

Ф. Чейз

КОЛИЧЕСТВЕННО –
МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ ШЛИФОВ
ПОД МИКРОСКОПОМ

Petrographic Modal Analysis

AN ELEMENTARY
STATISTICAL APPRAISAL

Felix Chayes

Geophysical Laboratory Carnegie Institution of Washington

New York, John Wiley & Sons, Inc.

1956

Ф. Чейз

КОЛИЧЕСТВЕННО-
МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ШЛИФОВ ПОД МИКРОСКОПОМ

Перевод с английского языка
Д. Н. Иванова

Под редакцией
А. Б. Вистелиуса

издательство иностранных языков
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963

«...горы действительно надо
изучать с микроскопом».

Г. К. Сорби, 1856

А Н Н О Т А Ц И Я

Ф. Чейз — видный американский петрограф — посвятил свою работу методике количественных минералогических анализов горных пород. В книге с использованием несложных выводов математической статистики разбирается ход производства минералогических анализов пород с различной крупностью зерна и с разной текстурой. Книга, несмотря на небольшой объем, насыщена фактическим материалом — прежде всего данными специальных экспериментальных исследований автора. Использованы также выводы наиболее компетентных минералогов-петрографов.

Книга рассчитана на студентов старших курсов высших геологических учебных заведений, преподавателей петрографии и минералогии, специалистов петрографов и минералогов.

Редакция литературы по вопросам
геологических наук

От редактора

Количественно-минералогический анализ шлифов под микроскопом всегда привлекал внимание русских петрографов и минералогов, опубликовавших ряд работ по этому вопросу (А. А. Глаголев, П. Н. Чирвинский, Л. Л. Соловьевникова и др.). Однако в последнее время положение в этой области оказалось неудовлетворительным из-за отставания методов петрографии и минералогии от уровня современных методов обработки наблюдений, основанных на вероятностных принципах.

Книга Ф. Чайза является первым систематическим изложением вопроса на современном уровне. Методы, рекомендуемые им, хорошо зарекомендовали себя при изучении гранитоидов различных районов мира и в этом отношении весьма полезны. Вместе с тем надо иметь в виду, что способ рассуждений автора в целом носит индуктивный характер и не дает в ряде случаев окончательных доказательств. Ряд статистических понятий (особенно понятий состоятельности и несмещенностии), используемых в книге, дан без строгих определений. Впрочем, все это отмечает и сам автор. Таким образом, книга должна использоваться только по прямому назначению — как руководство по количественно-минералогическому анализу шлифов определенного типа пород. Статистические понятия, которыми оперирует автор, следует переносить на другие объекты только после знакомства со специальной литературой по статистике и теории вероятностей. Эта литература приводится автором в конце книги. Для советского читателя можно рекомендовать книгу Н. В. Смирнова и И. В. Дунин-Барковского: «Краткий курс математической статистики для технических приложений». Физматиздат, 1959.

A. Вистелиус

Предисловие автора к русскому переводу

Приятно сознавать, что эта небольшая работа оказалась настолько интересной, что был осуществлен ее перевод на русский язык, особенно если учесть, что методика подсчета точек, которая описана в книге, известна русским геологам и фактически впервые была предложена одним из них — А. А. Глаголевым.

Одна из ранних статей Глаголева была опубликована в американском *Engineering and Mining Journal* в 1934 г. Она привлекала внимание лишь тех немногих петрологов, которые читали этот журнал.

Я впервые совершенно случайно увидел статью Глаголева в 1942 г., упомянул о ней довольно коротко в опубликованном обзоре способов подсчета обломков, для которых прибор Глаголева показался мне не совсем подходящим, и не вспоминал об этой статье вплоть до 1948 г., когда непрерывный линейный интегратор, который я хотел использовать в большой и ответственной серии количественно-минералогических анализов, просто-напросто испортился. Ожидая, пока заменят интегратор, я переделал обычный механический столик в прибор, который с этого момента стал известен в Америке как «щелкающий счетчик». В Соединенных Штатах Америки замена линейного интегратора точечным счетчиком явилась началом эры количественно-минералогического анализа, и я потратил последние несколько лет, содействуя развитию этого метода. По причинам, которые я не могу сейчас понять, в этот период мне ни разу не пришло в голову, что влияние методики подсчета точек на развитие петрографии в Советском Союзе, вероятно, было аналогично отмеченному. При этом я впервые узнал о существовании книги Глаголева, посвященной

количественно-минералогическому анализу, лишь из писем читателей своей собственной книги. Это все, что касается исторических деталей.

Видеть предмет в перспективе во время интенсивной работы над ним всегда трудно, и если бы эта книга была написана заново в 1961 г., содержание ее второй половины было бы совершенно иным. Все мы интуитивно хотим иметь (и никогда не сможем получить) серию независимых стандартов, чтобы контролировать нашу собственную работу и оценивать результаты, полученные другими исследователями. В ту стадию работы, которую я называю «ошибкой воспроизводимости», такие стандарты могут быть получены с помощью *априорных* рассуждений. Если наша цель заключается просто в исследовании соотношения между шлифом и его анализом, единственная функция эксперимента состоит в том, чтобы помочь решить, какую *априорную* формулировку из числа возможных следует предпочесть.

Соотношение между анализом и шлифом крайне важно, но оно составляет лишь небольшую часть нашей проблемы. Как только мы начинаем интересоваться соотношением между шлифом и образцом, образцом и обнажением, обнажением и породой или породой и ее разновидностями, возможность получения *доопытных* числовых стандартов стремится к нулю. Тогда мы вынуждены целиком полагаться на эксперимент, а эксперимент ничего не может сказать нам о породах, отличающихся от тех пород, которые мы подвергли эксперименту.

В главах 8—10 я попытался показать, что для одного широко распространенного типа пород возможно экспериментальное решение этой проблемы. Мне кажется, что эксперимент в общем удался, но я никогда не утверждал, что результаты этого эксперимента следует рассматривать как надежно установленные универсальные стандарты для контроля ошибок количественно-минералогических анализов. Фактически их нельзя использовать, если рассматриваемые породы не содержат трех главных составных частей, сравнимых по средним значениям и дисперсиям, так что даже однополевошпатовые породы не охватываются этими результатами. И даже не совсем ясно, применимы ли эти результаты к любой породе, которая в действительности удовлетворяет только что указанным числовым требованиям. Вполне возможно, что на результаты в какой-то мере влияет сложность гранитной структуры, и коли-

чество работы, необходимое для сохранения аналитической ошибки на каком-то определенном уровне в породах, не обладающих этой структурой, будет либо недооценено, либо переоценено.

Мне хотелось, чтобы схема эксперимента, а не его результаты, послужила рабочей моделью (которая, вероятно, потребовала бы существенных поправок) для исследований подобного рода пород других типов. Я не знаю ни одного примера, в котором схема выполнила эту функцию. Очевидно, оговорка, с которой были представлены результаты, предотвратила неправомерно широкое применение метода к породам, для которых он не был предназначен. Уменьшение интереса к этой схеме, по-видимому, произошло вследствие создавшегося мнения, что успешное применение количественно-минералогического анализа требует какого-то объективного, заранее предопределенного набора правил для надежного контроля аналитической ошибки.

В настоящее время считается совершенно достаточным, если количественно-минеральный анализ основывается на единственном шлифе из каждого опробованного участка или петрографической единицы. Но при этом забывают, что если сам эксперимент не оценивает ошибку анализа, интерпретация результата невозможна при отсутствии внешнего стандарта, с которым этот результат можно сравнить. Вот приблизительно в каком положении мы находимся, когда рассматриваем сводку интересующих нас химических анализов горных пород; отдельные анализы чрезвычайно дороги, и это исключает повторные анализы, необходимые для выведения надежной внутренней меры ошибки. По крайней мере мы привыкли так рассуждать. С другой стороны, отдельный количественно-минералогический анализ является относительно столь дешевым, что его повторение не требует специального обоснования. Любая из имеющихся в настоящее время методик подсчета точек помогает нам использовать все возможности экспериментальной схемы, которая является приложением на практике современной статистической теории малых выборок. Наши наблюдения должны строиться таким образом, чтобы сам эксперимент производил соответствующую среднюю квадратическую ошибку, по которой можно было бы проверить значимость каждого различия, которое мы хотим исследовать. Это вполне осуществимая и практическая

важная задача. Хотя эксперимент, детально описанный в гл. 8—10, относится к подобному типу, тем не менее обсуждение проблемы в аспекте создания независимых стандартов для контроля и оценки аналитической ошибки, по-видимому, отвлекает внимание читателя от основного направления в построении экспериментальных схем современной петрографии. *Меа culpa.*

В заключение я хотел бы поблагодарить А. Б. Вистелиуса, редактора этого перевода. Перевод был осуществлен по его предложению, и в связи с этим он великодушно согласился взять на себя обязанности, которые я не мог выполнить из-за плохого знания русского языка.

Геофизическая лаборатория
Вашингтон, округ Колумбия, США
Май 29, 1961 г.

Феликс Чейз

Предисловие автора

Для успешного развития как описательной, так и экспериментальной петрологии необходим большой объем информации о количественно-минералогическом составе пород. Без подобной информации, по-видимому, практически невозможно дальнейшее совершенствование некоторых разделов петрографии, а также решение уже назревших проблем. Кроме того, количество и доброкачественность доступной нам информации могли бы сильно стимулировать темп развития многих других областей знания. Несмотря на усиливающийся интерес к количественно-минералогическому анализу, этот предмет игнорируется почти всеми учебниками петрологии и плохо представлен в большинстве учебников петрографии. Студенту приходится искать объяснение основ количественно-минералогического анализа в отдельных журнальных статьях, неравнозначных по качеству, в большинстве своем специальных и часто непоследовательных или даже исключающих друг друга. Нет ни одной работы, которая позволила бы студенту или начинающему специалисту (или кому-либо другому, занимающемуся этим вопросом) получить достаточно полное представление о предмете и решить, каким образом он должен использовать методику количественно-минералогического анализа в собственных исследованиях.

Вот что необходимо студенту и вот что я попытался ему дать: а) четкое описание геометрической основы метода; б) обзор и краткую характеристику различных методик и приборов; в) подробное рассмотрение вопроса о воспроизводимости анализов; г) определение и численное выражение погрешности анализа; д) понимание роли этой погрешности в подготовке и планировании выборочных экспериментов.

Рассматриваемый вопрос в настоящее время находится на такой стадии развития, которая допускает краткое изложение основ по первым трем пунктам; это изложение дается в главах 1—6 включительно. Обычно всегда можно определить аналитическую ошибку в общем виде, но лишь в некоторых частных случаях эту ошибку удается выразить единственной числовой величиной. Подобное затруднение возникает и при разборе влияния аналитической ошибки на ход эксперимента. Экспериментатор осмысливает и математически выражает эту зависимость еще до постановки эксперимента, но конкретные числовые данные можно получить только в результате опыта.

Поэтому, начиная с гл. 7 и вплоть до гл. 10, наш разбор по необходимости ограничивается породой только такого типа, на котором, насколько я знаю, проводились подобные исследования. Многое из того, что представлено в этих главах, раньше не опубликовывалось. Все это делалось в расчете на то, что приведенная схема послужит как бы моделью (хотя такая модель, конечно, требует значительного пересмотра) для исследователей, желающих применить данные, полученные для двухполевошпатовых гранитов, к породам других типов. Вероятно, в конце концов что-нибудь будет сделано для каждого наиболее развитого типа породы. Я надеюсь, что ошибки моих построений и моих суждений достаточно понятны, чтобы другие исследователи могли их избежать.

Содержание гл. 2 приведено в книге главным образом для опровержения обычного и ничем не обоснованного скептического взгляда на потенциальные возможности количественно-минералогического анализа при изучении осадочных или мелковзернистых метаморфических пород. Читатели, которые не разделяют этого скептицизма или не работают со слоистыми породами, найдут, что содержание гл. 2 не существенно для понимания последующих глав. С другой стороны, гл. 11 как бы предостерегает тех исследователей, которые, возможно, попытаются применять количественно-минералогический анализ к породам, к которым его нельзя применять.

Я должен заранее предупредить читателя, что мою книгу нельзя рассматривать как библиографический справочник по количественно-минералогическому анализу. Ни одна работа не упоминается в книге просто для полноты картины и (кроме гл. 3) не обращается никакого внимания

на приоритет той или иной работы. В самом деле, развитие количественно-минералогического анализа проходило так бессистемно, что вряд ли возможно оценить роль той или иной работы. Если сравнительно недавняя работа ставит вопрос более четко или разрешает его более удовлетворительно, чем предшествующая, предпочтение при рассмотрении отдается первой, а в ряде случаев предшествующая работа даже не упоминается. Если же читатель желает восстановить историю предмета, он может начать с превосходной библиографии, приведенной у Ларсена и Миллера (Larsen, Miller, 1935).

Даже для случайного читателя ясно, что данная книга является до некоторой степени собирательной. Хотя в ней широко использованы элементарные статистические выкладки, ее нельзя рассматривать как статистическую. Все, кто принимал участие в развитии количественно-минералогического анализа, знают, что точное подразделение предмета на статистические и нестатистические категории не всегда возможно или желательно. В связи с этим возникает следующий вопрос: как результаты, полученные с помощью статистических методов, должны преподноситься читателям, большинство из которых даже в настоящее время не имеет представления о математической статистике. К счастью, статистические выкладки в большинстве своем простые. Я старался писать так, чтобы геологи, совершенно не знакомые с математической статистикой (и даже те, кто сознательно или по необходимости думают оставаться в этом блаженном состоянии), смогли освоить основные приемы математической статистики и научились извлекать пользу из ее основных достижений. Это займет немного места, но, мне кажется, это можно сделать. Значительная часть общепотребительных терминов и выражений, которые получили специальные названия в элементарной математической статистике, сохраняют здесь свое основное значение, так что при отсутствии строгого подхода эти термины и выражения сообщают одно и то же как читателю, не знакомому со статистикой, так и читателю с некоторой подготовкой по этому предмету. Всякий раз, когда это можно было осуществить, не осложняя изложения, я избегал специальных терминов, хотя, возможно, они были бы удобнее. Однако, когда это было необходимо, термины применялись даже без дополнительного объяснения. Подобным же образом в книге широко используются численные резуль-

таты, но сами операции вычисления описываются лишь в тех случаях, если они крайне просты или не освещены в учебниках по элементарной статистике.

Вместо того чтобы дать разъяснение основ статистики или использовать подстрочные примечания, я поместил в конце книги приложение, в котором приводится некоторое количество аннотированной статистической библиографии. Читатели, не знакомые со статистикой, найдут здесь ссылки на литературу, в которой различные статистические термины и приемы, использованные в книге, описаны так подробно, что я не смог бы с ней конкурировать.

Данная книга представляет собой курс лекций, прочитанных автором на семинаре по петрологии для инженеров в Калифорнийском Технологическом институте зимой 1955 г. Я выражаю свою благодарность штату и членам Отделения геологических наук за доброжелательное отношение и дружескую критику. Я также обязан некоторым моим коллегам по Геофизической лаборатории, а также Эрлу Ингерсону и Дж. Д. Х. Доннею за тщательное редактирование отдельных частей рукописи. Изложение вопроса об ориентированных породах, содержавшееся первоначально в лекционных записях, было настолько неудовлетворительно, что я хотел опустить этот раздел при публикации материала; однако в дальнейшем по настоянию В. С. Мак-Кензи я рассмотрел этот вопрос в гл. 2. Некоторые экспериментальные данные, использованные в гл. 8, были кратко описаны в «Year Book», № 53 института Карнеги в Вашингтоне, а большое количество материала в гл. 1, 4 и 5 заимствовано из журналов «American Mineralogist» и «Journal of Geology» благодаря любезному разрешению редакторов. Содержание гл. 11 впервые появилось в «Mineralogical Magazine» и помещено в книге благодаря разрешению членов Совета Минералогического общества Лондона. В заключение мне приятно выразить свою благодарность штату Статистической инженерной лаборатории Национального бюро стандартов и особенно Дж. М. Камерону за советы, содействие и поощрение в течение ряда лет.

Вашингтон, округ Колумбия. Июль, 1956

Феликс Чейз

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга предназначена для петрографов, но может быть использована также специалистами по прикладной статистике, которые не знают петрографии. Количественно-минералогический анализ еще так редко применяется в геологии, что большинство читателей, вероятно, не будут возражать против краткого сообщения о характере и целях анализа.

Порода — это минеральный агрегат. Для петролога типы и количество минеральных разновидностей, слагающих породу, представляют первостепенную важность. Мы не будем здесь останавливаться на главных проблемах качественного определения присутствующих в породе *типов* минералов, поскольку петрография, которая занимается этим вопросом, представляет собой хорошо развитую описательную науку.

Состав породы, выраженный с помощью относительных количеств минералов, действительно присутствующих в породе, называется *модой*. Операция, с помощью которой производится определение моды, обычно называется *модальным анализом*¹. Количественно-минералогические составы могут быть получены путем пересчета из объемного химического анализа, а также подсчетом измельченных частиц или измерением относительных площадей, отвеча-

¹ В дальнейшем вместо терминов *мода* и *модальный анализ* мы будем использовать термины *количественно-минералогический состав* и *количественно-минералогический анализ*, которые обычно употребляются в отечественной геологической литературе. — Прим. перев.

ющих каждому минеральному виду, на подированной поверхности или в шлифе породы.

Составы главных породообразующих минералов достаточно хорошо известны, так что количественно-минералогические составы, пересчитанные из объемных химических анализов, можно считать надежными. Хотя методика подсчета сортированных измельченных частиц, по-видимому, довольно проста, результаты этой методики сомнительны вследствие трудностей опробования, которые еще до конца не раскрыты. В настоящее время лишь очень небольшое число количественно-минералогических составов определяется подсчетом частиц.

До появления шлифов (или, точнее, до того момента, когда шлиф сделался незаменимым помощником петрографа) количественно-минералогические составы определялись посредством площадных измерений на полированных поверхностях, и до сих пор еще эта методика является наиболее удобной в некоторых специальных случаях. Однако различие между некоторыми породообразующими минералами в отраженном свете установить трудно, а порой и невозможно, и число надежных определений количественно-минералогических составов посредством измерений на полированных поверхностях крайне невелико.

Таким образом, хотя любая методика, которая оценивает действительный минеральный состав породы, строго говоря, является количественно-минералогическим анализом, почти все количественно-минералогические составы оцениваются с помощью измерений площадей, проводимых в шлифах под микроскопом. Сейчас для этой цели применяются самые разнообразные и сильно отличающиеся по виду и конструкции приборы. Их непосредственное использование всегда преследует одну и ту же цель, а именно получение надежной оценки относительной величины площади, соответствующей минералу определенного вида. Выполнение этой задачи обеспечивается одним из двух способов: приборы либо суммируют отрезки, занимаемые минералами в системе равностоящих параллельных линий, либо накапливают частоты, с которыми различные минералы покрывают узлы точечной сетки.

Соответствие отношений площадей отношениям объемов было установлено Делессом в 1848 г. (это соответствие, возможно, было известно до Делесса, но о нем никогда прежде не упоминалось в геологической литературе).

Хотя Делесс с успехом применял это соотношение, он, по существу, не доказал его. И этого не сделал ни один геолог. Поэтому соотношение всегда воспринималось с большим скептицизмом. Те исследователи, которые верили в это соотношение, могли лишь ссылаться на опыт (обычно слишком недостаточный, чтобы демонстрировать что-либо вообщем), в котором объемный химический состав, вычисленный по средним значениям нескольких количественно-минералогических составов сомнительного качества, довольно хорошо совпадал с одновременным химическим анализом неизвестного качества. Иногда операция была обратной и измеренные количественно-минералогические составы сравнивались с количественно-минералогическими составами, вычисленными по данным химических анализов. Случайные работы подобного рода могли убедить лишь тех исследователей, которые имели сильное желание верить, а геология является традиционной агностической наукой. Отсюда и медленное развитие количественно-минералогического анализа. По-видимому, до некоторой степени это было прежде всего обусловлено качеством имеющихся приборов. В течение столетия, прошедшего после опубликования работы Делесса, не было проведено ни одного геологического исследования, в котором основные вопросы были бы решены посредством количественно-минералогического анализа. Даже быстро растущая популярность количественно-минералогических классификаций горных пород, в которых основой является количественно-минералогический состав, оказалась недостаточной для более интенсивного развития этой методики.

Ниже перечислены основные проблемы количественно-минералогического анализа: а) равенство отношений площадей отношениям объемов; б) воспроизводимость оценок отношения площадей; в) эффективность опробования с помощью шлифов. Все эти проблемы очень чувствительны к статистическим исследованиям, и трудно, хотя, вероятно, и возможно, найти удовлетворительное решение этих проблем каким-либо другим способом. В течение первого периода своего развития количественно-минералогический анализ существовал без математической статистики; в это время он много обещал, но практически ничего не давал. С 1945 г. в предмет стала настойчиво проникать, хотя и довольно элементарная, математическая статистика, и количественно-минералогический анализ приобрел значение как

самостоятельная дисциплина. Мы с уверенностью можем утверждать, что, если эта тенденция продолжится, самый простой, самый быстрый и самый дешевый анализ, необходимый петрологу, вскоре получит всеобщее признание. В ближайшем будущем ожидается развитие количественной петрографии, столь же блестящее и столь же продуктивное, как и расцвет качественной петрографии в конце прошлого века.

Г л а в а I

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОСНОВА КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Отсутствие теоретического обоснования количественно-минералогического анализа шлифов было одной из наиболее важных причин его неудовлетворительного развития. И Делесс, и Розиваль, впервые предложившие соответствующую методику, знали о слабости своих теоретических предпосылок. С того времени, несмотря на отдельные попытки, так и не было найдено удовлетворительного решения этой основной проблемы количественно-минералогического анализа.

Методика, предложенная Делесом, привлекла к себе мало внимания. Применение ее отнимало чрезвычайно много времени, однако прошло полстолетия, прежде чем ее попытались улучшить. Усовершенствование, предложенное Розивалем, во много раз сократило время на анализ средне- и тонкозернистых пород. Следующим, действительно первым реальным улучшением методики явилось применение регистрирующего микрометра Шенда, появившегося в 1916 г., т. е. спустя 68 лет после работ Делесса и 18 лет после работ Розивала.

Период между опубликованием методики Делесса и появлением микрометра Шенда — поистине золотой век описательной петрографии. Петрографы этого времени смогли бы найти превосходное применение надежным количественно-минералогическим данным, и многие из них хорошо понимали необходимость таких данных. Они могли бы получать эти данные (и современная петрография тем самым была бы обогащена ими), применяя гораздо более простые приборы, чем те, которые использовались тогда в родственной науке — оптической кристаллографии. Однако соответствующий прибор не появлялся.

Рассматривая все обстоятельства, резонно предположить, что корень неудач в том, что никто из исследователей, ни даже Делесс, и уже, конечно, ни Розиваль, не были убеждены в обоснованности геометрической теории анализа. Говоря откровенно, петрографы, которые должны были бы оценить точность и очевидную выгоду метода Делесса, по-видимому, боялись, что их результаты могут быть несостоительными, что различия между анализами могут быть в значительной степени обусловлены неизвестными и, по существу, не учитываемыми погрешностями, которые помещают обнаружению действительных различий между породами.

Это рассуждение о равнодушии и инертности можно было бы продолжить. Однако нельзя отрицать, что хотя в последней четверти XIX в. назрела необходимость в использовании описательной петрографией данных количественно-минералогического анализа, что была разработана методика, что легко можно было бы изготовить необходимое оборудование, ничего не предпринималось в этом направлении. Следует также отметить, что книги и лекционный материал, с которыми приходится в настоящее время иметь дело рядовому студенту-геологу, все еще содержат гораздо больше предостережений и ограничений, чем утверждений и поощрений. Так как большинство геологов в действительности очень мало занимаются количественно-минералогическим анализом, это положение вряд ли можно исправить на базе практического опыта. Скорее всего здесь имеет место профессиональная косность, наследственный страх, боязнь того, что удовлетворительные результаты могут быть получены только на очень редких породах. Наша главная задача — преодолеть этот страх. Вопрос о том, является ли количественно-минералогический анализ теоретически обоснованным, не может быть решен с помощью петрографии. Это целиком вопрос так называемой геометрической теории вероятностей, поэтому в настоящей и последующей главах рассматриваемые проблемы будут больше касаться геометрии, чем геологии.

1. Точечные суммы оценки относительных площадей

На фиг. 1 малая неправильная область (B) входит в большую неправильную область ($B + W$). Вероятность того, что точка, выбранная чисто случайно в ($B + W$)¹,

¹ То есть так, что каждая точка в площади ($B + W$) имеет такую же вероятность быть выбранной, как и любая другая точка.

будет также принадлежать (B), равна, согласно определению, отношению площадей этих областей:

$$p = \left(\frac{A_B}{A_{B+W}} \right).$$

Математическое ожидание числа точек, $S(X)$, которое попадает в (B) в результате выборки, содержащей n точек, есть

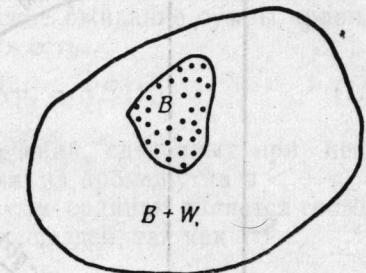
$$\begin{aligned} E(S(X_b)) &= \\ &= np = n \left(\frac{A_B}{A_{B+W}} \right). \quad (1.1) \end{aligned}$$

Доля μ общего количества точек будет равна

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{n} E(S(X_b)) = p = \\ &= \frac{A_B}{A_{B+W}}. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Так как математическое ожидание величины μ равно отношению меньшей площади к большей, то пропорция является несмешенной оценкой этого отношения. (В случае анализа шлифов A_{B+W} соответствует общей измеряемой площади шлифа, а p — доле этой площади, занятой минералом B , представленным либо единичным большим зерном, либо множеством мелких зерен.)

Фиг. 1. Малая измеряемая площадь (B), включенная в большую измеряемую площадь ($B + W$). Отношение этих площадей оценивается суммами точек, выбранных случайно в пределах ($B + W$).



2. Параллельные линии как оценка относительных площадей

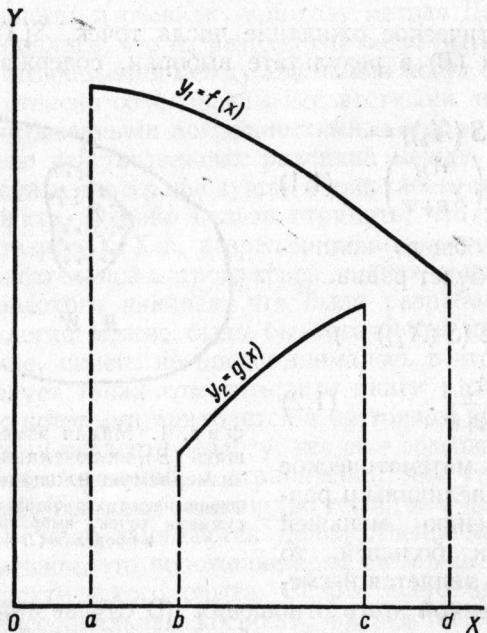
Площади под кривыми, изображенными на фиг. 2, очевидно, равны

$$A_1 = \int_a^d y_1 dx; \quad A_2 = \int_b^c y_2 dx.$$

Предположим, что ординаты проведены из точек на оси OX , выбранных чисто случайно в промежутке $a < x < d$.

Тогда dx есть элемент частоты, и суммарная частота равна

$$F = \frac{1}{d-a} \int_a^d dx = 1. \quad (1.3)$$



Фиг. 2. Площади под двумя незамкнутыми кривыми.

Отношение площадей оценивается суммами ординат, выбранных случайно в промежутке $a < x < d$.

Математическое ожидание для y_1 в этом случае равно

$$E(y_1) = \frac{1}{d-a} \int_a^d y_1 dx = \frac{A_1}{d-a} \quad (1.4)$$

и для y_2 равно

$$E(y_2) = \frac{1}{d-a} \int_b^c y_2 dx = \frac{A_2}{d-a}. \quad (1.5)$$

(В областях $x < b$ и $x > c$ $g(x)$ не определяется и y_2 равно нулю.)

Таким образом, отношение средних значений ординат является постоянной оценкой отношения площадей, так как это отношение служит оценкой исходной величины $\frac{\mu_2}{\mu_1}$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{E(y_2)}{E(y_1)} = \frac{A_2}{(d-a)} \cdot \frac{(d-a)}{A_1} = \frac{A_2}{A_1}. \quad (1.6)$$

В нашем случае математическое ожидание суммы ординат линий под каждой из кривых есть

$$E[\sum(Y_i)] = N\mu_i = NE(y_i), \quad (1.7)$$

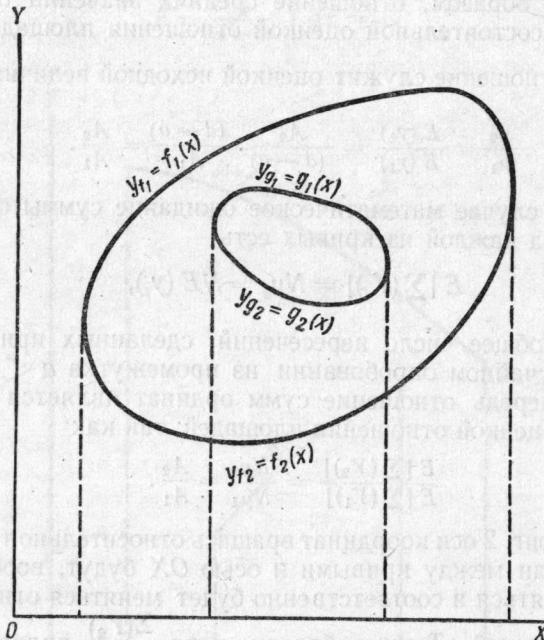
где N — общее число пересечений, сделанных при некотором случайному опробовании из промежутка $a < x < d$. В свою очередь отношение сумм ординат является постоянной оценкой отношения площадей, так как

$$\frac{E[\sum(Y_2)]}{E[\sum(Y_1)]} = \frac{N\mu_2}{N\mu_1} = \frac{A_2}{A_1}. \quad (1.8)^2$$

Если на фиг. 2 оси координат вращать относительно точки O , то площади между кривыми и осью OX будут, вообще говоря, меняться и соответственно будет меняться отношение этих площадей. Таким образом, хотя $\frac{\Sigma(Y_2)}{\Sigma(Y_1)}$ является постоянной оценкой для какой-то данной ориентации осей, его величина будет меняться с изменением этой ориентации. Так как площади на фиг. 2 действительно меняются с вращением осей, всякая надежная оценка отношения площадей также изменяется в определенных пределах. Однако если рассматриваемые площади не зависят от положения координатных осей, уравнения (1.4 — 1.8) можно применять, не считаясь с положением координатных осей. Каждая из замкнутых кривых, изображенных на фиг. 3, может быть разделена на две части линиями, касательными к ней и параллельными одной из координатных осей. На фиг. 3 такой осью является ось OY , и касательные делят каждую кривую на сегменты $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_1(x)$, $g_2(x)$, для каждого

² Уравнения (1.6) и (1.8) не могут полностью гарантировать постоянность оценки. Для этого необходимо, чтобы дисперсии y_1 и y_2 были конечными, а это, очевидно, имеет место, так как y_1 и y_2 изменяются на конечном промежутке (см. разд. 3).

из которых мы можем найти $E(y)$ с помощью уравнений (1.4) или (1.5). Известно, что математическое ожидание



Фиг. 3. Площади, ограниченные двумя кривыми. Отношение площадей оценивается суммами ординат, выбранных случайно в промежутке между ординатами, касательными к большей площади.

разности двух величин равно разности их математических ожиданий, поэтому мы сразу имеем, что

$$E(y_{f_1} - y_{f_2}) = E(y_{f_1}) - E(y_{f_2}) = \frac{A_1}{d-a},$$

где A_1 — площадь, образованная внешней кривой. Подобным же образом

$$E(y_{g_1} - y_{g_2}) = \frac{A_2}{d-a},$$

где A_2 — площадь, образованная внутренней кривой. Отношение, которое мы ищем, есть отношение

$$\frac{E(y_{g_1} - y_{g_2})}{E(y_{f_1} - y_{f_2})} = \frac{A_2}{A_1},$$

и это отношение, будучи функцией только площадей, ограниченных кривыми, очевидно, не зависит от выбора осей. В случае анализа шлифов OY есть линия пересечения или направление пересечения в шлифе, OX — нормаль к линии пересечения, а фиксированные площасти соответствуют общей площасти измерения и ее части, занятой определенным минералом.

3. Смещенность и состоятельность

В соответствии с нашим намерением полагаться на то, что статистические термины понятны сами по себе, мы до сих пор не определяли понятий смещенности и состоятельности и не устанавливали различий между ними. Читатель, очевидно, уже заметил, что оценки при построении с параллельными линиями были охарактеризованы как состоятельные, тогда как оценки для случая точек были названы несмешенными.

Выборочное среднее \bar{x} называется *состоятельной оценкой* истинного (или генерального) среднего μ , если

$$Pr\{|\mu - \bar{x}| > \xi\} < \eta \text{ при } n \rightarrow \infty$$

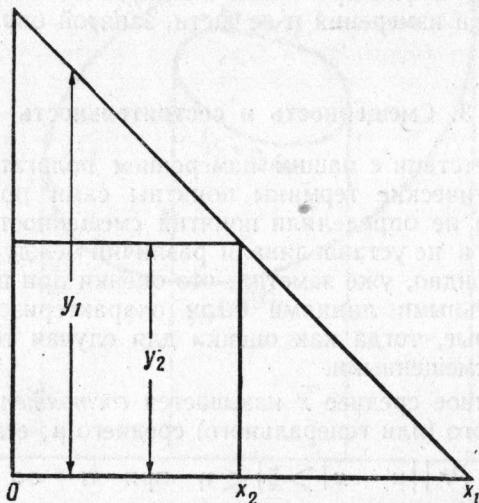
при сколь угодно малых ξ и η .

С другой стороны, выборочное среднее \bar{x} называется *несмешенной оценкой* μ , если ожидаемое или наиболее вероятное значение \bar{x} равно μ для произвольного $n \geq 1$.

