АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ИНЕРЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ И ПРИЕМНИКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

НОВОСИБИРСК–1972

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ИНЕРЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ И ПРИЕМНИКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Под общей редакцией
члена-корреспондента АН СССР *Н.Н. Пузырева*
и кандидата технических наук *Е.М. Аверко*

НОВОСИБИРСК–1972

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

П Р Е Д И С Л О В И Е

Исследования, помещенные в сборнике, целенаправлены на изучение сейсмического эффекта, проявляющегося в излучении продольных и поперечных волн абсолютно жетскими телами при их движении в безграничной упругой среде.

Необходимость такого исследования диктуется запросами практики сейсморазведочных работ и сейсмологических исследований. При возбуждении сейсмических волн часто используются источники невзрывного типа в форме достаточно прочных тел, совершающих движение в сейсмо-геологической среде, и, вследстчие этого, излучающие сейсмические волны в эту среду. В связи с этим возникает необходимость исследований влияния массы такого инерционного источника и его распределенности в пространстве на тот сейсмический эффект, который источник создает в окружающей его среде.

В настоящее время повышаются требования к измерительной аппаратуре в связи с необходимостью измерения динамических параметров сейсмических волн. Это вызывает необходимость исследования взаимодействия, например, прибора (сейсмоприемника) с падающей на него сейсмической волной. Такое взаимодействие - на наш взгляд - может быть изучено исследованием движения достаточно жесткого тела в поле сейсмических волн.

Изучение этого взаимодействия весьма полезно также в связи с необходимостью детального исследования физических основ дифракции сейсмических волн на жестких геологических телах. В частности, вопрос о постановке граничных условий при возможности передвижения жесткого объекта дифракции под действием падающих на него упругих волн в настоящее время ещё изучен недостаточно.

Сборник разделен на две части. В основу такого разделения материала положен способ задания причины движения тела в упругой среде.

В первой части причиной движения тела, контактирующего с упругой средой, считается действие на него других тел, соприкасающихся с телом излучателя, но не с упругой средой. Такое взаимодействие рассматривается в форме задания главных внешних активных векторов сил и моментов, приложенных к излучателю.

В первой статье (Аверко Е.М. "Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных абсолютно жестких излучателей") дается схема расчета сейсмического эффекта от колебания жесткого тела произвольной формы, контактирующего с упругой средой при любом известном таком контакте.

Во второй статье (Аверко Е.М. "Цилиндрический источник смешанного типа") рассматривается инерционный цилиндрический излучатель, совершающий колебания в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Такой источник может рассматриваться как некоторое обобщение аналога известного точечного безинерционного излучателя в форме направленной точечной силы.

В последующих двух статьях (Аверко Е.М., Максимов Л.А.) исследуются источники поперечных волн в виде длинных цилиндров, совершающих осевое вращение и поступательные колебания вдоль оси цилиндра. В вышеуказанных статьях рассматриваются источники цилиндрических упругих волн.

В последних двух статьях Аверко Е.М. первой части сборника исследуются инерционные источники сферических волн. Изученный вращающийся шаровой источник, обладающий инерционной массой, может рассматриваться как обобщение точечного источника типа центра вращения; поступательно движущийся такой шар - как обобщение точечной направленной силы.

Во второй части сборника исследуется сейсмический эффект от движения абсолютно жестких тел под действием падающих на них упругих волн. Кроме сейсмического эффекта, рассматривается само движение таких тел и вытекающих отсюда приложений, полезных в практике сейсмических исследований. В частности, предложен сейсмоприемник поперечных волн, с помощью которого возможно выделение поперечной на фоне продольной волны для любых углов подхода этих волн в месте их приема.

Статьи во второй части расположены в порядке, соответствующему целенаправленности исследования не только движения твердого тела под действием волны, но и по созданию основ конструирования указанного сейсмоприемника поперечных волн.

В первой статье этой части (Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А. "Сейсмоприемник - почва") дается обзор литературных источников по вопросу взаимодействия упругих волн с абсолютно жестким дифрагирующим включением, каким является корпус сейсмоприемника, и ставится задача исследования движения такого включения под действием поперечных и продольных волн.

В статье Аверко Е.М. "Вторичные волны от движения жесткого тела в поле первичных упругих волн" рассматривается следствие указанного движения в форме возникших вторичных волн для плоских продольных и поперечных волн, падающих нормально на бесконечно длинный цилиндр.

Статья Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А., Максимов Л.А. "Модельные исследования движения корпуса сейсмоприемника в поле продольных и поперечных волн" представляют собой экспериментальное исследование вторичных волн, возникающих в результате движения цилиндрического включения от падающих на него продольных и поперечных волн и является экспериментальным подтверждением результатов теоретического расчета предыдущей статьи.

В следующей статье (Аверко Е.М. "Движение полого шара в поле плоской поперечной волны") исследуется движение не бесконечно длинных тел, как это сделано в вышеуказанных статьях, а тела, ограниченного по трем измерениям, каким является, например, шар. Это исследование может рассматриваться наряду с другими возможными приложениями - в качестве теоретической основы как способа выделения поперечной волны на фоне продольной, так и сейсмоприемника поперечных волн.

Эти вопросы рассматриваются в статье Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А. "Спооб выделения поперечной волны на фоне продольной и основы конструирования сейсмоприемника поперечных волн". В этой же статье рассматривается применение сейсмоприемника поперечных волн в полевых условиях.

Теория сейсмоприемника поперечных волн рассмотрена в одноименной статье Аверко Е.М. В этой же статье исследуется колебание биморфного пьезоэлемента. Такое исследование полезно не только для создания теории указанного сейсмоприемника, но и для более широкого круга вопросов геоакустики, где в качестве поляризационных преобразователей применяются биморфные пьезоэлементы с использованием динамического режима их работы.

ЧАСТЬ I

СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ОТ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ВЫЗВАННЫХ ПРИЛОЖЕННЫМИ К ТЕЛУ СИЛАМИ И МОМЕНТАМИ

Е.М. Аверко

СХЕМА РАСЧЕТА ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН ОТ ИНЕРЦИОННЫХ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость развития и становления метода поперечных волн при сейсмических исследованиях потребовало, в первую очередь, создания технических способов возбуждения поперечных волн в реальных сейсмо-геологических средах. Ведущиеся в этом направлении работы сейсмического отдела Института геологии и геофизики СО АН СССР с самого их начала были целенаправлены на практическую реализацию разрабатываемых способов и технических средств возбуждения поперечных волн, необходимую для производства геофизических полевых работ при сейсмических методах исследования внутреннего строения Земли как её малых, так и больших глубин. При такой целенаправленности известные теоретические "точечные" источники, не имеющие ни одного измерения [10, 17], не могли быть реализованы на практике, хотя эти источники сыграли большую роль в деле понимания физики образования сейсмического волнового поля, возникающего от направленных сил. Поэтому появилась необходимость разработки теоретических основ, а затем и инженерной реализации источников поперечных волн конечных размеров. Таким теоретическим источникам посвящены ранние [12, 7] и более поздние работы [6, 14], выполненные как в Институте геологии и геофизики СО АН СССР, так и в других организациях страны.

Во всех указанных работах по теоретическому источнику конечных размеров предполагается, что их техническая реализация проводится устройствами, не обладающими инерционной (тяжелой) массой. На практике такие источники поперечных волн встречаются и реализуются с помощью взрыва на стенке горной породы, окруженного со всех остальных сторон поглотителем [11 и др.]. Однако, практика сейсморазведочных работ требует разработки и реализации, например, мощных источников поперечных волн, обладающих минимальным уровнем помех и наибольшей простотой распределения интенсивности поперечной волны как в пространстве, так и во времени. Одним из путей реализации таких источников может являться применение источников, создающих только поперечные волны в упругой среде и не создающие продольные, являющиеся в методе поперечных волн одним из основных видов регулярных помех. Такие источники типа вращательных и распределенных касательных воздействий могут быть реализованы на практике с помощью достаточно сложных инженерных конструкций. Последние по необходимости имеют не бесконечно малую инертную массу. Конечность такой массы для конструкции реальных источников поперечных волн может существенно сказаться, например, на доли энергии, израсходованной на образование поперечной волны в сейсмо-геологической среде, по сравнению с энергией, подведенной к этому источнику. Эта же масса может существенно исказить расчетную диаграмму направленности и форму профиля поперечной волны по сравнению с этими величинами, рассчитанными без учета инертной массы. (Такое влияние массы на параметры сейсмической волны может рассматриваться как один из способов конструирования управляемого источника).

В связи с указанным возникает задача расчета источников поперечных и продольных волн с учетом влияния инерционных свойств инженерной конструкции этих источников на сейсмическое поле. Эта задача сводится к тому, что необходимо установить функциональную связь между внешними силами, приложенными к источнику, обладающему конечной массой, и тем сейсмическим полем смещений, которое возникает в сейсмо-геологической среде, окружающем источник, от его движения вследствие действия на него внешних сил. Задача может быть разделена на следующие две: 1) рассчитать смещение массы источника, контактирующего с твердым телом, каким является сейсмо-геологическая среда, и 2) по найденному смещению источника рассчитать искомое сейсмическое поле.

Обе указанные задачи решены и достаточно подробно исследованы для случая, когда среда, окружающая источник, является жидкой или газообразной и, следовательно, её движение характеризуется одним волновым уравнением и отсутствием в среде поперечных волн [15, 9, 13].

Предметом наших исследований, как указывалось, являются, в основном, поперечные волны и, следовательно,- твердая среда,окружающая источник. В этом же случае для первой из указанных двух задач дана схема её расчета для частного вида поверхности источника (цилиндрической или сферической), при которых задача сводится к плоской или осесимметричной [1].

Составлены уравнения плоскопараллельного нестационарного движения шара в упругой среде при условии, что силы реакции среды на это движение известны. Такие уравнения решены для следующих частных случаев этой реакции: 1) в предположении, что она может быть апроксимирована квадратичными функциями времени и 2) соответствующей частному виду движения этого шара, для которого поступательное смещение и угол поворота пропорциональны квадрату времени [2].

Для второй задачи известно решение при частном виде нестационарного движения источника: шар движется поступательно и его смещение пропорционально квадрату времени [3], а также найдена сила реакции в форме импеданса для стационарного поступательного движения малой сферы в упругой среде [18]. Из сказанного следует, что первая задача для любого вида реакции не решена, вторая задача решена только для частного вида движения.

В настоящей статье ставилась следующая задача: 1) Для сейсмических источников, имеющих конечную массу, составить общую схему расчета, применение которой позволило бы установить функциональную связь между внешними силами, приложенными к источнику, и сейсмическим полем смещений в упругой среде, окружающей источник;
2) Рассчитать по указанной схеме сейсмическое поле от источников с конечной массой для конкретных форм поверхности источника, контактирующего с упругой средой.

Автор благодарен Н.Н. Пузыреву за общее руководство, а также за критические замечания, которые им были сделаны при обсуждении этой работы. Он признателен также А.С. Алексееву; К.Д. Клем-Мусатову и Б.П. Сибирякову за то, что они прочли работу и сделали ряд полезных замечаний.

§ I. Источники инерционные и безинерционные

Будем различать среди источников, генерирующих упругие волны в сейсмогеологическую среду, источники инерционные и безинерционные. К первым относятся источники, техническая реализация которых в упругом пространстве связана с необходимостью введения в это пространство в месте расположения источника некоторых дополнительных инженерных сооружений, обладающих конечной массой. Ко вторым (безинерционным) относятся источники, для которых эта инерционная масса равна нулю. Примером такого безинерционного источника может служить приближенно взрыв некоторого количества взрывчатого вещества в рассматриваемой упругой среде, если сила инерции газов, образующихся при взрыве этого количества ВВ, пренебрежимо мала по сравнению с давлением, оказываемым ими на стенку каверны от взрыва в этом пространстве.

Примером инерционного источника может быть источник типа вращающегося шара. Техническая реализация такого источника может быть выполнена, например, тем, что внутрь упругой среды помещается достаточно прочная (недеформирующаяся) толстостенная сферическая оболочка (или сплошной шар), которую заставляют вращаться, например, с помощью направленных касательных воздействий, распределенных по внутренней части сферы или иным каким-то способом придают момент вращения этой сфере. Нужно заметить, что этот способ требует введения некоторых дополнительных (к оболочке) инженерных сооружений, приспособлений, конструкций. Все вместе взятые с оболочкой эти инженерные сооружения представляют собой источник, инерционные силы (моменты) которого при его движении в упругом пространстве могут быть сравнимыми и большими, чем силы (моменты), приложенные на границе с упругой средой и возникшие в результате движения этого источника в среде.

Вторым примером инерционного источника может быть балка, закопанная в упругую среду, если эту балку внешним воздействием, прикладываемым к ней, заставляют передвигаться в упругой среде в определенном направлении. Если инерционная сила балки, определяемая его массой и ускорением, сообщенным ему от внешнего воздействия, значительна по сравнению как с силой внешнего воздействия, так и силами сопротивления среды при движении балки в ней, то источник будет инерционным. Если же инерционная сила незначительна по сравнению с указанными силами, то эта же балка будет источником безинерционным.

Таким образом, один и тот же источник может быть как инерционным, так и безинерционным в зависимости от того, существенно или не существенно влияют силы (моменты) инерции на общий баланс сил (моментов) при движении абсолютно жесткого тела в упругой среде.

Источник инерционный - более общий источник в том смысле, что безинерционный источник является частным случаем источника инерционного, если в расчете последнего принять массу источника, равную нулю.

Наличие массы, отличной от нуля в инерционном источнике, и необходимость учета её влияния при составлении уравнения движения источника в упругой среде изменяют схему его расчета по сравнению с источником безинерционным.

§ 2. Связь уравнения движения свободного тела с уравнением движения источника

Инерционный источник будем моделировать некоторым абсолютно твердым телом, обладающим конечной массой и жестко или нежестко связанным с упругой средой по поверхности соприкосновения тела со средой. Под действием внешних сил, приложенных к различным точкам этого тела оно может смещаться относительно неподвижной (инерционной) системы координат, излучая при этом в среду упругие волны.

Задача расчета сейсмического инерционного источника состоит в следующем: по заданным внешним силам, приложенным к телу - источнику, определить

1) векторное поле смещений любой точки упругой среды;
2) смещение любой точки тела-источника;
3) напряжения, возникающие на границе этого тела с упругой средой.

Первая задача - это задача, ради которой создается сейсмический инерционный источник; вторая и третья задачи полезны при конструировании источника (расчет конструкции на прочность, оценка амплитуд смещений различных точек и др.).

Решение этих трех задач, очевидно, нужно искать посредством применения как уравнений движения тела-источника, так и уравнений движения упругой среды.

Передвижению тела-источника будут препятствовать силы реакции наложенных связей, обусловленных сопротивлением упругой среды движению этого тела. Эти силы будут зависить от скорости (смещения) этого тела. Присоединяя силы реакции к внешним силам, можно рассматривать тело-источник как свободную механическую систему [8], имеющую шесть степеней свободы. Уравнения движения инерционного источника будут совпадать с уравнениями движения такой свободной механической системы, если силы реакции связей выразить через скорости или смещения этой системы.

Запишем уравнения движения свободного тела. При этом учтем следующее.

Как известно [16], движение свободного твердого тела слагается из поступательного движения вместе с полюсом, в качестве которого при решении задач динамики твердого тела выбирают центр масс тела, и из движения вокруг центра масс, как вокруг неподвижной точки.

Если на тело-источник действуют внешние силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ и силы реакции $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,.... $\vec{P}_n$, то движение центра масс описывается теоремой о движении центра масс, которая в проекциях на оси неподвижной (инерционной) системы координат O_{xyz} записывается в следующем виде /8/:

$$M\ddot{x}_c=\sum_{\nu=1}^{n}(F_{\nu x}+P_{\nu x})=F_x+P_x \tag{1}$$

$$M\ddot{y}_c=\sum_{\nu=1}^{n}(F_{\nu y}+P_{\nu y})=F_y+P_y \tag{2}$$

$$M\ddot{z}_c=\sum_{\nu=1}^{n}(F_{\nu z}+P_{\nu z})=F_z+P_z \tag{3}$$

где $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$, $\ddot{z}_c$ - проекции на эти оси вектора $\vec{\omega}_c$ ускорения центра масс тела относительно неподвижной (инерционной) системы отсчета.

При этом имеем:

$$\vec{\omega}_c = \ddot{x}_c \cdot \vec{i} + \ddot{y}_c \cdot \vec{j} + \ddot{z}_c \cdot \vec{k} \qquad (4)$$

и аналогично этому:

$$\vec{F}_v = F_{vx} \cdot \vec{i} + F_{vy} \cdot \vec{j} + F_{vz} \cdot \vec{k} \qquad (5)$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \qquad (6)$$

$$\vec{P}_v = P_{vx} \cdot \vec{i} + P_{vy} \cdot \vec{j} + P_{vz} \cdot \vec{k} \qquad (7)$$

$$\vec{P} = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k} \qquad (8)$$

Движение около центра масс (вращение) описывается теоремой об изменении кинематического момента, которая в проекциях на оси подвижной системы $C\xi\eta\zeta$ координат, жестко связанной с движущимся телом, имеет следующий вид [10]:

$$J_\xi \dot{\omega}_\xi + (J_\zeta - J_\eta)\omega_\zeta \omega_\eta = M_\xi \qquad (9)$$

$$J_\eta \dot{\omega}_\eta + (J_\xi - J_\zeta)\omega_\xi \omega_\zeta = M_\eta \qquad (10)$$

$$J_\zeta \dot{\omega}_\zeta + (J_\eta - J_\xi)\omega_\eta \omega_\xi = M_\zeta \qquad (11)$$

При этом подвижная система координат, жестко скрепленная с телом, имеет начало в центре масс, а её оси совпадают с главными центральными осями инерции твердого тела.

В уравнениях (9) - (11) обозначено J_ξ; J_η; J_ζ , главные центральные моменты инерции тела; ω_ξ; ω_η; ω_ζ проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции, а M_ξ; M_η; M_ζ - моменты всех внешних сил, включая моменты и сил реакции, относительно тех же осей.

Уравнения (9) - (II) представляют собой частный случай динамических уравнений Эйлера для движения твердого тела около неподвижной точки, когда эта точка совпадает с центром масс инерции [I6].

Моменты внешних действующих сил зависят от положения (ориентации) тела по отношению к неподвижным осям, т.е. от углов Эйлера, φ, ψ, θ от угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ и времени t. Поэтому трех уравнений (9), (I0), (II) недостаточно для определения шести неизвестных функций $\varphi, \psi, \theta, \omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ Для того, чтобы задачу движения около неподвижной точки сделать определенной, уравнения (9)-(II) рассматривают совместно с кинематическими уравнениями Эйлера [8], которые устанавливают связь между φ, ψ, θ и ω_ξ, ω_η, ω_ζ:

$$\omega_\xi = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \tag{I2}$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \tag{I3}$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \tag{I4}$$

Теперь система (9)-(I4) полная для определения шести функций.

Таким образом, уравнения (I)-(3) и (9)-(I4) позволяют найти как координаты центра масс источника или его скорость $\vec{v}_c$ при его поступательном движении, так и угловую скорость источника около этого центра, если известны внешние силы и силы реакции со стороны упругой среды. При этом скорость любой точки источника в неподвижной системе координат выразится следующим образом [I6]:

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{I5}$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор точки относительно центра масс;
$\vec{v}_c$ - скорость движения центра масс.

§ 3. Вычисление сил и моментов реакций связей по известному полю смещений упругой среды

Нижеприводимый расчет дается для жесткого контакта поверхности источника со средой.

В уравнения движения инерционного источника входят силы реакции связи, которые, в общем случае зависят от искомых векторов $\vec{v}_c$ и $\vec{\omega}$.

Поэтому уравнения движения источника ещё в явном виде не могут быть разрешены относительно этих векторов.

Найдем связь между силами реакции упругой среды и векторами $\vec{v}_c$ и $\vec{\omega}$. При этом будем вначале исходить из того, что поле смещений $\vec{U}(x,y,z,t)$ любой точки среды пусть считается известным, а затем выразим это поле через вектора $\vec{v}_c$ и $\vec{\omega}$. Поле смещений запишем в виде:

$$\vec{U}(x,y,z,t) = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k} \tag{16}$$

Напряженное состояние в любой точке упругой среды с постоянными Ламе, обозначаемых через λ и μ, будет следующим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz} \\ \tau_{xy} &= \mu e_{xy} \\ \tau_{xz} &= \mu e_{xz} \\ \tau_{yz} &= \mu e_{yz} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где обозначены деформации в этой точке:

$$\left.\begin{aligned} & e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}\,; \quad e_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}\,; \quad e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ & e_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\,; \quad e_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \end{aligned}\right] \tag{18}$$

$$e_{yz}=\frac{\partial U_y}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial y};\ \theta=\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z} \qquad (18)$$

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{yz}$ определяют внутренние силы, действующие на элементарный кубик, внутри упругого тела. Для перехода от таких внутренних сил возле границы с твердым телом к внешним силам, действующим на единицу площади наружной поверхности того же тела, вдоль осей OX; OY; OZ соответственно используем так называемые условия на контуре тела [12]. Эти силы будут ничем иным, как поверхностными плотностями искомых проекций сил реакций, действующих на тело в рассматриваемой точке его поверхности:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_{x\nu}}{d\Sigma}&=\sigma_x\cdot\ell+\tau_{xy}\cdot m+\tau_{xz}\cdot n\\ \frac{dP_{y\nu}}{d\Sigma}&=\tau_{xy}\cdot\ell+\sigma_y\cdot m+\tau_{yz}\cdot n\\ \frac{dP_{z\nu}}{d\Sigma}&=\tau_{zx}\cdot\ell+\tau_{zy}\cdot m+\sigma_z\cdot n\end{aligned}\right] \qquad (19)$$

где ℓ, m, n - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела - источника[x)] в рассматриваемой точке этой поверхности. В формуле (19) напряжения берутся для этих же точек среды, лежащих на границе с телом.

Уравнения (19) дают возможность найти как результирующую силу, так и результирующий момент сил реакции, входящих в уравнения движения источника. Результирующая сил при этом будет представлена не в виде суммы сил, действующих на отдельные точки, а интегралом по поверхности Σ соприкосновения тела - источника с упругой средой.

---

x) Граничные условия (19) на поверхности Σ справедливы при внешней нормали для среды. При этом P_x, P_y, P_z суть силы, действующие на с р е д у. Силы, действующие на т е л о будут теми же, но с обратным знаком. Чтобы учесть это, достаточно сменить знак внешней нормали, т.е. считать её внутренней для среды, или - что то же - внешней для тела.

$$P_x=\int\limits_\Sigma(\sigma_x\cdot l+\tau_{xy}\cdot m+\tau_{xz}\cdot n)\,d\Sigma$$

$$P_y=\int\limits_\Sigma(\tau_{xy}l+\sigma_y\cdot m+\tau_{yz}\cdot n)\,d\Sigma \qquad (20)$$

$$P_z=\int\limits_\Sigma(\tau_{zx}l+\tau_{zy}\cdot m+\sigma_z\cdot k)\,d\Sigma$$

Следует заметить, что поверхность Σ может быть как кусочной, так и целой, т.е. источник может соприкасаться со средой отдельными участками своей поверхности или всей поверхностью.

Аналогичную замену суммы на интеграл по поверхности соприкосновения нужно будет сделать при вычислении результирующего момента сил реакции относительно движущейся системы координат, связанной с вращающимся телом:

$$\mathcal{M}_\xi=\int\limits_\Sigma[\eta_\Sigma(\tau_{zx}l+\tau_{zy}\cdot m+\sigma_z\cdot n)-\zeta_\Sigma(\tau_{xy}l+\sigma_y\cdot m+\tau_{yz}n)]\,d\Sigma$$

$$\mathcal{M}_\eta=\int\limits_\Sigma[\zeta_\Sigma(\sigma_x l+\tau_{xy}\cdot m+\tau_{xz}\cdot n)-\xi_\Sigma(\tau_{zx}l+\tau_{yz}m+\sigma_z\cdot n)]\,d\Sigma \qquad (21)$$

$$\mathcal{M}_\zeta=\int\limits_\Sigma[\xi_\Sigma(\tau_{xy}l+\sigma_y\cdot m+\tau_{yz}\cdot n)-\eta_\Sigma(\sigma_x\cdot l+\tau_{xy}\cdot m+\tau_{xz}\cdot n)]\,d\Sigma$$

где ξ_Σ, η_Σ, ζ_Σ – проекции на движущиеся оси радиус-вектора $\vec{r}_\Sigma$ любой точки поверхности контакта тела со средой относительно центра масс, а напряжения взяты для точек этой поверхности.

Итак, если задано векторное поле смещений упругой среды, возникшее в результате любых перемещений тела-источника в этой среде, то по этому полю можно найти как результирующую сил реакции, так и результирующий момент. Но векторное поле сейсмических смещений само должно быть найдено и, следовательно, считается неизвестным. Поэтому для пользования уравнениями источника необходимо векторное поле смещений упругой среды выразить через величины $\vec{v}_c$ и $\vec{\omega}$, входящие в эти уравнения.

§ 4. К расчету упругого поля смещений среды

Упругое поле смещений в среде создается движением тела в ней. Задача нахождения векторного поля смещений или скоростей точек упругой среды сводится к следующему.

На поверхности контакта тела-излучателя с упругой средой

$$\Sigma(x, y, z) = 0 \tag{22}$$

задан вектор скорости

$$\vec{v}_{\Sigma} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\Sigma} \tag{23}$$

где

$$\vec{r}_{\Sigma} = x_{\Sigma} \cdot \vec{i} + y_{\Sigma} \cdot \vec{j} + z_{\Sigma} \cdot \vec{k} \tag{24}$$

или вектор смещений

$$\vec{U}_{\Sigma} = \int_0^t \vec{v}_{\Sigma}\, dt \tag{25}$$

Требуется найти смещение любой точки упругой среды

$$\vec{U}(x,y,z,t) = \vec{U}_p(x,y,z,t) + \vec{U}_s(x,y,z,t) \tag{26}$$

где $\vec{U}_p$ и $\vec{U}_s$ – вектора смещения продольных и поперечных волн соответственно. Они определяются следующим образом:

$$\vec{U}_p(x,y,z,t) = \operatorname{grad} \Phi(x,y,z,t) \tag{27}$$

$$\vec{U}_s(x,y,z,t) = \operatorname{rot} \vec{\Psi}(x,y,z,t) \tag{28}$$

где $\Phi(x,y,z,t)$; $\vec{\Psi}(x,y,z,t)$ –
скалярный (продольный) и векторный (поперечный) потенциал поля смещений $\vec{U}(x,y,z,t)$.
При этом:

$$\vec{\Psi} = \Psi_x \cdot \vec{i} + \Psi_y \cdot \vec{j} + \Psi_z \cdot \vec{k} \tag{31}$$

Для упругой среды эти потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{32}$$

$$\nabla^2 \vec{\psi}_x = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}_x}{\partial t^2} \tag{33}$$

$$div\, \vec{\psi} = 0 \tag{34}$$

В последних уравнениях V_p и V_s - скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно.

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{36}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{37}$$

где ρ - плотность среды, λ ; μ - упругие константы Ламе.

Условие (34) соленоидальности вектора $\vec{\psi}$ является достаточным, но необходимым для того, чтобы выражение (26) являлось решением уравнения движения упругой среды. Во всяком случае, если условие (34) не используется, то между φ и $\vec{\psi}$ должно быть установлено некоторое другое соотношение, учитывающее то, что искомый вектор U определен тремя его составляющими, а в уравнениях (32) и (33) вошли четыре скалярные функции.

Начальные условия движения среды определим заданием начального смещения и начальной скорости этого движения:

$$\vec{U}\big|_{t=t_0} = \vec{U}_0(x,y,z) \tag{38}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \vec{U}_1(x,y,z) \tag{39}$$

Поле смещений $\vec{U}(x, y, z, t)$, возникшее в результате перемещения тела, должно рассматриваться как излучение исследуемого инерционного источника. Как всякое излучение от источников ограниченных (небесконечных) размеров это излучение должно удовлетворять условиям излучения, выражающихся в отсутствии волн, приходящих из бесконечности [4].

Рассмотренная постановка задачи, как видим, полностью совпадает с внешней задачей Дирихле (первая краевая задача) теории упругости.

Как известно, первая краевая задача для системы уравнений (32)-(35) может быть поставлена и решена как в терминах перемещения, так и в терминах напряжений или потенциалов. Выбор терминов, в которых решается первая краевая задача, совпадает с терминами, в которых сформулированы краевые условия. Для рассматриваемой нами задачи движения источника граничные условия (25) формулируются в смещениях. Поэтому первая граничная задача должна формулироваться и решаться в смещениях.

Формулировка граничных условий для нашей задачи в иных терминах теряет смысл, т.к. именно в смещениях эти граничные условия входят в уравнения движения инерционного источника, а они являются предметом исследования для поставленных задач как по расчету сейсмического поля от таких излучателей, так и по расчету их конструкции.

К этому следует добавить, что заданием внешних сил и моментов, действующих на источник и являющихся первопричиной его движения и генерируемых им упругих волн, определяется вид движения источника, т.е. смещения точек поверхности источника, и, следовательно, вид граничных условий в смещениях, а не в напряжениях. Последние могут быть найдены, если это потребуется, только после решения краевой задачи и, следовательно, явятся функциями смещения поверхности источника.

Если же краевую задачу формулировать в напряжениях, то в общем случае остается неясным, как задать граничные условия в терминах напряжений, чтобы граничная поверхность совершала наперед заданное движение. Такое движение можно было бы подобрать, если была бы решена краевая задача, сформулированная для произвольного распределения напряжений на поверхности произвольной формы. Однако, такая задача в настоящее время не решена.

Поэтому остается единственный путь: по виду движения, вытекающему из уравнений движения инерционного источника, формулировать краевую задачу в смещениях, а не в напряжениях.

Необходимость решения первой краевой задачи в смещениях не позволяет использовать решения таких задач для безинерционных источников, т.к. для последних указанные граничные условия формулируются в напряжениях [10, 17, 12, 7, 6, 14].

Следует заметить, что для безинерционных излучателей решение краевой задачи является первым и единственным этапом в расчете таких излучателей. Для инерционного излучателя решение краевой задачи является промежуточным этапом его расчета.

§ 5. Схема расчета трех задач инерционного источника

Схема расчета инерционного излучателя состоит в следующем:

1) Решается первая краевая задача (см. § 4) в предположении, что смещение на поверхности контакта с упругой средой известно.

2) Найденное сейсмическое поле в результате решения этой краевой задачи пересчитывается в упругие напряжения на этой поверхности, которые оказываются функциями смещения поверхности контакта и упругих параметров среды. По этим напряжениям рассчитываются силы и моменты реакции связей (см. § 3).

3) Выраженные таким образом через смещения контура эти силы и моменты как функции таких смещений и упругих параметров среды подставляются в уравнения движения свободного абсолютно твердого тела (см. § 2).

Полученная такой подставкой система уравнений представляет собой уравнения движения инерционного излучателя в упругой среде. Они связывают скорость $\vec{V}_c$ центра масс и угловую скорость $\vec{\omega}$ движения тела-источника относительно этого центра с внешними силами и моментами. При этом в такие уравнения входят как упругие параметры среды, так и параметры, характеризующие конструкцию излучателя. Последние заключены в моментах инерции, общей массе и поверхности контакта излучателя со средой.

Такая система уравнений движения источника решается относительно $\vec{V}_c$ и $\vec{\omega}$. Знание их дает возможность рассчитать движение любой точки тела-источника по формуле $\vec{V}=\vec{V}_c+\vec{\omega}\times\vec{r}$ где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки источника. Тем самым решается вторая задача расчета инерционного источника, обсуждаемая в § 2 (найти движение тела-источника в упругой среде при заданных внешних силах).

Для решения первой задачи, указанной в этом же параграфе, (найти сейсмическое поле по заданным внешним силам инерционного источника) достаточно решение второй задачи (найденные значения $\vec{V}_c$ и $\vec{\omega}$) подставить в решение краевой задачи.

Решение третьей задачи (найти напряжения на поверхности источника при заданной конструкции источника, заданных параметрах упругой среды и внешних силах) находится пересчетом сейсмического поля, найденного в результате решения первой задачи, в напряжения на поверхности контакта тела-источника с упругой средой по формулам (I7) и (I8).

Рассмотренная общая схема расчета инерционных излучателей справедлива для упругой вмещающей среды. Это означает, что для реальных сейсмо-геологических сред колебания тела источника должны быть настолько малыми, чтобы были применимы уравнения движения упругой среды (в том числе вблизи и на самой поверхности источника). Это условие выполняется, если напряжения во вмещающей среде, вызванные инерционным источником, не превосходят предел упругости. Возможно построение общей схемы рассматриваемых излучателей также для пластических вмещающих сред или - для больших колебаний тела источника. Однако при этом подвергается сомнению целесообразность практической реализации такого режима работы излучателя, т.к. внешние активные силы затрачиваются в значительной мере на необратимые потери в пластической среде и сейсмический эффект (поле смещений в дальней зоне излучателя) не значителен; излучатель работает с малым коэффициентом полезного действия. Нежелательность больших колебаний в инерционном источнике оправдывается также тем, что инерционный источник реализуется на практике некоторыми инженерными конструкциями. Большие колебания этих конструкций вызовут в них пластические деформации, что приведет к практической их гибели от однократного использования в режиме больших колебаний.

Схема расчета инерционных излучателей дана для жесткого контакта поверхности излучателя с упругой средой. Реализация такого контакта на практике иногда затруднительна. Однако стремиться обеспечить жесткий контакт в экспериментах с инерционными излучателями в настоящее время необходимо, т.к. из-за отсутствия технических средств за контролем качества такого контакта нужно стремиться к крайнему случаю - жесткому контакту как способу "наилучшего сцепления" поверхности излучателя с упругой средой.

Если такое сцепление некачественное и контакт не может считаться жестким, то при расчете инерционных излучателей необходимо учитывать некачественный контакт.

При этом нужно знать, насколько некачественно "передаются" среде смещения и напряжения источника. Это может быть учтено следующими связями:

$$\vec{U} = \vec{\beta} + \vec{U}_c$$
$$\vec{P} = \vec{P}_\beta + \vec{P}_c \qquad (40)$$
$$\vec{M} = \vec{M}_\beta + \vec{M}_c$$

где вектора нежесткости $\vec{\beta}$, $\vec{P}_\beta$, $\vec{M}_\beta$ учитывают отклонение контакта от жесткого, при котором величины равны нулю. При нежестком контакте смещения источника $\vec{U}$ и среды $\vec{U}_c$ на контакте, а также равнодействующая реактивных сил $\vec{P}_c$ и моментов $\vec{M}$, действующих на поверхности источника, и такие же силы $\vec{P}_c$ и $\vec{M}_c$, действующие в среде на контакте, оказываются различными вследствие неравенства нулю трех указанных векторов нежесткости.

Они могут быть найдены при знании физических свойств контакта. В частности, контакт можно моделировать некоторой прослойкой из упругого материала. Контакт поверхностей прослойки, примыкающих к поверхности источника и среды, можно при этом считать жестким. Задавая различные упругие параметры прослойки в различных её местах можно придавать контакту поверхности источника и среды различные физические свойства.

Расчет такой прослойки сводится к тому, что нужно указать, как будут изменяться смещения и напряжения на одной из двух её поверхностей, если на другой поверхности эти величины известные.

Найдя напряжения на расчетной поверхности прослойки, можно интегрированием по её поверхности определить равнодействующую реактивных сил и моментов на этой поверхности. После этого из формул (40) можно определить вектора нежесткости.

Физические свойства контакта можно моделировать не только заданием упругих параметров указанной прослойки, но также, например, подбором векторов нежесткости такими, чтобы они обеспечивали те или иные заданные такие свойства.

Расчет инерционного излучателя при нежестком контакте остается таким же, как и при жестком, если только при составлении уравнения движения источника учесть, что от всех величин, относящихся к среде, нужно перейти по формулам (40) к величинам, относящимся к источнику.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бабичев А.И. Расчет взаимодействия упругих волн с цилиндрическими и сферическими препятствиями при помощи метода характеристик. Сб. "Труды Всесоюзного симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах". Баку, 1964, стр. 443-447.

2. Бабичев А.И. Плоскопараллельное движение шара в упругой среде. Сб. "Распространение упругих и упруго-пластических волн (материалы Ш Всесоюзного симпозиума). Изд-во "ФАН", УЗ ССР, Ташкент, 1969, стр. 29-4I.

3. Бабичев А.И. Поступательное движение шара в упругой среде. Изв. УЗ ССР, серия техническая, 1966, № 4.

4. Бабич В.М. и др. Линейные уравнения математической физики. Изд-во "Наука", М., 1964, стр. 307.

5. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд-во "Высшая школа", М., 196I, стр. 53.

6. Васильев Ю.И. Частотные характеристики цилиндрического излучателя конечной длины. Изв. АН СССР. Физика Земли, № I, 1968.

7. Гурвич И.И. К теории сферического излучателя поперечных сейсмических волн. Изв. АН СССР, Физика Земли, № I, 1968.

8. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики, ч. I. Изд-во "Просвещение", М., 1965.

9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. "Наука", М., 1970, стр. 399-4I3.

I0. Петрашень Г.И., Успенский И.Н. О распространении волн в слоистоизотропных упругих средах. Ученые записки ЛГУ, № 208, Л., 1956.

II. Пузырев Н.Н., Лебедев К.А., Лебедева Г.Н. Возбуждение поперечных сейсмических волн взрывами в полостях.

I2. Рахматулин Х.А. О распространении цилиндрических волн при пластических деформациях - скручивающий удар. ПММ, т. XII, № I, 1948.

I3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2, "Наука",М., 1970, стр. I8I-200.

I4. Сибиряков Б.П. Возбуждение сферических волн SH в упруго-пластической среде. Сб. "Поперечные и обменные волны в сейсморазведке". Изд-во "Недра", М., 1967.

I5. Скучик Е. Основы акустики, т. I, Изд-во ИЛ, 1968. стр. 195.

I6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Изд-во "Наука", М., 1967.

I7. Шемякин Е.И., Файншмидт Г.Л. Распространение волн в упругом полупространстве, возбуждением поверхностной касатель - ной силой. Ученые записки, ЛГУ, № 177, Л., 1954.

I8. Эвисон Ф. Электромеханический источник упругих колебаний. Сб. "Вопросы сейсмической разведки", ИЛ., М., 1963, стр. 40I.

Е.М. Аверко

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИНЕРЦИОННЫЙ ИСТОЧНИК СМЕШАННОГО ТИПА

В статье рассматривается цилиндрический бесконечно длинный инерционный источник упругих волн, движущийся возвратно поступательно в направлении, перпендикулярном его оси. Такой источник порождает цилиндрические продольные и поперечные волны в среде, где он располагается. Источник, генерирующий оба типа волн, можно назвать смешанным источником в отличие от "чистых" источников, порождающих только одну из указанных волн.

Рассматриваемый источник может служить двумерным аналогом трехмерного сейсмического источника типа направленной силы.

Такой источник находит применение в двумерном сейсмическом моделировании; рассмотрение его работы полезно как для этой области, так и для акустического каротажа и других сейсмических исследований.

Расчет такого источника проводится по общей схеме исследования инерционного источника [1].

§ I. Постановка задачи и некоторые общие соотношения

Пусть под действием внешних сил в безграничной упругой среде движется бесконечно длинный полый цилиндр с внешним и внутренним радиусами r_0 и r_1 соответственно. Такое движение происходит возвратно-поступательно в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Контакт его поверхности с упругой средой пусть будет жестким. Внешние силы равномерно распределены вдоль оси цилиндра и направлены по направлению движения цилиндра.

Требуется решить три задачи инерционного источника [1]: определить сейсмическое его поле; смещение его точек поверхности цилиндра и напряжения, возникающее на этой поверхности.

Неподвижную правовинтовую систему координат $Oxyz$ выберем следующим образом. Начало координат поместим в произвольно выбранную точку на оси цилиндра. Ось ОХ совместим с положительным направлением возвратно-поступательного движения; ось Oz – с осью симметрии цилиндра; ось ОУ – перпендикулярно осям ОХ и Oz (рис. I).

Начало подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$, связанной с цилиндром, совместим с центром масс отрезка этого цилиндра длиной h. Оси этой системы совместим с главными осями инерции такого цилиндра. Отсутствие вращения в рассматриваемом возвратно-поступательном движении цилиндра по оси ОХ означает, что при выбранной системе координат уравнение движения свободного твердого такого цилиндра будет совпадать с уравнением поступательного движения вдоль оси ОХ для свободного тела [I].

При этом такое уравнение вследствие однородности цилиндра и его симметрии может считаться уравнением движения некоторого отрезка цилиндра высотой h, симметричного относительно плоскости ОХУ. Центр масс такого цилиндра при отсутствии движения его совпадает с началом неподвижной системы координат. Указанное уравнение при этом будет описывать движение центра масс по оси ОХ под действием внешней силы.

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} \qquad (I)$$

и силы реакции связи

$$\vec{P} = P_x \cdot \vec{i} \qquad (2)$$

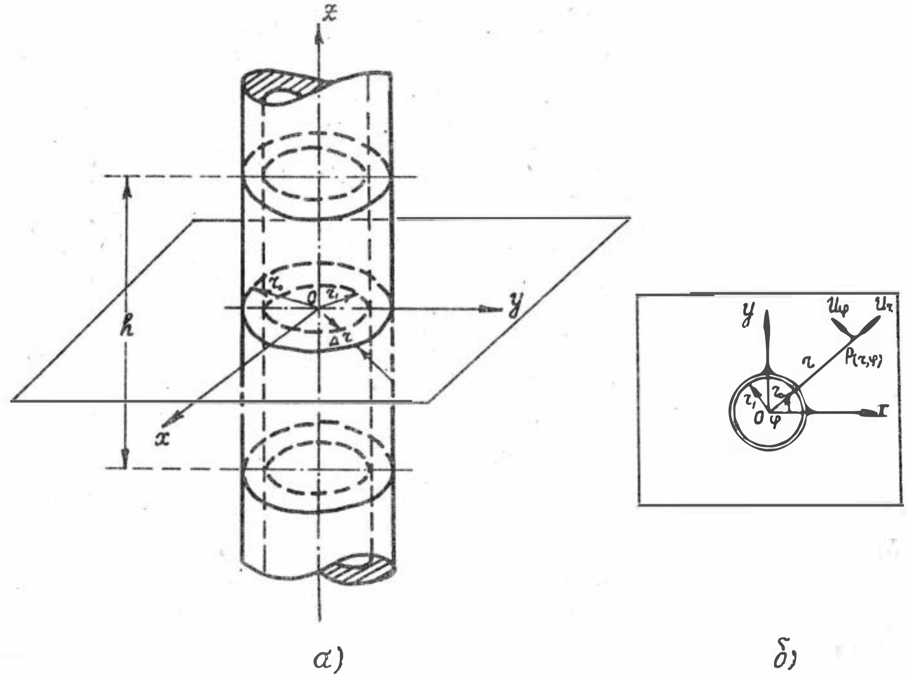
которые направлены по оси ОХ. Все остальные составляющие сил, а также все составляющие моментов должны быть равными нулю. Иначе уравнений движений было бы не одно, что противоречило бы рассматриваемому одному виду движения.

Масса рассматриваемого цилиндра высотой h будет следующей:

$$M = \pi r_0^2 h\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\rho_0 \qquad (3)$$

где ρ_0 -плотность вещества цилиндра. Если равномерные интенсивности внешних сил и сил реакций связей на единицу длины цилиндра обозначить через P_I и F_I, то уравнение поступательного движения вдоль оси ОХ (I) с учетом (3) запишется в виде:

$$\pi r_0^2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\rho_0 \ddot{X}_c = F_1 + P_1 \qquad (4)$$



Р и с. I. Цилиндр, движущийся возвратно - поступательно и перпендикулярно оси цилиндра. а) - пространственная задача; б) - плоская задача.

Для сплошного цилиндра ($r_1 = 0$) это уравнение будет:

$$\pi r_0^2 \cdot \rho_0 \ddot{X}_c = F_1 + P_1 \qquad (5)$$

Вошедшие в эти уравнения плотности сил реакций связи зависят от искомой функции X_c. Чтобы найти эту зависимость необходимо, как указывалось [1], решить первую краевую задачу в смещениях для рассматриваемого вида движения источника.

§ 2. Первая краевая задача для рассматриваемого источника

Движение бесконечно длинного рассматриваемого цилиндра происходит в направлении, перпендикулярном его оси. Поэтому смещения как цилиндра, так и среды, в любой плоскости, перпендикулярной оси OZ, следует считать не зависящими от координаты Z. Следовательно, краевая задача может считаться плоской (рис. 1б).

В дальнейшем считается, что смещение цилиндра стационарное и описывается выражением:

$$X_c = X_0(\omega) \cdot e^{j\omega t} \qquad (6)$$

где ω - частота колебаний цилиндра при его возвратно-поступательном движении; t - время; $X_0(\omega)$ - спектр смещения цилиндра.

Требуется найти смещение

$$\vec{U}(r, \varphi, \omega) = U_r \cdot \vec{e}_r + U_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \qquad (7)$$

для стационарного режима колебаний в любой точке $P(r, \varphi)$ упругой среды, где r, φ - координаты полярной системы; U_r, U_φ - радиальная и тангенциальная составляющие смещения среды.

Условие на контуре решаемой плоской задачи, как указывалось выше, выражается жестким контактом, согласно которому смещение в среде совпадает со смещением точек окружности контакта цилиндра со средой в плоскости ОХУ.

$$U_r\big|_{r=r_0} = X_0(\omega) \cos\varphi \qquad (8)$$

$$U_\varphi\Big|_{r=r_0} = -X_0(\omega)\cdot\sin\varphi \qquad (9)$$

Искомый вектор смещения в среде в любой её точке и в любой момент времени представим в виде безвихревого $\vec{U}_p$ и соленоидального $\vec{U}_s$ смещений

$$\vec{U} = \vec{U}_s + \vec{U}_p \qquad (10)$$

$$\vec{U}_p = grad\, \Phi(r,\varphi,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \qquad (11)$$

$$\vec{U}_s = rot\,\vec{\Psi}(r,\varphi,t) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\vec{e}_r - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\vec{e}_\varphi \qquad (12)$$

Введенные потенциалы для упругой среды должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2\Phi + K_p^2\Phi = 0 \qquad (13)$$

$$\nabla^2\Psi + K_s^2\Psi = 0 \qquad (14)$$

и граничным условиям (8) и (9), выражающим равенство полного вектора смещения в среде на границе с поверхностью цилиндра и смещения цилиндра как единого целого в направлении полярной оси.

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} = X_0(\omega)\cos\varphi \qquad (15)$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = -X_0(\omega)\sin\varphi \qquad (16)$$

$$r = r_0 \qquad (17)$$

где Φ_0 и Ψ_0 - частотные спектры функций Φ и Ψ.

В уравнениях (13) и (14) величины

$$K_p = \frac{\omega}{v_p} \qquad (18)$$

$$K_s = \frac{w}{v_s} \tag{19}$$

суть волновые числа для уравнения (13) и (14) соответственно.

При своем движении цилиндр явится источником волн в упругой среде. Следовательно, искомые решения должны удовлетворять условиям излучения. Этим условиям при учете выражения (6) удовлетворяют функции $H_n^{(2)}(z)$ Ганкеля n-го порядка второго рода.

Поэтому искомые общие решения уравнений (13) и (14) следует искать в следующем виде для полярной системы координат:

$$\Phi_0(w, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(z_p)(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{20}$$

$$\Psi_0(w, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(z_s)(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) \tag{21}$$

где обозначено

$$z_p = K_p r = 2\pi \frac{r}{\lambda_p} \tag{22}$$

$$z_s = K_s r = 2\pi \frac{r}{\lambda_s} \tag{23}$$

(λ_p, λ_s – длины продольных и поперечных волн).
В дальнейшем величины z_p и z_s будем называть относительными расстояниями для продольных и поперечных волн соответственно.

Подставив выражения (20) и (21) в граничные условия (15) и (17), получим, что для удовлетворения последних необходимо и достаточно выполнение условий

$$c_1 = b_1 = 0 \tag{24}$$

$$n = 1 \tag{25}$$

$$y_1 m_1 + y_2 m_2 = X_0 \tag{26}$$

$$y_1 m_3 + y_2 m_4 = X_0 \tag{27}$$

где обозначено:

$$m_1 = k_p H_1^{(2)'}(k)$$

$$m_2 = \frac{1}{r_0} H_1^{(2)}(e)$$

$$m_3 = \frac{1}{r_0} H_1^{(2)}(k)$$

$$m_4 = k_s H_1^{(2)}(\ell) \qquad (28)$$

$$y_1 = \alpha_1 A_1 , \quad y_1 = d_1 B_1$$

$$k = \frac{\omega r_0}{v_p}, \quad \ell = \frac{\omega r_0}{v_s}$$

Подставляя найденные из уравнений (26), (27) значения y_1 и y_2 в уравнения (20), (2I) с использованием соотношений (24) и (25), получим значения спектров потенциалов в следующем виде:

$$\Phi_0(\omega, r, \varphi) = \frac{2X_0(\omega)}{k_p} \cdot \frac{H_1^{(2)}(z_p)\cos\varphi}{H_2^{(2)}(k)[h(e) + h(k)]} \qquad (29)$$

$$\Psi_0(\omega, r, \varphi) = \frac{2X_0(\omega)}{k_s} \; \frac{H_1^{(2)}(z_s)\sin\varphi}{H_2^{(2)}(e)[h(e) + h(k)]} \qquad (30)$$

где обозначено:

$$h(\ell) = \frac{H_0^{(2)}(e)}{H_2^{(2)}(e)} \qquad (3I)$$

Используя эти равенства, получим искомые смещения в среде:

$$\vec{U}_p(\omega, r, \varphi) = \frac{X_0(\omega)}{h(e)+h(k)} \cdot \frac{H_2^{(2)}(z_p)}{H_2^{(2)}(k)} \Big\{ [h(z_p) - 1]\cos\varphi \cdot \vec{e}_r - [h(z_p)+1]\sin\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \Big\} \qquad (32)$$

$$\vec{U}_s(\omega,r,\varphi) = -\frac{X_0(\omega)}{h(k)+h(l)} \cdot \frac{H_2^{(2)}(z_s)}{H_2^{(2)}(l)} \left\{ \left[h(z_s)-1\right] \sin\varphi \cdot \vec{e}_\varphi - \right. \tag{33}$$

$$\left. -\left[h(z_s)+1\right] \cos\varphi \cdot \vec{e}_r \right\}$$

§ 3. Исследование решения первой краевой задачи

а) Функции источника, затухания, отклонения.

В дальнейшем используем то обстоятельство, что, как видно из формул (32), (33), вектор смещений для продольной волны получается из вектора смещения поперечной волны, если в последней сделать следующую формальную замену значков, аргументов и параметров:

$$\begin{gathered} s \to p \\ z_s \to z_p \\ k \to l \\ l \to k \\ \varphi \to \frac{\pi}{2} - \varphi ; \quad \varphi_s \to \frac{\pi}{2} - \varphi_p \end{gathered} \tag{34}$$

(Углы φ_s ; φ_p будут введены ниже).

Величина (модуль) полученных смещений и их направление могут быть найдены по обычным правилам получения модуля и направления вектора. Они оказываются следующими:

$$U_p - X_0(\omega) f_{0p}(k,l) \cdot f_1(z_p) \cdot f_2(z_p, \frac{\pi}{2} \cdot \varphi) \cdot \mathcal{D}(\varphi) \tag{35}$$

$$U_s = X_0(\omega) \cdot f_0(k,l) \cdot f_1(z_s) \cdot f_2(z_s, \varphi) \cdot \mathcal{D}(\varphi) \tag{36}$$

$$tg\,\varphi_p = -\frac{h(z_p)+1}{h(z_p)-1}\, tg\,\varphi \tag{37}$$

$$ctg\,\varphi_s = -\frac{h(z_s)+1}{h(z_s)-1}\, ctg\,\varphi \tag{38}$$

где обозначено U_p, U_s и φ_p, φ_s – модуль и направление вектора смещений для продольной и поперечной волн соответственно. При этом направление смещения определяется углом, отсчитываемым против часовой стрелки от направления радиуса вектора, проведенного в данную точку среды из начала выбранной полярной системы координат.

В формулах (34) и (35) обозначено

$$f_0(k,\ell)=\frac{1}{h(k)+h(\ell)}\cdot\frac{1}{H_2^{(2)}(\ell)} \tag{39}$$

$$f_1(z_s)=H_0^{(2)}(z_s)-H_2^{(2)}(z_s) \tag{40}$$

$$f_2(z_s,\varphi)=\sqrt{1+ctg^2\varphi_s(z_s,\varphi)} \tag{41}$$

$$D(\varphi)=\sin\varphi \tag{42}$$

Функции, определенные формулами (39), (42), назовем функцией источника, затухания, отклонения и диаграммой направленности соответственно.

Такие названия можно пояснить следующим. Функция источника зависит только от параметров источника, находящегося в упругой среде, и не зависит от координат точек наблюдения сейсмического поля.

Функция затухания определяет меру затухания сейсмического поля в процессе его распространения в среде и зависит от относительного расстояния точки наблюдения, но не зависит от параметров источника и от полярного угла.

Диаграмма направленности определяет направленность излучения рассматриваемого источника по полярному углу, зависит только от него и не зависит от других величин.

Функция отклонения определяет меру отклонения сейсмического поля рассматриваемого излучателя от структуры поля, для точечного излучателя, вычисляемое по лучевому методу в нулевом приближении. При таком вычислении поле представляется, как известно, произведением функции источника, затухания и диаграммы направленности [2].

Функция отклонения зависит как от относительного расстояния, так и от полярного угла точки наблюдения. Представить её в виде сомножителей, каждый из которых зависел бы только от одной из этих переменных не удается, как это видно из (42) и (38).

б) Частотные характеристики излучателя по продольным и поперечным волнам.

Введенные по формулам (37) - (39) функции - комплексные. Поэтому модуль вектора смещения можно представить в следующем виде:

$$U_p = |U_p| e^{j\psi_p} \tag{43}$$

$$U_s - |U_s| e^{j\psi_s} \tag{44}$$

где $|U_p|$, $|U_s|$ и $|\psi_p|$, $|\psi_s|$ - модуль модуля вектора и частотно-фазовая характеристика для смещений продольных и поперечных волн соответственно.

Для удобства дальнейших исследований полезно ввести в рассмотрение частотные характеристики рассматриваемого излучателя. Под такими характеристиками (по аналогии с линейными четырехполюсниками) понимается отношение комплексной величины смещения в рассматриваемой точке среды к спектру смещения точек поверхности цилиндра.

Для продольной и поперечной волн эти характеристики будут следующими:

$$\frac{|U_p|}{|X_0(\omega)|} = \frac{|U_p|}{|X_0(\omega)|} e^{j(\psi_p - \psi_x)} \tag{45}$$

$$\frac{|U_s|}{|X_0(\omega)|} = \frac{|U_s|}{|X_0(\omega)|} e^{j(\psi_s - \psi_x)} \tag{46}$$

Амплитудная и фазовая характеристики частотных характеристик рассматриваемого излучателя при этом совпадают с множителем, стоящим в последних формулах перед экспонентой, и с показателем этой экспоненты для продольных и поперечных волн соответственно.

Исследование полученного решения задачи достаточно провести для одной из двух волн: продольной или поперечной. При этом, как отмечалось выше, результаты для одной волны могут быть перенесены на другую волну, если учесть форму перехода (34).

Проведем исследования для поперечной волны. В общем случае угол φ, определяемой формулой (38), - комплексный.

Пусть

$$ctg\,\varphi_s = a + jb = -\frac{h(Z_p)+1}{h(Z_p)-1}\,ctg\,\varphi \qquad (47)$$

При этом вещественная и мнимая части $ctg\,\varphi_s$ должны быть следующими:

$$a(Z_s,\varphi) = \frac{\left[J_0^2(Z_s) - J_2^2(Z_s)\right] + \left[N_0^2(Z_s) - N_2^2(Z_s)\right]}{\left[J_0(Z_s) - J_2(Z_s)\right]^2 - \left[N_0(Z_s) - N_2(Z_s)\right]^2}\,ctg\,\varphi \qquad (48)$$

$$b(Z_s,\varphi) = \frac{2\left[J_2(Z_s)N_0(Z_s) - J_0(Z_s)N_2(Z_s)\right]}{\left[J_0(Z_s) - J_2(Z_s)\right]^2 - \left[N_0(Z_s) - N_2(Z_s)\right]^2}\,ctg\,\varphi \qquad (49)$$

Амплитудная и фазовая характеристики рассматриваемого излучателя для поперечных волн при этом оказываются равными:

$$\left|\frac{U_s}{X_0(\omega)}\right| = \left|f_0(k,l)\right| \cdot \left|f_1(Z_s)\right| \cdot \left|f_2(Z_s,\varphi)\right| \cdot \left|\sin\varphi\right| \qquad (50)$$

$$\psi_s - \psi_x = arc\,tg\,\frac{Im\,f_0(k,l)}{Re\,f_0(k,l)} + arc\,tg\,\frac{Im\,f_1(Z_s)}{Re\,f_1(Z_s)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2a(Z_s,\varphi)\,b(Z_s,\varphi)}{1 + a^2(Z_s,\varphi) - b^2(Z_s,\varphi)} \qquad (51)$$

где введены обозначения для модулей соответствующих функций

$$|f_0(k,e)| = \sqrt{[Re\, f_0(k,e)]^2 + [J_m f_0(k,e)]^2} \qquad (52)$$

$$|f_1(z_s)| = \sqrt{[Re\, f_1(z_s)]^2 + [J_m f_1(z_s)]^2} \qquad (53)$$

$$|f_2(z_s,\varphi)| = \sqrt[4]{[1+a^2(z_s,\varphi)-b^2(z_s,\varphi)+4a^2(z_s,\varphi)b^2(z_s,\varphi)} \qquad (54)$$

Мнимые (J_m) и вещественные (Re) части функций могут быть найдены по обычным правилам, если представить функции Ганкеля, входящие в $f_0(k,e)$ и $f_1(z_s)$ через функции Бесселя и Неймана.

в) Исследование функции отклонения.

Из формулы (48) видно, что в общем случае амплитудную характеристику нельзя представить в виде отдельных сомножителей, каждый из которых зависит только от расстояния или угла. Мешает такому разделению функция $|f_2(z_s,\varphi)|$, зависящая и от относительного расстояния z_s и от полярного угла φ . Там, где эта функция оказывается, например, постоянной величиной, сейсмическое поле представляется указанным способом.

Эта функция постоянна и равна единице в следующих случаях:

I) $$\varphi = \frac{\pi}{2}(1 \pm 2n) \qquad (55)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2) $$z_s \gg 1 \qquad (56)$$

Для обоих случаев выполняется соотношение

$$a(z_s,\varphi) = b(z_s,\varphi) = 0 \qquad (57)$$

и поэтому

$$\left| f_2(z_s, \varphi) \right| = 1 \tag{58}$$

$$\arg f_2(z_s, \varphi) = 0 \tag{58-a}$$

Выполнение равенства (57) при условии (55) следует непосредственно из уравнений (48) и (49). Выполнение этого же равенства для условия (56) можно проверить непосредственной подстановкой асимптотических значений цилиндрических функций [6]:

$$\begin{aligned} J_0(z) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ J_2(z) &\simeq -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_0(z) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_2(z) &\simeq -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{59}$$

в равенство (48) и (49). Такой же подстановкой цилиндрических функций

$$J_0(z) = 1 \tag{60}$$

$$J_2(z) = \frac{z^2}{8} \tag{61}$$

$$N_0(z) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma_1 z} \tag{62}$$

$$N_2(z) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{z^2} \tag{63}$$

$$\gamma_1 = 1{,}7801 \tag{64}$$

для малых значений их аргумента

$$z \ll 1 \qquad (65)$$

(ближняя зона излучателя) можно убедиться, что условие (57), а значит, и равенство (58) не выполняются.

Таким образом, амплитудная и фазовая характеристики рассматриваемого излучателя для дальней зоны излучателя или для направления, перпендикулярного движению цилиндра, независимо от того, в какой зоне (ближней или дальней) располагается точка наблюдения даются в таком же виде, как в методе [2] представления сейсмического поля. В дальнейшем исследование ведется в основном или для дальней зоны или для указанного направления.

г) Ф у н к ц и и и с т о ч н и к а. Её модуль представлен формулой (52), которая может быть записана в виде

$$|f_0(k,l)| = \frac{1}{\sqrt{[Re\,h(k)+Re\,h(l)]^2+[Im\,h(k)+Im\,h(l)]^2}}\,\frac{1}{|H_2^{(2)}(l)|} \qquad (66)$$

Для малых значений относительно радиуса цилиндра

$$0 \neq k < l \ll 1 \qquad (67)$$

Эта функция при использовании формул (60) - (64) оказывается следующей:

$$|f_0(k,l)| = \frac{\pi}{\sqrt{\Big\{ln\Big[\Big(\frac{2}{\gamma_1}\cdot\frac{1}{l}\Big)^{1+\gamma^2}\cdot\frac{1}{\gamma^{\gamma^2}}\Big]\Big\}+\frac{\pi}{4}(1+\gamma^2)^2}}$$

$$\gamma = \frac{V_s}{V_p}; \quad l \neq 0 \qquad (68)$$

Для больших таких радиусов

$$l > k \gg 1 \qquad (69)$$

эта функция определяется следующим соотношением:

$$|f_0(k,l)| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{l} \qquad (70)$$

Модуль функции источника продольной волны для рассмотренных относительных радиусов цилиндра может быть легко получен из формул (68) и (69) при замене, определяемой формулой (34).

Поведение рассмотренных функций при γ = 0,585 и различных значениях радиуса показано на рис. 2. Как видно из этого рисунка,

I) поперечная волна "выходит" из источника при любых относительных радиусах всегда более интенсивная, чем продольная (кривая $\mathcal{S}$ расположена выше кривой P);

2) рост интенсивности обеих волн с увеличением относительного радиуса цилиндра не одинаков для различных значений этого радиуса: наиболее сильный рост наблюдается при диаметрах цилиндра, не превосходящих приблизительно десятой доли длины продольной волны, излучаемой этим источником. При дальнейшем увеличении радиуса цилиндра этот рост значительно уменьшается, но все же интенсивность обеих волн растет, приближаясь к закону, определяемому при больших радиусах формулой (70) и соответствующей ей формулой для продольной волны.

