**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

**Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»**

Кафедра геодезии и фотограмметрии

П. В. Другаков

ГЕОДЕЗИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ

***Методические указания по выполнению лабораторных работ
для студентов специальностей 1-56 01 01 Землеустройство,
1-56 01 02 Земельный кадастр***

**Горки
БГСХА
2016**

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Кафедра геодезии и фотограмметрии

П. В. Другаков

ГЕОДЕЗИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ

Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов специальностей 1-56 01 01 Землеустройство, 1-56 01 02 Земельный кадастр

Горки
БГСХА
2016

УДК 528.11
ББК 26.12
Д76

*Рекомендовано методической комиссией
землеустроительного факультета.
Протокол № 9 от 26 мая 2015 г.*

Автор:
кандидат технических наук, доцент *П. В. Другаков*

Рецензент:
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *Е. В. Горбачева*

Другаков, П. В.
Д76 Геодезия. Математическая обработка результатов геодезических измерений и определение дополнительных пунктов : методические указания по выполнению лабораторных работ / П. В. Другаков. – Горки : БГСХА, 2016. – 66 с.

Приведены задачи по теории погрешностей измерений, уравниванию коррелатным и параметрическим способами, определению координат пунктов прямой, обратной и линейной засечками.

Для студентов специальностей 1-56 01 01 Землеустройство и 1-56 01 02 Земельный кадастр.

ВВЕДЕНИЕ

Осуществление земельных преобразований в Республике Беларусь связано с большим объемом геодезических работ по установлению границ сельскохозяйственных и лесохозяйственных организаций, обеспечению граждан земельными участками для индивидуального жилищного строительства, садоводства, организации крестьянских хозяйств и пр. Для выполнения указанных работ инженер-землеустроитель должен знать не только устройство геодезических приборов, технологию работ с ними, но и уметь выполнять математическую обработку результатов геодезических измерений.

Методические указания содержат исходные данные, основные формулы и порядок выполнения трех лабораторных работ по математической обработке результатов геодезических измерений (оценка точности результатов измерений, уравнивание полигонометрического хода коррелатным способом, уравнивание нивелирной сети параметрическим способом) и лабораторной работы по определению дополнительных пунктов.

Геодезические работы связаны с измерениями длин линий, углов, превышений, площадей и др. Любые измерения сопровождаются неизбежными погрешностями. Следовательно, результаты измерений и вычисленные по ним величины тоже будут содержать погрешности. Чтобы получить результаты с некоторой заданной точностью, необходимо знать свойства погрешностей измерений, уметь оценивать точность результатов измерений и их функций, находить наиболее надежные значения определяемых величин, правильно устанавливать допустимость невязок и пр. Указанные вопросы рассматриваются в теории погрешностей измерений, которая имеет очень важное значение не только для изучения геодезии, но и других специальных дисциплин землеустроительного профиля, поэтому ей нужно уделить особое внимание.

Необходимо отметить, что в литературе и на практике употребляются два термина: «погрешность» и «ошибка». В изданиях последних лет авторы полностью отказались от термина «ошибка».

Прежде чем приступить к решению задач первой лабораторной работы, рекомендуется вначале повторить из курса математики нахождение производных, а затем руководствоваться учебниками [1, 2]. Для более глубокого изучения темы можно использовать практикум [3]. В результате изучения данного раздела студент должен умело применять теорию погрешностей измерений для решения практических задач. С этой целью рекомендуется внимательно изучить примеры из учебника и методических указаний по выполнению лабораторной работы.

В задании приведены 14 задач по обработке рядов равноточных измерений, оценке точности функций измеренных величин, обработке результатов неравноточных измерений, оценке точности по невязкам в полигонах и ходах и по разностям двойных измерений. Каждая типовая задача имеет 16 вариантов. Студенту необходимо решить один из вариантов по указанию преподавателя. В целях сокращения текста в предлагаемых задачах средние квадратические погрешности измерений иногда записаны сразу за результатом измерения со знаком ±, например, 54°23,2′±1,5′.

Решая задачи, следует соблюдать правило действий с приближенными числами, давать ответы с необходимой и достаточной точностью. Средние квадратические погрешности и веса вычисляют с двумя-тремя значащими цифрами. Числовые ответы должны иметь наименование величин.

Исходные данные для решения задач составлены с таким расчетом, чтобы каждый студент имел индивидуальное задание. Номера вариантов выдаются студентам во время занятий и фиксируются в журнале преподавателя.

При оформлении лабораторной работы 1 необходимо указать номер и вариант задачи, например, 8.3 (восьмая задача, третий вариант). Все записи и рисунки выполняются аккуратно чернилами или тушью. По каждой задаче необходимо привести условие, исходные данные, рисунки, рабочие формулы, результаты вычислений и краткие пояснения. Рисунки и таблицы должны иметь наименования.

При выполнении лабораторных работ 2, 3 и 4 также следует изучить теорию по учебным пособиям [1, 2, 4]. После изучения теории по учебникам разобрать числовой пример из методических указаний и ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа 1. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Задание 1. Вычисление истинных, средних квадратических и предельных погрешностей измерений, обработка ряда равноточных измерений

Обозначения:

Δ – истинная погрешность измерения;

m – средняя квадратическая погрешность одного измерения;

$\Delta_{пр}$ – предельная погрешность измерения;

l – результат измерения;

X – точное значение измеренной величины;

l_0 – приближенное значение измеренной величины;

L – среднее арифметическое;

v – поправка к измеренной величине;

M – средняя квадратическая погрешность среднего арифметического;

n – число измерений;

ω – погрешность округления L.

Формулы:

$$\Delta_1 = l_1 - X; \tag{1.1}$$

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}; \tag{1.2}$$

$$\Delta_{\text{пр}} = 3m; \tag{1.3}$$

$$L = \frac{[l]}{n} = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n},$$

где

$$\varepsilon_i = l_i - l_0; \tag{1.4}$$

$$v_i = L - l_i. \tag{1.5}$$

Контроль:

$$[v] = 0 \text{ или} \tag{1.6}$$

$$[v] = n\omega. \tag{1.7}$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{1.8}$$

Контроль:

$$[v^2] = -[v\varepsilon] + (L - l_0)[v]. \tag{1.9}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{1.10}$$

Пример 1. Одна и та же линия измерена лентой 8 раз. При этом получены следующие результаты: 245,15 м; 245,20; 245,00; 245,08; 245,10; 245,05; 245,12; 245,17 м. Точная длина линии равна 245,12 м. Определить истинные погрешности измерений, среднюю квадратическую и предельную погрешности одного измерения, относительную предельную погрешность одного измерения. Решение задачи выполнено в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1. **Оценка точности по истинным погрешностям**

Номер измерения	Результат измерения l, м	$\Delta = l - X$, см	Δ^2	Формулы и вычисления
1	245,15	+3	9	$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{311}{8}} = 6,2$ см
2	20	+8	64	
3	00	–12	144	
4	08	–4	16	
5	10	–2	4	$\Delta_{пр} = 3m = 18,6 см$
6	05	–7	49	
7	12	0	0	$\frac{\Delta_{пр}}{l} = \frac{0,186}{245} = \frac{1}{1320}$
8	17	+5	25	
	$X = 245,12$		$[\Delta^2] = 311$	

Пример 2. Угол измерен 5 раз. Результаты измерений приведены в табл. 2. Найти вероятнейшее значение угла, среднюю квадратическую погрешность одного измерения и среднюю квадратическую погрешность вероятнейшего значения.

Решение задачи приведено в табл. 1.2, где сделан контроль вычислений величин $[v]$ и $[v^2]$ по формулам (1.7) и (1.9).

Т а б л и ц а 1.2. **Оценка точности по поправкам**

Номер измерения	Результат измерения	ε	v	v^2	$v\varepsilon$
1	24°38′30,5″	+5,5″	–2,6″	6,76	–14,30
2	25,4	+0,4	+2,5	6,25	+1,00
3	26,1	+1,1	+1,8	6,24	+1,98
4	28,3	+3,3	–0,4	0,16	–1,32
5	29,4	+4,4	–1,5	2,25	–6,60
l_0	24°38′25,0″	+14,7	–0,2	18,66	–19,24
L	24°38′27,9′				

Формулы и вычисления:

$$L = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 24^\circ 38'25,0'' + \frac{+14,7''}{5} = 24^\circ 38'27,94'';$$

$$[v] = n\omega = 5(-0,04) = -0,2;$$

$$[v^2] = -[v\varepsilon] + (L - l_0)[v] = 19,24 + 2,9(-0,2) = 18,66;$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{18,66}{4}} = 2,2'';$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2,2''}{\sqrt{5}} = 1,0''.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Угол измерен высокоточным теодолитом. Полученный результат 48°32′24,0″ можно считать точным значением угла. Затем этот же угол многократно измерен электронным тахеометром Та3. Результаты измерений (только значения секунд) приведены в табл. 4. Вычислить среднюю квадратическую и предельную погрешности одного измерения угла тахеометром Та3. Вычисления рекомендуется выполнять по формуле табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.3. **Исходные данные к задаче 1**

Вариант	Номер измерения									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	29	20	18	26	31	23	24	21	30	28
2	26	20	25	25	31	19	32	25	32	21
3	15	28	31	29	23	31	29	19	26	24
4	18	27	26	17	23	33	27	29	22	17
5	21	31	19	42	28	33	35	19	15	21
6	30	22	30	23	18	18	33	32	31	24
7	28	21	25	26	16	22	29	22	25	27
8	24	18	23	31	29	21	34	22	24	24
9	30	28	20	28	20	32	25	21	31	20
10	30	28	21	30	18	32	27	26	28	26
11	32	22	29	27	26	24	34	24	32	22
12	22	21	16	29	18	25	25	18	22	33
13	30	30	25	28	20	29	24	32	15	27
14	27	21	23	24	25	20	26	27	21	27
15	27	22	17	29	26	32	31	31	33	22
16	24	28	20	28	24	29	20	31	23	29

2. По результатам многократного измерения линии, приведенным в табл. 1.4, вычислить наиболее надежное значение длины линии, среднюю квадратическую погрешность измерения, абсолютную и относительную средние квадратические погрешности окончательного значения. Решение задачи представить по форме табл. 1.2.

Задание 2. Оценка точности функций измеренных величин

Задачи данного задания наиболее сложные, так как помимо теории погрешностей измерений необходимы знания геодезии для правильного составления функций. Следует изучить приведенные примеры, решить задачи своего варианта и ознакомиться с другими.

При решении задач рекомендуется использовать формулы из табл. 1.5.

Т а б л и ц а 1.4. **Исходные данные для решения задачи 2**

Вариант	Номер измерения							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	324,35	324,30	324,24	324,40	324,49	324,60	324,21	324,38
2	250,10	250,00	250,08	250,15	250,20	250,05	250,12	250,02
3	211,86	211,70	211,64	211,80	211,73	211,77	211,60	211,65
4	398,60	398,64	398,50	398,58	398,59	398,68	398,55	398,63
5	301,35	301,40	301,51	301,38	301,46	301,30	301,38	301,45
6	385,50	385,75	385,63	385,42	385,60	385,54	385,80	385,72
7	331,17	331,20	331,25	331,10	331,30	331,25	331,40	331,33
8	461,50	461,45	461,68	461,30	461,36	461,43	461,55	461,40
9	271,85	271,90	271,60	271,62	271,70	271,81	271,69	271,75
10	350,11	350,25	350,18	350,30	350,21	350,32	350,23	350,20
11	308,20	308,25	308,18	308,30	308,10	308,15	308,24	308,32
12	248,63	248,60	248,52	248,70	248,55	248,64	248,66	248,58
13	273,25	273,20	273,30	273,15	273,24	273,28	273,18	278,16
14	200,82	200,80	200,74	200,89	200,96	200,85	200,76	200,85
15	285,13	285,15	285,20	285,18	285,14	285,22	285,17	285,25
16	396,50	396,42	396,64	396,56	396,40	396,68	396,60	396,51

Таблица 1.5. **Основные формулы**

Функции	Средняя квадратическая погрешность	Номер формулы
$u = kx + c$	$m_u = km_x$	1.11
$u = k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n + c$	$m_u^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2$	1.12
$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n + c$	$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2$ При равноточных измерениях $m_1 = m_2 = m_n = m$ $m_u = m\sqrt{n}$	1.13 1.14
$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2$	1.15

Пример 3. При измерении горизонтального расстояния нитяным дальномером сделан отсчет по рейке: $l = 182$ см $\pm 0{,}4$ см (здесь $\pm$ 0,4 см – средняя квадратическая погрешность отсчета). Коэффициент дальномера (К=100) и постоянное слагаемое (с = 0,6 м) определены с высокой точностью и могут быть приняты безошибочными. Найти среднюю квадратическую погрешность расстояния.

Напишем формулу для вычисления расстояния: $D = K\,l + c$. Переменной здесь является величина l. Поэтому можно применить формулу (1.11). В результате получим: $m_D = K \cdot m_l = 100 \cdot 0{,}4 = 40$ см.

Пример 4. В треугольнике измерены два угла со средними квадратическими погрешностями 4″ и 6″. Найти среднюю квадратическую погрешность третьего (вычисленного) угла.

Обозначим измеренные углы α и β, а искомый – γ. Запишем функцию $\gamma = 180 - \alpha - \beta$, для которой по формуле (1.13) найдем $m_\gamma^2 = m_\alpha^2 + m_\beta^2 = 4^2 + 6^2 = 52$. Откуда $m_\gamma = 7{,}2''$.

Пример 5. Найти предельную угловую невязку в полигоне из 12 углов, если средняя квадратическая погрешность измерения угла равна 0,5′.

Запишем формулу угловой невязки в развернутом виде:

$$f_\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - \sum \beta_T.$$

Теоретическая сумма углов $\sum \beta_T$ не содержит погрешностей (имеется в виду случай, когда погрешности в дирекционных углах начальной и конечной исходных линий в разомкнутом ходе пренебрегаемо малы). Поэтому невязка представляет собой погрешность в сумме измеренных углов. Поскольку измерения равноточные, $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \ldots = m_{\beta_n} = m_\beta$.

Применяя формулу (1.14), найдем среднюю квадратическую погрешность в сумме углов $m_{\sum\beta} = m_\beta \sqrt{n}$. Предельная погрешность суммы углов, или предельная невязка, будет в три раза больше, т. е. $f_{\beta\text{пр}} = 3m_\beta \sqrt{n}.$

Для данного примера будем иметь: $f_{\beta\text{пп}} = 3 \cdot 0{,}5' \sqrt{12} = \pm 5',2.$

Пример 6. Измерение угла одним приемом сопровождается средней квадратической погрешностью 20″. С какой средней квадратической погрешностью можно получить значение этого угла, если измерить его четырьмя приемами?

При многократном измерении одной и той же величины наиболее надежным ее значением будет арифметическая средина. Средняя квадратическая погрешность арифметической средины из n равноточных измерений в $\sqrt{n}$ меньше средней квадратической погрешности каждого измерения (формула 1.10). Следовательно, ответ будет таким: $\frac{20''}{\sqrt{4}} = 10''.$

Пример 7. Определить абсолютную и относительную средние квадратические погрешности в площади прямоугольника, если его стороны (a = 200,00 м ; b = 400,00 м) известны с относительной средней квадратической погрешностью 1:2000.

Задачу можно решить двумя способами.