Очевидно, что более желательно отсутствие смещенности. Оценки отношений площадей, основанные на подсчете случайно выбранных точек, являются и состоятельными и несмешенными. Эти же оценки, выведенные из построения с непрерывными параллельными линиями, являются состоятельными, но могут оказаться смещенными. Это легко показать на примере. На фиг. 4 изображен квадрат, вписанный в прямоугольный равнобедренный треугольник; площадь треугольника вдвое больше площади квадрата. Будем, как в случае, разобранном выше, измерять для каждой фигуры отрезки случайно выбранных линий, параллельных высоте треугольника. Используя уравнения (1.3—1.6), студент в состоянии самостоятельно показать, что

$$\frac{E(y_2)}{E(y_1)} = 0,5 = \frac{A_s}{A_T}, \quad (1.9)$$

где A_s — площадь квадрата, а A_T — площадь треугольника. С точки зрения количественно-минералогического анализа это, конечно, правильный ответ. По всем ординатам для каждого пересечения накапливаются суммы, которые



Фиг. 4. Квадрат, вписанный в равнобедренный треугольник.

Математическое ожидание отношения $\frac{y_2}{y_1}$ и отношение математическое ожидание y_2 , оцениваются ординатами, математическое ожидание y_1 , выбранными случайно в промежутке $0 < x < x_1$.

объединяются до вычисления отношения. Уравнение (1.9) наводит на мысль, что отношение наблюденных средних значений (или сумм) отрезков пересечений является состоятельной оценкой отношения $\frac{A_s}{A_T}$, но так как это уравнение не характеризует обстановку для произвольного $n < \infty$, то, следовательно, по нему нельзя установить состоятельность оценки. В этом случае мы должны опираться на центральную предельную теорему. Границы, в которых меняется дисперсия δ^2 и, следовательно, каждое

среднее, конечны. Таким образом, с возрастанием n распределения наблюденных средних значений числителя и знаменателя уравнения (1.9) стремятся к нормальным с дисперсиями $\frac{\sigma_1^2}{n}$ и $\frac{\sigma_2^2}{n}$ соответственно. Из этого в свою очередь следует, что для достаточно большого n неравенство, используемое в определении состоятельности, является справедливым.

Предположим, однако, что вместо суммирования величин y_2 и y_1 по отдельности перед нахождением отношения мы бы вычисляли отношение для каждой ординаты. Если $R_1 = \frac{y_2}{y_1}$, то

$$R_1 = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как и раньше, мы нашли бы, что

$$E(R_1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)} = 0,347. \quad (1.10)$$

Таким образом, хотя $\frac{A_s}{A_T}$ есть отношение математических ожиданий величин ординат, ясно, что оно не является математическим ожиданием отношения этих ординат. Обобщая сказанное, мы можем отметить, что результат каждого количественно-минералогического анализа, проведенного с помощью параллельных непрерывных или прерывистых линий, может быть представлен величиной отношения R_n , где n означает число членов, суммированных (в числителе и знаменателе) перед расчетом отношения. Уравнение (1.9) показывает, что для $n = \infty$ математическое ожидание отношения R_n равно $\frac{A_s}{A_T}$, а из сопровождающего текста видно, что R_n является состоятельной оценкой отношения $\frac{A_s}{A_T}$. Уравнение (1.10) показывает, что R_n является хотя и состоятельной, но смещенной оценкой величины $\frac{A_s}{A_T}$. Очевидно, что смещенностя должна уменьшаться с возрастанием n , но заранее установить соотношение между величиной смещенностя и объемом вы-

борки трудно даже при таких простых построениях, как только что рассмотренное. К счастью, хорошее рабочее приближение легко можно получить с помощью эксперимента со случайными выборками.

Ряд таких приближений дает следующие результаты:

n	Число выборок	Наблюденное среднее	Теоретическое среднее
1	100	0,3561	0,3466
2	100	0,4621	—
5	100	0,4928	—
20	25	0,5069	—
100	1	0,4973	—
∞	—	—	0,5000

Смещенность, вообще говоря, должна уменьшаться с ростом n , хотя, конечно, *скорость*, с которой происходит это убывание, будет меняться от фигуры к фигуре. Теоретически оценки площадей, основанные на построении с параллельными линиями, почти всегда подвержены некоторой смещенности. Однако обычно в процессе количественно-минералогического анализа перед вычислением окончательного отношения суммируется довольно значительное число пересечений, порядка 20 или 30. Рассматриваемые «площади» обычно образуют отдельные участки со сложными очертаниями. При этих обстоятельствах следует считать, что смещенность, как правило, много меньше, чем случайная ошибка измерения, и поэтому имеет небольшое (или вообще не имеет) практическое значение.

4. Общие вопросы практики количественно-минералогического анализа

Хотя рассуждать о случайных выборках легко, такие выборки зачастую бывает трудно осуществить. Практически количественно-минералогический анализ почти всегда основывается на *систематическом*, а не на случайном опробовании. Используя непрерывные линейные интеграторы, мы проводим параллельные пересечения на равных расстояниях друг от друга. В случае точечного счетчика мы отбираем точки, находящиеся в узлах симметричной сетки, нанесенной на поверхность шлифа. В первом случае место-

положение первого пересечения фиксирует положение всех последующих пересечений. Во втором случае выбор первой точки определяет положение всех остальных.

Систематическое опробование будет, вообще говоря, более точным, чем просто случайное опробование. На фиг. 2, например, может оказаться, что не одно из выбранных наугад пересечений не будет лежать в области $c \leq x \leq d$, и в результате почти наверняка будет иметь место сильное завышение оценки $\frac{A_2}{A_1}$. При систематическом опробовании этого не случится, если интервал между пересечениями (k) не будет превышать $(d - c)$, и даже для $k > (d - c)$ такая переоценка будет иметь место лишь в редких случаях. Если $k < (d - c)$, ожидаемое число пересечений в области $c \leq x \leq d$ равно $\frac{d - c}{k}$. Для фиксированного числа пересечений систематическое опробование гарантирует гораздо более равномерное распределение данных по измеряемой площине.

Аналогичным образом на фиг. 1 можно провести простое случайное опробование, не попав ни разу в A_B или, наоборот, попадая в A_B чрезмерно большое число раз; при этом в обоих случаях оценка отношения площадей может содержать большую ошибку. Число грубых ошибок при оценках подобного рода сильно уменьшается при пользовании систематической сеткой опробования даже в том случае, когда шаг сетки велик по сравнению с проекциями B на ось сетки, и ошибки почти отсутствуют, если шаг сетки меньше длины проекций B .

Хотя результаты, основанные на систематическом опробовании, вероятно, будут несколько более точными, чем результаты, основанные на просто случайной выборке, не исключена возможность, что обе эти операции не приведут к одной и той же оценке среднего. Известная работа Кохрана (Cochran, 1953) показывает, что в общем смещение, вызванное систематизацией, будет невелико, за исключением случая линейных или периодических направлений. Мы еще вернемся к этому вопросу в связи с анализом ориентированных пород. Здесь необходимо только отметить, что трудность возникает не вследствие каких-то недостатков в основном соотношении между линиями (или точками) и площадями, а просто из-за способа, которым мы отбираем эти линии (или точки). Как мы увидим в дальнейшем, это поправимо.

5. Соотношение площадь — объем, или соотношение Делесса

Соотношение площадь — объем, которое определяет, можно ли рассматривать наши оценки отношения площадей как состоятельные оценки отношения объемов, является одним из наиболее простых и в то же время ошибочно понимаемых вопросов количественно-минералогического анализа.

Если площадь сечения твердого тела, параллельная плоскости xy , является функцией z , $A = f(z)$ и сечения тела могут быть выбраны или легко могут быть интерпретированы как выбранные перпендикулярно к оси OZ на совершение произвольной высоте в промежутке $c \leq z \leq d$, то элементом частоты является dz и суммарная частота есть

$$F = \frac{1}{d-c} \int_c^d dz = 1,$$

а математическое ожидание величины A равно

$$E(A) = \frac{1}{d-c} \int_c^d A dz = \frac{V}{d-c}, \quad (1.11)$$

где A и V — площадь и объем соответственно. Мы сразу получаем, что

$$\frac{E(A_a)}{E(A_t)} = \frac{V_a}{V_t}, \quad (1.12)$$

где V_t — весь рассматриваемый объем, а V_a — часть этого объема, занятая минералом A . Таким образом, отношение площади, занятой минералом A , к площади, занятой всеми минералами (общая измеряемая площадь), является состоятельной оценкой объемного процентного содержания минерала A в породе. Это положение мы назовем соотношением Делесса. Рассматривая историю вопроса, можно отметить следующие особенности: 1) в нем совершенно не упоминается о способе, которым можно получать оценки отношений площадей; 2) в нем совсем ничего не говорится о формах и ориентировках минеральных зерен.

Почти все «толкователи» соотношения Делесса пытаются обойтись без подобной формулировки, а так как это невозможно, они характеризуют соотношение как «приблизитель-

ное», «справедливое при некоторых ограничениях» или иногда вообще не характеризуют (см., например, вызывающую удивление статью Жюльена, Julien, 1902). Там же, где всеобщий характер этого соотношения очевиден, толкователи пытаются дать «реалистическую» интерпретацию уравнения (1.11) или подобных ему, где dz рассматривается как толщина шлифа или ($d - c$) определяется как поперечное сечение или толщина образца. Эти ошибки заслуживают особого рассмотрения.

В первом случае, если dz рассматривается как конечная величина, хотя бы и небольшая, уравнение (1.11) — бессмыслица; знак интеграла указывает на то, что мы должны оперировать с A соответственно определенным правилам. Определение же dz как конечной величины является прямым нарушением первого и наиболее важного из этих правил. Тот, кто намерен так поступать, может сослаться на Розивала (Rosival, 1898) как на предшественника, но это по существу не изменит положения. В обычной обстановке эксперимента анализ шлифа — это анализ площади.

В противоположность dz , которое нельзя выразить никакой числовой величиной, без того чтобы не нарушить уравнения (1.11), значения ($d - c$) могут меняться в любых пределах, оставляя это уравнение справедливым. До тех пор, пока шлиф можно рассматривать как выбранное наугад в промежутке ($d - c$) сечение, нормальное к OZ , числовая величина разности ($d - c$) несущественна. Случайный выбор шлифа представляет собой состоятельную выборку некоторого объема. Если рассматриваемый объем имеет порядок образца, то обнажение, интрузия или батолит должны быть охарактеризованы опробованием другого типа и порядка, чем разбираемое нами.

Единственными оценками числителя и знаменателя в левой части уравнения (1.12) являются измерения, сделанные в ходе анализа шлифа, причем переход от левой части уравнения к правой не требует, чтобы мы либо знали, либо придавали числовое значение разности ($d - c$), и становится невозможным, если мы пытаемся придать такое значение величине dz .

При использовании соотношения Делесса возможность смещенности влечет за собой большую ошибку, чем при измерении площадей, так как объемом, состав которого нас непосредственно интересует, обычно является объем об-

разца и мы хотим использовать возможно меньшее количество шлифов из образца. Фактически в случае образцов тонкозернистых пород мы обычно ограничиваемся единственным шлифом. Если у нас нет сведений о пространственном распределении минералов в образце, мы не имеем права исключать вероятность того, что единичный шлиф может оказаться смешенной выборкой. Кроме тех случаев, когда мы имеем дело с грубыми и легко наблюдаемыми характеристиками — слоистостью, полосчатостью и тому подобное, — такие сведения обычно отсутствуют. Конечно, справедливо, что при отсутствии слоистости, полосчатости, линейности и т. п. обычно нет причин полагать, что существуют какие-то неоднородности, которые приводят к смешенности. Таким образом, мы можем сделать вполне разумное заключение, что обычно смешенность будет отсутствовать, что, например, случайно выбранная площадь в большинстве случаев будет представлять собой несмешенную выборку объема произвольной формы, что случайно выбранная точка характеризует площадь некоторой формы. Было бы совсем хорошо, если бы можно было просто считать, что смешенность отсутствует, если неясны обстоятельства, которые ей благоприятствуют. К сожалению, в действительности это невозможно.

Довольно любопытный выход был предложен Бэнки (Bankier, 1955), который первый отметил путаницу между понятиями смешенности и состоятельности в работах автора. Бэнки показал, что смешенность в соотношении линия — площадь, описанная выше, в разд. 3, исчезает, если знаменатель отношения — постоянное число. Знаменатель является просто длиной отдельного пересечения, и если эта длина постоянна от пересечения к пересечению, то, очевидно, не будет иметь значения, совершаются ли деление на каждом этапе эксперимента или в конце всего анализа. Из этого следует, что смешенность отсутствует, если измеряемая площадь является параллелограммом и линия пересечения параллельна стороне этого параллелограмма. Такое ограничение формы и ориентации измеряемой площади не существенно при рассмотрении случайно выбранных линий как построений для оценок площадей, потому что, как мы видели, при таких построениях мы получаем состоятельные оценки и обычно суммируем отрезки значительного количества этих линий, прежде чем вычислить окончательное отношение.

Однако это дает нам возможность найти какое-то решение относительно случайных шлифов как выборок из образцов, так как предыдущее рассуждение легко распространить на случай пространства. Для этого случая Бэнки показал, что любой случайно выбранный шлиф является несмешенной выборкой из состава прямоугольной призмы, из которой он взят. Если, например, для изготовления шлифа использовалась алмазная пила, полученная плитка является, вероятно, частью призмы Бэнки.

По-видимому, к подобному выводу можно было бы прийти интуитивно, помимо этого рассуждения. Предполагаемую призму можно отождествить с произвольным сечением, взятым в некотором направлении, какой бы неправильной формы ни был образец. Эти призмы могут частично различаться по составу, но каждая такая призма, вероятно, представляет собой несмешенную выборку из образца, и каждый шлиф является несмешенной выборкой из соответствующей призмы. Подразумевается, что расположение и форма поверхности, ограничивающей образец, не подверженные влиянию состава породы, являются единственным остающимся условием.

Таким образом, можно считать, что смешенность случайно взятых шлифов, как выборок из объемов, мала или отсутствует. Однако в настоящий момент мы не можем показать, что это действительно так.

Глава 2

КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОИСТЫХ ПОРОД

1. Введение

То, что мы будем довольно неопределенно называть «ориентировкой» — будь то пространственная ориентировка отдельных зерен или агрегатов, или же разделение (частичное или полное) минералов разных типов на отчетливые слои — всегда было «пугалом» количественно-минералогического анализа. Делесс, по-видимому, считал, что трудности, создаваемые ориентировкой, преодолимы, так как он анализировал ориентированные породы и даже придумал особое название «двумерная однородность» для таких пород. Пример, приведенный им, был забыт, но его замечания о необходимости осторожного подхода пересказывались и перефразировались почти в каждом последующем обсуждении количественно-минералогического анализа, и то, что он имел в виду как предостережение, постепенно приобрело характер полного запрещения.

По любопытному стечению обстоятельств первый по настоящему практический прибор, предназначенный для количественно-минералогического анализа — линейный интегратор Уэнтворт — Ханта (см. гл. 3), появился в конце первой мировой войны, когда возрос интерес к структурной геологии. Превосходные работы Клооса, Зандера, Шмидта и их учеников сосредоточивали внимание на ориентированных породах. Кроме того, замечательные успехи новых методов имели побочный результат, показывая, что определенные типы ориентировки, видимо, можно обнаружить почти в любой породе, если только их достаточно энергично искать. Такая обстановка вряд ли могла благоприятствовать развитию соответствующего аналитического метода, который считался ненадежным, кроме случаев «неориентированных» или «однородных» материалов.

Читатель, должно быть, заметил, что об этой проблеме ничего не было сказано в предыдущей главе. Вопрос о том, приведут ли отношения площадей к состоятельным оценкам отношений объемов, целиком связан с характером опробования; все, что требуется от материала, подвергающегося опробованию, — это крупность зерен, необходимая для их уверенного определения и надежной фиксации пересечений границ этих зерен с поверхностью измеряемой площади.

Однако даже по психологическим соображениям мы не можем себе позволить так бесцеремонно прекратить обсуждение этого вопроса. Вернее мы обязаны попытаться представить его в соответствующей форме, показать, как, по-видимому, считал Делесс, что проблемы, созданные ориентировкой, какими бы сложными они ни были, по существу могут быть решены и имеют практическое значение. Эта обязанность ставит нас в затруднительное положение. Количественно-минералогические анализы пород, имеющих резко выраженную пространственную ориентировку, проводятся крайне редко, а публикуются еще реже. Однако удовлетворительного исследования точности и надежности этих анализов, как теоретического, так и экспериментального, до сих пор не опубликовано¹.

Типами ориентировки, с которыми нам приходится сталкиваться, являются линейность, полосчатость и слоистость. Первый тип выражается в параллельном или субпараллельном расположении зерен или агрегатов, второй характеризуется стремлением длинных осей вытянутых зерен или широких поверхностей плоских минералов лежать параллельно или почти параллельно определенной плоскости. Для третьего типа ориентировки мы используем ни к чему не обязывающий термин *слоистость*, отмечая, что в этом случае порода образована чередующимися слоями различного количественно-минералогического состава. Нас не интересует, как образовалась эта слоистость. Разделение минеральных составных частей породы на слои различного состава представляет определенную проблему для петрографа, независимо от того, вызвано это разделение

¹ Начало в этом направлении положено. См. D. M. Shaw, W. D. Haggis on, Determination of the mode of a metamorphic rock, *Am. Min.*, 40, 614—623 (1955).

магматическими, метаморфическими или осадочными процессами. Это справедливо также для линейности и полосчатости, которые могли образоваться разными способами в породах самого различного происхождения².

Касаясь только общих геометрических элементов этих трех типов ориентировки, мы можем рассматривать полосчатую породу как такую слоистую породу, которая характеризуется прерывистыми слоями; сходным образом, линейность можно считать особым случаем полосчатости.

В настоящее время невозможно провести исчерпывающий анализ этой проблемы; наша основная задача — внести корректизы в необоснованные пессимистические взгляды, связанные с этой проблемой, и мы попытаемся это сделать, не впадая в излишний оптимизм. Из соображений экономии места мы ограничимся случаем истинной слоистости, так как порода, обладающая такой слоистостью, наиболее тонко реагирует на обычную технику количественно-минералогического анализа. Для начала мы предложим вниманию читателя очень простую модель, которая характеризуется геометрически правильной ориентировкой, обычно никогда не встречающейся в породах. Следует помнить, что трудности, которые мы рассматриваем, не возникают при количественно-минералогических анализах таких пород, в которых ориентировка проявлена слабо или отсутствует вовсе. Таким образом, «идеальная» слоистость нашей модели действительно полезна, так как такая модель знакомит нас с наихудшим возможным случаем.

² Предложенные определения трех типов ориентировки достаточно хорошо согласуются с обычными понятиями, принятыми в химической петрологии, но лишь частично совпадают или противоречат более сложным определениям структурной петрологии, которые довольно путаны. Тем не менее следует помнить, что ни сложная ориентировка, ни узоры, образованные трещинами отдельности, кливажем пород и так далее, не создают никаких трудностей для количественно-минералогического анализа. Структуры, которые нас интересуют, образованы исключительно пространственной ориентировкой отдельных зерен или зернистых агрегатов. Это исключает большую часть противоречий в отношении линейности и полосчатости. Следует вместе с тем отметить, что некоторые геологи-структурщики не согласны с тем, что слоистость (часто называемая полосчатостью в химической петрологии) является в некотором смысле ориентировкой.

2. Выбор плоскости измерения в слоистой породе

В какой плоскости слоистой породы следует проводить измерения? На этот вопрос обычно дается один и тот же ответ. В некотором смысле слоистая порода состоит из двух типов элементов, а так как элементы каждого отдельного типа не совсем одинаковы (слои одного и того же типа могут значительно различаться как по мощности, так и по составу), очевидно, надо включать их как можно больше в каждую отдельную измеряемую площадь. Поэтому измеряемая площадь должна располагаться под возможно большим углом, а еще лучше — перпендикулярно к плоскости слоистости.

Обычно принято считать, что одна только нормальная ориентировка может привести к правильному результату; действительно, это тот способ, который был первоначально предложен Делессом. Однако из сказанного в предыдущей главе ясно, что повторное случайное опробование, проведенное под любым углом к любому структурному элементу, даст в конце концов тот же самый результат, что и повторное случайное опробование при нормальной ориентировке. Число повторений, необходимое для достижения заданной точности, будет обычно меньше в случае выборок, взятых нормально к слоистости, чем при выборках, взятых в любом другом направлении или в комбинации различных направлений. Нормальная ориентировка не является более точной, чем любая другая; она просто более эффективна.

3. Ориентирование измеряемой площади относительно следа слоистости

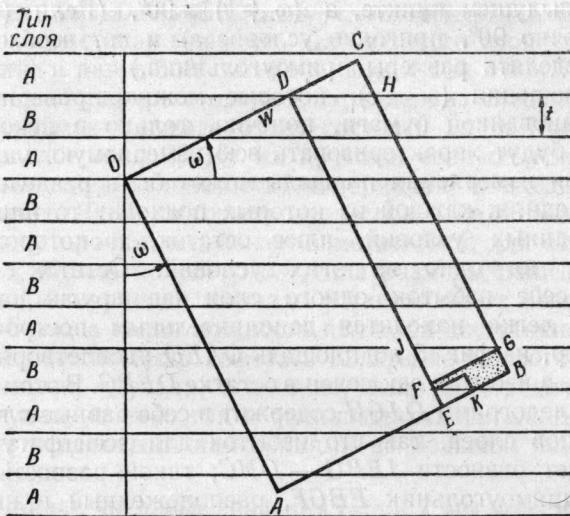
Решение брать плоскость измерения нормально к плоскости слоистости (или почти нормально) легко осуществимо и далеко не ново. Более трудной является проблема правильной ориентировки измеряемой площади в этой плоскости. Так как большая часть современных шлифов имеет прямоугольные очертания и работа почти всех приборов, применяемых в количественно-минералогическом анализе, заключается в проведении серий равноотстоящих линий или рядов точек параллельно одному краю шлифа, мы будем считать, что измеряемая площадь является прямоугольником с длиной l и шириной w . Под каким углом ω к следу слоистости следует ориентировать этот прямоуголь-

ник? Или, в более общей форме, как размер и наклон измеряемой площади влияют на ее состав?

Общее решение этой проблемы является довольно трудным делом. Например, для некоторого фиксированного угла наклона малая площадь не обязательно окажется худшей выборкой, чем большая, а площадь некоторого промежуточного размера может быть лучше, чем две первые. Кроме того, площадь, которая окажется оптимальной при некоторых определенных значениях ω , наверняка уже не будет таковой при каких-то других значениях ω . Однако простым, хотя и несколько громоздким действием из планиметрии мы можем показать, что если даже количество слоев в измеряемой площади невелико, проблема выборки гораздо менее серьезна, чем принято считать, а при возрастании количества слоев в измеряемой площади эта проблема становится совсем простой. Для нашей непосредственной цели больше ничего и не требуется.

Взятый в любой плоскости, кроме плоскости слоистости, шлиф слоистой породы будет состоять из серии чередующихся параллельных слоев. Предположим, что эти слои имеют одинаковую мощность и представлены только двумя типами: A и B. Таким образом, объем исходного образца на 50% по объему состоит из слоя каждого типа, и плоскость, проведенная произвольно через этот образец под любым отличным от нуля углом к плоскости слоистости, содержит 50% (по площади) слоя каждого типа.

В качестве модели такой плоскости мы можем использовать лист линованной бумаги; линии изображают следы контактов между слоями двух типов, так что проектируемая мощность слоя t , одинаковая для слоев обоих типов, равна расстоянию между линиями. Для того чтобы изучить влияние наклона на состав прямоугольной измеряемой площади, будем вращать прямоугольник длиной l и шириной w вокруг некоторой точки, взятой на одном из контактов слоев (или линий на бумаге). Для удобства поместим один из углов прямоугольника в эту исходную точку. Такая модель изображена на фиг. 5. Измеряемая площадь, вообще говоря, будет содержать небольшой избыток слоя одного типа над другим, но построением легко показать, что при определенных значениях ω этот избыток исчезает и измеряемая площадь имеет такой же состав, как и исходное вещество. Это утверждение справедливо, если удовлетворяется одно из следующих условий:



Фиг. 5. Прямоугольник $OABC$, наклоненный под углом ω к направлению слоистости.

а) $l = w \operatorname{tg} \omega$, независимо от мощности слоя t . В этом случае диагональ измеряемой площади проходит по линии контакта слоев;

б) w является четным целым числом, кратным $\frac{t}{\sin \omega}$, независимо от длины l ;

в) l является четным целым числом, кратным $\frac{t}{\cos \omega}$, независимо от ширины w ;

г) l является любым целым числом, кратным $\frac{t}{\cos \omega}$, и w является любым целым числом, кратным $\frac{t}{\sin \omega}$;

д) величина $(l^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$ — длина диагонали измеряемой площади — является четным целым числом, кратным $\frac{t}{\cos(\omega + \theta)}$, где $\theta = \operatorname{arctg} \frac{w}{l}$ и $(\omega + \theta) < 90^\circ$;

е) величина $(l^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$ является четным целым числом, кратным $\frac{t}{\sin(\omega + \theta) - 90^\circ}$, где θ имеет то же значение, что

и в предыдущем пункте, а $(\omega + \theta) > 90^\circ$. (Если $(\omega + \theta)$ равно точно 90° , пригодно условие а) и нет необходимости определять размеры прямоугольника.)

Соотношения (а — е), которые можно проверить на листе линованной бумаги, конечно, только в некоторых случаях будут характеризовать всю измеряемую площадь. Но любая измеряемая площадь может быть разделена на подплощади, к каждой из которых подходит то или иное из указанных условий, плюс остаток, к которому не подходит ни одно из этих условий. Остаток содержит в себе избыток одного слоя над другим, и этот избыток легко находится дополнительным построением. Например, на фиг. 5 подплощадь $OAED$ удовлетворяет условию б), а избыток заключен в остатке $DEBC$. В этом остатке параллелограмм $DJGH$ содержит в себе равные площади двух типов слоев, так что избыток для всей фигуры не превышает разности $JEBG - DHC$; такой разностью является прямоугольник $EBGF$, расположенный в нижнем правом углу. В этом прямоугольнике маленький треугольник EKF в слое типа A уравновешен равной площадью в смежном слое типа B . Вся фигура, таким образом, содержит избыток слоя типа B , в точности равный затушеванной части прямоугольника $EBGF$.

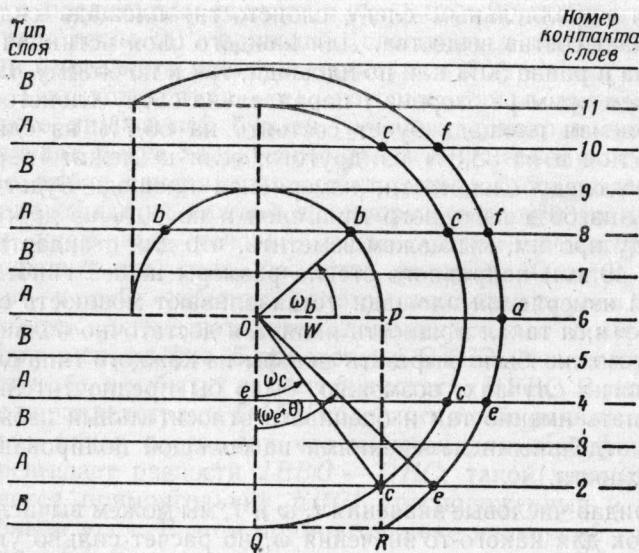
Простым построением подобного рода мы всегда можем определить, какой тип слоя присутствует в избытке в измеряемой площади, и, сделав аккуратно чертеж, мы можем даже составить довольно правильное представление о размере этого избытка. Однако если нам нужны числовые оценки этого избытка, мы должны определить числовые значения t , l , ω и θ ; при этом условии мы всегда сможем вычислить точный размер избытка, но такое вычисление является зачастую очень трудоемким. Так как мы не нуждаемся в чисто математическом выражении зависимости, нам будет достаточно практического примера, который на первый взгляд может показаться весьма неубедительным.

Чтобы упростить вычисления, будем выражать ω и l в целых числах, кратных t , а именно: $\omega = 3t$, $l = 5t$. Предположим, что ω изменяется в пределах $0^\circ < \omega < 180^\circ$. Величины $\omega = 3$, $l = 5$ выбраны по двум соображениям. Во-первых, отношение ширины к длине у обычного (24×40 мм) покровного стекла равно $3 : 5$. Во-вторых, если какой-либо край измеряемой площади случайно оказы-

вается параллельным следу слоистости, площадь сильно искажает состав вещества. Для каждого слоя истинная величина μ равна 50% как по площади, так и по объему. Если в нашем примере сторона l параллельна следу слоистости, измеряемая площадь будет состоять на 66,7% из одного типа слоя и на 33,3% из другого; если w лежит параллельно следу слоистости, измеряемая площадь будет состоять на 60% из одного типа слоя и на 40% из другого. (Между прочим, мы можем заметить, что для стандартного (24×40 мм) покровного стекла размеры нашей гипотетической измеряемой площади устанавливают мощность слоя $t = 8$ мм, а такая мощность является достаточно большой, чтобы можно было вырезать шлифы из каждого типа слоя; во многих случаях, возможно, было бы предпочтительнее поступать именно так и оценивать относительный избыток слоев отдельными измерениями на большой полированной поверхности.)

Придав числовые значения t , w и l , мы можем вычислить избыток для какого-то значения ω , но расчет сильно упрощается, если не только исходная точка, но и один (или несколько) из остальных углов измеряемой площади попадает на границу слоев. В процессе поворота нашего прямоугольника размером 3×5 на 180° это произойдет 24 раза; не менее 11 из этих «целых пересечений» удовлетворяют какому-нибудь из условий (а — е), так что для 11 различных значений ω в области $0^\circ < \omega < 180^\circ$ избыток исчезает и состав измеряемой площади является точно таким же, как в исходной породе. Если принять за ω угол между w и следом слоистости (см. фиг. 5), эти «неизбыточные» положения фиксируются при $15,78^\circ$; $36,87^\circ$; $38,99^\circ$; $41,81^\circ$; $59,04^\circ$; $66,42^\circ$; $79,08^\circ$; $102,30^\circ$; $113,58^\circ$; $138,19^\circ$; $143,13^\circ$.

Положения 24-х «целых пересечений» можно определить из фиг. 6, которая показывает путь, пройденный каждым углом измеряемой площади $OPQR$ при повороте на 180° . Внутренняя полуокружность отвечает траектории точки P , и вдоль нее располагаются целые пересечения, которые удовлетворяют условию б). Средняя полуокружность выполняет подобную функцию для точки Q , и вдоль нее располагаются целые пересечения, удовлетворяющие условию в). Внешняя полуокружность отвечает траектории точки R , и на ней находятся целые пересечения, удовлетворяющие условиям а), д) и е). Для первого пересечения



Фиг. 6. Местоположение целых пересечений для измеряемой площади длиной $l = 5t$ и шириной $w = 3t$.

типа б) $\omega = \arcsin \frac{2}{3}$. Для первого пересечения типа в) $\omega = \arccos \frac{4}{5}$. Для единственного пересечения типа а) $\omega + \theta = 90^\circ$ и $\omega = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$; для первого пересечения типа д) $\omega = \arccos \frac{4}{\sqrt{34}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

Подобным образом можно вычислить ω для других «целых» положений. Для тех из них, которые лежат на контактах слоев с нечетной нумерацией, а также для всех величин θ , при которых угол от начального приближается к целому, кратному t , измеряемая площадь будет, вообще говоря, содержать некоторый избыток одного типа слоя над другим. Сейчас мы покажем, используя результаты для

³ Следует отметить, что все «неизбыточные» положения встречаются на контактах слоев с четными номерами. Порядок нумерации был выбран с целью напомнить, что каждая такая точка отстоит от исходного положения на четное целое число, кратное проектируемой мощности слоя. «Неизбыточные» положения, удовлетворяющие условию г) в измеряемой площади, обладающей такими размерами, не встречаются.

нечетных целых положений, что этот избыток обычно довольно небольшой. Фиг. 7 дает графическое выражение этого избытка для каждого из целых нечетных положений в промежутке $0 < \omega < 180^\circ$. Значения ω , показанные на диаграмме, были вычислены по только что описанной схеме. Исходя из этих значений и принятых размеров l и w (5 и 3 соответственно), мы можем вычислить размер затушеванной площади (избыток) в каждой фигуре. Если обозначить эту площадь через e , то величина, которую мы ищем, равна $\frac{e}{2}$ как часть или процент от всей измеряемой площади, или

$$z = |\bar{x}_b - \mu| = |\bar{x}_a - \mu| = \frac{e}{2lw}, \quad (2.1)$$

так как нас интересует расхождение между содержанием каждого типа слоя в измеряемой площади (x_a или x_b) и этим же содержанием в исходном веществе ($\mu = 0,5$ или 50%).

Начиная с первого нечетного пересечения стороны OP на фиг. 7 мы имеем

$$\delta_2 = l - \frac{(l-1)}{\cos \omega} = 5 - \frac{4}{\cos \omega}; \quad (2.2)$$

площадь всего остатка равна

$$A_R = w\delta_2 = 3 \left(5 - \frac{4}{\cos \omega} \right). \quad (2.3)$$

Уравновешенная (незатушеванная) часть имеет стороны δ_2 и $\frac{\delta_2}{\tan \omega}$, так что ее площадь равна

$$A_B = \frac{\delta_2^2}{\tan \omega}. \quad (2.4)$$

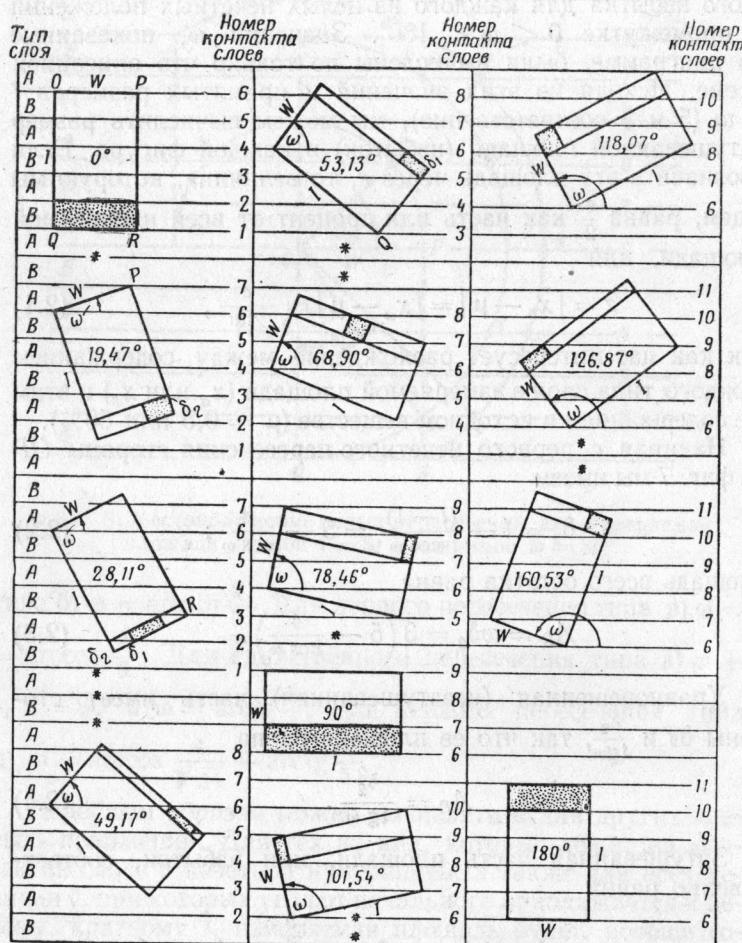
Затушеванная часть площади, или избыток, соответственно равна

$$e = A_R - A_B = w\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{\tan \omega}. \quad (2.5)$$

И окончательно

$$z = \frac{1}{2lw} \left(w\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{\tan \omega} \right) = \frac{\delta_2^2}{2lw} \left(w - \frac{\delta_2^2}{\tan \omega} \right) = 0,0221. \quad (2.6)$$

Таким образом, измеряемая площадь содержит 52,2% слоя типа А и 47,8% слоя типа В.