Отношение смещений поперечной и продольной волн, вышедших из источника, приведено на этом же рисунке. Оно определяется следующей формулой:

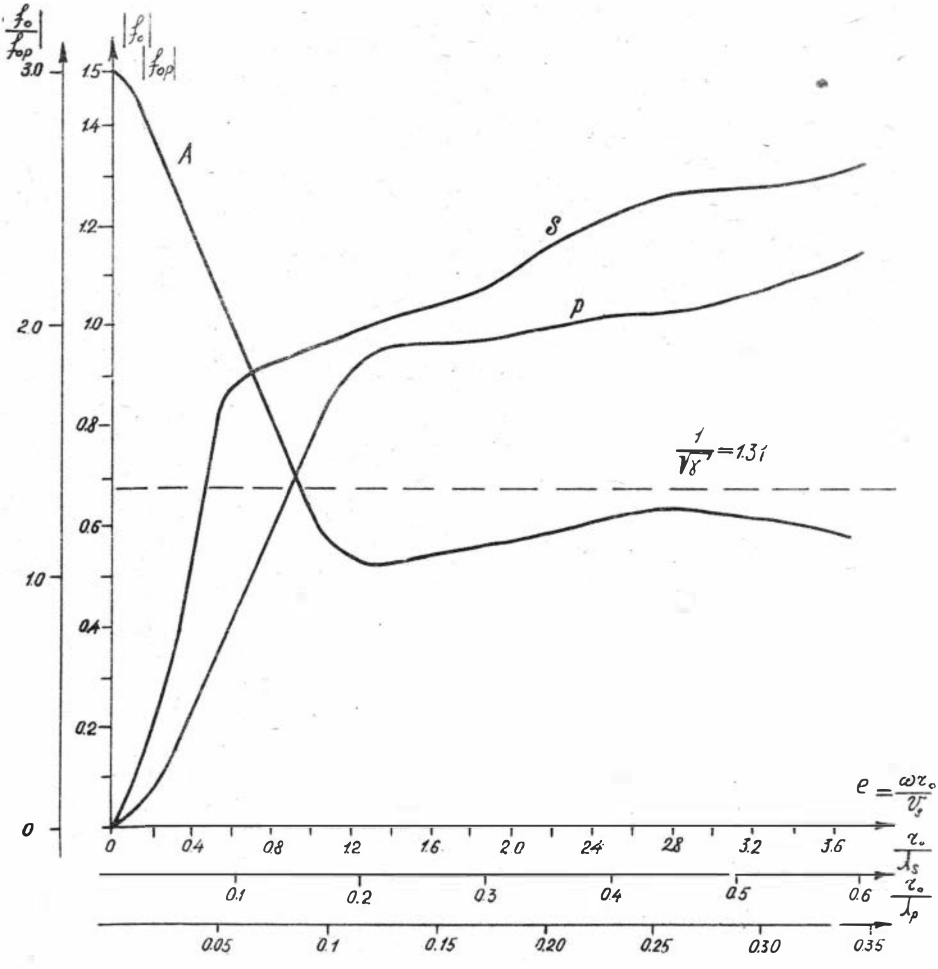
$$\frac{f_o(k,e)}{f_{op}(k,e)}=\frac{|H_2^{(2)}(k)|}{|H_2^{(2)}(e)|}=\sqrt{\frac{[J_2(k)]^2+[N_2(k)]^2}{[J_2(e)]^2+[N_2(e)]^2}}\cdot e^{j\xi} \qquad (7I)$$

$$\xi = arc\,tg\left[-\frac{N_2(k)}{J_2(k)}\right] - arc\,tg\left[-\frac{N_2(e)}{J_2(e)}\right] \qquad (72)$$

При учете формул (60) - (64) для малых радиусов получим модуль и фазу рассматриваемого отношения в следующем виде для этих радиусов:

$$\left|\frac{f_o(k,e)}{f_{op}(k,e)}\right| = \frac{1}{\gamma^2} \qquad (73)$$

$$\xi = \frac{32}{\pi}\cdot\frac{1-\gamma^4}{\ell^4} \qquad (74)$$



Р и с. 2. Модули функций источника и их отношение (A) для поперечных (S) и продольных (P) волн. (γ = 0,585)

Это значит, что независимо от величины малого радиуса источник генерирует в основном поперечные волны, смещение в которых не менее, чем в три раза превосходит смещение для продольной волны. Для "мягких" сред, у которых $\gamma < 0{,}585$, соотношение смещений в поперечной и продольной волн будет больше, чем для твердых сред ($\gamma \geq 0{,}585$).

Таким образом, цилиндр малого относительного радиуса порождает преимущественно поперечные волны, смещение в которых в γ^{-2} раз больше, чем для продольных волн.

Этот вывод совпадает с выводом о рассматриваемом соотношении для источника типа сосредоточенной ("точечной") силы [3]. Таким образом, рассматриваемый цилиндрический источник малого размера эквивалентен сосредоточенной силе при сравнительном изучении генерирования ими продольных и поперечных волн в дальней зоне.

Для больших относительных радиусов при использовании формул (64) получим следующие соотношения:

$$\left|\frac{f_o(k,\ell)}{f_{op}(k,\ell)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \qquad (75)$$

$$\xi = -\ell - k \qquad (76)$$

По сравнению с источниками малого радиуса отношение смещений поперечной и продольной волн, оставаясь больше единицы, уменьшилось.

В связи с этим источники большого относительного радиуса менее выгодны для возбуждения поперечных волн, т.к. для них отношение сигнал/помеха (если за помеху принять продольную волну) снизилось.

Зависимость рассматриваемого отношения как для малых, так и средних относительных радиусов цилиндра при $\gamma = 0{,}585$ представлена на рис. 2,А. Для малых радиусов это отношение равно $\gamma^{-2} = 3$ и остается постоянным приблизительно до $\frac{r_o}{\lambda_p} < 0{,}01$. При дальнейшем увеличении радиуса отношение начинает резко убывать приблизительно на $2{,}34 \cdot 10^{-3}$ на каждую единицу отношения радиуса к длине продольной волны. При $\frac{r_o}{\lambda_p} > 0{,}1$ рассматриваемое отношение остается приблизительно постоянной, изменяясь в пределах единицы и $\gamma^{-\frac{1}{2}} = 1,31$, приближаясь по мере увеличения к последнему пределу как к асимптотическому значению этого отношения при больших относительных радиусах цилиндра.

д) Функция затухания для поперечной волны определяется формулой (40), её модуль и фаза оказываются следующими:

$$|f_1(z_s)| = \sqrt{[J_0(z_s) - J_2(z_s)]^2 + [N_0(z_s) - N_2(z_s)]^2} \qquad (77)$$

$$\arg f_1(z_s) = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{N_0(z_s) - N_2(z_s)}{J_0(z_s) - J_2(z_s)}\right] \qquad (78)$$

При переходе к такой же функции для продольной волны необходимо использовать формулы (34). Для дальнейшэй зоны при использовании формул (52) рассматриваемые функции будут такими:

$$|f_1(z_s)| = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_s}} \qquad (79)$$

$$\arg f_1(z_s) = -\left(z_s - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (80)$$

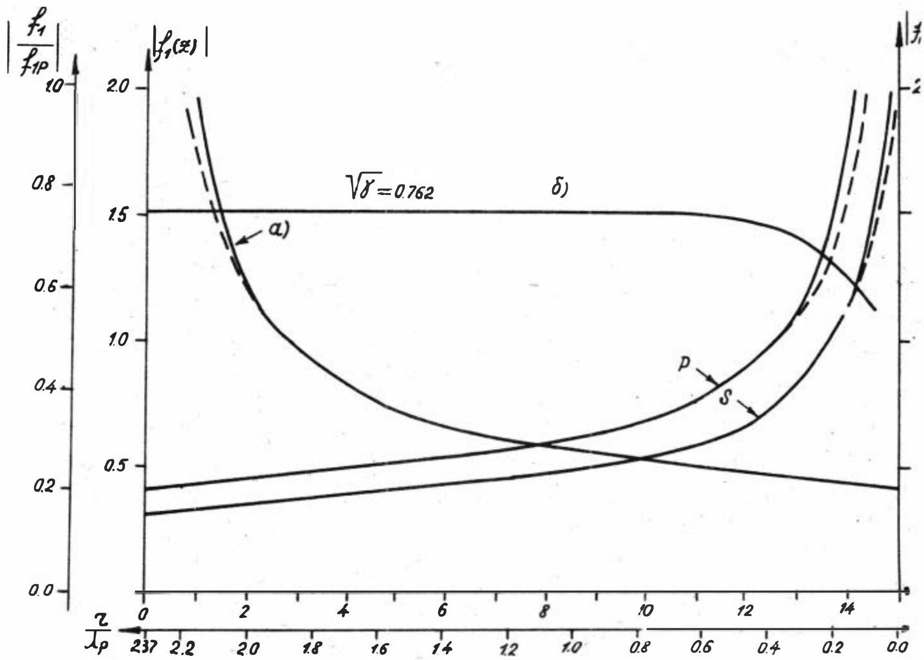
для поперечной волны и при замене аргумента по формуле (34) - для продольной волны.

Поведение модуля функции затухания как для ближней, так и для дальней зоны дано на рис. 3, на этом же рисунке при соотношении скоростей распространения поперечной и продольной волн, равном 0,585, представлены модули функций затухания для этих волн (для них ось ординат расположена в правой части рисунка, ось абсцисс в масштабе $\frac{r}{\lambda_p}$ направлена справа-налево). Из рис. 3-а видно, что модуль функции затухания, рассчитанный по точной формуле (78), совпадает с погрешностью, не большей 3% при

$$z \geqslant 1 \qquad (81)$$

с таким же модулем, рассчитанным для дальней зоны по формуле (79).

Для продольных и поперечных волн формула (81) переписывается в следующем виде:



Р и с. 3. Модуль функции затухания и их отношение в зависимости от относительного расстояния.

а) Любое относительное расстояние, Р) относительное расстояние для продольной волны, S) То же для поперечной волны. Пунктиром представлен график модуля функции затухания в дальней зоне.

б) отношение модулей функций затухания поперечной и продольной волн (γ = 0,585).

$$z = z_p > 1 \qquad (82)$$

$$z = z_s \geqslant 1 \qquad (83)$$

соответственно.

Указанная погрешность уменьшается по мере увеличения относительного расстояния. С такой погрешностью можно было бы определить расстояния, при которых рассматриваемую область можно считать дальней зоной, если при этом учесть функцию отклонения при оценке этой зоны. Эта функция, как было сказано выше, равна единице, например, для направления, перпендикулярного (параллельного) движению цилиндра для поперечных (продольных) волн.

Поэтому для указанных направлений соотношения (82), (83) могут быть приняты как оценки начальной границы дальней зоны излучателя для продольной и поперечной волн соответственно. Для двух относительных расстояний

$$z_1 > z_2 \qquad (84)$$

как следует из рис. 3-а, выполняется соотношение

$$\left| \frac{f_2(z_2)}{f_1(z_1)} \right| < 1 \qquad (85)$$

Это значит, что

I) смещение в волне (независимо от того, продольная она или поперечная) одной и той же частоты будет быстрее затухать с расстоянием, измеренным в абсолютных единицах, в низкоскоростных (v_1) средах, чем в высокоскоростных (v_2).

$$v_1 < v_2 \qquad (86)$$

2) высокочастотная (ω_2) волна в одной и той же среде, будет затухать быстрее, чем низкочастотная (ω_1)

$$\omega_2 > \omega_1 \qquad (87)$$

при прочих равных условиях.

Первое отмеченное свойство общеизвестно по многочисленным сейсмическим экспериментам. Следует при этом особо подчеркнуть, что это свойство получено в пределах теории упругости и, следовательно, с поглощающими свойствами среды не связано. Это обстоятельство весьма существенно при количественном определении поглощающих свойств, основанных на сейсмических наблюдениях в одной точке с последующим проведением частотного анализа нестационарного сигнала продольной и поперечной волны.

Отмеченное выше второе свойство модуля функции затухания означает, что высокочастотные составляющие нестационарной волны будут затухать быстрее, чем низкочастотные. Поэтому при больших абсолютных расстояниях в одной и той же среде для одного и того же типа волны (продольная или поперечная волна) её форма будет обедняться высокочастотными составляющими и волна будет становиться низкочастотной по сравнению с малыми расстояниями, измеряемыми в абсолютных единицах. Таким образом, упругая среда действует на распространяющуюся в ней волну как фильтр низких частот, обогащающий временную форму волны низкочастотными составляющими. Модуль этого фильтра, как функция аргумента z представлен на рис. 3,а. Сократив масштаб оси абсцисс в ($\frac{r}{v}$) число раз, получим этот фильтр как функцию частоты ω .

Изменив шкалу оси абсцисс рис. 3,а по правилам $z = z_p$ и $z = z_s$ получим модуль функций затухания (или модули упомянутых фильтров) для продольных и поперечных волн. На рис. 3, P,S представлены названные функции при аргументе, равном относительному расстоянию, измеренному в длинах продольных волн при γ =0,585. Как видно из рисунка, модуль функции затухания для продольной волны (рис. 2, P) больше того же модуля для поперечной волны (рис. 2, S) в одной и той же точке их приема. Это правило справедливо не только для γ = 0,585, но и для любых соотношений скоростей распространения поперечных и продольных волн в одной и той же среде, т.к. для этого соотношения всегда выполняется неравенство

$$z_s > z_p \tag{88}$$

и, следовательно, в силу неравенства (85) всегда выполнимо указанное правило. Используя равенство (79), получим, что в дальней зоне рассматриваемое соотношение будет следующим в одной и той же точке приема продольных и поперечных волн:

$$\left|\frac{f_1(z_s)}{f(z_p)}\right| = \sqrt{\gamma} < 1 \tag{89}$$

Это неравенство совпадает с неравенством (85) при выполнении условия (84), соответствующего неравенству (88). При γ = 0,585 модуль функции затухания в дальней зоне приблизительно на 30% больше такой же функции для поперечных волн (рис. 3,б).

е) Фазовая характеристика излучателя дается формулой (5I) для поперечной волны и аналогичной формулой для продольной волны. В дальней зоне для всех направлений и в ближней зоне для направления, перпендикулярного (параллельного) движению цилиндра для поперечной (продольной) волны третье слагаемое в формуле (5I) равно нулю, и фазовая характеристика излучателя будет определяться двумя первыми слагаемыми, соответствующими фазовой характеристике функций источника и затухания.

Первая из них определяется следующим образом для поперечной волны:

$$\arg f_0(k,\ell) = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{J_m h(k) + J_m h(\ell)}{R_e h(k) + R_e h(\ell)}\right] - \tag{90}$$

$$- \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{N_2(\ell)}{J_2(\ell)}\right]$$

$$R_e h(z) = \frac{J_0(z) J_2(z) - N_0(z) N_2(z)}{[J_2(z)]^2 - [N_2(z)]^2} \tag{9I}$$

$$J_m h(z) = \frac{J_0(z) N_2(z) - N_0(z) \cdot J_2(z)}{[J_2(z)]^2 - [N_2(z)]^2} \tag{92}$$

Для больших размеров излучателя (см. формулу (69)) при использовании формул (59) имеем:

$$\begin{gathered} R_e h(k) = R_e h(\ell) = -1 \\ J_m h(k) = J_m h(\ell) = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{N_2(\ell)}{J_2(\ell)}\right] = -\left(\ell - \frac{\pi}{4}\right) \end{gathered} \tag{93}$$

Поэтому для таких излучателей:

$$\arg f_0(k,\ell) = \ell - \frac{\pi}{4} \qquad (94)$$

для поперечной волны и

$$\arg f_{0k}(k,\ell) = k - \frac{\pi}{4} \qquad (95)$$

для продольной волны.

В случае малых размеров излучателя, определяемых формулой (67), будем иметь при использовании равенств (60)-(64)

$$(96)$$

$$R_e h(z) = \frac{N_0(z)}{N_2(z)} = \frac{z^2}{2} \ln \frac{2}{\gamma_1 z}$$

$$J_m h(z) = \frac{\pi z^2}{4}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{N_2(z)}{J_2(z)}\right] = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{32}{\pi}\cdot\frac{1}{z^4}\right)$$

Подставив эти значения в формулу (90) и прибавив к результату фазовую характеристику функции затухания для дальней зоны (формула (80)), получим значение фазовой характеристики малого излучателя поперечных волн для этой волны в следующем виде:

$$\psi_s - \psi_x = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{\pi}{4}\,\frac{1+\gamma^2}{0{,}0953(1+\gamma^2) - \ln(\ell k^{\gamma^2})}\right] + \qquad (97)$$

$$+ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{32}{\pi}\,\frac{1}{\ell^4}\right) - \left(z_s - \frac{\pi}{4}\right)$$

На основе этой формулы и способа перехода (34) можно получить такую характеристику для продольных волн.

Фазовую характеристику большого излучателя поперечных волн для дальней зоны получим, сложив равенства (94) и (80)

$$\psi_s - \psi_x = -(z_s - \ell) \qquad (98)$$

и соответственно для продольных волн:

$$\psi_p - \psi_x = -(z_p - k) \qquad (99)$$

Линейность фазовой характеристики большого излучателя говорит о том, что смещение как в продольной, так и в поперечной волне от такого излучателя будет совпадать со смещением цилиндра с точностью до множителя, не зависящего от частоты и со сдвигом во времени на величины

$$\left[-\frac{z-z_0}{V_s}\right] \quad и \quad \left[-\frac{z-z_0}{V_p}\right] \qquad для$$

поперечных и продольных волн соответственно.

Для малого излучателя в дальней зоне фазовая характеристика - нелинейная функция и различная для продольных и поперечных волн. Поэтому указанного выше совпадения смещения цилиндра и смещений в продольной и поперечной волн наблюдаться не будет. Спектры смещения в этих волнах также будут различными.

ж) Диаграмма направленности рассматриваемого излучателя для дальней его зоны и для ближней зоны при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ для поперечных и продольных волн соответственно представляет собой синусоидальную (косинусоидальную) функцию полярного угла (поперечной) волны. В плоскости, перпендикулярной оси цилиндра такая диаграмма направленности совпадает с окружностью радиуса I/2, лежащей в этой плоскости и имеющей центр в точке с координатами (I/2; 0) для продольной волны и (I/2, $\frac{\pi}{2}$) для поперечной волны. Отрицательный лепесток диаграммы представляет собой такую же окружность, но её центр совпадает с точкой, координаты которой суть (I/2; π) и (I/2; 3/2 π) для продольной и поперечной волн соответственно.

з) Амплитудная характеристика излучателя (фиктивные источник и среда). Эту характеристику целесообразно рассматривать для дальней зоны и для направлений в ближней зоне, перпендикулярном (параллельным) движению цилиндра для поперечной (продольной) волны.

В этом случае амплитудная характеристика излучателя представляет собой произведение модулей функции источника (64) затухания (77) и диаграммы направленности:

$$\frac{U_s}{X_0(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{[R_e h(z_s) - J_2(z_s)]^2 + [J_m h(k) + J_m h(\ell)]^2}} \cdot \frac{1}{|H_2^{(2)}(\ell)|} \cdot \tag{100}$$

$$\cdot \sqrt{[J_0(z_s) - J_2(z_s)]^2 + [N_0(z_s) - N_2(z_s)]^2} \cdot \sin\varphi$$

Для дальней зоны последний множитель, представляющий собой модуль функции затухания, оказывается равной следующей величине, если формулу (79) несколько видоизменить:

$$|f_1(z_s)| = \sqrt{[J_0(z_s) - J_2(z_s)] + [N_0(z_s) - N_2(z_s)]^2} \cong \tag{101}$$

$$\cong 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\ell}} \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r}}$$

Видоизменение, выразившееся в искусственном введении множителя $\ell^{-1/2}$ дает возможность частотно-избирательные свойства упругой среды, отмеченные выше, включить в функцию фиктивного источника. Под таким источником понимается воображаемый источник, который при отсутствии частотно-избирательных свойств среды излучает в точку приема упругих колебаний дальней зоны такой же частотный спектр, какой излучается в эту точку реальным источником при наличии частотно-избирательных свойств среды.

Таким образом, модуль функции фиктивного источника определяется следующим образом:

$$|f_0^*(k,\ell)| = \frac{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{[R_e h(k) + R_e h(\ell)]^2 + [J_m h(k) + J_m h(\ell)]^2}\, |H_2^2(\ell)| \sqrt{\ell}} \tag{102}$$

Фиктивная функция затухания для фиктивной упругой среды, не обладающей частотно-избирательными свойствами, как следует из формулы (100), будет такой

$$|f_1^*(z_s)| = \sqrt{\frac{r_0}{r}} \tag{103}$$

Заметим, что возможность введения фиктивного источника и фиктивной упругой среды основана только на приближенном представлении функции затухания. Действительно, формула (79), а значит и формула (101) получена при асимптотическом представлении

(59) функций Бесселя и Неймана в их первом приближении. Если учесть последующие приближения, например, второе, то функция затухания будет такой:

$$|f_1(Z_s)| = \sqrt{\frac{2}{\pi Z}\left(4 + \frac{3.96}{Z_s^{\ 2}}\right)} \qquad (104)$$

$$\arg f_1(Z_s) = -\left(Z_s - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{0.997}{Z_s}\right) \qquad (105)$$

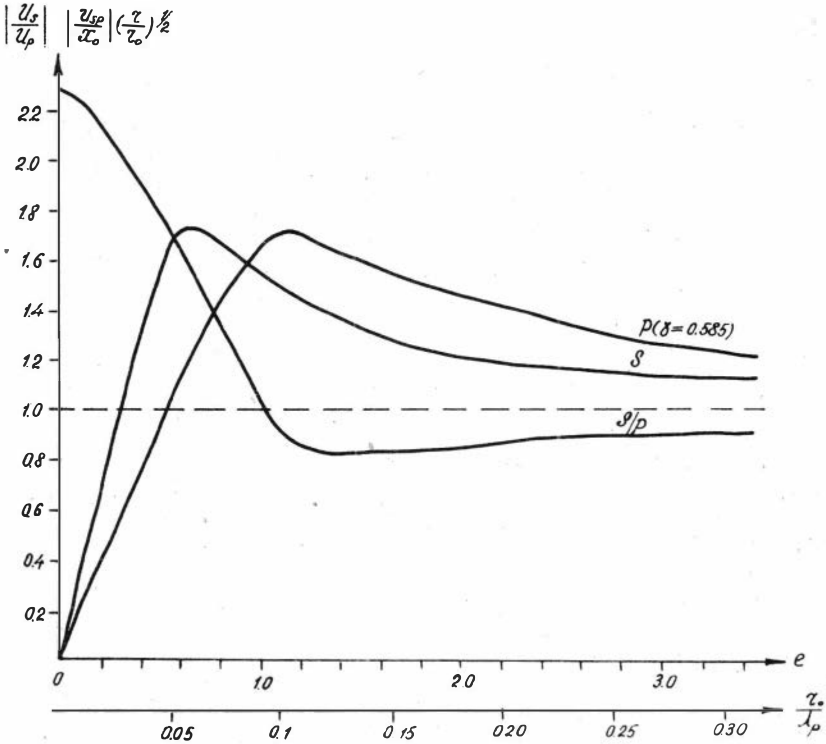
Следовательно, представить функцию затухания в этом случае в виде двух сомножителей, один из которых зависит от частоты (длины волны), а другой не зависит от неё, нельзя. Тем более этого нельзя сделать для функции затухания в её точном виде (40).

Невозможность введения фиктивной частотно-независимой упругой среды при точном описании реальной упругой среды эквивалентно тому, что реальная упругая среда частотно-зависимая. Следовательно, частотный спектр сигнала, излученного реальным источником, будет изменяться по мере распространения волны в упругой среде, и в разных средах это изменение будет различным.

Следует заметить, что указанная частотная зависимость упругой среды при распространении в ней упругих волн находится в полном согласии с теорией подобия упругих процессов [4]. Как известно, согласно этой теории, расстояния от источника до точки приема упругой волны должны измеряться в длинах этой волны. Функция затухания в её точном виде удовлетворяет этому требованию, т.к. её аргумент есть указанное расстояние, отнесенное к длине волны, соответствующей круговой частоте.

С этих позиций приближенная функция затухания (103) не удовлетворяет принципу подобия упругих процессов, и поэтому среда, соответствующая этой функции не существует в природе (вернее - в классе упругих сред) и должна считаться нереальной, фиктивной упругой средой, удобной только для приближенных расчетов сейсмического поля в рамках первого приближения асимптотического представления бесселевых функций.

Модуль функции фиктивного источника представлен на рис.4. Этот модуль есть ни что иное, как модуль спектра сигнала уменьшенного в $(r/r_0)^{-1/2}$ раз и излучаемого рассматриваемым ци-



Р и с. 4. Модули функции фиктивного источника и их отношение ($\mathcal{S}$ /P) для продольных Р и поперечных $\mathcal{S}$ - волн.

линдром в данную точку, если смещение фиктивного излучателя представляет собой δ – функцию по времени. Иными словами, рассматриваемый модуль есть модуль спектра собственной функции фиктивного излучателя.

Как видно из рис. 4 модуль функции фиктивного источника имеет линейную зависимость при малых относительных радиусах цилиндра: при

$$\ell \simeq 0{,}65 \qquad (106)$$

наблюдается максимум; а затем при увеличении этого радиуса модуль плавно спадает, стремясь к своему асимптотическому значению, равному единице. Для цилиндра одного и того же абсолютного радиуса, но излучающего большую длину волны, чем представленные на оси абсцисс рис. 4, S, модуль фиктивного источника будет иметь точно такой же вид, как на указанном рисунке, но смещенный по оси абсцисс вправо по правилу

$$|f_0^*(\ell)| = |f_{0P}^*(k)|$$
$$\frac{k}{\ell} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = \gamma < 1 \qquad (107)$$

Такой модуль для продольной волны при $\gamma = 0{,}585$ представлен на рис. 4,Р.

Отмеченные выше особенности графика модуля фиктивного источника для поперечной волны, следовательно, сохраняется и для продольной волны. При этом максимум модуля спектра фиктивного источника для продольной волны располагается на абсциссе

$$\ell = 1{,}11 \qquad (108)$$

Линейная часть графика наклонена под меньшим углом к оси абсцисс; спадание в асимптотическую область происходит более плавно, чем для поперечных волн.

Отмеченные различные участки модулей фиктивных источников по разному трансформируют спектр смещения рассматриваемого цилиндра в фиктивную среду. Отношение модулей функций фиктивных источников для поперечных и продольных волн представлено на рис. 4 S/P. Для малых размеров фиктивных излучателей, определяемых неравенством (67), рассматриваемое отношение согласно равенству (102) и аналогичному равенству для продольных волн будет равно

$\gamma^{-3/2}$. (Заметим, что рассматриваемое отношение для реальных излучателей, как указывалось раньше, равно γ^{-2}). По мере увеличения относительного радиуса указанное отношение монотонно уменьшается, достигает единицы при ℓ = 0,95, затем - минимального значения, равного 0,83, при ℓ = I,35 и после того плавно увеличивается, стремясь при больших значениях относительного радиуса к асимптотическому значению, равному единице.

Таким образом, для разных относительных радиусов цилиндра эффективность генерирования поперечных волн, определяемая рассмотренным отношением, для рассматриваемого излучателя различна. Эффективность максимальная при малых относительных радиусах цилиндра или - что то же - при излучении цилиндром низких частот, определяемых неравенством

$$\omega \ll \frac{v_s}{r_0} \tag{I09}$$

и минимальная при частоте

$$\omega = 1{,}35\,\frac{v_s}{r_0} \tag{II0}$$

оставаясь почти такой же при больших частотах.

$$\omega \gg \frac{v_s}{r_0} \tag{III}$$

§ 4. Силы реакции связей и их моменты

Найдем силы реакции связей и их моменты для рассматриваемого излучателя. В полярной системе координат закон Гука по форме совпадает с таким законом для прямоугольной системы координат. Следует учесть компоненты найденного смещения упругой среды в результате решения краевой задачи. По формулам (I0), (32) и (33) эти компоненты будут следующими:

$$\vec{U} = U_r \vec{e}_r + U_\varphi \vec{e}_\varphi + U_z \vec{e}_z \tag{II2}$$

$$U_r = -\frac{X_0(\omega)}{h(\ell)+h(k)}\left[\frac{H_0^{(2)}(z_p)-H_2^{(2)}(z_p)}{H_2^{(2)}(k)} - \frac{H_0^{(2)}(z_s)+H_2^{(2)}(z_s)}{H_2^{(2)}(\ell)}\right]\cos\varphi \tag{II3}$$

$$U_\varphi = -\frac{X_0(\omega)}{h(\ell)+h(k)} \left[\frac{H_0^{(2)}(z_p)+H_2^{(2)}(z_p)}{H_2^{(2)}(k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{H_0^{2}(z_s)+H_2^{(2)}(z_s)}{H_2^{(2)}(\ell)} \right] \sin\varphi \qquad \text{(II4)}$$

$$U_z = 0 \qquad \text{(II5)}$$

Если использовать формулы для деформаций в полярной системе координат [5], то деформации среды на поверхности рассматриваемого цилиндра оказываются следующими:

$$\left.\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{X_0(\omega)}{r_0} B(k,\ell)\cos\varphi \\ e_{r\varphi} &= \frac{X_0(\omega)}{r_0} B(k,\ell)\sin\varphi \\ e_{\varphi\varphi} &= e_{zz} = e_{zr} = e_{\varphi z} = 0 \\ \theta &= \frac{X_0(\omega)}{r_0} B(k,\ell)\cos\varphi \\ r &= r_0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(II6)}$$

где обозначено

$$\left.\begin{aligned} B(k,\ell) &= \frac{R(k)-R(\ell)}{h(k)+h(\ell)} \\ R(k) &= k(1-k)[1+h(k)] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II7)}$$

Напряженное состояние среды в точках поверхности контакта оказывается следующим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{X_0(\omega)}{r_0} (\lambda+2\mu) B(k,\ell)\cos\varphi \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{X_0(\omega)}{r_0} \lambda B(k,\ell)\cos\varphi \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{X_0(\omega)}{r_0} \mu B(k,\ell)\sin\varphi \\ \sigma_{zz} &= \tau_{\varphi z} = \tau_{zr} = 0 \\ r &= r_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II8)}$$

Для перехода от найденного напряженного состояния упругой среды в точках на поверхности контакта к плотностям сил, действующих на цилиндр учтем, что напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ не действует на поверхность цилиндра, а напряжения σ_{rr} и $\tau_{r\varphi}$ направлены по радиусу (внешней к поверхности цилиндра нормали) и перпендикулярно ему соответственно. Отсюда получаем формулы для плотностей сил:

$$\frac{dP_x}{d\Sigma} = \sigma_{rr}\cos\varphi - \tau_{r\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{dP_y}{d\Sigma} = \sigma_{rr}\sin\varphi + \tau_{r\varphi}\cos\varphi \qquad (119)$$

$$\frac{dP_z}{d\Sigma} = 0$$

Вычисляя искомые силы P_x, P_y, P_z интегрированием по поверхности контакта цилиндра высотой h и учитывая, что элемент поверхности в цилиндрической системе координат представляется в виде:

$$d\Sigma = r_0\, d\varphi\, dz \qquad (120)$$

а также учитывая формулы (118), получаем

$$P_x = \pi h(\lambda+\mu)X_0(\omega)\lambda\beta(k,e)$$
$$P_y = P_z = 0 \qquad (121)$$

При интегрировании последнего равенства уравнений (119) учтено, что напряжения по оси $0z$ равны нулю и, следовательно, $P_z = 0$.

Вычислим момент сил реакции связей:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{M}_\zeta = h r_0\int_0^{2\pi}\tau_{r\varphi}\, r_0\, d\varphi = \\ &= h r_0^2\,\frac{X_0(\omega)}{r_0}\,\mu\beta(k,e)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 0 \\ &\mathcal{M}_\xi = \mathcal{M}_\eta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

Последнее равенство следует из того, что напряжения, действующие на поверхности контакта и создающие эти моменты, равны нулю согласно предпоследнего равенства уравнений (118). При вычислении моментов учтено, что моменты берутся относительно центральных главных осей тела-источника. Следовательно, напряжение σ_{xx}, направление которого совпадает с линией, проходящей через центр масс цилиндра высотой h не создает момента.

Итак, силы реакции связей и их моменты при возвратно-поступательном движении цилиндра перпендикулярно его оси оказываются равными нулю, за исключением силы P_x, если ось OX прямоугольной неподвижной (инерциальной) системы координат совпадает с положительным направлением движения. Эта сила определяется формулой (121).

§ 5. Уравнение движения и решение второй задачи инерционного источника рассматриваемого типа

Возвратно-поступательное движение по оси OX означает, что

$$\ddot{y}_c = \ddot{z}_c = \omega_\xi = \omega_\eta = \omega_\zeta = 0 \tag{123}$$

В предыдущем параграфе показано, что для такого движения

$$P_y = P_z = \mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_\xi = \mathcal{M}_\zeta = 0 \tag{124}$$

Используя эти два равенства и уравнения движения свободного тела-источника [1] получим, что для реализации возвратно-поступательного движения рассматриваемого цилиндра достаточно приложить к оси цилиндра внешние силы, направленные по оси OX с интенсивностью $\mathcal{F}_1$ на единицу длины цилиндра. При этом мы получим единственное уравнение (4) движения источника. Находя из уравнения (121) интенсивность силы реакции связи на единицу длины цилиндра и учитывая, что рассматривается стационарный режим (6) колебаний, получим уравнение (4) движения источника рассматриваемого типа в виде:

$$-\pi r_0^2\left(1-\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\rho_0\,\omega^2 X_0(\omega) - \pi(\lambda+\mu)\beta(\kappa,e)X_0(\omega) = \mathcal{F}_0(\omega) \tag{125}$$

где $\mathcal{F}_0(\omega)$ - спектр внешней силы, действующий на единицу длины цилиндра, причем

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0(\omega) e^{j\omega t} \qquad (126)$$

Из уравнения (I25) находим:

$$\frac{X_0(\omega)}{\mathcal{F}_0(\omega)} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k^2 + b\beta(k,e)} \qquad (127)$$

где обозначено

$$a = \mathcal{J}_1 \left(1 - \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2}\right) v_p^2 \rho_0 \qquad (128)$$

$$b = \frac{1-\gamma^2}{1-\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2}} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \qquad (129)$$

Выражение (I27) может рассматриваться для данного излучателя как комплексная частотная характеристика сила-смещение. Эта характеристика связывает входную (спектр внешней силы) и выходную функции (спектр поступательного смещения цилиндра) линейного четырехполюсника, если под таким понимать цилиндр, движущийся в упругой среде поступательно и в направлении, перпендикулярном оси.

Представляя собой решения уравнения движения рассматриваемого источника, эта частотная характеристика одновременно является решением второй задачи инерционного источника. Действительно, если известны внешние силы, действующие на источник, то умножением спектра этих сил на указанную частотную характеристику будет найден спектр смещения центра масс источника. Но вследствие того, что источник движется поступательно все его точки будут смещаться также, как его центр масс.

Таким образом, смещение любой точки тела источника будет определяться равенствами (6) и (I27), если задана интенсивность внешних сил (I26), действующих на единицу длины рассматриваемого цилиндра.

Модуль и фаза рассматриваемой частотной характеристики будут следующими:

$$\left|\frac{X_0(\omega)}{\mathcal{F}_0(\omega)}\right| = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[k^2 + b\,\mathrm{Re}\,\beta(k,e)\right]^2 + (b\,\mathrm{Im}\,\beta)^2}} \qquad (130)$$

$$\arg \frac{X_o(\omega)}{F_o(\omega)} = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{b\, \mathcal{J}_m \beta(k,e)}{k^2 + b\, Re\, \beta(k,e)}\right] \qquad (131)$$

где обозначено: $Re\,\beta(k,e)$; $\mathcal{J}_m\beta(k,e)$ – вещественная и мнимая части комплексной функции $\beta(k,e)$.

При этом:

$$Re\,\beta(k,e) = \frac{(A_k - A_e)(A_{1k} + A_{1e}) + (B_k - B_e)(B_{1k} + B_{1e})}{(A_{1k} + A_{1e})^2 + (B_{1k} + B_{1e})^2} \qquad (132)$$

$$\mathcal{J}_m\beta(k,e) = \frac{(A_{1k} + A_{1e})(B_k - B_e) - (A_k - A_e)(B_{1k} + B_{1e})}{(A_{1k} + A_{1e})^2 + (B_{1k} + B_{1e})^2} \qquad (133)$$

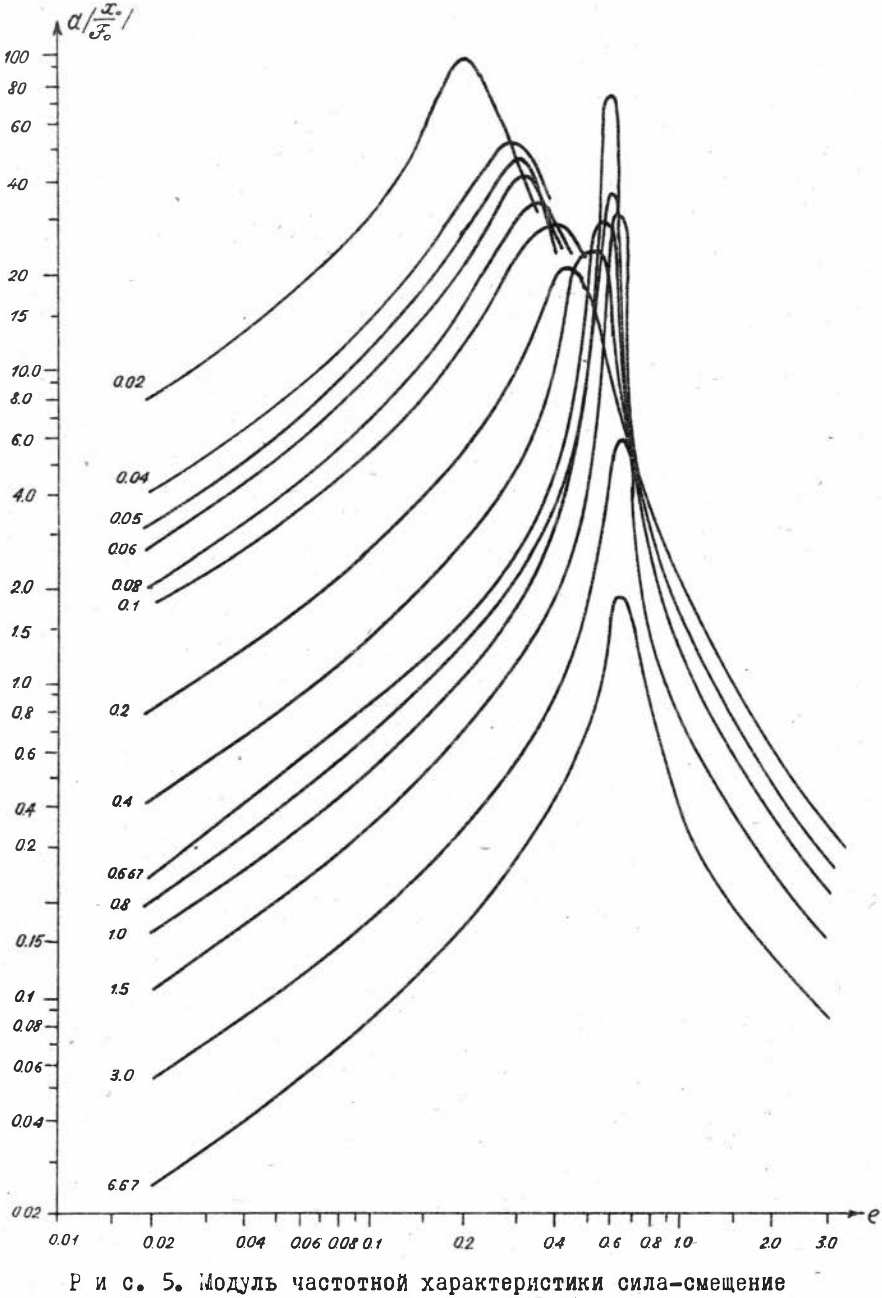
где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{1k} = Re\,h(k)\,; \qquad A_{1e} = Re\,h(e)\\
&B_{1k} = \mathcal{J}_m h(k)\,; \qquad B_{1e} = \mathcal{J}_m h(e)\\
&A_k = k(1-k)\left[1 + Re\,h(k)\right]\\
&A_e = e(1-e)\left[1 + Re\,h(e)\right]\\
&B_k = k(1-k)\left[1 + Re\,h(e)\right]\\
&B_e = e(1-e)\,\mathcal{J}_m h(e)
\end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

Как видно из (130), частотная характеристика сила-смещение для исследуемого источника – не имеет резонанса (не обращается в бесконечность), так как знаменатель этого выражения не обращается в нуль нигде вследствие того, что сумма квадратов двух вещественных функций, отличных от нуля, не равна нулю, а оба слагаемых в подкоренном выражении (130) не могут быть одновре – менно равным нулю.

Увеличенный в " a " раз модуль рассматриваемой частотной характеристики представлен на рис. 5 в двойном логарифмическом масштабе для γ = 0,585.

Как видно из рисунка, рассматриваемый модуль представляет собой функцию, имеющую максимум. Положение последнего на оси абсцисс, его величина, а также общий "уровень" графика модуля зависит от параметров " b " и " a ".



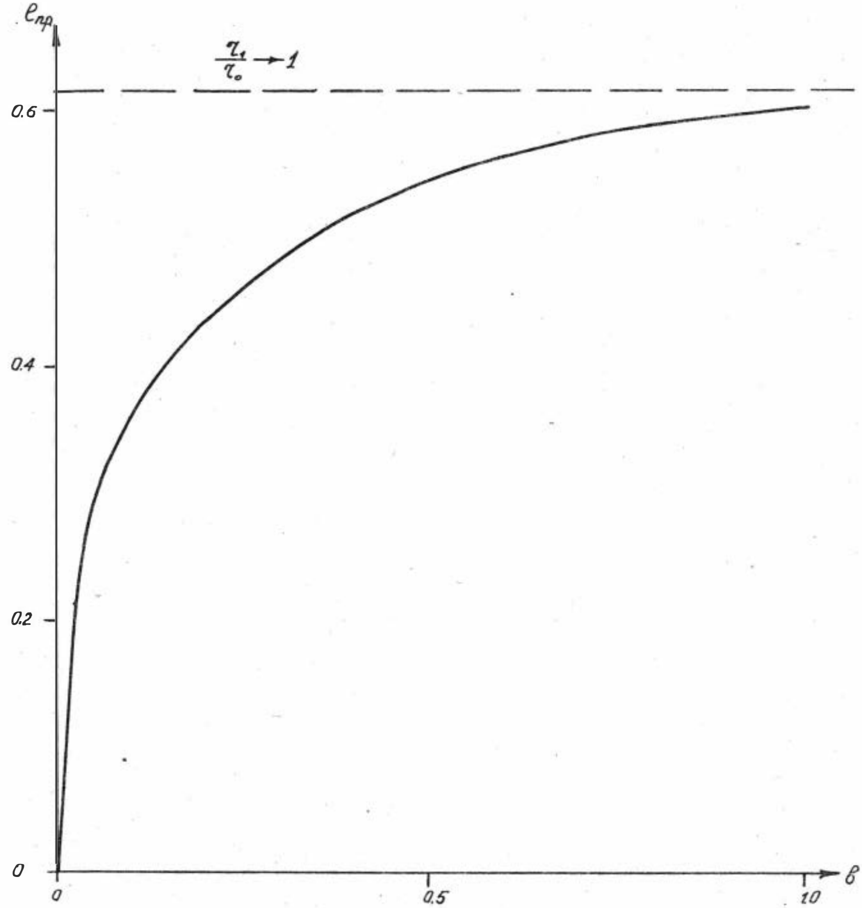
Р и с. 5. Модуль частотной характеристики сила-смещение для смешанного источника (γ = 0,585).

Рассмотрим каждую из указанных характеристик в отдельности.

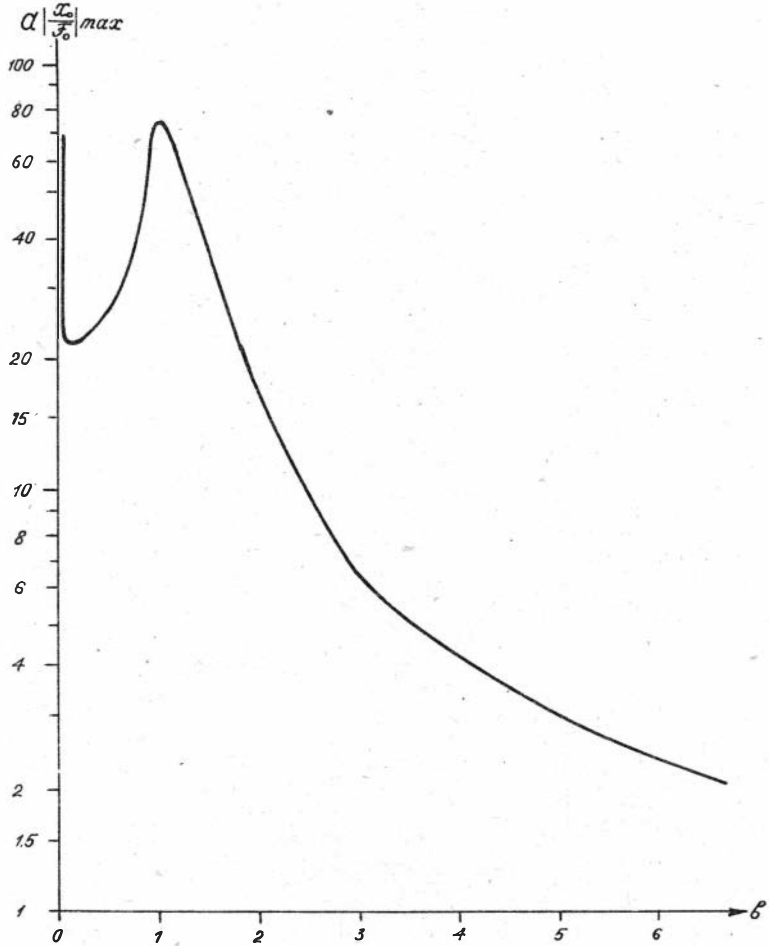
Положение максимума модуля на оси абсцисс характеризует относительную преобладающую частоту $\ell_{пр.}$ смещения цилиндра, если к нему приложить силу в виде δ - функции времени. Как видно из рис. 6, рассматриваемая частота существенно зависит от параметра " b ", представляющей собой комбинацию отношений плотностей среды и цилиндра, а также его внутреннего и внешнего радиусов. По мере увеличения параметра относительная преобладающая частота нелинейно, плавно увеличивается от нулевого значения при $b = 0$, стремясь при $b \to \infty$ к асимптотическому значению $\ell_{пр.} = 6,2$. Последняя может рассматриваться как относительная преобладающая частота цилиндрической полости, для которой справедливо соотношение $\frac{r_1}{r_0} \to 1$ или $\rho / \rho_0 \to 0$ и, следовательно, $b \to \infty$ Интерпретируя рассматриваемый график, можно утверждать следующее: I) в среде с меньшей плотностью будут наблюдаться колебания с меньшей частотой по сравнению с высокоплотностной средой; 2) в одной и той же среде цилиндр с большой плотностью будет излучать в нестационарном режиме частоты меньшие, чем тонкостенный. Указанные свойства справедливы при прочих равных условиях, не рассматриваемых в пределах условий данного свойства.

Следует особо подчеркнуть, что рассмотренные свойства преобладающей частоты справедливы для инерционного источника. Их нельзя получить из рассмотрения работы безинерционного источника. В этом смысле инерционный источник более общий источник по сравнению с безинерционным, свойства которого могут быть получены как частный случай ($\frac{r_1}{r_0} \to 1$) или $\rho / \rho_0 \to 0$ инерционного излучателя.

Величина максимума модуля частотной характеристики рассматриваемого излучателя представлена для $\gamma = 0,585$ на рис. 7. Эта величина характеризует максимальное смещение цилиндра, увеличенное в " a " раз в стационарном режиме при заданной постоянной силе в зависимости от величины " b ". Как видно из рисунка, максимальное смещение цилиндра при малых таких величинах имеет некоторое достаточно большое значение; по мере увеличения этой величины смещение уменьшается, затем достигает при 0,2 минимума, равного $a / \frac{x}{F_0} /_{min} = 22$, затем растет и становится максимальным $a / \frac{x_0}{F_0} /_{max} = 75$ при $b \simeq 1$, после чего плавно спадает, стремясь к нулю при $b \to \infty$



Р и с. 6. Зависимость относительно преобладающей частоты от величины: $b = \frac{1-\gamma^2}{1-\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2}}, \; \frac{\rho}{\rho_0}$, ($\gamma$=0,585)



Р и с. 7. Зависимость максимума модуля частотной характеристики от величины $b = \frac{1-\gamma^2}{1-\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2}}$, $\frac{\rho}{\rho_0}$ (γ=0,585)

Из этого рассмотрения можно сделать выводы: I) для тонкостенных цилиндров, излучающих в среду с плотностью, меньшей плотности цилиндра, режим излучения будет тем выгоднее, чем более сильно выполняется неравенство $b < 0{,}2$; 3) если же выполняется неравенство $0{,}2 < b < I$, то для достижения выгодного режима следует брать достаточно толстые стенки цилиндра и материал цилиндра малой плотности; 3) с этой же целью при параметрах цилиндра и среды таких, что $I < b < \infty$ нужно стремиться выполнить цилиндр достаточно толстостенным, а его плотность уменьшать.

Таким образом, выбором параметров инерционного излучателя (в частности, толщиной стенки цилиндрического источника и его плотностью) можно при одной и той же силе внешнего воздействия на этот излучатель выбрать наивыгоднейший режим его работы, при котором в среде будут генерироваться волны смещения максимальной амплитуды, возможной для данного типа излучателя. Такой управляемостью инерционный излучатель выгодно отличается от безинерционного.

Независимо от того, в каком режиме работает излучатель смещение цилиндра и, следовательно, амплитуда волны, генерируемой им в среду, будет пропорционально величине a^{-1}. Это значит, что смещение цилиндра и амплитуда волны будет больше в низкоскоростной среде $V_p = V_1$ и низкоплотностной среде $\rho = \rho_1$ по сравнению со средой высокоскоростной $V_p = V_2$ и плотной ($\rho = \rho_2$) в $\frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1}$ раз, если

$$V_2^2 \rho_2 > V_2^2 \rho_1$$

Отсюда видна квадратичная зависимость увеличения смещения цилиндра в зависимости от уменьшения скорости распространения продольной волны в среде и - пропорциональная зависимость от уменьшения плотности. Это значит, что один и тот же излучатель, генерирующий волны в сходственные точки двух различных упругих сред, отличающихся по скоростям распространения, например, в 5 раз, возбудит волну в низкоскоростной среде со смещением в 25 раз большим, чем в высокоскоростной. В то же время, если эти среды отличаются по плотностям в такое же число раз, смещение в менее плотной среде будет только в 5 раз больше, чем в более плотной.

§ 6. Решение первой (основной) задачи исследуемого источника

Первая (основная) задача инерционного источника [I], состоит в расчете сейсмического поля, создаваемого в упругой среде инерционным источником, движущимся под действием внешних активных сил и моментов.

Для её решения используем решения предыдущих задач. Подставив решение (I27) второй задачи источника рассматриваемого типа в решение (32) и (33) краевой задачи, получим:

$$\vec{U}_p = -\frac{\mathcal{F}_0(\omega)}{a} \cdot \frac{1}{k^2 + bB(k,e)} \cdot \frac{1}{h(e)+h(k)} \cdot \frac{H_2^{(2)}(z_p)}{H_2^{(2)}(k)} \cdot \tag{I35}$$

$$\left\{[h(z_p)-1]\cos\varphi\, \vec{e}_r - [h(z_p)+1]\sin\varphi\, \vec{e}_\varphi\right\}$$

$$\vec{U}_s = \frac{\mathcal{F}_0(\omega)}{a} \cdot \frac{1}{k^2 + bB(k,e)} \cdot \frac{1}{h(e)+h(k)} \cdot \frac{H_2^{(2)}(z_s)}{H_2^{(2)}(e)} \cdot \tag{I36}$$

$$\left\{[h(z_s)-1]\sin\varphi\, \vec{e}_\varphi - [h(z_s)+1]\cos\varphi\, \vec{e}_r\right\}$$

Формулы (I35), (I36) связывают сейсмическое поле продольных $\vec{U}_p$ и поперечных $\vec{U}_s$ волн с внешней активной силой и поэтому могут считаться решением основной задачи инерционного источника.

Если отнести спектр продольных (поперечных) волн к интенсивности силы, действующей на единицу длины цилиндра, то полученная таким образом частотная характеристика сила-смещение среды отличается от частотной характеристики смещение цилиндра - смещение среды, найденной в результате решения первой краевой задачи, множителем (I27). Этот множитель зависит от размеров источника, от параметров упругой среды, но не зависит от координат точек среды. С учетом этого такой множитель не повлияет ни на функцию затухания, ни на диаграмму направленности, если рассматривать дальнее сейсмическое поле или направления в среде, перпендикулярное (параллельное) движению источника для поперечных (продольных) волн как ближней, так и дальней зон.

Рассматриваемый множитель изменить только функцию источника. Такая измененная функция есть ни что иное, как функция источника (39) первой краевой задачи, умноженная на частотную характеристику (I27) сила-смещение.

Таким образом, функция источника для силы в рамках основной задачи инерционного источника будет следующей:

$$f_{0\mathcal{F}}\left(\kappa, e, \frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\frac{1}{a} \cdot \frac{f_0(\kappa, e)}{\kappa^2 + b\beta(\kappa, e)} \tag{I37}$$

$$f_{0\mathcal{F}p}\left(\kappa, e, \frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\frac{1}{a} \cdot \frac{f_{0p}(\kappa, e)}{\kappa^2 + b\beta(\kappa, e)} \tag{I38}$$

для поперечных и продольных волн соответственно.

Вводя в формулы (35) и (36), вместо прежних функций источника, новые такие функции, определенные равенствами (I37) и (I38) и заменяя $\mathcal{X}_0(\omega)$ на $\mathcal{F}_0(\omega)$ получим решение основной задачи источника в скалярном виде:

$$U_s = \mathcal{F}_0(\omega) f_{0\mathcal{F}}\left(\kappa, e, \frac{\rho}{\rho_0}\right) f_1(z_s)\, \mathcal{D}_s(\varphi) \tag{I39}$$

$$U_p = \mathcal{F}_0(\omega) f_{0\mathcal{F}p}\left(\kappa, e, \frac{\rho}{\rho_0}\right) \cdot f_{1p}(z_s)\, \mathcal{D}_p(\varphi) \tag{I40}$$

Функция затухания и диаграмма направленности для поперечных и продольных волн исследованы выше. Остается исследовать функцию источника по силе. По-прежнему, её можно рассматривать как для реального, так и для фиктивного источников при одновременном привлечении в расчетах сейсмического поля реальной и фиктивной упругих сред соответственно.

Формулы (137) и (138) определяют реальный источник для поперечных и продольных волн. Формулы, определяющие фиктивный источник по силе, получаются из формул реального источника по силе, если в них подставить, вместо функций $f_o(k,e)$ и $f_{op}(k,e)$ реального источника по смещению такие же функции $f_o^*(k,e)$ и $f_{op}^*(k,e)$ для фиктивного источника по смещению. Функции фиктивного источника по силе в дальнейшем обозначаются через $f_{oF}^*(k,e)$ и $f_{oFp}^*(k,e)$ для поперечных и продольных волн соответственно:

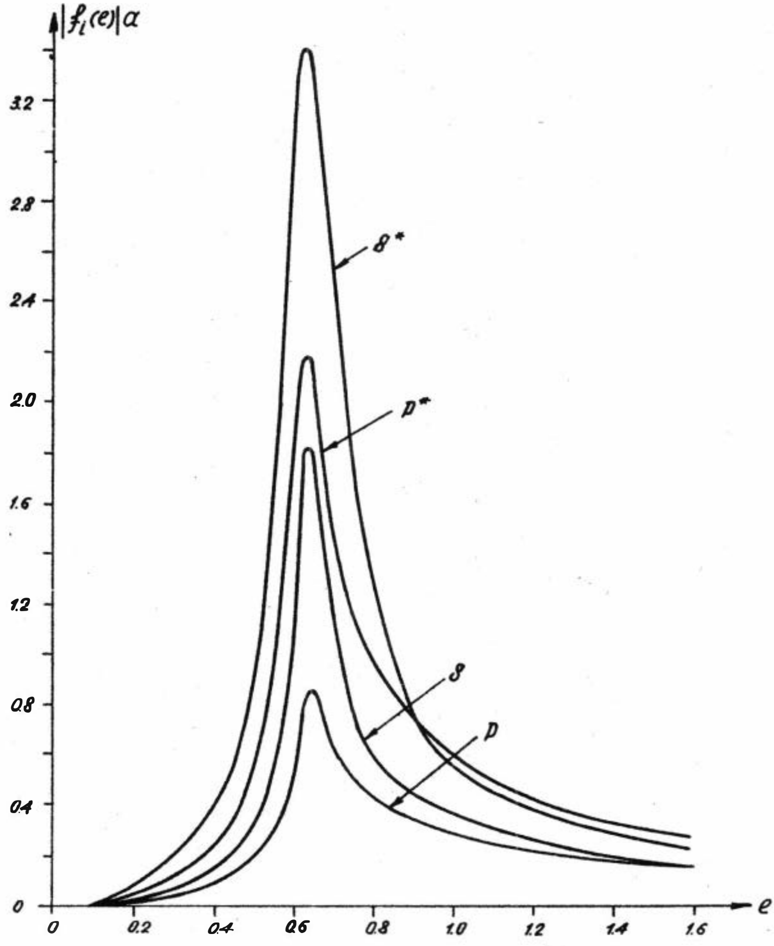
$$f_{oF}^*(k,e,\frac{\rho}{\rho_o}) = -\frac{1}{a}\cdot\frac{f_o^*(k,e)}{k^2+bB(k,e)} \qquad (141)$$

$$f_{oFp}^*(k,e,\frac{\rho}{\rho_o}) = -\frac{1}{a}\cdot\frac{f_{op}^*(k,e)}{k^2+bB(k,e)} \qquad (142)$$

Модули указанных функций для фиктивного и реального источников представлены на рис. 8 для частного случая строения как среды, так и источника (b = 6,67; γ = 0,585). Как видно из рисунка, функция источника по силе приобрела ярко выраженные резонансные свойства по сравнению с такими же функциями по смещению. При этом, как было показано в предыдущем параграфе, частотная характеристика сила-смещение цилиндра не имеет никогда разрыва (резонанса). Следовательно, рассматриваемые функции источника по силе также не будут иметь разрыва (резонанса), но, как только что отмечалось, они имеют резонансные свойства, выражающиеся в наличии "резкого" максимума для следующего относительного радиуса при b = 6,67:

$$e = \frac{\omega r_o}{V_s} = 0.64$$

Для меньших значений параметра "b" относительный радиус цилиндра, на котором будет наблюдаться максимум, сместителя влево по оси абсцисс. Более подробные сведения об указанном смещении максимума рассматриваемого модуля для иных значений такого парамет-



Р и с. 8. Модули функции реального (S и P) и фиктивного (S^* и P^*) источников для силы (γ = 0,585; b = 6,67).

ра можно почерпнуть из рис. 6, т.к. абсцисса максимума частотной характеристики сила-смещение цилиндра с достаточной точностью совпадает с абсциссой максимума рассматриваемых функций. По рис. 7 можно оценивать изменение величины максимума функций источника по сравнению с максимумами, представленными на рис. 8 при b = 6.67, для различных значений такого параметра. Например, для b = 1,0, как видно из рис. 7, максимум частотной характеристики увеличился приблизительно в 40 раз. Во столько же раз увеличатся и максимумы функций источника по силе для параметра b = 1,0 по сравнению с b = 6,67, для которого получены функции источника, представленные на рис. 8. Следует при этом заметить, что вид модуля функции источника по силе также изменится.

Отношение модулей функции для реальных и фиктивных источников по силе, очевидно, не изменится по сравнению с такими отношениями для этих же функций по смещениям.

Итак, решение первой (основной) задачи инерционного источника рассматриваемого типа дается формулами (135) и (136). Это решение справедливо для точек упругой среды в любой её зоне вне цилиндра. Для дальней зоны или для направления параллельного (перпендикулярного) движению цилиндра как для дальней, так и для ближней зон решение указанной задачи дается формулами (139) и (140). Это решение отличается от аналогичного решения первой краевой задачи для рассматриваемого источника, что в первом решении вводится новая функция реального или фиктивного источника по силе (137); (138) или (141); (142) сравнительно со вторым решением, где функция источника определена по смещению. Функции затухания и диаграммы направленности остаются неизменными.

§ 7. Решение третьей задачи исследуемого источника

Третья задача инерционного источника состоит в определении напряжений, возникающих на границе поверхности источника, соприкасающейся с упругой средой, если к источнику приложены внешние активные силы [1]. Определенное напряженное состояние на указанной границе дает возможность рационально расходовать силы, искусственно прилагаемые к источнику упругих волн, ограничивая их величиной при которой не возникают неупругие, пластические деформации в среде, вмещающей инерционный источник.

Для решения третьей задачи источника рассматриваемого типа подставим зависимость (127) между смещением цилиндра при его поступательном движении и силой, действующей на единицу длины цилиндра, в формулы (118), определяющие напряженное состояние на границе исследуемого цилиндра с упругой средой. В результате этого получим:

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_0}{\pi r_0}\cdot\frac{1}{1-\gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{b\,B(k,e)}}\cos\varphi$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{F_0}{\pi r_0}\cdot\frac{1-2\gamma^2}{1-\gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{b\,B(k,e)}}\cos\varphi$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{F_0}{\pi r_0}\cdot\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{b\,B(k,e)}}\sin\varphi \qquad (143)$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{\varphi z} = \tau_{zr} = 0$$

$$r = r_0$$

Очевидно, что задача на отсутствие в среде пластических деформаций должна решаться из тех соображений, что максимальное напряжение на границе цилиндра со средой не должно превосходить предел упругости смещающей среды.

Выбирая из всех напряжений (143) максимальное, получим следующее условие работы инерционного источника в экономически выгодном, упругом режиме:

$$\left|F_0(\omega)\right| \leq \pi r_0(1-\gamma^2)\left|1+\frac{k^2}{b\,B(k,e)}\right|\sigma_y \qquad (144)$$

где σ_y - предел упругости вмещающей среды.

Отсюда видно, что ограничением величины спектра внешней силы, а также рациональным выбором вида этого спектра по отношению к частотно-зависимому множителю, стоящему в правой части неравенства (144), можно поставить инерционный излучатель в упругий режим работы, при котором внешняя сила рационально расходуется на образование упругих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверко Е.М. Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных абсолютно жестких излучателей. Настоящий сборник.

2. Алексеев А.С., Гельчинский Б.Я. О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела. Сб. "Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн", ЛГУ, 1959.

3. Гурвич И.И. Сейсмическая разведка, М., 1960.

4. Ивакин Б.Н. Подобие упругих волновых явлений. I и II. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11 и 12, 1956.

5. Справочник геофизика, том IУ, изд-во "Недра", М.,1966.

6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.,1964.

Е.М. Аверко, Л.А. Максимов

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИНЕРЦИОННЫЙ ИСТОЧНИК ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН С ОСЕВЫМ ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

В статье исследуется инерционный цилиндрический бесконечно длинный источник, совершающий возвратно - поступательное движение вдоль оси цилиндра и излучающий при этом в упругую среду только поперечные волны.

Такой источник является предельным случаем излучателя типа направленной распределенной силы, реализуемой на практике, например, движением в упругой среде балки в её осевом направлении.

Рассмотрение такого излучателя полезно для сейсмического метода поперечных волн и других сейсмических методов.

Расчет источника проводится по схеме исследования инерционных излучателей [I]: решается первая краевая задача, находятся силы реакции связи, составляется уравнение движения источника, проводится исследование решений этого уравнения с изучением инерционных и сейсмических свойств этого излучателя.

§ I. Первая краевая задача для бесконечного цилиндра движущегося возвратно-поступательно в осевом направлении

Рассмотрим движение бесконечно длинного кругового цилиндра совершающего в безграничной упругой среде колебания в направлении оси симметрии этого цилиндра. Колебания будем считать настолько малыми, чтобы были применимы уравнения Гельмгольца для описания упругих смещений в среде, где помещен этот цилиндр.

