

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ

В.А. Луповка, Т.К. Луповка

**ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ
ГЕОДЕЗИИ С ЭЛЕМЕНТАМИ
ФОТОГРАММЕТРИИ**

Часть 1

Издание второе

Учебное пособие
для студентов IV-V курсов
специальности «Аэрофотогеодезия»

Москва 2002 г.

Авторы: Луповка В.А., Луповка Т.К.

Учебное пособие «Основы космической геодезии с элементами фотограмметрии», часть 1. - Издание второе, исправленное. - М.: МИИГАиК, 2002, 80 с.

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы четырех разделов курса «Космическая геодезия с основами космической фотограмметрии»: системы отсчета в космической геодезии, методы наблюдения ИСЗ, основы теории движения ИСЗ, методы космической геодезии, принципы использования спутниковых навигационных систем для решения задач геодезии и геодинамики. По этим разделам составлено семь заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов IV-V курсов специальности аэрофотогеодезия и написано в соответствии с утвержденной программой курса «Космическая геодезия с основами космической фотограмметрии».

Учебное пособие рекомендовано кафедрой астрономии и космической геодезии, утверждено к изданию методической комиссией геодезического факультета.

Рис. 7, табл. 11, библиогр. 13 назв.

Научный редактор:

Рецензенты:

проф., д.т.н. Ю.В. Плахов

доц., к.т.н. В.И. Крылов,

с.и.с., к.т.н. М.И. Щербаков.

Введение

Данное учебное пособие «Основы космической геодезии с элементами фотограмметрии», часть 1, предназначено для студентов IV-V курсов специальности аэрофотогеодезия очной формы обучения.

Учебным планом этой специальности на изучение курса «Космическая геодезия с основами космической фотограмметрии» в 8-ом и 9-ом семестрах отводится 80 часов. Из них 40 часов — лекции и 40 часов — лабораторные занятия.

В соответствии с действующей программой в 8-ом и 9-ом семестрах изучаются разделы: системы отсчета в космической геодезии, методы наблюдения ИСЗ, основы теории движения ИСЗ, методы космической геодезии, принципы использования спутниковых навигационных систем для решения задач геодезии и геодинамики.

Цель учебного пособия — помочь студентам АФГС в практическом освоении методов решения некоторых задач космической геодезии.

Учебное пособие включает семь заданий. Перед выполнением очередного задания студентам необходимо изучить соответствующий раздел курса, пользуясь рекомендованной литературой и конспектами лекций. Перед каждым заданием дано описание основных положений, на которые следует обратить внимание. Все задания снабжены подробными описаниями алгоритмов вычислений, поэтому непосредственно для проведения расчетов не требуется других источников.

I. Основные системы отсчета, применяемые в космической геодезии

Под системами отсчета понимают совокупность систем координат и систем измерения времени. Различают формальное теоретическое описание системы отсчета и ее конкретную реализацию.

По реализации система отсчета представляет собой совокупность материальных тел, фиксирующих некоторую систему координат, служащую для указания положений любых других тел в пространстве, вместе с совокупностью связанных с телами произвольно идущих часов, служащих для указания времени.

Системы координат классифицируют по следующим признакам:

1) положению начала (топоцентрические, геоцентрические, гелиоцентрические, барицентрические, селеноцентрические и т. п.);

2) виду координатной сетки (прямоугольные, косоугольные, криволинейные — полярные, сферические, эллипсоидальные, цилиндрические, гиперболические и т. п.);

3) выбору положительного направления отсчета углов и взаимному расположению координатных осей (правые и левые);

4) расположению главной плоскости и направлению оси аппликат (горизонтные, экваториальные, эклиптические, орбитальные и т. п.);

5) расположению отсчетной плоскости и направлению оси абсцисс (равноденственные, гринвичские и т. п.);

6) эпохе — моменту времени, на который зафиксирована ориентировка главной и отсчетной плоскостей и соответствующих им координатных осей, (мгновенные, истинные, средние, на эпоху каталога, на стандартную эпоху — экватор и равноденствие 2000 г., на эпоху 1900—1905 гг. и т. п.);

7) наименованию конкретной реализации системы координат (СК-42, СГС-85, ЕСК-90, WGS-84, ITRF97, FK5, ICRF91 и т. п.).

В связи с громоздкостью формул для преобразования криволинейных координат (особенно при переносе начала системы координат) в космической геодезии наибольшее распространение получили прямоугольные координаты.

По основному назначению и методам реализации выделяют две группы систем координат: небесные и земные.

В качестве небесных систем координат наибольшее употребление в космической геодезии получили равноденственные экваториальные системы координат. Главной плоскостью такой системы является плоскость экватора, а отсчетной — плоскость колюра равноденствий. Начало, чаще всего, расположено в центре масс Земли, но используются также топоцентрические, спутникоцентрические и другие системы, оси которых параллельны осям геоцентрической системы. Различают *истинную* и *среднюю* равноденственные системы координат. В истинной — ось аппликат \bar{z} направлена вдоль мгновенной оси вращения Земли к истинному небесному полюсу мира; ось абсцисс \bar{x} направлена в истинную точку весеннего равноденствия на момент времени t и лежит в пересечении плоскостей истинного экватора и эклиптики в этот момент; ось ординат \bar{y} дополняет систему до правой.

Лунно-солнечные прецессия и нутация непрерывно изменяют ориентацию плоскости истинного экватора в пространстве и положение истинной точки весеннего равноденствия. Прецессия от планет изменяет ориентацию плоскости эклиптики, что, в свою очередь, вызывает изменение положения истинной точки весны $\bar{\gamma}$. В результате истинная равноденственная система координат медленно вращается вокруг полярной оси эклиптики (прецессия — вековой эффект смещения $\bar{\gamma}$ со скоростью около $50''/\text{год}$) и покачивается (нутация — сумма периодических от 18,6 года до 4-х суток составляющих, наибольшие с амплитудой около $9''$ и $7''$), что приводит к изменению координат космических объектов (в том числе далеких «неподвижных» звезд и квазаров). Экваториальная равноденственная система координат, ориентация которой изменяется только из-за прецессии, называется средней. В этой системе ось аппликат \bar{z} направлена к среднему полюсу мира, т. е. перпендикулярно среднему небесному экватору вдоль средней оси вращения Земли; ось абсцисс \bar{x} направлена в среднюю точку весеннего равноденствия на момент времени t и лежит в пересечении плоскостей среднего экватора и эклиптики в этот момент; ось ординат \bar{y} дополняет систему до правой.

Движение ИСЗ и других небесных тел, а также положение различных космических объектов наиболее удобно изучать в инерциальной системе координат, т. е. в системе, которая либо покоится, либо равномерно прямолинейно движется. Практически такая система реализуется каталогами координат звезд и далеких радиоисточников, положения которых отнесены к некоторой эпохе. В настоящее время наиболее совершенную модель инерциальной системы координат представляют фундаментальная система координат каталога звезд FK5 и практически совпадающая с ней в пределах точности оптических измерений система каталога координат внегалактических радиоисточников ICRF, развиваемая на основе РСДБ. Система координат FK5 — это средняя экваториальная равноденственная геоцентрическая система координат, экватор и равноденствие которой отнесены к стандартной эпохе J2000.0 (2000 г., 1 января, 12^h шкалы земного времени TT). Отметим, что эта система является хотя и хорошим, но все же приближением к инерциальной системе координат.

Положение точек на земной поверхности и вблизи нее удобно задавать в системах координат, жестко связанных с Землей. Чаще всего для этого применяются гринвичские системы координат, в которых в качестве главной плоскости используется плоскость экватора, а в качестве отсчетной — плоскость гринвичского меридиана. Начало обычно расположено в центре масс Земли, но применяются также топоцентрические, спутникоцентрические и другие гринвичские системы, оси которых параллельны осям геоцентрической системы. Различают *мгновенную* и *среднюю* гринвичские системы координат. В первом случае ось аппликата \tilde{Z} направлена вдоль мгновенной оси вращения Земли к мгновенному положению северного полюса; ось абсцисс \tilde{X} направлена в начало отсчета долгот — точку пересечения мгновенного экватора с мгновенным гринвичским меридианом и лежит в пересечении их плоскостей; ось ординат \tilde{Y} дополняет систему до правой, т. е. расположена в плоскости экватора перпендикулярно двум другим осям и направлена к востоку. Во втором случае ось \bar{Z} направлена в Международное условное начало (МУН или в латинской аббревиатуре CIO) — среднее положение северного полюса эпохи 1900—1905 гг., которое зафиксировано номинальными значениями координат станций Международной службы вращения Земли

(МСВЗ или IERS) на эту эпоху; ось абсцисс \bar{X} направлена в начало отсчета долгот — точку пересечения среднего экватора со средним гринвичским меридианом и лежит в пересечении их плоскостей; ось ординат Y лежит в плоскости среднего экватора, дополняя систему до правой.

Применение мгновенных и средних гринвичских координат вызвано непрерывным изменением положения оси вращения в теле Земли. Вследствие этого перемещаются точки ее пересечения с земной поверхностью — полюса Земли, т. е. имеет место движение полюсов. В результате изменяются мгновенные координаты всех других точек земной поверхности (в том числе Гринвича), чтобы этого избежать и вводят среднюю систему координат с фиксированным положением полюсов. Одновременно с введением МУН в 1969 г. было установлено *новое начало отсчета долгот*, которое лежит на экваторе и не зависит от движения полюсов. Его положение также зафиксировано номинальными значениями координат станций IERS. Начальный (гринвичский) меридиан проходит через полюс и начало отсчета долгот на экваторе. Поскольку движение полюсов и начала отсчета долгот в пространстве невозможно наблюдать непосредственно, то определение соответствующих им параметров ориентации Земли относительно небесной системы координат реализуется косвенным образом как результат обработки рядов наблюдений космических объектов (звезд, квазаров, Луны, ИСЗ и др.) на станциях IERS, заменившей в 1987 г. Международную службу движения полюсов (МСДП или IPMS — ранее Международная служба широты — МСП или ILS) и отдел вращения Земли Международного бюро времени (МВВ или ВИН). При таком подходе получаемое из наблюдений положение мгновенного полюса вращения Земли фактически совпадает с проекцией на земную поверхность истинного небесного полюса мира. Описанную среднюю гринвичскую систему координат с полюсом в МУН называют «общепринятой (стандартной) земной системой координат» или просто «общеземной системой координат». Мгновенная гринвичская система координат используется как промежуточное звено при переходе от небесных координат к общеземным. Ось \bar{Z} мгновенной гринвичской системы координат на момент времени t совпадает с осью \bar{z} истинной геоцентрической равноденственной системы координат на тот же момент ($\bar{Z} \equiv \bar{z}$), а угол между осями \bar{x} и \bar{X} этих систем (т. е. угол поворота вок-

руг оси аппликат) численно равен истинному гринвичскому звездному времени S в момент t . В равноденственной системе координат Земля вращается вокруг оси ($\vec{z} \equiv \vec{Z}$), а гринвичская система участвует в суточном вращении Земли вокруг оси ($\vec{Z} \equiv \vec{z}$).

Положение точек земной поверхности часто задается криволинейными координатами — астрономическими или геодезическими широтой, долготой и высотой. Астрономические координаты определяются направлением отвесной линии в данной точке и связаны с геоидом — уровенной поверхностью реального потенциала силы тяжести Земли, т. е. они имеют конкретный физический смысл. Геодезические координаты связаны с референц-эллипсоидом и нормалью к его поверхности, проходящей через данную точку. Они отнесены к некоторой условной математической поверхности — эллипсоиду вращения, удобного для обработки результатов измерений на определенной территории, т. е. это геометрические величины. Астрономические и геодезические координаты данной точки связаны между собой через отклонения отвеса и высоту геоида (в теории Молоденского — квазигеоида) над референц-эллипсоидом. Вместе с эллипсоидальными геодезическими координатами часто используют прямоугольные геодезические координаты. Начало такой системы координат совмещено с центром референц-эллипсоида, ось аппликат направлена по малой оси вращения эллипсоида, ось абсцисс — в точку пересечения экватора эллипсоида с начальным меридианом и лежит в пересечении их плоскостей; ось ординат дополняет систему до правой. Эллипсоид, связанный с общеземной системой координат, размеры и форма которого аппроксимируют Землю в целом, называется общеземным эллипсоидом. Центр общеземного эллипсоида должен быть совмещен с центром масс Земли. Как общеземная, так и референцные системы реализованы каталогами координат закрепленных пунктов земной поверхности. В силу особенностей реализации и возникших в ее процессе ошибок начала этих систем располагаются в разных точках, а координатные оси несколько различаются по направлению. Кроме этого, имеются небольшие расхождения в масштабах длин.

В космической геодезии сейчас используются следующие *системы измерения времени*:

— системы звездного и среднего солнечного (всемирного) времени, основанные на явлении суточного вращения Земли, в которых 1 с реализуется как 1/86400 доля соответствующих суток;

— система атомного времени (АТ), формирование шкалы которой основано на физическом явлении квантовых переходов между энергетическими уровнями атомов и молекул. 1 с (секунда SI) определяется как заданное целое число 9192631770 колебаний атома цезия ^{133}Cs (т. е. смены направлений векторов магнитного момента внешнего валентного электрона и ядра из параллельного в антипараллельное);

— шкала земного времени (ТТ), практически реализуемая наземными эталонами времени и частоты. 1 с определяется как секунда SI на уровне нормального геоида (сферической уровенной поверхности с потенциалом $U_0 = 62,636860 \text{ км}^2/\text{с}^2$);

— шкалы координатного времени, отнесенные к барицентрам соответствующих систем небесных тел или центрам масс отдельных объектов, в частности, это шкалы геоцентрического координатного времени (TCG — отличается от ТТ постоянным дрейфом) и барицентрического координатного времени (TCB). Данные шкалы времени определяются как аргументы динамических теорий движения тел Солнечной системы и реализуются на основе системы атомного времени и численных эфемерид Солнца, Луны и планет.

Звездное время и всемирное время являются равноправными системами измерения времени. Одна система однозначно определяется другой и применение какой-либо из них зависит только от соображений удобства при решении конкретной задачи. Они связаны друг с другом формальными соотношениями сферической астрономии:

$$S = S_0 + UT + \mu \cdot UT,$$

$$UT = (S - S_0) - \nu \cdot (S - S_0),$$

где S_0 — гринвичское звездное время в полночь по всемирному;

μ — коэффициент перехода от всемирного времени к звездному;

ν — коэффициент перехода от звездного времени к всемирному.

Эти шкалы находят применение при астрономических и навигационных определениях, изучении вариаций угловой скорости суточного вращения Земли и ее ориентации в пространстве. Наиболее важной из шкал всемирного времени для изучения вращения Земли является UT1 — всемирное время среднего гринвичского меридиана, получаемое из обработки рядов наблюдений космических объектов на станциях IERS, поскольку оно включает в себя неравномерности вращения Земли.

Атомное время используется во всех случаях, когда требуется высокая относительная точность при измерении промежутков времени. Международная шкала атомного времени (TAI) формируется на основе сопоставления показаний множества атомных стандартов и различных национальных шкал атомного времени. Для согласования шкал всемирного времени UT1 и атомного времени TAI введена шкала всемирного координированного (согласованного) времени UTC, в которой за 1 с принята атомная секунда SI, а нуль-пункт связан с UT1 так, чтобы разность $\Delta UT = UT1 - UTC$ не превосходила $\pm 0,9$ с. Корректировка UTC в случае необходимости производится ступеньчато путем добавления или пропуска целой секунды, т. е. разность одновременных показаний часов в системе UTC и TAI может быть только целым числом секунд $TAI = UTC + N^s$. Например, с 1 июня 1997 г. по 31 декабря 1998 г. было принято $N^s = 30^s$. Разность шкал всемирного времени UTC и UT1, а также их связь со шкалой атомного времени TA, определяется IERS, Международным бюро времени (BIPM), а также независимо Институтом метрологии времени и пространства Госстандарта Российской Федерации. Соответствующие поправки публикуются в бюллетенях и отчетах упомянутых организаций и доступны по радиоканалам.

Динамические шкалы времени применяются в тех случаях, когда играют роль физические особенности течения времени в связи с эффектами общей теории относительности (ОТО), т. е. в астрономии, небесной механике и при решении задач обработки наблюдений ИСЗ. В соответствии с рекомендациями Международного астрономического союза (МАС) шкала времени TT рассматривается как аргумент для вычисления видимых топоцентрических эфемерид, шкала времени TCG — как аргумент для геоцентрических эфемерид, а шкала TCB — как аргумент

дифференциальных уравнений всех гравитационных теорий движения тел Солнечной системы и соответствующих барицентрических эфемерид. Шкала земного времени (ТТ) используется при регистрации астрономических наблюдений, выполняемых с поверхности Земли, и для наземных метрологических исследований. Динамические шкалы связаны с приборно реализуемой шкалой ТАИ стандартизированными МАС аналитическими соотношениями:

$$ТТ = ТАИ + 32^s,184,$$

где $32^s,184$ — *точное* значение разности нуль-пунктов старой (до начала 1977 г.) и новой (с 1977 г.) международных шкал атомного времени;

$$ТСГ = ТТ + 6,9693 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta T,$$

$$ТСВ = ТСГ + 1,480813 \cdot 10^{-8} \cdot \Delta T + 0,14 \text{ периодических членов Мойера},$$

$$\Delta T = (JD_{ТТ} - JD_{1977, \text{январь } 1, 0 \text{ ТАИ}}) \cdot 86400^s.$$

Для облегчения хронологического счета суток на больших интервалах времени в космической геодезии используется система сплошного счета суток — система юлианских дат, введенная в XVI веке Ж. Скалигером. За начальную эпоху принят средний гринвичский полдень 1 января 4713 г. до н. э. (-4712 г. в астрономическом исчислении). В юлианской системе дата обозначается JD и означает число средних солнечных суток, прошедших от начальной эпохи до рассматриваемого момента. Юлианская дата любого момента состоит из целочисленного номера соответствующего юлианского дня и дробной части, равной доле суток, протекшей от последнего полудня до рассматриваемого момента. Например, $JD_{1977, \text{январь } 1, 0 \text{ ТАИ}} = 2443144,5$.

Задание № 1.

Приведение наблюдаемых координат ИСЗ на стандартную эпоху

Постановка задачи

Со станции слежения за ИСЗ, геодезические координаты которой известны, в момент времени UTC с помощью лазерного дальномера измерены расстояния ρ'_i до ИСЗ, а из обработки наблюдений ИСЗ на фоне звезд получены топоцентрические направления α'_i, δ'_i на спутник (см. задание № 2). По этим данным необходимо определить геоцентрические координаты ИСЗ ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) в средней экваториальной равноденственной системе координат стандартной эпохи J2000.0.