Фиг. 7. Выделение остаточных и избыточных площадей в измеряемой площади размером 3×5 в случае целых пересечений с нечетной нумерацией.

Избыток затушеван. Звездочки показывают местоположение неизбыточных позиций.

Рассматривая следующие нечетные целые пересечения конца диагонали *R*, мы отмечаем, что первое такое пересечение имеет место при $\omega = 0$, где $z = 0,100$ и измеряемая площадь содержит 60% слоя типа *B*. Следующее нечетное положение фиксируется на контакте слоев, обозначенном цифрой 3, где

$$\delta_1 = 3 - \frac{1}{\sin \omega}, \quad \delta_2 = 5 - \frac{4}{\cos \omega}, \quad (2.7)$$

и мы можем непосредственно вычислить z как

$$z = \frac{\delta_2}{30} (3 - 2\delta_1) = 0,0195, \quad (2.8)$$

так что измеряемая площадь содержит 51,95% слоя типа *A* и 48,05% слоя типа *B*.

Наконец, следует отметить, что первое нечетное пересечение точки *Q*, так же как и точки *R*, встречается при $\omega = 0$. При следующем нечетном пересечении (контакт 3, как и для *R*) мы имеем (см. фиг. 7)

$$\delta_1 = 3 - \frac{2}{\sin \omega} \quad (2.9)$$

для стороны площади избытка, расположенной на стороне ω .

Сторона избыточной площади, параллельная *l*, равна

$$\frac{1}{\cos \omega} - \delta_1 \tan \omega,$$

и соответственно

$$e = \delta_1 \left(\frac{1}{\cos \omega} - \delta_1 \tan \omega \right), \quad (2.10)$$

$$z = \frac{\delta_1}{30} \left(\frac{1}{\cos \omega} - \delta_1 \tan \omega \right) = 0,0164, \quad (2.11)$$

так что измеряемая площадь содержит 51,64% слоя типа *B* и 48,36% слоя типа *A*.

Результаты этих и подобных вычислений для других типов пересечений сведены в табл. 1, в которой величина z отрицательна, если измеряемая площадь содержит избыток *B* над *A*.

Вариация в составе измеряемой площади является непрерывной, но, как показывает таблица, функция, которая описывает эту вариацию, должна быть крайне сложной. К счастью, нам не требуется исчерпывающей информации об

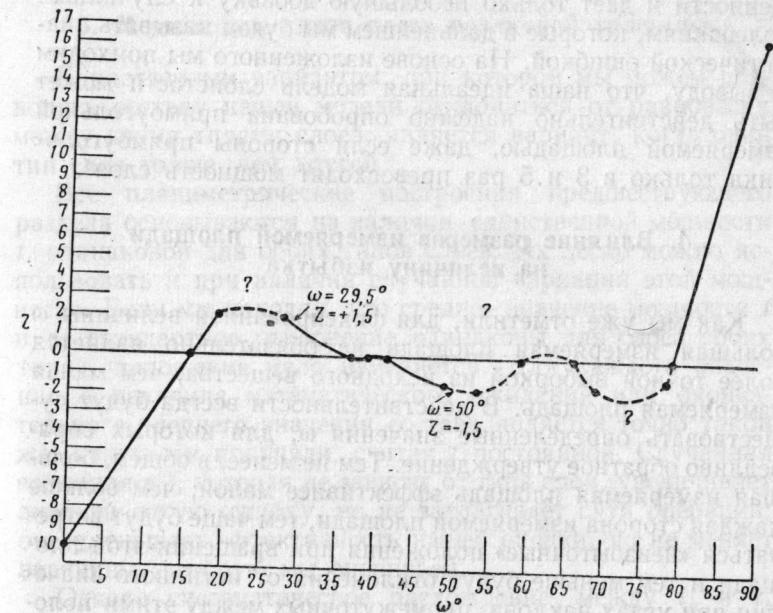
Таблица 1

Угол наклона (ω) и процентная величина избытка (100 z) для всех целых пересечений измеряемой площади размером 3×5 , которая поворачивается на 180° около одного из углов с вершиной на контакте слоев

ω°	100 z
0	-10,00
15,78	0
19,47	+ 2,21
28,11	+ 1,95
36,87	0
39,00	0
41,81	0
49,17	- 1,35
53,13	- 1,64
59,04	0
66,42	0
68,90	- 1,57
78,46	- 1,02
79,08	0
90,00	+16,67
101,54	+ 1,02
102,30	0
113,58	0
118,07	+ 1,87
126,87	+ 1,67
138,19	0
143,13	0
160,53	+ 2,18
180,00	+10,00

этой функции; нам надо только показать, что проблема выборки в случае слоистости разрешима, и это легко осуществить. Фиг. 8 представляет собой график значений табл. 2.1 для $0 \leq \omega \leq 90^\circ$. Линия, соединяющая точки, частично сплошная, частично пунктирная; мы ничего не можем сказать о том, будет ли z максимальным (или минимальным) в случае нечетных целых пересечений. Иногда целые пересечения дают максимум или минимум, иногда нет. В центральной области (между первым и вторым во-

просительными знаками) часть кривой, показанная сплошной линией, была исследована довольно подробно. Волнистая линия, соединяющая три «неизбыточные» точки в центральной части этой области, действительно существует, хотя, если чертить в точном масштабе, ее было бы трудно



Фиг. 8. Кривая, соединяющая величины z для целых пересечений 3×5 измеряемой площади в промежутке $0 \leq \omega \leq 90^\circ$, которая поворачивается около вершины, расположенной на контакте слоев. Данные табл. 1.

показать. С каждой стороны от этих трех точек кривая очень близка к прямой линии и наклон левой ветви почти равен наклону правой. Таким образом, если угол ω выбран чисто случайно в промежутке $30^\circ < \omega < 50^\circ$, значения z будут практически распределены равномерно вблизи 0° с $\sigma = \frac{3}{\sqrt{12}}$ или $0,87\%$. Благодаря почти горизонтальной центральной части протяженностью около 5° стандартное отклонение z в действительности будет несколько меньше этого значения.

В настоящее время требование, чтобы один угол измеряемой площади совпадал с контактом слоев, нетрудно удовлетворить, так же как и соблюсти условие, чтобы значение ω было выбрано чисто случайно в пределах интервала в 20° . Если эти условия выполнены, слоистость не вносит смещения и дает только небольшую добавку к случайному колебаниям, которые в дальнейшем мы будем называть аналитической ошибкой. На основе изложенного мы приходим к выводу, что наша идеальная модель слоистости может быть действительно надежно опровергнута прямоугольной измеряемой площадью, даже если стороны прямоугольника только в 3 и 5 раз превосходят мощность слоя⁴.

4. Влияние размеров измеряемой площади на величину избытка

Как мы уже отметили, для фиксированной величины ω большая измеряемая площадь не обязательно является более точной выборкой из исходного вещества, чем малая измеряемая площадь. В действительности всегда будут существовать определенные значения ω , для которых справедливо обратное утверждение. Тем не менее, в общем, большая измеряемая площадь эффективнее малой; чем больше каждая сторона измеряемой площади, тем чаще будут встречаться «неизбыточные» положения при вращении этой площади и тем меньше будут отклонения от истинного значения при углах наклона, промежуточных между этими положениями. Когда размеры измеряемой площади возрастают по сравнению с мощностью слоя, изогнутые части кривой на фиг. 8, смежные с почти горизонтальной центральной областью, становятся более пологими. Как и во многих случаях подобного рода, улучшение, полученное при первом же увеличении размера (в действительности при увеличении числа мощностей слоев, укладывающихся в стороне прямоугольника), может оказаться совершенно поразительным. Например, если в разобранном нами случае мощность слоя уменьшить вдвое, так что стороны прямоугольника будут

соответственно равны $6t$ и $10t$ (величины, вполне вероятные в шлифах слабо метаморфизованных пород), каждое из 24-х значений ω , приведенных в табл. 1, займет «неизбыточное» положение, и величина z для других 31 целых пересечений всегда будет меньше 1% и почти всегда меньше 0,5%.

5. Модель для типов слоев различной толщины

Единственным вариантом, при котором мы можем позволить составу нашей модели отклониться от равновесия между двумя типами слоев, является вариант, когда один тип слоя толще, чем другой.

Все планиметрические построения предшествующего раздела основываются на наличии единственной мощности t , одинаковой для обоих типов слоев. Их легко можно использовать и при наличии случайной вариации этой мощности. Если мы находим, что среднее значение мощности t и ее стандартное отклонение одинаковы для слоев обоих типов, положение мало изменяется. Для каждого значения ω величина математического ожидания или окончательного среднего значения состава является точно такой же, какую мы получали, считая t постоянной. Случайная вариация в t , которая не зависит от типа слоя, увеличивает аналитическую ошибку, но не затрагивает сути операции; она уменьшает эффективность нашей оценки, но не меняет величины, которую мы оцениваем.

Однако систематическое расхождение между t_a и t_b вызывает действительные затруднения, хотя без такого расхождения состав нашей исходной выборки нельзя вывести из состояния равновесия между двумя типами слоев. К счастью, нашу модель на линованной бумаге легко приспособить для решения этого варианта. Необходимо лишь переопределить расстояние между линиями. Пока что это расстояние $t_a = t_b = t$. Если мы вместо этого будем считать, что таким расстоянием является полный цикл $t_a + t_b$, исходный образец может иметь какой угодно состав. Отсутствие места не позволяет провести детальный разбор результатов этой замены, но интересующийся читатель может исследовать этот вопрос самостоятельно. Как определение «неизбыточных» положений, так и правила выделения площади, содержащей избыток, требуют некоторого усовершенствования; за исключением особых случаев, диагональ измеряемой площади уже не используется для

⁴ Более косвенная геометрическая характеристика избытка значительно упрощает расчет z для только что разобранного случая. В приложении 2 интересующийся читатель найдет основы соответствующей методики и таблицу, показывающую изменения z в зависимости от изменения ω в центральной области кривой, изображенной на фиг. 8.

получения «неизбыточных» положений, в то время как каждое целое пересечение, образованное концами сторон l и w , определяет такое положение, если только не считать промежуточных пересечений. (Аналогично, диагональ редко используется в операции изолирования остатка, а все пересечения границ циклов с l или w служат этой цели.) В результате имеет место увеличение количества «неизбыточных» положений и более однородное угловое распределение этих положений⁵.

6. Исследование измеряемой площади слоистой породы

Таким образом, мы имеем полное основание полагать, что проблемы опробования, связанные со слоистостью, значительно менее серьезны, чем обычно принято считать, и что большая часть из них, если не все, могут быть решены в результате тщательной работы. Как следует приступать к анализу правильно выбранной измеряемой площади в случае слоистой породы? При этом, как мы видели, след слоистости будет наклонен под значительным углом к каждому краю измеряемой площади. А любой современный прибор, предназначенный для количественно-минералогического анализа, проводит линии или последовательности точек параллельно одному из краев измеряемой площади. (Можно говорить, что точечный счетчик проводит последовательности точек параллельно обеим сторонам измеряемой площади.) Пересечения обычно располагаются через постоянные интервалы. В таком случае, если линия пересечения была параллельна или почти параллельна следу слоистости, может возникнуть значительное искажение. Однако возможность искажения сильно уменьшается при отклонении следа слоистости от края измеряемой площади. Это искажение можно совершенно исключить, если отказаться от фиксированных интервалов между пересечениями, которые используются при отсутствии ориентировки, и использовать вместо них случайные интервалы. Случайные интервалы между пересечениями легко осуществить в лю-

⁵ Если мы пойдем немного дальше и примем расстояние между линиями равным $\sum_1^n t_k$, то такую модель можно также применить к породам, содержащим более чем два типа слоев.

бом приборе, который снабжен нониусом, дающим отсчеты до десятых долей миллиметра вдоль направления нормали к линии пересечений.

Например, анализ измеряемой площади шириной в 24 мм, который производился с фиксированным интервалом пересечения в 1 мм, состоит из 24-х пересечений. Для удобства будем считать, что первое из этих пересечений попадает точно на 0,0 мм нормали к линии пересечения. Следующее лежит на 1,0, третье на 2,0 мм и так далее. Для того чтобы рандомизировать эту последовательность, мы добавляем к каждому отсчету нониуса десятые доли, взятые в соответствии со значениями из таблицы случайных чисел. Если обозначить эти значения $r_1, r_2, r_3 \dots r_{24}$, положения последовательных пересечений на нониусе будут 0, r_1 мм вместо 0,0; 1 r_2 мм вместо 1,0 и так далее. Фактически выборка такого рода дает:

0,2	3,0	6,8	9,7	12,4	15,3	18,4	21,8
1,6	4,1	7,6	10,8	13,0	16,5	19,0	22,2
2,3	5,3	8,3	11,9	14,5	17,7	20,4	23,6

Для каждого анализа следует делать новый расчет, будь то анализ того же самого или другого шлифа. Положения пересечений должны, конечно, определяться нониусом, а не каким-то другим отсчетным устройством. (В большинстве приборов таким отсчетным устройством является сам нониус.)

В случае стандартного, правильно выбранного интервала пересечение попадает на каждый миллиметр. Предложенный вариант определяет положение пересечения как выбранного случайно из десяти возможных положений в пределах каждого миллиметра. Это помогает заменить обычно используемую на практике «систематическую» выборку на «стратиграфически-случайную». Если бы мы захотели, мы могли бы также заменить «стратиграфически-случайную» выборку на «чисто случайную», в которой весь отсчет нониуса, а не только десятые доли, был бы представлен цифрами из таблицы случайных чисел. В смысле эффективности стратиграфически-случайное опробование обычно значительно превосходит чисто случайное опробование. В данной обстановке оно было бы по меньшей мере столь же эффективно, как обычно применяемое систематическое опробование (расположение точек пересечений через равные промежутки). С достаточной и, возможно, даже с воз-

росшей точностью стратиграфически-случайное опробование устраняет смещенности, которые могли иногда возникать из периодических соотношений между мощностью слоя и интервалом пересечения.

7. Заключение

Приведенного выше довольно подробного обсуждения совершенно недостаточно для полного и логически строгого обоснования количественно-минералогического анализа сильно ориентированных пород. Но это обсуждение сыграет свою роль, если оно явится противоядием от обычного и ничем не обоснованного пессимизма относительно возможности такого анализа. Возникший, вероятно, из-за небрежной перефразировки и неправильно или слишком буквально понятой позиции Делесса этот пессимизм содержит в себе также значительное количество традиционной инертности и подвержен воздействию общественного мнения, которое обычно является ошибочным.

Состоятельность (см. гл. 1) оценок объемных пропорций, основанных на измерениях площадей, ни в коей мере не зависит от присутствия (или отсутствия) ориентировки. Ориентировка существует лишь на случайную аналитическую ошибку. Нет сомнения, что при некоторых обстоятельствах ориентировка может увеличивать (или уменьшать) эту ошибку и что иногда увеличение ошибки может быть таким значительным, что производить анализ бессмысленно. Вся проблема применения количественно-минералогического анализа к ориентированным породам целиком состоит в практической оценке роста аналитической ошибки, которая вызвана определенными видами ориентировки, и в выяснении, как уменьшать эту ошибку до определенных размеров. Наше обсуждение показало, что для одного чрезвычайно неблагоприятного типа ориентировки эта проблема, очевидно, гораздо менее серьезна, чем принято думать, но было бы в высшей степени неправильно предполагать, что проблема полностью разрешена. Она, как видно из изложенного, разрешима, но в то же время на пути ее разрешения стоят определенные трудности.

Глава 3 МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЛОЩАДЕЙ В ШЛИФАХ

В этой главе мы вкратце рассмотрим методики и приборы, использующиеся для количественно-минералогического анализа. Хотя Делесс первый предложил основное соотношение (1.12), которому мы присвоили его имя, он не создал прибора, специально предназначенного для количественно-минералогического анализа. Единственным результатом его «практической» деятельности была такая непрактичная методика, которая отбивала охоту к подражанию в течение почти половины столетия. В работе его первого признанного последователя Розивалья основной упор делается, по общему мнению, на новую геометрическую теорию, которая, как мы вскоре увидим, действительно развивает соотношение Делесса. Подобно Делессу, Розиваль разработал методику, но не создал прибора.

Современное развитие предмета начинается с работ Шенда, который не затронул геометрической основы метода, но сконструировал прибор, благодаря которому количественно-минералогический анализ впервые оказался в сфере практической научной деятельности.

1. Делесс, Розиваль, Шенд

Деятельность Делесса является, как это ни странно, односторонней. Сильная геометрическая интуиция привела его к вполне законченной, хотя и недоказанной формулировке зависимости между математическими ожиданиями относительных площадей и относительными объемами. Его разбор «цилиндрической модели» показывает, что он хорошо понимал неудовлетворительность своего доказательства, а его туманные рассуждения об ориентированных

породах означают, что он либо давал невысокую оценку, либо не верил в универсальность установленного им соотношения. Как мы уже видели, даже поверхностное знание элементарного статистического анализа допускает более удовлетворительное толкование основного соотношения Делесса. Эти сведения были недоступны Делессу, так как основы статистики в то время не были разработаны, и за это, естественно, Делесса упрекать трудно.

С другой стороны, методика, которую он фактически применял для получения оценок площадей, кажется утомительной и грубой. Сначала он помещал кусок восковки на полированную поверхность и перечерчивал на восковку контуры площадей, находящихся под восковкой минералов. Затем узор передавливался с восковки на фольгу и из фольги вырезались по контурам различные площади. После этого кусочки фольги, отображающие сечения одного и того же минерала на исходной поверхности, собирались и взвешивались. Возможности для ошибки представляются огромными.

Его метод предшествовал массовому использованию шлифов, и сам Делесс работал только на полированных поверхностях, не применяя микроскопа. Сорби, по-видимому, первый применил микроскоп в количественно-минералогических анализах. Он делал зарисовки отдельных микроскопических полей с помощью прозрачной камеры на «куске чертежной бумаги одинаковой плотности» и оценивал относительные площади на этих полях, используя ту же методику, которую применял Делесс для фольги. Джоли заменил вырезывание и взвешивание следа изображения графическим суммированием. Джогансен, используя планиметр непосредственно в проектирующей части прозрачной камеры, окончательно исключил необходимость воспроизведения узора поверхности; он утверждал, что это очень простая операция, но из его описания она кажется довольно трудной.

Основной недостаток всех прямых операций измерения, в которых используется микроскоп, заключается в том, что каждое измерение ограничено единственным полем микроскопа. Так как для надежного определения обычно требуется значительное увеличение, площади отдельных выборочных полей лишь в редких случаях могут превышать несколько первых десятков квадратных миллиметров. Как мы увидим в дальнейшем, для большинства пород

такая площадь является совершенно недостаточной¹. Все способы количественно-минералогических анализов основаны на соотношении Делесса, но методику Делесса реализуют только непосредственные измерения площадей. Эти последние имеют небольшое значение в современной петрографии.

Хотя имя Розиваля обычно связывают с теми операциями, которые применяются для получения оценок относительных площадей посредством параллельных равнотстоящих друг от друга линий, этот исследователь, предлагая свой «*Gesteinsfaden*», имел в виду совсем другое, и при работе на полированных поверхностях он часто пользовался линиями, которые не являлись ни прямыми, ни параллельными (см. R o s i w a l, 1898, fig. 3,4). Розиваль, по-видимому, считал, что разработал полную замену соотношения Делесса, но так как его измерения выполняются на плоской поверхности, они могут оценивать состав объема только в том случае, если такую оценку допустимо делать по соотношениям на поверхности. Таким образом, соотношение Делесса остается необходимым связующим звеном². Действительное значение метода Розиваля состоит не в том, что он показал, как избавиться от соотношения Делесса, но скорее в том, что он показал, как можно использовать это соотношение. Сам Делесс этого не сделал.

Мы только что отметили, что «линия подсчета» Розиваля не всегда была прямая и что она не всегда состояла из параллельных или взаимно перпендикулярных отрезков.

¹ В самом деле, Соллас (Sollas, 1889) предложил использовать для подсчета не меньше 24-х микроскопических полей при анализе шлифа гранита Лейнстер.

² Наиболее полное развитие разбираемая ниже методика Розиваля получила у Линкольна и Ритца (Lincoln F., Rietz H. L., 1913). Они приводят теорему Кавальери как геометрическую альтернативу для доказательства соотношения Делесса, «намеченного» Делессом, и продолжают утверждать, что если справедливо соотношение между площадями и объемами, то справедливо соотношение между линиями и площадями. Единственная трудность заключается в том, что эта теорема непригодна; она справедлива только тогда, когда площади сечения двух твердых тел равны на каждом уровне сечения, а это обычно не характерно для минеральных зерен в породе. Доказательство Линкольна — Ритца не говорит нам, могут ли быть результаты количественно-минералогического анализа физически интерпретированы как процентные отношения объемов или же они должны рассматриваться только как наблюдение неизвестного среднего.

Однако в шлифе отрезки пересечений можно было измерять окуляр-микрометром; это, вероятно, убедило Розивала использовать сетку линий, пересекающихся под прямым углом. Он замерял отрезки пересечений для каждого зерна (или минерального вида) вдоль каждой линии пересечения. Количество записей, которые производились на бумаге, очевидно, было огромным, а возможность ошибки почти так же велика, как в случае фольги Делесса. Расход времени на анализ, хотя, вероятно, до некоторой степени и уменьшился, но по-прежнему был излишне большим. Шлиф грубозернистой породы размером в 4 см² мог быть обработан Розивалем в «один прием»; он указывает, что скорость операции падает с увеличением числа зерен в пересечении, но сколько часов требовалось ему на шлиф средней или тонкозернистой породы, он не говорит.

Изобретение первого реально ощущимого усовершенствования в методике анализа шлифов — регистрирующего микрометра Шенда было логическим развитием метода Розивала. В этом приборе для измерения используется не окуляр-микрометр микроскопа, а пересекающий механизм столика. Два противоположных винта снабжены калиброванными колесиками, и шлиф может перемещаться поперек столика микроскопа вращением любого винта. Один винт используется только для пересечения «неизвестной» составной части, а другой — для всех остальных составных частей. После каждого пересечения записываются отсчеты циферблотов, и в конце анализа разности между последовательными отсчетами суммируются для каждого циферблата. Суммы этих разностей равны соответственно общей длине пересечения в неизвестном минерале $S(U)$ и в остатке $S(R)$. Нужное нам отношение площадей равняется $\frac{S(U)}{S(U)+S(R)}$.

Практическая выгода измерения с использованием пересекающего механизма огромна. Применяя методику Розивала, оператор должен отмечать длину пересечения для каждого зерна. В случае методики Шенда отметка делается только в конце каждого пересечения. Усталость и напряжение, возникающие при длительном пользовании окуляр-микрометром, исключены при работе со столиком Шенда. На единичное пересечение шлифа столиком Шенда требуется не более двух минут, а весь анализ для одной составной части может быть закончен в полчаса или в час, в зависимости от размера шлифа и расстояния между пересечениями.

Микрометр Шенда обладает рядом чисто механических недостатков; кроме того, его использование затруднено неудовлетворительным состоянием теории предмета. Механический недостаток состоит прежде всего в том, что единичный анализ дает результаты только для одной составной части, так что для каждого минерала, содержание которого нужно оценить, необходимо полное повторение пересечений.

Другим важным недостатком является отсутствие приспособления, допускающего либо случайный, либо систематический выбор пересечений. С технической точки зрения, конечно, это мелочь; эту функцию могла бы выполнить миллиметровая шкала вдоль нормали к направлению пересечения, и Шенд об этом упоминает. Главное то, что эта шкала, по-видимому, не считалась заслуживающей внимания. Розиваль полагал, что ему удалось обойти необходимость оценки площадных отношений; имели значение только соответствующие длины линий. Его единственное определение интервала пересечения заключалось в том, что интервал должен быть не меньше «размера зерна», и это определение было принято при первом описании микрометра Шенда. Хотя диаграммы Розивала показывают, что при использовании параллельных линий расстояния между ними фактически были одинаковыми, Розиваль нигде не отмечает, что это либо необходимо, либо желательно. Не делал этого и Шенд. Сейчас ясно, что, если не располагать пересечения систематически или случайно, они не дадут состоятельных оценок отношений площадей. Розиваль настаивал на рассмотрении «Gesteinsfaden» как выборки из породы, а не из поверхности породы, на которой она бралась. Под его влиянием петрографы постепенно перестали принимать во внимание соотношение Делесса, а также тот факт, что оно справедливо только в том случае, когда числитель и знаменатель левой части уравнения (1.12) являются состоятельными оценками площадей в плане.

2. Непрерывные линейные интеграторы

В основу всех непрерывных линейных интеграторов, применяющихся в настоящее время, положен усовершенствованный микрометренный столик Шенда. Уэнтворт первый описал прибор, который позволял осуществлять анализ нескольких составных частей. В приборе Хелбата пересе-

кающий и регистрирующий механизмы приводятся в движение мотором. Интересно, что у первого микрометра Уэнтворт, так же как и у столика Шенда, не было никакого приспособления, которое бы позволяло производить либо случайный, либо систематический выбор пересечений. Это упущение особенно любопытно в столике Уэнтворт, так как сам Уэнтворт рекомендовал использовать при анализе равные интервалы между пересечениями, которые сейчас применяются на практике. Опубликованные описания столиков Уэнтворт—Ханта и Хелбата доступны большинству читателей-геологов. В каталогах Лейтца и Цейсса читатель найдет описание очень дорогих приборов, подобных прибору Уэнтворт — Ханта³.

В только что описанных приборах связь между регистрирующим и пересекающим механизмами возникает только тогда, когда нажимается определенный клавиш (или кнопка). С другой стороны, в приборе, который описан Долларом, регистрирующие барабаны всегда связаны с пересекающим механизмом; вращение их предотвращается маленькими фрикционными тормозами. Оператор одной рукой крутит маховик пересекающего механизма, а другой нажимает на клавиши, соответствующие различным минералам; нажим клавиша отпускает тормоз и позволяет барабану вращаться; отпуск клавиша восстанавливает действие тормоза и стопорит барабан.

3. Точечные счетчики

Замена линий на точки при оценке площадей — открытие сравнительно недавнее. На измеряемую площадь накладывается симметричная, но не обязательно изотропная сетка точек и определяется минерал, лежащий под каждой точкой. В действительности анализ производится следующим образом: по столику микроскопа перемещают салазки, и минерал, попадающий на крест нитей при каждой остановке салазок, определяется и регистрируется.

В 1933 г. А. А. Глаголев опубликовал описание счетчика, который, по-видимому, являлся первым точечным счетчиком, предназначенным для петрографического анализа; в следующем году был опубликован перевод части

³ А также еще более дорогих автоматизированных приборов, подобных прибору Хелбата. Один из них появился в продаже, когда описание столика Хелбата было еще в печати.

этого описания в Америке, привлекший мало внимания. Счетчик Глаголева не был выпущен промышленностью ни в Америке, ни в Европе⁴. В инструменте Глаголева тросик, подобный тросику фотоаппарата, соединяет счетный блок с салазками, смонтированными на столике микроскопа. Нажим какого-то одного клавиша счетного блока автоматически передвигает салазки на следующую точку сетки и прибавляет единицу к соответствующему счетчику. Совсем недавно Барринджер заменил тросик в приборе Глаголева сердечником соленоида, а салазки — винтом.

В 1949 г. простой и сравнительно дешевый точечный счетчик был описан Чейзом (Chayes, 1949). В этом приборе подсчитывающий и пересекающий механизмы впервые с тех пор, как они были объединены вместе в столике Шенда, снова полностью разъединены. Сетка точек осуществляется с помощью пружинящих скоб, упирающихся в зубчатые колеса, смонтированные на концах винта и шестерни стандартного механического столика. В модели Американской оптической компании натяжение пружинящих скоб контролируется серией винтов, и при открученных винтах механический столик работает, как обычный, действуя без щелчков. Счетное устройство представлено блоком, который обычно применяется биологами или для подсчета блюд в кафе. Неудобно, что оператору приходится использовать обе руки. Предложено и испытано несколько моделей этого прибора, но пока появились в печати описания только двух из них (Розенфельд, Чейз).

Форд в качестве точечного счетчика описал интересный по конструкции прибор, который стоит ближе к линейному интегратору. Зубчатое колесо, вращающееся вместе с пересекающим винтом, действует на переключатель, который передает импульсы счетному блоку, где параллельно смонтированы электромагнитные счетчики. Каждый счетчик контролируется клавишем, который нажимается оператором на определенное время. Форд сконструировал механизм регистрации счета для каждого пересечения от 50 до 100 μ , так что расстояние между «точками» имеет тот же порядок, что и «непрерывные» линейные измерения, которые могут быть осуществлены с помощью нониуса обычного механического столика. Смущает лишь одно обстоятельство:

⁴ В СССР до войны пуш-интеграторы Глаголева выпускались промышленностью, но затем, по-видимому, из-за низкого качества выполнения были заменены линейными счетчиками. — Прим. ред.

является ли способность точно определять минералы у среднего аналитика такой, что ошибка подсчета будет иметь хоть какое-то сходство с той точностью, которая обусловливается громадным числом «точек», полученных в ходе анализа.

Компания Джемс Свифт недавно объявила о «... серво-механически перемещающемся шасси... объединенном с электрическим регистратором или счетчиком единиц». Прибор не был описан в технической литературе, и в каталоге компании не приведено соответствующей схемы. Не упоминается также, перемещается ли столик с помощью винта или с помощью салазок. По-видимому, прибор в принципе совершенно аналогичен первому счетчику точек Глаголева; нажатие какого-то одного клавиша табулятора переводит столик на следующую точку. Так как столик не имеет переключателя обратного хода, шасси в исходное положение необходимо возвращать рукой после каждого пересечения.

Популярность точечного счетчика быстро растет; вероятно, можно смело утверждать, что, по крайней мере в Америке, подсчетом точек производится такое же число количественно-минералогических анализов, как и линейными интеграторами.

Глава 4

ВОСПРОИЗВОДИМОСТЬ АНАЛИЗОВ ШЛИФОВ: I

1. Значение состоятельности

Читатель, не знакомый со статистической терминологией, вероятно, будет удивлен, почему в гл. 1 и 2 мы так много говорили об универсальности соотношения Делесса. После всего изложенного, даже если состав площади случайно выбранного шлифа является состоятельной оценкой объемного состава, каждый геолог может привести примеры, когда это соотношение наверняка будет очень ненадежным. Однако обсуждение, проведенное в гл. I, показывает, что от подобного типа ненадежности в большинстве случаев можно избавиться, построив правильную схему эксперимента.

Если бы мы обнаружили, что анализ шлифов дает несостоятельные оценки, мы не имели бы права считать, что с его помощью могут быть получены правильные объемные отношения, и были бы вынуждены заключить, что различия между наблюденными и истинными значениями не поддаются учету. Именно такая точка зрения развивается не только в вышеупомянутых работах, но фактически и во многих специальных статьях, посвященных этому вопросу. Именно этот необоснованный страх приговорил количественно-минералогический анализ к очень незначительной роли в современной петрографии. Только в 1919 г. Джогансен смог всерьез рекомендовать свой планиметр, так как стоимость его изготовления не превышала 25 долларов — цену регистрирующего микрометра Шенда. Интересно, что к этому времени были сделаны буквально тысячи полных химических анализов, появились таблицы Вашингтона и Озанна, и все американские петрографы, не найдя возможным уделить 25 долларов на приспособление, позволившее бы им получать количественно-минералогические составы в любом количестве, ухитрились найти и потратить значительные суммы на выполнение химических анализов, каждый

из которых стоил примерно те же 25 долларов. Нет надобности говорить, что такое большое количество химических анализов было сделано в основном для того, чтобы дать оценки минералогического состава пород.

Соотношение Делесса говорит нам, что при соблюдении определенных простых правил опробования измерения площадей, проведенные в шлифе, дают теоретически обоснованные и безупречные оценки объемных пропорций. В связи с этим считавшейся до сих пор наиболее важной и, по общему мнению, неразрешимой проблеме количественно-минералогического анализа просто не существует. Мы знаем (см. гл. 1), что, если наши оценки основываются на достаточном числе анализов, они в действительности являются оценками тех параметров, которые нас интересуют. Сейчас мы снова должны вернуться к изучению их изменчивости.

Как известно, анализ ошибок и путей к их уменьшению находится на неудовлетворительном уровне, в связи с чем большая часть оставшегося текста будет посвящена этому вопросу. Даже при производстве количественно-минералогических анализов — этой сравнительно простой процедуре — формы и типы ошибок разнообразны, и в каком случае нам следует перестать называть их ошибками и начать применять более подходящие термины — дело вкуса. Мы начинаем с разбора самого простого из вариантов, который мы, возможно, все согласимся называть ошибкой — с воспроизводимости анализов в одном и том же шлифе.

2. Непрерывный линейный интегратор

Относительно воспроизводимости, характерной для непрерывного линейного интегратора, почти ничего нельзя сказать. Имеющийся материал отрывочен, так как надлежащим образом спланированного экспериментального изучения, по-видимому, не проводилось. Проделанная работа (сравните, например, Чейз, 1946 и 1949) показывает, что ошибка приборов Хелбата и Уэнвортса с поперечным интервалом в 1 мм почти такая же, как при точечном подсчете на тысячу точек. Однако непрерывные линейные интеграторы, вероятно, больше различаются в рабочих характеристиках, чем точечные счетчики, а это, очевидно, как раз и хорошо, так как исключает широкую спекуляцию на ошибке процесса. Подсчеты являются функцией процесса подсчета, прибора и действия оператора.