1. Определим абсолютные погрешности в длинах сторон из соотношения $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{1}{2000}$.

$$\frac{m_a}{200} = \frac{1}{2000}; \quad m_a = 0{,}10 \text{ м}, \quad \frac{m_b}{400} = \frac{1}{2000}; \quad m_b = 0{,}20 \text{ м}.$$

Составим функцию $P = ab$. Применяя формулу (1.15), получим:

$$m^2{}_p = b^2 m^2{}_a + a^2 m^2{}_b = 400^2 \cdot 0{,}1^2 + 200^2 \cdot 0{,}2^2 = 3200,$$

$$m_p = 56 \text{ м}^2; \ \frac{m_p}{P} = \frac{56}{80000} = \frac{1}{1400}.$$

2. Составим функцию $P=ab$ и прологарифмируем ее:

$$\ln P = \ln a + \ln b.$$

Для нахождения средней квадратической погрешности функции общего вида вместо формулы (1.15) воспользуемся правилом: 1) находят полный дифференциал данной функции, записывая вместо дифференциалов истинные погрешности; 2) объединяют члены с одинаковыми истинными погрешностями, заключая в скобки коэффициенты при одинаковых истинных погрешностях; 3) возводят в квадрат все члены полученного выражения, заменяя истинные погрешности средними квадратическими.

В соответствии с этим правилом в общем виде получим:

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}; \qquad \left(\frac{m_p}{P}\right)^2=\left(\frac{m_a}{a}\right)^2+\left(\frac{m_b}{b}\right)^2.$$

Подставляя известные значения, найдем:

$$\left(\frac{m_p}{P}\right)^2=\left(\frac{1}{2000}\right)^2+\left(\frac{1}{2000}\right)^2=2\left(\frac{1}{2000}\right)^2; \quad \frac{m_p}{P}=\frac{\sqrt{2}}{2000}=\frac{1}{1400}.$$

$$m_p=\frac{P}{1400}=\frac{80000}{1400}=57\ \text{м}^2.$$

Пример 8. Найти в общем виде среднюю квадратическую погрешность превышения, вычисленного по формуле

$$h=\frac{1}{2}D\sin 2v+i-v+f.$$

Для решения задачи воспользуемся формулой (1.15).

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial h}{\partial D}=\frac{1}{2}\sin 2v; \quad \frac{\partial h}{\partial v}=D\cos 2v; \quad \frac{\partial h}{\partial i}=1; \quad \frac{\partial h}{\partial v}=-1; \quad \frac{\partial h}{\partial f}=1.$$

Далее получим:

$$m_h^2=\frac{1}{4}\sin^2 2v m_D^2+D^2\cos^2 2v\frac{m_v^2}{\rho^2}+m^2{}_i+m^2{}_v+m^2{}_f.$$

П р и м е ч а н и е. Погрешность угла m_v обычно выражают в градусной мере. В формуле для вычисления m_h она должна выражаться в радианной мере, поэтому произведено деление на ρ.

Пример 9. Средняя квадратическая погрешность измерения угла одним приемом равна 20″. Сколькими приемами нужно измерять углы, чтобы невязки в треугольниках не превышали ±1′?

Обозначим число приемов через n. Средняя квадратическая погрешность измерения угла n приемами составит $\frac{20''}{\sqrt{n}}$, а в сумме трех углов $-\frac{20}{\sqrt{n}}\sqrt{3}$. Предельная погрешность в сумме углов, равная предельной невязке, в три раза больше. Поэтому можно составить уравнение

$$\frac{3 \cdot 20''}{\sqrt{n}}\sqrt{3} = 60''.$$

Отсюда $n = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. С какой погрешностью построен прямой угол, если зеркала экера расположены по углом $45°00' \pm 3'$?

3.2. Средняя квадратическая погрешность определения превышения на одной станции равна 2 мм. Определить предельную невязку в нивелирном ходе из 20 станций.

3.3. Чему равна средняя квадратическая погрешность дирекционного угла 10-й стороны теодолитного хода, если средняя квадратическая погрешность каждого угла равна 0,5′, а исходный дирекционный угол безошибочен?

3.4. Найти среднюю квадратическую погрешность одного угла теодолитного хода с 26 углами, если средняя квадратическая погрешность суммы всех углов равна 1,5′.

3.5. Линия состоит из двух отрезков: s_1 = 202,15 м ± 0,08 м; s_2 = 241,73 м ± 0,10 м. Вычислить абсолютную и относительную средние квадратические погрешности всей линии.

3.6. В четырехугольнике измерены 3 угла со средними квадратическими погрешностями 10″, 15″, 5″. Определить среднюю квадратическую погрешность четвертого (вычисленного) угла.

3.7. Даны отметки двух точек со средними квадратическими погрешностями: H_1= 285,385 м ± 8 мм; H_2 = 243,847м ± 5 мм. Вычислить превышение точки 2 над точкой 1 и его предельную погрешность.

3.8. Определить ожидаемое среднее квадратическое значение невязки нивелирного хода длиной 16 км, если средняя квадратическая погрешность нивелирования на 1 км составляет 4 мм.

3.9. Для вычисления общей площади участка он был разбит на 4 треугольника. Найти предельную погрешность в площади участка, если средние квадратические погрешности определения площадей треугольников составили 20 м^2, 40, 30 и 15 м^2.

3.10. Определить среднюю квадратическую погрешность превышения, полученного при нивелировании из середины по двухсторонним рейкам, если средняя квадратическая погрешность одного отсчета по рейке равна 1 мм.

3.11. Длина линии на плане определена как разность отсчетов по миллиметровой шкале линейки, сделанных у концов линии. Какова будет предельная погрешность в длине линии, если отсчеты сопровождались средними квадратическими погрешностями 0,1 мм?

3.12. Линия длиной 300 м измеряется стальной 20-метровой лентой. Определить относительную среднюю квадратическую погрешность в длине линии, если средняя квадратическая погрешность одного отложения ленты равна 2 см.

3.13. Коэффициент нитяного дальномера (К = 100) и постоянное слагаемое (С = 0) найдены точно. При измерении линии определен отрезок рейки между крайней и средней нитями – l_1 = 85 см ± 0,5 см. С какой средней квадратической погрешностью будет получена длина линии?

3.14. Найти среднюю квадратическую погрешность функции $u = 3x - 0{,}5y + z$, если m_x = 0,1; m_y = 1,0; m_z = 0,8.

3.15. В треугольнике измерены два угла со средними квадратическими погрешностями 30″. Определить среднюю квадратическую погрешность третьего вычисленного угла.

3.16. Одна и та же линия измерена двумя лентами со средними квадратическими погрешностями 10 см. Какой величины может достичь расхождение результатов двух измерений?

4.1. Определить относительную предельную погрешность в площади треугольника, вычисленной по формуле $P = \dfrac{1}{2}ab\sin C$, если a = 125,2 ± 0,1 м; b = 240,5 ± 0,2 м; C = 64°35′ ± 2′.

4.2. С какой средней квадратической погрешностью будет вычислена длина линии по формуле $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, если координаты точек по обеим осям известны с погрешностью m ?

4.3. Найти относительную среднюю квадратическую погрешность площади треугольника, вычисленной по основанию a = 120,52 м ± 0,10 м и высоте h = 100,00 ± 0,08 м.

4.4. Определить среднюю квадратическую погрешность в площади трапеции, основания и высота которой измерены в метрах: a = 64,50 ± 0,12; b = 85,35 ± 0,15; h = 50,00 ± 0,10.

4.5. Вычислить приращение координат по оси X и его среднюю квадратическую погрешность, если горизонтальное проложение линии s = 160,52 м ± 0,10 м и ее дирекционный угол α = 45°00′ ± 1′.

4.6. Определить горизонтальное проложение линии и его среднюю квадратическую погрешность, если наклонная линия D = 132,25 м ± ± 0,05 м, а угол наклона $\nu = 4^{\circ}10' \pm 10'$.

4.7. Вычислить приращения координат по оси Y и его предельную погрешность, если горизонтальное проложение s = 200,00 м ± 0,20 м и дирекционный угол $\alpha = 30^{\circ}00' \pm 1'$.

4.8. Вычислить относительную среднюю квадратическую погрешность гипотенузы a прямоугольного треугольника, если катет b = 100,00 ± 0,10 м, c = 60,00 м ± 0,05 м.

4.9. Определить превышение по формуле $h = 1/2 D \sin 2\nu$ и его среднюю квадратическую погрешность, если D = 210 м ± 1 м, $\nu = 5^{\circ}30' \pm 1'$.

4.10. С какой относительной средней квадратической погрешностью будет найдено расстояние s по формуле $s = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$, если l = 20,000 м ± 0,002 м, $\varphi = 6^{\circ}42,6 \pm 0,1'$?

4.11. Определить превышение по формуле $h = s \operatorname{tg} \nu + i - v$ и его среднюю квадратическую погрешность, если s = 250 м ± 1 м, $\nu = 6°25' \pm 1'$, i = 1,38 м ± 0,01 м, v = 3,00 м ± 0,02 м.

4.12. В треугольнике измерены две стороны: a = 100,0 м ± 0,1 м, $в$ = 200,0 м ± 0,2 м и угол между ними $C = 30°00' \pm 2'$. Определить площадь треугольника и ее предельную погрешность.

4.13. Определить уклон линии и его среднюю квадратическую погрешность, если горизонтальное проложение линии s = 127,0 м ± 0,5 м и превышение h = 6,00 м ± 0,02 м.

4.14. При измерении наклонной линии мерной лентой получены следующие результаты:

$$D = 234{,}18 \text{ м} \pm 0{,}15 \text{ м};\ \nu = 8^{\circ}20' \pm 10'.$$

Вычислить поправку за наклон и среднюю квадратическую погрешность в значении величины этой поправки.

4.15. Определить поправку за наклон линии, измеренной дальномером, по формуле $\Delta s = (Kl + c)\ \sin^2 \nu$, и ее среднюю квадратическую погрешность, если K = 100,0 ± 0,1; l = 95,0 см ± 0,5 см; с = 0,62 м ± ± 0,002 м; $\nu = 12^{\circ}30' \pm 1'$.

4.16. Найти предельную относительную погрешность в площади круга, если R = 8,00 см ± 0,02 см.

5. В треугольнике ABC измерены сторона $в$, лежащая против угла B, и углы A и B. Вычислить сторону a и ее среднюю квадратическую погрешность. Числовые данные по вариантам приведены в табл. 1.6.

6.1. С какой относительной средней квадратической погрешностью нужно измерить основание a = 200 м и высоту h = 150 м, чтобы вычислить площадь треугольника с предельной погрешностью ±50 м^2.

Т а б л и ц а 1.6. **Исходные данные к задаче 5**

Вариант	b, м	A	B
1	250,20 ± 0,10	63°42,3 ± 0,5′	78019,5′ ± 1′
2	341,19 ± 0,11	64°23,2′ ± 1,5′	61035,5′ ± 1,0′
3	142,17 ± 0,07	71°13′15″ ± 5″	51018′19″ ± 9″
4	338,19 ± 0,15	85°34′26″ ± 6″	70°28′34″ ± 10″
5	311,35 ± 0,20	70°00′15″ ± 10″	52°19′28″ ± 8″
6	438,46 ± 0,12	74°28′30″ ± 10″	82°29′49″ ± 5″
7	252,34 ± 0,20	63°19,2′ ± 0,6′	45°03,3′ ± 0,5′
8	285,93 ± 0,05	68°29′42″ ± 7″	60°29′54″ ± 6″
9	141,16 ± 0,10	58°38′25″ ± 5″	62°34′19″ ± 6″
10	485,25 ± 0,08	75°25,7′ ± 0,5′	85°58,3′ ± 0,4′
11	294,31 ± 0,11	62°16,3′± 0,4′	50°30,2′ ± 0,5′
12	341,06 ± 0,06	85°08,5′ ± 0,3′	64°19,6′ ± 0,4′
13	454,26 ± 0,13	80°27′17″ ± 10″	43°24′31″ ± 8″
14	435,85 ± 0,10	78°38′16″ ± 5″	72°14′19″ ± 5″
15	345,38 ± 0,10	70°35′41″ ±7″	70°21′19″ ± 6″
16	541,92 ± 0,08	45°19′35″ ± 6″	90°26′37″ ± 7″

6.2. Средняя квадратическая погрешность измерения угла одним приемом равна 10″. Сколькими приемами нужно измерять углы, чтобы предельные невязки в четырехугольниках не превышали ±40″?

6.3. Однократное измерение линии сопровождается относительной средней квадратической погрешностью 1:2000. Сколькими приемами нужно измерить линию, чтобы получить окончательный результат с такой же предельной относительной погрешностью?

6.4. С какой относительной погрешностью нужно измерить сторону квадрата, чтобы получить его площадь с относительной погрешностью 1:2000?

6.5. С какой относительной средней квадратической погрешностью нужно измерить стороны прямоугольника (a = 100 м; b = 60 м), чтобы вычислить его площадь с погрешностью не более 30 м^2?

6.6. При измерении линии 20-метровой лентой случайная средняя квадратическая погрешность одного отложения ленты составляет 2 см. Сколько раз нужно измерить линию длиной 200 м, чтобы получить окончательный результат со средней квадратической погрешностью не более 4 см ?

6.7. Невязка в сумме превышений нивелирного хода не должна превышать ± 80 мм. Какова может быть предельная длина нивелирного хода, если средняя квадратическая погрешность в сумме превышений на 1 км хода составляет 7 мм?

6.8. С какой средней квадратической погрешностью нужно измерять углы, чтобы невязка в полигоне из 12 углов не превысила ±4′?

6.9. Средняя квадратическая погрешность измерения угла одним приемом равна 0,5′. Каких размеров может достичь невязка в сумме углов треугольника, если измерять углы четырьмя приемами?

6.10. Коэффициент случайного влияния при линейных измерениях $\mu = 0{,}005$. Каких размеров может достичь разность двойного измерения линии длиной 400 м?

6.11. Средняя квадратическая погрешность измерения угла одним приемом составляет 20″. Сколько приемов нужно сделать, чтобы получить угол со средней квадратической погрешностью 10″?

6.12. При геометрическом нивелировании средняя квадратическая погрешность определения превышения на станции равна ± 1 мм. На каждый километр хода приходится 9 станций. При какой максимальной длине замкнутого нивелирного хода невязка в превышениях не выйдет за пределы ± 50 мм?

6.13. Коэффициент случайного влияния при измерении линии лентой $\mu = 0{,}004$. Сколько раз нужно измерить линию длиной 100 м, чтобы получить окончательный результат со средней квадратической погрешностью не более ± 2см?

6.14. С какой относительной средней квадратической погрешностью нужно знать радиус круга, чтобы определить его площадь с предельной относительной погрешностью 1:1000?

6.15. Линия измерена 6 раз. Получено среднее арифметическое $L = 538{,}23$ м со средней квадратической погрешностью $M = 0{,}20$ м. Найти относительную среднюю квадратическую погрешность одного измерения.

6.16. Среднее значение угла при измерении четырьмя приемами имеет среднюю квадратическую погрешность 10,0″. Определить среднюю квадратическую погрешность значения угла, полученного при тех же условиях из девяти приемов.

Задание 3. Веса измерений и их функций. Обработка результатов неравноточных измерений

Обозначения:

p – вес измерения;

$L_в$ – среднее весовое;

μ – средняя квадратическая погрешность единицы веса;

$M_в$ – средняя квадратическая погрешность среднего весового.

