Из этих равенств можно определить (заменит) энергетический спектр одной из аномалий: X, Y, Z или V_{xz}, V_{yz}, V_{zz} через известные значения энергетических спектров других аномалий. Этот вывод можно перенести и на случай автокорреляционных функций:

$$B_x(\xi, \eta) + B_y(\xi, \eta) = B_z(\xi, \eta),$$

$$B_{V_{xz}}(\xi,\eta) + B_{V_{yz}}(\xi,\eta) = B_{V_{zz}}(\xi,\eta).$$

В двумерном случае (при $v = 0$, $u = \omega$, $\rho = |\omega|$, $X = H$) получим

$$Q(\omega)_H = Q(\omega)_Z;\ Q(\omega)_{V_{xx}} = Q_{V_{zz}}(\omega) = Q(\omega)_{V_{xz}};$$

$$B(\tau)_H = B(\tau)_Z;\ B(\tau)_{V_{xx}} = B(\tau)_{V_{zz}} = B(\tau)_{V_{xz}}.$$

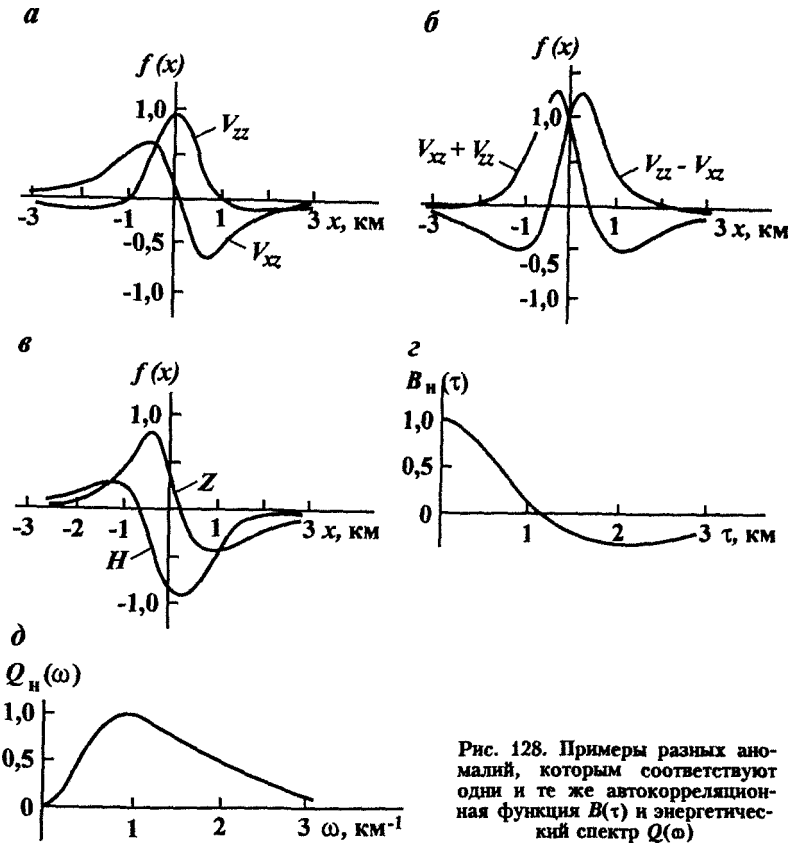


Рис. 128. Примеры разных аномалий, которым соответствуют одни и те же автокорреляционная функция $B(\tau)$ и энергетический спектр $Q(\omega)$

Из этих равенств видно, что в двумерной задаче энергетические спектры и автокорреляционные функции аномалий H, Z или гравитационных V_{xz}, V_{yz}, V_{zz} полностью взаимозаменяемы. Некоторые из них показаны на рис. 128. Это же положение верно в двумерном случае и для аномалий V_x, V_z, т.е. для горизонтальной и вертикальной производных от любой исходной одной и той же аномалии. Оно же верно и для аномалий H, Z в случае косого и вертикального намагничивания и для нормированных функций Q и B аномалий H, Z и ΔT.

Это важное свойство автокорреляционных функций и энергетических спектров. Им не обладают исходные гравитационные и магнитные аномалии, за исключением функций V_{xx}, V_{yy}, V_{zz} в

трехмерном случае и V_{xx}, и V_{zz} – в двумерном, для которых указанное свойство следует из уравнения Лапласа.

Легко показать, что энергетический спектр аномалии является всегда вещественной и четной функцией. Тогда и автокорреляционная функция аномалии будет вещественной и четной функцией.

Из изложенного материала видно, что корреляционные функции и энергетические спектры аномалий обладают рядом других важных свойств, которые при решении многих задач гравиразведки и магниторазведки делают их применение предпочтительнее, чем применение самих аномалий. Прежде всего это то, что корреляционные функции и энергетические спектры аномалий являются некоторыми интегральными характеристиками, т.е. при определении их значений (хотя бы одного) используются все точки исходной аномалии – вся кривая, что приводит к значительному уменьшению случайных погрешностей инструментального и геологического характера. Влиянию ошибок наблюдений подвергается только центральная часть кривых корреляционных функций, что делает возможным исправление их значений в этой центральной части.

Для случая автокорреляции ближайшая к поверхности особая точка получаемых функций залегает в 2 раза глубже. Этот факт расширяет области применения различных трансформаций к значениям автокорреляционной функции.

Автокорреляционные функции и энергетические спектры аномалий для производных одного порядка взаимозаменяемы (в двумерном случае равны), что позволяет по данным B или Q для аномалии одной производной определять значения рассматриваемых функций для аномалий другой производной или, если известны значения аномалий двух производных, например, Z и H, повышать точность вычисления функций B и Q. Взаимозаменяемость находит, например, широкое применение при совместной интерпретации данных гравитационного и магнитного полей.

Функции B и Q – всегда четные, и этот факт облегчает возможность получения различных соотношений, упрощает кривые и делает их более пригодными для определения формы, размеров и глубины залегания аномальных тел.

В то же время следует отметить, что из-за четности автокорреляционных функций и энергетических спектров аномалий в них пропадают полезные эффекты, связанные с асимметричностью кривых аномалий и косым намагничиванием магнитных масс. Это вызвано тем, что указанные функции формируются только значениями амплитудного спектра, влияние же фазового спектра в них отсутствует. Как раз этим и объясняется то, что

аномалии с равными амплитудными и разными фазовыми спектрами имеют одни и те же энергетические характеристики – функции B и Q. Поэтому полезное свойство четности их кривых в некоторых случаях является их недостатком. Но применение энергетических характеристик аномалий основано на использовании их полезных свойств. Полезные же эффекты асимметричности косого намагничивания аномалий четко отражаются на значениях взаимных энергетических спектров и взаимных корреляционных функций, и при необходимости их можно определить из значений этих функций.

Литература: [3, 11, 13, 14, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Энергия процесса $f(t)$, соответствующая изменению времени $t = -t_1$, до $t = t_1$, определяется интегралом

$$E = \int_{-t_1}^{t_1} f^2(t)dt.$$

Среднее значение энергии за время $2t_1$ (или средняя мощность) определяется выражением

$$E_{ср} = \frac{1}{2t_1}\int_{-t_1}^{t_1} f^2(t)dt.$$

Через эти интегралы прямо можно выразить основные статистические характеристики сигналов – автокорреляционную функцию и энергетический спектр. Поэтому эти характеристики называют еще и энергетическими характеристиками сигналов.

Аналогичные интегралы можно написать и для отрезка профиля при изменении расстояния x от $-T$ до $+T$, а именно:

$$F = \int_{-T}^{T} f^2(x)dx, \quad F_{ср} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)dx.$$

Эти интегралы выражают собой площадь под квадратом функции $f^2(x)$ и осью x при изменении x от $-T$ до $+T$ и среднюю величину этой площади (т.е. это сумма значений квадратов функции и средний квадрат функции).