Контакт поверхности цилиндра с вмещающей средой считается жестким. Это означает, что смещение

$$Z(t) = Z_0(\omega)\, e^{j\omega t} \qquad (48)$$

всех точек цилиндра в направлении оси $0Z$ цилиндрической системы координат, совпадающей с осью цилиндра, одинаковы со смещением точек среды, непосредственно контактирующих с поверхностью цилиндра:

$$
\begin{aligned}
&U_z\big|_{r=r_0} = Z_0(\omega)\, e^{j\omega t} \\
&U_\varphi\big|_{r=r_0} = U_r\big|_{r=r_0} = 0
\end{aligned}
\qquad (49)
$$

Рассматриваемая первая краевая задача состоит в том, что требуется найти вектор смещения

$$
\begin{aligned}
&\vec{U}(r,\varphi,z) = \vec{U}_p(r,\varphi,z) + \vec{U}_s(r,\varphi,z) = \\
&= U_r \vec{e}_r + U_\varphi \vec{e}_\varphi + U_z \cdot \vec{e}_z \\
&\vec{U}_p = \operatorname{grad} \Phi(r,\varphi,z) \\
&\vec{U}_s = \operatorname{rot} \vec{\Psi}(r,\varphi,z) \\
&\vec{\Psi} = \Psi_r \cdot \vec{e}_r + \Psi_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \Psi_z \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}
\qquad (50)
$$

любой точки упругой среды, если это смещение есть решение уравнений Гельмгольца

$$\nabla^2 \Phi + k_p^2 \Phi = 0 \qquad (51)$$

$$\nabla^2 \vec{\Psi} + k_s^2 \vec{\Psi} = 0 \qquad (52)$$

$$\operatorname{div} \vec{\Psi} = 0 \qquad (52a)$$

при граничном условии (49).
Продольный Φ и поперечный $\vec{\Psi}$ потенциалы должны удовлетворять условию излучения. Вектора $\vec{U}_p$ и $\vec{U}_s$ суть вектора смещений в продольной и поперечной волнах соответственно.

Вследствие осевой симметрии рассматриваемой задачи для перемещения цилиндра по оси $0Z$ нужно ожидать, что скалярный и векторный потенциалы будут функциями только координаты r и не будут зависеть от координат φ, z. Учитывая это, а также условие (52а) и то, что произвольно любая из составляющих вектора

$\vec{\Psi}$ может быть принята равной нулю, и полагая $\Psi_z = 0$ получим, в следующем виде составляющие вектора искомого смещения:

$$\left.\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ U_\varphi &= 0 \\ U_z &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\Psi)}{\partial r} \\ \Psi &= \Psi_\varphi\,; \quad U_z = U_z \\ \Psi_z &= \Psi_r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Для уравнения (52) общее решение, не зависящее от переменных φ, z и удовлетворяющее условию излучения, будет следующим:

$$\begin{aligned} \Phi(z_p) &= A_0 H_0^{(2)}(z_p) \\ z_p &= r\cdot k_p \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z_s) &= B_1 H_1^{(2)}(z_s) \\ z_s &= r\cdot k_s \end{aligned} \tag{55}$$

Подставляя эти значения в граничные условия (49) при использовании равенств (53), получим

$$A_0 = 0 \tag{56}$$

$$B_1 = \frac{r_0\; Z_0(\omega)}{H_1^{(2)}(e) + e\,H_1^{\prime(2)}(e)} \tag{57}$$

Используя равенства (53) - (57), а также зависимость

$$z H_n^{\prime(2)}(z) = n H_n^{(2)}(z) - z H_{n+1}^{(2)}(z) \tag{58}$$

находим искомое решение в следующем виде:

$$\vec{U}_p = 0 \tag{59}$$

$$\vec{U} = \vec{U}_s = U_s \cdot \vec{e}_z \tag{60}$$

$$U_s = U_z = Z_0(\omega)\cdot S(e, z_s) \tag{61}$$

$$S(e, z_s) = \frac{e}{z_s} \cdot \frac{q}{q_1} \frac{(z_s)}{(e)} \tag{62}$$

$$q_1(z) = 2H_1^{(2)}(z) - zH_2^{(2)}(z) \tag{63}$$

Таким образом, при возвратно-поступательном движении бесконечно длинного цилиндра по направлению его оси в упругой среде возбуждаются только поперечные цилиндрические волны при полном отсутствии продольных волн. Ось цилиндрической волны совпадает с осью цилиндра. Вектор поперечных волн направлен параллельно оси цилиндра. Независимость смещения в поперечной волне от координаты z и полярного угла означает, что диаграмма направленности в полярной плоскости представляет собой круг с центром в начале полярной системы координат, выбранным в произвольной точке оси цилиндра.

§ 4. Уравнение движения поступательно движущегося цилиндра и решение трех задач такого источника

Напряженное состояние в упругой среде найдем, если воспользуемся известными соотношениями для напряжений с учетом того, что

$$U_z = Z_0(\omega)\, S(e, z_s) \tag{64}$$

$$U_r = U_\varphi = 0 \tag{65}$$

В результате вычислений получим следующее напряженное состояние на границе цилиндра со средой:

$$\tau_{rz} = \frac{Z_0(\omega)}{r_0} V_s^2 \rho \cdot \frac{q_1^*(e)}{q_1(e)}$$

$$q_1^*(e) = (2 - e^2) H_1^{(2)}(e) + e H_2^{(2)}(e)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \tag{66}$$

$$r = r_0$$

Единственное, отличное от нуля напряжение τ_{rz} на границе, равномерно распределенное по всей площади границы (это напряжение не зависит ни от z , ни от φ) и направленное по оси Oz приводит к тому, что существует единственная, отличная от нуля, сила направленная по оси Oz . Такая сила, действующая на цилиндр высотой h , определяется интегрированием указанного напряжения по поверхности цилиндра этой высоты и оказывается следующей:

$$P_z = 2\pi r_0 h \, \tau_{rz} \tag{67}$$

Все остальные силы реакции связей и их моменты оказываются равными нулю:

$$P_x = P_y = M_\xi = M_\ell = M_\zeta = 0 \tag{68}$$

Учитывая, что рассматривается поступательное движение по оси Oz , уравнение движения исследуемого источника будет следующее:

$$-\omega^2 m Z_0(\omega) = h F_0(\omega) + 2\pi r_0 h \, \tau_{rz} \tag{69}$$

где $Z_0(\omega)$; m – спектр смещения центра масс и масса цилиндра высотой h ; $F_0(\omega)$ - спектр внешней активной силы, действующей по оси цилиндра на единицу его длины.

Если рассматривать полый цилиндр, то масса, вошедшая в уравнение движения, определяется следующим соотношением:

$$m = \pi r_0^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) h \rho_0 \tag{70}$$

где ρ_0 - плотность вещества цилиндра.

Решение уравнения движения (69) можно представить в следующем виде:

$$\frac{Z_0(\omega)}{F_0(\omega)} = -\frac{1}{a_z} \cdot \frac{1}{\ell^2 + b_z B_z(\ell)} \tag{71}$$

где обозначено:

$$a_z = \pi \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) v_s^2 \rho_0 \tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned} b_z &= \frac{2}{1-\frac{r_1^2}{r_0^2}}\;\frac{\rho}{\rho_0} \\ \mathcal{B}_z(e) &= \frac{q_1^*(e)}{q_1(e)} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Соотношение (7I) можно рассматривать как частотную характеристику сила-смещение цилиндра. Её модуль представлен на рис. I.

Это же соотношение является решением второй задачи инерционного источника рассматриваемого типа. Действительно, зная параметры среды и источника, заданные в форме (72), можно по соотношению (7I) вычислить смещение цилиндра в упругой среде при его поступательном движении от приложенной к цилиндру внешней активной силы. Для этого достаточно умножить правую часть этого соотношения на равнодействующую внешней активной силы, приложенную к единице длины цилиндра в направлении его оси.

Решение первой (основной) задачи получим, если равенство (7I) подставим в решение краевой задачи. Это решение будет следующим:

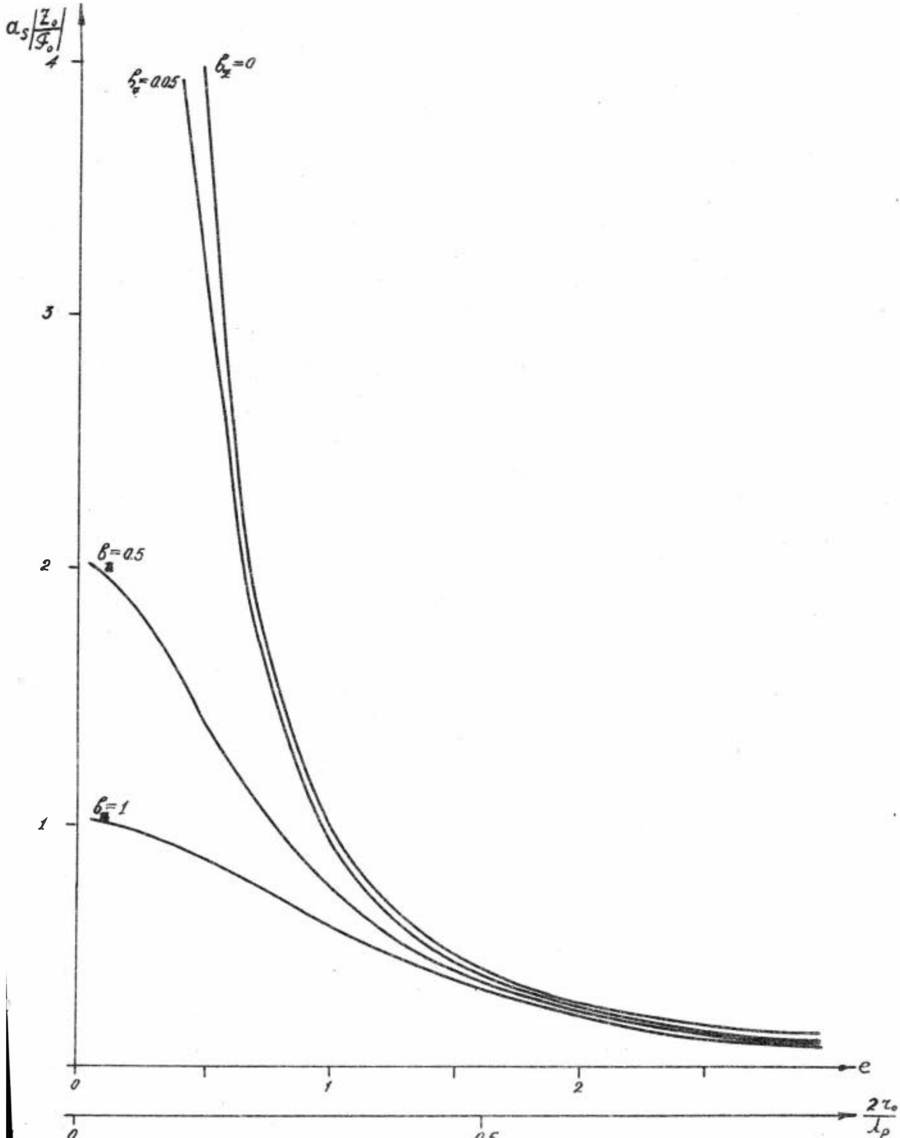
$$U_s(z_s) = -\frac{\mathcal{F}(\omega)}{a_z}\cdot\frac{S(z_s, e)}{e^2 + b_z\mathcal{B}_z(e)} \tag{73}$$

Такое решение определяет смещение в поперечной волне по известным параметрам среды и источника и равнодействующей внешней активной силы, приложенной к единице длины цилиндра в направлении его оси.

Решение второй задачи инерционного источника рассматриваемого типа получим, если в первое равенство соотношений (68) подставим смещение цилиндра, найденное из уравнения (7I):

$$\tau_{rz} = -\frac{\mathcal{F}_0(\omega)}{\mathcal{F}\left(1-\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)r_0}\cdot\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{\mathcal{B}_z(e)}{e^2 + b_z\mathcal{B}_z(e)} \tag{74}$$

Зная, например, предел упругости вмещающей среды можно при заданных параметрах среды и источника рационально выбрать внешнюю активную силу, действующую на единицу длины цилиндра, из условия, что правая часть равенства (74) не должна превосходить по модулю предел упругости вмещающей среды.



Р и с. I. Частотная характеристика сила-смещение для цилиндрического источника при осевом поступательном движении.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Аверко Е.М. Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных абсолютно жестких излучателей. Настоящий сборник.

Е.М. Аверко, Л.А. Максимов

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИНЕРЦИОННЫЙ ВРАЩАЮЩИЙСЯ ИСТОЧНИК ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

В статье исследуется источник в виде бесконечнодлинного пологого инерционного цилиндра, вращающегося вокруг собственной оси в безграничной упругой среде и генерирующего при этом в среду только поперечные волны.

Рассмотрение такого источника полезно в связи с тем, что он является двумерным аналогом трехмерного источника поперечных волн; и поэтому может быть с успехом применен при экспериментальном исследовании процессов распространения поперечных волн в осесимметрических задачах, какими являются, например, все задачи двумерного сейсмического моделирования, некоторые задачи акустического каротажа и др.

Расчет источника ведется по общей схеме расчета инерционного источника [I]: решается первая краевая задача, затем составляются и решаются уравнения движения источника, после этого найденное решение уравнений движения подставляется в решение краевой задачи и проводится исследование инерционных и сейсмических свойств источника.

§ I. Первая краевая задача для вращающегося источника

а) Постановка и решение задачи.

Пусть в упругой среде, характеризующейся скоростями распространения V_p и V_s продольных и поперечных волн, а также её плотностью ρ стационарно вращается вокруг собственной оси, жесткий цилиндр внешнего r_0 и внутреннего r_1 радиусов. Смещение точек поверхности цилиндра при этом пусть дается выражением

$$y(\omega) = y_0(\omega)\, e^{j\omega t} \tag{1}$$

Амплитуда смещения на границе поверхность цилиндра - среда при таком вращении предполагается настолько малой, чтобы для описания колебаний в среде были применимы уравнения движения среды в форме уравнений теории упругости. Контакт поверхности цилиндра со средой считается жестким, т.е. на указанной границе смещения точек поверхности цилиндра и среды одинаковы.

При указанных условиях требуется определить упругие смещения в среде. Математическая задача, очевидно, сводится к следующему.

Решить стационарные уравнения теории упругости (уравнения Гельмгольца)

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} + k_s^2 \vec{\psi} = 0 \tag{3}$$

и найти полный вектор смещения в любой точке среды вне цилиндра

$$\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s\ ; \quad r \geqslant r_0 \tag{4}$$

$$\vec{U}_p = \operatorname{grad} \varphi \tag{5}$$

$$\vec{U}_s = \operatorname{rot} \vec{\psi} \tag{6}$$

при граничном условии на поверхности цилиндра

$$\vec{U} e^{j\omega t} \Big|_{r = r_0} = y_0(\omega)\, e^{j\omega t} \vec{e}_\varphi \tag{7}$$

Здесь введены обозначения φ и $\vec{\psi}$ скалярный и векторный потенциалы частотного спектра полного вектора смещения $\vec{U}$, состоящего из безвихревого (продольного) $\vec{U}_p$ и соленоидального (поперечного) $\vec{U}_s$ векторов, k_p и k_s - волновые числа для продольного и поперечного смещений

$$k_p = \frac{\omega}{v_p}\ ; \quad k_s = \frac{\omega}{v_s} \tag{8}$$

Вследствие осевой симметрии движения цилиндра задачу удобно решать в цилиндрических координатах при совпадении оси OZ с осью цилиндра. При вращении цилиндра только вокруг собственной оси следует ожидать, что искомые смещения в среде не будут зависить от координаты Z. При этом задача становится плоской в полярной системе координат (r, φ) и равенства (5), (6) (7) переписываются в виде:

$$\vec{U}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \qquad (9)$$

$$\vec{U}_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \vec{e}_r - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \vec{e}_\varphi \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi(r_0,\varphi,\omega)}{\partial r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Psi(r_0,\varphi,\omega)}{\partial \varphi} = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial \Phi(r_0,\varphi,\omega)}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi(r_0,\varphi,\omega)}{\partial r_0} = y_0(\omega) \qquad (12)$$

Таким образом, задача сводится к решению двумерных уравнений Гельмгольца при граничных условиях (II) и (I2). Частные решения уравнений (I) и (2) можно искать в виде:

$$\Phi_n = \left[A_n H_n^{(2)}(k_p r) + D_n H_n^{(1)}(k_p r)\right](a \cos n\varphi + b \sin n\varphi) \qquad (13)$$

$$\Psi_n = \left[B_n H_n^{(2)}(k_s r) + C_n H_n^{(1)}(k_s r)\right](c \cos n\varphi + d \sin n\varphi) \qquad (14)$$

где $H_n^{(1),(2)}(k_{p,s} r)$ – функции Ганкеля первого и второго рода n -го порядка.

Для удовлетворения условий излучения при учете выражения (I) необходимо выполнение равенства

$$D_n = C_n = 0 \qquad (15)$$

Общее решение задачи поэтому следует искать в виде:

$$\Phi_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(k_p r)(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi) \qquad (16)$$

$$\Psi(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(k_s r)(c \cos n\varphi + d \sin n\varphi) \qquad (17)$$

Удовлетворим граничным условиям (II) и (I2). Для этого подставим (I6) и (I7) в эти условия.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n k_p H_n^{(2)'}(k_p r_0)(a\cos n\varphi + b\sin n\varphi) + \frac{B_n}{r_0} H_n^{(2)}(k_s r_0)(c\sin n\varphi + d\cos n\varphi)n = 0 \tag{I8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} -B_n H_n^{(2)'}(k_s r_0) k_s (c\cos n\varphi + d\sin n\varphi) - \frac{A_n}{r_0} H_n^{(2)}(k_s r_0)(-a\sin n\varphi + d\cos n\varphi)n = y_0(\omega) \tag{I9}$$

Уравнение (I8) удовлетворяется только при

$$n = d = 0 \tag{20}$$

При этом из (I9) следует, что

$$B_0 c = -\frac{y_0(\omega)}{k_s H_0^{(2)'}(k_s r_0)} \tag{2I}$$

Таким образом, продольный и векторный потенциал оказываются следующими:

$$\Phi(r,\varphi) = 0 \tag{22}$$

$$\Psi(r,\varphi) = -\frac{y_0(\omega)}{k_s H_0^{(2)'}(k_s r_0)} H_0^{(2)}(k_s r) \tag{23}$$

Искомые смещения при этом будут такими

$$\vec{U}_p(r,\varphi) = 0 \tag{24}$$

$$\vec{U}_s(r,\varphi) = y_0(\omega)\cdot\frac{H_0^{(2)'}(k_s r)}{H_0^{(2)'}(k_s r_0)}\vec{e}_\varphi \tag{25}$$

Если учесть, что

$$H_{(x)}^{(2)'} = -H_1^{(2)}(x)$$

то

$$\vec{U}_s(r,\varphi) = y_0(\omega)\frac{H_1^{(2)}(k_s r)}{H_1^{(2)}(k_s r_0)}\vec{e}_\varphi \tag{26}$$

С учетом равенства (24) искомый полный вектор смещения, определенный формулой (4), совпадает с последним выражением.

Таким образом, при вращении жесткого цилиндра относительно своей оси в упругой среде распространяются только поперечные цилиндрические волны. Продольные волны при этом полностью отсутствуют.

Вектор смещения в такой поперечной волне лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и направлен по касательной к окружности (с центром на оси цилиндра), расположенной в такой же плоскости и проходящей через рассматриваемую точку приема поперечной волны.

б) Исследование решения.

Удобно для дальнейшего исследования задачи ввести в рассмотрение частотную характеристику среды, в которой находится изучаемый жесткий вращающийся цилиндр. Под такой характеристикой понимается отношение спектра поперечного смещения в любой точке среды к спектру смещения точек поверхности цилиндра:

$$S(z_s, \ell) = \frac{U_s(z_s, \ell)}{y_0(\omega)} = \frac{H_1^{(2)}(z_s)}{H_1^{(2)}(\ell)} \qquad (27)$$

Следуя терминологии предыдущей статьи /2/, можно утверждать, что полученное решение в форме частотной характеристики (27) имеет следующие функции источника, затухания, отклонения и диаграмму направленности:

$$f_0(\ell) = \frac{1}{H_1^{(2)}(\ell)}$$

$$f_1(z_s) = H_1^{(2)}(z_s)$$

$$f_2(z_s) = 1 \qquad (28)$$

$$\mathcal{D} = 1$$

Модуль и фаза такой частотной характеристики будут следующими:

$$|S(z_s, \ell)| = \frac{|H_1^{(2)}(z_s)|}{|H_1^{(2)}(\ell)|} \qquad (29)$$

$$\arg S(z_s \ell) = \arg H_1^{(2)}(z_s) - \arg H_1^{(2)}(\ell)$$

$$\ell = \frac{\omega r_0}{V_s} \tag{30}$$

Как видно из формулы (29) модуль частотной характеристики описывается нормированным модулем функции Ганкеля второго рода первого порядка при аргументе, равном относительному расстоянию до рассматриваемой точки среды. Модуль функции Ганкеля нормируется на его же значение на поверхности цилиндра. Это значит, что на самой граничной поверхности смещение в поперечной волне совпадает со смещением точек поверхности цилиндра, что и требуется для удовлетворения граничного условия. Эта же нормировка указывает на то, что вследствие монотонного убывания модуля функции Ганкеля смещение в поперечной волне на одном и том же расстоянии от оси цилиндра будет тем больше , чем больше относительный радиус цилиндра. График затухания как бы "поднимается" для больших таких радиусов и наоборот - "опускается" для малых радиусов.

Следствием нормировки и монотонного убывания модуля функции Ганкеля является то, что смещение в среде меньше или равно (на границе с цилиндром) смещения точек поверхности цилиндра.

Затухание поперечной волны от вращающегося цилиндра, относительный радиус которого определен из условия равенства единице нормирующего множителя

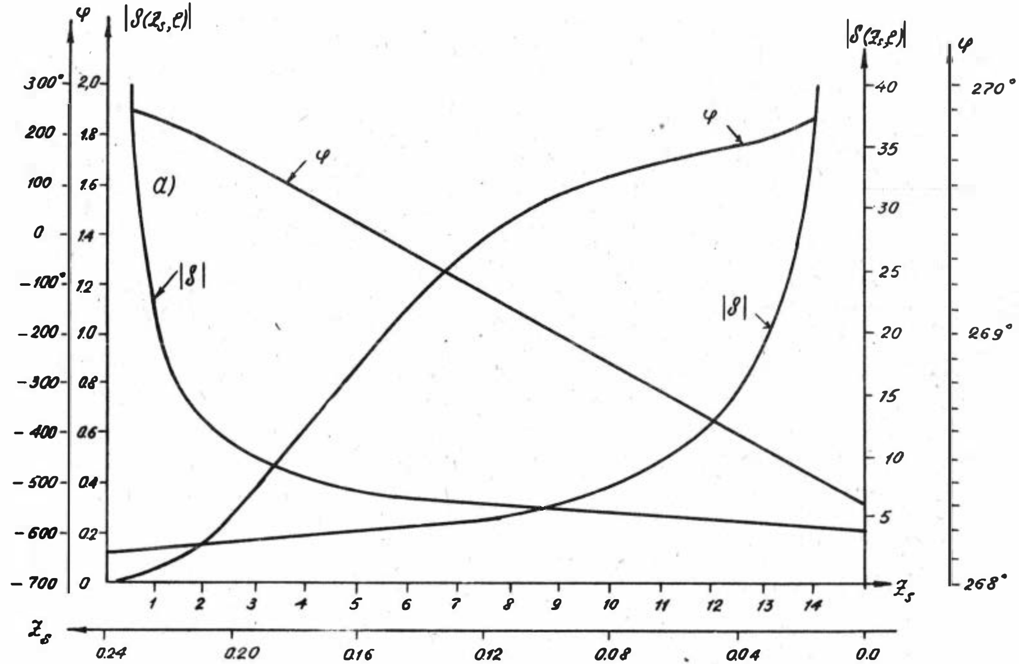
$$\left|H_1^{(2)}(\ell)\right| = 1 \tag{31}$$

и оказывается равным

$$\ell = 0{,}85 \tag{32}$$

представлено на рис. I.

Чтобы использовать этот график для цилиндров с другими радиусами, достаточно снять ординату с этого графика для заданного ℓ и разделить на полученное число (нормировать) значения ординат, указанных на рис. I, на значение упомянутой ординаты. Вместо прежних чисел, поставить числа, получившиеся в результате этого деления. При этом график затухания представится этим же рисунком с новой получившейся шкалой для оси ординат и при прежней шкале абсцисс. Придавать физический смысл графика затухания следует только для



Р и с. I. Модуль и фаза частотной характеристики для относительного радиуса, равного 0,85. (Для перехода к другим радиусам см. текст). а) – 0,3 ≤ $\mathcal{Z}_f$ ≤ I,5; б) – 0,0I6 ≤ $\mathcal{Z}_g$ ≤ 0,24.

$$z_s \geqslant \ell \qquad (33)$$

т.к. задача решалась для точек среды вне цилиндра.

Аналитически рассматриваемое затухание будет выражаться по различному для различных относительных радиусов цилиндра к удаленности точки приема от его оси.

Для исследования этого вопроса будем рассматривать ближнюю ($z_s \ll$ I) и дальнюю ($z_s \gg$ I) зоны изучаемого цилиндра,большой ($\ell \gg$ I) и малый ($\ell \ll$ I) его радиусы.

С учетом неравенства (33) ближняя зона существует только для цилиндров малых радиусов; дальняя зона - для любых радиусов.

Значение рассматриваемой функции Ганкеля при больших и малых аргументах записываются следующим образом [2]:

$$H_1^{(2)}(z_s) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\, e^{-j(z_s - \frac{3}{4}\pi)} \quad \text{для } z_s \gg 1 \qquad (34)$$

$$H_1^{(2)}(z_s) \simeq \frac{z_s}{2} + \frac{j}{\pi}\cdot\frac{2}{z} \approx \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{z}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{4}{\pi z_s^2}} \qquad (35)$$

$$\text{для } z_s \ll 1$$

Отсюда видно, что затухание в ближней и дальних зонах будет различным: в первой зоне амплитуда смещений будет убывать обратно-пропорционально относительному расстоянию: во второй зоне - обратно-пропорционально корню квадратному из такого же расстояния.

Фазовая характеристика рассматриваемой частотной характеристики будет также различной для этих зон: в ближней зоне она не пропорциональна относительному расстоянию; в дальней зоне такая пропорциональность существует.

Последнее говорит о том, что смещение как функция времени в поперечной волне для больших радиусов цилиндра будет совпадать с точностью до постоянного множителя с такой же временной функцией смещения точек поверхности цилиндра. Правда, это утверждение нужно принять с оговоркой, что спектр функции смещения цилиндра должен быть сосредоточен в некоторой ширине полосы частот, для которой зависимость модуля частотной характеристики от частоты как корень квадратный из этой частоты может быть приближенно принято как отсутствие зависимости от нее.

Для дальней зоны излучателя ($\mathcal{Z}_S \gg$ I) можно ввести в рассмотрение, как это сделано в [2], фиктивный источник и фиктивную среду.

Действительно, частотная характеристика среды для дальней зоны может быть представлена в виде:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Z}_s, e) = \frac{H_1^{(2)}(\mathcal{Z}_s)}{H_1^{(2)}(e)}\Bigg|_{\mathcal{Z}_s \gg 1} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{H_1^{(2)}(e)\sqrt{e}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,e^{j(\mathcal{Z}_s - \frac{3}{4}\pi)} \qquad (35а)$$

Отсюда фиктивный источник и фиктивная среда будут характеризоваться функцией фиктивного источника

$$f_0^*(e) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{H_1^{(2)}(e)\sqrt{e}} \qquad (35б)$$

и функцией затухания фиктивной среды

$$f_c\left(\frac{r}{r_0}, \mathcal{Z}_s\right) = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\, e^{-j(\mathcal{Z}_s - \frac{3}{4}\pi)} \qquad (35в)$$

При этом указанные функции удовлетворяют условию

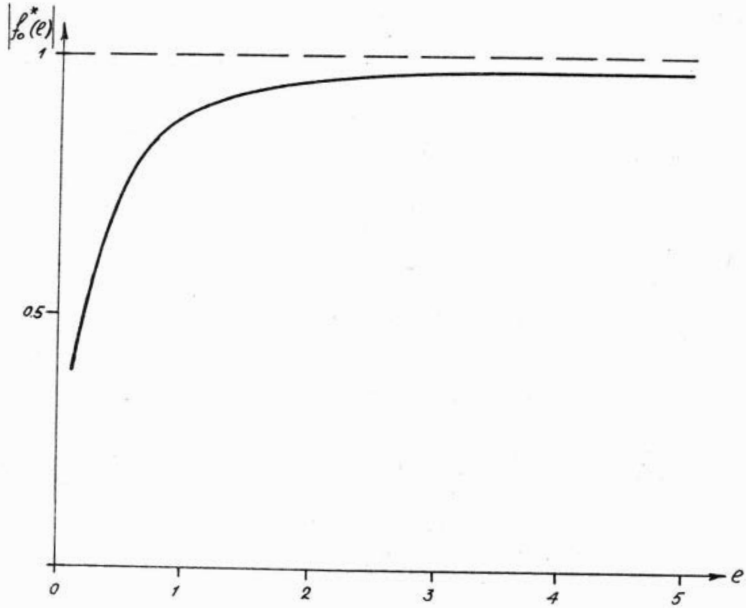
$$\mathcal{S}(\mathcal{Z}_s, e) = f_0^*(e) \cdot f_c\left(\frac{r}{r_0}, \mathcal{Z}_s\right) \qquad (35г)$$

Первая из этих функций зависит от частоты и параметров источника и среды, модуль второй функции не зависит от частоты и параметров среды. Независимость от частоты модуля второй функции делает расчет частотной характеристики среды весьма простым, если известна функция фиктивного источника. Модуль этой функции представлен на рис. 2.

Умножив на $\sqrt{\frac{r_0}{r}}$ ординату, соответствующую заданному значению параметра " e " рассматриваемого источника, получаем модуль частотной характеристики среды или, что то же, модуль отношения смещения среды в точке $\frac{r}{r_0}$ и смещения точки поверхности вращающегося цилиндра.

§ 2. Уравнение движения вращающегося инерционного цилиндра и решение трех задач этого источника

Напряженное состояние упругой среды, созданное вращающимся цилиндром, можно определить, исходя из полученного решения в предыдущем параграфе, и с учетом того, что в любой точке упругой



Р и с. 2. Модуль функции фиктивного источника по смещению.

среды полученное смещение полностью определяется тангенциальной её составляющей:

$$U_\varphi = U_s ; \qquad U_r = U_z = 0 \tag{36}$$

Такое напряженное состояние в результате этого оказывается следующим на границе цилиндра со средой:

$$\tau_{r\varphi} = V_s^2 \rho \frac{y_o(\omega)}{r_o} \left[\frac{e H_o^{(2)}(e)}{H_1^{(2)}(e)} - 1 \right] \tag{37}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \tau_{zr} = \tau_{\varphi z} = 0$$

$$r = r_o$$

Интегрированием по поверхности цилиндра указанного напряжения получаем следующие силы реакции связей и их моменты, действующие на цилиндр высотой h :

$$\mathcal{M}_\varsigma = 2\pi r_o^2 h \, \tau_{r\varphi} \tag{38}$$

$$\mathcal{M}_\xi = \mathcal{M}_\eta = P_x = P_y = P_z = 0$$

Полученные соотношения являются следствием рассматриваемого вращательного движения цилиндра вокруг его оси симметрии[x)]. Следствием этого же вращения будут соотношения, вытекающие из условия (I):

$$X_c - y_c - Z_c - \omega_\xi - \omega_\eta - 0$$

$$\omega_\varsigma = \frac{j\omega \; y_o(\omega)}{r_o} e^{j\omega t} \tag{39}$$

$$\dot{\omega}_\varsigma = -\frac{\omega^2 y_o(\omega)}{r_o} \; e^{j\omega t}$$

подставляя соотношения (38) и (39) в уравнения движения свободного абсолютно жесткого тела /I/, получим уравнение движения рассматриваемого вращающегося источника в следующем виде:

$$-J_\varsigma \frac{\omega^2}{r_o} y_o(\omega) = h \mathcal{M}_o(\omega) + 2\pi r_o^2 h \, \tau_{r\varphi} \tag{40}$$

---

x) Момент, полученный в /3/ для упруго-пластических деформаций, не может быть сведен к формулам (38) и (37), т.к. он несправедлив для упругих стационарных колебаний.

где $\mathcal{M}_o(\omega)$ спектр внешнего активного момента, действующего на единицу длины цилиндра. Используя выражение момента инерции для полного цилиндра с внутренним радиусом r_1 .

$$J_s = \frac{\pi h \rho_o r_o^4}{2}\left(1 - \frac{r_1^4}{r_o^4}\right) \tag{41}$$

а также равенство (37), получим уравнение движения такого полого вращающегося цилиндра в виде:

$$y_o(\omega)\frac{\pi r_o V_s^2 \rho_o}{2}\left[\left(1 - \frac{r_1^4}{r_o^4}\right)\ell^2 + 4\frac{\rho}{\rho_o}\left(\frac{\ell H_o^{(2)}(\ell)}{H_1^{(2)}(\ell)} - 1\right)\right] = -\mathcal{M}_o(\omega) \tag{42}$$

Уравнение движения сплошного цилиндра получим как частный случай ($r_1 = 0$) этого уравнения.

Решение уравнения (42) представим в виде частотной характеристики момент-смещение цилиндра, под которой понимается отношение спектра смещения точек поверхности цилиндра к спектру внешнего активного момента, действующего на единицу длины цилиндра. Такая частотная характеристика, как следует из уравнения движения, оказывается следующей:

$$\frac{y_o(\omega)}{\mathcal{M}_o(\omega)} = -\frac{1}{a_s}\cdot\frac{1}{\ell^2 + b_s\beta_s(\ell)} \tag{43}$$

где обозначено

$$a_s \equiv \frac{\pi r_o V_s^2 \rho_o}{2}\left(1 - \frac{r_1^4}{r_o^4}\right)$$

$$b_s \equiv \frac{4}{1 - \frac{r_1^4}{r_o^4}}\cdot\frac{\rho}{\rho_o} \tag{44}$$

$$\beta_s \equiv \frac{\ell H_o^{(2)}(\ell)}{H_1^{(2)}(\ell)} - 1$$

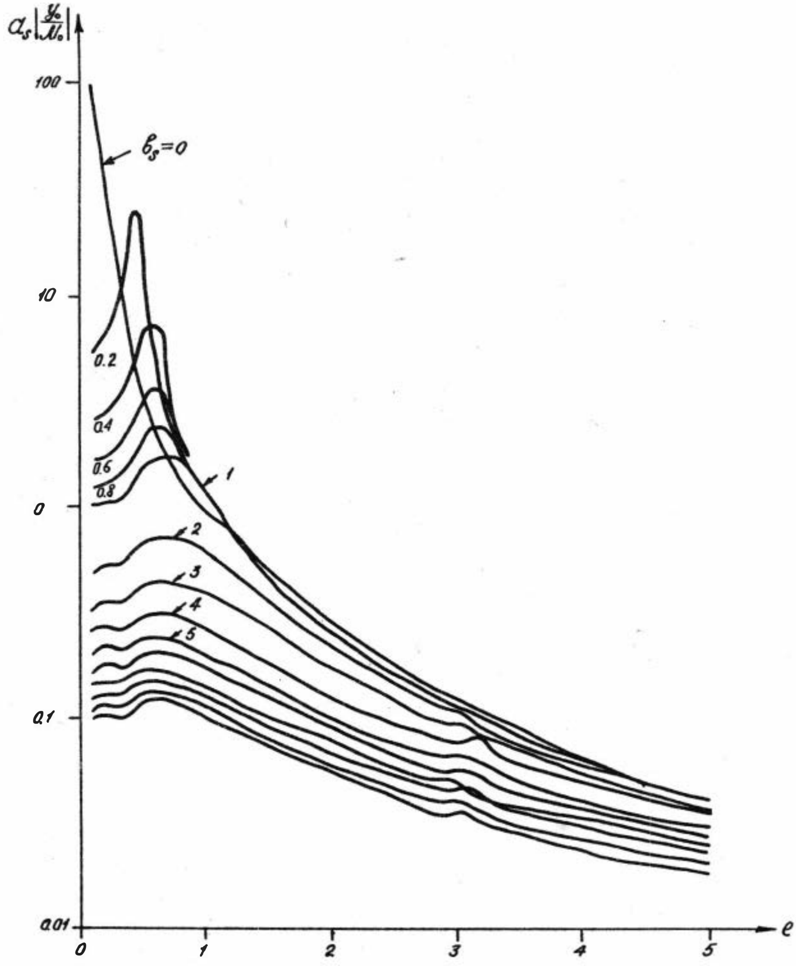
Соотношение (43) является решением второй задачи источника. Действительно, из него можно определить искомое смещение точек поверхности цилиндра, если последний вращается под действием внешнего активного момента и если заданы как параметры среды, так и источника в форме (44). Точки цилиндра, находящиеся не на границе со средой будут совершать вращение, смещение которого определяется следующим образом:

$$y_r(\omega) = y_0(\omega)\frac{r}{r_0} \qquad (45)$$
$$r \leq r_0$$

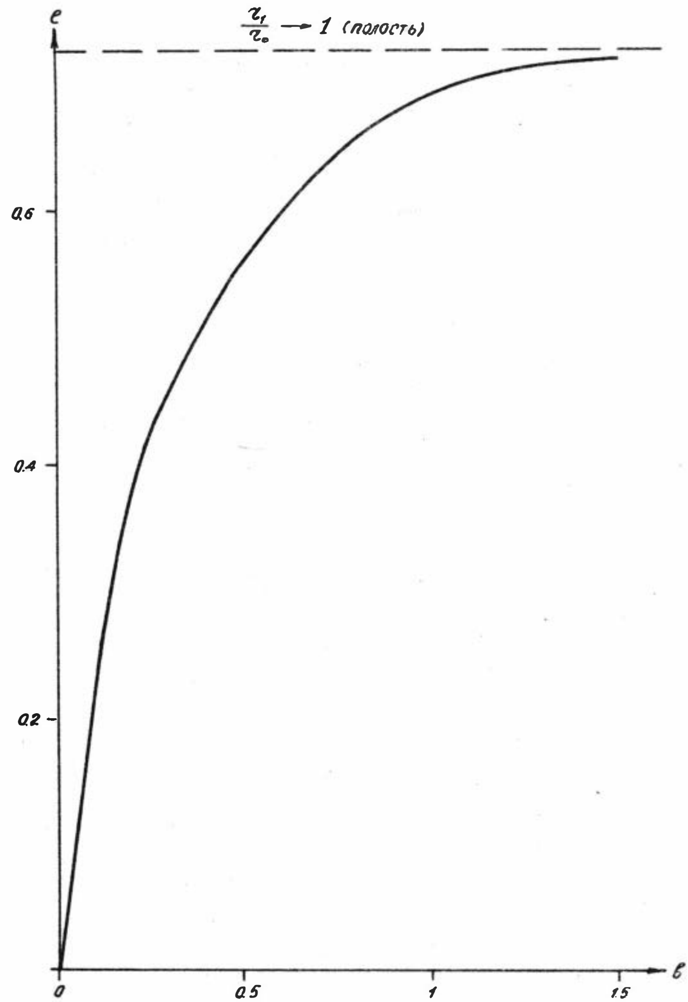
Таким образом, вторая задача инерционного источника решена.

Исследуем это решение. Модуль рассматриваемой частотной характеристики, увеличенный в a_s раз, представлен на рис. 3. Как видно, он имеет максимум, который смещается как по оси абсцисс, так и ординат в зависимости от величины параметра b_s. Общий "уровень" модуля обратно пропорционален параметру a_s.

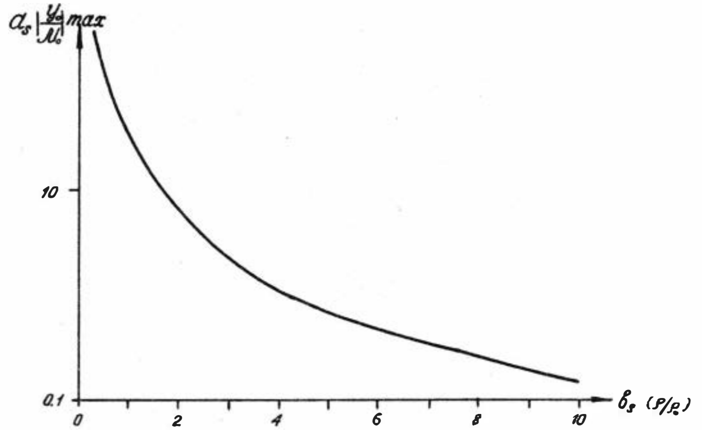
Абсцисса максимума частотной характеристики равна относительной (безразмерной) преобладающей частоте временной зависимости смещения цилиндра, если приложенный внешний момент есть δ - функция времени. Зависимость этой частоты от параметра b_s представлена на рис. 4. Видно, по мере увеличения этого параметра, т.е. при увеличении отношения плотностей среды и цилиндра, а также при уменьшении толщины стенки цилиндра преобладающая частота плавно увеличивается от нулевого значения при b_s = =0, стремясь к асимптотическому значению ℓ = 0,72 при $b_s \to \infty$ Последнее значение относительной частоты является такой частотой полости ($\frac{r_1}{r_0} \longrightarrow 1$) в упругой среде, или бесконечно плотного цилиндра, находящегося в вакууме ($\frac{\rho}{\rho_0} \longrightarrow 0$). Величины рассматриваемого максимума, увеличенного в "a_s" раз, представлены на рис. 5 как функции параметра b_s Видно, что по мере увеличения этого параметра, т.е. при увеличении отношения плотности среды и цилиндра, максимальное смещение цилиндра монотонно уменьшается при одном и том же внешнем моменте, приложенном к цилиндру. Иными словами - в более плотной среде смещение цилиндра меньше, чем в менее плотной при прочих равных условиях. Смещение более плотного цилиндра меньше, чем менее плотного при тех же условиях. Рассматриваемое смещение обратно пропорционально величине a_s. Это значит, что максимальное смещение обратно пропорционально квадрату скорости поперечной волны в среде и радиусу цилиндра (в первой степени) при прочих равных условиях. Такая сильная зависимость от скорости поперечной волны в среде означает то, что при её увеличении, например, в четыре раза смещение уменьшается в 16 раз. В то же время, если радиус цилиндра



Р и с. 3. Модуль частотной характеристики момент-смещение для источника поперечных волн.



Р и с. 4. Изменение преобладающей частоты для источника поперечных волн.



Р и с. 5. Зависимость максимума нормированного модуля частотной характеристики от параметра b_s.

увеличить во столько раз, то смещение уменьшится только в четыре раза при прочих равных условиях. Из сказанного следует, что для достижения большого смещения поверхности рассматриваемого источника поперечных волн его размер (радиус) следует брать малым. Источник более эффективен в средах низкоскоростных,чем высокоскоростных.

Решение первой задачи источника получим связав внешний активный момент с сейсмическим полем, созданным рассматриваемым источником. Для этого подставим в решение первой краевой задачи (26) значение смещения точек поверхности цилиндра из формулы (43). В результате этого получим

$$\vec{U}_s(r,\varphi,\omega) = -\frac{\mathcal{M}_o(\omega)}{a_s}\cdot\frac{1}{\ell^2 + b_s\beta_s(\ell)}\cdot\frac{H_1^{(2)}(z_s)}{H_1^{(2)}(\ell)}\,\vec{e}_\varphi \tag{46}$$

Найденная формула является решением первой основной задачи, т.к. вектор смещения поперечной волны в любой точке упругой среды, вмещающей вращающийся цилиндр, может быть найден по этой формуле, если известны параметры среды, источника и внешний активный момент, действующий на единицу длины цилиндра.

В качестве примера применения полученной основной формулы (46), а также предыдущих формул и графиков оценим эффективность увеличения радиуса рассматриваемого источника с целью получения максимального сейсмического эффекта в дальней зоне излучателя. Оценку проведем для максимума модуля смещения среды. Из формулы (46) получим

$$\left|\vec{U}_s\right|_{max} = \left|\mathcal{M}_o(\omega)\right|\frac{a_s\left|\dfrac{y_o(\omega)}{\mathcal{M}_o(\omega)}\right|_{max}}{a_s}\cdot\left|f_o^*(\ell)\right|\sqrt{\frac{r_o}{r}} \tag{46а}$$

Как видно из рис. 2, можно приближенно принять, что

$$\left|f_o^*(\ell)\right| \approx 1 \quad \text{при} \quad \ell = \frac{2\pi r_o}{\lambda_s} > 1 \tag{46б}$$

$$\left|f_o^*(\ell)\right| \approx \ell \quad \text{при} \quad \ell = \frac{2\pi r_o}{\lambda_s} < 1 \tag{46в}$$

При этом, если цилиндр сплошной ($r_1 = r_0$), оцениваемое смещение будет следующим

$$|\vec{U}_s|_{max} = 2\left|\frac{M_0(\omega)}{\pi\mu}\right| \frac{\rho}{\rho_0} \; a_s \left|\frac{Y_0(\omega)}{M_0(\omega)}\right| \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \quad \text{при} \quad r_0 > \frac{\lambda_s}{2\pi} \qquad (46г)$$

$$|\vec{U}_s|_{max} = 2\left|\frac{M_0(\omega)}{\pi\mu}\right| \frac{\rho}{\rho_0} \; a_s \left|\frac{Y_0(\omega)}{M_0(\omega)}\right| \frac{2\pi}{\lambda_s}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \quad \text{при} \quad r_0 < \frac{\lambda_s}{2\pi} \qquad (46д)$$

Здесь λ_s означает длину волны, соответствующую преобладающей частоте на сейсмограмме.

Если момент создается парой сил F_0 , приложенных к поверхности цилиндра и, следовательно, $M_0 = F_0 r_0$, то максимальное смещение среды в фиксированной точке на расстоянии r от оси цилиндра будет увеличиваться как $r_0^{3/2}$ и $r_0^{1/2}$ для цилиндров с радиусами меньше и больше приблизительно шестой части длины волны соответственно. Отсюда видна малая сейсмическая эффективность увеличения радиусов до значений, близких к длине волны, излучаемой вращающимся цилиндром.

Решение третьей задачи источника получим, связав внешний активный момент с напряжением на поверхности источника, граничащей с упругой вмещающей средой. Для этого подставим в равенство (37) значение смещения точек поверхности цилиндра, найденного из уравнения (43). В результате этого получим следующее единственное напряжение на границе цилиндра со средой:

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{M_0(\omega)}{\pi r_0^2\left(1 - \frac{r_1^{\nu}}{r_0^{\nu}}\right)} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \; \frac{\beta_s(e)}{e^2 + b_s\beta_s(e)} \qquad (47)$$

Остальные компоненты тензора напряжения равны нулю. Ограничивая полученное напряжение пределом упругости для вмещающей среды, можно указать тот предельный внешний активный момент, действие которого на рассматриваемый источник не вызовет пластических деформаций на вмещающей среде.

Формула (47) представляет собой решение третьей задачи инерционного источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверко Е.М. Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных абсолютно жестких излучателей. Настоящий сборник.

2. Аверко Е.М. Цилиндрический инерционный источник смешанного типа. Настоящий сборник.

3. Рахматулин Х.А. Исследование некоторых случаев сосредоточенных воздействий на упругую и упруго-пластическую среду.Сб. "Распространение упругих и упруго-пластических волн". Изд-во "ФАН", УЗ ССР, Ташкент, 1969, стр. 240-260.

4. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. "Наука", М., 1964.

Е.М. Аверко

ВРАЩАЮЩИЙСЯ ИНЕРЦИОННЫЙ ИСТОЧНИК ПОПЕРЕЧНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

В статье рассмотрен источник объемных сферических волн в виде вращающегося инерционного полого шара.

Такой источник интересен тем, что по сравнению с известными источниками он имеет наипростейшую диаграмму направленности. Это обстоятельство весьма существенно для метода поперечных волн, т.к. упрощает интерпретацию сейсмического материала.

Инерционный источник расчитывается по схеме [1]. В литературе известно решение краевой задачи для вращающейся сферы [4, 6], однако оно получено при задании напряжений на поверхности этой фигуры. В настоящей статье такая задача решается для заданных на поверхности смещения сферы, а затем расчитывается инерционный источник.

§ I. Первая краевая задача для вращающейся сферы

Пусть в безграничной упругой среде, характеризующейся уравнением движения в форме двух уравнений Гельмгольца

$$\nabla^2 \varphi + k_p^2 \varphi = 0 \tag{I}$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} + k_s^2 \vec{\psi} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\psi} = \psi_z \vec{e}_z + \psi_\varphi e_\varphi + \psi_\theta \vec{e}_\theta \tag{3}$$

и некоторым дополнительным условием, устанавливающим связь между функциями φ, ψ_z, ψ_θ, ψ_φ, о котором будет сказано ниже, вращается жесткий полный шар внешнего радиуса r_o и внутреннего r_1. Это вращение пусть происходит вокруг оси OZ сферической системы координат по закону:

$$\vec{U}\Big|_{r=r_0} = U_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\Big|_{r=r_0} = \Omega\, r_0 \sin\theta\, e^{j\omega t}\,\vec{e}_\varphi \tag{4}$$

где $\vec{U}\big|_{r=r_0}$ есть вектор смещения точек внешней поверхности шара, жестко соединенной со средой; Ω - угловое смещение шара.

Требуется определить смещение точек упругой среды

$$\vec{U}(r, \varphi, \theta, \omega) = \vec{U}_p + \vec{U}_s = U_r \vec{e}_r + U_\varphi \vec{e}_\varphi + U_\theta \vec{e}_\theta \tag{5}$$

$$\vec{U}_p = \operatorname{grad} \Phi(r, \varphi, \theta, \omega) \tag{6}$$

$$\vec{U}_s = \operatorname{rot} \vec{\Psi}(r, \varphi, \theta, \omega) \tag{7}$$

вне шара ($r \leqslant r_0$).

Задачу следует считать независимой от угла φ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \tag{8}$$

При этом компоненты искомого смещения можно записать в виде:

$$U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin \Psi_\varphi)\right] \tag{9}$$

$$U_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r \Psi'_\varphi)\right] \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Учитывая граничное условие (4) и вид функции U_φ, определяемой равенством (II), функции Ψ'_r и Ψ_θ можно искать в таком виде:

$$\Psi_r = f_r(r)\cos\theta \tag{12}$$

$$\Psi_\theta = f_\theta(r)\sin\theta \tag{13}$$

При этом векторное уравнение (3) эквивалентно трем следующим скалярным уравнениям:

$$\nabla^2 \Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} + K_s^2 \Psi_\varphi = 0 \tag{14}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_\theta') - 2\frac{f_\theta + f_r}{r^2} + K_s^2 f_\theta = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r') - 4\frac{f_\theta + f_r}{r^2} + K_s^2 f_r = 0 \qquad (16)$$

При их получении использованы выражения проекции вектора $\nabla^2\vec{\psi}$ через компоненты ψ_r, ψ_φ, ψ_θ [4].
Почленно складывая и вычитывая последние два уравнения с предварительным умножением на 2 уравнения (15) при вычитании, заменяем эти уравнения следующими:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(2f_\theta' - f_r')\right] + K_s^2(2f_\theta - f_r) = 0 \qquad (17)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(f_\theta' + f_r')\right] + K_s^2(f_\theta + f_r) - 6\frac{f_\theta + f_r}{r^2} = 0 \qquad (18)$$

Решая их, получим [5]:

$$\begin{aligned} 2f_\theta - f_r &= r^{-1/2} Z_{1/2}(K_s r) \\ f_\theta + f_r &= r^{-1/2} Z_{5/2}(K_s r) \end{aligned} \qquad (19)$$

Согласно условию излучения цилиндрические функции

$$Z_\nu(z) = \mathcal{A} H_\nu^{(2)}(z) + \mathcal{B} H_\nu^{(1)}(z) \qquad (20)$$

следует взять в форме функций Ганкеля второго рода, т.к. по условию (4) в задаче рассматривается зависимость от времени в виде $e^{+j\omega t}$.

$$\begin{aligned} 2f_\theta - f_r &= \mathcal{A}_1 r^{-1/2} H_{1/2}^{(2)}(K_s r) \\ f_\theta + f_r &= \mathcal{A}_2 r^{-1/2} H_{5/2}^{(2)}(K_s r) \end{aligned} \qquad (21)$$

Решая эту систему, получим:

$$f_0 = \frac{1}{3\sqrt{r}}\left[A_1 H_{1/2}^{(2)}(k_s r) + A_2 H_{5/2}^{(2)}(k_s r)\right] \qquad (22)$$

$$f_r = \frac{-1}{3\sqrt{r}}\left[A_1 H_{1/2}^{(2)}(k_s r) - 2A_2 H_{5/2}^{(2)}(k_s r)\right]$$

Если учесть условие излучения, то решение оставшихся уравнений (I4) и (I) приводит к следующему:

$$\Phi(r,\theta,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}^{(2)}(k_p r)\, P_n(\cos\theta) \qquad (23)$$

$$\psi_\varphi(r,\theta,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}^{(2)}(k_s r)\, P_n'(\cos\theta) \qquad (24)$$

где $P_n(\cos\theta)$; $P_n'(\cos\theta)$ - полиномы и присоединенные полиномы Лежандра соответственно; a_n ; b_n - некоторые постоянные.

Теперь учтем следующее. Искомый вектор смещения точек среды - как произвольный вектор смещения - определяется тремя константами. Использование потенциальных функций приводит к четырем константам: A_I, A_2, a_n , b_n . Любую из этих констант можно без ограничения общности положить равную нулю; мы положим $A_2 = 0$. При этом из формул следует:

$$f_0 = \frac{A}{\sqrt{r}} H_{1/2}^{(2)}(k_s r)\,; \qquad \left(A = \frac{A_1}{3}\right) \qquad (25)$$

$$f_r = -f_0$$

Подставляя полученные решения в граничные условия (4) получаем:

$$U_r\big|_{r=r_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{a_n}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}(k_p r)\right] P_n(\cos\theta) + \frac{b_n}{r\sin\theta}\,\frac{H_{n+1/2}^{(2)}}{\sqrt{r}}(k_s r)\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\, P_n'(\cos\theta)\right]\Big\}\Big|_{r=r_0} = 0 \qquad (26)$$

$$U_\theta\big|_{r=r_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\frac{a_n H_{n+1/2}^{(2)}(k_p r)}{r\sqrt{r}}\,\frac{\partial}{\partial\theta} P_n(\cos\theta) - \frac{b_n}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\sqrt{r}}\,\frac{H_{n+1}^{(2)}(k_s r)}{\sqrt{r}}\right) P_n'(\cos\theta)\Big\}\Big|_{r=r_0} = 0 \qquad (27)$$

$$U_\varphi\Big|_{r=r_0}=\frac{A}{r}\Big\{-\frac{d}{dr}\Big[\sqrt{r}\,H^{(2)}_{1/2}(k_s r)+ \\ +\frac{H^{(2)}_{1/2}(k_s r)}{\sqrt{r}}\Big\}\Big|_{r=r_0}\sin\theta=\Omega r_0\sin\theta \tag{28}$$

Решение этой системы приводит к следующему:

$$a_n=b_n=0 \tag{29}$$

$$A=-\frac{\Omega r_0^2}{\sqrt{k_s}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{e^{je}}{1-\frac{j}{e}} \tag{30}$$

$$e\equiv k_s r_0 \tag{31}$$

При решении уравнения (28) использованы такие зависимости /3/:

$$\left.\begin{aligned}
&H^{(2)'}_{1/2}(z)=\frac{1}{2}\Big[H^{(2)}_{-1/2}(z)-H^{(2)}_{3/2}\Big]\\
&H^{(2)}_{1/2}(z)=j\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-jz};\quad H^{(2)}_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-jz}\\
&H^{(2)}_{3/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big(1-\frac{j}{z}\Big)e^{-jz}
\end{aligned}\right] \tag{31a}$$

Теперь находим по формулам (6) и (7) искомые смещения среды:

$$\vec{U}_p=0;\quad \vec{U}_s=U_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi \tag{32}$$

$$U_\varphi=U_0\frac{q(z_s)}{q(e)}\sin\theta \tag{33}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned}
&U_0=\Omega r_0;\quad q(z)=\frac{1-\frac{j}{z}}{z}\,e^{-jz}\\
&q(z)=\frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{1}{z_2}};\\
&\arg q(z)=-\Big[z+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z}\Big]\\
&z_s=k_s r;\quad e=k_s r_0
\end{aligned}\right] \tag{34}$$

Очевидно, что величина U_0 есть смещение точек внешней поверхности, расположенных на экваторе ($\theta = \frac{\pi}{2}$) вращающейся сферической оболочки.

Итак, при вращении сферической недеформирующейся оболочки по гармоническому закону (4) в упругой среде возникает только поперечная волна, вектор смещения в которой расположен в плоскостях, перпендикулярных оси вращения оболочки и направлен по касательной к окружности, лежащей в этой же плоскости и проходящей через точку приема волны.

Продольные волны не возникают от такого источника упругих волн. Поэтому он относится к классу поперечных волн.

Величина смещения в поперечной волне от источника равна смещению точки внешней поверхности оболочки в экваториальной плоскости, умноженной на частотную характеристику среды

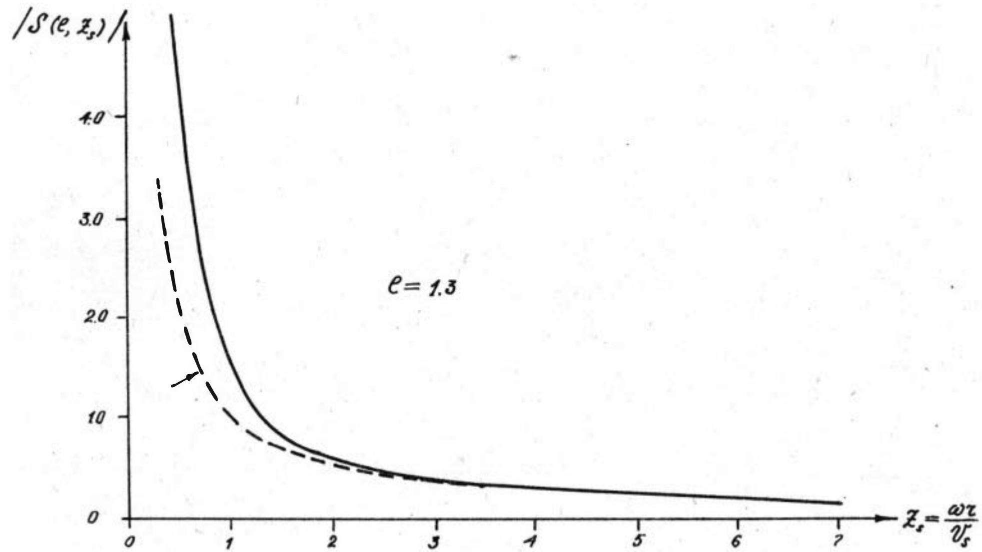
$$S(z_s, e) = \frac{q(z_s)}{q(e)} \tag{35}$$

и на диаграмму направленности источника

$$D(\theta) = \sin\theta \tag{36}$$

Как видно из формулы (35), частотная характеристика среды — это отношение модуля смещения в поперечной волне для рассматриваемой точки (z_s , θ) приема к смещению точки (e , θ) внешней поверхности оболочки. Эта характеристика дает количественную трансформацию смещения точек поверхности оболочки в смещение среды и показывает, как затухает поперечная волна при её распространении в среде. Диаграмма направленности дает угловое распределение смещения среды. Модуль и фаза частотной характеристики среды будут следующими:

$$\begin{gathered} S(z_s, e) = |S(z_s, e)| e^{i\beta(z_s, e)} \\ |S(z_s, e)| = \frac{|q(z_s)|}{|q(e)|} = \frac{e}{z_s}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{z_s^2}}{1+\frac{1}{e^2}}} \\ \beta(z_s, e) = -[z_s - \alpha(z_s)] + [e - \alpha(e)] \\ \alpha(z) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} \end{gathered} \tag{37}$$



Р и с. I. Модуль частотной характеристики среды для вращающегося инерционного источника.

Из приведенных выражений видно, что поперечная волна в ближней зоне излучателя:

$$\ell \leq \mathcal{Z}_s \ll 1 \tag{38}$$

затухает как $\mathcal{Z}_s^{-2}$; в дальней зоне

$$\ell \leq \mathcal{Z}_s \gg 1 \tag{39}$$

это затухание происходит как $\mathcal{Z}_s^{-1}$ На рис. I представлен модуль частотной характеристики среды для нормирующего множителя $q(\ell) = 1$, что соответствует $\ell \simeq 1{,}3$.

Для использования этого графика при любых значениях ℓ достаточно ординате, соответствующей абсциссе $\mathcal{Z}_s = \ell$ приписать значение, равное единице, а остальные ординаты, представленные на рис. I, нормировать на значение этой ординаты при $\ell = 1{,}3$. Из графика видно, что волна очень сильно затухает в ближайшей зоне и - в меньшей мере в дальней зоне. С точностью приблизительно около I% начало дальней зоны можно считать $\mathcal{Z}_s \geqslant 2$. Это означает, что при удалениях от центра сферы - источника на расстояния больше третьей части длины волны затухание будет происходить как в дальней зоне, т.е. по закону $\mathcal{Z}_s^{-1}$.

Распределение смещений в среде по углам сферической системы координат дается диаграммой направленности. Это распределение не зависит от долготы, а от полярного расстояния зависит как $\sin\theta$. Если учесть, что для сферической системы координат широта изменяется в следующих пределах:

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

то смены знака смещений в поперечной волне для различных точек среды не будет. Максимальное смещение точек среды будет в экваториальной плоскости сферической системы координат; минимальное и равное нулю - на оси вращения оболочки; в остальных точках это смещение увеличивается по закону $\sin\theta$ по мере увеличения угла θ для $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и уменьшается от максимального до нуля при дальнейшем увеличении этого угла в пределах $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Диаграмма направленности описывает указанные изменения и представляет собой тор, который в сечении меридиальной плоскостью есть две окружности радиуса I/2. Их центры и центр оболочки лежат на одной прямой, расположенной в экваториальной плоскости, а окружности касаются друг друга в центре оболочки.

Нужно отметить, что решенная задача отличается от аналогичной задачи [4, 6] тем, что в ней задано смещение точек недеформирующейся среды, а не напряжения, приложенные к ней. При этом, естественно, что такие свойства объемных волн в среде как затухание и распределение по углу смещений должны совпадать для обоих источников, Различие этих источников состоит в способе трансформации физической величины, заданной на поверхности сферы, в смещение среды: для нашего источника смещение трансформируется в смещение, для [4, 6] напряжение в смещение.

§ 2. Уравнение движения инерционного источника объемных волн и решение трех задач этого источника

Пусть сферический недеформирующийся полый шар вращается около постоянной оси под действием приложенного к ней внешнего момента M_0. Плотность вещества этого шара обозначим через ρ_0.

Такой источник будет инерционным и, как следует из предыдущего, он излучает только поперечные волны.

Уравнение движения этого инерционного источника будет следующим:

$$-J_z \omega^2 \Omega = M_0 + M_r \tag{40}$$

где M_r - реактивный момент относительно оси вращения, с которым среда действует на поверхность источника при его вращении; J_z - момент инерции сферической оболочки относительно оси вращения.