Формулы:

$$p = \frac{k}{m^2}, \tag{1.16}$$

где k – произвольное число, но одинаковое для всех измерений, участвующих в решении какой-либо задачи.

Для нахождения весов функций формулы имеют такой же вид, как в табл. 1.5, только вместо квадратов средних квадратических погрешностей следует поставить обратные веса, т. е. сделать замену $m^2 = \frac{1}{p}$.

$$L_{\text{В}} = \frac{[pl]}{p} = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{p}; \tag{1.17}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}; \tag{1.18}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \tag{1.19}$$

Контроль:

$$[pv] = 0; \tag{1.20}$$

$$[pv^2] = -[pvl] = -[pv\varepsilon]. \tag{1.21}$$

Если L округлено, а погрешность округления равна ω, то

$$[pv] = [p]\omega; \tag{1.22}$$

$$[pv^2] = -[pv\varepsilon] + (L_{\text{В}} - l_0)[pv]; \tag{1.23}$$

$$M_{\text{В}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}; \tag{1.24}$$

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}. \tag{1.25}$$

Пример 10. Два угла измерены со средними квадратическими погрешностями 5″ и 10″. Найти веса этих углов.

Решение задачи можно выполнить двумя способами.

1. Принимая k = 100, по формуле (1.16) получим:

$$p_1 = \frac{k}{m^2{}_1} = \frac{100}{25} = 4; \qquad p_2 = \frac{k}{m^2{}_2} = \frac{100}{100} = 1.$$

2. Напишем известное соотношение

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m^2{}_2}{m^2{}_1} = \frac{100}{25}.$$

Примем для одного из весов произвольное значение, например, $p_2 = 1$, тогда $p_1 = 4$.

Пример 11. Два угла измерены одним теодолитом: первый – одним приемом, второй – тремя. Определить веса этих углов.

Пусть для первого угла вес равен 1. Второй угол получен как среднее арифметическое из трех измерений – каждое с весом, равным 1. Поэтому вес будет равен 3.

Пример 12. Вес угла равен 4. Найти среднюю квадратическую погрешность этого угла, если погрешность единицы веса $\mu = 10''$.

По формуле (1.25) имеем: $m = \dfrac{\mu}{\sqrt{p}} = \dfrac{10}{\sqrt{4}} = 5''.$

Пример 13. В треугольнике измерены два угла с весами $p_\alpha = 3$, $p_\beta = 5$. Найти вес третьего (вычисленного) угла γ.

Напишем функцию

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta$$

и найдем ее обратный вес $\dfrac{1}{p_\gamma} = \dfrac{1}{p_\alpha} + \dfrac{1}{p_\beta} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}.$

Отсюда $p_\gamma = \dfrac{15}{8} = 1{,}88.$

Пример 14. Угол измерен 6 раз одним и тем же теодолитом, но с разным числом приемов. Найти вероятнейшее значение угла и его среднюю квадратическую погрешность.

Результаты измерения угла и их обработка приведены в табл. 1.7.

В данном случае за веса можно принять число приемов t. Для упрощения вычислений веса взяты в 4 раза меньше. Другими словами, измерению угла одним приемом придан вес 0,25.

По формуле среднего весового получим

$$L_{\text{в}} = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{p} = 64°28'20'' + \frac{3{,}0''}{8{,}5} = 64°28'20{,}354'',$$

или округленно L=64°28′20,4″. Погрешность округления $\omega = 0{,}046''$.

Т а б л и ц а 1.7. **Обработка неравноточных измерений**

Номер изме-рения	Результат измерения	Число прие-мов, t	$p=\frac{t}{4}$	ε	$p\varepsilon$	v	pv	pv^2	$pv\varepsilon$
1	64°28′13″	4	1,00	–7″	-7,0	+7,4	+7,4	54,7	–51,8
2	20	6	1,50	0	0	+0,4	+0,6	0,2	0
3	10	2	0,50	–10	–5,0	+10,4	+5,2	54,1	–52,0
4	25	8	2,00	+5	+10,0	–4,6	–9,2	42,3	–46,0
5	30	4	1,00	+10	+10,0	–9,6	–9,6	92,2	–96,0
6	18	10	2,50	–2	–5,0	+2,4	+6,0	14,4	–12,0
l_0=64°28′20″			8,5		+3,0		+0,4	257,9	–257,8
$L_В$=64°28′20,4′									

Контролируем вычисления:

$$[pv]=[p]\omega=8{,}5\cdot 0{,}046=+0{,}4;$$

$$\left[pv^2\right]=-[pv\varepsilon]+\left(L_В-l_0\right)[pv]=257{,}8+0{,}4\cdot 0{,}4=258{,}0\,.$$

Вычисляем среднюю квадратическую погрешность единицы веса:

$$\mu=\sqrt{\frac{\left[pv^2\right]}{n-1}}=\sqrt{\frac{257{,}9}{5}}=7{,}2''.$$

С такой погрешностью измеряется угол четырьмя приемами, так как p = 1 при t = 4. Вычисляем среднюю квадратическую погрешность среднего весового:

$$M_В=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}=\frac{7{,}2}{\sqrt{8{,}5}}=2{,}5''.$$

Окончательный результат можно записать так:

$$L_В = 64^\circ 28'20{,}4'' \pm 2{,}5''.$$

Задачи для самостоятельного решения

7. Два угла измерены с весами p_1 и p_2. Найти средние квадратические погрешности измерений углов m_1 и m_2, если известна средняя квадратическая погрешность единицы веса μ.

Числовые значения известных величин по вариантам даны в табл. 1.8.

8.1. Найти среднюю квадратическую погрешность единицы веса, если вес измерения p = 10, а средняя квадратическая погрешность m = 4,2′.

Т а б л и ц а 1.8. **Исходные данные к задаче 7**

Значение величины	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
p_1	12	3	14	4	5	8	10	12
p_2	6	8	10	6	12	3	5	4
μ	5″	10″	7″	6″	15″	20″	9″	8″

О к о н ч а н и е т а б л. 1.8

Значение величины	Вариант							
	9	10	11	12	13	14	15	16
p_1	3	9	8	5	2	7	4	2
p_2	10	3	5	3	6	3	6	4
μ	12″	18″	15″	30″	10″	5″	3″	20″

8.2. Даны веса измерений трех углов: $p_1 = 2$; $p_2 = 6$; $p_3 = 4$. Средняя квадратическая погрешность измерения первого угла $m_1 = 10''$. Найти средние квадратические погрешности измерений второго и третьего углов.

8.3. Вес суммы 10 углов принят за единицу. Определить вес суммы 20 углов.

8.4. Приняв вес превышения, измеренного на станции геометрического нивелирования, за единицу, вычислить вес превышения по ходу, состоящему из 10 станций.

8.5. Первый угол измерен двумя приемами, второй – четырьмя. Найти среднюю квадратическую погрешность измерения второго угла, если для первого она равна $20''$.

8.6. В четырехугольнике измерены 3 угла с весами $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2$. Найти вес и среднюю квадратическую погрешность четвертого (вычисленного) угла, если средняя квадратическая погрешность единицы веса $\mu = 20''$.

8.7. Определить вес дирекционного угла второй стороны теодолитного хода, если первый угол измерен двумя приемами и имеет вес $p_1 = 2$, второй угол измерен четырьмя приемами, а исходный дирекционный угол безошибочен.

8.8. Средняя квадратическая погрешность измерения линии длиной 1 м равна μ, а вес измерения $p = 1$. Найти вес линии длиной s м.

8.9. Вес превышения на 1 км хода геометрического нивелирования принят равным 1. Чему будет равен вес превышения хода длиной L км?

8.10. Вес суммы углов n-угольника принят за единицу. Определить вес p одного угла.

8.11. Линия измерена 6 раз с одинаковой точностью. Найти вес среднего арифметического, если вес одного измерения равен 2.

8.12. Две линии измерены в одинаковых условиях. Получены следующие результаты: 248,25 и 496,78 м. Определить вес измерения второй линии, если вес измерения первой линии принят за единицу.

8.13. Измерение угла со средней квадратической погрешностью $m_1 = 3{,}2''$ имеет вес $p_1 = 2$. Чему будет равен вес угла, измеренного со средней квадратической погрешностью $m_2 = 2{,}1''$?

8.14. Определить веса превышений, полученных тригонометрическим нивелированием по формуле $h = s \operatorname{tg} v$, принимая стороны s безошибочными, а углы наклона v небольшими и измеренными с одинаковой точностью (выразить p через s).

8.15. Сумма превышений по ходу длиной 5 км имеет вес 2. Найти длину хода, сумма превышений которого имеет вес 1.

8.16. В треугольнике измерены два угла с весами $p_1 = p_2 = 2$. Найти вес третьего вычисленного угла и его среднюю квадратическую погрешность, если средняя квадратическая погрешность единицы веса $\mu = 10''$.

9. От четырех реперов с точным значением высот путем проложения нивелирных ходов различной длины передана высота на узловую точку. Определить наиболее надежное значение высоты узловой точки и средние квадратические погрешности: единицы веса, на 1 км хода, окончательного значения. Исходные данные по вариантам приведены в табл. 1.9.

Т а б л и ц а 1.9. **Исходные данные к задаче 9**

Вариант	Номер хода. Отметка узловой точки *H*, м. Длина хода *L*, км			
	1	2	3	4
	201,324	201,300	201,332	201,315
1	4,5	6,0	1,8	8,0
2	3,2	4,8	1,3	5,0
3	5,5	3,2	9,4	5,8
4	4,0	0,9	3,5	4,8
5	4,2	6,3	12,2	2,2
6	6,2	2,8	4,1	1,0
7	8,0	5,4	6,1	7,9
8	5,5	2,3	6,8	9,3
9	6,3	8,5	2,4	5,6
10	9,0	4,2	1,6	6,2
11	1,2	5,7	6,6	9,8
12	1,9	4,4	5,0	8,2
13	6,0	8,3	9,1	3,0
14	2,2	5,6	3,1	7,5
15	7,8	3,3	8,4	4,1
16	12,0	5,3	2,8	6,1

Вычисление рекомендуется проводить по форме табл. 1.7, изменив название первых трех граф: 1 – номер хода, 2 – высота узловой точки, 3 – длина хода. Вес определить по формуле

$$p = \frac{K}{L},$$

где K – произвольное число.

10. Линия измерена дважды с различной точностью: $l_1 = 427{,}536$ м; $l_2 = 427{,}502$ м. Средние квадратические погрешности m_1 и m_2. Найти вероятнейшее значение длины линии. Значения средних квадратических погрешностей в миллиметрах приведены в табл. 1.10.

Т а б л и ц а 1.10. **Исходные данные к задаче 10**

Погрешность	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
m_1	25	21	18	10	17	20	22	13
m_2	16	15	21	23	20	13	24	19

О к о н ч а н и е т а б л. 1.10

Погрешность	Вариант							
	9	10	11	12	13	14	15	16
m_1	21	6	11	13	18	26	17	12
m_2	10	16	22	7	11	12	8	6

Задание 4. Оценка точности измерений по невязкам в полигонах и ходах

Формулы.

Средняя квадратическая погрешность измерения одного угла, вычисляемая по невязкам полигонов:

$$m = \sqrt{\frac{\left[\frac{f^2}{n}\right]}{N}}, \qquad (1.26)$$

где f – невязка в полигоне;

n – число углов в соответствующем полигоне;

N – число полигонов.

Средняя квадратическая погрешность измерения одного угла, вычисляемая по невязкам треугольников:

$$m = \sqrt{\frac{[f^2]}{3N}}, \tag{1.27}$$

где f – невязка в треугольнике;

N – число треугольников.

Средняя квадратическая погрешность в превышениях на 1 км хода геометрического нивелирования:

$$m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f^2}{L}\right]}{N}}, \tag{1.28}$$

где f – невязка в превышениях по ходу;

L – длина соответствующего хода, км;

N – число ходов.

Задачи для самостоятельного решения

11. Вычислить среднюю квадратическую погрешность измерения одного угла по невязкам восьми треугольников. Значения невязок по вариантам приведены в табл. 1.11.

Таблица 1.11. **Исходные данные к задаче 11**

Вари-ант	Невязки в треугольниках, с							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+13	–6	–20	+4	+15	–30	–10	+18
2	–12	–4	–1	+8	+11	–17	–35	–37
3	–15	+17	–3	+18	+19	+30	–22	–10
4	–6	–3	+23	+27	+40	+49	+8	+4
5	+10	+8	–12	+33	–17	+33	+4	+16
6	+7	+18	+19	–29	+22	–11	+16	–3
7	–9	+5	+15	+16	+22	+28	–2	+2
8	+12	–17	–8	+30	+2	–5	–15	–5
9	+14	–15	–7	–29	+29	+9	+13	+15
10	–11	+24	+27	+1	+49	+3	–2	+13
11	+13	+2	–9	+3	+7	–23	–20	–26
12	+16	+4	–30	+15	+21	+4	+24	+4
13	+22	–9	–6	+2	–22	–4	+26	–15
14	+9	+6	+23	+31	–31	+20	–21	–27
15	+22	+11	+14	–8	–32	–6	+8	–9
16	+17	+25	–3	+34	+24	+20	+2	+19

12. Вычислить среднюю квадратическую погрешность нивелирования хода длиной 1 км по невязкам ходов, приведенным в табл. 1.12.

Т а б л и ц а 1.12. **Исходные данные к задаче 12**

Вари-ант	Номер хода. Длина хода L, км. Невязка f, мм							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	5,6	6,1	4,0	10,6	11,7	6,6	7,7	3,2
1	+20	–18	+16	+25	–30	–20	+40	–4
2	+15	–28	+13	–15	–12	+16	+4	+12
3	–8	+30	+36	–23	–36	+5	–23	+19
4	–2	–13	–8	+4	–19	+8	+5	+5
5	–21	+28	–11	+11	+11	+1	–20	+6
6	–22	–8	+20	+19	–28	–34	+30	+31
7	–38	–7	–1	+4	+5	+12	+4	+23
8	–16	–7	+1	–11	+47	+35	+28	–36
9	+11	+3	+18	+27	+44	+26	–9	–3
10	+9	–15	+9	–6	+19	–15	+23	–4
1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	+10	–16	–17	+27	–64	–44	–5	–6
12	+8	–8	–18	–21	–11	+10	–19	+12
13	+24	–19	+16	+16	+2	–9	–4	–2
14	+6	–1	–5	–7	–34	+8	–65	–4
15	–2	+31	+16	–23	+56	–12	+9	–16
16	–13	–39	–46	–19	+5	–5	–14	–9

Задание 5. Оценка точности по разностям двойных измерений

Формулы.

Средняя квадратическая погрешность измерения, вычисляемая по разностям двойных равноточных измерений при отсутствии систематических погрешностей:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \tag{1.29}$$

где d – разность измерений;

n – число пар измерений.

При наличии систематических погрешностей

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}}, \tag{1.30}$$

где $\partial_i = d_i - \theta$, а систематическая погрешность

$$\theta = \frac{[d]}{n}.$$

Систематические погрешности можно не учитывать, если выполняется условие

$$\left|[d]\right| \le 0,25\left[|d|\right].$$

Средняя квадратическая погрешность единицы веса, вычисляемая по разности двойных неравноточных измерений при отсутствии систематических погрешностей:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}, \tag{1.31}$$

где p – вес парных измерений.