По аналогии с величинами энергии E и $E_{ср}$ в гравиразведке и магниторазведке значения F и $F_{ср}$ также называют энергией функции $f(x)$ (энергия и средняя величина энергии). При этом

величину $f^2(x)$ называют мгновенной энергией, а значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx$ – полной энергией функции $f(x)$ (если, конечно, оно существует). Автокорреляционную функцию $B(\tau)$ и энергетический спектр сигнала $Q(\omega)$ однозначно можно выразить через указанные интегралы, определяющие энергии. Поэтому функции $B(\tau)$ и $Q(\omega)$ также называют энергетическими характеристиками функции $f(x)$, в нашем случае гравитационной или магнитной аномалии.

Литература: [9, 14, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ АНОМАЛИЙ ОТ КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Контактная поверхность. Часто при решении различных задач аномалия бывает неизвестной – известна только граница или контактная поверхность, которой должна соответствовать искомая аномалия. В этом случае можно определить энергетический спектр контактной поверхности и, пользуясь полученным выражением, энергетический спектр аномалии, потом через энергетический спектр можно определить и автокорреляционную функцию.

Пусть средняя глубина залегания границы раздела двухслойной границы равна h. Обозначая через z отклонения этой границы от h, при $|z| \to 0$, т.е. при максимальном значении отношения $|z|/h \ll 1$ (практически достаточно чтобы это отношение было меньше 0,3÷0,2), в первом приближении для гравитационного эффекта двухслойной среды на уровне h можно записать

$$f(\xi) = 2\pi G \Delta\sigma z(\xi),$$

где $\Delta\sigma$ – значение избыточной плотности.

Рассматривая отклонения $Z(\xi)$ как случайную функцию от ξ и предполагая, что существует интеграл (при $\Delta\sigma = \text{const}$)

$$B(\tau)_z = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} z(\xi) z(\xi - \tau) d\xi,$$

получаем

$$B(\tau)_1 = (2\pi G \Delta\sigma)^2 B(\tau)_z,$$

где $B(\tau)_1$ и $B(\tau)_z$ – соответственно автокорреляционные функции аномалии гравитационного влияния границы раздела двухслойной среды на уровне h и самой границы (контактной поверхности), рассматриваемой как функция ξ на уровне h.

Для энергетических спектров сможем аналогично записать

$$Q(\omega) = (2\pi G\Delta\sigma)^2 Q(\omega)_z,$$

С учетом частотной характеристики аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства энергетический спектр аномалии на оси x, с которой совпадает начало координат (на высоте h от средней линии контактной поверхности), запишем в виде равенства

$$Q(\omega) = (2\pi G\Delta\sigma)^2 \exp(-2|\omega|h) Q(\omega)_z.$$

Это равенство позволяет определить в первом приближении энергетический спектр аномалии от границы раздела двухслойной среды через энергетический спектр самой границы (контактной поверхности). Пользуясь интегралом Пуассона, можно получить и выражение, определяющее автокорреляционную функцию аномалии через значения автокорреляционной функции самой границы. Функцию $Q(\omega)_z$ можно аппроксимировать различными выражениями [11]. Полученные аналитические выражения энергетических спектров и автокорреляционных функций аномалий от контактной поверхности (несколько примеров) для двумерного случая приведены ниже:

1. $$Q(\omega) = \begin{cases} (2\pi G\Delta\sigma)^2 A \exp(-2|\omega|h), & 0 \le \omega \le a, \\ 0, & \omega > a, \end{cases}$$

$$B(\tau) = (2/\sqrt{2\pi})(2\pi G\Delta\sigma)^2 \frac{2Ah}{4h^2+\tau^2};$$

2. $$Q(\omega) = (2\pi G\Delta\sigma)^2 \frac{B_z(0)}{\sqrt{2\beta}} \exp\left(-2|\omega|h - \frac{\omega^2}{4\beta}\right);$$

3. $$Q(\omega) = (2\pi G\Delta\sigma)^2 b \frac{B_z(0)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \omega b/2}{\omega b/2}\right]^2 \exp -2|\omega|h;$$

4. $$Q(\omega) = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^2 (2\pi G\Delta\sigma)^2 \exp\left[-2|\omega|\left(h + \frac{r_z}{\pi}\right)\right];$$

5. $$B_H(\tau) = 4(h + r_z/\pi)^2/[\tau^2 + 4(h + r_z/\pi)^2],$$

$$Q(\rho) = 2\pi b^2 (2\pi G\Delta\sigma)^2 \exp[-2\rho(h + r_z/\sqrt{8})],$$

$$B_H(\tau) = 4(h + r_z/\sqrt{8})/[\tau^2 + 4(h + r_z/\sqrt{8})^2]^{3/2};$$

6. $$Q(\rho) = (2\pi G\Delta\sigma)^2 \frac{B(0)_z}{2\beta} \exp\left[-2\rho h - \frac{\rho^2}{4\beta}\right].$$

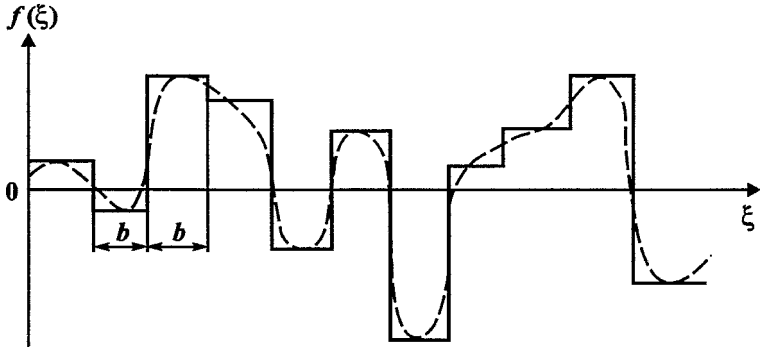


Рис. 129. Пример аппроксимации контактной поверхности прямоугольниками

Описание случайных процессов и некоторые пояснения к формулам даны ниже в тексте. При этом порядковые номера формул и пунктов в тексте совпадают друг с другом.

1. Функция $Q(\omega)_z$ заменена энергетическим спектром белого шума. В полученном выражении A – постоянная величина, имеющая размерность км^3. Автокорреляционная функция получена при $a \to \infty$ (достаточно, чтобы было $a > (3 \div 4)/h$). Этот случай является случаем взаимонезависимых амплитуд контактной поверхности (контактная поверхность в виде белого шума, вернее функция $z(\xi)$ является белым шумом).

2. Замена $Q(\omega)_z$ выражением квадратической экспоненты. Выражение для автокорреляционной функции из-за его громоздкости не приведено.

3. Это случай, когда контактную поверхность можно представить в виде ряда примыкающих друг к другу прямоугольников постоянной ширины b, амплитуда которых принимает независимые случайные значения, определяемые некоторой заданной плотностью вероятностей (рис. 129). И в данном случае из-за громоздкости выражение $B(\tau)$ не приведено.

4. Для многих реальных геологических ситуаций контактную поверхность можно аппроксимировать последовательностью взаимонезависимых функций вида (элемент контактной поверхности заменяется функцией аномалии от бесконечного горизонтального кругового цилиндра – от так называемого эквивалентного цилиндра)

$$f(x) = b[z/(x^2 + z^2)],$$

где b – некоторая постоянная, от которой зависит амплитуда элемента контактной поверхности; z – глубина залегания (от

уровня h) эквивалентного цилиндра (средняя глубина залегания эквивалентных цилиндров).

В этом случае, учитывая то, что $r_z = \pi z$ (r_z – радиус корреляции элемента контактной поверхности), получим

$$Q(\omega)_z = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^2 \exp(-2|\omega| r_z/\pi).$$

5. В трехмерном случае получим

$$Q(u, v) = (2\pi G\Delta\sigma)^2 \exp(-2\rho h) Q(u, v)_z.$$

Аналогично тому, как в двумерном случае можно заменить элемент контактной поверхности аномалией от эквивалентного бесконечного горизонтального кругового цилиндра, в трехмерном случае элемент границы можно заменить аномалией от эквивалентного шара

$$f(r) = b[z/(r^2 + z^2)^{3/2}],$$

где b – постоянная, от которой зависит амплитуда элемента контактной поверхности; z – глубина залегания (от уровня h) эквивалентного шара. Пользуясь выражением $Q(\rho)$ для аномалии от шара при $r_z = \sqrt{8}\, z$ (r_z – радиус корреляции аномалии от шара, в данном случае элемента контактной поверхности), для трехмерного случая получим

$$Q(\rho)_z = 2\pi b^2 \exp\left(-2\rho \frac{r_z}{\sqrt{8}}\right).$$

6. Замена функции $Q(\rho)_z$ энергетическим спектром, изменяющимся по закону квадратичной экспоненты. Этот случай является трехмерным аналогом пункта 2.