Подсчитаем момент M_r. Из предыдущего следует, что

$$U_r = U_\theta \quad 0 ; \quad U_\varphi = U_0 \frac{q(z_s)}{q(e)} \sin\theta \tag{41}$$

При этом состояние среды описывается только одной деформацией

$$e_{r\varphi} = \frac{U_0}{q(e)} \left[\frac{\partial q(z_s)}{\partial r} - \frac{q(z_s)}{r} \right] \sin\theta \tag{42}$$

Остальные деформации равны нулю:

$$e_{rr} = e_{r\theta} = e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} \quad \theta = 0 \tag{43}$$

Поэтому напряжение в среде будет также только одно:

$$\tau_{r\varphi} = \mu e_{r\varphi} \tag{44}$$

Беря это напряжение на внешней поверхности рассматриваемого шара ($r = r_o$) и интегрируя моменты относительно оси вращения от действия этих напряжений

$$\frac{d\mathcal{M}_r}{d\Sigma} = \mu \tau_{r\varphi} \cdot r_o \sin\theta \tag{45}$$

получаем следующий реактивный момент, действующий на шар при его вращении в упругой среде:

$$\mathcal{M}_r = 2 r_o^3 \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \tau_{r\varphi} \sin^2\theta = \frac{8}{3}\pi r_o^2 U_o \left[1 + e\,\frac{\frac{2}{e} + j\left(1 - \frac{2}{e^2}\right)}{1 - \frac{j}{e}}\right] \tag{46}$$

Подставляя найденный реактивный момент, а также значение момента инерции для сферической оболочки

$$J_z = \frac{8}{15}\pi \rho_o r_o^5 \left(1 - \frac{r_1^5}{r_o^5}\right) \tag{47}$$

в уравнение движения (40) и решая его относительно U_o получим:

$$\frac{U_o}{\mathcal{M}_o} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{b e^2 + \beta(e)} \tag{48}$$

где обозначено:

$$a = \frac{8}{3}\pi r_o^2 \rho V_s^2; \quad (\mu = \rho V_s^2)$$

$$b = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{r_1^5}{r_o^5}\right)\frac{\rho_o}{\rho} \tag{49}$$

$$\beta(e) = 1 + e\,\frac{\frac{2}{e} + j\left(1 - \frac{2}{e^2}\right)}{1 - \frac{j}{e}}$$

Равенство (48) является решением второй задачи инерционного источника рассматриваемого типа. Действительно, зная параметры источника (r_o , r_1 , ρ_o) и среды ($\mu = \rho V_s^2$), можно по этому равенству определить смещение точек экваториальной поверхности оболочки, по которому легко вычислить смещение остальных точек:

$$U = U_o \sin\theta \tag{50}$$

Решение первой (основной) задачи источника с учетом соотношения (4I), очевидно, будет следующим:

$$\vec{U}(r,\theta,\omega) = \frac{-\mathcal{M}_o(\omega)}{a} \cdot \frac{S(e, z_s)\,\mathcal{D}(\theta)}{\beta(e) + b e^2} \cdot \vec{e}_\varphi \tag{5I}$$

По этому решению при знании параметров источника и среды и внешнему моменту, приложенному к излучателю, можно определить смещение любой точки среды.

Решение третьей задачи получим, если равенства (4I) и (48) подставим в (44) при $r = r_0$. Оно оказывается следующим:

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{M_0(\omega)}{\frac{8}{3}\pi r_0^3} \cdot \frac{B(e)}{B(e) + be^2} \tag{52}$$

Итак, решены три задачи инерционного источника типа вращающейся оболочки. Такой источник излучает только поперечные волны. Смещение в них принимает максимальное значение в экваториальной плоскости сферической системы координат и равно нулю на оси вращения. Пересчет внешнего момента в смещение поперечной волны производится по формуле (5I); смещение точек поверхности оболочки в смещение волны – по формуле (33). Смещение любой точки источника, явившееся следствием приложенного внешнего момента, расчитываются по формулам (48) и (50). Напряжение,возникающее на поверхности от этого же момента, подсчитывается по формуле (52). Оно является исходной величиной для расчета тела инерционного источника на прочность из того условия, что указанное напряжение не должно превосходить предел упругости материала оболочки. Если же поставить условие, что расчитанное по формуле (52) напряжение не должно превосходить предел упругости материала среды, то такое условие явится пределом применимости всех решений, полученных в настоящей статье.

ЛИТЕРАТУРА

I. Аверко Е.М. Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных и абсолютно жестких излучателей. Настоящий сборник.

2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. "Высшая школа", М., 1966, 185.

3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм,рядов и произведений. ФМ, М., 1963.

4. Гурвич И.И. К теории сферического излучателя поперечных сейсмических волн. Изв. АН СССР, Физика Земли, № I, 1968.

5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. "Наука", М., 1965.

6. Сибиряков Б.П. Возбуждение сферических волн SH в упруго-пластической среде. Сб. "Поперечные и обменные волны в сейсморазведке". Недра. М., 1967.

Е.М. Аверко

ИНЕРЦИОННЫЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ИСТОЧНИК СФЕРИЧЕСКИХ УПРУГИХ ВОЛН

В статье рассматривается инерционный сферический источник, осциллирующий в упругой среде.

Исследование такого источника интересно в связи с тем, что он может рассматриваться как направленная сила, распределенная по площади сферы. Конечно, размеры такого "неточного" источника и его инерционность существенно влияет на волновую картину, создаваемую им в процессе излучения упругих волн.

Расчет источника ведется по схеме [I]. Краевая задача такого осциллирующего излучателя формулируется и решается в смещениях. Составляется уравнение движения; исследуются его инерционные и сейсмические свойства.

§ I. Первая краевая задача для сферы, движущейся возвратно-поступательно

Пусть в безграничной изотропной среде двигается возвратно-поступательно недеформирующийся шар по некоторому направлению, принимаемому в дальнейшем за начало отсчета полярного угла сферической системы с началом, выбранным в центре этого шара. Требуется определить вектор смещения упругой среды

$$\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s \qquad U_p = \operatorname{grad} \varphi \qquad \vec{U}_s = \operatorname{rot} \vec{\psi} \tag{I}$$

где обозначено: $\vec{U}_p$; $\vec{U}_s$ - смещения в продольной и поперечной волн; φ и ψ - продольный и поперечный материалы.

Последние удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \varphi + k_p^2 \varphi = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} + k_s^2 \vec{\psi} = 0 \qquad (3)$$

$$k_p = \frac{\omega}{v_p} \; ; \quad k_s = \frac{\omega}{v_s} \; ; \qquad (4)$$

где v_p ; v_s - скорости распространения продольных и поперечных волн; ω - круговая частота колебания среды.

Граничные условия выберем в форме жесткого контакта внешней поверхности шара с упругой средой:

$$\begin{aligned} U_r\big|_{r=r_0} &= U_0 \cos\theta \\ U_\theta\big|_{r=r_0} &= -U_0 \sin\theta \\ U_\varphi\big|_{r=r_0} &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

r - радиус шара.

Зависимость изменения вектора смещения шара во времени принимается как $e^{+j\omega t}$. К сказанному следует добавить, что при решении задачи должно быть выполнено условие излучения и достаточное условие соленоидальности векторного потенциала: $div\,\vec{\psi} = 0$.

Задачу следует считать независимой от угла φ :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$$

Достаточным условием выполнения равенства

$$div\,\vec{\psi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\psi_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\psi_\theta) = 0 \qquad (7)$$

является соотношение

$$\psi_r = \psi_\theta = 0 \qquad (8)$$

При этом векторное уравнение (3) преобразуется в одно скалярное:

$$\nabla^2\psi - \frac{\psi}{r^2\sin^2\theta} + k_s^2\,\psi = 0 ; \quad (\psi_\varphi \equiv \psi) \qquad (9)$$

Решение этого уравнения, а также (I) будет следующим [2], если использовать функции Ганкеля и присоединенные полиномы Лежандра:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{n+1/2}(k_p r)\, P_n(\cos\theta) \qquad (10)$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\Psi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{\sqrt{r}}H^{(2)}_{n+1/2}(k_s r)P_n^{1}(\cos\theta) \qquad (11)$$

Здесь a_n ; b_n - некоторые постоянные; $r;\theta$ - координаты сферической системы.

При выполнении условия (6) и равенств (8) компоненты искомого вектора смещения, выраженные через потенциалы, даются формулами:

$$U_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\Psi)$$

$$U_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\Psi) \qquad (12)$$

$$U_\varphi=0$$

Подставляя (10) и (11) для $r = r_0$ в граничные условия при учете (12), получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{a_n\frac{\partial}{\partial r}\Big[\frac{H^{(2)}_{n+1/2}(k_p r)}{\sqrt{r}}\Big]P_n(\cos\theta)+\frac{b_n}{r\sin\theta}\cdot\frac{H^{(2)}_{n+1/2}(k_s r)}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\sin\theta P_n'(\cos\theta)\Big]\Big\}=U_0\cos\theta; \qquad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\frac{a_n}{r}\frac{H^{(2)}_{n+1/2}(k_p r)}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta)-\frac{b_n}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\frac{r}{\sqrt{r}}H^{(2)}_{n+1/2}(k_s r)\Big]P_n'(\cos\theta)\Big\}=-U_0\sin\theta \qquad (14)$$

Эти уравнения справедливы только при n = 1, т.к. только при этом выполняются равенства

$$P_n(\cos\theta)=\cos\theta\,; \qquad P_n^{1}(\cos\theta)=\sin\theta$$

и, следовательно, левая часть уравнения оказывается равной правой. Поэтому система (13) и (14) эквивалентна следующей:

$$ac_1+bc_2=U_0 \qquad 15)$$
$$ad_1+bd_2=U_0$$

где обозначено:

$$a = a_1\ ; \quad b = b_1\ ;$$

$$c_1 = k_p^{3/2} \frac{d}{dk}\left[\frac{H^{(2)}_{3/2}(k)}{\sqrt{k}}\right]; \quad c_2 = 2k_s^{3/2}\ \frac{H^{(2)}_{3/2}(e)}{e\sqrt{e}}\ ;$$

$$d_2 = k_s^{3/2}\ \frac{1}{e}\ \frac{d}{de}\left[\sqrt{e}\, H^{(2)}_{3/2}(e)\right];\ d_1 = k_p^{3/2}\ \frac{H^{(2)}_{3/2}(k)}{k\sqrt{k}}\ ; \tag{16}$$

$$k = k_p r_0\ ; \qquad e = k_s r_0$$

Используя возможность представления функция Генкеля с полуцелым индексом через элементарные функции ,

$$H^{(2)}_{3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ (1 - \frac{j}{z})\, e^{-jz} \tag{17}$$

коэффициенты системы (I5) определяются формулами:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{k_p^{3/2}}{k}\left[\frac{2}{k} + j(1 - \frac{2}{k^2})\right] e^{-jk}$$

$$c_2 = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{k_s^{3/2}}{e^2}\ (1 - \frac{j}{e})\, e^{-je} \tag{18}$$

$$d_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{k_p^{3/2}}{k^2}\ (1 - \frac{j}{k})\, e^{-jk}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{k_s^{3/2}}{e}\left[\frac{1}{e} + j\ (1 - \frac{1}{e^2})\right] e^{-je}$$

Решая систему (I5) относительно величин a и b с учетом последних равенств для коэффициентов этой системы, получаем

$$a = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{k}{k_p^{3/2}}\, A_p$$

$$b = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{e}{k_s^{3/2}}\, A_s \tag{19}$$

при следующих обозначениях:

$$\mathcal{A}_p = \frac{\frac{3}{e} + j\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)}{\left(-1 + \frac{1}{e^2} + \frac{2}{k^2}\right) + j\left(\frac{1}{e} + \frac{2}{k}\right)} e^{jk}$$

$$\mathcal{A}_s = \frac{\frac{3}{k} + j\left(1 - \frac{3}{k^2}\right)}{\left(-1 + \frac{1}{e^2} + \frac{2}{k^2}\right) + j\left(\frac{1}{e} + \frac{2}{k}\right)} e^{je} \tag{20}$$

При этом потенциалы будут следующими:

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{3/2}(z_p) \cos\theta$$

$$\psi = \frac{b}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{3/2}(z_s) \sin\theta \tag{21}$$

$$z_p = k_p r;\ z_s = k_s r.$$

После этого по формулам (I) находим искомые смещения упругой среды:

$$\vec{U}_p = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k \mathcal{A}_p \left[\frac{d}{dz_p} \left(\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{z_p}} \right) \cos\theta\, \vec{e}_r - \right.$$

$$\left. - \frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{z_p \sqrt{z_p}} \sin\theta\, \vec{e}_\theta \right] e^{j\omega t}; \tag{22}$$

$$\vec{U}_s = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e \mathcal{A}_s \left[2 \frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{z_s \sqrt{z_s}} \cos\theta\, \vec{e}_r - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{z_s} \frac{d}{dz_s} \left(\sqrt{z_s} \frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}} \right) \sin\theta\, \vec{e}_\theta \right] \cdot e^{j\omega t} \tag{23}$$

Итак, первая краевая задача для рассматриваемого инерционного источника решена. Формулы (22) и (23) определяют смещения в продольной и поперечных волнах, если известны упругие параметры среды и смещение поверхности источника. Излучателем, движущимся возвратно-поступательно, генерируются в среде два типа волн: продольные и поперечные. Поэтому такой инерционный источник следует отнести к классу смешанных источников.

Для данной зоны излучателя, где выполняется условие

$$Z_s > Z_p >> 1 \tag{24}$$

справедливы следующие приближенные равенства:

$$\vec{U}_p = j U_0 A_p \frac{k}{Z_p} \cos\theta \, e^{j(\omega t - Z_p)} \vec{e}_r + \theta(Z_p^{-2})$$

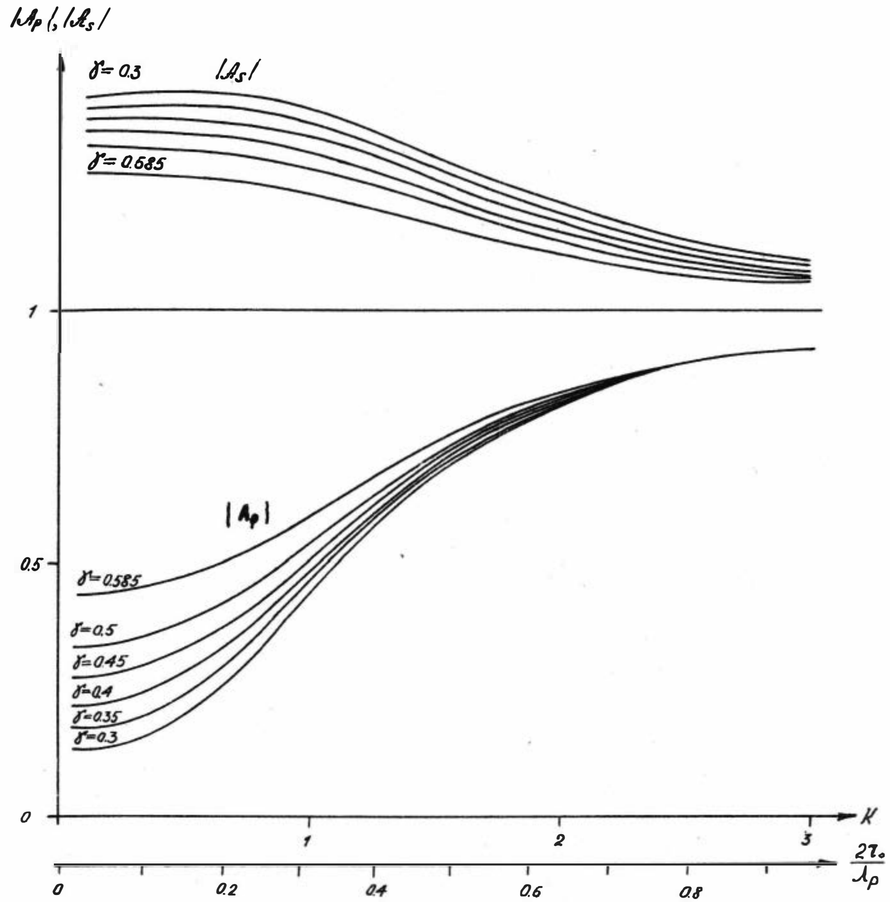
$$\vec{U}_s = -j U_0 A_s \frac{e}{Z_s} \sin\theta \, e^{j(\omega t - Z_s)} \vec{e}_\theta + \theta(Z_s^{-2}) \tag{25}$$

где $O(Z^{-2})$ - остаток, содержащий члены второго порядка малости.

Отсюда видно, что смещение как в продольной, так и поперечной волне в дальней зоне затухает с расстоянием обратно пропорционально первой степени относительного расстояния. Диаграмма направленности излучателя для продольных (поперечных) волн представляется косинусоидальной (синусоидальной) зависимостью. Следовательно, по направлению движения источника смещение в продольной (поперечной) волне будет максимально (минимально), плавно приближаясь к нулю (единице) по мере увеличения долготы точки наблюдения этих волн.

Смещение в продольной волне направлено по радиусу-вектору точки наблюдения; смещение в поперечной волне - перпендикулярно этому радиусу и антипараллельно орту $\vec{e}_\theta$ сферической системы координат с началом в центре шара-источника, если полярная ось системы совпадает с направлением движения шара. Фазовые характеристики рассматриваемых волн представляются показателем экспоненты в последних формулах и определяют задержку этих волн при их распространении от поверхности источника до точки наблюдения. Эти характеристики - линейные функции относительных расстояний соответствующих волн.

Модули (A_p) и (A_s) представлены на рис. I. Как видно, для низких частот амплитуда поперечной волны всегда больше продоль-



Р и с. I. Модули амплитуд продольных /Ap/ и поперечных $/A_s/$ волн в зависимости от отношения диаметра шара к длине продольной волны для смешанного источника объемных волн.

ной; по мере увеличения частоты разница между этими амплитудами сглаживается.

Функция $|A_{s,p}|$ представляет собой фильтры низких и высоких частот соответственно. Это значит, например, что преобладающие частоты в поперечной волне будут всегда ниже таких частот для продольной волны. Это хорошо согласуется с экспериментом.

Отношение максимальных амплитуд смещений в поперечной и продольной волне дается следующим равенством, полученным из формул (25) с использованием выражений (I9):

$$\frac{A_s^*}{A_p^*} = \frac{|\vec{U}_s|_{max}}{|\vec{U}_p|_{max}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{k^2}\left(1+\frac{3}{k^2}\right)}{1+\frac{3}{e^2}\left(1+\frac{3}{e^2}\right)}} \qquad (26)$$

Отсюда видно, что отношение максимальных амплитуд поперечной и продольной волн существенно зависит от относительного внешнего радиуса шара и от соотношения скоростей распространения этих волн в среде. При малых таких радиусах, которые могут быть определены неравенством:

$$k = \frac{\omega r_0}{v_p} \ll 1 \qquad (27)$$

рассматриваемое отношение амплитуд оценивается следующей величиной

$$\frac{A_s^*}{A_p^*} \simeq \frac{1}{\gamma^2} \qquad (28)$$

Полученное значение совпадает с таким отношением амплитуд для источника типа точечной сосредоточенной силы [4].

Исследуем равенство (28). В высокоскоростных средах ($\gamma \simeq \frac{1}{\sqrt{3}}$) максимальная амплитуда смещения в поперечной волне будет в три раза больше, чем в продольной. В средах, где $\gamma < \frac{1}{\sqrt{3}}$ это отношение увеличивается. Например, в терригенных породах величина γ может достигать значения 0,25 и, следовательно, смещение в поперечной волне превысит более, чем в тридцать раз смещение в продольной волне.

Если же радиус излучателя очень большой

$$k \gg 1 \qquad (29)$$

то $\mathcal{A}_s^* / \mathcal{A}_p^* \simeq 1$, и это отношение не зависит ни от γ ни от радиуса шара. Во всех остальных случаях, при которых относительный радиус шара не удовлетворяет условиям (27) и (29), рассматриваемое отношение будет зависить от этого радиуса и γ

На рис. 2 оно представлено в зависимости от отношения диаметра $2r_0$ к длине продольной волны λ_p при параметре γ. Как видно из рисунка, при малых диаметрах шара отношение амплитуд максимально и от γ зависит по формуле (28). При увеличении диаметра отношение падает и асимптотически стремится к единице.

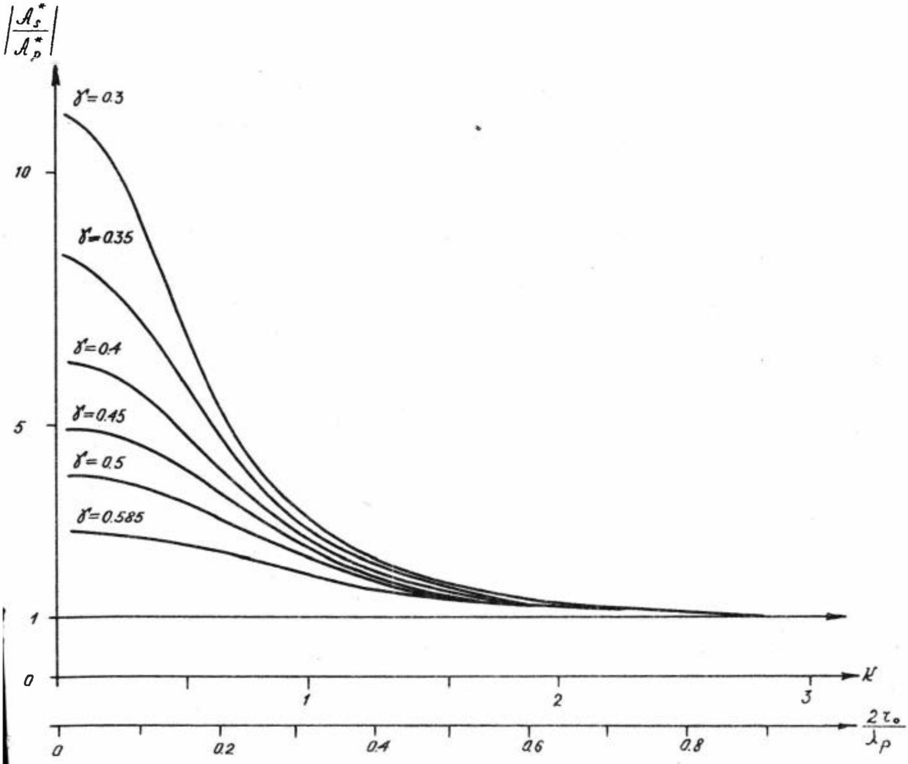
Отсюда следует, что если при проектировании смешанного источника ставится задача получить максимальное отношение амплитуды смещения в поперечной волне по сравнению с продольной, то диаметр источника следует брать минимальным. Задача будет тем лучше выполнена, чем меньше диаметр источника по сравнению с длиной волны.

Учитывая только что сказанное, можно указать на нерациональность увеличения веса взрывчатого вещества в источниках типа направленной силы с целью получения поперечной волны и подавления продольной. Рассматривая такой источник как недеформирующуюся сферу, движущуюся в упругой среде возвратно-поступательно, можно за её радиус принять радиус сферы, разграничивающий зону упругой и неупругой деформации. Этот радиус увеличивается при увеличении веса взрывчатого вещества. В силу же вышесказанного такой радиус нецелесообразно увеличивать. Отсюда следует нерациональность увеличения веса взрывчатого вещества в источниках типа направленной силы, если ставится цель получения повышенного отношения амплитуд смещений в поперечной и продольной волнах.

§ 2. Уравнение движения смешанного источника объемных волн и решение трех задач такого источника

Уравнение движения полого жесткого шара, движущегося возвратно-поступательно в упругой среде, запишем в виде:

$$-\omega^2 m U_0 = \mathcal{F}_0 + P_z \qquad (30)$$



Р и с. 2. Зависимость отношения максимальных амплитуд в поперечной и продольной волнах от отношения диаметра шара к длине продольной волны для смешанного источника объемных волн.

где $\mathcal{F}_0$ - спектр внешней силы, действующей по направлению движения шара, P_z - спектр реактивной силы среды; m - масса шара: ω - круговая частота, с которой колеблется шар при временной зависимости $e^{j\omega t}$

Вычислим реактивную силу. Компоненты полного вектора смещения среды

$$\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s \tag{31}$$

согласно формулам (22) и (23) выражаются равенствами:

$$U_r = \left[a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{r}}\right) + 2b\left(\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{r\sqrt{r}}\right)\right]\cos\theta; \tag{32}$$

$$U_\theta = -\left[a\frac{H^{(2)}_{3/2}}{r\sqrt{r}} + \frac{b}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}}\right)\right]\sin\theta;$$

$$U_\varphi = 0;$$

При этом деформации в среде будут следующими:

$$e_{rr} = f_{rr}\cos\theta; \qquad e_{r\theta} = f_{r\theta}\sin\theta;$$

$$e_{\varphi\varphi} = f_{rr}\cos\theta; \qquad e_{r\varphi} = e_{\varphi\theta} = 0; \tag{33}$$

$$e_{\theta\theta} = f_{\theta\theta}\cos\theta;$$

а напряженное состояние описывается формулами:

$$\sigma_{rr} = [\lambda\theta_1 + 2\mu f_{rr}]\cos\theta; \qquad \tau_{r\theta} = \mu f_{r\theta}\sin\theta;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = [\lambda\theta_1 + 2\mu f_{\varphi\varphi}]\cos\theta; \qquad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = 0. \tag{34}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = [\lambda\theta_1 + 2\mu f_{\theta\theta}]\cos\theta$$

где обозначено:

$$f_{rr} = a\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[-\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{r}}\right] + 2b\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{r\sqrt{r}}\right];$$

$$f_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\Big\{a\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{r}}\Big)-\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{r\sqrt{r}}\Big]+\frac{b}{r}\Big[2\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{r H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}}\Big)\Big]\Big\};$$

$$f_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\Big\{-a\Big[\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{r\sqrt{r}}+\frac{b}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}}\Big)\Big]+$$

$$+\Big[a\frac{\partial}{\partial r}\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{r}}+2b\,\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{r\sqrt{r}}\Big]\Big\}; \qquad (35)$$

$$f_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\Big[a\,\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{r\sqrt{r}}+\frac{b}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{r H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}}\Big)\Big]-\frac{1}{r}\Big[a\frac{\partial}{\partial r}\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{r}}+$$

$$+2b\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{r\sqrt{r}}\Big]+\frac{1}{r}\Big[a\,\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{r\sqrt{r}}+\frac{b}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{\sqrt{r}}\Big)\Big];$$

$$\theta_1=f_{rr}+f_{\varphi\varphi}+f_{\theta\theta}$$

Рассматривая напряженное состояние среды на поверхности сферы $r = r_0$ имеем

$$f_{rr}=a\,\frac{\partial c_1}{\partial r_0}+b\,\frac{\partial c_2}{\partial r_0}$$
$$f_{r\theta}=-\Big[a\frac{\partial d_1}{\partial r_0}+b\,\frac{\partial d_2}{\partial r_0}\Big] \qquad (36)$$
$$f_{\varphi\varphi}=f_{\theta\theta}=0$$

и, следовательно,

$$\sigma_{rr}=(\lambda+2\mu)f_{rr}\cos\theta$$
$$\tau_{r\theta}=\mu f_{r\theta}\sin\theta \qquad (37)$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta}=\tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi\theta}=0$$

Проектируя эти напряжения на оси прямоугольной системы координат с началом в центре шара и с осью OZ, направленной по линии действия внешней силы, получим следующие элементарные усилия, направленные по осям OX; OY и OZ этой системы и приложенные к элементарной площадке $d\Sigma$, перпендикулярной радиусу шара:

$$\frac{dP_{xr}}{d\Sigma} = (\sigma_{rr}\sin\theta + \tau_{r\theta}\cos\theta)\cos\varphi$$

$$\frac{dP_{yr}}{d\Sigma} = (\sigma_{rr}\sin\theta + \tau_{r\theta}\cos\theta)\sin\varphi$$

$$\frac{dP_{zr}}{d\Sigma} = \sigma_{rr}\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta \tag{38}$$

Учитывая выражение элементарной площадки сферы

$$d\Sigma = r_0^2\, d\varphi\, d\theta \cdot \sin\theta$$

и интегрируя равенства (38) по всей внешней поверхности шара ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), получим следующие равнодействующие силы реакции вдоль осей прямоугольной системы координат:

$$P_x = P_y = 0 \tag{39}$$

$$P_z = \frac{4}{3}\pi r_0 \rho v_p^2 U_0 \beta(e,k) \tag{40}$$

где обозначено:

$$\beta(e,k) = \frac{\left[(1+9\gamma) - \frac{9}{e^2}\right] + j(1+\gamma)\left(\varkappa - \frac{9}{e}\right)}{\left[\left(1+\frac{2}{\gamma^2}\right)\frac{1}{e^2} - 1\right] + j\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)\frac{1}{e}} \tag{41}$$

Полученное выражение силы реакции справедливо для среды как твердой, так жидкой и газообразной. Последние среды характеризуются тем, что в них отсутствуют поперечные волны, т.е. $v_s = 0$. Используя это соотношение и отнеся силу реакции к скорости движения сферы $v_1 = j\omega U_0$, получим как частный случай силы реакции следующее выражение:

$$\frac{P_z}{j\omega U_0} = -\frac{4}{3}\pi r_0^2 \rho v_p \frac{1 + \frac{1}{jk}}{1 + \frac{2}{jk} + \frac{2}{(jk)^2}}$$

Оно с точностью до знака совпадает с волновым импедансом осциллирующей сферы [5]. Несовпадение знака объясняется тем, что нами рассматривается сила, с которой среда действует на сферу, а в [5] – сфера на среду.

Подставляя силу реакции в уравнение движения и решая его относительно смещения шара, имеем частотную характеристику сила -смещение в виде:

$$\frac{U_0}{\mathcal{F}_0} = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{bk^2 + \beta(e,k)} \qquad (42)$$

где приняты обозначения:

$$a = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho\, v_p^2$$
$$b = \left(1 - \frac{r_1^3}{r_0^2}\right)\frac{\rho_0}{\rho} \qquad (43)$$

Формула (42) является решением второй задачи, рассматриваемого инерционного источника. Она определяет смещение поступательно движущегося полого шара.

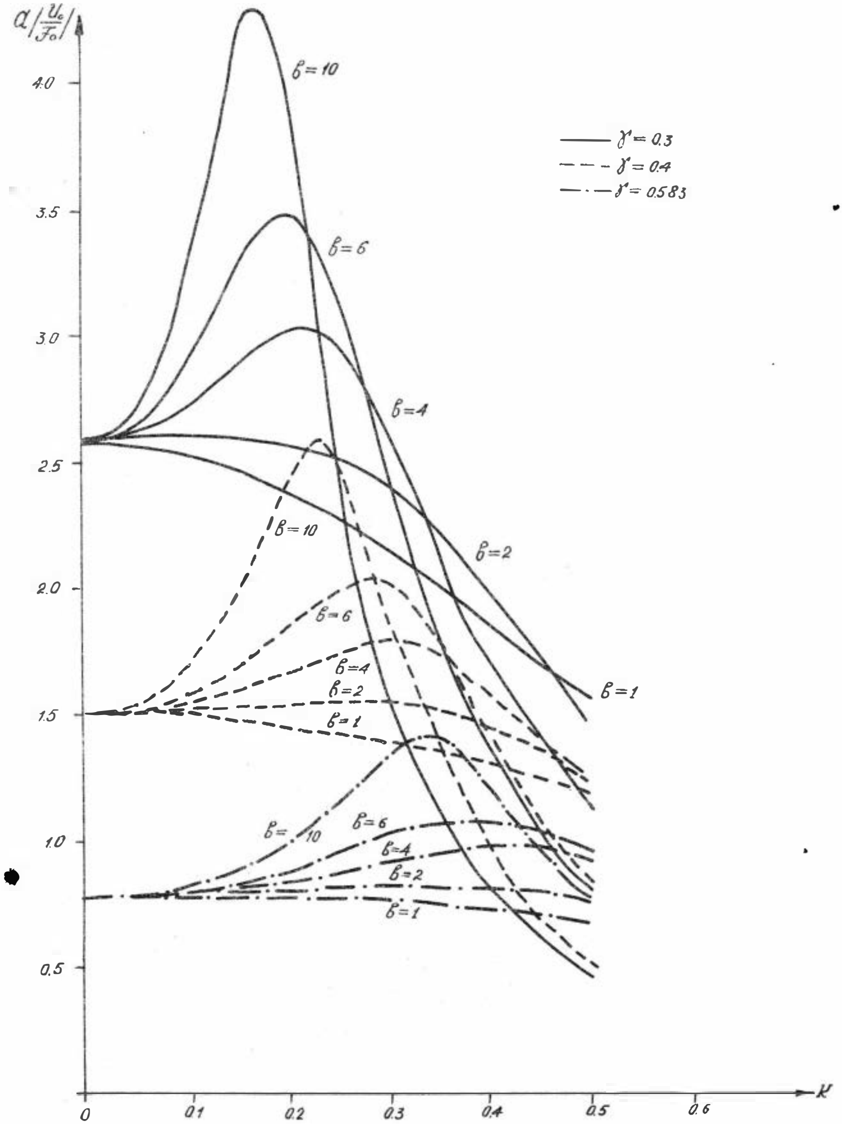
Модуль частотной характеристики силы-смещение представлен на рис. 3. По виду этот модуль совпадает с частотной характеристикой гармонического осциллятора; имеет максимум, смещающийся как по оси абсцисс, так и ординат при различных γ .

Величина максимума модуля (рис. 4) линейно растет с увеличением параметра " b ", большего двух. Если такой параметр меньше двух, то заметного изменения максимума не наблюдается. Это значит, например, что для сплошного цилиндра смещение цилиндра на преобладающей частоте будет оставаться приблизительно постоянной при изменении отношения плотностей цилиндра и среды от нуля до двух; при дальнейшем увеличении этого отношения смещение линейно увеличивается с коэффициентом пропорциональности, зависящем от γ .

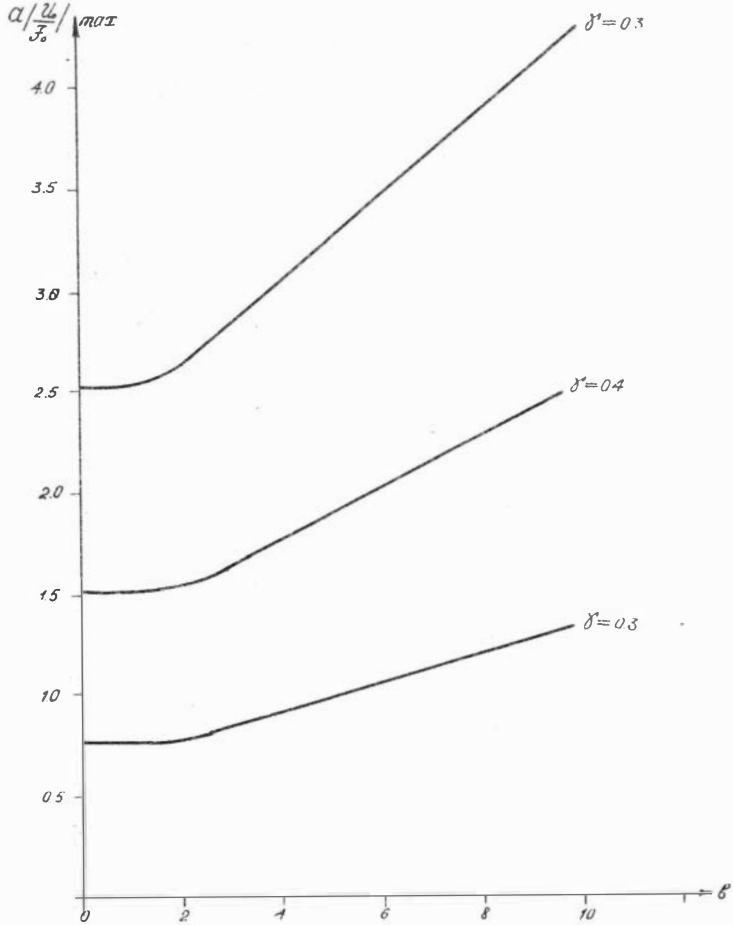
Преобладающая относительная частота смещения цилиндра (рис. 5) уменьшается с увеличением параметра " b " и уменьшением величины γ .

Решение первой задачи инерционного источника получим, если подставим формулу (42) в решение первой краевой задачи (22), (23):

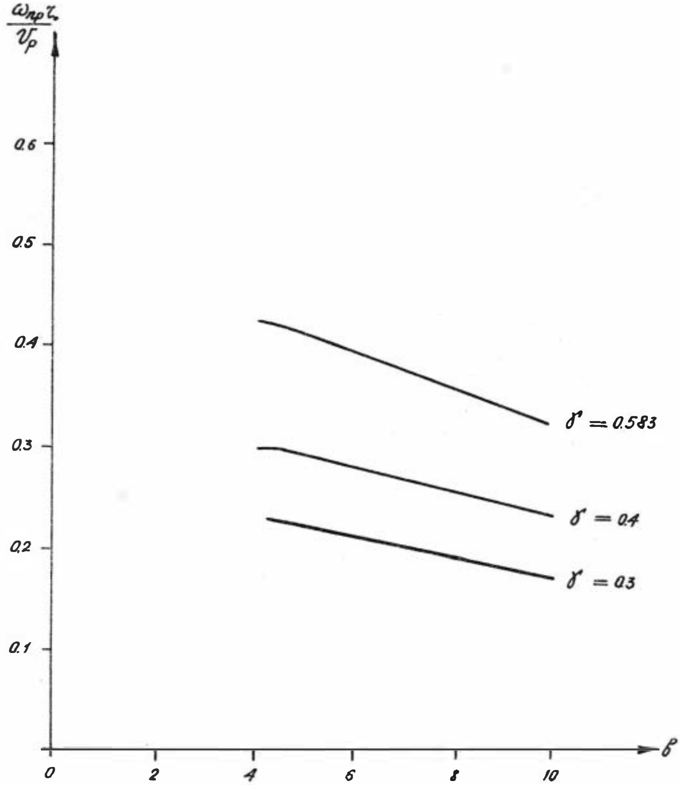
$$\vec{U}_p = -\frac{\mathcal{F}_0}{a}\,\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,kA_p}{be^2 + \beta(e,k)}\Big[\frac{d}{dz_p}\Big(\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{\sqrt{z_p}}\Big)\cos\theta\,\vec{e}_r -$$



Р и с. 3. Частотная характеристика сила-смещение для поступательно движущегося полого шара при различных γ.



Р и с. 4. Максимум модуля частотной характеристики сила-смещение для поступательно движущегося полого шара.



Р и с. 5. Относительная преобладающая частота колебаний для поступательно движущегося полого шара.

$$-\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_p)}{z_p\sqrt{z_p}}\sin\theta\,\vec{e}_\theta\Big]e^{j\omega t} \tag{44}$$

$$\vec{U}_s=-\frac{F_0}{a}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e A_s}{be^2+\beta(e,k)}\Big\{2\,\frac{H^{(2)}_{3/2}(z_s)}{z_s\sqrt{z_s}}\cos\theta\,\vec{e}_r-$$

$$-\frac{1}{z}\frac{d}{dz_s}\Big[\sqrt{z_s}\,H^{(2)}_{3/2}(z_s)\Big]\sin\theta\,\vec{e}_\theta\Big\}e^{j\omega t} \tag{45}$$

Эти формулы справедливы как для ближней, так и дальней зон. Для дальней зоны решение приближенно будет следующим:

$$\vec{U}_p=\frac{F_0}{a}\,\frac{A_p}{be^2+\beta\ (e,k)}\,\frac{k}{z_p}\cos\theta\, e^{j(\omega t-z_p)}\cdot\vec{e}_r \tag{46}$$

$$\vec{U}_s=-\frac{F_0}{a}\cdot\frac{A_s}{be^2+\beta(e,k)}\frac{e}{z_s}\sin\theta\, e^{j(\omega t-z_s)}\vec{e}_\theta \tag{47}$$

Полученные формулы определяют вектора смещений в продольной и поперечной волнах, возникающих в упругой среде от шара, который под действием внешней силы, независящей от параметров источника и среды, движется в упругой среде возвратно-поступательно.

Решение третьей залачи инерционного источника получается по формулам (37), где функции f_{rr} и $f_{r\theta}$ определены равенствами (36).

ЛИТЕРАТУРА

I. Аверко Е.М. Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных абсолютно жестких излучателей. Настоящий сборник.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов,сумм, рядов и произведений. ФМ, М., 1963.

3. Гурвич И.И. Сейсмическая разведка. М., 1960.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. "Наука", М., 1965.
5. Скучик Е. Основы акустики, т. I, ИЛ, 1968.

ЧАСТЬ П

СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ВЫЗВАННЫЕ ПАДАЮЩИМИ НА ЭТО ТЕЛО УПРУГИМИ ВОЛНАМИ

Е.М. Аверко, Ю.А. Нефедкин

СЕЙСМОПРИЕМНИК - ПОЧВА (обзор)

Развитие метода поперечных волн в сейсморазведке требует усовершенствования способов регистрации поперечных волн, направленных, в частности, на выделение этих волн на фоне продольных. В настоящее время такое выделение производится ориентацией сейсмоприемника по схеме, при которой максимум диаграммы направленности совпадает с направлением смещения частиц в полезной выделяемой волне (продольной или поперечной). Очевидно, что при незнании ориентации фронта волны в точке стояния такого сейсмоприемника, выделить одну волну (например, поперечную) на фоне мешающей (продольной) таким прибором нельзя.

Кроме указанной проблемы выделения полезной волны на фоне мешающих волн, в настоящее время актуальна проблема измерения динамических характеристик сейсмических волн, как-то: амплитуда волны, её частотный спектр, поляризация этой волны, угол её подхода и т.д. Актуальность этой проблемы объясняется тем, что сейчас особенно остро ставится вопрос об использовании сейсмических методов для изучения сложно построенных сейсмо-геологических сред. Это обстоятельство требует привлечения новых средств и способов, расширяющих возможности сейсмических методов как при решении прямых, так и обратных сейсмогеологических задач. Одним из таких средств является использование динамических характеристик сейсмических волн. В связи с этим по-новому остро ставится задача измерения этих характеристик в полевых условиях работы сейсморазведочной партии или стационарной сейсмической станции. Новизна постановки этой не новой задачи состоит в том, что сейчас, на наш взгляд, требуется измерение характеристик волнового сейсмического поля со строго известными, выраженными количественно, искажениями, вносимыми измерительным прибором в процесс получения этих характеристик. Для этого необходимы разработки по определению полного комплекса метрологических характеристик измерительного сейсмического канала и, в частности, сейсмоприемника как наиболее сложного и ответственного составного элемента этого канала. Неполнота этого комплекса в настоящее время состоит, например, в том, что в метрологические характеристики сейсмоприемника не включаются показатели, учитывающие влияние сейсмо-геологической среды в месте установки сейсмоприемника на измеряемое им сейсмическое поле.

В сборнике помещены ряд статей, посвященных разработке задачи выделения поперечной волны на фоне продольной и задачи влияния сейсмогеологической среды на отклик сейсмоприемника поперечных волн.

В настоящей статье дается состояние вопроса по указанному влиянию среды на отклик сейсмоприемника (в основном - продольных волн), известному в литературе как проблема сейсмоприемник-почва.

§ I. Ранние представления о задаче сейсмоприемник-почва как о задаче излучатель-почва

Представления о физико-математических основах задачи сейсмоприемник-почва изменялись с течением времени.

Вначале считалось, что в месте установки сейсмоприемника по всей его площади соприкосновения с почвой, движение почвы, обусловленное колебательным смещением в измеряемой волне, совпадает, во-первых, с этим смещением в волне и, во-вторых, со смещением корпуса сейсмоприемника [6]. Эта точка зрения, следовательно, исключала проблему сейсмоприемник-почва. Затем Г.А. Гамбурцев [4] предположил, что корпус сейсмоприемника не повторяет движения почвы, и тем самым поставил впервые обсуждаемую проблему, хотя и не в том более новом виде, в котором она стоит в настоящее время. В предположении, что почва в месте стоянки сейсмоприемника сопротивляется только сжатию, но не сдвигу, им было показано на основе электро-механических аналогий, что система почва-сейсмоприемник имеет резонанс, который отсутствует в сейсмоприемнике, находящимся вне почвы. Частота этого резонанса определяется массой корпуса сейсмоприемника и упругостью почвы. Для борьбы с этими паразитными резонансами было предложено выбирать так место установки и массу сейсмоприемника (сейсмографа), чтобы этот резонанс находился вне рабочей полосы частот сейсмического приемного канала. Для этого рекомендовалось устанавливать сейсмоприемник на возможно более твердой почве, увеличивать площадь соприкосновения этого прибора с почвой, уменьшать вес корпуса сейсмоприемника. Для "сглаживания" резонансного паразитного пика рекомендовалось вводить апериодическое затухание.

Более подробно, чем это сделано в [4], исследование этой же модели сейсмоприемник - почва (сейсмоприемник, установленный на упругой подставке, моделируемой пружиной) с добавлением элементов затухания проведено С.Ф. Больших [2].

Модели Г.А. Гамбурцева и С.Ф. Больших сыграли положительную роль в развитии представлений о проблеме сейсмоприемник - почва, т.к. их теоретический расчет показал, что смещение корпуса сейсмоприемника, действительно, не совпадает со смещением почвы. Однако эти модели не учитывали следующего. Во-первых, сплошная твердая среда характеризуется минимумом двумя параметрами, в частности, двумя упругими параметрами. Поэтому моделировать почву с помощью одного параметра, учитывающего только сопротивление сжатию её, недостаточно. Необходим параметр, учитывающий сопротивление сдвигу. Такой параметр в рассматриваемых моделях отсутствует. Это не позволяет учесть влияние формы корпуса сейсмоприемника и угла подхода регистрируемой волны на отклик этого прибора. Кроме того, нивелируется различие регистрации продольных и поперечных волн. Во-вторых, эти модели не учитывают зависимость активной действующей силы, приводящей в движение рассматриваемые модели, от механических свойств почвы в месте установки сейсмоприемника. Такая зависимость - с одной стороны - существует, т.к. напряжения, например, в упругой волне зависят от упругих параметров среды, в которой распространяется эта волна, а - с другой стороны - отклик сейсмоприемника является функцией этих напряжений в месте установки сейсмоприемника. Отсутствие же зависимости внешней активной силы от механических параметров почвы переводит рассматриваемую модель сейсмоприемник-почва в класс моделей излучатель-почва, в котором корпус рассматриваемого сейсмоприемника под действием указанной активной силы, колеблясь, излучает волну в почву[x)].

---

x) См. в сборнике ряд статей, посвященных излучению упругих волн при движении в среде абсолютно жесткого тела.

выходной сигнал сейсмоприемника будет откликом на эти колебания, но не на колебания в упругой волне, подошедшей к сейсмоприемнику и параметры которой подлежат измерению.

С этих позиций можно оценить работы, направленные на экспериментальное изучение проблемы сейсмоприемник - почва. К ним относятся работы Washburn H. [20] и Пасечник И.П. [II-I2]. Изучение проводилось на механической системе, состоящей из двух жестко скрепленных между собой сейсмоприемников. Один из этих сейсмоприемников был обращаемым и использовался в качестве механического возбудителя колебаний рассматриваемой системы. Второй сейсмоприемник выполнял функцию приемника колебаний этой системы. Последняя устанавливалась на поверхности почвы или помещалась на некоторую глубину под дневную поверхность этой почвы. Мерой влияния механических параметров почвы на колебания такой системы служило отношение комплексных амплитуд (амплитуда и фаза) электрического напряжения, снимаемого с входа второго сейсмоприемника, работающего в режиме приема, и электрического напряжения, подаваемого на вход сейсмоприемника-излучателя (возбудителя).

В результате применения такой системы был получен обширный экспериментальный материал, показывающий, что механические характеристики сдвоенный сейсмоприемник - почва существенно изменяются в зависимости как от механических параметров почвы, так и от параметров сейсмоприемников. Наиболее сильно эти изменения проявляются на резонансной частоте такой системы и на её чувствительности и затухании. Так, при изменении скорости распространения продольной волны в почве от 100 до 4000 м/сек и удельного веса от 1,1 до 3,2 г/см^3 резонансные частоты системы изменяются от 35 до 800 гц, декремент затухания - от 1,31 до 0,35; относительная ширина полосы пропускания частотной характеристики системы - от 15 до 150; чувствительность увеличивается почти в шесть раз. Указанные диапазоны изменения параметров рассматриваемой системы ещё более расширяются в зависимости от качества механического контакта корпусов сейсмоприемников с почвой.

Для объяснения полученных экспериментальных данных была привлечена теория Шехтера О.Я. [I4] и Wolf A. [22], рассматривающая вынужденные колебания массивного цилиндрического тела, стоящего своей торцовой частью на границе упругого полупространства. Сопоставление результатов расчета с вышеуказанным экспериментом показало, что выводы этих теорий лишь качественно совпадают с некоторыми результатами эксперимента. При этом имелись случаи, когда не наблюдалось даже качественного совпадения. Так, расчетная чувствительность рассматриваемой системы уменьшается с повышением скорости распространения упругих волн в почве (рис. 2, [12]), а чувствительность, определенная в эксперименте, растет с повышением этой скорости (рис. I, [11]). Теоретическая частотная характеристика не зависит от характеристик внутреннего устройства, но экспериментально показано, что наблюдается сильная зависимость расположения максимума модуля этой характеристики на оси частот от соотношения подвижной и неподвижной масс сейсмоприемника [11].

Отсутствие удовлетворительного совпадения теоретических и экспериментальных данных могло быть в том, что, например, в теории не учитываются силы реакции связи корпуса сейсмоприемника с его подвижной частью, как-то: сила демпфирования и сила упругости пружины, с помощью которой крепится подвижная масса к корпусу сейсмоприемника.

Эти силы были учтены Максимовым Л.А. [7] для рассматриваемой системы сдвоенный сейсмоприемник - почва. При этом реакция связи корпуса сейсмоприемников со средой была взята или как реакция статического штампа, стоящего на упругом основании, или как реакция упругой среды на колеблющуюся малую сферу в этой среде. Неполное соответствие выбранных реакций условиям рассматриваемого эксперимента не позволило получить удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных данных, однако качественное совпадение оказалось более полным по сравнению с предыдущими теориями. Это говорит о необходимости учета сил реакции связей внутреннего устройства сейсмоприемника при составлении уравнения его движения.

Экспериментально-теоретическому изучению различий преобладающих частот в отклике на удар по корпусу горизонтального и вертикального сейсмоприемников, установленных на почве, посвящена работа Васильева Ю.И. и Щербо М.Н. [3]. Теория построена на применении известных реакций горизонтальных и вертикальных штампов без учета реакций внутреннего устройства сейсмоприемника. Качественно различие изучаемых частот, определенное экспериментально, согласуется с расчитанным по указанной теории, но при этом имеются существенные количественные различия: экспериментально получено отклонение этих частот, равное (I,7÷ I,8), теоретическое - (I.I ÷ I,3). Оценивая указанные как экспериментальные работы, так и теоретические, следует заметить, что все эти работы в большей мере относятся к проблеме излучатель-почва, чем к проблеме сейсмоприемник-почва. Действительно, содержание указанных работ сводится к тому, что изучаются вынужденные или собственные колебания некоторого инерционного тела, контактирующего с почвой. Способ возбуждения таких колебаний не совпадает со способом возбуждения колебаний корпуса сейсмоприемника как измерителя характеристик сейсмической волны. В указанных работах этот способ основан на введении в рассматриваемую систему активной внешней силы, не связанной с сейсмической первичной волной, измерение параметров которой составляет основную задачу сейсмометрии в рассматриваемой проблеме. Сейсмическая же волна, образующаяся при колебаниях корпуса сейсмоприемника и "уходящая" от корпуса в виде волны излучения, представляет собой не ту первичную волну, которая приходит из почвы к сейсмоприемнику и способ образования которой, естественно, не связан с параметрами сейсмоприемника. Волна излучения может в проблеме сейсмоприемник - почва рассматриваться как вторичная волна, образовавшаяся в результате падения первичной волны, которая вызвала колебания корпуса сейсмоприемника. Однако связь между параметрами первичной и вторичной волн в указанных работах не дается и не изучается. Более того - в этих работах первичная волна вообще отсутствует, и, следовательно, предмета измерения сейсмоприемником нет.

§ 2. Представления о движении корпуса сейсмоприемника как твердого включения под действием падающей волны

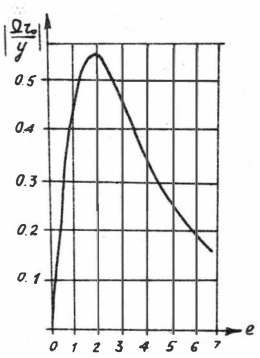
Для введения в обсуждаемую проблему сейсмоприемник - почва первичной волны можно воспользоваться работами по движению абсолютно жестких тел (корпус сейсмоприемника) в упругих средах под действием падающих на них первичных волн.

Из исследований, посвященных изучению движения тел различной формы, укажем на работы, в которых рассматривается движение тел цилиндрической формы, как наиболее простой и совпадающей с формой корпуса сейсмоприемника, и сферической,перспективной для формы этого корпуса.

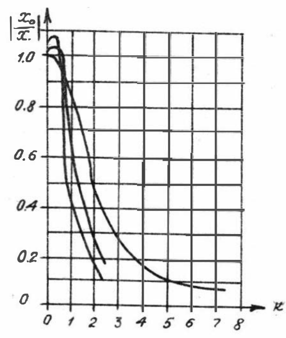
Miles I.W. [17] рассматривал движение жесткого бесконечно длинного цилиндра под действием упругой плоской продольной и поперечной гармонических волн. Плоскость таких волн параллельна оси цилиндра. Вектор смещения в поперечной волне перпендикулярен оси цилиндра. Контакт поверхности цилиндра с безграничной (в остальном пространстве) упругой средой считался жестким и полным по всей этой поверхности. Цилиндр - сплошной, однородный. Задача ставилась таким же образом, как задача дифракции при известном смещении цилиндра, а затем составлялись уравнения движения этого цилиндра на основе упругого поля смещений среды, выраженные в искомых смещениях цилиндра в результате постановки дифракционной задачи. Полученная полная система алгебраических уравнений решалась относительно смещений цилиндра. При этом показано, что при падении продольной и поперечной волны цилиндр движется возвратно-поступательно в направлении смещения частиц в волне: для поперечной волны, кроме поступательного движения, наблюдается ещё вращение цилиндра вокруг его собственной оси. Модуль отношения спектра смещения точек поверхности цилиндра при его вращении к спектру смещения в падающей поперечной волне показан на рис. I для цилиндра с плотностью, совпадающей с плотностью среды. При малых относительных радиусах $\ell = 2\pi \frac{r_0}{\lambda_s} \ll 1$ цилиндра это отношение увеличивается как $\frac{\ell}{2}$, затем достигает максимума, равного приближенно 0,55, при $\ell = 2$ и падает как $\ell^{-3/2}$ при больших $\ell \gg 1$. (λ_s - длина поперечной волны; r_0 - радиус цилиндра). Модуль аналогичного отношения для поступательного движения представлен на рис. 2 при отношении скоростей распространения продольных и поперечных волн в среде, равном $\sqrt{3}$, и отношении плотностей цилиндра и среды δ = I, 2, 3.

Сравнивая оба рисунка, замечаем, что для низких частот (малые относительные радиусы) угловое смещение - величина небольшая по сравнению со смещением цилиндра при поступательном движении.

В работе Mow C.C., Mente L.I. [19] рассмотрены, кроме смещений, также и напряжения, возникающие на границе, в частно-



Р и с. I.



Р и с. 2.

Р и с. I. Модуль отношения спектра смещения точек поверхности вращающегося цилиндра к спектру смещения поперечной волны в зависимости от относительного радиуса цилиндра.

Р и с. 2. Модуль отношения спектра смещения поступательно движущегося цилиндра к спектру смещения в продольной или поперечной волне в зависимости от относительного радиуса цилиндра при различных отношениях плотности цилиндра и среды.

сти, жесткого бесконечно длинного цилиндра при падении на него гармонической плоской поперечной волны. Как и в предыдущей работе отмечается, что цилиндр будет смещаться поступательно и вращаться вокруг собственной оси; получены формулы для указанных смещений и напряжений.

Движение абсолютно жесткой сферы в упругой среде под действием плоской гармонической продольной волны рассматривал Wolf A. [21]. Им получено, что под действием такой волны сфера (при жестком контакте со средой) поступательно перемещается в направлении движения волны; вращение этой сферы отсутствует. Смещение сферы не совпадает со смещением в рассмотренной продольной волне. График модуля отношения спектров смещения сферы и смещения в волне (в зависимости от отношения длины большой окружности $2\pi r_0$ к длине продольной волны λ_p) имеет резонансный вид с максимумом для $r_0 = 7{,}95 \cdot 10^{-2} \lambda_p$ при соотношении массы сферы к массе, вытесненной ей упругой среды, равной трем. При уменьшении этого соотношения резонансная кривая сглаживается; при соотношении, равном единице, резонанс отсутствует. Резонансная кривая имеет в нуле значение, равное единице; с ростом аргумента увеличивается, достигает максимума, а затем уменьшается, стремится к нулю. Приведена формула этой кривой. Показано, что из полученных формул для твердой среды следуют как частный случай, формулы Рэлея [13] для абсолютно жесткой сферы в жидкости.

Нестационарное движение шара в упругой среде под действием продольной волны рассматривали Мэй [8], Бабичев [1]. В первой работе рассмотрено прямолинейное нестационарное движение шара под действием волны сжатия, в которой скорость частиц затухает по экспоненте. Граничные условия при этом взяты как условия прилипания. Во второй работе исследуется движение такого шара под действием проходящей ступенчатой волны сжатия. Рассмотрены два типа граничных условий: прилипание и отсутствие трения. Шар в общем случае считается неоднородным, и поэтому центр масс шара не совпадает с его геометрическим центром. При падении на такой неоднородный шар плоской ступенчатой продольной волны сжатия на него действует внешняя активная сила, направленная по движению волны, и главный момент этой силы относительно центра масс шара. Следовательно, такой неоднородный шар под действием падающей продольной волны будет двигаться поступательно и при этом вращаться около центра масс. Если центр масс шара совпадает с его геометрическим центром то, как следует из формул рассматриваемой работы, главный момент оказывается равным нулю, а сила не равна нулю. Поэтому однородный шар под действием продольной плоской волны не будет вращаться, а будет двигаться только поступательно по направлению (или против) движения падающей волны. Такое же движение будет совершать слоисто-неоднородный шар, у которого неоднородность наблюдается только по радиусу, но не по другим направлениям, т.к. при этом выполняется условие совпадения геометрического центра шара и его центра масс.

Из работ по движению деформирующихся, не абсолютно жестких тел малых радиусов в поле низкочастотных упругих волн следует указать на исследование Miles I.W. [18], в котором перемещение и вращение указанных тел рассматриваются как среднее по объему этого тела малых размеров. Во всех работах, указанных в этом параграфе, причина движения корпуса сейсмоприемника, уподобляемого абсолютно твердому телу, является первичная волна, создающая силы и моменты, приводящие в движение этот корпус. Однако, следует заметить, что в этих работах не учитываются силы, специфичные для сейсмоприемника и обусловленные тем, что к его корпусу крепится осциллятор, представляющий собой внутреннее устройство сейсмоприемника. Maaz R. [15,16] рассмотрел движение сферического корпуса сейсмоприемника под действием продольной плоской волны с учетом этих сил.

Можно указать на хороший обзор литературы по рассматриваемой проблеме при измерении акустических величин датчиками конечных размеров в жидких и газообразных телах [5]. Однако, применить результаты этих работ из области акустики непосредственно к измерению в твердых телах не представляется возможным, т.к. процессы дифракции на датчиках в акустических средах протекают иначе, чем в твердых телах.

§ 3. Постановка задачи почва - сейсмоприемник поперечных волн

Из обзора литературы, данного в предыдущих параграфах, можно сделать нижеследующие выводы и отсюда поставить задачу по исследованию рассматриваемой проблемы применительно к сейсмоприемнику поперечных волн.

В ранее указанных работах проблема не рассматривалась, т.к. эти работы были посвящены исследованию излучателя, а не сейсмоприемника. В последующих работах вводится упругая волна, параметры которой подлежат измерению сейсмоприемником. Часть этих работ рассматривает сейсмоприемник как некоторое абсолютно твердое тело, которое может смещаться в упругой среде под действием падающей на него упругой волны, но не учитывает силы, обусловленные внутренним устройством сейсмоприемника. В этих работах изучено падение как продольных, так и поперечных волн. Вторая часть работ рассматриваемого цикла учитывает также и эти силы, но при этом рассмотрено только падение продольной волны, но не исследовано падение поперечной. Кроме этого, проблема изучалась только теоретически: экспериментальные работы, как лабораторные, так и полевые отсутствуют.

Отсюда следует желательность решения следующих задач:

I. Провести экспериментальные и теоретические исследования по движению корпуса сейсмоприемника в поле как продольных, так и поперечных волн.

2. На основе исследования предыдущей задачи разработать сейсмоприемник поперечных волн, с помощью которого можно было бы выделять поперечные волны на фоне продольных в месте стоянки прибора независимо от их угла подхода к сейсмоприемнику.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бабичев А.И. Плоскопараллельное движение жетского шара в упругой среде. Сб. "Распространение упругих и упруго-пластичных волн". (Материалы Ш Всесоюзного симпозиума). Изд-во "ФАИ", УзССР, Ташкент, 1969, 29-42.

2. Больших С.Ф. Влияние установки сейсмографа на характеристики сейсморегистрирующего канала. Прикладная геофизика. Гостоптехиздат, вып. 9, 1952, 79-87.

3. Васильев Ю.И., Щербо М.Н. О собственных колебаниях в системе горизонтальной сейсмограф-почва. Изв. АН СССР, сер. геофизич., 1968, № II, 1614-1623.

4. Гамбурцев Г.А. Основы сейсморазведки. Гостоптехиздат, 1959, 71-73.

5. Гитис М.Б. О дифракционных эффектах в ультразвуковых измерениях - Акустический журнал, т. XIУ, 1968, вып. 4, 489-513.

6. Голицын Б.Б. Лекции по сейсмометрии. Изд. АН,Сиб. 1912.

7. Максимов Л.А. Расчет колебаний системы сдвоенной сейсмоприемник - среда. Дипломная работа. Новосибирский Гос. университет, кафедра геофизики, Новосибирск, 1968.

8. Мэй Неустановившееся движение твердой сферы в упругой среде. "Прикладная механика", Труды Американского общества инженеров-механиков, русский перевод, 1956, № 4.

9. Пасечник И.П. Исследование контакта сейсмографа с почвой, М., 1951.

10. Пасечник И.П. Методика экспериментального изучения резонансных явлений в колебательной системе почва - сейсмограф. Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 1, 1952.

11. Пасечник И.П. Результаты экспериментального изучения резонансных явлений в колебательной системе почва-сейсмограф. Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 3, 1952, 34-57.

12. Пасечник И.П. Сравнение результатов теоретического и экспериментального исследования резонансных явлений в системе почва-сейсмограф. Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 5, 1952,25-40.

13. Рэлей Теория звука

14. Шехтер О.Я. Об учете инерционных свойств грунта при расчете вынужденных колебаний массивных фундаментов. Сб. трудов Вибрация сооружений и фундаментов, № 12, стройвоенмориздат,1948.

15. Maaz R. Theoretische Untersuchund eines im elastischem Medium eingebetteten mechanischen Empfangers Seismographen in einer longitudinalen Planwelle - Pure and Applied Geophysics, 1964/II vol. 58, 23-41.

16. Maaz R. Theoretische Untersuchung der Wechselwirkung zwischen dem mechanischen Empfander eines Seismographen und einer longitudinalen.

17. Miles I.W. Motion of a Riqid Cylinder to a Plane elastic Wave. I. Acoust Soc. Am. V 32, N 12, 1960, 1656-1659.

18. Miles J.W. Lom-frequency Motion of Bodies in an Elastic wave Field I. Acoust. Soc. Amer. V. 32, 1960, N 11.

19. Mow C.C., Mente J. Dynamic stresses and Displament Around Cylindrical Discontinuities Due to Plane Harmonie shear waves.- Transactions, ser, E, Journal of Applied Mechanics, 1963, N 4.

20. Washburn H., Willey H. Effekt of the placement of a Seismometer on its Respense characteristics, Geophysics, Vol, 6, N 2, 1941.

21. Wolf A. Monion of a Rigid Sphere in an Aecustic wave field - Geophysiecs, 1945, vol, 10.

22. Wolf A. The Equation of Motion of a Geophone on the Surfase of an Elastik Earth. Geophysics, Vol 9, N 1, 1944.

Е.М. Аверко

ВТОРИЧНЫЕ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ПЕРВИЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН

При падении упругих волн на твердое тело последнее приходит в движение. Примером такого движения является реакция любого сейсмоприемника инерционного действия, отклик которого есть результат движения (относительно инерциальной системы координат) корпуса сейсмоприемника в поле падающих на него сейсмических волн.

Двигающее тело, находящееся в деформируемой (например, упругой) среде, генерирует сейсмические волны, которые можно назвать вторичными по отношению к первичным падающим на тело волнам, явившимся причиной движения этого тела и, следовательно, - возникновения вторичных волн.

