Б.Т. Мазуров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ГЕОДИНАМИКИ

Монография

НОВОСИБИРСК 2019

УДК 551.2/.3:528:519.8
ББК 26.12+26.32
М13

Мазуров, Б.Т.

Математическое моделирование при исследовании геодинамики [Текст] : монография / Б.Т. Мазуров. – Новосибирск: Агентство «Сибпринт», 2019.– 360 с.

ISBN -978-5-94301-746-9

В монографии описаны теория метода и алгоритм математического моделирования и идентификации движений и напряженно-деформированного состояния (НДС) сооружений и объектов инженерной геодинамики по пространственно-временным рядам комплексных геодезических и геофизических наблюдений. Описана реализация принципа совместной математической обработки геодезических и гравиметрических измерений с включением в состав оцениваемого вектора параметров переменных масс геодинамического объекта. Предложены методы учета гравитационного влияния конусообразных тел. Сделано описание авторских методов качественного описания движений земной поверхности, оценки дивергенции векторных полей. Обращено внимание на исследование вращательных движений. Приведен авторский алгоритм изучения блоковых движений. Дано описание использования нейронных сетей на примере мониторинга вантовых мостов. Уделено внимание вопросам использования конформной стереографической проекции Гаусса.

Монография предназначена геодезистам, геофизикам, специалистам горного дела. Она может быть полезна студентам, магистрантам и аспирантам соответствующих специальностей.

© Мазуров Б.Т., 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 7

1 Состояние изучения геодинамических объектов и процессов 13

1.1 Проблематика 13

1.2 Комплексное изучение геодинамических процессов по разнородным геодезическим и геофизическим данным 19

1.3 Технологии мониторинга движений и напряженно-деформированного состояния геодинамических объектов 43

1.4 Выводы 43

2 Изучение напряженно-деформированного состояния сложных инженерных сооружений 45

2.1 Теоретические и математические основы расчета напряженно-деформированного состояния 45

2.2 Метод конечных элементов как математический аппарат расчета напряженно-деформированного состояния 49

2.3 Алгоритм определения параметров напряженно-деформированного состояния по расчетным значениям перемещений 55

2.4 Пример изучения напряженно-деформированного состояния сложного инженерного сооружения по геодезическим наблюдениям 58

2.5 Выводы 67

3 Методика изучения геодинамических процессов на основе моделирования вертикальных движений и вариаций силы тяжести 69

3.1 Построение физико-математической модели динамики земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области 69

3.2 Моделирование системы наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области 77

3.4 Настройка дополнительных параметров процесса вулканического извержения и систем наблюдений за ним 91

3.5 Изучение глубинного строения земной коры на основе анализа вариаций силы тяжести 97
3.6 Необходимость совместного учета нивелирных и гравиметрических наблюдений в условиях ведения крупномасштабных горных работ 98
3.7 Выводы 102
4 Изучение движений и напряженно-деформированного состояния района готовящегося вулканического извержения по результатам геодезических и гравиметрических наблюдений 104
4.1 Модель геодинамического объекта 104
4.2 Исследование вулканизма 105
4.3 Решение обратных задач геофизики по геодезическим данным 107
4.4 Система наблюдений за геодинамическим объектом 117
4.5 Комплексная математическая обработка и интерпретация геодезических и гравиметрических наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области 128
4.6 Расчет характеристик напряженно-деформированного состояния приповерхностного слоя земной коры вокруг кратера вулкана 135
4.7 Выводы 143
5 Технологические решения для моделирования геодинамических объектов по натурным данным 145
5.1 Программное обеспечение изучения геодинамических объектов и процессов 145
5.2 Движения и поля деформаций Горного Алтая перед Чуйским землетрясением по спутниковым данным с условностабильной станцией NVSK 149
5.3 Движения и поля деформаций Горного Алтая перед Чуйским землетрясением по спутниковым данным с условностабильной станцией ELTS 154
5.4 Поля косейсмических смещений и деформаций земной поверхности Горного Алтая 160
5.5 Выводы 166

6 Математические основы моделирования геодинамических процессов 168
6.1 Леонард Эйлер – вклад для астрономии, небесной механики, геодезии, картографии, геодинамики (совместно с Медведевым П.А.) 168
6.2. Метод наименьших квадратов (статика, динамика, модели с уточняемой структурой) (Основной текст написан Падве В.А.) 173
6.3 Математическое и алгоритмическое обеспечение мониторинга с использованием ГНСС-технологий 183
6.4 Аналитический метод определения коэффициентов корреляции между результатами наблюдений 193
6.5 Выводы 196
7 Качественное описание современных движений земной поверхности 200
7.1 Теоретические основы качественного исследования горизонтальных движений геодинамических систем 200
7.2 Методы и алгоритмы оценки дивергенции векторных полей движений земной поверхности по геодезическим данным ... 211
7.3 Выводы 225
8 Структурное моделирование блоковых движений 227
8.1. Кинематические и деформационные модели блоковых движений 227
8.2 Модель локально-однородной деформации. Тензоры деформации 233
8.3 Методика определения компонент плоской деформации. Характеристики плоской деформации. Карто-схемы деформации 235
8.4 Непараметрический подход к структурному моделированию 238
8.5 Выводы 258
9 Основы и примеры исследования вращательных движений 260
9.1 Вращательные (вихревые) движения 260
9.2 Выводы 267

10 Модели, используемые для учета гравитационного влияния рельефа 268
10.1 Закон всемирного тяготения Ньютона 268
10.2 Гравитирующее влияние конусообразных форм рельефа на результаты геодезических измерений 269
10.3 Конечно-элементная модель гравитационного влияния конусообразных форм земного рельефа 276
10.4 Аппроксимация гравитационного влияния локального рельефа по его цифровым моделям 283
10.5 Выводы 290
11 Специальные геодезические проекции 291
11.1 Использование специальных геодезических проекций и местных систем координат (совместно с Виноградовым А.В.) 291
11.2 Стереографические проекции на секущую плоскость для обеспечения инженерно-геодезических-работ 294
11.3 Линейные искажения при переходе от эллипсоида Красовского на секущий эллипсоид 301
11.4 Выводы 307
12 Структурное моделирование путем визуализации сдвижений, полученных по геодезическим данным 309
12.1 Использование тематического картографирования 309
12.2 Определение географического центра на основе геоинформационных технологий (на примере оз. Байкал) (совместно с Калюжиным В.А., Обиденко В.И.) 316
12.3 Выводы 322
Заключение 323
Библиографический список 327
Приложение 1 352
Приложение 2 353
Приложение 3 354

ВВЕДЕНИЕ

Для многих наук о Земле (геологии, геофизики, геодезии, горной механики и других) общепризнанна актуальность проблем «Геодинамика» и «Современные движения земной коры». Важная роль в решении указанных проблем принадлежит геодезии. Как отмечал известный ученый геолог В.Е. Хаин [204], «…геодезические методы являются основными при изучении современных тектонических движений и деформаций». Л.П. Пеллинен [158] основной научной задачей геодезии назвал «… *определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли и их изменений во времени».* Методами геодезии и гравиметрии [218] изучаются изменения во времени параметров гравитационного поля и фигуры Земли, ее поверхности, а при изучении глубинных геодинамических процессов большое значение имеет не только геодезическая гравиметрия, но и прикладная, в том числе, разведочная.

Научное значение исследований геодинамических процессов заключается в получении новых знаний о Земле, ее строении, эволюции, разнообразных физических полях (гравитационных, магнитных и др.), пространственно-временной структуре физической поверхности. Важнейшим практическим значением изучения геодинамических процессов является решение задач прогноза, снижения риска и уменьшения последствий геодинамических катастроф природного и техногенного характера, мониторинга окружающей среды. Многодисциплинарная обратная задача в многомерных сложных средах – найти свойства среды при заданной информации о полях. Решая обратные задачи как многодисциплинарные, по комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям можно получить новые качественные результаты. Примером обратной задачи является также необходимость различать собственно вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей, горизонтальные смещения этих точек и изменения направления отвеса во времени. При решении обратных задач, связанных с определением структуры приповерхностного слоя земной коры важное значение имеют геодезические методы наблюдений. Результаты обработки геодезических измерений количественно выражены и статистически обоснованы. Совместная математическая обработка геодезических и геофизических наблюдений позволяет определить характеристики некоторых глубинных геодинамических процессов. Например, подготовку вулканического извержения с учетом увеличения внутриочагового давления при накапливании магмы в верхнем магматическом очаге вулкана.

Вулканическая область с аномальными массами и движениями земной поверхности не единственная геодинамическая система, к исследованию которой может быть применим описанный выше подход к математической обработке. Это могут быть геодинамические объекты различных масштабов (глобальные, региональные, локальные), как природные, так и техногенные (плотины ГЭС, шахты, рудники, месторождения нефти и газа, высотные сооружения и здания).

Информация о движениях и напряженно-деформированном состоянии (НДС) земной поверхности и земной коры, обусловленных эндогенными и экзогенными факторами, является важнейшей в аспекте прогноза катастрофических геодинамических процессов (землетрясений, извержений вулканов, оползней, сходов ледников, горных ударов и проседания грунтов в области разработки полезных ископаемых и т.п.) [47, 145]. Аномальные техногенные геодинамические процессы вызывают горизонтальные сдвиги земной коры, разломообразование, подземные аварии, наводнения; при этом страдают не только промышленные объекты, инженерные конструкции, жилые здания, но и население. Мониторинг играет важную роль в контроле инженерных систем. Должна быть учтена связь между действующими нагрузками и результатами деформаций. Наблюдения выполняются с высокой частотой дискретизации во времени. В общем случае, статическая модель поведения объекта мониторинга (без коррелирования) не достаточна. Анализ может осуществляться посредством обработки парно-коррелированных наблюдений.

Исследования по изучению геодинамических процессов соответствует приоритетным направлениям развития науки и техники РФ, в частности, направлению «Экология и рациональное природопользование», имеют научное и практическое значение. Научное значение таких исследований заключается в получении новых знаний о Земле, ее строении, эволюции, разнообразных физических полях (гравитационных, магнитных и др.), пространственно-временной структуре физической поверхности. Важнейшим практическим значением изучения геодинамических процессов является решение задач прогноза, снижения риска и уменьшения последствий геодинамических катастроф природного и техногенного характера, мониторинга окружающей среды. Эти задачи включены в перечень критических технологий РФ.

Здесь будут рассмотрены вопросы изучения геодинамических процессов на основе моделирования [206] меняющихся во времени геодезических (смещения, закономерности движений, поля деформаций) и гравитационных (аномальные массы, их расположение, закономерности изменения масс) параметров.

Геодинамические объекты, процессы, явления по охвату территории бывают глобальные (планетарные), региональные и локальные [159]. В последние могут включаться объекты инженерной геодинамики, состоящие из двух подсистем – инженерные сооружения и геофизическая (физико-геологическая) среда. Важнейшей характеристикой геодинамических объектов является их напряженно-деформированное состояние, так как при достижении некоторого критического значения напряжений может произойти резкое изменение структуры объекта, свойств и т.п., вызывающее нежелательные и даже катастрофические для людей последствия.

Изучение геодинамических процессов должно выполняться с привлечением разнородных данных – геодезических, геолого-геофизических, гидрологических, метеорологических и др. В работе [143] даны ориентиры развития наук о Земле в XXI веке. В частности, говорится о ведущей роли эксперимента и о необходимости одновременного наблюдения полей различной геофизической природы, глобализации систем наблюдений, изучения тонкой пространственно-временной структуры исследуемых процессов.

Изменения различных геофизических полей во времени взаимосвязаны. Страхов В.Н. в работе [193] критикует развитие теории интерпретации геополей: «В этой теории интерпретации, которая развивается в настоящее время, когда данные … геофизических методов используются в пассивной форме априорной информации, а строение изучаемой среды восстанавливается по одному полю (гравитационному или магнитному) с учетом этой априорной информации, третьей парадигмы не будет. Последняя возникает только в рамках общей теории комплексной интерпретации геофизических данных как составной элемент этой теории. Становление общей теории комплексной интерпретации геофизических данных сейчас по существу только начинается…».

Взаимообусловленность изменений различных геофизических полей определяет необходимость совместной обработки и интерпретации разнородных комплексных наблюдений, в частности, геодезических и геофизических наблюдений. В работе [141] обращается внимание еще и на необходимость различать собственно вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей, горизонтальные смещения этих точек и изменения направления отвеса во времени. Эта задача является примером многодисциплинарной обратной задачи в многомерных сложных средах – найти свойства среды при заданной информации о полях. В работе [3] говорится о важности постановки и исследования корректности (многодисципли-

нарных) обратных задач (разрешимости, единственности, коллективной устойчивости решений), их методов решения. Многодисциплинарные задачи имеют следующие положительные свойства:

расширительность – в многодисциплинарной постановке задач нескольких индивидуальных методов возможно получить результат более содержательный, чем простая сумма результатов отдельных методов;

дополнительность – имеется возможность получить надежный и полный результат даже в том случае, когда какая-либо совокупность или все индивидуальные методы не дают определенных результатов.

Поэтому, решая обратные задачи как многодисциплинарные, по комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям можно получить новые качественные результаты. В работе [3] говорится, что эффект может быть достигнут при использовании сетевой информационно-вычислительной технологии совмещенного вычислительного эксперимента и процесса его интерпретации.

Одним из важнейших открытий наук о Земле XX века является установление блочно-иерархической структуры земных недр [174, 175]. Важной константой является примерное отношение средних размеров блоков соседних уровней (3.5±0.9). Также установлено, что геологическая среда в большом диапазоне размеров геометрически самоподобна, например, структура системы сбросов-разломов. Моделирование такой среды должно выполняться с позиций фрактального и непараметрического подходов. Таким образом, геодинамические процессы и объекты в общем случае являются сложными в структурном отношении и при решении задачи моделирования это необходимо учитывать обязательным образом.

Специфической сложностью при изучении геодинамических процессов является необходимость корректного учета пространственно-временных масштабов происходящих явлений. В работе [34] говорится: «различные части Земли находятся в состоянии движения одна относительно другой, и это движение с очевидностью связано с перемещениями на глубине. При этом движения осуществляются на всех пространственных и временных масштабах. Механические перемещения обусловлены сложными физическими процессами, происходящими во всем масштабе глубин Земли, которые в свою очередь, имеют широчайший спектр характерных времен…».

Геодезия, как наука в приложении к геодинамическим исследованиям, была востребована всегда и в настоящее время активно и успешно развивается. Геодезические данные и их последующий статистический анализ позволяет выполнять математическое моделирование

и идентификацию напряженно-деформированного состояния геодинамических систем в аспекте прогноза природных и техногенных катастроф. Геодезический мониторинг геодинамических процессов необходим при решении ряда научных и научно-практических задач геодезии – развитии и поддержании государственной геодезической сети, изучении изменений поля силы тяжести во времени, при использовании ГНСС-технологий. Важнейшим продолжением исследовательской работы является математическое моделирование геодинамических систем в прогнозных целях. Для исследования сложных (нелинейных) геодинамических процессов должна быть выбрана соответствующая математическая основа.

Геодезические измерения дают важную и статистически оцениваемую информацию о координатах геодезических пунктов и их изменениях во времени. Данная геодезическая информация может быть использована для изучения геодинамических процессов и их проявлений, в первую очередь, на земной поверхности. Особенно интенсивно такие геодинамические явления происходят в местах активной разработки полезных ископаемых ввиду интенсивных техногенных воздействий на приповерхностный слой Земли.

Вместе с тем, существует необходимость совершенствования теоретических положений и методов, методик, алгоритмов и технологий изучения геодинамических процессов на основе моделирования меняющихся во времени геодезических (смещения, закономерности движений, поля деформаций) и гравитационных (аномальные массы, их расположение, закономерности изменения масс) параметров. При этом возникает потребность в строгом подходе к совместной математической обработке разнородных геодезических и геофизических наблюдений на земной поверхности (обратная задача геофизики). Существуют вопросы решения моделирования векторных полей смещений по геодезическим определениям, выполненным дискретно во времени и на поверхности.и наглядной визуализации результатов математической обработки. Важной является разработка новых технологических решений по информативной методике геодезического мониторинга. Современные геодезические методы и технологии мониторинговых наблюдений за движениями земной поверхности требуют расширенного использования математических методов моделирования.

Автор выражает благодарность за плодотворное сотрудничество своим уважаемым соавторам Середовичу В.А., Падве В.А., Панжину А.А., Калюжину В.А., Колмогорову В.Г., Обиденко В.И., Брыню М.Я., Мустафину М.Г., Лобановой Т.В., Медведеву П.А., Виноградову А.В., некоторые научные исследования которых отражены в

данной монографии, профессорам Верещаке Т.В., Пластинину Л.А., Столбову Ю.В.

Благодарен за искреннюю поддержку моей научной деятельности дорогой супруге Мазуровой Н.Н., своим верным друзьям Николаеву А.Н, Николаевой Т.А., Карташову П.Н., Минаковой М.В., Васильевой В.В., Кузнецову С.Н., Рузняеву А.И., Рузняевой О.В., Юстус Г.И., Юстус В.А., Гонуленко Ф.Н., Непеиной Н.Н., Павлову М.А., Мордвинову А.О., Мордвиновой Н.Б., Журавлевой И.И., Киценко В.Н., Киценко Г.С., Носкову М.Ф., Хорошилову В.С., своим аспирантам и всем своим другим друзьям и родственникам.

И, конечно, светлая память моему руководителю Панкрушину В.К.

Бывают схватки боли у Земли, Когда ей пучит изнутри утробу, Тогда бедняжку корчит и трясет. И валятся дома и колокольни.
Уильям Шекспир. Король Генрих IV

1 СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

1.1 Проблематика

Изучение геодинамических объектов и процессов должно опираться на серьезные теоретические исследования, основным содержанием которых является моделирование движений и полей деформаций и напряжений с учетом разрывов и неоднородностей в земной коре [15, 16, 77, 138, 164, 170, 177, 186, 188, 210]. При изучении механизма развития геодинамических явлений должны учитываться как трендовые, так и циклические (короткопериодные в том числе) движения в верхних частях литосферы и на земной поверхности [178]. В то же время необходимо учитывать возможные пульсации Земли, объем которой то увеличивается, то уменьшается с периодом 40-50 млн.лет по мнению автора работы [137].

Известно [50], что период активизации землетрясений на Земле совпадает с периодом солнечной активности. Поэтому в настоящее время исследуется изменения поля напряжений в земной коре в привязке к 11-летнему циклу солнечной активности. В работе [50] обсуждаются данные об изменении абсолютных значений горизонтальных напряжений в земной коре уральского региона в привязке к циклу солнечной активности. В годы минимума солнечной активности Земля максимально сжата, геодинамические явления имеют максимальную энергетику. При нарастании солнечной активности (4-6 лет – в нечетном и четном циклах соответственно) напряженное состояние Земной коры уменьшается и наблюдается максимальное число геодинамических явлений, но с меньшей энергетикой. В годы максимума солнечной активности напряжения в земной коре минимальны, геодинамических явлений мало и энергетика их тоже минимальна. В фазе спада солнечной активности напряжения растут, частота геодинамических явлений со средней энергетикой увеличивается, и число их составляет 60% от средней частоты за цикл солнечной активности, а в фазе подъема солнечной активности – 40%.

Важные результаты и открытия ряда наук о Земле, полученные в последние десятилетия [50, 137, 177], свидетельствуют о большой роли нелинейности в поведении геодинамических объектов. Для решения ряда задач нелинейной геомеханики, геофизики, сейсмологии большое распространение получили модели механики сплошных сред в рамках динамической или статической теории упругости. В частности, это является основой существующих систем мониторинга природных и техногенных катастроф, а также используется при создании систем наблюдений и компьютерной обработки результатов лабораторных и натурных наблюдений. *«Именно с изучением нелинейных физических и геомеханических процессов связаны большие перспективы наук о Земле…»* [78]. Этими же авторами приведен перечень проблем нелинейной геомеханики, среди которых отдельно отметим «создание опытных геомеханических полигонов, изучение связей между глобальными геодинамическими процессами и техногенными катастрофами, измерение и контроль полей напряжений и деформаций в верхней оболочке Земли, создание геоинформационных систем горной механики».

Данные проблемы отражают необходимость в комплексном подходе к исследованию природных и техногенных геодинамических объектов и процессов различного масштабного уровня на экспериментальной основе. Это, в частности, относится и к проблеме математического моделирования и идентификации геодинамических процессов по геодезическим и гравиметрическим наблюдениям [56, 89, 91-94, 97-101, 104-106, 108, 112, 113, 116, 184, 185, 279].

Важнейшей характеристикой земной коры в геодинамическом аспекте является ее напряженно-деформированное состояние (НДС). НДС земной коры может быть определено по количественным оценками скорости тектонических смещений по геодезическим данным; по непосредственным измерениям в массивах горных пород (такие измерения производятся по методу разгрузки напряжений в кернах, выбуренных в рудниках, шахтах и туннелях, и по методу гидроразрыва в скважинах на глубине до нескольких километров); по геологическим данным о формировании неотектонических структур сжатия (складки, надвиги), растяжения (рифты, сбросовые структуры) и различных разломов, в частности сдвигов. Эти три подхода позволяют оценить НДС в верхней части земной коры. Их дополняет четвертый подход исследований, который позволяет охарактеризовать напряжения в более глубоких частях земной коры и в верхней мантии [39, 187]. Он состоит в обобщении геофизических данных – сейсмологических (которые дают возможность определить ориентировку осей наибольших и наименьших сжимающих напряжений и характер смещения в очаге земле-

трясений путем изучения особенностей распространения сейсмических волн) и гравиметрических (основанных на геодинамической интерпретации сведений о величине и ориентировке сопряженных зон положительных и отрицательных аномалий силы тяжести). Такие нарушения возникают в основном под действием тектонического сжатия и позволяют количественно определить величину действующих в коре напряжений [163, 164]. Использование методов определения параметров движений, деформаций, напряжений по натурным наблюдениям позволяет повысить адекватность аналитических моделей и точность оценивания параметров НДС геодинамических объектов.

Параметры геодинамических объектов (координаты и отметки пунктов, параметры движений, деформаций и напряжений) во многих случаях недоступны для непосредственного измерения и могут определяться косвенным путем по результатам наблюдений некоторых других величин (направлений, длины линий, зенитных расстояний, превышений и других). Это приводит к проблеме физической интерпретации результатов непосредственных наблюдений. Принципиальным моментом является то, что интерпретация результатов непосредственных наблюдений не должна отрываться от обработки (уравнивания или фильтрации) наблюдений, не должна нарушаться закономерность целостности систем наблюдений, обработки их результатов и интерпретации [150]. Необходимо также учитывать блоковую и фрактальную структуру литосферы. Возможности использования для этого непараметрических методов даны, например, в работах [56, 86-88].

Новейшие спутниковые технологии позволили на новом качественном уровне изучать геодинамические процессы и явления самых разных масштабов. В настоящее время GPS-наблюдения во всем мире активно применяются, в частности, при определении деформаций земной поверхности и для изучения деформационных предвестников землетрясений [96, 102, 165, 167, 173, 195, 183, 184, 197-199, 223, 243, 252]. В работе [183] даны обзор геодинамических полигонов России и рекомендации по использованию различных видов геодезических сетей и геодезических измерений для задач геодинамики разных масштабов (таблица 1).

Для локальных геодинамических объектов, на стыках плит, блоков можно выполнять угловые и линейные измерения (с расстояниями между пунктами до 8 км) с использованием тахеометров, дающих погрешность измерения углов 0.5″, расстояний 1-2 ppm.

Очень много GPS-проектов по геодинамике, в том числе, международных [173, 223, 252], уже выполнены или выполняются. Накоплен огромный экспериментальный материал. Актуальным для прогноза

землетрясений является анализ и интерпретация этих результатов наблюдений, так как считается, что упругий изгиб горных пород в готовящемся очаге землетрясения является прямым деформационным предвестником [138].

Таблица 1

Рекомендации по использованию различных видов геодезических сетей и геодезических измерений для задач геодинамики разных масштабов

Класс задач	Класс ГГС	Виды геодезических измерений
Глобальная геодинамика	IGS, ФАГС	GPS/ГЛОНАСС, РСДБ, СЛД, баллистические гравиметры, DORIS, геометрическое нивелирование
Региональная геодинамика	ВГС+ФАГС, СГС-1, сети региональных ГДП	GPS/ГЛОНАСС, геометрическое нивелирование, СЛД, гравиметрическая сеть 1 класса, нивелирование I класса
Локальная геодинамика	СГС-1, специальные геодезические сети на ГДП	GPS/ГЛОНАСС, геометрическое нивелирование I и II класса, гравиметрические измерения, дальномерные измерения

Международная GPS-сеть для геодинамики (IGS) насчитывает около 300 пунктов [252], из низ 16 в России, 10 в СНГ. По наблюдениям этой сети определено, в частности, вращение Евро-Азиатского континента вокруг района Гималаи-Тибет. В направлении запад – восток происходит изменение направления горизонтальных смещений этого региона по часовой стрелке на 30 градусов. А зоной резкого изменения направлений тектонических движений является Алтае-Саяно-Байкальский регион. Это подтверждается полями вращения, определенными авторами работы [223] для Австралийской, Евразийской и Тихоокеанской литосферных плит после анализа глобальных GPS-наблюдений 1991–2001 гг. В работе [173] приведены некоторые результаты определения поля деформаций в юго-западной части Байкальской рифтовой зоны по измерениям методами GPS, светодальнометрии и деформографии. Использовались также кварцевые наклономеры. Измерение деформаций в подземной галерее станции Талая проводились с помощью штанговых и лазерных деформографов с базами от 1.5 до 25 метров и чувствительностью до 10^{-10}. Глобальные смещения, региональные смещения, деформации в периоды сильных землетрясений – изменения до $3*10^{-5}$ в год, обычный фон деформации приразломной области от $5*10^{-8}$ до $2*10^{-6}$ в год, сезонные деформации, вызванные барическими эффектами – до $6*10^{-8}$. Алтае-Саянский регион очень интересен в смысле геодинамики [34, 190–192, 65–68, 240].

Подтверждением этому является ряд сильных землетрясений за последние 35 лет – Урег-Нурское -16.05.1970 г. (M=7.0), Зайсанское - 14.06.1990 г. (M=6.9), Бусингольское -27.12.1991 г. (M=6.5) и Чуйское 27.09.2003 г. (M=7.5).

Известны своей геодинамической активностью районы Киргизии и Казахстана, соответствующие территории Тянь-Шаньского сейсмогена – современной мобильной макротрещиноватой структурной неоднородности литосферы [187]. На основе геологических, геофизических и сейсмологических материалов на территории сейсмогена выделено 12 мегаблоков с мощностью коры 45 – 60 км. Структурная неоднородность литосферы вызывает неоднородность напряженно-деформированного состояния. При исследовании структурированных геодинамических объектов необходимо учитывать самоподобное фрактальное строение земной коры [187, 286, 253].

С 1992 года действует сеть GPS-наблюдений, которая охватывает территорию Тянь-Шаня, Казахского щита, горных систем Джунгарии, Тарбатагая, Юго-Западной части Алтая [198]. По данным 1992-2001 гг. 800 пунктов сети имели ошибки определения смещений по горизонтали 2мм, по вертикали 4мм. Общее сжатие поперек Киргизской части Тянь-Шаня происходит со скоростью 13 мм в год. Особенно быстрое накопление напряжений (деформаций) вдоль восточного края бассейна Иссык-Куля, где перепады скоростей достигали 7мм/год на расстояниях менее 20 км.

В работе [208] на примере Карпато-Динарского региона рассматривается связь изостатических аномалий и аномалий силы тяжести с современными вертикальными движениями земной коры.

Изучение геодинамических объектов и процессов является не только актуальной научной, но и практической проблемой. Важнейшими являются вопросы изучения локальных геодинамических объектов. Это относится, например, к районам добычи полезных ископаемых, крупным гидроузлам, инженерным сооружениям и т.д. На государственном уровне приняты документы, регламентирующие порядок обеспечения контроля за соблюдением требований промышленной безопасности и охраны недр геолого-маркшейдерскими службами организаций по добыче полезных ископаемых и использования недр в целях, не связанных с этим. Контроль должен обеспечиваться, в частности, путем построения и развития опорных и съемочных сетей, производства съемок земной поверхности и горных выработок, инструментального контроля геофизических параметров.

Комплексное изучение геодинамической обстановки необходимо, например, при инженерно-геологическом обосновании проектирова-

ния, строительства и эксплуатации сооружений и территорий, защитных инженерных мероприятий и охраны среды – работа [48, 71, 72]. В строительном деле объектами, деформации которых необходимо наблюдать и контролировать, являются автомобильные и железные дороги, мосты, аэродромы, жилые и промышленные здания [44-46, 48, 266], подземные сооружения, трубопроводы, каналы (судоходные, ирригационные и водоводные), подземные промышленные объекты, резервуары для хранения нефти и нефтепродуктов. В горном деле такими объектами являются шахтные разработки [168], открытые разработки (карьеры) [117, 119, 155-156, 177, 178], места извлечения (откачки) жидких полезных ископаемых.

В книге [78] экспериментальные способы определения и контроля движений и напряженно-деформированного состояния массивов горных пород разделены на две группы: механические и геофизические. Геодезические методы включены в группу механических, достоинством которых является то, что они позволяют количественно оценить поля напряжений.

Актуальным является изучение техногенной геодинамики в районах строящихся и уже эксплуатируемых ГЭС. Пример комплексных исследований геодинамики в районе строящейся Богучанской ГЭС дан в работе [100]. Выполнялись линейно-угловые измерения, высокоточное нивелирование специального назначения, инженерно-гравиметрическая съемка. Интерпретация наблюдений велась с привлечением геологических и гидро-геологических данных.

Широкое распространение для регистрации тектонических движений и измерений деформаций земной коры получили деформографические измерения. Существует возможность оценки изменения напряженного состояния в береговых примыканиях плотины Саяно-Шушенской ГЭС и других гидросооружений. Деформации скального массива приконтурной части выработки определяют по относительным смещениям марок, закрепленных на контуре по выбранной схеме измерений. Для определения относительных смещений марок специальной конструкции используют инварные и кварцевые жезлы со стандартными измерительными устройствами: микрометрами типа МК и индикаторами часового типа ИЧ10 (ИЧ50) с ценой деления 0.01 мм. База измерений 2 – 3.5 м. Погрешность измерений инварным жезлом (база 3 м) – 0.015 мм ($5*10^{-6}$); раздвижным кварцевым жезлом (база 2–3.5 м) – 0.018 мм; инварным жезлом.

В работе [154] представлены результаты контроля напряженно-деформированного состояния промплощадки шахты, подрабатываемой очистной выемкой. Геодезическими измерениями (GPS в том числе)

выявлено наличие трех зон проявления поверхностных деформаций, существование которых обусловлено, главным образом, дизъюнктивными нарушениями в пределах контрольной площади.

1.2 Комплексное изучение геодинамических процессов по разнородным геодезическим и геофизическим данным

1.2.1 Геодинамика

Для многих наук о Земле (геологии, геофизики, геодезии, горной механики и других) общепризнанна актуальность проблем «Геодинамика» и «Современные движения земной коры». Важная роль в решении указанных проблем принадлежит геодезии. Как отмечал известный ученый геолог В.Е. Хаин «…геодезические методы являются основными при изучении современных тектонических движений и деформаций». Л.П. Пеллинен основной научной задачей геодезии назвал «… определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли и их изменений во времени». Методами геодезии и гравиметрии изучаются изменения во времени параметров гравитационного поля и фигуры Земли, ее поверхности, а при изучении глубинных геодинамических процессов большое значение имеет не только геодезическая гравиметрия, но и прикладная, в том числе, разведочная.

Информация о движениях и напряженно-деформированном состоянии (НДС) земной поверхности и земной коры, обусловленных эндогенными и экзогенными факторами, является важнейшей в аспекте прогноза катастрофических геодинамических процессов (землетрясений, извержений вулканов, оползней, сходов ледников, горных ударов и проседания грунтов в области разработки полезных ископаемых и т.п.). Аномальные техногенные геодинамические процессы вызывают горизонтальные сдвиги земной коры, разломообразование, подземные аварии, наводнения; при этом страдают не только промышленные объекты, инженерные конструкции, жилые здания, но и население.

Исследования по изучению геодинамических процессов соответствует приоритетным направлениям развития науки и техники РФ, в частности, направлению «Экология и рациональное природопользование», имеют научное и практическое значение. Научное значение таких исследований заключается в получении новых знаний о Земле, ее строении, эволюции, разнообразных физических полях (гравитационных, магнитных и др.), пространственно-временной структуре физической поверхности. Важнейшим практическим значением изучения геодинамических процессов является решение задач прогноза, снижения

риска и уменьшения последствий геодинамических катастроф природного и техногенного характера, мониторинга окружающей среды. Эти задачи включены в перечень критических технологий РФ.

1.2.2 Основные определения. История развития теорий, методов и других научных исследований

Впервые термином «геодинамика» воспользовался итальянский астроном Дж. Скиапарелли в лекциях, прочитанных им в Петербургской академии наук в 1859 г. В 1911 г. появилась монография английского геофизика А. Лява «Некоторые проблемы геодинамики». При различных гипотезах о механических свойствах Земли в ней рассматривались такие явления, как приливные деформации Земли, ее собственные колебания и др.

Прежде всего, под динамикой Земли (геодинамикой) понимают механику глобальных процессов в Земле. Д. Л. Теркот и Дж. Шуберт [196, 287] определяют геодинамику как науку, изучающую движения и деформации, происходящие в земной коре, мантии и ядре, и их причины. Предполагается, что активные процессы, приводящие в конечном счете к изменениям структуры земной коры и рельефа, зарождаются в нижней мантии и даже на ее границе с ядром. Само ядро активно участвует в этих процессах. Есть данные о том, что твердое “ядрышко” вращается с большей скоростью, чем остальная планета. На глубине 100 км верхняя мантия разогрета под границами плит и в особенности под срединно-океаническими хребтами (низкие сейсмические скорости). Под континентами верхняя мантия холодная.

Литосфера обладает структурными, геофизическими и геодинамическими разномасштабными неоднородностями. Среда характеризуется нелинейными свойствами и способностью к самоорганизации и хаотизации. Нелинейность среды обусловлена постоянным движением, взаимодействием и неустойчивостью ее элементов в поле тектонических напряжений под воздействием внутрипланетных и внепланетных факторов. Проявлением нелинейных свойств среды, в частности, являются высокочастотная реакция горных пород на малоамплитудные длиннопериодные деформации и парадоксальный отклик на слабые воздействия. Такие реакции обычны только для сбалансированных систем, когда влияние малого параметра в условиях неустойчивого равновесия приводит к его нарушению.

К ранним гипотезам о динамике земли относятся следующие. Нептунисты считали, что вся Земля изначально была покрыта водой, а материки постепенно появлялись при процессах обмеления общезем-

ного океана. Плутонисты считали, что рельеф образовался за счет внутренних сил Земли (согласно представлениям греков, командовал подземными силами бог Плутон). М.В. Ломоносов (1711–1765) частично придерживался нептунистской теории. В сочинении «О слоях земных» он пишет: «Наклоненное положение камней диких к горизонту показывает, что оные слои сворочены с прежнего своего положения, которое по механическим и гидростатическим правилам должно быть горизонтальным. И так, когда горы со дна морского восходили, понуждаемые внутреннею силой, неотменно долженствовали составляющие их камни выпучиваться, трескаться, производить расселины, наклонные положения, стремнины, пропасти разной величины и фигуры отменной».

Гипотеза французского ученого Эли де Бомона (1798–1874) о сжимающейся, остывающей Земле привела к идее о ведущих вертикальных силах. Она названа гипотезой контрактации – складки в земной коре появляются за счет сжатия остывающей Земли подобно печеному яблоку (складки – антиклинали имеют выпуклости вверх, синклинали – вниз). Споры вокруг образования складок и грандиозных складчатых систем не утихают до сих пор.

Научные представления о геодинамических процессах, тем или иным образом основанных на результатах наблюдений различных видов, развиваются с начала XX века. Предпосылкой теоретического обоснования являлась мобилистская концепция (теория дрейфа континентов), предложенная А. Вегенером.

В январе 1912 года он представил следующую гипотезу. Континенты являются независимыми плато, лёгкими по сравнению с более глубокими слоями земной коры. Из-за этого они могут, как льдины, дрейфовать по земной коре. В ходе истории континенты изменили положение и передвигаются до сих пор. Так, африканский континент «подползает» под плато Евразии, образуя Альпы. До Вегенера уже много известных учёных выражали подобные мысли, например Александр Гумбольдт или Евграф Быханов, но не могли выработать теорию. Вегенер же нашёл множество доказательств в пользу своей теории. К примеру, западный берег Африки замечательно подходит к восточному берегу Южной Америки, а флора и фауна Европы и Америки, как живая, так и вымершая, чрезвычайно похожи, несмотря на расстояние между ними – более 5000 километров.

Несмотря на массу доказательств, у теории было много противников. Это объяснялось тем, что Вегенер так и не смог объяснить механизмы, приводящие в движение континенты. В 1930–1940-е годы такое объяснение дал шотландский геолог Артур Холмс (1890–1965).

Он предположил, что силой, движущей континенты, могли бы стать потоки вещества, существующие в мантии и приводимые в движение разностью температур между поверхностью и ядром Земли. При этом теплые потоки поднимаются вверх, а холодные опускаются вниз – происходит конвекция.

У.Кэри, известный своими аргументированными предположениями о расширяющейся Земле, предлагает иное описание континентальных движений. Он считает, что континентальные плиты должны перемещаться друг относительно друга не в виде весьма тонких литосферных плит, скользящих по астеносферному слою, как это предполагается в плитотектонических моделях, а в виде блоков, включающих и верхнюю часть мантии. То есть, в виде толстых блоков, «приваренных» к мантии (что согласуется с новейшими данными сейсмической томографии). Также большую роль в геодинамике Кэри придает глобальным зонам кручения, в частности левосторонней приэкваториальной Тетической зоне, в которой осуществляются крупномасштабные сдвиги между блоками литосферы.

Результаты обширных исследований строения океанического ложа, благодаря которым были обнаружены зоны субдукции (погружения одних участков земной коры под другие) и расширения (спрединга) морского дна позволили несколько изменить гипотезу Вегенера.

Основы новой динамической модели Земли заложил в 1960 г. заведующий кафедрой геологии Принстонского университета Гарри Хесс. Самые последовательные мобилисты – ученые с мировыми именами академики В.Е. Хаин (1914–2009) и П.Н. Кропоткин (1910–1996). Виктор Ефимович Хаин изложил восемь постулатов теории мобилизма и самые важные достоинства неомобилистской теории.

1. Земная кора в верхней части представляет собой относительно жесткую и хрупкую литосферу. Ниже ее находится слой вязкого и более пластичного вещества – астеносфера.

2. Литосфера разделена на несколько плит, структур инертных. На их границах проявляется сейсмическая, вулканическая и тектоническая активность. Сами плиты движутся относительно друг друга, расходятся в рифтовых зонах, могут наползать друг на друга и пододвигаться одна под другую.

3. В рифтовые зоны поступает разогретое вещество из астеносферы. Оно образует новую молодую кору и фиксирует намагниченность того момента, когда поступает; далее, по мере удаления от оси, сохраняет эту намагниченность, что и позволяет изучать историю раскрытия рифта.

4. Движения плит могут быть описаны ее вращением вокруг оси, проходящей через центр масс Земли и некую точку на плите – ее полюс вращения, – теория Эйлера.

5. Расширения дна океанов компенсируются в зонах островных дуг, где происходит пододвигание океанической коры под континентальную и где фиксируются сверхглубокие наклонные разломы литосферы (зоны субдукции).

6. О «моторе» – источнике движений. В.Е. Хаин считал, что это – восходящие тепловые потоки (разогрев по причине радиоактивного распада внутри Земли) в зонах рифтообразования и нисходящие в зонах глубоководных желобов.

7. Тектоника литосферных плит нашла убедительные подтверждения, начиная с аргументов и фактов А. Вегенера и кончая современными достижениями.

8. Достоинства этой концепции в ее наиболее полном простом и изящном объяснении множества фактов. Гипотеза является блестящим примером актуализма (сравнительно-исторический метод, применяемый в геологии, когда на основе современных процессов по аналогии изучаются процессы далекого прошлого и делаются прогнозы, поддающиеся экспериментальной проверке.).

Иную научную концепцию в тот же период «фиксист» В.В. Белоусов (1907–1990), который утверждал господство вертикальных движений. В.В. Белоусов отдавал преимущество континентам и признавал два вида тектонических элементов – геосинклинали и древние платформы плюс рифты. Геосинклинали – области наибольшего проявления сейсмической, вулканической и тектонической активности.

У В.Е. Хаина по четвертому положению тектоники плит различаются три рода перемещений плит и соответственно границ между плитами:

дивергентные границы, вдоль которых происходит раздвижение плит – спрединг – рифтогенез;

конвергентные границы, на которых идет сближение плит, обычно выражающееся поддвигом океанической плиты под континентальную или под другую океаническую плиту; этот процесс называется субдукцией;

столкновение двух континентальных плит, тоже обычно с некоторым поддвигом одной под другую, называют коллизией;

трансформные границы, вдоль которых происходит горизонтальное скольжение одной плиты относительно другой по плоскости вертикального трансформного разлома.

На дивергентных границах в зонах спрединга происходит непрерывное рождение новой океанической коры, поэтому их называют конструктивными. В природе преобладают границы первых двух типов. Дивергентные приурочены к осевым зонам срединно-океанических хребтов и межконтинентальным рифтам, конвергентные – к осевым зонам глубоководных желобов, сопряженных с островными дугами. Некоторые границы сочетают разные виды движений (сочетаются с трансформными).

В.Е. Хаин [210] назвал изучение современных движений земной коры актуотектоникой. На основании изучения современных вертикальных и горизонтальных движений им предполагается, что вся поверхность Земли охвачена этими движениями. Из них вертикальные носят главным образом колебательный, горизонтальные – направленный характер.

В классической мобилистской гипотезе А. Вегенера в качестве движущей силы дрейфа материков рассматривалось осевое вращение Земли, а дефицит этой силы был одной из причин отторжения данной гипотезы геофизиками. В классической же тектонике плит фактор вращения Земли вообще не принимался в расчет. В дальнейшем на его возможную роль, пусть и второстепенную, стали обращать внимание, а в последние годы появился ряд серьезных работ, рассматривающих его влияние на кинематику плит. Одним из основных аргументов служит заметная диссимметрия окраин Тихого океана: на западе развита система окраинных морей и островных дуг, которые подстилаются крутонаклоненными зонами субдукции, на востоке окраинные моря и островные дуги отсутствуют, а зоны субдукции преимущественно полого наклонены. Сторонники влияния ротационного фактора объясняют это тем, что течение в астеносфере с запада на восток, вызываемое вращением Земли, в первом случае ориентировано навстречу субдукции, а во втором – в том же направлении. Также важно то, что американские континенты надвигаются на Тихоокеанскую впадину в связи с раскрытием Атлантики и отходят от оси спрединга Срединно-Атлантического хребта. Тем не менее, независимые наблюдения у берегов Центральной и Южной Америки подтверждают существование здесь направленного к востоку течения в астеносфере.

К середине прошлого века в геофизике утвердилась модель оболочечного строения твердой Земли, предложенная австралийским ученым К. Булленом (модель Буллена-Джеффриса).

В ней отдельные оболочки и ядро обозначены заглавными латинскими литерами: кора – A, верхняя мантия – B, переходный слой к нижней мантии – C, нижняя мантия – D (между 660-670 и 2900 км),

внешнее ядро – E, внутреннее – F. В нижних слоях мантии существует слой нарушения монотонного возрастания скоростей сейсмических волн к границе ядра, который получил обозначение D’’.

Глубина кровли слоя изменяется от ~1600 км почти до границы мантия-ядро (рис. 1).

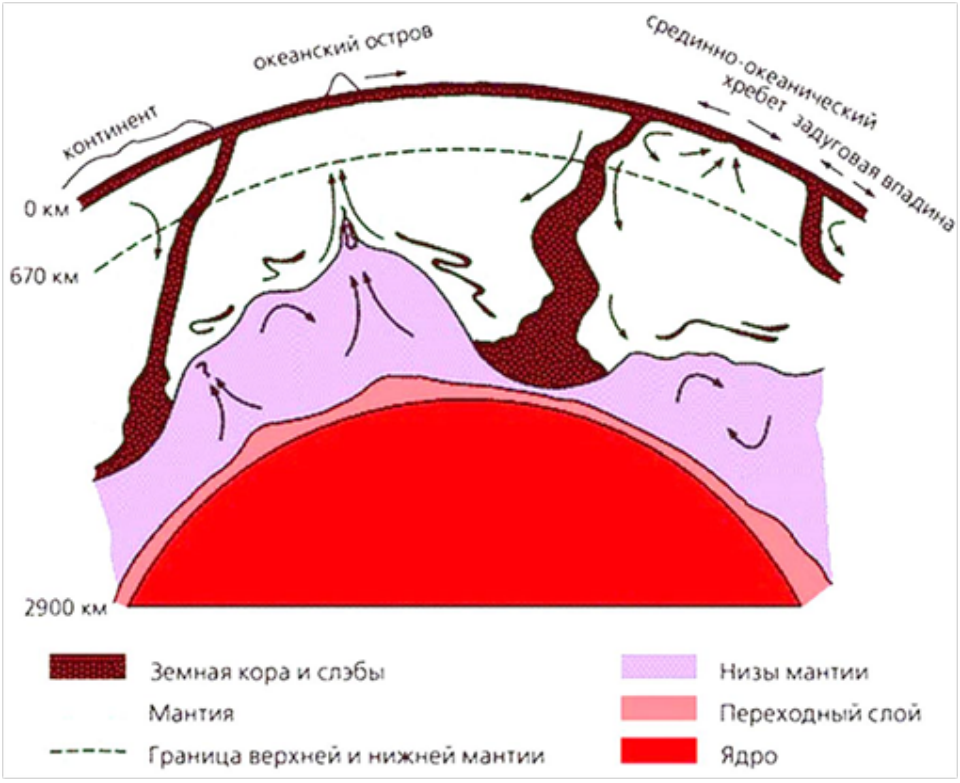


Рис. 1. Схема возможной динамики переходного слоя в нижней мантии

Стрелками показано движение вещества. Верхняя граница слоя D’’ с мантией неровная, и мощность меняется от 200 до 300 км. Вязкость слоя D’’, судя по сейсмическим скоростям, также заметно варьирует в широтном направлении. И, наконец, в подошве этого слоя выявлена зона ультранизких скоростей, что говорит о возможном частичном плавлении вещества.

Циркуляция в слое происходит из-за внутреннего разогрева.

Наиболее разработанная модель кинематики литосферных плит с учетом ротационного фактора предложена А. Смитом и Ч. Левисом. Ее суть представлена на схеме (рис. 2). Ротационный фактор привлечен этими исследователями и для объяснения образования линейных вул-

канических цепей в Тихом океане. В общем, представляется, что в подлинно глобальной и полной геодинамической модели учет ротационного фактора обязателен.