Оценка точности линейных измерений производится по разностям двойных измерений линий.

Коэффициент остаточного систематического влияния линейных измерений

$$\theta = \frac{[d]}{[s]}. \tag{1.32}$$

Средняя квадратическая погрешность единицы веса (коэффициент случайного влияния)

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{\partial^2}{s}\right]}{2(n-1)}}, \tag{1.33}$$

где

$$\partial_i = d_i - \theta,$$

$$\theta_i = \theta s_i.$$

Контроль:

$$[d] = [\theta]. \tag{1.34}$$

$$[\partial] = 0. \tag{1.35}$$

Если при вычислении по формуле (1.32) отброшен остаток r, то

$$[\partial] = r. \tag{1.36}$$

Пример 15. Даны результаты прямого и обратного измерения линий различной длины (табл. 1.13), определить коэффициенты систематического и случайного влияния.

Т а б л и ц а 1.13. **Оценка точности по разностям двойных измерений**

Номер линии	Длина линий s, м		d, см	$\theta_i = \theta S$, см	∂	$\dfrac{\partial^2}{S}$	Формулы и вычисления
	Прямая	Обратная					
1	124,32	124,38	–6	–2	–4	0,13	$\theta = \dfrac{[d]}{[s]} = \dfrac{-0{,}47}{2537} =$
2	253,72	253,84	–12	–5	–7	0,19	
3	438,93	439,18	–21	–8	–13	0,39	$= 0{,}000185$
4	318,16	318,06	+10	–6	+16	0,81	
5	541,63	541,80	–17	–10	–7	0,09	
6	205,10	205,00	+10	–4	+14	0,96	$\mu = \sqrt{\dfrac{\left[\dfrac{\partial^2}{s}\right]}{2(n-1)}} =$
7	456,76	456,90	–14	–8	–6	0,08	
8	198,24	198,21	+3	–4	+7	0,25	$= \sqrt{\dfrac{2{,}90}{14}} = 0{,}46$
$\sum$	2536,86		–47	–47	0	2,90	$\mu = 0{,}0046$

Задачи для самостоятельного решения

13. Даны значения секунд в отсчетах по шкале оптического микрометра при двух совмещениях штрихов лимба (табл. 1.14). Определить среднюю квадратическую погрешность совмещения штрихов.

Каждый студент использует 10 пар измерений, начиная с первого в первом варианте, со второго во втором варианте и т. д.

Т а б л и ц а 1.14. **Исходные данные к задаче 13**

Номер измерения	Первое совмещение	Второе совмещение	Номер измерения	Первое совмещение	Второе совмещение
1	10,5	10,3	14	34,2	34,6
2	32,0	32,2	15	12,0	11,5
3	40,2	39,7	16	23,4	23,8
4	09,8	10,0	17	14,8	14,5
5	04,5	05,2	18	18,5	20,0
6	11,3	11,3	19	43,1	40,2
7	27,7	27,6	20	33,4	34,1
8	19,3	20,8	21	21,6	20,0
9	43,3	45,0	22	54,0	55,1
10	52,1	51,9	23	49,5	48,2
11	34,8	34,4	24	03,7	03,0
12	13,2	10,8	25	20,9	21,9
13	05,8	04,1	26	53,2	51,5

14. По результатам двойных измерений линий лентой (табл. 1.15) определить коэффициенты систематического и случайного влияния. Как и в предыдущей задаче, каждый студент обрабатывает 10 пар измерений.

Т а б л и ц а 1.15. **Исходные данные к задаче 14**

Номер линии	Длина линии, м		Номер линий	Длина линии	
	1-е измерение	2-е измерение		1-е измерение	2-е измерение
1	230,41	230,35	13	184,35	184,28
2	98,34	98,39	14	67,31	67,33
3	443,78	443,75	15	248,84	248,80
4	263,29	263,25	16	105,63	105,67
5	319,26	319,10	17	205,18	205,14
6	283,54	283,50	18	525,68	525,50
7	152,16	152,16	19	310,81	310,70
8	424,35	424,42	20	94,26	94,23
9	250,28	250,22	21	183,18	183,15
10	134,17	134,10	22	428,65	428,50
11	531,30	531,57	23	211,54	211,50
12	352,19	352,17	24	341,12	341,05

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под измерением величин?
2. Какие измерения вы знаете?
3. Что называется истинной погрешностью измерения?
4. Каковы причины появления погрешностей измерений?
5. Какие виды погрешностей вы знаете?
6. По каким признакам различают систематические и случайные погрешности?
7. Какими свойствами обладают случайные погрешности?
8. Что называется средней квадратической погрешностью?
9. Что называется средней погрешностью?
10. Что называется вероятной погрешностью?
11. Как определяется предельная погрешность в случае нормального распределения погрешностей?
12. Каковы свойства погрешностей округления и как определяется средняя квадратическая погрешность округления?
13. Какими свойствами обладает арифметическая средина?
14. Что такое вероятнейшие поправки и какими свойствами они обладают?
15. Что называется весом измерения?
16. Какими свойствами обладают веса измерений?
17. Как определяется средневесовое значение?
18. Что является частным случаем среднего весового?
19. Что называется средней квадратической погрешностью единицы веса?

20. Как вычисляются веса измерений в теодолитных и нивелирных ходах?

21. Приведите пример двойных равноточных и неравноточных измерений.

22. Каковы недостатки оценки точности по разностям двойных измерений?

23. Объясните смысл коэффициентов систематического и случайного влияния при линейных измерениях.

24. Можно ли оценить точность измерений по одному значению невязки?

25. Почему используют остатки при вычислении среднего весового?

26. Будут ли зависимы значения двух смежных углов, вычисленные по значениям направлений, измеренных на одной станции способом круговых приемов?

Лабораторная работа 2. УРАВНИВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

Задание. Произвести уравнивание полигонометрического хода 1-го разряда (рис. 2.1) по методу наименьших квадратов двухгрупповым способом. Найти средние квадратические погрешности уравненных значений дирекционного угла линии 4–5 и координат пункта 5.

Результаты измерений и координаты точки В1 взять из табл. 2.1. Координаты исходного пункта *С*, начальный и конечный дирекционные углы взять из табл. 2.2 по варианту, выданному преподавателем.

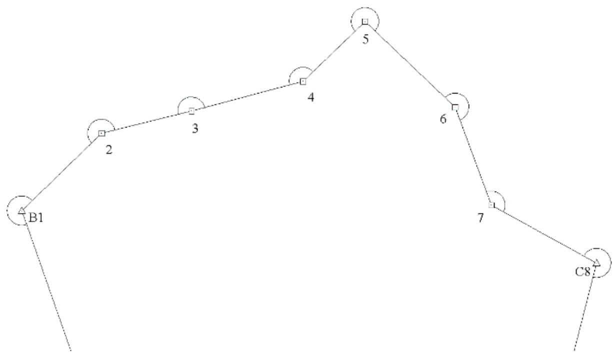

Рис. 2.1. Схема полигонометрического хода

Т а б л и ц а 2.1. **Исходные данные и измеренные величины**

№	Углы поворота (левые)	Дирекционные углы α	Длины линий S, м	Координаты X	Координаты Y
A					
		$72^{o}\,59^{/}\,49^{//}$			
B1	$197^{o}50^{/}35^{//}$			**2500,003**	**1200,113**
			300.283		
2	$210^{o}30^{/}04^{//}$				
			251.664		
3	$178^{o}42^{/}04^{//}$				
			312.602		
4	$151^{o}17^{/}26^{//}$				
			232.440		
5	$267^{o}12^{/}19^{//}$				
			335.347		
6	$205^{o}56^{/}42^{//}$				
			281.510		
7	$139^{o}12^{/}34^{//}$				
			324.205		
C8	$210^{o}30^{/}04^{//}$			1300,214	2201,194
		$65^{o}\,29^{/}\,53^{//}$			
D	$81^{o}48^{/}06^{//}$				

Точность полевых измерений принять $m_{\beta} = 5^{//}$, $m_s = 12$ *мм*. Для удобства работы таблицы рекомендуется располагать на отдельных листах с одной стороны. Все расчеты выполнить по образцу приведенного примера, в котором использованы неизмененные исходные данные из табл. 2.1.

Суть двухгруппового способа уравнивания

При строгом уравнивании полигонометрического хода коррелатным способом составляют три условных уравнения поправок – одно угловое и два координатных, которые имеют следующий вид:

$$[v_{\beta}] + f_{\beta} = 0, \tag{2.1}$$

$$[v_s \cos\alpha] - \frac{1}{\rho}[v_{\beta}(Y_{n+1} - Y_i)] + f^{/}_{x} = 0, \tag{2.2}$$

$$[v_s \sin\alpha] + \frac{1}{\rho}[v_{\beta}(X_{n+1} - X_i)] + f^{/}_{y} = 0, \tag{2.3}$$

где v_{β}, v_s – поправки в измеренные углы и линии;

f_{β} – угловая невязка;

Т а б л и ц а 2.2. **Исходные данные по вариантам**

Вариант	$\alpha_Н$	$\alpha_К$	X_{C8}	Y_{C8}
0	72,9969	65,4981	1300,215	2201,194
1	75,9969	68,4980	1249,466	2137,030
2	78,9969	71,4876	1202,146	2070,298
3	81,9969	74,4909	1158,382	2001,181
4	84,9969	77,4887	1118,296	1929,868
5	87,9969	80,4878	1081,997	1856,555
6	90,9969	83,4926	1049,585	1781,443
7	93,9969	86,4921	1021,149	1704,737
8	96,9969	89,4956	996,765	1626,648
9	99,9969	92,4968	976,502	1547,391
10	102,9969	95,4972	960,415	1467,181
11	105,9969	98,4969	948,548	1386,239
12	108,9969	101,4926	940,933	1304,787
13	111,9969	104,4965	937,591	1223,048
14	114,9969	107,4896	938,532	1141,246
15	117,9969	110,4973	943,753	1059,606
16	120,9969	113,4890	953,239	978,351
17	123,9969	116,4985	966,965	897,703
18	126,9969	119,4965	984,893	817,885
19	129,9969	122,4960	1006,974	739,114
20	132,9969	125,4963	1033,147	661,606
21	135,9969	128,4958	1063,340	585,575
22	138,9969	131,4926	1097,472	511,228
23	141,9969	134,4957	1135,447	438,770
24	144,9969	137,4968	1177,163	368,398
25	147,9969	140,4971	1222,505	300,305

f'_x, f'_y – невязка приращений абсцисс и ординат при вычислении хода без предварительного уравнивания углов;

α – дирекционные углы линий;

$X_{n+1} - X_i$, $Y_{n+1} - Y_i$ – разности абсцисс и ординат точек хода конечной и с номером i, где i = 1, 2,…, n.

Поправки находят под условием

$$[p_s v_s{}^2] + [p_\beta v_\beta{}^2] = \min. \qquad (2.4)$$

Вес измеренного угла принимается равным 1:

$$p_\beta = 1. \qquad (2.5)$$

Если длины линий примерно одинаковы и измеряются электронным тахеометром практически с одинаковой точностью, то веса линий тоже принимают одинаковыми и вычисляют по формуле

$$p_s = \frac{m_\beta^2}{m_s^2}, \qquad 2.6)$$

где m_β, m_s – средние квадратические погрешности измерения углов и линий.

Задача сводится к составлению и решению трех нормальных уравнений коррелат.

В рассматриваемом двухгрупповом способе поступают следующим образом. Условные уравнения разделяют на две группы. К первой относят уравнение (2.1). Решая его отдельно, находят первичные поправки в углы по формуле

$$v'_\beta = \frac{f_\beta}{n+1}, \tag{2.7}$$

где n + 1 число измеренных углов (n – число измеренных сторон).

После исправления углов первичными поправками вычисляют приращения координат и преобразованные свободные члены – невязки f_X, f_Y условных уравнений (2.2) и (2.3) второй группы.

Затем переносят начало координат в центр тяжести вершин хода с координатами

$$\left.\begin{aligned} X_Ц &= \frac{\sum_1^{n+1} X'}{n+1}, \\ X_Ц &= \frac{\sum_1^{n+1} Y'}{n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

где X',Y' – условные координаты пунктов хода.

Вычисляют так называемые центральные координаты:

$$\begin{aligned} \xi_i &= X'_i - X_Ц, \\ \eta_i &= Y'_i - Y_Ц\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Учитывая, что ξ_i и η_i являются уклонением от среднего арифметического, должно соблюдаться условие

$$\begin{aligned} [\xi] &= 0, \\ [\eta] &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В результате таких преобразований уравнения (2.1), (2.2) и (2.3) примут следующий вид:

$$[v''_\beta] = 0, \tag{2.11}$$

$$[v_s \cos\alpha] + \frac{1}{\rho}[v''_\beta \eta] + f_X = 0,$$
$$[v_s \sin\alpha] - \frac{1}{\rho}[v''_\beta \xi] + f_Y = 0. \tag{2.12}$$

По условным уравнениям (2.12) составляется два нормальных уравнения коррелат:

$$Ak_2 + Ck_3 + f_X = 0,$$
$$Ck_2 + Bk_3 + f_Y = 0, \tag{2.13}$$

коэффициенты, которых вычислены по формулам

$$A = \frac{q_\beta}{\rho^2}[\eta^2] + [q_s \cos^2\alpha];$$
$$B = \frac{q_\beta}{\rho^2}[\xi^2] + [q_s \sin^2\alpha]; \tag{2.14}$$
$$C = -\frac{q_\beta}{\rho^2}[\xi\eta] + [q_s \sin\alpha \cos\alpha],$$

где q_β и q_s – обратные веса измеренных углов и линий.

Уравнения решают методом определителей, получая коррелаты k_2 и k_3 из выражений

$$k_2 = \frac{1}{N}(Cf_Y - Bf_X),$$
$$k_3 = \frac{1}{N}(Cf_X - Af_Y), \tag{2.15}$$

где $N = AB + C^2$. (2.16)

Затем вычисляют вторичные поправки в углы и поправки в линии:

$$v''_{\beta_i} = \frac{q_\beta}{\rho}(\eta_i k_2 - \xi_i k_3), \tag{2.17}$$

$$v_s = q_s(\cos\alpha_1 k_2 + \sin\alpha_i k_3). \tag{2.18}$$

Поправки в приращения координат вычисляют по формулам

$$v_{\Delta x_i} = v_{s_i}\cos\alpha_i - \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}\Delta y_i, \tag{2.19}$$

$$v_{\Delta y_i} = v_{s_i}\sin\alpha_i + \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}\Delta x_i,$$

где $v_{\alpha_i} = \sum_1^i v''_\beta$. (2.20)

Среднюю квадратическую погрешность единицы веса вычисляют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_\beta v'^2_\beta] + [p_\beta v''^2_\beta] + [p_s v_s^2]}{3}} . \qquad (2.21)$$

Для оценки точности уравненных элементов хода: линии, угла, дирекционного угла, абсциссы и ординаты с номером i составляют весовые функции (выражения для приращений функций):

$$\Delta F_{S_i} = v_{S_i}, \qquad (2.22)$$

$$\Delta F_{\beta_i} = v_{\beta_i}, \qquad (2.23)$$

$$\Delta F\alpha_i = \sum_1^i v_{\beta_i}, \qquad (2.24)$$

$$\Delta F_{X_{i+1}} = [v_s \cos\alpha]_1^i - \frac{1}{\rho}[v_\beta (Y_{i+1} - Y_1)]_1^i, \qquad (2.25)$$

$$\Delta F_{Y_{i+1}} [v_s \sin\alpha]_1^i + \frac{1}{\rho}[v_\beta (X_{i+1} - X_1)]_1^i. \qquad (2.26)$$

Среднюю квадратическую погрешность уравненных элементов вычисляют по формуле

$$m_f = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} . \qquad (2.27)$$

Обратные веса приращений функций уравненных значений углов и линий находят по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [qFF] - \frac{[qaF]^2}{q_\beta(n+1)} - \frac{[qbF]^2}{A} - \frac{\{[qcF] - \frac{C}{A}[qbF]\}^2}{B - \frac{C^2}{A}} . \qquad (2.28)$$

Расшифровка элементов формулы (2.28) приведена в табл. 2.3 (подробнее смотрите в пособии [4] и практикуме [5]).