Рассмотрим ниже возможную связь автокорреляционных функций и энергетических спектров аномалий от случайным образом распределенных источников поля определенной формы и от одного отдельного источника.

Пусть нам задана случайная функция $f_\Sigma(x)$, образованная беспорядочным повторением отдельных импульсов $f(x)$ произвольной, но одинаковой формы на интервале T (предполагается, что функция $f(x)$ – абсолютно интегрируемая), случайным являются моменты возникновения и окончания импульсов, их амплитуда. Кроме того, считается, что импульсы взаимонезависимы.

Энергетический спектр $Q(\omega)$, одинаковый для всех отдельных аномалий $f(x - x_i)$ независимо от расстояния x_i, на котором они

возникли, предполагается заданным. Кроме того, точки x_i считаются случайными и равновероятными в заданном промежутке T. В соответствующих работах по случайным функциям показано, что в этом случае энергетический спектр таким образом заданной суммарной аномалии $Q_\Sigma(\omega)$ определяется через энергетический спектр отдельного импульса (отдельной аномалии) $Q(\omega)$ при помощи равенства

$$Q_\Sigma(\omega) = 2k\,Q(\omega),$$

где $k = k_1/T$ – число импульсов или аномалий, приходящееся на единицу длины x; k_1 – число импульсов или аномалий в интервале T.

Приведенная формула показывает, что структура выражения энергетического спектра случайной последовательности импульсов или аномалий совпадает со структурой энергетического спектра отдельных импульсов или отдельных аномалий, образующих случайный процесс $f_\Sigma(x)$. Этим объясняется связь между выражениями автокорреляционных функций и энергетических спектров бесконечных случайных процессов, вызванных множеством случайным образом расположенных аномальных тел и отдельных ограниченных вдоль профиля аномалий, соответствующих отдельным изолированным аномальным телам.

Из этой формулы видно, что если определять параметры аномальных тел по энергетическим характеристикам случайных аномалий, то получаемые при этом формы тела будут являться формой аномальных источников, влиянием которых главным образом формируется суммарная аномалия, а глубина залегания и масса будут являться некоторыми средними значениями из данных глубин залеганий и масс составляющих аномальных источников, т.е. определяемые параметры будут являться как бы параметрами некоторого «среднего» тела, залегающего на некоторой средней глубине, со значением средней массы источников, влиянием которых образована данная случайная гравитационная или магнитная аномалия.

Формула, показывающая связь между автокорреляционными функциями и энергетическими спектрами отдельных детерминированных сигналов и случайных процессов, справедлива и для трехмерного случая. Подтверждают это случаи совпадения по своему виду выражений функций B и Q для отдельных изолированных аномалий и случайных процессов.

На основании этой формулы можно расширить класс выражений автокорреляционных функций и энергетических спектров, которыми можно аппроксимировать функции B и Q случайных гравитационных и магнитных аномалий, а именно, в качестве

таковых можно принять выражения B и Q для отдельных изолированных аномалий, заменив в них параметры тела на некоторые средние параметры из совокупности тел.

Рассмотренная здесь формула является частным случаем (когда между отдельными изолированными аномалиями отсутствует взаимная корреляция) более общей формулы, связывающей энергетический спектр (следовательно, и автокорреляционную функцию) одной изолированной аномалии с выражением энергетического спектра (автокорреляционной функции) случайного сигнала, образованного из суммы отдельных аномалий. В более общем случае для центрированного случайного сигнала справедливо равенство

$$Q_{\Sigma}(\omega) = \frac{2}{l}[\sigma^2 k_0(\omega) + \varphi(\omega)],$$

где l – среднее значение расстояния между центрами аномалий; σ^2 – дисперсия случайных амплитуд; φ – функция, характеризующая коррелируемость отдельных аномалий друг с другом (она зависит от взаимных корреляционных функций этих аномалий, если отсутствует взаимная корреляция, то $\varphi = 0$; $k_0(\omega)$ – функция, зависящая от энергетического спектра отдельной аномалии (для многих случаев сигналов одинаковой формы $k_0(\omega) = a\,Q(\omega)$, где $Q(\omega)$ – энергетический спектр аномалии, a – некоторая постоянная, зависящая от параметров аномального тела).

Литература: [3, 9, 10, 14, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Энергетический фильтр основан на применении критерия максимизации энергетического отношения сигнал/помеха

Предположим, что суммарное аномальное поле состоит из двух составляющих:

$$f_{\Sigma}(x) = f_{a}(x) + f_{п}(x),$$

где индексы «а» и «п» показывают на случаи аномалии и помех.

Энергетический фильтр основан на максимизации отношения

$$\frac{\mu_{т}}{\mu} = \frac{\int_{0}^{\infty} \Phi^{2}(\omega) Q_{a}(\omega) d\omega}{\int_{0}^{\infty} Q_{a}(\omega) d\omega} \Bigg/ \frac{\int_{0}^{\infty} \Phi^{2}(\omega) Q_{п}(\omega) d\omega}{\int_{0}^{\infty} Q_{п}(\omega) d\omega}.$$

Если полезная аномалия локальная, то величина $\mu_{т}/\mu$ в этом выражении определяет усиление в результате фильтрации отношения относительных значений энергий полезной аномалии и помехи.

Литература: [13, 16].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ А.А. НИКИТИНА

1. **Энергетический фильтр.** Фильтр, максимизирующий величину энергетического отношения сигнал/помеха, разработан А.А. Никитиным и называется энергетическим. Расчет этого фильтра ведется в области полей

Фильтр основан на максимизации числа λ, выражающего отношение $\mu_т/\mu$ (μ и $\mu_т$ – отношения энергий полезной аномалии и помех до и после фильтрации):

$$\lambda = \frac{\mu_т}{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(j)P(i)B_а(j-i)}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(j)P(i)B_п(j-i)},$$

где $B_а$ и $B_п$ – значения автокорреляционной функции аномалии помехи; P – переходная характеристика трансформации или весовая функция фильтра; n – количество точек.

Пример опробования энергетической фильтрации при выделении гравитационного эффекта от предполагаемой нефтегазовой залежи структуры Бегеш (Северный Устюрт) приведен на рис. 130 (по А.А. Никитину). При этом значения автокорреляционной функции аномалии от структуры определялись в двух вариантах – по рельефу структуры, полученному из данных сейсморазведки, и непосредственно по исходным данным наблюденной аномалии. Как видно из рисунка, результат опробования является вполне удовлетворительным.