Исходные данные

Условные геодезические координаты станций слежения в референцной Системе координат 1942 г. (СК-42):

I. Звенигород	II. Новосибирск	III. Симферополь
$B = 55^{\circ}42'43'', 510$	$B = 55^{\circ}00'48'', 110$	$B = 44^{\circ}57'18'', 490$
$L = 2^{\text{h}}27^{\text{m}}03^{\text{s}}, 867$	$L = 5^{\text{h}}32^{\text{m}}21^{\text{s}}, 333$	$L = 2^{\text{h}}16^{\text{m}}15^{\text{s}}, 867$
$H = 237, 529 \text{ м}$	$H = 208, 378 \text{ м}$	$H = 253, 755 \text{ м}$

Элементы ориентирования СК-42 в ЕСК-90:

$$\begin{aligned}\Delta X &= +27,0 \text{ м} & \omega_x &= +0'', 10 & \Delta m &= +0,25 \cdot 10^{-6}. \\ \Delta Y &= -143,0 \text{ м} & \omega_y &= -0'', 34 \\ \Delta Z &= -83,0 \text{ м} & \omega_z &= -0'', 65\end{aligned}$$

Параметры эллипсоида Красовского:

$$\begin{aligned}\text{большая полуось } a &= 6378245,0 \text{ м,} \\ \text{сжатие } f &= 1/298,3.\end{aligned}$$

**Результаты наблюдений ИСЗ «Ресурс-О1» № 2
на станциях слежения:**

I. Звенигород.

Набл. №	Дата (д. м. г.)	UTC (h m s)	ρ'_s (м)	α'_s (h m s)	δ'_s (° ' ")
1	01.08.1991	19 38 04,566	744309,37	18 46 19,01	21 01 46,50
2	04.08.1991	18 44 56,898	869067,53	00 06 02,46	56 58 31,11
3	07.08.1991	19 25 51,057	681421,84	16 38 52,94	44 19 57,06
4	08.08.1991	19 39 19,305	856346,22	16 15 24,57	23 37 01,68
5	11.08.1991	18 46 11,637	796175,96	07 16 05,35	84 03 32,30
6	12.08.1991	18 59 39,885	723210,20	14 24 36,49	69 05 21,41
7	16.08.1991	18 18 12,534	673747,65	21 10 05,69	57 00 27,69
8	18.08.1991	18 45 09,030	757719,62	17 28 28,04	23 26 10,59
9	24.08.1991	18 34 14,037	1038434,83	12 08 40,51	51 35 40,69
10	25.08.1991	18 45 54,354	1046342,14	16 06 22,81	13 33 17,98

II. Новосибирск.

Набл. №	Дата (д. м. г.)	UTC (h m s)	ρ'_s (м)	α'_s (h m s)	δ'_s (° ' ")
1	05.08.1991	15 44 38,013	792252,49	23 16 02,85	57 59 31,54
2	09.08.1991	16 40 18,936	985018,76	14 05 48,54	38 14 27,59
3	14.08.1991	16 12 19,833	857248,64	16 06 32,49	24 48 08,33
4	15.08.1991	16 25 48,081	1116423,36	16 00 34,81	11 18 52,95
5	17.08.1991	15 19 12,165	820345,76	07 26 23,72	82 23 42,00
6	19.08.1991	15 46 08,661	798117,96	14 51 37,83	45 42 16,75
7	25.08.1991	15 33 25,737	958123,64	13 51 08,87	42 24 45,91
8	26.08.1991	15 46 53,985	1129907,24	14 29 32,86	27 22 01,93
9	30.08.1991	15 05 26,634	806436,73	16 05 57,64	29 42 32,57
10	31.08.1991	15 20 42,813	1142701,72	13 15 14,20	38 59 01,84

III. Симферополь.

Набл. №	Дата (д. м. г.)	UTC (h m s)	ρ' (м)	α'_s (h m s)	δ'_s (° ' ")
1	07.08.1991	19 22 15,195	779467,67	20 32 45,89	13 33 42,47
2	08.08.1991	19 37 31,374	680536,12	16 48 07,64	60 28 42,77
3	09.08.1991	19 50 59,622	796954,96	15 53 52,64	32 51 28,80
4	13.08.1991	19 09 32,271	659008,45	19 22 53,26	25 29 56,30
5	15.08.1991	19 38 16,698	975684,04	14 52 05,09	32 47 51,01
6	17.08.1991	18 29 52,851	844736,07	23 16 47,83	55 58 15,80
7	26.08.1991	18 57 34,671	991558,54	15 39 33,61	18 35 37,80
8	29.08.1991	18 02 39,072	653966,84	19 51 43,15	30 33 58,76
9	30.08.1991	18 17 55,251	822242,34	14 22 08,40	62 33 39,66
10	31.08.1991	18 31 23,499	932912,06	14 45 48,65	38 02 50,74

Выписка из бюллетеня «Всемирное время и координаты полюса»

Дата: (0 ^h UTC) 1991	UT1-UTC (s)	x_p (")	y_p (")	Дата: (0 ^h UTC) 1991	UT1-UTC (s)	x_p (")	y_p (")
Авг. 01	+0,1854	+0,091	+0,546	Авг. 16	+0,1634	+0,142	+0,528
02	+0,1839	+0,095	+0,545	17	+0,1622	+0,145	+0,526
03	+0,1824	+0,099	+0,544	18	+0,1611	+0,148	+0,525
04	+0,1811	+0,102	+0,543	19	+0,1602	+0,151	+0,523
05	+0,1799	+0,106	+0,543	20	+0,1592	+0,154	+0,521
06	+0,1788	+0,110	+0,542	21	+0,1582	+0,157	+0,520
07	+0,1776	+0,113	+0,541	22	+0,1570	+0,159	+0,518
08	+0,1766	+0,117	+0,539	23	+0,1557	+0,162	+0,516
09	+0,1752	+0,120	+0,538	24	+0,1542	+0,165	+0,514
10	+0,1736	+0,124	+0,537	25	+0,1524	+0,168	+0,512
11	+0,1718	+0,127	+0,536	26	+0,1505	+0,170	+0,510
12	+0,1699	+0,130	+0,534	27	+0,1485	+0,173	+0,508
13	+0,1680	+0,133	+0,533	28	+0,1464	+0,176	+0,506
14	+0,1663	+0,136	+0,531	29	+0,1444	+0,178	+0,504
15	+0,1647	+0,139	+0,530	30	+0,1425	+0,181	+0,502
				31	+0,1407	+0,184	+0,500

Алгоритм вычислений

1. Переход от шкалы всемирного координированного времени UTC к шкале всемирного времени UT1

$$UT1 = UTC + \Delta UTC,$$

где $\Delta UTC = (UT1 - UTC)$ --- поправка за разность шкал всемирного времени UTC и UT1, выбираемая из Бюллетеня всемирного времени или принимаемая по радио.

2. Вычисление юлианской даты эпохи наблюдений $JD(t)$

$$JD(t) = 1721013,5 + 367 \cdot Y - \text{int} \left[7 \cdot \frac{Y + \text{int} \left(\frac{M+9}{12} \right)}{4} \right] + \text{int} \left(\frac{275 \cdot M}{9} \right) + D + UT1^d,$$

где Y — номер года (например, 1991),

M — номер месяца в году,

D — номер дня в месяце,

$UT1^d$ — всемирное время по шкале UT1, выраженное в долях суток,

$\text{int}()$ — функция выделения целой части аргумента.

3. Вычисление матрицы прецессии P

$$P = R_3(-z_A) \cdot R_2(\theta_A) \cdot R_3(-\zeta_A).$$

R_1, R_2, R_3 — матрицы вращения вокруг соответствующих координатных осей x, y, z в положительном направлении (т. е. в правой системе — против часовой стрелки). Изменение знака аргумента автоматически приводит к смене направления вращения. Для некоторого произвольного угла ω матрицы R_1, R_2, R_3 имеют вид:

$$R_1(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}, \quad R_2(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix},$$

$$R_3(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прецессионные параметры Ньюкома-Андуайе (ζ_A , θ_A , z_A), определяющие положение среднего равноденствия и экватора эпохи наблюдений, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\zeta_A &= 2306'' \cdot 2181 \cdot T + 0'' \cdot 30188 \cdot T^2 + 0'' \cdot 017998 \cdot T^3, \\ \theta_A &= 2004'' \cdot 3109 \cdot T - 0'' \cdot 42665 \cdot T^2 - 0'' \cdot 041883 \cdot T^3, \\ z_A &= 2306'' \cdot 2181 \cdot T + 1'' \cdot 09468 \cdot T^2 + 0'' \cdot 018203 \cdot T^3,\end{aligned}$$

где T — время, отсчитываемое в юлианских столетиях по 36525 суток в системе всемирного времени UT1 от стандартной эпохи J2000.0, совпадающей с юлианской датой JD2451545,0, до эпохи наблюдений JD(t)

$$T = \frac{JD(t) - 2451545,0}{36525}.$$

4. Вычисление матрицы нутации N

$$N = R_1(-\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon - d\varepsilon) \cdot R_3(-\Delta\psi - d\psi) \cdot R_1(\varepsilon_0),$$

где $\Delta\psi$ — долгопериодическая часть нутации по долготе;
 $d\psi$ — короткопериодическая часть нутации по долготе;
 $\Delta\varepsilon$ — долгопериодическая часть нутации наклона;
 $d\varepsilon$ — короткопериодическая часть нутации наклона;
 ε_0 — средний наклон эклиптики к экватору.

В соответствии с рекомендациями МАС значения нутации по долготе ($\Delta\psi$, $d\psi$) и нутации наклона ($\Delta\varepsilon$, $d\varepsilon$) вычисляются по Теории нутации 1980, разложения которой по фундаментальным аргументам l , l' , F , D , Ω содержат по 106 членов для каждой составляющей. В учебных целях учтем только несколько наиболее значительных из них:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= -(17'' \cdot 1996 + 0'' \cdot 01742 \cdot T) \cdot \sin\Omega + (0'' \cdot 2062 + 0'' \cdot 00002 \cdot T) \cdot \sin(2\Omega) - \\ &\quad - (1'' \cdot 3187 + 0'' \cdot 00016 \cdot T) \cdot \sin(2F - 2D + 2\Omega) - \\ &\quad - (0'' \cdot 1426 + 0'' \cdot 00034 \cdot T) \cdot \sin(l') + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\psi &= -(0'' \cdot 2274 + 0'' \cdot 00002 \cdot T) \cdot \sin(2F + 2\Omega) + \\ &\quad + (0'' \cdot 0712 + 0'' \cdot 00001 \cdot T) \cdot \sin(l) + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= (9'' \cdot 2025 + 0'' \cdot 00089 \cdot T) \cdot \cos\Omega + (-0'' \cdot 0895 + 0'' \cdot 00005 \cdot T) \cdot \cos(2\Omega) + \\ &\quad + (0'' \cdot 5736 - 0'' \cdot 00031 \cdot T) \cdot \cos(2F - 2D + 2\Omega) + \dots,\end{aligned}$$

$$d\varepsilon = (0'' \cdot 0977 - 0'' \cdot 00005 \cdot T) \cdot \cos(2F + 2\Omega) + \dots$$

Разложения фундаментальных аргументов имеют вид:

$$\begin{aligned}
 l &= 485866''{,}733 + (1325' + 715922''{,}633) \cdot T + 31''{,}310 \cdot T^2 + 0''{,}064 \cdot T^3, \\
 l' &= 1287099''{,}804 + (99' + 1292581''{,}224) \cdot T - 0''{,}577 \cdot T^2 - 0''{,}012 \cdot T^3, \\
 F &= 335778''{,}877 + (1342' + 295263''{,}137) \cdot T - 13''{,}257 \cdot T^2 + 0''{,}011 \cdot T^3, \\
 D &= 1072261''{,}307 + (1236' + 1105601''{,}328) \cdot T - 6''{,}891 \cdot T^2 + 0''{,}019 \cdot T^3, \\
 \Omega &= 450160''{,}280 - (5' + 482890''{,}539) \cdot T + 7''{,}455 \cdot T^2 + 0''{,}008 \cdot T^3,
 \end{aligned}$$

где $l' = 360^\circ = 1296000''$;

l — средняя аномалия Луны;

l' — средняя аномалия Солнца;

F — средний аргумент широты Луны;

D — разность средних долгот Луны и Солнца;

Ω — средняя долгота восходящего узла орбиты Луны.

Средний наклон ϵ_0 эклиптики к экватору задается разложением

$$\epsilon_0 = 84381''{,}448 - 46''{,}8150 \cdot T - 0''{,}00059 \cdot T^2 + 0''{,}001813 \cdot T^3.$$

В приведенных формулах T отсчитывается также как и ранее от стандартной эпохи J2000.0 в юлианских столетиях по 36525 суток.

5. Вычисление матрицы поворота истинной экваториальной равноденственной системы координат вокруг оси аппликат против часовой стрелки на угол, равный истинному звездному времени в Гринвиче

$$S = R_3(\bar{S}),$$

где \bar{S} — истинное гринвичское звездное время в момент наблюдений

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= 6^h 41^m 50^s{,}54841 + 8640184^s{,}812866 \cdot T + 0^s{,}093104 \cdot T^2 - \\
 &\quad - 6^s{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot T^3 + UT1 + \Delta\alpha,
 \end{aligned}$$

$$\Delta\alpha^s = \frac{1}{15} (\Delta\psi'' + d\psi'') \cdot \cos\epsilon \text{ — нутация по прямому восхождению,}$$

$\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon + d\epsilon$ — истинный наклон эклиптики к экватору.

6. Вычисление матрицы учета движения полюсов, обеспечивающей переход от мгновенной гринвичской системы координат к общеземной

$$P = R_2(-x_p) \cdot R_1(-y_p),$$

где x_p, y_p — координаты мгновенного полюса эпохи наблюдений относительно МУН. Поскольку эти величины не превышают $1''$, то при вы-

числении матриц R_1 и R_2 косинусы углов можно принять равными 1, а синусы заменить значениями самих углов, выраженными в радианах:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычисление по топоцентрическим сферическим координатам ИСЗ $(\rho'_s, \alpha'_s, \delta'_s)$ его топоцентрических прямоугольных координат (x'_s, y'_s, z'_s) в истинной экваториальной равноденственной системе координат эпохи наблюдений

$$\begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \\ z'_s \end{pmatrix} = \rho'_s \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha'_s \cdot \cos \delta'_s \\ \sin \alpha'_s \cdot \cos \delta'_s \\ \sin \delta'_s \end{pmatrix}.$$

8. Переход от эллипсоидальных геодезических координат (B, L, H) станции слежения к пространственным прямоугольным координатам (X, Y, Z) с началом в центре эллипсоида Красовского:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L, \\ Y &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L, \\ Z &= (N + H - N \cdot e^2) \cdot \sin B, \end{aligned}$$

где B — геодезическая широта,

L — геодезическая долгота,

H — геодезическая высота,

N — радиус кривизны первого вертикала (внутренний отрезок нормали к поверхности эллипсоида в точке с координатами B, L — от поверхности до пересечения с малой осью эллипсоида)

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 B}},$$

a — большая полуось эллипсоида,

e — первый эксцентриситет эллипсоида, $e^2 = f \cdot (2 - f)$,

f — сжатие эллипсоида.

9. Преобразование координат станции слежения из референционной системы СК-42 в общеземную систему ЕСК-90 по 7-параметрическим формулам Гельмерта:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + (1 + \Delta m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

где $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ — прямоугольные координаты в общеземной системе ЕСК-90;

$(1 + \Delta m)$ — масштабный коэффициент, характеризующий различие линейных масштабов в двух системах координат;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — углы Кардано (в радианах), соответствующие последовательным поворотам вокруг осей абсцисс, ординат и аппликат при переходе от референцной системы координат (X, Y, Z) к общеземной $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$;

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ — координаты центра референц-эллипсоида Красовского в общеземной системе ЕСК-90 (см. рис. 1.1).

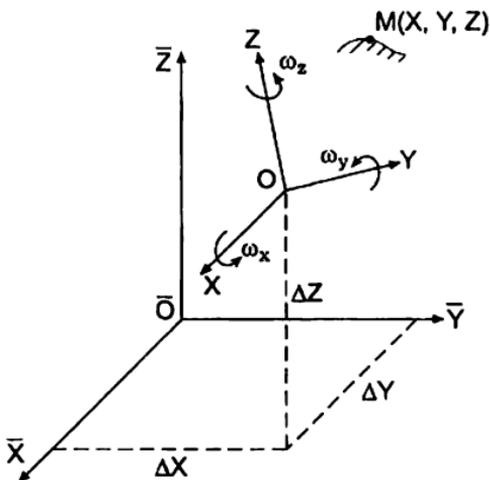


Рис. 1.1

10. Преобразование координат станции слежения из общеземной системы ЕСК-90 в мгновенную гринвичскую систему координат эпохи наблюдений

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \Pi^T \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}.$$

11. Определение истинных экваториальных равноденственных координат станции слежения на эпоху наблюдений

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}.$$

12. Определение геоцентрических координат ИСЗ $(\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$ в истинной экваториальной равноденственной системе координат эпохи наблюдений

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_s \\ \bar{y}_s \\ \bar{z}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \\ z'_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

13. Определение геоцентрических координат ИСЗ (x_s, y_s, z_s) в средней экваториальной равноденственной системе координат эпохи наблюдений

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_s \\ \bar{y}_s \\ \bar{z}_s \end{pmatrix}.$$

14. Определение геоцентрических координат ИСЗ $(\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$ в средней экваториальной равноденственной системе координат стандартной эпохи J2000.0

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_s \\ \bar{y}_s \\ \bar{z}_s \end{pmatrix} = \mathbf{P}^1 \cdot \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}.$$

2. Предварительная обработка результатов наблюдений ИСЗ на фоне звезд

Основные понятия

1. *Опорные звезды* — совокупность опознаваемых на снимке звезд, сферические координаты которых на момент наблюдений можно вычислить, а прямоугольные координаты их изображений надежно измерить. Опорные звезды выбирают либо по всему рабочему полю снимка, либо вблизи изображения ИСЗ. Сферические координаты опорных звезд (прямое восхождение α и склонение δ) вычисляются на основе данных какого-либо рабочего каталога, в котором приведены средние экваториальные координаты звезд в фиксированной системе осей на эпоху T_0 (например, для экватора и равноденствия В1950.0 или J2000.0) и составляющие их собственного движения μ_α и μ_δ . При вычислении видимых мест опорных звезд в координаты, взятые из каталога, вводят поправки за влияние собственного движения, прецессии и нутации, а также годового параллакса, гравитационного отклонения света, абберационного смещения и астрономической рефракции.

2. *Измеренные (приборные) координаты (x, y)* — плоские прямоугольные (или почти прямоугольные) координаты изображений звезд и ИСЗ на снимке, полученные с помощью координатно-измерительной машины (при фотографических наблюдениях) или на компьютере по растровому снимку (при наблюдениях телевизионной или ПЗС-камерой). Предполагается, что измеренные координаты изображений звезд соответствуют геометрическим положениям точек фотографической проекции этих звезд в картинной плоскости съёмочной камеры.