3. Точечный счетчик

При рассмотрении фиг. 1 мы показали, что вероятность p точки, взятой чисто случайно в пределах области $(B + W)$, т. е. лежащей также и в области B , равна $\frac{A_B}{A_B + A_W}$. Так как точка должна непременно попасть в W , если она не попадает в B , то вероятность того, что точка не попадет в B , равна

$$q = \frac{A_W}{A_B + A_W} = 1 - p. \quad (4.1)$$

При любой операции подсчета мы, нажимая определенный клавиш, прибавляем единицу, если выбранная точка попала в B , и воздерживаемся от нажима этого определенного клавиша, если она лежит вне B . В этом случае мы можем сказать, что мы «наблюдаем» величину X , равную 1, всякий раз, когда точка лежит в B , и равную 0 — всякий раз, когда точка не лежит в B .

Частотное распределение величины X есть

X	0	1
$f(X)$	q	p

Генеральное среднее будет равно

$$\mu = \sum Xf(x) = (0)(q) + (1)(p) = p. \quad (4.2)^1$$

Если точки «объединяются» в группы по n штук, мы отмечаем только сумму X -ов, $S(X)$. Но очевидно

$$\mu_{S(X)} = np, \quad (4.3)$$

и если мы переведем результат в проценты, мы будем иметь (в силу того, что $\bar{x} = \frac{1}{n}S(X)$)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \mu_{S(X)} = p. \quad (4.4)$$

¹ Всякий раз, когда это возможно, мы будем придерживаться стандартной статистической терминологии, используя латинские буквы для выборочных значений, или *статистик*, и греческие буквы — для истинных значений, или *параметров генеральной совокупности*.

Объединим ли мы точки в группы одинаковых или различных объемов, каждая группа оценивает одно и то же генеральное среднее. Однако дисперсия оценки меняется обратно пропорционально числу точек n , по которому она рассчитана. Из распределения частоты мы можем легко вычислить генеральную дисперсию или дисперсию, присоединенную к оценке, которая основана на группах объемом $n = 1$.

Согласно определению, такая дисперсия равна

$$\sigma^2 = \sum (X - \mu)^2 f(X) = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = pq. \quad (4.5)$$

Соответственно для $n > 1$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_1^2 = \frac{pq}{n}, \quad (4.6)$$

и стандартное отклонение оценки p , основанной на n точках, выраженное в процентах, равно

$$\sigma_n = 100 \sqrt{\frac{pq}{n}}. \quad (4.7)$$

Из уравнения (4.7) ясно, что для фиксированного n значения σ распределены симметрично относительно максимума, достигаемого при $p = 0,5$, а для фиксированного p σ изменяется обратно пропорционально \sqrt{n} . Гораздо более важно (хотя, возможно, и не так ясно), что для умеренно большого n — порядка n , встречающегося в количественно-минералогическом анализе, — σ сравнительно нечувствительно к большим различиям в p и довольно заметным различиям в n .

В табл. 2 приведены в процентах значения σ , вычисленные для наиболее часто встречающихся значений n и p . Теоретическая ошибка подсчета не одна и та же, например, для $p = 0,5$, $n = 1400$ и для $p = 0,2$, $n = 1600$; в первом случае она равна 1,3, во втором — 1,0. Однако, если бы это были выборочные оценки, основанные на равном числе наблюдений, было бы чрезвычайно трудно установить, что они были взяты из различных совокупностей. Для получения 95% надежности, что это действительно так, потребовалось бы не меньше 40 элементов в каждой выборке, а для получения 99% надежности потребовалось бы 80 элементов. Так как это различие трудно установить, оно вряд ли имеет большое практическое значение. Оценки ошибки подсчета были основной целью одного довольно исчерпывающего опыта и побочным результатом трех других. В

различной степени во всех четырех опытах используется преимущество нечувствительности σ к малым различиям n и довольно большим различиям p .

Таблица 2

σ в процентах для различных сочетаний n и p

n	p			
	0,20	0,30	0,40	0,50
1 000	1,3	1,5	1,6	1,6
1 400	1,1	1,3	1,3	1,3
1 500	1,0	1,2	1,3	1,3
1 600	1,0	1,1	1,2	1,2
2 000	0,9	1,0	1,1	1,1

Простейшей и наиболее эффективной проверкой воспроизводимости, по-видимому, был бы многократный анализ единичного шлифа, но чрезмерные повторения часто приводят к очень нереальным оценкам воспроизводимости. Наблюденные средние значения вариаций остаются небольшими до тех пор, пока опыты можно рассматривать как независимые и случайные. Даже в тех опытах, где при каждом испытании уничтожается небольшая часть пробы, не всегда легко выделить повторения, которые действительно являются независимыми. В нашем же случае анализы должны были бы проводиться на одной и той же поверхности одним и тем же прибором. Очевидно, здесь возможны только незначительно различающиеся положения; в случае определенного порядка последовательности анализов их можно рассматривать как «выбранные» независимо и случайно. Однако повторения одной и той же линии пересечения не являются независимыми, так как нас интересует ошибка подсчета, относящаяся к анализам всей измеряемой площади, а не к какой-либо определенной линии пересечения. Все повторения, кроме небольшого числа первых, почти наверняка будут проходить вблизи линий пересечения, сделанных ранее. Если распределения сечений минералов вдоль этих линий сильно различаются, мы можем существенно переоценить ошибку воспроизводимости. Однако, учитывая систематический характер пересечения, гораздо более вероятно предположить, что рядом расположенные линии пересечения будут незначительно отличаться друг от друга. Если бы

это действительно было так, мы бы почти наверняка недооценили ошибку воспроизводимости, как это имеет место там, где нельзя гарантировать независимый и случайный выбор повторений.

Это ставит нас перед определенной дилеммой, так как, если воспроизводимость нельзя исследовать на одном и том же шлифе, информация относительно воспроизводимости должна быть получена из анализов различных шлифов, а p не обязательно является одинаковой даже среди шлифов, взятых из одного и того же образца. Именно по этой причине так полезна относительная нечувствительность σ к изменениям p ; ни довольно значительные различия в p от образца к образцу, ни малые различия в n , вызванные незначительностью различий в имеющейся измеряемой площади от шлифа к шлифу, не будут серьезно влиять на наши оценки σ . Нам нужна некоторая схема, которая, исключая влияние действительных различий между шлифами, позволила бы сосредоточиться на различиях между повторениями. Для выработки этой схемы существует много путей. По-видимому, наиболее прямым путем является работа только с теми различиями, которые нас интересуют. Предположим, например, что мы дублируем анализы каждого шлифа некоторой серии. Из каждого шлифа мы, таким образом, получаем различие для каждой составной части. Дисперсия ряда различий равна среднему значению суммы квадратов отклонений, или

$$s_d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad (4.8)$$

где s — стандартное отклонение, n — число шлифов в выборке, X — отдельное различие и μ — истинное (или генеральное) различие. В нашем случае $\mu = 0$, так как каждое различие, определяемое между дубликатами, проводится на одном и том же шлифе и шлифы не изменяются в течение опыта. Поэтому мы сразу имеем, что

$$s_d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^2. \quad (4.9)$$

Как результат экспериментальной схемы дисперсия различия равна здесь сумме двух независимых дисперсий, кото-

рые равны друг другу и каждая равна квадрату ошибки воспроизводимости единичного анализа, или

$$s_d^2 = 2s_a^2, \quad (4.10)$$

так что величина, которую мы ищем, — ошибка воспроизводимости — есть просто

$$s_a = \sqrt{\frac{s_d^2}{2}}, \quad (4.11)$$

где s_d^2 вычисляется на основе данных эксперимента согласно уравнению (4.9).

В табл. 3 приводятся результаты такого опыта, основанного на дублированных анализах 47 шлифов из гранитов Милфорда (Нью-Гэмпшир), Уэстерли (Род-Айленд) и Барре (Вермонт). Наблюденное среднее x (первая колонка) использовалось в качестве оценки p при вычислении σ (колонка 3). (Чему равнялась средняя длина линии подсчета?)

Таблица 3
Опыт использования различий для выяснения ошибки воспроизводимости точечного счетчика
(данные Чайза, 1949)

Минерал	Наблюденное среднее (x)	Ошибка воспроизводимости (наблюденная)	Вычисленное биномиальное стандартное отклонение для $p = \bar{x}$
Полевой шпат и мусковит . . .	65,8	1,22	1,27
Кварц	26,4	0,85	1,19
Биотит	6,6	0,56	0,67
Аксессории . . .	1,1	0,33	0,27

Таблица показывает, что стандартное отклонение биномиального распределения является хорошим приближением к фактически наблюдаемой ошибке. Учитывая весьма ограниченный интерес к ошибке воспроизводимости после выбора методики, сомнительно, чтобы была практическая необходимость в лучшем приближении. Как видно из таблицы, только одна из наблюденных величин превышает теоретическую, только две заметно меньше ее.

Таблица 4

Наблюденные средние (\bar{x}) и стандартные отклонения (s)
для данных табл. 25 взяты из работы Fairbairn et al., 1951^a

Минерал	\bar{x}	s	$\sigma (p=\bar{x}; n=1502)$
Кварц	27,6	1,28	1,15
Калиевый полевой шпат	35,4	1,45	1,23
Плагиоклаз	31,4	1,40	1,20
Биотит	3,2	0,56	0,45
Мусковит	1,3	0,38	0,29

^a Третий столбец дает стандартное отклонение биномиального распределения σ с параметрами $p=\bar{x}$; $n=1502$.

Дальнейшие сведения об ошибке подсчета получены в процессе эксперимента, который был поставлен для исследования однородности 6-ти футового обнажения гранита. (Полное описание эксперимента см. Fairbairn et al., Chapter 5, 1951.) Анализы 16 шлифов, взятых через 4-х и 6-ти дюймовые интервалы, дали результаты, сведенные в табл. 4. Каждая из пяти наблюдаемых величин больше, чем теоретическая оценка, но в каждом отдельном случае избыток очень мал. Обстановка вполне соответствует появлению такого избытка, так как наблюданное стандартное отклонение включает и ошибку подсчета и действительное расхождение между шлифами. В исходном контексте табл. 4 была использована как доказательство того, что изменчивость породы была очень незначительной. Однако наряду с табл. 3 она подтверждает, что ошибка воспроизводимости не отличается существенно от ожидаемой при биномиальном распределении.

Вся работа, которая сейчас рассматривалась, была проведена одним аналитиком. Более реальный опыт, в котором принимали участие пять аналитиков, описывается в следующей главе.

Глава 5

ВОСПРОИЗВОДИМОСТЬ АНАЛИЗОВ ШЛИФОВ: II

При некоторых исследованиях, особенно в более «точных» науках, очень велики технические затруднения, возникающие при выполнении необходимых измерений. Поэтому часто приходится довольствоваться данными, которые с помощью соответствующего оборудования получил оператор, специально занимающийся подобными измерениями. Например, для химика, который пользуется атомным весом, совершенно не нужно, да и невозможно, уметь определять этот вес. Достаточно того, что он знает наилучшее значение, найденное компетентными специалистами, которые работают с соответствующим оборудованием.

Сходным образом среди геологов-непетрографов могли бы распространяться результаты, полученные с помощью надежной и широко практикуемой методики количественно-минералогического анализа. Однако ясно, что сами петрографы должны относиться к ним по-иному. Количественно-минералогический анализ важен для петрографии как метод, с помощью которого любой заинтересованный петрограф может получить свои собственные оценки объемного состава. Мы редко нуждаемся в сверхточных результатах, но если бы нам удалось наладить получение большого числа удовлетворительных по точности результатов, это, может быть, дало бы возможность сдвинуть описательную петрографию с мертвой точки, на которой она покончилась в течение первой половины XX века.

Однако объем аналитической работы, который для этого потребуется, столь велик, что ее не стоило бы и начинать, если бы мы не могли гарантировать сравнимость результатов, получаемых различными петрографами, а такая гарантия до сих пор, по-видимому, не была доказана. Имеющихся в настоящее время данных недостаточно, и они разбросаны,

Таблица 5

Индивидуальные результаты (второй опыт МТИ), проценты к объему (по Чейзу и Ферберну, 1953)

Аналитик	Шлиф	Минерал						Непрозрачные	Прозрачные
		Кварц	Микроклин	Плагио-клав	Биотит	Мусковит			
I	A	24,7	35,6	33,3	3,3	2,0	0,6	0,6	
	B	26,8	35,7	32,6	3,5	0,4	0,6	0,4	
	C	28,0	34,2	32,1	3,4	1,1	0,7	0,4	
	D	27,8	35,0	31,5	3,3	1,0	0,9	0,5	
	E	26,6	34,5	33,6	3,0	1,4	0,6	0,3	
	\bar{x}	26,8	35,0	32,6	3,3	1,2	0,7	0,4	
II	A	27,3	35,5	32,1	2,5	1,5	0,8	0,3	
	B	27,3	35,4	31,7	3,4	1,4	0,6	0,1	
	C	28,0	35,3	31,1	2,8	1,4	0,8	0,5	
	D	30,1	33,8	31,5	2,6	0,9	0,7	0,2	
	E	28,7	35,2	31,4	2,6	1,3	0,6	0,2	
	\bar{x}	28,3	35,0	31,6	2,8	1,3	0,7	0,3	
III	A	25,8	36,0	33,5	2,9	0,8	0,7	0,3	
	B	25,5	33,9	33,7	4,9	0,8	1,0	0,1	
	C	26,1	37,8	30,7	3,4	1,1	0,7	0,3	
	D	26,2	36,0	29,5	5,7	1,3	1,1	0,1	
	E	27,8	34,7	32,4	3,6	0,7	0,8	0,2	
	\bar{x}	26,3	35,7	32,0	4,1	0,9	0,9	0,2	
IV	A	26,4	36,2	32,7	2,1	1,1	0,8	0,6	
	B	26,6	36,3	31,9	3,2	0,8	0,6	0,7	
	C	28,1	36,4	30,6	2,4	1,0	1,0	0,6	
	D	27,1	35,9	31,6	2,7	0,9	1,1	0,6	
	E	28,0	34,6	32,2	3,0	1,0	0,8	0,4	
	\bar{x}	27,2	35,9	31,8	2,7	1,0	0,9	0,6	
V	A	25,2	34,1	34,9	2,6	1,8	0,7	0,6	
	B	28,6	34,5	31,6	2,7	1,6	0,6	0,4	
	C	28,3	33,0	32,8	3,7	1,0	0,7	0,5	
	D	26,3	36,1	32,3	2,9	1,1	0,8	0,5	
	E	28,6	34,6	31,9	2,7	1,2	0,5	0,5	
	\bar{x}	27,4	34,5	32,7	2,9	1,3	0,7	0,5	
Общее среднее .		27,2	35,2	32,1	3,2	1,1	0,8	0,4	

а методики, с помощью которых эти данные были получены, различны и плохо описаны. Поставленная проблема достаточно важна, чтобы оправдать подробное рассмотрение одного опыта, который был описан в литературе.

В этом опыте пять шлифов, использованных в работе, рассмотренной в конце гл. 4, были проанализированы пятью сотрудниками Геологического отделения Массачусетского Технологического института (МТИ). Аналитики были компетентными петрографами. Все они сталкивались с количественно-минералогическим анализом при исследованиях другого рода, но только одному из них приходилось до этого иметь дело с методикой подсчета точек. После короткого периода инструктажа и практики каждый оператор обработал шлифы в заведомо случайном порядке. Спустя несколько месяцев, эксперимент был полностью повторен; результаты приведены в табл. 5.

Когда эта работа впервые появилась в печати, геометрического доказательства достоверности количественно-минералогического анализа еще не существовало, и большая часть опубликованных количественно-минералогических составов, полученных путем подсчета точек, была результатом работы одного аналитика. Таким образом, до этого опыта не было причин не допускать, что либо шлифы являются состоятельными выборками из породы, либо различные аналитики, обрабатывая один и тот же шлиф, фактически оценивают одни и те же (относящиеся к генеральной совокупности) количества. Поэтому статистическая обработка сосредоточилась на особенностях шлифа и оператора. Допуская достаточную однородность внутригрупповой дисперсии, различия между операторами и шлифами можно было оценить методами обычного дисперсионного анализа. Такой анализ (см. Чейз и Ферберн, 1953, табл. 4B) не устанавливает каких-либо значительных различий между шлифами, но отмечает, что для биотита, а также для прозрачных акцессориев операторы, по существу, оценивают различные средние. Объяснение этой особенности дано в следующей главе.

Удаление из общей суммы квадратов частей, обусловленных шлифами и операторами, приводит к остатку, обозначаемому как экспериментальная или аналитическая ошибка. Если считать, что различия между операторами и шлифами фактически устраниются с помощью вычислений, природа оставшейся ошибки очень проста; это, может быть, только

случайная ошибка, которая наложилась бы на работу, если бы вся она была выполнена одним человеком на единственном шлифе. Это, конечно, ошибка воспроизведимости, и соответственно выводам гл. 4 она должна, по существу, определяться биномиальным распределением. Табл. 6 показывает, что это почти так. Каждая цифра в ряду, который озаглавлен «Наблюденная ошибка», равна корню квадратному из соответствующего квадрата средней ошибки, вычисленного по данным табл. 5; числа ряда, который озаглавлен «Ожидаемая ошибка», вычислены согласно уравнению (4.7), причем в качестве оценки r взято общее среднее из табл. 5. (Чему равнялась средняя длина линии подсчета в анализах МТИ?)

Таблица 6

Наблюденная и ожидаемая ошибки воспроизведимости во втором опыте МТИ

Минерал	Кварц	Микро-клин	Платино-клас	Биотит	Мусковит	Непрозрачные	Прозрачные
Наблюденная ошибка	1,0	1,1	0,9	0,6	0,4	0,1	0,1
Ожидаемая ошибка	0,89	0,96	0,93	0,35	0,22	0,17	0,12

Положения, изложенные в гл. 1, позволяют нам рассматривать данные табл. 5 в совершенно ином свете. Из проведенного обсуждения ясно (как это не было ясно во время опыта МТИ), что шлифы, взятые в пределах одного и того же образца, являются состоятельными выборками из совокупностей с одинаковыми средними значениями. На самом деле это осталось бы справедливым, даже если бы порода была такой грубозернистой, что шлифы значительно различались бы по составу. Кроме того, мы теперь совершенно уверены, что при наличии соответствующего соглашения об особенностях определения и классификации аналитики оценивали бы одни и те же параметры в каждом шлифе. Повторяем, не важно, что два аналитика не получают в точности одни и те же результаты для какого-то определенного шлифа. Они не просто находят истинную величину — они оценивают ее.

Убедившись в одинаковости исходных средних, мы можем сразу же приступить к непосредственному исследованию дисперсий ошибок. Нас интересует оценка случайной ошибки, которая присутствует в работе каждого оператора. Если мы будем вычислять ее непосредственно из результатов каждого оператора для какого-то одного минерала, мы тем самым будем смешивать случайную ошибку с действительными различиями между шлифами. Последние, несомненно, малы, но такова же и случайная ошибка.

Противоположный прием — анализ различия, описанный в гл. 4, дает оценки ошибок отдельного оператора, которые свободны от воздействия различий шлифов. В табл. 7 приведена схема вычислений для части данных табл. 5, а именно для значений кварца, полученных операторами I, II и III.

Таблица 7

Различия по кварцу для операторов I, II и III; данные табл. 5

Шлиф	Различие		
	I-II	I-III	II-III
A	-2,6	-1,1	1,5
B	-0,5	1,3	1,8
C	0	1,9	1,9
D	-2,3	1,6	3,9
E	-2,1	-1,2	0,9
$S(X)$	-7,5	2,5	10,0
$S(X^2)$	16,71	10,51	25,12
C	11,25	1,25	20,00
$S(x^2)$	5,46	9,26	5,12
s^2	1,365	2,315	1,28

В верхней половине табл. 7 даны сами различия. Вычисления, приведенные в нижней части таблицы, дают дисперсию различий (s^2) для каждой пары операторов. Так как каждое различие вычисляется для одного и того же шлифа, то любые различия, существующие между шлифами, тем самым исключаются. Поправочный член C, который вычитается из полной суммы квадратов различий, равен

$\frac{[S(X)]^2}{n} = \bar{x}^2$, где \bar{x} — среднее различие между операторами; таким образом, влияние различий между средними значениями, оцененными каждой парой операторов, удаляется вычитанием. Поэтому окончательная дисперсия s^2 , полученная при делении $S(x^2)$ на число степеней свободы, обусловливается только двумя источниками, а именно случайными ошибками, присутствующими в работе двух операторов. Мы обобщим сказанное, утверждая, что s_{12}^2 является оценкой величины $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ или

$$s_{12}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad (5.1)$$

где σ означает истинную случайную ошибку, а нижние индексы относятся к операторам. Из накопленных дисперсий различий мы можем легко оценить индивидуальные дисперсии:

$$\begin{aligned} s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{23}^2 &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - \\ &- (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) = 2\sigma_1^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подстановка соответствующих значений из таблицы в левую часть уравнения сразу приводит к оценке σ_1 , стандартного отклонения от случайной ошибки, входящей в данные по кварцу аналитика I. Переставляя нижние индексы, мы можем получить аналогичные оценки для σ_2 и σ_3 . Величины, вычисленные этим способом, есть $\sigma_1 = 1,10$, $\sigma_2 = 0,41$, $\sigma_3 = 1,06$.

Данную методику можно обобщить для C_n^2 пар (где n — число операторов) путем деления общей суммы дисперсий на две части: часть A , включающую все дисперсии различий, в которых входит σ_i , и часть B , включающую все дисперсии различий, в которых σ_i отсутствует. Легко показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{A}{n-1} - \frac{B}{(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} [(n-2)A - B]; \end{aligned} \quad (5.3)^1$$

последняя форма несколько более удобна для расчетов. Данные для табл. 5 собраны у пяти аналитиков; отсюда

¹ Это соотношение можно представить в более изящном виде как $(n-1)! \sigma_i^2 = (n-2)! A - (n-3)! B$.

получаем C_5^2 или 10 дисперсий различий, и дисперсии ошибки отдельного аналитика оцениваются как

$$\sigma_i = \frac{1}{4 \cdot 3} [3A - B],$$

где A — сумма четырех дисперсий различий, содержащих σ_i^2 , а B — сумма шести дисперсий различий, в которых σ_i^2 отсутствует. Выполняя эту операцию для первых четырех столбцов табл. 5, мы получаем оценки, сведенные в табл. 8. Числа последних трех столбцов табл. 5 сравнительно малы: заинтересованный читатель может их использовать, если он хочет попрактиковаться в расчетах.

Таблица 8

Оценки стандартных отклонений
случайной ошибки аналитиков по минералам

Аналитик	Минерал			
	Кварц	Микроклин	Плагиоклаз	Биотит
I	0,83	1,29	0,27	0,22
II	1,08	0,46	0,56	0,14
III	0,96	1,47	1,39	1,07
IV	0,47	0,24	0,34	0,25
V	1,30	1,40	1,23	0,60
Среднее . . .	0,93	0,97	0,76	0,46
Ожидаемое (биномиаль- ное)	0,89	0,96	0,93	0,35

Среднее случайных ошибок для каждого минерала незначительно отличается от соответствующего при биномиальном распределении и для всех основных минералов меньше, чем величина, полученная с помощью обычного дисперсионного анализа (ср. ряд средних в табл. 8 с рядом наблюденных ошибок в табл. 6). По-видимому, надежный метод для установления числа степеней свободы для только что выведенных оценок отсутствует, так что точные исследования их невозможны², но это не может помешать нам

² Ясно, что мы не получаем степени свободы для каждого парного различия; если нам даны четыре степени свободы, включающие какого-то одного аналитика, мы можем сразу же вычислить (дополнительно) остальные шесть степеней свободы, связывающие четы-

разобрать табл. 8 сколь угодно подробно. Наиболее интересны две последние строки таблицы. Трудно понять, почему средние значения ошибки так близки к биномиальным математическим ожиданиям, если значительная часть дисперсии ошибки в действительности не является биномиальной. Однако, разобравшись во всех деталях, приходим к выводу, что случайная ошибка не одна и та же у всех аналитиков. По сравнению с другими аналитиками аналитики III и V ответственны за $\frac{7}{8}$ наибольших значений таблицы. С другой стороны, аналитик IV во всех случаях сильно занижает данные. Однако следует помнить, что большие колебания в одном минерале должны отражаться в остальных минералах. Теоретически наличие минералов с низким процентным содержанием (кроме кварца и полевого шпата) представляет собой некоторый буфер, который компенсирует один к одному большие колебания в главных минералах. Практически же это вряд ли очень эффективно в случае малых выборок; точнее, по пяти анализам, указанным для каждого аналитика в табл. 5, нельзя сказать, работает ли буфер.

Вопрос о том, является ли ошибка воспроизведимости строго биномиальной, будет дополнительно рассмотрен в последующей главе. Однако, как показывает табл. 8, этот вопрос представляется в основном академический интерес. При наличии определенных практических навыков

рех других аналитиков. Поскольку было сделано всего 25 определений для каждого минерала, это и есть максимальное число степеней свободы, которое мы имеем. В обычном дисперсионном анализе мы теряем 1 степень свободы на неизвестном общем среднем, 4 — на шлифах, 4 — на аналитиках и у нас остается 16 степеней свободы для общей оценки случайной ошибки. Теоретически последние распределены равномерно, так что, грубо говоря, на каждого аналитика приходится по 3,2 степени свободы. При расчете различия общее среднее не вычисляется, и сравнения, на которые влияют различия между шлифами, не делаются, так что для каждой отдельной оценки имеется предположительно пять степеней свободы. Это не намного лучше. Однако реальное преимущество метода состоит не в том, что он приводит к определенной надежной оценке каждого аналитика, а в том, что он дает некоторую оценку случайной ошибки каждого аналитика без допущения, что эта ошибка одна и та же для всех аналитиков. Отнесение степеней свободы к средним значениям табл. 8 — трудное дело. Пять отдельных оценок едва ли являются независимыми, но и их зависимость установить нелегко. К счастью, близкое сходство между соответствующими значениями в последних двух строках таблицы делает рассмотрение этого положения необязательным.

любой компетентный петрограф может считать, что его случайная ошибка подсчета близка к среднему биномиального распределения. Как мы увидим далее, имеется ряд доводов, свидетельствующих о том, что аналитик с большим опытом может получить некоторый выигрыш по сравнению с этим математическим ожиданием. Этот факт не доказан окончательно, но даже если считать, что это так, величина подобного выигрыша очень мала.

Глава 6

ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ

Ошибки, которые мы до сих пор рассматривали, ни в коем случае нельзя считать результатом дефекта в работе. Статистическая ошибка может быть уменьшена, но целиком ее уничтожить невозможно; она является частью правильно выполненного процесса измерения. С другой стороны, неслучайная ошибка может быть уничтожена, но не уменьшена; мы либо делаем ее, либо не делаем вовсе. Кроме грубых промахов (повторение линии пересечения в результате невнимательности, случайные ошибки при записи), почти все дефекты количественно-минералогического анализа являются неопределимыми. Устранение таких дефектов, по существу, занятие нестатистика, но важно понять, что обоснованное статистическое изучение ошибки предполагает отсутствие дефектов в работе. Компетентный специалист по количественно-минералогическому анализу является прежде всего компетентным петрографом. Нежелание петрографов изучить свои материалы с позиций математической статистики, по-видимому, основывается на опасении, что это изучение в значительной степени ставит под сомнение качество их работы. Это совершенно не соответствует действительности. Первой заповедью статистика, исходя из которой его работа наиболее проста и эффективна и от которой он отказывается только в крайних случаях, является положение, что петрограф не допускает дефектов в работе.

Между ясно выраженным нестатистическим дефектом и ясно выраженной статистической ошибкой располагается неприятная промежуточная группа, охватывающая дефектоподобные ошибки и ошибкоподобные дефекты. Определение и рассмотрение этих особенностей измерений является

почти такой же трудной задачей, как и их экспериментальная обработка. По крайней мере временно мы можем разбить их на два больших класса: те, которые в основном являются ошибками определения, и те, которые возникают в результате непостоянства или отсутствия соглашения об особенностях классификации.

1. Ошибки определения

Ошибка определения, вероятно, лучше всего характеризовать как ошибкоподобный дефект. Хорошо натренированный глаз представляет собой чувствительный инструмент, и многие определения в качественной петрографии, которые мы делаем как сами собой разумеющиеся, являются необычайно тонкими. Например, отдавая все необходимое время и широко пользуясь всеми возможностями петрографического микроскопа, большинство компетентных петрографов почти всегда смогли бы провести необходимые различия между зернами калиевого полевого шпата и альбита, расположенным рядом. Однако, когда в поле зрения движется с довольно большой скоростью длинная последовательность таких зерен, нет времени произвести все необходимые определения. Некоторые определения неизбежно основываются на таких свойствах, как, например, форма или степень изменения, которые не являются ни характерными, ни обязательно присутствующими во всех зернах определенного вида. Каждому, кто имел дело с изучением шлифов, известно, что существует много простых доказательств. В некоторых случаях, число которых будет меняться при разных аналитиках, породах и даже освещении, эти определения будут неправильными. Строго говоря, каждая такая ошибка определения является дефектом и путем тщательного изучения многие из этих ошибок могли бы быть ликвидированы. Однако, поскольку сомнительные зерна относятся то к одному, то к другому виду, общий результат, вполне вероятно, обнаружит некоторую смещенность в оценке обеих составных частей и почти наверняка снизит точность обеих оценок.

Если два аналитика сообща обрабатывают большое число шлифов, значительные различия в средних величинах обнаруживаются довольно легко, но при этом нельзя решить, какой аналитик дает истинную величину; обычно

правильнее всего считать, что этого не делает ни один из них.

С другой стороны, добавление ошибки определения к дисперсии ошибки часто исключает возможность обнаружения различия. Если работа была сделана точечным счетчиком, мы можем утверждать, что любой избыток ошибки воспроизводимости над вычисленной для соответствующего биномиального распределения является причиной для беспокойства. Иногда план эксперимента не предусматривает получение отдельных оценок точностных ошибок для каждого аналитика. В этом случае мы ничего не сможем сделать, хотя и будем обеспокоены. Фактически даже наша способность обнаруживать расхождения проявляется только в том случае, если работа была распланирована и программа ее хотя бы частично включала эту цель. Если же мы в какой-то степени верим в сравнимости различных пород, представленных количественно-минералогическими составами, которые получены разными аналитиками (например, в сравнимость, которая используется или подразумевается каждой классификацией данных, собранных из журнальной литературы), мы должны быть вполне уверены, что ошибки определения не играют существенной роли в работе любого аналитика.

Решение проблемы, созданной ошибками определения, является очень простым. Минералы следует отличать друг от друга только в том случае, если их можно легко, уверенно и быстро определить. Это является главным доводом для окрашивания калиевого полевого шпата в шлифах гранитных пород. В громадном большинстве случаев два типа полевых шпатов можно отличить друг от друга без какого-либо протравливания или окрашивания, но обычно на это приходится тратить много сил и времени. Иногда до тех пор, пока не будут использованы все возможности микроскопа, различие остается невыясненным. С другой стороны, характерный ярко-желтый микроклин в хорошо окрашенном шлифе гранита опознается легко и безошибочно. В неокрашенном шлифе результаты для микроклина и плагиоклаза будут подвержены большей ошибке определения; в хорошо окрашенном шлифе ошибка определения для этой пары минералов будет незначительной.

Иногда даже опытный петрограф, желающий ускорить анализы, результаты которых он знает (или думает, что знает), будет давать большие ошибки определения. Конечно,

существуют ситуации, в которых это было бы простительно, хотя интерпретация результатов вряд ли будет достаточно удовлетворительной. Например, систематическое отклонение состава может быть настолько большим, что будет ощущаться даже по сравнению с дисперсией ошибки, возникшей за счет ошибок определения. Однако из-за ошибок определения могут возникнуть ложные отклонения, и тот факт, что в ряде анализов, которые характеризуются большой ошибкой определения, не удается обнаружить отклонения, не является надежным признаком того, что такого отклонения не существует.

Даже пригодность анализов, содержащих большие ошибки определения, не является надежным признаком того, что они дают несмещенные оценки истинного состава. Такие анализы могут дать несмещенные оценки только в том случае, если первый из двух минералов, входящих в ошибку определения, принимается за второй так же часто, как второй принимается за первый. Однако мы редкоываем в этом уверены. В действительности же, по-видимому, гораздо разумнее считать, что точная компенсация отклонений встречается очень редко; количественно-минералогические анализы, подверженные ошибке определения, обычно будут смещеными относительно минералов, входящих в эту ошибку, но на основании самих анализов мы не сможем оценить смещенностей или даже обнаружить ее.

2. Особенности классификации

Даже в том случае, когда определения являются бесспорными, причиной для беспокойства может оказаться отсутствие соглашения об особенностях отнесения зерен неясного состава к той или иной категории. Например, в средне- или грубозернистых двухполевошпатовых гранитах калиевый полевой шпат почти всегда до некоторой степени перититовый. С чем объединять альбит перититов: с калиевым полевым шпатом или с плагиоклазом? (Его можно, конечно, учесть отдельно, но обычно это только откладывает окончательное решение, ибо тот факт, что он редко присутствует в достаточном количестве, приводит к путанице при определении окончательного результата.) Большая часть лишенного пигментации полевого шпата

обычно отчетливо таблитчатая и иногда имеет кристаллографические очертания. Он, вероятно, покажет ту же зональность, что и плагиоклаз, не включенный в калиевый полевой шпат, и эта зональность почти наверняка будет меняться тем же способом. С другой стороны, альбит перититовых вrostков, как правило, образует прожилки, пленки или пятна, гораздо меньшие, чем зерна включенного в калиевый полевой шпат плагиоклаза, и обычно неизмененные. Однако почти в каждом шлифе присутствует несколько кусочков включенного в микроклин, лишенного пигментации полевого шпата, который нельзя уверенно отнести к определенному классу. Различные аналитики могут прийти к различным выводам относительно классификации этих сомнительных полевых шпатов. Больше того, они даже могут не согласиться, что конкретное зерно является сомнительным случаем. Возможно также, что за долгий период времени особенности классификаций, принятые отдельным аналитиком, могут изменяться помимо его сознания. К счастью, в анализе большинства двухполевошпатовых гранитов это не представляет трудностей. Однако когда нормального плагиоклаза очень мало, как, например, в однополевошпатовых гранитах, подобное положение может оказаться крайне неприятным; работа на таких породах должна быть распланирована таким образом, чтобы обеспечивать значительное сходство между аналитиками.