2. **Способ самонастраивающейся фильтрации.** Для обнаружения аномалий при ограниченной априорной информации и когда в суммарном поле присутствуют одиночные аномалии, отличающиеся по своему направлению от превалирующих, можно применить так называемые самонастраивающиеся (адаптивные) процедуры обработки. Под самонастройкой, по А.А. Никитину, понимается «приспосабливаемость» алгоритма обработки к изменению свойств аномалий (формы и параметров) и характеристик помех. При этом параметры аномалии и помех не задаются зара-

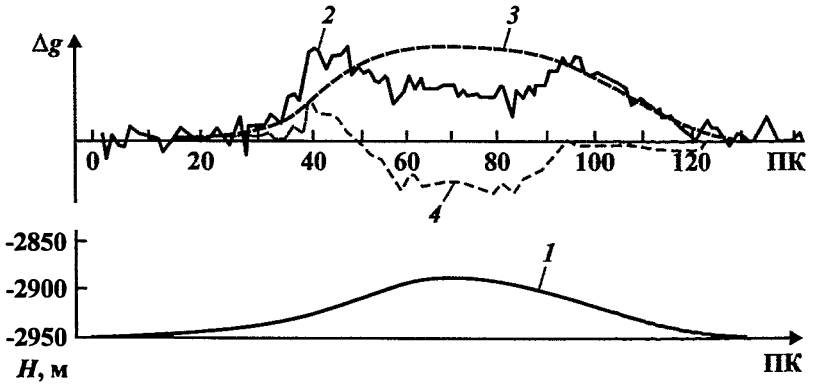


Рис. 130. Результаты энергетической фильтрации данных при наличии априорной информации о форме аномалий (по А.А. Никитину):
1 – рельеф отражающего горизонта (форма аномалий); *2* – наблюденные данные; *3* – результат фильтрации данных; *4* – разностный эффект между исходными (*2*) и профильтрованными (*3*) данными

нее, а вычисляются в процессе самой обработки. Фильтр разработан при условии, что исходное поле состоит из суммы некоррелированных помех и совокупности неизвестных по форме аномалий различного простирания. При этом предполагается, что математическое ожидание аномалии не равно нулю и оно регистрируется по нескольким профилям.

Алгоритм способа самонастраивающейся фильтрации основан на применении получаемого в пределах окна значения отношения среднего квадрата амплитуды аномалии к величине дисперсии помехи

$$\mu = \frac{\overline{a^2}}{\sigma^2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_{ki}\right)^2 \Big/ \frac{1}{m(N-1)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(f_{ki}-\overline{f_i})^2.$$

Перемещая взятое окно размером Nm сначала вдоль профилей с шагом в один пикет, затем вкрест профилям, можно получить оценку величины μ для площади съемки. При этом, если последовательно изменять наклон окна к направлению профилей, то можно получить оценку μ для аномалий различного простирания.

Из рассмотренного материала видно, что процесс самонастройки фильтра заключается не в автоматическом изменении параметров фильтра в процессе счета, а в том, что параметры или характеристики аномалий и помех не задаются заранее, а

вычисляются непосредственно в процессе самой обработки. То есть «самонастройку» фильтра нужно понимать в смысле приспосабливаемости или возможности применения некоторой прямоугольной палетки (окна с размерами N и m) к суммарному полю, состоящему из аномалии и помех различной интенсивности и различного простирания. Это возможно только при решении задачи обнаружения аномалий на фоне некоррелируемых помех.

Сходные результаты можно получить и с применением прямоугольных палеток И.Г. Клушина, И.Н. Толстихина и Т.С. Амирасланова для анизотропных преобразований поля и способа НСЧФ А.Б. Когана.

При применении под разными углами к профилям прямоугольной палетки вычисляют разностные значения по усредненным в пределах отдельных линейных зон палетки данным поля. Получаемые значения хорошо выделяют зоны простирания линейных аномалий, аномалий типа гравитационных ступеней.

В способе НСЧФ метод регулированного направленного приема, используемой в сейсморазведке, применяется к данным гравитационных и магнитных аномалий с целью выделения зон простираний аномалий различных направлений.

Литература: [9, 10, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веселов К.Е.* Гравиметрическая съемка. – М.: Недра, 1986. – 312 с.
2. *Гладкий К.В.* Гравиразведка и магниторазведка. – М.: 1967. – 320 с.
3. *Гравиразведка.* Справочная геофизика. – М.: Недра, 1981. – 397 с.; 1990. – 607 с.
4. *Грушинский Н.П.* Теория фигуры Земли. – М.: Наука, 1976. – 511 с.
5. *Логачев А.А., Захаров В.П.* Магниторазведка. – Л.: Недра, 1973.
6. *Маловичко А.К., Костицын В.И.* Гравиразведка. – М.: Недра, 1992. – 357.
7. *Магниторазведка.* Справочная геофизика. – М.: Недра, 1990. – 470 с.
8. *Никитин А.А., Хмелевской В.К.* Комплексирование геофизических методов. – Тверь: ООО «Издательство ГЕРС», 2004. – 294 с.
9. *Никитин А.А.* Статистические методы выделения геофизических аномалий. – М.: Недра, 1979. – 280 с.
10. *Никитин А.А.* Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986. – 342 с.
11. *Серкеров С.А.* Корреляционные методы анализа в гравиразведке и магниторазведке. – М.: Недра, 1986. – 247 с.
12. *Серкеров С.А.* Теория гравитационного и магнитного потенциалов. – М.: Недра, 1990. – 304 с.
13. *Серкеров С.А.* Спектральный анализ в гравиразведке и магниторазведке. – М.: Недра, 1991. – 280 с.
14. *Серкеров С.А.* Гравиразведка и магниторазведка. – М.: Недра, 1999. – 437 с.
15. *Серкеров С.А.* Теория потенциала в гравиразведке и магниторазведке. – М.: Недра, 2000. – 350 с.
16. *Серкеров С.А.* Спектральный анализ гравитационных и магнитных аномалий. – М.: Недра, 2002. – 437 с.
17. *Страхов В.Н.* К теории фильтрации и трансформирования потенциальных полей при наличии априорной информации о помехах во входных данных//Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1977. – № 3. – С. 48–61.
18. *Страхов В.Н., Керимов И.А.* Аппроксимационная реализация спектрального анализа в гравиметрии и магнитометрии//Геофизика и математика: Материалы 1-й Всероссийской конференции. Москва, 22–26 ноября 1999 г. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. – С. 191–198.
19. *Страхов В.Н., Арсанукаев З.З.* Теория дискретного гравитационного поля (двухмерный вариант) и ее использование при решении задач гравиметрии//Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 29-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского, Екатеринбург, 28 января – 2 февраля 2002 г. В 2-х частях Ч. II. – М.: ОИФЗ РАН, 2002. – С. 73–77.
20. *Яновский Б.М.* Земной магнетизм. – Л.: ЛГУ, 1978. – 592 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Автокорреляционная функция 430, 431, 434
––ограниченных аномалий 430–433
––случайных аномалий 360
––––от контактной поверхности 445–446
Автокорреляционная функция погрешностей наблюдений 245–248
Анализ составляющих вариаций гравитационного поля 48
Аналитическое продолжение аномалий потенциальных полей 7–22
Аномалия силы тяжести
–Буге 24
–Фая 23
Аномалия магнитного поля 157
Аномальный вертикальный градиент 28
Астазирование гравиметра 104
Аэромагнитометры 122

Б

Белый шум 245

В

Вариации гравитационного поля 43–49, 356
–лунно-солнечные 46
–неприливные 43
–приливные 43, 45
–магнитного поля 164
–вековые 164, 166
–магнитные бури 165
–суточные 165
–вариометр 116
Взаимная корреляционная функция 431, 432, 435
Взаимный энергетический спектр 431, 432, 435
–––как произведение энергетических спектров составляющих аномалий 431
Взаимозаменяемость энергетических характеристик двумерных аномалий 440
Влияние горизонтальных источников на кривые автокорреляционных функций 433
–––на кривые энергетических спектров 433, 437
Вычислительные схемы 60–66

Г

Гармонические функции 73–76

Геоид 296, 405
Гидродинамические характеристики фильтрационного потока
Гипотеза
–Пратта 37
–Эри 37
Горизонтальная дипольная пластинка 378
–координата точки нуля автокорреляционных функций знакопеременных аномалий 331
–координата точки максимума энергетических спектров знакопеременных аномалий 422
Гравиметры
–донные 111
–кварцевые 97
–набортные 113
–струнные 95
Гравитационное влияние атмосферных масс 31
––грунтовых вод 32
––контактной поверхности 445
Гравитационное поле Земли 353
Градиентометр 116
Граничные частоты 77
––исходных аномалий 138
––трансформированных аномалий 77–79
Графики изменения значений логарифма модуля спектров аномалий 384
Графический способ определения массы 383
–––глубины залегания ближайшей к поверхности особой точки аномалий 384

Д

Двойной слой 284
Двукратные преобразования Фурье 318
Диполь 279
Дискретное усреднение по профилю 401
––по окружности 401
––по площади круга 402
Дополнительные максимумы на кривых автокорреляционных функций 433
––на кривых энергетических спектров 433