3. *Тангенциальные или идеальные координаты (ξ, η)* (см. рис. 2.1 и 2.2) — прямоугольные координаты в плоскости идеального снимка с заданным оптическим центром, соответствующие фотографической проекции точек небесной сферы. Обычно тангенциальные координаты звезд вычисляются по их сферическим координатам по формулам центральной проекции. За начало тангенциальных координат принимают оптический центр снимка O , а координатные оси выбирают в направлении

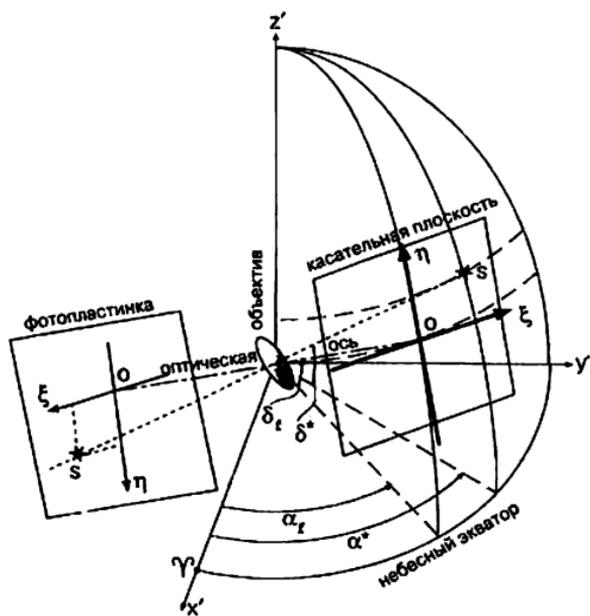


Рис. 2.1

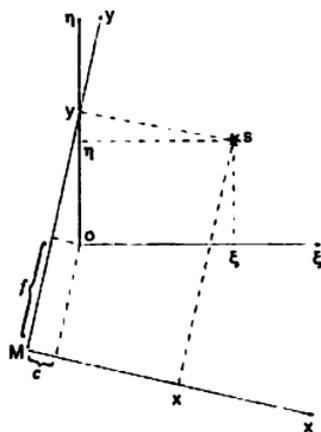


Рис. 2.2

возрастания прямых восхождений и склонений так, что ось η совпадает с изображением небесного меридиана, проходящего через точку O , а ось ξ — ему перпендикулярна. Основное предназначение плоскости тангенциальных координат — служить посредником между небесной сферой и реальным снимком, так как, с одной стороны, установлены точные взаимно однозначные аналитические соотношения между сферическими координатами звезд и их тангенциальными координатами на идеальном снимке; с другой стороны, путем сравнения тангенциальных и непосредственно измеренных координат звезд можно построить аппроксимирующие зависимости между положением соответствующих друг другу точек на реальном и идеальном снимках. Опираясь на полученные зависимости, по измеренным координатам спутника на реальном снимке определяют его тангенциальные координаты на идеальном снимке, а затем вычисляют экваториальные координаты ИСЗ на небесной сфере.

4. *Условия наблюдений и условия редукции.* Под условиями наблюдений понимают те обстоятельства наблюдений, которые нельзя изменить в процессе обработки: отснятая область неба, зенитное расстояние и часовой угол наблюдений, тип объектива и его оптическая система, оптические aberrации, качество изображения, продолжительность экспозиции, тип фоторегистрирующего устройства и т.д. Под условиями редукции понимают наличие надежных данных о положении оптического центра и величине дисторсии, количество опорных звезд и точность их положений на эпоху наблюдений, а также ожидаемую точность измеренных координат опорных звезд и ИСЗ. Ответственным моментом является выбор модели перехода от координат, измеренных на реальном снимке, к тангенциальным координатам. В самом общем случае тангенциальные координаты могут быть представлены в виде рядов по степеням измеренных координат:

$$\xi = x + a \cdot x + b \cdot y + c + k \cdot x^2 + l \cdot xy + m \cdot y^2 + \dots$$

$$\eta = y + d \cdot x + e \cdot y + f + p \cdot x^2 + q \cdot xy + r \cdot y^2 + \dots$$

Коэффициенты этих выражений являются постоянными на протяжении всего снимка и носят название *постоянных пластинки*. Как правило, при выборе такого рода связующей модели исходят из того, что

данные выражения можно представить в виде суммы двух составляющих, первая из которых описывает линейное преобразование вида

$$\xi = x + a \cdot x + b \cdot y + c,$$
$$\eta = y + d \cdot x + e \cdot y + f,$$

а оставшаяся вторая часть разложения — компенсирующий многочлен (обычно не выше третьей степени), который учитывает все нелинейные эффекты преобразования измеренных координат в идеальные, зависящие от условий наблюдений и условий редукции.

Первая линейная часть модели преобразования измеренных координат в тангенциальные известна под названиями «метод шести постоянных» или «метод Тернера». Она описывает аффинные преобразования координат, представляющие собой комбинацию элементарных преобразований: сдвига, поворота и масштабирования. Это — простейшие формулы, позволяющие перейти от произвольной косоугольной системы измеренных координат к стандартной прямоугольной определенным образом ориентированной системе тангенциальных координат.

При таком подходе предполагается, что:

- 1) оси измеренных координат прямолинейны;
- 2) угол между осями может произвольно, но не очень сильно отличаться от 90° ;
- 3) деления шкал измеренных координат равномерны, но цена деления шкал x и y может быть разной;
- 4) отсчетное устройство координатно-измерительной машины или размер пиксела растрового снимка позволяют выполнить измерения с точностью порядка $\pm 0,1-0,3$ мкм.

Задание № 2

Определение топоцентрического направления на ИСЗ по его изображению на фоне звезд

Постановка задачи

С пункта земной поверхности с известными координатами выполнено фотографирование ИСЗ на фоне звездного неба. Зафиксирована эпоха наблюдений. Выполнена фотолабораторная обработка астронегатива. Проведено отождествление звезд фона со звездами рабочего каталога. Среди опознанных звезд выбраны опорные звезды. Произведены измерения координат изображений опорных звезд и ИСЗ. Из каталога выбраны экваториальные координаты опорных звезд α_i^* и δ_i^* на стандартную эпоху и их собственные движения μ_α и μ_δ . Получены приборные координаты ИСЗ x_s и y_s , соответствующие некоторому моменту UTC_s .

Требуется вычислить экваториальные топоцентрические координаты ИСЗ α'_s и δ'_s на момент UTC_s .

Исходные данные

Координаты пункта (B, L), эпоха наблюдений, поправка ΔUTC за переход от шкалы UTC к шкале UT1, а также топоцентрическое расстояние до ИСЗ ρ'_s , используются те же, что в задании №1.

Параметры съемочной камеры:

фокусное расстояние камеры $F = 735,1370$ мм,

коэффициент дисторсии объектива $\theta = 0,19393$.

(Предполагается, что коэффициенты разложения дисторсии более высокого порядка равны нулю).

Прямоугольные координаты геометрического центра снимка в измерительной системе координат:

$$x_0 = 493,5410 \text{ мм}; y_0 = 194,4550 \text{ мм}.$$

Метеорологические условия наблюдений:

температура $t = 17^\circ \text{ C}$, давление $P = 747$ мм рт.ст.

**Экваториальные координаты и собственные движения опорных звезд,
измеренные прямоугольные координаты изображений звезд и ИСЗ**

№ *	№ GC	m	α			δ*	μ _α	x*	y*
			h	m	s				
1	20761	5, 87	15 26 17, 462	-0, 838	34 20 09, 33	5, 73	425, 5235	156, 4147	
2	20866	5, 15	15 30 55, 762	0, 099	40 49 59, 03	-0, 71	410, 6554	182, 1688	
3	20871	6, 32	15 31 22, 379	0, 064	36 36 59, 41	-2, 94	432, 6431	169, 1701	
4	20883	4, 98	15 31 46, 990	-0, 152	40 53 58, 08	-0, 70	413, 1282	183, 2185	
5	20964	5, 44	15 35 14, 955	0, 249	39 00 35, 81	0, 73	434, 0057	180, 7337	
6	20978	6, 50	15 35 49, 321	0, 249	38 22 26, 28	-0, 48	439, 1405	179, 3221	
7	21032	5, 41	15 37 49, 602	0, 548	40 21 12, 44	6, 19	435, 6906	187, 5117	
8	21048	6, 19	15 38 48, 918	0, 035	34 40 30, 12	-1, 47	468, 4692	171, 0408	
9	21161	5, 60	15 43 59, 308	-0, 239	32 30 56, 92	-1, 00	498, 4832	170, 1642	
10	21319	4, 77	15 51 13, 935	-0, 056	35 39 26, 58	-34, 71	506, 3759	187, 4761	
11	21340	4, 61	15 52 40, 542	3, 976	42 27 05, 64	63, 21	471, 7014	208, 6076	
12	21400	5, 61	15 55 30, 567	-0, 233	42 33 58, 04	1, 64	479, 8656	211, 7696	
13	21402	5, 47	15 55 41, 680	0, 328	37 56 49, 24	8, 30	508, 3964	198, 9369	
14	21445	6, 44	15 57 29, 851	-0, 540	39 41 43, 13	6, 03	503, 4806	205, 6551	
15	21486	5, 71	15 58 57, 720	0, 192	36 38 37, 63	3, 00	526, 8745	198, 6873	
16	21527	5, 43	16 01 02, 713	-1, 524	33 18 13, 17	-76, 62	554, 6856	191, 7283	
17	21590	5, 85	16 03 19, 390	0, 096	36 37 54, 13	-1, 62	541, 6613	203, 4109	
18	21733	4, 94	16 08 58, 301	-0, 441	36 29 27, 22	33, 32	561, 5759	209, 2447	
19	21792	6, 41	16 11 39, 701	0, 118	33 20 33, 39	0, 96	591, 7482	204, 0120	
20	21800	5, 68	16 11 48, 060	-0, 082	36 25 29, 75	-3, 55	571, 5310	212, 2251	
21	21802	6, 01	16 11 47, 591	-0, 064	42 22 28, 65	2, 91	531, 5861	227, 7246	
22	21863	5, 36	16 14 40, 761	-2, 165	33 51 30, 58	-7, 89	598, 7638	208, 8413	
23	21984	5, 54	16 19 55, 216	-1, 055	39 42 30, 95	0, 13	575, 5089	229, 4929	
ИСЗ	1						535, 9886	197, 9653	
	2						489, 6330	192, 5167	
	3						443, 3207	187, 0320	

Для каждого варианта номера опорных звезд и номер положения ИСЗ выдают преподавателем.

Алгоритм вычислений

I. Введение поправок в момент наблюдений ИСЗ

$$UT1 = UTC + \Delta UTC + \tau,$$

где ΔUTC — поправка за переход от шкалы UTC к шкале UT1,

$$\tau = -\frac{\rho'_z}{c} \text{ — поправка за абберационное время,}$$

ρ'_z — топоцентрическое расстояние до ИСЗ,

$c = 299792458 \text{ м/с}$ — скорость света.

II. Вычисление видимых мест звезд.

1. Вычисление барицентрических единичных векторов опорных \bar{q}_i^0 звезд по их сферическим координатам, отнесенным к экватору и равноденствию эпохи J2000.0

$$\bar{q}_i^0 = \begin{pmatrix} l_i^* \\ m_i^* \\ n_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i^* \cdot \cos\delta_i^* \\ \sin\alpha_i^* \cdot \cos\delta_i^* \\ \sin\delta_i^* \end{pmatrix},$$

где $i=1,2,\dots,n$ — количество опорных звезд.

2. Вычисление геоцентрических единичных векторов звезд \bar{p}_i^0 на эпоху наблюдений

$$\bar{p}_i^0 = \frac{\bar{p}_i}{|\bar{p}_i|} = \frac{1}{\sqrt{(l_{0i}^*)^2 + (m_{0i}^*)^2 + (n_{0i}^*)^2}} \cdot \begin{pmatrix} l_{0i}^* \\ m_{0i}^* \\ n_{0i}^* \end{pmatrix},$$

$$\bar{p}_i = \bar{q}_i^0 + T \cdot \Delta\bar{q}_i^0 - \pi_i \cdot \bar{E}_B = \begin{pmatrix} l_{0i}^* \\ m_{0i}^* \\ n_{0i}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_i^* \\ m_i^* \\ n_i^* \end{pmatrix} + T \cdot \begin{pmatrix} \Delta l_i^* \\ \Delta m_i^* \\ \Delta n_i^* \end{pmatrix} - \pi_i \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}_{\oplus},$$

где $T \cdot \Delta\bar{q}_i^0$ — вектор поправок за собственное движение звезд;

T — время, отсчитываемое в юлианских столетиях от стандартной эпохи J2000.0 до эпохи наблюдений JD(t) (см. задание № 1)

$$T = (JD(t) - 2451545,0) / 36525;$$

$\Delta\bar{q}_i^0$ — вектор собственного движения звезды, компоненты которого по координатным осям средней экваториальной равноденственной системы координат стандартной эпохи J2000.0 выражены в радианах за столетие

$$\Delta\bar{q}_i^0 = \begin{pmatrix} \Delta l_i^* \\ \Delta m_i^* \\ \Delta n_i^* \end{pmatrix} = \mu_{\alpha_i} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha_i^* \cdot \cos\delta_i^* \\ \cos\alpha_i^* \cdot \cos\delta_i^* \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_{\delta_i} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\alpha_i^* \cdot \sin\delta_i^* \\ -\sin\alpha_i^* \cdot \sin\delta_i^* \\ \cos\delta_i^* \end{pmatrix} + \nu_i \cdot \pi_i \cdot \begin{pmatrix} l_i^* \\ m_i^* \\ n_i^* \end{pmatrix},$$

составляющие собственного движения звезд за столетие μ_{α} и μ_{δ} выражены в радианах, лучевая скорость звезды ν выражена в астрономических единицах в столетие, параллакс π — в радианах;

$\bar{E}_B = (x_B, y_B, z_B)_{\oplus}^I$ — барицентрический вектор положения Земли, отнесенный к экватору и равноденствию эпохи J2000.0, выбирается из таблицы АЕ «Положение и скорость Земли».

В данной работе поправки за параллакс и лучевую скорость звезды вводить не будем, ограничимся только расчетом поправок за составляющие собственного движения μ_α и μ_δ . Кроме этого, не будем учитывать гравитационное отклонение света.

3. Вычисление единичных векторов звезд \bar{p}_{1i}^0 на эпоху наблюдений в геоцентрической инерциальной системе координат, движущейся со скоростью \bar{v} (в единицах скорости света c) относительно барицентрической системы координат (учет годичной аберрации)

$$\bar{p}_{1i}^0 = \begin{pmatrix} l_{1i}^* \\ m_{1i}^* \\ n_{1i}^* \end{pmatrix} = \left(\sqrt{1 - \bar{v}^2} \cdot \bar{p}_{1i}^0 + \bar{v} + \frac{(\bar{p}_{1i}^0 \cdot \bar{v}) \cdot \bar{v}}{1 + \sqrt{1 - \bar{v}^2}} \right) \cdot (1 + \bar{p}_{1i}^0 \cdot \bar{v})^{-1},$$

где $(\bar{p}_{1i}^0 \cdot \bar{v})$ — скалярное произведение векторов;

$$\bar{v} = \frac{\dot{\mathbf{E}}_B}{c} = 0,0057755 \cdot \dot{\mathbf{E}}_B,$$

$\dot{\mathbf{E}}_B$ — барицентрический вектор скорости Земли, выраженный в астрономических единицах за сутки, выбирается из таблицы АЕ «Положение и скорость Земли»; c — скорость света, выраженная в астрономических единицах за сутки.

4. Учет прецессии и нутации

$$\bar{p}_{2i}^0 = \mathbf{R} \cdot \bar{p}_{1i}^0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} l_{1i}^* \\ m_{1i}^* \\ n_{1i}^* \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}$ для совместного учета прецессии и нутации могут быть вычислены по формулам предыдущего задания или выбраны из соответствующей таблицы АЕ. В данной работе воспользуемся матрицами \mathbf{N} и \mathbf{P} , полученными при выполнении задания № 1.

5. Учет атмосферной рефракции

$$\bar{p}_{3i}^0 = (l_{3i}^*, m_{3i}^*, n_{3i}^*)^T = \frac{(\bar{p}_{2i}^0 + k_i \cdot \bar{Z}^0)}{d_i},$$

$$\text{где } d_i = \sqrt{1 + k_i^2 + 2 \cdot k_i \cdot (\bar{p}_{2i}^0 \cdot \bar{Z}^0)}; \quad k_i = \frac{\sin(\Delta Z_i)}{\sin(Z_i - \Delta Z_i)};$$

астрономическая рефракция:

$$\Delta Z_1 = \frac{P}{760} \cdot \frac{273}{273 + t} \cdot (60',18 - 0',0682 \cdot \text{tg}^2 Z_1) \cdot \text{tg} Z_1,$$

P — давление в мм рт. ст., t° — температура в $^\circ\text{C}$;

$Z_1 = \arccos(\bar{p}_{21}^0 \cdot \bar{Z}^0)$ — зенитное расстояние звезды;

$$\bar{Z}^0 = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \cos B \\ \sin s \cdot \cos B \\ \sin B \end{pmatrix} \text{ --- единичный вектор зенита;}$$

$$s = S_0 + UT1 + \frac{UT1}{365,2422} + L \text{ --- местное звездное время.}$$

III. Вычисление тангенциальных координат ξ , η опорных звезд.

1. Переход от видимых мест опорных звезд к их тангенциальным координатам $\bar{\xi}^*$, $\bar{\eta}^*$

$$\bar{\xi}_i^* = F \cdot \frac{t_{11} \cdot l_{21}^* + t_{12} \cdot m_{21}^* + t_{13} \cdot n_{21}^*}{t_{31} \cdot l_{21}^* + t_{32} \cdot m_{21}^* + t_{33} \cdot n_{21}^*},$$

$$\bar{\eta}_i^* = F \cdot \frac{t_{21} \cdot l_{21}^* + t_{22} \cdot m_{21}^* + t_{23} \cdot n_{21}^*}{t_{31} \cdot l_{21}^* + t_{32} \cdot m_{21}^* + t_{33} \cdot n_{21}^*},$$

где F — фокусное расстояние съемочной камеры;

t_{jk} — элементы матрицы:

$$T = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_f & \cos \alpha_f & 0 \\ -\cos \alpha_f \cdot \sin \delta_f & -\sin \alpha_f \cdot \sin \delta_f & \cos \delta_f \\ \cos \alpha_f \cdot \cos \delta_f & \sin \alpha_f \cdot \cos \delta_f & \sin \delta_f \end{pmatrix};$$

α_f , δ_f — приближенные значения прямого восхождения и склонения оптической оси камеры во время съемки, полученные как среднее из координат опорных звезд:

$$\alpha_f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^*}{n}, \quad \delta_f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i^*}{n}.$$

2. Учет дисторсии объектива

$$\xi_i^* = \xi_i^* \cdot \left(1 + \theta \cdot \frac{\xi_i^{*2} + \bar{\eta}_l^{*2}}{F^2} \right),$$

$$\eta_l^* = \bar{\eta}_l^* \cdot \left(1 + \theta \cdot \frac{\xi_i^{*2} + \bar{\eta}_l^{*2}}{F^2} \right),$$

где θ — коэффициент радиальной дисторсии.

IV. Вычисление постоянных пластинки.

1. Составление уравнений поправок

$$\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{L}}_x = \bar{\mathbf{V}}_x, \quad \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{L}}_y = \bar{\mathbf{V}}_y,$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_1^* & y_1^* & 1 \\ x_2^* & y_2^* & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^* & y_n^* & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{L}}_x = \begin{pmatrix} x_1^* - \xi_1^* \\ x_2^* - \xi_2^* \\ \dots \\ x_n^* - \xi_n^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{L}}_y = \begin{pmatrix} y_1^* - \eta_1^* \\ y_2^* - \eta_2^* \\ \dots \\ y_n^* - \eta_n^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}}_{x,y} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}_{x,y}.$$

2. Вычисление постоянных пластинки a, b, c, d, e, f из решения двух систем уравнений поправок по методу наименьших квадратов

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{L}}_x = \bar{\mathbf{0}}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{L}}_y = \bar{\mathbf{0}},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = -(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{L}}_x, \quad \bar{\mathbf{Y}} = -(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{L}}_y.$$

Матрица нормальных уравнений $(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})$ одинакова для обеих систем, поэтому обратить ее достаточно только один раз.

3. Оценка точности определения постоянных пластинки

$$\mu_x = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{V}}_x^T \cdot \bar{\mathbf{V}}_x}{n-3}}, \quad \mu_y = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{V}}_y^T \cdot \bar{\mathbf{V}}_y}{n-3}},$$

$$m_a = \mu_x \cdot \sqrt{q_{11}}, \quad m_b = \mu_x \cdot \sqrt{q_{22}}, \quad m_c = \mu_x \cdot \sqrt{q_{33}},$$

$$m_d = \mu_y \cdot \sqrt{q_{11}}, \quad m_e = \mu_y \cdot \sqrt{q_{22}}, \quad m_f = \mu_y \cdot \sqrt{q_{33}},$$

где q_{kk} — диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений $(B^T \cdot B)^{-1}$;

\tilde{V}_x, \tilde{V}_y — векторы поправок, вычисленные по уравнениям поправок после подстановки в них постоянных пластины.