Исследование вторичных волн представляется интересным по двум причинам.

Во-первых, предположение о движении тела в поле падающих сейсмических волн уточняет традиционные представления о дифракции этих волн на абсолютно жестких телах и, во-вторых, свойства вторичных волн могут быть использованы при изучении движения дифрагирующего тела.

На реальность вторичных волн было указано Релеем [5] и Вольфом [16], которые теоретически рассматривали дифракцию продольных волн на абсолютно жестком включении при граничном условии, допускающем передвижение объекта дифракции под действием этих волн. Первый из них рассмотрел задачу для сферического включения в жидкости, второй - для твердой вмещающей среды. Было показано, что дифракционное поле от включения состоит из двух частей: одна часть обусловлена движением этого включения под действием падающей волны; вторая часть не связана с таким движением. К такому же выводу пришел Yamakowa N. [17] при допуске указанных граничных условий. Существует также противоположная точка зрения при введении граничных условий в задаче дифракции волн на локальных абсолютно жестких включениях (10, 4, 3, II, 6 и др.). При этом считается, что включение неподвижно в процессе дифракции. Наконец, существует промежуточная точка зрения, при которой включение остается неподвижным, но при этом длины падающих волн значительно меньше размера включения (I3, I4).

В настоящей статье считается, что дифрагирующее тело движется под действием падающих на него волн.

Решается стационарная задача о генерировании вторичных волн абсолютно жестким цилиндром при падении на него плоских продольных и поперечных волн.

Постановка задачи и некоторые общие соотношения

Пусть в безграничном упругом пространстве, характеризуемом скоростями v_s и v_p распространения продольных и поперечных волн и плотностью ρ распространяется плоская гармоническая продольная или поперечная волна, фронт которой параллелен оси кругового абсолютно жесткого цилиндра радиуса r_0, а вектор смещения в этих волнах располагается в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Требуется определить упругое поле смещений, возникшее от движения этого цилиндра при падении на него указанной волны.

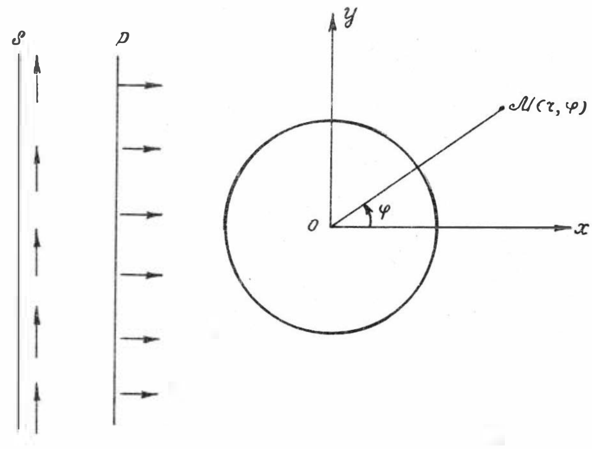
Двумерная задача может рассматриваться в полярной системе координат (r, φ), расположенной в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Начало координат пусть располагается на оси цилиндра. За начало отсчета полярного угла принимается направление распространения падающей волны (рис. I). Вектор

$$\vec{U} = grad\,\Phi + rot\,\vec{\Psi} \qquad (I)$$

описывает смещение упругой среды в любой её точке, где функции Φ и $\vec{\Psi}$ - скалярный и векторный его потенциалы, удовлетворяют уравнениям Гельмгольца для рассматриваемых стационарных колебаний с круговой частотой ω :

$$\nabla^2\Phi + k_p^2\Phi = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla^2\vec{\Psi} + k_s^2\vec{\Psi} = 0 \qquad (3)$$



Р и с. I. К расчету сейсмического поля, обусловленного движением цилиндра от падающих продольных Р и поперечных S волн.

$$k_p=\frac{\omega}{v_p}; \quad k_s=\frac{\omega}{v_s}; \quad \vec{\psi}=\psi\cdot\vec{e}_z \tag{4}$$

На границе с цилиндром пусть выполняются граничные условия, выражающие непрерывность смещений и напряжений в точках этой границы (жесткий контакт поверхности цилиндра с упругой средой). Под действием рассматриваемых волн движение цилиндра будет плоским в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и последний будет двигаться поступательно в направлении движения частиц в этих волнах. При этом для падающей поперечной волны цилиндр будет ещё дополнительно к этому вращаться вокруг своей оси [2]. Граничные условия, найденные в этой работе, следующие:

$$x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{5}$$

$$-x_0\sin\varphi+y_0\cos\varphi+\Omega r_0=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\frac{\rho r_0}{M}\int_0^{2\pi}\left[\Phi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}+\psi\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}\right]d\varphi \tag{7}$$

$$\Omega=\frac{\rho r_0^2}{J}\left(\frac{4\pi\Omega}{k_s^2}-\int_0^{2\pi}\psi\, d\varphi\right) \tag{8}$$

$$r=r_0, \tag{8a}$$

где первые два равенства означают непрерывность смещений точек среды и цилиндра на границе, а последующие два соотношения выражают законы изменения количества движения и его момента для цилиндра единичной длины. Функции x_0 и y_0 суть смещения цилиндра в направлении осей абсцисс и ординат, а функция Ω – угловое смещение цилиндра; M и J – масса единицы длины и осевой момент инерции. При этом для падающей продольной волны выполняется соотношение

$$y_0=\Omega=0 \tag{9}$$

$$x_0 = 0 \tag{9a}$$

Падение продольной волны

Пусть смещение для неё дается выражением:

$$\vec{U} = x e^{j\omega\left(t - \frac{x}{v_p}\right)} \cdot \vec{i} \tag{10}$$

Опуская временный множитель $e^{j\omega t}$ и разлагая оставшийся множитель по функции Бесселя, получим потенциал такой волны в виде:

$$\Phi_p = -x r (jZ_p)^{-1} \cdot e^{-jZ_p\cos\varphi} = \\ = -x r (jZ_p)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J_m(Z_p)\cos m\varphi \tag{11}$$

$$\varepsilon_0 = 1;\quad \varepsilon_m = 2;\ m \geqslant 1;\ Z_p \equiv k_p r;\quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Рассеянная волна должна быть выражена через функции Ганкеля, чтобы удовлетворить условию излучения:

$$\Phi^* = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(Z_p)\left[a_m \cos m\varphi + a_m^{(1)} \sin m\varphi\right] \tag{12}$$

$$\psi^* = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(Z_s)\left[b_m^{(1)} \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right] \tag{13}$$

$$Z_s = k_s \cdot r$$

где Φ^* и ψ^* - потенциалы продольной и поперечной рассеянных волн. Из условия симметрии полагаем

$$a_m^{(1)} = b_m^{(1)} = 0 \tag{14}$$

В граничные условия входят суммы потенциалов падающей и рассеянных волн. Поэтому

$$\Phi = \Phi_p + \Phi^* \tag{15}$$

$$\psi = \psi^* \tag{16}$$

Используя равенства (II) - (I6), получаем

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\left[x r\,(-jZ_p)^{-1}\varepsilon_m\,(-j)^m J_m(Z_p)+a_m H_m^{(2)}(Z_p)\right]\cos m\varphi \tag{I7}$$

$$\psi=\sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(Z_s)\,b_m \sin m\varphi \tag{I8}$$

После подстановки последних уравнений в (5) - (7) и при учете равенства (9), приходим к следующей полной алгебраической системе уравнений относительно неизвестных Хо, a_m, b_m :

$$x_o\cos\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\left[x r_o(-jk)^{-1}\varepsilon_m(-j)^m J_m'(k)+a_m H_m^{(2)'}(k)\right]k_p\cos m\varphi+$$
$$+\frac{m}{r_o}H_m^{(2)}(e)\,b_m\cos m\varphi\Big\} \tag{I9}$$

$$-x_o\sin\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\left[x(-jk)^{-1}\varepsilon_m(-j)^m J_m(k)+\frac{a_m}{r_o}H_m^{(2)}(k)\right](-\sin m\varphi)m-$$
$$-k_s H_m^{(2)'}(e)\,b_m\sin m\varphi \tag{20}$$

$$x_o=\frac{\rho r_o}{M}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\left[x r_o(-jk)^{-1}\varepsilon_m(-j)^m J_m(k)+a_m H_m^{(2)}(k)\right]\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos m\varphi\,d\varphi+$$
$$+H_m^{(2)}(e)\,b_m\int_0^{2\pi}\sin\varphi\sin m\varphi\,d\varphi\Big\} \tag{2I}$$

$$k\equiv k_p r_o;\quad e\equiv k_s r_o;\quad \frac{1}{S}\equiv\frac{\rho r_o^2\pi}{M}=\frac{\rho}{\rho_o} \tag{22}$$

где ρ_o - плотность цилиндра.

Из этой системы видно, что коэффициенты a_1 и b_1 со знаком m = I должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{a_1}{r_0} k H_1^{(2)'}(k) - \frac{b_1}{r_0} H_1^{(2)}(\ell) = \frac{2x}{k} k J_1'(k) & (23) \\ x_0 - \frac{a_1}{r_0} H_1^{(2)}(k) - \frac{b_1}{r_0} \ell H_1^{(2)'}(\ell) = \frac{2x}{k} J_1(k) & (24) \\ \delta x_0 - \frac{a_1}{r_0} H_1^{(2)}(k) - \frac{b_1}{r_0} H_1^{(2)}(\ell) = \frac{2x}{k} J_1(k) & (25) \end{cases}$$

Все остальные коэффициенты со значком $m \neq 1$ определяются из системы (I9) - (2I) приравниванием нулю каждого из слагаемых, стоящих в правой части этих уравнений.

Если учесть следующее равенство [2]:

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin m\varphi \, d\varphi = 0$$

то получится следующая система уравнений для $m \neq 1$

$$\left\{\left[\varepsilon_m x(-jk)^{-1}(-j)^m J_m'(k) + \frac{a_m}{r_0} H_m^{(2)'}(k)\right] k + m \frac{b_m}{r_0} H_m^{(2)}(\ell)\right\} \cos m\varphi = 0 \qquad (26)$$

$$\left\{\left[\varepsilon_m x(-jk)^{-1}(-j)^m J_m(k) + \frac{a_m}{r_0} H_m^{(2)}(k)\right] m r_0 + \ell \frac{b_m}{r_0} H_m^{(2)'}(\ell)\right\} \sin m\varphi = 0 \qquad (27)$$

$$m \neq 1$$

Она не содержит в себе функции x_0 и, следовательно, коэффициенты a_m и b_m при $m \neq 1$ не зависят от смещения цилиндра при падении на него рассматриваемой волны. Подставив найденные из этой системы значения коэффициентов в равенства (I7), (I8) и (I), получим рассеянное дифракционное поле смещений упругой среды, которое не связано со смещением цилиндра и, следовательно, может рассматриваться как дифракционное поле при неподвижном цилиндре. Коэффициенты со значком $m = 1$ определены системой (23) - (25), зависящей от смещений цилиндра и, следовательно, дифрагированное поле, определяемое этой системой, обусловлено движением цилиндра при падении на него рассматриваемой волны.

Итак, получено разделение дифрагированного поля на два вида: связанного и не связанного с движением цилиндра в процессе дифракции. Этот результат совпадает с одним из выводов работ [16, 5], где рассматривалась дифракция на сфере.

В задачу проводимого расчета входит вычисление рассеянного вторичного поля, обусловленного движением цилиндра при дифракции. Поэтому полем, не связанным с этим движением, мы заниматься не будем.

Решая систему уравнений (23) - (25), получим

$$\delta_x = \frac{x_0}{x} = \frac{4j}{\pi k^2 H_2^2(k)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-\delta}{2}\left[h(k) + h(e)\right]} \tag{28}$$

$$\delta_a = \frac{a_1 k}{2x r_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{J_2(k)}{H_2^{(2)}(k)} \cdot \frac{-\delta k + (\delta - 1)\left[\frac{J_1(k)}{J_2(k)} + \frac{k}{e} \cdot \frac{H_1^{(2)}(e)}{H_2^{(2)}(e)}\right]}{1 + \frac{1-\delta}{2}\left[h(k) + h(e)\right]} \tag{29}$$

$$\delta_b = \frac{b_1 e}{x r_0} = \frac{4j}{\pi k^2} \cdot \frac{\delta - 1}{H_2^{(2)}(k) H_2^{(2)}(e)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-\delta}{2}\left[h(k) + h(e)\right]} \tag{30}$$

$$h(z) = \frac{H_0^{(2)}(z)}{H_2^{(2)}(z)} \tag{31}$$

Теперь потенциалы искомого рассеянного поля запишутся согласно формулам (12) - (14) в следующем виде:

$$\varphi_1^* = \frac{2x r_0}{k} \delta_a H_1^{(2)}(z_p) \cos\varphi \tag{32}$$

$$\psi_1^* = \frac{x r_0}{e} S_e H_1^{(2)}(z_s) \sin\varphi \tag{33}$$

Выделяя из поля смещений, соответствующего этим потенциалам, безвихревую

$$\vec{U}_{pp} = grad\, \Phi_1^* = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \tag{34}$$

и соленоидальную

$$\vec{U}_{ps} = rot\, \vec{\Psi}_1^* = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1^*}{\partial \varphi} \vec{e}_r - \frac{\partial \psi_1^*}{\partial r} \vec{e}_\varphi \tag{35}$$

части, или - что то же - продольные и поперечные волны, получаем

$$\vec{U}_{pp} = 2xS_0 \left[H_1^{(2)'}(z_p) \cos\varphi\, \vec{e}_r - \frac{H_1^{(2)}(z_p)}{z_p} \sin\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \right] e^{j\omega t} \tag{36}$$

$$\vec{U}_{ps} = xS_e \left[-H_1^{(2)'}(z_s) \sin\varphi\, e_\varphi + \frac{H_1^{(2)}(z_s)}{z_s} \cos\varphi\, \vec{e}_r \right] e^{j\omega t} \tag{37}$$

Падение поперечной волны

Фронт такой волны пусть будет параллелен оси цилиндра, а вектор смещения в ней перпендикулярен этой оси

$$\vec{U}_s = y(\omega)\, e^{j\omega\left(t - \frac{x}{v_s}\right)} \cdot \vec{j} \tag{38}$$

Направление оси OX совпадает с направлением распространения волны. Опуская в дальнейших расчетах множитель $e^{j\omega t}$ получаем потенциал падающей поперечной волны

$$\psi_s^* = (jk_s)^{-1} y(\omega)\, e^{-jk_s r \cos\varphi} \tag{39}$$

или после разложения его по функциям Бесселя -

$$\psi_s^* = \sum_{m=0}^{\infty} (jk_s)^{-1} y \cdot \varepsilon_m (-j)^m J_m(z_s) \cos m\varphi \tag{40}$$

$$z_s = \frac{\omega r}{v_s}$$

Полные потенциалы падающей и рассеянной волны, удовлетворяющие уравнениям (2), (3), ищем в следующем виде:

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(z_p)\sin m\varphi \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\Psi=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[(jk_s)^{-1}\cdot y\varepsilon_m(-j)^m J_m(z_s)+\\ +D_m H_m^{(2)}(z_s)\Big]\cos m\varphi\end{aligned} \tag{42}$$

где коэффициенты C_m и D_m определяются из граничных уловий (5) - (8) с учетом равенства (9а) для случая падения поперечной волны.

Эти условия записываются так:

$$\begin{aligned}y_0\sin\varphi=\sum\Big\{k_p C_m H_m^{(2)\prime}(k)-\frac{m}{r_0}\Big[(jk_s)^{-1}y\varepsilon_m(-j)^m J_m(e)+\\ +D_m H_m^{(2)}(e)\Big]\Big\}\sin m\varphi\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\Omega r_0+y_0\cos\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\frac{m}{r_0}C_m H_m^{(2)}(k)-k_s\Big[(jk_s)^{-1}y\varepsilon_m(-j)^m J_m'(e)+\\ +D_m H_m^{(2)\prime}(e)\Big]\Big\}\cos m\varphi\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}y_0=\frac{\rho r_0}{M}\sum\Big\{C_m H_m^{(2)}(k)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\sin m\varphi\,d\varphi-\\ -\Big[(jk_s)^{-1}y\varepsilon_m(-j)^m J_m(e)+D_m H_m^{(2)}(e)\Big]\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos m\varphi\,d\varphi\end{aligned} \tag{45}$$

$$\Omega=\frac{\rho r_0^2}{I}\Big\{\frac{4\pi\Omega}{k_s^2}-2\pi\Big[(jk_s)^{-1}yJ_0(e)+D_0 H_0^{(2)}(e)\Big]\Big\} \tag{46}$$

Они разделяются на следующие три системы уравнений.
Для $m = 0$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\Omega}{k_s^2}\left(2-\dfrac{\varkappa e^2}{2\pi\rho r_0^4}\right)+\mathcal{D}_0 H_0^{(2)}(e)=jy\dfrac{J_0(e)}{k_s} & (47)\\[2ex] \Omega r_0+\mathcal{D}_0 k_s H_0^{(2)'}(e)=+jyJ_0'(e) & (48)\end{cases}$$

для $m = 1$:

$$\begin{cases} y_0-\dfrac{C_1 k}{r_0}H_1^{(2)'}(k)+\dfrac{\mathcal{D}_1}{r_0}H_1^{(2)'}(e)=\dfrac{2y}{e}J_1(e) & (49)\\[2ex] y_0-\dfrac{C_1}{r_0}H_1^{(2)}(k)+\dfrac{\mathcal{D}_1}{r_0}eH_1^{(2)'}=2yJ_1'(e) & (50)\\[2ex] \delta y_0-\dfrac{C_1}{r_0}H_1^{(2)}(k)+\dfrac{\mathcal{D}_1}{r_0}H_1^{(2)}(e)=\dfrac{2y}{e}J_1(e) & (51)\end{cases}$$

для $m \geqslant 2$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=2}^{\infty}\left[\dfrac{C_m}{r_0}kH_m^{(2)'}(k)-m\dfrac{\mathcal{D}_m}{r_0}H_m^{(2)}(e)-m\dfrac{2y}{e}(-j)J_m(e)\right]\cdot\sin m\varphi=0 & (52)\\[2ex] \sum\limits_{m=2}^{\infty}\left[m\dfrac{C_m}{r_0}H_m^{(2)}(k)-\dfrac{\mathcal{D}_m}{r_0}eH_m^{(2)'}(e)-\dfrac{2y}{1}(-j)^{m-1}J_m(e)\right]\cos m\varphi=0 & (53)\end{cases}$$

Последняя система уравнений не связана с движением цилиндра при падении на него поперечной волны и её мы не будем исследовать. Две первые системы (47)-(48) и (49)-(51) определяют вращательное и поступательное движение цилиндра, а также коэффициенты упругих полей, образовавшихся от таких движений соответственно.

Решение системы (47)-(48) следующее:

$$\frac{\Omega r_0}{y} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(2 - \frac{\gamma e^2}{2\pi \rho r_0^4}\right) H_1^{(2)}(e) - e H_0^{(2)}(e)} \tag{54}$$

$$S_0 \equiv \frac{\mathcal{D}_0 k_s}{jy} \cdot \frac{\left(2 - \frac{\gamma e^2}{2\pi \rho r_0^4}\right) \mathcal{J}_1(e) - e\mathcal{J}_0(e)}{\left(2 - \frac{\gamma e^2}{2\pi \rho r_0^4}\right) H_1^{(2)}(e) - e H_0^{(2)}(e)} \tag{55}$$

Система (49)-(5I) эквивалентна решенной системе (23)-(25), если в последней сделать следующую формальную замену:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow y \\ x_0 &\longrightarrow y_0 \\ k &\longrightarrow e \\ e &\longrightarrow k \end{aligned} \tag{56}$$

и при этом считать, что

$$a_1 = -\mathcal{D}_1 \tag{57}$$

$$b_1 = C_1 \tag{58}$$

Поэтому искомые величины y_0, $\mathcal{D}_1$, C_1 определяются равенствами (28)-(3I), если в них сделать замену по формулам (56) - (62).

Потенциалы искомого поля будут при этом следующими:

для $m = 0$

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0 & (59) \\ \Psi_0 = \left[-jy \frac{\mathcal{J}_0(z_s)}{k_s} + \mathcal{D}_0 H_0^{(2)}(z_s)\right] & (60) \end{cases}$$

для $m = I$

$$\begin{cases} \Phi_1 = C_1 H_1^{(2)}(z_p) \sin\varphi & (61) \\ \Psi_1 = \left[-2y \dfrac{J_1(z_s)}{k_s} + D_1 H_1^{(2)}(z_s)\right]\cos\varphi & (62) \end{cases}$$

Отсюда находим смещения упругой среды, соответствующие этим потенциалам рассеянных волн.

Для $m = 0$

$$\begin{cases} \vec{U}_{sp} = \operatorname{grad} \Phi_0 = 0 & (63) \\ \vec{U}_{ss}^{(0)} = -\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial r}\vec{e}_\varphi = +jy S_0 H_1^{(2)}(z_s) e^{j\omega t}\vec{e}_\varphi & (64) \end{cases}$$

Для $m = 1$:

$$\begin{cases} \vec{U}_{sp}^{(1)} = y S_c \left[H_1^{(2)\prime}(z_p)\sin\varphi \cdot \vec{e}_r + \dfrac{H_1^{(2)}(z_p)}{z_p}\cos\varphi\, \vec{e}_\varphi\right] e^{j\omega t} & (65) \\ \vec{U}_{ss}^{(1)} = 2y S_D \left[H_1^{(2)\prime}(z_s)\cos\varphi\, \vec{e}_\varphi + \dfrac{H_1^{(2)}(z_s)}{z_s}\sin\varphi\, \vec{e}_r\right] e^{j\omega t} & (66) \end{cases}$$

При этом функции S_c и S_D равны S_b и S_a если в последних аргументы x , k , l заменить на y , l , k соответственно.

Общие свойства рассматриваемого сейсмического поля

Сейсмическое поле, образовавшееся от движения цилиндра при дифракции на нем продольной волны, обусловлено только его поступательным движением и состоит из монотипной $\vec{U}_{pp}$ и обменной $\vec{U}_{ps}$ волн.

Аналогичное поле при дифракции поперечной волны образуется как от поступательного, так и от вращательного движений цилиндра и слагается из обменной $\vec{U}_{sp}^{(1)}$ и монотипной $\vec{U}_{ss}^{(1)} + \vec{U}_{ss}^{(0)}$ волн, где $\vec{U}_{ss}^{(0)}$ - вектор смещений среды от вращения цилиндра при дифракции, а $\vec{U}_{ss}^{(1)}$ и $\vec{U}_{sp}^{(1)}$ - векторы смещений от поступательного движения. Обменные и монотипные волны от поступательного движения цилиндра совпадают при падении продольной и поперечной волны соответственно, если радиальную и тангенциальную составляющие вектора смещения в указанных вторичных волнах для падающей поперечной волны считать за тангенциальную (с обратным знаком) и радиальную составляющие таких смещений для падающей продольной волны. При этом, кроме учета правила перехода (56) продольной к такой же поперечной волне, нужно формально заменить z_p на z_s.

Указанную симметрию в формулах для вторичных волн от поступательного движения цилиндра следовало ожидать, т.к. распределение в пространстве интенсивности этих волн при указанном движении не должно зависить от выбора системы координат, а указанная замена радиальной и тангенциальной составляющих эквивалентна смещению начала отсчета полярного угла на (-90^0) при падении поперечной волны. При вращательном движении цилиндра образуется поперечная волна: продольной волны при этом не возникает.

Рассмотрим более подробно случай падения поперечной волны. Вдали от дифрагирующего объекта (цилиндра), когда выполняется соотношение

$$z_s > z_p >> 1 \tag{67}$$

и, следовательно, справедливы асимптотические приближения функций Ганкеля

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(z_s) &\simeq j\sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\, e^{-j\left(z_s-\frac{\pi}{4}\right)} \\ H_1^{(2)\,\prime}(z_s) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\, e^{-j\left(z_s-\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned} \tag{68}$$

рассматриваемое поле (63)-(66) представляется в следующем виде:

$$\vec{U}_{sp}^{(0)} = 0$$

$$\vec{U}_{ss}^{(0)} \cong -yS_0\sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\, e^{j\left[\omega t - z_s + \frac{\pi}{4}\right]}\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{U}_{sp}^{(1)} = yS_c\sqrt{\frac{2}{\pi z_p}}\, e^{j\left[\omega t - z_p + \frac{\pi}{4}\right]}\, \vec{e}_r$$

$$\vec{U}_{ss}^{(1)} = 2y\,S_D\sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\,e^{j(\omega t - z_s + \frac{\pi}{4})}\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \qquad (69)$$

Таким образом, вдали от цилиндра рассеянное поле, возникшее от движения цилиндра при падении на него поперечной волны, состоит из волн: продольной обменной $\vec{U}_{sp}$ и поперечной монотипной $\vec{U}_{ss}$ При этом :

$$\vec{U}_{ss} = \vec{U}_{ss}^{(0)} + U_{ss}^{(1)} = y\sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\,D(\varphi)\,e^{j(\omega t - z_s + \frac{3\pi}{4})}\,\vec{e}_\varphi \qquad (70)$$

$$D(\varphi) = (2S_D\cos\varphi - S_0)\,e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad (71)$$

Вектор смещения в обменной волне пропорционален смещению в падающей волне, направлен по радиусу, убывает с расстоянием как $z_p^{-1/2}$ и имеет синусоидальную диаграмму направленности (рис.2). Вектор смещения в монотипной волне линейно зависит от смещения в падающей волне, направлен перпендикулярно радиусу, затухает как $z_s^{-1/2}$ и диаграмма направленности для смещения в такой волне дается равенством (7I).

Можно показать, что при малом значении относительного радиуса цилиндра

$$k < e << 1 \qquad (72)$$

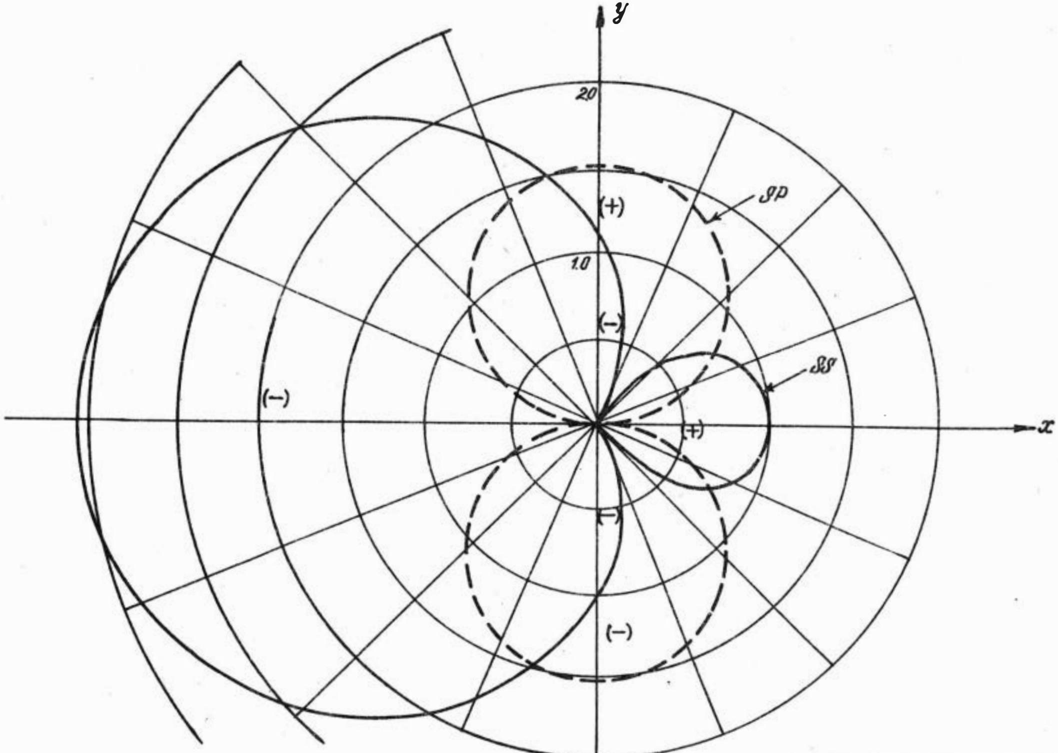
фазовые сдвиги комплексных функций S_D и S_0 одинаковы и равны приближенно $\frac{\pi}{2}$. Поэтому диаграмма направленности для монотипной волны при выполнении условия (72) будет следующей:

$$D(\varphi) = 2|S_D|\cos\varphi - |S_0| \qquad (73)$$

Это значит, что при

$$2|S_D| > |S_0| \qquad (74)$$

в правой полуплоскости (первой и четвертой четвертях) рассматриваемая диаграмма направленности содержит один положительный и частично два отрицательных лепестка с провалом до нуля при углах



Р и с. 2. Типичные диаграммы направленности цилиндра при падении на него поперечной волны: P – для обменной продольной волны; SS – для монотипной поперечной волны ($|S_b| = |S_0|$).

$$\varphi = \varphi_0 = \pm \arccos \frac{S_0}{2 S_\vartheta} \qquad (75)$$

(рис. 2). В левой полуплоскости имеется один отрицательный лепесток, составляющий единое целое с отрицательными лепестками в правой полуплоскооти.

Таким образом, при наблюдении волновой картины в правой полуплоскости вблизи ооси ординат колебания вмещающей среды будут противоположного знака по сравнению с колебаниями вблизи оси абсцисс. На линии, расположенной под углом φ_0 к оси абсцисс, колебания вмещающей среды отсутствуют. По разные стороны от этой линии колебания имеют разные знаки.

Затухание волн в дальней зоне определено выше. Затухание в ближней зоне определяется точными формулами (63)-(66). В частности, для линии, совпадающей с направлением распространения падающей волны ($\varphi = 0$), изменение с расстоянием вектора смещения поперечной монотипной и обменной продольной волн дается следующими формулами:

$$\vec{U}_{ss} = y\left[2S_\vartheta H_1^{(2)\prime}(Z_s) + jS_0 H_1^{(2)}(Z_s)\right] e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_\varphi \qquad (76)$$

$$\vec{U}_{sp} = yS_c \frac{H_1^{(2)}(Z_p)}{Z_p} e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_\varphi \qquad (77)$$

Как видно, отсюда по поляризационным признакам продольная и поперечная волны не различаются, если эти волны наблюдать в ближней зоне при $\varphi = 0$. При этом вектора смещения у обоих волн по направлению совпадают и перпендикулярны линии $\varphi = 0$. Такое отсутствие различия поляризационных признаков у продольной и поперечной волны для одного и того же направления не позволяет выделить поперечную (продольную) волну на фоне продольной (поперечной) с применением обычных технических средств такого выделения. Поэтому в эксперименте будет регистрироваться суммарный вектор смещения

$$\vec{R}_S = \vec{U}_{ss} + \vec{U}_{sp} \qquad (78)$$

двух указанных волн.

Вблизи от поверхности цилиндра (z_p - мало) суммарный вектор будет определяться в основном вектором продольной волны. По мере удаления от этой поверхности z_p увеличивается и вектор $\vec{U}_{ss}$ станет сравним по модулю с вектором $\vec{U}_{sp}$ Поэтому для этих расстояний z_p будут регистрироваться обе волны, и амплитудный график следует ожидать осложненным. При дальнейшем увеличении расстояния вектор $\vec{U}_{sp}$ станет значительно меньше вектора $\vec{U}_{ss}$ и суммарный вектор будет представлять собой вектор смещения поперечной монотипной волны. Дальнейшее увеличение расстояния z_p , удовлетворяющее условию (67), означает переход в дальнюю зону, где формулы (76)-(77) переходят в формулы (69) - (71).

Указанные качественные свойства в поведении суммарного вектора позволяют ожидать, что вблизи от поверхности цилиндра амплитудный график суммарного вектора смещения двух указанных волн будет иметь более сложную форму по сравнению с участком,где обменная волна уже затухла, и - тем более - по сравнению с участком дальней зоны. В последней этот график имеет простой вид и представляет собой неосциллирующую функцию $z_s^{-1/2}$

Теперь рассмотрим падение на цилиндр продольной волны.Точное решение задачи дается формулами (36) и (37). Вторичные волны представлены двумя типами: монотипной $\vec{U}_{pp}$ и обменной $\vec{U}_{ps}$ Обе эти волны обусловлены только поступательным движением цилиндра. Его вращение отсутствует и, следовательно, отсутствуют волны, вызванные вращением дифрагирующего объекта.

В дальней зоне цилиндра, когда выполняется соотношение (67) указанные вторичные волны представляются следующими приближенными формулами:

$$\vec{U}_{pp} \simeq 2x S_a \sqrt{\frac{2}{\pi z_p}} \cos\varphi \, e^{j[\omega t - z_p + \frac{\pi}{4}]} \cdot \vec{e}_r \tag{79}$$

$$\vec{U}_{ps} \simeq -x S_b \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}} \sin\varphi \, e^{j[\omega t - z_s + \frac{\pi}{4}]} \vec{e}_\varphi \tag{80}$$

Следовательно, при падении продольной волны диаграммы направленности вторичных волн представляются косинусоидальной и синусоидальной зависимостью от угла для монотипной и обменной волн соответственно (рис. 3). То осложнение в диаграмме направленности для монотипной волны, которое наблюдается в случае падения поперечной волны, отсутствует.

такую упрощенную диаграмму направленности можно объяснить отсутствием вращения цилиндра, который не порождает волну с круговой диаграммой направленности, накладывающейся на косинусои - дальную диаграмму, обусловленную поступательным движением цилиндра. Вектор смещения направлен по радиусу и перпендикулярно ему для этих волн. Величины вектора пропорциональна смещению в падающей волне.

Затухают обе вторичные волны как $z_p^{-1/2}$ и $z_s^{-1/2}$ для соответствующих волн.

В ближайшей зоне цилиндра, когда соотношение (67) не выполняется, имеем для угла $\varphi = 0$

$$\vec{U}_{pp} = 2x S_a H_1^{(2)'}(z_p)\,\vec{e}_r \tag{81}$$

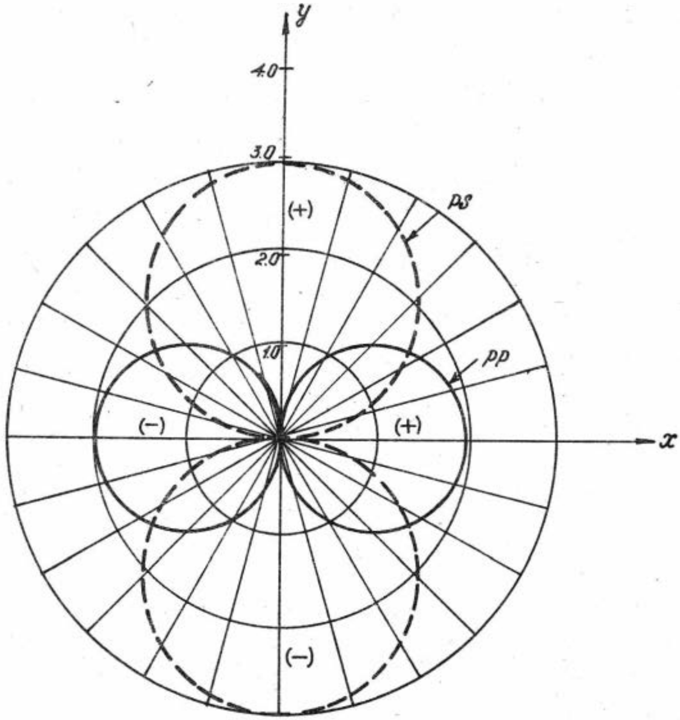
$$\vec{U}_{ps} = x S_b \frac{H_1^{(2)'}(z_s)}{z_s}\,\vec{e}_r \tag{82}$$

Поляризационные свойства одинаковы у обоих волн. Поэтому, как и в случае падения поперечной волны, выделить одну волну на фоне другой при помощи обычных экспериментальных средств не удается. В опыте будет регистрироваться в ближней зоне суммарный вектор

$$\vec{R}_p = \vec{U}_{pp} + \vec{U}_{ps} \tag{83}$$

Амплитудный график этой суммарной волны в ближней зоне следует ожидать более сложным по форме, чем в дальней, т.к. в ближней зоне интерферируют две волны, распространяющиеся с различными скоростями. При этом вблизи от цилиндра, когда z_s - мало, основная доля энергии в суммарной волне приходится на обменную. В дальней зоне эта волна затухает и останется одна монотипная с простой амплитудной зависимостью от расстояния, выражаемую формулой (79), если в опыте регистрируется только радиальная составляющая вектора смещения.

Следует заметить, что рассматриваемая волна в ближней зоне будет иметь менее сложный амплитудный график в случае падения



Р и с. 3. Типичные диаграммы направленности цилиндра при падении на него продольной волны: PP – для монотипной продольной волны, PS – для обменной поперечной волны ($|\mathcal{S}_a| = 0{,}25\sqrt{\gamma}\cdot\mathcal{S}_e$).

продольной волны, чем такая же волна в случае падения поперечной волны. Качественно это можно объяснить тем, что в первом случае суммарная волна есть результат интерференции только двух типов волн, а во втором случае - трех, каждая из которых затухает по-разному.

Интересно оценить величину поля смещений, образовавшегося от движения цилиндра, по сравнению с величиной поля падающей волны. Такая оценка полезна для постановки эксперимента.

Отношение максимумов модулей указанных вторичных и первичных полей при падении продольной волны будет следующим:

$$\frac{max\,|\vec{U}_{pp}|}{max\,|\vec{U}_p|} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi z_p}}\,|S_a| = \sqrt{\frac{2}{\pi z_p}}\cdot\frac{\pi}{4}(\delta-1)\kappa^2 \tag{84}$$

$$\frac{max\,|\vec{U}_{ps}|}{max\,|\vec{U}_p|} = \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\,|S_b| = \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\cdot\frac{\pi}{4}(\delta-1)e^2 \tag{85}$$

Во вторичном поле отношение максимумов смещений поперечной и продольной волн можно оценить по формуле

$$\frac{max\,|\vec{U}_{ps}|}{max\,|\vec{U}_{pp}|} = \gamma^{-3/2}; \quad \left(\gamma = \frac{v_s}{v_p}\right). \tag{86}$$

Эти формулы справедливы, во-первых, для дальней зоны и, во-вторых, для малых размеров радиуса цилиндра по сравнению с длиной волны, удовлетворяющих соотношению

$$\kappa < e << 1 \tag{87}$$

Аналогичные оценки можно получить для вторичного поля в случае падения поперечной волны:

$$\frac{max\,|\vec{U}_{ss}^{(1)}|}{max\,|\vec{U}_s|} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\,|S_D| = \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\cdot\frac{\pi}{4}(\delta-1)e^2 \tag{88}$$

$$\frac{max\,|\vec{U}_{sp}|}{max\,|\vec{U}_s|} = \sqrt{\frac{2}{\pi z_s}}\,|S_c| = \sqrt{\frac{2}{\pi z_p}}\;\frac{\pi}{4}(\delta-1)\kappa^2 \tag{89}$$

$$\frac{max|\vec{U}_{ss}|}{max|\vec{U}_s|}=\gamma^{-3/2}=2\sqrt{\gamma}\cdot\frac{|S_D|}{|S_c|}=\gamma^{-3/2} \qquad (90)$$

$$\frac{max|\vec{U}_{ss}^{(0)}|}{max|\vec{U}_{ss}^{(1)}|}=\frac{|S_o|}{2|S_D|}=\left(4\frac{\delta-1}{\delta}\cdot\frac{1}{e^2}\right)^{-1} \qquad (9I)$$

Можно указать ещё на величину

$$\frac{max|\vec{U}_{ps}|}{max|\vec{U}_{sp}|}=\frac{x}{y}\gamma^{-3/2} \qquad (9Ia)$$

легко оцениваемую по экспериментальным данным и характеризующую только поступательное, но не вращательное движение. Эта величина есть отношение максимумов смещений во вторичной поперечной к такому же смещению в продольных волнах, образовавшихся в результате поступательного движения цилиндра. В этом смысле величину, определяемую формулой (9I), можно рассматривать как показатель вращательного движения цилиндра. Из приведенных формул следует, что при радиусе цилиндра, составляющем сотую часть длины применяемой волны, и плотности цилиндра, в пять раз больше плотности вмещающей среды, смещение во вторичном поле приблизительно на два порядка ниже смещения в падающей волне, если наблюдения вторичного поля производятся на расстоянии, на порядок превышающем длину волны.

Вторичное поле, возникшее вследствие поступательного движения цилиндра, состоит из продольной и поперечной волны, сравнимыми по смещению друг с другом. При этом смещение в поперечной волне оказывается больше, чем в два раза смещения в продольной.

Поле поперечной волны, возникшее от вращения цилиндра, меньше такого же поля при поступательном движении почти на два порядка, если радиус цилиндра меньше длины волны во столько же раз.

Результаты вышеприведенных расчетов вторичных волн подтверждены экспериментом [I].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А., Максимов Л.А. Модельные исследования движения корпуса сейсмоприемника в поле продольных и поперечных волн. Настоящий сборник.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм,рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1963, 153.

3. Кулько В.Ф., Харабадот А.Ф. Дифракция сферических акуотических волн на сферическом препятствии, жестко закрепленном относительно системы координат. Сб. "Прикладная акустика, вибрационная техника". Киев, 1968.

4. Лазаренко М.А. Рассеяние продольных волн на цилиндрическом препятствии в полупространстве - сб. "Геофизические исследования строения земной коры Юго-Восточной Европы". Изд. "Недра", М., 1967, 154-160.

5. Релей. Теория звука.

6. Селезов И.Т., Лазаренко М.А. Рассеяние и дифракция упругих волн на сфере, помещенной в полупространство. ДАИ УССР,1966, № 2, 179-182.

7. Цой П.И. Рассеяние плоских звуковых волн сферическим препятствием (для коротких волн). Сб. "Научные труды Тульского горного института", I, Углетехиздат, М., 1958, 193-205.

8. Яворская И.М. Коротковолновая асимптотика дифракционного поля на сфере при падении плоских поперечных волн. Прикладная математика и механика, 29, 1965, № 6.

9. Яворская И.М. Рассеяние плоских продольных волн высокой частоты на цилиндрах при наклонном падении. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1967, № 6, 28-38.

10. Banaugh R. Dufraction of steady Elastic waves by surfaces Joldsmidt W. ces of arbitrary shape.- Journal of Applied Mechnics, V, 1963, N 4.

11. Einspruch G., Witterhol E., Truell R. Scattering of a Plane Transverse Wave by a Spherical Obstacle in an Elastic Medium- Journal of Applied Phusics, Vol. 31, N 5, 1960.

12. Friedman M.B., Show R. Diffraction of Pulses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Crosa Section - Transaction of the ASME. Series E. Journal of Applied Mechanics, v. 29, 1962, N 1.

13. Knopoff L. Scattering of compressionel waves by spherical obstacles - Geophysics, 24, 1959, N1, 30-39.

14. Knopoff L. Scattering of ahear waves by spherical obstacles - Geophysics, 1959, 24, N 2, p. 209-219.

15. Miles I.W. Motion of a Rigid Cylinder to a Plane elastic Wave. 1. Acoust. Soc. Am., v 32, N 12, 1960, 1656-1659.

16. Wolf A. Motion of a Rigid Sphere in an Acustic wave field - Geophysics, 1945, Vol. 10.

17. Scattering and attenuation of Elastic waves - Geophysical Magazine. v. 31. 1962, N 1. p. 68-95.

Е.М. Аверко, Ю.А. Нефедкин, Л.А. Максимов

МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА СЕЙСМОПРИЕМНИКА В ПОЛЕ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

В трехмерную задачу экспериментального исследования движения корпуса сейсмоприемника входило изучение смещений этого корпуса под действием падающих на него продольных и поперечных волн с целью определения основных свойств физико-математической модели этого движения. Задача решалась методом физического моделирования с использованием ультразвукового диапазона частот (20-30) кгц. При сейсморазведочных длинах волн порядка нескольких десятков метров и диаметрах корпуса сейсмоприемника порядка десяти сантиметров константа подобия при моделировании оказывается равной нескольким сотым. Это значит, что при применении ультразвуковых частот размер модели корпуса сейсмоприемника должен быть равен нескольким сотым миллиметра. Изготовить корпус таких малых размеров и провести моделирование на нем практически невозможно. Поэтому эксперимент проводился при минимальном размере корпуса, на котором возможно ещё провести моделирование. (Этот размер оценивается несколькими миллиметрами). Затем результаты физического моделирования сравнивались с расчетными, справедливыми для моделируемого, а так же для сколь угодно малого размера корпуса в пределах математической модели сплошной упругой среды. Совпадение (несовпадение) экспериментальных и теоретических данных на моделируемых размерах корпуса подтверждало (не подтверждало) справедливость физико-математической модели. Малый размер корпуса, определяемый миллиметрами, не позволил расположить в корпусе модель внутреннего устройства сейсмоприемника. Поэтому в модельных экспериментах такое устройство не вводилось, и задача движения корпуса сейсмоприемника моделировалась как задача движения абсолютно жесткого инерционного включения, размеры которого малы по сравнению с длиной падающей волны.

Измерить малое смещение такого включения для нас оказалось затруднительно. Поэтому контроль за движением корпуса осуществлялся косвенно по тому сейсмическому полю, которое было следствием этого движения.

Моделирование задачи проводилось на технически легко реализуемых двумерных моделях, методика работы на которых в настоящее время достаточно хорошо разработана по сравнению с такой методикой для трехмерных моделей.

Итак, задача физического моделирования движения корпуса сейсмоприемника под действием падающих на него упругих волн упрощена пренебрежением действием сил на корпус со стороны внутреннего устройства сейсмоприемника и отождествлена с плоской задачей изучения движения абсолютно жесткого дифрагирующего включения, которое под действием падающих волн может передвигаться во вмещающей среде. Контроль за таким движением осуществлялся регистрацией вдали от включения и исследованием сейсмического поля, возникшего как следствие движения такого объекта дифракции.

З а д а ч а   э к с п е р и м е н т а состояла в выделении и регистрации вторичного сейсмического поля, обусловленного движением корпуса сейсмоприемника при падении на него плоских продольных и поперечных волн, с целью изучения движения модели такого корпуса. Эксперимент проводился на двумерных моделях без учета влияния внутреннего устройства корпуса сейсмоприемника на движение последнего. При этом опыт сводился к изучению вторичного поля от сплошного жесткого локального включения.

Из экспериментальных работ, касающихся изучения дифрагированного поля от такого включения, можно указать на [6, 7 и др.]. Однако нам не известны работы, посвященные экспериментальному изучению вторичного поля, обусловленного движением включения при падении на него упругих волн и являющегося индикатором такого движения [I].

М е т о д и к а   п р о в е д е н и я   о п ы т о в . Эксперимент состоял в том, что в двумерной вмещающей среде, в которой помещалась модель корпуса сейсмоприемника, возбуждались упругие колебания и регистрировалось в виде сейсмограмм вторичное сейсмическое поле. Моделью вмещающей среды служили листы плексигласа, толщина которого была значительно меньше применяемых длин волн.

Моделью корпуса сейсмоприемника служил стальной цилиндр высотой, равной толщине плексигласового листа. Радиус цилиндра выбирался из требования выполнения критериев подобия, о которых говорилось выше. Такая модель корпуса жестко вклеивалась в плексиглас при помощи эпакоидной полимеризованной смолы. Место вклейки выбиралось в средней части листа. Вклейка проводилась так, чтобы весь цилиндр был погружен в лист и соприкасался с последним по боковой поверхности цилиндра (рис. I).

Для того, чтобы выделить вторичное поле на фоне первичного, был применен методический прием. По следу фронта падающей волны, проходящему через ось цилиндра, был сделан тонкий разрез плексигласового листа, заполненный воздухом. При этом первичная (падающая) волна не проходила в область

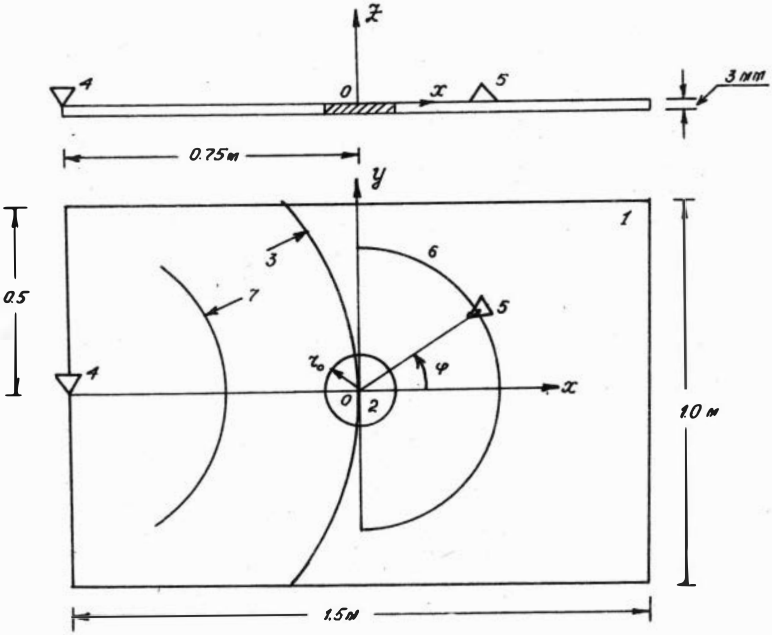
$$|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \quad (\varphi \lessgtr 0)$$

В этой области появлялось только вторичное поле, которое измерялось в эксперименте. Для уменьшения влияния свободной поверхности разреза на измеряемое поле эта поверхность и часть модели, непосредственно примыкающей к ней, покрывалась слоем пластилина. Этим значительно ослаблялись поверхностные волны, образующиеся на поверхности разреза. Кроме того, интерпретации подлежало поле, измеренное достаточно далеко от этой поверхности. На плоскости модели вмещающей среды располагались поляризационные ультразвуковые датчики, диаграмма направленности которых по смещению совпадает с косинусом, если начало отсчета угла местной полярной системы координат совпадает с направлением нормали к плоскости биморфа [4]. Излучатель ультразвуковых колебаний располагался на краю модели и постоянно закреплялся в одной точке, приемник перемещался по линейным или круговым профилям с центром, совпадающим с точкой пересечения оси цилиндра и поверхности плексиглазового листа.

Линейный профиль совпадал с частью оси OX координатной системы.

Радиус кругового профиля выбирался достаточно большим, чтобы профиль располагался в дальней зоне цилиндра.

Регистрация поперечных (продольных) волн в дальней зоне производилась при ориентации плоскости биморфного приемника такой, что нормаль к ней была перпендикулярна (параллельна) радиусу-вектору точки, в которой регистрируется волна.



Р и с. I. Схема эксперимента: I – плексигласовый лист; 2 – стальной цилиндр; 3 – разрез; 4 – излучатель; 5 – приемник; 6 – круговой профиль; 7 – фронт падающей волны.

Поперечные и продольные волны возбуждались ориентацией указанной нормали для излучателя перпендикулярно (параллельно) оси OX в точке его состояния. Из всех характеристик вторичного сейсмического поля регистрировались две характеристики: диаграмма направленности модели корпуса сейсмоприемника по вторичным волнам и частотный спектр вторичного поля в фиксированной точке вмещающей среды.

Диаграмма напрвленности снималась при расположении приемника по круговому профилю. При определении частотного спектра приемник помещался на линейном профиле.

Аппаратура применялась или в виде сейсмоскопа типа [2], или комплекса [3]. Первая служила для возбуждения и регистрации ультразвуковых нестационарных колебаний, вторая - для стационарных, или - вернее - "полустационаряых". В последнем случае в среду излучается цуг синусоидальных колебаний продолжительностью, равной десяти и более периодам модулирующих колебаний. Такой режим позволяет - с одной стороны - считать колебания стационарными, а - с другой стороны - избежать ошибок при интерпретации, связанных с мешающими отражениями от краев моделей ограниченных размеров, При проведении экспериментов в аппаратуру [2] были внесены изменения, состоящие в том, что вместо осциллографа типа ЭНО - I, применены осциллограф СИ-I и предварительный усилитель на полупроводниках с возможностью частотной фильтрации регистрируемых колебаний (рис. 2).

Характеристики применяемых моделей следующие:

$$\mathcal{V}_p = 2{,}30 \; 10^5 \text{ см/сек}$$

$$\mathcal{V}_s = 1{,}38 \; 10^5 \text{ см/сек}$$

$$\rho = 1{,}21 \text{ гм/см}^3$$

$$\rho_0 = 7{,}9 \text{ г/см}^3$$

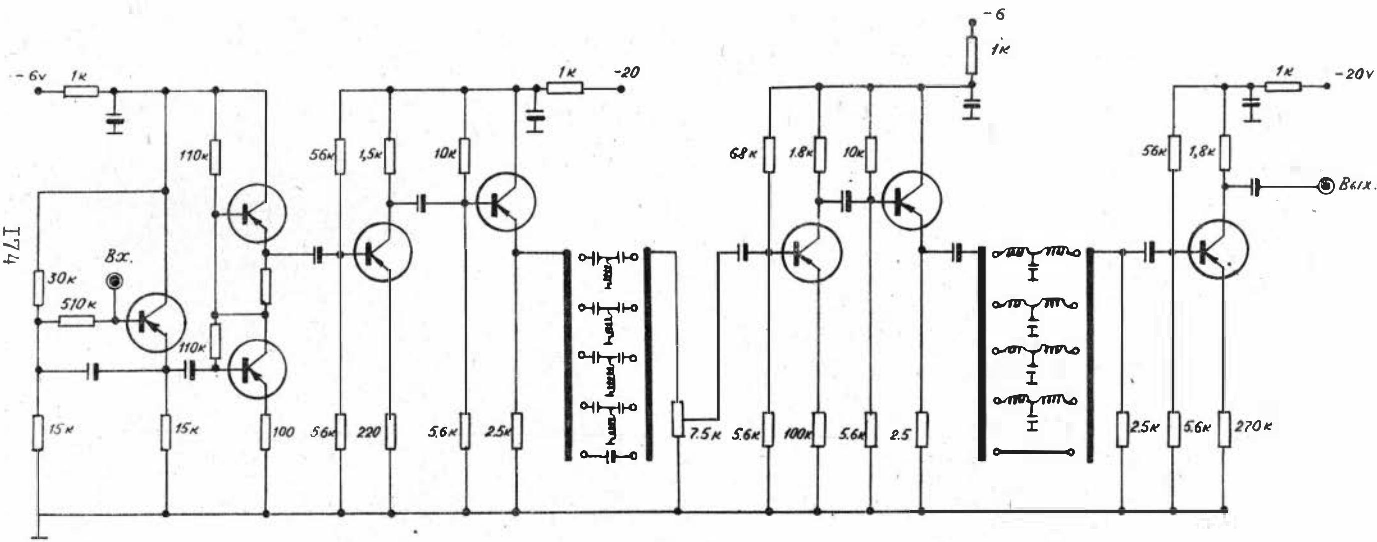
$$\lambda_s = 5{,}5 \text{ см}$$

$$\lambda_p = 9{,}18 \text{ см}$$

$$\gamma = 0{,}58$$

$$\delta = 6{,}63$$

При использовании нестационарных колебаний средняя частота (частота резонанса) принималась в качестве частоты стационарных колебаний.



Р и с. 2. Предварительный усилитель к сейсмоскопу.

r_0 (см)	0,0	0,I	0,2	0,3	0,4	0,7	0,8	0,I2
$\frac{r_0}{\lambda_p}$ I0^2	0,0	I,09	2,I2	3,27	4,35	7,64	8,72	I3,I
$\frac{r_0}{\lambda_s}$ I0^2	0,0	I,8I	3,64	5,45	7,24	I2,7	I4,6	I8,I
K · I0^I	0,0	0,682	I,37	2,05	2,73	4,80	5,47	I0,3
ℓ · I0^I	0,0	I,I3	2,26	3,4I	4,56	8,00	9,I5	I3,4

Результаты эксперимента

Первичный материал по определению диаграмм направленности представлен в виде сейсмограмм на рис. 3. Различные части этого рисунка соответствуют опытам по выделению различных типов волн вторичного поля согласно следующей таблицы:

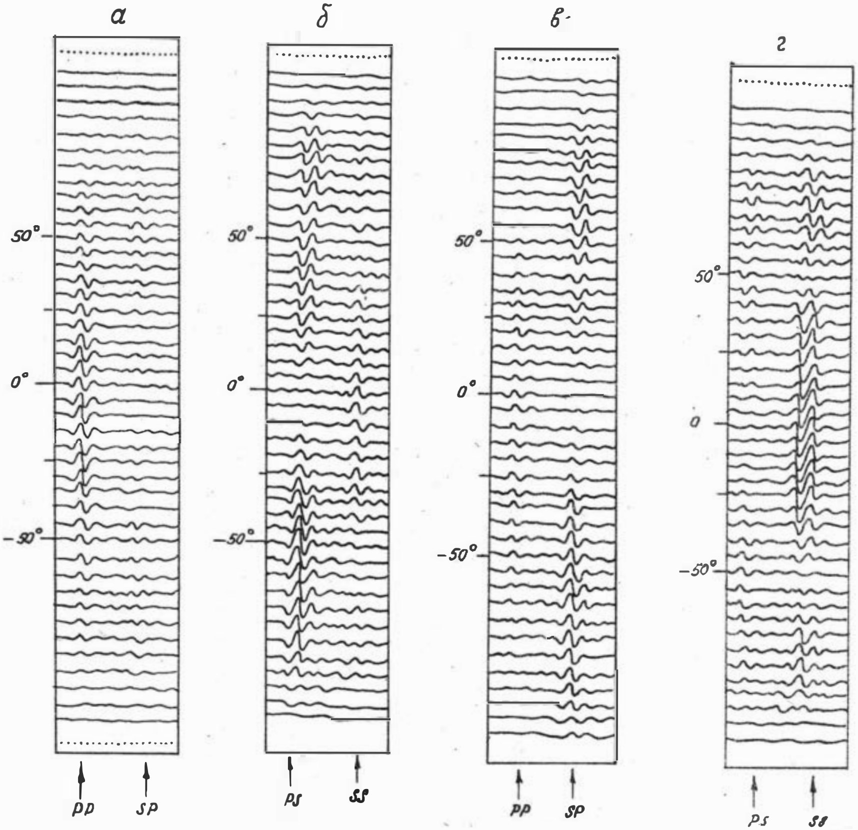
Таблица I

Выделяемая волна	Падающая волна	Настройка на прием волны	Рисунок
U_{pp}	P	P	8,а
U_{ps}	P	S	8,б
U_{sp}	S	P	8,в
U_{ss}	S	S	8,г

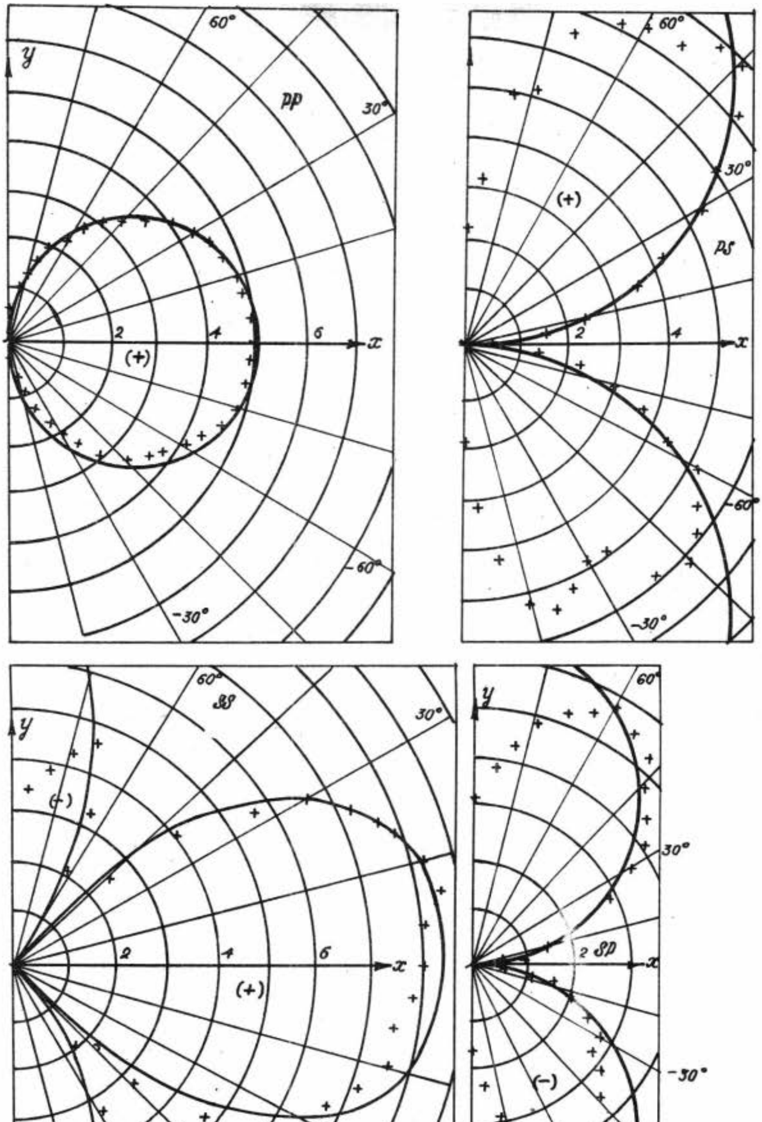
Круговой профиль при снятии диаграмм направленности располагался на расстоянии $z_s = 4,35$ при ℓ = I,I3 I0^{-I}. Волновая картина регистрировалась через каждые 5^0 в правой полуплоскости листа.

Чувствительность аппаратуры оставалась постоянной.

Диаграммы направленности, построенные на основании сейсмограмм рис. 3 и в соответствии с таблицей № I, представлены на рис. 4. Крестики на этом рисунке означают экспериментальные значения, сплошные линии - теоретические кривые, расчитанные по теории [I]. Каждая диаграмма на рисунке помечена типом волны, по которой она строилась.



Р и с. 3. Сейсмограммы для определения диаграмм направленности. Марки времени – 20 мм/сек.



Р и с. 4. Диаграммы направленности цилиндра при падении на него продольной и поперечной волн. Сплошная линия - теоретические кривые; крестики - экспериментальные значения. Теоретическая кривая для случая SS построена при / S_{θ} / = 9,36; / S_0 / = 10,2 усл. единиц.

Вначале рассмотрим диаграммы направленности, характеризующие только поступательное движение цилиндра. К ним относятся диаграммы по монотипной продольной, а также по обменным волнам.

Как видно из рисунка, максимальное различие между теоретической и экспериментальной диаграммами направленности цилиндра по монотипной продольной волне оценивается относительной погрешностью, равной около 5%. Такая малая погрешность свидетельствует о хорошем количественном совпадении рассматриваемых диаграмм.

Теоретические и экспериментальные диаграммы по обменным PS и SP волнам на различных своих участках согласуются неодинаково: вблизи разреза модели согласование плохое, вдали от разреза совпадение хорошее. Знак вступления волны совпадает с теоретически предсказываемым: в первой четверти положительное, в четвертой – отрицательное вступление; на линии распространения падающей волны (ось OX) интенсивность обменных волн равна нулю. Плохое согласование рассматриваемых диаграмм направленности по обменным волнам вблизи разреза можно, по-видимому, объяснить искажающим действием разреза на регистрируемое поле этих волн. Это действие проявляется в том, что поверхностные волны, образовавшиеся от движения цилиндра, распространяются не только по поверхности разреза, но и проникают внутрь вмещающей среды. Такая поверхностная волна имеет смещение с основной компонентой, направленной перпендикулярно линии разреза. В пользу этого утверждения говорит то, что теоретическая диаграмма отклоняется от экспериментальной в большей мере при меньших углах для волны PS, чем для SP. Различие в приеме этих волн состоит в том, что в первом случае направление максимума диаграммы направленности приемника перпендикулярно линии разреза, а во втором – параллельно. Следовательно, в первом случае будут регистрироваться преимущественно компоненты смещения, перпендикулярные линии разреза, а во втором – параллельно. Подтверждением этого же может служить хорошее совпадение теоретической и экспериментальной диаграмм направленности цилиндра по монотипной продольной волне.