З

Задача Дирихле 82–86
Зависимость отсчетов гравиметра от наклона 100
Закон изменения энергетических характеристик погрешностей наблюдений 245–248
Закон
–Кулона 271
–Ньютона 259, 352

И

Изменения аномалий во времени 43–49; 164–167
–силы тяжести с глубиной 87–89
Изостазия 36
Изостатические поправки 39

Интеграл
–Гамбурцева 386
–Пуассона 8, 83, 85
–Фурье 319
Интегральный способ определения радиуса корреляции 329–331

К

Колмогорова–Винера фильтр 230
Корреляционный способ определения плотности 227
Критерий минимума среднего квадрата ошибки 230
Коэффициенты вычислительных схем 60

Л

Лемма Брунса 405
Логарифм модуля спектра аномалий 382–384
Логарифмический потенциал 286
––горизонтальной линии 287
––объемных масс 288
Локальные аномалии 10

М

Максимумы на кривых автокорреляционных функций 433
–––энергетических спектров аномалий 433
Магнитный момент Земли 149
Магнитное поле Земли 145
––внешнего происхождения 145
––главное 145
Магнитные свойства пород 168–171
Масса 258, 386
–гравитационная 258, 386
–магнитная 277, 387
–точечная 258
Материковые аномалии 145
Маятниковый прибор 91–93
Месторождения нефти и газа с
–––антиклинальными структурами 177
–––неструктурными ловушками 188
–––солянокупольные 173
Модель нефтегазовой залежи
–––гравитационная 177
–––магнитная 199

Н

Нормальные значения
––гравитационного поля 218
––магнитного поля 145
Нормированная автокорреляционная функция 431, 432
Нормированный энергетический спектр 422
Нулевой уровень аномалий 222

О

Огибающая энергетических спектров аномалий 437, 438

Основные свойства корреляционной функции 439–442
––энергетических спектров 438–442
Определение
–плотности горных пород 224
–радиуса корреляции 329
–ширины энергетических спектров 422
Опробование оптимальных фильтров 232–236
Оптимальные фильтры выделения аномалий 230
––––на фоне региональной аномалии 231
––––на фоне случайных помех 231
Оптимальные фильтры обнаружения 237
––сглаживания 349
Отражение нефтегазовых залежей в
–гравитационном поле 172–192
–магнитном поле 193–202
Оценка потери энергии аномалии за граничной частотой 138

П

Параметры энергетических спектров аномалий 422
Плотность горных пород 241–244
–линейная 275
–объемная 263
–поверхностная 271
Поле
–потенциальное 255
Полиномы Лежандра 249
Полный горизонтальный градиент 298
Полосовые фильтры 252–254
Поправка
–Буге 24
–за вариации магнитного поля 165
–за влияние рельефа 22, 29–31
–за солнечно-лунные вариации 47
–изостатическая 39
–Этвеша 109
–Фая 23, 28
Потенциал 255
–двойного слоя 285
–диполя 280
–линейных масс 275
–объемного тела 264
–объемных намагниченных масс 281
–простого слоя 272
–силы тяжести 298
–системы точечных масс 261
–сферического слоя 273–274
–––для внешних точек 273
–––для внутренних точек 273
–точечной массы 259
–центробежной силы 295
–шара 266–268
––для внешних точек 266
––для внутренних точек 266

Принцип астазирования гравиметра 104
–температурной компенсации гравиметра 103
Предельная глубина залегания тел 300
Преобразование Фурье 318
–Ханкеля 321
Производная поля по нормали 297
––по произвольному направлению 296
Производные потенциала силы тяжести 298, 299
––––второго порядка 298
––––первого порядка 298
––––физический смысл 298, 299
Простой слой 271
Примеры опробования оптимальных фильтров выделения аномалий 232–236

Р

Равновесие изостатическое 27
Радиус корреляции 329
Радиус корреляции аномалий 358
–––знакопеременных 330, 331
–––одного знака 329, 330
Радиус корреляции (определение) через автокорреляционные функции 329, 330
––––ширину энергетических спектров 425
––––энергетические спектры 331
Радиус корреляции погрешностей наблюдений 336, 337
–суммарного поля 336
––трехмерных аномалий 336
Распадение поля 13, 16
Расстояния между уровенными поверхностями 297
Ряд Фурье 318
Ряды сферических функций 342

С

Связь радиуса корреляции с шириной энергетических спектров 424
Связь энергетических спектров с простыми спектрами аномалий 430, 432
–––с текущими спектрами случайных аномалий 361, 362
Сглаживание аномалий 346–351
––оптимальным фильтром 348
––прямоугольным фильтром 347
Сила притяжения 352
Случайный процесс 357
––стационарный 359
–––эргодический 360
Спектры аномалий от бесконечной вертикальной материальной полосы 378
––––горизонтальной дипольной пластинки 378
––––горизонтальной материальной линии 378, 380
––––горизонтальной материальной полосы 378, 380
––––дипольной линии 378
––––линии полюсов 378
Спектры аномалий от вертикального диполя 378
–––вертикального схематического магнита 379

---горизонтального материального диска 379
---горизонтального прямоугольного параллелепипеда 379
---контактной поверхности 446
---магнитного точечного полюса 378
---точечной массы 378
Спектры аномалий двумерных 319, 377
--трехмерных 319, 377
Спектры текущие 361, 435
-трансформированных аномалий 395, 396
-энергетические 430, 432
--взаимные 431, 435
Способ графический определения массы 383
---глубины залегания ближайшей к поверхности особой точки 384
Сферические функции 389

Т

Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции 19, 74, 84
Теоремы о спектрах аномалий 394
Текущий спектр случайной аномалии 361
Точечная масса 259, 323, 378
Трансформации полей 397–404
--аналитического продолжения 7, 12, 402
--вычисления производных и выделения аномалий 53, 403
--полосовые фильтры 252
--сглаживания 346

У

Ускорения силы тяжести 353
Усеченный вертикальный цилиндр 379
Усреднение вдоль профиля 401
-по окружности 401
-по площади круга 402
Уравнение
-Лапласа 415
-Пуассона 415
Уровенная поверхность 296, 420
Учет влияния
--грунтовых вод 32
--изменения уровня высот пунктов измерений 22, 27
--плотности атмосферных масс 31

Ф

Фильтры
--оптимальные для выделения аномалий 230
--для обнаружения аномалий 237
--сглаживания 346–351
Фигура Земли 220
Формула
-Грина 408, 410
-Стокса 405
Функция гармоническая 73–76
-потенциальная 255

Ч

Частотная характеристика усреднения вдоль профиля 401
---по окружности 401
---по площади круга 402
--вычислительных схем 402
--оптимальных фильтров 230, 237
----выделения аномалий 230
----обнаружения 237
----сглаживания 349
Частотные характеристики – разложение в ряды 402
Четность кривых автокорреляционных функций 441, 442
--энергетических спектров 441, 442
Чувствительность гравиметра 99

Ц

Цена деления гравиметра 101
Центробежная сила 295

Ш

Шар 266, 323
Шаровой слой 268
Ширина энергетического спектра 422

Э

Энергетический спектр 430
Энергетический спектр взаимный 431, 435
Эффект
–Кросс-Каплинг 110
–Этвеша 109

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ К ТЕМАМ:

ГРАВИТАЦИОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

1. Что такое уровенная поверхность и уровенный слой?
2. Что такое градиент скалярного поля? По какой формуле он определяется? С чем совпадает направление градиента в пространстве? Как связан градиент с потоком поля?
3. Что такое дивергенция поля? Как можно определить дивергенцию вектора? Какое поле называется соленоидальным или трубчатым? Как связана дивергенция с потоком поля?
4. Что такое ротор или вихрь поля? Как можно определить вихрь поля? Какое поле называется потенциальным? Как связан вихрь с потоком поля?
5. Какие условия являются необоходимыми и достаточными условиями потенциальности поля? Как можно определить потенциал поля? Как можно определить силу через потенциал поля?
6. Какое поле называется квазипотенциальным? Какой физический смысл имеет потенциал притяжения? Что такое векторный потенциал? Чем он отличается от скалярного потенциала?
7. Какими уравнениями можно задавать поле в общем виде, потецниальное и соленоидальное поля?
8. Какие поля описывают уравнения Пуассона и Лапласа?
9. Какой вид имеет потенциал притяжения точечной массы?
10. Какой вид имеет потенциал системы точечных масс? В каких точках он не существует? Как можно показать его регулярность на бесконечности?
11. Какой вид имеет потенциал притяжения объемных масс? Какими свойствами обладает этот вид потенциала притяжения? Существует ли потенциал притяжения объемных масс в точке $r = 0$? Как можно определить потенциал объемных масс для случаев внутренних и внешних точек? Как меняется в зависимости от расстояния потенциал, его первая и вторая производные для

шара и шарового слоя? Какие производные от потенциала для них терпят разрыв при переходе через границу?