Следует ли принимать во внимание этот особый случай при определении или классификации — это до некоторой степени дело вкуса. Отчасти сходная проблема, которая скорее касается классификации, чем определения, возникает в связи с рассмотрением хлорита, развивающегося по биотиту в гранитных породах. В таких породах биотит, совершенно свободный от хлорита, крайне редок, хотя в свежих образцах общее количество хлорита в большинстве случаев невелико. Обычно выделять хлорит в самостоятельную группу совершенно невыгодно, и его либо объединяют с биотитом, либо относят к прозрачным акцессориям. Понятельным примером беспорядка в этом вопросе может служить опыт МТИ, описанный в предыдущей главе. Уже упоминалось, что обычный дисперсионный анализ, проведенный по данным табл. 5, показывает, что между средними значениями, полученными аналитиками для биотита и прозрачных акцессориев, существуют значительные различия. Следует отметить, что это различие влияет на дис-

персию наблюденной ошибки, квадратный корень из которой (0,571) на 60% больше ожидаемого при биномиальном распределении (0,35). Таблица 5 показывает, что различия в средних значениях происходят главным образом из-за аналитика III; ему принадлежит самое высокое среднее по биотиту (4,1% по сравнению с 2,9% у других). Из этого не обязательно следует, что он несет ответственность за весь избыток наблюденной дисперсии ошибки над ожидаемой дисперсией ошибки, но фактически он, по-видимому, способствовал созданию значительной части этого избытка. Для других четырех аналитиков среднее стандартное отклонение, подсчитанное, исходя из уравнения (5.3), равно 0,30 (по сравнению с 0,46 — средним для всех пяти аналитиков — и с ожидаемым 0,35; см. табл. 8).

Аналитик III не только дал наивысшую величину средней по биотиту, ему принадлежит и самое низкое значение среднего для прозрачных акцессориев. Однако в этом отношении он, по-видимому, отразил лишь общую тенденцию. Занумеровав в порядке возрастания средние значения табл. 5, мы имеем для всех пяти аналитиков:

Аналитик	Биотит	Прозрачные	Σ
I	4	3	7
II	2	2	4
III	5	1	6
IV	1	5	6
V	3	4	7

Хотя данных для точного исследования недостаточно, порядок сумм показывает, что среднее прозрачных акцессориев связано обратной зависимостью со средним биотита. Очевидным объяснением этого явления служит отсутствие определенных стандартов относительно классификации хлорита. Вероятно, наиболее трудно представить постоянные различия между операторами, так как каждый человек по-своему рассматривает хлорит, если он полностью отделяется от биотита. Кроме того, не исключена возможность, что особенности классификации отдельного оператора до некоторой степени менялись в ходе опыта.

Все это требует несколько другого подхода к данным. Несомненно, наиболее развитым минералом в группе прозрачных является хлорит, и различие между биотитом и

прозрачными, очевидно, недостаточно для достижения специальной цели, которую мы имеем в виду. Таким образом, по-видимому, благоразумнее отказаться от этого различия. Для суммы биотит + прозрачные дисперсионный анализ, проведенный по данным табл. 5, не выявляет существенного различия между аналитиками. У отдельных аналитиков стандартные отклонения для суммы биотит + прозрачные, подсчитанные согласно уравнению (5.3), меняются от 0,05 для аналитика IV до 0,83 для аналитика I. Однако при сравнении с ожидаемой (биномиальной) ошибкой подсчета, равной 0,36, среднее для пяти аналитиков оказывается равным 0,32.

Для порядка, в котором мы обычно представляем результаты количественно-минералогического анализа, рассмотренных различий недостаточно. Общее среднее для биотита в табл. 5 равно 3,2%, а для суммы биотит + прозрачные — всего 3,6%; петрографические проблемы, которые можно решать на том основании, что наблюденное различие в 0,4% либо значимо, либо случайно, очень редки. Однако нас здесь интересуют не средние величины, а ошибки, и влияние некачественного определения или трудностей классификации на дисперсию ошибки легко может дать весьма неблагоприятные результаты. Например, в рассмотренном словом примере средняя величина для суммы биотит + прозрачные только на 12,5% больше, чем средняя величина для одного биотита, но объединение прозрачных с биотитом почти вдвое уменьшает среднюю дисперсию аналитика.

В общем ошибки определения и неустойчивые или недостаточно стандартизованные особенности классификации имеют тенденцию смещать средние значения, увеличивать несомненную отрицательную корреляцию между минералами или разобранными минеральными группами и заставляют расти аналитическую ошибку. Их влияние на ковариацию и дисперсию, вероятно, еще гораздо более значительно, чем их воздействие на средние. Возрастание ошибки само по себе достаточно серьезный факт, так как при прочих равных условиях эффективность и выгода какого-то статистического опыта с использованием малых выборок контролируется размерами дисперсии ошибки. Однако еще более угрожающим является положение, когда ошибки определения и особенности классификации увеличивают дисперсию ошибки. Эти результаты почти наверняка будут

значительно отличаться у разных аналитиков, так что допущение об однородности внутригрупповых дисперсий — допущение, на которое опираются многие статистические критерии, может быть легко опровергнуто. В любой экспериментальной программе, достаточно большой, чтобы потребовать услуг нескольких аналитиков или работы одного аналитика в течение значительного периода времени, проблемы определения и особенности классификации должны быть тщательно обсуждены *перед* началом работы.

Глава 7

РАБОЧЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ В КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

До настоящего момента наше обсуждение носило общий характер. Мы видели, что измерения, сделанные обычным способом, представляют собой состоятельные оценки отношений площадей и что «состав» случайно выбранной площади является состоятельной выборкой для отношений объемов. Значительная часть этой проблемы количественно-минералогического анализа скорее относится к геометрии, чем к геологии, и ее исследование было доведено до конца без помощи пород — фактически без каких-либо измерений. Это априорное обсуждение привело непосредственно к теоретической оценке ошибки воспроизводимости, налагающейся на результаты подсчета точек, и мы видели, что в действительности ошибка воспроизводимости, которая наблюдалась в трех экспериментах, очень близка к этой теоретической ошибке.

Хотя эксперименты были выполнены на породах, и даже на породах определенного типа, это не затрагивает общего характера наших выводов. В том же смысле, в котором точность взвешивания не зависит от объекта взвешивания, воспроизводимость точечного подсчета не зависит от природы измеряемых площадей. Нет никакой разницы, выбираем ли мы измеряемую поверхность на биологических тканях, на металлах, на рудных минералах или минеральных агрегатах, или на породах любого типа.

Оставшаяся часть книги посвящена в основном эффективности шлифов как выборок из образцов, проблема изменчивости которых до сих пор успешно противостояла априорному изучению. Это можно изложить в относительно общем виде, но при этом общность выражений может привести к поверхностному изложению. В предыдущих главах эксперимент использовался в основном в качестве иллю-

страции. Сейчас за отсутствием других средств мы начинаем применять его как руководство. Аналогия с химическими весами, возможно, сделает эту особенность несколько понятнее.

В операции взвешивания мы можем выделить по крайней мере два источника ошибки. Один из них чисто инструментальный; он выражается в отклонении от точного повторения результата, который наблюдался бы оператором при перевешивании одного и того же объекта при оптимальных условиях. (Мы предполагаем, что различия в компетенции между квалифицированными операторами настолько малы, что ими можно пренебречь.) Это мы называем точностью (или точностной ошибкой) весов, и эта точность, очевидно, не зависит от взвешиваемого объекта. Фактически мы можем определить ее как ту часть общего отклонения, которая не зависит от природы взвешиваемого объекта.

Ошибка при взвешивании реального объекта не может быть меньше точностной ошибки весов, а почти всегда будет больше. Не затрагивая точностную ошибку весов, природа взвешиваемого объекта влияет на ошибку определения искомого веса, и обычно приходится тратить много времени и сил, чтобы свести это влияние до минимума. Точностная ошибка весов, которая должна быть определена экспериментально, аналогична воспроизводимости подсчета точек, которую мы широко осветили в предыдущих разделах. Образец играет роль объекта, который мы хотим взвесить. Природа образца не влияет на воспроизводимость результатов, полученных в каком-то определенном шлифе, взятом из образца, но, несомненно, влияет на *аналитическую ошибку*, которую мы сейчас можем определить как случайную ошибку эксперимента, заключающуюся в оценке состава образца, из которого взят шлиф¹.

Как и все аналогии, эту аналогию тоже не следует принимать полностью. Однако причина, почему этого делать не следует, довольно неожиданная. Хотя в количественном отношении ошибка взвешивания почти всегда будет значительно меньше, чем аналитическая ошибка количественно-минералогического анализа, последняя более проста по своей структуре и соответственно легче контролируется. Весы мо-

¹ В более ранней работе (Chayes, 1950) ошибка воспроизводимости, описанная в гл. 4 и 5, называется «аналитической» и «экспериментальной». Название, предложенное здесь, по-видимому, более правильное и более удобное.

гут быть либо точными, либо неточными, но сами по себе они ни правильные, ни неправильные. Мы не можем представить себе эту правильность, до тех пор пока не снабдим весы набором выверенных разновесов и, конечно, при выверке разновесов будет своя ошибка. Совершенно независимо от этого влияние объектов взвешивания на ошибку взвешивания почти всегда приводит к некоторой смещенностии. Например, какой-то объект, сухой вес которого необходимо определить, несомненно, имеет сухой вес, и никакое законное манипулирование не может сделать вес этого объекта меньше, чем его сухой вес. Однако операции, которым соответствуют совершенно другие экспериментальные нормы, могут не удалить некоторого малого количества воды. Так, если объект находится на чашке весов слишком долго, то он может адсорбировать некоторое количество влаги, что сделает бессмысленным большую тщательность взвешивания.

Подобным же образом температура, которая доводится до «комнатной» в сушильных шкафах, может иногда не достичь этого уровня перед взвешиванием, но не опустится ниже. Таким образом, воздействие температуры на взвешивание и, следовательно, на кажущийся вес может меняться по величине, но знак остается постоянным. При доброкачественной аналитической работе эти и подобные явления, несомненно, столь малы, что ими можно пренебречь. Тем не менее они серьезно осложняют наше представление о процессе взвешивания. В частности, мы не можем считать, что результат операции взвешивания, как бы часто эта операция ни повторялась, обязательно соответствует истинному весу. Это было бы справедливо только для такого тонкого и сопровождающегося многочисленными ограничениями процесса взвешивания, что этот процесс имел бы мало сходства с действительным взвешиванием.

В количественно-минералогическом анализе установка в общем совершенно другая. Если пересечения контактов зерен с плоскостью измерения могут быть точно установлены, различие между опробованием шлифа с помощью точек и опробованием образца с помощью шлифов целиком отражается дисперсиями, контролирующими обе эти операции. Например, если единичный анализ сделан в каждом из n шлифов, взятых из какого-то образца, наблюдаемое рассеяние обычно будет больше, чем в случае n анализов, сделанных в одном шлифе. Но в любом случае каждый от-

дельный анализ законно принимается во внимание как состоятельная оценка одного и того же исходного параметра, и этот параметр фактически является той величиной, которую мы стремимся оценить, — величиной объемного состава породы. Ошибка подсчета или ошибка воспроизведимости говорит нам, какой ширины пределы мы должны взять в обе стороны от наблюденного значения для того, чтобы захватить с определенной вероятностью истинное значение для шлифа. Точно так же аналитическая ошибка говорит нам, какие пределы мы должны взять для того, чтобы с определенной вероятностью покрыть истинное значение нашей величины для образца, из которого был взят шлиф.

Как мы видели, можно построить простую геометрическую модель, дающую хорошее приближение к той ошибке, которая наблюдалась в действительности при подсчете точек. Для аналитической ошибки такой модели построить нельзя. Мы вынуждены удовлетвориться довольно приблизительным описанием факторов, влияющих на величину аналитической ошибки; оценка этой величины в какой-то определенной породе является задачей эксперимента. Так как необходимый минимум экспериментов был осуществлен только на одном типе пород, то доказательства и численные результаты в последующих главах этой книги имеют более ограниченное значение, чем сделанные ранее. Однако достаточно детальное описание работы по определению аналитической ошибки, по-видимому, стоит того, чтобы на него было затрачено время, не только вследствие распространенности и важности этого типа пород, на котором эта работа была выполнена, но главным образом потому, что прежде чем рассматривать количественно-минералогический анализ как установившийся аналитический метод, необходимо, чтобы подобная программа была выполнена на различных типах пород.

Предположим, что мы могли бы точно измерить «состав» каждого шлифа из числа шлифов, взятых из определенного образца. Если бы образец был сложен очень тонкозернистой породой, шлифы различались бы незначительно или вообще не отличались бы друг от друга; таким образом, влияние образца на аналитическую ошибку было бы фактически ничтожным, и в идеальном случае мы могли бы считать, что аналитическая ошибка, выраженная через дисперсию результатов, практически равнялась бы нулю. Конечно,

в реальной работе мы не знаем истинных составов шлифов, а вынуждены использовать оценки, которые всегда подвержены ошибке. Однако если шлифы фактически одинаковые, единственный ненулевой компонент аналитической ошибки соответствует той ошибке измерения, которую мы уже определили как ошибку подсчета или ошибку воспроизводимости. Таким образом, аналитическая ошибка не может быть меньше, чем ошибка в измерении площади, и предыдущее изложение дает нам возможность судить о величине этой ошибки для измерений, сделанных подсчетом точек.

Если мы предположим, что измеряемая площадь каждого шлифа постоянна, а размер зерна или грубоść образца возрастают, мы найдем, что результаты от шлифа к шлифу будут различаться, даже если наши анализы отдельных шлифов имеют малую ошибку. Тот же эффект мог бы быть получен, если бы размер зерна в образце оставался постоянным, а измеряемая площадь в шлифе уменьшалась. К тому же, на практике ошибка подсчета не равна нулю (обычно для главных составных частей породы она имеет порядок 1%) — аналитическая ошибка будет превышать ее на такую величину, которая отражает размах вариации, наблюдаемый в нашем идеальном эксперименте. Так как ошибка, связанная с выборочным характером опробования образца, и ошибка подсчета независимы, аналитическая ошибка может быть выражена формулой

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_s^2},$$

где σ_a — аналитическая ошибка, σ_c — ошибка подсчета и σ_s^2 — дисперсия, свойственная образцу. То, что один и тот же результат может быть получен как при увеличении размера зерна, так и при уменьшении измеряемой площади, показывает, что контролирующим фактором является соотношение между этими двумя величинами, а не каждое из них в отдельности. Имеет значение не размер зерна или размер измеряемой площади, а *число сечений зерен на измеряемой площади*. Если бы распределение зерен в породе было случайным в том смысле, что характер отдельного зерна не зависел бы от характера соприкасающихся с ним зерен, аналитическая ошибка была бы обратно пропорциональна квадратному корню из частоты зерен на единичной площади.

Это упрощенное обсуждение показывает, что нас в первую очередь должна интересовать оценка числа зерен на единичной площади, и в некоторых случаях такой подход мог бы оказаться успешным. Однако в определенных породах, выбранных для изучения, эта задача оказывается гораздо более сложной. В следующих главах мы сначала покажем действие частоты зерен, не проводя реального подсчета числа зерен, а затем выведем «меру грубоści» зерен, не касаясь, в строгом смысле, понятия зерна или размера зерна. Такой подход неизбежен, так как в гранитном веществе до сих пор невозможно установить каким-либо известным способом, что же является единичным зерном.

Глава 8

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА ЗЕРНА И ИЗМЕРИЕМОЙ ПЛОЩАДИ НА АНАЛИТИЧЕСКУЮ ОШИБКУ

1. Трудность измерения размера зерна

Аналитическая ошибка располагается на полпути между характером изменчивости процесса измерения и характером изменчивости групп измеряемых объектов. В нашем случае процессом измерения является оценка площадей путем подсчета точек, а группа объектов может состоять или из образцов, отобранных из геологически однородного массива породы, или из петрографически (таксометрически) подобных образцов, отобранных из различных массивов. Решающее значение аналитической ошибки очевидно; небольшая аналитическая ошибка создает малые различия между определениями, а большая аналитическая ошибка предотвращает возможность обнаружения или измерения реально существующих малых различий. Различия, которые нас интересуют, можно сравнить с гальками, которые мы пытаемся сгрести граблями, аналитическую ошибку — с расстоянием между зубьями граблей.

В предыдущей главе мы определили аналитическую ошибку как случайную ошибку анализа при оценке состава образца, из которого взят шлиф, и отметили, что аналитическая ошибка — не похожая на ошибку воспроизведимости — может меняться от образца к образцу в зависимости от изменений частоты сечений зерен в измеряемой площади. В обычной петрографической практике принято говорить, что рассмотренное явление обусловливается «размером зерна»; значение этого явления было установлено уже давно. Например, Розиваль указывал: «Легко видеть, что степень точности... должна быть обратно пропорциональна размеру зерна породы», а Ричардсон отмечал, что действие грубоści зерна отражается на результатах анализа шлифов «...высоко чувствительного к особенностям опробования». Ричардсон также считал, что путь контроля

и уменьшения нежелательных колебаний результатов такого рода заключается в повторении подсчетов.

Независимо от того, будем ли мы считать за контролирующий фактор «размер зерна» как таковой или же относительную частоту сечений зерен в измеряемой площади, следующий шаг представляется очевидным. В первом случае мы должны измерить «размер зерна»; во втором — оценить количество зерен на единицу площади. Если бы мы могли осуществить одну из этих операций, мы могли бы сделать и другую. В породах, которым посвящена оставшаяся часть этой книги (двуухполевошпатовые граниты) до сих пор нельзя провести ту или другую операцию с соответствующей точностью. Конечно, каждый петрограф оценивает «размер зерна» в ходе ежедневной работы. К счастью, большинство из нас никогда не используют эти оценки. Даже выдающиеся петрографы, которые, подобно Ричардсону, правильно оценивали связь между размером зерна и аналитической ошибкой, тем не менее воздерживались от какой-либо систематической попытки использовать эти измерения как показатель количества повторений, которое требуется произвести для данного образца при количественно-минералогическом анализе.

Полное отсутствие успеха в деле измерения размера зерна в шлифе и, кроме того, полная неудача попыток оценить относительную частоту сечений зерен в единице площади являются главным образом следствием сложности гранитной структуры. В структуре, состоящей из зерен простых очертаний, каждый тип измерения, вероятно, был бы относительно простым, и даже соотношение, связывающее их, могло бы быть установлено довольно легко. Там же, где контуры зерен очень сложны, отмеченные приконтактные прорастания являются скорее правилом, чем исключением, и крупные «зерна» часто оказываются скоплениями минералов, обычно бывает трудно определить, что же подразумевать под зерном. Если такое исследование можно провести, все же необходимо научиться характеризовать форму, прежде чем придавать конкретный смысл размеру, каким бы способом ни определялся этот размер¹. Например, было бы очень трудно сказать (если вообще можно что-нибудь сказать), что мы понимаем под формой в случае

¹ Возможно, что при отсутствии прорастаний это было бы несущественно. В случае же гранитного вещества такая возможность едва ли заслуживает внимания.

наполненного пойкилитовыми вростками или скелетного кристалла микроклина. Даже если мы хотим определить какой-либо характерный параметр размера — максимальную длину, среднюю максимальную длину и так далее — это должен быть какой-то размер или среднее какого-то группы размеров геометрически определенной формы. В гранитном же веществе мы редко можем подобрать соответствующую характеристику для формы.

Казалось бы, реальный подсчет числа сечений зерен может быть легко осуществлен, несмотря на сложные контуры сечений. Однако факторы, которые затрудняют измерения размера и делают их фактически необъяснимыми, оказывают подобное же воздействие на числовые подсчеты. В общем подсчет или измерение сечений зерен главных минералов в гранитном веществе — операция довольно невыгодная. Физическая интерпретация, приписываемая результатам, в лучшем случае подозрительна, так как часто возникает сомнение, является ли это объяснение единственным. Кроме того, точность этих результатов в большинстве случаев оставляет желать много лучшего. Из измерений или подсчетов этого типа мы обычно узнаем не больше, чем из быстрых заключений, основанных на беглом просмотре образца, а этого недостаточно.

Таким образом, для данной цели нам необходим метод, при помощи которого можно было бы охарактеризовать действие грубости на дисперсию без фактического измерения или подсчета сечений зерен. Если подходить к понятию размер зерна в обычном смысле — это почти неразрешимая проблема. Однако нас интересует совсем не размер зерна как таковой. Скорее мы рассматриваем действие относительной частоты (или всей совокупности) сечений зерен на аналитическую ошибку. Влияние этого может быть изучено либо путем изменения измеряемой площади, либо путем изменения грубости изучаемого материала, так как очевидно, что среднее количество сечений зерен будет находиться в прямой зависимости от размера измеряемой площади и в обратной зависимости от грубости породы.

Хотя сейчас нельзя выразить размер зерна метрически, мы легко можем рассортировать образцы по грубости. Если мы будем использовать образцы, которые достаточно четко различаются по грубости, мы сможем определить порядок грубости образцов, хотя два наблюдателя могут разойтись в оценке «расстояний» между соседними образцами. Серии

анализов, выполненных на шлифах некоторой фиксированной площаади, дадут различные дисперсии для каждого образца. Если продолжительность подсчета фиксирована и образцы имеют приблизительно один и тот же объемный состав, существенные различия в дисперсии от образца к образцу будут в основном вызваны различиями в грубоости. Таким образом, мы получаем серии для непосредственных сравнений, но так как у нас нет меры грубости образцов, мы не можем характеризовать это явление количественно. Фактически наш независимый параметр — грубость — является не переменной величиной, а типичным свойством.

С другой стороны, мы можем стандартизировать грубость и продолжительность подсчета, меняя, однако, измеряемую площадь. В этом случае переменной величиной будет независимый параметр — площадь измерения, и мы, таким образом, сможем найти для каждого образца эмпирическое соотношение между площадью измерения и аналитической ошибкой. Наконец, мы можем сравнивать эмпирическую функцию, построенную для одного образца, с такой же функцией для другого образца, который отличается от первого по грубости; однако, так как грубость является свойством, а не переменной величиной, табличное или графическое сравнение различных регрессионных кривых настолько же применимо, насколько допустим сам анализ.

2. Экспериментальные материалы и методика их обработки

Исследование вышеупомянутого типа было осуществлено путем изучения четырех площадей различного размера для каждого из трех выбранных образцов. Последние были подобраны таким образом, что отчетливо различались по грубости. Использовались следующие образцы:

а) Небольшая глыба со дна шестифутового шурфа из каменоломни Смит, Уэстерли, Род-Айленд, использованная в качестве одного из стандартов в химических исследованиях, описанных Ферберном и др. в Бюллетене Американской Геологической службы (Fairbairn et al., 1951).

б) Образец из небольшой выработки около рабочего поселка каменоломни Хэлла, Маунт-Дезерт, Мэн.

в) Образец из каменоломни Кэрнсоу в граните Кэрнменеллис неподалеку от поселка Пенрин, Корнуэлл, Англия.

Многие граниты, которые образуют плутонии средних размеров, сравнимы по грубости зерна с гранитами из каменоломни в горах Маунт-Дезерт. Такие тонкозернистые граниты, как граниты из Уэстерли, почти не образуют самостоятельных тел сколько-нибудь значительных размеров. Грубозернистые граниты, сходные с гранитом Кэрнменеллис, редко изучаются с помощью шлифов.

Что касается главных минералов, то все три образца являются типичными для обычных двухполевошпатовых гранитов. Единственным цветным минералом, одинаково распространенным как в гранитах Уэстерли, так и в гранитах гор Маунт-Дезерт, является биотит; он довольно сильно хлоритизирован в первых и очень свеж во вторых и составляет около 5% объема в каждом. Цветовой индекс гранитов Кэрнменеллис несколько выше 14, и изучаемый образец этих гранитов характеризуется всеми минералогическими особенностями, которыми знамениты граниты Корнуэлла и Девоншира.

Из каждого образца было взято двадцать шлифов, причем измеряемая площадь каждого шлифа равнялась $24 \times 40 \text{ мм}$. В десяти шлифах каждого образца эта площадь была разделена на три подплощади: $4 \times 40 \text{ мм}$, $8 \times 40 \text{ мм}$ и $12 \times 40 \text{ мм}$. В остальных десяти шлифах каждого образца такое деление не проводилось. Таким образом, из каждого образца для анализа были изготовлены 4 набора площадей по десяти в каждом, причем размеры площадей находились в отношении $1 : 2 : 3 : 6$. Наименьшая площадь — 160 mm^2 , или около $\frac{1}{4}$ квадратного дюйма, — гораздо меньше, чем площади, которые обычно используются в настоящее время в количественно-минералогическом анализе. Наибольшая площадь равна 960 mm^2 , или несколько больше $1\frac{1}{2}$ квадратных дюймов, что, вероятно, до некоторой степени превышает площади, которые используются большинством петрографов. Отношение $1 : 2 : 3 : 6$ было выбрано для того, чтобы симметричная сетка с постоянным числом точек могла быть расположена в пределах каждой площади, так чтобы ошибка подсчета была одна и та же для всех площадей. Фактическая длина линии подсчета была равна всего 660; это несколько меньше половины того количества, которое используется в обычной аналитической работе,

но максимальное из того, что могло бы подойти. Результаты анализов сведены в табл. 9.

Таблица 9

Сводка аналитических данных

Местонахождение образца	Минерал	A			
		160 mm^2	320 mm^2	480 mm^2	960 mm^2
		\bar{x}	s	\bar{x}	s
Уэстерли	Кварц	26,5	1,78	27,6	2,05
	Калиевый полевой шпат	37,7	2,05	37,0	2,02
	Плагиоклаз	30,5	1,92	30,4	1,90
	$\sqrt{\bar{V}_p}$		1,92	1,99	1,44
Маунт-Дезерт	Кварц	34,9	3,63	36,7	2,94
	Калиевый полевой шпат	34,9	3,60	35,1	2,49
	Плагиоклаз	27,0	3,65	25,4	2,42
	$\sqrt{\bar{V}_p}$		3,62	2,62	3,39
Кэрнменеллис	Кварц	31,8	10,66	33,0	6,20
	Калиевый полевой шпат	28,9	12,29	29,5	5,18
	Плагиоклаз	25,9	6,35	24,6	2,80
	$\sqrt{\bar{V}_p}$		10,07	4,94	5,14

\bar{x} — среднее; s — стандартное отклонение; A — измеренная площадь.

3. Статистическое описание табл. 9

Из предыдущего обсуждения, в частности из разд. 1, ясно, что для наших целей достаточно довольно грубое эмпирическое выражение данных. Однако даже без такого предварительного обсуждения сам характер данных и особенности постановки вопроса исключают излишнюю точность. В большинстве элементарных статистических работ подобного типа стандартное отклонение интересует нас только как мера вариации средней величины. В настоящем же случае мы заинтересованы в самих стандартных

отклонениях, средние же нужны только для того, чтобы отметить, что а) они очень хорошо согласуются для различных измеряемых площадей одного и того же образца и б) все они находятся в области, в которой (когда речь идет об ошибке воспроизводимости и биномиальном распределении) стандартное отклонение сравнительно нечувствительно к изменениям средней величины. Для $n = 660$, $\sigma = 1,60$ для наименьшего x табл. 9 и 1,89 для наибольшего x .

Наш интерес к стандартному отклонению вызван беспокойством, связанным с тем, что оценка стандартного отклонения, получаемого из малой выборки, очень плохая. Стандартное отклонение, оцененное для каждой комбинации минерал — площадь, очень неопределено. Так как каждое отклонение основывается только на десяти наблюдениях, 90%-ный доверительный интервал охватывает значения от 0,729 s до 1,645 s , где s — наблюденная величина этого стандартного отклонения. Например, наблюденное стандартное отклонение 2,5 устанавливает с вероятностью 0,90, что истинная величина этого стандартного отклонения располагается где-то между 1,8 и 4,1. Неопределенность любого числового значения, таким образом, много больше, чем общий размах σ , вызванный вариацией \bar{x} . К тому же, как бы это ни было плохо, ширина доверительного интервала сама является функцией s ; чем больше s , тем шире интервал, внутри которого с какой-то определенной вероятностью находится искомое истинное значение стандартного отклонения. (Это можно сформулировать по-другому: чем больше наблюденное s , тем менее вероятно, что интервал для s какой-то фиксированной ширины будет включать σ .) Второе осложнение возникает в связи с тем, что мы имеем больше данных, чем в состоянии разумно использовать. Нашей основной задачей является изучение соотношения между s и A в каждой из трех пород, но мы имеем три наблюденных значения s для каждой A . Они отвечают различным минералам, но средние значения трех рассматриваемых минералов обычно различаются незначительно. Мы уже отметили, что, если исходить из какой-то обстановки, характеризующейся биномиальным распределением, различия в средних слишком малы, чтобы оказывать существенное влияние на стандартные отклонения.

Очевидно, было бы гораздо удобнее усреднить три стандартных отклонения, которые получены для каждой комбинации площадь — порода. Поскольку чувствительность дис-

персии к среднему значению в реальной выборке была не больше, чем для теоретического биномиального распределения, такое усреднение, по-видимому, вполне законно. Усреднение, конечно, затемняет или даже уничтожает различия в изменчивости среди различных минералов. Такие различия, несомненно, существуют, особенно между минералами, которые сильно отличаются по габитусу или по грубости. Однако они, вероятно, не имеют такого значения, как можно было бы предполагать, так как дисперсии, особенно большие, в действительности не являются независимыми.

Чтобы сделать вышеприведенные рассуждения немного яснее, представим себе породу, состоящую целиком из порфировых вкрапленников микроклина, расположенных в очень тонкозернистой основной массе, сложенной олигоклазом и кварцем. Малая измеряемая площадь может дать превосходную оценку отношения олигоклаз + кварц, но наверняка даст плохую оценку содержания микроклина в породе. В данном случае недооценка микроклина обязательно приведет к переоценке кварца + олигоклаз, а переоценка микроклина — к недооценке кварца + олигоклаз. Таким образом, малая измеряемая площадь должна дать плохую оценку количества кварца и олигоклаза в породе, так как она дает плохую оценку количества микроклина. Конечно, результаты не будут одинаковыми, — они, скорее всего, будут пропорциональны средним значениям, но в общем, по-видимому, маловероятно, чтобы из-за различий в габитусе или в грубости зерна возникли большие различия в дисперсии. Скорее всего, дисперсия, возникшая из-за грубости или из-за необычной формы какой-либо составной части, распределится между всеми составными частями породы.

В общем, по-видимому, все доводы против усреднения величин s в каждой клетке табл. 9 несостоятельны. Следующий вопрос — как это усреднение должно выполняться. Всегда, когда существует возможность выбора, статистики, как известно, предпочитают иметь дело с квадратом среднего, а не с корнем из этого квадрата. Численное различие между средним стандартным отклонением и корнем из средней дисперсии очень мало для большинства данных таблицы и ощущимо только для гранитов Кэрнменеллис. Во всех последующих расчетах использовался квадратный корень из средней точностной дисперсии; в табл. 9 и дру-

гих местах текста он обозначен как $\sqrt{\bar{V}_p} \cdot \sqrt{\bar{V}_p}$ — несколько более устойчивая мера точности, чем s , так как $\sqrt{\bar{V}_p} \geq s$.

Таким способом мы приводим данные табл. 9 к величинам, которые поддаются обработке; имея единственную оценку ошибки для каждой комбинации порода — площадь, мы можем начать исследование соотношения между площадью измерения и ошибкой в каждой породе. Кроме того, резонно полагать, что средняя дисперсия ошибки сама подвержена меньшей ошибке, чем отдельные значения дисперсии, хотя мы не знаем, будет ли это улучшение большим или меньшим, чем следовало бы ожидать при удвоении числа степеней свободы.

При наличии только четырех точек для каждой породы мы, очевидно, будем вынуждены довольствоваться линейным приближением зависимости между A и $\sqrt{\bar{V}_p}$. Но какие данные мы будем использовать для построения графиков: исходные или пересчитанные по какой-то другой шкале?

Мы уже отмечали, что $\sqrt{\bar{V}_p}$ имеет два источника: ошибку подсчета, которая обусловлена стандартизацией длины линий подсчета, и вариацию опробования. Поэтому мы можем написать, что

$$E(\sqrt{\bar{V}_p}) = k_1 + \sigma_s^2, \quad (8.1)$$

где k — дисперсия подсчета, а σ_s^2 — дисперсия опробования. Далее, мы можем представить каждую измеряемую площадь в виде суммы большого числа очень маленьких (единичных) площадей, так что число таких площадочек в различных измеряемых площадях выразится в виде отношений площадей друг к другу. Некоторая исходная дисперсия опробования σ_μ^2 , оцениваемая выборочным путем, связана с единичной площадью для каждой породы, разной в трех образцах зерен различной грубости. Таким образом, мы получаем, что $\sigma_s^2 = \frac{k_2 \sigma_\mu^2}{A}$, и уравнение (8.1) может быть написано в следующем виде:

$$E(\sqrt{\bar{V}_p}) = k_1 + \frac{k_2 \sigma_\mu^2}{A}. \quad (8.2)$$

Из уравнения (8.2) ясно, что основная зависимость между $E(\sqrt{\bar{V}_p})$ и A не линейная, так что линейное приближение, построенное для результатов эксперимента, вероятно, будет довольно плохим. Однако если k_1 мало по сравнению с σ_s^2 , зависимость будет, по существу, линейной при условии, что исходные величины переведены в логарифмы. Если k_1 настолько мало, что им можно пренебречь, зависимость между логарифмами становится строго линейной, а так как σ_μ^2 для определенной грубости фиксировано, мы имеем для какого-то определенного образца

$$\lg E(\sqrt{\bar{V}_p}) = \lg(k_2 k_3) - \lg A. \quad (8.3)$$

Таким образом, имеется надежное указание, что соответствующая кривая должна строиться по логарифмам наблюденных величин, а не по самым наблюденным величинам, хотя в тех случаях, когда k_1 больше чем σ_s^2 , что обычно характерно для больших площадей тонкозернистых пород, могут возникнуть некоторые сомнения. Между прочим, так как σ_s^2 не отрицательная величина, уравнение (8.1) показывает, что $E(\sqrt{\bar{V}_p}) \geq k_1$; ошибка подсчета является нижним пределом аналитической ошибки.