Модель вращения оболочек Земли вокруг центральной оси (рис. 2). Передача напряжений через астеносферу (с пониженной вязкостью) в сочетании с действием на подошве плит порождает отставание литосферных плит относительно мезосферы (зоны между астеносферой и нижней мантией) в западном направлении. Это отставание обусловливает дифференциальное вращение мантии и литосферы, которое может рассматриваться как течение мантии в восточном направлении. Волновые изгибы мантийного течения возникают вследствие смещения оси вращения (блуждания полюсов) в ответ на смещение масс на поверхности Земли.

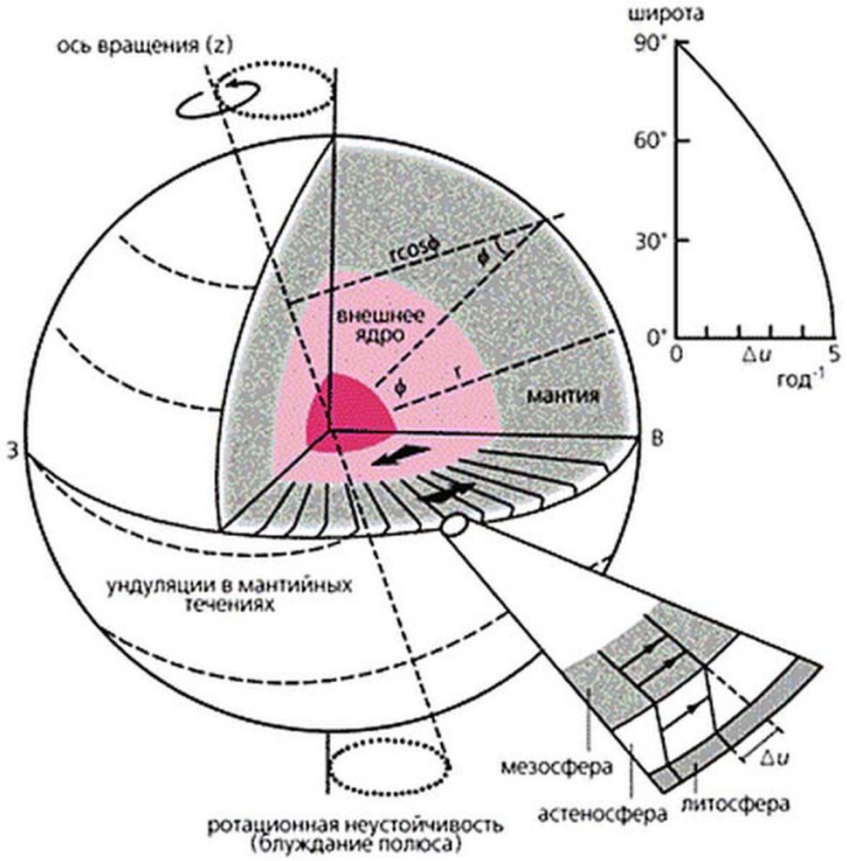


Рис. 2. Модель вращения оболочек Земли

Достаточно давно было обращено внимание на совпадение длительности крупномасштабных тектонических циклов, установленных еще в самом конце XIX в. французским геологом М. Бертраном, со временем обращения Земли и всей Солнечной системы по галактической орбите.

Отметим, что споры, дискуссии о правильности той или иной гипотезы динамики верхнего слоя литосферы продолжаются и в настоящее время и, завершения этих дискуссий в ближайшем будущем не предвидится. Одним из направлений выяснения геодинамических механизмов, их моделирования является комплексный учет наблюдений различного вида (геодезических, геологических, геофизических, сейсмологических и т.п.).

Известно, что на земную сферу воздействуют природные глобальные и локальные процессы. К таким воздействиям относятся эндогенные и экзогенные процессы, в том числе вариации гравитационного поля Земли. Геологическая среда реагирует на внешние воздействия перемещением различных объёмов горных пород, деформациями, миграцией флюидов, фазовыми, химическими превращениями. За длительные промежутки геологического времени происходят сильные изменения состояния горных пород: они передвигаются, терпят разрывы, сминаются в складки, размываются. К быстрым процессам относятся криповые движения, землетрясения, оползни, сели, цунами, горные удары; к медленным процессам, происходящим на наших глазах, – “вздымания” и “проседания” блоков земной коры и др. Изменение состояния геологической среды проявляется во временных вариациях различных параметров физических полей. Изменяются наклоны, деформации, скорости пробега сейсмических волн, электромагнитные свойства, гидрогеодинамические режимы, дебит нефти и газа и т. д. Эти параметры можно измерить либо непосредственно, в реальном времени, либо опосредованно. Инструментально пространственно-временные вариации физических полей измеряют при долговременном слежении за вариациями физических параметров – мониторинге геологической среды и/или ее отдельных частей.

Поэтому, изучение геодинамических процессов должно выполняться с привлечением разнородных данных – геодезических, геолого-геофизических, гидрологических, метеорологических и др. Существуют некоторые ориентиры развития наук о Земле в XXI веке. В частности, говорится о ведущей роли эксперимента и о необходимости одновременного наблюдения полей различной геофизической природы, глобализации систем наблюдений, изучения тонкой пространственно-временной структуры исследуемых процессов.

1.2.3 Многодисциплинарность проблемы «Геодинамика»

Многодисциплинарность (комплексность) проблемы «Геодинамика» обусловило множество попыток ученых во всем мире анализировать и прогнозировать поведение геодинамических систем по разнородным данным (геодезическим и геофизическим), интерпретируя изменения различных физических полей [6, 9, 14, 16, 60, 61, 82, 128-130, 135, 139, 145, 171, 192, 196, 203, 211, 221, 224, 225, 233, 245, 249, 250, 255, 270, 282, 286, 116 -147].

При изучении глубинного строения земной коры необходима комплексная интерпретация геофизических полей, прежде всего, гравитационного, магнитного и сейсмического [193]. Отметим работы сибирских ученых под руководством Э.Э.Фотиади [203], как пример комплексного изучения геодинамических явлений по геоморфологическим, геологическим, сейсмологическим, геодезическим, гравиметрическим и геомагнитным данным.

Взаимообусловленность изменений различных геофизических полей определяет необходимость совместной обработки и интерпретации разнородных комплексных наблюдений, в частности, геодезических и геофизических наблюдений. Обращается внимание еще и на необходимость различать собственно вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей, горизонтальные смещения этих точек и изменения направления отвеса во времени. Эта задача является примером многодисциплинарной обратной задачи в многомерных сложных средах – найти свойства среды при заданной информации о полях. Важна постановка и исследование корректности (многодисциплинарных) обратных задач (разрешимости, единственности, коллективной устойчивости решений), их методов решения. Многодисциплинарные задачи имеют следующие положительные свойства:

расширительность – в многодисциплинарной постановке задач нескольких индивидуальных методов возможно получить результат более содержательный, чем простая сумма результатов отдельных методов;

дополнительность – имеется возможность получить надежный и полный результат даже в том случае, когда какая-либо совокупность или все индивидуальные методы не дают определенных результатов.

Поэтому, решая обратные задачи как многодисциплинарные, по комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям можно получить новые качественные результаты. Эффект может быть достигнут при использовании сетевой информационно-вычислительной тех-

нологии совмещенного вычислительного эксперимента и процесса его интерпретации.

Одним из важнейших открытий наук о Земле XX века является установление блочно-иерархической структуры земных недр. Важной константой является примерное отношение средних размеров блоков соседних уровней (3.5±0.9). Также установлено, что геологическая среда в большом диапазоне размеров геометрически самоподобна, например, структура системы сбросов-разломов. Моделирование такой среды должно выполняться с позиций фрактального и непараметрического подходов. Таким образом, геодинамические процессы и объекты в общем случае являются сложными в структурном отношении и при решении задачи моделирования это необходимо учитывать обязательным образом.

Специфической сложностью при изучении геодинамических процессов является необходимость корректного учета пространственно-временных масштабов происходящих явлений. В работе [34] говорится: «различные части Земли находятся в состоянии движения одна относительно другой, и это движение с очевидностью связано с перемещениями на глубине. При этом движения осуществляются на всех пространственных и временных масштабах. Механические перемещения обусловлены сложными физическими процессами, происходящими во всем масштабе глубин Земли, которые в свою очередь, имеют широчайший спектр характерных времен…».

Геодезия, как наука в приложении к геодинамическим исследованиям, была востребована всегда и в настоящее время активно и успешно развивается. По определению М.С. Молоденского [141], геодинамика объединяет кинематическую и динамическую геодезии. В первом случае изучают движение, во втором – дополняются силы, которые их создают. Вместе с тем, повышается необходимость совершенствования теоретических положений и методов, методик, алгоритмов и технологий изучения геодинамических процессов на основе моделирования меняющихся во времени геодезических (смещения, закономерности движений, поля деформаций) и гравитационных (аномальные массы, их расположение, закономерности изменения масс) параметров. При этом возникает потребность в строгом подходе к совместной математической обработке разнородных геодезических и геофизических наблюдений на земной поверхности (обратная задача геофизики). Важной является разработка новых технологических решений по информативной и наглядной визуализации результатов математической обработки.

Отдаленные галактики изучены человечеством куда лучше, чем то, что находится под земной корой в каких-то нескольких километрах от нас. Кольская сверхглубокая скважина – своеобразный телескоп в загадочный внутренний мир планеты. Научные представления о строении верхнего слоя земной коры в настоящее время интенсивно меняются. Этому способствуют уникальные эксперименты на глубоких скважинах (например, на Кольской) и, бурное развитие спутниковых технологий оперативного координатного определения. С начала XX века считалось (выше этот тезис описан), что Земля состоит из коры, мантии и ядра. При этом никто из ученых не мог сказать, где кончается один слой и начинается следующий. Ученые не знали даже, из чего, собственно, эти слои состоят. Еще каких-то 40 лет назад они были уверены, что слой гранитов начинается на глубине 50 метров и продолжается до 3 километров, а затем идут базальты. Встретить мантию ожидалось на глубине 15-18 километров. В реальности все оказалось совершенно иначе.

Что происходит в глубине, доподлинно неизвестно. Все же отметим главное положительное направление современных исследований. Существующие гипотезы, технологические достижения, экспериментальные наблюдения во многом определяют в настоящее время развитие наук о Земле, таких как, например, геодинамика и геотектоника.

Актуален совместный анализ временных рядов гравиметрических данных, атмосферного давления и уровня моря. Имеются проявления эффектов пространственно когерентных процессов (вариаций уровня моря), а также процессов некогерентных (вариаций атмосферного давления). Для эффективного использования гравиметрических данных в геодинамических исследованиях необходимо совершенствовать методику расчетов притяжения атмосферы и обеспечивать ее верификацию на материалах наблюдений. В работе [255] говорится, что переменная атмосферная нагрузка 1 гПа может приводить к вертикальным перемещениям земной поверхности на 0.7 мм. Это соответствует изменению ускорения силы тяжести на 0.12 микрогал. Но необходимо также учитывать эффект притяжения атмосферы. В работе [282] вариация ускорения силы тяжести на 0.36 микрогалл на 1 гПа объясняется эффектом притяжения атмосферы. Для того, чтобы учесть характер пространственно-временных вариаций регионального барического поля необходимо иметь данные об атмосферном давлении в радиусе 300-400 км от гравиметра.

В изучении геодинамических явлений наиболее информативными являются результаты наблюдений гравитационного, геомагнитного полей и движений земной коры [145]: «аномалии неприливных вариа-

ций силы тяжести и векового хода геомагнитного поля можно рассматривать как «пьезогравитационный» и пьезомагнитный эффекты пород, деформируемых в локальном объеме земной коры. В результате деформаций образуются зоны сжатий и растяжений. Это, в свою очередь, приводит к изменению плотности и намагниченности пород в указанных зонах, что и проявляется в виде изменений наблюдаемых значений рассматриваемых полей».

Гравиметрические наблюдения используются при изучении геодинамических объектов различных масштабов. В работе [176] гравиметрия классифицирована как планетарная, региональная, детальная и камерная. Планетарная гравиметрия занимается изучением глобальных особенностей фигуры и внутреннего строения планет и их спутников. Назначение региональной гравиметрии – решение круга задач, связанных с уточнением местного геоида, поля уклонений отвеса для части материков и океанов, для тектонического районирования, выделения областей перспективных для поиска полезных ископаемых, в частности нефтегазоносных районов. Детальная гравиметрическая съемка производится до и после землетрясений [139, 171], извержений вулканов [97-101, 221, 248, 270] для выяснения процессов, сопровождающих эти явления природы. Детальная гравиметрия занимается изучением геологических структур, к которым приурочены газонефтеносные месторождения или рудные месторождения, либо изучаются отдельные рудные месторождения. Камерная гравиметрия изучает неоднородность гравитационного поля в помещениях, которая обусловлена гравитационным эффектом от столбов, постаментов, стен и т.д. Многоцикловые гравиметрические наблюдения могут быть использованы для построения прогнозных динамических моделей. В настоящее время перед гравиметрией стоит задача выявления малоинтенсивных локальных изменений ускорений силы тяжести. Причинами изменений ускорения силы тяжести могут быть проявления микротектоники и изменения во времени оснований сооружений.

Точность современных гравиметров позволяет решать многие задачи, связанные с геодинамикой. Результаты измерений абсолютным баллистическим гравиметром FG5-108, изготовленным фирмой «Micro-g Solutions» (США) и принадлежащим Международному бюро мер и весов (МБМВ) имеют следующие результаты: средняя квадратическая ошибка для серий в 100…150 бросков пробного тела, производимых каждые 10 или 20 сек, находится в пределах от 7 до 13 мкгал. При усреднении результатов по 24 сериям, выполняемым в течение 24 часов, средняя квадратическая ошибка находится в пределах от 1 до 2 мкГал.

Когда изменения ускорения силы тяжести сопоставимы с точностями гравиметров, важно помнить о строгом подходе к интерпретации вертикальных смещений и изменений ускорения силы тяжести. Этот вопрос, в частности, затронут в работе [182]. В этой работе говорится, что строгий подход требует отделять вертикальные смещения от кажущихся изменений по высоте за счет изменения гравитационного поля. Например, в каком-либо месте возникло изменение гравитационного поля. Благодаря некоторому запасу прочности возникшие напряжения не вызвали немедленного движения земной коры. Но если выполнить геометрическое нивелирование, можно сделать ложный вывод об изменениях превышений и движении реперов. Спустя некоторое время напряжение в земной коре приведет к изменению наклона поверхности, и снова равновесие. Традиционная интерпретация говорит об отсутствии движений, хотя вертикальное движение произошло. Поэтому является очень актуальным вопрос строгой математической обработки и интерпретации нивелирных и гравиметрических наблюдений.

Примеры анализа гравитационного влияния изменения массы водохранилища на результаты геодезических наблюдений даны в работах [26, 27, 148]. Рассчитано, что вариации силы тяжести вблизи береговой линии при изменении уровня воды могут достигать 1 мГал, а вариации уклонений отвесных линий могут составить 0.2″. При высокоточных измерениях этим пренебрегать нельзя.

Примерами перемещений больших масс являются также извержение вулкана и процесс подготовки извержения [93, 97-101], горные разработки [92, 94, 117, 119]. В этих случаях также необходима строгая математическая обработка и интерпретация разнородных наблюдений.

1.2.4 Анализ геодезических измерений с учетом динамики объектов мониторинга

Действующим и одним из основных, повидимому, законов для Государственного метрологического надзора и соответствующих региональных подразделений является Федеральный закон от 26 июня 2008 г. № 102-ФЗ «Об обеспечении единства измерений». В данном документе в главе 1, статье 1 отмечено, что сфера государственного регулирования обеспечения единства измерений распространяется на измерения, к которым в целях, предусмотренных частью 1 настоящей статьи, установлены обязательные требования и которые выполняются при осуществлении геодезической и картографической деятельности. Дано определение измерения: это совокупность операций, выполняемых для определения количественного значения величины. Необходи-

мо отметить, что ранее в литературе были несколько другие определения. У В.Д. Большакова [13] «измерение в простейшем истолковании есть процесс сравнения определяемой физической величины с другой однородной ей величиной, значение которой известно». Добавление в это определение упоминания о «простейшем истолковании» и «физической величине» делает данное определение менее общим, чем то, которое написано здесь выше, но, соответственно, и более конкретным. При любой точности измерений возникают ошибки измерений. Конечно же, их стараются уменьшать как совершенствованием приборов, так и методиками. Но эти меры могут возникнуть и будут эффективны после корректного анализа результатов измерений и их последующей обработки, с использованием при этом как классических методов математической статистики, так и современных направлений анализа измерений – робастной, непараметрической статистики, методов фильтрации. В исследовании [36] указаны три основные группы анализа результатов геодезических измерений при помощи аппарата математической статистики. Сравнение двух серий результатов измерений одного и того же геодезического объекта, полученных при наблюдении двумя различными инструментами, одним и тем же наблюдателем в одних и тех же условиях. Сопоставление серий результатов измерений одного и того же геодезического объекта, полученных одним и тем же инструментом, но различными способами (например, измерение горизонтальных углов способом во всех комбинациях, видоизмененным способом и способом круговых приемов, определение долгот способами Цингера, Мазаева и Делена, определение широт способами Певцова и Талькотта и т. д.). Сравнение серий результатов наблюдений, полученных посредством одного и того же инструмента, одним и тем же способом, но в различных физико-географических условиях, например результатов измерений длин линий радиодальномером при изменении электрических свойств подстилающей поверхности, в частности, при отсутствии или наличии снежного покрова, горизонтальных углов, при нормальном распределении температуры по высоте и при наличии инверсии и т. д. За прошедшее с издания монографии [36] время (50 лет) к основным группам анализа стали объективно относиться теория, методы и технологии корректной статистической обработки геодезических измерений с учетом фактора времени и модели динамики объектов наблюдения – геодезического мониторинга. Это вызвано многими предпосылками как научного, так и практического характера. Приведем слова академика В.И. Вернадского: «Первым по времени, крупным основным фундаментом современного научного мировоззрения является выяснение формы и размеров земного

шара». Геодезия решением одной из основных своих задач – определением пространственного положения компонент Земли (точек, тел, контуров) – присутствует во всех науках о Земле и определенным образом связывает их в общую систему. Л.П. Пеллинен [158] основной научной задачей геодезии называет определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли и их изменений во времени. В работе [157] говорится об увеличении роли в формировании научной картины мира современной геодезии, особенно таких ее разделов, как космическая геодезия и аэрокосмические съемки. Упоминаются имеющие значение при формировании картины мира ключевые физические категории: пространство–время, поля переносчиков взаимодействий, тела (частицы). Эти физические категории имеют самое непосредственное отношение к геодезии и другим наукам о Земле. Сделан вывод, что в мировоззренческом отношении роль геодезии возрастает по мере развития теории и методов динамической (четырехмерной) физической геодезии. Фундаментальными являются исследования «Геодинамика» и «Современные движения земной коры» (СДЗК). Они имеют как научное, так и практическое значение для наук о Земле и народного хозяйства. Научное значение заключается в познании строения и эволюции Земли, пространственно-временной структуры физической поверхности Земли, ее физических полей (гравитационного, магнитного, электрического и др.) и геосфер (литосферы, гидросферы, атмосферы и др.). Практическое значение заключается, в частности, в решении задач прогноза как медленных движений физической поверхности Земли, так и быстрых, катастрофических (землетрясений, извержений вулканов и др.); поиска полезных ископаемых, в решении задач проектирования и эксплуатации крупных инженерных сооружений и уникальных физических систем; задач проектирования, построения и использования геодезических и гравиметрических сетей. Геодинамические исследования имеют большое значение в аспекте экологической информации о состоянии нашей планеты и ее отдельных регионов, обеспечения жизнедеятельности и устойчивого развития окружающей среды. Территории ряда регионов Сибири в настоящее время испытывает большую техногенную нагрузку. Техногенная нагрузка отражает степень техногенного освоения окружающей природной среды (ОПС) человеком и уровень ее загрязнения продуктами его жизнедеятельности. Учет и исследование техногенного фактора в формировании современного мира являются актуальной задачей, так как служат информационной основой для ведения экологического мониторинга. Развитие атомной энергетики и гидроэнергетики, объектов природопользования, высокотехнологичных и экологически опасных производств требуют тщательно-

го метрологического надзора и мониторинга, в том числе с использованием геодезических измерений (геометрический метод). Актуальным является поддержание геодинамической безопасности мегаполисов, районов разработки месторождений природных ископаемых – нефтегазодобычи, шахт и рудников. Необходимость и возможность совершенствования теории и методов анализа геодезических измерений обусловлена также бурным развитием производства микропроцессоров, вычислительной техники, новых технологий приборостроения, цифровых методов измерений, использованием лазеров. К последующему за этим повышению точности и надежности измерений добавилось и повышение оперативности, скорости измерительных экспериментов и технологий. Все чаще создаются технологии слежения за динамическими объектами в режиме он-лайн и в интернет-сети (Япония, США в Калифорнии). Повсеместно распространено использование космических спутников для геодезических целей определения взаимоположения точек земной поверхности. В то же время, это направление координатизации пространства имеет много нерешенных вопросов корректного и достоверного анализа результатов измерений. Должно выполняться слежение за изменением отметок реперов государственной высотной сети РФ. Инструкция регламентирует повторение нивелирования I класса через каждые 25 лет, в сейсмоактивных районах – через каждые 15 лет, II класса – через 35 и 25 лет соответственно. Между измерениями разных циклов может присутствовать корреляция. Это необходимо изучать и анализировать. Развитие теории и методов анализа геодезических измерений с учетом фактора времени и динамики объектов наблюдения отражено в многочисленных работах и монографиях как зарубежных, так и российских авторов. Невозможно привести полный их список, приведем некоторые работы и монографии последних лет, написанные учеными Сибирской государственной геодезической академии (СГГА). В монографиях [157, 184] изложены теория и приложение авторских методов математического моделирования и идентификации сложных самоорганизующихся природных и технических геодинамических систем по многомерным пространственно-временным рядам разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений. Разработки опираются на современные междисциплинарные теории и методы системно-структурного подхода, параметрической и непараметрической идентификации систем, самоорганизации, синергетики, фракталов, динамического хаоса.

Монография [36] посвящена прогнозированию деформаций сооружений на основе результатов геодезических наблюдений с использованием имеющихся количественных и качественных данных других

видов натурных наблюдений. В книге изложены методология и теоретические основы авторского подхода к рассматриваемому прогнозированию. Представлены разработанные модели и опыт их применения, определены место и роль прогнозирования в современном развитии геодезического мониторинга. В ряде работ рассмотрены вопросы изучения геодинамических процессов на основе моделирования меняющихся во времени геодезических (смещения, закономерности движений, поля деформаций) и гравитационных (аномальные массы, их расположение, закономерности изменения масс) параметров [91-94, 97–101]. В работах [71, 72] показан метод анализа многократных геодезических измерений на модельном примере напряженно-деформируемого состояния бетонной конструкции. Работы [93, 94, 97–101] посвящены решению некорректных задач математической геофизики. Приведен пример научного решения обратной задачи – по геодезическим и гравиметрическим измерениям на земной поверхности определить параметры (координаты центра и размеры) магматического очага действующего вулкана и оценить точность этого определения. В работе [107, 109, 123] дан обзор некоторых современных представлений о вращательном характере движения земных блоков. Приведены примеры, подтверждающие эту гипотезу. В результате обработки данных многолетних геодезических наблюдений и их последующей компьютерной визуализации вращательный характер горизонтальных движений обнаружен на Тункинском и Горно-Алтайском геодинамических полигонах (ГДП). Таким образом, вопросы анализа геодезических измерений с учетом динамики объектов мониторинга актуальны, востребованы как для фундаментальной науки, так и для практических приложений и ждут очередных математических и статистических решений.

1.2.5 Математическая обработка пространственно-временных рядов геодезических и геофизических наблюдений

Методологические основы решения проблемы моделирования и идентификации сложных систем широко представлены в научной литературе [162, 164]. В работах В.К.Панкрушина и Е.А.Васильева [7, 44, 167–184], описано приложение оптимальной фильтрации Калмана к задачам математической обработки пространственно-временных рядов геодезических наблюдений. Идентификация напряженно-деформированного состояния геодинамических систем является частной задачей исследования геодинамических систем по натурным наблюдениям. Функциональную схему решения этой задачи в результате обработки и интерпретации многомерных временных рядов комплексных разно-

родных геодезических и геофизических наблюдений можно представить рисунком 3.

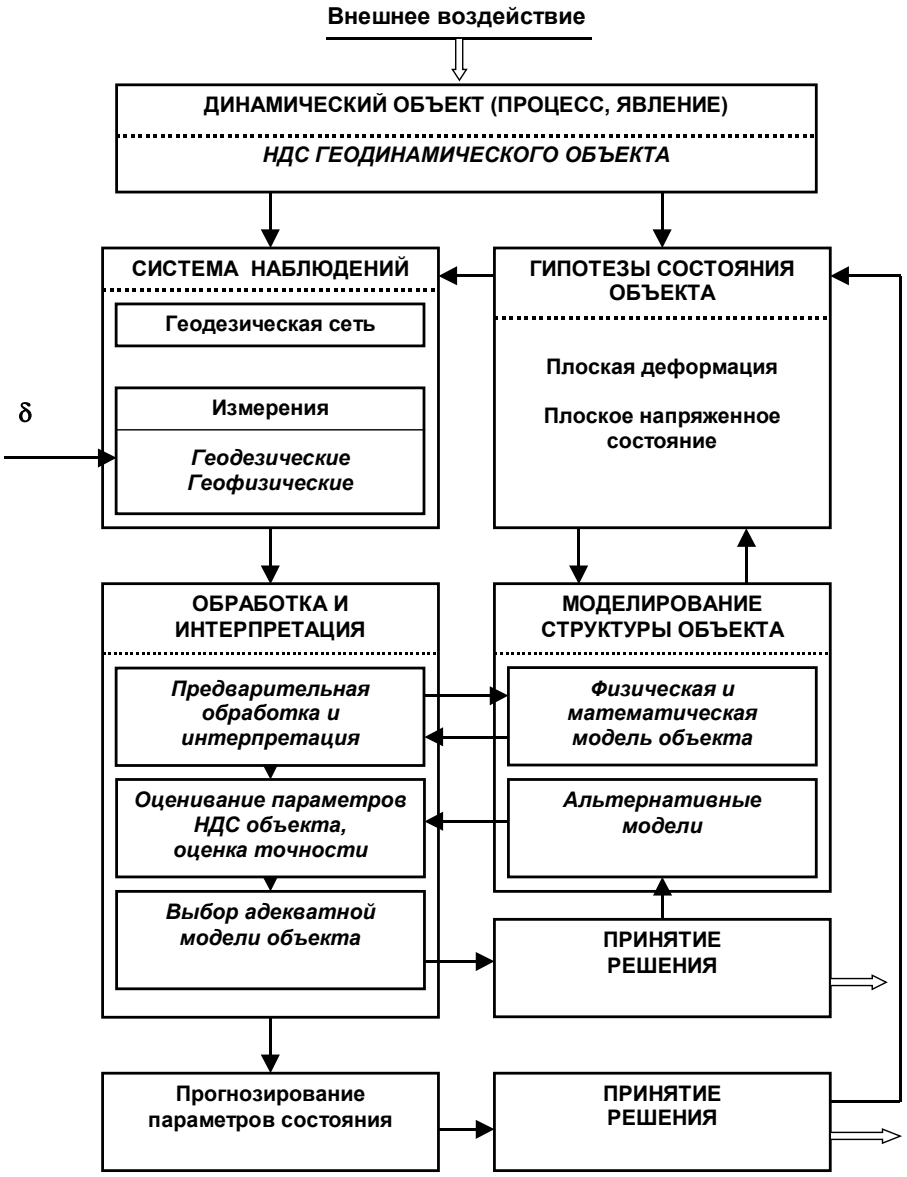


Рис. 3. Функциональная схема решения задачи идентификации НДС геодинамических объектов

Структурная схема идентификации (в широком смысле) движений и напряженно-деформированного состояния геодинамических сис-

тем по пространственно-временным рядам геодезических и геофизических наблюдений представлена на рисунке 4.

Концептуальная модель геодинамических объектов строится в виде двух уравнений состояний [7]. При этом $ГДС\Sigma(X,t)$ представлена дискретными пунктами геодезических и геофизических наблюдений.

Первое нелинейное уравнение состояний, моделирующее закономерности движений в широком смысле (траектории) геодинамических объектов, запишем в следующей векторно-разностной форме:

$$X_R(X,t) = F(X,t)\left\{X_R^T(X,t-1), C_\Sigma^T(X,t), I^T(X,t), \Theta^T(X,t)\right\}^T + \\ + B_\Psi(X,t)\Psi(X,t). \quad (1)$$

В (1) $F(X,t)$ $F(X,t)$ – эволюционный оператор геодинамических объектов; $C_\Sigma(X,t)$ $C_\Sigma(X,t)$ – вектор заданных параметров (коэффициентов) модели; $I(X,t)$ $I(X,t)$ – величина в комплексной области (при моделировании комплексных геодинамических объектов с позиций фрактального подхода); $\Theta(X,t)$ $\Theta(X,t)$ и $\Psi(X,t)$ $\Psi(X,t)$ – векторы соответственно детерминированных и стохастических воздействий внешней среды на объект (процесс); $B_\Psi(X,t)$ $B_\Psi(X,t)$ – матрица, отражающая влияние на объект внешних стохастических воздействий, верхний индекс T – символ транспонирования.

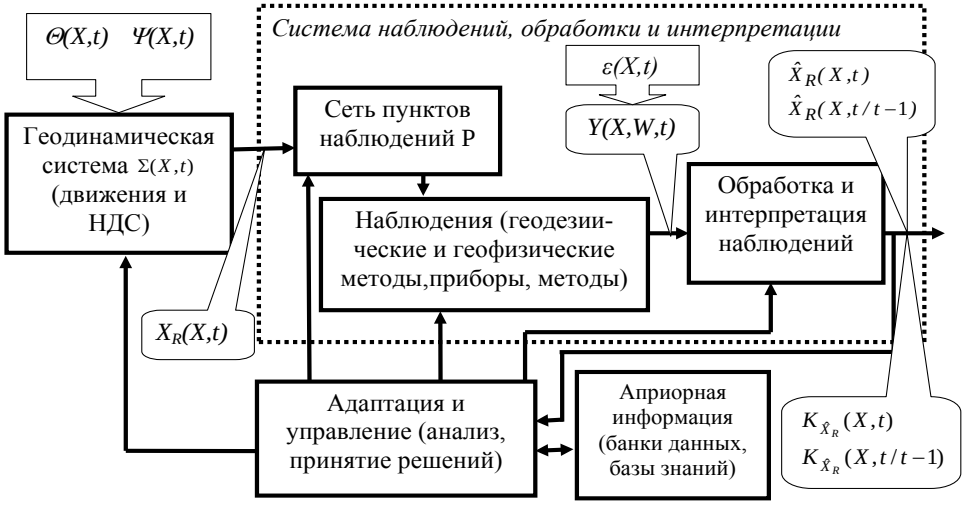


Рис. 4. Структурная схема идентификации геодинамических объектов по пространственно-временным рядам комплексных геодезических и геофизических наблюдений

Заметим, что

$$\left\{X_R^T(X,t), C_\Sigma^T(X,t)\right\}^T = X_\Sigma(X,t); \quad \Theta(X,t) \in \Theta_\Sigma,$$

где Θ_Σ – множество известных (наблюдаемых) входных детерминированных Θ_Σ возмущающих воздействий внешней среды на детерминированную динамическую систему Σ_d в целом, то есть как на объект (процесс, явление), так и на подсистему наблюдений *Y*.

Входящий в (1) расширенный вектор определяемых параметров состояний геодинамических объектов формируется в виде

$$X_R(X,t) = \left[X_i^T\left\{P_i(t)\right\}, W_i^T\left\{P_i(X,t)\right\}, X_D^T(X,t)\right]^T \in X_\Sigma,$$

или, при задании нормального потенциала

$$U_i\left\{P_i(X,t)\right\}, - \quad X_R(X,t) = \left[X_i^T\left\{P_i(t)\right\}, T_i^T\left\{P_i(X,t)\right\}, X_D^T(X,t)\right]^T.$$

Здесь W – потенциал силы тяжести, $T = W - U$ возмущающий потенциал. Вектор параметров движений геодинамических объектов $X_D(X,t)$ формируется в виде

$$X_D(X,t) = \{X_{D(ФПЗ)}^T(X,t), X_{D(ГПЗ)}^T(X,t)\}^T,$$

где $X_{D(ФПЗ)}(X,t)$ – вектор параметров движений и деформаций физической поверхности или в общем случае для сплошной среды вектор напряженно-деформированного состояния земной коры (горной породы);

$X_{D(ГПЗ)}(X,t)$ – вектор изменений (вариаций) гравитационного поля.

Второе нелинейное уравнение состояний, моделирующее результаты разнородных комплексных наблюдений в пространстве и времени (множество выходных величин геодинамических объектов), представляющих собой геодезические функционалы на потенциале силы тяжести *W*, запишем в следующем виде

$$Y(X,W,t) = f(X,t)\{X_R^T(X,t),\ C_Y^T(X,t), \Theta_Y^T(X,t)\}^T + \delta_Y(X,W,t), \qquad (2)$$

где $\Theta_Y(X,t)$ – вектор внешних детерминированных воздействий на систему наблюдений;

$C(X,t)$ – известные коэффициенты системы наблюдений;

$\delta_Y(X,W,t)$ – в общем случае коррелированная последовательность случайных ошибок наблюдений с ковариационной матрицей $K_\delta(X,t) = K_Y(X,t)$.

Включение вектора координат $X = X(x, y, z)$ в качестве аргумента в функционал (2) указывает на то, что ряды наблюдений являются не только временными, но и пространственными; при этом на каждом пункте сети наблюдений может производиться измерение нескольких величин (выходных сигналов геодинамических объектов).

Включение в расширенный вектор параметров состояний $X_R(X,t)$ (1) потенциала силы тяжести $W(X,t)$ обусловливает построение бесконечномерных моделей геодинамических систем, описываемых уравнениями состояния (1) и (2). Бесконечномерность моделей вызывает необходимость их аппроксимации конечномерными моделями и, соответственно, усложнение вычислительной реализуемости решения задачи. С целью построения конечномерных моделей геодинамических объектов в пространстве состояний мы с помощью основных операторов физической геодезии переходим от возмущающего потенциала T к его основным трансформантам: аномалии высоты ζ, смешанной аномалии силы тяжести Δg и компонентам гравиметрического уклонения отвеса ξ, η [7].

Многомерные пространственно-временные ряды наблюдений $Y(X,W,t)$ формируются из разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений, отражающих пространственно-временную структуру НДС геодинамических объектов.

В работе [185] для решения задач структурной и параметрической идентификации геодинамических объектов используется адаптивный рекуррентный алгоритм фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ). Уравнения состояний (1) и (2) линеаризуются с целью их оптимального решения по рекуррентному алгоритму линейного фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ) [178].

Алгоритм ФКБ позволяет определять оптимальные в смысле критерия $\min trK_{X_R}(X,t)$ (минимума обобщенной дисперсии) текущие оценки расширенного вектора параметров состояний $\hat{\hat{X}}_R(X,t)$, а также одношаговые прогнозные фоновые оценки (условное математическое ожидание) этого вектора

$$\hat{X}_R^F(X,t/t-1) = F(X,t)\{X_R(X,t-1), C_\Sigma(X,t), \Theta(X,t)\} \qquad (3)$$

с соответствующими ковариационными матрицами $K_{X_R}(X,t), K_{X_R}(X,t/t-1)$.

Здесь строчный индекс $t/t-1$ обозначает одношаговый прогноз на эпоху t по всем наблюдениям до эпохи $t-1$ включительно.

Текущие и одношаговые прогнозные фоновые оценки вектора параметров связаны уравнением:

$$\hat{X}_R(X,t) = \hat{X}_R^F(\hat{X}^F, t/t-1) + \delta X_R^B(\hat{X}^F, t/t-1), \qquad (4)$$

где $\delta X_R^B(*)$ – вариации или аномалии $\hat{X}_R(X,t)$ на фоне $\hat{X}_R^F(*)$.

В дальнейшем для сокращения записи уравнений используются обозначения работы [179]. Так, для величин, полученных по данным только какой-либо одной эпохи t, приняты обозначения с индексом «t» (например, $Y(X,W,t)$). Для прогнозных фоновых оценок величин, полученных на эпоху t по наблюдениям до эпохи $t-1$ включительно, используется индекс «t^-», то есть принимаются обозначения вида $\hat{X}_R^F(\hat{X}^F, t^-) = \hat{X}_R^F(\hat{X}^F, t/t-1)$. Для оценок, которые будут получены в результате рекуррентной фильтрации наблюдений всех эпох 1.2 ...$t-1$, t, используется индекс «t^+», то есть примем обозначения вида $\hat{X}_R(X,t^+)$.

Рекуррентный алгоритм ФКБ совместного решения систем уравнений состояний (1) и (2) после их линеаризации при таких обозначениях (и опуская для простоты записи все аргументы, кроме t, t^-, t^+) имеет следующий вид [179]:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{X}_R(t^+) = \hat{X}_R(t^-) + G(t^-)\Delta Y(t^-);\\
&\hat{X}_R(t^-) = F_{X_R}^F \hat{X}_R(t-1);\\
&\Delta Y(t^-) = Y(t) - \hat{Y}^F(t^-);\\
&G(t^-) = K_{X_R}(t^-)A^T(t^-)K_V^{-1}(t^-);\\
&K_{\Delta Y}(t^-) = A(t^-)K_{X_R}(t^-)A^T(t^-) + K_Y(t);\\
&K_{X_R}(t^-) = \Phi(t,t-1)K_{X_R}(t-1)\Phi^T(t,t-1) + \Gamma(t)K_{\varpi}(t)\Gamma^T(t);\\
&K_{X_R}(t^+) = [E - G(t^-)A(t^-)]K_{X_R}(t^-).
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $\Delta Y(t^-) = Y(t) - f\hat{X}_R^F(t^-) = Y(t) - \hat{Y}^F(t^-)$ – невязки наблюдений или аномалии геодезических функционалов $Y(t)$ в пространстве состояний;

$K_{\Delta Y}(t^-)$, $K_{X_R}(t^-)$ и $K_{X_R}(t^+)$ – ковариационные матрицы оценок соответственно вектора невязок наблюдений, прогнозного расширенного вектора параметров состояний и текущего расширенного вектора параметров состояний;

Ф и A – переходные матрицы, полученные при линеаризации соответственно (1) и (2);

E – единичная матрица.

Использование алгоритма ФКБ для рекуррентной обработки результатов наблюдений в виде пространственно-временных моделей состояния снимает такие ограничения на систему наблюдений как равновременность циклов наблюдений и неизменность конструкции сети пунктов наблюдений. Рекуррентный характер ФКБ делает его оперативным и удобным математическим аппаратом при создании автоматизированных систем обработки и интерпретации результатов наблюдений с использованием современных вычислительных средств. Алгоритм ФКБ, являясь динамической системой, обеспечивает накопление информации о динамике объекта, и как следствие этого, повышает точность оценивания параметров состояния.

Оценивание $\{\rho(*)\}^2$ при последовательной обработке наблюдений нескольких эпох выполняется с использованием всех измерений до последней эпохи включительно по рекуррентной формуле, позволяющей в ходе обработки накапливать информацию:

$$\{\mu_\Sigma(t)\}^2 = \frac{\{\mu_\Sigma(t)\}^2 \nu_\Sigma(t-1) + \{\hat{V}(t/t-1)\}^T \{Q_{X_R}(t/t-1)\}^{-1} \hat{V}(t/t-1)}{\nu_\Sigma(t)}, \quad (6)$$

где $\nu_\Sigma(t) = \nu_\Sigma(t-1) + \nu(t)$, $\nu_\Sigma(t)$ и $\nu_\Sigma(t-1)$ – числа степеней свободы, равные общему числу избыточных измерений соответственно до эпох t и $t-1$ включительно;

$\nu(t)$ – число избыточных измерений эпохи t.

Использование алгоритма ФКБ также позволяет оптимизировать систему наблюдений за геодинамическими объектами с учетом модели движения [83-86].

1.3 Технологии мониторинга движений и напряженно-деформированного состояния геодинамических объектов

Идентификация геодинамических процессов и объектов (природно-технических систем) должна выполняться в мониторинговом режиме. В этом направлении ведутся активные исследования. В работе [269] говорится, что геодезический мониторинг должен охватывать: геодезические, инженерно-гравиметрические, картографические и другие натурные наблюдения за пространственно-временными изменениями поведения и состояния исследуемых природно-технических систем.

Методы картографирования, визуализации данных об различных опасных для человека явлений, в том числе геодинамических, дан в книге [269], Высокоточные геодезические методы активно используют для мониторинга деформационных процессов в зонах ведения крупномасштабных горных работ.

1.4 Выводы

Выполненный в разделе обзор публикаций на тему изучения геодинамических объектов и процессов подтверждает актуальность данной проблемы.

Являясь сложными, геодинамические процессы и объекты должны изучаться комплексно. При их идентификации должны учитываться разрывы и неоднородности в земной коре, ее блоковая структура, иерархичность и фрактальность ее строения. Ведутся исследования о влиянии на поля напряжений возможных пульсаций Земли, циклов солнечной активности. Нелинейность поведения геодинамических объектов также определяет сложность решения проблемы изучения природных и техногенных геодинамических объектов различного масштабного уровня.

С бурным развитием новейших средств измерений, спутниковых, прежде всего, связывают надежды на повышение эффективности экспериментальных исследований. В настоящее время GPS-наблюдения во всем мире активно применяются, в частности, при определении деформаций и для изучения деформационных предвестников землетрясений. Для локальных геодинамических объектов, на стыках плит, блоков можно выполнять угловые и линейные измерения (с расстояниями между пунктами до 8 км) с использованием тахеометров, обеспечивающих точность измерения углов не грубее 0.5″, расстояний – 1-2 ppm. Незаменимыми остаются геометрическое нивелирование и гравиметрические наблюдения. И в связи с этим актуален вопрос ком-

плексного и корректного анализа разнородных наблюдений, их совместной математической обработки. Обоснована необходимость учета динамики объекта мониторинга при анализе геодезических измерений, а также возможность совершенствования теории и методов анализа геодезических измерений.

Комплексное изучение геодинамических процессов необходимо, при инженерно-геологическом обосновании проектирования, строительства и эксплуатации сооружений и территорий, защитных инженерных мероприятий и охраны среды. В строительном деле объектами, деформации которых необходимо наблюдать и контролировать, являются автомобильные и железные дороги, мосты, аэродромы, жилые и промышленные здания, подземные сооружения, трубопроводы, каналы (судоходные, ирригационные и водоводные), подземные промышленные объекты, резервуары для хранения нефти и нефтепродуктов. В горном деле такими объектами являются шахтные разработки, открытые разработки (карьеры), места извлечения (откачки) жидких полезных ископаемых, газа.

Приводятся примеры комплексного анализа временных рядов разнородных наблюдений. При изучении глубинной геодинамики признаны наиболее информативными результаты наблюдений гравитационного, геомагнитного полей и движений земной коры.

Когда изменения ускорения силы тяжести сопоставимы с точностями гравиметров, важно помнить о строгом подходе к интерпретации вертикальных смещений и изменений ускорения силы тяжести. Такие ситуации возникают в районах плотин ГЭС, при изменения уровня водохранилища. Примерами перемещений больших масс являются также извержение вулкана и процесс подготовки извержения, горные разработки. В этих случаях также необходима строгая математическая обработка и интерпретация разнородных наблюдений.

Изучение геодинамических объектов и процессов должны выполняться в мониторинговом режиме. В настоящее время создаются системы деформационного мониторинга, обеспечивающей непрерывное наблюдение за процессами движений породного массива при отработке месторождений, для непрерывного контроля удароопасности угольных и рудных месторождений. Активно используются различные геоинформационные системы. Признаются высокие мониторинговые возможности спутникового метода определения координат для геодинамических исследований различного масштаба.

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в той, которая не имеет связи с математикой.

Леонардо да Винчи

2 ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОЖНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

2.1 Теоретические и математические основы расчета напряженно-деформированного состояния

В настоящее время, как в России, так и за рубежом, при решении многих задач геомеханики, геофизики, сейсмологии используются модели механики сплошных сред [196] в рамках теории упругости [32]. Теория упругости – теоретическая основа расчётов на прочность, деформируемость и устойчивость. Объектами исследования методами теории упругости являются, в частности, горные массивы, плотины, геологические структуры, находящиеся под действием эндогенных и экзогенных сил, температурных полей и др. воздействий. В результате расчётов методами теории упругости определяются допустимые нагрузки, при которых в рассчитываемом объекте не возникают напряжения или перемещения, опасных в смысле потери данным объектом устойчивости.

Теорию упругости подразделяют на классическую, линейную и нелинейную. Более общий характер имеет нелинейная теория упругости.

Физические законы упругости материалов, надёжно проверенные экспериментально и имеющие место для большинства материалов, по крайней мере, при малых (а иногда и очень больших) деформациях, отражают взаимно однозначные зависимости между текущими (мгновенными) значениями напряжений σ и деформаций ε. В этом физические законы упругости отличаются от законов пластичности, в которых напряжения зависят от процесса изменения деформаций (при одних и тех же деформациях, достигнутых путём различных процессов, напряжения различны).

Например, согласно физическим законам упругости при растяжении цилиндрического образца длины l, радиуса r, с площадью поперечного сечения S имеет место пропорциональность между растягивающей силой F, продольным удлинением образца Δl и поперечным удлинением Δr. Эта пропорциональность выражается равенствами:

$\sigma_1 = E\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$, где $\sigma_1 = S/F$ – нормальное напряжение в поперечном сечении, $\varepsilon_1 = \Delta l/l$ – относительное удлинение образца, $\varepsilon_2 = \Delta r/r$ – относительное изменение поперечного размера; E – модуль Юнга (модуль продольной упругости), ν – коэффициент Пуассона.

Напряжение в любой точке тела характеризуется шестью величинами – компонентами напряжений: нормальными напряжениями σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} и касательными напряжениями σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx}. При этом $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ и т.д. Деформация в любой точке тела также характеризуется шестью величинами – компонентами деформаций: относительными удлинениями ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} и сдвигами ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{zx}. При этом $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ и т.д.

Основным физическим законом теории упругости является обобщённый закон Гука, согласно которому нормальные напряжения линейно зависят от деформаций. Для изотропных материалов эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx} = 3\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{xx}, \sigma_{yy} = 3\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{yy}, \sigma_{zz} = 3\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\ &\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}, \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ – средняя (гидростатическая) деформация,

λ и μ – постоянные Ламе (величины, характеризующие упругие свойства изотропного материала). Значения этих параметров для различных материалов известны.