Т а б л и ц а 2.3. **Необходимые величины при вычислении обратного веса функции при двухгрупповом способе уравнивания**

Наименование элемента	Угол β_i	Дирекционный угол α_i	Сторона S_i	Абсцисса X_{i+1}	Ордината Y_{i+1}
$[qFF]$	q_β	iq_β	q_s	$\frac{q_\beta}{\rho^2}[(Y_{i+1}-Y)^2]_1^i +$ $+[q_s\cos^2\alpha]_1^i$	$\frac{q_\beta}{\rho^2}\left[\left(X_{\iota+1}-X\right)^2\right]_1^\iota +$ $+\left[q_S\sin^2\alpha\right]_1^i$
$[qaF]$	q_β	iq_β	0	$-\frac{q_\beta}{\rho}[(Y_{i+1`}-Y)]_1^i$	$\frac{q_\beta}{\rho}[(X_{i+1`}-X)]_1^i$
$[qbF]$	$\frac{q_\beta}{\rho}\eta_i$	$\frac{q_\beta}{\rho}[\eta]_1^i$	$q_{S_i}\cos\alpha_i$	$-\frac{q_\beta}{\rho^2}\left[\left(Y_{i+1}-Y\right)\eta\right]_1^i +$ $+\left[q_s\cos^2\alpha\right]_1^i$	$\frac{q_\beta}{\rho^2}\left[\left(X_{i+1}-X\right)\eta\right]_1^i +$ $+\left[q_s\cos\alpha\sin\alpha\right]_1^i$
$[qcF]$	$\frac{q_\beta}{\rho}\xi_i$	$-\frac{q_\beta}{\rho^2}[\xi]_1^i$	$q_{S_i}\sin\alpha_i$	$\frac{q_\beta}{\rho^2}\left[\left(Y_{i+1}-Y\right)\xi\right]_1^i +$ $+\left[q_s\cos\alpha\sin\alpha\right]_1^i$	$-\frac{q_\beta}{\rho^2}\left[\left(X_{\iota+1}-X\right)\xi\right]_1^\iota +$ $+\left[q_S\sin^2\alpha\right]_1^i$

Порядок выполнения работы

1. Для удобства работы выразить углы в градусах с точностью до четырех знаков после запятой, занести исходные данные и измеренные величины в ведомость (табл. 2.4), вычислить угловую невязку по формуле

$$f_\beta = \sum\beta - [\alpha_k + 180(n+1) - \alpha_н], \tag{2.29}$$

ее предельное значение – по формуле

$$f_{\beta_{пред}} = 2m_\beta\sqrt{n+1} \tag{2.30}$$

и найти первичные поправки по формуле (2.7), т. е. распределить невязку с обратным знаком поровну во все углы.

Для полигонометрии 1-го разряда m_β = 5$^{//}$, или 0,00139^o. Угловую невязку и поправки в углы условимся выражать в единицах четвертого знака градуса, тогда рабочая формула примет вид

$$f_{\beta_{пред}} = 28\sqrt{n+1}\,. \tag{2.31}$$

По исправленным углам вычислить дирекционные углы по формуле

$$\alpha_{i+1} = \alpha_n - 180^o + \beta\ . \tag{2.32}$$

Найти приращения координат по формулам

$$\Delta X_i = S_i \cdot \cos\alpha_i, \qquad \Delta Y_i = S_i \cdot \sin\alpha_i. \tag{2.33}$$

Вычислить невязки в приращениях координат:

$$f_X = \sum\Delta X - (X_К - X_Н), \qquad f_Y = \sum\Delta Y - (Y_К - Y_Н) \tag{2.34}$$

линейную невязку хода:

$$f_S = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} \tag{2.35}$$

и относительную невязку хода f_S / S, которая в соответствии с инструкцией не должна превышать 1:10000.

Вычислить коэффициенты нормальных уравнений второй группы. Для этого формулу (2.14) надо привести к более простому виду.

Т а б л и ц а 2.4. **Ведомость уравнивания полигонометрического хода**

№	Углы поворота (левые)	Дирекционные углы	Длины линий	Приращения координат		Координаты	
				ΔX	ΔY	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8
A	*+5*	72,9969					
B1	**197,8431**	*–9*	*+2*			**2500,003**	**1200,113**
	+5	90,8405	**300,283**	–4,405	300,251		
2	**210,5011**	*–15*	***0***			2495,603	1500,368
	+5	121,3421	**251,664**	–130,902	214,940		
3	**178,7011**	*–19*	***0***			2364,706	1715,312
	+5	120,0437	**312,602**	–156,507	270,602		
4	**151,2906**	*–19*	*+2*			2208,204	1985,919
	+5	91,3348	**232,440**	–5,415	232,377		
5	**267,2053**	*–16*	*–4*			2202,794	2218,301
	+5	178,5406	**335,347**	–335,238	8,541		
6	**205,9450**	*–12*	*–5*			1867,561	2226,847
	+5	204,4861	**281,510**	–256,192	–116,678		
7	**139,2094**	*–7*	–3			1611,374	2110,174
	+4	163,6960	**324,205**	–311,167	91,015		
C8	**81,8017**					**1300,214**	**2201,194**
		65,49821					
D							
ΣВпр	**1432,4973**		**ΣS = 2038,051**	**ΣΔ*X*пр = –1199,826**	**ΣΔ*Y*пр = 1001,048**		
Вт	**1432,5012**			**ΣΔ*X*т = –1199,788**	**ΣΔ*Y*т = 1001,081**		
f=	**–0,0039**			***fx*** **= –0,037**	***fy*** **= –0,033**		

fs **= 0.050**

Продолжение табл. 2.4

№	*X!*	*У*!	ξ	η	ξ^2	ξη	η^2
1	9	10	11	12	13	14	15
A							
B1	0	0	0,431	–0,695	0,186	–0,300	0,483
2	–0,004	0,300	0,427	–0,395	0,182	–0,169	0,156
3	–0,135	0,515	0,296	–0,180	0,088	–0,053	0,032
4	–0,292	0,786	0,139	0,091	0,019	0,013	0,008
5	–0,297	1,018	0,134	0,323	0,018	0,043	0,104
6	–0,632	1,027	–0,201	0,332	0,040	–0,067	0,110
7	–0,889	0,910	–0,458	0,215	0,210	–0,098	0,046
C8	–1,200	1,001	–0,769	0,306	0,591	–0,235	0,094
D							
Σ	–3,449	5,557	–0,001	0	1,334	–0,866	1,033
	$X_ц$ = –0,431	$Y_ц$ = 0,695					

Продолжение табл. 2.4

$m_\beta = 5''$
$m_s = 12$ мм
$q_\beta = 1{,}000$
$q_S = 0{,}746$
$10^6/\rho = 1{,}745$
$10^{12}/\rho^2 = 3{,}046$

$A = 5{,}59$
$B = 6{,}85$
$C = 2{,}02$
$AB = 38{,}17$
$C^2 = 4{,}08$
$N = 34{,}09$

$Cf_Y = -66{,}66$
$Bf_X = -255{,}08$
$Cf_Y - Bf_X = +186{,}42$
$k_2 = +5{,}468$
$1/\rho\, k_2 = +9{,}542$
$q_S\, k_2 = +4{,}074$

$Cf_X = -74{,}74$
$Af_Y = -184{,}14$
$Cf_X - Af_Y = +109{,}40$
$k_3 = +3{,}209$
$1/\rho\, k_3 = 5{,}600$
$q_S\, k_3 = 2{,}391$

№	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\frac{1}{\rho}\eta k_2$	$-\frac{1}{\rho}\xi k_3$	v''_{β_i}	v_{α_i}
1	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A									
B1	–0,015	1,000	0,000	–0,015	1,000	–5,79	–2,25	–8,05	–8,05
2	–0,520	0,854	0,270	–0,444	0,729	–3,29	–2,23	–5,53	–13,58
3	–0,501	0,866	0,251	–0,434	0,750	–1,50	–1,54	–3,05	–16,63
4	–0,023	1,000	0,001	–0,023	1,000	0,76	–0,72	0,03	–16,60
5	–1,000	0,025	1,000	–0,025	0,001	2,69	–0,70	1,99	–14,61
6	–0,910	–0,414	0,828	0,377	0,171	2,77	1,05	3,82	–10,79
7	–0,960	0,281	0,922	–0,270	0,079	1,79	2,39	4,19	–6,60
C8						2,55	4,01	6,58	
D									
Σ	**–3,929**	**3,612**	**3,272**	**–0,834**	**3,730**				

Окончание табл. 2.4

№	$q_s \cos\alpha_i k_2$	$q_s \sin\alpha_i k_3$	v_s	$\frac{v_{\alpha_i}}{\rho}$	$v_s \cos\alpha_i$	$-\frac{v_{\alpha_i}}{\rho}\Delta y_i$	$v_{\Delta x_i}$	$v_{s_i} \sin\alpha_i$	$\frac{v_{\alpha_i}}{\rho}\Delta x_i$	$v_{\Delta y_i}$
1	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
A										
B1	–0,08	3,48	3,4	–14,05	–0,05	4,22	4,17	3,40	0,06	3,46
2	–2,88	2,98	0,1	–23,70	–0,05	5,09	5,04	0,08	3,10	3,18
3	–2,77	3,02	0,2	–29,02	–0,12	7,85	7,73	0,21	4,54	4,75
4	–0,13	3,48	3,4	–28,97	–0,08	6,73	6,65	3,36	0,16	3,51
5	–5,54	0,09	–5,5	–25,50	5,45	0,22	5,67	–0,14	8,55	8,41
6	–5,04	–1,44	–6,5	–18,83	5,90	–2,20	3,70	2,68	4,82	7,51
7	–5,32	0,98	–4,3	–11,52	4,16	1,05	5,21	–1,22	3,58	2,37
C8										
D										
Σ			–9,2	–151,59			38,18			33,20

2. С учетом формул (2.5) и (2.6) обратные веса углов и линий составят $q_\beta = 1$, $q_S = m_S^2 / m_\beta^2$.

Центральные координаты η и ξ целесообразно выразить в километрах, m_S – в миллиметрах, а m_β – в единицах четвертого знака градуса. Тогда получим $q_S = 12^2 / 5^2 = 0,745$. Учитывая, что поправки выражаются в единицах четвертого знака градуса, следует принять ρ = 570000. С учетом размеренности формулы (2.14) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} A &= 3,046[\eta^2] + 0,745[\cos^2\alpha]; \\ B &= 3,046[\xi^2] + 0,745[\sin^2\alpha]; \\ C &= -3,046[\xi\eta] + 0,745[\sin\alpha\cos\alpha]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Для получения центральных координат по формулам (2.8) нужно найти условные координаты X' и Y', приняв за начало координат первую точку хода. Величины X', Y', $X_Ц$, $Y_Ц$, η и ξ находят с округлением до 0,001 км. Контрольные равенства (2.10) должны выполняться в пределах 0,5*n* единиц последнего знака, где *n* – число слагаемых.

Вычисления выполнить в табл. 2.4 (графы (9–20).

Вычисления величин, входящих в нормальные уравнения, контролируются равенствами

$$[(\eta+\xi)^2] = [\eta^2] + [\xi^2] + 2[\eta\xi], \tag{2.37}$$

$$\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i = 1, \tag{2.38}$$

которые должны выполняться в пределах точности вычислений. В рассматриваемом примере $[(\eta + \xi)^2] = 0,635$,

$$[\eta^2] + [\xi^2] + 2[\eta\xi] = 0,634.$$

В верхней части таблицы вычислить коэффициенты *A*, *B*, *C* нормальных уравнений коррелат, обратный вес измеренной стороны $q_S = m_S^2 / m_\beta^2$ и величину $1/\rho^2$ с тремя значащими цифрами.

3. Решить нормальные уравнения коррелат методом определителей. Коррелаты вычислить по формулам (2.15) с 3–4 значащими цифрами. Решение выполнить вверху таблицы и проконтролировать подстановкой коррелат в формулу (2.13).

В рассматриваемом примере получим:

$$5,58 \cdot 5,468 + 2,02 \cdot 3,209 - 37 = -0,006,$$
$$2,02 \cdot 5,468 + 6,84 \cdot 3,209 - 33 = -0,005,$$

что подтверждает правильность расчетов.

4. Вычислить вторичные поправки в углы v''_β, поправки в дирекционные углы v_α и поправки в линии v_S (табл. 2.4, графы 21–27) по формулам (2.17), (2.20) и (2.18).

Вычисление поправок v''_β проконтролировать по формуле (2.11), а поправок v_S – по формуле

$$[v_s] = q_s\{[\cos\alpha]k_2 + [\sin\alpha]k_3\}.$$

В рассматриваемом примере получим:

$$[v''_\beta] = -0,02,$$

$$[v_s] = -7,36, \; q_s\{[\cos\alpha]k_2 + [\sin\alpha]k_3\} = -7,37.$$

5. Вычислить поправки в приращения координат (табл. 2.4, графы 27–34) по формулам

$$[v_{\Delta X}] = -f_X,$$

$$[v_{\Delta Y}] = -f_Y.$$

В рассматриваемом примере $[v_{\Delta X}] = +37,03$ мм, $[v_{\Delta Y}] = +33,03$ мм, $f_X = -37$ мм, $f_Y = 33$ мм. Следовательно, вычисления сделаны правильно.

6. Полученные поправки с округлением до целых миллиметров записать в табл. 2.4 (графы 5, 6) над вычисленными приращениями координат и по исправленным приращениям найти уравненные координаты пунктов.

7. Вычислить среднюю квадратическую погрешность единицы веса (в данном случае среднюю квадратическую погрешность измерения угла) по формуле (2.21).

Учитывая, что $p_\beta = 1$, $p_S = m_\beta^2 / m_S^2 = 1,34$ для всех линий, формулу (2.21) можно записать в следующем виде:

$$\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{[v_\beta'^2] + [v_\beta''^2] + 1,34[v_s^2]}{3}}.$$

В результате получим:

$\mu = m_\beta = \sqrt{\dfrac{191 + 228 + 1,34 \cdot 59}{3}}$ =12,9 единицы 4-го знака градуса, или 4,6″.

Средняя квадратическая погрешность самой погрешности составит: $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{6}} = 5,3$ единицы 4-го знака градуса, или 1,9$^{//}$.