V. Вычисление тангенциальных координат ИСЗ.

1. Переход от приборных координат ИСЗ к тангенциальным

$$\xi_s = x_s + a \cdot x_s + b \cdot y_s + c,$$

$$\eta_s = y_s + d \cdot x_s + e \cdot y_s + f.$$

2. Учет дисторсии объектива

$$\bar{\xi}_s = \xi_s \cdot \left(1 - \theta \cdot \frac{\xi_s^2 + \eta_s^2}{F^2} \right),$$

$$\bar{\eta}_s = \eta_s \cdot \left(1 - \theta \cdot \frac{\xi_s^2 + \eta_s^2}{F^2} \right).$$

VI. Вычисление видимого топоцентрического направления на ИСЗ.

$$\vec{p}_s^0 = (l_s, m_s, n_s)^T,$$

$$l_s = \frac{t_{11} \bar{\xi}_s + t_{21} \bar{\eta}_s + t_{31} \cdot F}{\sqrt{\bar{\xi}_s^2 + \bar{\eta}_s^2 + F^2}},$$

$$m_s = \frac{t_{12} \bar{\xi}_s + t_{22} \bar{\eta}_s + t_{32} \cdot F}{\sqrt{\bar{\xi}_s^2 + \bar{\eta}_s^2 + F^2}},$$

$$n_s = \frac{t_{13} \bar{\xi}_s + t_{23} \bar{\eta}_s + t_{33} \cdot F}{\sqrt{\bar{\xi}_s^2 + \bar{\eta}_s^2 + F^2}}.$$

VII. Вычисление экваториальных топоцентрических координат ИСЗ.

1. Поправка в топоцентрическое направление на ИСЗ за влияние атмосферной рефракции

$$\bar{\mathbf{p}}_{1s}^0 = (l_{1s}, m_{1s}, n_{1s})^T = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s^0 + k_s \cdot \bar{\mathbf{z}}^0}{d_s},$$

где

$$d_s = \sqrt{1 + k_s^2 + 2 \cdot k_s \cdot (\bar{\mathbf{p}}_s^0 \cdot \bar{\mathbf{z}}^0)}; \quad k_s = -\frac{\sin(\Delta Z_s)}{\sin(Z_s)};$$

$$\Delta Z_s = \frac{P}{760} \cdot \frac{273}{273 + t^c} \cdot (\Delta Z_a + \Delta Z_p);$$

астрономическая рефракция:

$$\Delta Z_a = (60'', 18 - 0''.0682 \cdot \text{tg}^2 Z_s) \cdot \text{tg} Z_s;$$

рефракционный параллакс:

$$\Delta Z_p = -\frac{435'', 02}{\rho'_s \cdot \cos Z_s} \cdot \text{tg} Z_s \cdot [1 - 0,00113 \cdot (3 \cdot \text{tg}^2 Z_s + 2)],$$

ρ'_s — топоцентрическое расстояние до ИСЗ в [км];

$Z_s = \arccos(\bar{\mathbf{p}}_s^0 \cdot \bar{\mathbf{z}}^0)$ — зенитное расстояние ИСЗ;

$\bar{\mathbf{z}}^0$ — единичный вектор зенита.

2. Переход к сферическим экваториальным координатам ИСЗ

$$\alpha'_s = \arctg \frac{m_{1s}}{l_{1s}}, \quad \delta'_s = \arctg \frac{n_{1s}}{\sqrt{l_{1s}^2 + m_{1s}^2}},$$

четверть выбирается по знакам числителя и знаменателя:

$$\frac{\langle \text{плюс} \rangle}{\langle \text{плюс} \rangle} \rightarrow \text{I}, \quad \frac{\langle \text{плюс} \rangle}{\langle \text{минус} \rangle} \rightarrow \text{II}, \quad \frac{\langle \text{минус} \rangle}{\langle \text{минус} \rangle} \rightarrow \text{III}, \quad \frac{\langle \text{минус} \rangle}{\langle \text{плюс} \rangle} \rightarrow \text{IV}.$$

3. Основы теории движения ИСЗ

3.1. Невозмущенное движение

Движение центра масс ИСЗ в околоземном пространстве под действием силы притяжения Земли, принимаемой за материальную точку или сферу с равномерным распределением масс (центральное поле), описывается дифференциальными уравнениями невозмущенного движения. В инерциальной системе координат эти уравнения имеют вид:

$$\ddot{x} = -\mu \cdot \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \cdot \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\mu \cdot \frac{z}{r^3},$$

где \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} — составляющие ускорения по координатным осям;

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние между центрами масс Земли и ИСЗ,

т. е. r — длина геоцентрического радиуса-вектора ИСЗ;

μ — геоцентрическая гравитационная постоянная.

Дифференциальные уравнения невозмущенного движения интегрируются в конечном виде. В результате получают шесть независимых интегралов с шестью постоянными интегрирования. Эти шесть интегралов определяют движение ИСЗ по законам Кеплера:

1. ИСЗ движется по эллипсу, в одном из фокусов которого располагается центр масс Земли.

2. Радиус-вектор ИСЗ за равные промежутки времени описывает равные площади.

3. Отношение квадрата периода обращения ИСЗ к кубу большой полуоси его орбиты — величина постоянная.

Постоянные интегрирования находятся по начальным условиям движения, т. е. координатам (x_0 , y_0 , z_0) и составляющим скорости (\dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0) ИСЗ на момент t_0 . Обычно для геометрической наглядности и удобства вычислений формальные постоянные интегрирования связывают взаимно однозначными соотношениями с геометрическими элементами, характеризующими размер и форму орбиты, положение ИСЗ на орбите, а также положение самой орбиты в пространстве. Наибольшее распространение получили кеплеровы элементы орбиты. Эллиптическая орбита ИСЗ изображена на рис. 3.1.

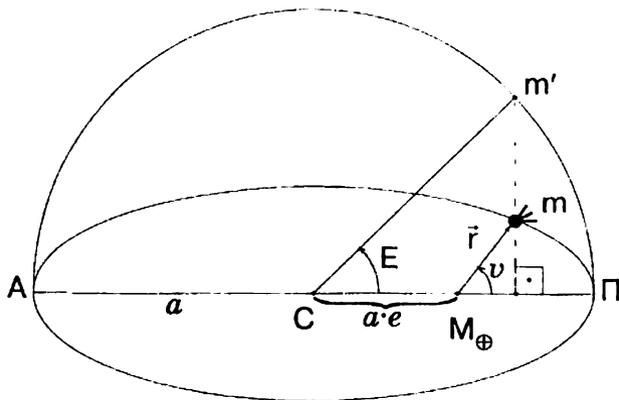


Рис. 3.1

C — центр орбитального эллипса, описываемого ИСЗ (m);

M_{\oplus} — один из двух фокусов эллипса, в котором расположен центр масс Земли;

\bar{r} — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ;

Π — *перигеум* — точка орбиты, ближайшая к центру масс Земли;

A — *апогеум* — точка орбиты, наиболее удаленная от центра масс Земли.

Размер орбиты характеризуется величиной *большой полуоси* эллипса a (отрезок AC или CP). Прямая линия AP , соединяющая апогеум и перигеум орбиты, называется *линией апсид*. Отношение $e = CM_{\oplus}/CP$, характеризующее форму эллипса, называется *эксцентриситетом* орбиты. Длина отрезка $CM_{\oplus} = e \cdot a$.

Величины большой и малой полуосей связаны соотношением

$$e^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}.$$

Уравнение орбитального эллипса в фокальных полярных координатах (интеграл орбиты) имеет вид:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v}.$$

Угол v с вершиной в фокусе M_{\oplus} , отсчитываемый от направления на перигеум орбиты Π до направления на ИСЗ, называется *истинной аномалией*. При $v = 0^\circ$ спутник находится в перигеуме, т. е. длина гео-

центрического радиуса-вектора ИСЗ имеет минимальную величину. При $\nu = 180^\circ$ спутник находится в апоцентре, т. е. длина геоцентрического радиуса-вектора достигает максимальной величины. Длина радиуса-вектора ИСЗ при $\nu = 90^\circ$, $r = a \cdot (1 - e^2) = P$ — *фокальный параметр*.

Согласно второму закону Кеплера, скорость изменения истинной аномалии непостоянна. Вблизи перицентра она больше, чем вблизи апоцентра. С другой стороны, по третьему закону Кеплера период обращения ИСЗ по орбите (T) не зависит от формы эллипса и полностью определяется величиной большой полуоси, т. е. размером орбиты. Неравномерно изменяющуюся величину ν неудобно использовать для расчета положения ИСЗ на орбите в произвольные моменты времени. Поэтому вводят *среднюю аномалию* M , которая изменяется строго пропорционально времени со скоростью

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

т. е.

$$M = n \cdot (t - \tau).$$

Угол M с вершиной в центре эллипса C отсчитывается от направления на перицентр орбиты P .

Средняя угловая скорость движения ИСЗ по орбите n называется *средним движением*, а величина τ — *моментом прохождения ИСЗ через перицентр*.

Формулы для перехода от M к ν и обратно не удается получить в конечном виде. Для установления удобной взаимосвязи этих двух аномалий вводят еще одну аномалию — *эксцентрическую* E . Эта вспомогательная угловая величина, аналогичная применяемой в сфероидической геодезии приведенной широте, вводится с помощью следующего геометрического построения (см. рис. 3.1). В плоскости орбиты из центра эллипса опишем окружность радиуса a . Данная окружность касается орбитального эллипса в точках апогея A и перигея P , т. е. линия апсид — диаметр этой окружности. Проведем перпендикуляр к линии апсид через положение ИСЗ m до пересечения с окружностью в точке m' . Соединим полученную точку m' с центром эллипса. Угол E с вершиной в центре эллипса C отсчитывается от направления на перицентр орбиты P до направления на точку m' .

Средняя и эксцентрическая аномалии связаны через *уравнение Кеплера* (кинематический интеграл)

$$M = E - e \cdot \sin E.$$

Соотношение между эксцентрической и истинной аномалиями имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Три аномалии изменяются в пределах от 0 до 360° с разными угловыми скоростями, но всегда равны в перигецентре $\nu = E = M = 0$ и в апоцентре $\nu = E = M = 180^\circ$.

Положение орбиты в пространстве характеризуется тремя углами Эйлера, которые определяют ее ориентацию относительно геоцентрической инерциальной системы координат (см. рис. 3.2).

Линия $\varrho \varrho'$ пересечения плоскости орбиты с плоскостью небесного экватора называется *линией узлов*. Узел (одна из двух точек пересечения орбиты с плоскостью экватора), который ИСЗ проходит, переходя из южной полусферы в северную, называется *восходящим узлом* орбиты ϱ , а другой узел — *нисходящим* ϱ' .

Угол между положительным направлением оси x на точку весны и направлением на восходящий узел ϱ — *долгота восходящего узла* ϱ .

Угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты ИСЗ — *наклон орбиты* i .

Угол между направлением на восходящий узел ϱ и направлением на перигецентр Π — *аргумент перигецентра* ω . Он задает ориентацию эллипса в плоскости орбиты.

В расчетах используется также *аргумент широты* $u = \omega + \nu$ — угол между направлением на ϱ и направлением на ИСЗ.

Таким образом, невозмущенное движение ИСЗ полностью описывается шестью параметрами — *элементами орбиты* $a, e, i, \varrho, \omega, \tau$. Вместо τ положение ИСЗ на орбите часто задается значением M_0 в некоторый начальный момент t_0

$$M_0 = n \cdot (t_0 - \tau).$$

Исходные данные
Инерциальные геоцентрические координаты
ИСЗ "Ресурс-О1" №2

Дата [д. м. г.]	UTC [h m s]	x [м]	y [м]	z [м]
01.08.1991	19 01 15,042	-427896,7	-5057210,3	4784714,0
01.08.1991	19 07 59,159	-769153,6	-2541901,9	6442283,7
02.08.1991	19 17 02,045	-338778,1	-5069526,7	4777240,5
02.08.1991	19 22 48,431	-675820,1	-2962884,0	6270680,6
03.08.1991	19 33 46,779	-315579,3	-4772705,6	5072398,2
03.08.1991	19 38 35,434	-623178,6	-2981688,3	6266531,2
04.08.1991	18 11 25,220	-156173,5	-5128050,2	4721281,6
04.08.1991	18 18 09,337	-627230,2	-2654078,6	6410701,6
05.08.1991	18 27 12,223	-65640,8	-5135369,6	4714072,4
05.08.1991	18 33 56,340	-579772,3	-2672179,5	6407204,9
06.08.1991	18 42 59,226	25078,8	-5141055,5	4706970,9
06.08.1991	18 49 43,343	-531888,0	-2689416,2	6403784,1
07.08.1991	18 58 46,229	-115956,8	-5145111,0	4699974,3
07.08.1991	19 05 30,346	-483591,7	-2705788,1	6400436,8
08.08.1991	19 14 38,973	197833,6	-5118977,2	4724493,4
08.08.1991	19 20 25,359	-354406,8	-3073302,5	6240988,7
09.08.1991	19 31 23,707	191116,0	-4823996,6	5023732,5
09.08.1991	19 36 12,362	-299208,9	-3086272,7	6237277,8
10.08.1991	18 09 02,148	386612,8	-5157187,8	4669244,9
10.08.1991	18 16 43,996	-437484,2	-2365078,3	6536995,4
11.08.1991	18 24 49,151	478009,5	-5154793,5	4662609,2
11.08.1991	18 31 33,268	-286205,5	-2775004,8	6382366,0
12.08.1991	18 40 36,154	569428,8	-5150787,6	4656058,2
12.08.1991	18 47 20,271	-235843,8	-2787032,3	6379321,3
13.08.1991	18 56 23,157	660845,1	-5145175,4	4649586,7
13.08.1991	19 03 07,274	-185148,2	-2798189,3	6376331,3
14.08.1991	19 12 10,160	752232,8	-5137962,4	4643189,5
14.08.1991	19 18 54,277	-134130,4	-2808475,6	6373392,1
15.08.1991	19 28 54,894	717110,5	-4849814,7	4948013,2
15.08.1991	19 33 43,549	52814,3	-3192406,9	6191198,1
16.08.1991	18 06 33,335	945929,9	-5154920,2	4588070,8
16.08.1991	18 14 15,183	-157302,7	-2494480,4	6503514,7
17.08.1991	18 22 20,338	1037691,0	-5142682,5	4581802,3
17.08.1991	18 30 02,186	-111124,5	-2504615,8	6501182,5
18.08.1991	18 38 07,341	1129319,9	-5128856,7	4575584,4
18.08.1991	18 45 49,189	-64618,8	-2513980,3	6498882,6
19.08.1991	18 53 54,344	1220792,9	-5113449,0	4569410,5
19.08.1991	19 00 38,461	143368,7	-2895559,4	6336712,7
20.08.1991	19 10 39,078	1163400,8	-4833672,9	4878970,0
20.08.1991	19 16 25,464	196917,9	-2900240,7	6333904,9
21.08.1991	19 26 26,081	1250080,8	-4818181,8	4873266,6
21.08.1991	19 32 12,467	250707,3	-2904026,9	6331113,7
22.08.1991	18 05 59,984	1190388,5	-4564564,3	5126852,0
22.08.1991	18 10 48,639	325017,1	-2954385,6	6305095,8
23.08.1991	18 20 49,256	1439045,7	-4818941,8	4821113,4
23.08.1991	18 27 33,373	194177,2	-2597401,7	6467678,6
24.08.1991	18 36 36,259	1525773,7	-4798663,6	4815392,3
24.08.1991	18 43 20,376	243286,7	-2601648,6	6465389,0
25.08.1991	18 52 23,262	1612268,9	-4776903,6	4809669,5
25.08.1991	18 59 07,379	292656,4	-2605083,2	6463095,0

Дата [д. м. г.]	UTC [h m s]	x [м]	y [м]	z [м]
26.08.1991	19 08 10,265	1698510,1	-4753666,5	4803937,9
26.08.1991	19 13 56,651	546333,4	-2955202,1	6293679,4
27.08.1991	19 23 57,268	1784476,3	-4728956,6	4798190,0
27.08.1991	19 29 43,654	602109,6	-2953091,8	6290795,8
28.08.1991	18 02 33,440	1888959,1	-4736874,8	4751031,5
28.08.1991	18 08 19,826	682856,4	-2994752,9	6263787,5
29.08.1991	18 18 20,443	1974863,3	-4708839,9	4745179,0
29.08.1991	18 25 04,560	518814,7	-2655986,6	6432856,7
30.08.1991	18 34 07,446	2060420,4	-4679335,5	4739288,8
30.08.1991	18 40 51,563	570102,4	-2654765,0	6430380,0

Алгоритм вычислений

1. Вычисление длин геоцентрических радиусов-векторов ИСЗ r_k

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}.$$

2. Вычисление направляющих косинусов геоцентрических радиусов-векторов ИСЗ \bar{r}_k

$$\begin{pmatrix} l_k \\ m_k \\ n_k \end{pmatrix} = \frac{1}{r_k} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

3. Вычисление направляющих косинусов вектора нормали к плоскости орбиты \bar{W} :

$$\bar{W} = \frac{1}{\sin\beta} \cdot \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = L \cdot \bar{e}_x + M \cdot \bar{e}_y + N \cdot \bar{e}_z,$$

$$\cos\beta = (l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2), \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta},$$

$$L = \frac{(m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1)}{\sin\beta},$$

$$M = \frac{(l_2 \cdot n_1 - l_1 \cdot n_2)}{\sin\beta},$$

$$N = \frac{(l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1)}{\sin\beta}.$$

4. Вычисление угла наклона орбиты

$$i = \arctg \frac{\sqrt{L^2 + M^2}}{N}, \quad 0 \leq i \leq 180^\circ.$$

5. Вычисление долготы восходящего узла орбиты

$$\Omega = \operatorname{arctg} \frac{L}{-M},$$

четверть выбирается по знакам числителя и знаменателя

$$\frac{\langle \text{плюс} \rangle}{\langle \text{плюс} \rangle} \rightarrow \text{I}; \quad \frac{\langle \text{плюс} \rangle}{\langle \text{минус} \rangle} \rightarrow \text{II}; \quad \frac{\langle \text{минус} \rangle}{\langle \text{минус} \rangle} \rightarrow \text{III}; \quad \frac{\langle \text{минус} \rangle}{\langle \text{плюс} \rangle} \rightarrow \text{IV}.$$

6. Вычисление аргументов широты ИСЗ

$$u_k = \operatorname{arctg} \frac{-(l_k \cdot L + m_k \cdot M)/N}{m_k \cdot L - l_k \cdot M},$$

четверть тоже выбирается по знакам числителя и знаменателя.

Контроль: $(u_2 - u_1) = \beta$.