Математическая задача теории упругости при равновесии состоит в том, чтобы, зная действующие внешние силы (нагрузки) и граничные условия, определить значения в любой точке тела компоненты напряжений и деформаций, а также компоненты u_x, u_y, u_z вектора перемещения каждой частицы тела в виде функций от декартовых прямоугольных координат *x, y, z* точек тела. Исходными для решения этой задачи являются следующие дифференциальные уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+\rho F_x=0,\\
&\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+\rho F_y=0,\\
&\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\rho F_z=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где ρ – плотность материала,

F_x, F_y, F_z – проекции на координатные оси действующей на каждую частицу тела массовой силы F (например, силы тяжести).

К трём уравнениям равновесия (8) присоединяются 6 равенств (7) в случае изотропного тела и ещё 6 равенств вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}, 2\varepsilon_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}, 2\varepsilon_{xz}=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

устанавливающих зависимости между компонентами деформаций и перемещений.

Когда на часть S_1 граничной поверхности тела действуют заданные поверхностные силы (например, силы контактного взаимодействия), проекции которых, отнесённые к единице площади, равны F_x, F_y, F_z, а для части S_2 этой поверхности заданы перемещения её точек u_x, u_y, u_z, граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xx}\cos(n,x)+\sigma_{xy}\cos(n,y)+\sigma_{xz}\cos(n,z)=F_x,\\
&\sigma_{yx}\cos(n,x)+\sigma_{yy}\cos(n,y)+\sigma_{yz}\cos(n,z)=F_y,\\
&\sigma_{zx}\cos(n,x)+\sigma_{zy}\cos(n,y)+\sigma_{zz}\cos(n,z)=F_z
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

на части граничной поверхности тела S_1.

И для части граничной поверхности тела S_2 граничные условия имеют вид:

$$u_x=\varphi_x,\ u_y=\varphi_y,\ u_z=\varphi_z.. \qquad (11)$$

В уравнениях (10) *cos(n,x), cos(n,y), cos(n,z)* – косинусы углов соответственно между нормалью к поверхности *n* и координатными ося-

ми *x, y, z*. Первые условия означают, что искомые напряжения должны удовлетворять на границе S_1 трём равенствам (10), а вторые – что искомые перемещения должны удовлетворять на границе S_2 равенствам (11). В частном случае может быть $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ (часть поверхности S_2 жестко закреплена). Например, в задаче о равновесии плотины массовой силой считается сила тяжести, поверхность S_2 подошвы плотины неподвижна, на остальной поверхности S_1 действуют такие силы как напор воды, давление различных надстроек, транспортных средств и т.д.

В динамических задачах теории упругости искомые величины являются функциями координат и времени. Исходными для математического решения динамических задач являются дифференциальные уравнения движения Коши, отличающиеся от уравнений (8) тем, что правые части вместо нуля содержат инерционные члены: $\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ для первого уравнения, $\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ для второго уравнения и $\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$ для третьего уравнения системы (8) [38]. К этим исходным уравнениям движения должны также присоединяться уравнения (7), (9) и, кроме граничных условий (10), (11), ещё задаваться начальные условия, определяющие, например, распределение перемещений и скоростей частиц тела в начальный момент времени. К динамическим задачам теории упругости относятся задачи о распространении упругих волн (сейсмические волны и их воздействие на конструкции и сооружения, волны, возникающие при взрывах и ударах, термоупругие волны), задачи о колебаниях конструкций и сооружений, в которых могут определяться формы колебаний и их возможные смены, амплитуды колебаний и их нарастание или убывание во времени, резонансные режимы, динамические напряжения, методы возбуждения и гашения колебаний.

При решении плоских задач теории упругости принимается, что один из компонентов перемещения равен нулю, а два других зависят только от двух координат – $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$, $u_z = 0$. При таком допущении часть уравнений в системах (7) – (11) исчезнет, а оставшиеся в них уравнения будут соответственно упрощены.

2.2 Метод конечных элементов как математический аппарат расчета напряженно-деформированного состояния

Здесь излагается подход к использованию метода конечных элементов [146] для расчета деформаций и напряжений по перемещениям без претензии на первенство его использования. Для исследования геодинамики этот метод был предложен в 1929 году в работе [284]. Затем были работы многих авторов, использующих данный подход, например, работы [52, 71, 72, 102, 103, 113, 116].

В данном разделе излагается алгоритм расчета деформаций и напряжений, который используют строители-проектировщики, когда решение задач теории упругости трудно осуществимо аналитически. Для решения уравнений (7)–(11) в последнее время интенсивно разрабатываются численные методы решения, примером которых является метод конечных элементов [146].

Для выполнения расчёта исследуемой системы устанавливают ее расчётную схему (модель). С этой целью из реальной системы мысленно удаляют элементы, воспринимающие только местные нагрузки и практически не участвующие в работе системы в целом, и получают идеализированную, упрощённую схему (как бы скелет) системы.

При составлении расчетных схем нагрузку, приложенную к небольшим участкам поверхности, заменяют сосредоточенной силой, т.е. силой, приложенной к некоторой точке поверхности. Саму континуальную систему разделяют на так называемые конечные элементы (КЭ), которые соединяются между собой жёсткими или упругими связями. При расчёте систем с разделением их на конечные элементы применяется как метод сил, так и метод перемещений, причём, если выбор метода при расчёте традиционными способами связывался с количеством совместно решаемых уравнений, то с появлением ПК предпочтение, как правило, отдаётся методу перемещений, позволяющему проще определять коэффициенты при неизвестных.

Основное понятие метода конечных элементов, применяемого к структурным исследованиям деформации и напряжений, заключается в том, что непрерывное поле деформируемой системы (объекта) заменяется совокупностью индивидуальных малых компонент конечных размеров, которые соприкасаются только в узловых точках компонент.

Для двумерных динамических систем наиболее часто применяют треугольные или прямоугольные КЭ. Соответственно моделью двумерных систем будет двумерная расчетная схема, т.е. все характеристики двумерной расчетной схемы для системы Ω зависят от двух координат (рисунок 5).

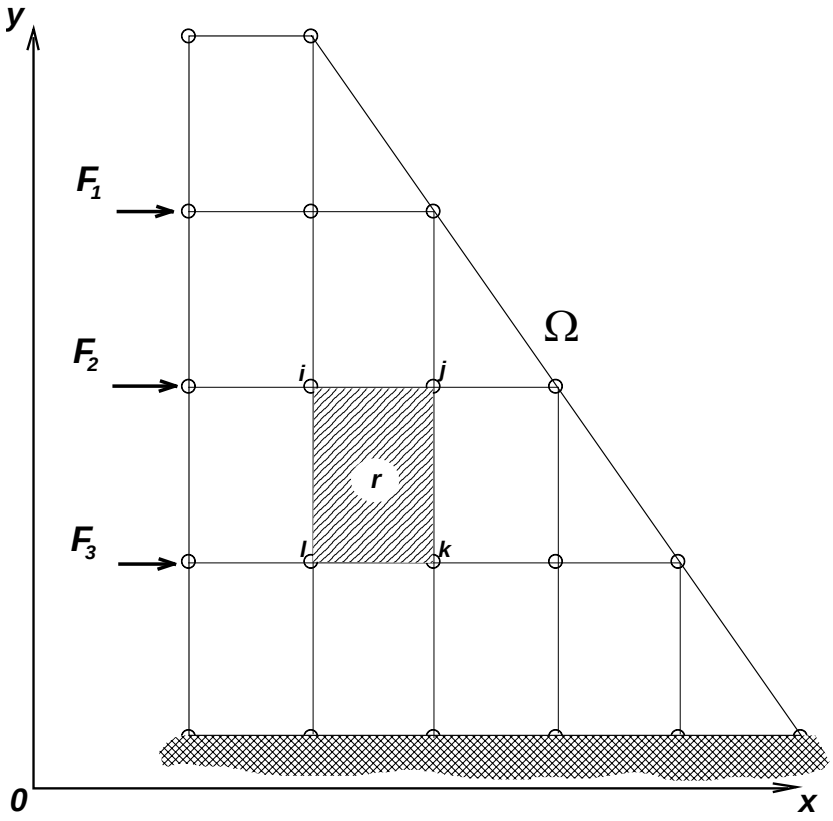
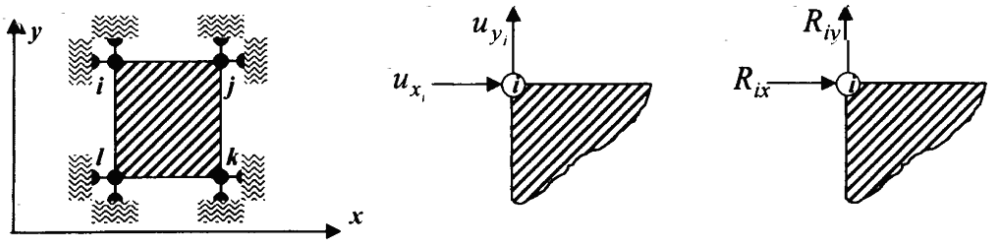


Рис. 5. Расчетная схема системы Ω

КЭ соединены в общих точках – узлах. Узел расчетной схемы может быть общим для нескольких КЭ системы Ω. Выделенный КЭ ***r*** имеет форму прямоугольника, вершины которого совпадают с узлами ***i, j, k, l***.

Каждому отдельному КЭ системы Ω придаются по две связи в каждом узле (рис. 6).



а б в

Рис. 6. Связи (а), перемещения (б), реакции (в)
в узлах прямоугольного КЭ

В узле ***i*** вследствие его перемещений u_{x_i} и u_{y_i} (рисунок 6, б) возникают реакции в дополнительных связях k_{ix} и k_{iy} (рисунок 6, в), выраженные следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} R_{ix} &= k_{11}u_{x_i} + k_{12}u_{y_i} + k_{13}u_{x_j} + k_{14}u_{y_i} + k_{15}u_{x_k} + k_{16}u_{y_k} + k_{17}u_{x_i} + k_{18}u_{y_i}, \\ R_{iy} &= k_{21}u_{x_i} + k_{22}u_{y_i} + k_{23}u_{x_j} + k_{24}u_{y_i} + k_{25}u_{x_k} + k_{26}u_{y_k} + k_{27}u_{x_i} + k_{28}u_{y_i}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где k_{ij} – коэффициенты жесткости. Физический смысл этих коэффициентов понимается как усилие в узле ***i***, возникающее от единичного перемещения по направлению, которое определено индексом ***j***, если все остальные перемещения равны нулю.

Для узлов ***j***, ***k***, ***l*** реакции в дополнительных связях могут быть записаны аналогично (12).

Представим выражения для всех четырех узлов ***i***, ***j***, ***k***, ***l*** (восемь компонентов узловых сил) КЭ ***r*** в матричной форме:

$$R_r = K_r U_r, \quad (13)$$

где вектор узловых реакций (сил) КЭ r

$$R_r = \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \dots \\ R_{iy} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

матрица коэффициентов жесткости КЭ r

$$K_r = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ \dots & \dots & & & & \dots & & \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

вектор перемещений узлов КЭ r

$$U_r = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \dots \\ u_{y_i} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Определение значений коэффициентов матрицы жесткости (15) прямоугольного КЭ начинают с задания вида аппроксимирующих

функций перемещений по области КЭ. Это могут быть полиномы из четырех членов:

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + a_3 y + a_4 xy; \\ u_y(x,y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + a_7 y + a_8 xy. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Система уравнений перемещений для четырех узлов ***i***, ***j***, ***k***, ***l*** с известными координатами x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l и известными или измеренными перемещениями $u_{x_i}, u_{y_i}, u_{x_j}, u_{y_j}, u_{x_k}, u_{y_k}, u_{x_l}, u_{y_l}$ будет состоять из 4 пар линейных уравнений вида (17). Из решения этой системы из восьми уравнений однозначно находятся коэффициенты α_1, α_2,…,α_8,. Это позволяет найти конкретный вид координатных функций $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ в (17). Как только узловые смещения для каждого элемента определены, напряжения соответствующего КЭ в отсутствии начальных деформаций рассчитываются следующим образом:

$$\varepsilon_i = LU_i \qquad (18)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}.. \qquad (19)$$

Связь между напряжениями и деформациями, учитывая свойства материала, можно определить в соответствии с законом Гука следующим образом

$$\sigma_i = D\varepsilon_i, \qquad (20)$$

где D – матрица адаптационной способности (упругости), соответствующая свойствам материала.

Для случая плоского напряженного состояния, матрица D определяется выражением

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Затем можно получить коэффициенты жесткости. Для плоского напряженного состояния они вычисляются так:

$$k_{ij} = h\int_0^a\int_0^b (D\varepsilon_i)^T \varepsilon_j dxdy, \qquad (22)$$

где h – толщина пластины,

a, b – размеры прямоугольного КЭ,

ε_i – (i =1, 2,…, 8) – вектор деформаций (18) по области КЭ в случае, когда узловое перемещение под номером i равно единице, а все остальные степени свободы равны нулю;

ε_j – (j=1, 2,…, 8) – вектор деформаций (18) по области КЭ в случае, когда узловое перемещение под номером j равно единице, а все остальные степени свободы равны нулю.

Аналогично может быть выполнен расчет коэффициентов матрицы жесткости треугольного КЭ. Аппроксимирующие функции перемещений по области треугольного КЭ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ u_y(x,y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Соответственно размерность матрицы жесткости треугольного КЭ будет 6×6.

Когда матрицы жесткости для всех КЭ деформируемого тела будут рассчитаны, общая матрица жесткости области Ω определяется суперпозицией матриц жесткости всех КЭ:

$$K_\Omega = \sum_{r=1}^{n_\varepsilon} T_r^T K_r T_r, \qquad (24)$$

где
$$T_r = \begin{pmatrix} 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0\ldots & 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

В выражениях (24), (25): n_r – количество компонент, n – количество узловых точек, T_r – матрица, которая преобразовывает матрицу жесткости КЭ r в соответствующую этому КЭ часть в общей матрице. T_r имеет размерность $8\times 2n$ для прямоугольного КЭ и $6\times 2n$ для треугольного КЭ матрица. Компоненты T_r – нулевые, если не соблюдает-

ся тождество в $(2i-1, 2n_i-1)$ и $(2i, 2n_i)$ позициях с n_i, $(i=1,2,3,4)$. Для прямоугольного КЭ n_i, $(i=1,2,3,4)$ являются нумерацией четырех узлов, а для треугольного КЭ n_i, $(i=1,2,3)$ является нумерацией трех узлов.

Например, для прямоугольных элементов расчетной схемы системы Ω (рис. 5) матрица T_r имеет размерность – 8×28, а для треугольных элементов – 6×28. Общая матрица жесткости K_Ω будет иметь размерность 28×28. В ее формировании участвует 10 локальных матриц жесткости прямоугольных КЭ и 4 локальные матрицы жесткости треугольных КЭ.

Узловые компоненты внешней нагрузки F на поверхность системы $\boldsymbol{\Omega}$ и уравнения равновесия узловых сил будут связаны как линейные алгебраические уравнения относительно перемещений узлов расчетной схемы – U:

$$F = K_\Omega U\,. \tag{26}$$

В уравнении (26) F – вектор-столбец узловых нагрузок, к которым сведены местные нагрузки, распределенные по системы Ω

$$F = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ .... \\ F_{y_n} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

K_Ω – матрица жесткости для всей системы Ω

$$K_\Omega = \begin{pmatrix} k(u_{x_1},u_{x_1}) & k(u_{x_1},u_{y_1}) & ... & k(u_{x_1},u_{y_n}) \\ k(u_{y_1},u_{x_1}) & k(u_{y_1},u_{y_1}) & ... & k(u_{y_1},u_{y_n}) \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ k(u_{y_n},u_{x_1}) & k(u_{y_n},u_{y_1}) & ... & k(u_{y_n},u_{y_n}) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

U – вектор перемещений n узлов расчетной схемы по системы Ω

$$U = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ .... \\ u_{y_n} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

После вычисления обратной матрицы K_{Ω}^{-1} находим решение системы линейных уравнений (26):

$$U = K_{\Omega}^{-1} F \,. \qquad (30)$$

2.3 Алгоритм определения параметров напряженно-деформированного состояния по расчетным значениям перемещений

Вся поверхность ГДС разбивается на треугольные КЭ (рис. 7).

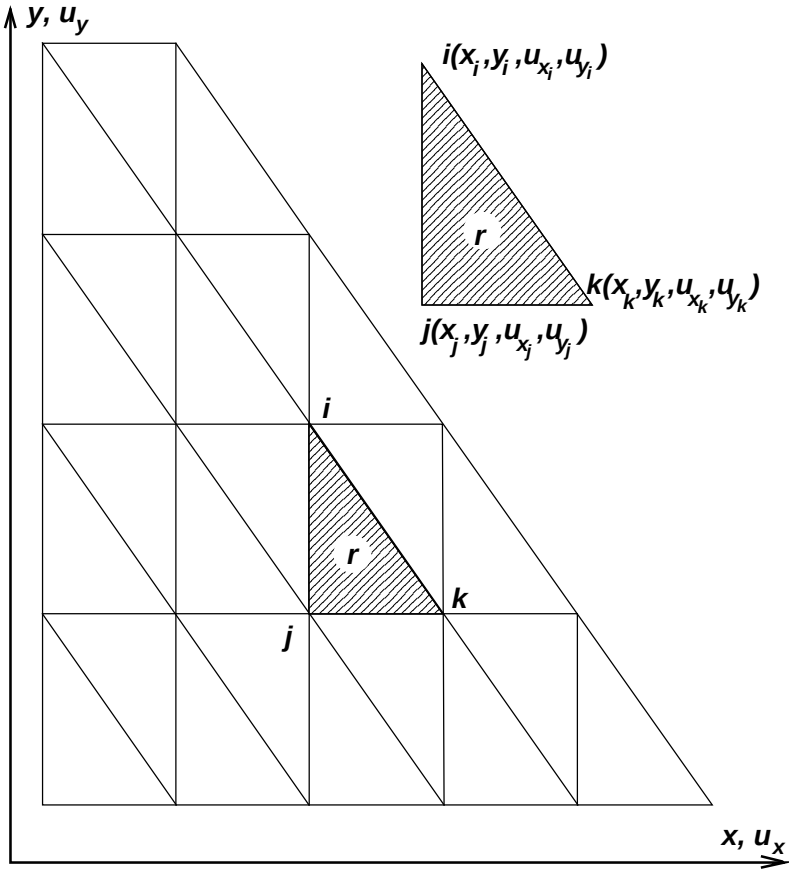


Рис. 7. Разбиение поверхности ГДС на треугольные КЭ

Для каждого КЭ может быть записана своя модель локально-однородной деформации для плоского объекта. Координаты вершин ***i***, ***j***, ***k*** треугольного КЭ ***r*** известны – $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$. Вектор перемещений узлов U рассчитан по уравнению (30). Для всех трех вершин закон деформирования одинаков. Поэтому можно записать:

$$\left.\begin{aligned} u_{x_i} &= e_{10} + e_{11}x_i + e_{12}y_i, \\ u_{y_i} &= e_{20} + e_{21}x_i + e_{22}y_i, \\ u_{x_j} &= e_{10} + e_{11}x_j + e_{12}y_j, \\ u_{y_j} &= e_{20} + e_{21}x_j + e_{22}y_j, \\ u_{x_k} &= e_{10} + e_{11}x_k + e_{12}y_k, \\ u_{y_k} &= e_{20} + e_{21}x_k + e_{22}y_k. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Система (31) состоит из 6-ти линейных уравнений с 6-ю неизвестными – коэффициентами линейной модели перемещений:

$$e = \begin{bmatrix} e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{20} & e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}^T. \qquad (32)$$

Из решения системы (31) эти коэффициенты определяются однозначно:

$$\left.\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2S_r}((u_{x_i} - u_{x_j})(y_i - y_k) - (u_{x_i} - u_{x_k})(y_i - y_j), \\ e_{12} &= -\frac{1}{2S_r}((u_{x_i} - u_{x_j})(x_i - x_k) - (u_{x_i} - u_{x_k})(x_i - x_j), \\ e_{21} &= \frac{1}{2S_r}((u_{y_i} - u_{y_j})(y_i - y_k) - (u_{y_i} - u_{y_k})(y_i - y_j), \\ e_{12} &= -\frac{1}{2S_r}((u_{y_i} - u_{y_j})(x_i - x_k) - (u_{y_i} - u_{y_k})(x_i - x_j), \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} e_{10} &= u_{x_i} - e_{11}x_i - e_{12}y_i, \\ e_{20} &= u_{y_i} - e_{21}x_i - e_{22}y_i, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где S_r – площадь треугольного КЭ ***r***:

$$S_r = \frac{1}{2}((x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)). \qquad (35)$$

Однако нужно помнить, что значения коэффициентов e_{10}, e_{20}, отвечающих за параллельный перенос КЭ, будут зависеть от выбранной системы координат. При расчете напряженно-деформированного состояния эти коэффициенты участия не принимают. Важны другие 4 коэффициента, которые обычно записывают в виде квадратной матрицы – тензора деформации:

$$T = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

В тензоре T выделяются симметричная часть T_ε, отражающая чистую деформацию КЭ ***r***, и кососимметричная часть T_ω, отражающая вращение КЭ ***r*** как абсолютно твердого тела:

$$T = T_\varepsilon + T_\omega, \quad (37)$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{11} & \dfrac{e_{12}+e_{21}}{2} \\ \dfrac{e_{21}+e_{12}}{2} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$T_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{e_{12}-e_{21}}{2} \\ \dfrac{e_{21}-e_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Компоненты тензора деформаций T_ε выделяются в отдельный вектор:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yy} & e_{xy} \end{pmatrix}^T, \quad (40)$$

где $$\varepsilon_{xx} = e_{11}, \varepsilon_{yy} = e_{22}, \varepsilon_{xy} = \frac{e_{12}+e_{21}}{2}. \quad (41)$$

Затем выполняется расчет параметров, характеризующих напряженное состояние объекта. Параметры, характеризующие напряженное состояние объекта, определяются на основе модели теории упругости [203, 134].

Тензор напряжений в отдельном треугольном элементе ***r*** вычисляется в соответствии с формулами закона Гука (7) и формулами Коши (8) по формуле (20) с учетом (21):

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (42)$$

Для оценки НДС для остальных КЭ области Ω вычисления повторяют с координатами и смещениями узловых точек, соответствующих каждому конкретному КЭ.

2.4 Пример изучения напряженно-деформированного состояния сложного инженерного сооружения по геодезическим наблюдениям

В качестве сложного инженерного сооружения выбрана модель плотины, работающая в условиях плоской деформации. Задача сводится к расчету НДС пластины в форме прямоугольной трапеции толщиной 1 метр, как реакции на воздействие давления воды и напора льда. Для аналитического (модельного) расчета смещений узлов вся поверхность пластины Ω была разбита на 10 прямоугольных конечных элементов (КЭ) размерами 5.6 м (вдоль оси x) и 8 м (вдоль оси y) и 4 треугольных конечных элемента с катетами 8м и 5.6м (рис. 8). Граничное условие задачи – точки 15–20 пластины считаются неподвижными.

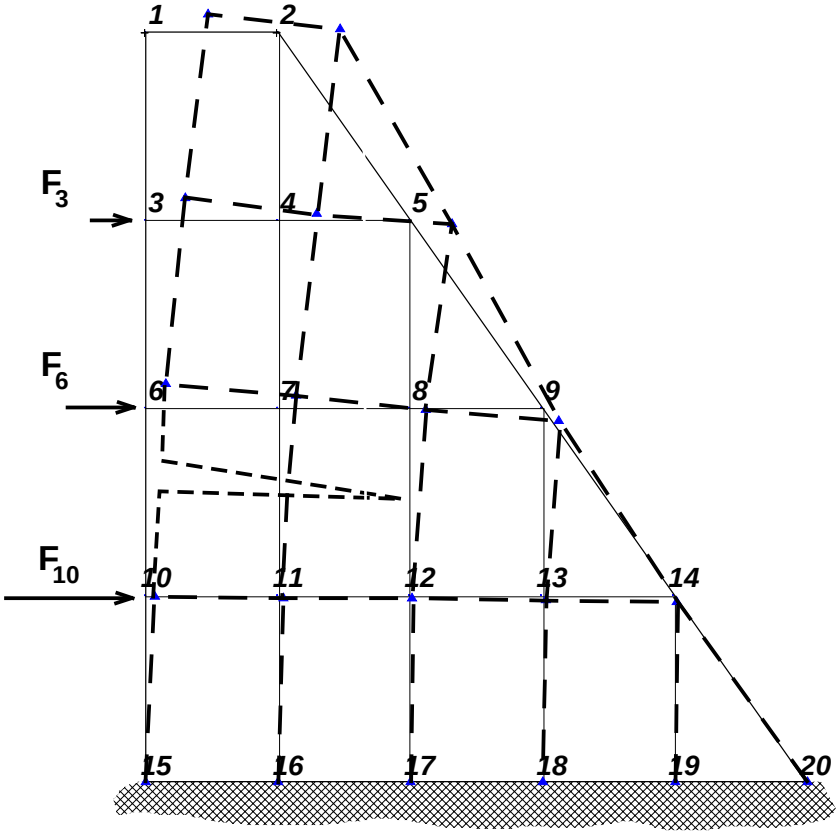


Рис. 8. Модель геодинамического объекта – плоская пластина

Направления векторов сил возмущающих внешних воздействий составляют 90 градусов к боковой стороне и лежат в плоскости пластины. Значения этих сил в период между первым и вторым циклами

следующие: $F_3 = 0.3067$ МН, $F_6 = 0.64$ МН, $F_{10} = 1.28$ МН. В период между вторым и третьим циклами по прогнозу ожидается увеличение значений сил на 25%. Упругие свойства материала при малых деформациях выражены через модуль Юнга $E = 0.2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0.293$. При моделировании структуры ГДС нами была введена трещина в средней части пластины. Штриховыми линиями на рисунке 1 показано (в условном масштабе) перемещение пластины после воздействия сил F_3, F_6, F_{10}.

Для вычисления элементов матриц жесткости использованы формулы (22), (24). Общая матрица жесткости K_Ω (приложение 1) определяется суперпозицией матриц жесткости для всех КЭ. Но так как мы предположили при моделировании НДС данной ГДС наличие трещины (рис. 8), при составлении общей матрицы жесткости всей ГДС не были учтены матрицы жесткости двух прямоугольных КЭ, которые перекрывают зону трещины.

Модельные смещения узловых точек определяются из соотношения (30): В соответствии со вторым уравнением состояния (2) была смоделирована сеть геодезических наблюдений (рис. 9).

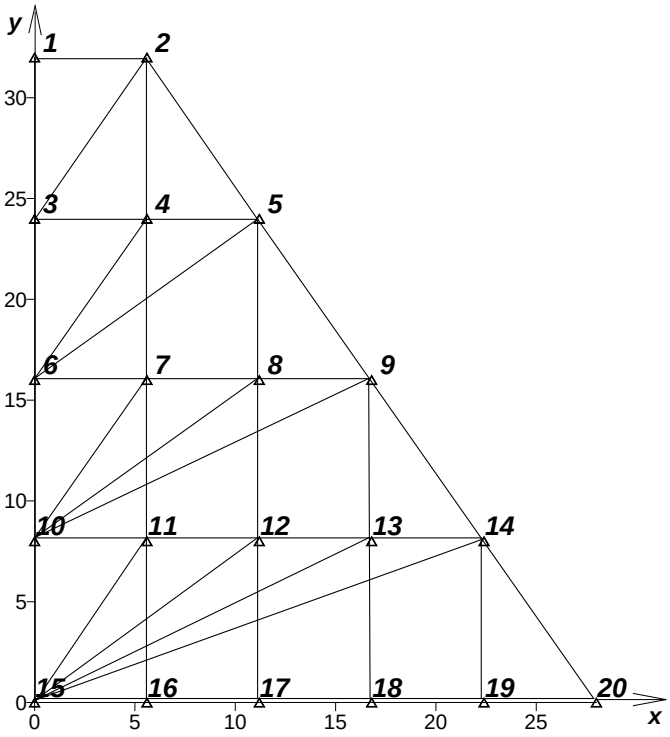


Рис. 9. Сеть геодезических наблюдений

Моделирование пространственно-временных рядов геодезических наблюдений заключалось в моделировании 3-х циклов наблюдений длин линий между узловыми точками ГДС 1 – 2, 1 – 3, …. 15 – 11, 15 – 12 и т. д. Число измеренных длин линий в каждом из циклов наблюдений равно 38; общее число измерений в трех циклах – 114. Затем по координатам пунктов каждого цикла были определены «идеальные» значения длин линий. Исказив их псевдослучайными нормально распределенными ошибками, получили смоделированные результаты измерений. Средняя квадратическая ошибка модельных результатов измерений длин линий была задана $m_s = 0.2$ мм. Заметим, что в настоящее время такая точность измерений в инженерной геодезии является вполне достижимой.

Система идентификации (моделирования) движений и НДС включает подсистему математической обработки и интерпретации пространственно-временных рядов наблюдений за динамическим объектом по алгоритму адаптивного рекуррентного фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ) – формулы (5). Этот алгоритм оптимален по критерию минимума обобщенной дисперсии, т. е. минимума следа ковариационной матрицы оценок определяемых параметров $\min trK_{XR}(X,t) = \mu^2 Q_{XR}(X,t)$, где μ^2 – дисперсия единицы веса.

Начальную оценку $\hat{X}(t=0)$ вектора состояния в виде прямоугольных координат пунктов

$$\hat{X}(t=0) = [\hat{x}_1(t=0), \hat{y}_1(t=0), ..., \hat{x}_{14}(t=0), \hat{y}_{14}(t=0)]^T . \qquad (43)$$

и ковариационную матрицу этой оценки $K_{\hat{X}}(t=0)$ получим по 28 необходимым измерениям 1-го цикла $y_l(t=1) = s_l$, $(l = 1,2,...,28)$, где l – номер измерения в данном цикле t =1; T – символ транспонирования.

Оценка вектора состояния $\hat{X}(t=1)$ выполняется путем обработки оставшихся избыточных измерений 1 цикла $(l = 29,30,...,38)$. Используемая в алгоритме ФКБ переходная матрица $\Phi(t,t-1)$, имеет вид $\Phi(t=1,t=0) = E$, где E – единичная матрица размерностью 28×28.

В результате обработки и интерпретации по алгоритму ФКБ смоделированных результатов измерений длин линий получаем оценку вектора состояния первого цикла наблюдений $\hat{X}(t=1)$ и ковариационную матрицу оценки этого вектора состояния $K_{\hat{X}}(t=1)$.

При отсутствии априорной информации о характере движения пунктов между циклами наблюдений выполняем обработку наблюде-

ний второго цикла в предположении, что определяемые пункты произвольным образом перемещаются на интервале времени от $t=1$ до $t=2$. В этом случае для точек пластины 1, 2, …, 14 справедливы выражения

$$\left.\begin{aligned} x_i(t=2) &= x_i(t=1)+u_{xi}(t=2);\\ y_i(t=2) &= y_i(t=1)+u_{yi}(t=2). \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Здесь u_{x_i}, u_{y_i} – перемещения пунктов по осям абсцисс и ординат; $i=1,2,...,14$. Формулы (44) определяют вид эволюционного оператора ГДС $\Phi(t,t-1)$ в первом уравнении состояний (1):

$$\Phi(t,t-1)=E\,.$$

Вводим расширенный вектор состояния

$$X_R(t=2)=[X(t=2)^T, U(t=2)^T]^T, \qquad (45)$$

в котором вектор перемещений определяемых пунктов $U(t=2)$ имеет вид

$$U(t=2)=[u_{x1}(t=2), u_{y1}(t=2), \cdots, u_{x14}(t=2), u_{y14}(t=2)]^T. \qquad (46)$$

Так как априорная информация об оценках малых перемещений пунктов отсутствует, то начальное приближение к оценке компонент вектора $U(t=2)$ (46) можно принять равным нулю с ковариационной матрицей $K_U(t=1)=\mu^2 10^7 E$. Таким образом, перед обработкой наблюдений второго цикла имеем расширенный вектор состояния и его ковариационную матрицу в виде

$$\hat{X}_R(t=1)=\begin{bmatrix}\hat{X}(t=1)\\ 0\end{bmatrix}, \quad K_{\hat{X}_R}(t=1)=\begin{bmatrix}K_{\hat{X}}(t=1) & 0\\ 0 & \mu^2 10^7 E\end{bmatrix}. \qquad (47)$$

Оценка дисперсии единицы веса, полученная по невязкам наблюдений, составила $\hat{\mu}(t=1)=0.184$ мм.

Для обработки наблюдений второго цикла $Y_l(t=2)$, $(l=1,2,...,38)$ применяем алгоритм ФКБ с моделью объекта $X_R(t=2)=\Phi(t=2,t=1)X_R(t=1)$. При формировании переходной матрицы $\Phi(t=2,t=1)$ учтем (44), тогда

$$\Phi(t=2,t=1)=\begin{bmatrix}E & E\\ 0 & E\end{bmatrix}.$$

По алгоритму ФКБ получаем оценку расширенного вектора состояния $\hat{X}_R(t=2)$. Ковариационная матрица оценки этого вектора имеет вид

$$K_{\hat{X}_R}(t=2)=\begin{bmatrix} K_{\hat{X}}(t=2) & K_{\hat{X}\hat{U}}(t=2) \\ K_{\hat{X}\hat{U}}(t=2) & K_{\hat{U}}(t=2) \end{bmatrix}. \qquad (48)$$

При этом оценка стандарта или средней квадратической ошибки единицы веса по совокупности измерений двух циклов (56 необходимым и 20 избыточным измерениям) оказалась равной $\hat{\mu}(t=2)=0.232$ мм.

Переходим к определению параметров НДС. Вычисление значений параметров НДС в рамках модели плоской локально-однородной деформации возможно однозначно выполнить по трем точкам с известными координатами и смещениями. Учитывая это, разбиваем поверхность ГДС на 24 треугольных КЭ (рис. 10).

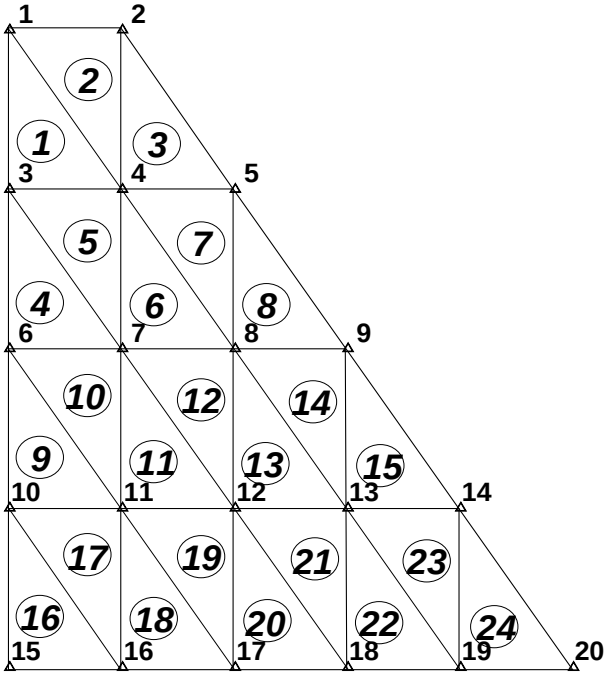


Рис. 10. Разбиение геодинамического объекта на треугольные КЭ

В нашей задаче расширенный вектор параметров состояния $\hat{X}_R(t=2)$ кроме координат включает и оценки перемещений 14-ти узлов разбиения на КЭ – $\hat{U}(t=2)$. Так как точки с 15 по 20 предполагаются в модели неподвижными (граничное условие), вектора их смеще-

ний имеют нулевые компоненты и не входят, таким образом, в число определяемых параметров.

Выбирая из $\hat{X}_R(t=2)$ соответствующие вершинам каждого r-го КЭ оценки координат и смещений, определяем оценки коэффициентов линейной модели перемещений в пределах каждого конечного элемента $\hat{e}(r)=[\hat{e}_{10}(r),\hat{e}_{11}(r),\hat{e}_{12}(r),\hat{e}_{20}(r),\hat{e}_{21}(r),\hat{e}_{22}(r)]^T$, ($r$ = 1, 2,…, 24). По этим оценкам коэффициентов находим оценки компонентов вектора деформации:

$$\hat{\varepsilon}(r)=[\hat{\varepsilon}_{xx}(r),\hat{\varepsilon}_{yy}(r),\hat{\varepsilon}_{xy}(r)]^T, \qquad (49)$$

где $\hat{\varepsilon}_{xx}(r)=\hat{e}_{11}(r)$, $\hat{\varepsilon}_{yy}(r)=\hat{e}_{22}(r)$, $\hat{\varepsilon}_{xy}(r)=\dfrac{\hat{e}_{12}(r)+\hat{e}_{21}(r)}{2}$.

Ранее говорилось, что после публикации в 1929 году о применении метода конечных элементов в геодинамике [281] было множество работ, использующий этот подход. В частности, в работах [56, 71, 72, 89, 90, 113, 116] изложен метод обработки и интерпретации геодезических наблюдений с использованием теории упругости и метода конечных элементов. Даны уравнения наблюдений относительных перемещений и наблюдений, получаемых с помощью тензометра, и приводятся формулы для оценки точности получаемых характеристик напряжений.

Ковариационную матрицу оценки вектора деформаций $\hat{\varepsilon}(r)$ получаем с учетом функциональной зависимости компонентов этого вектора от оценок вектора перемещений треугольного КЭ r с вершинами i, j, k: $\hat{\varepsilon}(r)=F_{\varepsilon(r)}(\hat{U}_r(t=2))$.

Ковариационная матрица $K_{\hat{\varepsilon}(r)}(t=2)$ оценки вектора деформаций находится как

$$K_{\hat{\varepsilon}(r)}(t=2)=f_{\varepsilon(r)}K_{\hat{U}_r}(t=2)f_{\varepsilon(r)}^T, \qquad (50)$$

где $K_{\hat{U}_r}(t=2)$ – ковариационная матрица оценки вектора смещений треугольного КЭ – $\hat{U}_r(t=2)$, элементы которой выбираются из общей матрицы (48). Элементы матрицы $f_{\varepsilon(r)}$ являются частными производными функции $\hat{\varepsilon}(r)=F_{\varepsilon_{(r)}}(\hat{U}_r(t=2))$ по компонентам вектора $\hat{U}_r(t=2)$.

Параметры, характеризующие плоское напряженное состояние объекта, определяются на основе модели теории упругости. Вектор напряжений $\hat{\sigma}(r)=[\hat{\sigma}_{xx}(r),\hat{\sigma}_{yy}(r),\hat{\sigma}_{xy}(r)]^T$ в отдельном треугольном эле-

менте r вычислим в соответствии с формулой (42). Для получения ковариационной матрицы оценки компонентов вектора напряжений конечного элемента r используем ковариационную матрицу (50):

$$K_{\hat{\sigma}(r)}(t=2) = DK_{\hat{\varepsilon}(r)}(t=2)D^T, \qquad (51)$$

где D – матрица адаптационной способности (упругости), в которой для плоской деформации используются условные величины модуля упругости и коэффициента Пуассона.

В соответствии с моделью ГДС (рис. 8) и моделью системы наблюдений в сети по результатам 2-х циклов наблюдений для каждого КЭ были получены оценки элементов вектора деформаций $\hat{\varepsilon}(r)$ и оценки вектора напряжений $\hat{\sigma}(r)$. Оценки $\hat{\varepsilon}(r)$ находятся в интервале от $-1.84*10^{-4}$ до $2.42*10^{-4}$ и характеризуются точностью порядка $9*10^{-6}$. Оценки $\hat{\sigma}(r)$ находятся в интервале от $-1.25*10^{7}$ Па до $5.18*10^{7}$ Па с точностью их определения порядка $2*10^{5}$ Па.

Результаты идентификации НДС ГДС представляем в удобном для анализа экспертом виде – визуализируем с помощью компьютера и соответствующих компьютерных программ.

Если смещения узлов получены по формуле (30) с вектором приложенных сил F, то поля напряжений будут представлены рисунком 11. Вид этих полей, локализация максимальных и минимальных напряжений не позволяют сделать вывод о какой-либо неоднородности, аномалии в структуре исследуемого динамического объекта, например, пустоте или трещине.

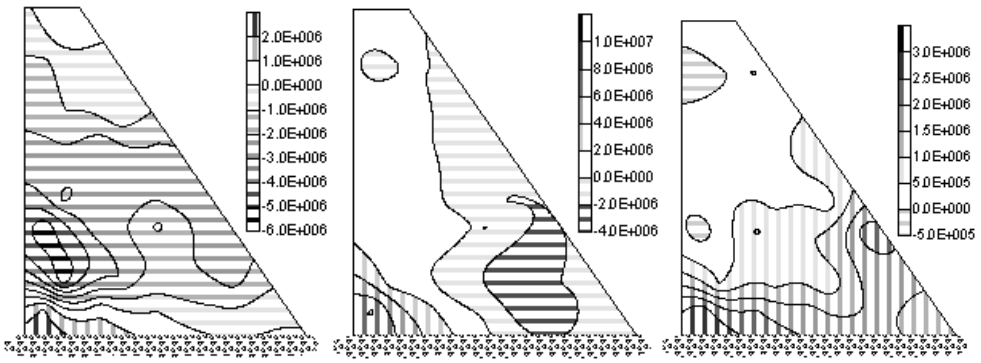


Рис. 11. Поля напряжений ГДС по расчетным значениям перемещений (слева направо – σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}).

Иначе будут изображаться поля напряжений по оценкам компонентов тензоров $\hat{\sigma}$ (рис. 12), которые получены в результате иденти-

фикации напряженно-деформированного состояния пластины по наблюдениям в смоделированной геодезической сети. По этим изображениям экспертно определяется введенная в модель ГДС трещина, ее расположение, протяженность и степень раскрытия берегов, то есть уточняется структура исследуемого объекта.

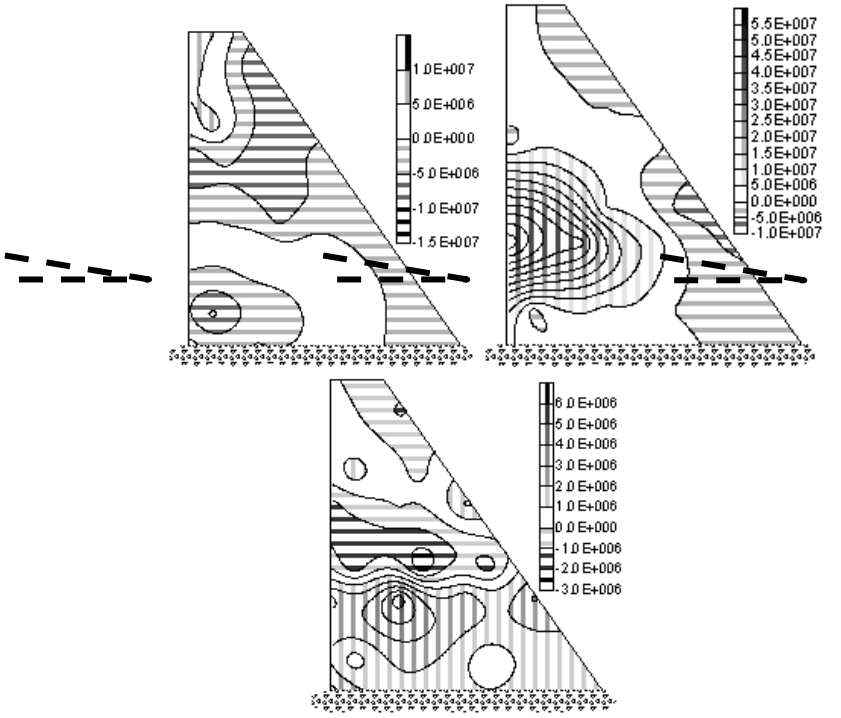


Рис. 12. Поля напряжений ГДС по геодезическим наблюдениям (слева направо – σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}). Штриховой линией показана локализация трещины

Такая визуализация параметров НДС, выполненная в результате обработки и интерпретации натурных геодезических наблюдений на реальных динамических объектах, позволит эксперту существенно уточнять структуру ГДС по сравнению с проектными аналитическими расчетами, в частности, наличие трещин и пустот.

Были найдены прогнозные одношаговые оценки координат узлов и их смещений на цикл $t = 3$ по всем наблюдениям до цикла $t = 2$ включительно $\hat{X}_R(X, t = 3/t = 2)$ с ковариационной матрицей $K_{\hat{X}_R}(X, t = 3/t = 2)$ для ожидаемого по метеорологическим данным в период со 2-го по 3-й цикл увеличения сил на 25%. При этих расчетах

использовалась переходная матрица $\Phi(t=3,t=2)=\begin{bmatrix} E & 0.25E \\ 0 & 0.25E \end{bmatrix}$. После этого с учетом формул (49) – (51) были рассчитаны прогнозные оценки компонентов вектора деформаций $\hat{\varepsilon}(r,t=3/t=2)$, прогнозные оценки компонентов вектора напряжений $\hat{\sigma}(\mathrm{r,t}=3/\mathrm{t}=2)$ для каждого конечного элемента r и выполнена оценка точности этих параметров НДС. В таблице 3 приведены прогнозные оценки параметров НДС на 3-й цикл для треугольного КЭ r=13 с узлами 8, 12 и 13 (рис. 10) для ожидаемого увеличения сил на 25%.

Затем была выполнена обработка геодезических наблюдений третьего цикла. При этом по критерию $\min trK_{XR}(X,t=3)$ для совокупности измерений трех циклов была выполнена адаптация (настройка) модели с использованием фильтра Калмана-Бьюси. В результате было установлено, что в период со 2 по 3 цикл произошло увеличение сил воздействия не на 25%, как прогнозировалось, а на 20% (таблица 2).

Таблица 2

Прогнозное увеличение сил воздействия и соответствующие значения $\hat{\mu}$ и trK_{XR}

Увеличение сил	10%	12.5%	15%	17.5%	**20%**	22.5%	25%
$\hat{\mu}(t{=}3)$ (мм)	0.264	0.232	0.207	0.190	**0.184**	0.188	0.203
$trK_{XR}(X,t=3)$ (мм^2)	2.205	1.795	1.497	1.326	**1.298**	1.432	1.745

В таблице 3 приведены полученные по алгоритму ФКБ (5) прогнозные и текущие оценки параметров НДС и их точностные характеристики на 3-й цикл для треугольного КЭ r=13 с узлами 8, 12 и 13 (рис. 10).