Уравнения (8.1) — (8.3) показывают, что исходные величины перед любыми дальнейшими вычислениями следует переводить в логарифмы; кроме того, основываясь на этих уравнениях, мы должны сравнивать \bar{V}_p с A или $\sqrt{\bar{V}_p}$ с \sqrt{A} . Большинство читателей, вероятно, предпочитет иметь дело с ошибкой, выраженной в единицах измерения; на фиг. 9 изображены значения $\sqrt{\bar{V}_p}$ для каждого образца, нанесенные против соответствующих значений \sqrt{A} . При этом мы имеем следующие уравнения:

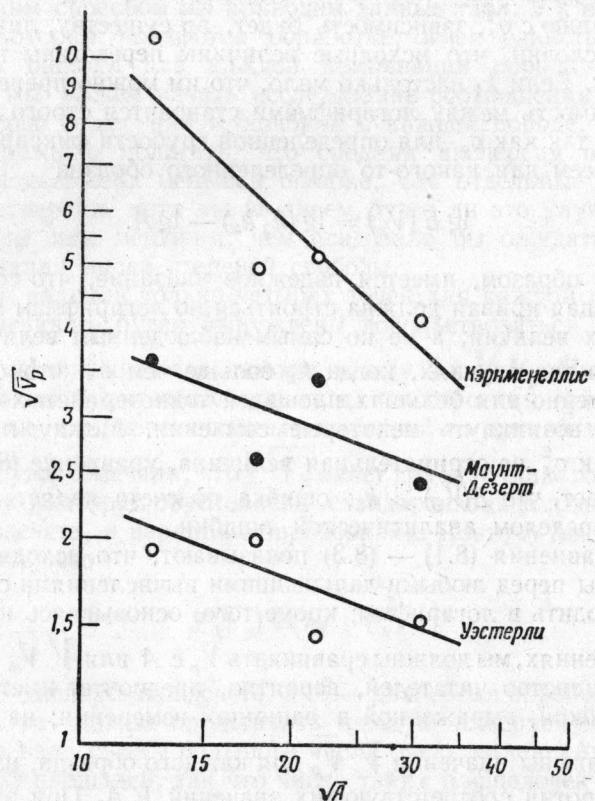
$$(Уэстерли) \quad \lg \sqrt{\bar{V}_p} = 0,66528 - 0,16822 \lg A \quad (8.4)$$

$$(Маунт-Дезерт) \quad \lg \sqrt{\bar{V}_p} = 0,96844 - 0,18908 \lg A \quad (8.5)$$

$$(Кэрнменеллис) \quad \lg \sqrt{\bar{V}_p} = 1,96424 - 0,46569 \lg A \quad (8.6)$$

Вполне очевидно, что соответствие точек на фиг. 9 далеко от идеального. Вместе с тем, хотя отклонения оказываются большими по абсолютной величине, все же они вполне приемлемы при оценках стандартных отклонений, основанных на

малых выборках. Наиболее важно, что они, по-видимому, не говорят о систематическом уклонении от линейности в соотношении между $\lg \bar{V}_p$ и $\lg A$. Интересующийся читатель



Фиг. 9. Колебания логарифма средней аналитической ошибки ($\sqrt{V_p}$) как функция от логарифма корня квадратного из измеряемой площади (\sqrt{A}) для образцов тонкозернистого (Уэстерли), среднезернистого (Маунт-Дезерт) и грубозернистого (Кэрименеллис) гранитов.

может убедиться сам, что этого нельзя сказать для нелогарифмированных величин, приведенных в табл. 9. Таким образом, мы в состоянии оценить влияние величины измеряемой площади на аналитическую ошибку в каждом из трех образцов.

Глава 9

МЕРА ГРУБОСТИ ГРАНИТНОЙ СТРУКТУРЫ

1. Желательность меры грубоcти

Итак, на основании данных, изложенных в гл. 8, мы вывели эмпирические уравнения, определяющие аналитическую ошибку как функцию от измеряемой площади в каждом из трех образцов. Полагая, что грубоcть, определенная каким-либо способом, одинакова в пределах каждого образца, мы сумели охарактеризовать влияние частоты зерен на аналитическую ошибку в каждом образце, так как ясно, что число сечений зерен будет в общем пропорционально площади измерения. В нашем случае образцы настолько различаются по грубоcти, что могли быть успешно (или во всяком случае соответственно) подразделены еще при макроскопическом изучении; согласно полученным данным, 34 из 36 наблюдателей подразделили их одинаково.

Таким образом, мы можем производить довольно грубые качественные сравнения; для какой-то определенной измеряемой площади аналитическая ошибка анализа шлифа, взятого из образца, промежуточного по грубоcти между какими-то двумя контрольными образцами, вероятно, также будет промежуточной. Сравнения подобного рода могли бы быть весьма полезны для петрографов, которым приходится иметь образцы контрольных пород для сравнения, но только такие петрографы и будут в состоянии использовать эти сравнения. Кроме того, сама операция сравнения обладает очень серьезным недостатком: хотя макроскопическое изучение может привести к состоятельному упорядочиванию неизвестных образцов по отношению к контрольным, оно ничего не говорит нам об «интервале» между какими-то двумя образцами, известными или неизвестными. Мы можем догадываться о порядке ошибки для неизвестного образца по отношению к какому-то стандарту; однако в чем мы действительно нуждаемся, так это в оценке величины ошибки.

Чтобы получить такую оценку, мы должны либо повторять на каждом новом образце операцию сравнения со стандартами, либо найти какую-то меру грубости, которая не только будет говорить нам, что неизвестный образец располагается между такими-то двумя стандартами, но и позволит предполагать, где именно в этом интервале он расположен.

Трудности, которые встречаются при прямом измерении основных переменных величин — размера зерна или числа зерен — уже были описаны довольно подробно, а разбор многочисленных неудачных попыток провести такие измерения вряд ли привел бы к определенному результату. Вместо этого мы дадим описание способа, позволяющего обойти эти трудности. Конечно, мера грубости, предлагаемая здесь, не является единственной возможной и, вполне вероятно, лучшей. Однако в настоящий момент она единственная в своем роде и имеет то достоинство, что ее можно просто получить и легко использовать.

2. Числа СО

Такой мерой является число смен однородности главных минералов вдоль линии единичной длины. Эти смены просто и быстро фиксируются на ленте 10-клавишной суммирующей машины; при этом каждому минеральному виду присваивается определенный номер, и всякий раз, когда минерал, которому присвоен этот номер, проходит под крестом нитей, этот номер отпечатывается на ленте. При большом увеличении число наблюдаемых смен однородности растет незначительно, а нервное напряжение и усталость сильно увеличиваются. После небольшой практики (главным образом после детального знакомства с клавиатурой суммирующей машины) на пересечение 40 мм грубозернистой породы требуется две с половиной минуты, а для пересечения такого же расстояния в самой тонкозернистой породе (лучше всего при среднем увеличении) пяти минут более чем достаточно.

Полный отсчет соответствует, в сущности, числу смен барабанов, которое оператор может осуществить при тщательном прохождении линии каким-либо одним из непрерывных линейных интеграторов, описанных в гл. 3. Конечно, на этот отсчет сильно влияют малые и акцессорные минералы. Эти минералы полностью или частично включе-

ны в главные, так что отдельная смена засчитывается не только при переходе от главного минерала к малому или к акцессорному, но также и при новом попадании на главный минерал.

Ложные отсчеты этого типа могут составлять до 20% от общего количества отсчетов даже в породе с очень низким цветовым индексом и больше трети от общего количества отсчетов, если цветовой индекс превышает 10. Определение ложные используется сознательно; зерна малых и акцессорных минералов обычно невелики по сравнению с отдельными зернами или сростками главных минералов, а форма зерен этих малых и акцессорных минералов часто такая, что их отсутствие или присутствие оказывает незначительное влияние на дисперсию опробования главной составной части. Например, кристалл плагиоклаза, в котором содержится две полосы серпента на линии пересечения, не становится тем самым выборочным эквивалентом трех зерен плагиоклаза. Однако он увеличивает на три единицы отсчеты по главному минералу и на пять — общее количество отсчетов. Наконец, малые и акцессорные минералы иногда образуют целые скопления, так что их участие в общем отсчете может быть весьма неустойчивым, даже в пределах такой небольшой площади, как единичный шлиф. Поэтому целесообразно, по-видимому, вычеркивать не только отсчеты по малым и акцессорным минералам, но также вызываемые ими «прибавления» и «повторения» главных минералов. Можно, конечно, сразу же воздерживаться от регистрации обоих этих типов отсчетов, однако быстрее зафиксировать их на ленте и выкинуть из окончательного отсчета, особенно если для облегчения подсчета свободные промежутки были распределены по ленте равномерно.

Опыт показывает, что за возможным исключением очень тонкозернистых гранитов смены однородности, или числа СО, довольно устойчивы и пригодны для практических целей. В первую стадию опыта были использованы сорок шлифов, по пять из восьми гранитов. Каждый шлиф был взят из определенного образца. Шлифы были произвольно разложены на пять комплектов, так что каждый комплект содержал по одному шлифу из каждого гранита. В качестве меры предосторожности все шлифы из четырех гранитов, также случайно выбранных, были дублированы. Таким образом, анализы были проведены в пяти группах по

Таблица 10

Средняя частота смен однородности главных составных частей некоторых двухполевошпатовых гранитов на 25-мм пересечении

Гранит	Отдельные шлифы	Среднее
Уэстерли, Род-Айленд:		
Июль	103 95 95 93 93	90,0
Сентябрь	93 83 87 77 81	
Паунал, Мэн:		
Июль	68 60 48 77 57	66,3
Сентябрь	80 62 55 81 75	
Элбертон, Джорджия:		
Июль	49 56 62 62 49	55,1
Сентябрь	58 52 64 47 52	
Фицвильям, Нью-Гэмпшир:		
Июль	52 56 54 44 55	51,7
Сентябрь	51 46 48 48 63	
Милфорд, Нью-Гэмпшир:		
Июль	55 44 37 30 61	46,3
Сентябрь	56 59 32 30 59	
Солсбери, Северная Каролина:		
Июль	30 35 41 51 30	35,1
Сентябрь	25 29 37 38 35	
Вудбери, Нью-Гэмпшир:		
Июль	23 28 35 57 29	34,0
Сентябрь	22 15 55 53 23	
Барре Вермонт:		
Июль	40 26 31 35 26	33,6
Сентябрь	32 40 27 35 44	
Брэдфорд, Род-Айленд:		
Сентябрь	53 41 62 58 56	54,0
Маунт-Дезерт, Мэн:		
Сентябрь	58 31 23 42 50	40,8
Сен-Пьер, Иль э Вилен:		
Сентябрь	20 26 17 22 24	21,8

проводились на этих гранитах, подсчет является более продолжительным. Возможно, подобные различия имеют место в других породах, но они не возникают просто потому, что индивидуальные подсчеты этих пород короче. Столк же возможно, хотя и маловероятно, что это явление чисто случайное и поэтому не требует объяснения. Явления подобного типа, часто небъяснимые, характерны и для других отраслей науки, а статья Гриффитса и Розенфельда (Griffiths, Rosenfeld, 1954) показывает, что они не так уж редки и в геологической работе.

двенадцати шлифов в каждой (4 единичных и 4 с дубликатами). Затем порядок, в котором должны были проводиться анализы внутри комплектов, был рандомизирован, и каждый комплект был обработан отдельно: три комплекта в разные дни и два комплекта утром и во второй половине одного и того же дня, причем фактическое время на микроскопическое изучение каждого комплекта составило около полутора часов, а все исследование растянулось на восемь дней. «Главный результат», или «ошибка комплектования», которая могла бы отражать неустойчивость в особенностях классификации и определения, оказалась незначительной. Различия между гранитами были установлены довольно легко по сравнению с различиями между шлифами, взятыми из одного и того же гранита. Со своей стороны, «внутри-гранитная» вариация была гораздо больше, чем ошибка для дубликатов, так что частичное дублирование фактически оказалось очень малое влияние на опыт.

Семь недель спустя была взята новая серия случайных комплектов с теми же сорока шлифами; частичное дублирование первой стадии было отброшено, и к каждому комплекту были добавлены шлифы по одному из трех новых гранитов. Затем порядок измерения внутри комплектов был рандомизирован и комплекты были просмотрены по одному или по два в день в течение шести дней. Ошибка комплектования снова оказалась незначительной. Очевидно, особенности определения и классификации являются довольно устойчивыми в течение непрерывного рабочего периода, равного неделе или около этого.

Эта устойчивость может быть утрачена, если работа проводится спорадически в течение более длительного периода времени; об этом говорят результаты опробования шлифов из Уэстерли и Паунала, приведенные в табл. 10. Для Уэстерли каждое значение, полученное в сентябре, меньше, чем июльское, для того же самого шлифа, причем среднее уменьшение равно 11,6. С другой стороны, в Паунале каждое сентябрьское значение выше, чем июльское, причем среднее увеличение равно 8,6. В остальных шести гранитах обеих стадий опыта знаки отдельных различий меняются и среднее различие, какой бы знак оно ни имело, не превышает 4,6. До сих пор эта особенность пород из Паунала и Уэстерли не нашла удовлетворительного объяснения. Эти два гранита являются самыми тонкозернистыми в выборке, так что в индивидуальных измерениях, которые

В любом случае это затруднение, очевидно, ограничивается такими тонкозернистыми породами, для которых (как мы вскоре увидим) точная оценка СО редко необходима. В том же классе пород, для которого требуются хорошие определения СО, не возникает никаких затруднений, кроме случайной вариации, которая может контролироваться и уменьшается повторением; по-видимому, в этом классе особенности определения и классификации достаточно устойчивы на период работы порядка нескольких недель.

Некоторые породы, приведенные в табл. 10, изучены довольно хорошо, так что последовательность средних значений должна помочь опытному петрографу при сравнении рассмотренных чисел СО с его собственными обозначениями размера зерна.

Для трех образцов, использованных в качестве стандартов при изучении дисперсии размера площади, которое было проведено в гл. 8, СО равны следующим величинам:

Уэстерли	87,8
Маунт-Дезерт	46,0
Кэрмениеллис	20,8

Эти величины являются средними, основанными на двух пересечениях через каждый из 13 шлифов каждого образца, причем пересечения делались отдельно в разное время, незадолго до работы, в ходе ее или непосредственно после работы, в результате которой были получены июльские результаты, приведенные в табл. 10.

3. Соотношение между числами СО и аналитической ошибкой

Результаты, приведенные в предыдущем разделе, позволяют нам заменить качественную оценку грубости трех стандартных образцов наблюдаемыми числами СО. Теоретическая шкала СО заключена в пределах от 1 до ∞ , а табл. 10 показывает, что практически значения шкалы колеблются по крайней мере от 17 до 103. Конечно, мы не можем быть уверены, что интервалы вдоль шкалы одинаковы, что, например, порода с СО=17 является ровно «наполовину» такой тонкозернистой, как порода с СО=34, что порода с СО=50 «наполовину» такая тонкозернистая, как порода с СО=100. Однако чем меньше интервалы, тем меньше будет возникать затруднений по этому поводу. Шкала

протягивающаяся теоретически до бесконечности и практически более чем до 80, определенно предпочтительнее шкалы, которая содержит столько интервалов, сколько имеется значений, подлежащих разбивке.

Допуская, что отклонения от линейности в пределах шкалы незначительны, мы должны теперь выяснить, какое соотношение должно быть между числом СО и аналитической ошибкой. Число СО является линейной частотой, и если бы требовалась оценка площади, в первую очередь следовало бы использовать величину $(CO)^2$. Именно это мы могли бы сделать, если бы нам была задана линейная частота зерен, а надо было бы рассчитать частоту на площади. Мы же в уравнениях (8.4—8.6) имеем частоту на площади, и если бы числа СО оправдали наши лучшие надежды, они составляли бы с величиной $\sqrt{V_p}$ такое же отношение, как и величина \sqrt{A} . Таким образом, мы должны ожидать наличия обратной линейной зависимости между логарифмами значений СО и логарифмами аналитических ошибок для трех стандартных образцов для любой фиксированной площади измерения. Логарифмы аналитических ошибок легко находятся при решении уравнений (8.4—8.6) для нужной площади измерения, а значения СО приведены в конце предыдущего раздела. В табл. 11 приведены логарифмы аналитических ошибок для ряда площадей для каждого из трех стандартных образцов. На основе измерений и оценок, приведенных в таблице, мы можем сразу же вывести новые уравнения, которые определяют регрессию $\lg \sqrt{V_p}$ на $\lg CO$ для каждой из измеряемых площадей. Эти уравнения следующие:

$$\lg \sqrt{V} = 1,45131 - 0,65195 \lg CO, \text{ для } A = 960 \text{ } mm^2 \quad (9.1)$$

$$\lg \sqrt{V} = 1,65168 - 0,74286 \lg CO, \text{ для } A = 625 \text{ } mm^2 \quad (9.2)$$

$$\lg \sqrt{V} = 1,79468 - 0,80774 \lg CO, \text{ для } A = 480 \text{ } mm^2 \quad (9.3)$$

$$\lg \sqrt{V} = 1,96406 - 0,88459 \lg CO, \text{ для } A = 320 \text{ } mm^2 \quad (9.4)$$

$$\lg \sqrt{V} = 2,28765 - 1,03142 \lg CO, \text{ для } A = 160 \text{ } mm^2 \quad (9.5)$$

Графики этих уравнений и точки, по которым они были получены (данные табл. 11), показаны на фиг. 10. Очевидно, что точки не лежат строго на прямой линии, но отклонение

Таблица 11

$\lg \sqrt{\bar{V}_p}$ для различных измеряемых площадей
в трех стандартных образцах

Образец	CO	$\lg CO$	$\lg \sqrt{\bar{V}_p}$ для указанной измеряемой площади, мм^2				
			160	320	480	625	960
Уэстерли . . .	87,8	1,94349	0,29450	0,24386	0,21424	0,19495	0,16360
Маунт-Дезерт	46,0	1,66276	0,55168	0,49477	0,46147	0,43980	0,40455
Кэрнменеллис	20,8	1,31806	0,93780	0,79762	0,71562	0,66223	0,57543

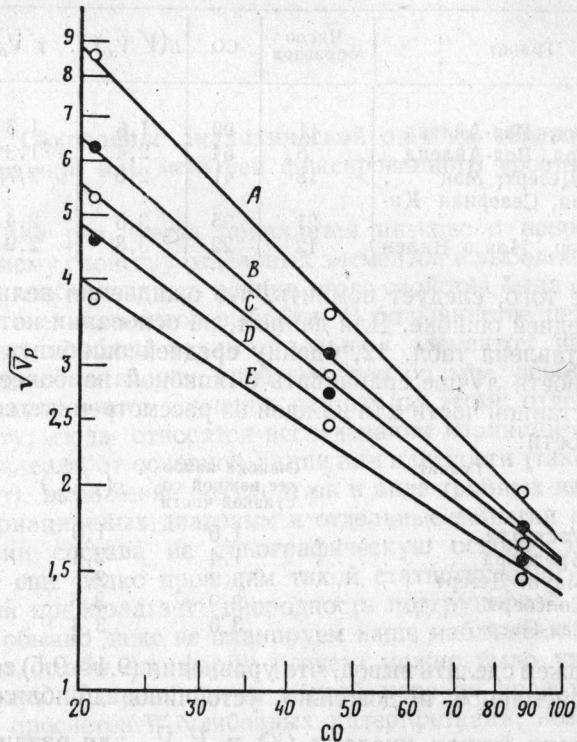
от линейности, которое, вполне вероятно, является систематическим, очень мало.

Значительная часть данных, подтверждающих это положение, которые в основном появились задолго до начала данного исследования, показывают, что точностные ошибки, которые находятся с помощью уравнений (9.1—9.5), вполне реальны. В достаточно больших сериях образцов из Уэстерли (Род-Айленд), Маунт-Дезерта (Мэн); Солсбери (Северная Каролина) и Сен-Пьера (Иль э Вилен, Франция), а также в небольшой группе образцов из Брэдфорда (Род-Айленд) были выбраны по два-три шлифа из каждого образца и проанализированы в ходе другой работы. Квадратный корень из среднего квадрата ошибки (или дисперсии) в дисперсионном анализе каждой из этих групп является оценкой того же самого параметра, который оценивался здесь вычислением $\sqrt{\bar{V}_p}$ для большого числа шлифов, взятых из одного и того же образца. Таким образом, измерение числа CO

и вычисление $\sqrt{\bar{V}_p}$ в каждой серии дает пять независимых определений, с помощью которых можно осуществлять контроль уравнений (9.1—9.5).

Сравнение стандартов производится в табл. 12. При рассмотрении таблицы следует иметь в виду, что ошибка, входящая во все значения, как наблюденные, так и ожидаемые, очень велика. Действительно, довольно неожиданным является тот факт, что ряд наблюденных величин так похож на ряд ожидаемых величин. Тем не менее можно отметить, что в четырех сравнениях из пяти наблюденная величина заметно меньше ожидаемой, а в пятом сравнении превышение наблюденной величины над ожидаемой незначительно.

Хотя число сравнений слишком мало, чтобы допускать точное исследование, можно уверенно говорить о некоторой смещенности в уравнениях, которая приводит к переоценке точностной ошибки. Конечно, предпочтительнее



Фиг. 10. \log аналитической ошибки оцененного среднего значения главного минерала ($\sqrt{\bar{V}_p}$) как функция \log грубости (CO) для различных измеряемых площадей: A — 160 mm^2 ; B — 320 mm^2 ; C — 480 mm^2 ; D — 625 mm^2 ; E — 960 mm^2 .

было бы не иметь смещенности вовсе, но при современном состоянии количественно-минералогического анализа смещенность, приводящая к незначительным добавочным работам и к некоторой осторожности в приписывании значимости малым различиям, не принесет большого вреда.

Таблица 12

Грубость (СО), ожидаемая $[E(\sqrt{\bar{V}_p})]$ и наблюденная $(\sqrt{\bar{V}_d})$
точность образцов в некоторых двухполевошпатовых
гранитах

Гранит	Число образцов	СО	$E(\sqrt{\bar{V}_p})$	$\sqrt{\bar{V}_d}$
Уэстерли, Род-Айленд	11	90	1,6	1,3
Брэдфорд, Род-Айленд	5	54	2,4	1,3
Маунт-Дезерт, Мэн	18	41	2,5	2,7
Солсбери, Северная Ка- ролина	21	35	3,6	2,4
Сен-Пьер, Иль э Вилен	12	22	3,8	2,9

Кроме того, следует помнить, что ожидаемая величина равна средней ошибке. Для данных, на основании которых была составлена табл. 12, оценку средней ошибки в действительности лучше сравнивать с ошибкой наиболее развитой составной части для каждой из рассмотренных серий.

В частности:

Гранит	Ошибка наибо- лее важной со- ставной части	$E(\sqrt{\bar{V}_p})$
Уэстерли	1,5	1,6
Брэдфорд	1,4	2,4
Маунт-Дезерт	3,2	2,5
Солсбери	2,9	3,6
Сен-Пьер	3,0	3,8

Мы можем сделать вывод, что уравнения (9.1—9.5) сохраняют приемлемое и довольно устойчивое приближение соотношения между числами СО и $\sqrt{\bar{V}_p}$ для различных измеряемых площадей. Имея эти данные, относительно просто поддерживать аналитическую ошибку средних значений образцов равной или меньшей какой-то фиксированной величины путем изменения числа шлифов, взятых из каждого образца соответственно с их числами СО. Методика, с помощью которой можно определить количество повторений, необходимое для контроля аналитической ошибки, описана в следующей главе.

Глава 10

КОНТРОЛЬ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПОВТОРЕНИЕМ

1. Сохранение аналитической ошибки образца равной или меньшей фиксированного уровня

Всякий раз, когда появляется интерес к некоторому изучаемому свойству отдельных элементов в выборке, желательно, чтобы точность оценки этого свойства была сравнима для всех элементов выборки. В большинстве петрографических проблем таким отдельным элементом является образец, и чем важнее проблема, тем больше вероятность более тщательного изучения данных по этому отдельному элементу; сюда относятся исследования вариации состава при удалении от основной линии или плоскости (такой, как контакт), выражение результатов в виде тройных или других вариационных диаграмм и отдельные попытки нанести изолинии состава на топографическую основу. Правда, мы все еще редко проводим такой статистический расчет, который предполагает однородность подгрупповой дисперсии, и обычно даже не планируем наши наблюдения таким образом, чтобы эту форму расчета можно было уверенно применять. Однако это ни в коей мере не предохраняет нас от просчетов и ошибочных интерпретаций, возникающих вследствие неоднородности подгрупповой дисперсии, благодаря чему мы обычно должны приписывать равное значение отдельным наблюдениям, даже если их недостаточно для того, чтобы провести сравнение, не прибегая к расчету.

Регулировать площадь измерения и число шлифов в образце таким образом, чтобы средние значения для образцов различной грубости можно было бы привести к равной точности, — занятие чрезвычайно утомительное. Однако на основании данных, приведенных в предыдущей главе, можно составить таблицу повторений, которая будет сохранять точностную ошибку средних значений образцов равной или меньшей фиксированного уровня. Решение

уравнения (9.1) для четных целых величин \bar{V} в интервале $2 \leq \bar{V} \leq 18$ дает значения СО, приведенные в третьей колонке табл. 13. Таким образом, точностная ошибка шлифа, взятого из породы с СО=93, равна 2,0% (дисперсия) или 1,41% (стандартное отклонение). Для породы с СО=59 соответствующая дисперсия равна 4,0%, а стандартное отклонение 2,00%. (Для промежуточных значений СО ошибка опробования будет также иметь какое-то промежуточное значение.)

Таблица 13

СО для четных целых величин \bar{V} в уравнении (9.1)

\bar{V}_p	$\sqrt{\bar{V}_p}$	СО	$l_{\bar{V}=2}$	$l_{\bar{V}=4}$	$l_{\bar{V}=6}$
2	1,41	93	1	—	—
4	2,00	59	2	1	—
6	2,45	44	3	—	1
8	2,83	36	4	2	—
10	3,16	31	5	—	—
12	3,46	27	6	3	2
14	3,74	24	7	—	—
16	4,00	22	8	4	—
18	4,24	20	9	—	3

$A = 960 \text{ мм}^2$; объяснение l см. в тексте ниже.

Дисперсия среднего меняется обратно пропорционально числу элементов, по которым она вычислялась. Следовательно, для получения средних значений, одинаковых по точности, для какой-нибудь пары образцов, характеризующихся только что указанными числами СО, следует использовать вдвое больше шлифов для образца с СО=59, чем для образца с СО=93. Для нахождения числа шлифов в образце, которое требуется для приведения дисперсии средних значений опробования образцов более грубозернистых пород к уровню, соответствующему единичному шлифу с СО=93, мы просто должны поделить все остальные дисперсии таблицы на первую. Результаты этого деления приведены в колонке, обозначенной $l_{\bar{V}=2}$. Например, если бы нам были нужны оптимальные¹ по точности оценки для двух образ-

¹ Термин *оптимальная* используется здесь как сокращенное выражение «...точность, полученная единичным шлифом большой площади, взятым из очень тонкозернистой породы».

зов, одного с СО=36 и другого с СО=27, мы проанализировали бы четыре шлифа из первого образца и шесть из второго.

Если точностная дисперсия, равная 4% (стандартное отклонение 2%), является приемлемой, колонка таблицы $l_{\bar{V}=4}$ показывает, что для СО=59 достаточно одного шлифа из образца, для $60 > \text{СО} > 35$ — двух шлифов и т. д. Если точностная дисперсия, равная 6% (стандартное отклонение 2,45%), является достаточной, колонка $l_{\bar{V}=6}$ дает соответствующие значения числа повторений.

Произведя такую же операцию с уравнениями (9.2—9.5), мы найдем количество повторений, необходимое для сохранения точностной ошибки образца, равной или меньшей 1,4; 2,0 и 2,5% для измеряемой площади, приведенной справа от каждого уравнения. Наиболее удобным способом обобщения этих результатов является составление карточек, примеры которых приведены на фиг. 11—13. Тот, кто обычно работает с определенной измеряемой площадью, свободно может воспользоваться этой относительно простой схемой. Таблицы, показывающие ряд значений СО для различных величин l и $\sqrt{\bar{V}_p}$, составить довольно легко. Тем же, кто предпочитает графики карточкам и таблицам, полезно знать, что график величин l , взятых из любой колонки табл. 13 против соответствующих значений $\sqrt{\bar{V}_p}$, приближается к линейному при построении на логарифмической бумаге и что это также справедливо для подобных расчетов с уравнениями (9.2—9.5).

Следует помнить, что, действуя в соответствии с фиг. 11—13, мы не поддерживаем точностную ошибку постоянной, а просто сохраняем ее равной или меньшей некоторого фиксированного предела. При оценке данных, полученных этим способом, все те, кто уверен в своих наблюдениях, должны просто заменить обычное мысленное допущение равномерности ошибки (равный вес) на предположение, что ошибка, входящая в каждый результат, равна или меньше, чем некоторая постоянная величина.

Строго говоря, дисперсии по образцам неоднородны, но их неоднородности недостаточно для того, чтобы не доверять критериям значимости, основанным на дисперсионном анализе, если только не использовать очень больших выборок или не требовать точных вероятностей. Обычно же ни одно из этих положений не соблюдаются.

Здесь уместно привести краткое объяснение некоторых терминов. Когда мы «сохраняем точность» даже в виде фиксированной величины с помощью повторений, точностная ошибка, на которую мы ссылаемся, характеризует исходное значение, а не то значение, которое фактически имеется в какой-то определенной выборке. Наблюденные точностные дисперсии образцов следует сравнивать с величиной, определяемой числом СО и количеством сделанных повторений, в том смысле, что эти дисперсии могли бы быть получены из истинного значения, которое характеризуется этой величиной; только в редких и случайных примерах не будет точного совпадения. Конечно, в точном соответствии нет необходимости; однородность подгрупповых дисперсий, предполагаемая при дисперсионных анализах, касается истинного, а не выборочного значения.

2. Выбор точностного стандарта

Хотя точностные стандарты, приведенные на фиг. 11—13, в абсолютном смысле расходятся, по-видимому, незначительно, они предъявляют самые различные требования к аналитику. Петрограф, который захочет использовать какой-то один из этих стандартов, найдет, что работа невыполнима, если минимальная измеряемая площадь его шлифов не будет равна около $\frac{3}{4}$ квадратного дюйма. Числовые сравнения, использованные в этом разделе, основываются исключительно на измеряемых площадях в 1 и $1\frac{1}{2}$ квадратных дюйма; если же кто-либо вынужден использовать меньшие измеряемые площади, он может сделать подобные сравнения с помощью карточек.

A. Количество-минералогические анализы химически анализированных образцов. Следует, по-видимому, отметить, что петрографическая работа должна быть самого высокого качества, особенно если первоначально рассматривается химический анализ как показатель количественно-минералогического состава. Если порода не настолько грубозернистая, чтобы нельзя было применять микроскопический анализ, определение количественно-минералогического состава образца при исходной ошибке $\sqrt{\bar{V}_p} = 1,41$ едва ли можно сравнить по стоимости с высококачественным химическим анализом. Фиг. 11 показывает, что даже для $CO=20$ требуется всего 9 шлифов площадью по $1\frac{1}{2}$ квадрат-

CO	Измеряемая площадь, мм^2				
	960	625	480	320	160
90	1				2
80		2	2	2	
70	2				3
60			3		
55					
50	3		4		6
45		4		5	7
40			5	6	8
35			6	7	9
30	5		7	8	10
25			7	9	
20	6		8	10	
15			9		
	7		10		
	8				
	9				
	10				
	9				
	10				
	11				
	12				
	13				
	14				
	15				
	16				
	17				
	18				
	19				
	20				
	21				
	22				
	23				
	24				
	25				
	26				
	27				
	28				
	29				
	30				
	31				
	32				
	33				
	34				
	35				
	36				
	37				
	38				
	39				
	40				
	41				
	42				
	43				
	44				
	45				
	46				
	47				
	48				
	49				
	50				
	51				
	52				
	53				
	54				
	55				
	56				
	57				
	58				
	59				
	60				
	61				
	62				
	63				
	64				
	65				
	66				
	67				
	68				
	69				
	70				
	71				
	72				
	73				
	74				
	75				
	76				
	77				
	78				
	79				
	80				
	81				
	82				
	83				
	84				
	85				
	86				
	87				
	88				
	89				
	90				
	91				
	92				
	93				
	94				
	95				
	96				
	97				
	98				
	99				
	100				
	101				
	102				
	103				
	104				
	105				
	106				
	107				
	108				
	109				
	110				
	111				
	112				
	113				
	114				
	115				
	116				
	117				
	118				
	119				
	120				
	121				
	122				
	123				
	124				
	125				
	126				
	127				
	128				
	129				
	130				
	131				
	132				
	133				
	134				
	135				
	136				
	137				
	138				
	139				
	140				
	141				

Фиг. 11. Таблица повторений для сохранения аналитической ошибки $\leq 1,41$. Шкала грубыстей CO показана слева. Последующие колонки отмечают число шлифов (размер показан в заголовке колонок) в образце, которое требуется для сохранения аналитической ошибки среднего содержания главного минерала $\leq 1,41$. Например, для образца с $CO=45$ требуется три измеряемые площади по 960 мм^2 . Если измеряемая площадь равна 480 мм^2 , требуется пять шлифов и так далее.

ных дюйма или 12 шлифов площадью по 1 квадратному дюйму. Для громадного большинства среднезернистых изверженных пород необходимо не более 4 или 5 шлифов первой площади и 6 или 7 шлифов второй. Сколько бы ни платил

петрограф за изготовление своих шлифов и как бы он высоко ни ценил свое время, стоимость определения количественно-минералогического состава, который отвечает стандартам фиг. 11, обычно будет гораздо ниже, чем стоимость определения нормативного состава для того же самого образца.

Можно считать, что такая концентрация напряжения на единичном образце невыгодна, даже если она является дешевой в абсолютном смысле. Однако важно усвоить, что существует мало оснований для прямого сопоставления количественно-минералогического и нормативного составов, если они не характеризуют одну и ту же выборку. Если количественно-минералогический состав представлен средним значением, которое основано на шлифах, отобранных из нескольких образцов, как это обычно имеет место, не следует исключать возможность того, что образцы одинаковы. Но обычно такое предположение наиболее маловероятно; большинство петрографов решительно забраковали бы его в каких-либо других условиях. Так почему же это предположение должно считаться подходящим в данном случае?

Б. Детальное петрографическое исследование. Сравнение фиг. 11 и 12 показывает, что гораздо легче сделать так, чтобы $\sqrt{\bar{V}_p}$ был равен 2,0, а не 1,4. Для измеряемых площадей в $1\frac{1}{2}$ квадратных дюйма с помощью одного шлифа из образца можно обеспечить значение $\sqrt{\bar{V}_p} \leq 2,0$, в то время как для достижения значения $\sqrt{\bar{V}_p} \leq 1,41$ большей частью потребуется два шлифа. Подобным образом, как видно из фиг. 11, там, где для сохранения неравенства $\sqrt{\bar{V}_p} \leq 1,41$ потребовалось бы 3—4 шлифа для того, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt{\bar{V}_p} \leq 2,0$, достаточно только двух шлифов. Даже для шлифов большой площади количество повторений, которое можно установить, исходя из фиг. 11, достаточно для того, чтобы затруднить или серьезно ограничить работу в средне- и грубозернистых породах. Положение усложняется, если пользоваться только измеряемыми площадями в 1 квадратный дюйм. В этих случаях, по-видимому, более приемлема таблица, приведенная на фиг. 12. Для измеряемых площадей в 1 квадратный дюйм эта таблица гораздо менее требовательна в случае промежуточных значений CO, но в более грубозернистых породах может потребоваться 5

CO	Измеряемая площадь, мм ²				
	960	625	480	320	160
90					1
80	1	1	1	1	2
70				2	
60		2	2		3
55				3	4
50	2				5
45			3	4	
40				4	6
35	3	4	5	6	7
30	3	4	5	6	8
25		5	6	7	9
20	4	6	7	8	10
15					≥ 13
	≥ 5	≥ 7	≥ 9	≥ 12	

Уэстэрли
Уэстэрли (обр.)