7. Определение фокального параметра орбиты (по методу Гаусса—Лагранжа):

— вычисление вспомогательных величин

$$c^2 = 2 \cdot r_1 \cdot r_2 (1 + \cos \beta),$$

$$d = \frac{22 \cdot \mu \cdot (t_2 - t_1)^2}{c^2 \cdot [6 \cdot c + 9 \cdot (r_1 + r_2)]},$$

— вычисление отношения η площади эллиптического сектора к площади треугольника, построенного на векторах \vec{r}_1 и \vec{r}_2

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \cdot S_{i+1} \quad \text{или} \quad \eta = 1 + \frac{10}{11} \cdot \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \dots}}}},$$

в первом случае S вычисляется путем итераций

$$S_{i+1} = \frac{d}{1 + S_i}, \quad S_0 = d; \quad i = 0, 1, \dots;$$

— вычисление фокального параметра ИСЗ

$$P = \eta^2 \cdot \frac{(r_1 \cdot r_2 \cdot \sin \beta)^2}{\mu \cdot (t_2 - t_1)^2},$$

где $\mu = 398600,5 \cdot 10^9$ [м³·с⁻²] — гравитационный параметр.

8. Вычисление истинных аномалий ИСЗ

$$v_1 = \arctg \frac{r_1 \cdot \cos \beta - \frac{P-r_2}{r_1}}{\frac{P-r_1}{r_1} \cdot \sin \beta},$$

как и ранее четверть выбирается по знакам числителя и знаменателя,

$$v_2 = v_1 + (u_2 - u_1).$$

9. Вычисление эксцентриситета орбиты

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot \cos v_1 - r_2 \cdot \cos v_2}.$$

10. Вычисление аргумента перигея орбиты

$$\omega = u_k - v_k.$$

11. Вычисление большой полуоси орбиты

$$a = \frac{P}{1 - e^2}.$$

12. Вычисление эксцентрических аномалий ИСЗ

$$E_k = v_k - 2 \cdot \arctg \frac{q \cdot \sin v_k}{1 + q \cdot \cos v_k}, \quad \text{где } q = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

13. Вычисление средних аномалий ИСЗ

$$M_k = E_k - e \cdot \sin E_k \quad [\text{рад.}].$$

14. Вычисление среднего движения ИСЗ

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a \cdot \sqrt{a}} \quad [\text{рад./с}].$$

15. Вычисление момента прохождения ИСЗ через перигея

$$\tau = t_k - \frac{M_k}{n} \quad [\text{с}].$$

16. Вычисление среднего момента

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

17. Вычисление средней аномалии M_0 в момент t_0

$$M_0 = n \cdot (t_0 - \tau).$$

18. Вычисление периода обращения ИСЗ

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad [\text{с}].$$

Задание № 4

Вычисление прямоугольных координат и составляющих скорости ИСЗ на заданный момент времени по известным значениям кеплеровых элементов его орбиты

Постановка задачи

Невозмущенное движение ИСЗ полностью описывается шестью элементами орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$ (или M_0 на момент t_0), которые связаны взаимно однозначными соотношениями с прямоугольными координатами (x_0, y_0, z_0) и составляющими скорости $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ ИСЗ на заданный момент t_0 . При невозмущенном движении все элементы орбиты кроме аномалий остаются постоянными величинами. Следовательно, для расчета невозмущенной эфемериды ИСЗ $(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$ необходимо сначала найти значение средней аномалии M на момент t , вычислить истинную аномалию и длину радиуса-вектора, затем преобразовать эти полярные координаты в плоские прямоугольные и, наконец, перейти от орбитальной системы координат к экваториальной равноденственной, воспользовавшись матрицами вращения на углы Эйлера $(-\omega), (-i), (-\Omega)$.

В соответствии с принципом вариации произвольных постоянных в случае возмущенного движения процедура вычислений аналогична, но поскольку элементы орбиты испытывают возмущения, то кроме M на момент t необходимо найти возмущенные значения всех остальных элементов орбиты. Как это делается, будет рассмотрено в следующем задании № 5.

Исходные данные

В качестве исходных значений кеплеровых элементов орбиты ИСЗ берутся величины, полученные при выполнении задания № 3.

Координаты и компоненты скорости ИСЗ необходимо вычислить на момент времени t , отстоящий от момента t_0 на сутки,

$$t = t_0 + 86400 \text{ с.}$$

Алгоритм вычислений

1. Вычисление среднего движения ИСЗ

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a \cdot \sqrt{a}} [\text{рад./с}].$$

2. Вычисление средней аномалии M

$$M = n \cdot (t - \tau) \quad \text{или} \quad M = M_0 + n \cdot (t - t_0).$$

3. Решение путем итераций уравнения Кеплера для определения эксцентрической аномалии E

$$E_0 = M,$$

$$E_1 = M + e \cdot \sin E_0,$$

.....

$$E_{i+1} = M + e \cdot \sin E_i.$$

4. Определение длины радиуса-вектора r

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E).$$

5. Определение значения истинной аномалии ν

$$\nu = E + 2 \cdot \arctg \frac{q \cdot \sin E}{1 - q \cdot \cos E}, \quad \text{где} \quad q = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

6. Вычисление аргумента широты u

$$u = \omega + \nu.$$

7. Вычисление направляющих косинусов радиуса-вектора ИСЗ, явные выражения для которых получаются путем перемножения матриц вращения вокруг осей z_w, x, z на углы $(-u), (-i), (-\Omega)$ соответственно

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \sin u \cdot \sin i \end{pmatrix}$$

Контроль: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

8. Вычисление направляющих косинусов прямой, перпендикулярной к радиусу-вектору и лежащей в плоскости орбиты (l', m', n') , явные выражения для которых получаются из предыдущих формул путем замены u на $(u + 90^\circ)$:

$$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ -\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin i \end{pmatrix}.$$

Контроль: $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$.

9. Определение геоцентрических инерциальных координат ИСЗ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

10. Вычисление компонент вектора скорости ИСЗ вдоль радиуса-вектора V_r и перпендикулярной к нему V_{\perp} , лежащей в плоскости орбиты

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{P}} \cdot e \cdot \sin \nu,$$

$$V_{\perp} = \frac{\sqrt{\mu \cdot P}}{r},$$

где $P = a \cdot (1 - e^2)$.

11. Определение составляющих скорости ИСЗ по осям геоцентрической инерциальной системы координат

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = V_r \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + V_{\perp} \cdot \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Контроль: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$.

3.2. Возмущенное движение

Реальное движение ИСЗ происходит под действием не только центральной силы ньютонова тяготения, но и множества других сил как гравитационного, так и негравитационного характера. Основные из них: притяжение, обусловленное нецентральной частью геопотенциала (особенно второй зональной гармоникой); притяжение других тел, прежде всего, Луны и Солнца; атмосферное торможение; световое давление. Действие этих сил приводит к тому, что реальное движение спутника отклоняется от идеализированного движения по законам Кеплера, т.е. *испытывает возмущения*. В небесной механике движение, отличающееся от кеплерова, принято называть *возмущенным движением*. Силы, вызывающие возмущения, называют *возмущающими силами*, а соответствующие им составляющие ускорения в движении ИСЗ — *возмущающими ускорениями*.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения в геоцентрической системе прямоугольных координат имеют вид:

$$\ddot{x} = -\mu \cdot \frac{x}{r^3} + w_x, \quad \ddot{y} = -\mu \cdot \frac{y}{r^3} + w_y, \quad \ddot{z} = -\mu \cdot \frac{z}{r^3} + w_z.$$

От аналогичных уравнений невозмущенного движения данные уравнения отличаются только присутствующими в правых частях составляющими суммарного возмущающего ускорения по координатным осям — w_x, w_y, w_z .

Явные выражения для составляющих возмущающего ускорения (w_x, w_y, w_z) настолько сложны, что дифференциальные уравнения возмущенного движения точно в конечном виде не интегрируются. Поэтому для получения решения приходится прибегать к приближенным методам интегрирования. Среди этих методов выделяют две большие группы:

— *численные методы*, позволяющие получить решение в виде конкретных числовых значений ($x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) или ($a, e, i, \Omega, \omega, M$) на заданные моменты времени;

— *аналитические методы*, которые дают решение в виде приближенных формул для вычисления ($x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) или ($a, e, i, \Omega, \omega, M$) на произвольные моменты времени.

Численными методами решение может быть получено с любой наперед заданной точностью, но это потребует больших вычислительных затрат, особенно на длительных интервалах интегрирования. Точность аналитического решения, как правило, ниже численного. Вывод формул требует выполнения громоздких аналитических преобразований, но однажды полученное такое решение может быть многократно использовано для быстрого проведения расчетов без потери эффективности на больших временных интервалах. Аналитическое решение очень удобно и для качественного анализа характера возмущений в движении ИСЗ от источников различной природы.

Наиболее выгодно использовать приближенные аналитические методы для интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ в элементах орбиты. В соответствии с принципом Лагранжа вариации произвольных постоянных в случае возмущенного движения элементы орбиты рассматриваются не как постоянные, а как непрерывно изменяющиеся величины. Вводится понятие *оскулирующей орбиты* — эллиптической орбиты с изменяющимися элементами, в любой момент времени соприкасающейся с реальной траекторией движения ИСЗ, т. е. в их общей точке координаты и компоненты скорости абсолютно одинаковы. Связь координат и составляющих скорости ИСЗ с элементами оскулирующей орбиты описывается формулами невозмущенного движения. Если все возмущения в какой-то момент вдруг исчезли бы, тогда ИСЗ продолжил бы движение по кеплеровой орбите с теми же значениями элементов.

Для возмущающих факторов произвольной природы используются уравнения движения в форме Ньютона:

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot N_1 \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{M} - n \\ \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot N_2 \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix},$$

где S, T, W — сагиттальная (радиальная), трансверсальная и бинормальная составляющие возмущающего ускорения. Матрицы N_1 и N_2 имеют вид:

$$N_1 = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot e \cdot a^2 \cdot \sin \nu}{P} & \frac{2 \cdot a^2}{r} & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu + \frac{(\cos \nu + e) \cdot r}{P} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos \nu \cdot r}{P} \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\cos \nu + \frac{2 \cdot e \cdot r}{P}}{e} & -\sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\sin \nu \cdot \left(1 + \frac{r}{P}\right)}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \cdot \sin \nu}{P \cdot \sin i} \\ \frac{\cos \nu}{e} & \sin \nu \cdot \frac{1 + \frac{r}{P}}{e} & \frac{r \cdot \sin \nu}{P \cdot \operatorname{tg} i} \end{pmatrix}$$

Исследование выражений, получаемых в результате аналитического интегрирования этих уравнений, показывает, что по характеру изменений, независимо от порождающей их причины, возмущения в элементах орбиты можно разделить на три основных типа: *вековые*, *долгопериодические* и *короткопериодические*. Вековые возмущения возрастают пропорционально времени. Короткопериодические возмущения имеют периоды, не превышающие периода обращения ИСЗ. Периоды изменения долгопериодических возмущений существенно больше периода обращения и зависят от интенсивности вековых возмущений в угловых элементах орбиты (Ω , ω , M). При определенных условиях, когда пространственно-временные частоты возмущающих ускорений соотносятся со средним движением ИСЗ как целые числа, могут возникать резонансные возмущения.

Для возмущающих факторов потенциального характера удобнее использовать уравнения движения в форме Лагранжа:

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{M-n} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = -L^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{\partial R}{\partial i} \end{pmatrix},$$

$$L = -\frac{1}{\mu \cdot a} \left(\begin{array}{c|c|c} 2 \cdot a & 0 & 0 \\ \hline 1 - e^2 & 0 & \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \\ \hline e & & e \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin i} & \frac{1}{\sqrt{1 - e^2} \cdot \operatorname{tg} i} \end{array} \right)$$

R — пертурбационная (возмущающая) функция.

В приведенных уравнениях элементы орбиты разделены на две группы: *позиционные* (a, e, i) и *угловые* (Ω, ω, M) так, что возмущения элементов одной группы определяются производными от возмущающей функции по элементам другой группы.

Исследование выражений, получаемых в результате первого приближения при аналитическом интегрировании этих уравнений, показывает, что при движении в потенциальных полях вековые возмущения содержатся только в угловых элементах орбиты (Ω, ω, M). В большой полуоси отсутствуют вековые и долгопериодические возмущения первого порядка (т.е. содержатся лишь короткопериодические возмущения). Во втором приближении также нет вековых возмущений в большой полуоси.

Возмущающие влияния, искажающие кеплерову орбиту, многочисленны. Основные возмущения, определяющие эволюцию орбиты ИСЗ, обусловлены несферичностью геопотенциала. Возмущающая функция от геопотенциала обычно представляется в виде разложения в ряд по сферическим функциям

$$R = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \cdot J_n \cdot P_n(\sin \Phi) + \\ + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \cdot [C_{nm} \cdot \cos(m \cdot \Lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m \cdot \Lambda)] \cdot P_{nm}(\sin \Phi),$$

где Φ, Λ, r — геоцентрические сферические координаты ИСЗ;

a_e — экваториальный радиус Земли;

J_n, C_{nm}, S_{nm} — гармонические коэффициенты, характеризующие отличие реального гравитационного поля Земли от центрального;

$P_n(\sin \Phi)$ — полиномы Лежандра;

$P_{nm}(\sin \Phi)$ — присоединенные функции Лежандра.

Параметры $J_n = -C_{n0}$ — коэффициенты зональных гармоник геопотенциала. Самым большим из них является $J_2 = 0,00108263$, который характеризует динамическое полярное сжатие Земли. Все остальные коэффициенты по абсолютной величине как минимум на три порядка меньше.

Перед аналитическим интегрированием уравнений Лагранжа нужно выразить пертурбационную функцию через элементы орбиты и получить явные выражения для ее производных по элементам орбиты. Например, с точностью до членов порядка J_4 включительно представление зональной части возмущающей функции геопотенциала через элементы орбиты имеет вид

$$R = \mu \cdot \left\{ \frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \frac{a_e^2}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i \cdot \cos 2 \cdot (\nu + \omega) \right] - \right. \\ \left. - J_3 \cdot \frac{a_e^3}{a^4} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^4 \cdot \left[\left(\frac{15}{8} \cdot \sin^2 i - \frac{3}{2} \right) \cdot \sin(\nu + \omega) - \frac{5}{8} \cdot \sin^2 i \cdot \sin 3 \cdot (\nu + \omega) \right] \cdot \sin i - \right. \\ \left. - \frac{35}{8} \cdot J_4 \cdot \frac{a_e^4}{a^5} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^5 \cdot \left[\frac{3}{35} - \frac{3}{7} \cdot \sin^2 i + \frac{3}{8} \cdot \sin^4 i + \sin^2 i \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 i \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos 2 \cdot (\nu + \omega) + \frac{1}{8} \cdot \sin^4 i \cdot \cos 4 \cdot (\nu + \omega) \right] \right\}.$$

Метод осреднения позволяет выделить из функции R неперIODические, долгопериодические и короткопериодические члены. Основной интерес представляют неперIODические составляющие:

$$\bar{R}_{J_2} = \mu \cdot \frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \frac{a_e^2}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 i \right), \\ \bar{R}_{J_4} = -\mu \cdot \frac{35}{8} \cdot J_4 \cdot \frac{a_e^4}{a^5} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^5 \cdot \left(\frac{3}{35} - \frac{3}{7} \cdot \sin^2 i + \frac{3}{8} \cdot \sin^4 i \right).$$

Из исследования результатов аналитического интегрирования уравнений Лагранжа с пертурбационной функцией геопотенциала известно, что наиболее значительны возмущения в движении ИСЗ от зональных гармоник. При этом четные зональные гармоники вызывают вековые возмущения только в угловых элементах орбиты (Ω , ω , M), нечетные зональные гармоники вековых возмущений не вызывают. Короткопериодические возмущения зональные гармоники вызывают во всех элементах орби-

ты, а долгопериодические возмущения — во всех элементах за исключением большой полуоси. Наиболее значительные долгопериодические возмущения вызывают нечетные зональные гармоники.

Формулы, которые получаются в результате аналитического интегрирования уравнений Лагранжа с пертурбационной функцией геопотенциала, используются для расчета возмущенных значений элементов орбиты и как уравнения поправок для определения и уточнения коэффициентов разложения геопотенциала.

Задание № 5

Вычисление возмущений элементов орбиты ИСЗ от второй, третьей и четвертой зональных гармоник геопотенциала

Постановка задачи

Даны значения кеплеровых элементов орбиты ИСЗ ($a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$) на момент времени t_0 . В результате воздействия на ИСЗ различных возмущающих факторов все элементы орбиты со временем изменяются. В соответствии с принципом Лагранжа вариации произвольных постоянных в случае возмущенного движения координаты и компоненты скорости ИСЗ связаны с элементами орбиты теми же формулами, что и при невозмущенном движении. Следовательно, для расчета возмущенной эфемериды ИСЗ ($x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) на некоторый момент времени t можно воспользоваться формулами из предыдущего задания № 4, предварительно найдя возмущенные значения всех элементов орбиты на этот момент.

Исходные данные

В качестве исходных значений кеплеровых элементов орбиты ИСЗ ($a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$) на момент времени t_0 берутся величины, полученные при выполнении задания № 3.

Возмущенные значения угловых элементов орбиты ИСЗ необходимо вычислить на момент времени, отстоящий от момента t_0 на сутки,

$$t = t_0 + 86400 \text{ с.}$$

Гравитационный параметр Земли $\mu = 398600,5 \cdot 10^9 \text{ [м}^3/\text{с}^2\text{]}$.

Экваториальный радиус Земли $a_e = 6378137 \text{ [м]}$.

Значения коэффициентов зональных гармоник геопотенциала:

$$J_2 = 108263 \cdot 10^{-8}, \quad J_3 = -254 \cdot 10^{-8}, \quad J_4 = -161 \cdot 10^{-8}.$$

Ввиду громоздкости формул для расчета возмущений рассмотрим и учтем только наиболее важные возмущения элементов орбиты, связанные с зональными гармониками геопотенциала: второй, третьей и четвертой.

В результате интегрирования уравнений Лагранжа с неперiodическими составляющими пертурбационной функции типа \bar{K}_2 и \bar{K}_3 получаются аналитические выражения, описывающие вековой уход угловых элементов M , Ω и ω от их начальных значений в эпоху t_0 .

Вековые возмущения первого порядка от второй зональной гармоники:

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Omega} &= -\frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^2 \cdot n_0 \cdot \cos i_0 \cdot (t - t_0), \\ \delta\bar{\omega} &= \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^2 \cdot n_0 \cdot (5 \cdot \cos^2 i_0 - 1) \cdot (t - t_0), \\ \delta\bar{M}_0 &= \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^2 \cdot n_0 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \cdot (3 \cdot \cos^2 i_0 - 1) \cdot (t - t_0).\end{aligned}$$

Это наиболее значительные составляющие вековых возмущений. Вековые возмущения от других четных гармоник примерно в 1000 раз меньше. Первое из приведенных выражений показывает, что под действием второй зональной гармоники геопотенциала линия узлов прецессирует навстречу орбитальному движению ИСЗ, т.е. при $0^\circ < i < 90^\circ$ долгота восходящего узла уменьшается, а при $90^\circ < i < 180^\circ$ — возрастает. Скорость прецессии линии узлов минимальна ($\dot{\Omega} = 0$) при $i = 90^\circ$ и максимальна при $i \rightarrow 0^\circ$ или $i \rightarrow 180^\circ$. Из второго выражения видно, что при $(5 \cdot \cos^2 i - 1) = 0$ вековые возмущения в аргументе перигея от J_2 отсутствуют, т.е. $i_k = 63^\circ, 43494 \dots$ — критический наклон. При $0 \leq i < i_k$ или $(180^\circ - i_k) < i < 180^\circ$ — линия апсид движется в направлении обращения ИСЗ, а при $i_k < i < (180^\circ - i_k)$ — навстречу орбитальному движению ИСЗ.