Из сказанного следует, что экспериментальным данным вдали от разреза следует в большей мере доверять, чем вблизи от него.

Продолжая рассмотрение диаграмм, характеризующих поступательное движение цилиндра, интересно проверить справедливость теоретических формул (86) и (9Iа), из [I], оценивающих интенсивность поперечной и продольной волн, образовавшихся от такого поступательного движения. Снимая с соответствующих диаграмм направленности максимальные их значения, имеем

$$\frac{max|\vec{U}_{ps}|}{max|U_{pp}|} = \frac{10,6}{5} = 2,12$$

Это же теоретическое отношение по формуле (86) при $\gamma = 0,58$ для вмещающей среды из плексигласа оказывается равной 2,I5.

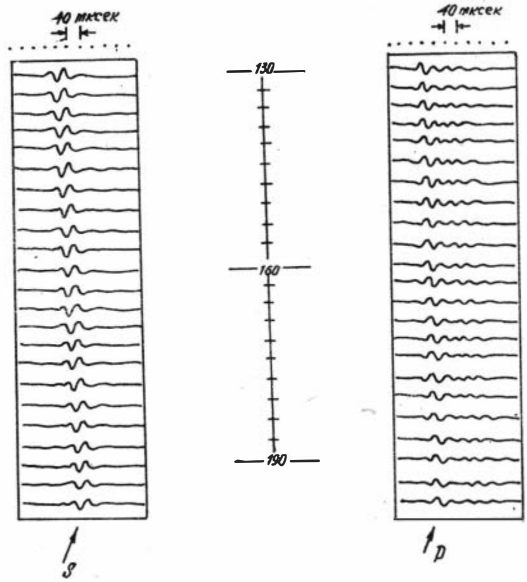
Отклонение экспериментального и теоретического значений рассматриваемого отношения, таким образом, равно около I,5%. Такая погрешность меньше допустимой более, чем на порядок, если за допустимую принять среднюю погрешность измерения амплитуд в сейсмике.

Поступательное движение цилиндра характеризуется также величиной, определяемой формулой (9Iа).

По максимальным значениям диаграмм направленности, определенным из рис. 4 для PS и SP - волн, эта величина оказывается следующей:

$$\frac{max|\vec{U}_{ps}|}{max|\vec{U}_{sp}|} = \frac{10,6}{6,2} = 1,71$$

Для оценки этой же величины по формуле (9Iа) необходимо знание отношения амплитуд падающих продольных и поперечных волн. Опыт по определению указанного соотношения состоял в том, что были зарегистрированы продольные и поперечные волны на сплошном листе плексиглаза без включения в него модели корпуса сейсмоприемника (цилиндра). Их можно при этом считать волнами в "безграничном" пространстве или волнами падающими, первичными (рис. 5).По амплитудным графикам оценено искомое отношение амплитуд продольных и поперечных волн. Оно оказалось равным 2/3. Подставляя его в формулу (9Iа) при $\gamma = 0,58$ для модели вмещающей среды из плексиглаза, получаем теоретическое значение отношения амплитуд обменных волн при падении продольной и поперечной волн, равное I,4I. Это значение отличается от экспериментального приблизительно на 20%. Такая погрешность при определении амплитудных характеристик сейсмических волн допустима. По совпадению экспериментальных и теоретических значений, характеризующих косвенные



Р и с. 5. Опыт по определению соотношения амплитуд продольной и поперечной падающих волн: S - регистрация по схеме УУ поперечных волн; Р - то же по схеме ХХ продольных волн. Рядом с трассами сейсмограмм помечено в сантиметрах расстояние между излучателем и приемником. Марки времени - 40 мксек. Усиление постоянное.

поступательное движение, можно считать, что теоретические формулы достаточно хорошо описывают поступательное движение как при падении продольной, так и поперечной волн.

Вращение цилиндра "содержится" в диаграмме направленности по монотипной поперечной волне и косвенно может быть оценено по формулам (73)-(75) и (91) [1].

Характеристикой вращения может служить смещение в поперечной монотипной волне $\vec{U}_{ss}$ или коэффициент $|S_o|$. Выразим его через коэффициент $|S_2|$, характеризующий поступательное движение при падении поперечной волны, которое, как указывалось выше, хорошо описывается изложенной теорией и, следовательно, этот коэффициент можно считать экспериментально проверенным и извест - ным из теории.

Определяя по экспериментальной диаграмме направленности для монотипной поперечной волны SS (рис. 4) угол $\varphi_o = 55^0$, при котором диаграмма равна нулю, имеем на основании формулы (75):

$$\frac{|S_o|}{|S_2|} = 1,14$$

Если учесть это, а также формулу (91), то получим

$$\frac{max\,|\vec{U}^{(0)}_{ss}|}{max\,|U^{(1)}_{ss}|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|S_o|}{|S_2|} = 5,7\cdot 10^{-1}$$

Это же отношение, рассчитанное по формуле (91) при использованных характеристиках модели $\ell = 1,13\ 10^{-1}$ и $S = 6,63$, оказывается равным $3,76\ 10^{-2}$. Такое значение почти на порядок меньше аналогичного экспериментального отношения.

В дальнейшем будет показано, что такое количественное различие теоретической и экспериментальной характеристик вращения, выразившееся в значительном превышении второй над первой, кроется в неполном соответствии экспериментальной и теоретической модели.

Что же касается сопоставления качественных (неколичественных) свойств рассматриваемой характеристики вращения, то это отношение удовлетворяет условию (73) и, следовательно, диаграмма направленности по монотипной поперечной волне должна иметь в правой полуплоскости один основной положительный и два побочных отрицательных лепестка. Это как раз наблюдается в экспериментальной диаграмме (рис. 4, SS). Следовательно, качественно (неколичественно) теоретическая и экспериментальная характеристики вращения цилиндра совпадают.

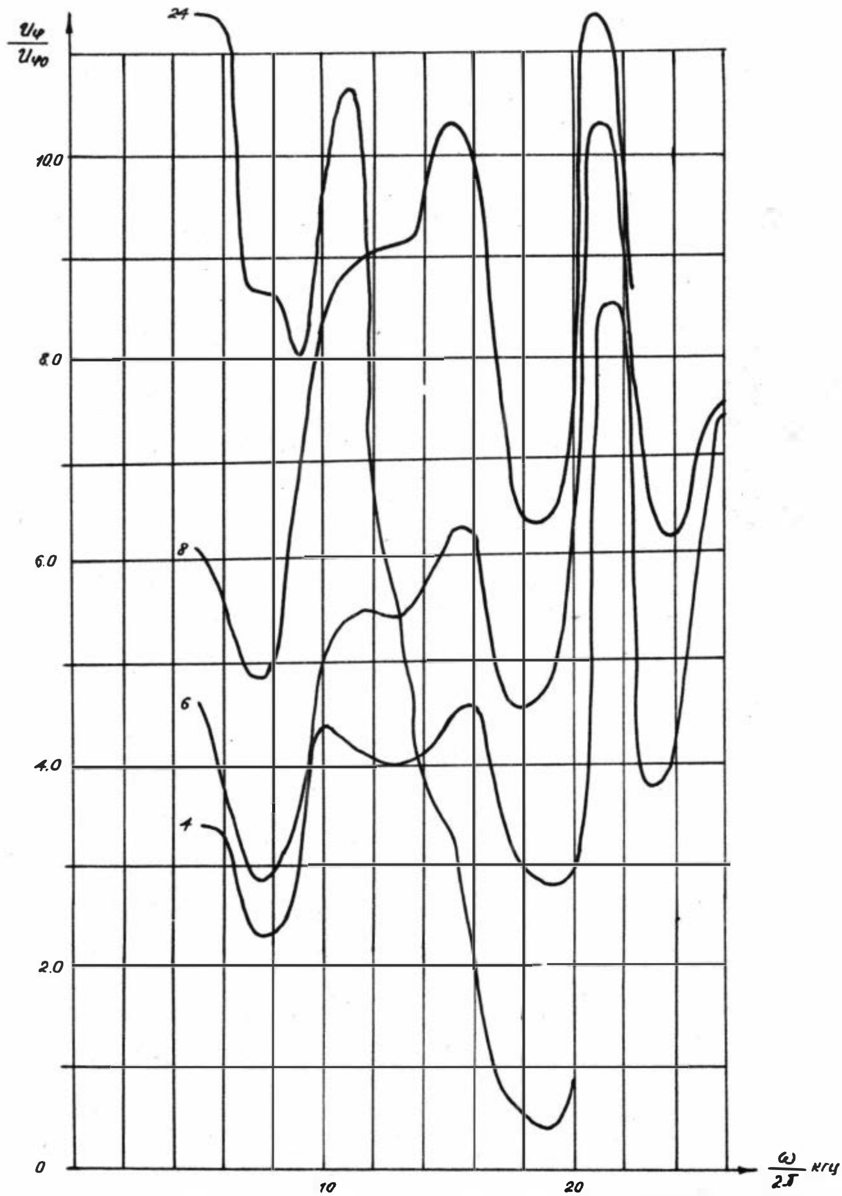
Модуль частотных спектров суммарных волн, полученных при $\varphi = 0$ и регистрации радиальной и тангенциальной компонент смещения для продольной и поперечной падающих волн представлены на рис. 6 и 7 соответственно.

Эксперимент для получения этих графиков состоял в том, что приемник располагался в правой полуплоскости в точке $\varphi = 0$; r = 66 см; излучатель - в левой полуплоскости в точке (π ; 75 см). Изменением через I кгц частоты напряжения, подаваемого на излучатель, определялась амплитуда на выходе приемника для падающих продольных и поперечных волн соответственно.

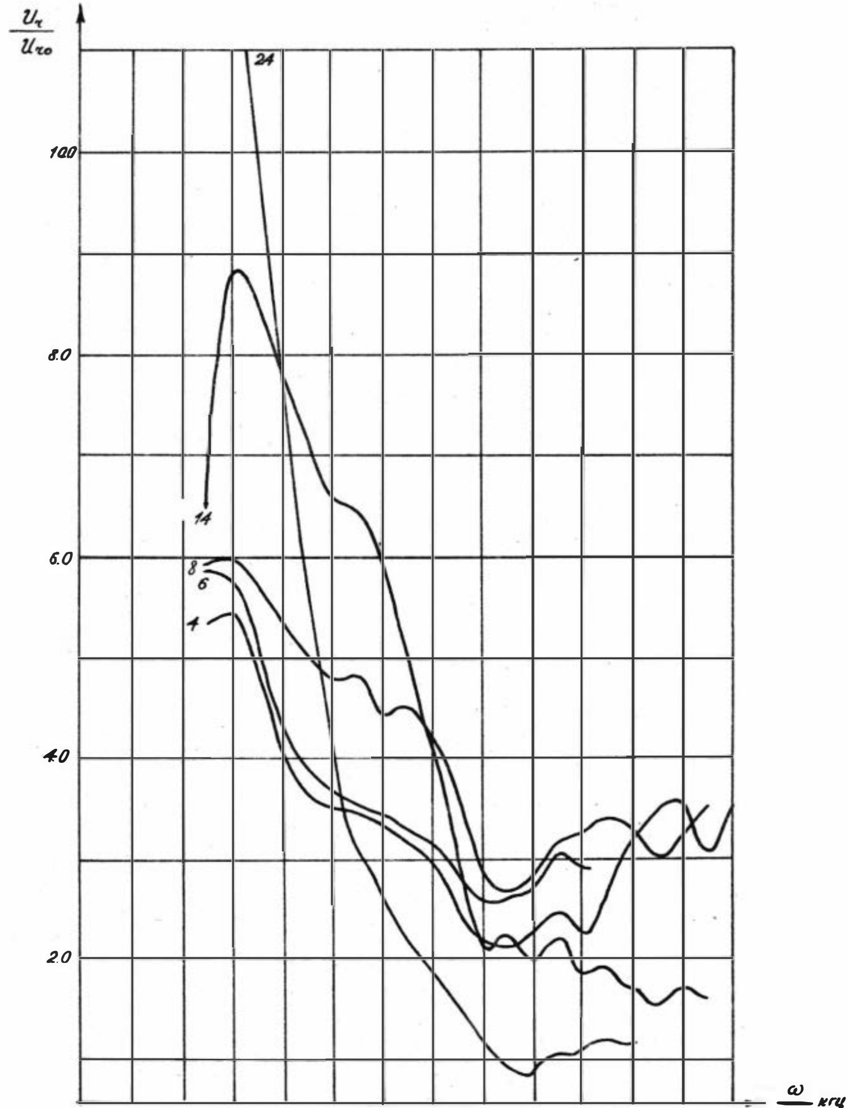
Графики получены в результате деления частотной характеристики тракта "излучатель - модель с цилиндром - приемник" на характеристику для тех же датчиков и модели, но без цилиндра.

Сравнение этих графиков показывает, что при падении поперечной волны график тангенциальной составляющей (рис. 6) имеет более сложный вид (большее число экстремумов, больший "перепад" между предыдущим и последующим экстремумами), чем такой же график (рис. 7) для радиальной составляющей при падении продольной. Такая осложненность первого графика по сравнению со вторым была предсказана выше при теоретических расчетах и объясняется бо́льшим числом волн, интерферирующих в правой полуплоскости при падении поперечной волны по сравнению с продольной.

Таким образом, экспериментальная проверка теоретических расчетов вторичного волнового поля, образовавшегося в результате движения цилиндра при падении на него продольной и поперечной волн, показала, что экспериментальные и теоретические значения величин, характеризующие поступательное движение цилиндра, совпадают количественно в пределах допустимой погрешности. Такие же величины, характеризующие вращательное движение цилиндра, различаются с погрешностью, значительно большей допустимой. Последнее обстоятельство объясняется неполным несоответствием выбранной физической модели моделируемому явлению. Пояснение этому дается ниже.



Р и с. 6. Экспериментальный график модуля частотного спектра тангенциальной компоненты смещения вторичного поля при падении поперечной волны для $\varphi = 0$; $r = 66$ см. Слева около каждой кривой цифрой помечен диаметр цилиндра в миллиметрах.



Р и с. 7. Экспериментальный график модуля частотного спектра радиальной компоненты смещения вторичного поля при падении продольной волны. Остальные данные совпадают с данными рис. 6 .

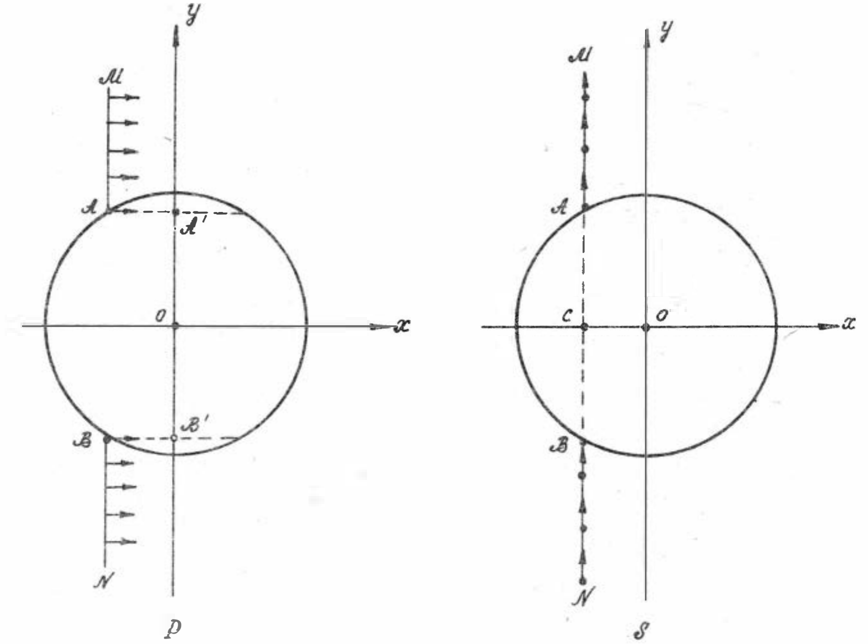
Представления о физико-механичеокой модели движения корпуоа оейсмоприемника в поле упругих волн

При падении на цилиндр упругой волны последняя воздейотвует на поверхность цилиндра вследствие того, что частицы упругой среды на этой поверхности вовлекаются в движение. Такие частицы, находящиеся на границе с поверхностью цилиндра "бомбардируют" её, создавая силы, приводящие цилиндр в движение. При оценке величины указанных сил следует учитывать, что основная их доля приходитоя от "бомбардировки" частицами ореды освещенной части поверхности, хотя нельзя сбрасывать со счетов и поле в зоне тени, которое отличается от нуля даже при неподвижном цилиндре [5].

Указанные силы будут порождать различные виды движения цилиндра при падении различного типа волн.

Элементарный акт бомбардировки в случае падения поперечной волны сводится к тому, что по мере продвижения её фронта в направлении оси ОХ (рио. 8,9) чаотицы среды на границе о цилиндром ударяют по его поверхности по направлению оси ординат. При этом удары частиц, расположенных в верхней и нижней частях поверхности цилиндра отнооительно оои ОХ в любой рассматриваемый момент времени прохождения фронта волны по освещенной поверхности цилиндра направлены в одну и ту же сторону (вверх). В сумме удары этих двух частиц дадут равнодействующую силу, направленную в эту же сторону. Кроме того, эти две элементарные силы создадут момент (по часовой стрелке) относительно оси цилиндра. Направление указанной равнодействующей силы и момента элементарного акта бомбардировки будут оставаться неизменными по мере продвижения поперечной волны по освещенной части поверхности цилиндра.

При передвижении фронта в область тени указанная элементарная сила останется по направлению той же, но вследствие ослабленной интенсивности дифракционной волны по сравнению с падающей, её величина будет меньше, чем в освещенной облаоти. Суммарная сила всех элементарных таких оил освещенной области будет больше суммарной силы в теневой области. Результирующая сила, действующая на цилиндр и приводящая его в поступательное



Р и с. 8. Движение абсолютно жесткого симметричного тела в поле продольных и поперечных Р и поперечных $\mathcal{S}$ волн. $\mathcal{MN}$ – фронт падающей волны.

движение при падении на него поперечной волны, будет представ - лять собой сумму этих двух сил.

Момент элементарной силы в области тени окажется противоположно направленным по сравнению с моментом в освещенной части. Действительно, частицы среды в освещенной части, действуя вверх, создадут момент, направленный по часовой стрелке; такое же действие, направленное вверх в правой полуплоскости (теневая часть), создает момент против часовой стрелки. Последний момент будет по величине меньше первого, т.к. поле в теневой области ослаблено по сравнению с освещенной. При суммировании элементарных моментов по освещенной области получим общий момент, больший по величине, чем общий момент по теневой части. Результирующий момент, действующий на цилиндр при падении поперечной волны, будет представлять собой разность общих моментов, отличную от нуля.

Таким образом, в результате движения чаотиц в волне и взаимодействия их с поверхностью цилиндра при падении поперечной волны возникают активные внешние силы и момент, приводящие цилиндр в поступательное и вращательное движение соответственно. В случае падения продольной волны (рис. 8,Р) элементарный акт бомбардирования сводится к тому, что в верхней и нижней точках поверхности цилиндра относительно оси абсцисс действуют силы, направленные параллельно линии распространения продольной волны. Они дадут равнодействующую силу, отличную от нуля и имеющую указанное направление. Что же касается равнодействующего момента относительно оси цилиндра, то он будет равен нулю, т.к. силы, действующие в верхней и нижней точках поверхности цилиндра создают моменты, одинаковые по величине, но противоположно направленные. Суммируя по освещенной поверхности цилиндра силы и моменты элементарных актов бомбардировки, получим, что в случае падения продольной волны на цилиндр будет действовать только сила, направленная вдоль линии распространения продольной волны. Равнодействующий момент будет равен нулю.

Таким образом, различие движения недеформирующегося цилиндра в упругой среде при падении на него рассматриваемых волн состоит в том, что при падении продольной волны цилиндр совершает только поступательное движение по линии распространения этой волны; при падении поперечной волны цилиндр совершает поступательное движение по линии, перпендикулярной как оси цилиндра, так и направлению движения волны. Кроме этого, он её вращается вокруг собственной оси. Следовательно, по сравнению с продольной волной поперечная волна придает движению цилиндра новое качество - вращение.

Из приведенных выше физических представлений о возникновении сил и моментов, вызывающих движение цилиндра при падении на него упругих волн, можно попытаться объяснить различие между физической моделью, примененной в эксперименте, и той, которая заложена в физико-математической модели изучаемого явления. Различие между этими двумя моделями состоит в том, что в первой есть разрез; во второй - нет и не должно быть. Этот разрез как раз искажает в сильной мере вторичные волны от поступательного движения. Действительно, фронт волны, дойдя до разреза, отразится от него в левую полуплоскость и, следовательно, в правой полуплоскости не будет ни падающей, ни дифрагированной волны. Проведя такие же рассуждения относительно возникновения сил и моментов, как это было сделано выше, получим, что суммарные моменты от элементарных бомбардировок частиц при падении и "отражении" поперечной волны будут одинакового знака. Результирующий момент поэтому будет суммой этих двух суммарных моментов, а не разностью, как это было при отсутствии разреза. Увеличенный таким образом момент сильнее заставит вращаться цилиндр и, следовательно, вторичная поперечная волна от вращения увеличится по сравнению с такой же волной при отсутствии разреза. Поэтому рассмотренный выше показатель вращения в форме коэффициента $\mathcal{S}$ будет завышенным по сравнению с его теоретическим значением [1], соответствующим модели без разреза. Это как раз и отмечалось при обсуждении результатов проведенного эксперимента.

Результирующая сила при падении как поперечной, так и продольной волны как и при отсутствии разреза, будет представлять собой сумму элементарных сил от падающей и "отраженной" от разреза волн и, следовательно, качественно не изменится по сравнению с такой же силой при отсутствии разреза. Поэтому поступательное движение цилиндра, вызванное такими одинаковыми силами, будет одинаковым и, следовательно, показатели вторичного поля от поступательного движения в модели с разрезом не будут искажены по сравнению с такими показателями при отсутствии разреза[x)]. Этим объясняется хорошее количественное совпадение экспериментальных (модель с разрезом) и теоретических (модель без разреза) показателей поступательного движения.

Итак, применение модели с разрезом не изменяет показатели поступательного движения, завышая такие показатели для вращения цилиндра.

Последнее обстоятельство дало возможность экспериментально обнаружить вращение цилиндра при падении на него поперечной волны, несмотря на большой мешающий фон, образующийся от поступательного движения такого цилиндра. Кроме этого, применение модели с разрезом позволило выделить вторичное поле на фоне падающих волн и, следовательно, обнаружить и контролировать движение цилиндра (как поступательное, так и вращательное).

Движение корпуса сейсмоприемника несимметричной формы в поле упругих волн

Из предыдущего рассмотрения следует, что вращение корпуса сейсмоприемника (без учета внутреннего его устройства) будет только при падении на него поперечной волны. Этот вывод сделан при исследовании корпуса симметричной (цилиндрической) формы. Представляется интересным вопрос: будет ли вращение корпуса только при падении поперечной волны или оно также появится при падении продольной волны, если корпус сейсмоприемника будет несимметричной формы, например, не обладающей осевой симметрией?

Из физических представлений, изложенных выше следует, что вращение будет при падении как поперечной, так и продольной волн. Действительно, в последнем случае элементарные силы, действующие в верхней и нижней (относительно оси OX) частях границы, совпадающих с формой корпуса сейсмоприемника, создадут неравные элементарные моменты. Это неравенство возникает вследствие неравенства плеч рассматриваемых сил относительно, например, центра масс корпуса сейсмоприемника. Только в этом случае, когда эти плечи одинаковы, что, например, выполнимо при форме корпуса симметричной относительно направления распространения па-

---

x) Вопрос о влиянии "свободной" границы разреза на такие показатели, измеренные вблизи границы, рассматриваются при обсуждении результатов эксперимента в поле.

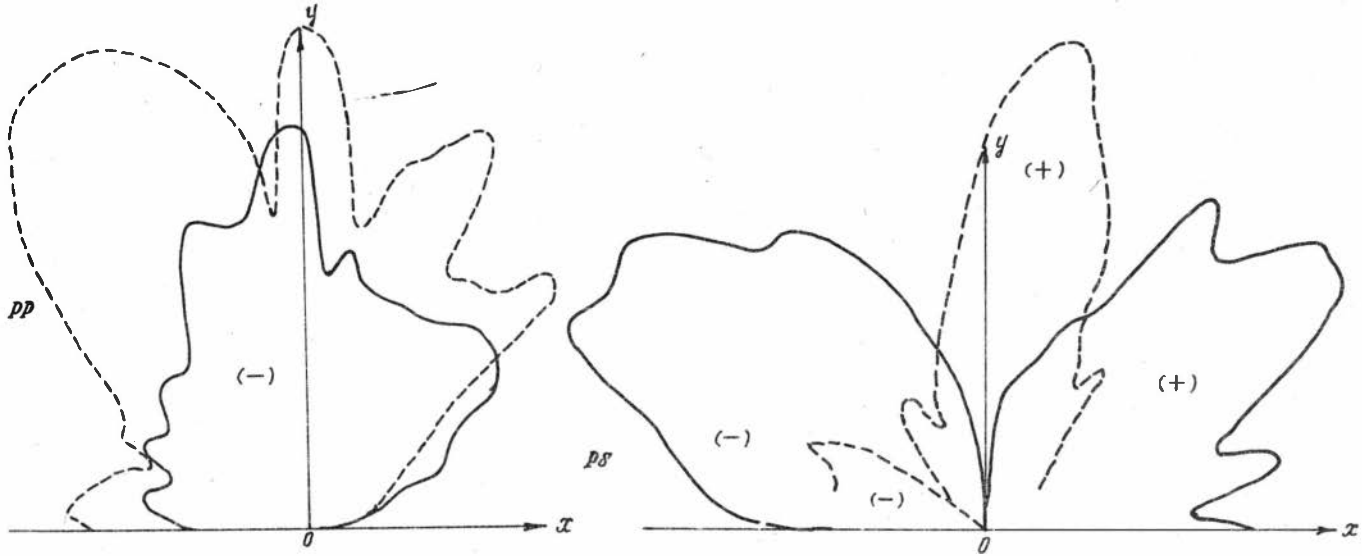
дающей волны, указанные элементарные моменты равны друг другу. Неравенство моментов создаст разность моментов, отличную от нуля. Суммирование таких элементарных разностей по поверхности корпуса приведет к появлению результирующего момента, также отличного от нуля. Появление такого результирующего момента эквивалентно вращению корпуса. Индикатором вращения могут служить поперечные волны, возникшие от этого движения. Для несимметричной формы корпуса рассмотренные поступательные движения при падении обоих типов волн, а также - вращения при падении поперечной волны не вносят качественных отличий в движение по сравнению с движением корпуса симметричной формы.

Итак, при падении упругих волн на корпус сейсмоприемника несимметричной формы относительно направления распространения волны появляется новое качество - вращение корпуса при падении как поперечной, так и продольной волн - по сравнению с симметричной формой корпуса.

Эксперимент по иллюстрации этого положения состоит в следующем. Вместо модели кругового цилиндрического корпуса сейсмоприемника в предыдущем эксперименте, использовался корпус несимметричной формы. В качестве модели такого корпуса был использован прямоугольный цилиндр с одной стороной, равной $\frac{d}{\lambda_p} = 0{,}5$ и $\frac{d}{\lambda_p} = 0{,}1$ и второй и четыре раза меньшей первой.

По методике предыдущего эксперимента снимались диаграммы направленности такого цилиндра по монотипным и обменным волнам при двух положениях цилиндра; при первой установке большее ребро прямоугольника располагалось перпендикулярно линии распространения падающей волны; при втором - наклонно под углом 45^0 к этой линии. Иными словами - первая установка соответствовала симметричной форме корпуса сейсмоприемника, относительно направления распространения падающей волны; вторая - несимметричной.

На рис. 9 представлены диаграммы направленности такого прямоугольного цилиндра для первой (на чертеже сплошная линия) и второй (пунктир) его установок при падении продольной волны. Как видно из рисунка, диаграммы направленности по монотипной PP и обменной PS волнам для симметричного корпуса (в виде прямоугольного цилиндра) качественно совпадают с аналогичными диаграммами для симметричного кругового цилиндра (сравни рис. 9 и 4), именно:



Р и с. 9. Диаграмма направленности симметричного (сплошная линия) и несимметричного (пунктир) корпуса сейсмоприемника при падении продольной волны.

по монотипной РР-волне диаграмма направленности имеет один однополярный (одного знака) лепесток; по обменной PS -волне имеет два лепестка различного знака. Для несимметричного корпуса диаграмма направленности по монотипной волне качественно не изменяется по сравнению с корпусами симметричной формы (один однополярный лепесток), но существенно изменяется по обменной волне: из двух разнополярных лепестков при нулевом значении на линии распространения падающей волны диаграмма направленности для несимметричного корпуса превращается в один основной однополярный лепесток с максимумом, расположенным приблизительно на том месте, где располагался минимум для симметричного корпуса.

Из сказанного следует, что диаграмма направленности для несимметричного корпуса существенно изменилась только по поперечным волнам в теневой части сейсмического поля. Такая особенность может быть объяснена тем, что корпус несимметричной формы излучает по сравнению с симметричным корпусом дополнительную энергию поперечных волн, обеспечивающую появление максимума диаграммы направленности по линии распространения падающей продольной волны.

Такой осооенностью обладает диаграмма направленности по поперечным волнам для источника, движущегося как поступательно, так и вращающегося при этом.

Отсюда можно сделать вывод о том, что при падении продольной волны корпус сейсмоприемника несимметричной формы относительно линии распространения падающей волны, кроме поступательного движения, совершает вращение.

ЛИТЕРАТУРА

I. Аверко Е.М. Вторичные волны от движения жесткого тела в поле первичных упругих волн. Настоящий сборник.

2. Аверко Е.М. Методика и некоторые результаты сейсмического моделирования. Сб. "Методика сейсморазведки", Наука, 1965.

3. Аверко Е.М. Экспериментальное определение фронта волны. Частотный анализатор.- Геология и геофизика, 1962. № 3

4. Аверко Е.М., Голосов В.П., Куликов В.М. К методике сейсмического моделирования поперечных волн. Сб. "Поперечные и обменные волны в сейсморазведке", Недра, 1967.

5. Фриндландер Ф. Звуковые импульсы - ИЛ.,М.,1962, стр. 174 -189.

6. Jilber J., Knoppoff L. Difraction of elastic waves by the core of the Earth.- Bull. Sucm. Soc. of a A.V. 51, 1961, N 1, 35-49.

7. Wihte H.M. Elastic Waves scattering at a cylindrical des continuity in a solid - J. Acoust. Soc. Amer, 30, N 8, 1958.

Е.М. Аверко

ДВИЖЕНИЕ ПОЛОГО ШАРА В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ

В задаче выделения полезной поперечной волны на фоне мешающей продольной, а также в других задачах физики и геофизики возникает необходимость рассмотрения движения недеформирующегося шара в поле поперечной волны.

В настоящей статье рассматривается движение сферы в поле стационарной плоской волны, а также вторичное поле, возникающее от этого движения. На основе этого составляется уравнение вращения полого шара в поле поперечной волны и рассматриваются некоторые свойства этого вращения для длинных волн.

§ I. Движение сферы в поле плоской поперечной волны

Пусть на абсолютно жесткую сферу падает плоская поперечная упругая волна,

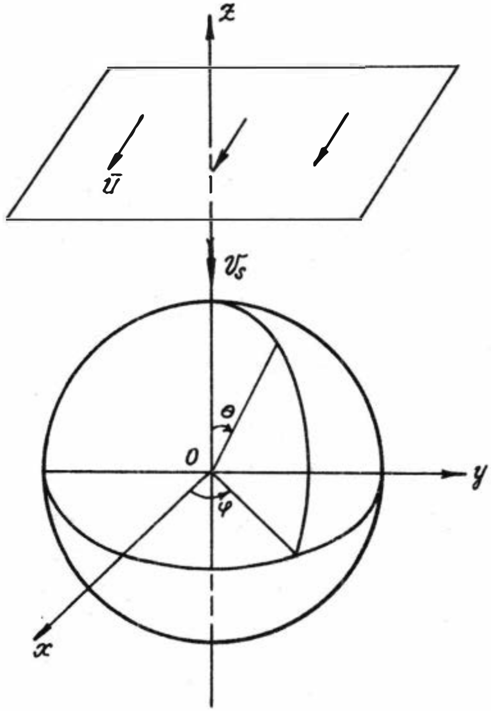
$$\vec{U}^{(1)} = Ue^{-i(\omega t + k_s z)}\vec{i} \qquad (I)$$

вектор смещения в которой направлен по оси OX прямоугольной системы координат с началом в центре сферы, направление распространения волны пусть совпадает с отрицательным направлением оси Oz (рис. I). Определим вид движения такой сферы от падения на неё указанной волны, а также вторичные волны, образовавшиеся в окружающей сферу упругой среде при взаимодействии волны со сферой.

Уравнение движения упругой среды записывается в виде:

$$\frac{1}{k^2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{U} - \frac{1}{k_s^2}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{U} + \vec{U} = 0 \qquad (2)$$

где $k_p = \dfrac{\omega}{v_p}$; $k_s = \dfrac{\omega}{v_s}$ - волновые числа продольных и поперечных волн соответственно; $\vec{U}$ - вектор стационарного смещения любой точки упругой среды. Граничное условие выберем в



Р и с. I. К взаимодействию плоской попсречной волны со сферой.

виде жесткого контакта поверхности сферы с упругой средой. При этом вектор смещения в среде в точках на границе должен быть равным вектору смещения этой границы в этих же точках. Предположим, что при падении поперечной волны на недеформирующуюся сферу, последняя передвигается не только поступательно, но и вращается при этом. Из физических соображений ясно, что при падении рассматриваемой волны и выбранной системы координат поступательное движение возможно по оси OX, а вращение - вокруг оси OY. При этом граничные условия запишутся в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
U_r &= U_0 \sin\theta \sin\varphi \\
U_\theta &= U_0 \cos\theta \cos\varphi + \Omega r_0 \cos\varphi \\
U_\varphi &= -U_0 \sin\varphi - \Omega r_0 \cos\theta \sin\varphi
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где U_r , U_θ , U_φ - проекции вектора $\vec{U}$ в сферической системе координат, взятые на поверхности рассматриваемой сферы; Ω - угловое смещение сферы вокруг оси; U_0 - смещение оси OX при поступательном движении сферы.

Представим общее решение уравнения (2) в следующем виде:

$$\vec{U} = \vec{U}^{(1)} + \vec{U}^{(2)} \qquad (4)$$

где $\vec{U}^{(2)}$ - вторичное ("отраженное") поле, образовавшееся при взаимодействии падающей волны $\vec{U}^{(1)}$ со сферой.

Вектор $\vec{U}^{(2)}$, удовлетворяющий уравнению движения упругой среды, записывается в следующем виде [5, 4]:

$$
\begin{aligned}
&\vec{U}^{(2)} = \vec{U}_p^{(2)} + \vec{U}_s^{(2)}; \quad \vec{U}_s^{(2)} = \vec{U}_{s1}^{(2)} + \vec{U}_{s2}^{(2)} \\
&\vec{U}_p^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_{mn} \vec{l}_{mn}^{\,7} \\
&\vec{U}_{s1}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_{mn} \vec{m}_{mn}^{\,7} \\
&\vec{U}_{s2}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} b_{mn} \vec{n}_{mn}^{\,7}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

где обозначено:

$$\begin{cases} \vec{l}_{mn}^{\,\mp} = \left[\dfrac{\partial h_{(n)}^{(1)}(z_p)}{\partial r} P_n^m(\mu) {\cos \atop \sin} m\varphi\right]\vec{e}_r + \left[\dfrac{h_n^{(1)}(z_p)}{r} \cdot \dfrac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} {\cos \atop \sin} m\varphi\right]\vec{e}_\theta \mp \\ \mp \left[\dfrac{m h_n^{(1)}(z_p)}{r \sin\theta} P_n^m(\mu) {\sin \atop \cos} m\varphi\right]\vec{e}_\varphi \\ \vec{m}_{mn} = \mp\left[\dfrac{m h_{(n)}^{(1)}(z_s)}{\sin\theta} P_n^m(\mu) {\sin \atop \cos} m\varphi\right]\vec{e}_\theta - \left[h_n^{(1)}(z_s) \dfrac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} {\cos \atop \sin} m\varphi\right]\vec{e}_\varphi \\ \vec{n}_{mn}^{\,\mp} = \left[\dfrac{n(n+1)}{z_s} h_n^{(1)}(z_s) P_n^m(\mu) {\cos \atop \sin} m\varphi\right]\vec{e}_r + \left[\dfrac{1}{z_s}\dfrac{\partial}{\partial r}(r h_n^{(1)}(z_s)) \dfrac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} {\cos \atop \sin} m\varphi\right]\vec{e}_\theta \mp \\ \mp\left[\dfrac{m}{z_s \sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial r}(r h_n^{(1)}(z_s)) P_n^m(\mu) {\sin \atop \cos} m\varphi\right]\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

$$n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \tag{6}$$

$$\mu = \cos\theta; \quad z_p = k_p r; \quad z_s = k_s r; \quad m \le n$$

Величины a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} - некоторые неопределенные коэффициенты, зависящие от значков m и n. Верхние индексы минус и плюс ($\mp$) соответствуют знакам минус и плюс, а также расположению функций $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ в правой части последних формул.

В таком решении учтено, что согласно принципу излучения при временной зависимости вида $e^{-j\omega t}$ цилиндрические функции следует брать в виде функций

$$h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}(z) \tag{7}$$

а сферические - в форме $P_n^m(\mu)$, где $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ и $P_n^m(\mu)$ функции Ганкеля первого рода и присоединенные полиномы Лежандра соответственно.

Разлагая падающую волну следующим образом [5]:

$$\vec{U}^{(1)} = e^{-j\omega t} U \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{m}_{1n}^{\,+} + j\vec{n}_{m}^{\,-}\right] \tag{8}$$

и записывая это разложение, а также решение (5) в компонентах сферической системы координат, получаем граничное условие в следующем виде:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&U_0 \sin\theta\cos\varphi = a_{00}\frac{\partial h_0^{(1)}(z_p)}{\partial r}\frac{\cos}{\sin}\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{U(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\cdot j\,\frac{n(n+1)}{z_s} j_n(z_s) P_n^{(1)}(\mu)\cos\varphi + \\
&+\sum_{m=0}^{n} a_{mn}\frac{\partial h_n^{(1)}}{\partial r}P_n^m(\mu)\frac{\cos}{\sin}m\varphi + b_{mn}\frac{n(n+1)}{z_s}h_n^{(1)}(z_s)P_n^m(\mu)\frac{\cos}{\sin}m\varphi\Big\} \\
&U_0\cos\theta\cos\varphi + \Omega r_0\cos\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{U(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\Big[\frac{j_n(z_s)}{\sin\theta}P_n'(\mu)\cos\varphi + \\
&+\frac{j}{z_s}\frac{\partial}{\partial r}\left[r j_n(z_s)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}P_n'(\mu)\cos\varphi\Big] + \sum_{m=0}^{n} a_{mn}\frac{h_n^{(1)}(z_p)}{r}\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\varphi \mp \\
&\mp c_{mn}\frac{m h_n^{(1)}(z_s)}{\sin\theta}P_n^m(\mu)\frac{\sin}{\cos}m\varphi + b_{mn}\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial r}\left[r h_n^{(1)}(z_s)\right]\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\varphi\Big\} \\
&-U_0\sin\varphi - \Omega r_0\cos\theta\sin\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{U(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\Big[-j_n(z_s)\frac{\partial P_n'(\mu)}{\partial\theta}\sin\varphi - \\
&-\frac{j}{z_s\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r j_n(z_s)\right)P_n'(\mu)\sin\varphi\Big] + \sum_{m=0}^{n}\pm a_{mn}\frac{m h_n^{(1)}(z_p)}{r\sin\theta}P_n^m(\mu)\frac{\sin}{\cos}m\varphi - \\
&-c_{mn}h_n^{(1)}(z_s)\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\varphi \mp b_{mn}\frac{m}{z_s\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r h_n^{(1)}(z_s)\right)P_n^m(\mu)\frac{\sin}{\cos}m\varphi
\end{aligned}
\right.
$$

при $z_s = k_s r_0 \equiv e$; $z_p = k_p r_0 \equiv k$.

Эта система удовлетворяется при

$$m = n = 1 \tag{I0}$$

и оказывается эквивалентной следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&U_0 = 3U\frac{j(e)}{e} + a_{11}\frac{\partial h_1^{(1)}(k)}{\partial r} + b_{11}\frac{2}{e}h_1^{(1)}(e) \\
&U_0 = \frac{3}{2}U\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r j_1(e)\right] + a_{11}\frac{h_1^{(1)}(k)}{r} + b_{11}\frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial r}\left[r h_1^{(1)}(e)\right] \\
&\Omega r_0 = -\frac{3}{2}jU\cdot j_1(e) + c_{11}h_1^{(1)}(e)
\end{aligned}
\tag{II}
$$

При остальных значениях m и n система (9) не зависит от величины U_0 и Ω и переходит в систему, в которой левые части уравнений равны нулю, а правые остаются без изменения по сравнению с (9) для всех знаков m и n, кроме единицы. Независимость такой системы от U_0 и Ω означает, что коэффициенты b_{mn}; a_{mn}; c_{mn} ($m \neq$ I, $n \neq$ I) определяют вторичное поле как функцию от первичного при неподвижной сфере ($U_0 = \Omega = 0$).

Коэффициенты a_{11}, b_{11}, c_{11}, определенные уравнениями (II), зависят от U_0 и Ω поэтому они определяют вторичное поле как функцию от первичного движения сферы при падении на неё первичных поперечных волн.

Первые два уравнения системы (II) составляют полную систему для двух коэффициентов a_{11} и b_{11}. Её решение даст значение этих коэффициентов, которые будут зависить от падающего первичного поля и от поступательного движения сферы (U_0), но не от вращательного: они не зависят и от величины Ω. Поэтому вторичное поле, определенное этими коэффициентами по формулам (5), будет обусловлено поступательным движением сферы при падении на неё поперечной волны.

Вторичное поле, обусловленное вращением сферы при падении на неё поперечной волны, определяется коэффициентом c_{11}. Он находится из последнего уравнения системы (II) и оказывается равным следующему:

$$c_{11} = \frac{\Omega r_0 + \frac{3}{2} j u \cdot j_1(e)}{h_1^{(1)}(e)} \tag{I2}$$

При этом поле, возникшее от вращения сферы, определяется равенством

$$\vec{U}_{s1}^{(2)} = c_{11} h_1^{(1)}(z_s)[\cos\varphi\, \vec{e}_\theta - \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_\varphi] \tag{I3}$$

Таким образом, показано, что при падении поперечной волны на недеформирующуюся (абсолютно жесткую) сферу, жестко контактирующую всей своей поверхностью с упругой средой, сфера движется поступательно в направлении смещения частиц в падающей волне, и при этом вращается. Вектор вращения направлен перпендикулярно как вектору смещения частиц в падающей волне, так и направлению её распространения. Волна, образующаяся от такого вращения представляет собой поперечную волну, вектор смещения которой определен равенством (I3). Волны, образующиеся от поступательного движения сферы при падении на неё поперечной волны могут быть подсчитаны по формулам, приведенным в настоящем параграфе. Вторичные волны, образующиеся от неподвижной сферы, также могут быть подсчитаны по формулам этого параграфа при $m \neq 1$, $n \neq 1$.

В дальнейшем нас будет интересовать только вращение сферы при падении на неё поперечной волны.

§ 2. Вычисление момента, действующего на сферу при падении на неё плоской поперечной волны

Нам потребуется аналитическое выражение момента, действующего на сферу при падении на неё плоской поперечной волны. Вычислим его на основе расчетов предыдущего параграфа.

Падение поперечной волны вызывает вращение сферы и – как следствие этого – поле поперечных волн, смещение в которых дается равенством (I3). Проектируя этот вектор смещения на сферические оси координат, имеем:

$$\begin{cases} U_r = 0 \\ U_\theta = C_{11} h_1^{(1)}(z_s) \cos\varphi \\ U_\varphi = -C_{11} h_1^{(1)}(z_s) \sin\theta \sin\varphi \end{cases} \tag{I4}$$

При использовании этих выражений вычисляем деформированное состояние среды в любой её точке вне сферы:

$$\begin{cases} e_{rr} = e_{\theta\theta} = 0 \\ e_{\varphi\varphi} = \dfrac{C_{11} h_1^{(1)}(z_s)}{r} (\operatorname{ctg}\theta - 1) \cos\varphi \\ e_{r\varphi} = C_{11} \left[\dfrac{\partial h_1^{(1)}(z_s)}{r} - \dfrac{h_1^{(1)}(z_s)}{\partial r} \sin\theta \sin\varphi \right. \\ e_{r\theta} = C_{11} \left[-\dfrac{\partial h_1^{(1)}(z_s)}{\partial r} - \dfrac{h_1^{(1)}(z_s)}{r} \right] \cos\varphi \\ e_{\varphi\theta} = -C_{11} \dfrac{h_1^{(1)}(z_s)}{r} \cdot \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \end{cases} \tag{I5}$$

а также напряженное её состояние:

$$
\begin{cases}
\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = \lambda \dfrac{C_n h_1^{(1)}(Z_1)}{r} (ctg\,\theta - 1)\cos\varphi \\
\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \dfrac{C_n h_1^{(1)}(Z_1)}{r} (ctg\,\theta - 1)\cos\varphi \\
\tau_{r\varphi} = \mu e_{r\varphi} \\
\tau_{r\theta} = \mu e_{r\theta} \\
\tau_{\varphi\theta} = \mu e_{\varphi\theta}
\end{cases}
\qquad (I6)
$$

$\lambda; \mu$ – упругие постоянные Ламэ.

Нормалью к площадке поверхности сферы является радиус-вектор точки, где расположена эта площадка. Поэтому на основании условий Коши для границы тела с упругой средой на такую элементарную площадку будут действовать силы, направленные по координатным осям прямоугольной системы координат и представляющие собой проекции напряжений в рассматриваемой точке поверхности сферы на эти оси. Очевидно, что на эту поверхность будут действовать только напряжения, содержащие в своих индексах значок " r ".Все остальные напряжения не действуют на поверхность и уравновешиваются упругой средой.

Проектируя указанные напряжения на оси прямоугольной системы координат, имеем:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dP_{xr}}{d\Sigma} &= \sigma_{rr}\sin\theta\cos\varphi - \tau_{r\varphi}\sin\varphi + \tau_{r\theta}\cos\theta\cos\varphi \\
\frac{dP_{yr}}{d\Sigma} &= \sigma_{rr}\sin\theta\sin\varphi + \tau_{r\varphi}\cos\varphi + \tau_{r\theta}\cos\theta\sin\varphi \\
\frac{dP_{zr}}{d\Sigma} &= \sigma_{rr}\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta
\end{aligned}
\right\}
\qquad (I7)
$$

При рассматриваемом вращении сферы вокруг оси ОУ будет действовать только момент, направленный по этой же оси. Моменты относительно остальных осей будут, очевидно, равными нулю.Вычитая момент относительно оси ОУ, учтем, что плечи сил $\dfrac{dP_{xr}}{d\Sigma}$ и $\dfrac{dP_{zr}}{d\Sigma}$ равны $r\cos\theta$ и $r_0\sin\theta\cos\varphi$ соответственно. Поверхностная плотность искомого момента при этом будет следующей:

$$\frac{dM_y}{d\Sigma} = (\sigma_{rr} \sin\theta \cos\varphi - \tau_{r\varphi} \sin\varphi + \tau_{r\theta} \cos\theta \cos\varphi)\, r_0 \cos\theta -$$

$$- (\sigma_{rr} \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta)\, r_0 \sin\theta \cos\varphi) = \tag{18}$$

$$= r_0 [\tau_{r\theta} \cos\varphi - \tau_{r\varphi} \cos\theta \sin\varphi]$$

Интегрируя последнее равенство по поверхности сферы и учитывая, что

$$d\Sigma = r_0^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta,$$

получаем следующее значение искомого момента

$$M_y = 2\pi r_0^3 \mu C_{II} \cdot \left[\frac{\partial h_1^{(1)}(e)}{\partial r_0} - \frac{h_1^{(1)}(e)}{r_0} \right], \tag{19}$$

где коэффициент C_{II} определен равенством (I2)

Учтем следующие соотношения:

$$h_1^{(1)}(e) = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} H_{3/2}^{(1)}(e) = -\frac{1}{e}\left(1 + \frac{j}{e}\right) e^{je}$$

$$\frac{\partial h_1^{(1)}(e)}{\partial r_0} - \frac{h_1^{(1)}(e)}{r_0} = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \left[e H_{1/2}^{(1)}(e) - 3 H_{3/2}^{(1)}(e) \right] =$$

$$= \frac{1}{r_0} \left[\frac{3}{e} - j\left(1 - \frac{3}{e^2}\right) \right] e^{je} \tag{20}$$

$$j_1(e) = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} J_{3/2}(e) = -\frac{1}{e}\left(\frac{\sin e}{e} - \cos e \right)$$

При этом искомый момент окончательно определяется следующим равенством:

$$M_y = -2\pi r_0^2 e \mu \frac{\frac{3}{e} - j\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)}{1 + \frac{j}{e}} \left[\Omega r_0 + \frac{3}{2} u \frac{j}{e} \left(\frac{\sin e}{e} - \cos e \right) \right] \tag{21}$$

§ 3. Уравнение вращения полого шара в поле поперечных волн

Пусть жесткий полый шар или любое недеформирующееся тело, имеющее сферическую внешнюю поверхность, жестко скреплены с упругой средой всей такой поверхностью. На тело пусть действует некоторый внешний активный момент $\vec{M}_n$. При падении на тело поперечной волны оно вращается и при этом испытывают сопротивление среды в виде реактивного момента $\vec{M}_r$. Учет реактивного момента позволяет рассматривать движение как вращение свободного тела.

Из динамики твердого тела известно, что такое вращение описывается следующими динамическими уравнениями Эйлера:

$$
\begin{aligned}
&J_{xx}\frac{d\mathring{\Omega}_x}{dt}+(J_{zz}-J_{yy})\mathring{\Omega}_y\mathring{\Omega}_z=M_{rx}+M_{nx}\\
&J_{yy}\frac{d\mathring{\Omega}_y}{dt}+(J_{xx}-J_{zz})\mathring{\Omega}_z\mathring{\Omega}_x=M_{ry}+M_{ny}\\
&J_{zz}\frac{d\mathring{\Omega}_z}{dt}+(J_{yy}-J_{xx})\mathring{\Omega}_y\mathring{\Omega}_x=M_{rz}+M_{nz}
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

при условии, что начало прямоугольной системы координат, жестко связанной с вращающимся телом, помещено в центре масс этого тела, а за оси координат приняты главные оси инерции тела [45].

Здесь обозначены: J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – осевые моменты инерции относительно главных осей: M_{rx}, M_{ry}, M_{rz} и M_{nx}, M_{ny}, M_{nz} – проекции на главные оси инерции моментов $\vec{M}_r$ и $\vec{M}_n$ соответственно; $\mathring{\Omega}_x$, $\mathring{\Omega}_y$, $\mathring{\Omega}_z$ – проекции мгновенной угловой скорости на эти же оси.

Динамические уравнения Эйлера, как известно, должны быть дополнены кинематическими уравнениями Эйлера:

$$
\begin{aligned}
&\mathring{\Omega}_x=\mathring{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\mathring{\theta}\cos\varphi\\
&\mathring{\Omega}_y=\mathring{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\mathring{\theta}\sin\varphi\\
&\mathring{\Omega}_z=\mathring{\psi}\cos\theta+\mathring{\varphi}
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

где φ, ψ, θ – углы Эйлера.

Для полого однородного шара имеем:

$$\mathcal{J}_{xx} = \mathcal{J}_{yy} = \mathcal{J}_{zz} = \mathcal{J}_0 \tag{24}$$

С учетом условия (24) динамические уравнения Эйлера упрощаются и записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 \frac{d^2\Omega_x}{dt^2} &= \mathcal{M}_{\tau x} + \mathcal{M}_{nx} \\ \mathcal{J}_0 \frac{d^2\Omega_y}{dt^2} &= \mathcal{M}_{\tau y} + \mathcal{M}_{nx} \\ \mathcal{J}_0 \frac{d^2\Omega_z}{dt^2} &= \mathcal{M}_{\tau z} + \mathcal{M}_{nz} \end{aligned} \tag{25}$$

Переходя к спектральным представлениям, получаем эти же уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} -\mathcal{J}_0 \omega^2 \Omega_x &= \mathcal{M}_{\tau x} + \mathcal{M}_{nx} \\ -\mathcal{J}_0 \omega^2 \Omega_y &= \mathcal{M}_{\tau y} + \mathcal{M}_{ny} \\ -\mathcal{J}_0 \omega^2 \Omega_z &= \mathcal{M}_{\tau z} + \mathcal{M}_{nz} \end{aligned} \tag{26}$$

Как показано в § I, вращение сферы, вызванное падающей поперечной волной, происходит вокруг оси, занимающей постоянную ориентацию в пространстве и совпадающую с перпендикуляром как к вектору смещения в падающей поперечной волне, так и к направлению её распространения. За положительное направление такой оси принимается направление, со стороны которого вращение первого вектора до совпадения с положительным направлением распространения волны происходит кратчайшим путем против часовой стрелки. Выберем эту ось как ось OZ подвижной системы координат, связанный с вращающимся сферическим корпусом.

Такой выбор направления оси OZ подвижной системы, связанной с вращающимся телом, эквивалентен тому, что эта ось совмещается с осью OY неподвижной системы координат, введенной в § I. При этом будет выполнено следующее равенство:

$$\mathcal{M}_{\tau z} = \mathcal{M}_y \tag{27}$$

$$\mathcal{M}_{\tau x} = \mathcal{M}_{\tau y} = 0 \tag{28}$$

где $\mathcal{M}_y$ определено равенством (2I).

В предыдущем параграфе при рассмотрении вращения сферы вокруг одной оси предполагалось, что сфера вращается только под действием падающей поперечной волны, никакие дополнительные моменты, приложенные к сфере, не вращают её относительно остальных осей. Чтобы выполнить это условие, необходимо, чтобы сумма всех таких моментов внешних сил относительно каждой из этих осей была бы равна нулю. С учетом равенства (28) это означает следующее:

$$\mathcal{M}_{nx} = \mathcal{M}_{ny} = 0 \tag{29}$$

и, следовательно,

$$\Omega_x = \Omega_y = 0 \tag{30}$$

Условие (30) сводит кинеeатические уравнения Эйлера к виду:

$$\Omega_z = \dot{\varphi} \tag{31}$$

С учетом равенства (29) и (30) динамические уравнения Эйлера заменяются одним уравнением

$$\left[-J\omega^2 + 2\pi r_0^3 e\mu \frac{\frac{3}{e} - j\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)}{1 + \frac{j}{e}}\right]\Omega_z = \tag{32}$$

$$= -3\pi r_0^2 \mu \frac{\frac{3}{e} - j\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)}{1 + \frac{j}{e}} \cdot \left(\frac{\sin e}{e} - \cos e\right) \cdot jU + \mathcal{M}_{nz}$$

Введем следующие обозначения:

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho$$

$$J_n \equiv J_0\left[1 + \frac{15}{4} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^5} \cdot \frac{\left(\frac{3}{e^2} - 4\right) + je}{1 + e^2}\right.$$

$$\beta(e) = \frac{9}{4} e\left(\frac{\sin e}{e} - \cos e\right) \cdot \frac{-e + j\left(\frac{3}{e^2} - 4\right)}{1 + e^2} \tag{33}$$

где ρ , ρ_0 - плотность среды и шара, r_1 - внутренний радиус полого шара.

При этом уравнение движения корпуса записывается в простой форме:

$$-J_n\omega^2\Omega_z r_0 - m_0 V_s^2 \beta(e) U + r_0 \mathcal{M}_{nz} \tag{34}$$

Итак, если внешний активный момент действует только по оси вращения полого шара, возникшего вследствие падения на этот шар поперечной волны, то уравнение вращения такого шара определяется формулой (34).

§ 4. Инерционные свойства полого шара и уравнение его вращения для длинных волн

Инерционные свойства тела при вращении определяются моментами его инерции.

Для полого шара осевой момент инерции равен следующему:

$$J_0 = \frac{8}{15}\pi\rho_0 \left[r_0^5\left(1 - \frac{r_1^5}{r_0^5}\right) + r_2^5\left(1 - \frac{r_3^5}{r_2^5}\right)\right] \qquad (34)$$

где r_0, r_2 и r_1, r_3 внешние и внутренние радиусы указанных сфер соответственно.

Осевой момент инерции этого же полого шара, вращающегося под действием падающей поперечной волны в упругой среде с плотностью ρ и скоростью её распространения v_s изменяется и оказывается равным величине J_n, определяемой формулой (33). Среда присоединяет полому шару дополнительную инерционность по сравнению с его инерционностью в пустоте. В дальнейшем величину J_n будем называть присоединенным моментом инерции полого шара при его вращении, вызванным падающей на него поперечной волной. Как видно из формулы (33), рассматриваемый момент инерции в общем случае - комплексная величина. Он зависит от отношений плотности среды и шара, внутреннего и внешнего радиусов, а также - от относительного его внешнего радиуса в единицах длины падающей поперечной волны.

Размер сейсмоприемника обычно выбирается таким, чтобы он был значительно меньше длины волны, падающей на него. Это значит, что выполняется следующее неравенство:

$$\varepsilon = \frac{\omega r_0}{v_s} = 2\pi\frac{r_0}{\lambda_s} \ll 1 \qquad (35)$$

или

$$2\pi r_0 \ll \lambda_s \qquad (36)$$

Таким образом, если длина большого круга внешней поверхности сферического тела значительно меньше длины падающей поперечной волны, то тело может считаться "точечным", малым.

Если учесть условие (35), то для точечного тела присоединенный момент инерции оказывается равным приблизительно следующему:

$$\mathcal{J}_n \simeq 10 \cdot \frac{\rho}{\rho_o} \; \frac{\mathcal{J}}{\ell^2}$$

$$\mathcal{J}_n \simeq \frac{9}{8\pi^2} m_o \;;\; \lambda_s^2 = 1{,}14\, m_o\, \lambda_s^2 \tag{37}$$

где m_o - масса среды, вытесненная объемом сферического тела: отсюда видно, что инерционность тела тем больше, чем больше его габариты (внешний радиус, плотность среды и длина падающей волны). Это увеличение пропорционально кубу внешнего радиуса тела (или его объему), первой степени плотности среды, где установлено тело и - квадрату падающей длины волны.

Таким образом, одно и то же тело будет обладать большей инерционностью в более плотной среде и высокоскоростной. С уменьшением частоты инерционность увеличивается как квадрат изменения этой частоты. Следует заметить, что указанные свойства инерционности тела в поле поперечных волн справедливы только для длинных волн.

Учитывая, что для длинных волн выполняется соотношение:

$$\beta(\ell) \simeq \frac{9}{4} j \ell \tag{38}$$

и подставляя его, а также равенство (37) в уравнение (34) получаем уравнение движения полого шара для длинных поперечных волн в следующем виде:

$$\Omega_z r_o = -j \frac{\ell}{2} U - \frac{2}{9} \frac{r_o}{m_o V_s^2} M_{nz} \tag{39}$$

Длинные поперечные волны определяются неравенством (35) или (36).

Полученное уравнение может рассматриваться не только как уравнение движения для длинных волн, но также как уравнение для низких частот (при расположении шара в одной и той же среде).

Интересно сравнить смещение сферы и бесконечно длинного цилиндра под действием плоской волны. Для малого радиуса сферы

сферы при уcловии, что внутри неё нет никаких устройств, создающих момент $\vec{M}_{nz}$ имеем из уравнения (39):

$$\Omega_z r_0 = -j \frac{\ell}{2} u \qquad (40)$$

Сравнивая полученное выражение для смещения точек поверхности цилиндра при его вращении от падающей поперечной волны [6], замечаем, что смещения одинаковы при малых радиусах цилиндра и сферы.

Очевидно, что полученная независимость смещения тела от формы его поверхности при малых размерах тела, не может быть распространена на любую форму этой поверхности и на любую ориентацию падающей поперечной волны. В частности, этот результат справедлив только при вполне определенной ориентации плоскости волны: параллельность этой плоскости образующей цилиндра. При несоблюдении этого условия, например, для тела несимметричной формы вращение тела зависит от асимметрии поверхности этого тела относительно падающей волны [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А., Максимов Л.А. Модельные исследования движения корпуса сейсмоприемника в поле продольных и поперечных волн. Настоящий сборник.

2. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики, часть I, Просвещение, М., 1965, стр. 436.

3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Высшая школа, М., 1970.

4. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма, Гостоптехиздат, 1948.

5. Яворская И.М. Коротковолновая асимптотика дифракционного поля на сфере при падении плоских поперечных волн. Прикладная математика и механика, 29, 1956, № 6.

6. Miles J.W. Motion of a Rigid Cylinder to a Plane clastic Wave. I. Acoust. Soc. Am. V. 32. N 12, 1960, 1656-1659.

Е.М. Аверко, Ю.А. Нефедкин

СПОСОБ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ НА ФОНЕ ПРОДОЛЬНОЙ И ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ СЕЙСМОПРИЕМНИКА ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

В статье предлагается новый способ выделения поперечной волны на фоне мешающей продольной при любых углах подхода этих волн в место их приема. Рассматриваются некоторые конструкции сейсмоприемников, с помощью которых можно реализовать указанный способ.

§ I. Общие положения

В сейсморазведке и сейсмологии известен способ выделения полезных поперечных волн на фоне продольных. Он состоит в том, что в среде, смещение которой вызвано распространяющимися в ней поперечными и продольными волнами, размещается твердое недеформирующееся цилиндрическое тело в виде корпуса сейсмоприемника со специальными устройствами, называемыми преобразователями механических колебаний в электрические, измеряется поступательное движение этого тела, возникшего в результате падения на него продольных и поперечных волн; при этом такое поступательное движение измеряется в направлении смещения частиц в падающей поперечной волне. Если при этом смещения частиц в продольной волне и поперечной волне взаимно перпендикулярны или - что то же - направления распространения этих волн совпадают, то результат измерения поступательного движения корпуса сейсмоприемника (тела) будет функцией смещения частиц поперечной волны, но не продольной [5]. Таким образом происходит выделение полезной поперечной волны на фоне мешающей продольной.

Очевидно, что при сейсмических исследованиях различных отражающих и преломляющих границ (как общий случай) следует рассматривать несовпадение направлений распространения поперечных и продольных волн в точке их приема.

В этом общем случае применение рассматриваемого способа выделения поперечных волн на фоне продольных не дает положительных результатов.

Кроме этого общего случая, способ не применим также и при совпадении направлений распространения этих волн в точке их приема, если при этом не известно направление, по которому следует измерять поступательное движение корпуса сейсмоприемника.

Предлагаемый способ выделения поперечных волн на фоне продольных лишен этих недостатков и может быть применен во-первых, при незнании направлений распространения этих волн в точке их приема и, во-вторых, при произвольных углах их подхода в эту точку.

Такой способ состоит в том, что измеряется вектор вращения абсолютно жесткого однородного тела сферической формы, контактирующего всей своей поверхностью со средой, смещение которой вызвано распространяющимися в ней поперечными и продольными волнами.

Этот предлагаемый способ основан на том, что недеформирующаяся сфера, представляющая собой форму указанного тела,движется только поступательно в поле продольных волн; в поле поперечных волн она движется поступательно и при этом ещё вращается [I, 2].

Таким образом, вращение тела, находящегося в среде, где распространяются поперечные и продольные волны, будет вызвано только поперечной волной, но не продольной. Если контролировать вращение тела, то результат этого контроля будет зависить только от падения на тело поперечной волны, но не продольной.