8. Вычислить обратные веса четвертого дирекционного угла и координат пятой вершины хода (табл. 2.5) по формуле (2.28). Алгоритмы [*qFF*], [*qaF*], [*qbF*], [*qcF*] составить по выражениям, приведенным в табл. 2.3. Вычисление компонентов, входящих в алгоритмы, выполнить в табл. 2.4.

Данные для вычислений в табл. 2.5 взять из табл. 2.4. При вычислениях в табл. 2.6 следует обращаться к табл. 2.3 и 2.4. Для удобства работы таблицы нужно разместить на отдельных листах.

Например, для нахождения [*qbF*] при оценке дирекционного угла из табл. 2.3 находим $\frac{q_\beta}{\rho}[\eta]_1^i$. По условию $q_\beta = 1$. В верхней части табл. 2.3 находим: $\frac{1}{\rho}$=1,745. Из табл. 2.5 $[\eta]_1^4 =$(– 0,695 – 0,395 – – 0,180 + 0,091)= 1,179. Следовательно, $[\mathrm{qbF}] = 1,745 \cdot (-1,179) = -2,06$.

На основе расчетов табл. 2.6 можно судить о точности определения координат наиболее слабого пункта, расположенного в середине полигонометрического хода (пункт 5). Средняя квадратическая погрешность положения этого пункта составит

$$m_t = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2} = \sqrt{16,4^2 + 13,8^2} = 21\,\text{мм}.$$

В отчете по лабораторной работе следует привести схему полигонометрического хода, таблицы и формулы, по которым выполнялись расчеты.

Т а б л и ц а 2.5. **Вспомогательные вычисления при оценке точности**

№	$X_5 – X$	$Y_5 – Y$	$\cos^2\alpha$	$\cos\alpha \sin\alpha$	$\sin^2\alpha$
1	–0,297	1,018	0,000	–0,015	1,000
2	–0,293	0,718	0,270	–0,444	0,729
3	–0,162	0,503	0,251	–0,434	0,750
4	–0,005	0,232	0,001	–0,023	1,000
5	0	0			
Σ	–0,757	2,471	0,522	–0,916	3,479

Т а б л и ц а 2.6. **Ведомость оценки точности уравненных элементов**

$[qaF]$	$[qbF]$	$[qcF]$	$\frac{C}{A}[qbF]$	$[qcF]-\frac{C}{A}[qbF]$	$[qFF]$	$-\frac{[qaF]^2}{q_\beta(n+1)}$	$-\frac{[qbF]^2}{A}$	$\frac{\{[qcF]-\frac{C}{A}[qbF]\}^2}{B-\frac{C^2}{A}}$	$\frac{1}{P_F}$	m
			Дирекционный угол линии 4-5							
4	–2,06	–2,26	0,74	–1,51	4	–2	–0,76	–0,37	0,87	12,0
			Абсцисса точки 5							
–4,31	3,62	2,14	–1,31	0,83	6,05	–2,33	–2,34	–0,11	1,27	14,5
			Ордината точки 5							
–1,32	0,38	3,52	–0,14	3,38	3,21	–0,22	–0,03	–1,86	1,10	13,5

Вопросы для самопроверки

1. Чем определяется число условных уравнений в коррелатном способе?
2. Какой вид имеет условное уравнение дирекционных углов в полигонометрии?
3. Как влияет на линейную невязку удаленность угла от исходного пункта?
4. Для чего нужны весовые функции?
5. Каков контроль вычисления поправок углов в коррелатном способе уравнивания?

Лабораторная работа 3. УРАВНИВАНИЕ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Задание. Уравнять нивелирную сеть, изображенную на рис. 3.1.

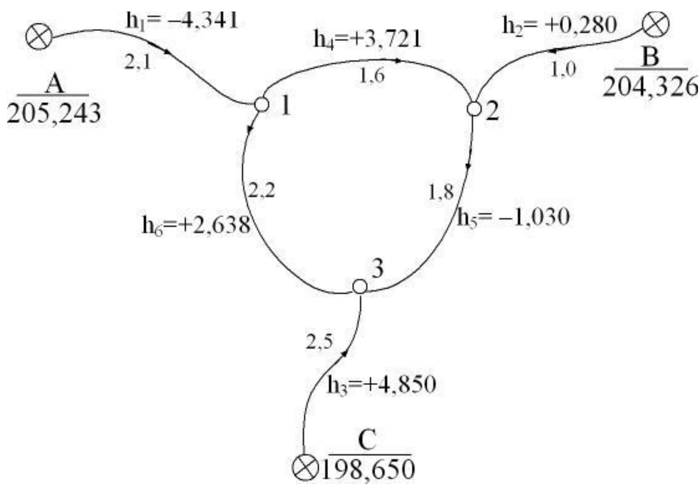

Рис. 3.1. Схема сети

На схеме показаны высоты исходных реперов *A*, *B*, *C*, суммы превышений по ходам, длины ходов в километрах (в знаменателе) и направления ходов (стрелками). Приведенный рисунок соответствует нулевому варианту. Для других вариантов необходимо изменить суммы превышений и длины в звеньях 1–3 и 2–3, выбрав их из табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1. **Исходные данные (сумма превышений *h*, длина звеньев *L*, км)**

Вариант	Звено 1–3		Звено 2–3		Вариант	Звено 1–3		Звено 2–3	
	h_6	L	h_5	L		h_6	L	h_5	L
1	2,640	2,3	–1,028	1,9	14	2,664	2,1	–1,000	1,7
2	2,642	2,4	–1,027	2,0	15	2,667	2,0	–1,006	3,2
3	2,644	2,5	–1,026	2,1	16	2,637	1,9	–1,005	3,3
4	2,646	2,6	–1,025	2,2	17	2,635	1,8	–1,008	3,4
5	2,650	2,7	–1,024	2,3	18	2,632	1,7	–1,006	3,5
6	2,651	2,8	–1,022	2,4	19	2,630	2,4	–1,031	3,6
7	2.652	2.9	–1,020	2,6	20	2,629	2,3	–1,032	3,7
8	2,653	3,0	–1,018	2,5	21	2,628	2,1	–1,033	3,8
9	2,654	3,1	–1,016	2,7	22	2,627	1,9	–1.032	3,9
10	2,656	3,2	–1,015	2,8	23	2,626	1,8	–1,033	4,0
11	2.658	3.3	–1,013	2,9	24	2,627	3,6	–1,034	1,8
12	2,660	3,4	–1,011	3,0	25	2,630	3,7	–1,035	1,7
13	2,663	3,5	–1,009	1,8					

На схеме сети приведены высоты H_A, H_B, H_C исходных реперов A, B, C, суммы измеренных превышений h по ходам и длины ходов в километрах. Направления ходов показаны стрелками. Выберем в качестве необходимых неизвестных высоты узловых точек 1, 2, 3. Выразим их через приближенные значения и поправки:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \delta x_1, \\ x_2 &= x_2^0 + \delta x_2, \\ x_3 &= x_3^0 + \delta x_3. \end{aligned}\right\}$$

Найдем приближенные значения неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 &= H_A + h_1 = 200{,}302, \\ x_2^0 &= H_B + h_2 = 204{,}606, \\ x_3^0 &= H_C + h_3 = 203{,}500. \end{aligned}\right\}$$

Составим уравнения поправок вида

$$a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + c_i \delta x_3 + l_i = v_i. \qquad (3.1)$$

Из рис. 3.1 следует:

$$h_1 + v_1 = x_1 - H_A = x_1^0 + \delta x_1 - H_A.$$

Отсюда

$$v_1 = x_1^0 + \delta x_1 - (H_A + h_1) = \delta x_1.$$

Аналогично получим:

$$v_2 = x_2^0 + \delta x_2 - (H_B + h_2) = \delta x_2,$$
$$v_3 = x_3^0 + \delta x_3 - (H_C + h_3) = \delta x_3,$$
$$v_4 = x_2^0 + \delta x_2 - x_1^0 - \delta x_1 - h_4 = -\delta x_1 + \delta x_2 - 17,$$
$$v_5 = x_3^0 + \delta x_3 - x_2^0 - \delta x_2 - h_5 = -\delta x_2 + \delta x_3 - 76,$$
$$v_6 = x_3^0 + \delta x_3 - x_1^0 - \delta x_1 - h_6 = -\delta x_1 + \delta x_3 - 40.$$

Последние числа – это свободные члены, выраженные в миллиметрах. Например, для $v4$ находим:

$$x_2^0 - x_1^0 - h_4 = 204606 - 200902 - 3721 = -17.$$

Запишем полученную систему уравнений в виде таблицы с коэффициентами при неизвестных (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. **Система уравнений поправок**

№ измерений	a_i	b_i	c_i	l_i	S_i	v_i	p_i
1	1	0	0	0	1	–11,5	2,4
2	0	1	0	0	1	–8,8	5,0
3	0	0	1	0	1	+35,7	2,0
4	–1	1	0	–17	–17	–14,3	3,1
5	0	–1	1	–76	–76	–31,5	2,8
6	–1	0	1	–40	–40	+7,2	2,3
Σ	–1	1	3	–133	–130	$[pv^2]$=6785	
δx_j	–11,5	–8,8	35,7			$[pvl]$=6794	
	$[pav]$=+0,17	$[pbv]$=–0,13	$[pcv]$=–0,24				

Столбец S_i необходим для контроля составления нормальных уравнений. В последнем столбце записываем веса превышений по ходам, как величины, обратные длинам ходов. В данном случае за единицу веса можно принять вес суммы превышений хода длиной 5 км. Тогда

$$p_1 = \frac{5}{2{,}1} = 2{,}4; \quad p_2 = \frac{5}{1{,}0} = 5{,}0 \text{ и т. д.}$$

Столбец v_i и строка δx_j пока остаются свободными.

Далее вычисляем коэффициенты нормальных уравнений с контролем методом сумм (табл. 3.3).

Т а б л и ц а 3.3. **Коэффициенты системы нормальных уравнений**

	a]	*b*]	*c*]	*l*]	*S*]	Контроль
[*pa*	7,8	–3,1	–2,3	144,7	147,1	0
[*pb*		10,9	–2,8	160,1	165,1	0
[*pc*			7,1	–304,8	–302,8	0
[*pl*				20748,7	20748,7	0
[*pS*					20758,1	0

На схеме записаны коэффициенты нормальных уравнений, начиная с квадратичных. При контроле суммируют коэффициенты, стоящие в одном столбце и строке с квадратичными. Например, для третьего уравнения получим: – 2,3 – 2,8 + 7,1 – 304,8 = 302,8. Эта сумма точно равна [*pcS*] и в графе «Контроль» ставится 0.

Решение нормальных уравнений выполним по способу Гаусса (табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4. **Решение системы нормальных уравнений**

δx_1	δx_2	δx_3	*l*	*S*	Контроль
7,8	–3,1	–2,3	144,7	147,1	
(–1)	+0,397	+0,295	–18,551	–18,859	0
δx_1=–11,502	9,67	–3,71	217,55	223,50	+0,01
	(–1)	+0,384	–22,497	–23,113	0
	δx_2=–8,783	5,00	–178,57	–173,58	–0,01
		(–1)	+35,714	+34,716	–0,02
		Δx_3= 35,714	6792,70	6792,53	+0,17
				6792,18	

Практически задача решается так. Выписываем на схему коэффициенты первого уравнения из табл. 3.3 и делим их на квадратичный коэффициент с обратным знаком. Получаем первое элиминационное уравнение (подчеркнуто), контролируем вычисления. Находим преобразованные коэффициенты второго уравнения по правилам раскрытия алгоритма Гаусса:

$$0{,}397\,(–3{,}1) + 10{,}9 = 9{,}67; \quad 0{,}397\,(–2{,}3) – 2{,}8 = –3{,}71;$$

$$0{,}397 \cdot 144{,}7 + 160{,}1 = 217{,}55; \quad 0{,}397 \cdot 147{,}1 + 165{,}1 = 233{,}50.$$

Контролируем вычисления. Делим полученные коэффициенты на квадратичный 9,67 с обратным знаком. Получаем второе элиминационное уравнение (подчеркнуто).

Находим преобразованные коэффициенты третьего уравнения:

$0{,}295\,(–2{,}3) + 0{,}384\,(–3{,}71) + 7{,}1 = 5{,}00,$

$0{,}295 \cdot 144{,}7 + 0{,}384 \cdot 217{,}55 – 304{,}8 = –178{,}57,$

$0{,}295 \cdot 147{,}1 + 0{,}384 \cdot 223{,}50 – 302{,}8= –173{,}58.$

Контролируем вычисления. Находим коэффициенты третьего элиминационного уравнения. В целях контроля раскрываем алгоритмы

Гаусса [$pll \cdot 3$], [$plS \cdot 3$] и [$pSS \cdot 3$]. Получаем соответственно 6792,70; 6792,53 и 6792,18.

Теоретически эти числа должны быть равны. Однако за счет округления коэффициентов могут быть небольшие расхождения. В данном случае сходятся первые четыре цифры, что является вполне достаточным.

Последнее элиминационное уравнение можно записать так: $-\delta x_3 + 35{,}714 = 0$. Отсюда $\delta x_3 = 35{,}714$.

Подставляя δx_3 во второе элиминационное уравнение, найдем $\delta x_2 = -8{,}783$. Подставляя δx_3 и δx_2 в первое элиминационное уравнение, найдем $\delta x_1 = -11{,}502$. Для заключительного контроля подставим δx_1, δx_2 и δx_3 в первое уравнение: $7{,}8\ (-11{,}502) - 3{,}1\ (-8{,}783) - 2{,}3\ 35{,}714 + 144{,}7 = 0{,}070$. Учитывая, что свободные члены выражены в миллиметрах, такое расхождение вполне допустимо.

Далее вычисляем высоты узловых точек:

$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 = 200{,}902 - 0{,}012 = 200{,}890,$

$x_2 = x_2^0 + \delta x_2 = 204{,}606 - 0{,}009 = 204{,}597,$

$x_3 = x_3^0 + \delta x_3 = 203{,}500 + 0{,}036 = 203{,}536.$

Найденные значения δx_1, δx_2, δx_3 переписываем в табл. 3.2 и по формуле (3.1) вычисляем поправки в измеренные суммы превышений.

Вычисление поправок контролируется по формулам $[pav] = 0$, $[pbv] = 0$, $[pcv] = 0$. В данном случае вместо нулей в правой части получим соответственно: +0,17, –0,13, –0,24, что объясняется округлением поправок.

Для оценки точности результатов измерений вычислим среднюю квадратическую погрешность единицы веса по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}},$$

где n – число измерений (6);

k – число необходимых неизвестных (3).

По данным табл. 3.2, $[pv^2] = 6785$. Отметим, что теоретически должны выполняться равенства

$$[pv^2] = [plv] = [pll \cdot 3] = [plS \cdot 3] = [pSS \cdot 3].$$

В данном случае $[pv^2]$ несколько отличается из-за округления поправок. В результате получим: $\mu = 48$ мм. С такой средней квадратической погрешностью находится сумма превышений в ходе длиной 5 км. Средняя квадратическая погрешность на 1 км хода составит $\frac{48}{\sqrt{5}} = 21$ мм.

Оценка точности высот узловых точек в данном задании не предусмотрена.

Вопросы для самопроверки

1. Чем определяется число уравнений поправок в параметрическом способе?
2. Что называется параметрами?
3. Как определить свободные члены уравнений поправок?
4. Каков контроль вычисления поправок превышений в параметрическом способе уравнивания?