Таблица 3

Прогнозные и текущие оценки параметров НДС в третьем цикле

	$\hat{\varepsilon}_{xx}$	$\hat{\varepsilon}_{yy}$	$\hat{\varepsilon}_{xy}$	$\hat{\sigma}_{xx}$ (Па)	$\hat{\sigma}_{yy}$ (Па)	$\hat{\sigma}_{xy}$ (Па)
Прогнозные (25%)	$3.80*10^{-4}$	$3.57*10^{-5}$	$2.93*10^{-4}$	$1.30*10^{7}$	$4.36*10^{6}$	$3.66*10^{6}$
Точность	$1.21*10^{-5}$	$8.39*10^{-6}$	$1.16*10^{-5}$	$4.15*10^{5}$	$3.04*10^{5}$	$1.46*10^{5}$
Прогнозные (20%)	$3.66*10^{-4}$	$3.58*10^{-5}$	$2.81*10^{-4}$	$1.25*10^{7}$	$4.25*10^{6}$	$3.51*10^{6}$
Точность	$9.70*10^{-6}$	$6.71*10^{-6}$	$9.31*10^{-6}$	$3.32*10^{5}$	$2.43*10^{5}$	$1.16*10^{5}$
Текущие	$3.64*10^{-4}$	$3.33*10^{-5}$	$2.79*10^{-4}$	$1.24*10^{7}$	$4.14*10^{6}$	$3.49*10^{6}$
Точность	$7.08*10^{-6}$	$5.22*10^{-6}$	$6.83*10^{-6}$	$2.43*10^{5}$	$1.88*10^{5}$	$8.54*10^{4}$

2.5 Выводы

В разделе была описана теория метода и алгоритм математического моделирования и идентификации движений и напряженно-деформированного состояния (НДС) сооружений и объектов инженерной геодинамики по пространственно-временным рядам комплексных геодезических и геофизических наблюдений. В основе алгоритма лежат методы теории упругости и идентификации динамических систем с пространством состояний по многомерным временным рядам наблюдений. Методами теории упругости определяются напряженно-деформированное состояние (НДС) идеализированных моделей сплошной среды и простейших конфигураций изучаемых областей, горных массивов, плотин, геологических структур, испытывающих силовые, температурные, кинематические и др. воздействия, а также допустимые нагрузки, при которых в рассчитываемом объекте не возникают напряжения или перемещения, опасные с эксплуатационной точки зрения.

Как правило, при усложнении структуры и состава ГДС выполняют дискретизацию континуальной модели на базе метода конечных элементов (МКЭ). Изучаемое тело разбивают на совокупность конечных элементов (КЭ), например треугольников. Для каждого элемента поле перемещений описывается линейной интерполяционной моделью. Для упругой стадии деформирования возможно описание, линейно связывающее компоненты нагрузки и перемещения узлов расчетной схемы.

В качестве адекватного математического аппарата для решения задачи математического моделирования и идентификации движений и НДС сооружений выбран адаптивный рекуррентный фильтр Калмана-Бьюси (ФКБ) оптимальный по критерию минимума обобщенной дисперсии оцениваемых параметров. Этот математический аппарат позволяет разработать современную информационную технологию оптимальной математической обработки и интерпретации пространственно-временных рядов комплексных геодезических и геофизических наблюдений за динамическими объектами.

В процессе рекуррентной математической обработки и интерпретации наблюдений по ФКБ определяются текущие и одношаговые прогнозные оценки параметров движений и НДС и их характеристики точности в форме ковариационных матриц. Это позволяет не только иметь информацию о надежности оценок определяемых динамических параметров, но и объективно выбирать адекватную структуру модели динамики объекта. Предлагаемый подход позволяет выполнять управ-

ление системой наблюдений, моделированием и идентификацией динамического процесса. Информация о состоянии динамического объекта может быть использована и для управления объектом в аспекте снижения степени риска и последствий природных и техногенных катастроф.

Предлагаемый подход позволяет выполнять моделирование и геодинамических объектов не только по однородным геодезическим наблюдениям, но и по разнородным комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям, как в двумерном, так и в трехмерном пространстве.

Описана методика и вычислительный эксперимент определения по трем циклам (эпохам) пространственно-временных рядов геодезических наблюдений параметров движений и напряженно-деформированного состояния (НДС) локального геодинамического объекта (ГО) с оценкой точности их определения. В качестве локального ГО выбрана модель плотины, работающая в условиях плоской деформации. Выполненный сравнительный анализ методов определения НДС по действующим силам (аналитические, проектные расчеты НДС) и геодезическим наблюдениям в пространстве и времени приводит к выводу о необходимости совместного использования этих методов. При этом аналитические (проектные) расчеты НДС, выполненные по информации о возмущающих силах и априорных физических свойствах объекта, контролируются и настраиваются (корректируются) в процессе строительства и эксплуатации инженерных сооружений по натурным геодезическим наблюдениям в пространстве и времени.

Здравый смысл говорит нам, что Земля плоская.

Альберт Эйнштейн

3 МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ И ВАРИАЦИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

3.1 Построение физико-математической модели динамики земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области

В книге [190] в аспекте проблемы идентификации геодинамических систем (ГДС) дана теория метода и математическое обеспечение решения задачи совместной математической обработки и интерпретации пространственно-временных рядов комплексных нивелирных и гравиметрических наблюдений; при этом для сокращения размерности задачи в определяемые параметры вектора состояний вводятся масконы (mass concentration) – аномалиеобразующие тела (АОТ) [51, 92-94, 97-101, 104-106, 112, 113, 116, 136], как функции пространственных координат и времени. С помощью таких масконов выполняется аппроксимация гравитационного поля в пространстве и времени.

Для разработки методики решения задачи совместной математической обработки и пространственно-временной интерпретации результатов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений была построена модель вертикальных движений и временных вариаций гравитационного поля, аномалии которого аппроксимируются в пространстве и времени двумя масконами – глубинным и поверхностным.

В качестве физической модели геодинамического объекта был выбран локальный участок на земной поверхности, расположенный в области действующего вулкана (рис. 13) работы [93, 97-101]. Система наблюдений за геодинамическим объектом включает нивелирные и гравиметрические наблюдения в пространстве и времени.

Исследуемую поверхность вулканической области и сеть нивелирования для наблюдения за вертикальными движениями можно также представить псевдофотографией вулкана (рис. 14).

Нивелирная сеть состоит из двух условностабильных пунктов (реперов) С1 и С2 (их взаимное положение со временем не меняется) и трех мобильных пунктов М1, М2 и М3.

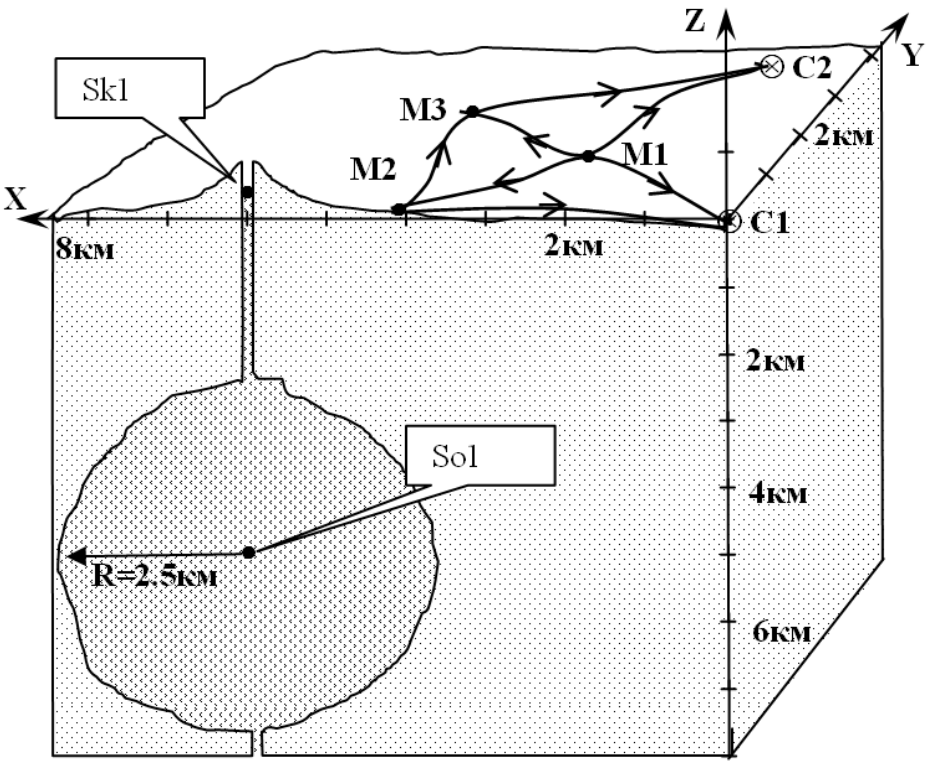


Рис. 13. Физическая модель геодинамического объекта
и системы наблюдений

При моделировании движений физической поверхности и изменения гравитационного поля Земли из множеств параметров состояний выделим следующие множества (векторы параметров состояний), которые необходимо будет определить в процессе математической обработки:

$X_i\{P_i(X,t)\}$ – вектор пространственных координат пунктов $P_i(t)$ сети наблю $X_i\{P_i(X,t)\}$ дений в дискретные моменты времени (эпохи) t =1,2,…, i =1,2,…,N;

$W_i\{P_i(X,t)\}$ – вектор внешнего потенциала силы тяжести в тех же пунктах или, при задании нормального потенциала, $U_i\{P_i(X,t)\}$ вектор возмущающего потенциала $T_i\{P_i(X,t)\}$;

$X_D(X,t)$ – вектор параметров движений в широком смысле (изменений как геометрических, так и физических параметров).

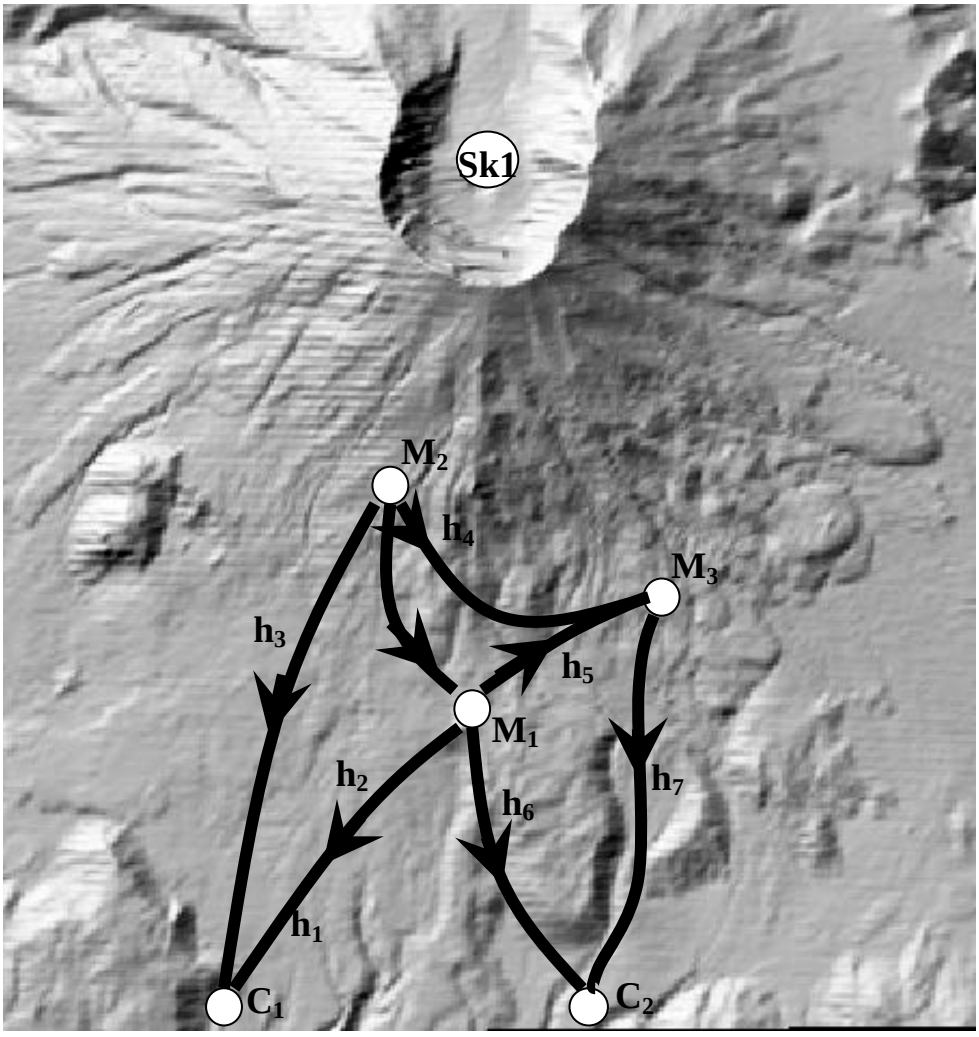


Рис. 14. Схема сети геодезических наблюдений
в вулканической области

Из перечисленных выше векторов формируется так называемый расширенный вектор определяемых параметров состояний геодинамического объекта:

$$X_R(X,t)=\left[X_i^T\left\{P_i(t)\right\},W_i^T\left\{P_i(X,t)\right\},X_D^T(X,t)\right]^T\in X_\Sigma \qquad (52)$$

или, при задании нормального потенциала $U_i\left\{P_i(X,t)\right\}$, –

$$X_R(X,t)=\left[X_i^T\left\{P_i(t)\right\},T_i^T\left\{P_i(X,t)\right\},X_D^T(X,t)\right]^T, \qquad (53)$$

где $T_i\{P_i(X,t)\}$ – возмущающий потенциал; верхний индекс *T*- символ транспонирования.

Входящий в (52), (53) вектор $X_D(X,t)$ формируется в следующем виде:

$$X_D(X,t)=\left\{X^T_{D(ФПЗ)}, X^T_{D(ВГПЗ)}(X,t)\right\}^T, \qquad (54)$$

где $X_{D(ФПЗ)}(X,t)$ – вектор параметров движений и деформаций физической поверхности Земли или, в общем случае, вектор параметров напряженно-деформированного состояния земной коры (горных пород);

$X_{D(ВГПЗ)}$ – вектор параметров изменений (вариаций) во времени внешнего гравитационного поля Земли.

Для построения конечномерных моделей с пространством состояний переходим от возмущающего потенциала $T_i\{P_i(X,t)\}$ к его основным трансформантам в пространстве и времени:

$$q_i\{P_i(X,t)\}=\left[\Delta g_i^T\{P_i(X,t)\}, \xi_i^T\{P_i(X,t)\}, \eta_i^T\{P_i(X,t)\}, \zeta_i^T\{P_i(X,t)\}\right]^T \qquad (55)$$

где Δg, ξ, η, ζ – соответственно, аномалии силы тяжести, компоненты уклонения отвесной линии, аномалии высот.

Пусть в состав разнородных комплексных наблюдений $Y(X,W,t)$ за геодинамической системой (объектом, процессом, явлением) входят измерения превышений $h_{ij}(X,W,t)$ методом геометрического нивелирования в моменты времени (эпохи) $t=1,2,...$ между пунктами (реперами) сети наблюдений на ФПЗ $P_i(X_i,W_i,t)\in ФПЗ$ и $P_j(X_j,W_j,t)\in ФПЗ$, $i, j=1,2,...,N$.

Наблюдаемые превышения $h_{ij}(X,W,t)$ могут быть представлены пространственно-временными геодезическими функционалами высот (геодезических, нормальных, ортометрических) и соответствующих основных трансформант $q\{P(T,X,t)\}$ возмущающего потенциала $T\{P(X,t)\}$.

Линейную модель пространственно-временных рядов результатов измерений превышений в гравитационном поле Земли представим в следующем виде [7]:

$$h_{ij}(X,W,t) = H_j(X,t) - H_i(X,t) + \left[\xi_{ij}^m(X,t) + \Delta\xi_{ij}^m\right]\Delta x_{ij}(X,t) + \\ + \left[\eta_{ij}^m(X,t) + \Delta\eta_{ij}^m\right]\Delta y_{ij}(X,t) + \varepsilon_h(x,W,t), i, j = 1,2,..., \quad (56)$$

где $\varepsilon_h(X,W,t)$ – ошибки наблюдений превышений;

$\Delta x_{ij}(X,t) = x_j(t) - x_i(t); \Delta y_{ij}(X,t) = y_j(t) - y_i(t)$ – приращения координат.

При моделировании абсолютных наблюдений силы тяжести, принимается, что в вектор параметров состояния геодинамического объекта, включены ускорения силы тяжести $g_i\left\{P_i(X_i,W_i,t)\right\}$ на пунктах сети наблюдений $P_i(X_i,W_i,t)$ где $X = (x,y,H)$, $i = 1,2,...,N$, $t = 1,2,...$

Модель пространственно-временных рядов абсолютных наблюдений силы тяжести строится в следующем виде:

$$g_i\left\{P_i(X,W,t)\right\} = \hat{g}_i^F\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,\hat{W}_i^F,t^-)\right\} - \\ - \frac{\partial\gamma_i}{\partial H}\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,\hat{U}_i^F,t^-)\right\}\delta H_i^B\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,t^-)\right\} + \quad (57) \\ + \delta g_i^B\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,\hat{W}_i^F,t^-)\right\}\delta W + \varepsilon_g(X,W,t)$$

В (57) $\hat{g}_i^F\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,\hat{W}_i^F,t^-)\right\}$ – счислимая одношаговая прогнозная оценка фона наблюдаемой силы тяжести на эпоху t по всем наблюдениям до эпохи $t-1$ включительно;

$\frac{\partial\gamma_i}{\partial H}\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,\hat{U}_i^F,t^-)\right\}\delta H_i^B\left\{P_i^F(\hat{X}_i^F,t^-)\right\}$ - вертикальный градиент нормальной силы тяжести;

$\varepsilon_g(X,W,t)$ – ошибки наблюдений силы тяжести.

Для составления общей системы уравнений разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений, которые были бы связаны общими параметрами, принят подход, который заключается в использовании понятий аномалиеобразующих тел (АОТ), масконов и точечных масс при аппроксимации аномального гравитационного поля.

Сущность его состоит в следующем: аномальное гравитационное поле в пространстве и времени, представленное возмущающим потенциалом $T\left\{P(X,t)\right\}$ или его основными трансформантами

$q\{P(X,W,t)\} = q\{P(X,T,t)\}$ и их вариациями $\delta q\{P(X,T,t)\}$, аппроксимируется комбинациями простых распределений масконов (АОТ) и их вариаций $M_k\{O_k(X,t)\}$, $k = 1,2,...,S$ $\delta M_k\{O_k(X,t)\}$ [7].

Для составления общей системы разнородных наблюдений $Y(X,W,t)$ и аппроксимации ГПЗ совокупностью аномальных масс (масконов) $M(X,t)$ переходят к представлению расширенного вектора параметров геодинамического объекта $X_R(X,t)$ в следующем виде:

$$X_R(X,t) = \left[X_i^T\{P_i(t)\}, M_k^T\{O_k(X,t)\}\, X_D^T(X,t) \right]^T. \qquad (58)$$

Вектор координированных масконов, входящий в определяемые параметры расширенного вектора ГДС, позволяет существенно сократить размерность задачи, так как размерность вектора параметров M_k, $k = 1,2,...,S$ существенно меньше, чем, если бы в определяемые параметры входил вектор основных трансформант возмущающего потенциала силы тяжести q_i, $i = 1,2,...,N$, у которого размерность намного больше.

В нашем примере изменение гравитационного поля на локальном участке местности характеризуется деятельностью ближайшего вулкана, иначе говоря, перемещением аномальных масс вдоль подводящего канала от зоны образования магмы до магматической камеры, заполнением камеры и выходом магмы на поверхность при извержении вулкана (формирование его конуса). Значения составляющих уклонений отвесных линий можно выразить через аномальные массы и координаты центров масс.

С учетом этого математическую модель состояний геодинамической системы (Рисунок 13) без учета детерминированных и стохастических воздействий внешней среды [7] представим уравнением

$$X_R(t) = \Phi(t,t-1)X_R(t-1), \qquad (59)$$

где $X_R(t)$ – расширенный вектор определяемых параметров состояния геодинамической системы, в который входят: геодезические отметки мобильных пунктов H_{M1}, H_{M2}, H_{M3},

u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} – параметры вертикальных смещений мобильных пунктов,

МК – масса маскона, аппроксимирующего аномальное гравитационное поле, масса δMK, аппроксимирующая изменение (вариацию) аномального гравитационного поля. Масса маскона *МК* аппроксимирует влияние конуса вулкана, а через массу δMK может быть определена масса маскона *МО*, аппроксими-

рующего влияние пустого шарового маскона в верхней части магматической камеры,

$\Phi(t,t-1)$ – переходная матрица, показывающая закономерность изменений значений параметров от эпохи $t-1$ к эпохе t.

Интервал времени между эпохами Δt постоянный и равен $\Delta t = 2$ месяца (61 сутки). Выполняются четыре эпохи нивелирных и гравиметрических наблюдений в течение шести месяцев. В соответствии с работой [116] нами была смоделирована следующая хронология событий эксперимента. Первая эпоха наблюдений была сделана 7 мая. Ровно через сутки – 8 мая началось извержение вулкана. Вторая, третья и четвертая эпохи наблюдений выполнялись соответственно 7 июля, 6 сентября и 6 ноября.

На протяжении всего периода наблюдений (с 1-й по 4-ю эпоху) происходят вертикальные движения физической поверхности вблизи вулкана. Модель вертикальных движений задана нами как равномерное вращение одного жесткого блока (плиты), на котором находятся пункты М1, М2, М3. Ось вращения параллельна линии М2–М3 и находится на расстоянии 0.95 км от нее и на расстоянии 0.50 км от пункта М1. Угловая скорость вращения плиты ω является постоянной и равна $\omega = 1.95 \times 10^{-5}$ рад/год. При таком расположении оси и значении угловой скорости модельные смещения пунктов М1, М2, М3 за шесть месяцев составили u_{M1}=-48.70 мм, u_{M2}=92.53 мм, u_{M3}=92.53 мм.

Модельные значения отметок пунктов в четыре эпохи представлены в таблице 4:

Таблица 4

Модельные значения отметок пунктов М1, М2 и М3.

Пункт	$H(t=1)$ (мм)	$H(t=2)$ (мм)	$H(t=3)$ (мм)	$H(t=4)$ (мм)
М1	1151060.00	1151044.00	1151028.00	1151011.00
М2	1365190.00	1365221.00	1365252.00	1365283.00
М3	1280610.00	1280641.00	1280672.00	1280703.00

Гравитационное поле в первую эпоху наблюдений характеризуется значением силы тяжести, вызванной притяжением Земли (нормальной), некоторого назначенного значения при моделировании плоского слоя и шара, аппроксимирующего конус вулкана. Плотность масс $\delta = 2.63$ г/см^3.

Для вычисления влияния конуса вулкана в 1-ю эпоху необходимо знать массу шара $MK(t=1)$, аппроксимирующего этот конус. Для радиуса шара $RK(t=1) = 500$ м и плотности $\delta = 2.63$ г/см^3, получим массу

$$MK(t=1) = \frac{4}{3}\pi\left[RK(t=1)\right]^3 \delta = 1.37706\times10^{15} \text{ г.} \qquad (60)$$

Масса шара, аппроксимирующего магматическую камеру (магматический очаг) вулкана:

$$MO(t=1) = \frac{4}{3}\pi R^3\delta = 1.72133\times10^{17} \text{ г,} \qquad (61)$$

где $R = 2500$ м – радиус шара, аппроксимирующего магматический очаг вулкана в 1-ю эпоху.

Аномалия силы тяжести для 2-й, 3-й и 4-й эпох будет вызвана излиянием вещества из магматической камеры и увеличившейся массой конуса вулкана. Для построения модельных значений соответствующих этим массам шаровых масконов необходимо задать закон расхода магмы. Моделирование расхода магмы $W(t)$ в моменты времени t выполнялось в соответствии с экспоненциальным законом [14]

$$W(t) = W_0 e^{-W_0 t/\Delta B}, \qquad (62)$$

где W_0 – начальный расход магмы;

ΔB – избыток магмы в очаге; t – время от начала извержения.

Были выбраны следующие параметры для закона расхода магмы. Начальный расход магмы $W_0 = 1024$ т/с (1042 тонны в секунду). Избыток магмы в очаге $\Delta B = 1.12\times10^7$ тонн.

Следствием закона (62) будет формула расчета количества магмы, извергнутой ко времени t с начала извержения $M_{изл.}(t) = \Delta B(1-e^{-W_0 t/\Delta B})$ Время с начала извержения составляет 60 суток для второй эпохи, 121 и 182 суток для третьей и четвертой эпох соответственно. Получаем с учетом заданных нами параметров и их размерностей следующие значения массы излившейся из резервуара магмы:

$$M_{изл.}(t=2) = 1.12\times10^7\times(1-e^{-1000\times60\times24\times60\times60/1.16\times10^7}) = 4.28\times10^9 \text{ тонн;}$$

$$M_{изл.}(t=2) = 1.12\times10^7\times(1-e^{-1000\times60\times21\times60\times60/1.16\times10^7}) = 6.96\times10^9 \text{ тонн;}$$

$$M_{изл.}(t=2) = 1.12\times10^7\times(1-e^{-1000\times60\times182\times60\times60/1.16\times10^7}) = 8.61\times10^9 \text{ тонн.}$$

Этим значениям с учетом плотности $\delta = 2.63$ г/см^3 соответствуют радиусы пустых шаровых масконов в верхней части магматического очага для 2-й, 3-й и 4-й эпох. Применяя формулу связи радиуса и объема шара, получаем:

$$RO(t=2) = 724 \text{ м;}\ RO(t=3) = 855 \text{ м;}\ RO(t=4) = 921 \text{ м.}$$

При извержении вулкана не все вещество остается в конусе вулкана и на его поверхности, т.к. его часть выбрасывается в атмосферу. Поэтому примем, что в конусе остается 70% от излившегося из магматического резервуара вещества в эпохи 2 и 3, и 90% в эпоху 4. Таким образом, получаем массу конуса вулкана в эпохи 2, 3 и 4:

$$MK(t=2) = MK(t=1) + M_{изл.}(t=2) \times 0.7 = 4.305 \times 10^9 \text{ тонн;}$$

$$MK(t=3) = MK(t=1) + M_{изл.}(t=3) \times 0.7 = 6.200 \times 10^9 \text{ тонн;}$$

$$MK(t=4) = MK(t=1) + M_{изл.}(t=4) \times 0.7 = 7.746 \times 10^9 \text{ тонн;}$$

Этим значениям соответствуют радиусы шаровых масконов, аппроксимирующих конус для 2-й, 3-й и 4-й эпох:

$RK(t = 2)$=731 м; $RK(t = 3)$ = 826 м; $RK(t = 4)$ = 889 м;

Смоделированные массы масконов, как функции пространства и времени, позволили описать дискретно гравитационное поле в каждую эпоху – через вычисленные значения компонент уклонений отвесной линии ξ, η и силы тяжести g для всех пяти пунктов геодезической сети.

Таким образом, построена физико-математическая модель вертикальных движений земной поверхности и изменений гравитационного поля в вулканической области, для корректной идентификации которой необходима совместная математическая обработка пространственно-временных рядов разнородных комплексных нивелирных и гравиметрических наблюдений.

3.2 Моделирование системы наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области

В подразделе 3.1 построена физико-математическая модель динамики вертикальных движений земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области [93, 97-99]. В настоящем подразделе описывается пример моделирования системы наблюдений за вертикальными движениями и изменением гравитационного поля. Система наблюдений включает в себя пространственно-временные ряды комплексных наблюдений нивелирных превышений и абсолютных значений ускорения силы тяжести [92, 93, 97-101].

Введение в вектор параметров аномальных масс позволяет компактно описывать локальное гравитационное поле. По значениям и координатам этих масс могут быть вычислены компоненты уклонений отвесной линии ξ, η и аномалия силы тяжести Δg для любой точки геодинамической системы.

С учетом этого подхода система наблюдений моделируется линейным уравнением

$$Y(t) = A(t)\, X_R(t) + \delta(t) \qquad (63)$$

где $A(t)$ – матрица коэффициентов уравнений наблюдений; $Y(t)$ – вектор измеренных величин;

$X_R(t)$ – расширенный вектор определяемых параметров состояния геодинамической системы, в который входят: отметки H_i пунктов сети наблюдений, аномальные массы, параметры движений пунктов сети наблюдений;

$\delta(t)$ – вектор ошибок наблюдений.

Для первой эпохи (до извержения) расширенный вектор параметров будет состоять только из отметок мобильных пунктов H_{M1}, H_{M2} H_{M3} и массы конуса вулкана MK:

$$X_R(t=1) = (H_{M1}, H_{M2,} H_{M3})^T . \qquad (64)$$

Для эпох 2, 3 и 4 расширенный вектор параметров будет состоять из отметок мобильных пунктов H_{M1}, H_{M2} H_{M3}, характеристик вертикальных движений этих пунктов, массы конуса вулкана MK и массы δMK, аппроксимирующей изменение (вариацию) аномального гравитационного поля. Например, если принимается гипотеза равномерного произвольного вертикального движения каждого мобильного пункта, то расширенный вектор параметров для эпохи 2, 3 и 4 будет:

$$X_R = (H_{M1}, H_{M2,} H_{M3}, u_{M1}, u_{M2}, u_{M3}, MK, \delta MK)^T , \qquad (65)$$

где u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} – вертикальные смещения мобильных пунктов между соседними эпохами.

Были смоделированы нивелирные превышения для всех четырех эпох. Найдены составляющие аномалий силы тяжести в пунктах нивелирной сети по осям x, y и z. Аномалии силы тяжести вызваны влиянием шарового маскона, моделирующего конус вулкана и пустого шарового маскона в верхней части магматической камеры вулкана.

При моделировании учитывался вид уравнений наблюдений (56, 57).

Модельные превышения между пунктами (без поправок за влияние аномальных масс) для четырех эпох наблюдений по данным отметкам пунктов представлены в таблице 5:

Таблица 5

Модельные превышения между пунктами сети для четырех эпох наблюдений и длины ходов нивелирования

Ход (кон-нач)	Длина хода (км)	$h_{ij}(t=1)$ (мм)	$h_{ij}(t=2)$ (мм)	$h_{ij}(t=3)$ (мм)	$h_{ij}(t=4)$ (мм)
С1-М2	4.2	-180170,0	-180200,8	-180231,7	-180262,5
С1-М1	3.2	33960,0	33976,2	33992,5	34008,7
М2-М1	2.0	214130,0	214177,1	214224,2	214271,2
М3-М2	2.8	-84580,0	-84580,0	-84580,0	-84580,0
М3-М1	2.0	129550,0	129597,1	129644,2	129691,2
С2-М1	3.0	52710,0	52726,2	52742,5	52758,7
С2-М3	3.6	-76840,0	-76870,8	-76901,7	-76932,5

Далее вычислялись поправки в превышения, вызванные излиянием вещества из магматической камеры и увеличившейся массой конуса вулкана (таблица 6), по формуле:

$$\delta h_{ij}(t) = (\Delta g_{ix}\ \Delta x_{ij} + \Delta g_{iy}\,\Delta y_{ij})/980882, \qquad (66)$$

Таблица 6

Поправки в превышения, вызванные влиянием массы шара, аппроксимирующего массу конуса в 1-ю эпоху

*X*од	Δx_{ij} (м)	Δy_{ij} (м)	Δg_{ix} [мкгал]	Δg_{iy} [мкгал]	δh_{ij} [мм]
М2-С1	4199.95	0	-1479.72	0.00	6,3416
М1-С1	2842.73	1468.92	-458,08	154,36	1,0974
М1-М2	-1357.22	1468.92	-1685,18	154,36	-2,5652
М2-М3	-127.01	-2792.05	-1571,25	363,55	0,8321
М1-М3	-1484.23	-1323.13	-549,61	517,90	-0,1332
М1-С2	1997.81	-2243.86	-423,36	220,32	1,3675
М3-С2	3482.04	-920.73	-309,43	429,51	1,5030

Аналогично вычисляются поправки в превышения, вызванные влиянием массы шара, аппроксимирующего массу конуса для эпох 2, 3 и 4. Вычисленные поправки вводим в модельные превышения (таблица 5). В превышения эпох 2, 3 и 4 вводятся также поправки, вызванные появлением пустого шарового маскона в верхней части магматического очага. Вычисляются они так же, как и поправки за влияние конуса по формуле, аналогичной формуле (66). Затем с помощью датчика случайных чисел вводим ошибки измерений, соответствующие точности нивелирования $\mu = 0.5$ мм/км. При этом учтем длины линий ниве-

лирования. Стандарт случайной ошибки, вводимой в каждое превышение, будет равен $\sigma_{\delta h} = 0.5 \text{ мм} \cdot \sqrt{L}$, где L – длина хода в км.

Ряды сгенерированных псевдослучайных нормальнораспределенных чисел проверялись на соответствие нормальному закону распределения с использованием пакета прикладных программ Matrixer.

Результаты вычислений значений составляющих аномалии силы тяжести по осям координат в мкгалах, вызванных массой конуса вулкана для всех четырех эпох, представлены в таблице 7.

Таблица 7

Составляющие аномалий силы тяжести, вызванных массой конуса вулкана

Пункт	1-я эпоха			2-я эпоха		
	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}
C1	-252.62	0.00	-21.05	-780,54	0,00	-95,11
C2	-183.17	131.92	-17.10	-566,86	408,26	-78,33
M1	-663.54	308.71	-112.22	-2001,34	931,12	-484,96
M2	-2706.81	0.00	-480.94	-7751,71	0,00	-2372,52
M3	-435.69	727.10	-105.32	-1317,67	2198,99	-500,52
Пункт	3-я эпоха			4-я эпоха		
	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}
C1	-1117,43	0,00	-153,77	-1389,77	0,00	-205,97
C2	-812,14	584,92	-127,12	-1010,64	727,88	-170,65
M1	-2830,99	1317,12	-770,77	-3490,44	1623,93	-1020,60
M2	-10650,54	0,00	-3819,13	-12848,84	0,00	-5061,25
M3	-1864,86	3112,17	-813,76	-2299,62	3837,72	-1090,86

Результаты вычислений значений составляющих аномалии силы тяжести по осям координат, вызванных появлением пустого шарового маскона в верхней части магматической камеры в мкгалах, даны в таблице 8.

Измеренные в каждую эпоху на каждом пункте *i* нивелирной сети значения силы тяжести g_i моделируем с учетом влияния фоновой (без влияния конуса) составляющей поля силы тяжести в данном пункте g_i^F, влияния конуса вулкана $\Delta g^{конуса}$, пустого шарового маскона в верхней части магматической камеры $\Delta g^{магм.кам.}$ и вертикального смещения пунктов u_i – $\Delta g^{смещ.}$:

$$g_i = g_i^F + \Delta g^{конуса} + \Delta g^{магм.кам.} + \Delta g^{смещ.}. \qquad (67)$$

В (67) $\Delta g_i^{смещ.}$ вычисляется с учетом вертикального градиента силы тяжести: $\Delta g_i^{смещ.} = -0.3086 u_i$

Таблица 8

Составляющие аномалий силы тяжести, вызванных появлением пустого шарового маскона в верхней части магматической камеры

Пункт	1-я эпоха			2-я эпоха		
	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}
C1	0	0	0	529,95	0,00	-284,77
C2	0	0	0	396,52	-285,58	-249,43
M1	0	0	0	836,67	-389,26	-845,38
M2	0	0	0	879,82	0,00	-1663,93
M3	0	0	0	464,69	-775,50	-922,06
Пункт	3-я эпоха			4-я эпоха		
	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}	Δg_{ix}	Δg_{iy}	Δg_{iz}
C1	849,22	0,00	-474,88	1046,28	0,00	-596,57
C2	636,84	-458,66	-416,80	785,51	-565,74	-524,16
M1	1302,77	-606,11	-1370,43	1582,34	-736,18	-1697,56
M2	1325,53	0,00	-2603,39	1584,74	0,00	-3170,53
M3	720,66	-1202,67	-1486,42	873,62	-1457,94	-1836,35

Также учитываем, что

$$\Delta g_i = \sqrt{\Delta g_{ix}^2 + \Delta g_{iy}^2 + \Delta g_{iz}^2}\,. \qquad (68)$$

В эти значения g_i вводятся ошибки измерений δg с учетом точности 5 мкгал. В совокупности с нивелирными измерениями мы получаем вектор измеренных величин $Y(t)$ системы наблюдений (63).

В таблице 9 приводятся значения псевдослучайных нормально-распределенных чисел, которые использовались как ошибки измерений нивелирных превышений и абсолютных значений силы тяжести для эпох 1, 2, 3 и 4.

Приведем результаты моделирования нивелирных и гравиметрических наблюдений за вертикальными движениями и гравитационным полем в вулканической области для всех 4-х эпох с уже введенными случайными ошибками.

Таким образом, предложена модель системы наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в вулканической области. Смоделированные пространственно-временные ряды разнородных комплексных наблюдений нивелирных превышений и абсолютных значений силы тяжести (таблица 10) должны обрабатываться совместно в ходе выполнения вычислительного идентификационного эксперимента.

Таблица 9

Смоделированные псевдослучайные ошибки измерений

Измерение	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
δh_1 (мм)	-0,428	-0,380	-0,359	-0,132
δh_2 (мм)	0,592	-0,456	-0,014	0,186
δh_3 (мм)	-0,815	-0,308	-0,192	0,089
δh_4 (мм)	-0,774	-0,557	-0,286	0,946
δh_5 (мм)	0,792	-0,345	-0,021	0,014
δh_6 (мм)	0,007	0,788	-1,289	0,339
δh_7 (мм)	-0,525	0,003	-0,419	-0,718
δg_{C1} (мкгал)	-0,638	-1,276	0,959	-1,699
δg_{C2} (мкгал)	-6,571	9,388	-2,389	2,687
δg_{M1} (мкгал)	2,892	-9,401	-2,115	-6,965
δg_{M2} (мкгал)	8,906	-0,580	6,049	3,207
δg_{M3} (мкгал)	0,474	3,484	-4,717	4,512

Таблица 10

Смоделированные измерения превышений и абсолютных значений силы тяжести в эпохи 1, 2, 3, 4.

Измерение	$Y(t = 1)$	$Y(t = 2)$	$Y(t = 3)$	$Y(t = 4)$
h_1 (мм)	-180164,54	-180186,12	-180211,88	-180237,93
h_2 (мм)	33962,16	33977,08	33994,51	34011,63
h_3 (мм)	214126,28	214170,58	214215,84	214261,57
h_4 (мм)	-84580,46	-84579,38	-84578,44	-84575,85
h_5 (мм)	129550,99	129596,39	129643,87	129690,93
h_6 (мм)	52711,38	52729,74	52742,93	52762,67
h_7 (мм)	-76839,49	-76868,26	-76899,18	-76929,76
g_{C1} (мкгал)	980882137,0	980881766,7	980881531,5	980881354,7
g_{C2} (мкгал)	980882135,0	980881830,9	980881612,8	980881466,8
g_{M1} (мкгал)	980882049,4	980880788,2	980880027,0	980879449,3
g_{M2} (мкгал)	980881686,7	980878007,0	980875727,8	980873902,7
g_{M3} (мкгал)	980882053,9	980880691,4	980879836,5	980879208,2

3.3 Комплексная математическая обработка и интерпретация нивелирных и гравиметрических наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области

Настоящий подраздел описывает вычислительный эксперимент по совместной математической обработке и интерпретации смоделированных в подразделе 3.2 пространственно-временных рядов комплексных наблюдений нивелирных превышений и абсолютных значений ус-

корения силы тяжести. Исследуемым геодинамическим объектом являются вертикальные движения земной поверхности и гравитационное поле в районе действующего вулкана (рисунки 19, 20).

Математическая обработка выполнялась с использованием алгоритма рекуррентного фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ) формулы (5) аналогично тому, как это описано в работах [89- 91, 96, 98, 99].

Для первой эпохи (до извержения) расширенный вектор параметров будет состоять только из отметок мобильных пунктов H_{M1}, H_{M2}, H_{M3} и массы конуса вулкана MK:

$$X_R(t = 1) = (H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, MK)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица $A(t)$ коэффициентов уравнений наблюдений формируется известным образом: каждое измерение $y_i(t)$ выражается как функция от параметров $X_R(t)$. Частные производные этих функций будут коэффициентами матрицы $A(t)$.

Пример уравнения наблюдений абсолютного значения силы тяжести g – уравнение наблюдений g на пункте C_1 в эпоху t =1:

$$g_{C1}(t=1) = g_i^F + k_{g_{C1}}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{g_{C!}}(t=1). \qquad (69)$$

В этом уравнении g_i^F - фоновая (без влияния конуса) составляющая поля силы тяжести в данном пункте, $\delta_{g_{C1}}(t=1)$ – ошибка измерения силы тяжести в эпоху 1 на пункте C_1.

Коэффициент $k_{g_{C1}}^{MK}(t=1)$ при $MK(t$=1) вычисляем по известным координатам пункта C_1 линии нивелирования и координатам центра шарового маскона $Sk1$:

$$k_{g_{C1}}^{MK}(t=1) = \frac{G \times \Delta Z_{C1,Sk1}(t=1)}{r_{C!,Sk1}^3(t=1)}, \qquad (70)$$

где $r_{C1,Sk1}(t=1) = \sqrt{\Delta X_{C1,Sk1}^2(t=1) + \Delta Y_{C1,Sk1}^2(t=1) + \Delta Z_{C1,Sk1}^2(t=1)}$, (71)

G – гравитационная постоянная

В формулах (70) и (71) учтено возможное изменение от эпохи к эпохи как координат пункта, так и координат центра шарового маскона:

$$\Delta X_{C1,Sk1}(t=1) = X_{C1}(t=1) - X_{Sk1}(t=1),$$

$$\Delta Y_{C1,Sk1}(t=1) = Y_{C1}(t=1) - Y_{Sk1}(t=1),$$

$$\Delta Z_{C1,Sk1}(t=1) = Z_{C1}(t=1) - Z_{Sk1}(t=1).$$

Приведем пример уравнения наблюдения нивелирного превышения $h_1(t=1)$. С учетом схемы сети (рисунок 14) это превышение выражаем как функцию от вектора параметров:

$$h_1(t=1) = H_{M2}(t=1) - H_{C1} + k_{h_1}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{h_1}(t=1), \qquad (72)$$

где $H_{M2}(t = 1)$ – отметка пункта M_2 в эпоху 1;

H_{C1} – отметка исходного (стабильного) пункта C_1;

$MK(t = 1)$ – масса маскона, моделирующего конус вулкана в эпоху 1;

$\delta_{h_1}(t=1)$ – ошибка измерения превышения между пунктами C_1 и M_2;

$k_{h_1}^{MK}(t=1)$ – коэффициент, учитывающий влияние этого маскона на превышение $h_1(t=1)$. Величина $k_{h_1}^{MK}(t=1)$ вычисляется по известным координатам начального пункта линии нивелирования M_2, конечного пункта линии нивелирования C_1 и координатам центра шарового маскона Sk1:

$$k_{h_1}^{MK}(t=1) = -\frac{G}{2y}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\Delta X_{C1,Sk1}(t=1)}{r_{C1,Sk1}^3(t=1)} + \dfrac{\Delta X_{M2,Sk1}(t=1)}{r_{M2,Sk1}^3(t=1)}\right)\Delta X_{C1,M2}(t=1) + \\ \left(\dfrac{\Delta Y_{C1,Sk1}(t=1)}{r_{C1,Sk1}^3(t=1)} + \dfrac{\Delta Y_{M2,Sk1}(t=1)}{r_{M2,Sk1}^3(t=1)}\right)\Delta Y_{C1,M2}(t=1)\end{array}\right] \qquad (73)$$

В эпохи 2, 3 и 4 в уравнениях наблюдений присутствуют слагаемые, учитывающие влияние не только увеличивающейся массы конуса вулкана (маскон *MK*) но и уменьшение массы в магматическом очаге (маскон *MO*), а также изменение высоты мобильных пунктов (через вертикальный градиент силы тяжести $\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -0.3086\frac{\text{мкГал}}{\text{мм}}$).

Координаты центра шарового маскона Sk1 достаточно знать приближенно (не грубее 50 метров). Для их определения используем результаты геодезических измерений размеров и формы конуса вулкана. Например, в работе [14] описана методика и результаты определения расхода магмы и размеров конуса при извержении Толбачинского вулкана.

Соотношение весов превышений и измерений силы тяжести устанавливалось с учетом точности измерений: $\mu_h = 0.5$ мм/км, . $\mu_g = 5$ мкГал Веса превышений $p_{h_i} = \frac{1}{L_i}$, где L_i – длина хода в км. Вес

измерения абсолютного значения силы тяжести для всех пунктов сети $P_{g_i} = 0.01$.

Через сутки после наблюдений первой эпохи началось извержение вулкана. При этом происходят одновременно вертикальные движения мобильных пунктов M_1, M_2, M_3, уменьшение массы магматической камеры на величину MO и увеличение массы конуса MK на величину δMK. Соответственно меняется и гравитационное поле.

Для создания модели вертикальных движений мобильных пунктов и изменения гравитационного поля на протяжении всего периода наблюдений, воспользуемся понятием ступенчатой функции [70] – функции, которая меняет свои значения только в дискретной последовательности точек разрыва. Это означает, что для каждого интервала времени между соседними эпохами принимается свое значение смещения или изменения массы, независимое от смещения или изменения массы в другие интервалы времени.

Расширенный вектор параметров для эпохи 2 будет:

$$X_{R1}=(H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, u_{M1}, u_{M2}, u_{M3}, MK, \delta MK, MO)^T,$$

где u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} – вертикальные смещения мобильных пунктов между эпохами 1 и 2.

Масса конуса увеличивается в результате излияния части вещества из магматической камеры. Определение характеристик процесса излияния является одной из важнейших задач при изучении вулканизма. Заметим, что адекватная математическая модель этого процесса будет работать на уточнение параметров, которые оцениваем по геодезическим и гравиметрическим наблюдениям. Однако, параметры экспоненциального закона можно определить только после нескольких эпох наблюдений, причем приближениями – модель должна настраиваться. Одновременно должна настраиваться еще одна важнейшая величина – процент оставшегося в конусе вулкана и на его поверхности вещества, т.к. его часть выбрасывается в атмосферу.

Примем, что в конусе остается 70% от излившегося из магматического резервуара вещества. Неточность априорного задания этой величины выявится в процессе осуществления идентификации – отразится на поправках в результаты измерений после математической обработки (они резко возрастут).

В качестве начальных оценок H_{M1}, H_{M2}, H_{M3} и массы конуса вулкана MK и их ковариаций используем оценки, полученные при обработке наблюдений первой эпохи. Начальные оценки u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} и MO найдем по четырем необходимым измерениям второй эпохи h_1, h_2, h_7,

g_{C1}. Используем при этом уравнения наблюдений, аналогичные (69) и (72).

Затем обрабатываем результаты наблюдений третьей и четвертой эпох. Заметим, что при обработке третьей эпохи вектор параметров расширится за счет включения параметра δMK, который останется и в составе вектора параметров четвертой эпохи:

$$X_{R3}=(H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, u_{M1}, u_{M2}, u_{M3}, MK, \delta MK, MO, \delta MO)^T.$$

Напомним, что моделируются изменения отметок и масс масконов с использованием ступенчатых функций – допускаем независимость этих величин в разные интервалы времени. Поэтому и в третью эпоху и в четвертую вычисляем вначале по необходимым измерениям начальные оценки u_{M1}, u_{M2}, u_{M3}, δMK, δMO. За исходные оценки параметров H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, MK, MO берутся оценки, полученные по наблюдениям предыдущей эпохи.