Паунал

Элбертон
Брайфорд

Фицвильям

Маунт-Дезерт (обр.)

Милфорд

Маунт-Дезерт

Солсбери
Вудбери

Барре

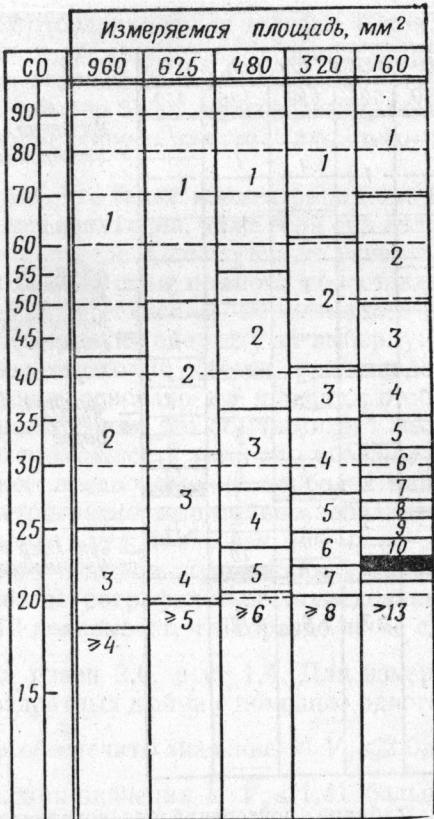
Сен-Пьер
Кэрнменеллис (обр.)

Фиг. 12. Таблица повторений для сохранения аналитической ошибки среднего содержания главного минерала $\leq 2,0$.

Вдоль правого края таблицы показаны измеренные величины CO для некоторых хорошо известных гранитов.

или 6 шлифов для каждого образца, а это, откровенно говоря, тоже много. Если в распоряжении имеются большие шлифы (нет причины, почему они не должны быть большими), сохранение значения $\sqrt{\bar{V}_p} \leq 2,0$, по-видимому, вполне реально.

В. Рекогносцировочная работа. Фиг. 13 можно использовать только в том случае, когда не предполагается проводить детальных сравнений или когда известно, что между образцами существуют очень большие различия. Однако для полуторадюймовых площадей замена фиг. 12 на фиг. 13



Фиг. 13. Таблица повторений для сохранения аналитической ошибки среднего содержания главного минерала $< 2,45$.

уменьшит требуемое число шлифов в образце не более чем на 1, а часто даже не сделает и этого. То же самое справедливо для площадей размером в 1 квадратный дюйм, кроме самых низких значений наблюденных величин CO. Как мы видели, уменьшение $\sqrt{\bar{V}_p}$ от 2,0 до 1,4 создает дополнительную значительную и очень часто ненужную работу. С другой стороны, уменьшение $\sqrt{\bar{V}_p}$ от 2,5 до 2,0 не требует большого количества дополнительной работы, а на протяжении боль-

ших (дискретных) частей ряда такая дополнительная работа и вовсе не будет нужна. Если имеются шлифы подходящей площади, трудно представить себе петрографа, желающего сохранить значение $\sqrt{\bar{V}_p}$, не превышающее 2,5, а не 2,0. Можно придумать такой случай, когда подобное поведение было бы совершенно обосновано, особенно при работе с маленькими шлифами. Возможно, это было бы даже более правильным, чем изготовление хороших шлифов.

3. Сохранение максимальной точности среднего значения для группы образцов и фиксированной точности отдельных результатов

Если все образцы важны при изучении и необходимо сохранить точность значений этих образцов, тогда, конечно, лабораторная стоимость² изменяется в зависимости от числа требующихся шлифов. Например, такая обстановка может возникнуть в том случае, если из большого массива было отобрано всего несколько образцов или если было взято большое число образцов с целью проведения детализации схематической карты. В первом случае добавочная лабораторная стоимость редко будет высокой. Во втором случае она легко может оказаться недопустимой; полевую работу подобного рода, предпринятую без достаточной информации, дающей по крайней мере хорошую оценку лабораторной стоимости, вряд ли следует начинать.

Если же главной целью является определение среднего значения для породы, основанного на значениях образцов, увеличение стоимости, возникшее вследствие повторения, можно компенсировать соответствующим уменьшением числа образцов. Точности таких образцов можно сохранить на приемлемом уровне путем использования повторных шлифов в образце. Большинство попыток охарактеризовать состав и изменчивость достаточно однородных пород носит именно такой характер. Внимание сосредоточивается как на среднем для породы, так и на величине и характере вариации от точки к точке в пределах массива. В последнем случае гораздо лучше иметь дело с малым или умеренным числом средних значений образцов, имеющих небольшую

² Здесь «стоимость» означает как коммерческую стоимость, так и лабораторное время.

очностную ошибку, чем полагаться на большое число оценок образцов, каждая из которых содержит большую точностную ошибку. Уменьшая число исследуемых образцов, если это выполнимо без увеличения ошибки среднего значения группы, можно мало потерять и много выгадать. В этом случае уменьшение объема выборки и увеличение повторений в образце можно фактически уравновесить таким образом, что точность выборочного среднего сохранится. Эта операция всегда увеличивает общее число необходимых анализов, если в породе существует какая-либо вариация от точки к точке. Но если эта вариация не очень большая, увеличение числа анализов и, следовательно, лабораторной стоимости обычно умеренное.

Дисперсия среднего, подсчитанного для k шлифов, взятых в каждом из n образцов, равна

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_b^2}{n} + \frac{\sigma_a^2}{nk}, \quad (10.1)$$

где σ_b^2 — дисперсия образцов (межобразцовая дисперсия), а σ_a^2 — дисперсия шлифов (внутриобразцовая дисперсия). В предыдущих разделах этой книги было описано действие грубости, характеризующейся числом СО, на σ_a^2 , которую мы в другом месте определили как аналитическую ошибку количественно-минералогического анализа.

Если из той же породы взять теперь m образцов и из каждого из них выбрать по l шлифов, можно подсчитать среднее с ошибкой σ_2^2 , где

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_b^2}{m} + \frac{\sigma_a^2}{ml}.$$

Соответствующей заменой и перестановками можно показать (см. Cameron, 1951, стр. 92—93), что если σ_1^2 и σ_2^2 равны, то должно выполняться условие:

$$\frac{m}{n} = \frac{\Phi + \frac{1}{l}}{\Phi + \frac{1}{k}}, \quad (10.2)$$

где $\Phi = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2}$, отношению межобразцовой дисперсии к внутриобразцовой дисперсии. Если это соотношение выполняется, истинная точность среднего, построенного по k шлифам

каждого из n образцов, будет такая же, как и истинная точность среднего, подсчитанного по l шлифам каждого из m образцов.

Обозначая через N общее число анализов, мы имеем $nk = N$ и $\frac{1}{n} = \frac{k}{N}$. В соответствии с этим мы можем представить уравнение (10.1) в следующем виде:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N} (k\sigma_b^2 + \sigma_a^2),$$

а так как $k \geq 1$, из этого уравнения следует, что σ_1^2 минимально, когда $k = 1$ ³. Поэтому для некоторой определенной величины N наилучшая оценка среднего значения группы будет получена, если $k = 1$, $n = N$, т. е. когда из каждого образца берется единственный шлиф. Если в уравнении (10.2) $k = 1$ и $l \geq 2$, дробь $\frac{m}{n}$ дает ту часть исходной выборки, из каждого образца которой должно быть отобрано l шлифов. При этом исходная ошибка выборочного среднего будет оставаться минимальной величиной, в то время как аналитическая ошибка средних значений образцов будет с помощью повторений сохраняться равной или меньшей какого-то фиксированного уровня. Если используется число образцов, промежуточное между m и n , ошибка выборочного среднего будет меньше, чем для отдельной подгруппы из n образцов.

Это соотношение можно представить различными способами, но использованная здесь методика опирается на современное состояние знаний в данной области. На основании работы, описанной в предыдущих разделах этой главы, мы в состоянии получить довольно хорошие оценки для σ_a^2 — аналитической ошибки как функции от легко измеряемой статистики (СО), тесно связанной с грубостью. С помощью фиг. 11—13 и определения числа СО мы можем найти l , которое будет сохранять точностную ошибку оценок образцов равной или меньшей трех каких-то значений.

С другой стороны, имеющиеся у нас сведения относительно σ_b^2 — вариации между образцами одной и той же породы — гораздо более неудовлетворительны. Поэтому, видимо, наиболее полезно построить соотношения между $\frac{m}{n}$ и l для трех уровней аналитической ошибки, уже исполь-

³ Если, конечно, σ_b^2 не равно 0; тогда деление анализов на внутри- и межобразцовые не имеет смысла.

зованных на фиг. 11—13, и для какого-то широкого ряда значений σ_b . Именно это было сделано в табл. 14—16. В каждую из этих таблиц входит одно определенное значение аналитической ошибки (σ_a), а σ_b заключено между 0,5 и 5,0. Вариации от точки к точке, которым отвечает $\sigma_b < 0,5$, вряд ли станут приниматься в расчет в какой-либо практической задаче, тогда как σ_b , превышающее 5,0, почти не будет встречаться в хорошо известных типах пород. Там же, где достигается такая большая величина этой вариации, различия между образцами почти наверняка будут установлены еще до изучения под микроскопом. При окончательной геологической или петрографической интерпретации этих различий подразделение выборки для аналитических целей может оказаться целесообразным. Беглый взгляд на табл. 14—16 сразу же показывает, что m быстро возрастает с увеличением σ_b .

Замечания по терминологии, сделанные в конце первого раздела этой главы, применимы также (хотя и в несколько более сложном виде) к выводам данного раздела. Табл. 14—16 являются просто алгебраическими следствиями из определения σ_x — ошибки среднего; поэтому использование параметрических обозначений для внутри- и межобразцовых стандартных отклонений в этих таблицах вполне законно. Однако на практике мы можем лишь решать, какую строку из какой таблицы следует использовать с помощью ряда предположений или экспериментальных опреде-

Таблица 14

Процент образцов, который следует оставить для сохранения оптимальной точности выборочного среднего, если для обеспечения $\sigma_a \leq 1,41$ требуется l шлифов (для $0,5 \leq \sigma_b \leq 5,0$)

σ_b	l для $\sigma_a \leq 1,41$							
	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	0,56	0,41	0,33	0,29	0,26	0,24	0,22	0,21
1,00	0,66	0,56	0,50	0,47	0,44	0,43	0,42	0,41
1,41	0,75	0,66	0,62	0,60	0,58	0,57	0,56	0,56
2,00	0,83	0,78	0,75	0,73	0,72	0,72	0,71	0,70
2,45	0,88	0,83	0,81	0,80	0,79	0,79	0,78	0,78
3,00	0,91	0,89	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84	0,84
4,00	0,94	0,93	0,92	0,91	0,91	0,90	0,90	0,90
5,00	0,96	0,95	0,94	0,94	0,94	0,94	0,94	0,93

лений. Это положение очень характерно для других областей исследования, и поставленная проблема была сейчас разобрана настолько детально, что она вряд ли вызовет много затруднений.

Таблица 15

Процент образцов, который следует оставить для сохранения оптимальной точности выборочного среднего, если для обеспечения $\sigma_a \leq 2,00$ требуется l шлифов (для $0,5 \leq \sigma_b \leq 5,0$)

σ_b	l для $\sigma_a \leq 2,0$			
	2	3	4	5
0,50	0,53	0,37	0,29	0,25
1,00	0,60	0,47	0,40	0,36
1,41	0,67	0,56	0,50	0,47
2,00	0,75	0,67	0,62	0,60
2,45	0,80	0,73	0,70	0,68
3,00	0,85	0,79	0,77	0,75
4,00	0,90	0,87	0,85	0,84
5,00	0,93	0,91	0,90	0,89

Таблица 16

Процент образцов, который следует оставить для сохранения оптимальной точности выборочного среднего, если для обеспечения $\sigma_a \leq 2,45$ требуется l шлифов (для $0,5 \leq \sigma_b \leq 5,0$)

σ_b	l для $\sigma_a \leq 2,45$		
	2	3	4
0,50	0,52	0,36	0,28
1,00	0,57	0,43	0,36
1,41	0,62	0,50	0,44
2,00	0,70	0,60	0,55
2,45	0,75	0,67	0,62
3,00	0,79	0,71	0,68
4,00	0,86	0,82	0,80
5,00	0,90	0,87	0,85

4. Ограничения, накладываемые методом

Стандарты точности, установленной по карточкам и таблицам, приведенным в предыдущих разделах, изменяются от уровня, превышающего тот, который требуется в большинстве петрографических исследований, до уровня, который следует принимать во внимание как минимальный

в работе, определяемой как «количественная». Так как эти стандарты до сих пор не применялись на практике, мы должны будем удовлетвориться каким-то предположением относительно того, каким образом они могли бы быть использованы в определенных условиях. Однако прежде полезно отметить некоторые ограничения метода.

Принципиальным ограничением является тот факт, что число СО, как было здесь установлено, применяется только к трем главным составным частям, присутствующим в приблизительно эквивалентных количествах в гранитном веществе. Кроме того, оно применяется не к какой-то одной из этих главных составных частей, а скорее является мерой из средней частоты и показателем их *средней* изменчивости⁴.

Очевидно, что результат методики измерения, которая выведена без учета ориентировки, будет правильным только в том случае, если ориентировка слаба или отсутствует вовсе. В слоистой или рассланцованной породе, или даже в породе с отчетливо выраженной линейностью главной составной части число СО почти наверняка будет очень резко меняться в зависимости от направления линии, вдоль которой оно подсчитывается. Вполне возможно, что методику можно было бы приспособить к определенным типам ориентировки, но тогда модификация этого метода и, вероятно, довольно значительная, будет совершенно необходима.

В явно кристаллических породах затруднения могла бы вызвать отчетливо порфировидная структура, даже если бы вкрапленники не были ориентированы, но эти затруднения, возможно, не являются такими значительными, как следовало бы ожидать. Редкие крупные кристаллы будут, конечно, уменьшать наблюденное число СО и, таким образом, указывать на необходимость повторения. Эта зависимость носит линейный характер, но надо еще определить, являются ли добавочные повторения достаточными, чрезмерными или недостаточными.

При использовании числа СО в качестве меры грубости ссылаются на то, что обычно применяемые спецификации

⁴ Сейчас даже не известно, насколько хороша эта методика в случае однополевошпатовых гранитов, так как для них только одна составная часть — кварц — лежит в соответствующим образом построенном ряду, и числа СО будут сильно уменьшены благодаря присутствию только двух главных составных частей вместо трех.

границ единичных зерен непригодны. Там же, где этого затруднения не существует, как, например, в некоторых осадочных породах или микропорфиритовых лавах и дайках, можно придумать такой показатель грубости, который имеет более прямой физический смысл.

5. Протяженность линии подсчета

Работа, описанная в гл. 8 — 10, была проведена в расчете на то, что может быть выделена ошибка подсчета и поэтому могут быть построены такие таблицы, которые состоят исключительно из компонентов, составленных внутриобразцовыми дисперсиями, а также таблицы, в которых эти компоненты комбинируются с какой-то выбранной дисперсией подсчета. От этого пришлось окончательно отказаться, поскольку полная дисперсия результатов для двух довольно больших измеряемых площадей Уэстерли оказалась меньше ожидаемой дисперсии подсчета. Конечно, это могло получиться случайно, но, кроме того, не исключена возможность, как было показано в конце гл. 5, что истинная ошибка подсчета несколько меньше, чем биномиальная; об этом вскользь упоминалось в более раннем исследовании (Chayes, 1949, стр. 6 — 7). Биномиальная ошибка вычисляется безотносительно к тому факту, что точки на поверхности шлифа распределены симметрично.

Во всяком случае, дисперсию подсчета нельзя было выделить из двух общих дисперсий и в конце концов эти попытки были оставлены; соответствующие выводы были сделаны без попытки выделить из σ_a — аналитической ошибки — ее составные части, относящиеся к выборочной дисперсии и дисперсии ошибки подсчета. Тем не менее многим читателям может быть интересно дальнейшее исследование σ_a . Величина σ_a содержит в себе две отождествляемые составные части: одна выражает истинное различие между шлифами одного и того же образца, другая представляет собой ошибку подсчета (или другой операции), посредством которого анализируются шлифы. Математически ошибка, входящая в любой отдельный результат, равна

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_\omega^2 + \sigma_c^2},$$

где c — дисперсия подсчета, а ω — истинная внутриобразцовая дисперсия. Для точечного счетчика σ_c почти равна

$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, так что с достаточной степенью надежности мы можем записать:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_w^2}{l} + \frac{p(1-p)}{ln},$$

где σ_a — ошибка среднего значения, построенного по l шлифам, каждый из которых анализировался с протяженностью линии подсчета, равной n . Если σ_w очень мало, большая часть наблюдаемой вариации обусловливается подсчетом, влияние которого быстро падает с увеличением σ_w . Если при $n = 600$, $p = 0,3$ (это приблизительно та обстановка, которая имеет место в большей части рассмотренных здесь случаев) $\sigma_w = 0$, то $\sigma_a = 1,87$, тогда как для $\sigma_w = 3$ σ_a всего лишь 3,54. Конечно, разность $\sigma_a - \sigma_w$ уменьшается с увеличением n , но это уменьшение происходит медленно и само по себе не может быть решающим фактором для увеличения продолжительности подсчета. Например, если взять $n = 1800$ вместо 600 в только что приведенном примере и $\sigma_w = 0$, то $\sigma_a = 1,08$, тогда как для $\sigma_w = 3$ $\sigma_a = 3,27$.

По мере того как n возрастает, чувствительность σ_a к различиям в p стремится уменьшаться, а это в некоторых случаях более выгодно, чем незначительное увеличение в точности. Для $\sigma_w = 3$ при $n = 600$ $\sigma_a = 3,42$ для $p = 0,2$ и 3,60 для $p = 0,4$; однако если $n = 1800$, то $\sigma_a = 3,14$ при $p = 0,2$ и 3,21 при $p = 0,4$. Если существуют действительные различия в p от образца к образцу, как это было бы в том случае, если бы $\sigma_b > 0$, то полезно свести их влияние на σ_a до минимума, особенно когда (как в большинстве дисперсионных анализов) σ_a оценивается по среднему от квадратов, которое содержит данные из каждого образца в выборке. Желательность результата, включающего десятые доли, является достаточным оправданием для протяженности линии подсчета, превышающей 1000. Вероятно, дополнительным оправданием для создания настолько большого избытка, как это практически возможно, служит уменьшающаяся чувствительность σ_a к различиям в p . Очень небольшой выигрыш получается при возрастании подсчета за 2000, если только нет заинтересованности в акессорных минералах.

Как это часто случается в задачах, связанных с измерениями, методика систематического опробования с помо-

щью подсчета точек основана главным образом на практических соображениях. Систематический выбор измеряемой площади интуитивно представляется более привлекательным, чем чисто случайная выборка, но контролирующим фактором является использование пружинных рычагов, давящих на шестерни для фиксации точек. Это устройство автоматически производит двумерную систематическую выборку и именно она не позволяет сделать выборку какой-то другой.

Однако в ряде случаев систематическое опробование до некоторой степени предпочтительнее чисто случайного опробования. Единичный анализ можно рассматривать как опробование совокупности n точек, расположенных через равные промежутки вдоль каждой из k равноотстоящих линий. Таким образом, каждая линия сама является анализом с продолжительностью подсчета n . Дисперсия вдоль линий будет в $\frac{N}{n} = k$ раз больше, чем дисперсия окончательного результата. Аналогично, вдоль какой-то линии дисперсия в пределах интервала между точками (l) будет в $\frac{nl}{l} = n$ раз больше, чем дисперсия для всей линии. Теоретически систематическое опробование является более точным, чем просто случайное опробование, если дисперсия внутри подвыборок больше, чем дисперсия для всей совокупности. Таким образом, если ошибка подсчета не является строго биномиальной, она должна быть не больше биномиальной. Степень преимущества систематического опробования будет почти наверняка меняться с грубостью. Для фиксированного интервала между точками эффективность систематического опробования, вероятно, возрастает с уменьшением СО. Однако даже если за ошибку подсчета брать биномиальную, это мало что добавляет к общей дисперсии при значительной σ_w , так что именно тогда, когда действие σ_w является наиболее сильным, ее труднее всего выделить. За исключением двух относительно больших площадей Уэстерли, в которых общая внутриобразцовая дисперсия ближе к дисперсиям подсчета для 900 точек, чем для 660 фактически использованных точек, ни одна работа из приведенных здесь не дает каких-либо указаний на рост эффективности вследствие систематического опробования или на изменение этого роста в зависимости от изменения СО. В свете всех этих затруднений, может быть, как раз

и хорошо, что план извлечения биномиальной дисперсии ошибки подсчета из каждой наблюденной величины \bar{V}_p не был осуществлен.

6. Размер и стоимость шлифов

Карточки, таблицы и предыдущее обсуждение показывают, что использовать большую измеряемую площадь почти всегда выгодно. В достаточной ли мере компенсирует эта выгода дополнительную стоимость больших шлифов, — будет зависеть как от грубости рассматриваемой породы, так и от типа нужной нам информации. Если нас интересует просто оценка некоторой определенной точности для единичного образца, преимущество измеряемой площади большего размера вряд ли существенно, если образец не очень грубозернист. Например, петрограф, который привык работать на шлифах площадью в $3/4$ квадратного дюйма, найдет, что увеличение измеряемой площади до $1 \frac{1}{2}$ квадратных дюймов сократит число шлифов, которое он должен проанализировать, не более чем в два раза. Такое уменьшение количества шлифов производится довольно редко, и очень часто, особенно в тонкозернистых породах, требуемое число шлифов останется прежним.

Конечно, если необходимо сохранить точность большого числа средних значений образцов, даже незначительное уменьшение требуемого количества шлифов (и анализов) в образце может иметь некоторое значение. Например, для сохранения $\bar{V}_p \leq 1,41$ в породе с СО=35 выбор колебался бы между 4 большими и 7 маленькими шлифами, для сохранения $\bar{V}_p \leq 2,0$ — между 2 и 4 шлифами соответственно и между 2 большими и 3 маленькими шлифами для сохранения $\bar{V}_p \leq 2,45$. Выраженные в процентах, эти сокращения вполне ощутимы; например, тот, кто имел дело хотя бы с несколькими дюжинами образцов и условием $\bar{V}_p \leq 2,0$, мог видеть, что уменьшение числа шлифов на 50 % было экономически выгодно.

Однако реальное значение больших площадей, в том числе и таких, которые часто гораздо больше, чем нужно для компенсации^{*} возросшей стоимости этих площадей, видно из табл. 14—16. В этих таблицах анализы размещены таким образом, чтобы сохранить как фиксированную точность значений образцов, так и максимальную точность

среднего значения. Например, если $\sigma_a \leq 2,0$, $\sigma_b = 0,5$, а измеряемые площади и СО такие, что малые площади должны быть сделаны в 4-х, а большие — в 2-х экземплярах, то, согласно табл. 15, потребуется всего на $(4)(0,29) - (2)(0,53)$ или на 8% меньше больших шлифов, но их можно распределить в числе образцов, на $\frac{(0,53) - (0,29)}{0,29}$ или на 82% превышающем число образцов, требующихся для малых шлифов. С возрастанием σ_b увеличение количества образцов, требуемого для обработки, уменьшается, но зато возрастает экономия от общего количества шлифов и анализов. Полное сравнение приведено в табл. 17. Округленные до целых чисел крайние члены таблицы показывают, что большие шлифы можно брать для работы при увеличении почти вдвое количества образцов, если σ_b мало, или при уменьшении почти наполовину общего количества требуемых шлифов, если σ_b велико. Для промежуточных значений σ_b имеет место как уменьшение числа анализов, так и увеличение количества образцов.

Таблица 17

Преимущество измеряемой площади в шлифе размером в $1 \frac{1}{2}$ квадратных дюйма над площадью в $3/4$ квадратных дюйма для СО = 35,5,
 $\sigma_a = 2,0$ и $0,5 \leq \sigma_b \leq 5,0$

σ_b	Процент уменьшения общего числа шлифов	Процент увеличения числа анализируемых образцов
0,50	8	83
1,00	25	50
1,41	33	34
2,00	40	21
2,45	43	14
3,00	45	10
4,00	47	6
5,00	48	3

Любой оптовый потребитель или изготовитель шлифов может самостоятельно составить таблицы, которые покажут, будет ли данное уменьшение общего числа шлифов компенсировать возрастание стоимости вследствие более значительных размеров шлифов. Денежная (или лабораторная) стоимость анализирующих шлифов будет очень сильно

колебаться от аналитика к аналитику, ее величина часто будет зависеть от индивидуальных особенностей аналитика. Связать денежную величину с увеличением числа анализируемых шлифов можно только в специальной работе, но с научной точки зрения уже одно это увеличение может оцениваться гораздо выше, чем возрастающая стоимость шлифов. Очень часто такую зависимость можно изобразить в виде различия между успехом и неудачей, т. е. между вполне убедительными результатами и результатами, которые просто вводят в заблуждение или, возможно, даже неправильны.

7. Влияние грубости зерна на детальность петрографического исследования

Аналитическая ошибка возрастает гораздо быстрее с уменьшением числа СО, чем с уменьшением измеряемой площади. Фиг. 11—13 должны помочь процессу количественного исследования сравнительно грубозернистых пород. Здесь значение измеряемой площади столь очевидно, что не требует комментариев. Петрологу, имеющему дело с грубозернистыми породами, в большинстве случаев целесообразно при измерении пользоваться такими большими площадями, какие только возможно пересечь в одном положении его интегриционного столика или точечного счетчика. Больше того, если он вынужден использовать прибор, который допускает пересечение в одном положении только малой площади, он, вероятно, должен вообще воздержаться от анализа грубозернистых пород.

Но даже при использовании больших шлифов очевидно, что для грубозернистых пород потребуется гораздо больше повторений, чем для тонкозернистых. Например, в отношении получения количественно-минералогических составов для сравнения с нормативами или другими вычислительными параметрами фиг. 11 показывает, что, скажем, работа с гранитом Кэрнменеллис была бы в четыре раза дороже, чем с гранитом Уэстерли. Если учесть дорогоизнну химических анализов, этот дополнительный расход определенно оправдан, и плох тот петрограф, который будет жалеть несколько дополнительных часов на работу с микроскопом в таком важном деле.

Однако если нас интересует просто получение хорошего среднего из большого числа отдельных результатов с известной надежностью, четырехкратное увеличение числа

анализов вызовет гораздо более значительную трата времени. Фиг. 12 показывает, что если для Уэстерли будет достаточно одного шлифа из каждого образца, то для каждого образца из Кэрнменеллиса потребуется уже четыре шлифа. Предположим теперь, что мы отобрали по 20 образцов из каждого гранита. Фактически нам не нужно среднее по гранитам Кэрнменеллис, подсчитанное по 80 анализам, если наше среднее по гранитам из Уэстерли основывается только на 20 анализах. Если среднее по гранитам Кэрнменеллис столь же надежно, как и по гранитам Уэстерли, то на основании табл. 15 мы должны использовать $0,29 \times 20 = 6$ образцов из гранитов Кэрнменеллис, если σ_b в обоих массивах равна 0,5; 8 образцов при $\sigma_b = 1,0$; 10 при $\sigma_b = 1,41$; 14 при $\sigma_b = 2,45$ и так далее.

Таким образом, если мы предполагаем, что в пределах каждого массива имеет место очень малая вариация, — что, по-видимому, справедливо для большинства небольших гранитных плутонов, дополнительная стоимость работ с гранитами Кэрнменеллис очень незначительна, а отмеченное уменьшение числа исследуемых образцов вряд ли будет иметь существенное значение. Однако заметим, что расходы очень быстро растут с увеличением σ_b ; для $\sigma_b = 2,0$ уже необходимо обрабатывать 13 образцов из Кэрнменеллиса, так что получение среднего значения для гранитов Кэрнменеллис обходится в $\frac{52}{20}$, или в 2,6 раза дороже, чем для гранитов Уэстерли. Кроме того, в этом случае мы будем иметь всего лишь $\frac{13}{20}$, или 65%, сведений о вариации от точки к точке.

Это крайний случай и выбран он специально. На современной стадии развития реальное значение фиг. 12 служит как бы указанием, что такие контрасты в эффективности не будут возникать при изучении громадного большинства изверженных горных пород. Условие сохранения аналитической ошибки, не превышающей 2,0, потребует обработки не более трех и не менее двух больших шлифов из образца в восьми из двенадцати пород, для которых определялось СО. Методические трудности этого рода будут, конечно, встречаться по отношению к более грубозернистым породам. Геолог, который не может игнорировать породу просто потому, что она грубозерниста, должен знать, как поступать в этом случае.

Очевидно, что подобная трата денег и сил уменьшается при исследовании более тонкозернистых пород. Мы узнаем

столько же о грубозернистом граните, сколько о тонко-зернистом, лишь при многократном возрастании затраченного количества денег и времени, необходимых для закупки и анализа шлифов. Получение сравниваемых по точности данных вариации от точки к точке часто чрезвычайно дорого. Однако для сохранения точности групповых средних в случае грубозернистых пород обычно достаточно умеренно высокой стоимости. Ее следует считать минимальной. Петрографы, вынужденные производить количественно-минералогический анализ на грубозернистых породах, вероятно, найдут, что следует довольствоваться планированием простых выборок, с тем чтобы главный интерес сосредоточивать на групповых средних.

Глава 11

ЭФФЕКТ ХОЛМСА И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ ГРУБОСТИ В КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

1. Два предела грубоści в количественно-минералогическом анализе

В трех последних главах мы имели дело с верхним пределом грубоści в количественно-минералогическом анализе. При прочих равных условиях эффективность измеряемой площади как выборки из образца падает, т. е. аналитическая ошибка *увеличивается*, если уменьшается число сечений зерен, которое содержится в этой площади. Теоретически количественно-минералогический анализ не становится невозможным благодаря этому уменьшению, лишь сильно возрастает его погрешность. Далее, допустимый размер аналитической ошибки будет меняться в зависимости от схемы анализа и цели эксперимента; аналогично, грубоść, заключающаяся в этом пределе, будет меняться от породы к породе, и, как мы видели, сама является объектом эксперимента. Конечно, в этой формулировке задачи нет ничего нового, за исключением того, что мы подчеркиваем ее чисто практический характер.

По-видимому, не так просто представить себе, что существует также нижний предел грубоści — *тонкозернистость*, ниже которого метод нельзя использовать. Этот нижний предел затрагивает нечто более существенное, чем простую потерю эффективности. Источником затруднений является систематическая ошибка, или смещенностъ. Она обусловлена тем, что при достаточно малых диаметрах зерен и площадях сечений невозможно ограничивать наблюдения единственной *поверхностью* или площадью. В некоторых случаях, включающих и тот, который мы будем детально рассматривать, кажущаяся эффективность, если судить по разбросу результатов эксперимента, может сохраняться длительное время даже после того, как размеры зерен настолько уменьшились, что результаты анализа перестали соответствовать действительному составу измеряемой площади.

Когда отдельные зерна достаточно малы, работающий с микроскопом автоматически стремится «смотреть в шлиф», а не на поверхность шлифа. Он может обнаружить, что ему не установить с достаточной точностью пересечения контактов зерен с поверхностью шлифа. В этом случае нельзя подчеркивать, что количественно-минералогический анализ — это анализ площади. Мы изучаем шлифы конечной толщины в проходящем свете исключительно как средство идентификации минералов. Если же мы не можем выразить наши измерения в виде отношений площадей, выводы гл. I ошибочны и доопытный путь демонстрации состоятельности этого процесса становится невозможным. Рискуя насмешить, мы можем напомнить читателю, что в этом отношении состоятельность означает гораздо больше, чем согласованность результатов; скорее она имеет в виду процесс, повторение которого приводит к результатам, средние значения которых сходятся, по вероятности, к истинному составу измеряемой площади. По крайней мере без этой уверенности в результате анализа шлифа мы не имеем права заранее предполагать, что данные различных аналитиков согласуются друг с другом, и, что более непонятно, не имеем очевидной причины предпочитать работу аналитиков, данные которых согласуются, работе тех аналитиков, данные которых не согласуются.

Сравнивая два предела грубости, мы можем сказать, что верхний предел выражается через отношение площади сечения зерна к измеряемой площади, а нижний предел — через отношение диаметра (или радиуса) зерна к толщине шлифа. Когда первое отношение делается чересчур большим, метод становится слишком непроизводительным и, следовательно, непрактичным; когда второе отношение становится чересчур мало, метод делается непригодным, так как результаты могут содержать большие систематические отклонения, которые трудно оценить или даже обнаружить чисто экспериментальным путем.

2. Нижний предел грубости для непрозрачных сфер в прозрачной среде

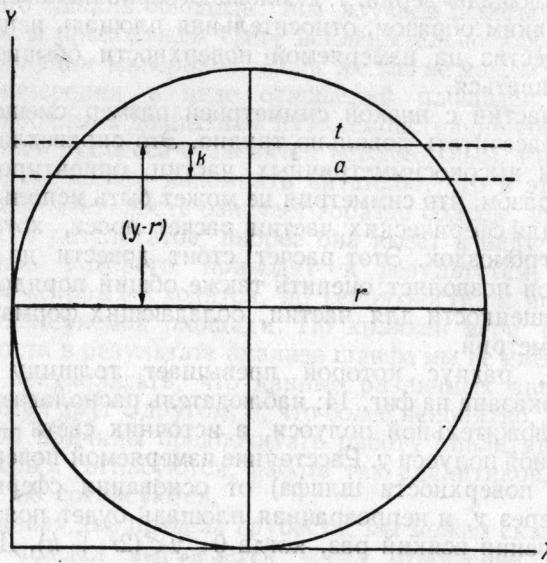
Прямая геометрическая оценка этого второго предела возможна для непрозрачных зерен некоторой определенной формы, находящихся в прозрачной среде. Холмс уже давно отметил (Holmes, 1927), что при измерениях площадей,

сделанных в проходящем свете, количество непрозрачного материала систематически переоценивается. Кажущаяся площадь какого-то непрозрачного зерна или агрегата всегда будет площадью максимального сечения этого зерна или агрегата в шлифе, тогда как измерение должно давать «истинную площадь» зерна, т. е. площадь зерна на поверхности шлифа. Таким образом, относительная площадь непрозрачного вещества на измеряемой поверхности обычно будет переоцениваться.