Лабораторная работа 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ

4.1. Определение координат прямой засечкой

Задача. Определить координаты пункта *P* прямой засечкой и оценить точность.

Координаты исходных пунктов *A*, *B*, *C* и измеренные углы β_1, β_2, β_3, β_4 взять из табл. 4.1 и 4.2. Номер варианта координат исходных пунктов и измеренных углов задается преподавателем.

Таблица 4.1. **Координаты исходных пунктов**

Варианты	X_A Y_A	X_B Y_B	X_C Y_C
1	5990,28 2080,41	5501,17 3182,19	5867,63 4314,93
2	6523,20 3863,57	5838,46 5406,06	6351,49 6991,88
3	5069,11 1306,91	4335,43 2959,58	4885,12 4658,69

Задача прямой засечки заключается в определении координат третьего пункта *P* по координатам двух исходных пунктов *A*, *B* и измеренным при них углам β_1 и β_2 (рис. 4.1). Эту задачу целесообразно решать по формулам Юнга, вывод которых имеется в учебнике [1, с. 561].

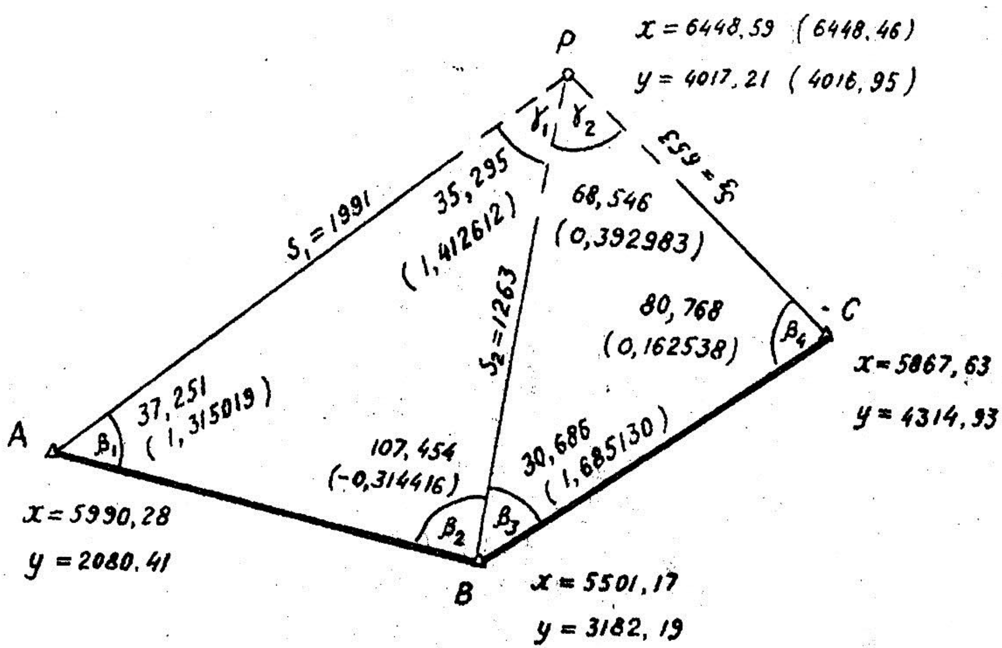

Рис. 4.1. Схема решения засечки

Т а б л и ц а 4.2. **Измеренные углы, град**

Вариант	β_1	β_2	β_3	β_4
0	37,251	107,454	30,686	80,767
1	49,262	37,185	100,949	33,366
2	78,661	48,349	89,792	51,323
3	71,198	57,430	80,708	56,486
4	53,745	61,560	76,576	48,024
5	54,216	72,537	65,602	58,300
6	36,915	70,980	67,157	38,072
7	58,796	71,218	66,921	61,849
8	45,126	74,357	63,779	49,309
9	51,841	78,251	59,879	62,046
10	56,809	80,318	57,811	72,281
11	40,965	83,648	54,484	51,001
12	47,641	89,350	48,783	71,428
13	23,902	92,678	45,455	25,739
14	48,102	96,809	41,324	88,982
15	30,618	101,211	36,929	42,938
16	85,465	56,269	81,866	64,505
17	65,327	64,046	74,089	59,520
18	61,276	69,166	68,969	62,207
19	58,272	73,933	64,202	64,735
20	55,143	79,228	58,907	68,118
21	61,744	63,009	75,126	55,489
22	57,460	69,170	68,965	58,089
23	53,179	75,150	62,985	60,036
24	50,064	81,886	56,249	64,176
25	56,083	62,848	75,287	50,843

Если встать между исходными пунктами и смотреть на определяемый, то пункт *A* будет левым, а пункт *B* – правым. Условимся обозначать соответствующими индексами координаты исходных пунктов и измеренные углы. Тогда формулам Юнга можно придать следующий вид:

$$X_P = \frac{X_{Л}\mathrm{ctg}П + X_{П}\mathrm{ctg}Л - У_{Л} + У_{П}}{\mathrm{ctg}Л + \mathrm{ctg}П}, \tag{4.1}$$

$$У_P = \frac{У_{Л}\mathrm{ctg}П + У_{П}\mathrm{ctg}Л + X_{Л} - X_{П}}{\mathrm{ctg}Л + \mathrm{ctg}П}, \tag{4.2}$$

где Л и П – значения углов при левом и правом пунктах (Л = β_1, П = β_2).

В целях контроля находят угол $\gamma = 180^{\circ} - \beta_1 - \beta_2$, а затем по координатам пункта *B* (левый) и координатам пункта *P* (правый) по формулам (4.1), (4.2) вычисляют координаты пункта A, которые должны совпадать с заданными.

Средняя квадратическая погрешность M положения пункта P, определяемого прямой засечкой, вычисляется по формуле

$$M = \frac{m\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\rho \sin \gamma}, \tag{4.3}$$

где m – средняя квадратическая погрешность измерения углов;

s_1 и s_2 – расстояние от исходных пунктов до определяемого;

γ – угол засечки.

(Под величиной M понимается выражение $\mathrm{M} = \sqrt{m^2{}_x + m^2{}_y}$, где m_x и m_y – средние квадратические погрешности по осям координат.)

Значение s_1 и s_2 с достаточной точностью можно снять графически, если нанести точки A, B и P по координатам в произвольном (мелком) масштабе на клеточную бумагу или вычислить по следующим формулам:

$$s_1^2 = (X_P - X_A)^2 + (Y_P - Y_A)^2, \tag{4.4}$$

$$s_2^2 = (X_P - X_B)^2 + (Y_P - Y_B)^2. \tag{4.5}$$

При решении прямой засечки на основе двух исходных пунктов нет контроля полевых измерений и правильности выборки исходных координат. Поэтому делают наблюдения еще с третьего пункта и задачу решают дважды. Расхождения в координатах при первом и втором решении должны удовлетворять условию

$$r \le 3M_r, \tag{4.6}$$

где $r = \sqrt{(X' - X'') + (Y' - Y'')}$;

M_r – среднее квадратическое расхождение в положении пункта Р из двух решений.

В свою очередь,

$$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \tag{4.7}$$

где M_1 и M_2 – средние квадратические погрешности положения пункта P из первого и второго решения, вычисляемые по формуле (4.3).

Если расхождение r окажется допустимым, то за окончательное значение координат пункта P берут среднее арифметическое, которое будет иметь погрешность

$$M = \frac{M_r}{2}. \tag{4.8}$$

При значительных расхождениях между M_1 и M_2 для достижения более точного окончательного результата можно воспользоваться формулами среднего весового:

$$X_{\text{ср}} = \frac{X' P_1 + X'' P_2}{P_1 + P_2}, \tag{4.9}$$

$$Y_{\text{ср}} = \frac{Y' P_1 + Y'' P_2}{P_1 + P_2}, \tag{4.10}$$

где

$$P_1 = \frac{1}{M_1^2}, \tag{4.11}$$

$$P_2 = \frac{1}{M_2^2}. \tag{4.12}$$

Средняя квадратическая погрешность окончательного положения пункта в этом случае определяется по формуле

$$M = \frac{1}{\sqrt{P_1 + P_2}}. \tag{4.13}$$

Рекомендуется следующий порядок решения задачи:

1. Составить схему, аналогичную схеме, представленной на рис. 4.1, на которую выписать координаты исходных пунктов и измеренные углы в градусах.
2. Вычислить углы γ_1 и γ_2 на определяемом пункте ($\gamma_1 = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$; $\gamma_2 = 180^\circ - \beta_3 - \beta_4$), найти значения котангенсов всех углов и записать их на схеме в круглых скобках.
3. Вычислить координаты пункта *P* из треугольника *ABP* по формулам (4.1), (4.2) и указать их на схеме.
4. Проконтролировать решение путем вычисления координат пункта *A* по тем же формулам, принимая в качестве исходных пункты *B* и *P*. При этом координаты пункта *A* должны сойтись в пределах точности вычислений.
5. Аналогично определить координаты пункта *P* по исходным пунктам *B* и *C*. Результаты записать на схеме в скобках. Проконтролировать решение вычислением координат пункта *C*.
6. Вычислить расстояние s_1, s_2, s_3 от исходных пунктов до определяемого с точностью до 1 м и записать на схеме.
7. Предвычислить точность определения положения пункта *P* по следующим формулам:

$$M_1 = \frac{m\sqrt{s_1{}^2 + s_2{}^2}}{\rho \sin \gamma_1}, \tag{4.14}$$

$$M_2 = \frac{m\sqrt{s_2{}^2 + s_3{}^2}}{\rho \sin \gamma_2}. \tag{4.15}$$

Принять $m = 10''$.

8. Вычислить величину $M_г$ по формуле (4.7) и проконтролировать решение по формуле (4.6).

9. Вычислить средние значения координат и среднюю квадратическую погрешность M положения пункта P по формуле (4.8).

Решение прямой засечки по изложенной методике показано на примере нулевого варианта:

$$M_1 = \frac{10\sqrt{1990^{\ 2} + 1260^{\ 2}}}{206000 \sin 35{,}3} = 0{,}198 \text{ м},$$

$$M_1 = \frac{10\sqrt{1260^2 + 653^2}}{206000 \sin 68{,}5} = 0{,}074 \text{ м},$$

$$M_r = 0{,}211 \text{м},$$

$$r = \sqrt{0{,}13^2 + 0{,}26^2} = 0{,}29 \text{ м},$$

$$r \le 3M_r,$$

$X_P = 6448{,}52$ м,

$Y_P = 4017{,}08$ м,

$M = 0{,}11$ м.

При более строгом решении с использованием формул (4.9) –(4.13) получим:

$X_{ср} = 6448{,}49$ м,

$Y_{ср} = 4017{,}00$ м,

$M = 0{,}088$ м.

4.2. Определение координат пункта обратной засечкой

Задача. Определить координаты пункта P (рис. 4.2) решением обратной засечки и оценить точность.

Координаты исходных пунктов A, B, C, D и измеренные углы взять для своего варианта из табл. 4.3.

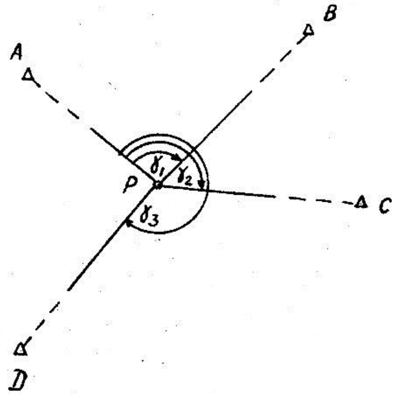

Рис. 4.2. Схема расположения пунктов

Координаты пункта P вычислить дважды: один раз – с использованием пунктов A, B, C и другой раз – с использованием пунктов A, B, D. (В целях увеличения числа вариантов могут быть заданы и другие сочетания исходных пунктов, например, A, B, C и B, C, D).

Обратная засечка (задача Потенота) находит широкое применение при создании съемочных сетей, привязке аэрофотоснимков, перенесении проектов на местность и других случаях.

Суть задачи заключается в определении положения четвертого пункта по трем исходным. Для ее решения предложено много аналитических и графических способов. При аналитическом способе задаются координаты трех исходных пунктов и измеренные углы или направления на определяемом пункте.

На основе трех исходных пунктов задача решается без контроля правильности измерения углов и выборки исходных данных. Поэтому на практике используют четыре исходных пункта.

Точность определения положения пункта обратной засечкой зависит от погрешностей измерения углов, погрешностей исходных данных и взаимного расположения пунктов. Если определяемый пункт находится вблизи окружности, проходящей через исходные пункты, то задача решается грубо. В связи с этим обратную засечку рекомендуется делать с предвычислением точности.

Обратную засечку по четырем исходным пунктам обычно решают в двух комбинациях и при допустимом расхождении в координатах определяемой точки берут их среднее значение.

Т а б л и ц а 4.3. **Исходные данные для решения обратной засечки**

Вариант	*A*		*B*		*C*		*D*		Углы, град.		
	X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	γ_1	γ_2	γ_3
0	6646,71	4203,53	6593,03	5061,21	6067,35	5098,68	5823,16	4002,01	95,178	145,417	269,952
1	368,87	569,37	715,67	447,81	1019,93	808,02	495,64	1148,80	62,317	133,123	243,556
2	166,03	432,97	765,82	47,96	1429,10	710,41	319,78	1430,25	60,215	132,142	256,457
3	351,12	119,68	1058,06	326,72	1298,36	1330,45	34,08	1350,73	46,182	96,600	167,767
4	23,89	531,75	470,08	60,66	1327,13	145,26	937,17	1373,59	45,630	93,844	185,537
5	528,15	430,56	1318,33	501,16	1612,13	1267,38	249,93	1382,01	85,165	165,518	280,946
6	443,85	291,02	1238,67	571,11	1501,26	1280,02	182,18	1551,84	90,252	185,727	278,371
7	694,65	899,05	1469,13	888,20	2052,24	1580,76	751,45	2140,22	65,486	113,379	203,037
8	617,25	700,18	1370,22	777,00	1619,23	1806,82	262,58	1872,48	39,692	83,926	145,442
9	174,17	465,06	911,89	431,96	1476,43	1073,74	431,69	1756,41	40,524	104,654	267,447
10	220,71	743,23	969,82	634,92	1526,59	1265,17	405,04	1923,98	60,159	131,411	256,681
11	490,41	315,92	1212,97	442,07	1611,34	1229,43	397,59	1595,94	46,528	176,751	282,421
12	184,59	396,05	831,84	125,54	1422,05	831,76	198,38	1431,08	61,457	134,700	260,160
13	400,36	351,14	1079,59	380,20	1538,75	1034,82	411,03	1552,61	50,420	94,675	179,002
14	432,68	276,01	1269,50	434,03	1633,01	1263,40	319,15	1374,46	66,146	136,487	262,862
15	14,50	363,83	872,78	431,74	1207,45	1259,08	80,49	1579,18	59,380	184,845	284,378
16	25,45	450,00	945,15	350,45	1306,40	1400,12	97,12	1300,12	104,708	208,767	294,796
17	145,9	430,12	945,15	320,12	1306,42	1271,78	128,12	1240,18	86,543	180,738	283,734
18	350,18	250,48	1025,79	320,12	1306,44	1345,91	240,38	1410,12	67,989	172,553	256,045
19	240,78	250,48	1250,12	480,56	1078,63	1450,94	350,14	1025,18	89,137	190,802	291,788
20	450,41	321,73	1640,1	320,21	1210,33	1612,18	341,71	980,67	92,183	205,436	304,982
21	241,47	322,98	1240,18	341,47	1274,73	1247,76	247,79	1450,18	101,152	184,379	265,85
22	241,47	322,98	1045,12	241,12	1274,73	1247,76	460,18	1370,78	74,761	165,050	238,766
23	241,49	120,32	1141,78	148,43	1614,96	1071,12	241,12	1212,14	58,294	123,590	261,656
24	120,14	430,12	1091,1	148,43	1614,96	1241,18	241,12	1104,56	85,297	192,172	309,420
25	10,48	427,12	1084,78	56,27	1631,53	1024,71	108,4	1078,15	80,172	178,074	319,532