Контроль за вращением тела может быть осуществлен любыми известными датчиками вращения, не отзывающимися на поступательное движение рассматриваемого тела. Последнее условие может быть выполнено, если ось вращения датчика закреплена на этом теле и проходит через центр масс тела совместно с датчиками [4].

Вращение тела определяется его вектором вращения, который не равен нулю, если есть вращение. Вектор вращения указанного тела в поле поперечной волны направлен перпендикулярно как направлению распространения волны, так и вектору смещения в ней. Чтобы выделение поперечной волны на фоне продольной было независимо от направления её распространения, достаточно измерять весь вектор вращения, т.е. все его три составляющие. При этом падение поперечной волны на теле будет зафиксировано тем, что модуль этого вектора будет отличным от нуля независимо от угла подхода или направления распространения поперечной волны в месте нахождения этого тела.

Итак, предлагаемый способ выделения поперечной волны на фоне продольной для любых их углов подхода в точку приема этих волн состоит в том, что в этом месте среды помещают тело сферической формы при жестком контакте всей его поверхности со средой и измеряют вектор вращения этого тела датчиками угловых перемещений, ось вращения которых скреплена с телом и проходит через центр масс для тела совместно с датчиками.

На основе такого способа выделения ясны принципы конструирования сейсмоприемника поперечных волн. Чтобы отклик сейсмоприемника являлся бы откликом только на регистрируемую поперечную, но не продольную падающую волну, нужно, чтобы преобразователь отзывался только на вращение корпуса, но не на поступательное его движение. Для этого достаточно, чтобы преобразователь был бы вращательного типа и его ось проходила через центр масс сейсмоприемника. Располагая внутри сферического корпуса сейсмоприемника при идентичных преобразователях вращательного типа, так, чтобы их оси вращения были взаимно перпендикулярны и проходили через центр масс сейсмоприемника, получим трехкомпонентный сейсмоприемник поперечных волн. В нем электрический сигнал на выходе каждого такого преобразователя будет пропорционален проекции вектора вращения корпуса сейсмоприемника на направление оси вращения соответствующего преобразователя.

Частным случаем такого трехкомпонентного прибора являются двух- и однокомпонентные сейсмоприемники поперечных волн,внутри сферического корпуса которого размещают один или два преобразователя вращательного типа соответственно, оси которых проходят через центр масс сейсмоприемника. Откликом таких приборов являются электрические сигналы, пропорциональные проекции полного вектора вращения корпуса на направление оси вращения данного преобразователя.

Частным случаем трехкомпонентного сейсмоприемника поперечных волн является сейсмоприемник, содержащий шесть идентичных преобразователей вращательного типа, расположенных симметрично относительно геометрического центра корпуса в виде однородной сферической оболочки таким образом, чтобы оси вращения двух преобразователей, составляющих данную пару, совпадали; преобразователи располагались симметрично относительно геометрического центра корпуса; общая ось пары проходила бы через этот центр, а оси трех пар были бы взаимно перпендикулярны. На выходе такой пары преобразователей регистрируется одна компонента полного вектора вращения корпуса [3].

§ 2. Датчики угловых перемещений (обзор)

Выделение поперечной волны на фоне продольной как указывалось выше, предполагает использование датчиков угловых перемещений. В связи с этим появляется необходимость рассмотрения существующих типов таких преобразователей.

I) Датчик угловой скорости о электромагнитным генератором [6].

На входной оси устройства крепится катушка с якорем из магнитно-мягкого металла. Приемный элемент состоит из двух подковообразных магнитов, расположенных симметрично относительно входной оси (оси вращения), концы которых соприкасаются с двумя полюсными наконечниками, и опирается на подшипники или упругие шарниры. При повороте приемного устройства относительно якоря в катушке наводится э.д.с. пропорционально скорости изменения магнитного потока, которая в свою очередь определяется угловой скоростью перемещения приемного устройства.

Рабочий диапазон углов $\pm$ 10^0, чувствительность I,04 /град /сек.

2) Датчик углового перемещения с дифференциальным трансформатором [6].

На Е - образный статор из магнитного материала намотаны три катушки; первичная питается переменным током, вторичные обмотки включаются навстречу друг другу. Якорь отделен от полюсных наконечников статора воздушными зазорами. При вращении якоря под действием входной величины, один воздушный зазор увеличивается, другой уменьшается, в то время как зазор первичной обмотки остается неизменным. В этом случае во вторичной цепи появится ток, величина которого пропорциональна угловому перемещению якоря.

Типичный датчик этого рода работает в диапазоне углов $\pm 0{,}1$ рад. При токе возбуждения 50 *ма* с частотой 60 гц, прибор имеет чувствительность при незамкнутой цепи 300 *мв/ град.*

3) Датчик углового перемещения с микросином [6].

Применен четырехполюсный симметричный статор с двумя обмотками на каждом полюсе: первичной и вторичной. При смещении полюсов статора относительно якоря во вторичной цепи появляется сигнал, пропорциональный смещению.

При токе возбуждения 50 ма с частотой 400 гц чувствительность в интервале $\pm 10^0$ равна 12 ма/ рад.

4) В зарубежной литературе имеются данные об угловом акселерометре с электрохимическим преобразователем [11].

К жестким торцовым стенкам линейного преобразователя с пористыми платиновыми катодами прикреплено несколько витков пластмассовой трубки одинакового радиуса. Корпус преобразователя и трубка заполняется электролитом. При угловом ускорении создается перепад давления с обеих сторон катодов.

Типичный датчик имеет верхнюю граничную частоту 1–3 гц, температурный диапазон работы 0–43°С. Температурный коэффициент чувствительности 2,5%/С, чувствительность 100 мка/рад/сек^2.

5) Измерения крутильных колебаний производится датчиком с инерционным элементом и датчиком с биморфным элементом на упругих пластинах [10, 12].

Из конструкций угловых датчиков, применяемых в сейсморазведке, в литературе описаны угловые акселерометры для целей регистрации *SH* - волн [13]. Возможности их ограничиваются регистрацией лишь прямых *SH* - волн на расстоянии ~30–40 м. Принцип их действия заключается в том, что на профиле располагается приемник из двух спаренных чувствительных элементов, расположенных в точках, на расстоянии, сравнимом с длиной волны. Считая, что волна распространяется вдоль оси "у", на которой расположен спаренный чувствительный элемент, и смещения "u" невелики, производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ можно рассматривать как вращение вектора, связывающего две спаренные точки. Один из типовых приборов имеет собственную частоту ~ 7 гц и чувствительность II,I мв/рад/сек² к угловым ускорениям и 0,05 мв/g к линейным ускорениям.

6) Известен малогабаритный низкочастотный горизонтальный сейсмоприемник с крутильным подвесом [7], который применяется для измерения поступательного движения корпуса сейсмоприемника. Преобразователи в этом сейсмоприемнике - вращательного типа.

7) Г и д р а в л и ч е с к и й   д а т ч и к   у г л о в ы х   у с к о р е н и й [8]. Его устройство следующее. Имеется камера с перегородкой, заполненная жидкостью. В канале перегородки встроена лопасть, которая может вращаться вокруг оси прибора и удерживается в нейтральном положении пружиной. Имеется некоторое "перепускное устройство" для регулировки динамических свойств прибора. Угол поворота лопасти относительно корпуса прибора является функцией углового ускорения прибора вокруг измерительной оси. Наличие каналов приводит к увеличению чувствительности прибора, т.к. скорость перетекания жидкости в них больше, чем в камере, соответственно больше давление. Чувствительность гидравлического датчика в сравнении с инерционным может быть выше на I-2 порядка.

Рассмотрим эти известные конструкции датчиков с точки зрения использования их для создания сейсмоприемника угловых колебаний, который бы регистрировал поперечные волны и не отзывался на продольные. Необходимым для этого условием является высокая осевая или центральная симметрия с условием, что центр инерции сейсмоприемника находится на оси или в полюсе симметрии.

Невозможность использования датчика I) для этой цели состоит в том, что, во-первых, очень трудно изготовить приемный элемент с высокой степенью симметрии, во-вторых, наличие сухого трения снижает общую чувствительность датчика и, что более важно, снижает порог чувствительности к малым колебаниям, ибо необходимо приложить определенное усилие на преодоление трения покоя, что в конечном итоге выразится в невозможности зафиксировать начальный момент колебательного процесса (нерезкое вступление).

Эти же причины остаются в силе и при рассмотрении датчиков 2), 3). К тому же здесь появляется необходимость в использовании генератора переменного тока для питания первичной катушки (обмотки) и последующей демодуляции сигнала, получаемого со вторичных катушек (обмоток), что усложняет процесс получения первичного сейсмического материала.

Несимметричность конструкции углового акселерометра с электрохимическим преобразователем, чувствительность лишь к инфранизким его частотам, высокий температурный коэффициент чувствительности, малый температурный диапазон работы,- все это препятствует использованию этого типа датчика в сейсмоприемнике поперечных волн.

Угловой акселерометр со спаренным чувствительным элементом решает проблему выделения поперечных волн лишь в случае точного знания подхода прямой поперечной волны. По принципу своего действия этот датчик будет регистрировать и любую продольную волну, подходящую под углом к линии, соединяющей два чувствительных элемента. К тому же размеры датчика - порядка длины волны - не дают возможности использовать его широко в практике сейсморазведочных работ.

Горизонтальный сейсмоприемник с крутильным подвесом не может решить проблемы подавления продольных волн при регистрации поперечных - поскольку подвижный элемент этой конструкции имеет смещенный относительно оси вращения центр масс и продольная волна, подходящая под углом к оси максимальной чувствительности сейсмоприемника, будет регистрироваться последним.

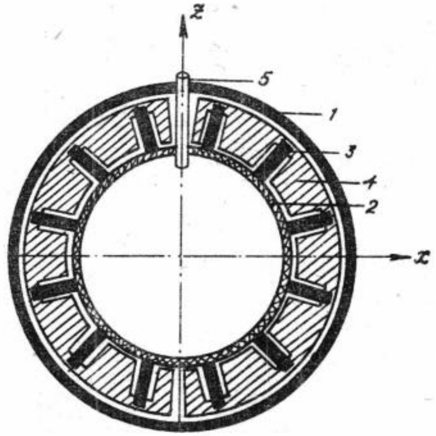
Пьезодатчик крутильных колебаний с инерционным элементом разработан специально для целей машинной индикации и не пригоден для использования в сейсмоприемнике поперечных волн из-за наличия инертной массы, имеющей 4 степени свободы, и пьезодатчика давления, чувствительного к паразитным колебаниям системы.

Конструкцию пьезодатчика крутильных колебаний с биморфными пьезоэлементами следует, по-видимому, признать перспективной в смысле создания сейсмоприемника поперечных волн, но в том виде, как дается авторами, она тоже не способна решить задачу выделения поперечных и подавления продольных волн. Дело в том, что каждый из элементов чувствительной системы, состоящий из упругой пружины с прикрепленным к ней биморфом, будет совершать вынужденные колебания с амплитудой и фазой, определяемыми собственными решениями системы с распределенными параметрами, как под влиянием закручивающей внешней силы, так и в результате поступательного движения приемной системы. Чтобы отклик системы от поступательного движения, которое в условиях сейсморазведки значительно больше, чем вращение при действии подходящей поперечной волны, был бы незначительным в сравнении с откликом на вращение, необходимо, во-первых, чтобы центр масс совпадал бы с центром (осью) вращения и, во-вторых, - включать биморфы по схеме компенсации паразитных колебаний, которые в нашем случае будут вызываться поступательным перемещением всей системы. Эта задача представляет большие трудности, так как два последних фактора должны снижать паразитные колебания на несколько порядков.

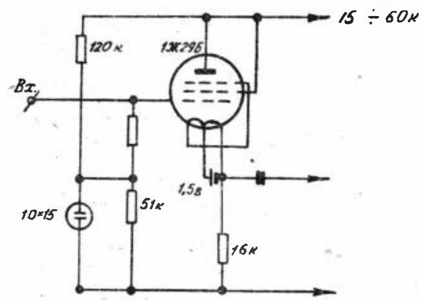
Наиболее подходящей конструкцией прибора для приема поперечной волны по принципу регистрации углового перемещения корпуса прибора является гидравлический датчик, который при соблюдении обязательных условий, заключающихся в строгой геометрической и "инерционной" симметрии, по-видимому, позволит решить задачу выделения лишь поперечных волн в поле упругих волн. Более того, намечается возможность построения трехкомпонентного датчика поперечных волн и, таким образом, определения полного вектора колебаний в поперечной волне.

§ 3. Конструкция одно- и трехкомпонентного жидкостного сейсмоприемника поперечных волн

Вначале рассмотрим однокомпонентный сейсмоприемник поперечных волн, предназначенный для измерения одной компоненты вектора вращения корпуса сейсмоприемника. В дальнейшем описываемый сейсмоприемник будем называть жидкостным, так как в нем инертная масса - жидкость (см. ниже). Его схематический чертеж представлен на рис. I. Сферический корпус I жестко соединен с внутренней полой концентрической сферой 2, на внешней поверхности которой крепятся одним концом биморфные пьезоэлементы 3 типа ПЭК-55. Их плоскость расположена в меридиональном сечении сферического корпуса. Ось биморфа может располагаться или по радиусу сферы, или по перпендикуляру к оси (OZ) вращения сейсмоприемника. Вторым концом биморфный пьезоэлемент жестко крепится к лопасти 4, которая таким способом укрепляется на внутренней сфере. Лопасть представляет собой тонкое легкое плоское кольцо из текстолита, ширина которого немного меньше разности внутреннего



Р и с. I. Схематический чертеж однокомпонентного жидкостного сейсмоприемника поперечных волн: I. сферический корпус; 2. внутренняя сфера; 3.пьезоэлементы; 4. лопасть; 5. выводная трубка.



Р и с. 2. Согласующий катодный повторитель к сейсмоприемнику поперечных волн.

и внешнего радиусов сфер I и 2. Лопасть имеет вырезы, в которые помещаются биморфы таким образом, чтобы они всей своей поверхностью не касались лопасти, кроме точек закрепления второго конца биморфа. Таких лопастей вместе со скрепленными пьезоэлементами в сейсмоприемнике может быть несколько. Их плоскости совпадают с меридиональными сечениями. Лопасти располагаются на одинаковом расстоянии (по дуге, например, большого круга сферы) друг от друга.

Пьезоэлементы, скрепленные с лопастью, соединяются электрически между собой по параллельной схеме в фазе. Сигналы от пьезоэлементов, скрепленных с одной лопастью, суммируются по току с сигналами от всех остальных лопастей: выходы "лопастей" соединяются параллельно. Этот суммарный сигнал представляет собой отклик сейсмоприемника.

Для согласования сопротивлений выхода сейсмоприемника с входом усилителей сейсмостанции применялся или катодный повторитель, или трансформатор. Первый вид согласования применялся при малом числе пьезоэлементов, используемых в данном сейсмоприемнике; второй - при большом числе этих элементов, достаточном для того, чтобы суммарная емкость всех биморфов могла бы образовать резонансный контур с первичной обмоткой трансформатора. Обычно это достигалось при числе биморфных пьезоэлементов, равном 240, и применением согласующего трансформатора. Последний располагался симметрично относительно оси вращения. Катодный повторитель (рис. 2) выполнялся на лампе IЖ 29Б и помещался внутрь сферы 2. Питание схемы производилось от наружных источников в виде сухих батарей. Провода от выхода сейсмоприемника выводились из внутренней части сферы 2 через трубку 5, расположенную на оси вращения.

Пространство между внутренней частью сферического корпуса и внешней частью сферы 2 заливалось жидкостью. В качестве последней может быть выбрана любая жидкость, обладающая,-во-первых, большим омическим сопротивлением, во-вторых - малой вязкостью и большой плотностью и, в-третьих - небольшим температурным коэффициентом.

Первое требование вытекает из того, чтобы жидкость не шунтировала высокоомные пьезоэлементы, внутреннее сопротивление которых на сейсмических частотах (около 30 гц) оценивается величиной порядка 10 мΩ. Это требование может быть снято, если пьезоэлементы покрыты изолирующей пленкой. При этом увеличивается их механическая жесткость, что снижает их чувствительность на сейсмических частотах.

Второе требование диктуется необходимостью повышения чувствительности сейсмоприемника.

Третье требование предусматривает работу сейсмоприемника в различных температурных условиях. Оно может быть снято, если в сейсмоприемнике предусмотреть температурную компенсацию, например, введением в полость, заполняемую жидкостью, мягкой ампулы с небольшим объемом воздуха. В качестве жидкости нами использовалось трансформаторное масло.

Из описанной конструкции сейсмоприемника ясна его работа. Упавшая на корпус сейсмоприемника поперечная волна заставит вращаться корпус. "Невязкая" жидкость, находящаяся в корпусе, не будет при этом вращаться и "останется на месте".

Лопасти, соединенные через биморфные пьезоэлементы с вращающимся корпусом, также будут вращаться и, следовательно, перемещаться относительно неподвижной жидкости. При этом на вращающиеся лопасти будет действовать давление, обусловленное сопротивлением жидкости движению лопасти. Это давление передается на конец биморфа и последний деформируется, вследствие чего появляется электрический сигнал на его электрической стороне. Сумма всех этих сигналов по току от отдельных пьезоэлементов представит выходной сигнал сейсмоприемника, являющийся его откликом на падающую поперечную волну.

Если ось OZ вращения сейсмоприемника совпадает с перпендикуляром к направлению вектора смещения в падающей волне и направлению её распространения, то отклик сейсмоприемника будет откликом на полный вектор вращения корпуса сейсмоприемника. Если же условие перпендикулярности не выполнено, то отклик сейсмоприемника будет откликом на проекцию полного вектора вращения корпуса сейсмоприемника на его ось вращения.

Описанный сейсмоприемник поэтому можно назвать однокомпонентным сейсмоприемником, так как он "измеряет" только одну компоненту вектора вращения своего корпуса.

Если в этом же сейсмоприемнике поместить три идентичных описанных преобразователя (лопасть и прикрепленные к нему биоморфные пьезоэлементы) таким образом, чтобы оси вращения этих преобразователей были взаимно перпендикулярны, то, очевидно, отклик каждого такого преобразователя будет откликом на проекцию вектора вращения корпуса на ось вращения этого преобразователя и, следовательно,- на компоненту этого вектора. Такой сейсмоприемник с тремя пьезообразователями, оси вращения которых взаимно перпендикулярны, следует назвать трехкомпонентными сейсмоприемниками поперечных волн.

Нами были изготовлены и опробованы макеты одно- и трехкомпонентного жидкостного сейсмоприемника.

§ 4. <u>Конструкция однокомпонентного сейсмоприемника поперечных волн с твердым массивным телом</u>

Кроме описанных конструкций, был изготовлен и опробован также однокомпонентный сейсмоприемник поперечных волн, в котором действие преобразователя основано на инерционных свойствах не жидкостного, а массивного тела, укрепленного на концах биморфного пьезоэлемента.

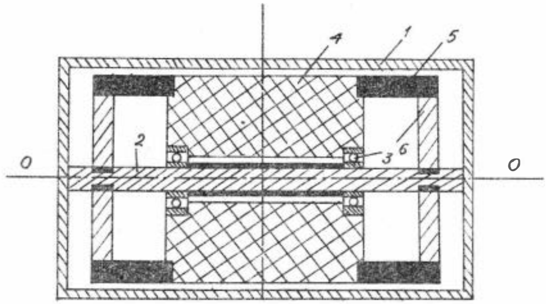
Схематический чертеж такого сейсмоприемника представлен на рис. 3.

В цилиндрическом корпусе I (диаметр корпуса равен 4 см) на оси 2 напрессованы подшипники 3, на которых инертная масса 4 цилиндрической формы может вращаться вокруг оси 2 (ось OO жестко связана с корпусом). Электромеханическим преобразователем являются биморфные элементы ПЭС-58 (5), которые связаны с инертной массой 4 и пластинчатыми пружинами 6 так, как показано на рисунке. Биморфные элементы электрически связаны между собой по параллельной схеме таким образом, чтобы при угловом перемещении инертной массы сигналы от каждого элемента складывались бы в фазе. При наличии собственного резонанса порядка IO-I5 кгц биморфные элементы в области сейсмических частот обладают высокой идентичностью по амплитудно-фазовой характеристике, несмотря на неизбежный разброс по индивидуальным свойствам отдельных элементов. Существенным недостатком пьезопреобразователей является высокое внутреннее сопротивление на сейсмических частотах. При наличии низкоомных входных цепей существующих сейсмостанций, рассчитанных на работу с электромагнитными датчиками необходимо согласовать, как и в жидкостном сейсмоприемнике, высокое внутреннее сопрстивление пьезодатчиков с низкоомной нагрузкой, представляющей собой входной каскад усилителя сейсмостанции. В описываемой конструкции сейсмоприемника использовался с указанной целью эммитерный повторитель (рис. 4), который помещался внутри корпуса сейсмоприемника.

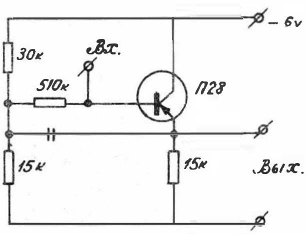
Описанный сейсмоприемник поперечных волн, имеющий цилиндрический корпус, является однокомпонентным прибором, отклик которого является откликом на вектор вращения корпуса при условии что направление этого вектора параллельно оси OZ вращения сейсмоприемника. Это эквивалентно тому, что плоскость падающей поперечной волны параллельна образующей цилиндра, а вектор смещения в ней перпендикулярен этой образующей. При наклонном падении волны ограниченный цилиндр теряет симметричность относительно направления распространения волны и, следовательно, отклик такого вращательного сейсмоприемника будет содержать в себе, кроме отклика на поперечную волну, также отклик на наклонно падающую продольную волну. В этом случае он перестает быть сейсмоприемником поперечных волн.

§ 5. Компенсационный сейсмоприемник

Принцип действия такого сейсмоприемника поперечных волн основан на измерении вращения тела с помощью измерителей (сейсмоприемников) линейных поступательных перемещений. При достаточно малых вращательных колебаниях тела его угловое перемещение любой его точки на дуге окружности приближенно заменяется линейным перемещением по касательной к этой окружности. При этом указанное угловое смещение диаметрально противоположных точек такой окружности, центр которой лежит на оси вращения тела, будут противоположно направлены друг относительно друга. Смещение этих же двух точек при поступательном движении тела будут одинаково направлены и равны по величине. Следовательно, если отклики от двух сейсмоприемников, расположенных в таких точках и измеряющих линейное поступательное смещение этих точек, сложить, то суммарный отклик такой пары будет откликом на поступательное движение тела; если - вычесть, то эта разность будет откликом этой пары на вращение тела. Такой метод компенсации был положен



Р и с. 3. Схематический чертеж устройства сейсмоприемника поперечных волн с твердым массивным телом. I - корпус сейсмоприемника, 2 - ось вращения, 3 - подшипники, 4 - инертная масса, 5 - биморфные пьезоэлементы, 6 - пластинчатые пружины.



Р и с. 4. Схема согласующего эммитерного повторителя.

при конструировании компенсационного сейсмоприемника поперечных волн.

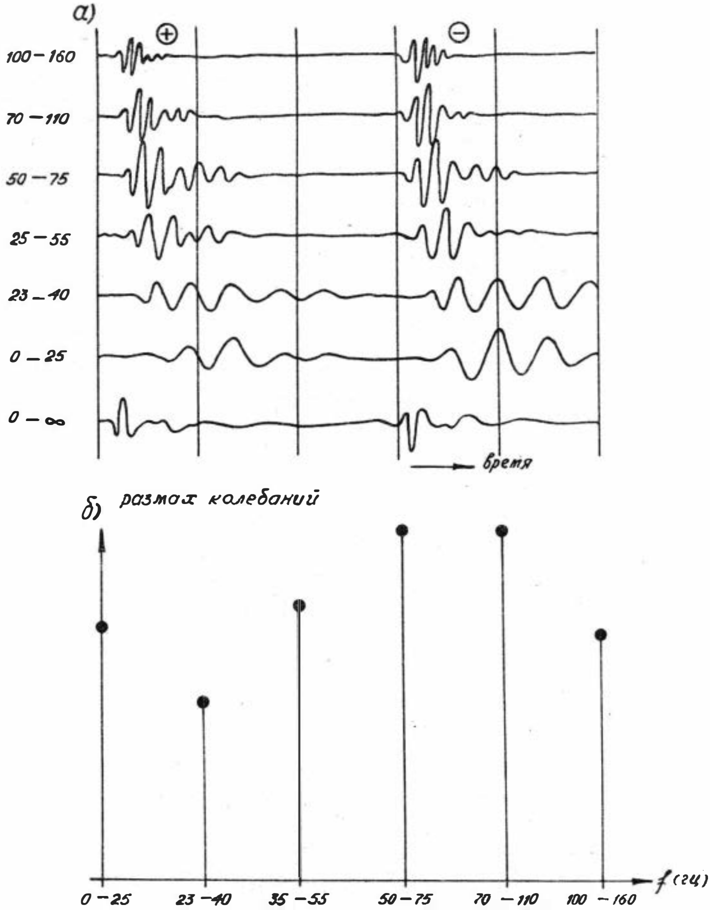
На цилиндрической подставке по окружности цилиндра размещалась пара стандартных сейсмоприемников диаметрально-противоположно так, чтобы при поступательном движении цилиндра сигналы с каждого СП в паре были бы обратного знака, при вращении цилиндра сигналы пары СП складывались бы в фазе. Сейсмоприемники в паре были отобраны на вибростенде по амплитуде и фазе с возможно большей точностью. Результаты полевого испытания подобной установки не дали ожидаемого эффекта. Дело заключается в следующем: при скорости поперечных волн, например, 1200 м/сек, частоте 30 гц, радиусе основания цилиндра $\sim$ 10 см, величина ℓ_1 = 0,02 x). При такой величине ℓ_1 вращение цилиндра на два порядка меньше поступательного движения. Для того, чтобы регистрировать вращение величиной хотя бы на порядок большей, чем сигнал от поступательного движения, необходимо,- это можно посчитать,-подбирать СП в паре с разбросом по фазе, меньшем $2 \cdot 10^{-3}$T, где T - видимый период колебания при условии, что чувствительности обоих СП равны.

Поэтому, в связи с трудностью достижения такой фазовой идентичности, необходимо исключить в приемном устройстве для регистрации вращения паразитные колебания инертной массы, а именно давать инертной массе одну свободу движения - вращение.

§ 6. Полевой эксперимент с сейсмоприемником поперечных волн, содержащим твердое инерционное тело

Лабораторное опробование этого сейсмоприемника состояло в получении его отклика на касательный удар по его корпусу. На рис. 5 показан его отклик, записанный на магнитную пленку и воспроизведенную при различных частотных фильтрациях. Слева от временной трассы даны значения нижней и верхней частот примененного фильтра для этой трассы. Эксперимент показал, что 1) сейсмоприемник отзывается на касательное воздействие и, следовательно, на вращение его корпуса и 2) отклик сейсмоприемника меняет знак на обратный при смене знака внешнего касательного воздействия. Оба этих качества необходимы сейсмоприемнику для того, чтобы он от-

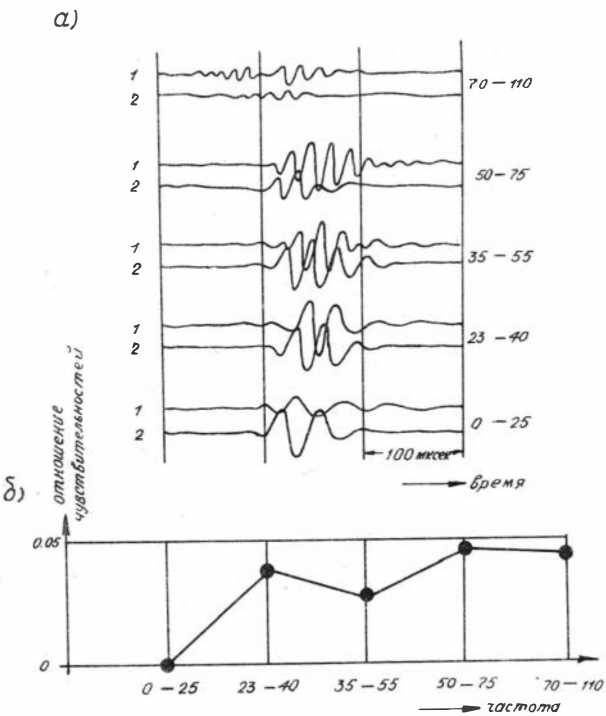
x) См. статью [7].



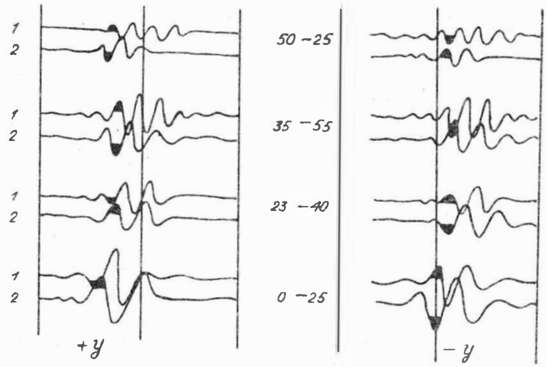
Р и с. 5. Касательный (±) удар по корпусу сейсмоприемника с твердым инерционным телом: а – отклик на удар при различных частотных фильтрациях; б – размах колебаний при различных фильтрациях. Маркировка – 100 мсек.

зывался только на поперечную волну (вращение) и не отзывался на продольную волну (поступательное движение).

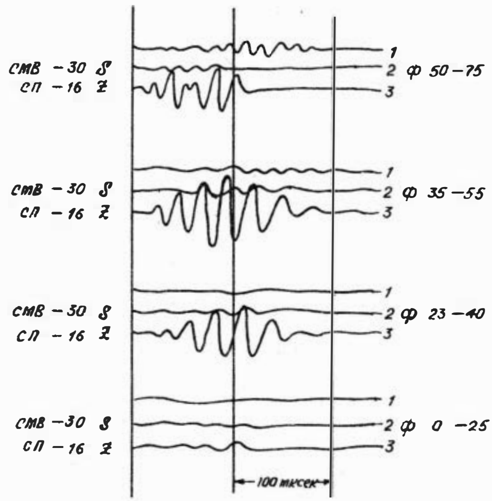
В полевом эксперименте сейсмоприемник закапывался полностью в почву так, чтобы ось вращения была бы перпендикулярна свободной поверхности, на которой располагалось как место воздействия, так и профиль наблюдений. Место стоянки сейсмоприемника на профиле отстояло на 10 метров от места воздействия. Воздействие осуществлялось направленным ударом ± У, Z . На рис. 6 представлена сейсмограмма, полученная при + У воздействии с использованием указанного сейсмоприемника (трасса I). Для сравнения на трассе 2 показана запись этого же удара стандартным сейсмоприемником СМВ-305, ориентированным на прием У-удара и расположенным рядом с испытуемым сейсмоприемником. На этом же рисунке построен график сравнительной чувствительности стандартного и испытуемого сейсмоприемников для различных фильтраций, приведенный к одинаковому усилению. Чувствительность датчика вращения почти на два порядка меньше чувствительности стандартного СП и уменьшается при увеличении видимого периода. Это связано с тем, что вращения при небольших отношениях радиуса цилиндрического корпуса к длине поперечной волны (в нашем случае $e_1 = 0,025$) есть величина небольшая в сравнении с поступательным движением и уменьшается при уменьшении этого отношения. На рис. 7 показана запись ударов ± У. Видно изменение фазы записи на 180^0 как от стандартного СП, так и от датчика вращения при смене знака воздействия, что однозначно указывает на природу регистрируемой волны: она поперечная. На рис. 8 приведена запись удара сейсмоприемниками СП-16 (прием z , трасса 3). СМВ-305 (прием У, трасса 2) и датчиком вращения (трасса I) на расстоянии ~ 10 м. Усиления для всех трех трасс одинаковы. Как и следовало ожидать, отклик датчика вращения на приход продольной волны равен нулю, это значит, что датчик вращения продольную волну не регистрирует. Не регистрирует продольную волну и СМВ-305, установленный на прием У, но этого не должно быть, поскольку по направлению подхода в нашем случае продольной волны СМВ-305 обладает нулевой чувствительностью. Датчик же вращения должен обладать нулевой чувствительностью к продольное волне независимо от угла подхода последней. На рис. 9, 10 представлены записи стандартными приборами и датчиком вращения в первом слу-



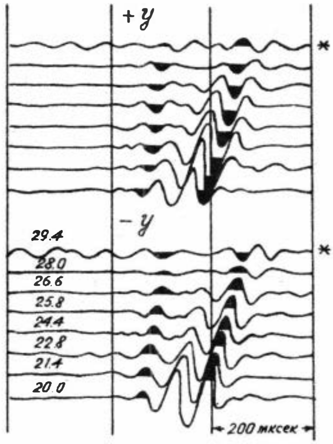
Р и с. 6. Запись удара +У испытуемым (I) и контрольным стандартным (2) сейсмоприемниками - а) и график отношения чувствительностей этих сейсмоприемников - б) приведенных к усилению 30 дб.



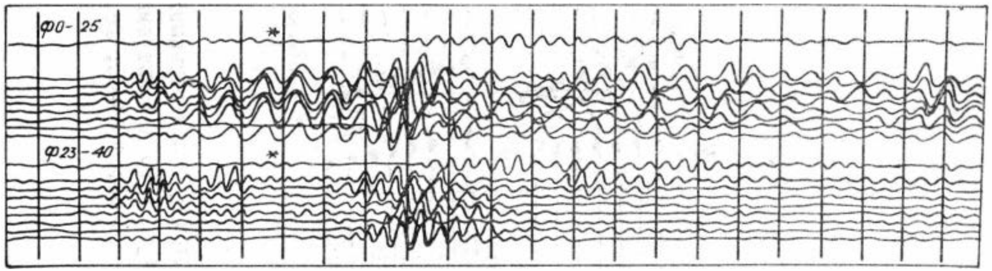
Р и с. 7. Запись ударов $\pm y$ стандартным СМВ-30 (трасса 2) и испытуемым датчиком поперечных волн (трасса I) при различных фильтрациях. Усиление разное.



Р и с. 8. Запись испытуемым (трасса I) и контрольными (трассы 2 и 3) сейсмоприемниками удара Z на расстоянии IO м. Усиление 30 дб.



Р и с. 9. Запись удара ± У контрольными стандартными приборами СГ-I-IO и испытуемым (ПК 29,4). ПУ-0; ПК- 20-30; Ф 23-40; Ус. 24 дб.



Р и с. 10. Запись взрыва Q = 400 г контрольным СМВ-30 и испытуемым (трасса *)
сейсмоприемниками. Скважина с камуфлетом.

чае от удара ± У, во втором случае от взрыва 400 гр. в скважине с камуфлетом. Удар ± У производился на расстоянии 20 м от первого прибора, база приема 10 м, датчик вращения ПК 29,4 м. Уверенно следится поперечная волна со скоростью ~120 м/сек. Запись от взрыва показательна в том отношении, что на трассе, отмеченной звездочкой (датчик вращения), большой фон продольных волн перед первыми вступлениями интенсивной поперечной волны совершенно отсутствует, что несомненно указывает на нечувствительность датчика вращения к продольным волнам. Необходимо отметить большой уровень собственного шума схемы согласования на транзисторах на сейсмических частотах, который может составлять десятки микровольт и быть сравнимым с полезным сигналом.

В результате приведенного полевого эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Доказана принципиальная возможность регистрации вращения при падении на датчик поперечной волны.

2. Датчик вращения рассмотренной конструкции не реагирует на продольные волны.

3. Чувствительность датчика почти на два порядка меньше чувствительности стандартных сейсмоприемников поперечных волн. Для увеличения чувствительности можно рекомендовать увеличить "эффективный" размер датчика.

4. Для согласования сопротивлений при использовании пьезопреобразователей необходимо использовать либо электронную схему с минимальными собственными шумами, либо применить согласующий трансформатор, если значительно уменьшить внутреннее сопротивление биморфов, например, увеличением их числа при одновременном увеличении инерционной массы сейсмоприемника,

§ 7. Экспериментальное опробование в полевых условиях жидкостного сейсмоприемника поперечных волн

Жидкостной сейсмоприемник со сферическим корпусом и биморфными преобразователями был испытан в полевых условиях. Он целиком закапывался в землю и таким образом устанавливался в точке приема поперечной волны. Место его установки располагалось в 10 метрах от места воздействий, которое осуществлялось направленными ударами в виде Z, X, ± У. Запись удара ± У одной из компонент вращения (вокруг оси Z - Z) представлена на рис. II. При смене знака воздействия на записях наблюдается обращение по фазе на всех фильтрациях перезаписи.

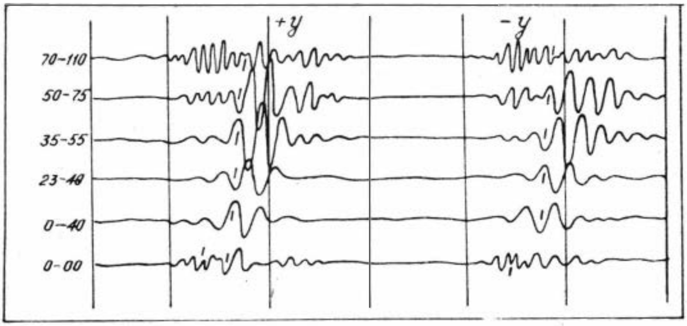
При изменении частоты фильтрации изменяется радиус корпуса СП по сравнению с длиной падающей волны и поэтому отклик СП изменяется.

Следующий этап эксперимента заключался в определении диаграммы направленности трехкомпонентного жидкостного сейсмоприемника для всех трех компонент. Эксперимент заключался в следующем: сейсмоприемник располагался так, чтобы одна из осей вращения занимала вертикальное положение (назовем эту компоненту Ω_z), другая ось вращения параллельна линии профиля (Ω_x), третья ось вращения - перпендикулярна линии профиля (Ω_y). Волновая картина от ударов Z , X, $\pm$ У фиксировалась расстановкой трех - компонентных стандартных СП из шести точек через I метр между точками. В качестве стандартных СП были взяты СМВ-30. В точке профиля, где помещался испытуемый СП находился контрольный СП для контроля за силой удара и другой, диаграмма направленности которого снималась одновременно с диаграммой жидкостного СП. Удар производился в одной точке, а СП вращались в горизонталь - ной плоскости на фиксированный угол. Рис. I2 представляет собой образец записи, полученный вышеуказанной расстановкой при ударе Z , X, + У, -У.

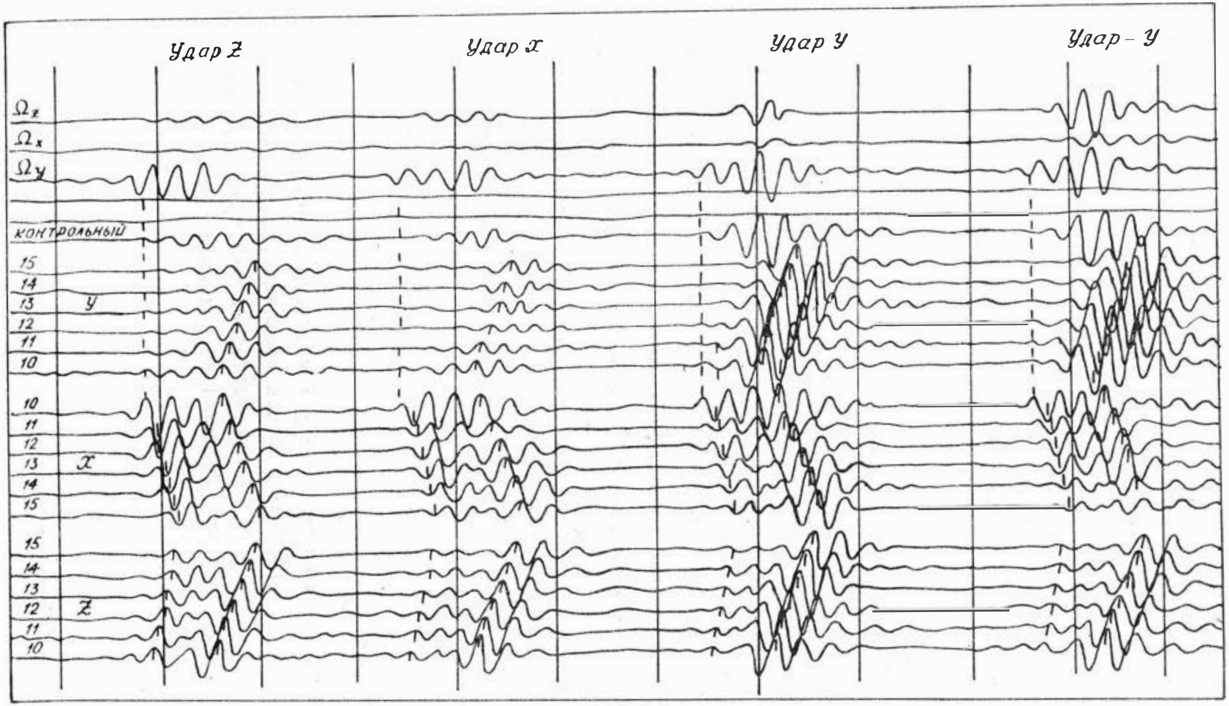
В порядке следования сверху - вниз первая, вторая и третья трассы суть записи Ω_z , Ω_x и Ω_y соответственно; четвертая трасса - запись контрольным СМВ-30, ориентированным по оси У.

Выходы испытуемого СП были включены непосредственно на управляющую сетку входной лампы усилителя сейсмостанции. По записи можно судить о соотношении чувствительностей испытуемого (усиление перезаписи I8 дб) и стандартного СП (0 дб).

Выделены две волны по скоростям распространения 250 м/сек и I25 м/сек при приеме X и Z стандартными приборами и волну I50 м/сек при регистрации У-приборами. Последняя волна, регистрируемая X и У-приборами, имеет вектор смещения, расположенный в горизонтальной плоскости; оборачивается по фазе при смене знака воздействия $\pm$ У. Поэтому её следует считать поперечной волной типа S H. Все выделенные волны регистрируются также испытуемым сейсмоприемником на различных компонентах: на компоненте



Р и с. II. Запись удара ± У жидкостным сейсмоприемником одной компоненты вращения (вокруг оси $Z - Z$) при различных частотных фильтрациях. Расстояние от источника до приемника IO м.



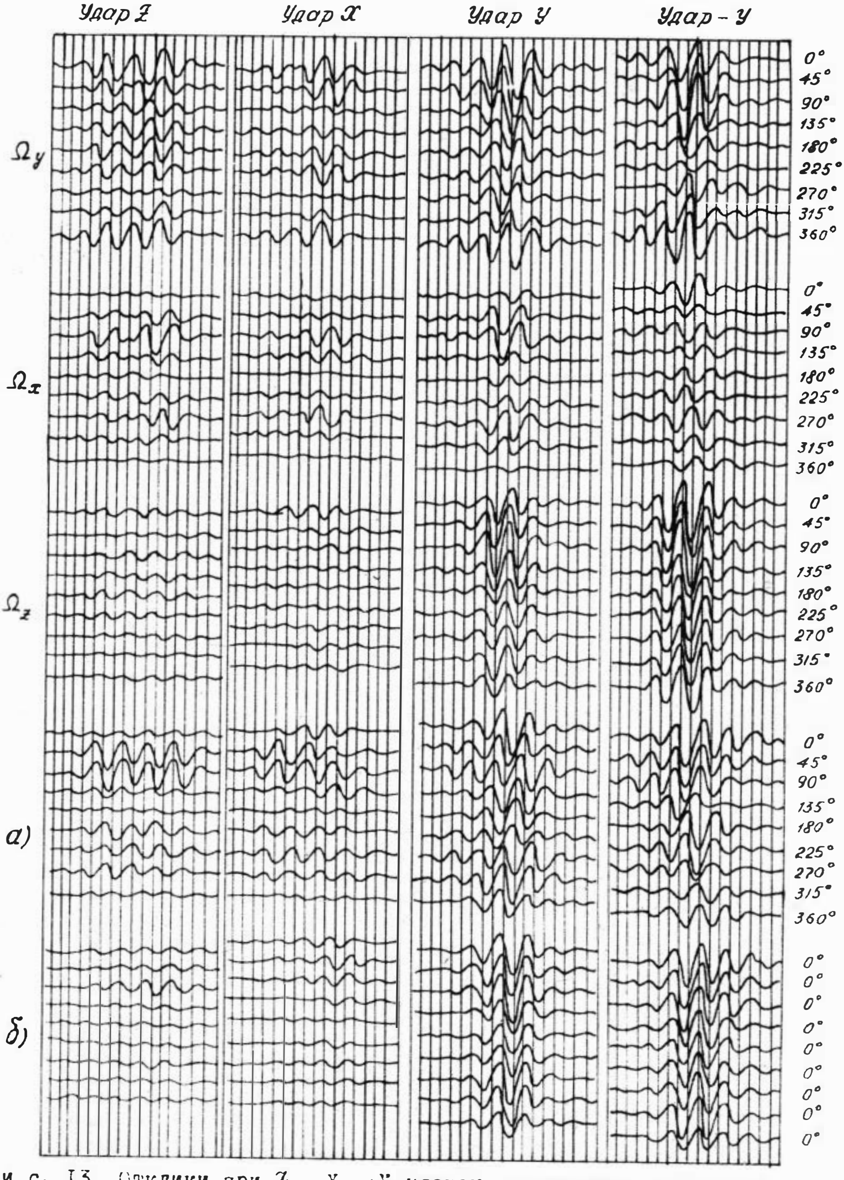
Р и с. I2. Сейсмограммы, полученные при регистрации Z , X, $\pm$ У ударов стандартными X, У, Z – трехкомпонентными жидкостным сейсмоприемниками. Фильтрация "23–40". Положение сейсмоприемников соответствует углу φ = 360^0.

Ω_z фиксируется волна I50 м/сек, на Ω_x и Ω_y - интерференционная волна из двух волн - 250 м/сек и I25 м/сек. В дальнейшем по таким откликам снимались диаграммы направленности испытуемого на различных компонентах и стандартного сейсмоприемников. На рис. I3 представлены сейсмограммы при получении первичного материала в таком эксперименте для различных ударов (z , X, $\pm$ У) и шаге поворота сейсмоприемников в 45^0. На рис. I4 приведены диаграммы направленности для каждой из трех компонент при различно направленных воздействиях z , X, $\pm$ У. На диаграммах для каждого угла откладывались отношения амплитуд, записанных СП вращения к амплитудам, записанным контрольным стандартным СП. Таким образом исключалось различие в силе удара для каждого угла. Как и ожидалось, диаграммы направленности компоненты Ω_z приближенно представляют собой окружность. Компоненты Ω_x , Ω_y при воздействиях z , X в нашем эксперименте обладают косинусоидальной направленностью к приему поперечных SV волн и поверхностной релеевской волны, имеющей эллиптическую поляризацию. Сложнее дело обстоит с откликом этих компонентов на ударе $\pm$ У. Как правило, диаграммы направленности в этом случае имеют сложную форму, хотя качественно зависимость отклика от угла подхода напоминает косинусоидальную. Сложность эта связана возможно со сложными поверхностными сейсмогеологическими условиями и с тем, что регистрация проводится в ближней зоне и регистрируемое поле имеет сложный интерференционный характер при воздейотвии $\pm$ У. Возможно также играет большую роль нечистота удара $\pm$ У в связи с чем эти компоненты регистрируют волны типа SV.

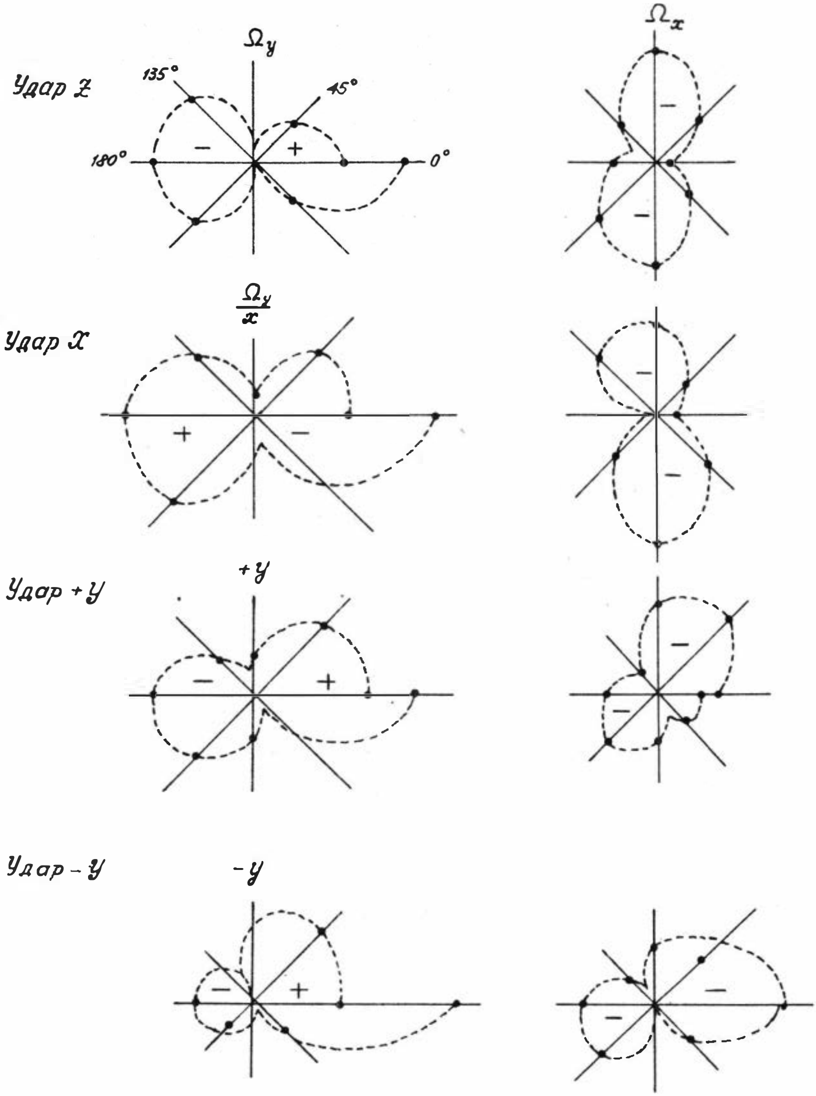
Сложность интерференционной волны, по которой определялась диаграмма направленности для компонент Ω_x и Ω_y обуславливает сложность полученных диаграмм для этих компонент.

Диаграмма направленности для Ω_z при любом виде примененного воздействия снималась по одной неинтерференционной волне. Эта диаграмма оказалась круговой, однополярной, что свидетельствует о том, что I) испытуемый сейсмоприемник вращается при падении на него волны и 2) это вращение вызвано падением на него поперечной SH - волны, 3) отклик компоненты Ω_z не зависит от угла подхода поперечной волны.

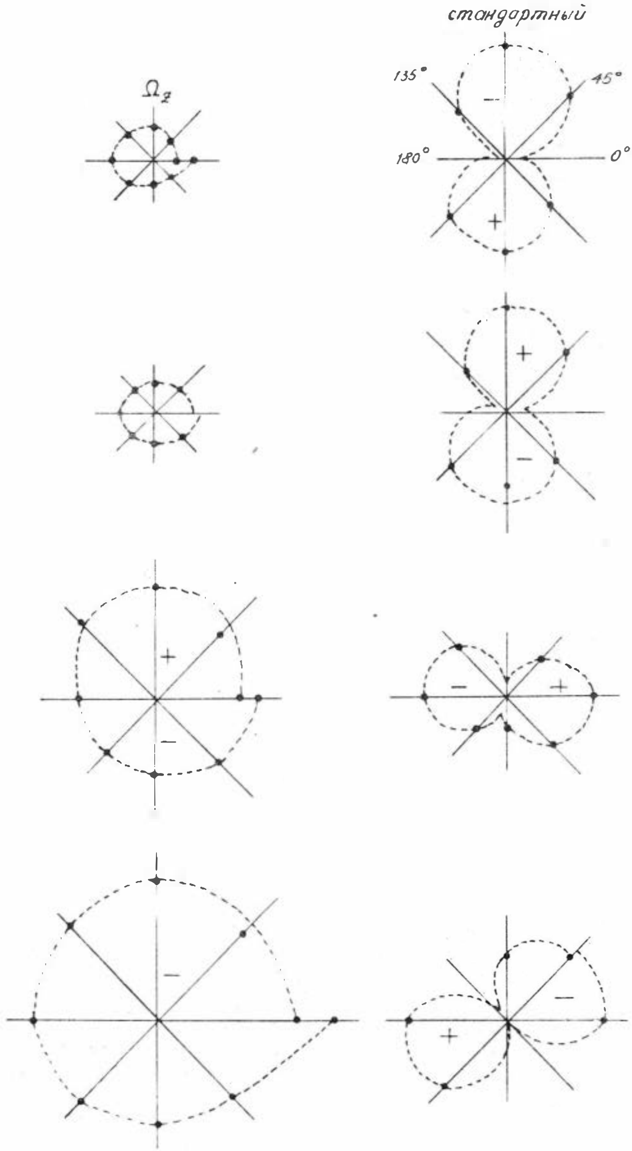
Кроме описанного эксперимента был поставлен опыт на поверхности льда реки Бердь Новосибирской области.



Р и с. 13. Отклики при Z , X, $\pm У$ ударах испытуемого трехкомпонентного жидкостного сейсмоприемника (Ω_y , Ω_x , Ω_z) и стандартного подвижного (а) и неподвижного (б) сейсмоприемника при различных углах поворота этих приборов.



Р и с . I4. Диаграммы направленности испытуемого емников для Z , X , $\pm Y$



(Ω_y , Ω_x и Ω_z) и стандартного сейсмопри-
воздействий.

Целью эксперимента являлась опытная проверка возможностей выделения жидкостным сейсмоприемником поперечной волны на фоне продольной независимо от угла подхода этих волн к прибору.

На поверхности льда в точках профиля на базе 20 м с интервалом через 5 м вмораживалось по 2 стандартных сейсмоприемника типа СГ - I-IO с Х, У - ориентировкой; на последней точке, кроме того, был вморожен жидкостной сейсмоприемник поперечных волн с осью вращения, перпендикулярной поверхности льда.

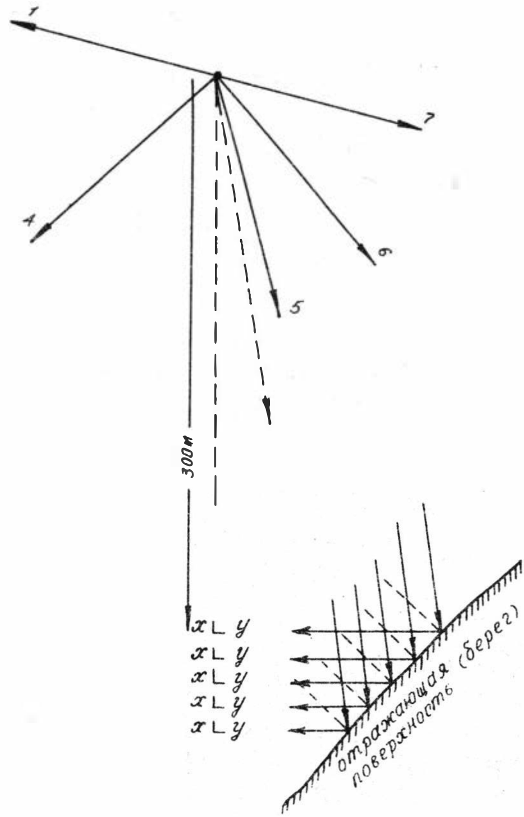
Профиль наблюдения располагался наклонно к береговой линии (рис. I5). Возбуждение упругих волн производилось направленными ударами на расстоянии 300 м от первой точки профиля. Направление ударов, касательных к поверхности льда, были выбраны следующие: I) перпендикулярно профилю (0^0), 2) косой к профилю - 45^0, 3) по направлению профиля - 90^0, 4) косой к профилю - $I35^0$, 5) перпендикулярно к профилю - $I80^0$. Регистрация велась магнитной станцией СС-24-6IМ.

На рис. I5 схематически показано расположение профиля и направление ударов, определенное по записям Х и У приборов и прямых Р и S волн. Эти направления несколько отличаются от расчетных в связи с неточностью производства удара, но это не меняет сути эксперимента.

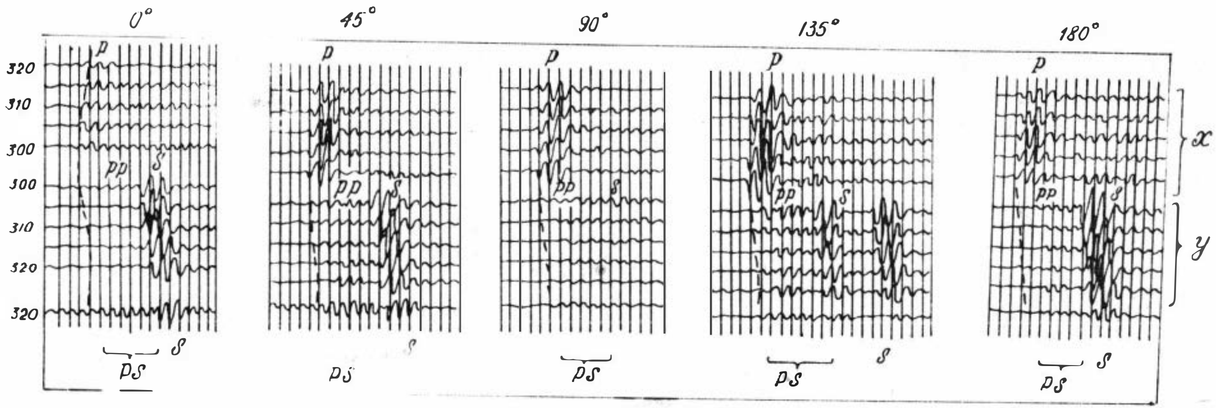
Согласующим устройством служил сейсмический трансформатор с индуктивностью первичной обмотки I58 гц, вторичной - 9 гц и коэффициентом трансформации, равным I/4.

Результат эксперимента представлен сейсмограммами на рис. I6. Сверху над каждой сейсмограммой цифры означают направление удара. Первые пять трасс на сейсмограмме представляют собой записи стандартными Х-приборами; последующие пять - У - приборами; последняя трасса есть отклик испытуемого жидкостного сейсмоприемника для компоненты Ω_z . Усиление для стандартных сейсмоприемников I2 дб; для жидкостного - 36 дб, кроме удара $I80^0$, при котором усиление для жидкостного сейсмоприемника равно 30 дб. Фильтрация одна и та же "70-I60". При воздействии $I35^0$ произведен двойной удар.

На трассах стандартных сейсмоприемников выделены продольная Р и поперечная S - волна. Доказательством того, что последняя волна - поперечная, может служить обращение её фазы при



Р и с. 15. Схема эксперимента при применении жидкостного сейсмоприемника на поверхности льда реки Бердь Новосибирской области.



Р и с. 16. Сейсмограммы эксперимента на поверхности льда, полученные применением стандартных приборов и жидкостного сейсмоприемника.

ударе 0^0 и 180^0. Скорость распространения первой $v_p = 3,08 \cdot 10^3$ м/сек; второй – $v_s = 1,74 \cdot 10^3$ м/сек. Очевидно, что при толщине льда около I метра и используемых длинах волн, исчисляемых десятками метров, лед может рассматриваться как двумерная среда, в плоскости которой располагается касательный удар. При этих условиях поперечная волна может рассматриваться как волна типа SV : её вектор смещения лежит в той же плоскости двумерной модели, что и вектор смещения продольной волны.

На интервале времени между вступлениями прямых Р и SV волн наблюдается некоторый фон помех как на стандартных приборах, так и на однокомпонентном сейсмоприемнике вращения. Здесь же в связи с тем, что перезапись велась на большом усилении, наблюдается равномерный фон помех, не связанных с волновой обстановкой и преобразовательной системой сейсмоприемника. Эта помеха связана с нечистым размагничиванием пленки током частотой 50 гц. Тем не менее можно достаточно уверенно выделить сигнал на трассе сейсмоприемника. Фон регулярных помех (на временах, меньших времени вступления прямой SV волны, но больших, чем время вступления продольной волны) на трассах сейсмоприемников, ориентированных перпендикулярно профилю, по-видимому относится к типу продольных и обменных волн, отраженных от системы трещин, заполненных водой, образующих некоторую отраженную поверхность так, как это схематически показано на рис. I5. Подтверждением этого является тот факт, что с изменением поляризации прямой продольной волны на 180^0 регулярные волны-помехи также меняют фазу на 180^0. Было вычислено соотношение интенсивностей прямой продольной волны (Х-приборы) к среднему уровню фона по всем трассам (У-приборы). Для всех ударов отношение уровня фона к амплитудам прямой Р-волны составляет величины порядка 0,I5–0,20. Теоретически вычисленный коэффициент отражения продольной волны от границы лед-вода для схематически показанного на рис. I5 положения границы равен 0,26. Это различие, по-видимому, обусловливается дополнительным расхождением отраженной РР волны, интерференционным характером фона помех, различием в углах выхода из источника прямой волны, регистрирующейся вдоль профиля и подходящей к отражающей границе. Итак, фон регулярных помех на У-приборах определяется в основном отраженными РР волнами.

Последняя трасса на сейсмограммах рассматриваемого рисунка представляет собой отклик испытуемого сейсмоприемника на воздействие, соответствующее данной трассе сейсмограммы.

Как видно из сейсмограммы при всех ударах испытуемым сейсмоприемником записана поперечная волна, которая в эксперименте представлена волной типа SV. Такая волна вращает сейсмоприемник вокруг вертикальной (Ω_z) оси и, следовательно, отклик сейсмоприемника будет откликом Ω_z - составляющей. Именно это наблюдается в эксперименте.

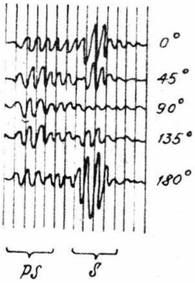
Отсутствие записи поперечной SV волны испытуемым сейсмоприемником для удара 90^0 объясняется тем, что диаграмма направленности касательной силы по поперечной волне для направления профиля равны нулю: в этом направлении интенсивность SV - волны равна нулю, и поэтому отклик сейсмоприемника оказался равным нулю.

Для остальных углов направленной силы рассматриваемая диаграмма направленности представляет собой синусоидальную функцию угла, отсчитываемого от направления действия силы. Такая зависимость как раз наблюдается для Ω_z отклика испытуемого сейсмоприемника на прямую S - волну. Это видно из рис. I7, представляющего собой запись жидкостным сейсмоприемником направленного воздействия как функцию дополнительного угла между направлениями этой силы и профиля. Для прямой S - волны при ударе 0^0 отклик максимален, с увеличением угла он уменьшается, достигает нуля, как было отмечено выше, при ударе 90^0, затем переворачивает фазу, увеличивается по модулю и опять достигает максимальной величины.

Таким образом, запись поперечной прямой волны испытуемым сейсмоприемником полностью объясняется тем, что корпус сейсмоприемника вращается под действием этой волны.

На трассе Ω_z испытуемого сейсмоприемника для рис. I6, а также на рис. I7, кроме рассмотренной поперечной волны, наблюдается также фон помех, время вступления которых больше вступления прямой продольной волны, но меньше такого же времени прямой поперечной волны. Этот фон помех интерпретируется как обменные волны типа PS , отраженные от берега. В пользу такой интерпретации говорит следующее.

Отношения амплитуд сигналов, предшествующих вступлениям прямой S - волны, к амплитудам прямой Р-волны, регистрируемым



Р и с. 17. Сводная сейсмограмма записи жидкостным сейсмоприемником направленных касательных ударов как функция угла между направлением этой силы и профиля.