12. Какой вид имеет потенциал притяжения простого слоя? Что такое простой слой? Как можно объяснить физически то, что однородный сферический диск не притягивает внутреннюю точку?

13. Что такое элементарный диполь? Чем отличается потенциал диполя от потенциала точечной массы? Как определяется момент диполя? Притягивает ли диполь точку экваториальной плоскости? В каком направлении притяжение диполя является максимальным?

14. Чем отличается потенциал объемных намагниченных масс от гравитационного потенциала объемных масс? Как определяется момент объемного намагниченного тела?

15. Какой вид имеет уравнение Пуассона о связи между гравитационным и магнитным потенциалами? Как можно определить при вертикальном намагничивании вертикальную и горизонтальную составляющие магнитного поля через производные гравитационного поля?

16. Чем отличаются потенциалы притяжения тел двухмерной формы от потенциалов трехмерных тел? Какой вид имеют потенциалы притяжения для случаев плоского поля?

17. Какой вид имеет потенциал притяжения бесконечной горизонтальной материальной линии?

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

1. Какой вид имеет уравнение Пуассона? Что оно выражает? Как можно получить уравнение Пуассона? Какой вид имеет уравнение Пуассона для случая двухмерного или плоского поля?

2. Что выражает уравнение Лапласа? Как связаны гармонические функции с уравнением Лапласа? Как можно выразить уравнение Лапласа в цилиндрических координатах? Как связаны цилиндрические функции Бесселя с уравнением Лапласа? Как можно выразить уравнение Лапласа в криволинейных координатах?

3. Что выражает первая или предварительная формула Грина? Что выражает вторая основная формула Грина? Какой интеграл называется интегралом Дирихле? Может ли иметь интеграл Дирихле отрицательное значение? Какие два важных следствия вытекают из второй формулы Грина? Как можно определить массу тела, пользуясь второй формулой Грина?

4. Чему равен интеграл по замкнутой поверхности от нормальной производной гармонической функции? Что выражает

фундаментальная формула Грина? Как связана фундаментальная формула Грина с основными видами потенциалов притяжения – с объемным и с потенциалами простого и двойного слоев? В каком случае из фундаментальной формулы Грина можно получить формулу Гаусса о телесном угле? Что понимается под эквивалентным уровенным слоем?

5. Какой вид имеет фундаментальная формула Грина для случая плоского поля? С какими видами двумерных потенциалов притяжения она связана?

6. Что понимается под гармоническими моментами? Что выражают гармонические моменты первого и второго порядков? Как можно определить гармонические моменты, пользуясь второй формулой Грина?

7. Какие функции называются гармоническими? Какими свойствами обладают гармонические функции? Чему равно интегральное среднее от гармонической функции по поверхности сферы?

8. Что выражает формула Гаусса о среднем значении гармонической функции?

ГРАВИТАЦИОННОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

1. Из каких составляющих состоит потенциал силы тяжести? Как определяется и какой вид имеет потенциал центробежной силы? Какой вид имеет потенциал силы тяжести?

2. Какой физический смысл имеют производные первого порядка по осям координат от потенциала силы тяжести? Как определяется горизонтальный градиент силы тяжести?

3. Какой физический смысл имеют производные второго порядка от потенциала силы тяжести?

4. Как связаны горизонтальные производные второго порядка с геометрией уровенной поверхности силы тяжести?

5. Как можно определить приливные вариации силы тяжести? Как определяется поправка за солнечно-лунные вариации? Каковы причины неприливных вариаций силы тяжести? Как можно использовать неприливные вариации в нефтегазовом деле?

6. Как меняются силы тяжести внутри Земли? Какими закономерностями аппроксимируются реальные изменения силы тяжести с глубиной?

7. Как определяется поправка за «свободный воздух»? Какая поправка называется поправкой Фая? Какая аномалия называется аномалией Фая?

8. Как определяется поправка за влияние масс промежуточно-

го слоя? Что такое промежуточный слой? Как меняется поправка за влияние масс промежуточного слоя?

9. Как можно определить поправку за рельеф местности?

10. Какая поправка называется поправкой Буге? Какая аномалия называется аномалией Буге?

11. Как можно определить плотность промежуточного слоя? Какие способы существуют для ее определения?

12. Из каких составляющих состоит магнитное поле Земли? Что такое материковые аномалии? Как определяется дипольная составляющая магнитного поля Земли? Что такое главное магнитное поле Земли? Как определяются нормальные значения магнитного поля? Как определяются вариации магнитного поля Земли?

13. Как определяются значения аномалии ΔT? Как связана она с другими элементами магнитного поля?

14. Как определяются магнитные свойства горных пород? В каких пределах они могут изменяться?

ПРИМЕНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Какие многочлены называются одномерными? Какие многочлены называются гармоническими? Какой вид имеют сферические функции?

2. Какая связь между сферическими функциями и уравнением Лапласа? Какая связь между полиномами Лежандра и уравнением Лапласа?

3. В чем заключается ортогональность полиномов Лапласа? Как можно разложить функцию $1/r$ в ряд многочленов Лежандра? Какая связь многочленов Лежандра с простейшими видами потенциалов притяжения?

4. Как можно разложить в ряды полиномов Лежандра потенциалы симметричных относительно вертикальной оси полей?

5. Из каких простейших функций состоят ряды сферических функций? Какие существуют виды сферических функций? Какие функции являются зональными, секториальными и тессеральными сферическими функциями? Чем они отличаются друг от друга?

6. Какую аналогию можно провести между рядами сферических функций и рядами Фурье?

7. Какой необходимостью вызвано разложение потенциала силы тяжести в ряды сферических функций? Какие оси называются главными осями инерции? Какие моменты инерции называются главными моментами инерции? Интегралы какого вида на-

зываются произведениями инерции тела вращения или его центробежными моментами?

8. Какой физический смысл имеют первые несколько членов разложения потенциала силы тяжести и магнитного потенциала в ряды сферических функций? Какой вид имеет потенциал силы тяжести на поверхности шарообразной Земли? Добавлением к нему каких членов можно получить потенциал силы тяжести на поверхности сфероида или эллипсоида вращения?

9. Как можно представить потенциал магнитного поля Земли в виде ряда сферических функций? В чем заключается сферический гармонический анализ?

ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

1. Какие существуют способы измерения ускорения свободного падения тела? Относительные и абсолютные измерения.

2. Какие существуют типы кварцевых астазированных гравиметров?

3. Что такое астазирование и как оно осуществляется?

4. Как устроен температурный компенсатор гравиметра?

5. Каким способом определяют цену деления гравиметра?

6. Какое направление наклона гравиметра предпочтительней для определения цены деления?

7. Какой вид имеет график зависимости отсчетов гравиметра от его наклона?

8. Почему убывают отсчеты гравиметра при увеличении его наклона?

9. Что такое база гравиметра?

10. Почему при правильной установке уровней максимальный отсчет должен наблюдаться в горизонтальном их положении?

11. Как определяют базу гравиметра?

12. Как проверить правильность установки уровня?

13. В каких единицах измеряют значения ускорения свободного падения?