Для частиц с низкой симметрией размер смещенности Холмса рассчитать довольно трудно. Это справедливо также и для высокосимметричных частиц, ориентированных таким образом, что симметрия не может быть использована. Однако для сферических частиц расчет прост, хотя и несколько громоздок. Этот расчет стоит довести до конца, так как он позволяет оценить также общий порядок величины смещенности для частиц, обладающих формами низших симметрий.

Сфера, радиус которой превышает толщину шлифа ($r > k$), показана на фиг. 14; наблюдатель располагается где-то на положительной полуоси, а источник света — на отрицательной полуоси y . Расстояние измеряемой поверхности (верхней поверхности шлифа) от основания сферы обозначено через y , и непрозрачная площадь будет появляться в поле зрения всякий раз, когда $0 < y < (2r + k)$. Для $y < r$ кажущаяся непрозрачная площадь будет тождественна истинной. В области $r < y < (r + k)$ кажущаяся площадь будет постоянна и равна площади экваториального сечения, а истинная площадь, которую наблюдатель был бы должен измерять, будет постепенно уменьшаться, когда $y \rightarrow (r + k)$. В области $(r + k) < y < 2r$ как истинная, так и кажущаяся площади постепенно уменьшаются, когда $y \rightarrow 2r$, но уменьшение происходит с различными скоростями, так что кажущаяся площадь всегда остается больше истинной. Наконец, в области $2r < y < (2r + k)$ истинная площадь равна нулю — сфера не пересекает измеряемую поверхность шлифа, — но кажущаяся площадь продолжает существовать до тех пор, пока y не будет равен $(2r + k)$. При этом значении y исчезает последняя точка. Таким образом, для произвольных значений y в области $0 < y < (2r + k)$ кажущаяся площадь не меньше истинной, а в области $r < y < (2r + k)$ всегда больше. Оценки площади кругового сечения обязательно будут смешены в положительную сторону, если эти оценки произ-

ведены в проходящем свете, и нам остается оценить размер этой смещенности. Чтобы это сделать, мы сначала находим ожидаемые или средние значения для истинной и кажущейся непрозрачных площадей. Искомая смещенность равна разности между этими двумя площадями.



Фиг. 14. Непрозрачная сфера радиуса r , рассеченная шлифом толщиной k .

Источник света находится ниже сферы (т. е. на некотором отрицательном значении y), а наблюдатель расположен над сферой. Радиус истинного кругового сечения на измеряемой площади равен t , радиус кажущегося кругового сечения равен a .

Нас интересуют только те сечения, в которых кажущаяся площадь больше нуля; это будет справедливо для всех сечений, находящихся в области $0 < y < (2r + k)$ и только для таких сечений. Поэтому мы считаем, что превышения измеряемой площади над основанием сферы выбираются чисто случайно, так что вероятность того, что некоторое фиксированное превышение y равно или меньше какой-то произвольной величины h , равна

$$P_r \{0 < y \leq h\} = \frac{h}{2r + k} \quad 0 < h < (2r + k).$$

Накопленная частота соответственно равна

$$F(h) = \frac{1}{2r + k} \int_0^h dy, \quad (11.1)$$

причем она, очевидно, равна 1 при $h = (2r + k)$. В нашем случае площадь A_t какого-то определенного кругового сечения измеряемой площади будет равна

$$A_t \begin{cases} \pi [r^2 - (r - y)^2] & \text{в области } 0 < y < r, \\ \pi [r^2 - (y - r)^2] & \text{в области } r < y < 2r, \\ 0 & \text{в области } 2r < y < (2r + k). \end{cases} \quad (11.2)$$

Но $r^2 - (r - y)^2 = r^2 - (y - r)^2 = 2ry - y^2$, и мы можем объединить первые две строки соотношения (11.2):

$$A_t = \pi (2ry - y^2) \quad \text{в области } 0 < y < 2r \quad (11.2a)$$

Из соотношений (11.1) и (11.2) мы сразу видим, что математическое ожидание или суммарное среднее для истинной площади равно

$$E(A_t) = \frac{\pi}{2r + k} \int_0^{2r} (2ry - y^2) dy = \frac{4\pi r^3}{3(2r + k)}. \quad (11.3)$$

Для кажущейся площади (A_a) обстановка несколько сложнее. Ниже экваториальной плоскости кажущаяся площадь совпадает с истинной площадью, т. е.

$$A_a = \pi (2ry - y^2) \quad \text{в области } 0 < y < r. \quad (11.4a)$$

Если $r < y < (r + k)$, кажущаяся площадь равна площади экваториального сечения, или

$$A_a = \pi r^2 \quad \text{в области } r < y < (r + k). \quad (11.4b)$$

Наконец, для $y > (r + k)$ мы имеем

$$A_a = \pi [r^2 - (y - r - k)^2] = \pi [2r(y - k) - (y - k)^2]. \quad (11.4c)$$

Из уравнений (11.1) и (11.4) для ожидаемой величины кажущейся площади находим

$$E(A_a) = \frac{\pi}{2r+k} \int_0^{r+k} (2ry - y^2) dy + \frac{\pi r^2}{2r+k} \int_r^{r+k} dy + \\ + \frac{\pi}{2r+k} \int_{r+k}^{2r+k} [2r(y-k) - (y-k)^2] dy = \\ = \frac{4\pi r^3}{3(2r+k)} + \frac{\pi r^2 k}{2r+k}. \quad (11.5)$$

Смещенность, или ожидаемый избыток кажущейся площади над истинной, получаем вычитанием уравнения (11.3) из уравнения (11.5):

$$B = E(A_a) - E(A_t) = \frac{\pi r^2 k}{2r+k}. \quad (11.6)$$

Кажущаяся площадь будет в $\frac{E(A_a)}{E(A_t)}$ раз больше истинной, так что в особом случае, при котором следовало бы ввести поправку, соответствующей операцией было бы умножение наблюденной величины на

$$C = \frac{E(A_t)}{E(A_a)} = \frac{4r}{4r+3k}. \quad (11.7)$$

Хотя рисунок иллюстрирует только случай $r > k$, читатель может легко убедиться, что приведенное доказательство справедливо также для $r < k$. Область $0 < y < (2r+k)$ содержит в себе только те (и все те) сечения, для которых $A_a > 0$ как при $r > k$, так и при $r < k$; уравнение (11.1), таким образом, выполняется в обоих случаях. Подобным же образом уравнения (11.2) и (11.4) определяют площади сечений через элементы сферы как при $r > k$, так и при $r < k$. Следовательно, уравнения (11.3) и (11.5) также сохраняются в обоих этих случаях. Мы, таким образом, в состоянии вычислить соответствующий поправочный член C для любого отношения сферического радиуса к толщине шлифа. В табл. 18 приведены значения C для выбранных значений $\frac{r}{k}$ в пределах $200 \geq \frac{r}{k} \geq 0,033$. Вторая колонка таблицы содержит r в миллиметрах для $k = 0,03$ мм — стандартной толщины, которая используется почти во всех петрографических лабораториях. Значения третьей колонки таблицы, строго говоря,

применимы только к непрозрачным сферическим частицам в прозрачной массе, но они дают хорошее представление об общей природе эффекта для частиц менее симметричной формы.

Таблица 18

Поправочные коэффициенты для площадей сечений непрозрачных сфер в прозрачной среде, измеряемых в проходящем свете

Отношение радиуса сферы r к толщине шлифа k	Радиусы сфер для стандартной толщины ($k = 0,033$ мм)	«Поправочный» коэффициент $(C = \frac{4r}{4r+3k})$
200	6,0	0,9963
100	3,0	0,9926
50	1,5	0,9852
33	1,0	0,9780
20	0,6	0,9639
10	0,3	0,9302
5	0,15	0,8696
4	0,12	0,8421
3	0,09	0,8002
2	0,06	0,7273
1	0,03	0,5714
0,50	0,015	0,4000
0,33	0,010	0,3077
0,25	0,0075	0,2500
0,20	0,0060	0,2105
0,10	0,0030	0,1176
0,067	0,0020	0,0816
0,033	0,0010	0,0426

3. Возможное практическое значение нижнего предела грубости

Величинам, приведенным в табл. 18, можно придавать различные значения в зависимости от того, что именно интересует исследователя. Например, во многих изверженных породах непрозрачные составляющие присутствуют только в виде аксессориев, если они вообще присутствуют, и в результатах анализа они выражаются десятыми долями процента. Например, при условии, что непрозрачные частицы действительно имеют сферическую форму, значение, равное 0,1% для непрозрачных аксессориев, не было бы

высоким как поддающееся описанию количество, если бы сферические радиусы непрозрачных частиц не были меньше 0,02 мм в шлифе толщиной 0,03 мм. Точно так же результат анализа, равный 0,5% для непрозрачных аксессуаров, не был бы высоким, если бы сферические радиусы непрозрачных частиц не были меньше 0,2 мм. Для 1% критическим является сферический радиус в 0,4 мм. В подобных работах эффект Холмса вряд ли имеет большое значение.

Однако, если количество непрозрачного материала велико или непрозрачные частицы чрезвычайно малы, обстановка резко меняется. Например, оценки магнетитовой пыли в плагиоклазе легко могли бы быть абсурдно высокими. Если бы радиусы были равны 0,015 мм — величина не слишком малая, количество пыли было бы переоценено в 2,5 раза. Для радиусов 0,01 мм «наблюденное» количество было бы выше в 3,25 раза, а для радиусов 0,003 мм, т. е. $\frac{1}{10}$ толщины шлифа, истинная площадь непрозрачного минерала была бы несколько меньше $\frac{1}{8}$ кажущейся площади.

Подобные затруднения возникают при анализе тонкозернистых осадочных пород, таких, как углистые сланцы, которые содержат значительное количество тонкодисперсного органического вещества или другого непрозрачного материала. При таких условиях микроскопические анализы могут быть, по сути, состоятельными и, следовательно, пригодными для решения многих геологических задач лишь при условии, что образцы, которые сравниваются друг с другом, не различаются существенно по размеру зерна. Однако полученные результаты немного сообщают о количественно-минералогических составах исходных веществ. В общем они будут переоценивать количества непрозрачного материала; однако даже для надежного прогноза размера переоценки потребуется больше информации, чем обычно располагают.

Эллиот (Elliott, 1952) показал, что смещенность типа эффекта Холмса может возникнуть при сравнении минералов, сильно отличающихся по показателю преломления. Хотя рельеф, строго говоря, является свойством контактов между зернами, мы обычно отождествляем его с минералом, показатель преломления которого сильно отличается от показателя преломления включающей его массы. Соответственно если мы не в состоянии определить места пересечений

контактов зерен с какой-то определенной измеряемой поверхностью, обычно с верхней поверхностью шлифа, наши измерения могут быть подвержены эффекту Холмса, даже если все включенные составные части прозрачны.

Даже когда различий в показателях преломления недостаточно для образования резкого рельефа, невозможность локализовать измеряемую поверхность иногда приводит к большим постоянным ошибкам. Например, значительная часть многочисленных перититовых альбитовых вростков может располагаться ниже поверхности шлифа, однако все они будут показывать соответствующую полоску Бекке на границе с окружающей средой. Различия в двупреломлении или погасании не будут уничтожены тем фактом, что многие из этих вростков располагаются частично или полностью ниже измеряемой поверхности.

Если бы некоторые прозрачные минералы не стремились к образованию оболочек вокруг непрозрачных зерен, эффект Холмса мог бы быть уничтожен измерением количества непрозрачного минерала в отраженном, а не в проходящем свете. Эта операция могла бы почти полностью уничтожить смещенность, касающуюся непрозрачных минералов. Однако если бы некоторые прозрачные минералы систематически образовывали оболочки вокруг непрозрачных частиц, количество этого материала относительно других прозрачных минералов было бы завышено при измерениях в проходящем свете. Обычный случай, когда ни один из минералов не является непрозрачным, представляется как более общим, так и значительно более трудным для оценки. Необходимо хорошее экспериментальное изучение этой проблемы; без такого изучения мы, вероятно, не узнаем точно, насколько эта проблема серьезна. Трудность состоит в том, что каждый аналитик либо не хочет, либо не может ограничить свои наблюдения поверхностью шлифа. Если неудача просто объясняется выбором, то средство очевидно. Однако если порода настолько тонкозерниста, что отдельные частицы имеют размер дефектов на поверхности (или глубины фокусного расстояния микроскопа), достигается нижний предел количественно-минералогического анализа. Даже если бы в последнем случае мы знали соответствующие поправки, они, вероятно, были бы такими большими, что многие из нас вряд ли стали бы их использовать. В заключение мы можем отметить, что рассмотренная величина не является абсолютным размером зерна, скорее

это отношение размера зерна к толщине шлифа, от которого зависит величина смещенности. Например, по данным табл. 18 можно вычислить, что частицы со сферическим радиусом 0,06 мм будут переоценены на 37,5% в шлифах стандартной толщины. Однако если бы толщину шлифа можно было уменьшить в три раза, переоценка была бы уменьшена до величины, несколько меньшей 15%. Если бы было возможно приготовить шлифы в $\frac{1}{5}$ стандартной толщины, переоценка была бы уже только 7,5%.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 1

Статистические ссылки

Математическая статистика получила значительное развитие со времени первой мировой войны; после второй мировой войны появилось большое количество превосходных работ по этому предмету. Хотя уровень математической подготовки читателя, по-видимому, постоянно растет, все еще можно встретить правильное интуитивное понимание более практических аспектов статистики без хорошего предварительного знания основ математики. В таких случаях необходимо внимательное изучение одной из работ, подобных работам Снедекора или Диксона и Месси, в которых обширный, хорошо продуманный арифметический расчет и аргументация заменяют математику. Человеку, обучаемому или обучающемуся, в этот период полезно сотрудничать с профессиональным статистиком, близко знакомым с особенностями его предмета, и часто даже использовать его помощь при планировании своих экспериментов.

К сожалению, большинство геологов не находятся в таких условиях. Нашей задачей является создание творческой обстановки, которая могла бы в конечном итоге привести к такому типу сотрудничества, который сейчас имеет место, как само собой разумеющееся, в агрономии, животноводстве или в промышленном контроле. Большинство из нас должно считаться с тем, что мы только иногда можем непосредственно советоваться со статистиками, а специалист по статистике, как правило, очень мало знаком с геологией и практически ею не интересуется. Нельзя надеяться, что он обнаружит и исправит неточный замысел или неправильное планирование с таким мастерством и профессиональностью, которые характеризуют его деятельность в более близких для него областях.

Короче говоря, мы должны выполнять большую часть нашей работы сами, и нельзя надеяться, что экспериментальные схемы, разработанные в других областях знаний, будут обязательно целиком применимы в геологии. Мне кажется, что при любых обстоятельствах понимание основ статистики, хотя бы и неполное, было бы более полезно, чем способность легко производить вычисления, или хорошее знание терминологии, которая создана для данной экспериментальной схемы. Поэтому в ссылках, которые приводятся ниже, основной упор делается на элементарные работы, предназначенные для ознакомления читателя с математическими аспектами предмета. В книге Крамера (H. Cramér, *The Elements of Probability Theory and Some of Its Applications* (Wiley, 1955)) разбирается каждая сторона затронутой темы. Дополнительные ссылки можно обычно найти в одной или нескольких из следующих работ:

Anderson R. L., Bancroft G. A. (1952). Statistical Theory in Research, New York, McGraw-Hill Book Co.

Cochran W. G. (1953). Sampling Techniques. New York, John Wiley & Sons.

Mood A. McF. (1950). Introduction to the Theory of Statistics. New York, McGraw-Hill Book Co.

Snedecor G. W. (1946). Statistical Methods, 4th ed. Ames, Ia, Iowa State College Press.

Wilks S. S. (1952). Elementary Statistical Analysis. Princeton, N. J., Princeton University Press.

Из этих работ приводятся только фамилии авторов. Иногда было полезно, а временами и необходимо ссылаться на журнальную литературу.

Глава 1

Геометрическая основа количественно-минералогического анализа

Правила подсчета математического ожидания. Крамер (Cramer), гл. 5, стр. 57—89. См. также работу Уилкса (Wilks), гл. 4, стр. 58—97, особенно стр. 95—97.

Смещенность и состоятельность оценок. Крамер, стр. 191—194; Муд (Mood), стр. 148—150; Андерсон и Бэнкрофт (Anderson, Bancroft), стр. 93.

Центральная предельная теорема. Крамер, стр. 114—116; Муд, стр. 136—139.

Случайные числа. Крамер, стр. 256. См. также работу Снедекора (Snedecor), стр. 9—14, которая содержит таблицу случайных чисел Типпетта и инструкцию по ее использованию. Большая десятизначная таблица случайных чисел приведена в таблице Государственной экономической комиссии для 105 000 чисел (Interstate Commerce Commission Table of 105 000 Random Decimal Digits, Statement No. 4914, File 261—A—1, 1949).

Выбор чисто случайный, стратиграфически-случайный и систематический. Снедекор, стр. 1—2. Превосходное общее описание методов опробования см. у Кохрана, Мостеллера и Тьюки (W. G. Cochran, F. Mosteller, J. W. Tukey. Principles of sampling, J. Am. Stat. Assoc., 49, 13—35, 1954).

Глава 2

Количественно-минералогический анализ слоистых пород

Эта глава главным образом посвящена планиметрии и тригонометрии. Стандартное отклонение, упомянутое при разборе фиг. 8, применяется для равномерного или прямоугольного распределения в промежутке $-1,5 \leq x \leq 1,5$. (Среднее такого распределения, очевид-

но, равно 0; следовательно, слоистость не создает систематической ошибки.) О расчете второго момента прямоугольного распределения см. работу Крамера, стр. 74—75 и пример 2 на стр. 75. Стандартное отклонение равно корню квадратному из второго центрального момента. Об опробовании смотри также ссылки для гл. 1.

Глава 4

Воспроизводимость анализов шлифов: I

В качестве модели ошибки подсчета взято биномиальное распределение, для вычисления среднего и дисперсии которого смотри работу Крамера, стр. 90.

Ошибка среднего, построенного по n наблюдениям. Крамер, стр. 79. Ошибка различия является частным случаем правила сложения стандартных отклонений, о котором см. работу Крамера (стр. 77—79), но подробного разбора не приводится ни в одной из работ, на которые мы здесь ссылаемся. В более ранних работах эта ошибка часто используется как отправная точка для рассмотрения ошибок наблюдения; применение дубликатов в практической работе хорошо описано Снедекором, стр. 72—73, где свойства различий, случайно сгруппированных по два, устанавливаются без доказательств.

Глава 5

Воспроизводимость анализов шлифов: II

Дисперсионный анализ. Крамер, стр. 246—253. См. также работу Снедекора, гл. 10 и 11, который, по-видимому, написал наилучшее введение в этот предмет для читателя-нематематика. Методика МТИ, которая представляет собой операцию, названную «рандомизированными блоками», разбирается у Снедекора в начале второй части, стр. 253—255. Читатель, который не имеет предварительного представления о предмете, перед тем, как начать изучение гл. 11, обязательно должен познакомиться с гл. 10 работы Снедекора.

Оценка дисперсий отдельного аналитика на основании парных различий. Методика, разобранная во второй половине гл. 5, почти наверняка не нова, но автор не нашел опубликованной работы, в которой бы она описывалась. Общий метод был предложен Камероном (Cameron, 1951).

Глава 6

Особенности определения и классификации

Действие неоднородности подгрупповых дисперсий. См. работу Кохрана (Cochran, 1953). Некоторые замечания для случая, когда предпосылки для дисперсионного анализа не удовлетворены, см. в журнале *Biometrics*, 3, 22—38, 1947, особенно стр. 28—32.

Глава 8

Действие размера зерна и площади измерения на аналитическую ошибку

Доверительные интервалы для выборочных стандартных отклонений. Крамер, стр. 203—204.

Линейный регрессионный анализ и метод наименьших квадратов. Крамер, стр. 133—136; Уилкс, стр. 236—273; Снедекор, стр. 103—137.

Глава 9

Мера грубости в гранитной структуре

Дисперсионный анализ. См. ссылки к гл. 5.
Регрессионный анализ. См. ссылки к гл. 8.

Глава 10

Контроль аналитической ошибки повторением

Конструкция таблиц повторений, изображенных на фиг. 11—13, основывается целиком на определении стандартной ошибки или ошибки среднего, о которых см. работу Крамера, стр. 79.

Рассмотрение сравнительной точности систематического и случайного опробования. См. работу Кохрана, стр. 162—164.

Последняя часть главы по существу представляет собой описание методики, изложенной Камероном (1951). Использование компонентов дисперсии для составления таблиц, необходимых при опробовании тюков шерсти, разобрано в журнале *Biometrics*, 7, 83—96; 1951.

Глава 11

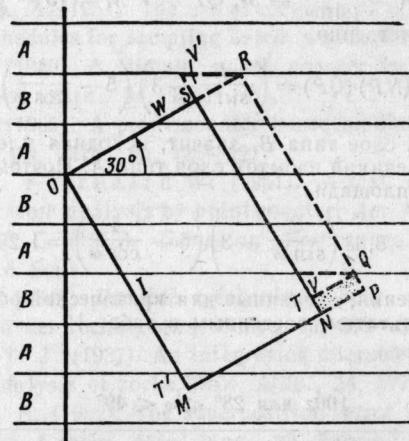
Эффект Холмса и нижний предел грубости в количественно-минералогическом анализе

Вычисление математических ожиданий. См. ссылки к гл. 1.
Состоительность и смещенность оценок. См. ссылки к гл. 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Простой метод расчета z

Геометрическое построение, посредством которого выделяется избыточная площадь, всегда определяет место этого избытка в соответствующем типе слоя в пределах исходной измеряемой площади.



Фиг. 15.

Это удобно для графических целей и для значений w , при которых начало координат и один из остальных углов измеряемого прямоугольника лежат на контактах слоев; расчет z несложен.

Однако косвенная операция гораздо проще, особенно для промежуточных величин w . Она заключается в увеличении измеряемой площади таким образом, чтобы она стала соответствовать правилу (б) или (в). Прибавленная часть будет в этом случае содержать избыток, точно равный по величине и противоположный по знаку первоначальному избытку. Если l и w — целые кратные мощности слоя t и одно из них больше, чем нечетное, но меньше, чем четное целое,

кратное проектируемой мощности слоя, площадь избытка в этом случае будет выражаться следующим уравнением:

$$e = \left(\left| \frac{k_1}{\sin \omega} - w \right| \right) \left(\left| \frac{k_2}{\cos \omega} - i \right| \right),$$

где $k_1 < w$, $k_2 < l$, а k_1 и k_2 — целые числа.

Операция «дополнения» измеряемой площади изображена на фиг. 15, причем $w = 3$, $l = 5$, а $\omega = 30^\circ$. Исходная измеряемая площадь $OMNS$ не образует целого пересечения. Она дополняется до $OMPR$, а так как OR является четным целым, кратным проектируемой мощности слоя, увеличенная фигура удовлетворяет правилу (б). Так как $OMNS$ содержит избыток одного слоя над другим, а $OMPR$ не содержит такого избытка, прибавленная полоса $SNPR$ должна содержать избыток, в точности равный избытку $OMNS$, но противоположный по знаку. В результате построения площадь треугольника V будет равна площади треугольника V^1 , так что избытком в прибавленной части является просто $NPQT$.

Но $NP = SR = \frac{2}{(\sin \omega)} - 3$, $QP = T'M = (5 - \frac{4}{\cos \omega})$ и избыток равен соответственно

$$e = (NP)(QP) = \left(\frac{2}{\sin \omega} - 3 \right) \left(5 - \frac{4}{\cos \omega} \right).$$

Избыток лежит в слое типа B , значит, исходная площадь должна содержать равновеликий избыток слоя типа A . Поэтому для исходной измеряемой площади

$$100z = 3,33 \left(\frac{2}{\sin \omega} - 3 \right) \left(5 - \frac{4}{\cos \omega} \right) = 1,252.$$

Подобные вычисления, сделанные для критической области фиг. 8, приводят к результатам, сведенным в табл. 19.

Таблица 19
100z для $28^\circ < \omega < 49^\circ$

ω	100z	ω	100z	ω	100z
28,11 ¹	1,845	36,00	0,076	42,00	-0,014
29,00	1,599	36,87 ¹	Нет избытка	43,00	-0,105
30,00	1,252	37,00	-0,009	44,00	-0,226
31,00	0,981	38,00	-0,063	45,00	-0,375
32,00	0,730	39,00 ¹	Нет избытка	46,00	-0,555
33,00	0,516	40,00	0,082	47,00	-0,764
34,00	0,336	41,00	0,048	48,00	-1,005
35,00	0,190	41,81 ¹	Нет избытка	49,00	-1,278
			49,17 ¹		-1,328

¹ Целые пересечения на фиг. 8 показаны точками.

Литература

- Bankier J. D. (1955). The theory of thin-section analysis. A discussion, *J. Geol.*, **63**, 287—288.
- Barringer A. R. (1953). The preparation of polished sections of ores, etc., *Trans. Inst. Min. Met.*, **63**, 21—41.
- Cameron J. M. (1951). The use of components of variance in preparing schedules for sampling baled wood, *Biometrics*, **7**, 83—96.
- Chayes F. (1949). A simple point counter for thin-section analysis, *Am. Min.*, **34**, 1—11.
- Chayes F. (1955). A point counter based on the Leitz mechanical stage, *Am. Min.*, **40**, 126—127.
- Chayes F., Fairbairn W. (1951). A test of the precision of thin-section analysis by point counter, *Am. Min.*, **36**, 704—712.
- Cochran W. G. (1953). *Sampling Techniques*, New York, John Wiley & Sons.
- Delesse A. (1848). Procédé mécanique pour déterminer la composition des roches, *Ann. mines*, **13**, 379—388.
- Dollar A. T. J. (1937). An integrating micrometer for the geometrical analysis of rocks, *Min. Mag.*, **24**, 577—594.
- Elliott R. B. (1952). The superposition error in the micrometric analysis of rocks, *Min. Mag.*, **29**, 833—837.
- Fairbairn H. W. et al. (1951). A cooperative investigation of precision and accuracy in chemical, spectrochemical and modal analysis of silicate rocks, U. S. Geol. Survey Bull., 980 (see especially part 5, 59—68).
- Ford I. H. (1954). A microscope stage and integrating point counter for micrometric analysis of rocks, *J. Sci. Instr.*, **31**, 164—165.
- Glagolev A. A. (1933). On the geometrical methods of quantitative mineralogical analysis of rocks, *Trans. Inst. Econ. Min.*, Moscow, **59**.
- Glagolev A. A. (1934). Quantitative analysis with the microscope ... by the point method, *Eng. Min. J.*, **135**, 399.

- Griffiths J. G., Rosenfeld M. A. (1954). Operator variation in experimental research, *J. Geol.*, **62**, 74—91.
- Holmes A. H. (1927). *Petrographic Methods and Calculations*, London, Murby and Co. (see 317).
- Hunt W. F. (1924). An improved Wentworth recording micrometer, *Am. Min.*, **9**, 190—193.
- Hurlbut C. (1939). An electric counter for thin-section analysis, *Am. J. Sci.*, **237**, 253—261.
- Johannsen A. (1919). A planimeter method for the determination of the percentage composition of rocks, *J. Geol.*, **27**, 276—285.
- Joly J. (1903). The petrological examination of paving sets, *Proc. Roy. Dublin Soc.*, **10**, 62—92 (see especially 83—84).
- Julien A. A. (1902). Genesis of the amphibole schists and serpentines of Manhattan Island, N. Y., *Bull. Geol. Soc. Amer.*, **14**, 460—468.
- Larsen E. S., Miller F. S. (1935). The Rosiwal method and the modal determination of rocks, *Am. Min.*, **20**, 260—273.
- Lincoln F., Rietz H. L. (1913). The determination of the relative volume of the components of rocks by mensuration methods, *Econ. Geol.*, **8**, 120—139.
- Richardson W. A. (1923). A micrometric study of the St. Austell granite. *Quart. J. Geol. Soc., London*, **79**, 546—576.
- Rosenfeld M. (1954). A modification of the Chayes point counter stage, *Am. Min.*, **39**, 834—836.
- Rosiwal A. (1898). Ueber geometrische Gesteinsanalysen usw. *Verh. der k. k. Geolog. Reichsanstalt Wien*, 143—175.
- Shand S. J. (1916). A recording micrometer for rock analysis, *J. Geol.*, **24**, 394—403.
- Sollas W. J. (1889). Contributions to a knowledge of the granites of Leinster, *Trans. Roy. Irish Acad., Dublin*, **29**, 427—512 (see especially, 471—472).
- Sorby H. C. (1856). On slaty cleavage as exhibited in the Devonian limestones of Devonshire, *Phil. Mag.*, **11**, 20—37.
- Wentworth C. J. (1923). An improved recording micrometer for rock analysis, *J. Geol.*, **31**, 228—232.

Указатель

- Аналитическая ошибка, компоненты 93, 104, 133
 — определение 90
 — действие измеряемой площади 104, 136, 137
 — значение в экспериментальной работе 95
 — обратно пропорциональная частоты зерен 93
 — не меньше ошибки подсчета 93
 — плохо оцененная из малых выборок 100—102
- Барре, гранит 111
 Баррингтон 61
 Бредфорд, гранит 111
 Бэнки 32
- Воспроизводимость, ошибка 90—96; (см. также Ошибка подсчета)
 Вудбери, гранит 111
- Гаррисон 36
 Глаголев 60, 61
 Гранит Барре 111
 — Бредфорд 111, 114, 116
 — Вудбери 111
 — Кэрнменеллис 99, 104, 112, 114
- Избыток, вычисление 46, 47, 153, 154
 — действие размера измеряемой площади 49
 Измеряемая площадь, действие на аналитическую ошибку 104

— — влияние на планы опробования 134, 135

Количественно-минералогический анализ 15—18, 71, 140

— состав 15

Кэрнменеллис, гранит 99, 102, 104, 112, 136, 137

Линейный интегратор Доллара 60
— — Уэнворт — Ханта 35, 60
64

— — Форда 61, 62

— — Хелбата 64

— — Шенда 58, 59

Линии подсчета Розивала 57—59

Линкольн 57

Математическое ожидание отношения ординат 27

— отрезка пересечения 20—22

— — ошибки подсчета 66

— — различия 25

— — суммы ординат 23

— — числа точек 20, 21, 66
Маунт-Дезерт, гранит 99, 104, 111, 112

Милфорд, гранит 111

«Неизбыточные» положения, действие размера измеряемой площади на частоту 49, 50

— — действие переменной мощности слоя на частоту и локализацию 50, 51

— — локализация в 3×5 -слоистом прямоугольнике 41—44

— — правила локализации 39, 40

Опробование, эффективность различных типов 52

— просто-случайное 28—30, 52, 133

— систематическое 28—30, 52, 133

— стратиграфически-случайное 52

Ориентировка 35

— — определение типов 36

Оценка состоятельная 24, 25

— несмещенная 24, 25
Ошибка аналитическая, см. Аналитическая ошибка

— воспроизводимости 90—96; (см. также Ошибка подсчета).

— компоненты 126

— подсчета, возможно меньшая, чем биномиальная 78, 131, 133

— — вычисление из парных различий 69, 75

— — опыт МТИ 71—79
— — — одного оператора 68—70

Ошибка подсчета, наблюденная по сравнению с ожидаемой 74

— — теоретическая 66—69

— сохранение при помощи таблиц опробования 126

— среднего 118

Ошибка определения 82—84

Паunal, гранит 110

Пересечение, интервал 51, 52
— местоположение, рандомизация 51, 52

— направление 23, 24
— нормаль к пересечению 23, 24

Планиметр Джогансена 56, 63

Площадь-объем или Делесса соотношение 30—33, 59, 64

Поправочный коэффициент, исключающий смещенность Холмса для сферических частиц 145

Призма Бэнки 33
Протяженность линии подсчета 131

Размер зерна 93, 94

— — действие на аналитическую ошибку 95—97

Регистрирующий микрометр Шенда 58, 59, 63

Рейтц 57

Ричардсон 95, 96

Розенфельд 111

Розиваль 19, 31, 55—59, 95

Сен-Пьер, гранит 111

Смещенность 25—28, 32, 33, 139—142

СО числа и аналитическая ошибка 112—116

— — — измеряемая площадь 113

— — — обоснование 107, 108, 130

СО числа, ограничения 130

— — определение 108—110

— — экспериментальное полу-

чение 109—112

Соллас 57

Солсбери, гранит 111

Сорби 56

Состоятельность 25—28, 32, 33,

53, 89, 140

Стандарты точности, для сравнения с химически анализированным образцом 120

— — — детального петрографического исследования 122

— — — рекогносировки 123

Точечный счетчик Барринджера 61

— — Глаголева 60, 61

— — Свифта 62

— — — Форда 61

— — — Чейза 61

Уэнворт 59, 60

Уэстэри, гранит 98, 104, 110—112, 114, 116, 131, 133, 136, 137

Ферберн 70, 98

Фицвильям, гранит 111

Форд 61

Холмс 140, 141, 146, 147

Чейз 61, 64, 131

Шенд 19, 55, 58—61, 63

Шоу 36

Элбертон, гранит 111

Эллиот 146

Эффективность шлифов 89

О Г Л А В Л Е Н И Е

От редактора	6
Предисловие автора к русскому переводу	7
Предисловие автора	11
Введение	15
Глава 1. Геометрическая основа количественно-минералогического анализа	19
Глава 2. Количественно-минералогический анализ слоистых пород	34
Глава 3. Методы измерения относительных площадей в шлифах	53
Глава 4. I. Воспроизводимость анализов шлифов	61
Глава 5. II. Воспроизводимость анализов шлифов	69
Глава 6. Особенности определения и классификации	78
Глава 7. Рабочее определение аналитической ошибки в количественно-минералогическом анализе	86
Глава 8. Влияние размера зерна и измеряемой площади на аналитическую ошибку	92
Глава 9. Мера грубости гранитной структуры	103
Глава 10. Контроль аналитической ошибки повторением	113
Глава 11. Эффект Холмса и нижний предел грубости в количественно-минералогическом анализе	135
Приложение 1	145
Приложение 2	149
Литература	151
Указатель	153

Ф. Ч е й з

КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШЛИФОВ ПОД МИКРОСКОПОМ

Редактор *M. Яковенко*

Художник *H. Сапожников*

Художественный редактор *L. I. Подмаркова*

Технический редактор *B. H. Беклемишева*

Корректор *K. M. Голосова*

Сдано в производство 4/I 1963 г.

Подписано к печати 22/IV 1963 г.

Бумага 84×108^{1/2}=2,4 бум. л.

8 печ. л., Уч.-изд. л. 7,4. Изд. № 5/1115

Цена 52 коп. Зак. 953

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1-й Рижский пер., 2

1-я типография Трансжелдориздата МПС Москва, Б. Переяславская, 46