рядом стоящим стандартным Х-прибором, составляют величины порядка 0,6-0,8, что совпадает с вычисленным теоретическим коэффициентом отражения PS - волны от вышеупомянутой границы раздела, который равен 0,7. Таким образом, на записях испытуемого сейсмоприемника можно выделить отраженные PS - волны и прямые S - волны. Первые меняют свою фазу на 180^0 с изменением на 180^0 фазы продольной волны, порождающей обменную поперечную волну. Вторые меняют фазу на 180^0 с изменением направления возбуждающей силы на обратное (рис. 17).

Таким образом, запись испытуемого сейсмоприемника может быть объяснена тем, что он отзывается только на поперечные волны в месте стоянки этого прибора независимо от того, под каким углом подходит эта волна к сейсмоприемнику (угол подхода прямой и отраженной обменной поперечных волн отличаются друг от друга приблизительно на 90^0). Этот же сейсмоприемник не отзывается на продольную волну независимо от угла подхода её к испытуемому жидкостному сейсмоприемнику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверко Е.М. Движение полого шара в поле плоской поперечной волны. Настоящий сборник.

2. Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А., Максимов Л.А. Модельные исследования движения корпуса сейсмоприемника в поле продольных и поперечных волн. Настоящий сборник.

3. Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А. Сейсмоприемник поперечных волн. Заявка 1377594/26-25 на изобретение от 12/УШ-69.

4. Бабичев А.И. Плоскопараллельное движение жесткого шара в упругой среде. Сб. "Распространение упругих и упруго-пластических волн (материалы Ш Всесоюзного симпозиума). Изд-во "ФАН". Уз. ССР, Ташкент, 1969.

5. Волин А.П., Рудаков А.Г. О сейсморазведочных работах на поперечных волнах. Прикладная геофизика, вып. 15, Гостоптехиздат, 1956.

6. Дрейнер Ч.С., Маккей В., Лис С. Измерительные системы. Машгиз, М., 1960.

7. Жадин В.В. Малогабаритный низкочастотный горизонтальный сейсмоприемник с крутильным подвесом. Сб. П. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, ЛГУ, Л., 1959.

8. Субботин В.М., Кузнецов Ю.И. Гидравлический датчик угловых ускорений. Известия ВУЗов. т. X, № 8, 1967.

9. Яворская И.М. Коротковолновая асимптотика дифракционного поля при палении плоских поперечных волн. ПМИ, т. 29, 1965, 1023.

10. Dranetz A.J. Acselerometer. Патент США, N 2, 280, 333, 1954.

11. Kemp S.T. ISA. Traus, 1962, 1 N 3, p. 263-267.

12. Hausz W. Acseleration sensing devies. Патент США, N 2, 638, 556, 1950.

13. Whitcomb J.H. Geolog. servey proffesional paper. 599, D., 1969.

14. Wolf A. Motion of a Rigid spere in an Acoustic Wave Feild -Geophysica, v 10, 1945.

Е.М. Аверко

ТЕОРИЯ СЕЙСМОПРИЕМНИКА ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

В статье рассматривается связь между смещением в падающей поперечной волне и углом поворота корпуса жидкостного сейсмоприемника поперечных волн, представляющего собой две полых концентрических сферы, между которыми находится жидкость. К внутренней сфере крепится одним концом биморфный пьезоэлемент, другой его конец присоединяется к лопасти, которая при движении жидкости воспринимает на себя её давление и передает его биморфу.

Для составления уравнения движения такого сейсмоприемника в статье рассматривается задача колебания биморфного элемента и лопасти жидкостного сейсмоприемника поперечных волн.

§ I. Колебания лопасти жидкостного сейсмоприемника поперечных волн

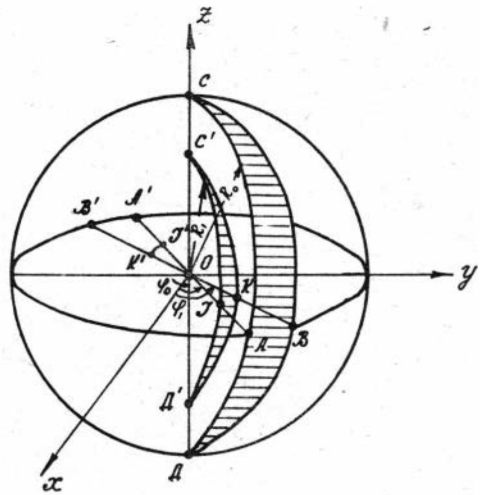
В жидкостном сейсмоприемнике поперечных волн элементом,воздействующим на биморфный преобразователь, является тонкое кольцо (лопасть), совершающее в жидкости вращательные колебания вокруг оси сейсмоприемника.

В настоящем параграфе рассматриваются колебания такой лопасти в невязкой жидкости.

Задача состоит в следующем.

В идеальной невязкой жидкости вращается лопасть около постоянной оси OZ (рис. I), проходящей через геометрический центр О лопасти. Вместо тонкого плоского кольца, лопасть моделируется в виде двух "апельсиновых долек" САВДД'ЭКС' и Д'В'А'СКЭ' (последняя на рис. I не показана).

Требуется найти такие внешние активные силы $\mathcal{F}_k(e)$, которые будучи приложены в точках К = I,2,3... N лопасти на расстоянии (z_{2k} + e) от оси вращения и направлены нормально к по-



Р и с. I. Расположение лопасти в сферической системе координат.

верхности лопасти, являлись бы вынуждающими. Знание таких сил требуется при составлении уравнения движения сейсмоприемника поперечных волн.

Составим уравнение движения лопасти.

Внешний действующий момент относительно оси вращения определится следующим соотношением:

$$\mathcal{M} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}_k(e)\left[r_{2k} + e\right] \qquad (I)$$

Кроме внешнего момента, на лопасть действует момент сил инерции и реактивный момент $\mathcal{M}_r$ сопротивления жидкости при движении лопасти в ней. Сумма этих моментов записывается в форме уравнения движения лопасти:

$$-\mathcal{J}_1\omega^2\Omega = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}_k(e)(r_{2k} + e_1) + \mathcal{M}_r(\Omega) \qquad (2)$$

где $\mathcal{J}_1$ — осевой момент инерции лопасти; Ω — угол поворота лопасти.

Реактивный момент можно найти решением задачи инерционного источника [I], каким является лопасть, колеблющаяся в рассматриваемой невязкой жидкости.

Уравнение движения этой жидкости получаем как частный случай уравнения движения упругой твердой среды при $\mu = 0$. Вводя в рассмотрение продольный потенциал

$$\vec{U}(r,\varphi,\theta,t) = \operatorname{grad} \Phi(r,\varphi,\theta,t) =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \qquad (3)$$

уравнение движения получим в форме волнового уравнения

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{V_{ж}^2}\ddot{\Phi}\ ; \quad \rho_{ж} V_{ж}^2 = \lambda \qquad (4)$$

где $V_{ж}$ - скорость распространения упругих волн в жидкости, $\rho_{ж}$ — её плотность, λ - постоянная Ламэ при $\mu = 0$.

Для стационарной задачи, при которой

$$\Phi(r,\varphi,\theta,t) \to \Phi(r,\varphi,\theta,\omega)\, e^{-j\omega t} \tag{5}$$

волновое уравнение переходит в уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2\Phi + k_p^2\Phi = 0; \quad k_p = \frac{\omega}{V_{ж}} \tag{6}$$

Здесь ω круговая частота колебаний лопасти.

Граничное условие при решении краевой задачи для последнего уравнения заключается в том, что при вращении лопасти нормальная составляющая смещения всех точек лопасти (в том числе и $\mathcal{B}_к$), находящихся на поверхности σ лопасти, перпендикулярной направлению движения, совпадает с φ - той составляющей смещения жидкости в этой же точке:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big|_\sigma = \Omega_1 r\sin\theta\Big|_\sigma$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big|_\sigma = \Omega_1 r^2\sin^2\theta\Big|_\sigma \tag{7}$$

Граничные условия на поверхности, параллельной движению лопасти, рассматривать не будем, считая, что площади их поверхностей по сравнению с поверхностями, ориентированными перпендикулярно движению, пренебрежимо малы. Поэтому как упругое поле, так и реактивный момент, обусловленные параллельной поверхностью, для невязкой жидкости, пренебрежимо малы по сравнению с такими же величинами для перпендикулярной поверхности.

Лопасть будем считать состоящей из двух одинаковых половин, каждая из которых представляет собой "апельсиновую дольку" (рис. I), вырезанную по внешнему радиусу R_0 и внутреннему R_1 и имеющую угловой раствор по долготе, определяемой неравенством:

$$\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1 \tag{8}$$

для дольки СВДАСС'КД'ЭС' и

$$\varphi_0 + \pi \le \varphi \le \varphi_1 + \pi \tag{9}$$

для второй дольки СВ$'$ДА$'$СС$'$К$'$Д$'\mathcal{J}$С (не вычерченной на рис. I).
Под поверхностью σ, вошедшей в граничное условие следует понимать поверхность $\sigma = \sigma_0$, определяемую неравенствами:

$$\begin{aligned} &R_1 \le r \le R_0 \\ &\varphi = \varphi_0 \\ &\varphi = \varphi_0 + \pi; \quad 0 \le \theta \le \pi \end{aligned} \tag{I0}$$

и поверхность $\sigma = \sigma_1$, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} &R_1 \le r \le R_0; \quad \varphi = \varphi_1 \\ &\varphi = \varphi_1 + \pi; \quad 0 \le \theta \le \pi \end{aligned} \tag{II}$$

Обе эти поверхности (σ_0, σ_1) характеризуются одинаковыми по форме уравнениями

$$\begin{aligned} &\kappa_1 \le \kappa^* \le \kappa_0; \quad \varphi = \psi \\ &\varphi = \psi + \pi; \quad 0 \le \theta \le \pi \end{aligned} \tag{I2}$$

где ψ - некоторый фиксированный угол, принимающий значение

$$\psi = \begin{cases} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{cases} \tag{I3}$$

Остальные величины определяются равенствами

$$\begin{aligned} &z_p = \kappa_p r \\ &\kappa_0 = \kappa_p R_0 \\ &\kappa_1 = \kappa_p R \end{aligned} \tag{I4}$$

При учете этого граничное условие достаточно выполнить для поверхности σ, определяемой равенствами (I2).

Общее решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям излучения, следующее [5]:

$$\begin{aligned} &\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z_p) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\left[A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi\right] \\ &h_n^{(1)}(z_p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{z_p}} H_{n+1/2}^{(1)}(z_p) \\ &z_p = \kappa_p \cdot r; \end{aligned} \tag{I5}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots \; n$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь обозначено $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенный полином Лежандра; $h_n(Z_\rho)$ – сферическая функция Ганкеля; $H^{(1)}_{n+1/2}(Z_\rho)$ – функция Ганкеля. A_{nm}; B_{nm} – некоторые постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям, получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(Z_\rho) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\left[-A_{nm}\sin m\varphi + B_{nm}\cos m\varphi\right]\cdot m = \tag{16}$$
$$= \Omega_1 r^2 \sin^2\theta$$

Равенство выполняется только при

$$n = m = 2 \tag{17}$$

т.к.

$$P_2^2(\cos\theta) = \sin^2\theta$$

Используя равенство (13) имеем систему уравнений

$$2h_2(k^*)\left[-A_{22}\sin 2\varphi_1 + B_{22}\cos 2\varphi_1\right] = \Omega\frac{k^{*2}}{k_\rho^2}$$
$$2h_2(k^*)\left[-A_{22}\sin 2\varphi_0 + B_{22}\cos 2\varphi_1\right] = \Omega_1\frac{k^{*2}}{k_\rho^2} \tag{18}$$

Решение этой системы следующее:

$$A_{22} = -\frac{\Omega_1}{2}\,\frac{k^{*2}}{k_\rho^2}\,\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_0)}{\cos(\varphi_1-\varphi_0)}\,\frac{1}{h_2^{(1)}(k^*)}$$
$$B_{22} = \frac{\Omega_1}{2}\,\frac{k^{*2}}{k_\rho^2}\,\frac{\cos(\varphi_1+\varphi_0)}{\cos(\varphi_1-\varphi_0)}\,\frac{1}{h_2^{(1)}(k^*)} \tag{19}$$

Условие

$$\varphi_1 - \varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}(2s+1) \quad (s = 0, 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

и вытекающее из этого условие

$$A_{22} \neq \infty \; ; \quad B_{22} \neq \infty \tag{20a}$$

всегда выполняются, т.к. лопасть считается тонкой.

Подставляя (19) в (15) получаем потенциал поля смещений, возникшего вследствие колебания лопасти:

$$\Phi = \frac{\Omega_1}{2} \frac{k^{*2}}{k_p^*} \cdot \frac{h_2^{(1)}(z_p)}{h_2^{(1)}(k^*)} \sin^2\theta \quad \frac{\sin[2\varphi - (\varphi_1 + \varphi_0)]}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)} \tag{21}$$

Смещения, возникшие в жидкости от такого излучателя, будут следующими:

$$\vec{U} = U_r \vec{e}_r + U_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + U_\theta \cdot \vec{e}_\theta \tag{22}$$

где составляющие определяются формулами:

$$U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\Omega_1}{2} \frac{k^{*2}}{k_p} \frac{h_2^{(1)'}(z_p)}{h_2^{(1)}(k^*)} \sin^2\theta \, \frac{\sin[2\varphi - (\varphi_1 + \varphi_0)]}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)}$$

$$U_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\Omega_1}{2} \frac{k^{*2}}{z_p k_p} \frac{h_2^{(1)}(z_p)}{h_2^{(1)}(k^*)} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\sin(2\varphi - (\varphi_1 + \varphi_0))}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)}\right] \tag{23}$$

$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\Omega_1}{2} \frac{k^{*2}}{z_p k_p} \frac{h_2^{(1)}(z_p)}{h_2^{(1)}(k^*)} \sin 2\theta \frac{\sin[2\varphi - (\varphi_1 + \varphi_0)]}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)}$$

Теперь составим уравнение движения и из него определим функцию Ω.

Напряженное состояние жидкости будет следующим:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda \theta_1$$

$$\theta_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta}(U_\theta \sin\theta)\right] =$$

$$= \frac{\Omega_1}{2} \frac{k^{*2}}{h_2^{(1)}(k^*)} \sin^2\theta \, \frac{\sin[2\varphi - (\varphi_1 + \varphi_0)]}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)} \left[h_2^{(1)*}(z_p) + \frac{2 h_2^{(1)'}(z_p)}{z_p} - 6 \frac{h_2^{(1)}(z_p)}{z_p^2}\right. \tag{24}$$

На поверхности $\sigma = \sigma_0$ и $\sigma = \sigma_1$ будет действовать только напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ соответственно. Эти напряжения для половины лопасти, представленной на рис. I, будут следующими, если использовать уравнение этих поверхностей (I2)-(I4):

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \lambda \frac{\Omega}{2} k^{*2} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)} \frac{\sin^2\theta}{h^2(k^*)} \left\{h_2^{(1)''}(k) + \frac{2h_2'(k^*)}{k^*} - 6 \frac{h_2(k^*)}{k^{2*}}\right\} \tag{25}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$$

Напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$, действующее по внешней нормали к поверхности $\sigma = \sigma_1$ и на её элементарную площадку

$$d\sigma = r\,d\theta\,dr = \frac{k^* dk^* d\theta}{k_p^2} \tag{26}$$

создаст элементарный положительный момент

$$d\mathcal{M}_1 = \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} r \sin\theta \, d\sigma = \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \frac{k^*}{k_p} \sin\theta \, d\sigma \tag{27}$$

Напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ действующее также по внешней нормали, которая для поверхности σ_0 отрицательна, создаст элементарный отрицательный момент

$$d\mathcal{M}_0 = -\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \frac{k^*}{k_p} \sin\theta \, d\sigma \tag{28}$$

Суммируя эти элементарные моменты, получим поверхностную плотность момента, действующего на рассматриваемую половину лопасти. На оставшуюся половину будет действовать такой же момент как по величине, так и по направлению. Учитывая это, можно записать момент, действующий со стороны жидкости на всю боковую поверхность лопасти:

$$-\mathcal{M}_z = 2\int d(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_0) = 2\int \frac{k^*}{\sigma k_p} (\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}) \sin\theta \, d\sigma =$$

$$= 4\int\limits_{\sigma} \frac{k^*}{k_p} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \sin\theta \, d\sigma = \frac{2\Omega\lambda}{k_p^3} tg(\varphi_1 - \varphi_0) N_1 \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{8\Omega\lambda}{3k_p^3} N_1 \cdot tg(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{29}$$

где обозначено:

$$N_1 = N_1(k_1, k_0) = \int\limits_{k_1}^{k_0} \frac{k^{*4} h_2^{(1)''}(k^*) + 2k^{*3} h_2^{(1)'}(k^*) - 6k^{*2} h_2^{(1)'}(k^*)}{h_2^{(1)}(k^*)} dk^* \tag{30}$$

Функции Бесселя от дробного индекса выражаются через элементарные функции:

$$h_2^{(1)}(k^*) = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{k^{*2}} + j\left(\frac{3}{k^{*3}} - \frac{1}{k^*}\right)\right] e^{jk^*} \tag{31}$$

После вычисления подинтегрального выражения в (30) с учетом последнего равенства, получаем:

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(k_1, k_0) = \int\limits_{k_1}^{k_0} \frac{-3k^{*5} + j(k^{*6} - 5k^{*4})}{3k^* + j(3 + k^{*2})} dk^* \qquad (32)$$

При длинных волнах, когда выполняется соотношение

$$k_1 \le k^* \le k_0 << 1 \qquad (33)$$

или:

$$\frac{\ell_0}{\lambda_{ж}} << \frac{1}{2\pi} \qquad (34)$$

где $\lambda_{ж} = \frac{f}{v_{ж}}$ – длина волны, излучаемая лопастью при её колебаниях, функция $\mathcal{N}_1$ оказывается следующей:

$$\mathcal{N}_1 = -\frac{k_0^5}{3}\left(1 - \frac{k_1^5}{k_0^5}\right) \qquad (35)$$

Из уравнения движения (2) находим внешний момент, определяющий искомые силы:

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{F}_k(e)[r_{2k} + e] = \left[\frac{8\lambda}{3k_p^3} \mathcal{N}_1(\varphi_1 - \varphi_0) - J_1\omega^2\right]\Omega \qquad (36)$$

где $tg(\varphi_1 - \varphi_0)$ заменен на его аргумент вследствие того, что рассматривается тонкая лопасть.

Будем предполагать, что точки приложения искомых сил располагаются вблизи экваториальной плоскости. Поэтому расстояния от них до оси вращения можно считать постоянной величиной и все силы $\mathcal{F}_k(e)$ будут одинаковыми, независящими от индекса.

При этом каждая из таких сил определится из (36) следующим равенством:

$$\mathcal{F}(e) = c\Omega$$

$$c \equiv \frac{\frac{8\lambda}{3k_p^3}\mathcal{N}_1(\varphi_1 - \varphi_0) - J_1\omega^2}{(r_2 + e)\mathcal{N}}$$

Итак, если известны угол поворота лопасти, её инерционные свойства и форма, механические свойства жидкости и расположение точки приложения силы, то последняя определяется равенством

(37) при условии, что все силы сосредоточены в одном месте лопасти. Если точки приложения сил располагаются в различных местах лопасти, что силы определяются равенством (36).

§ 2. Колебания биморфного пьезоэлемента

В жидкостном сейсмоприемнике поперечных волн преобразователем механических колебаний в электрические служит биморфный пьезоэлемент. Кроме этого, он находит широкое применение при всевозможных геоакустических исследованиях процессов распространения сейсмических волн в звуковом и ультразвуковом диапазоне частот.

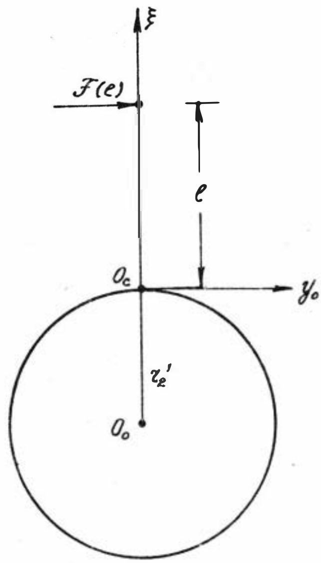
В силу того, что сейсмические волны представляют собой динамический процесс, возникает необходимость рассмотрения колебаний биморфного пьезоэлемента. Его работа в статическом режиме достаточно полно рассмотрена Харкевичем [9], Фурдуевым [8], Thurston E.G. [7]; динамический режим колебаний не рассматривался. Правда, была попытка рассмотреть колебания биморфа на основе применения электромеханических аналогий [3]; однако, введение параметров, не контролируемых в эксперименте, сделали эту попытку, по-видимому, безуспешной.

В настоящем параграфе рассматриваются вынужденные колебания силы, приложенной на одном его конце. Второй конец при этом закреплен на движущемся основании. В таких условиях биморф работает, например, в сейсмоприемнике поперечных волн. Частным случаем таких условий являются вынужденные колебания биморфа при неподвижном основании, где крепится второй конец биморфа. Этот режим соответствует работе биморфа при сейсмомоделировании.

Задача ставится следующим образом.

Биморфный пьезоэлемент закреплен одним концом в точке 0 на основании, которое вращается вокруг некоторого центра O_o. На второй конец биморфа действует сосредоточенная сила $\mathcal{F}(e)$ (рис. 2). Требуется определить электрическое напряжение, возникающее на выходе такого пьезоэлектрического преобразователя-генератора, как функцию этой силы и параметров движения (вращения) закрепленного конца биморфного пьезоэлемента.

Для решения этой задачи введем прямоугольную систему координат (O_c, y_o, ξ), жестко связанную с биморфным элементом



Р и с. 2. К задаче о колебаниях биморфного пьезоэлемента на вращающемся основании.

таким образом, что её начало совмещено с точкой закрепления биморфа, ось $O_c\xi$ направлена по его оси, а ось $O_c y_o$ - перпендикулярно плоскости этого пьезоэлемента.

Колебания биморфного пьезоэлемента описываются уравнением изгибных колебаний пластины [9]:

$$EJ\frac{d^4 y_o(\xi)}{d\xi^4} - m_o\omega^2 y_o(\xi) = 0 \qquad (2.1)$$

где $y_o(\xi)$ частотный спектр смещения пластины в направлении, перпендикулярном её плоскости; m_o - погонная масса пластины; ω - круговая частота стационарного режима колебаний пластины; E - модуль Юнга пластины; J - момент инерции её поперечного сечения.

Граничные условия для рассматриваемых колебаний биморфа будут следующими:

$$y(\xi)\big|_{\xi=0} = r_2'\cdot\Omega \qquad (2.2)$$

$$y'(\xi)\big|_{\xi=0} = tg\,\Omega \approx \Omega \qquad (2.3)$$

$$P(\xi)\big|_{\xi=e} + \mathcal{F}(e) = 0 \qquad (2.4)$$

$$\mathcal{M}(\xi)\big|_{\xi=e} = 0 \qquad (2.5)$$

где обозначено: r_2' - расстояния от центра вращения до точки закрепления конца биморфа; Ω - угол поворота этого конца; $P(\xi)$ - - перерезывающая сила в сечении $\xi=\xi$; $\mathcal{M}(\xi)$ изгибающий внутренний момент в этом сечении.

Для биморфного пьезоэлемента момент, найденный в [9] и справедливый как для статического, так и динамического режимов, определяется следующим равенством:

$$\mathcal{M}(\xi) = f\varepsilon_\xi\frac{bh}{2}v + EJy_o''(\xi) \qquad (2.6)$$

где f - пьезоэлектрическая константа; ε_ξ - диэлектрическая постоянная пьезоматериала, определенная при отсутствии деформации биморфа; V - электрическое напряжение на обкладках пьезоэлемента при бесконечно большом нагрузочном сопротивлении внешней электрической цепи; b, h, l - ширина, толщина и длина биморфа.

В рассматриваемой задаче на свободный конец стержня не действует момент. Это значит, что выполняется соотношение

$$\mathcal{M}(\xi)=f\varepsilon_\xi\frac{bh}{2}V+EJy_0''(\xi)\Big|_{\xi=l}=0 \qquad (2.7)$$

Перерезывающая сила определяется соотношением:

$$P(\xi)=-EJy_0'''(\xi) \qquad (2.8)$$

С учетом последующих равенств граничные условия переписываются в виде:

$$y(\xi)\Big|_{\xi=0}=r_2'\Omega \qquad (2.9)$$

$$y'(\xi)\Big|_{\xi=0}=\Omega \qquad (2.10)$$

$$y''(\xi)\Big|_{\xi=l}=-aV \qquad (2.11)$$

$$y'''(\xi)\Big|_{\xi=l}=\frac{\mathcal{F}(l)}{EJ} \qquad (2.12)$$

где введено обозначение

$$a\equiv f\varepsilon_\xi\frac{bh}{2}\cdot\frac{1}{EJ} \qquad (2.13)$$

Таким образом, задача для колебания биморфного пьезоэлемента заключается в решении уравнения (2.I) при граничных условиях (2.9) -(2,I2).

Перепишем решаемое уравнение в виде:

$$y_0^{(IV)}(\xi)-b_0^4y_0(\xi)=0 \qquad (2.14)$$

где обозначено:

$$b_0^4=\frac{m_0\omega^2}{EJ} \qquad (2.15)$$

Вводя преобразования Лапласа

$$y_0(\xi) \div \varphi(P) \qquad (2.16)$$

получаем следующее решение уравнения (2.10) при отсутствии распределенной нагрузки [6]:

$$\varphi(P) = \frac{p^3}{p^4 - b_0^4} y_0(0) + \frac{p^2}{p^4 - b_0^4} y_0'(0) + \frac{p}{p^4 - b_0^4} y_0''(0) + \frac{1}{p^4 - b_0^4} y_0'''(0) \qquad (2.17)$$

Используем следующие изображения по Лапласу [48]:

$$\frac{p^3}{p^4 - b_0^4} \div \frac{1}{2}[ch\, b_0\xi + \cos b_0\xi] = S(b_0\xi) \qquad (2.18)$$

$$\frac{b_0 p^2}{p^4 - b_0^4} \div \frac{1}{2}[sh\, b_0\xi + \sin b_0\xi] = T(b_0\xi)$$

$$\frac{b_0^2 p}{p^4 - b_0^4} \div \frac{1}{2}[ch\, b_0\xi - \cos b_0\xi] = U(b_0\xi)$$

$$\frac{b_0^3}{p^4 - b_0^4} \div \frac{1}{2}[sh\, b_0\xi - \sin b_0\xi] = V(b_0\xi)$$

Функции S, T, U, V называются функциями А.Н. Крылова.

Применив обратное преобразование Лапласа к равенству (2.17) с использованием последних соотношений, получим решение в виде:

$$y_0(\xi) = y_0(0) S(b_0\xi) + \frac{y_0'(0)}{b_0} T(b_0\xi) + y_0''(0) \frac{U(b_0\xi)}{b_0^2} + \frac{y_0'''(0)}{b_0^3} V(b_0\xi) \qquad (2,19)$$

Дифференцируя последнее равенство по переменной ξ и подставляя в полученные выражения для $y_0'(\xi)$; $y_0''(\xi)$; $y'''(\xi)$ граничные условия, получим следующую систему уравнений для определения неизвестных величин

$y''(0)$ и $y'''(0)$: (2.20)

$$y''(0) \cdot S + y'''(0) \cdot \frac{T}{b_0} = A$$

$$y''(0) \cdot b_0 V + y'''(0) \cdot S = B$$

где обозначено:

$$\mathcal{A} \equiv -[aV + (r_2' U + V) b_0 \Omega] \qquad (2.21)$$

$$\mathcal{B} \equiv \frac{\mathcal{F}(e)}{EJ} - \Omega b_0^2 (r b_0 T + V)$$

Здесь и в дальнейшем функции Крылова без указания аргумента означают, что их аргумент есть $b_0 e$.

Решая полученную систему и используя два первых равенства граничных условий, получим согласно соотношению (2.19) следующее искомое решение колебаний биморфного пьезоэлемента:

$$y(\xi) = \eta_0 \cdot \Omega r_2' + \eta_1 \cdot V + \eta_2 \mathcal{F}(e) \qquad (2.22)$$

где введем обозначения:

$$\eta_0 = S(b_0\xi) + \frac{T(b_0\xi)}{b_0 r_2'} - \frac{(r_2' b_0 U + V)[SU(b_0\xi) - V \cdot V(b_0\xi)] + (b_0 r_2' T + U)[TU(b_0\xi) + SV(b_0\xi)]}{b_0 r_2' \cdot \mathcal{D}(b_0 e)}$$

$$\eta_1 = \frac{a}{b_0^2 \mathcal{D}(b_0 e)} [V \cdot V(b_0\xi) - SU(b_0\xi)] \qquad (2.23)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{EJ b_0^3 \mathcal{D}(b_0 e)} [SV(b_0\xi) - TU(b_0\xi)]$$

$$\mathcal{D}(b_0 e) = S^2 - VT$$

Таким образом, при колебаниях биморфного пьезоэлемента, на свободный конец которого действует сосредоточенная сила, а другой конец которого закреплен на основании, совершающем малые вращательные колебания, смещение которого описывается формулой (2.22), это смещение зависит от действующей сосредоточенной силы $\mathcal{F}(e)$, от электрического напряжения V, возникшего на обкладках биморфа, от смещения $(\Omega r_2')$ основания от геометрических размеров и его частотных свойств ($b_0 e$), от его пьезоэлектрических (a) и прочностных (EJ) характеристик, от местоположения точки (ξ) биморфа.

Если основание не вращается, покоится, то $\Omega = 0$ и смещение

$$y_0(\xi)/_{\Omega=0} = \eta_1 v + \eta_2 \mathcal{F}(e) \tag{2.24}$$

представляет собой изгиб биморфного пьезоэлемента при неподвижном закрепленном конце.

Если основание покоится и при этом, вместо биморфа, рассматривается обычная пьезоэлектрическая пластина ($a = 0$), то её деформация в динамическом режиме оказывается следующей:

$$y_0(\xi)/_{\substack{\Omega=0\\ a=0}} = \eta_2 \mathcal{F}(e) \tag{2.25}$$

Такой изгиб совпадает с известной формулой поперечноколеблющейся пластины, на один конец которой действует, сосредоточенная сила, а другой конец жестко закреплен [48].

§ 3. Уравнение вращения корпуса сейсмоприемника

Уравнение вращения корпуса сейсмоприемника сферической формы в поле поперечной волны составлено [Iа] и определяется таким образом:

$$-J_n \omega^2 \Omega r_0 = m_n v_s^2 \mathcal{B}(e_1) U + r_0 M_{nz} \tag{3.I}$$

где J_n - присоединенный осевой момент инерции корпуса сейспоприемника; m_n - его присоединенная масса; ω - круговая частота; r_0 - радиус сферического корпуса (внешней сферы сейсмоприемника); Ω - угол поворота корпуса; v_s - скорость распространения поперечной волны в среде, где располагается сейсмоприемник; U - смещение в падающей поперечной волне; M_{nz} - реактивный момент, действующий на корпус со стороны преобразовзтеля.

$$\mathcal{B}(e_1) = \frac{9}{4} e_1 \left(\frac{\sin e_1}{e_1} - \cos e_1 \right) \cdot \frac{-e_1 + j\left(\frac{3}{e_1^2} - 4\right)}{1 + e_1^2} \tag{3.2}$$

$$e_1 = \frac{\omega r_0}{v_s}$$

Рассматриваемое вращение, описывающееся уравнением (3.I), происходит вокруг оси, перпендикулярной направлению вектора смещения поперечной волны и направлению её распространения. Реактивный момент рассматривается относительно этой оси. Такой момент для рассматриваемого сейсмоприемника найдем как сумму всех моментов, возникающих от действия сил реакции $\mathcal{F}_k(0)$ в месте закрепления биморфа на внутренней сфере:

$$\vec{\mathcal{M}}_n = \mathcal{M}_{nz} \cdot \vec{k}$$

$$\mathcal{M}_{nz} = P \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}_k(0)\, r_2 \sin\theta_k \qquad (3.3)$$

где P - число лопастей в сейсмоприемнике, N - число биморфов, прикрепленных к одной лопасти; r_2 - радиус внутренней сферы; θ_k - полярное расстояние точки закрепления биморфа на внутренней сфере, если сферическая система координат выбрана с началом в геометрическом центре сферы (рис. 3). Перерезывающая сила $P_k(0)$ биморфа в месте его закрепления уравновешивается силой $\mathcal{F}_{k\delta}(0)$ действия корпуса на биморф:

$$P_k(0) + \mathcal{F}_{k\delta}(0) = 0 \qquad (3.4)$$

Сила $\mathcal{F}_k(0)$ действия биморфа на корпус в месте закрепления, очевидно, равна следующему:

$$\mathcal{F}_k(0) = -\mathcal{F}_{k\delta}(0) \qquad (3.5)$$

Учитывая формулу для перерезывающей силы:

$$P_k(0) = -EJ y_0'''{}_k(0) \qquad (3.6)$$

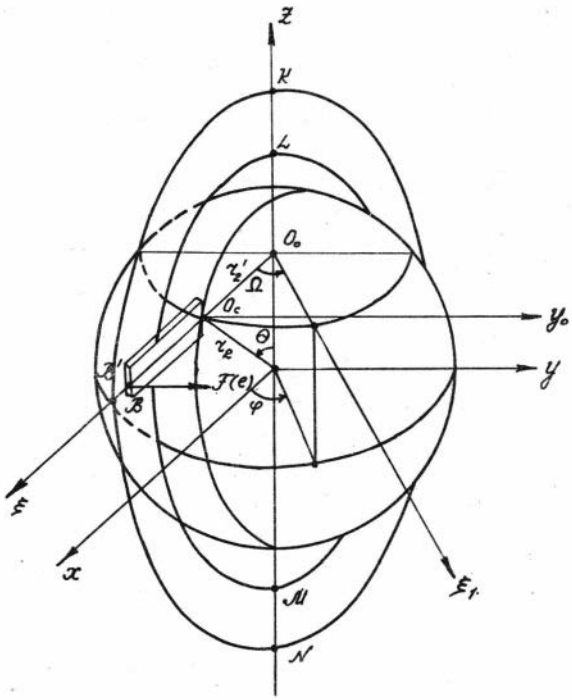
получаем:

$$\mathcal{F}_k(0) = -EJ y_0'''{}_k(0) \qquad (3.7)$$

Функция $y_{0k}(\xi)$ - есть смещение К-того биморфа, перпендикулярное его плоскости; ξ — расстояние от закрепленного конца до рассматриваемого сечения биморфа.

Решая уравнение (2.20) относительно третьей производной $y_{0k}'''(0)$, взятой в нуле, и подставляя её вначале в (3,7), а затем - в (3.3), получаем

$$\mathcal{M}_{nz} = +(A_p \Omega + B_p v) \qquad (3.8)$$



Р и с. 3. К выводу уравнения вращения корпуса сейсмоприемника.

$$A_p = \frac{PNEJ r_2 b_0^2}{D(b_0 e)}\left\{\left[\frac{c}{b_0^2 EJ} - (U + b_0 r_2 T)\right]\delta + (V + b_0 r_2 U)V\right\}$$

$$B_p = \frac{PNEJ r_2 b_0 a V}{D(b_0 e)}$$

где величина "С" определена равенством (I.37).

При получении этих формул считалось, что все биморфы закреплены вблизи экваториальной плоскости сферического корпуса сейсмоприемника, и поэтому выполняются равенства

$$\theta_k = \theta \simeq \frac{\pi}{2};\ y_{0k}(\xi) = y_0(\xi);\ \mathcal{F}_k(e) = \mathcal{F}(e)$$

$$r_2' = r_2 \sin\theta \simeq r_2$$

Подставляя найденный момент в формулу (3.I), получаем искомое уравнение движения корпуса жидкостного сейсмоприемника:

$$-(J_n\omega^2 + A_p)\Omega r_0 = m_0 v_s^2 \beta(e_1) U - B_p r_0 V \qquad (3.9)$$

Его решение следующее:

$$\Omega = A_\Omega U - B_\Omega V \qquad (3.10)$$

при введенных обозначениях:

$$A_\Omega = \frac{m_0 v_s^2 \beta(e_1)}{A_p + J_n\omega^2}\,\frac{1}{r_0} \qquad (3.11)$$

$$B_\Omega = \frac{B_p}{A_p + J_n\omega^2}$$

Формула (3.I0) определяет угол поворота корпуса жидкостного сейсмоприемника, если известно смещение в падающей поперечной волне и напряжение, возникшее на обкладках биморфа вследствие падения этой волны. При этом предполагается, что ось OZ вращения преобразователя установлена ориентацией корпуса так, что она перпендикулярна вектору смещения в падающей волне и направлению распространения этой волны.

§ 4. Отклик жидкостного сейсмоприемника поперечных волн

Откликом жидкостного сейсмоприемника является электрический сигнал, снимаемый с нагрузочного комплексного сопротивления, подключенного к электрическому выходу биморфных пьезоэлементов, соединенных параллельно для всех лопастей.

В рассматриваемом преобразователе жидкостного сейсмоприемника биморфный элемент работает в режиме, при котором один конец жестко зажат во вращающемся основании, а на другой конец действует сосредоточенная сила в точке крепления свободного конца биморфа к лопасти.

Чтобы найти отклик одного биморфного пьезоэлемента, используем следующие уравнения биморфного пьезопреобразователя - генератора [9]:

$$\mathcal{M}(\xi)=f\frac{bh}{2}\varepsilon_{\xi}v+EJy_0''(\xi) \qquad (4.1)$$

$$\mathcal{M}(\xi)=f\frac{bh^2}{4}\mathcal{D}+E_{\mathcal{D}}Jy_0''(\xi) \qquad (4.2)$$

$$v=\frac{1}{C_1}q+\frac{3}{2}\frac{f}{E_{\mathcal{D}}}\frac{1}{blh}\int_0^l\mathcal{M}(\xi)\,d\xi \qquad (4.3)$$

$$q=2b\int_0^l\mathcal{D}\,d\xi \qquad (4.4)$$

где $\mathcal{M}(\xi)$ - перерезывающий (внутренний) момент в сечении биморфного пьезоэлемента: $\mathcal{D}$ - индукция; q - заряд на обкладках биморфа; b и h - ширина и толщина этого пьезоэлемента; $C_1=\frac{4bl}{h}\varepsilon$ - полная емкость элемента.
Эти четыре уравнения связывают пять неизвестных: $\mathcal{M}(\xi)$; v; $y_0''(\xi)$; $\mathcal{D}$; q. Для полноты системы уравнений, определяющих эти неизвестные, необходимо ещё одно уравнение. Оно определится, если использовать равенства (2.22), (1.37) и (3.10). Подстановкой двух последних равенств в первое и двойным диффрен-

цированием по ξ полученного таким образом уравнения находится недостающее соотношение:

$$y_0''(\xi) = (\eta_0'' \tau_2 + \eta_2'' C) A_\Omega U + [\eta_1'' - B_\Omega (\eta_0'' \tau_2 + \eta_2'' C)] V \quad (4.5)$$

Теперь система уравнений (4.I)-(4.5) оказывается полной относительно пяти названных неизвестных. Подставляя (4.5) в (4.I) и полученное таким способ значение момента – в (4.3), приходим к следующей зависимости:

$$V - \alpha_1 q = \alpha_2 U \quad (4.6)$$

где обозначено:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\gamma_1 c_1} \quad (4.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2\gamma_1} \frac{f}{E_D} \frac{EJ}{bhe} [\eta_0'(e)\tau_2 - 1 + \eta_2'(e) \cdot C] A_\Omega$$

$$\gamma_1 = 1 - \frac{3}{2} \frac{f}{E_D} \left\{ \frac{f\varepsilon_\xi}{2} + \frac{EJ}{belh} [\eta_1'(e) - B_\Omega (\eta_0'(e)\tau_2 - 1 + \eta_2'(e) C)] \right\}$$

Приравниванием правых частей уравнений (4.I) и (4.2) и интегрированием по ξ от нуля до e получившегося равенства определяется второе уравнение, связывающее величины V и q :

$$V - \alpha_3 q = \alpha_4 U \quad (4.8)$$

при обозначениях:

$$\alpha_3 = \frac{fh^2}{} \cdot \frac{1}{\gamma_2};$$

$$\alpha_4 = \frac{(E_D - E) J [\eta_0'(e)\tau_2 - 1 + \eta_2'(e) C] A_\Omega}{\gamma_2}$$

$$\gamma_2 = f \frac{bhe}{2} \varepsilon_\xi - [\eta_1'(e) - B_\Omega (\eta_0'(e)\tau_2 - 1 + \eta_2'(e) C)][E_D - E] \cdot J \quad (4.9)$$

После решения уравнений (4.6) и (4.8) находим интересующие нас величины:

$$V = \delta \cdot U \quad (4.10)$$

$$q = \rho \cdot U \qquad (4.11)$$

где: (4.12)

$$\delta = \frac{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

$$\rho = \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

Знание величины δ и ρ позволяет найти отклик рассматриваемого сейсмоприемника.

Величины v и q суть напряжения и заряд биморфа при разомкнутой внешней цепи. Они различны для биморфов, закрепленных в различных точках поверхности внутренней сферы, но для каждого такого элемента они определяются формулами (4.10) и (4.11), в которых коэффициенты будут зависеть от места закрепления. Обозначим для одного биморфа эти величины через v_k и q_k.

Ток холостого хода для к-того биморфа определится следующим образом:

$$i_k = J_k = j\omega q_k \qquad (4.13)$$

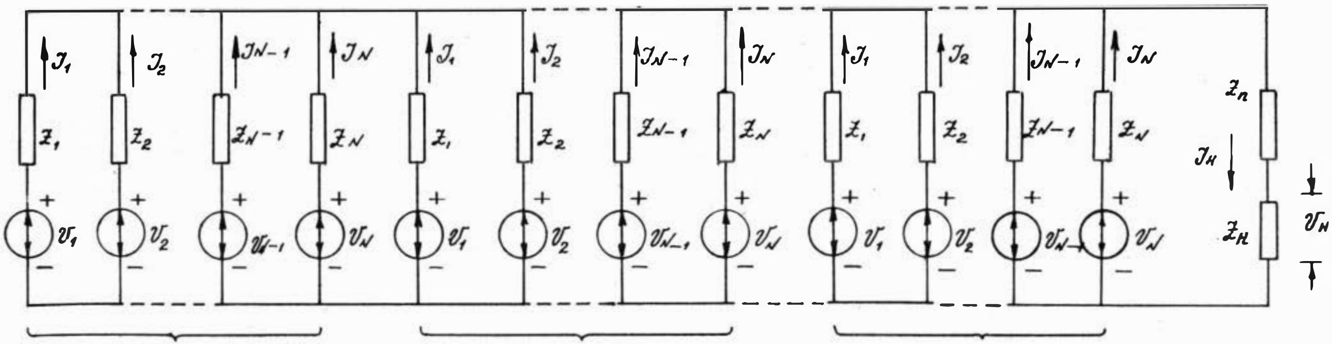
Если биморфный генератор рассматривать как некоторый источник энергии, то его внутреннее сопротивление находим как отношение напряжения на зажимах источника энергии к току холостого хода [4]:

$$Z_k = \frac{v_k}{i_k} = \frac{v_k}{j\omega q_k} = \frac{\delta_k}{j\omega \rho_k} \qquad (4.14)$$

Величину v_k можно рассматривать как электродвижущую силу такого источника, т.к. она определена как напряжение на зажимах источника энергии при разомкнутой внешней цепи.

В рассматриваемом сейсмоприемнике все биморфные пьезоэлементы соединяются параллельно и нагружаются некоторым комплексным сопротивлением ($Z_н + Z_п$), где $Z_н$ - нагрузочное сопротивление, напряжение с которого является откликом сейсмоприемника, $Z_п$ - баластное сопротивление, например, подводящих проводов (рис. 4)

Используя первые и второй законы Кирхгофа для рассматриваемой электрической схемы, приходим к системе уравнений:



Р и с. 4. Принципиальная электрическая схема параллельного соединения биморфов в каждой лопасти при параллельном соединении лопастей.

$$
\begin{cases}
P\sum\limits_{k=1}^{N} \mathcal{J}_k = \mathcal{J}_н \\
\mathcal{V}_k = \mathcal{Z}_k \mathcal{J}_k + \mathcal{J}_н (\mathcal{Z}_п + \mathcal{Z}_н) \\
\mathcal{V}_н = \mathcal{J}_н \cdot \mathcal{Z}_н
\end{cases}
\qquad (.15)
$$

где $\mathcal{J}_к$, $\mathcal{J}_н$ ток, текущий через к-тый биморф и сопротивление нагрузки соответственно, $\mathcal{V}_н$ – падение напряжения на этом сопротивлении.

Её решение следующее:

$$
\mathcal{J}_н = \frac{P\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\mathcal{V}_k}{\mathcal{Z}_k}}{1 + (\mathcal{Z}_н + \mathcal{Z}_п) P\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\mathcal{Z}_k}} \qquad (4.16)
$$

$$
\mathcal{V}_н = \frac{P\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\mathcal{V}_k}{\mathcal{Z}_k}}{1 + (\mathcal{Z}_н + \mathcal{Z}_п) P\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\mathcal{Z}_k}} \mathcal{Z}_н \qquad (4.17)
$$

Если все биморфы крепятся вблизи экватора внутренней сферы, то электродвижущая сила и внутреннее сопротивление каждого биморфа одинаковы:

$$
q_к = q; \; \mathcal{V}_к = \mathcal{V} = \delta \cdot U; \; \mathcal{Z}_к = \mathcal{Z} = \frac{\delta}{j\omega \mathcal{f}} \qquad (4.18)
$$

Отклик жидкостного сейсмоприемника определяется, если указанные величины подставить в уравнение (4.17):

$$
\mathcal{V}_н = \frac{\delta}{1 + \frac{\mathcal{Z}_п}{\mathcal{Z}_н} + \frac{1}{j\omega \mathcal{Z}_н} \cdot \frac{\delta}{\mathcal{f}} \cdot \frac{1}{PN}} \cdot U \qquad (4.19)
$$

Эта формула справедлива для однокомпонентного сейсмоприемника сориентированного так, что ось вращения преобразователя (лопасти) перпендикулярна вектору смещения и направлению распространения падающей поперечной волны.

Такой отклик зависит от пьезоэлектрических констант и геометрических размеров биморфа, от его расположения на внутренней сфере сейсмоприемника, от плотности жидкости и скорости распространения упругой волны в ней, от геометрических размеров и формы лопасти, от их количества и числа отдельных пьезоэлементов на каждой лопасти и, наконец, – от длины падающей поперечной волны и внешнего радиуса корпуса сейсмоприемника. Все эти зависимости целесообразней исследовать для того случая, когда частота падающей поперечной волны может считаться достаточно малой. Это наблюдается в сейсморазведке и - тем более - в ГСЗ и сейсмологии, где размер сейсмоприемника выбирается достаточно малым. Этот случай рассмотрен в следующем параграфе.

Как следует из формулы (4.I9), отклик жидкостного сейсмоприемника поперечных волн линейно зависит от смещения в падающей поперечной волне. Это дает возможность ввести частотную характеристику такого сейсмоприемника. Введем её как отношение частотного спектра электрического напряжения на комплексном нагрузочном сопротивлении к частотному спектру смещения в падающей поперечной волне. При этом из формулы (4.I9) получим значение этой характеристики:

$$S_{uv} = \frac{\delta}{1 + \frac{Z_n}{Z_н} + \frac{1}{j\omega Z_н} \cdot \frac{\delta}{\rho} \cdot \frac{1}{PN}} \qquad (4.20)$$

Следует заметить, что она выражает трансформирующие свойства жидкостного сейсмоприемника только при указанной выше ориентации оси вращения преобразователя относительно падающей волны.

Эта характеристика позволяет найти спектр отклика жидкостного сейсмоприемника известному спектру смещения в поперечной волне (прямая задача сейсмоприемника). Обратный фильтр, соответствующий рассматриваемой характеристике, позволяет в некоторых случаях решить обратную задачу: по заданному отклику найти смещение в падающей волне.

Прямая задача решается умножением входной величины (смещение в волне) на частотную характеристику сейсмоприемника.

Обратная задача решается умножением отклика сейсмоприемника на обратный фильтр, соответствующий частотной характеристике сейсмоприемника.

§ 5. Отклик жидкостного сейсмоприемника для низкочастотных поперечных волн

Будем рассматривать достаточно низкочастотные поперечные падающие волны, частоты которых удовлетворяют соотношению:

$$\omega < \omega_0 = \frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{m_0}} \qquad (5.I)$$

При этом выполняется неравенство:

$$b_0 l \ll 1 \tag{5.2}$$

и функции Крылова в первом приближении оказываются следующими:

$$U(b_0 l) \simeq \frac{(b_0 l)^2}{2}; \qquad V(b_0 l) \simeq \frac{(b_0 l)^3}{6}; \tag{5.3}$$

$$T(b_0 l) \simeq b_0 l; \qquad S(b_0 l) \simeq D(b_0 l) \simeq 1$$

Вычисляя производные $\eta_0'(l);\ \eta_1'(l);\ \eta_2'(l)$ получаем их значение в первом приближении:

$$\eta_0'(l) = \frac{1}{r_2} - b_0^2 l; \qquad \eta_1'(l) = -al; \quad \eta_2'(l) = -\frac{l^2}{EJ} \tag{5.4}$$

При этом величины A_p и B_p оказываются следующими:

$$A_p \simeq PNr_2 C$$
$$B_p \simeq PNEJa(b_0 r_2)\frac{(b_0 l)^3}{6} \tag{5.5}$$

Если вычислить осевой момент инерции лопасти

$$J_л = 2\rho_л \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_{R_1}^{R_0} r^4 dr = \frac{8(\varphi_1 - \varphi_0)}{15} R_0^5 \left(1 - \frac{R_1^5}{R_0^5}\right) \approx$$

$$\approx \frac{8}{15}(\varphi_1 - \varphi_0) R_0^5 \rho_л$$

и учесть, что при низких частотах

$$\omega \ll \frac{v_ж}{R_0} \tag{5.6}$$

выполняется соотношение

$$N_1 \approx -R_0^5 \tag{5.7}$$

то функция "C" определится следующим соотношением:

$$C = -\frac{8}{15}\, \frac{\omega^2 R_0^5 (\varphi_1 - \varphi_0)}{(r_2 + l)N}(\rho_л + 5\rho_ж) \tag{5.8}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняются неравенства:

$$\mathcal{A}^* \ll \mathcal{B}^* \qquad (5.9)$$

где A^* и B^* — величины, сведенные в таблицу I.

Таблица I

№№ п/п	A^*	B^*
I	$\frac{b_0^2 r_2}{\lvert C\rvert}$	$\frac{l}{EJ}$
2	$PN r_2 \lvert C\rvert$	$J_n \omega^2$
3	1	$\frac{fh^2}{8}\frac{E}{E_D}\cdot\frac{\lvert\beta_0\rvert}{l}\lvert C\rvert\beta_\Omega$
4	$f\varepsilon_E$	$\frac{h^2(E_D-E)}{6lE}\lvert\beta_0\rvert\lvert C\rvert\beta_\Omega$
5	$\frac{3}{4}\frac{f}{\frac{E_D}{E}-1}$	$\frac{2E_D}{bl\varepsilon fh}$
6	$\frac{\frac{E_D}{E}-1}{\gamma_2}$	$\frac{3}{2}\frac{1}{\gamma_1}\frac{f}{E_D}\frac{1}{bhl}$
7	$\frac{\frac{E_D}{E}-1}{C_1}$	$\frac{3f^2h}{16}\frac{1}{bl}$

Здесь введено обозначение:

$$\beta_0 = \eta_2'(l) + \frac{\eta_0'(l)\, r_2 - 1}{C} \qquad (5.10)$$

Проверка выполнения неравенств (5.9) производилась для пьезоматериала из сегнетовой соли и цирконата-титаната свинца, а также для таких геометрических размеров сейсмоприемника и свойств упругой среды, которые могут быть реализованы практически. Эта проверка показала удовлетворительное выполнение указанных неравенств.

Искомые функции δ и $\frac{\delta}{\zeta}$ при этом оказываются следующими:

$$\delta = 5{,}15 \cdot j \frac{\lambda_s r_0^3 h v_1^2 \rho}{r_2 e^3 b P N} \frac{1}{f \varepsilon_\varepsilon} \tag{5.11}$$

$$\frac{\delta}{\zeta} = 2{,}14 \cdot 10^{-1} \left(\frac{h}{e}\right)^2 \frac{E_D}{f^2 \varepsilon \varepsilon_\varepsilon} \frac{\lambda_s^2 \lambda^2 h (r_2 + e)}{r_0^2 r_2 e^3 b} \frac{\rho}{\rho_1 + 5\rho_{ж}} \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0} \tag{5.12}$$

где введены обозначения: v_1 – скорость распространения продольных колебаний в материале биоморфа; λ – длина волны таких колебаний в этом же преобразователе.

Этими функциями, а также паразитным и нагрузочным сопротивлением полностью определяется по формуле (4.20) частотная характеристика сейсмоприемника поперечных волн.

При её исследовании следовало бы рассмотреть два крайних случая, соответствующих малому и большому внутреннему сопротивлению биморфов по сравнению с сопротивлением нагрузки. Однако, полученные формулы (5.11) и (5.12) справедливы только при выполнении (5.9) и согласно таблице 1 неравенство

$$PN \gg \frac{1}{j\omega (Z_н + Z_п)} \frac{\delta}{\zeta} \tag{5.13}$$

соответствующее малому внутреннему сопротивлению биморфов противоречит требованию малости общего числа этих преобразователей, примененных в сейсмоприемнике. В это же время неравенство, обратное (5.13), не противоречит условию (5.9) и соответствует достаточно большому сопротивлению биморфов по сравнению с нагрузочным и паразитным сопротивлением.

Достичь малое сопротивление пьезопреобразователей при малых нагрузочных сопротивлениях сейсмической косы в настоящее время затруднительно.

Поэтому целесообразно рассматривать только случай большого внутреннего сопротивления биморфных пьезопреобразователей и вытекающего из этого условия следующего из неравенства:

$$g = PN << \frac{1}{j\omega (Z_н + Z_п)} \cdot \frac{\delta}{\varsigma} \qquad (5.14)$$

При этом частотная характеристика сейсмоприемника будет следующей:

$$S_{uv} = -\frac{1.59\, \alpha P Z_н}{v_s} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \frac{r_0^6 (\varphi_1 - \varphi_0)}{r_2 + l} (\rho_1 + 5\rho_ж)\omega^4 \qquad (5.15)$$

при введенном коэффициенте

$$\alpha = \frac{f\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad (5.16)$$

характеризующем пьезоматериал биморфных преобразователей. Размость этого коэффициента в системе МКСА равна $\frac{\Phi M}{K}$.

При получении формулы (5.15) считалось, что внешний радиус лопасти равен приближенно радиусу сферы корпуса сейсмоприемника.

Эта формула определяет частотную характеристику жидкостного сейсмоприемника поперечных волн при следующих ограничениях:

1) падающая волна достаточно низкочастотная.
2) биморфные пьезоэлементы крепятся вблизи экваториальной плоскости;
3) ось вращения преобразователя перпендикулярна вектору смещения падающей поперечной волны и направлению её распространения;
4) сопротивление нагрузки и баласта мало по сравнению с внутренним сопротивлением PN биморфов.

Первое ограничение, очевидно, для достаточно малых размеров корпуса сейсмоприемника заведомо выполняется.

Второе ограничение при конструировании сейсмоприемника рационально выполнить, т.к. биморфы, закрепленные вблизи оси вращения будут генерировать меньшее напряжение по сравнению с биморфами, закрепленными вдали от этой оси.

Третье ограничение предполагает знание направления подхода принимаемой поперечной волны. При этом условие ограничения выполняется ориентацией оси вращения преобразователя.

При исследовании общих свойств сейсмоприемника будем предполагать, что четвертое условие выполнимо.

Из формулы для частотной характеристики жидкостного сейсмоприемника можно сделать следующие выводы.

Чувствительность сейсмоприемника прямо пропорциональна числу лопастей. Подставляя в формулу (5.15) число биморфов на одной лопасти, определенное из равенства (5.14), получили, что чувствительность сейсмоприемника пропорциональна также общему числу биморфов, примененных в данном сейсмоприемнике, и обратно пропорциональна числу таких преобразователей, прикрепленных к одной лопасти. Отсюда следует, что для увеличения чувствительности выгоднее при конструировании сейсмоприемника увеличивать число лопастей, уменьшая при этом число биморфов, прикрепленных к одной лопасти. Общее число биморфов также выгодно увеличивать. Максимальное такое число ограничено неравенством (5.14). Оно прямо пропорционально кубу толщины биморфного элемента, модулю упругости, квадрату длины волны падающей в биморфе, расстоянию от точки крепления биморфа на лопасти до центра сферического корпуса сейсмоприемника, плотности упругой среды. Это максимальное число обратно пропорционально квадратам пьезоэлектрической и диэлектрической постоянной материала биморфа, кубу длины биморфа и первой степени его длины, квадрату внешнего радиуса корпуса сейсмоприемника и первой степени радиуса внутренней сферы, суммарной плотности лопасти и пятикратной плотности жидкости, а также толщине (в радианах) лопасти.

При следующих значениях указанных выше величин:x)

$$
\begin{array}{lll}
h = 1\cdot 10^{-3} & r_2 = 5\cdot 10^{-2} & E_D = 4{,}54\cdot 10^{11} \\
\ell = 2\cdot 10^{-2} & r_0 = 10^{-1} & f = 10^{5} \\
b = 5\cdot 10^{-3} & \dfrac{\rho}{\rho_e + \rho_{ж}} \simeq 1 & \varepsilon = 1{,}19\cdot 10^{-1} \\
\lambda_s = 20\ \text{м} & & \varepsilon_p = 6{,}9 \\
\lambda = 84\ \text{м} & \varphi_1 - \varphi_0 = 10^{-2} & \omega = \pi\, 10^{2}
\end{array}
$$

которые легко могут быть реализованы в практике конструирования сейсмоприемника при использовании биморфов из сегнетовой соли, общее максимальное число биморфов оценивается величиной порядка

---

x) Пьезоэлектрические константы взяты из [2; 2a].

$$g << \frac{4\cdot 10^{11}}{Z_н + Z_п}$$

где все величины даны в системе МКСА.

Из этого неравенства следует, что даже при сопротивлении нагрузки, оцениваемой величиной один мегом (что значительно больше практически достижимой), допустимое общее число биморфов, которые могут быть применены в сейсмоприемнике оценивается числом порядка 10^5. Естественно, такое число практически недостижимо. Это означает, что сопротивление нагрузки будет меньше внутреннего сопротивления всех биморфов при любом практически достижимом их числе, примененных в данном сейсмоприемнике.

Оценка числа лопастей по таблице I (графа 2) показывает, что при значениях величины, указанных в (5,17), это число не должно превосходить миллиона. Такое число также практически не достижимо.

Итак, выбор общего числа биморфов, при которых справедлива формула (5.15), практически не ограничивается сверху. При этом при любом числе биморфов выгоднее для увеличения чувствительности сейсмоприемника увеличивать число лопастей при одновременном уменьшении числа биморфов для каждой лопасти и увеличении общего числа биморфов, примененных в данной инструкции сейсмоприемника.

Чувствительность сейсмоприемника, как следует из формулы (5.15) увеличивается прямо пропорционально увеличению коэффициента, характеризующему пьезоматериал биморфа. Для сегнетовой соли и цирконата титаната свинца этот коэффициент при температуре окружающей среды 22°С равен $5{,}6\cdot 10^{-8}$ и $3{,}85\cdot 10^{-10}$ соответственно. Несмотря на то, что для сегнетовой соли этот коэффициент почти на два порядка выше, чем для титаната цирконата свинца, однако рекомендовать первый пьезоматериал для биморфов, применяемых в сейсмоприемнике, нельзя вследствие значительной зависимости этого коэффициента от изменения температуры окружающей среды.

Чувствительность сейсмоприемника не зависит от ширины биморфного пьезоэлемента. Она пропорциональна квадрату длины биморфа, если эта длина значительно меньше радиуса внутренней сферы, и пропорциональна первой степени длины, если указанный радиус значительно меньше длины биморфа.

Радиус корпуса сейсмоприемника выгодно увеличивать, т.к. чувствительность сейсмоприемника растет как шестая степень этого радиуса. Такой значительный рост чувствительности показывает, что увеличение радиуса корпуса сейсмоприемника самый эффективный способ её увеличения.

Выбор параметров лопасти незначительно скажется на чувствительности сейсмоприемника. Действительно, толщина лопасти, вошедшая в формулу (5.15) изменяется незначительно, т.к. её крайние значения 0 и $\frac{r}{12}$, при которых эта формула получена. Увеличение же плотности лопасти не желательно, т.к. при большой плотности лопасть окажется инерционным элементом, который будет "подчеркивать" паразитные поступательные колебания корпуса сейсмоприемника. Выгоднее увеличивать плотность жидкости, которая является инерционным элементом для вращательных колебаний корпуса сейсмоприемника.

Чувствительность сейсмоприемника не зависит от плотности упругой среды, в которой производятся измерения, а также - от скорости распространения продольной волны в этой среде.

Она обратно пропорциональна скорости распространения поперечной волны в среде. Отсюда чувствительность сейсмоприемника больше в низкоскоростной среде, по сравнению с высокоскоростной во столько раз, во сколько раз скорость распространения поперечной волны в первой среде меньше, чем во второй.

Чувствительность сейсмоприемника от частоты (частотная характеристика) прямо пропорциональна четвертой степени этой частоты. Это значит, что напряжение на выходе является четвертой производной по времени от смещения в падающей поперечной волне, если сопротивление нагрузки чисто активное.

При емкостной нагрузке $Z_н = \frac{1}{j\omega C_н}$ отклик сейсмоприемника во временной форме совпадает с первой производной по времени от ускорения частиц в падающей поперечной волне. Такой отклик находится в противофазе с указанной производной.

Если нагрузка - активная $Z_н = r_н$ то отклик сейсмоприемника во временной форме есть вторая производная по времени от ускорения частиц в падающей поперечной волне.

Если же эта нагрузка - индуктивная $Z_н = j\omega L_н$ то отклик совпадает с третьей производной от ускорения частиц в падающей волне.

ЛИТЕРАТУРА

I. Аверко Е.М. Схема расчета поперечных и продольных упругих волн от инерционных абсолютно жестких излучателей. Сб."Инерционные источники сейсмических волн",ротапринт,Новосибирск,1973.

Iа. Аверко Е.М. Движение полого шара в поле плоской поперечной волны. Настоящий сборник.

Iб. Аверко Е.М., Нефедкин Ю.А. Способ выделения поперечной волны на фоне продольной и основы конструирования сейсмоприемника поперечных волн. Настоящий сборник.

2. Иориш Ю.И. Виброметрия, ГНТИМЛ, М., 1963.

2а. Ананьева А.А. Керамические приемники звука. АН СССР,М, 1963, стр. 34-35.

3. Боканенко Л.И. Ультразвуковой датчик с биморфным элементом. Известия АН СССР. Физика Земли, № I, 1966, стр.68-75.

4. Зевеке и др. Основы теории цепей. Госэнергоиздат. М.-Л., 1963, стр. I6.

5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Высшая школа,М.,1970.

6. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. Наука, М., 1966, стр. 407-4I9.

7. Thurston E.G. The theαretical sencitivity of three g types of rectan gular bimorf transducers I. Acoust. Boc. America, 1953, N 5.

8. Фурдуев В.В. Электроакустика, ГИТТЛ, 1948.

9. Харкевич А.А. Теория преобразователей. Госэнергоиздат, 1948.

Технический редактор *Л. А. Панина*

Подписано к печати 24.V.1972 г. МН 10320
Бумага 60×84/16. Печ.л. 17,5. Уч.-изд. л. 16,0.
Тираж 250 Заказ 156. Цена 1р.12к.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск, 90. Ротапринт.