Полученные оценки отметок мобильных пунктов, их вертикальных смещений, масс масконов и их изменений от эпохи к эпохе позволяют выдвигать конкурирующие гипотезы закономерностей движений и изменений масс. Замечаем, что оценки смещений u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} примерно равны в разные эпохи – отметки мобильных пунктов меняются с постоянной скоростью. Сложнее подобрать закон изменения во времени масс MK, MO. Увеличение массы конуса δMK от эпохи к эпохе будет снижаться. Причиной этому является падение со временем избыточного давления в магматическом очаге, и как следствие, уменьшение излияния магмы, пропорционального этому давлению. Закон расхода магмы при извержении близок к экспоненциальному [14]. Для определения закона расхода магмы воспользуемся оценками параметров, вычисленных по модели со ступенчатыми функциями. Расчет количества магмы, извергнутой ко времени τ с начала извержения выполняется по формуле

$$M_{изл.}(\tau) = \Delta B(1-e^{-W_0\tau/\Delta B}),$$

где W_0 – начальный расход магмы;

ΔB – избыток магмы в очаге.

Для трех эпох будем иметь три таких нелинейных уравнения с двумя неизвестными ΔB и W_0. Эти неизвестные определили графическим способом. Избыток магмы в очаге $\Delta\hat{B} = 1.12\times10^7$ тонн. Начальный расход магмы $\hat{W}_0 = 0.90\times10^7$ тонн/сутки $= 1024$ тонна/секунда.

Экспоненциальный закон излияния магмы с этими параметрами использован для составления переходных матриц при обработке на-

блюдений с другими тремя моделями (произвольного смещения, движений жестких блоков и вращения жесткой плиты). Необходимо учесть, что в общем случае закон изменения параметров от эпохи к эпохе может быть различным. В рассматриваемом примере это касается масс масконов – увеличение этих масс от эпохи к эпохе неодинаково для разных пар соседних эпох. Сложно определить δMK по оценке MO – необходимо знать процент оставшегося на конусе вещества в каждую эпоху. Эти величины могут быть определены по оценкам параметров модели 1. Поэтому была выполнена адаптация (настройка) этих величин по критерию $\min trK_{XR}(X,t)$ с использованием фильтра Калмана-Бьюси. В результате установлено, что в эпоху 2 и 3 доля оставшегося на конусе вещества составляла 70%, а в эпоху 4–90%.

Эта модель перераспределения масс масконов, аппроксимирующая динамику изменения гравитационного поля, сочеталась с тремя моделями вертикальных движений земной поверхности. Если принимать гипотезу произвольного смещения пунктов (модель 2), то расширенный вектор параметров будет:

$$X_{R1}=(H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, u_{M1}, u_{M2}, u_{M3}, MK, \delta MK)^T,$$

где u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} – вертикальные смещения мобильных пунктов между соседними эпохами.

Вторая модель соответствует ситуации, когда пункты C_1 и C_2 расположены на неподвижном жестком блоке, пункт M_1 расположен на подвижном жестком блоке A, а пункты M_2 и M_3 расположены на другом подвижном жестком блоке B. Расширенный вектор параметров будет:

$$X_{R2}=(H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, u_A, u_B, MK, \delta MK)^T,$$

где u_A, u_B – вертикальные смещения блоков между соседними эпохами.

Согласно гипотезе 4 вертикальные движения мобильных пунктов M_1, M_2, M_3 можно объяснить вращением жесткой плиты вокруг оси параллельной линии M_2M_3. Соотношение полученных по предыдущим моделям оценок смещений пункта M_1 и пунктов M_2, M_3 позволяет принять при моделировании расположение оси вращения на расстоянии 0.50 км от M_1 и 0.95 км от линии M_2M_3.

Учитывая малость угла поворота $\omega\Delta t$, связь отметок пунктов двух эпох обеспечивается введением угловой скорости вращения плиты ω (в рад/год). Расширенный вектор параметров в этом случае будет:

$$X_{R3}=(H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, \omega, MK, \delta MK)^T.$$

При обработке наблюдений по всем конкурирующим моделям получены оценки параметров состояния и их точностные характеристики. Приведем в таблице 11 те из них, которые отражают динамику земной поверхности и гравитационного поля – скорости вертикальных движений, массы масконов и их изменения для четырех эпох наблюдений по трем конкурирующим моделям.

Используя *F*-критерий, была выбрана адекватной модель 4. Согласно этой модели динамика земной поверхности описывается равномерным вращением блока с мобильными пунктами, а динамика гравитационного поля – изменениями масс поверхностного и глубинного масконов в соответствии с экспоненциальным законом излияния магмы и значениями доли остающегося на поверхности конуса излившегося вещества в эпохи 2 и 3–70%, в эпоху 4–90%.

По оценкам масс этих масконов и ковариационным матрицам векторов параметров в каждую эпоху для каждого пункта нами были вычислены оценки силы тяжести g, компонент уклонений отвесной линии ξ, η и аномалия высоты ζ на пунктах геодезической сети с оценкой их точности (таблица 12).

Результатом совместной математической обработки и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений по алгоритму ФКБ явились оценки отметок мобильных пунктов, оценки вертикальных смещений этих пунктов, оценки аномалий силы тяжести, компонент уклонений отвесной линии и аномалия высоты на пунктах геодезической сети с оценкой их точности в 4-х эпохах. Совместная обработка нивелирных и гравиметрических позволила при адекватных моделях закономерностей движений земной поверхности и изменений масс поверхностного и глубинного масконов в соответствии с экспоненциальным законом и высокой точности наблюдений нивелирных превышений значительно повысить точность оценивания.

Влияние излившейся магмы, имеющей массу $M_{изл.}\left(t=4\right)=8.61\cdot10^{9}$ тонн, составило на изменение значений силы тяжести в пунктах сети до 7.8 мгал, а на нивелирные превышения до 25 мм. Это указывает на возможность уверенного комплексного выявления аномальных геодезических и гравитационных параметров геодинамических процессов.

Таблица 11

Модельные значения параметров, их оценки и точность

X_R	$t = 2$			$t = 3$			$t=4$		
	Модельные	Оценки	Точность	Модельные	Оценки	Точность	Модельные	Оценки	Точность
Модель произвольного смещения пунктов и экспоненциального закона излияния магмы									
u_{M1}	-16.23 мм	-16.09 мм	0.89 мм	-16.23 мм	-16.09 мм	0.39 мм	-16.23 мм	-16.13 мм	0.89 мм
u_{M2}	30.84 мм	30.86 мм	1.07 мм	30.84 мм	30.86 мм	0.47 мм	30.84 мм	30.82 мм	1.07 мм
u_{M3}	30.84 мм	30.05 мм	1.05 мм	30.84 мм	30.05 мм	0.46 мм	30.84 мм	31.09 мм	1.05 мм
MK	$4.39*10^9$ тонн	$4.38*10^9$ тонн	$4.90*10^6$ тонн	$6.20*10^9$ тонн	$6.19*10^9$ тонн	$3.55*10^6$ тонн	$4.39*10^9$ тонн	$7.74*10^9$ тонн	$2.94*10^6$ тонн
δMK	$3.01*10^9$ тонн	$3.02*10^9$ тонн	$4.90*10^6$ тонн	$1.81*10^9$ тонн	$1.81*10^9$ тонн	$1.33*10^6$ тонн	$3.01*10^9$ тонн	$1.55*10^9$ тонн	$0.72*10^6$ тонн
Модель движения жестких блоков и экспоненциального закона излияния магмы									
u_{M1}	-16.23 мм	-16.12 мм	0.85 мм	-16.23 мм	-15.66 мм	0.38	-16.23 мм	-16.13 мм	0.23 мм
$u_{M2} = u_{M3}$	30.84 мм	30.43 мм	0.89 мм	30.84 мм	31.16 мм	0.39	30.84 мм	30.96 мм	0.24 мм
MK	$4.39*10^9$ тонн	$4.38*10^9$ тонн	$4.71*10^6$ тонн	$6.20*10^9$ тонн	$6.19*10^9$ тонн	$3.47*10^6$ тонн	$4.39*10^9$ тонн	$7.74*10^9$ тонн	$2.92*10^6$ тонн
δMK	$3.01*10^9$ тонн	$3.02*10^9$ тонн	$4.71*10^6$ тонн	$1.81*10^9$ тонн	$1.81*10^9$ тонн	$1.30*10^6$ тонн	$3.01*10^9$ тонн	$1.55*10^9$ тонн	$0.71*10^6$ тонн
Модель вращения жесткой плиты и экспоненциального закона излияния магмы									
ω	$1.95*10^{-5}$ рад/год	$1.92*10^{-5}$ рад/год	$3.05*10^{-7}$ рад/год	$1.95*10^{-5}$ рад/год	$1.94*10^{-5}$ рад/год	$1.38*10^{-7}$ рад/год	$1.95*10^{-5}$ рад/год	$1.95*10^{-5}$ рад/год	$0.82*10^{-7}$ рад/год
u_{M1}	-16.23 мм	-16.04 мм	0.25 мм	-16.23 мм	-16.16 мм	0.12 мм	-16.23 мм	-16.24 мм	0.07 мм
$u_{M2} = u_{M3}$	30.84 мм	30.48 мм	0.48 мм	30.84 мм	30.70 мм	0.22 мм	30.84 мм	30.86 мм	0.13 мм
MK	$4.39*10^9$ тонн	$4.38*10^9$ тонн	$4.60*10^6$ тонн	$6.20*10^9$ тонн	$6.18*10^9$ тонн	$3.50*10^6$ тонн	$4.39*10^9$ тонн	$7.74*10^9$ тонн	$2.92 *10^6$тонн
δMK	$3.01*10^9$ тонн	$3.02*10^9$ тонн	$4.60*10^6$ тонн	$1.81*10^9$ тонн	$1.81*10^9$ тонн	$1.31*10^6$ тонн	$3.01*10^9$ тонн	$1.55*10^9$ тонн	$0.71*10^6$ тонн

Таблица 12

Значения основных трансформант гравитационного поля,
(модельные и полученные в результате обработки по ФКБ)

Пункт		g_z (мкгал)	ξ''	η''	ξ (см)	g_z (мкгал)	ξ''	η''	ξ (см)	g_z (мкгал)	ξ''	η''	ξ (см)
		t = 2				t = 3				t=4			
C1	Модель	980881768	0.05	0.00	0.92	980881531	0.06	0.00	1.38	980881355	0.07	0.00	1.72
	Оценка	980881767	0.05	0.00	0.92	980881530	0.06	0.00	1.38	980881355	0.07	0.00	1.72
	Точность	0.37	0.0004	0.00	0.001	0.70	0.0003	0.0001	0.001	0.72	0.0003	0.0001	0,001
C2	Модель	980881821	0.04	-0.03	0.88	980881613	0.04	-0.03	1.31	980881467	0.05	-0.03	1.63
	Оценка	980881821	0.04	-0.03	0.88	980881614	0.04	-0.03	1.31	980881463	0.05	-0.03	1.64
	Точность	0.33	0.0003	0.0002	0.001	0.61	0.0003	0.0002	0.001	0.63	0.0002	0.0002	0,001
M1	Модель	980880797	0.25	-0.12	1.46	980880027	0.32	-0.15	2.15	980879449	0.40	-0.19	2.67
	Оценка	980880796	0.25	-0.12	1.46	980880027	0.32	-0.15	2.15	980879453	0.40	-0.19	2.67
	Точность	0.86	0.0008	0.0004	0.002	2.00	0.0006	0.0003	0.002	2.05	0.0005	0.0002	0,002
M2	Модель	980878007	1.5	0.0	2.35	980875727	2.0	0.0	3.39	980873903	2.4	0.0	4.18
	Оценка	980878008	1.5	0.0	2.35	980875723	2.0	0.0	3.39	980873897	2.4	0.0	4.18
	Точность	0.31	0.0022	0.0000	0.003	4.00	0.0014	0.0001	0.002	1.55	0.0011	0.0001	0,001
M3	Модель	980880687	0.18	-0.30	1.53	980879836	0.24	-0.40	2.25	980879208	0.30	0.50	2.80
	Оценка	980880686	0.18	-0.30	1.53	980879839	0.24	-0.40	2.25	980879201	0.30	0.50	2.80
	Точность	0.98	0.0048	0.0080	0.002	2.16	0.0036	0.0060	0.002	2.21	0.0031	0.0051	0,002

3.4 Настройка дополнительных параметров процесса вулканического извержения и систем наблюдений за ним

Переход от статических задач геодезии к динамическим вызывает значительное увеличение размерности последних. Оцениваемый расширенный вектор $X_R(X,t)$ параметров состояний содержит параметры движений и деформаций физической поверхности Земли или, в общем случае, вектор параметров напряженно-деформированного состояния земной коры (горных пород) и параметры изменений (вариаций) во времени внешнего гравитационного поля Земли [157].

Включение в $X_R(X,t)$ дополнительных параметров – коэффициентов, характеризующих физические свойства ГО – упругость, вязкость и т.д., приводит к еще большему увеличению размерности задачи. Для уменьшения размерности задачи нами используется адаптивный фильтр Калмана-Бьюси (ФКБ). Адаптация заключается не только в том, что в процессе обработки наблюдений решается задача выбора адекватной модели, но и выполняется настройка (уточнение) некоторых параметров (коэффициентов) модели, которые не включаются в определяемый расширенный вектор $X_R(X,t)$ [89]. Более общая цель адаптации – преодоление априорной неопределенности (в структуре модели закономерностей и задании ее коэффициентов) при решении задач интерпретации наблюдений и оптимального управления как системой наблюдений, так и объектом наблюдений [189].

Развиваемый нами способ настройки параметров по критерию минимума суммы дисперсий оценок параметров, определяемых по адаптивному рекуррентному фильтру Калмана-Бьюси, проиллюстрируем вычислительным экспериментом на модели из подраздела 3.1 – участок земной поверхности, расположенный вблизи действующего вулкана (рисунок 20).

Результатом математической обработки и интерпретации по алгоритму ФКБ (подраздел 3.3) смоделированных пространственно-временных рядов комплексных наблюдений (подраздел 3.2) явились оценки геодезических высот мобильных пунктов, оценки вертикальных смещений этих пунктов, оценки характеристик гравитационного поля на пунктах геодезической сети в 4-х эпохах с оценкой точности (таблицы 11 и 12).

Часть значений параметров ГО и системы наблюдений была настроена [91, 98, 100, 101]. Для геодинамического объекта, которым являлась вулканическая область, была выполнена настройка параметров

экспоненциального закона излияния магмы и процент оставшегося в конусе вулкана и на его поверхности вещества при извержении, так как его часть выбрасывается в атмосферу.

По оценкам параметров определим процент оставшегося в конусе вулкана и на его поверхности вещества при извержении для 2, 3 и 4 эпох:

$$\lambda(t=2)=\frac{\Delta MK(t=2)}{MO(t=2)}100\%=69\%,$$

$$\lambda(t=3)=\frac{\Delta MK(t=3)}{MO(t=3)}100\%=70\%,$$

$$\lambda(t=4)=\frac{\Delta MK(t=4)}{MO(t=4)}100\%=89\%.$$

Теперь найдем параметры экспоненциального закона излияния магмы. Расчет количества магмы, извергнутой ко времени τ с начала извержения выполняется по формуле

$$M_{изл.}(\tau)=\Delta B(1-e^{-W_0\tau/\Delta B}). \qquad (74)$$

Для трех эпох будем иметь три таких нелинейных уравнения с двумя неизвестными ΔB и W_0. Определим эти неизвестные графическим способом. Для этого прологарифмируем (74) и выразим W_0 через ΔB:

$$W_0=\Delta B(\ln\Delta B-\ln(\Delta B-M_{изл.}(\tau))/\tau, \qquad (75)$$

где W_0 – начальный расход магмы;

ΔB – избыток магмы в очаге;

τ – время от начала извержения.

Значения τ и оценки $M_{изл.}=MO$, полученные после математической обработки с учетом модели произвольного смещения пунктов, показаны в таблице 13.

Таблица 13

Значения τ и оценки $M_{изл.}=MO$

Событие	Дата	Время в днях	τ в днях	$M_{изл.}$ (10^9 тонн)
Эпоха t =1	7 мая	0		0
Начало извержения	8 мая	1	0	0
Эпоха t =2	7 июля	61	60	4,316
Эпоха t =3	6 сентября	122	121	6,911
Эпоха t =4	6 ноября	183	182	8,646

Подставляя данные для 2, 3 и 4 эпохи в (75), имеем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} W_0 = \Delta B(\ln \Delta B - \ln(\Delta B - 4.316)/60, \\ W_0 = \Delta B(\ln \Delta B - \ln(\Delta B - 6.911)/121, \\ W_0 = \Delta B(\ln \Delta B - \ln(\Delta B - 8.646)/182 \end{cases} \quad (76)$$

Построив график для каждого уравнения этой системы (Рис. 15), найдем приближенные значения ΔB и W_0, как абсциссу и ординату центра треугольника, возникшего при пересечении трех графиков. После учета размерностей величин, получаем следующие значения: избыток магмы в очаге $\Delta\hat{B} = 1.11 \times 10^7$ тонн, начальный расход магмы $\hat{W}_0 = 0.90 \times 10^7$ тонн/сутки=1043 тонн/секунда. .

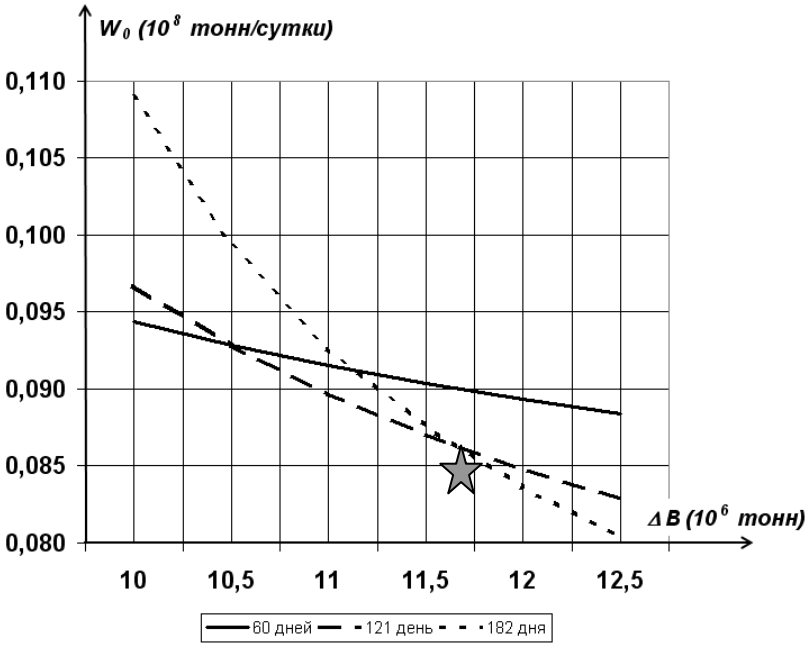


Рис. 15. Графики зависимостей W_0 от ΔB для эпох 2, 3 и 4

Использование адаптивного ФКБ позволило выполнить настройку массы конуса вулкана в 1 эпоху (таблица 14), координат центра глубинного маскона, аппроксимирующего изменения массы в верхней части магматического очага (таблица 15) и установить оптимальные характеристики системы наблюдений. Для оптимизации системы наблюдений настраивался вес гравиметрических наблюдений (вес нивелирных превышений был принят обратно пропорциональным длине

хода нивелирования – $p_{h_i} = 1/L_i$, где L_i – длина хода в км) и точность измерений превышений и абсолютных значений силы тяжести. В качестве критерия оптимизации использовался критерий ФКБ (минимум обобщенной суммы дисперсий $trK_{XR}(X,t)$). Обобщенная сумма дисперсий $trK_{XR}(X,t)$ минимизировалась подбором коэффициентов модели таким же образом, как и в работе [71, 72]. В таблицах 14, 15, 17 и 19 даны настроенные значения параметров и соответствующие им значения $\min trK_{XR}(X,t)$.

Таблица 14

Настройка радиуса маскона *RK* (конуса) и его массы *MK* в 1 эпоху.

$RK(t=1)$ в метрах	488,0	489,0	489,5	490,0	490,5	491,0	492,0
$MK(t=1)$ в 10^9тонн	1,280	1,288	1,292	1,296	1,300	1,304	1,312
$trK_{XR}(X,t)$	1,4865	1,4838	1,4831	1,4828	1,4829	1,4835	1,4859

Таблица 15

Настройка координат *X, Y, Z* центра глубинного маскона

Эпоха	Параметры координат и геодезического объекта									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	X (м)	5920	5930	**5940**	5950	5960	5970	5980	5990	6000
	$trK_{XR}(X,t)$	4,274	4,205	**4,174**	4,179	4,220	4,296	4,407	4,552	4,730
	Y (м)	-40	-30	-20	**-10**	0	10	20	30	40
	$trK_{XR}(X,t)$	5,381	4,856	4,529	**4,402**	4,480	4,764	5,258	5,965	6,889
	Z (м)	-4960	-4970	-4980	**-4990**	-5000	-5010	-5020	-5030	-5040
	$trK_{XR}(X,t)$	5,094	4,907	4,786	**4,730**	4,738	4,809	4,940	5,131	5,380
3	X (м)	5920	5930	5940	5950	**5960**	5970	5980	5990	6000
	$trK_{XR}(X,t)$	4,062	3,857	3,708	3,615	**3,578**	3,595	3,666	3,791	3,968
	Y (м)	-40	-30	-20	-10	**0**	10	20	30	40
	$trK_{XR}(X,t)$	5,765	4,850	4,200	3,820	**3,713**	3,883	4,334	5,070	6,094
	Z (м)	-4960	-4970	-4980	-4990	**-5000**	-5010	-5020	-5030	-5040
	$trK_{XR}(X,t)$	4,571	4,287	4,087	3,968	**3,928**	3,967	4,083	4,273	4,538
4	X (м)	5920	5930	5940	5950	5960	5970	**5980**	5990	6000
	$trK_{XR}(X,t)$	4,312	3,973	3,701	3,497	3,359	3,288	**3,282**	3,340	3,462
	Y (м)	-40	-30	-20	-10	**0**	10	20	30	40
	$trK_{XR}(X,t)$	5,370	4,427	3,775	3,416	**3,356**	3,596	4,143	4,999	6,169
	Z (м)	-4960	-4970	-4980	-4990	**-5000**	-5010	-5020	-5030	-5040
	$trK_{XR}(X,t)$	4,014	3,745	3,561	3,462	**3,445**	3,509	3,652	3,873	4,171

В таблице 16 приведены результаты настройки параметров ГО (см. рисунок 13) при использовании ФКБ в сравнении с их модельными значениями.

Таблица 16

Настроенные и модельные параметры геодинамического объекта

Параметры модели геодинамического объекта	Значения	Эпоха		
		2	3	4
Координата *X* центра глубинного маскона (м)	Модельные	6000	6000	6000
	Настроенные	5940	5960	5980
Координата *Y* центра глубинного маскона (м)	Модельные	0	0	0
	Настроенные	-10	0	0
Координата *Z* центра глубинного маскона (м)	Модельные	-5000	-5000	-5000
	Настроенные	-4990	-5000	-5000
Часть оставшегося на конусе вещества (%)	Модельные	70	70	90
	Настроенные	69	70	89
Масса конуса вулкана в 1 эпоху (10^9тонн)	Модельные	1.377		
	Настроенные	1.296		
Начальный расход магмы W_0 (тонна/секунда)	Модельные	1042		
	Настроенные	1043		
Избыток магмы в очаге ΔB (тонн)	Модельные	$1.12*10^7$		
	Настроенные	$1.11*10^7$		

Интенсивность геодинамических процессов предъявляет требования к системе наблюдений. В рассматриваемом случае учтено, что вектор параметров геодинамического объекта включает в себя характеристики вертикальных движений и изменений гравитационного поля, а система наблюдений состоит из геодезических (нивелирование) и гравиметрических (определение абсолютных значений силы тяжести) наблюдений в пространстве и времени. Веса для эпох 2, 3 и 4 гравиметрических наблюдений p_g (таблицы 17, 18) и оптимальные соотношения точности разнородных наблюдений для смоделированного геодинамического объекта (таблицы 19, 20) настраивались.

Таблица 17

Процесс настройки веса гравиметрических наблюдений p_g в каждую эпоху

Эпоха 2	p_g	0,0020	0,0021	0,0023	**0,0025**	0,0027	0,003	0,004
	$trK_{XR}(X,t)$	3,7016	3,6941	3,6858	**3,6848**	3,6893	3,7042	3,7975
Эпоха 3	p_g	0,0100	0,0110	0,0115	**0,0120**	0,0130	0,0140	0,0160
	$trK_{XR}(X,t)$	7,5475	7,5453	7,5448	**7,5446**	7,5451	7,5464	7,5512
Эпоха 4	p_g	0,0260	0,0280	0,0290	**0,0300**	0,0310	0,0320	0,0400
	$trK_{XR}(X,t)$	7,0383	7,0377	7,0376	**7,0375**	7,0376	7,0378	7,0414

Из таблицы 17 следует таблица 18.

Таблица 18

Настроенные веса гравиметрических наблюдений p_g.

Эпохи	2	3	4
Веса гравиметрических наблюдений	0.0025	0.0120	0.0300

Таблица 19

Значения $trK_{XR}(X,t)$, соответствующие разным парам m_g (характеризующих точность гравиметрических наблюдений) и m_h (характеризующих точность нивелирования)

	m_g =1мкгал	m_g =3мкгал	m_g =5мкгал	m_g =10мкгал	m_g =15мкгал
m_h =0.25мм	1,121	**0,734**	2,203	6,505	17,581
m_h =0.50мм	4,472	**1,931**	2,111	6,539	11,646
m_h =0.75мм	8,961	4,138	**3,859**	7,087	16,825
m_h =1.00мм	15,400	6,465	**5,455**	8,962	11,525

Результаты настройки этих пар погрешностей m_g и m_h представлены в таблице 20.

Таблица 20

Взаимно соответствующие погрешности гравиметрических наблюдений m_g и нивелирования m_h

m_h (мм)	0.25	0.50	0.75	1.00
m_g (мкгал)	3	3	5	5

В результате вычислительного эксперимента показана эффективность предлагаемого способа моделирования геодинамических объектов и настройки (адаптации) его коэффициентов и начальных оценок

параметров по критерию оптимальности рекуррентного фильтра Калмана-Бьюси – обобщенной дисперсии (суммы дисперсий) оцениваемых параметров. Блок настройки входит в общий алгоритм совместной математической обработки и интерпретации (в форме адекватной модели закономерностей движений и деформаций ГО) многомерных пространственно-временных рядов результатов геодезических и гравиметрических наблюдений (рисунок 2).

3.5 Изучение глубинного строения земной коры на основе анализа вариаций силы тяжести

При изучении глубинного строения земной коры необходима комплексная интерпретация геофизических полей, прежде всего, гравитационного, магнитного и сейсмического [192, 193, 203]. При этом используются сложные физические модели земной коры и верхней мантии – плотностные, магнитные, скоростные и др.

Большое применение для геологического картирования, поисков и разведки месторождений различных полезных ископаемых имеет гравиметрия, как прикладной геофизический метод. При изучении геодинамических процессов методом высокоточной гравиметрии интерпретация должна выполняться через измеряемое поле силы тяжести и его аномальные характеристики. Сглаживание поля силы тяжести через вычисление потенциала снижает разрешающую способность гравиметрического метода улавливать глубинные сейсмо-тектонические проявления, следствия которых на поверхности могут запаздывать на 2-7 лет. Здесь мы рассмотрим пример визуализации вариаций силы тяжести, как элемент описываемых в диссертации методов изучения геодинамических объектов и процессов.

Результаты оценивания параметров моделей движений пунктов нивелирной сети и характеристик гравитационного поля в этих пунктах даны в таблицах 11 и 12. Вычисленные вариации силы тяжести для эпох 2, 3 и 4 по сравнению с эпохой 1 даны в таблице 21.

Таблица 21

Вариации силы тяжести (мкГал)

Пункт	$g(t = 2) - g(t = 1)$	$g(t = 3) - g(t = 1)$	$g(t = 4) - g(t = 1)$
C1	-370	-238	-174
C2	-316	-153	-67
M1	-1341	-1740	-2076
M2	-4129	-6044	-7633
M3	-1450	-1928	-2329

Для визуализации вариаций силы тяжести (таблица 21) использовался крайгинг, описываемый, например, в работах [63, 230] и реализуемой программой Surfer. Этот метод основан на некоторых предположениях о вероятностной структуре картируемого поля. Наблюдения рассматриваются как реализация случайного процесса со стационарными приращениями, т.е. процесса, у которого математическое ожидание разности наблюдений в любых двух точках постоянное и равно нулю, а дисперсия разностей зависит только от расстояния между точками наблюдений.

3.6 Необходимость совместного учета нивелирных и гравиметрических наблюдений в условиях ведения крупномасштабных горных работ

Значимые вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей во времени могут возникать, в частности, при разработке крупных месторождений полезных ископаемых. В России имеется ряд месторождений, для которых характерно перемещение больших масс руд и пород. Например, за более чем 60 лет извлечено и перемещено более 1 млрд. $м^3$ фосфатных руд в Хибинском массиве, причем ежегодно извлекается и перемещается 160 млн. т. руд и пород. Глубина работ достигает 600-700 метров. Откосы стен рудника порядка 35–40 градусов. В таких условиях ведения крупномасштабных горных работ геомеханическая ситуация значительно усложняется. Для своевременного прогноза и профилактики катастрофических явлений выполняется комплексный мониторинг массива горных пород. В частности, для мониторинга деформационных процессов применяют высокоточные геодезические наблюдения.

Для определения вертикальных движений земной поверхности в районах добычи полезных ископаемых используется геометрическое нивелирование. Поле силы тяжести в конкретном районе зависит от распределения масс внутри Земли. Перераспределение больших объемов пород и руды вызовет соответственно значительное изменение поля силы тяжести, а недоучет влияния перемещенных масс на результаты нивелирования может быть причиной неверного представления о картине вертикальных движений [90].

Для того, чтобы оценить степень влияния перемещенных масс на результаты нивелирования нами была смоделирована ситуация, соответствующая добыче и перемещению руды с наличием одновременно вертикальных движений в районе месторождения (Рис. 16). Возни-

кающее при перемещении руды аномальное гравитационное поле было аппроксимировано как система двух масконов.

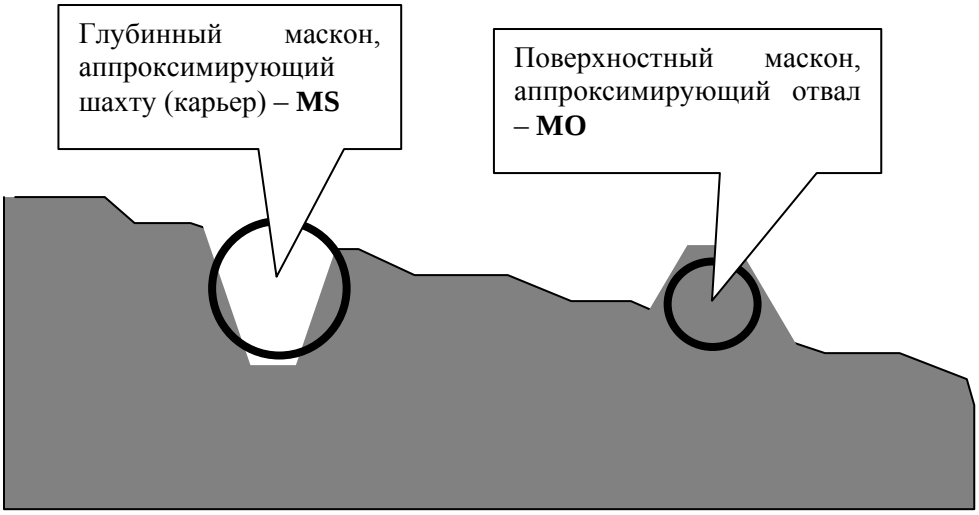


Рис. 16. Аппроксимация масконами шахты (карьера) и отвала пород

Система наблюдений за геодинамическим объектом была выбрана та же, что и в подразделе 3.2. Она включает нивелирные наблюдения (семь линий) и гравиметрические наблюдения (определение абсолютных значений силы тяжести на пяти пунктах этой сети) (рис. 17). Нивелирная сеть состоит из двух взаимностабильных пунктов C_1 и C_2 (их взаимное положение со временем не меняется) и трех мобильных пунктов M_1, M_2 и M_3.

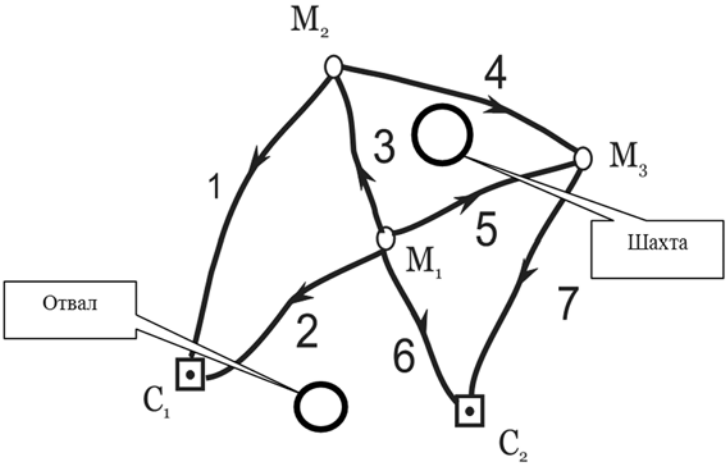


Рис. 17. Сеть нивелирования

Вектор параметров динамической системы включает отметки мобильных пунктов H_{M1}, H_{M2}, H_{M3}, их вертикальные смещения u_{M1}, u_{M2}, u_{M3} и, в качестве характеристик аномального гравитационного поля, значения масс глубинного маскона MS (шахта) и поверхностного маскона MO (отвал).

При расчетах принята пространственная топоцентрическая астрономическая горизонтная система координат (ПТАГСК), которая определяется следующим образом. Начало координат совпадает с точкой наблюдения на Земле, ось Z направлена по отвесной линии в сторону увеличения высот, ось X лежит на пересечении плоскостей астрономического горизонта и астрономического меридиана точки и направлена на север, а ось Y лежит в плоскости астрономического горизонта и дополняет левую декартову систему координат.

Начало системы координат в пункте C_1. Модельные пространственные координаты пунктов сети и центров аномальных масс отвала So и шахты Ss представлены в таблице 22.

Таблица 22

Пространственные координаты пунктов сети и центров аномальных масс

	X(м)	Y(м)	H(м)	Z(м)
C_1	0	0	1185.02	0
C_2	844.92	3712.78	1203.77	18.75
M_1	2842.73	1468.92	1151.06	-33.96
M_2	4199.95	0	1365.19	180.17
M_3	4326.96	2792.05	1280.61	95.59
So	2300	1500	1400	214.98
Sk	3500	1500	980	-205.02

Математическую модель состояний геодинамического объекта представим уравнением

$$X_R(t) = \Phi(t,t-1)X_R(t-1), \qquad (77)$$

где $X_R(t)$ – расширенный вектор определяемых параметров состояния геодинамической системы, в который входят: отметки H_i пунктов сети наблюдений, параметры гравитационного поля в виде влияния аномальных масс, и параметры движений и деформаций физической поверхности;

$\Phi(t,t-1)$ – переходная матрица, показывающая закономерность изменений значений параметров от эпохи $t-1$ к эпохе t.

Интервал времени между эпохами постоянный и равен $\Delta t = 1$ год. Выполняются четыре эпохи нивелирных и гравиметрических наблю-

дений в течение трех лет. Модель вертикальных движений соответствует равномерному вращению одного жесткого блока (плиты), на котором находятся пункты M_1, M_2, M_3. При моделировании ось вращения была выбрана как параллельная линии, соединяющей пункты M_2 и M_3. Расстояние от оси вращения до M_1 составляет 0.50 км и 0.95 км до линии M_2M_3. Угловая скорость вращения плиты ω является постоянной и равна $\omega = 3.25\times10^{-5}$ рад/год. В результате вращения плиты смещения пунктов M_1, M_2, M_3 за три года составили u_{M1} = -48.70 мм, u_{M2} = 92.53 мм, u_{M2} = -92.53 мм.

Модельные значения отметок пунктов M_1, M_2 и M_3 в четыре эпохи представлены в таблице 23.

Таблица 23

Модельные значения отметок пунктов M_1, M_2 и M_3.

Пункт	$H(t = 1)$ (мм)	$H(t = 2)$ (мм)	$H(t = 3)$ (мм)	$H(t = 4)$ (мм)
M_1	1151060.00	1151044.00	1151028.00	1151011.00
M_2	1365190.00	1365221.00	1365252.00	1365283.00
M_3	1280610.00	1280641.00	1280672.00	1280703.00

Перемещение масс от эпохи к эпохе происходит с постоянной скоростью. Расчеты показали, что за 3 года влияние этого перемещения масс на результаты наблюдений силы тяжести достигло 2 мгал, а на нивелирные превышения достигло нескольких миллиметров. Пусть плотность пород составляет δ = 2.63 г/см^3 . Для радиуса шара, аппроксимирующего шахту RS = 300 м, получим массу $MS = 4/3\,\pi RS^3\delta = 2.97\times10^8$ тонн. Для радиуса шара, аппроксимирующего отвал RO = 260 м, получим массу $MO = 4/3\,\pi RO^3\delta = 1.94\times10^8$ тонн. Для случая расположения пунктов сети и центров аномальных масс, соответствующего рисунку 19 и таблице 22, влияние этого перемещения масс на нивелирные превышения δh в мм отражено в таблице 24.

Таблица 24

Влияние перемещенных масс на нивелирные превышения

Ход (конец-начало)	Длина хода (км)	δh_s (влияние шахты) мм	δh_o (влияние отвала) мм	δh (влияние итоговое) мм
C_1-M_2	4.2	0.08	-0.07	0.01
C_1-M_1	3.2	7.77	-3.91	3.86
M_2-M_1	2.0	-4.61	2.41	-2.20
M_3-M_2	2.8	0.00	0.00	0.00
M_3-M_1	2.0	-4.52	2.36	-2.16
C_2-M_1	3.0	5.89	-2.95	2.94
C_2-M_3	3.6	0.03	-0.03	0.01

Таким образом, нами был смоделирован геодинамический объект – район разработки рудного месторождения, в пределах которого происходят одновременно движения физической поверхности Земли и изменения гравитационного поля. Показано, что за 3 года влияние перемещения масс $MS = 4/3\pi RS^3\delta = 2.97\times10^8$ тонн и $MO = 4/3\pi RO^3\delta = 1.94\times10^8$ тонн на результаты наблюдений нивелирных превышений достигло 4 мм – величин, сопоставимых с величинами естественных вертикальных смещений реперов. Изменение силы тяжести составило 2 мгал, что существенно превышает разрешительные возможности метода и обеспечивает уверенную оценку аномальных явлений. Для изучения этого геодинамического объекта необходима совместная математическая обработка пространственно-временных рядов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений по методике, описанной в подразделе 3.3.

3.7 Выводы

Таким образом, приведены примеры совместной математической обработки и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов нивелирных и гравиметрических наблюдений в районе действующего вулкана и в условиях перемещения больших объемов руды и пород. Эти примеры соответствуют задаче разделения собственно движений физической поверхности и вариаций во времени внешнего гравитационного поля Земли (смещений уровенных поверхностей потенциала силы тяжести и изменений положений отвесных линий во времени).

Построена модель вертикальных движений и временных вариаций гравитационного поля в районе действующего вулкана. Аномалии гравитационного поля аппроксимируются в пространстве и времени двумя аномалиеобразующими телами – глубинным и поверхностным масконами. Созданная модель позволяет, в свою очередь, моделировать пространственно-временные ряды разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений в 4-х эпохах, которые можно использовать для отработки методики и технологии совместной математической обработки и пространственно-временной интерпретации результатов разнородных наблюдений.

Предложена модель системы наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в районе действующего вулкана. Смоделированные пространственно-временные ряды наблюдений нивелирных превышений и абсолютных значений ускорений силы тяжести в 4-х эпохах можно использо-

вать для отработки методики и технологии совместной математической обработки и интерпретации разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений.

Описывается вычислительный эксперимент по совместной математической обработке и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов комплексных наблюдений нивелирных превышений и абсолютных значений ускорений силы тяжести. Результатом явились оценки отметок мобильных пунктов, оценки вертикальных смещений этих пунктов, оценки аномалий силы тяжести, компонент уклонений отвесной линии и аномалий высоты на пунктах геодезической сети с оценкой их точности в 4-х эпохах. Совместная обработка нивелирных и гравиметрических наблюдений позволила при адекватных моделях закономерностей движений земной поверхности и изменений масс поверхностного и глубинного масконов повысить точность оценивания параметров геодинамического объекта.

В результате вычислительного эксперимента показана эффективность предлагаемого способа настройки (адаптации) коэффициентов и начальных оценок параметров геодезического объекта по критерию оптимальности рекуррентного фильтра Калмана-Бьюси – обобщенной дисперсии (суммы дисперсий) оцениваемых параметров. Блок настройки входит в общий алгоритм совместной математической обработки и интерпретации (в форме адекватной модели закономерностей движений и деформаций ГО) многомерных пространственно-временных рядов результатов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений. Рассмотрен пример визуализации по методу крайгинга вариаций силы тяжести.

Мы, на Земле, все время ходим над клокочущим, багровым морем огня, скрытого там – в чреве земли. Но никогда не думаем об этом. И вот вдруг бы тонкая скорлупа у нас под ногами стала стеклянной, вдруг бы мы увидели...

Евгений Замятин. Мы

4 ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РАЙОНА ГОТОВЯЩЕГОСЯ ВУЛКАНИЧЕСКОГО ИЗВЕРЖЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

4.1 Модель геодинамического объекта

Выше были описаны вычислительные идентификационные эксперименты по совместной математической обработке и интерпретации пространственно-временных рядов нивелирных и гравиметрических наблюдений в условиях перемещения больших объемов пород и руды. Эти примеры соответствует задаче разделения собственно движений физической поверхности и вариаций во времени внешнего гравитационного поля Земли (смещений уровенных поверхностей потенциала силы тяжести и изменений положений отвесных линий во времени). Результатом математической обработки наблюдений являются как оценки отметок мобильных пунктов, вертикальных смещений этих пунктов, так и оценки параметров меняющегося гравитационного поля с оценкой точности всех определяемых параметров. Введение в вектор параметров масконов (аномальных масс) позволило компактно описывать локальное гравитационное поле.

Здесь представлено развитие теории и методов изучения объектов геодинамики по комплексным геодезическим и гравиметрическим наблюдениям [89, 91-94, 97-101, 104-106, 108, 112, 113, 116], дающие возможность получать характеристики как вертикальных, так и горизонтальных движений земной поверхности и изменений аномальных масс. Значительно расширен состав разнородных наблюдений. Это гравиметрические, угловые, линейные измерения, нивелирование и GPS-наблюдения.

Классическим примером некорректной обратной задачи в геофизике являются попытки объяснить существовавшую модель расположения слоев [157]. Дж. Эверест определил уклонения отвеса в Индии и

приписал их воздействию Гималаев. Однако, последующие независимые исследования английского астронома Б. Эри в 1855 г. и несколько позже Джоном Праттом для объяснения различий между астрономо-геодезическими и топографическими уклонениями отвеса привели к предложению гипотезы изостазии – компенсации топографических масс.

Практические вопросы решения обратных задач широко распространены в гравиразведке. Комплексная интерпретация различных геофизических полей, применения гравиметрии и геодезических методов при мониторинге природной и техногенной геодинамики обсуждались в работах [143, 193]. Ведутся исследования по определению влияний на значение топографической редукции силы тяжести [3, 174, 175]. Многие результаты имеют практическое применение в виде геоинформационных систем различного назначения и наполнения [213]. Проводятся исследования связи гравитационных данных и деформаций [15, 33, 188].

4.2 Исследование вулканизма

Современные возможности измерений гравитационных и деформационных полей очень востребованы при исследовании вулканизма [53, 188, 97-101, 193, 146]. Опасным в глобальном масштабе считается вулкан Йеллоустоун (США) – один из самых крупных супервулканов в мире. Размер кальдеры – циркообразной котловины супервулкана – составляет примерно 72 км (рис. 18). Проводится мониторинг состояния вулкана Геологической службой США (USGS). На официальном сайте USGS (https://www.usgs.gov/) есть интерактивная карта, отображающая в онлайн-режиме статус опасных вулканов планеты.

Геофизики из России (Новосибирск, Томск, Петропавловск-Камчатский), Франции, Саудовской Аравии и Египта описали в 2016 году в журнале Nature Communications строение самого опасного супервулкана Земли – Тобы, расположенного на Суматре (Индонезия). Ученые представили модель строения вулкана, основанную на имеющихся сейсмических наблюдениях. По их мнению, на глубине более 150 километров под погружающейся вниз литосферной плитой газы и расплавы формируют потоки магмы, которые поднимаются наверх. Это приводит к образованию на глубине 75 километров под Тобой магматической камеры объемом 50 тысяч кубических километров. Извержение супервулкана происходит тогда, когда давление в камере достигает критического значения. В этом случае магма поступает наверх, что приводит к расплавлению (разрыву) коры, и изливается на поверхность планеты.

Рис. 18. Магматическая камера вулкана Йеллоустоун

Исследование накопления магмы в магматических очагах и ее подъем к поверхности является одной из важных проблем в вулканологии и геодинамике. В механическом аспекте эта проблема может решаться с привлечением методов геодезии и геофизики. Геодезические методы (нивелирование, угловые, линейные измерения, GPS-наблюдения) позволяют определить перемещения земной поверхности, которые являются следствием меняющегося напряженно-деформированного состояния в окрестности очага землетрясения. Но это изменение НДС является в свою очередь следствием увеличения внутриочагового давления при накапливании магмы в верхнем магматическом очаге вулкана. Таким образом, мы имеем дело с перемещением масс (наполнение верхнего магматического очага). Следовательно, наблюдения геодезическими приборами, которые устанавливаются в рабочее положение с помощью уровня, должны обрабатываться совместно с геофизическими (гравиметрическими) наблюдениями. Обычно для оценки параметров верхнего магматического очага (глубина образования до 50 км) по смещениям поверхности ведутся наблюдения в районе радиусом около 10 км от кратера вулкана. Выделить смещения от деформации глубинного очага (глубина 50-300 км) на фоне современных движений обычно не удается.

4.3 Решение обратных задач геофизики по геодезическим данным

Изменения характеристик НДС по результатам геодезических и геофизических измерений возможно определить только дискретно – в точках наблюдений и через какие-то интервалы времени между эпохами наблюдений. В работах [97-101] создание модели геодинамического объекта заключалось в вычислении вертикальных и горизонтальных смещений заложенных в окрестности вулкана геодезических пунктов, а также вычислении характеристик гравитационного поля на этих пунктах для нескольких эпох наблюдений. Система наблюдений в каждую эпоху включала нивелирные превышения с точностью $0.5\ \text{мм}\sqrt{L}$; горизонтальные углы – 0,25"; светодальномерные дальности – 2 мм; GPS наблюдения – 4 мм для ΔX, ΔY, 7 мм для ΔZ; абсолютные значения силы тяжести – 5 мкгал.