Решение задачи рекомендуется выполнять по формулам Кнейсля, вывод которых имеется в учебнике [1, с. 567]:

$$\left.\begin{aligned} X'_B &= X_B - X_A, \quad Y'_B = Y_B - Y_A \\ X'_C &= X_C - X_A, \quad Y'_C = Y_C - Y_A \\ X'_D &= X_D - X_A, \quad Y'_D = Y_D - Y_A \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

$$X'_B - X'_C = X_B - X_C; \quad Y'_B - Y'_C = Y_B - Y_C. \text{ (Контроль)} \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \mathrm{ctg}\gamma_1\, Y'_B - X'_B, \quad k_2 = \mathrm{ctg}\gamma_1\, X'_B + Y'_B \\ k_3 &= \mathrm{ctg}\gamma_2\, Y'_C - X'_C, \quad k_4 = \mathrm{ctg}\gamma_2\, X_C + Y_C \\ k_5 &= \mathrm{ctg}\gamma_3\, Y'_D - X'_D, \quad k_6 = \mathrm{ctg}\gamma_3\, X'_D + Y'_D \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_2 - k_4}{k_1 - k_3} = \mathrm{ctg}(AP)' \\ C_2 &= \frac{k_2 - k_6}{k_1 - k_5} = \mathrm{ctg}(AP)'' \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

$$Y'_1 = \frac{k_2 - C_1 k_1}{C_1^{\,2} + 1}, \quad Y'_2 = \frac{k_2 - C_2 k_1}{C_2^{\,2} + 1}. \tag{4.20}$$

$$X'_1 = C_1 Y'_1, \quad X'_2 = C_2 Y'_2. \tag{4.21}$$

$$X_1 = X_A + X'_1, \quad X_2 = X_A + X'_2. \tag{4.22}$$

$$Y_1 = Y_A + Y'_1, \quad Y_2 = Y_A + Y'_2. \tag{4.23}$$

$$X_P = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \mathrm{Y_P} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}. \tag{4.24}$$

Вычисления выполнить на микрокалькуляторе на бланке, аналогичном приведенному в табл. 4.4, где показано решение нулевого варианта.

Для оценки точности обратной засечки вычислить средние квадратические погрешности положения пункта P из первого и второго решения по следующим формулам:

$$M_1 = \frac{m \cdot BP}{\rho \cdot \sin(ABC + \gamma_2)} \sqrt{\left(\frac{AP}{AB}\right)^2 + \left(\frac{CP}{CB}\right)^2}, \tag{4.25}$$

$$M_2 = \frac{m \cdot BP}{\rho \cdot \sin(ABD + \gamma_3)} \sqrt{\left(\frac{AP}{AB}\right)^2 + \left(\frac{DP}{DB}\right)^2}, \tag{4.26}$$

где m – средняя квадратическая погрешность измерения углов, которая в данном случае равна 10″.

Т а б л и ц а 4.4. **Решение обратной засечки по формулам Кнейсля**

Обозначения	Название пунктов			
	A	*B*	*C*	*D*
X	6646,71	6593,03	6067,35	5823,16
Y	4203,5	5061,21	5098,68	4002,01
X'	0	–53,68	–579,36	–823,55
Y'	0	+857,68	+895,15	–201,52
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$		95,178	145,417	269,952
k_1, k_2, k_3		–24,0430	–719,0578	+823,3812
k_2, k_4, k_6		862.5445	1735.5135	–202.2099
C_1, C_2			–1.256044	–1.256460
Y'_1, Y'_2			322,91	322,77
X'_1, X'_2			–405,59	–405,55
X_1, X_2			6241,12	6241,16
Y_1, Y_2			4526,44	4526,30
X_P				6241,14
Y_P				4526,37

Длины линий и углы, необходимые для вычислений по этим формулам, определить графически (наложить в масштабе 1:10000 точки *A*, *B*, *C*, *D* и *P* по координатам на лист клеточной бумаги и сделать необходимые измерения). Далее, как и в случае прямой засечки, вычислить следующие величины:

$$M_r = \sqrt{M_1^{\ 2} + M_2^{\ 2}},$$

$$r = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

и проверить выполнение условия

$$r = \leq 3M_r.$$

Если это условие выполняется, то определение положения пункта можно считать правильным и за окончательное значение координат из двух решений принимать среднее.

В заключение необходимо найти среднюю квадратическую погрешность положения пункта:

$$M = \frac{M_r}{2}.$$

В рассматриваемом примере в результате графических измерений получим: BP = 640 м, AP = 520 м, AB = 860 м, CP = 600 м, CB = 530 м, DP = 670 м, DB = 1310 м, $\angle ABC = 98^o$, $\angle ABD = 40^o$. По формулам (4.25) и (4.26) находим:

$$M_r = \frac{10 \cdot 640}{206000 \sin(98+145)} \sqrt{\left(\frac{520}{860}\right)^2 + \left(\frac{600}{530}\right)^2} = 0{,}045 \text{ м},$$

$$M_2 = \frac{10 \cdot 640}{206000 \sin(40+270)} \sqrt{\left(\frac{520}{860}\right)^2 + \left(\frac{670}{1310}\right)^2} = 0{,}037 \text{ м}.$$

Отсюда

$$M_r = \sqrt{0{,}045^2 + 0{,}037^2} = 0{,}058 \text{ м}.$$

По данным табл. 15

$$r = \sqrt{(6241{,}12 - 6241{,}16)^2 + (4526{,}44 - 4526{,}30)^2} = 0{,}15 \text{ м}.$$

В данном случае $r<3M$, следовательно, определение пункта сделано правильно.

Окончательные значения координат пункта P приведены в табл. 4.4. Средняя квадратическая погрешность положения пункта

$$M = \frac{0{,}058}{2} = 0{,}029 \text{ м}.$$

4.3. Определение координат пункта линейной засечкой

Задача. Определить координаты пункта P (рис. 4.3) линейной засечкой и оценить точность. Координаты исходных пунктов A, B, C взять из табл. 4.3 для своего варианта, а длины линий s_1, s_2, s_3 – из табл. 4.5, в которой приведены расстояния до пункта D, что позволяет задавать дополнительные варианты. Среднюю квадратическую погрешность измерения линий m_s во всех случаях принять одинаковой, равной 20 мм.

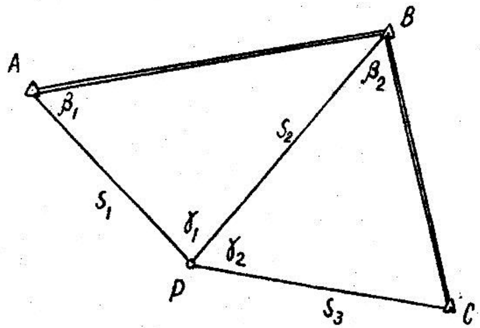

Рис. 4.3. Схема расположения пунктов

Решение задачи выполнить дважды с использованием исходных пунктов A, B и B, C на бланке аналогично приведенному в табл. 4.6, где дан пример для нулевого варианта.

Т а б л и ц а 4.5. **Результаты измерения длин линий при определении координат пункта *P* линейной засечкой, м**

Вариант	s_1	s_2	s_3	s_4
0	518,28	640,27	598,19	670,55
1	326,18	394,24	418,93	340,49
2	600,31	784,53	811,38	682,62
3	652,18	1018,24	1319,15	626,34
4	671,28	906,12	1137,92	572,27
5	548,94	514,24	731,48	882,72
6	785,18	302,65	664,44	1141,22
7	541,95	822,15	1220,31	725,49
8	215,27	910,46	1500,16	1041,40
9	1134,12	910,18	641,72	620,47
10	800,23	700,01	742,52	722,09
11	984,14	510,10	462,38	1062,26
12	618,26	739,39	801,24	731,22
13	590,64	881,31	1142,22	610,96
14	831,11	720,08	842,36	631,21
15	1000,49	511,76	492,18	984,71
16	719,39	426,95	926,22	850,65
17	619,96	555,03	813,65	689,25
18	663,73	536,23	793,39	810,45
19	830,3	630,94	640,05	441,21
20	777,7	871,17	757,54	645,88
21	659,54	633,38	728,13	867,63
22	636,08	692,46	762,38	592,08
23	911,61	937,22	983,54	482,95
24	843,10	631,34	867,22	748,24
25	996,19	742,90	731,74	881,94

Задача линейной засечки заключается в определении координат третьего пункта по координатам двух исходных и измеренным расстояниям от определяемого пункта до исходных (однократная засечка). На практике в целях контроля используют три исходных пункта. Линии наиболее удобно измерять электронными дальномерами, при этом прибор можно устанавливать как на определяемом, так и на исходных пунктах.

Последовательность решения засечки и рабочие формулы.

1. Определить дирекционные углы и длины исходных линий:

$$(AB) = \operatorname{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}, \tag{4.27}$$

$$S_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}, \tag{4.28}$$

$$(BC) = \operatorname{arctg}\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B}, \tag{4.29}$$

$$S_{BC} = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}. \tag{4.30}$$

Т а б л и ц а 4.6. **Решение линейной засечки**

Обозначения	Название пунктов		
	A	*B*	*C*
X	6646,71	6593,03	6067,35
Y	4203,53	5061,21	5098,68
s_1, s_2, s_3	518,28	640,27	598,19
(AB), (BC)	93,581	175,923	
s_{AB}, s_{BC}	859.36	527.01	
β_1, β_2	47,903	60,740	
(AP), (BP)	141,484	236,663	
X', X''	6241,19	6241,16	
Y', Y''	4526,28	4526,29	
BP, CP	640,27	598,20	
γ_1, γ_2	84,819	50,228	
M_1, M_2	0,028	0,037	
$M_г$	0,046		
r	0,032		
X_P	6241,18		
Y_P	4526,28		
M	0,023		

2. На основании теоремы косинусов определить углы β_1 и β_2:

$$\beta_1 = \arccos\frac{s^2{}_{AB} + s^2{}_1 - s^2{}_2}{2s_{AB}s_1}, \tag{4.31}$$

$$\beta_2 = \arccos\frac{s^2{}_{BC} + s^2{}_2 - s^2{}_3}{2s_{BC}s_2}. \tag{4.32}$$

3. Вычислить дирекционные углы линий AP и BP:

$$(AP) = (AB) + \beta_1, \tag{4.33}$$

$$(BP) = (BC) + \beta_2. \tag{4.34}$$

4. Определить координаты пункта P из первого и второго решения:

$$X' = X_A + s_1\cos(AP), \tag{4.35}$$

$$Y' = Y_A + s_1\sin(AP), \tag{4.36}$$

$$X'' = X_B + s_2\cos(BP), \tag{4.37}$$

$$Y'' = Y_B + s_2\sin(BP). \tag{4.38}$$

Для контроля вычислить длины линий *BP* и *CP* по координатам и сравнить их с измеренными значениями s_2 и s_3. Расхождения не должны превышать трех единиц последнего знака (3 см):

$$BP = \sqrt{\left(X' - X_B\right)^2 + \left(Y' - Y_B\right)^2}, \tag{4.39}$$

$$CP = \sqrt{\left(X'' - X_C\right)^2 + \left(Y'' - Y_C\right)^2}. \tag{4.40}$$

5. Произвести оценку точности и заключительный контроль правильности определения положения пункта.

5.1. Вычислить углы засечки:

$$\gamma_1 = \arcsin \frac{s_{AB} \sin \beta_1}{s_2}, \tag{4.41}$$

$$\gamma_2 = \arcsin \frac{s_{BC} \sin \beta_2}{s_3}. \tag{4.42}$$

5.2. Вычислить средние квадратические погрешности определения положения пункта *P* из первого и второго решения:

$$M_1 = \frac{m_s \sqrt{2}}{\sin \gamma_1}, \tag{4.43}$$

$$M_2 = \frac{m_s \sqrt{2}}{\sin \gamma_2}. \tag{4.44}$$

5.3. Вычислить

$$M_r = \sqrt{M_1^{\ 2} + M_2^{\ 2}},$$

$$r = \sqrt{\left(X' - X''\right)^2 + \left(Y' - Y''\right)^2}$$

и проверить выполнение условия

$$r \le 3M_r.$$

6. Вычислить окончательные значения координат пункта *P* и среднюю квадратическую погрешность его положения:

$$X_P = \frac{X' + X''}{2},\ Y_P = \frac{Y' + Y''}{2},$$

$$M = \frac{M_r}{2}.$$

Примечание. Для оценки точности определения положения пунктов прямой, обратной и линейной засечками применялись формулы, в которых не учитываются погрешности в координатах исходных пунктов (предполагается, что они пренебрегаемо малы). В приведенных вариантах это условие выполнено. На практике в качестве исходных могут использоваться точки съемочного обоснования, погрешности положения которых существенны. В таких случаях допустимость величины r устанавливается в зависимости от требуемой точности определения координат пунктов.

Вопросы для самопроверки

1. Как контролируется определение положения пунктов прямой, обратной и линейной засечками?
2. При каком расположении исходных и определяемого пунктов решение обратной засечки невозможно?
3. При каком угле засечки положение пункта будет определено прямой засечкой с максимальной точностью?
4. Координаты скольких пунктов будут определены однократной линейной засечкой?
5. Какие формулы решения прямой засечки (Гаусса, Юнга) являются частным случаем других?

ЛИТЕРАТУРА

1. М а с л о в , А. В. Геодезия: учебник для вузов / А. В. Маслов, А. В. Гордеев, Ю. Г. Батраков. – М.: Колосс, 2006. – 598 с.

2. М а с л о в , А. В. Геодезия: учебник для вузов / А. В. Маслов , А. В. Гордеев, Ю. Г. Батраков. – М.: Недра, 1980. – 616 с.

3. Н е у м ы в а к и н , Ю. К. Практикум по геодезии / Ю. К. Неумывакин, А. С. Смирнов. – М.: Недра, 1985. – 200 с.

4. К у ш т и н , И. Ф. Геодезия: учеб.-практ. пособие / И. Ф. Куштин, В. И. Куштин. – Ростов н/Д.: Феникс, 2009. – 909 с.

5. С е л и х а н о в и ч , В. Г. Практикум по геодезии / В. Г. Селиханович, В. П. Козлов, Г. П. Логинова. – М.: Недра, 1978. – 382 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Другаков Павел Владимирович

ГЕОДЕЗИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ

Методические указания
по выполнению лабораторных работ

Редактор *О. Г. Толмачёва*
Технический. редактор *Н. Л. Якубовская*
Корректор *А. М. Павлова*
Подписано в печать . Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 75 экз. Заказ

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.