Вековые возмущения второго порядка от второй зональной гармоники:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Omega} &= -\frac{3}{32} \cdot J_2^2 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^4 \cdot n_0 \cdot \cos i_0 \cdot \left[\left(36 + 4 \cdot e_0^2 - \sqrt{1 - e_0^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(40 - 5 \cdot e_0^2 - 72 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \right) \cdot \sin^2 i_0 \right] \cdot (t - t_0), \\ \delta\bar{\omega} &= \frac{3}{128} \cdot J_2^2 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^4 \cdot n_0 \cdot \left(4 - 5 \cdot \sin^2 i_0 \right) \cdot \left[\left(96 + 24 \cdot e_0^2 - 96 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(86 - e_0^2 - 144 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \right) \cdot \sin^2 i_0 \right] \cdot (t - t_0), \\ \delta\bar{M}_0 &= \frac{3}{128} \cdot J_2^2 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^4 \cdot n_0 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \left[16 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} + 25 \cdot (1 - e_0^2) - 15 + \right. \\ &\quad \left. + \left[30 - 96 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} - 90 \cdot (1 - e_0^2) \right] \cdot \cos^2 i_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[105 + 144 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} + 25 \cdot (1 - e_0^2) \right] \cdot \cos^4 i_0 \right] \cdot (t - t_0). \end{aligned}$$

Вековые возмущения первого порядка от четвертой зональной гармоника:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Omega} &= \frac{15}{32} \cdot J_4 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^4 \cdot n_0 \cdot \left(2 + 3 \cdot e_0^2 \right) \cdot \left(4 - 7 \cdot \sin^2 i_0 \right) \cdot \cos i_0 \cdot (t - t_0), \\ \delta\bar{\omega} &= -\frac{15}{128} \cdot J_4 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^4 \cdot n_0 \cdot \left[\left(64 - 248 \cdot \sin^2 i_0 + 196 \cdot \sin^4 i_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + e_0^2 \cdot \left(72 - 252 \cdot \sin^2 i_0 + 189 \cdot \sin^4 i_0 \right) \right] \cdot (t - t_0), \\ \delta\bar{M}_0 &= -\frac{45}{128} \cdot J_4 \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right)^4 \cdot n_0 \cdot e_0^2 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \left(3 - 30 \cdot \cos^2 i_0 + 35 \cdot \cos^4 i_0 \right) \cdot (t - t_0). \end{aligned}$$

В результате интегрирования уравнений Лагранжа с пертурбационной функцией \tilde{R}_{J_3} получаются аналитические выражения, описывающие долгопериодические колебания элементов e , i , Ω , ω , M относительно их начальных значений в эпоху t_0 :

$$\begin{aligned} \delta e &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{J_3}{J_2}\right) \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right) \cdot (1 - e_0^2) \cdot \sin i_0 \cdot \sin[\omega_0 + \omega' \cdot (t - t_0)], \\ \delta i &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{J_3}{J_2}\right) \cdot \left(\frac{a_e}{P_0}\right) \cdot e_0 \cdot \cos i_0 \cdot \sin[\omega_0 + \omega' \cdot (t - t_0)], \end{aligned}$$

$$\delta\dot{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} J_3 \\ J_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ P_0 \end{pmatrix} \cdot \frac{e_0}{\operatorname{tg} i_0} \cdot \cos[\omega_0 + \omega' \cdot (t - t_0)],$$

$$\delta\dot{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} J_3 \\ J_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ P_0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sin^2 i_0 - e_0 \cdot \cos^2 i_0}{e_0 \cdot \sin i_0} \cdot \cos[\omega_0 + \omega' \cdot (t - t_0)],$$

$$\delta\dot{M} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} J_3 \\ J_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ P_0 \end{pmatrix} \cdot \frac{(1 - e_0^2)^{\frac{3}{2}}}{e_0} \cdot \sin i_0 \cdot \cos[\omega_0 + \omega' \cdot (t - t_0)],$$

где $\dot{\omega}' = \dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_{J_4} + \dot{\omega}_{J_2^2}$ — сумма коэффициентов вековых возмущений.

Видно, что период долгопериодических возмущений равен периоду обращения линии апсид за счет вековых возмущений.

Из-за большой величины коэффициента J_2 амплитуды короткопериодических возмущений от второй зональной гармоники приблизительно такие же как амплитуды долгопериодических возмущений от третьей зональной гармоники. В координатах низких ИСЗ они могут достигать нескольких километров. В связи с этим также следует учитывать основные составляющие короткопериодических возмущений от второй зональной гармоники. Ввиду громоздкости формул для расчета этих возмущений в данной работе ограничимся учетом только нескольких наиболее крупных членов:

$$\delta\ddot{a} = \frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2 \cdot a_0 \cdot \left[(2 - 3 \cdot \sin^2 i_0) \cdot e_0 \cdot \cos M_0 + \sin^2 i_0 \cdot \cos(2 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \dots \right],$$

$$\delta\ddot{e} = \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2 \cdot \left\{ (2 - 3 \cdot \sin^2 i_0) \cdot \cos M_0 + \sin^2 i_0 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \cos(M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \frac{7}{6} \cdot \cos(3 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) \right] + \dots \right\},$$

$$\delta\ddot{i} = \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2 \cdot \sin i_0 \cdot \cos i_0 \cdot \left[-e_0 \cdot \cos(M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \cos(2 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \frac{7}{3} \cdot e_0 \cdot \cos(3 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \dots \right],$$

$$\delta\ddot{\Omega} = \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2 \cdot \cos i_0 \cdot \left[-6 \cdot e_0 \cdot \sin M_0 + \sin(2 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \frac{7}{3} \cdot e_0 \cdot \sin(3 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \dots \right],$$

$$\delta\bar{\pi} = \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 \cdot \left\{ (\cos i_0 - 1 + \sin^2 i_0) \cdot \sin(2 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) + (2 - 3 \cdot \sin^2 i_0) \cdot \frac{1}{e_0} \cdot \sin M_0 - \right. \\ \left. - \sin^2 i_0 \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot e_0} \cdot \sin(M_0 + 2 \cdot \omega_0) + \frac{7}{6 \cdot e_0} \cdot \sin(3 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) \right] + \dots \right\},$$

$$\delta\bar{\varepsilon} = \frac{3}{4} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 \cdot \left\{ e_0 \cdot \frac{13}{2} \cdot (2 - 3 \cdot \sin^2 i_0) \cdot \sin M_0 + (\cos i_0 - 1 + \sin^2 i_0) \cdot \sin(2 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) - \right. \\ \left. - 3 \cdot \sin^2 i_0 \cdot \left[\sin(2 \cdot M_0 + 2 \cdot \omega_0) - \frac{13}{12} \cdot \sin(M_0 + 2 \cdot \omega_0) \right] + \dots \right\},$$

$$\delta\bar{\omega} = \delta\bar{\pi} - \delta\bar{\Omega},$$

$$\delta\bar{M} = \delta\bar{\varepsilon} - \delta\bar{\pi}.$$

После вычисления различных составляющих возмущений сами возмущенные значения элементов орбиты на момент t получаются по формулам:

$$a = a_0 + \delta\bar{a}_{J_2},$$

$$e = e_0 + \delta\bar{e}_{J_3} + \delta\bar{e}_{J_2},$$

$$i = i_0 + \delta\bar{i}_{J_3} + \delta\bar{i}_{J_2},$$

$$\Omega = \Omega_0 + \delta\bar{\Omega}_{J_2} + \delta\bar{\Omega}_{J_4} + \delta\bar{\Omega}_{J_2^2} + \delta\bar{\Omega}_{J_3} + \delta\bar{\Omega}_{J_2},$$

$$\omega = \omega_0 + \delta\bar{\omega}_{J_2} + \delta\bar{\omega}_{J_4} + \delta\bar{\omega}_{J_2^2} + \delta\bar{\omega}_{J_3} + \delta\bar{\omega}_{J_2},$$

$$M = M_0 + n_0 \cdot (t - t_0) + \delta\bar{M}_{J_2} + \delta\bar{M}_{J_4} + \delta\bar{M}_{J_2^2} + \delta\bar{M}_{J_3} + \delta\bar{M}_{J_2}.$$

Результаты расчетов следует свести в таблицу вида

Элементы орбиты	Возмущения						Элементы орбиты в момент t
	$\delta\bar{\mathcal{E}}_{J_2}$	$\delta\bar{\mathcal{E}}_{J_2^2}$	$\delta\bar{\mathcal{E}}_{J_4}$	$\delta\bar{\mathcal{E}}_{J_3}$	$\delta\bar{\mathcal{E}}_{J_2}$	Σ	
a [м]	0	0	0	0			
e	0	0	0				
i [°]	0	0	0				
Ω [°]							
ω [°]							
M [°]							

4. Принципы геодезического использования космических радионавигационных систем

В настоящее время широкое применение в геодезии нашли глобальные космические радионавигационные системы второго поколения: американская — NAVSTAR (NAVigation Satellite providing Time And Range), все чаще именуемая GPS (Global Positioning System), и отечественная — ГЛОНАСС (Глобальная Навигационная Спутниковая Система). Обе системы разрабатывались по заказам и находятся под управлением министерств обороны. В настоящее время они имеют статус систем двойного (военно-гражданского) применения. Системы предназначены для круглосуточного оперативного высокоточного определения пространственного местоположения, скорости и ориентации объектов в любой точке земного шара и в околоземном пространстве.

Структура систем ГЛОНАСС и GPS NAVSTAR

В состав каждой из систем входят:

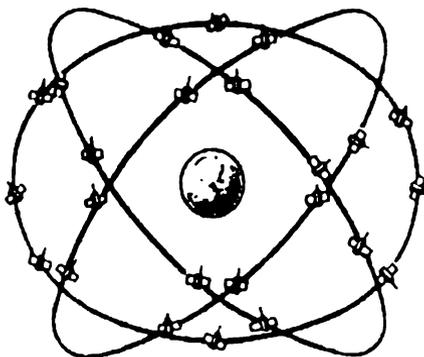
- подсистема космических аппаратов и стартовые комплексы (так называемый космический сегмент системы — Space Segment)*;
- подсистема контроля и управления (наземный сегмент управления — Control Segment);
- подсистема приемной аппаратуры потребителей (сегмент потребителя — User Segment).

Космический сегмент систем состоит из стартовых комплексов, обеспечивающих вывод космических аппаратов на орбиту, и орбитальной группировки навигационных искусственных спутников Земли (НИСЗ). Каждая из систем GPS NAVSTAR и ГЛОНАСС включает группировку из 24 рабочих НИСЗ, обращающихся на высоких круговых орбитах. Периоды обращения спутников близки к половине земных суток. Спутники ГЛОНАСС распределены в 3-х, а спутники GPS — в 6-и орбитальных плоскостях (см. рис.4.1 и табл.4.1). Орбиты расположены таким образом, что в любое время над любой точкой земной поверхности видно «*созвездие*» из нескольких НИСЗ.

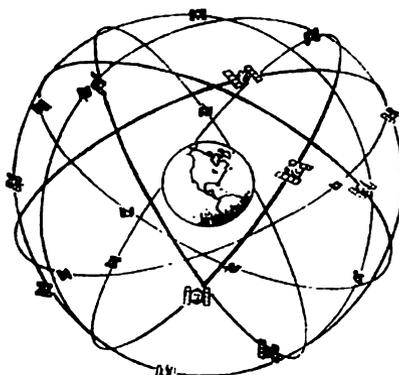
Основными элементами комплекса бортовой аппаратуры являются стандарты частоты и времени, обеспечивающие генерацию несущих частот и меток шкалы времени; подсистема генераций широкополос-

* В скобках даны наименования, принятые в США в официальных документах по GPS.

ных навигационных радиосигналов путем модуляции несущих частот псевдослучайными дальномерными кодами; передатчик навигационных сигналов и телеметрической информации; антенно-фидерные устройства; приемное устройство для связи с наземными центрами управления; бортовые вычислительные средства, предназначенные для хранения и обработки данных, полученных от наземных центров управления, формирования навигационных сообщений, выработки команд, управляющих работой аппаратуры НИСЗ и ее контролем; система ориентации и стабилизации НИСЗ на орбите; система электропитания, солнечные и аккумуляторные батареи.



а) Орбитальная группировка спутников ГЛОНАСС



б) Орбитальная группировка спутников NAVSTAR

Рис. 4.1

Наземный сегмент контроля и управления каждой системы состоит из сети станций, основные задачи которых — осуществление непрерывного слежения за НИСЗ в целях телеметрического контроля и управления их функционированием, уточнение орбит НИСЗ, прогноз движения спутников, определение поправок бортовых шкал времени НИСЗ и загрузка этих данных в память компьютеров НИСЗ для последующего распространения эфемеридной информации среди потребителей системы в составе *навигационных сообщений*.

Таблица 4.1.

Основные характеристики систем GPS NAVSTAR и ГЛОНАСС.

ПАРАМЕТРЫ	ГЛОНАСС	GPS NAVSTAR
Кол-во НИСЗ в развернутой системе (основные + запасные)	24	24
Число орбитальных плоскостей	3	6
Наклон орбиты (град.)	64,8	55
Средняя высота орбиты (км)	19100	20183
Период обращения НИСЗ	11 ^h 15 ^m	11 ^h 58 ^m
Форма представления эфемеридных данных	3 координаты, 3 скор., 3 уск.	кеплеровы элементы
Система координат	ЕСК-90 (ПЗ-90)	WGS-84
Опорная шкала времени	UTC (SU)	UTC (US)
Размер навигационного сообщения (бит)	7500	37500
Время передачи полного альманаха (мин.)	2,5	12,5
Код навигационного сообщения	код Хемминга	код Хемминга
Метод разделения сигналов НИСЗ	частотный	кодовый
Первая частотная полоса L1 (МГц)	(1602,5627– –1615,5)±0,511	1575,42±1,023
Вторая частотная полоса L2 (МГц)	(1246,4375– –1256,5)±0,511	1227,60±1,023
Тип дальномерного кода	М-последовательность,	код Голда
Число элементов в грубом дальномерном коде (С/А)	511	1023
Тактовая частота С/А-кода (МГц)	0,511	1,023
Тактовая частота Р-кода (МГц)	5,11	10,23

Под *сегментом потребителя* понимается совокупность аппаратно-программных средств, реализующих определение навигационных данных для объектов на суше, на поверхности моря, в воздухе, околоземном космическом пространстве, а также определение положений геодезических пунктов на поверхности Земли.

К настоящему времени разработано несколько десятков типов потребительской аппаратуры, различной по своему назначению, параметрам и свойствам. По предназначению приемную аппаратуру можно разделить на: навигационную, геодезическую, аппаратуру для сверки шкал времени и аппаратуру для управления машинами. По типу используемых для измерений сигналов НИСЗ приемная аппаратура может быть: кодовая, использующая дальномерные коды модуляции несущих частот сигналов; фазовая, использующая фазовые измерения на несущих частотах сигналов и доплеровская, использующая доплеровское смещение частот. Для точных геодезических работ используется фазовая аппаратура, работающая по гражданскому и военному кодам. По количеству несущих частот принимаемых сигналов приемники подразделяются на одночастотные и двухчастотные. Использование для измерений двух частотных поддиапазонов связано с требованием учета влияния ионосферы на распространение радиосигналов. Поскольку распространение сигналов на частотах L1 и L2 при прохождении ионосферы происходит по-разному (характеризуется существенно отличающимися искривлением пути и временной задержкой), то в дальнейшем при обработке это позволяет почти полностью избавиться от влияния ионосферы. По способу слежения за НИСЗ приемники подразделяются на одноканальные, многоканальные и мультиплексные. Канал приемника предназначен для поиска, захвата и слежения за навигационным радиосигналом и его цифровой обработки. Как правило, в современных приемниках используется несколько десятков каналов, что позволяет одновременно наблюдать все видимые над горизонтом спутники ГЛОНАСС и NAVSTAR на частотах L1 и L2.

Основными элементами аппаратуры потребителя являются: антенный блок, включающий собственно антенну для приема спутниковых сигналов и предварительный линейный усилитель; блок поиска сигнала, его усиления и выделения из сигнала навигационного сообщения; опорный генератор; измерительный блок; специализированный компьютер.

Общие принципы определения местоположения в системах GPS и ГЛОНАСС

Абсолютные определения

Радиосигналы, непрерывно излучаемые в эфир НИСЗ, создают навигационное поле и позволяют определять местоположение приемников беззапросным методом.

В GPS сигнал на частоте L1 закодирован C/A (Clear/Acquisition или Coarse/Acquisition) легко распознаваемым грубым кодом «свободного доступа», а на частотах L1 и L2 — P (Protected или Precision) «защищенным» точным кодом (может использоваться дополнительно зашифрованный вариант точного кода, называемый Y-кодом). В ГЛОНАСС сигналы тоже закодированы подобным образом. Войти в слежение за сигналом точного P-кода (транслируемые фрагменты которого имеют недельную длительность) можно лишь с помощью специального ключевого слова, передаваемого грубым C/A-кодом (с длительностью 1 мс). Расшифровка P(Y)-кода доступна только ограниченному кругу так называемых авторизованных потребителей.

Оба кода — *псевдослучайные*, они выглядят как длинные ряды двоичных символов (нулей и единиц), расположенных в случайном порядке. В действительности порядок нулей и единиц в каждой кодовой последовательности является строго определенным, постоянным и точно известным, т. е. на самом деле эти кодовые последовательности неслучайные, а детерминированные со специально выбранной структурой, которая позволяет достаточно быстро и точно синхронизировать одинаковые кодовые сигналы, принимаемые от НИСЗ и генерируемые в приемнике. По своим статистическим характеристикам радиосигналы, полученные с помощью таких кодовых последовательностей очень похожи на обычные радиошумы, поэтому их часто называют псевдошумовыми. Хотя грубый и точный коды отличаются друг от друга по уровню сложности, длительности и периодичности повторения кодовой последовательности в сигналах НИСЗ, но для обоих вероятность случайного совпадения всех импульсов кодовой посылки с шумовыми импульсами чрезвычайно мала, т. е. такое событие практически исключено.

Применение принципа псевдослучайного кодирования позволяет работать с сигналами, мощность которых значительно ниже мощности шума в используемой полосе частот. Кроме того, применение псевдослучайного кодирования позволяет всем спутникам одновременно передавать сообщения на одних и тех же несущих частотах без взаимных помех. Такой подход реализован в GPS, в которой используется кодовое разделение спутников, в отличие от ГЛОНАСС, где разделение — частотное. В GPS каждый НИСЗ имеет два собственных уникальных псевдослучайных кода, благодаря этому выделение сигналов данного спутника сводится просто к выбору соответствующих кодов.

Для военных целей применение псевдослучайного кода удобно тем, что, с одной стороны, с его помощью можно оградить систему от несанкционированного доступа, а с другой стороны, такой кодированный широкополосный сигнал обладает высокой помехоустойчивостью по отношению к организованным помехам.

Помимо псевдослучайных дальномерных кодов сигналы НИСЗ несут кодированную цифровую информацию о состоянии и движении спутников системы, сформированную в виде кадров навигационного сообщения.

Навигационное сообщение содержит: метки времени; информацию о состоянии спутника, передающего сигнал; параметры, характеризующие работу его бортовых часов, позволяющие определить поправку этих часов; коэффициенты модели ионосферы (эта информация используется только при работе с одночастотными приемниками для определения задержки сигналов в ионосфере); параметры согласования шкалы системного времени с UTC; эфемериды спутников, полученные из наблюдений с наземных станций слежения и последующего прогнозирования их орбит. Эфемеридная информация подразделяется на оперативные данные и альманах. *Оперативные эфемеридные данные*, характеризующие орбиту только одного передающего спутника на некотором относительно коротком интервале времени, используются при обработке результатов наблюдений, на их основе вычисляют местоположения спутников на моменты измерений в общеземной системе координат WGS-84 или ECK-90. *Альманах* — это приближенные эфемериды и данные о работоспособности всех навигационных спутников системы. Сбор полного альманаха системы в аппаратуре потребителя выполняется в про-

цессе наблюдений и занимает около 2,5 минут в ГЛОНАСС и 12,5 минут в GPS. Данные альманаха используются при поиске сигналов от НИСЗ и для планирования наблюдений.