В качестве геодинамического объекта выбрана вулканическая область, испытывающая напряженно-деформированное состояние (НДС). Одной из важных проблем в вулканологии и геодинамике является исследование накопления магмы в магматических очагах и ее подъем к поверхности. В механическом аспекте эта проблема может решаться с привлечением методов геодезии и геофизики. Геодезические методы (нивелирование, угловые, линейные измерения, GPS-наблюдения) позволяют определить перемещения земной поверхности, которые являются следствием меняющегося напряженно-деформированного состояния в окрестности вулканического очага. Но это изменение НДС является в свою очередь следствием увеличения внутриочагового давления при накапливании магмы в верхнем магматическом очаге вулкана [270]. Таким образом, мы имеем дело с перемещением масс (наполнение верхнего магматического очага). Следовательно, наблюдения геодезическими приборами, которые устанавливаются в рабочее положение с помощью уровня, должны обрабатываться совместно с гравиметрическими наблюдениями. Обычно для оценки параметров верхнего магматического очага (глубина образования до 50 км) по смещениям поверхности ведутся наблюдения в районе радиусом около 10 км от кратера вулкана [53]. Выделить смещения от деформации глубинного очага (глубина 50-300 км) на фоне современных движений обычно не удается.

С целью уточнения теории, методики, отработки алгоритмов совместной математической обработки и интерпретации геодезических и гравиметрических наблюдений были смоделированы картина подготовки вулканического извержения и сопутствующие этой подготовке изменения напряженно-деформированного состояния приповерхност-

ного слоя земной коры. Полученная физико-математическая модель использовалась для статистического моделирования пространственно – временных рядов геодезических и гравиметрических наблюдений и последующего уточнения алгоритмов их совместной математической обработки.

Глубина центра верхнего шарообразного магматического очага была принята равной 5000 м, величина радиуса очага – 2500 м – как в подразделе 3.1 (рис. 19).

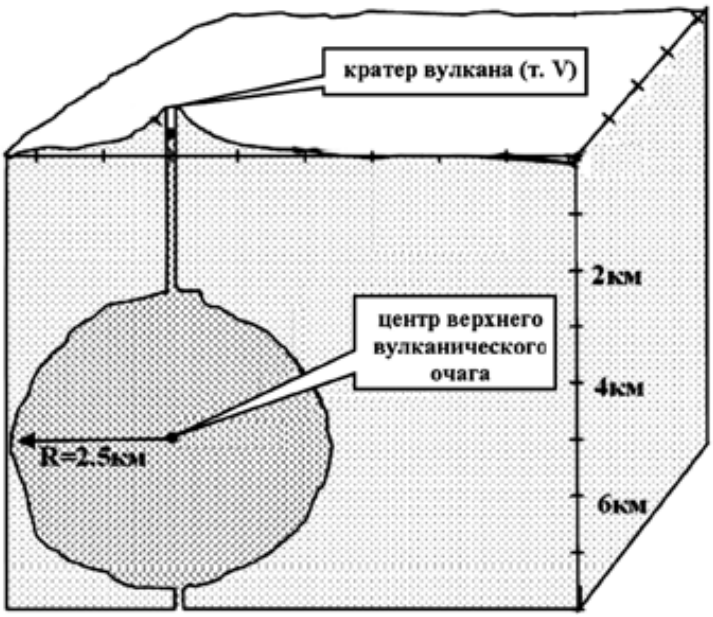


Рис. 19. Модель вулканической области
с верхним магматическим очагом

Меняющееся во времени локальное гравитационное поле и смещения (горизонтальные и вертикальные) земной поверхности в районе готовящегося вулканического извержения связывались с увеличением аномальной массы в магматическом очаге и происходящим по этой причине нарастании внутриочагового давления [53]. Но эти изменения по результатам геодезических и гравиметрических измерений возможно определить только дискретно – в точках наблюдений и через какие-то интервалы времени между эпохами наблюдений. Поэтому создание модели геодинамического объекта заключалось в вычислении вертикальных и горизонтальных смещений заложенных в окрестности вулкана 10 геодезических пунктов, а также в вычислении характеристик гравитационного поля на этих пунктах для трех эпох наблюдений, выполненных через $\Delta t = 2$ года.

Исходные геофизические предпосылки создания модели соответствуют работе [53]. Литосфера принимается вязкоупругой с коэффициентом вязкости $\eta_{лит.} = 10^{17}$ Па×с и модулем упругости $E = 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, магматический очаг сферическим, скорость увеличения объема в очаге $\nu_V = 5\times10^7$ м^3/год. Для вязкоупругой среды Максвелла (полупространства с шаровой полостью) при постоянной скорости увеличения объема давление в камере $P_{очага}(t)$ со временем изменяется по экспоненте:

$$P_{очага}(t) = P_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}), \tag{78}$$

$$P_\infty = \frac{\nu_V \eta_{лит.}}{2\pi R^3_{очага}(1+\nu)}.. \tag{79}$$

В формулах (78) и (79) P_∞ – асимптотическое значение давления, соответствующее чисто вязкой среде с вязкостью $\eta_{лит.}$, $\tau_0 = \eta_{лит.}/E$ – время релаксации среды.

Для принятых нами характеристик литосферы и магматического очага вычисляем:

$$P_\infty = 1.27\times10^8 \text{ Па}, \tau_0 = 31.7 \text{ года}, \tag{80}$$

давление в очаге для первой эпохи (t = 0 лет)

$$P_{очага}(t = 1) = 0 \text{ Па},, \tag{81}$$

давление в очаге для второй эпохи (t = 2 года)

$$P_{очага}(t = 2) = 7.78\times10^6 \text{ Па}, \tag{82}$$

давление в очаге для третьей эпохи (t=4 года)

$$P_{очага}(t = 3) = 1.51\times10^7 \text{ Па},. \tag{83}$$

Давление в шаровом очаге (рис. 20) вызывает напряженно-деформированное состояние упругого полупространства. Следствием являются смещения поверхности полупространства по вертикали u_z и в горизонтальной плоскости u_r в цилиндрической системе координат с началом на поверхности (т. О – проекция на поверхность центра сферы) и осью z, проходящей через центр сферы z_0 и направленной вниз (рис. 21).

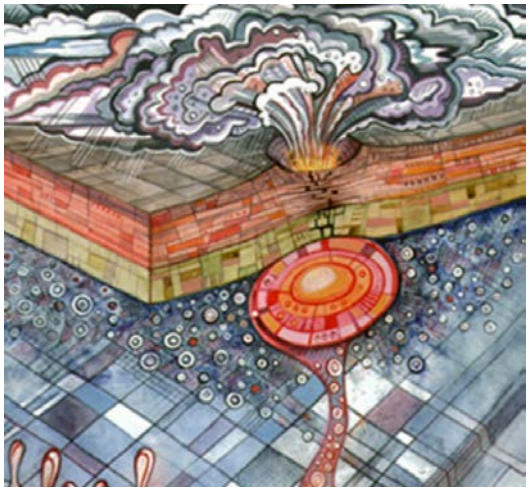


Рис. 20. Магматическая камера

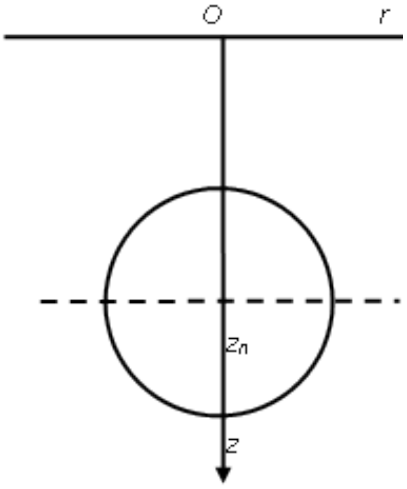


Рис. 21. Модель полупространства

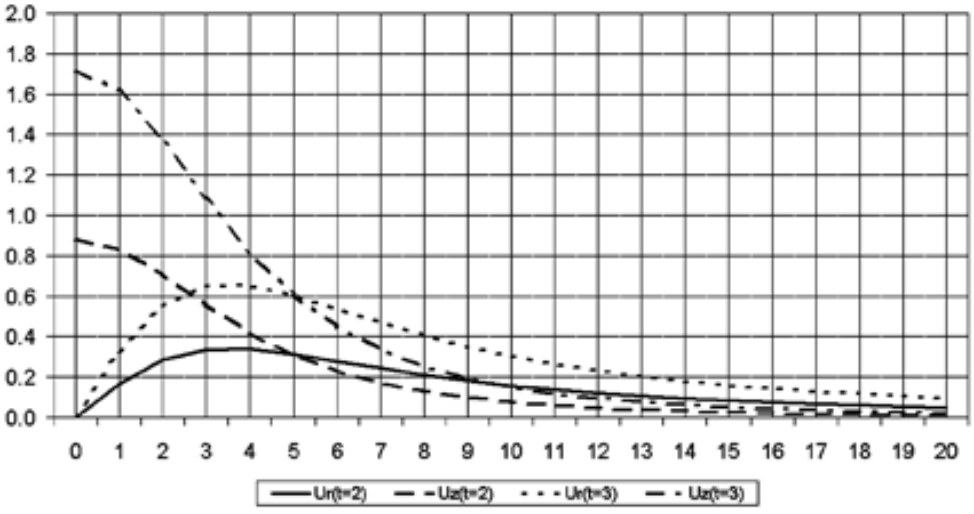


Рис. 22. Зависимости модельных горизонтальных и вертикальных смещений от расстояния до кратера

Для вычисления перемещений на поверхности u_z и u_r используем формулы из работы [53]:

$$u_r = 2P_{очага}R^3_{очага}\frac{1-\nu^2}{E}\frac{r}{(r^2+z_0^2)^{3/2}}, \qquad (84)$$

$$u_z = -2P_{очага}R^3_{очага}\frac{1-\nu^2}{E}\frac{z_0}{(r^2+z_0^2)^{3/2}},. \qquad (85)$$

Для принятой модели с радиусом очага $R_{очага}$=2500 м, заглублением центра z_0=5000 м и значениями давления (82) и (83) для второй и третьей эпохи были вычислены модельные u_r и u_z для разных расстояний r с шагом в 1 км (таблица 25).

Таблица 25

Горизонтальные и вертикальные смещения (в м) для разных r

r(км)	Эпоха t = 2 (2 года после эпохи 1)		Эпоха t = 3 (4 года после эпохи 1)	
	$Ur(t = 2)$	$Uz(t = 2)$	$Ur(t =3)$	$Uz(t = 3)$
0	0.000	0.886	0.000	1.717
1	0.167	0.835	0.324	1.619
2	0.284	0.709	0.550	1.374
3	0.335	0.558	0.650	1.083
4	0.337	0.422	0.654	0.818
5	0.313	0.313	0.607	0.607
6	0.279	0.232	0.541	0.450
7	0.243	0.174	0.472	0.337
8	0.211	0.132	0.409	0.256
9	0.183	0.101	0.354	0.197
10	0.158	0.079	0.307	0.154
11	0.138	0.063	0.268	0.122
12	0.121	0.050	0.234	0.098
13	0.107	0.041	0.207	0.079
14	0.094	0.034	0.183	0.065
15	0.084	0.028	0.163	0.054
16	0.075	0.024	0.146	0.046
17	0.068	0.020	0.131	0.039
18	0.061	0.017	0.119	0.033
19	0.055	0.015	0.108	0.028
20	0.051	0.013	0.098	0.024

Тенденции их изменения по мере удаления от кратера иллюстрирует рисунок 23. По горизонтальной оси – удаление от кратера r в километрах, по вертикальной оси – модельные u_r и u_z в метрах для второй и третьей эпохи.

Обратим внимание, что точка пересечения графиков для u_r и u_z в обеих эпохах соответствует расстоянию r = 5 км, т.е. принятому нами заглублению центра магматического очага z_0.

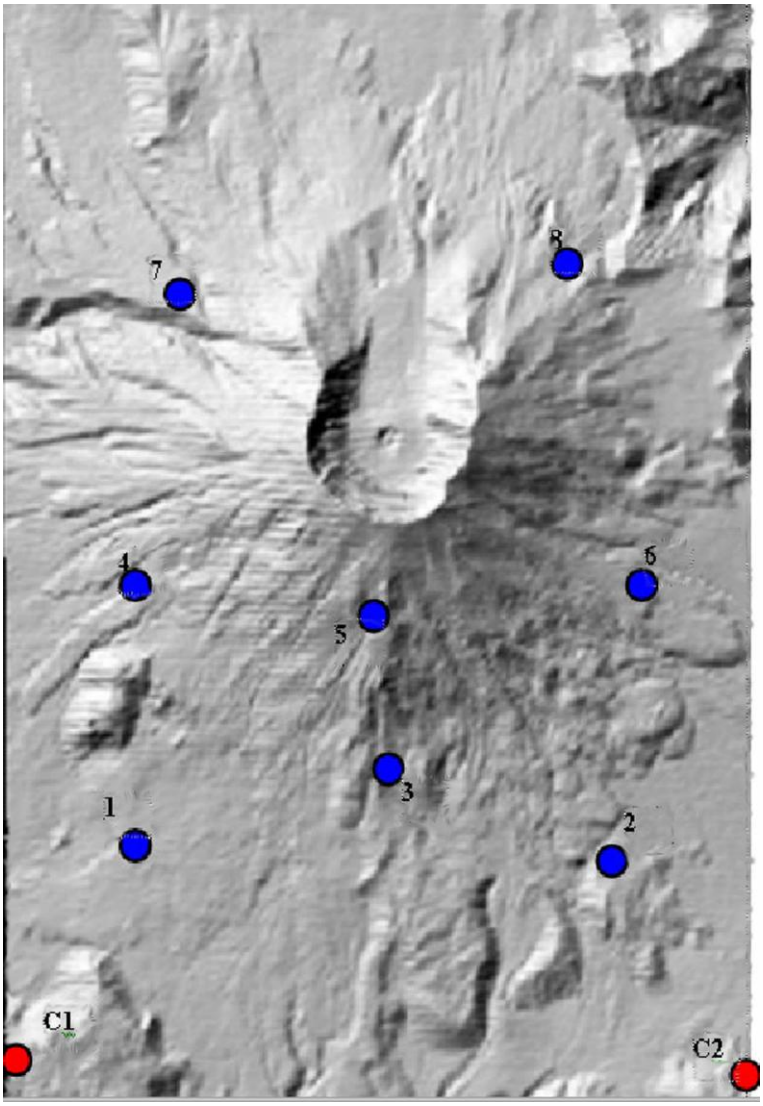


Рис. 23. Сеть геодезических пунктов в вулканической области

В окрестности вулкана была смоделирована геодезическая сеть на основе 10-ти закрепленных пунктов. Их координаты меняются по мере развития геодинамического процесса – происходят горизонтальные и вертикальные смещения пунктов в соответствии с модельными формулами (84) и (85). Для десяти пунктов смоделированной геодезической сети с заданными на эпоху $t = 1$ координатами в условной топоцентрической пространственной горизонтной геодезической системе координат (таблица 26) после преобразования из цилиндрической (рис. 21) получим следующие u_x, u_y, u_H, представленные в таблице 27. От-

метка точки О на рисунке 21 в этой системе выбрана как средняя в вулканической области и равна 1200 м.

Таблица 26

Пространственные координаты пунктов сети на эпоху $t = 1$

Пункт	X(м)	Y(м)	H(м)	Z(м)
С1	3215.338	6121.663	1167.543	-32.457
С2	3344.698	15348.903	1159.988	-40.012
1	5312.652	8014.358	1180.055	-19.945
2	5219.147	13722.68	1168.332	-31.668
3	6516.634	11106.317	1222.877	22.877
4	8545.442	7978.366	1249.394	49.394
5	8402.655	11008.24	1406.231	206.231
6	8714.887	13976.512	1250.538	50.538
7	11485.532	8848.614	1342.351	142.351
8	11502.566	13155.112	1338.652	138.652

Таблица 27

Теоретические смещения пунктов сети в горизонтной топоцентрической геодезической пространственной системе координат в эпохи $t = 2$ и $t = 3$ (в м)

Пункт	Эпоха $t = 2$ (2 года после эпохи 1)			Эпоха $t = 3$ (4 года после эпохи 1)		
	u_x	u_y	u_H	u_x	u_y	u_H
С1	-0.163	-0.117	0.120	-0.315	-0.227	0.232
С2	-0.178	0.116	0.134	-0.345	0.225	0.259
1	-0.248	-0.158	0.265	-0.482	-0.307	0.514
2	-0.258	0.147	0.269	-0.499	0.284	0.522
3	-0.341	0.010	0.489	-0.660	0.020	0.948
4	-0.148	-0.307	0.507	-0.286	-0.594	0.984
5	-0.245	0.001	0.765	-0.474	0.002	1.484
6	-0.134	0.311	0.523	-0.261	0.604	1.014
7	0.183	-0.265	0.616	0.355	-0.514	1.195
8	0.185	0.265	0.614	0.358	0.513	1.191

Обратим внимание на то, что теоретические смещения пунктов между эпохами $t = 3$ и $t = 2$ будут меньше, чем между эпохами $t = 2$ и $t = 1$, так как прирост давления в очаге $P_{очага}(t)$ замедляется в соответствии с экспоненциальным законом (78). Это замедление $\psi(t = 2,3)$ для равных интервалов времени 2 года между эпохами $t = 3$ и $t = 2$ и эпохами $t = 2$ и $t = 1$ вычислим по расчетным значениям $P_{очага}(t)$ в эпохи $t = 1$, $t = 2$ и $t = 3$ (формулы 81, 82, 83).

$$\psi(t=2,3)=\frac{P_{очага}(t=3)-P_{очага}(t=2)}{P_{очага}(t=2)-P_{очага}(t=1)}=0.939.. \qquad (86)$$

Так как в формулах расчета смещений (84) и (85) $P_{очага}(t)$ присутствует линейно, то и теоретические смещения u_z и u_r в цилиндрической системе координат между эпохами $t = 3$ и $t = 2$ и эпохами $t = 2$ и $t = 1$ будут отличаться в том же соотношении $\psi(t=2,3)$. После перехода к прямоугольной пространственной горизонтной топоцентрической системе координат в таком же соотношении окажутся соответственно значения смещений u_x, u_y, u_H.

С учетом смещений пунктов u_x, u_y, u_H (таблица 27) координаты пунктов сети (в м) в эпохи $t = 2$ и $t = 3$ будут представлены значениями, помещенными в таблице 28.

При последующем статистическом моделировании геодезических и гравиметрических измерений должны также учитываться меняющееся по мере накопления магмы в очаге локальное гравитационное поле на поверхности, а точнее в пунктах геодезической сети. Воспользуемся подходом, который заключается в использовании понятий аномалиеобразующих тел (АОТ), масконов и точечных масс при аппроксимации аномального гравитационного поля, уже применяемый в разделе 3. Также как и в разделе 3 имеем два маскона – глубинный (верхний магматический очаг) и поверхностный (конус вулкана). Влияние на ускорение силы тяжести массы Земли в этом районе примем как некоторую константу g_E.

Таблица 28

Пространственные координаты (в м) пунктов сети на эпоху $t = 2$ и $t = 3$

Пункт	Эпоха $t = 2$ (2 года после эпохи 1)			Эпоха $t = 3$ (4 года после эпохи 1)		
	x	y	H	x	y	H
C1	3215.175	6121.546	1167.663	3215.023	6121.436	1167.775
C2	3344.520	15349.019	1160.122	3344.353	15349.128	1160.247
1	5312.404	8014.200	1180.320	5312.170	8014.051	1180.569
2	5218.889	13722.827	1168.601	5218.648	13722.964	1168.854
3	6516.293	11106.327	1223.366	6515.974	11106.337	1223.825
4	8545.294	7978.059	1219.901	8545.156	7977.772	1220.378
5	8402.410	11008.241	1406.996	8402.181	11008.242	1407.715
6	8714.753	13976.823	1231.061	8714.626	13977.116	1231.552
7	11485.715	8848.349	1392.967	11485.887	8848.100	1393.546
8	11502.751	13155.377	1389.266	11502.924	13155.625	1389.843

Масса поверхностного маскона – конуса не меняется и принята в нашей модели равной

$$M_K = 1.55 \times 10^8 \text{ тонн}. \quad (87)$$

Масса глубинного маскона меняется со временем – увеличивается по мере поступления магмы в очаг. Аномальная масса глубинного маскона при скорости увеличения объема в очаге $\nu_V = 5 \cdot 10^7 \, \text{м}^3/\text{год}$ и плотности пород (пироксенит, перидотит, дунит) $\delta = 3.25 \, \text{г}/\text{см}^3$ согласно [196] для эпохи $t = 2$ составит

$$M_O(t = 2) = 3.25 \times 10^8 \text{ тонн} \quad (88)$$

и для эпохи t=3

$$M_O(t = 3) = 6.50 \times 10^8 \text{ тонн}. \quad (89)$$

С учетом влияний массы Земли, конуса вулкана (87) и аномальной массы вулканического очага (88) и (89) для всех пунктов сети были вычислены характеристики гравитационного поля (сила тяжести g, уклонения отвесной линии ξ”, η” и аномалия высоты ζ) для всех трех эпох. Результаты вычислений представлены в таблице 29.

Таблица 29

Характеристики гравитационного поля на пунктах сети в эпохи $t = 1$, $t = 2$ и $t = 3$

Пункт	Эпоха $t = 1$				Эпоха $t = 2$ (2 года после эпохи 1)				Эпоха $t = 3$ (4 года после эпохи 1)			
	g(мкгал)	ξ”	η”	ζ(см)	g(мкгал)	ξ”	η”	ζ(см)	g(мкгал)	ξ”	η”	ζ(см)
C1	980500049.41	0.003	0.002	0.011	980500061.14	0.006	0.004	0.011	980500072.86	0.009	0.007	0.011
C2	980500049.30	0.003	-0.002	0.011	980500062.37	0.007	-0.004	0.011	980500075.44	0.010	-0.007	0.011
1	980500048.08	0.006	0.004	0.014	980500074.07	0.011	0.007	0.014	980500100.05	0.016	0.010	0.014
2	980500047.95	0.006	-0.004	0.014	980500074.40	0.012	-0.007	0.014	980500100.84	0.017	-0.010	0.014
3	980500043.28	0.018	-0.001	0.017	980500090.95	0.025	-0.001	0.017	980500138.62	0.032	-0.001	0.017
4	980500043.17	0.008	0.017	0.017	980500092.34	0.011	0.024	0.017	980500141.50	0.014	0.030	0.017
5	980500026.28	0.085	0.000	0.019	980500096.20	0.089	0.000	0.019	980500166.12	0.094	0.000	0.019
6	980500042.48	0.008	-0.019	0.018	980500093.15	0.011	-0.025	0.018	980500143.81	0.014	-0.031	0.018
7	980500040.91	-0.018	0.026	0.018	980500099.00	-0.022	0.031	0.018	980500157.08	-0.025	0.036	0.018
8	980500040.83	-0.018	-0.026	0.018	980500098.80	-0.022	-0.031	0.018	980500156.77	-0.025	-0.036	0.018

4.4 Система наблюдений за геодинамическим объектом

Следующим этапом вычислительного идентификационного эксперимента было моделирование системы геодезических и гравиметрических наблюдений, необходимой для натурного слежения (мониторинга) горизонтальных и вертикальных движений приповерхностного слоя земной коры вокруг кратера вулкана (*V* на рисунке 19). Опорной основой системы наблюдений являются заложенные в окрестности вулкана 10 геодезических пунктов. На рисунке 23 показаны эти пункты модельной геодезической сети с привязкой к реально существующей вулканической области в районе вулкана Святой Елены (США, штат Вашингтон).

Из этих 10-ти пунктов два (С1 и С2), как наиболее удаленные от конуса вулкана приняты условностабильными, но их пространственное положение в идеальном случае должно определяться методами GPS/ГЛОНАСС наблюдений с привязкой к постоянно действующим пунктам международной GPS-службы (IGS). Для определения координат мобильных пунктов с номерами 1, 2,…, 8 с привязкой к пунктам С1 и С2 были организованы высокоточные геодезические наблюдения: GPS-сеть (рис. 24), нивелирная сеть (рис. 25) и линейно-угловая сеть (рис. 26).

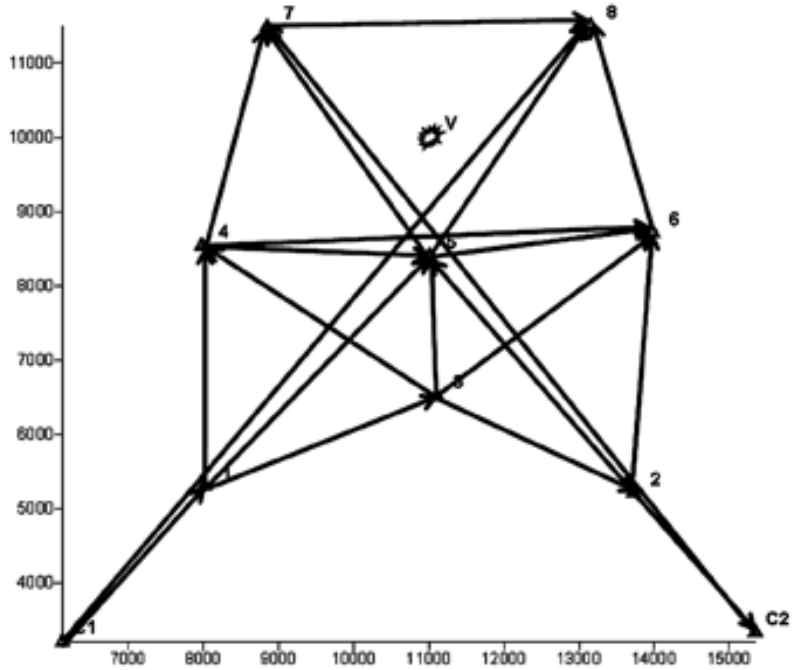


Рис. 24. Схема GPS-сети в вулканической области

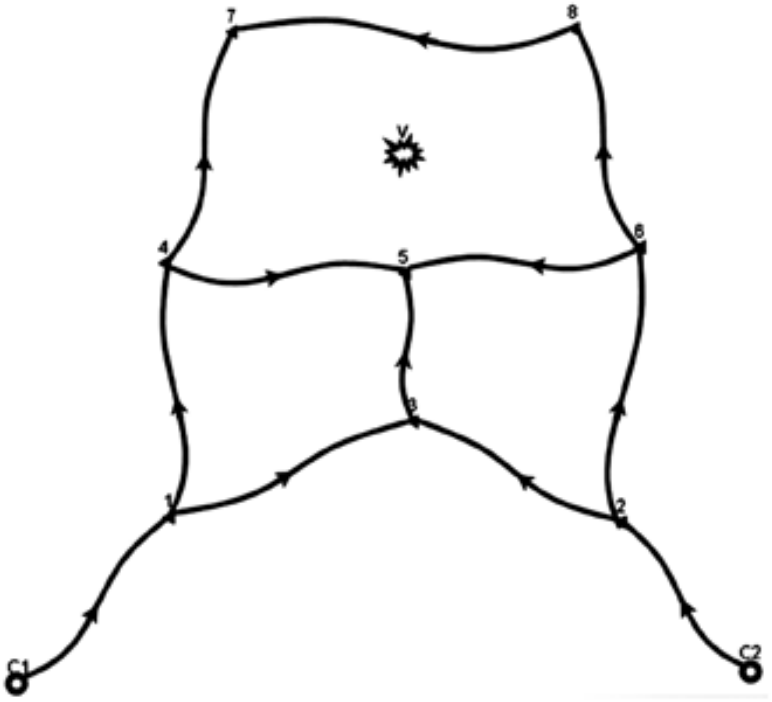


Рис. 25. Схема сети нивелирования в вулканической области

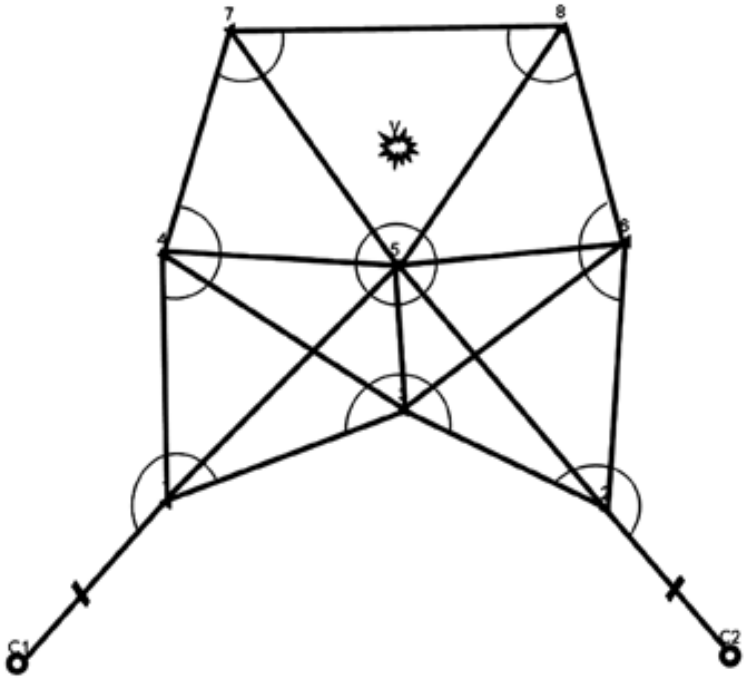


Рис. 26. Схема линейно-угловой сети в вулканической области

Для первой эпохи расширенный вектор параметров будет состоять только из координат 8-ми мобильных пунктов и массы конуса вулкана *МК*:

$$X_R(t=1)=(X_1,Y_1,H_1,\ldots,X_8,Y_8,H_8,MK)^{\mathrm{T}}. \quad (90)$$

Для эпох 2, 3 расширенный вектор параметров будет состоять из характеристик горизонтальных и вертикальных движений этих пунктов, массы конуса вулкана *МК* и прироста массы вулканического очага δMO, аппроксимирующего изменение (вариацию) аномального гравитационного поля. Например, если принимается гипотеза равномерного произвольного движения каждого мобильного пункта, то расширенный вектор параметров для эпохи 2 и 3 будет:

$$X_R(t=2)=X_R(t=3)= \\ =(X_1,Y_1,H_1,...,X_8,Y_8,H_{8,}MK,u_{X_1},u_{Y_1},u_{H_1},...,u_{X_8},u_{Y_8},u_{H_8},\delta MO)^T, \quad (91)$$

где $u_{X_1},u_{Y_1},u_{H_1},...,u_{X_8},u_{Y_8},u_{H_8}$ – горизонтальные и вертикальные смещения мобильных пунктов с номерами 1, 2,…,8 между соседними эпохами.

Уравнения наблюдений составлялись с учетом входящих в векторы параметров (90) и (91) аномальных масс *МК* и прироста δMO. В уравнениях для нивелирных превышений *h*, горизонтальных углов β и измерений силы тяжести *g* коэффициенты k_h^{MK}, k_β^{MK}, k_g^{MK} перед параметром *МК* и $k_h^{\delta MO}$, $k_\beta^{\delta MO}$, $k_g^{\delta MO}$ перед параметром δMO необходимы для учета влияния на наблюдения аномальных масс – поверхностного маскона *МК*, аппроксимирующего конус вулкана и прироста массы шарового глубинного маскона δMO, аппроксимирующего вулканический очаг (рис. 19). Примеры формул вычисления коэффициентов для уравнений наблюдений силы тяжести и нивелирных превышений даны в подразделе 3.3 – формулы (70) и (73).

Для вывода формул вычисления k_β^{MK} перед параметром *МК* и $k_\beta^{\delta MO}$ перед параметром δMO для уравнений наблюдений измеренных горизонтальных углов воспользуемся известными формулами поправок в ориентированное направление [230]. Для небольших расстояний между пунктами (наземная триангуляция) поправка за уклонение отвесной линии вычисляется по формуле:

$$\delta A_{12} = (\eta_1 \cos A_{12} - \zeta_1 \sin A_{12})\mathrm{ctg}\, z_{12} - \eta_1 \mathrm{tg}\, B_1.. \quad (92)$$

В формуле (92) η_1, ζ_1 – составляющие уклонения отвесной линии в плоскости меридиана и первого вертикала, A_{12}, z_{12} азимут и зенитное расстояние направления 12, B_1 – геодезическая широта пункта 1.

Для угла β, образованного двумя направлениями 12 (правое) и 13 (левое) может быть найдена поправка за уклонение отвесной линии в β угол β:

$$v_\beta = \delta A_{12} - \delta A_{13} = (\eta_1 \cos A_{12} - \zeta_1 \sin A_{12})\operatorname{ctg} z_{12} - (\eta_1 \cos A_{13} - \zeta_1 \sin A_{13})\operatorname{ctg} z_{13}. \quad (93)$$

Перегруппируем слагаемые в формуле (93):

$$v_\beta = (\sin A_{12}\operatorname{ctg} z_{12} - \sin A_{13}\operatorname{ctg} z_{13})\,\zeta_1 - (\cos A_{12}\operatorname{ctg} z_{12} - \cos A_{13}\operatorname{ctg} z_{13})\,\eta_1. \quad (94)$$

Уклонения отвесной линии для нашего объекта возникают в результате влияния массы конуса вулкана *МК* и прироста массы магматической камеры: δ*МО*, например, для пункта 1

$$\zeta_1 = -\frac{\Delta g_{1x}}{g_1} = -G\frac{\Delta X_{1Sконуса}}{g_1 r_{1Sконуса}^3} MK - G\frac{\Delta X_{1Sкамеры}}{g_1 r_{1Sкамеры}^3}\delta MO, \quad (95)$$

$$\eta_1 = -\frac{\Delta g_{1y}}{g_1} = -G\frac{\Delta Y_{1Sконуса}}{g_1 r_{1Sконуса}^3} MK - G\frac{\Delta Y_{1Sкамеры}}{g_1 r_{1Sкамеры}^3}\delta MO. \quad (96)$$

В формулах (95) и (96) G – гравитационная постоянная, Δg_{1x}, Δg_{1y} – составляющие вектора силы тяжести g_1 в пункте 1 по оси X и Y соответственно в прямоугольной пространственной топоцентрической горизонтной системе координат (рис. 24). Ось X лежит в плоскости меридиана, ось Y – в плоскости первого вертикала, $\Delta X_{1Sконуса}$, $\Delta Y_{1Sконуса}$ – разность координат X и Y пункта 1 и центра маскона, аппроксимирующего конус вулкана, $\Delta X_{1Sкамеры}$, $\Delta Y_{1Sкамеры}$, – разность координат X и Y пункта 1 и центра маскона, аппроксимирующего магматический очаг вулкана, $r_{1Sконуса}$, $r_{1Sкамеры}$, – расстояния от пункта 1 до центра маскона, аппроксимирующего конус вулкана и центра маскона, аппроксимирующего магматический очаг вулкана.

С учетом формул (95) и (96) формула (94) запишется так:

$$v_\beta = -\frac{G}{g_1 r_{1Sконуса}^3}\begin{bmatrix}(\sin A_{12} ctgz_{12} - \sin A_{13} ctgz_{13})\Delta X_{1Sконуса} - \\ -(\cos A_{12} ctgz_{12} - \cos A_{13} ctgz_{13})\Delta Y_{1Sконуса}\end{bmatrix} MK - \\ -\frac{G}{g_1 r_{1Sкамеры}^3}\begin{bmatrix}(\sin A_{12} ctgz_{12} - \sin A_{13} ctgz_{13})\Delta X_{1Sкамеры} - \\ -(\cos A_{12} ctgz_{12} - \cos A_{13} ctgz_{13})\Delta Y_{1Sкамеры}\end{bmatrix}\delta MO, \quad (97)$$

В формуле (97) выражения стоящие перед параметром *МК* и перед параметром δMO и есть коэффициенты k_β^{MK} и $k_\beta^{\delta MO}$.

$$k_\beta^{MK} = -\frac{G}{g_1 r_{1Sконуса}^3}\begin{bmatrix}(\sin A_{12} ctgz_{12} - \sin A_{13} ctgz_{13})\Delta X_{1Sконуса} - \\ -(\cos A_{12} ctgz_{12} - \cos A_{13} ctgz_{13})\Delta Y_{1Sконуса}\end{bmatrix}, \quad (98)$$

$$k_\beta^{\delta MO} = -\frac{G}{g_1 r_{1Sкамеры}^3}\begin{bmatrix}(\sin A_{12}\ \mathrm{ctg}\ z_{12} - \sin A_{13}\ \mathrm{ctg}\ z_{13})\Delta X_{1Sкамеры} - \\ -(\cos A_{12}\ \mathrm{ctg}\ z_{12} - \cos A_{13}\ \mathrm{ctg}\ z_{13})\Delta Y_{1Sкамеры}\end{bmatrix}. \quad (99)$$

И с учетом формул (98) и (99) уравнение наблюдений горизонтального угла, образованного направлениями 13 и 12 будет

$$\beta(t=2) = \mathrm{arctg}\frac{Y_3(t=2) - Y_1(t=2)}{X_3(t=2) - X_1(t=2)} - \mathrm{arctg}\frac{Y_2(t=2) - Y_1(t=2)}{X_2(t=2) - X_1(t=2)} + \\ + k_\beta^{MK}(t=2)MK(t=2) + k_\beta^{\delta MO}(t=2)\delta MO(t=2) + \delta_\beta \quad (100)$$

Заметим, что в приводимом вычислительном эксперименте не моделировались измерения зенитных расстояний *z*. Все же выведем соответствующие этому виду наблюдений формулы коэффициентов k_z^{MK} и перед параметром *МК* и $k_z^{\delta MO}$ перед параметром δMO.

Поправка δz_{12} за уклонение отвесной линии в зенитное расстояние z_{12} согласно [227] вычисляется так:

$$\delta z_{12} = \zeta_1 \cos A_{12} + \eta_1 \sin A_{12}.. \quad (101)$$

С учетом формул (95) и (96) выражение (101) запишется:

$$\delta z_{12} = -\frac{G}{g_1 r_{1Sконуса}^3}(\Delta X_{1Sконуса} \cos A_{12} + \Delta Y_{1Sконуса} \sin A_{12})MK - \\ -\frac{G}{g_1 r_{1Sкамеры}^3}(\Delta X_{1Sкамеры} \cos A_{12} + \Delta Y_{1Sкамеры} \sin A_{12})\delta MO \quad (102)$$

Таким образом, для зенитного расстояния 12 уравнение наблюдений будет:

$$z(t=2) = \mathrm{arctg}\frac{z_2(t=2) - z_1(t=1)}{\sqrt{(X_2(t=2) - X_1(t=2))^2 + (Y_2(t=2) - Y_1(t=2))^2}} + \\ + k_z^{MK} MK(t=2) + k_z^{\delta MO}\delta MO(t=2) + \delta_z \quad (103)$$

где коэффициенты k_z^{MK} перед параметром *МК* и $k_z^{\delta MO}$ перед параметром δMO вычисляются по формулам:

$$k_z^{MK} = -\frac{G}{g_1 r_{1Sконуса}^3}(\Delta X_{1Sконуса}\cos A_{12} + \Delta Y_{1Sконуса}\sin A_{12}), \qquad (104)$$

$$k_z^{\delta MO} = -\frac{G}{g_1 r_{1Sкамеры}^3}(\Delta X_{1Sкамеры}\cos A_{12} + \Delta Y_{1Sкамеры}\sin A_{12}). \qquad (105)$$

Общий перечень систем наблюдений будет следующим. Уравнения наблюдений h на пунктах сети в эпоху $t = 1$ для вектора параметров (90) будут:

$$\begin{pmatrix} h_1(t=1) = H_1(t=1) - H_{C1}(t=1) + k_{h_1}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{h_1}, \\ h_2(t=1) = H_8(t=1) - H_7(t=1) + k_{h_2}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{h_2}, \\ \ldots \\ h_{12}(t=1) = H_8(t=1) - H_7(t=1) + k_{h_{12}}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{h_{12}}. \end{pmatrix} \qquad (106)$$

Уравнения наблюдений горизонтальных углов на пунктах сети в эпоху $t = 1$ (всего 27 углов):

$$\begin{pmatrix} \beta_1(t=1) = \operatorname{arctg}\dfrac{Y_4(t=1) - Y_1(t=1)}{X_4(t=1) - X_1(t=1)} - \operatorname{arctg}\dfrac{Y_{C1}(t=1) - Y_1(t=1)}{X_{C1}(t=1) - X_1(t=1)} + \\ + k_{\beta_1}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{\beta_1}; \\ \beta_2(t=1) = \operatorname{arctg}\dfrac{Y_5(t=1) - Y_4(t=1)}{X_5(t=1) - X_4(t=1)} - \operatorname{arctg}\dfrac{Y_1(t=1) - Y_4(t=1)}{X_1(t=1) - X_4(t=1)} + \\ + k_{\beta_2}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{\beta_2}; \\ \ldots \\ \beta_{27}(t=1) = \operatorname{arctg}\dfrac{Y_7(t=1) - Y_5(t=1)}{X_7(t=1) - X_5(t=1)} - \operatorname{arctg}\dfrac{Y_8(t=1) - Y_5(t=1)}{X_8(t=1) - X_5(t=1)} + \\ + k_{\beta_{27}}^{MK}(t=1)MK(t=1) + \delta_{\beta_{27}}. \end{pmatrix} \qquad (107)$$

Уравнения наблюдений светодальномерных дальностей в эпоху $t = 1$:

$$\left(\begin{array}{l} s_1(t=1)=\sqrt{\begin{array}{l}(X_1(t=1)-X_{C1}(t=1))^2+(Y_1(t=1)-Y_{C1}(t=1))^2+\\ +(Z_1(t=1)-Z_{C1}(t=1))^2\end{array}}+\delta_{s_1}; \\ s_2(t=1)=\sqrt{\begin{array}{l}(X_2(t=1)-X_{C2}(t=1))^2+(Y_2(t=1)-Y_{C2}(t=1))^2+\\ +(Z_2(t=1)-Z_{C2}(t=1))^2\end{array}}+\delta_{s_2}. \end{array}\right) \quad (108)$$

Уравнения наблюдений GPS-векторов в эпоху t =1:

$$\left(\begin{array}{l} b_1(t=1)=\begin{vmatrix} X_1(t=1)-X_{C1}(t=1)+\delta_{bx_1} \\ Y_1(t=1)-Y_{C1}(t=1)+\delta_{by_1} \\ Z_1(t=1)-Z_{11}(t=1)+\delta_{bz_1}\end{vmatrix}; \\ b_2(t=1)=\begin{vmatrix} X_4(t=1)-X_1(t=1)+\delta_{bx_2} \\ Y_4(t=1)-Y_1(t=1)+\delta_{by_2} \\ Z_4(t=1)-Z_1(t=1)+\delta_{bz_2}\end{vmatrix}; \\ \ldots \\ b_{21}(t=1)=\begin{vmatrix} X_6(t=1)-X_4(t=1)+\delta_{bx_{21}} \\ Y_6(t=1)-Y_4(t=1)+\delta_{by_{21}} \\ Z_6(t=1)-Z_4(t=1)+\delta_{bz_{21}}\end{vmatrix}. \end{array}\right) \quad (109)$$

Уравнения наблюдений g на пунктах сети в эпоху t = 1:

$$\left(\begin{array}{l} g_{C1}(t=1)=g_E+k_{g_{C1}}^{MK}(t=1)MK(t=1)+\delta_{g_{C1}}; \\ g_{C2}(t=1)=g_E+k_{g_{C2}}^{MK}(t=1)MK(t=1)+\delta_{g_{C2}}; \\ \ldots \\ g_8(t=1)=g_E+k_{g_8}^{MK}(t=1)MK(t=1)+\delta_{g_8}. \end{array}\right) \quad (110)$$

Итого система наблюдений в каждую эпоху включает:
- 12 нивелирных превышений;
- 27 горизонтальных углов;
- 2 светодальномерных дальности;
- 10 наблюдений абсолютных значений ускорений силы тяжести;
- 21 GPS-вектор (ΔX, ΔY, ΔZ).

Общее количество измерений в каждую эпоху – 114 (с учетом трех компонент каждого GPS-вектора).

Для второй (t = 2) и третьей (t = 3) эпох наблюдений уравнения будут аналогичны, но для измеренных нивелирных превышений, горизонтальных углов и абсолютных значений силы тяжести в уравнениях будут присутствовать дополнительные слагаемые. Тем самым будет учтено влияние на результаты измерений прироста массы вулканического очага δMO.

Например, для превышения $h_1(t = 2)$ уравнение будет

$$h_1(t=2) = H_1(t=2) - H_{C1} + k_{h_1}^{MK}(t=2)MK(t=2) + k_{h_1}^{\delta MO}(t=2)\delta MO(t=2) + \delta_{h_1}. \quad (111)$$

Для горизонтального угла $\beta_1(t = 2)$ уравнение будет

$$\beta_1(t=2) = \operatorname{arctg}\frac{Y_4(t=2) - Y_1(t=2)}{X_4(t=2) - X_1(t=2)} - \operatorname{arctg}\frac{Y_{C1}(t=2) - Y_1(t=2)}{X_{C1}(t=2) - X_1(t=2)} + \quad (112)$$
$$+k_{\beta_1}^{MK}(t=2)MK(t=2) + k_{\beta_1}^{\delta MO}(t=2)\delta MO(t=2) + \delta_{\beta_1}$$

Для абсолютного значения силы тяжести $g_{C1}(t = 2)$ уравнение будет

$$g_{C1}(t=2) = g_E + k_{g_{C1}}^{MK}(t=2)MK(t=2) + k_{g_{C1}}^{\delta MO}(t=2)\delta MO(t=2) + \delta_{g_{C1}}. \quad (113)$$

Были получены модельные (безошибочные) значения для всех геодезических и геофизических наблюдений. Для этого использовались модельные значения координат пунктов сети и модельные значения массы конуса вулкана и прироста массы вулканического очага. Затем в безошибочные значения вводились сгенерированные на компьютере псевдослучайные ошибки наблюдений как подчиняющиеся нормальному закону распределения с учетом следующей точности наблюдений:

нивелирные превышения	$0.5\text{мм}\sqrt{L}$;
горизонтальные углы	0,25”;
светодальномерные дальности	2 мм;
GPS наблюдения 4 мм для ΔX и ΔY,	7 мм для ΔZ;
абсолютные значения силы тяжести	5 мкгал.

Ряды сгенерированных псевдослучайных нормальнораспределенных чисел проверялись на соответствие нормальному закону распределения с использованием пакета прикладных программ Matrixer. Приведем результаты моделирования геодезических и гравиметрических наблюдений за горизонтальными и вертикальными движениями и гравитационным полем в вулканической области готовящегося извержения для всех 3-х эпох с уже введенными псевдослучайными ошибками (таблицы 30–34).