14. Какие типы магнитометров существуют для наземных измерений?

15. Как устроены протонные магнитометры?

16. В чем заключается явление свободной ядерной процессии, используемой в протонных магнитометрах?

17. Как устроены кварцевые пешеходные магнитометры?

18. В чем сущность явления оптической накачки, используемого в квантовых магнитометрах?

19. Как устроены магнитомеханические магнитометры?

20. Какие существуют типы аэромагнитометров?
21. Как устроен феррозондовый элемент аэромагнитометров?
22. В каких единицах измеряют значения магнитного поля?

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЕЙ

1. Какие существуют способы преобразования потенциальных полей?
2. Какой вид имеют частотные характеристики основных видов трансформации полей?
3. Какой вид имеют частотные характеристики полосовых фильтров?
4. Какой вид имеет интеграл Пуассона, решающий задачу аналитического продолжения аномалий?
5. Какой эффект называется эффектом распадения поля?
6. Как можно построить карту аномалий в вертикальной плоскости? Как можно ее использовать?
7. Как осуществляется на практике аналитическое продолжение полей в верхнее и нижнее полупространства?
8. Какими способами осуществляется вычисление производных потенциальных полей первого и второго порядков?
9. Какие способы преобразования полей подчеркивают: а) локальные аномалии? б) региональные аномалии?
10. Какими способами можно осуществить сглаживание аномалий?
11. Какие существуют виды полосовых фильтров?
12. Какие существуют виды оптимальных фильтров: а) для обнаружения аномалий? б) для выделения аномалий?
13. В чем сущность метода направленного суммирования?
14. Как можно осуществить трансформации в частотной области?

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ГРАВИРАЗВЕДКЕ И МАГНИТОРАЗВЕДКЕ

1. Как определяются спектры аномалий? Какая связь между шагом дискретизации аномалий и граничной частотой спектров?
2. По каким закономерностям изменяются спектры аномалий от основных видов источников гравитационных и магнитных аномалий?
3. Какие характеристики полей являются энергетическими?
4. Как определяются: а) энергетические спектры аномалий? б) автокорреляционные функции аномалий?

5. Как определяют взаимные: а) энергетические спектры аномалий? б) корреляционные функции аномалий?

6. Какая связь между спектром и энергетическим спектром аномалий?

7. Как можно определить энергетические характеристики случайных: а) гравитационных и магнитных аномалий? б) погрешностей наблюдений?

8. Что такое радиус корреляции аномалий?

9. Как определяются основные статистические характеристики аномалий?

10. Какие параметры энергетических спектров аномалий являются основными? Как они определяются? Как они связаны с параметрами корреляционных функций?

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АНОМАЛИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

1. Какая задача гравиразведки или магниторазведки является: а) прямой? б) обратной?

2. Что понимается под единственностью решения обратной задачи? Что такое эквивалентное семейство?

3. Что такое теоретическая эквивалентность и практическая эквивалентность?

4. Какие тела называются звездными?

5. Что такое гармонические моменты аномальных тел? Можно ли определить их однозначно?

6. Какой физический смысл имеют первые три гармонических момента тел?

7. Как можно определить гармонические моменты тел?

8. Какие параметры геологических объектов можно определить однозначно?

9. Как определяются суммарная масса и магнитные моменты аномальных тел?

10. Как можно определить горизонтальные координаты центра тяжести источников?

11. Как можно определить вертикальную координату центра тяжести тел по спектрам аномалий?

12. Что понимается под предельной глубиной залегания источников полей?

13. В чем заключается сущность способов определения предельной глубины залегания тел?

ОТРАЖЕНИЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕФТИ И ГАЗА В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

1. Какие особенности структур месторождений нефти и газа отражаются на гравитационном и магнитном полях?
2. Как отражаются структуры месторождений нефти и газа на гравитационном и магнитном полях?
3. Как отражаются залежи нефти и газа на гравитационном поле?
4. Как отражаются на гравитационном поле особенности месторождений нефти и газа, связанные с:
   а) соляными куполами?
   б) антиклинальными структурами?
   в) неструктурными ловушками?
5. Какой величины может достичь амплитуда аномалий гравитационного поля, связанных с:
   а) структурами месторождений нефти и газа?
   б) залежами нефти и газа?
6. Какие особенности отражения месторождений нефти и газа в магнитном поле?

МЕТОДИКА ГРАВИРАЗВЕДОЧНЫХ И МАГНИТОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

1. Какие существуют виды съемок для измерения гравитационного и магнитного полей?
2. Как выбирают масштаб съемки и сечение карты аномалий при проектировании гравиразведочных и магниторазведочных работ?
3. Как находят ошибку определения аномалии?
4. Как связана ошибка определения аномалии с сечением карты аномалий?
5. Как определяются ошибки в значениях поля, связанные с погрешностью:
   а) измерения высот пунктов наблюдений?
   б) определения планового положения пунктов?
   в) определения плотности промежуточного слоя?
6. Как определяется при профильном и площадном видах съемок:
   а) расстояния между пунктами наблюдений?
   б) расстояния между опорными точками?
   в) количество опорных точек?
   г) продолжительность рейсов?
7. Какие существуют методики наблюдений и учета поправок

за смещения нуль-пункта приборов при профильном и площадном видах съемок?

8. В чем заключается процесс обработки измеренных значений:

а) гравитационного поля?

б) магнитного поля?

Какие поправки при этом определяют и учитывают?

9. Как определяют значения аномалий гравитационного и магнитного полей?

10. В чем заключается особенности проведения:

а) аэромагнитных съемок?

б) морских гравиметрических и магнитометрических работ?

11. Как строят карты аномалий гравитационного и магнитного полей?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ... 3

Введение ... 5

Аналитическое продолжение потенциальных полей в область верхнего полупространства ... 7

Аналитическое продолжение потенциальных полей в область нижнего полупространства ... 12

1. Аналитическое продолжение потенциальных полей в область нижнего полупространства и эффект распадения поля ... 13
2. Построение карты аномалий в вертикальной плоскости ... 16
3. Применение теоремы Гаусса о среднем значении гармонической функции ... 19
4. Ряд Тейлора и его применение ... 21

Аномалии Буге и Фая, учет поправок ... 22

1. Аномалии Буге и Фая. Примеры некоторых аномалий ... 22
2. Поправка за изменение высот пунктов наблюдений ... 27
3. Поправка за притяжение масс промежуточного слоя ... 29
4. Поправка за окружающий рельеф ... 29
5. Учет влияния атмосферных масс ... 31
6. Учет влияния грунтовых вод ... 32

Аномалии изостатические и теория изостазии ... 36

1. Теория изостазии ... 36
2. Изостатические аномалии ... 39

Аномалии при морских измерениях и измерениях в шахтах ... 41

Вариации силы тяжести ... 43

1. Приливные вариации силы тяжести ... 45
2. Составляющие неприливных вариаций силы тяжести во времени ... 48

Выполнение трансформаций в частотной области ... 50

Вычисление производных потенциальных полей ... 53

Вычислительные схемы и их получение ... 60

Гармонические моменты аномальных тел ... 67

Гармонические функции и их основные свойства ... 73

Граничные частоты вычислительных схем и их определение ... 77

Единицы измерения элементов гравитационного и магнитного полей ... 80

Задача Дирихле для сферы и плоскости. Интеграл Пуассона ... 82

1. Задача Дирихле для сферы ... 83
2. Задача Дирихле для плоскости ... 84

Изменение силы тяжести внутри Земли ... 87

Измерения значений гравитационного поля ... 90

Измерения значений ускорения свободного падения тел (динамические способы) ... 91
1. Маятниковый способ ... 91
2. Метод свободного падения ... 93
3. Струнные гравиметры ... 95

Измерения кварцевыми астазированными гравиметрами ... 97

Измерения на морях и океанах ... 108
1. Влияние центробежной силы (поправка Этвеша) ... 109
2. Кросс-Каплинг эффект ... 110
3. Донные кварцевые гравиметры ... 111
4. Морские набортные гравиметры ... 113