Поток навигационных данных передается со скоростью 50 бит/с.

Навигационное сообщение GPS-спутника состоит из 1500 бит данных, сформированных в кадр, что соответствует 30 с по времени его передачи. Все сообщение разделено на 5 строк (субкадров) объемом по 300 бит. Строки делятся по 6 с и передаются последовательно без перерыва. Оперативная информация о передающем НИСЗ полностью содержится в каждом кадре, т. е. период ее повторения — 30 с. Данные альманаха распределены между различными кадрами и для получения их полного набора требуется обработать 25 навигационных сообщений, поступивших последовательно в течение 750 с.

Состав оперативной эфемеридной информации, передаваемой в навигационном сообщении GPS:

NW — номер текущей GPS-недели, отсчитываемый от полуночи с 5-го на 6-ое января 1980г.;

t_{oc} — референчный момент времени, к которому относится эфемеридная информация, отсчитываемый от начала текущей GPS-недели;

t_{oc} — референчный момент времени, к которому относится информация о часах НИСЗ, отсчитываемый от начала текущей GPS-недели;

a_0, a_1, a_2 — коэффициенты модели коррекции часов НИСЗ;

Δt_{GD} — поправка за групповую задержку сигнала L1 в аппаратуре НИСЗ;

M_0 — средняя аномалия на референчный момент;

Δl — отклонение величины среднего движения от предвычисленного значения;

e — эксцентриситет орбиты;

\sqrt{a} — корень из большой полуоси орбиты;

Ω_0 — долгота восходящего узла орбиты на начало GPS-недели;

$\dot{\Omega}$ — скорость изменения долготы восходящего узла орбиты;

i_0 — угол наклона орбиты;

$(i)'$ — скорость изменения угла наклона орбиты;

ω — аргумент перигея.

Амплитуды косинусоидальных и синусоидальных членов в формулах для поправок за суммарное влияние долгопериодических возмущений от второй зональной гармоники, лунно-солнечного притяжения и светового давления:

C_{uc}, C_{us} — в аргумент широты;

C_{rc}, C_{rs} — в длину геоцентрического радиуса-вектора НИСЗ;

C_{ic}, C_{is} — в угол наклона орбиты.

Навигационное сообщение спутника ГЛОНАСС формируется в виде 5 кадров, образующих вместе суперкадр. Каждый кадр состоит из 15 строк объемом 100 бит. Длительность передачи строки — 2 с, одного кадра — 30 с, а продолжительность всего суперкадра — 2,5 мин. Оперативная информация о передающем НИСЗ полностью содержится в первых 4-х строках каждого кадра, т. е. период ее повторения 30 с. Данные альманаха распределены между различными кадрами: по пяти НИСЗ в кадрах с 1 по 4 и четырем в кадре 5. Поэтому весь альманах системы содержится в каждом суперкадре, т. е. для получения полного набора неоперативных данных требуется 150 с.

Состав оперативной эфемеридной информации, передаваемой в навигационном сообщении ГЛОНАСС:

t_b — референцный момент времени, к которому относится эфемеридная информация, отсчитываемый от начала текущих суток по московскому декретному времени, т. е. UTC(SU) + 3^h00^m. Дискретность представления t_b составляет 15 минут, поскольку смена оперативной информации производится строго в моменты времени кратные 30 и 60 минутам бортовой шкалы НИСЗ, а момент t_b относится к середине текущего 30(60)-минутного интервала;

$\tau = (t_c - t_b)$ — сдвиг бортовой шкалы времени передающего НИСЗ относительно шкалы системного времени ГЛОНАСС t_c на референцный момент t_b ;

$\gamma = (f_n - f_n) / f_n$ — относительное отклонение несущей частоты f_n излучаемого навигационного радиосигнала НИСЗ от ее номинального значения f_n на референцный момент t_b ;

X, Y, Z — прямоугольные координаты передающего НИСЗ в ЕСК-90 на момент t_b ;

$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ — составляющие вектора скорости передающего НИСЗ в ЕСК-90 на момент t_b ;

$\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$ — составляющие вектора ускорения передающего НИСЗ в ЕСК-90 на момент t_b , обусловленные влиянием Луны и Солнца.

Аппаратура потребителя осуществляет автоматический поиск и выбор рабочего созвездия НИСЗ, захват и сопровождение радиосигналов спутников, выполнение их обработки. В процессе обработки кодовый дальномерный сигнал, переданный с НИСЗ, сравнивается с аналогичным сигналом, генерированным в приемнике, и по времени его задержки определяется дальность до соответствующего НИСЗ. Момент посылки сигнала фиксируется по часам спутника, момент прихода — по часам приемника, разность моментов дает время прохождения сигнала, но с ошибкой синхронизации часов. Величина дальности, определяемой в приемнике потребителя по измеренному таким путем времени распространения сигнала, отличается от истинной дальности до спутника из-за ошибки синхронизации часов НИСЗ и приемника с системным временем, поэтому ее называют *псевдодальностью*. Поправки часов всех НИСЗ относительно шкалы системного времени могут быть достаточно точно вычислены на моменты наблюдений по оперативной информации из их навигационных сообщений. Тогда при синхронных наблюдениях нескольких НИСЗ все измеренные псевдодальности будут отличаться от истинных дальностей на одну и ту же величину, обусловленную ошибкой синхронизации часов приемника потребителя. Поправка за десинхронизацию часов приемника потребителя может быть определена как дополнительное неизвестное при решении навигационной задачи.

Навигационная задача по определению абсолютного местоположения потребителя в заданной системе координат решается в компьютере приемника методом пространственной линейной засечки. При одновременных наблюдениях нескольких НИСЗ:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \sqrt{(X_1 - X_n)^2 + (Y_1 - Y_n)^2 + (Z_1 - Z_n)^2} + \Delta D, \\
 D_2 &= \sqrt{(X_2 - X_n)^2 + (Y_2 - Y_n)^2 + (Z_2 - Z_n)^2} + \Delta D, \\
 D_3 &= \sqrt{(X_3 - X_n)^2 + (Y_3 - Y_n)^2 + (Z_3 - Z_n)^2} + \Delta D, \\
 D_4 &= \sqrt{(X_4 - X_n)^2 + (Y_4 - Y_n)^2 + (Z_4 - Z_n)^2} + \Delta D, \\
 &\dots\dots\dots \\
 D_s &= \sqrt{(X_s - X_n)^2 + (Y_s - Y_n)^2 + (Z_s - Z_n)^2} + \Delta D,
 \end{aligned}$$

где D_i ($i=1, 2, 3, 4, \dots, n$) — псевдодальность до i -ого НИСЗ, получаемая по времени распространения радиосигнала от спутника до приемника как скорость света умноженная на данный интервал времени;

$\sqrt{(X_i - X_n)^2 + (Y_i - Y_n)^2 + (Z_i - Z_n)^2}$ — истинная геометрическая дальность до i -ого НИСЗ;

X_i, Y_i, Z_i — координаты i -ого НИСЗ в момент наблюдений, вычисляемые по оперативной эфемеридной информации из навигационного сообщения;

X_n, Y_n, Z_n — определяемые координаты потребителя;

ΔD — поправка за десинхронизацию часов приемника.

Число определяемых неизвестных в приведенных выше уравнениях наблюдений равно 4 (3 координаты потребителя и поправка часов приемника), поэтому для решения навигационной задачи (если потребителя интересуют все составляющие координат) необходимо принимать сигналы не менее 4-х спутников. Большинство видов аппаратуры потребителя способно одновременно принимать сигналы более 4-х спутников и навигационная задача решается по методу наименьших квадратов. При этом обычно выполняется линеаризация уравнений наблюдений в окрестности приближенного местоположения потребителя, которая приводит к системе уравнений поправок для координат определяемого пункта и часов приемника. С геометрической точки зрения это означает, что засечка несколькими сферами сводится к пространственной засечке плоскостями.

Координаты, получаемые в результате решения навигационной задачи, соответствуют общеземной системе координат, принятой в GPS или ГЛОНАСС, т. е. WGS-84 или EСК-90.

Помимо ухода генераторов частоты НИСЗ и приемника потребителя, точность определения местоположения ухудшается из-за влияния ионосферы и тропосферы на распространение радиосигналов, ошибок параметров орбит спутников, многолучевости, ошибок измерений и т. д. Для ослабления влияния атмосферы на точность измерения псевдодальностей используются двухчастотные измерения, а также модели ионосферы и тропосферы. Ошибки орбит НИСЗ могут быть уменьшены за счет использования более точных эфемерид. Влияние многолучевого распространения радиосигналов ослабляется установкой специальных отражателей на приемные антенны.

Тем не менее ошибки абсолютных определений могут достигать величины нескольких метров (в основном из-за ошибок моделирования влияния атмосферы и ошибок прогноза орбит НИСЗ), а в случае искусственного загробления сигналов (в GPS при включенном режиме Selective Availability) — даже нескольких десятков метров, поэтому для получения более точного местоположения потребителей пользуются способом относительных определений.

Относительные определения

Для достижения высокой точности определения координат применяется способ относительных определений, который позволяет исключить или значительно ослабить часть ошибок измерений, в том числе самые большие по величине ошибки, обусловленные влиянием на сигнал НИСЗ среды распространения.

Способ относительных определений основан на использовании результатов синхронных наблюдений НИСЗ как минимум двумя приемниками. Расстояния между пунктами наблюдений значительно меньше, чем расстояние до любого из наблюдаемых спутников. Поэтому можно считать, что искажения сигналов НИСЗ, приобретаемые за время их прохождения в атмосфере, одинаковы или очень близки для обоих пунктов наблюдений. По измерениям абсолютное местоположение пунктов определяется с некоторой ошибкой. Имея информацию об истинном положении одного из пунктов (опорные координаты), можно определить величину этой ошибки, учесть ее в обработке измерений на другом пункте и таким образом найти более точное местоположение этого неизвестного пункта.

В навигационной аппаратуре потребителей абсолютные и относительные определения осуществляются по кодовым сигналам GPS или ГЛОНАСС. Для выполнения относительных определений по кодовым измерениям в реальном масштабе времени используют так называемый дифференциальный режим (DGPS или DGNSS), при котором полученные на опорных пунктах поправки поступают на определяемые пункты по радиоканалам. Применяются два основных способа дифференциальной коррекции: коррекция координат и коррекция навигационных параметров. Первый способ грубый, но позволяет передавать очень компактные сообще-

ния. Второй способ обеспечивает более высокую точность, но требует передачи ббльшего объема данных. При расстояниях между пунктами до нескольких сотен километров достижимая точность относительных определений координат потребителей кодовой аппаратурой составляет около 1-3 м при включенном режиме искусственного загробления сигналов и несколько дециметров без этого режима.

Для высокоточных геодезических определений используются так называемые фазовые приемники. Фазовые измерения на несущих частотах сигналов НИСЗ обеспечивают более высокую разрешающую способность по сравнению с кодовыми измерениями. Поэтому фазы являются основными измеряемыми величинами при решении задач геодезии. Точность измерения фазы несущей в современных спутниковых приемниках составляет в линейной мере около 0,2-1,0 мм. Однако, в отличие от кодовых, фазовые измерения не позволяют получить координаты в момент измерений без вспомогательной информации с опорной станции. Поэтому в геодезической аппаратуре результаты наблюдений НИСЗ на определяемых пунктах либо обрабатываются вместе с данными, поступающими от опорной станции по радиоканалу, либо накапливаются в запоминающем устройстве для проведения последующей совместной компьютерной обработки с данными опорной станции.

Линии между точками наблюдений, для которых с помощью фазовой геодезической аппаратуры определяются приращения координат, называют «базовыми линиями». Также как в предыдущем случае длина базовой линии значительно меньше, чем расстояние до любого из наблюдаемых спутников. Обычно ограничиваются расстояниями до 10-15 км для одночастотных приемников и 30-50 км — для двухчастотных. В связи с этим искажения сигналов НИСЗ, приобретаемые за время прохождения в атмосфере, на концах базовой линии в одни и те же моменты времени практически одинаковы и почти полностью исключаются при формировании разностей синхронных наблюдений.

Достижимая точность определений базовых линий фазовой аппаратурой составляет около $(15\text{мм} \pm 3 \cdot 10^6 \cdot L)$ для одночастотных измерений и до $(3-5\text{мм} \pm 10^6 \cdot L)$ для двухчастотных в зависимости от длины базовой линии L , типа спутникового приемника и способа обработки результатов измерений.

Задание № 6

Определение координат пункта земной поверхности по результатам радиотехнических наблюдений навигационных ИСЗ

Постановка задачи

На пунктах земной поверхности, приближенные координаты которых известны, проведены сеансы наблюдений навигационных спутников систем ГЛОНАСС и GPS с помощью приемников Ashtech GG-24 или JPS Legacy: зафиксированы моменты наблюдений, произведены измерения навигационных параметров, выделены и декодированы оперативные эфемеридные данные навигационных сообщений наблюдавшихся ИСЗ. Требуется определить точные координаты пунктов наблюдений в общеземных системах координат ECK-90 и WGS-84 соответственно. В учебных целях ограничимся только обработкой результатов кодовых наблюдений ИСЗ.

Исходные данные

Результаты кодовых наблюдений навигационных спутников систем ГЛОНАСС и GPS, полученные с помощью двухсистемных приемников типа Ashtech GG-24 или JPS Legacy.

Данные представлены в формате RINEX v.2.

Результаты измерений располагаются по эпохам.

Каждой эпохе наблюдений соответствует структура вида:

гг	мм	дд	hh	mm	sec	OK	Всего ИСЗ	G№	R№	G№	G№	R№	R№	...	G№
ИСЗ1 фаза L1						у р о в е н ь с и г н а л а	код C1	доплер D1		фаза L2				
ИСЗ2 фаза L1							код C1	доплер D1		фаза L2				
ИСЗ3 фаза L1							код C1	доплер D1		фаза L2				
ИСЗ4 фаза L1							код C1	доплер D1		фаза L2				
ИСЗ5 фаза L1							код C1	доплер D1		фаза L2				
ИСЗ6 фаза L1							код C1	доплер D1		фаза L2				
..... ИСЗn фаза L1						 код C1 доплер D1	 фаза L2				

При совместной обработке наблюдений НИСЗ обеих систем либо резервируются номера с 1 по 32 для спутников GPS и с 33 по 64 для спутников ГЛОНАСС, либо вводятся дополнительные признаки G и R. Например, G11, R15. Признак G соответствует GPS-спутнику, R — спутнику ГЛОНАСС.

Количество и порядок расположения результатов различных типов измерений может быть иным, это указывается в заголовке файла в строке "# / TYPES OF OBSERV", например, «7 C1 P1 P2 L1 L2 D1 D2».

Оперативная эфемеридная информация, полученная в составе навигационных сообщений, сгруппирована по номерам НИСЗ.

Каждому НИСЗ соответствует структура вида:

— для GPS-спутника

ИСЗ	гг	мм	дд	hh	mm	sec	a_0 [с]	a_1 [с/с]	a_2 [с/с ²]	
							IODE	C_{ra} [м]	Δn [рад./с]	M_0 [рад.]
							C_{uc} [рад.]	e	C_{us} [рад.]	\sqrt{a} [$\sqrt{м}$]
							t_{oe} [с]	C_{ie} [рад.]	Ω [рад.]	C_{is} [рад.]
							i_0 [рад.]	C_{rc} [м]	ω [рад.]	$\dot{\Omega}$ [рад./с]
							$(i)'$ [рад./с]	тип кода на L2	NW	флаг данных на L2 P
							URA [м] (точность)	Health (исправность)	Δt_{GD} [с]	IODC
							время передачи	интервал аппроксимации		

— для спутника ГЛОНАСС

ИСЗ	гг	мм	дд	hh	mm	sec	$-\tau$ [с]	γ	t_b (UTC) [с]	
							X [км]	\dot{X} [км/с]	\ddot{X} [км/с ²]	исправность
							Y [км]	\dot{Y} [км/с]	\ddot{Y} [км/с ²]	№ несущей 1–24
							Z [км]	\dot{Z} [км/с]	\ddot{Z} [км/с ²]	возраст эф. инф. [сут.]

В качестве приближенных значений координат пункта наблюдений в обоих случаях используются округленные координаты МИИГАиК:

$$X_{n0} = 2845 \text{ км}, Y_{n0} = 2200 \text{ км}, Z_{n0} = 5250 \text{ км}.$$

Алгоритм вычислений

Обработка результатов наблюдений проводится в несколько этапов. Сначала на этапах I и II обрабатываются данные, полученные в составе навигационных сообщений, затем на этапе III определяются координаты пункта наблюдений.

I. Вычисление моментов посылки навигационных сигналов по системному времени

Для каждого из наблюдаемых НИСЗ выполняются следующие расчеты:

А) При обработке наблюдений спутников ГЛОНАСС

$$t_c = t_n - \Delta t_{L1},$$

где t_c — момент посылки сигнала по системному времени ГЛОНАСС;

$t_n = t_n - C1/c$ — момент посылки сигнала по бортовым часам НИСЗ;

t_n — момент приема сигнала по часам потребителя;

$C1$ — измеренная псевдодальность;

$c = 299792458$ м/с — скорость света в вакууме;

$\Delta t_{L1} = -\tau + \gamma \cdot (t_n - t_b)$ — поправка за переход к системному времени;

$\tau = (t_c - t_b)$ — сдвиг бортовой шкалы времени передающего НИСЗ относительно шкалы системного времени ГЛОНАСС на момент t_b ;

$\gamma = (f_n - f_n)/f_n$ — относительное отклонение несущей частоты f_n излучаемого навигационного радиосигнала НИСЗ от ее номинального значения f_n на референционный момент t_b .

Величины τ и γ выбираются из навигационного сообщения, референционный момент которого наиболее близок к моменту измерения псевдодальности.

Б) При обработке наблюдений спутников GPS

$$t_s = t_i - \Delta t_{L1},$$

где t_s — момент посылки сигнала по системному времени GPS;

$t_i = t_p - C1/c$ — момент посылки сигнала по бортовым часам НИСЗ;

$C1$ — псевдодальность, измеренная по C/A-коду;

$c = 299792458$ м/с — скорость света в вакууме;

t_p — момент приема сигнала по часам потребителя;

$\Delta t_{L1} = a_0 + a_1 \cdot (t_i - t_{oc}) + a_2 \cdot (t_i - t_{oc})^2 - \Delta t_{GD} + \Delta t_r$ — поправка за переход к шкале системного времени GPS;

Δt_{GD} — поправка за групповую задержку сигнала L1;

$\Delta t_r = F \cdot e \cdot \sqrt{a} \cdot \sin E$ — релятивистская поправка;

$$F = -\frac{2 \cdot \sqrt{\mu}}{c^2} = -4,442807633 \cdot 10^{-10} \left[\frac{c}{\sqrt{M}} \right];$$

E — эксцентрисическая аномалия в момент посылки сигнала.

Влияние Δt_r существенно на III этапе вычислений при формировании свободных членов уравнений поправок.