Таблица 30

Модельные превышения между пунктами сети для трех эпох наблюдений и длины ходов нивелирования

Ход	Длина (м)	$h_{ij}(t = 1)$ (мм)	$h_{ij}(t = 2)$ (мм)	$h_{ij}(t = 3)$ (мм)
С1-1	2825.1	12513.06	12658.44	12793.84
С2-2	2481.6	8343.79	8479.86	8607.37
1-3	3318.1	42820.73	43046.46	43255.21
2-3	2920.4	54544.21	54764.27	54970.54
1-4	3233.0	39338.06	39581.80	39808.76
3-5	1888.6	183353.81	183632.42	183890.74
2-6	3504.9	62206.52	62459.88	62698.23
4-5	3033.2	186836.91	187096.13	187338.05
6-5	2984.6	175693.04	175936.09	176163.46
4-7	3066.2	172957.25	173066.16	173168.39
6-8	2906.2	158113.48	158204.90	158290.94
8-7	4306.5	3699.07	3702.56	3690.69

Таблица 31

Модельные значения горизонтальных углов для трех эпох наблюдений

Номер угла	Эпоха $t = 1$			Эпоха $t = 2$			Эпоха $t = 3$		
	гр.	мин.	сек.	гр.	мин.	сек.	гр.	мин.	сек.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	137	17	52.21	137	17	40.75	137	17	30.32
2	44	43	57.72	44	44	12.64	44	44	26.56
3	24	37	47.04	24	37	50.44	24	37	54.41
4	54	14	35.45	54	14	25.69	54	14	16.61
5	54	3	19.83	54	3	19.73	54	3	20.13
6	55	31	43.19	55	31	44.80	55	31	46.25
7	63	49	31.71	63	49	21.07	63	49	11.18
8	23	10	11.37	23	10	16.10	23	10	20.23
9	44	36	20.93	44	36	35.73	44	36	48.79
10	134	54	10.34	134	53	59.11	134	53	47.49
11	76	12	35.13	76	12	44.12	76	12	52.85
12	30	16	10.69	30	16	3.37	30	15	58.09
13	56	23	40.50	56	23	30.73	56	23	22.49
14	52	17	22.92	52	17	18.68	52	17	15.24
15	69	43	1.32	69	42	58.34	69	42	55.31
16	49	17	24.70	49	17	21.29	49	17	17.49
17	55	33	7.50	55	33	8.01	55	33	7.75
18	37	28	33.36	37	28	38.09	37	28	42.70
19	47	4	17.97	47	4	23.88	47	4	28.91
20	48	36	11.44	48	36	12.10	48	36	12.29

Продолжение табл. 31

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	48	23	55.68	48	23	47.58	48	23	40.10
22	31	26	35.64	31	26	29.57	31	26	23.63
23	79	35	13.28	79	35	22.12	79	35	29.79
24	55	12	52.77	55	12	53.22	55	12	55.21
25	51	30	2.08	51	29	56.74	51	29	52.37
26	51	7	21.35	51	7	16.71	51	7	12.62
27	55	4	6.52	55	4	7.64	55	4	9.66

Таблица 32

Модельные значения светодальномерных дальностей (м)
для трех эпох наблюдений

Номер линии	Линия	Эпоха $t = 1$	Эпоха $t = 2$	Эпоха $t = 3$
1	C1-1	2825.0973	2825.0057	2824.9182
2	C2-2	2481.5762	2481.4981	2481.4228

Таблица 33

Модельные значения GPS-наблюдений для трех эпох наблюдений

Эпоха $t = 1$				
Номер линии	Линия	ΔX (м)	ΔY (м)	ΔZ (м)
1	C1-1	2097.3138	1892.6892	12.5100
2	1-4	3232.7884	-35.9897	39.3226
3	1-5	3090.0011	2993.8889	226.1679
4	1-3	1203.9799	3091.9579	42.8239
5	3-4	2028.8059	-3127.9541	-3.4813
6	3-5	1886.0203	-98.0806	183.3631
7	3-6	2198.2467	2870.1975	7.6528
8	3-2	-1297.4914	2616.3586	-54.5543
9	2-5	3183.5085	-2714.4403	237.9055
10	2-6	3495.7401	253.8360	62.2047
11	2-C2	-1874.4528	1626.2162	-8.3332
12	4-7	2940.0893	870.2469	172.9659
13	4-5	-142.7827	3029.8679	186.8374
14	5-7	3082.8779	-2159.6330	-13.8839
15	5-8	3099.9150	2146.8748	-17.5776
16	5-6	312.2332	2968.2712	-175.6958
17	6-8	2787.6793	-821.3988	158.1184
18	7-8	17.0413	4306.4986	-3.7019
19	c1-8	8287.2251	7033.4485	221.0997
20	c2-7	8140.8338	-6500.2840	232.3713
21	4-6	169.4405	5998.1423	11.1521

Продолжение табл. 33

Эпоха t =2				
Номер линии	Линия	ΔX (м)	ΔY (м)	ΔZ (м)
1	C1-1	2097.2232	1892.6569	12.6579
2	1-4	3232.8862	-36.1384	39.5815
3	1-5	3090.0017	2994.0404	226.6774
4	1-3	1203.8926	3092.1276	43.0468
5	3-4	2029.0014	-3128.2629	-3.4656
6	3-5	1886.1243	-98.0923	183.6401
7	3-6	2198.4530	2870.4957	7.6849
8	3-2	-1297.4043	2616.5007	-54.7647
9	2-5	3183.5222	-2714.5779	238.3942
10	2-6	3495.8592	254.0017	62.4461
11	2-C2	-1874.3731	1626.1918	-8.4759
12	4-7	2940.4281	870.2960	173.0672
13	4-5	-142.8834	3030.1819	187.0889
14	5-7	3083.2965	-2159.8917	-14.0260
15	5-8	3100.3453	2147.1344	-17.7325
16	5-6	312.3447	2968.5745	-175.9381
17	6-8	2788.0064	-821.4436	158.2098
18	7-8	17.0298	4307.0222	-3.7016
19	c1-8	8287.5726	7033.8313	221.5891
20	c2-7	8141.1952	-6500.6728	232.8497
21	4-6	169.4606	5998.7669	11.1674
Эпоха t=3				
Номер линии	Линия	ΔX (м)	ΔY (м)	ΔZ (м)
1	C1-1	2097.1463	1892.6281	12.7980
2	1-4	3232.9900	-36.2820	39.8142
3	1-5	3090.0064	2994.2003	227.1493
4	1-3	1203.8013	3092.2850	43.2605
5	3-4	2029.1809	-3128.5697	-3.4386
6	3-5	1886.2119	-98.0898	183.8869
7	3-6	2198.6529	2870.7727	7.7285
8	3-2	-1297.3344	2616.6306	-54.9704
9	2-5	3183.5309	-2714.7239	238.8518
10	2-6	3495.9842	254.1477	62.7073
11	2-C2	-1874.3004	1626.1600	-8.6072
12	4-7	2940.7296	870.3283	173.1596
13	4-5	-142.9760	3030.4709	187.3346
14	5-7	3083.7089	-2160.1461	-14.1652
15	5-8	3100.7434	2147.3797	-17.8693
16	5-6	312.4411	2968.8702	-176.1426

Продолжение табл. 33

Номер линии	Линия	ΔX (м)	ΔY (м)	ΔZ (м)
17	6-8	2788.2976	-821.4895	158.2830
18	7-8	17.0427	4307.5266	-3.7018
19	с1-8	8287.9031	7034.1898	222.0754
20	с2-7	8141.5320	-6501.0215	233.3009
21	4-6	169.4737	5999.3453	11.1754

Таблица 34

Модельные значения наблюдений абсолютных значений силы тяжести для трех эпох наблюдений (мкгал)

Пункт	Эпоха t = 1	Эпоха t = 2	Эпоха t = 3
С1	980500043.6	980500057.3	980500062.6
С2	980500054.7	980500060.5	980500073.9
1	980500048.1	980500067.1	980500100.6
2	980500062.3	980500077.7	980500095.6
3	980500046.2	980500085.0	980500133.4
4	980500041.9	980500094.0	980500138.9
5	980500017.3	980500092.3	980500171.1
6	980500044.7	980500094.3	980500140.9
7	980500041.2	980500096.2	980500155.7
8	980500045.2	980500101.8	980500151.2

4.5 Комплексная математическая обработка и интерпретация геодезических и гравиметрических наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области

Следующим этапом вычислительного идентификационного эксперимента являлась совместная математическая обработка смоделированных пространственно-временных рядов разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений. Математическая обработка выполнялась с использованием алгоритма рекуррентного фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ) аналогично тому, как это описано в работах [219, 220].

Для первой эпохи расширенный вектор параметров имеет вид выражения (90), а для второй и третьей выражения (91).

Матрица *A(t)* коэффициентов уравнений наблюдений формируется известным образом: каждое измерение $y_i(t)$ выражается как функция от параметров $X_R(t)$. Частные производные этих функций будут коэффициентами матрицы *A(t)*. Уравнения наблюдений для задейство-

ванных в нашем эксперименте видов даны выше. В уравнениях нивелирных превышений, горизонтальных углов и абсолютных значений силы тяжести присутствуют слагаемые, учитывающие влияние аномальных масс *МК* и δ*МО*. Коэффициенты k_h^{MK}, k_β^{MK}, k_g^{MK} перед параметром *МК* и $k_h^{\delta MO}$, $k_\beta^{\delta MO}$, $k_g^{\delta MO}$ перед параметром δ*МО* вычисляются по известным координатам пунктов геодезической сети и приближенным координатам центра шарового поверхностного маскона, аппроксимирующего конус вулкана и шарового глубинного маскона, аппроксимирующего вулканический очаг (рис. 19). Для вычисления коэффициентов используются формулы (70), (73), (98), (99).

Приближенные значения параметров вектора (90) первой эпохи определялись по компонентам GPS-векторов С1-1, 1-4, 1-5, 1-3, 2-6, 2-С2, С1-8, С2-7 и абсолютному значению силы тяжести в пункте 5 сети, измеренных в 1-ю эпоху. Полученные значения представлены в таблице 35.

Таблица 35

Приближенные значения параметров для первой эпохи

Номер пункта	*X* (м)	*Y* (м)	*H* (м)
с1	3215.338	6121.663	1167.543
с2	3344.698	15348.903	1159.988
1	5312.652	8014.352	1180.053
2	5219.151	13722.687	1168.321
3	6516.632	11106.310	1222.877
4	8545.440	7978.363	1219.376
5	8402.653	11008.241	1406.221
6	8714.891	13976.523	1230.526
7	11485.532	8848.619	1392.359
8	11502.563	13155.111	1388.643
МК	$21.44*10^7$ тонн		

После обработки по алгоритму фильтра Калмана-Бьюси всех оставшихся (избыточных) измерений первой эпохи получены следующие оценки параметров и средние квадратические погрешности (СКП) их определения (таблица 36).

При обработке наблюдений 2-й эпохи в качестве начальных оценок $X_1, Y_1, H_1, ..., X_8, Y_8, H_8, MK$ и их ковариаций мы использовали оценки и ковариации, полученные при обработке наблюдений первой эпохи. Начальные оценки горизонтальных и вертикальных смещений пунктов сети $u_{X_1}, u_{Y_1}, u_{H_1}, ..., u_{X_8}, u_{Y_8}, u_{H_8}$, а также прирост массы магма-

тического очага δMO были найдены по компонентам GPS-векторов С1-1, 1-4, 1-5, 1-3, 2-6, 2-С2, С1-8, С2-7 и абсолютному значению силы тяжести в пункте 5 сети, измеренным во 2-й эпохе.

Таблица 36

Оценки параметров и СКП их определения для первой эпохи

№ пункта	Параметр	Оценка параметра (мм)	СКП
1	*X*(м)	5312651.7	6.77 мм
	Y(м)	8014357.3	6.16 мм
	H(м)	1180057.7	4.17 мм
2	*X*(м)	5219144.1	5.66 мм
	Y(м)	13722681.3	5.00 мм
	H(м)	1168329.0	4.20 мм
3	*X*(м)	6516634.9	5.68 мм
	Y(м)	11106321.8	5.02 мм
	H(м)	1222880.2	4.21 мм
4	*X*(м)	8545439.9	5.69 мм
	Y(м)	7978370.4	5.04 мм
	H(м)	1219394.8	4.21 мм
5	*X*(м)	8402653.1	5.68 мм
	Y(м)	11008242.0	5.02 мм
	H(м)	1406237.3	4.21 мм
6	*X*(м)	8714884.0	5.70 мм
	Y(м)	13976514.8	5.04 мм
	H(м)	1230540.3	4.21 мм
7	*X*(м)	11485528.7	5.70 мм
	Y(м)	8848614.4	5.04 мм
	H(м)	1392358.0	4.22 мм
8	*X*(м)	11502567.1	5.70 мм
	Y(м)	13155115.3	5.05 мм
	H(м)	1388658.1	4.23 мм
	МК	$15.037 \cdot 10^7$ тонн	$0.61 \cdot 10^7$ тонн

Результаты обработки по алгоритму фильтра Калмана-Бьюси представлены в таблице 37.

Таблица 37

Оценки параметров и их СКП для эпохи 2

Номер пункта	Параметр	Оценка параметра (мм)	СКП
1	2	3	4
1	*X*(м)	5312400.4	2.85
	Y(м)	8014201.5	2.61
	H(м)	1180318.5	1.48
2	*X*(м)	5218889.5	2.40
	Y(м)	13722825.6	2.13
	H(м)	1168598.8	1.42
3	*X*(м)	6516290.5	2.40
	Y(м)	11106328.5	2.14
	H(м)	1223364.6	1.42
4	*X*(м)	8545287.7	2.41
	Y(м)	7978061.5	2.15
	H(м)	1219899.1	1.42
5	*X*(м)	8402405.9	2.39
	Y(м)	11008243.2	2.13
	H(м)	1406995.5	1.41
6	*X*(м)	8714749.6	2.41
	Y(м)	13976824.8	2.15
	H(м)	1231050.7	1.43
7	*X*(м)	11485715.1	2.41
	Y(м)	8848350.9	2.15
	H(м)	1392968.0	1.42
8	*X*(м)	11502749.9	2.41
	Y(м)	13155377.3	2.15
	H(м)	1389258.7	1.42
	MK	15.034·107 тонн	$0.038 \cdot 10^7$ тонн
1	u_X (м)	-251.3	2.73
	u_Y (м)	-155.8	2.48
	u_H (м)	260.8	1.41
2	u_X (м)	-254.6	2.28
	u_Y (м)	144.3	2.00
	u_H (м)	269.9	1.35
3	u_X (м)	-344.3	2.28
	u_Y (м)	6.7	2.01
	u_H (м)	484.3	1.36
4	u_X (м)	-152.1	2.29
	u_Y (м)	-308.9	2.01
	u_H (м)	504.3	1.36
5	u_X (м)	-247.2	2.28
	u_Y (м)	1.2	2.01
	u_H (м)	758.2	1.35

Продолжение табл. 37

1	2	3	4
6	u_X (м)	-134.4	2.29
	u_Y (м)	310.0	2.02
	u_H (м)	510.4	1.36
7	u_X (м)	186.4	2.29
	u_Y (м)	-263.4	2.02
	u_H (м)	610.0	1.36
8	u_X (м)	182.8	2.29
	u_Y (м)	262.1	2.02
	u_H (м)	600.6	1.36
	δMO	$30.704 \cdot 10^7$ тонн	$0.005 \cdot 10^7$ тонн

Зависимость массы магматического очага от времени для небольшого интервала (годы) вполне можно считать линейной. В нашем случае в эпоху 3 произойдет удвоение по сравнению со второй эпохой избыточной массы. Прирост давления со временем будет уменьшаться. Соответственно, зависимости движения пунктов сети от времени также не будут линейными. Это обстоятельство было учтено при формировании $\Phi(3,2)$ – переходной матрицы, показывающей закономерность изменений значений параметров от эпохи $t = 2$ к эпохе $t = 3$.

Таким образом, нужно было по результатам геодезических наблюдений приближенно установить соотношение между величинами смещений в разные эпохи. Воспользуемся для этого результатами наблюдений GPS-сети.

Компоненты ΔX, ΔY, ΔZ GPS-векторов от эпохи к эпохе увеличивались. За время между эпохами 2 и 3 это увеличение составило в среднем 0.94 от увеличения между эпохами 1 и 2. Обращаем внимание на соответствие этого значения модельной величине $\psi(t = 2,3)$ в формуле (86).

С учетом этого, была получена следующая переходная матрица:

$$\Phi(3,2) = \begin{pmatrix} E & . & & 0 & & \\ 25\times 25 & . & & 25\times 25 & & \\ . & . & . & . & . & \\ & . & 0.94 & 0 & ... & 0 \\ E & . & 0 & 0.94 & ... & 0 \\ 25\times 25 & . & ... & ... & ... & 0 \\ & . & 0 & 0 & ... & 2 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

С учетом сформированной переходной матрицы Ф(3,2) по алгоритму фильтра Калмана-Бьюси получаем оценки параметров и их ошибки для эпохи 3 (таблица 38).

Таблица 38

Оценки параметров и их СКП для эпохи 3

№ пункта	Параметр	Оценка параметра (мм)	СКП
1	2	3	4
1	*X*(м)	5312163.4	2.41
	Y(м)	8014054.5	2.38
	H(м)	1180573.5	1.42
2	*X*(м)	5218645.1	2.33
	Y(м)	13722973.8	2.29
	H(м)	1168854.9	1.37
3	*X*(м)	6515964.8	2.40
	Y(м)	11106341.8	2.38
	H(м)	1223831.9	1.39
4	*X*(м)	8545148.6	2.40
	Y(м)	7977768.6	2.38
	H(м)	1220387.9	1.39
5	*X*(м)	8402171.8	2.23
	Y(м)	11008249.6	2.21
	H(м)	1407725.1	1.29
6	*X*(м)	8714625.1	2.41
	Y(м)	13977127.9	2.39
	H(м)	1231554.9	1.39
7	*X*(м)	11485893.4	2.30
	Y(м)	8848098.4	2.29
	H(м)	1393554.3	1.32
8	*X*(м)	11502929.5	2.30
	Y(м)	13155634.5	2.29
	H(м)	1389844.3	1.32
	MK	14.996	$0.096*10^7$ тонн
1	u_X (м)	-232.1	1.42
	u_Y (м)	-142.8	1.38
	u_H (м)	243.7	0.90
2	u_X (м)	-234.4	1.28
	u_Y (м)	138.2	1.24
	u_H (м)	246.2	0.80
3	u_X (м)	-317.4	1.30
	u_Y (м)	9.6	1.26
	u_H (м)	448.7	0.80

Продолжение табл. 38

1	2	3	4
4	u_X (м)	-139.8	1.30
	u_Y (м)	-283.8	1.27
	u_H (м)	468.0	0.80
5	u_X (м)	-230.2	1.25
	u_Y (м)	3.3	1.22
	u_H (м)	702.4	0.77
6	u_X (м)	-121.8	1.31
	u_Y (м)	291.4	1.28
	u_H (м)	472.7	0.80
7	u_X (м)	173.1	1.29
	u_Y (м)	-245.4	1.26
	u_H (м)	564.8	0.78
8	u_X (м)	170.5	1.29
	u_Y (м)	245.3	1.26
	u_H (м)	554.9	0.78
	δMO	$61.381*10^7$ тонн	$0.015*10^7$ тонн

Таким образом, в результате вычислительного эксперимента была получена модель динамики земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области. Результатом совместной математической обработки и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений явились оценки координат мобильных пунктов, оценки горизонтальных и вертикальных смещений этих пунктов, оценки масс конуса вулкана и оценки прироста массы магматического очага. Совместная обработка геодезических и гравиметрических наблюдений позволила при адекватной модели закономерностей движений земной поверхности и изменений масс глубинного маскона (верхний магматический очаг вулкана) достичь высокой точности оценивания.

Вулканическая область с аномальными массами и движениями земной поверхности не единственный геодинамический объект, к исследованию которого применима описанная технология математической обработки. Это могут быть геодинамические объекты различных масштабов (глобальные, региональные, локальные), как природные, так и техногенные (плотины ГЭС, шахты, рудники, месторождения нефти и газа, высотные сооружения и здания).

4.6 Расчет характеристик напряженно-деформированного состояния приповерхностного слоя земной коры вокруг кратера вулкана

Выше описан вычислительный эксперимент по изучению вертикальных, горизонтальных движений земной поверхности и изменений аномальных масс в вулканической области по комплексным геодезическим и гравиметрическим наблюдениям. Оценки движений могут быть использованы для определения характеристик полей напряжений и деформаций приповерхностного слоя земной коры вокруг кратера вулкана, которые помогут уяснить ход подготовки вулканического извержения.

Для описания НДС вулканической области (рис. 20) воспользуемся известной моделью шарового очага в упругом полупространстве [229] (рис. 21). Давление в шаровом очаге вызывает напряженно-деформированное состояние упругого полупространства. Следствием являются смещения поверхности полупространства по вертикали u_z и в горизонтальной плоскости u_r в цилиндрической системе координат с началом на поверхности (т. О – проекция на поверхность центра сферы) и осью z, проходящей через центр сферы z_0 и направленной вниз (рис. 21).

Смещения пунктов сети наблюдений (рис. 27) в горизонтальной плоскости u_r и по вертикали u_z найдем по оценкам смещений u_X, u_Y, u_H пунктов в прямоугольной пространственной горизонтной топоцентрической системе координат, полученных в результате вычислительного эксперимента, описанного в разделе 4.4 (таблицы 36–38). Их значения за время между первой и второй эпохой и первой и третьей эпохой, а также расстояние r от центра кратера V до пунктов геодезической сети представлены в таблице 39.

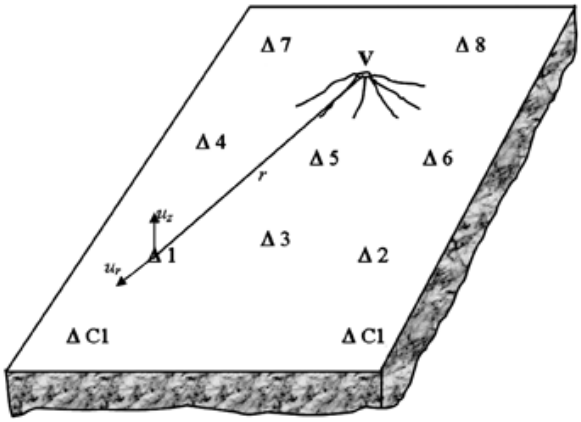


Рис. 27. Пункты сети наблюдений в вулканической области

Таблица 39

Радиальные смещения u_r и поднятия u_z, полученные в результате математической обработки наблюдений

Пункт сети	r(м)	Эпоха t = 2 (2 года после эпохи 1)		Эпоха t = 3 (4 года после эпохи 1)	
		$u_r(t=2)$ (мм)	$u_z(t=2)$ (мм)	$u_r(t=3)$ (мм)	$u_z(t=3)$ (мм)
C1	8356	200.3	119.9	388.4	232.4
C2	7950	212.5	133.6	412.0	259.1
1	5557	295.6	260.8	574.5	515.7
2	5501	292.7	269.9	578.4	526.0
3	3485	344.4	484.3	670.4	951.7
4	3354	344.3	504.3	668.6	993.1
5	1597	247.2	758.2	481.3	1487.8
6	3242	337.9	510.4	665.5	1014.6
7	2614	322.7	610.0	631.9	1196.3
8	2627	319.5	600.6	633.2	1186.2

Данные из таблицы 39 отобразим в виде графиков (рис. 28).

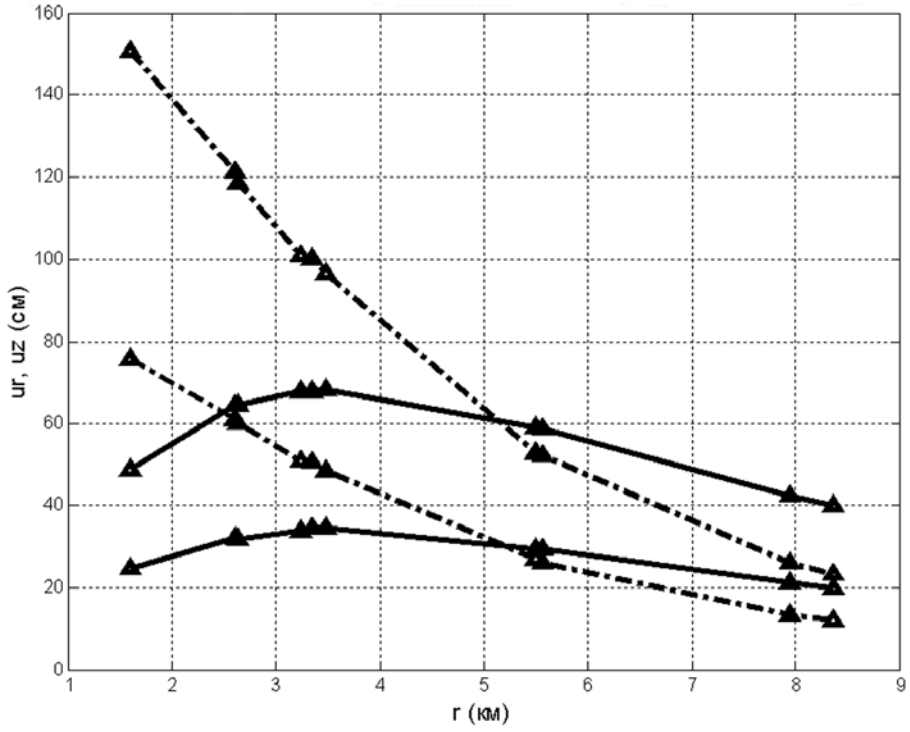


Рис. 28. Графики радиальных смещений u_r и поднятий u_z, полученных в результате математической обработки геодезических и геофизических наблюдений

Заметим, что графики на рисунке 28 соответствуют графикам модельных смещений (рис. 22). Для вычисления модельных смещений на поверхности u_z и u_r использовались формулы из работы [229]:

По значениям радиального смещения u_r и поднятия u_z (таблица 39) и с учетом уравнений (84) и (85) могут быть вычислены значения глубины z_0 центра шаровой полости (очага вулкана):

$$z_0 = -r\frac{u_z}{u_r}. \qquad (114)$$

Найти значение внутриочагового давления $P_{очага}$ и радиус очага $R_{очага}$ по оценкам u_r и u_z невозможно. Один из этих параметров для этого необходимо определять геофизическими методами. Но возможно вычислить величину $P_{очага}R^3_{очага}$, которая позволит рассчитать характеристики НДС вулканической области. Из формул (84) и (85) получаем формулы, позволяющие вычислить $P_{очага}R^3_{очага}$:

$$P_{очага}R^3_{очага} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\frac{(r^2+z_0^2)^{3/2}}{2r}u_r, \qquad (115)$$

или

$$P_{очага}R^3_{очага} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\frac{(r^2+z_0^2)^{3/2}}{2r}u_z. \qquad (116)$$

Значение $P_{очага}R^3_{очага}$ вычислим для каждого пункта сети по оценкам смещений u_r и u_z за время между первой и второй эпохой и первой и третьей эпохой (таблица 39). Параметры НДС (нормальные и касательные напряжения на поверхности) будем вычислять, используя формулы из работы [229]:

$$\sigma_r = \frac{P_{очага}R^3_{очага}}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-2r^2+(z-z_0)^2}{\left[r^2+(z-z_0)^2\right]^{5/2}} - \dfrac{2(3-2\nu)}{\left[r^2+(z+z_0)^2\right]^{3/2}} + \\ + \dfrac{3(11z^2+14zz_0+3z_0^2)}{\left[r^2+(z+z_0)^2\right]^{5/2}} - \dfrac{30z(z+z_0)^3}{\left[r^2+(z+z_0)^2\right]^{7/2}}\end{array}\right\}, \qquad (117)$$

$$\sigma_z = \frac{P_{очага}R^3_{очага}}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{r^2-2(z-z_0)^2}{\left[r^2+(z-z_0)^2\right]^{5/2}} - \dfrac{1}{\left[r^2+(z+z_0)^2\right]^{3/2}} + \\ + \dfrac{3(5z^2+4zz_0-z_0^2)}{\left[r^2+(z+z_0)^2\right]^{5/2}} + \dfrac{30z(z+z_0)^3}{\left[r^2+(z+z_0)^2\right]^{7/2}}\end{array}\right\}, \qquad (118)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{P_{очага} R^3_{очага}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\left[r^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} + \dfrac{3 - 8\nu}{\left[r^2 + (z + z_0)^2\right]^{3/2}} + \\ + \dfrac{6(z + z_0)\left[(-1 + 2\nu)z + 2\nu z_0\right]}{\left[r^2 + (z + z_0)^2\right]^{5/2}} \end{array} \right\}, \qquad (119)$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{3}{4} P_{очага} R^3_{очага} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{z - z_0}{\left[r^2 + (z - z_0)^2\right]^{5/2}} + \\ + \dfrac{5z + z_0}{\left[r^2 + (z + z_0)^2\right]^{5/2}} - \dfrac{20z(z + z_0)^2}{\left[r^2 + (z + z_0)^2\right]^{7/2}} \end{array} \right\} \qquad (120)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0.. \qquad (121)$$

Приводим вычисленную по наблюдениям эпох $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ для каждого пункта сети глубину центра магматического очага z_0, величину $P_{очага} R^3_{очага}$ и значения параметров НДС – нормальные и касательные напряжения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ (таблицы 40, 41). При вычислениях было сделано допущение о плоской поверхности вулканической области, т.е. для всех пунктов сети $z = 0$.

Таблица 40

Параметры НДС, вычисленные в пунктах сети в эпоху $t = 2$

Пункт	z_0 (м)	$P_{очага} R^3_{очага}$ ($\text{Па} \cdot 10^5 \cdot \text{м}^3$)	σ_r ($\text{Па} \cdot 10^5$)	σ_z ($\text{Па} \cdot 10^5$)	σ_{ϕ} ($\text{Па} \cdot 10^5$)	σ_{rz} ($\text{Па} \cdot 10^5$)
c1	5000	1.21645E+12	-2.40	-2.01	1.68	0.00
c2	5000	1.21645E+12	-2.50	-2.30	1.92	0.00
1	4902	1.18946E+12	-2.26	-5.48	4.64	0.00
2	5073	1.22499E+12	-1.88	-5.61	4.76	0.00
3	4901	1.18087E+12	3.18	-12.64	10.84	0.00
4	4912	1.18679E+12	3.91	-13.34	11.44	0.00
5	4900	1.16381E+12	17.21	-23.88	20.64	0.00
6	4897	1.16011E+12	4.42	-13.69	11.75	0.00
7	4942	1.18532E+12	8.74	-17.38	14.96	0.00
8	4938	1.1695E+12	8.53	-17.10	14.72	0.00

Таблица 41

Параметры НДС, вычисленные в пунктах сети в эпоху t=3

Пункт	z_0 (м)	$P_{очага}R^3_{очага}$ ($\text{Па}\cdot 10^5\cdot \text{м}^3$)	σ_r ($\text{Па}\cdot 10^5$)	σ_z ($\text{Па}\cdot 10^5$)	σ_ϕ ($\text{Па}\cdot 10^5$)	σ_{rz} ($\text{Па}\cdot 10^5$)
c1	5000	2.35855E+12	-4.64	-3.90	3.26	0.00
c2	5000	2.35855E+12	-4.84	-4.46	3.73	0.00
1	4989	2.36578E+12	-4.11	-10.75	9.11	0.00
2	5003	2.37531E+12	-3.95	-11.01	9.33	0.00
3	4948	2.34247E+12	6.45	-24.70	21.17	0.00
4	4981	2.37178E+12	7.98	-26.03	22.33	0.00
5	4938	2.31403E+12	33.63	***-46.53***	40.22	0.00
6	4943	2.3295E+12	8.97	-27.05	23.22	0.00
7	4949	2.32906E+12	17.15	-34.05	29.31	0.00
8	4922	2.29959E+12	16.81	-33.85	29.14	0.00

Среднее из вычисленных по смещениям каждого пункта в эпохи t = 2, t = 3, значение глубины z_0 центра шаровой полости z_0 = 4946 м. Модельное значение z_0 = 4946 м. Несовпадение составляет 54 метра – примерно 1% от глубины z_0.

В работе [229] говорится, что критические значения напряжений, вызывающие разрушения камеры и прорыв магмы имеют порядок $10 \div 300$ кГ/см^2, или $10^6 \div 30\times 10^6$ Па. Рассчитанные нами напряжения на поверхности достигают величины 4.6×10^6 Па в районе самого близкого к кратеру геодезического пункта 5 (таблица 41). Таким образом, опасность прорыва магмы уже существует, и с каждым годом вероятность вулканического извержения будет возрастать.

Результаты определения параметров НДС вулканического очага в пунктах сети (таблицы 40 и 41) позволяют нарисовать поля напряжений в виде карт с изолиниями (рис. 29–34).

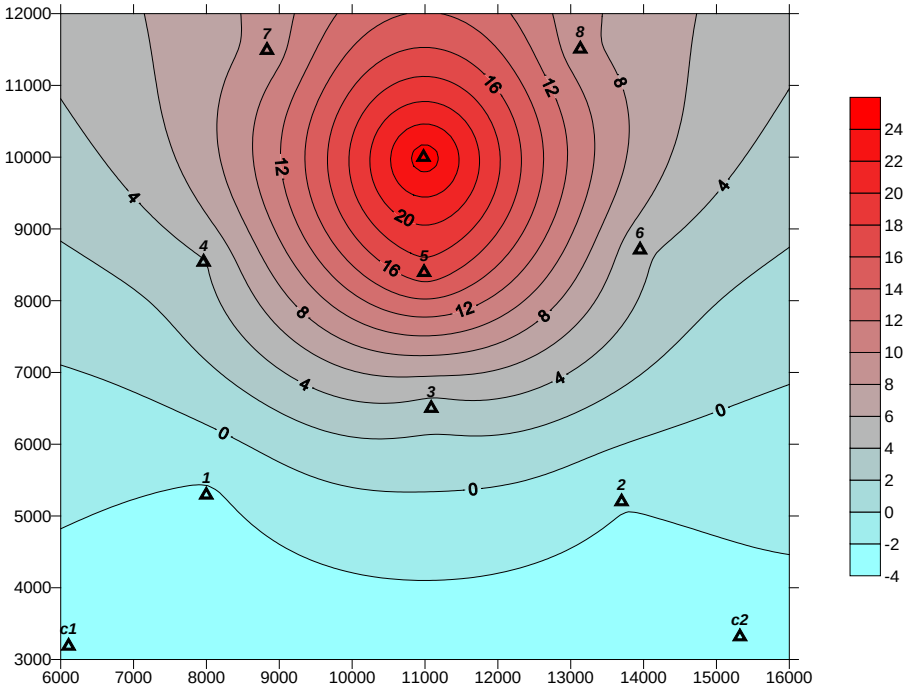


Рис. 29. Поле напряжений σ_r в эпоху 2

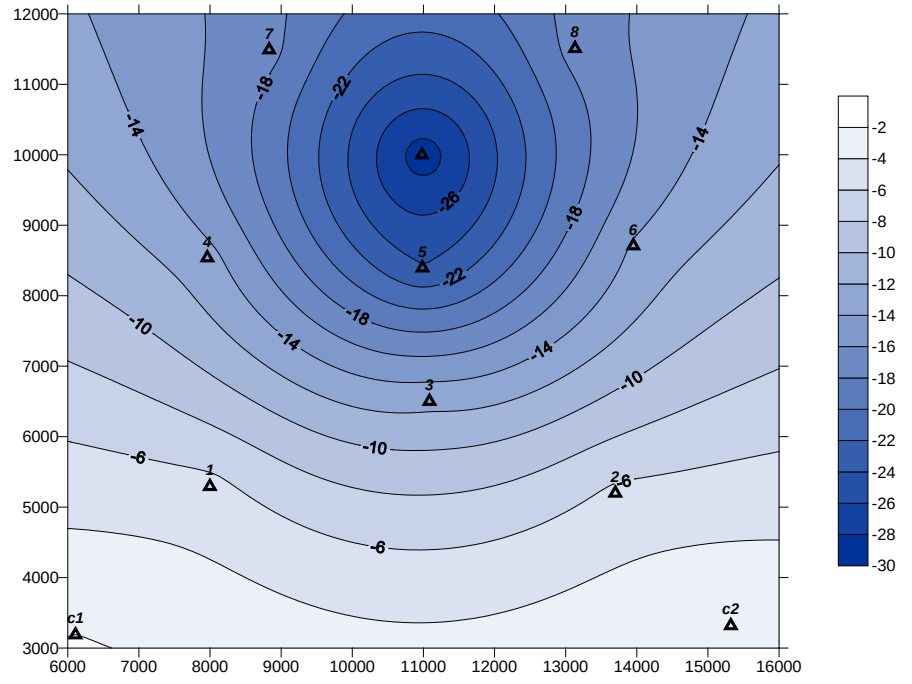


Рис. 30. Поле напряжений σ_z в эпоху 2

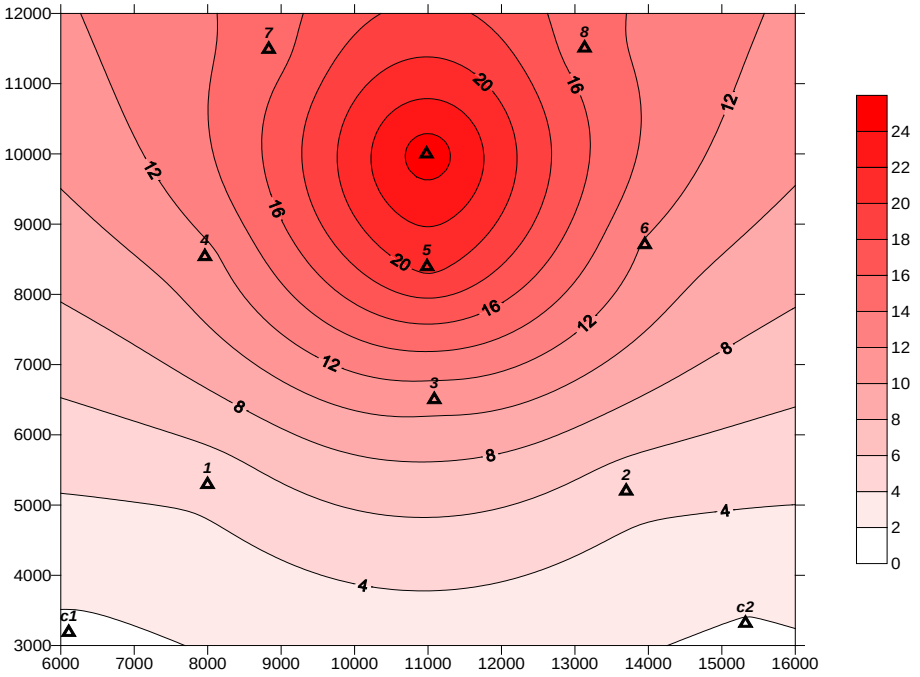


Рис. 31. Поле напряжений σ_ϕ в эпоху 2

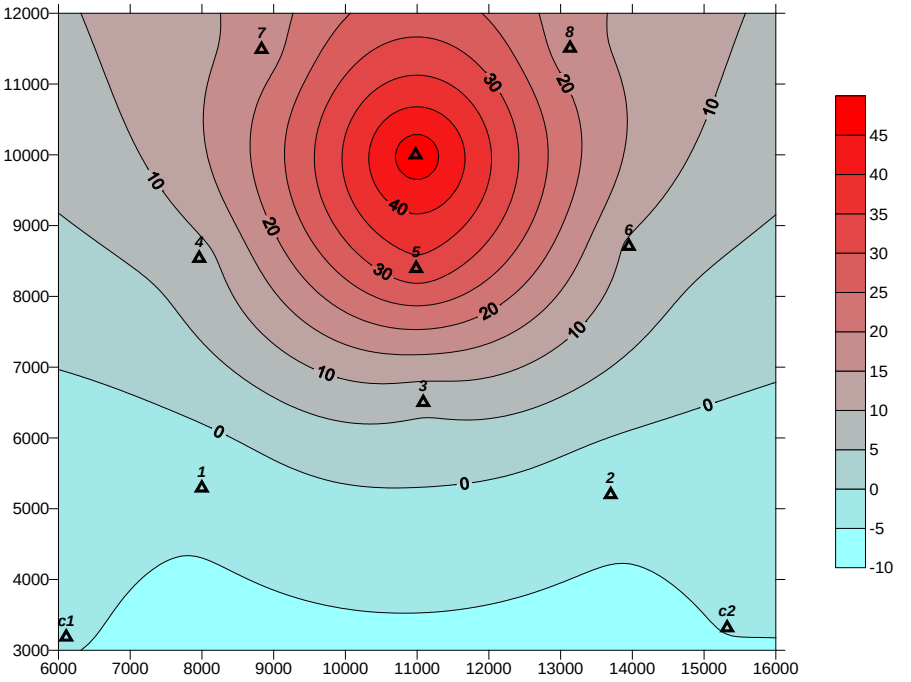


Рис. 32. Поле напряжений σ_r в эпоху 3

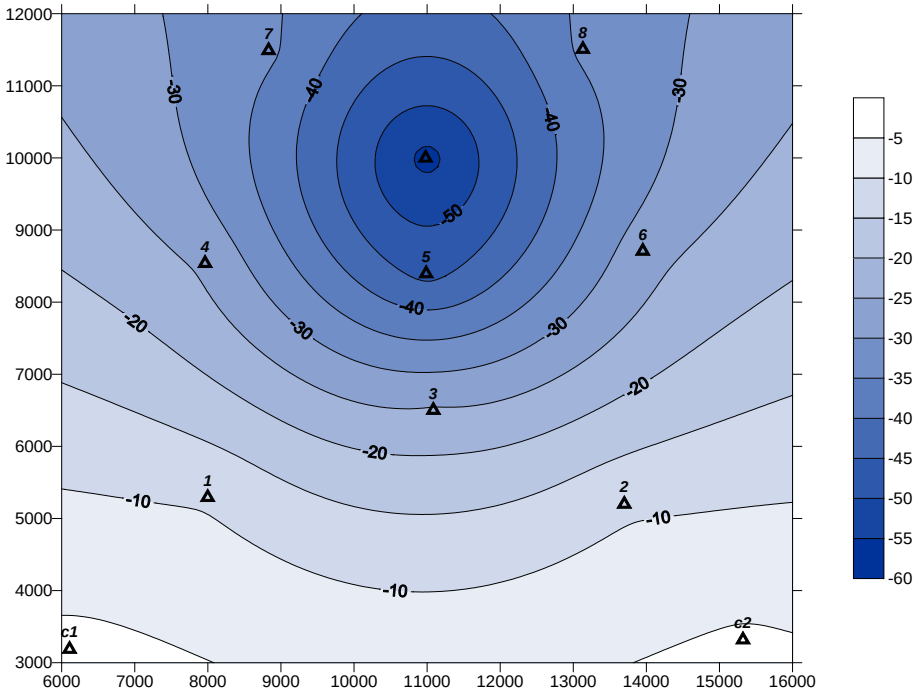


Рис. 33. Поле напряжений σ_z в эпоху 3

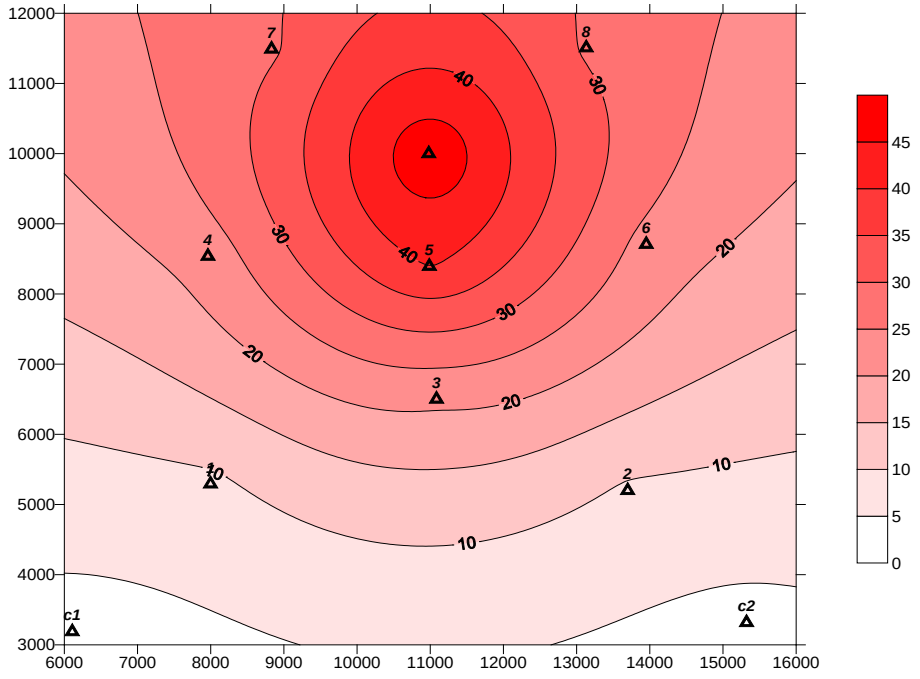


Рис. 34. Поле напряжений σ_ϕ в эпоху 3

4.7 Выводы

Описано развитие теории и методов изучения геодинамических объектов и процессов по геодезическим и геофизическим наблюдениям, описанных в предыдущем разделе, но с учетом увеличения внутриочагового давления при накапливании магмы в верхнем магматическом очаге вулкана.

Геодезические методы (нивелирование, угловые, линейные измерения, GPS-наблюдения) позволяют определить перемещения земной поверхности, которые являются следствием меняющегося напряженно-деформированного состояния в окрестности очага землетрясения. Но это изменение НДС является в свою очередь следствием увеличения внутриочагового давления при накапливании магмы в верхнем магматическом очаге вулкана. Таким образом, мы имеем дело с перемещением масс (наполнение верхнего магматического очага). Следовательно, наблюдения геодезическими приборами, которые устанавливаются в рабочее положение с помощью уровня, должны обрабатываться совместно с гравиметрическими наблюдениями.

С целью уточнения теории, методики, отработки алгоритмов совместной математической обработки геодезических и гравиметрических наблюдений была смоделирована картина подготовки вулканического извержения и сопутствующие этой подготовке изменения напряженно-деформированного состояния приповерхностного слоя земной коры. Полученная физико-математическая модель использовалась для моделирования геодезических и гравиметрических наблюдений и последующего уточнения алгоритма их совместной математической обработки. Система наблюдений в каждую из трех эпох включает 12 нивелирных превышений; 27 горизонтальных углов; 2 светодальномерных дальности; 10 наблюдений абсолютных значений ускорений силы тяжести; 21 GPS-вектор $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$. Общее количество измерений в каждую эпоху – 114 (с учетом трех компонент каждого GPS-вектора).