Измерения производных потенциалов силы тяжести второго порядка ... 116

Измерения ускорения свободного падения на самолете ... 119

Измерения ускорения свободного падения скважинными гравиметрами ... 120

Измерения элементов магнитного поля ... 122
1. Аэромагнитометры ... 122
2. Магнитометры для наземных измерений ... 124
   2.1. Магнитометр пешеходный оптико-механический М-27М ... 124
   2.2. Магнитометр полевой протонный ММП-203 ... 130
   2.3. Магнитометры квантовые пешеходные ... 133
3. Магнитометры для съемок автомобильной и гидромагнитной ... 135

Интервал ограничения спектров аномалий и его определение ... 138

Комплексная напряженность и комплексный потенциал поля ... 140

Координаты центра тяжести аномальных тел ... 142

Магнитное поле Земли ... 145

Магнитное поле Земли как поле однородного намагниченного шара ... 148

Магнитные аномалии ΔT и их определение ... 151
1. Системы прямоугольных координат в магниторазведке ... 151
2. Определение значений ΔT ... 152

Магнитные аномалии и карты ... 157
1. Примеры некоторых магнитных аномалий ... 160

Магнитные вариации ... 164

Магнитные свойства горных пород ... 168
1. Коэффициент размагничивания ... 168
2. Магнитные свойства горных пород ... 169

Месторождения нефти и газа и их отражение в гравитационном поле ... 172
1. Месторождения, связанные с соляными куполами ... 173
2. Месторождения, связанные с антиклинальными структурами ... 177
3. Месторождения, связанные с неструктурными ловушками ... 188

Месторождения нефти и газа и их отражение в магнитном поле ... 193

Методика гравиразведочных и магниторазведочных работ ... 203
1. Наземные гравиразведочные и магниторазведочные работы ... 203
2. Расположение профилей и пунктов наблюдений ... 206
3. Сечение изолиний и точность наблюдений ... 207
4. Сеть наблюдений ... 210
5. Съемки аэромагнитные ... 214

Определение нормальных значений силы тяжести и фигуры Земли ... 218
1. Определение нормальных значений силы тяжести ... 218
2. Определение фигуры Земли ... 220

Определение нормального уровня аномалий ... 222

Определение плотности пород промежуточного слоя по наблюдениям с гравиметрами ... 224

Определение средней плотности Земли ... 229

Оптимальные фильтры выделения аномалий ... 230

Оптимальные фильтры обнаружения аномалий ... 237

Плотностная характеристика основных типов горных пород ... 241

Погрешности наблюдений и их энергетические характеристики ... 245

Полиномы Лежандра. Разложение потенциалов притяжения в ряды полиномов Лежандра ... 249

Полосовые фильтры ... 252

Потенциал и потенциальное поле ... 255

Потенциал притяжения точечной массы и системы точечных масс ... 258
1. *Объемная гравитационная и точечная массы* ... 258
2. Потенциал притяжения точечной массы ... 259
3. Потенциал притяжения системы точечных масс ... 260

Потенциал притяжения объемных масс, однородных шара и шарового слоя ... 263
1. Потенциал притяжения объемных масс ... 263
2. Потенциал притяжения однородного шара ... 266
3. Потенциал притяжения однородного шарового слоя ... 268

Потенциал притяжения простого слоя и линейных масс ... 271
1. Потенциал притяжения простого слоя ... 271
   1.1. Однородный материальный диск ... 272
   1.2. Однородный сферический слой ... 273
2. Потенциал притяжения линейных масс ... 275

Потенциалы диполя, объемного намагниченного тела и двойного слоя ... 277
1. Закон Кулона, магнитные массы ... 277
2. Потенциал диполя ... 279
3. Потенциал объемного намагниченного тела ... 281
   3.1. *Однородно намагниченный шар* ... 282
4. Потенциал двойного слоя ... 284

Потенциалы притяжения логарифмические ... 286
1. Потенциал притяжения бесконечной горизонтальной материальной линии ... 286
2. Потенциал притяжения двумерных объемных масс ... 288
3. Потенциалы намагниченных масс ... 289
   3.1. Диполь для поля с логарифмическим потенциалом ... 289
   3.2. Потенциал двумерных магнитных масс ... 290

Потенциал силы тяжести ... 292

Потенциал центробежной силы ... 295
1. Производная потенциала силы тяжести по произвольному направлению ... 296
2. Производные потенциала силы тяжести первого и второго порядков, их физический смысл ... 297

Предельная глубина залегания аномальных тел ... 299

Представление потенциала гравитационного поля Земли в виде ряда сферических функций ... 306

Представление потенциала магнитного поля Земли в виде ряда сферических функций ... 309

Представление элементов магнитного поля на поверхности Земли в виде рядов сферических функций ... 312

Преобразование Фурье. Вспомогательные сведения ... 317
Прямая и обратная задачи гравиразведки и магниторазведки ... 321
Радиус корреляции аномалий и его определение ... 328
Радиус корреляции суммарного поля ... 335
Радиусы взаимной корреляции элементов гравитационного и магнитного полей ... 336
Ряд Тейлора и особые точки аналитических функций ... 339
Ряды сферических функций ... 341
Связь гармонических функций с аналитическими ... 343
Сглаживание аномалий ... 345
Сила притяжения и закон Ньютона ... 351
Сила тяжести ... 352
Случайные гравитационные и магнитные аномалии и их основные характеристики ... 356
Совместная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий ... 362
1. Уравнение Пуассона о связи между потенциалами в спектральном виде ... 362
2. Признаки принадлежности гравитационной и магнитной аномалии одному и тому же телу ... 364
3. Определение отношения вектора намагничивания к плотности и угла намагничивания ... 366
Совместная интерпретация методами подбора по гравитационным и магнитны полям ... 370
Совместная интерпретация с применением псевдогравиметрических и псевдомагнитных аномалий ... 374
Спектры гравитационных и магнитных аномалий ... 376
Способ (графический) определения параметров аномальных тел по спектрам ... 381
Суммарная масса и магнитный момент аномальных тел и их определение 384
Сферические функции ... 388
Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции ... 390
Теоремы о спектрах аномалий ... 393
Трансформации и их частотные характеристики ... 396
Формула Стокса и изучение геоида ... 404
Формулы Грина (две формулы) ... 407
Фундаментальная формула Грина ... 409
Уравнение связи между значениями гравитационного и магнитного потенциалов ... 411
Уравнения Пуассона и Лапласа ... 414
Уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических координатах ... 417
Уровенная поверхность ... 419
Ширина энергетических спектров аномалий и ее определение ... 421
Эквивалентность, единственность и неустойчивость решения обратной задачи ... 425
Энергетические спектры и корреляционные функции аномалий известной формы ... 429

Энергетические спектры и корреляционные функции случайных аномалий ... 435
Энергетические спектры и корреляционные функции – взаимосвязь их для производных одного порядка ... 442
Энергетические характеристики гравитационных и магнитных аномалий ... 446
Энергетические характеристики случайных аномалий от контактной поверхности ... 448
Энергетическая фильтрация ... 454
Энергетические фильтры А.А. Никитина ... 455
Список литературы ... 458
Предметный указатель ... 459
Приложение. Вопросы для самоконтроля ... 466

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Серкеров Серкер Акберович

ГРАВИРАЗВЕДКА И МАГНИТОРАЗВЕДКА.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕРМИНЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Заведующий редакцией *Т.К. Рубинская*
Переплет художника *Н.П. Новиковой*
Художественный редактор *Н.П. Новикова*

Изд. лиц. № 071678 от 03.06.98. Подписано в печать с репродуцированного оригинал-макета 17.01.06. Формат $60\times88^{1}/_{16}$. Гарнитура «Петербург». Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,40. Уч.-изд. л. 32,0. Тираж 1000. Заказ 2605 /1105

ООО «Недра-Бизнесцентр»
125047, Москва, пл. Тверская застава, 3

E-mail: business@nedrainform.ru, biblioteka@nedrainform.ru
www.nedrainform.ru

ППП «Типография «Наука» Академиздатцентр РАН
121099, Москва, Шубинский пер., 6