II. Вычисление гринвичских координат НИСЗ на моменты посылки навигационных сигналов

Для каждого из наблюдаемых НИСЗ по данным их навигационных сообщений вычисляются:

А) При обработке наблюдений спутников ГЛОНАСС

1. Численное интегрирование дифференциальных уравнений возмущенного движения НИСЗ в общеземной системе координат ЕСК-90, в правых частях которых учитываются ускорения, обусловленные центральной частью геопотенциала, второй зональной гармоникой, а также притяжением Луны и Солнца:

$$\ddot{X} = -\frac{\mu}{R^3} \cdot X + \frac{3}{2} \cdot C_{20} \cdot \frac{\mu \cdot a_e^2}{R^5} \cdot X \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot Z^2}{R^2} \right) + \omega_{\oplus}^2 \cdot X + 2 \cdot \omega_{\oplus} \cdot \dot{Y} + \ddot{X}_{лс} ,$$

$$\ddot{Y} = -\frac{\mu}{R^3} \cdot Y + \frac{3}{2} \cdot C_{20} \cdot \frac{\mu \cdot a_e^2}{R^5} \cdot Y \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot Z^2}{R^2} \right) + \omega_{\oplus}^2 \cdot Y - 2 \cdot \omega_{\oplus} \cdot \dot{X} + \ddot{Y}_{лс} ,$$

$$\ddot{Z} = -\frac{\mu}{R^3} \cdot Z + \frac{3}{2} \cdot C_{20} \cdot \frac{\mu \cdot a_e^2}{R^5} \cdot Z \cdot \left(3 - \frac{5 \cdot Z^2}{R^2} \right) + \ddot{Z}_{лс} ,$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ — геоцентрический радиус-вектор НИСЗ;

$\mu = 398600,44 \cdot 10^9$ [м³/с²] — гравитационный параметр ЕСК-90;

$a_e = 6378136$ [м] — экваториальный радиус Земли в ЕСК-90;

$C_{20} = -1082625,7 \cdot 10^{-9}$ — коэффициент второй зональной гармоники разложения геопотенциала в ЕСК-90;

$\omega_{\oplus} = 7,292115 \cdot 10^{-5}$ [рад./с] — скорость вращения Земли в ЕСК-90;

$\ddot{X}_{лс}$, $\ddot{Y}_{лс}$, $\ddot{Z}_{лс}$ — составляющие вектора ускорения НИСЗ в ЕСК-90, обусловленные гравитационным притяжением Луны и Солнца, на интервале интегрирования 15 минут предполагаются постоянными.

В качестве начальных условий для интегрирования приведенной системы уравнений используются данные из навигационного сообщения передающего НИСЗ:

X, Y, Z — прямоугольные координаты в ЕСК-90 на момент t_0 ;

$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ — составляющие вектора скорости в ЕСК-90 на момент t_0 .

Б) При обработке наблюдений спутников GPS

1. Большая полуось орбиты

$$a = (\sqrt{a})^2.$$

2. Среднее движение

$$n_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{a \cdot \sqrt{a}},$$

где $\mu = 398600,5 \cdot 10^9$ [м³/с²] — гравитационный параметр WGS-84;

$$n = n_0 + \Delta n.$$

3. Средняя аномалия

$$M = M_0 + n \cdot (t_s - t_{oe}).$$

4. Эксцентрическая аномалия из решения уравнения Кеплера путем итераций

$$E_0 = M,$$

$$E_1 = M + e \cdot \sin E_0,$$

.....

$$E_{i+1} = M + e \cdot \sin E_i.$$

5. Истинная аномалия

$$v = E + 2 \cdot \arctg \frac{q \cdot \sin E}{1 - q \cdot \cos E}, \quad \text{где } q = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

6. Приближенное значение аргумента широты

$$u_0 = \omega + v.$$

7. Возмущения в аргументе широты δu , длине радиуса-вектора δr и наклоне орбиты δi

$$\begin{aligned}\delta u &= C_{uc} \cdot \cos(2 \cdot u_0) + C_{us} \cdot \sin(2 \cdot u_0), \\ \delta r &= C_{rc} \cdot \cos(2 \cdot u_0) + C_{rs} \cdot \sin(2 \cdot u_0), \\ \delta i &= C_{ic} \cdot \cos(2 \cdot u_0) + C_{is} \cdot \sin(2 \cdot u_0).\end{aligned}$$

8. Уточненное значение аргумента широты

$$u = u_0 + \delta u.$$

9. Длина радиуса-вектора

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E) + \delta r.$$

10. Наклон орбиты

$$i = i_0 + \delta i + (i) \cdot (t_s - t_{oe}).$$

11. Долгота восходящего узла орбиты в общеземной системе координат

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) \cdot (t_s - t_{oe}) - \dot{\Omega}_e \cdot t_{oe},$$

где $\dot{\Omega}_e = 7,2921151467 \cdot 10^{-5}$ [рад./с] — скорость вращения Земли в WGS-84.

12. Направляющие косинусы радиуса-вектора ИСЗ

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \sin u \cdot \sin i \end{pmatrix}.$$

Контроль: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

13. Координаты ИСЗ в общеземной системе координат WGS-84

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

III. Вычисление поправок к приближенным координатам пункта наблюдений и поправки за десинхронизацию часов приемника

1. Составление уравнений поправок

$$\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{V}},$$

где

$$\mathbf{B}_{n \times 4} = \begin{pmatrix} \frac{X_1 - X_{п0}}{D_{10}} & \frac{Y_1 - Y_{п0}}{D_{10}} & \frac{Z_1 - Z_{п0}}{D_{10}} & 1 \\ \frac{X_2 - X_{п0}}{D_{20}} & \frac{Y_2 - Y_{п0}}{D_{20}} & \frac{Z_2 - Z_{п0}}{D_{20}} & 1 \\ \frac{X_3 - X_{п0}}{D_{30}} & \frac{Y_3 - Y_{п0}}{D_{30}} & \frac{Z_3 - Z_{п0}}{D_{30}} & 1 \\ \frac{X_4 - X_{п0}}{D_{40}} & \frac{Y_4 - Y_{п0}}{D_{40}} & \frac{Z_4 - Z_{п0}}{D_{40}} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{X_n - X_{п0}}{D_{n0}} & \frac{Y_n - Y_{п0}}{D_{n0}} & \frac{Z_n - Z_{п0}}{D_{n0}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{L}}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} D_{10} - D_1 \\ D_{20} - D_2 \\ D_{30} - D_3 \\ D_{40} - D_4 \\ \dots \\ D_{n0} - D_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta D \end{pmatrix},$$

где

$D_i = C1 + c \cdot \Delta t_{LI} - \Delta_{Ion} - \Delta_{Trop}$ — измеренная псевдодальность до i -ого НИСЗ, исправленная за уход часов спутника, ионосферную и тропосферную задержки;

$D_{i0} = \sqrt{(X_i - X_{п0})^2 + (Y_i - Y_{п0})^2 + (Z_i - Z_{п0})^2}$ — предвычисленная дальность до i -ого НИСЗ;

X_i, Y_i, Z_i — соответствующие эпохе наблюдений координаты i -ого НИСЗ в общеземной системе координат, вычисленные по оперативной эфемеридной информации из навигационного сообщения;

$X_{п0}, Y_{п0}, Z_{п0}$ — приближенные координаты пункта наблюдений;

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ — поправки к приближенным координатам пункта;

ΔD — поправка часов приемника (в единицах длины);

v_i — поправка в измеренную псевдодальность до i -ого НИСЗ;

n — число наблюдавшихся НИСЗ.

При одночастотных измерениях для вычисления ионосферной поправки используется бортовая модель ионосферы Klobuchar 1987, которая позволяет компенсировать до 50-60% действительной групповой задержки сигнала в ионосфере.

При наличии результатов двухчастотных наблюдений поправка за ионосферу Δ_{Ion} может быть вычислена по формуле:

$$\Delta_{Ion} = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \cdot (C1 - P2),$$

где

$C1, P2$ — значения псевдодалности, измеренные на частотах L1 и L2;
 f_1, f_2 — номинальные значения несущих частот.

Если фиксировались метеоданные на пункте наблюдений, то тропосферную поправку для сигнала от i -ого спутника можно получить по модели Saastamoinen 1973:

$$\Delta_{Trop} = \frac{0,002277}{\cos(z_i)} \cdot \left(P + \left(\frac{1255}{T} + 0,05 \right) \cdot e - 1,1 \cdot \text{tg}^2(z_i) \right)$$

где

z_i — зенитное расстояние i -ого НИСЗ,

$$\cos(z_i) = \frac{(X_i - X_{n0}) \cdot X_{n0} + (Y_i - Y_{n0}) \cdot Y_{n0} + (Z_i - Z_{n0}) \cdot Z_{n0}}{R_{n0} \cdot D_{i0}},$$

$$R_{n0} = \sqrt{(X_{n0})^2 + (Y_{n0})^2 + (Z_{n0})^2},$$

P — атмосферное давление в мбар,

T — температура в °К,

$$e = 0,06108 \cdot \rho \cdot \exp\left(\frac{17,15T - 4684}{T - 38,45}\right) \quad \text{— парциальное давление}$$

водяных паров в мбар,

ρ — относительная влажность в %.

В учебных расчетах для упрощения поправки Δt_{Ion} и Δt_{Trop} можно не вводить.

2. Решение системы уравнений поправок по способу наименьших квадратов:

— составление нормальных уравнений в предположении о равно- точности всех измерений

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{0}},$$

— оценка неизвестных

$$\bar{\mathbf{X}} = -(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{L}}$$

3. Вычисление уточненных координат пункта наблюдений:

$$X_n = X_{n0} + \Delta X,$$

$$Y_n = Y_{n0} + \Delta Y,$$

$$Z_n = Z_{n0} + \Delta Z.$$

Полученные координаты соответствуют общеземной системе коор- динат, принятой в GPS или ГЛОНАСС, т. е. WGS-84 или ECK-90.

Строго говоря, полученные оценки координат еще не являются наи- лучшими, поскольку решалась не исходная система уравнений наблю- дений, а линеаризованная. Для устранения влияния погрешностей ли- неаризации необходим итерационный процесс. В рассмотренной задаче абсолютных навигационных определений такой процесс быстро сходит- ся: даже при ошибках начальных координат пункта в несколько тысяч километров обычно достаточно 3-х или 4-х итераций, т. е. в качестве пер- вого приближения можно использовать даже центр Земли. При ошиб- ках начального положения пункта менее 10 км (как в нашем случае) тре- буются всего две итерации, в учебных целях можно ограничиться одной.

4. Оценка точности определения координат:

— ошибка единичного измерения псевдодальности

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{V}}^T \cdot \bar{\mathbf{V}}}{n-4}},$$

— ошибки определения координат и поправки часов приемника:

$$m_x = \mu \cdot \sqrt{q_{11}}, \quad m_y = \mu \cdot \sqrt{q_{22}}, \quad m_z = \mu \cdot \sqrt{q_{33}}, \quad m_t = \mu \cdot \sqrt{q_{44}},$$

где q_{kk} — диагональные элементы обратной матрицы коэффициентов нормальных уравнений $\mathbf{Q} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1}$;

$\bar{\mathbf{V}}$ — вектор поправок в измеренные величины, полученный в ре- зультате подстановки в уравнения поправок величин $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ и ΔD .

Поскольку первые три столбца матрицы B состоят из направляющих косинусов топоцентрических векторов пункт-спутник, то очевидно, что элементы матрицы Q тоже зависят от геометрических условий проведения измерений. Таким образом, ошибки определения местоположения и поправки часов приемника зависят как от точности измерений псевдодальностей, так и от взаимного расположения навигационных спутников и точки наблюдений. В связи с этим квадратный корень следа матрицы Q называют геометрическим фактором ухудшения точности (Geometric Dilution Of Precision — GDOP) навигационных определений:

$$GDOP = \sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33} + q_{44}}.$$

Кроме этого, часто рассматривают геометрические факторы отдельно для ошибок координат (PDOP) и времени (TDOP), а также для ошибок определения положения пункта в плане (HDOP) и по высоте (VDOP), которые связаны соотношением:

$$GDOP^2 = PDOP^2 + TDOP^2 = HDOP^2 + VDOP^2 + TDOP^2.$$

Задание № 7 **Вычисление эллипсоидальных геодезических координат пункта земной поверхности по его декартовым координатам**

Постановка задачи

По результатам радиотехнических наблюдений навигационных спутников систем ГЛОНАСС и GPS определены декартовы координаты пунктов земной поверхности X, Y, Z в общеземных системах координат EСК-90 и WGS-84 соответственно. По этим данным требуется вычислить эллипсоидальные геодезические координаты пунктов B, L, H .

Если известно, что геодезическая высота $H = 0$, то определение широты и долготы затруднений не представляет — расчетные формулы получаются непосредственно обращением выражений

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L, \\ Y &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L, \\ Z &= (N + H - N \cdot e^2) \cdot \sin B, \end{aligned}$$

где B — геодезическая широта,

L — геодезическая долгота,

H — геодезическая высота,

N — радиус кривизны первого вертикала (внутренний отрезок нормали к поверхности эллипсоида в точке с координатами B, L от поверхности до пересечения с малой осью эллипсоида)

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 B}},$$

a — большая полуось эллипсоида,

e — первый эксцентриситет эллипсоида, $e^2 = f \cdot (2 - f)$,

f — сжатие эллипсоида.

Однако, когда геодезическая высота неизвестна, достаточно просто определяется только долгота пункта. Она вычисляется также как при нулевой геодезической высоте. Прямое точное вычисление широты невозможно, и для ее определения используется метод последовательных приближений

$$\operatorname{tg} B_{i+1} = \frac{Z + e^2 \cdot N_i \cdot \sin B_i}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Последняя формула имеет особенности на полюсах, а вблизи полюсов дает неустойчивое решение, поэтому в высоких широтах лучше определять полярное расстояние $B' = 90^\circ - B$

$$\operatorname{tg} B'_{i+1} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z + e^2 \cdot N_i \cdot \sin B_i}.$$

Чтобы не вычислять в каждом приближении тригонометрические функции и арс-функции, для определения широты следует воспользоваться итерационным методом В.П. Морозова.

Исходные данные

В качестве исходных прямоугольных координат пунктов наблюдений используются значения, полученные в результате выполнения задания № 6.

Параметры эллипсоидов:

ЕСК-90

$a = 6378136,0$ м ;

$f = 1/298,25784$;

WGS-84

$a = 6378137,0$ м ;

$f = 1/298,257223563$.

Алгоритм вычислений

1. Вычисление геодезической долготы пункта наблюдений

$$L = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

четверть выбирается по знакам числителя и знаменателя:

$$\left(\frac{\text{плюс}}{\text{плюс}}\right) \rightarrow \text{I}; \quad \left(\frac{\text{плюс}}{\text{минус}}\right) \rightarrow \text{II}; \quad \left(\frac{\text{минус}}{\text{минус}}\right) \rightarrow \text{III}; \quad \left(\frac{\text{минус}}{\text{плюс}}\right) \rightarrow \text{IV}.$$

2. Для определения широты пункта наблюдений выполняются итерации одного из следующих выражений:

для низких и средних широт $D \geq |Z|$ для высоких широт $D < |Z|$:

$$t_{i+1} = t_0 + \frac{p \cdot t_i}{\sqrt{k + t_i^2}}, \quad t'_{i+1} = t'_0 + \frac{p' \cdot t'_i}{\sqrt{k' + t'^2_i}},$$

где

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{Z}{D}, & p &= \frac{c \cdot e^2}{D}, & k &= \frac{1}{1 - e^2}, \\ D &= \sqrt{X^2 + Y^2}, & e^2 &= f \cdot (2 - f), & c &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a}{1 - f}, \\ t'_0 &= \frac{D}{Z}, & p' &= \frac{-a \cdot e^2}{Z}, & k' &= 1 - e^2, \end{aligned}$$

a — большая полуось эллипсоида,

f — сжатие эллипсоида,

e — первый эксцентриситет эллипсоида.

Итерации выполняются до тех пор, пока абсолютная величина разности $|t_{i+1} - t_i|$ не станет меньше некоторого заданного уровня точности ϵ . Число итераций зависит от широты. Обычно при $\epsilon = 10^{-12}$ достаточно 3-х -4-х итераций.

После завершения итераций геодезическая широта находится по последнему приближению t_{i+1} или t'_{i+1} :

$$B = \operatorname{arctg}(t_{i+1}) = 90^\circ - \operatorname{arctg}(t'_{i+1}).$$

3. Вычисление геодезической высоты пункта наблюдений

$$H = D \cdot \sqrt{1 + t_{i+1}^2} - N = |Z| \cdot \sqrt{1 + t'^2_{i+1}} - k' \cdot N,$$

где

$$N = \frac{c \cdot \sqrt{1 + t_{i+1}^2}}{\sqrt{k + t_{i+1}^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{1 + t'^2_{i+1}}}{\sqrt{k' + t'^2_{i+1}}}.$$

Литература

Основная

1. Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии. –М.: «Наука», 1979, 448с.
2. Астрономический ежегодник на 1996 год., т.75.–С.-Пб.: «Наука», 1995, 691с.
3. Баранов В.Н., Бойко Е.Г., Краснорылов И.И., Машимов М.М., Плахов Ю.В., Урмаев М.С., Яшкин С.Н. Космическая геодезия. –М.: «Недра», 1986, 407с.
4. Киселев А.А. Теоретические основания фотографической астрометрии. –М.: «Недра», 1989, 264с.
5. Краснорылов И.И., Плахов Ю.В. Основы космической геодезии –М.: «Недра», 1976, 216с.
6. Плахов Ю.В. Применение теории возмущений в космической геодезии. –М.: «Недра», 1983, 200с.
7. Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. –М.: «Радио и связь», 1993, 408с.

Дополнительная

8. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н. Дубошина. –М.: «Наука», 1976, 862с.
9. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. –М.: «Недра», 1981, 256с.
10. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. –М.: «Недра», 1979, 296с.
11. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. –М.: КНИЦ ВКС РФ, 1995.
12. Параметры общего земного эллипсоида и гравитационного поля Земли. ЕСК-90. –М.: ВТУ ГШ, 1991, 68с.
13. Leick A. GPS Satellite Surveying. –New York.: «John Wiley&Sons», 1995, 560p.
14. Interface Control Document: NAVSTAR GPS Space Segment / Navigation User Interfaces, ICD-GPS-200C. –ARINC Research Corporation, 2000, 162p.

Содержание

Введение	3
1. Основные системы отсчета, применяемые в космической геодезии	4
Задание № 1. Приведение наблюдаемых координат ИСЗ на стандартную эпоху	12
2. Предварительная обработка результатов наблюдений ИСЗ на фоне звезд	21
Задание № 2. Определение топоцентрического направления на ИСЗ по его изображению на фоне звезд	25
3. Основы теории движения ИСЗ	33
3.1. Невозмущенное движение	33
Задание № 3. Вычисление предварительных значений кеплеровых элементов невозмущенной орбиты ИСЗ по двум геоцентрическим положениям	37
Задание № 4. Вычисление прямоугольных координат и составляющих скорости ИСЗ на заданный момент времени по известным значениям кеплеровых элементов его орбиты	42
3.2. Возмущенное движение	45
Задание № 5. Вычисление возмущений элементов орбиты ИСЗ от второй, третьей и четвертой зональных гармоник геопотенциала	50
4. Принципы геодезического использования космических радионавигационных систем	55
Задание № 6. Определение координат пункта земной поверхности по результатам радиотехни- ческих наблюдений навигационных ИСЗ	67
Задание № 7. Вычисление эллипсоидальных геодезических координат пункта земной поверхности по его декартовым координатам	76
Литература	79