Результатом совместной математической обработки и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов геодезических и гравиметрических наблюдений явились оценки пространственных координат мобильных пунктов, оценки горизонтальных и вертикальных смещений этих пунктов, оценки аномальных масс – поверхностного маскона, аппроксимирующего конус вулкана и глубинного маскона, аппроксимирующего накопление избыточной массы в магматическом очаге. Совместная обработка разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений позволила определить основ-

ные характеристики НДС вулканической области и глубину вулканического очага с последующей компьютерной визуализацией результатов. Выведены уравнения наблюдений измеренных горизонтальных углов и зенитных расстояний, содержащие слагаемые, учитывающие влияние аномальных масс.

Наука строится из фактов, как дом строится из кирпичей; однако нагромождение фактов не есть наука, так же как груда кирпичей не есть дом.

А. Пуанкаре

5 ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО НАТУРНЫМ ДАННЫМ

5.1 Программное обеспечение изучения геодинамических объектов и процессов

Для проверки и уточнения алгоритмов и создания элементов информационной технологии изучения геодинамических объектов и процессов по пространственно-временным рядам геодезических и гравиметрических наблюдений автором были разработаны программы в различных средах программирования. Моделирование геодинамических объектов, моделирование пространственно-временных рядов комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений, их математическая обработка, статистический анализ и наглядное представление результатов идентификационных экспериментов выполнялись по авторским программам в средах программирования Delphi и Matlab. Так же использовались электронные таблицы Excel и пакеты прикладных программ (Maple, Derive, Mathcad, Mathematica, StatGraphics, Matrixer, Surfer, Elcut, Microdem и др.).

Решение прикладных задач пользователя в той или иной области приложений поддерживают пакеты прикладных программ узкоспециального, специального или общего назначения. В ряде случаев для решения своих задач квалифицированный пользователь может самостоятельно разработать и отладить отдельную программу или комплекс программ, позволяющих реализовать на компьютере алгоритм его задачи. Причем в ряде случаев данный подход может быть более эффективным, чем использование для этих целей уже готового ПО, так как разработчик программного обеспечения одновременно хорошо владеет спецификой решаемой задачи и условиями ее практического использования. Но данный подход, как правило, требует серьезных трудозатрат, и поэтому при нынешнем обилии различного типа и назначения программного обеспечения становится нецелесообразным.

Тем не менее, для проверки и корректировки некоторых алгоритмов идентификации геодинамических объектов и процессов автором

создавались компьютерные программы, в частности, в среде программирования Delphi. Для проверки алгоритма, описанного в разделе 2, были написаны и отлажены программы для вычисления коэффициентов матрицы жесткости.

Подготовка исходных данных для последующих расчетов коэффициентов жесткости, моделирования случайных чисел и вычисления параметров геодинамического объекта выполнялась с использованием электронных таблиц Excel. Для генерирования псевдослучайных ошибок измерений использовалась встроенная функция СЛЧИС() электронных таблиц Excel.

Нормальнораспределенные псевдослучайные числа получены как сумма 12-ти псевдослучайных равномернораспределенных чисел функции СЛЧИС() после их линейного преобразования согласно ожидаемым значениям математического ожидания и среднеквадратическому отклонению нормальнораспределенных чисел. Основанием для такого способа получения нормальнораспределенных псевдослучайных чисел является центральная предельная теорема теории вероятностей.

Выполнялась проверка на нормальность сгенерированных ошибок. Для этого использовалась программа Matrixer (рисунок 35).

Электронные таблицы Excel использовались также для некоторых промежуточных расчетов при отработке алгоритмов совместной математической обработки и пространственно-временной интерпретации результатов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений (разделы 3 и 4).

Одним из важнейших элементов информационной технологии математического моделирования и идентификации движений и напряженно-деформированного состояния земной коры по многомерным пространственно-временным рядам разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений является этап визуализации вычисленных оценок параметров НДС геодинамического объекта. Понятие визуализации увязано с возможностью сделать видимым для человека какие-либо невидимые данные. Распространено определение: «Визуализация (visualization, display, viewing) – преобразование невидимых человеческому глазу физических параметров или кодов объекта в удобное для зрительного восприятия черно-белое или цветное изображение».

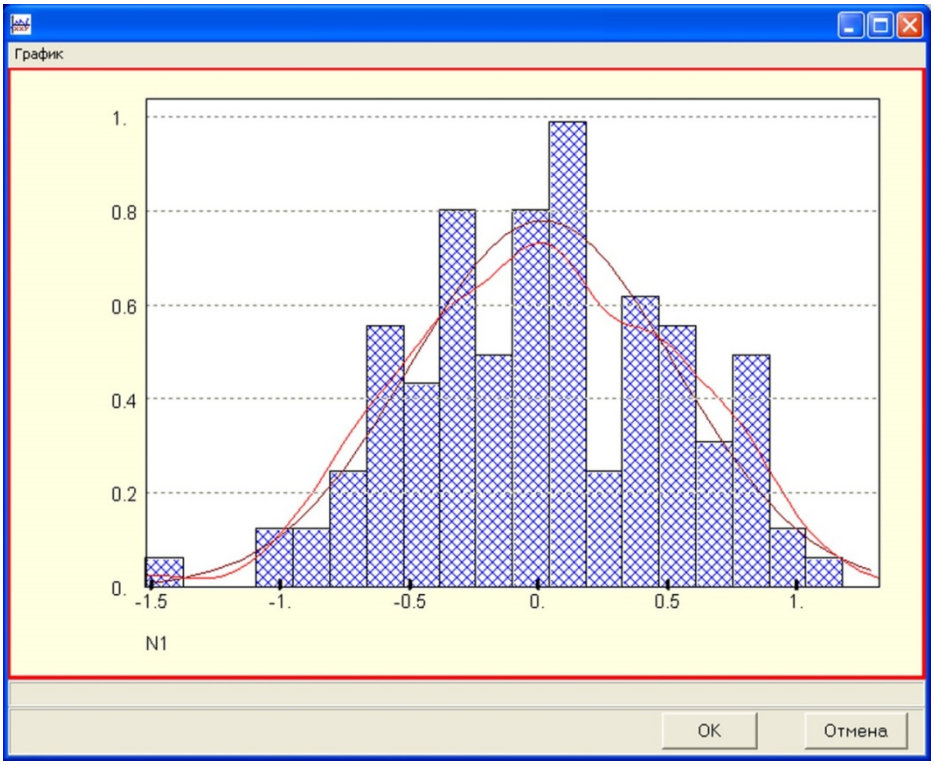


Рис. 35. Гистограмма распределения

Для визуализации полей деформаций и напряжений использовались графические функции математического пакета Matlab и пакет Surfer.

Система инженерных и научных расчетов MATLAB (матричная лаборатория) широко распространена во всем мире и доказала свою эффективность в самых различных сферах науки и техники. Язык, используемый в системе MATLAB, простой в применении и принципе непосредственного исполнения (интерпретации). Ориентация на работу с массивами делает его удобным и естественным инструментом обработки экспериментальных данных, в том числе очень больших объемов.

Поэтому, для отработки алгоритмов совместной математической обработки и пространственно-временной интерпретации результатов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений больших объемов (раздел 4) была написана соответствующая программа, реализующая алгоритм фильтра Калмана-Бьюси в среде MATLAB.

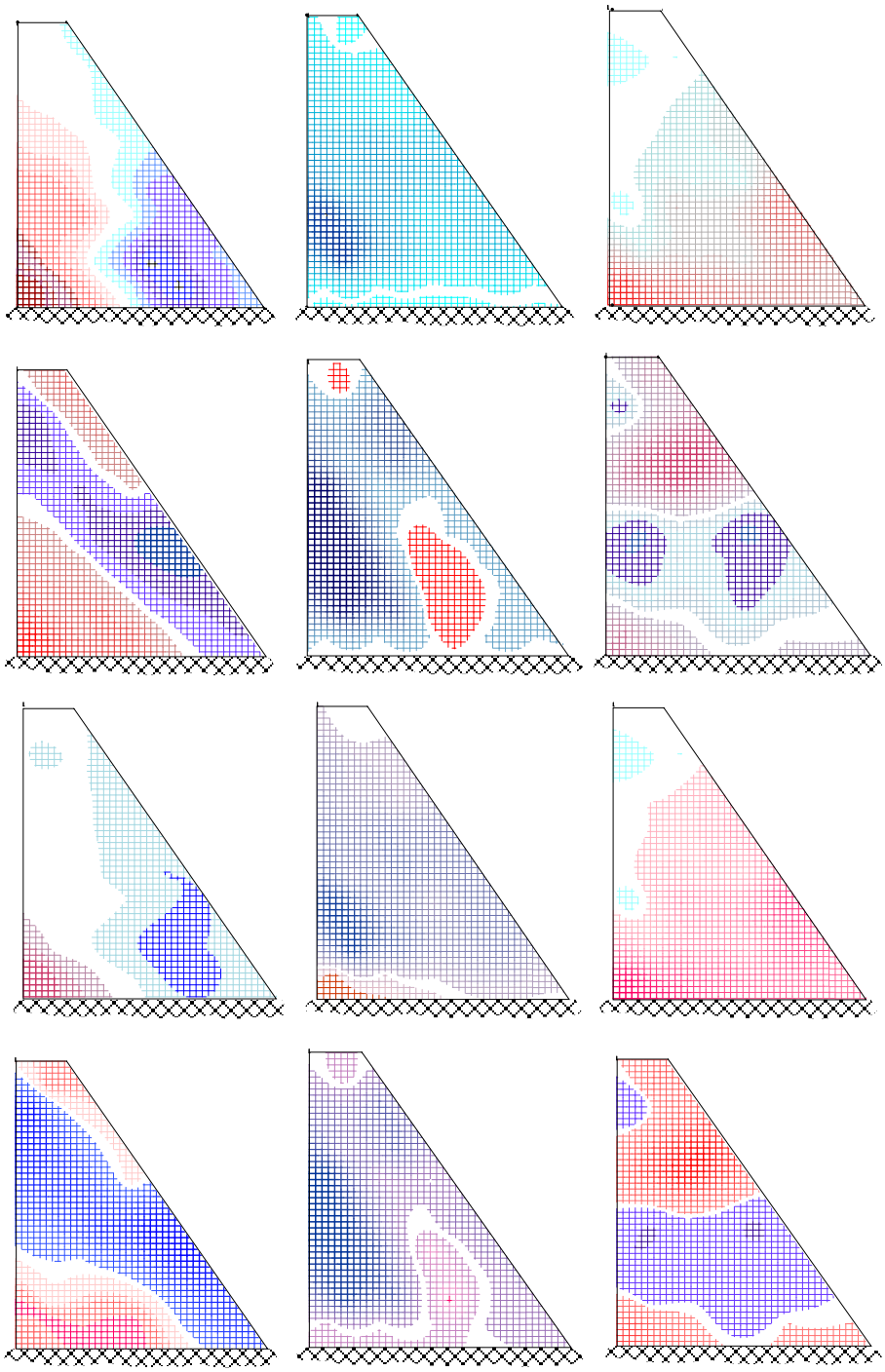


Рис. 36. Пример визуализации полей деформации
и напряжений в MATLAB

Достоинством созданной программы является, то, что она применима к любому ее объему измерительной информации. Это тот случай, когда вся сложность решения задачи математической обработки сводится к подготовке исходных данных. Размерность решаемой задачи ограничивается только характеристиками конкретного компьютера – размерами оперативной и дисковой памяти. И, конечно, на скорость решения влияет также тактовая частота процессора, разрядность его и шины и т.п.

5.2 Движения и поля деформаций Горного Алтая перед Чуйским землетрясением по спутниковым данным с условностабильной станцией NVSK

В соответствии с работой [198] итогом наблюдений Алтайской GPS-сети являются значения скоростей горизонтальных движений 18-ти GPS-станций, территориально охватывающих структурные элементы Горного Алтая и его предгорий в пределах Российской Федерации (рис. 37). За базовую постоянную станцию была принята станция NVSK (г. Новосибирск).

Так как при изучении движений и деформаций исходными данными являются смещения $\hat{U}$ узлов расчетной схемы, был сделан их расчет по оценкам скоростей $\hat{V}$ за период длительностью $\Delta t = 2$ года согласно гипотезе равномерного и прямолинейного движения станций в этот период времени:

Площадь, занимаемая ГДС Горного Алтая, была разделена на 22 треугольных конечных элемента (рис. 37).

При выборе варианта разделения на КЭ старались избегать треугольников с очень острыми углами. Поэтому, в частности, не был включен в обработку треугольник SEMI-KAIT-KAYT. Пункты KAIT и KAYT расположены на расстоянии 1.8 км друг от друга. Объяснение значимых различий величины и ориентации смещений этих пунктов дано в работе [165].

Согласно (33)-(35), (40) были вычислены компоненты вектора деформации $\hat{\varepsilon}$ (приложение 2). Вычисление напряжений для больших по площади территорий, в общем случае, является сложной задачей. Необходимо учитывать реологическую неоднородность среды, наличие блоков разных масштабов, разломов, их ориентацию.

Оценки $\hat{\varepsilon}$ характеризуются погрешностью порядка от $4*10^{-10}$ до $2*10^{-8}$.

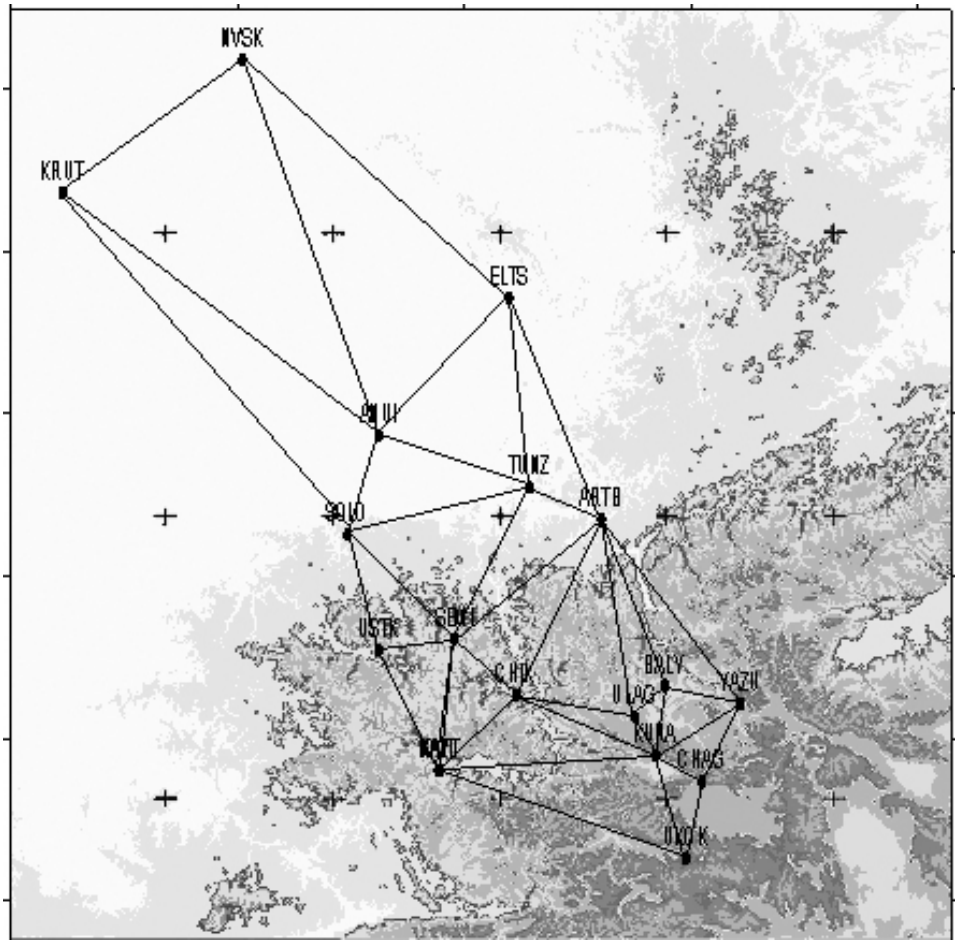


Рис. 37. Схема расположения станций Алтайской GPS-сети. Сплошными линиями показано разбиение ГДС на треугольные конечные элементы. Более темные области соответствуют более высокому рельефу

Для ГДС Горный Алтай НДС представлено полями деформаций (рис. 39) по оценкам компонентов векторов $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ для каждого КЭ принятого нами варианта разбиения (рис. 38). Заметим, что способ разделения на примерно одинаковые по площади конечные элементы не принес бы значительно другие результаты по причине реального расположения пунктов деформационной сети. Именно реальная конфигурация и соответствующий набор данных о смещениях являются определяющими в получении результатов их графической интерпретации

В работе [198] анализ результатов обработки GPS-определений включает описание горизонтальных движений в районе Горного Алтая. В частности, говорится о широтных смещениях в центральной части региона, движениях на северо-запад в южной части.

Заметим, что такой метод описания горизонтальных движений, несмотря на его широкое распространение, имеет существенные недостатки. Во-первых, неинвариантность – при выборе в качестве стабильного любого другого пункта сети (не NVSK) будет получена другая картина векторов горизонтальных движений. Во-вторых, описание движений с помощью векторов не позволяет анализировать деформационные процессы на территории исследуемого геодинамического объекта (рис. 39).

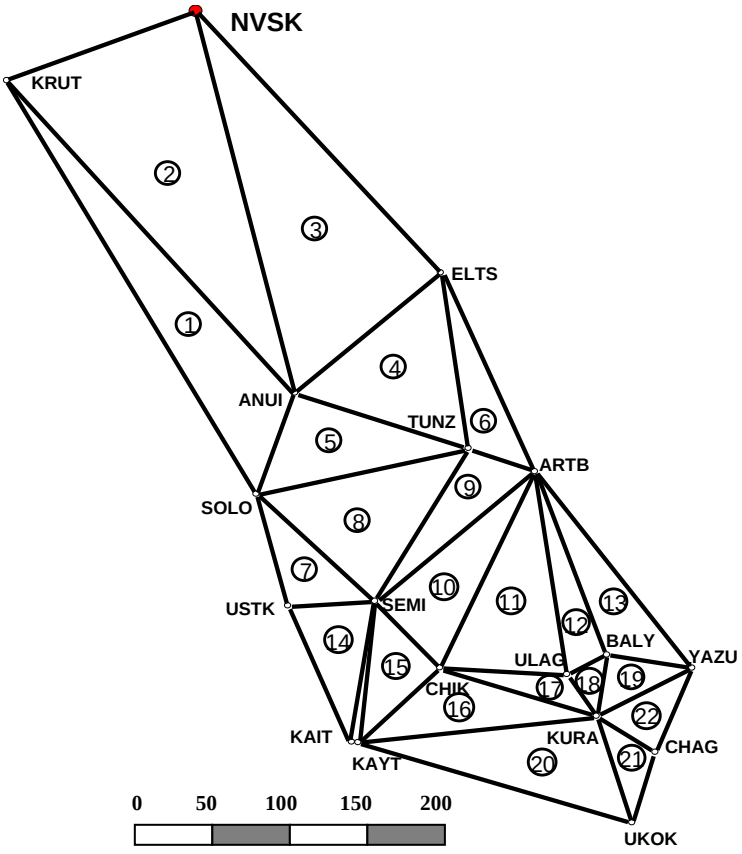


Рис. 38. Разбиение геодинамического объекта «Горный Алтай» на треугольные конечные элементы (масштаб в км)

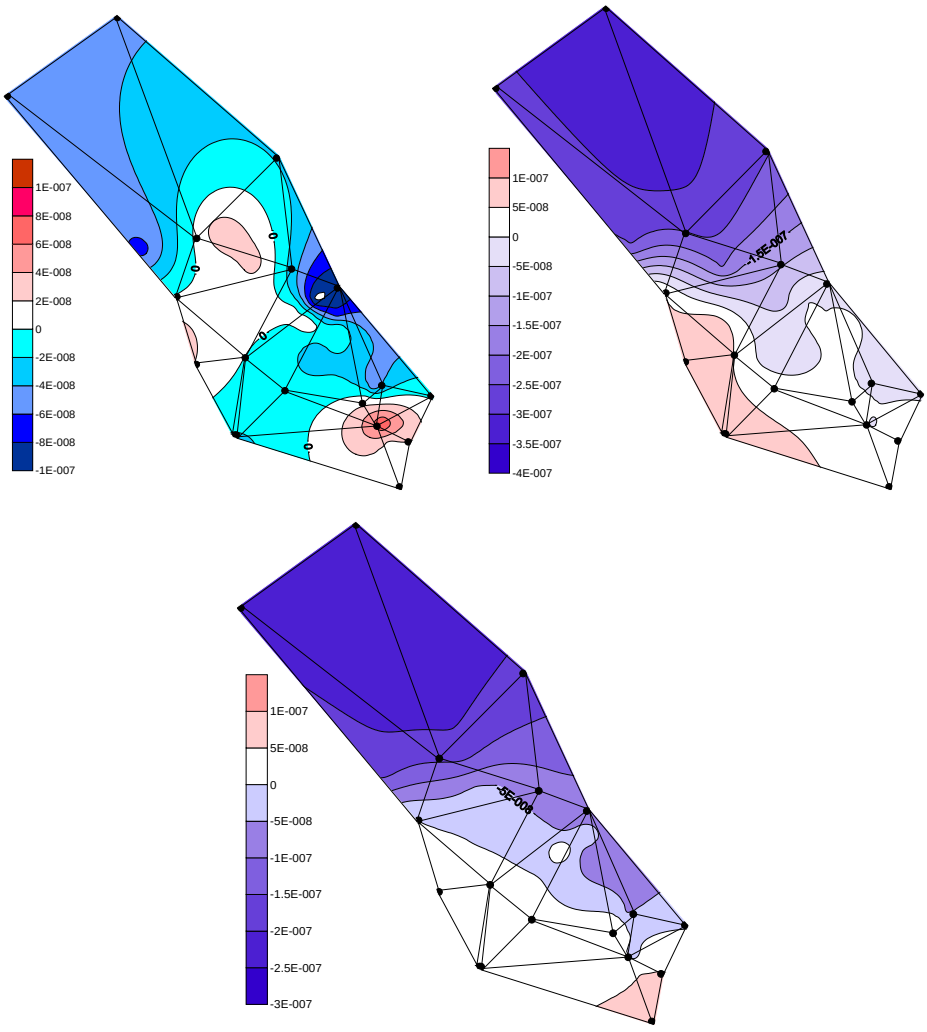


Рис. 39. Поля деформаций ГДС Горный Алтай (слева направо – $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ Подписи шкал – безразмерные величины

На рисунке 39 заметны аномальные деформации в южной части ГДС Горный Алтай. Именно в этом районе на глубине около 16 км находился фокус Алтайского землетрясения 27 сентября 2003 года. На рисунке 40 показаны эпицентры главного толчка и последующих за ним на протяжении нескольких недель афтершоков в пределах южных конечных элементов в соответствии с рисунком 40. Данные о координатах эпицентров взяты из сайта www.usgs.gov.

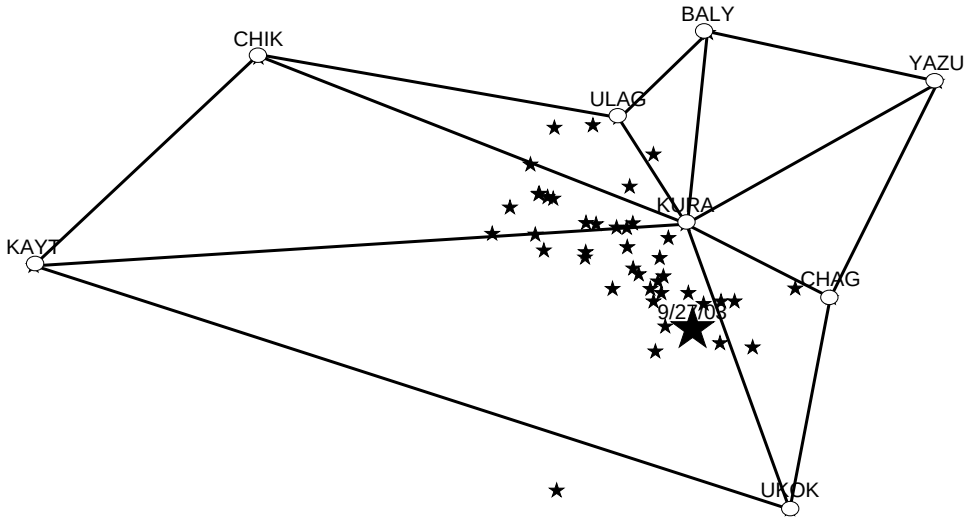


Рис. 40. Эпицентры землетрясения 27.09.03 и афтершоков (27.09.03 – 17.10.03) Горного Алтая относительно пунктов южной части GPS-полигона. Большая звезда – главный толчок (27.09.03, магнитуда – 7.3), малые звезды – афтершоки

Приведем также карту вертикальных движений ГДС Горный Алтай (Рис. 41), построенную нами по результатам GPS-наблюдений [198]. Район землетрясения 27 сентября 2003 года на этой карте совпадает с аномальными вертикальными движениями. Эти данные получены в результате наблюдений за период 2000 – 2001 – 2002 гг.

Более точный прогноз места а, возможно и мощности землетрясения, мог бы быть получен при усилении системы наблюдений за ГДС. Это, например:

1. Добавление в сеть наблюдений пунктов более южных областей Алтая (Монгольский Алтай);
2. Уплотнение сети в районе Северо-Чуйского и Южно-Чуйского хребтов Горного Алтая;
3. Увеличение частоты наблюдений.

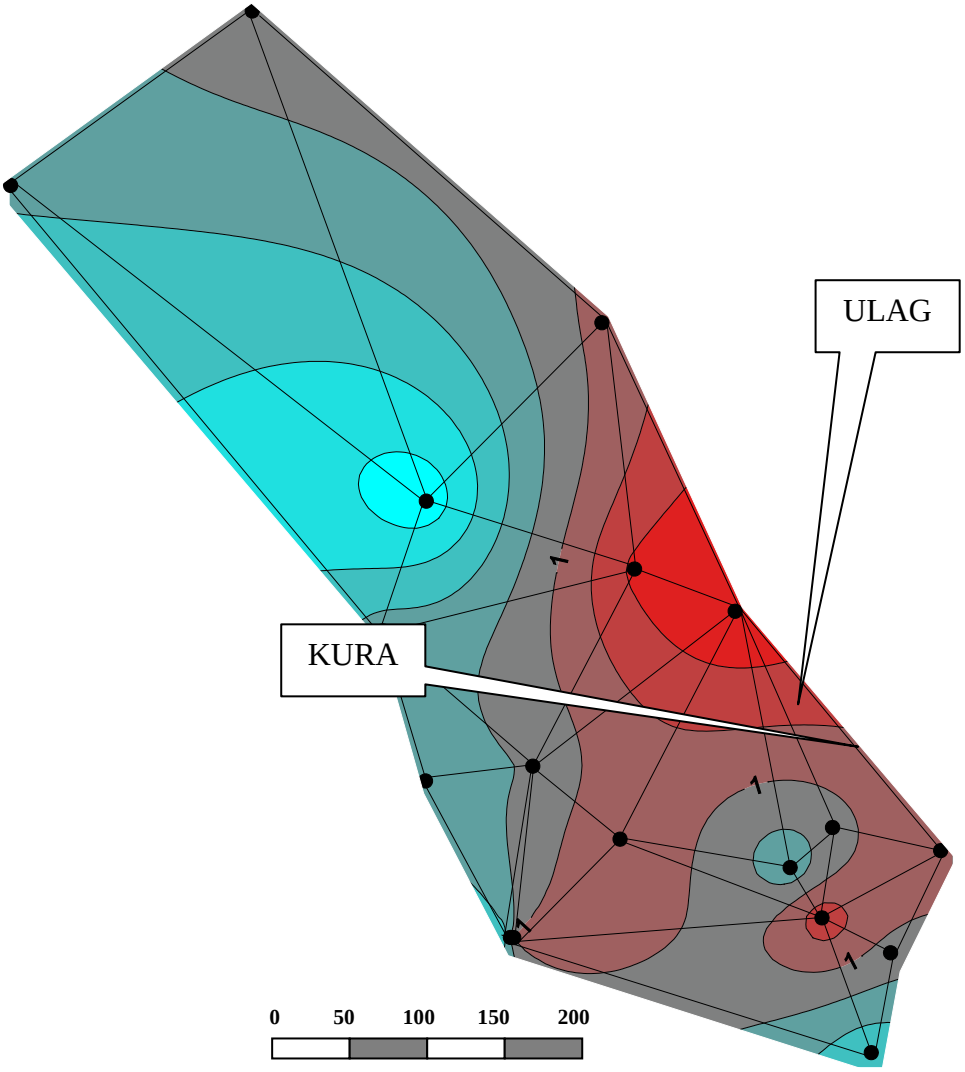


Рис. 41. Карта вертикальных движений ГДС Горный Алтай

5.3 Движения и поля деформаций Горного Алтая перед Чуйским землетрясением по спутниковым данным с условностабильной станцией ELTS

В работах [165, 197, 198, 247] приведены результаты GPS-наблюдений за движениями земной поверхности Горного Алтая начиная с 2000 года с частотой наблюдений раз в год. На рисунке 42 красный многоугольник показывает границы этого уникального GPS-полигона Института геофизики СО РАН, наибольшее расстояние меж-

ду пунктами которого составляет около 800 км (пункты KRUT – UKOK). При расчетах смещений GPS-пунктов авторами работы [247] как неподвижный был выбран пункт ELTS. Это ими было сделано на основании данных о горизонтальных движениях по профилю Lhasa (Тибет) – Urumchi (западный Китай) – Ukok Plateau и далее через Чуйскую долину в направлении на север.

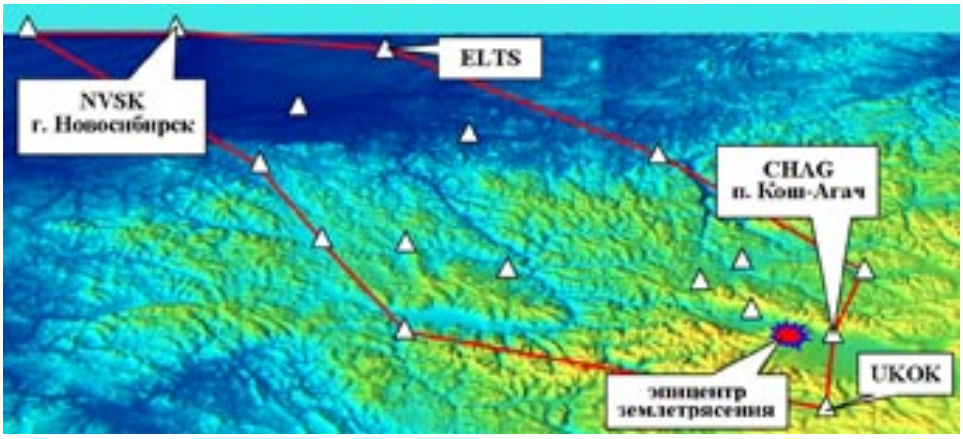


Рис. 42. Алтайская GPS-сеть

Наибольшие значения скоростей горизонтальных смещений GPS-пунктов за период с 2000 года по 2003 год составили 11 мм/год для UKOK и 5 мм/год для CHAG. Это самые южные пункты GPS-сети. У этих же пунктов наибольшие скорости вертикальных смещений -14 мм/год и -5 мм/год соответственно. Количественные характеристики площадных деформаций и напряжений для южных зон Алтайской GPS-сети приведены в работе [165].

В настоящем разделе делается графический анализ опубликованных в работе [198] данных о горизонтальных смещениях с целью определить наличие деформационного предвестника места землетрясения 27 сентября 2003 года (магнитуда 7.5). Эпицентр землетрясения – горная перемычка между Чуйской и Курайской впадинами (рис. 42). Ближайший к эпицентру крупный населенный пункт – п. Кош-Агач.

Основой анализа данных о горизонтальных смещениях являлись метод конечных элементов и современные компьютерные программы визуализации полей деформаций и напряжений, в частности Elcut.

Поле смещений однозначно определяется двумя компонентами вектора смещений δ в каждой точке:

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix}. \qquad (122)$$

Деформация связана с перемещением соотношением:

$$. \ \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (123)$$

Метод конечных элементов позволяет рассчитать (122) и (123) по дискретным в пространстве данным о смещениях, в нашем случае по данным о скоростях горизонтальных смещений GPS-пунктов из работы [198].

Приведем некоторые примеры компьютерной визуализации полей деформаций, позволяющие экспертно определять возможные места эпицентров землетрясений.

На рисунке 43 изображено автоматическое (программное) разбиение GPS-полигона на конечные элементы. Как было выше отмечено, неравномерное разбиение логично объяснить фактом различной плотности размещения станций сети всего GPS-полигона. На рисунке 44 дана картосхема векторов горизонтальных смещений. Интересными результатами этой визуализации являются видимое закручивание по часовой стрелке центральной части GPS-полигона и относительно большое смещение в направлении северо-восток южной части.

Рисунок 45 имеет подпись – «тензоры деформации». Повторим эту формулировку. Известно, что тензор это матрица билинейного преобразования, по компонентам которой могут быть вычислены характеристики чистой деформации (растяжение/сжатие, сдвиг) и угол разворота. Поэтому будем помнить, что стрелки на рисунке представляют собой геометрическую интерпретацию ориентации главных осей деформации и их величин, которые получены по значениям компонентов тензора деформации. Стрелки внутрь говорят о сжатии района, стрелки наружу о растяжении. Анализ этого рисунка дает интересный вывод – сильное сжатие южной части вдоль направления север-северо-восток.

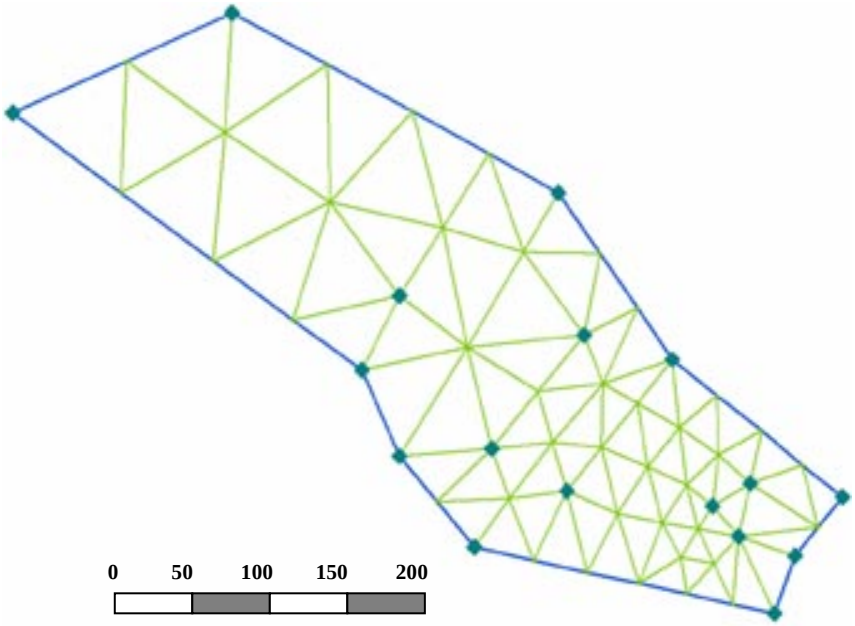


Рис. 43. Разбиение на конечные элементы

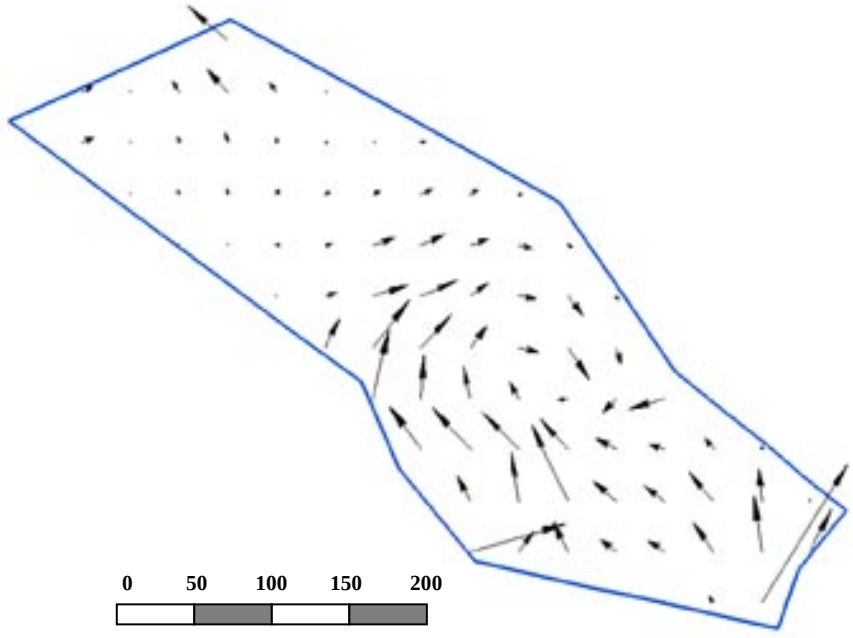


Рис. 44. Векторы смещений

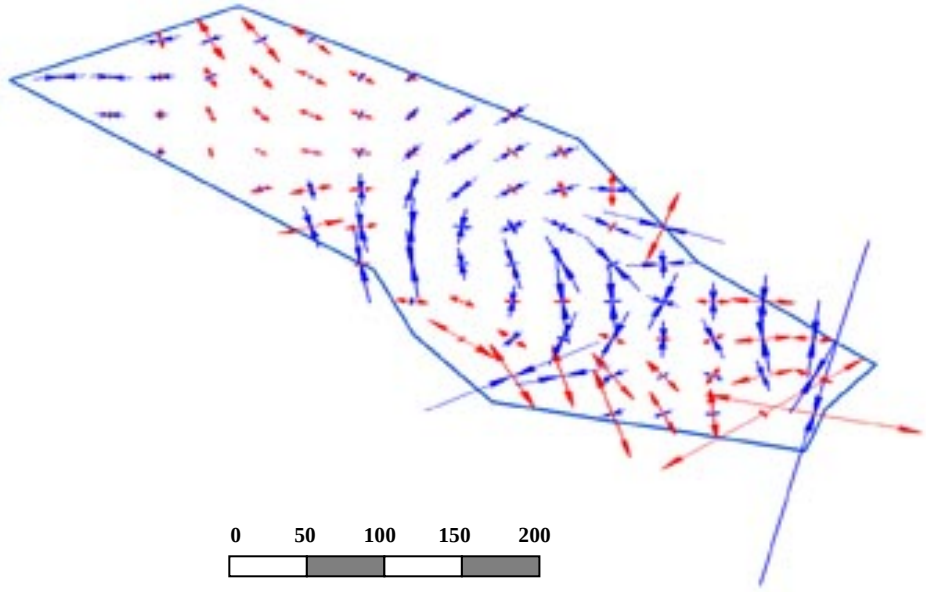


Рис. 45. Тензоры деформаций

Рисунки 46–48 являются визуализацией полей деформации, а именно величин (124). На всех трех рисунках контрастом цвета четко выделяется зона на юге GPS-полигона. Особенно это видно на рисунке 48. Если сопоставить эти рисунки с рисунком 42, то четко видно совпадение северного угла аномальных по цвету зон с эпицентром землетрясения.

Анализ вертикальных движений в Горном Алтае [185] также подтверждает наличие деформационного предвестника в южной части GPS-полигона.

Таким образом, делаем вывод, что в GPS-наблюдениях 2000 – 2003 годов имелась информация о деформационном предвестнике Чуйского землетрясения. Это еще раз подтверждает важность геодезического метода наблюдений геодинамических процессов. Но выводов о месте готовящегося землетрясения в 2003 году сделано не было, что вызывает сожаление.

В данном разделе на примере обработки данных Алтайской GPS-сети представлены некоторые возможности компьютерной визуализации полей деформаций, с помощью которой можно было бы экспертно определять место возможного эпицентра землетрясения.

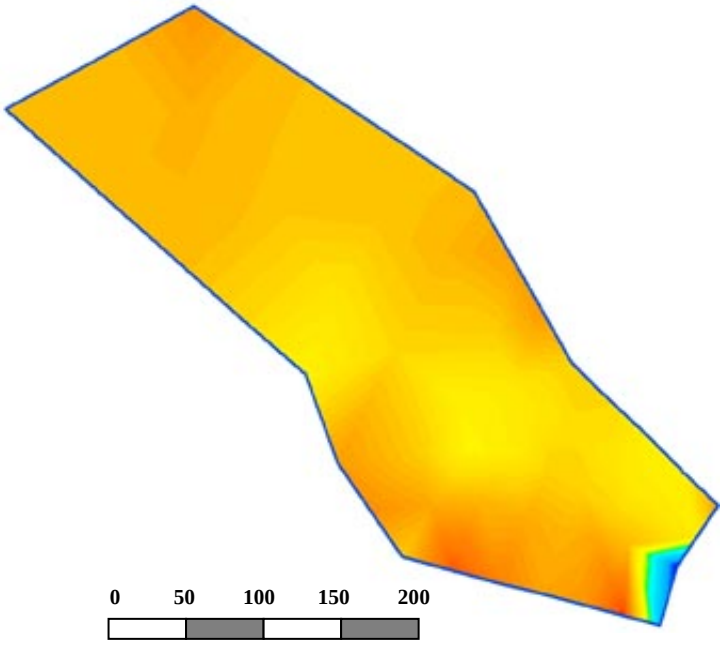


Рис. 46. Деформация ε_{xx}

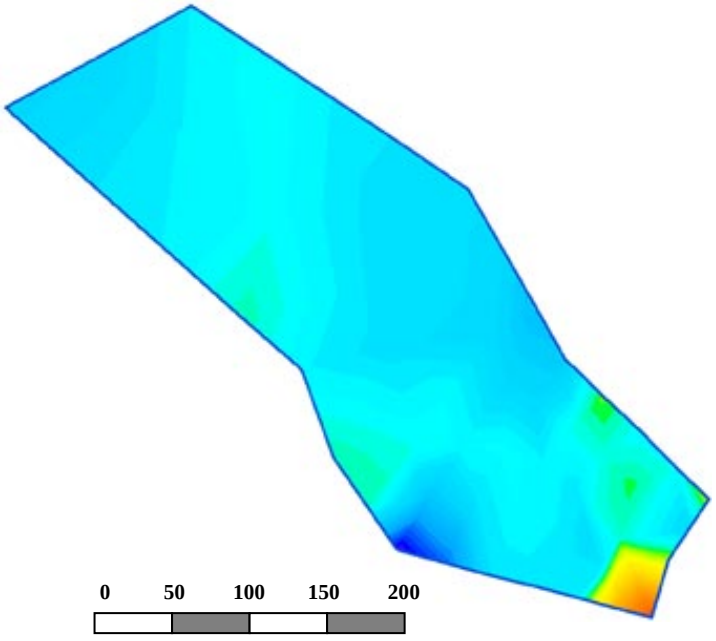


Рис. 47. Деформация ε_{yy}

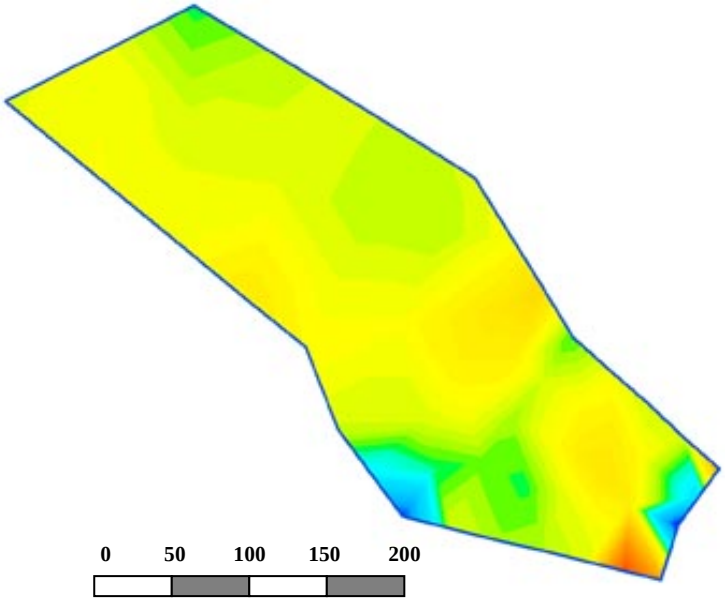


Рис. 48. Деформация γ_{xy}

5.4 Поля косейсмических смещений и деформаций земной поверхности Горного Алтая

Выше сделан графический анализ опубликованных в работе [247] данных о скоростях горизонтальных смещений GPS-пунктов геодинамического полигона Института геофизики СО РАН до землетрясения 27 сентября 2003 года (магнитуда 7.5). Одним из результатов этого анализа является вывод, что определение места готовящегося Чуйского землетрясения по результатам GPS-наблюдений было возможно.

Здесь, используя ту же информационную технологию, что и в работе [56], делается графический анализ полей смещений и деформаций земной поверхности Горного Алтая, происшедших после землетрясения – косейсмических. Исследование полей косейсмических смещений и деформаций имеет важнейшее значение при разработке моделей землетрясений. Данные о смещениях в интервале 2003 – 2004 годы были взяты из работы [165]. Графический анализ делался для южной части геодинамического полигона – район CHIK-ARTB-YAZU-UKOK-CHIK (рис. 49) с учетом предположения о стабильности (неподвижности) GPS-пункта NVSK (г. Новосибирск).

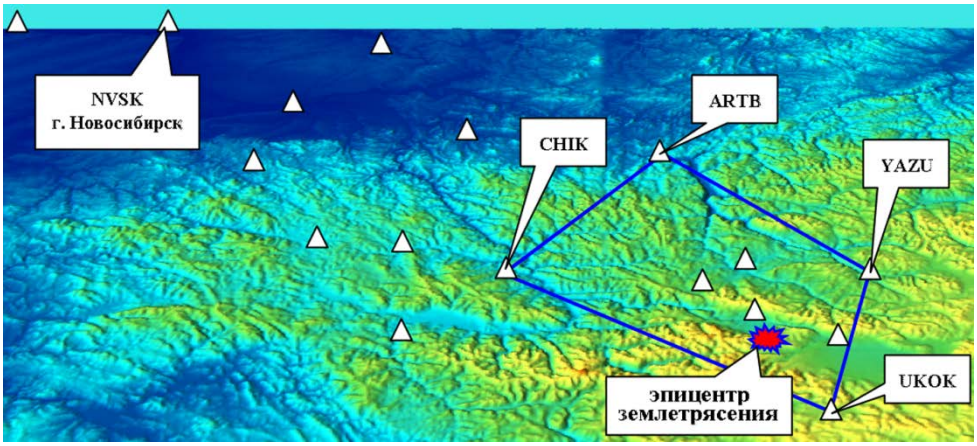


Рис. 49. Алтайская GPS-сеть

На рисунке 50 кроме изображения исследуемого района (синий четырехугольник) показано положение нодальной плоскости (красная прерывистая линия), вдоль которой произошел разрыв. Вдоль этой линии располагаются эпицентры афтершоков [66].

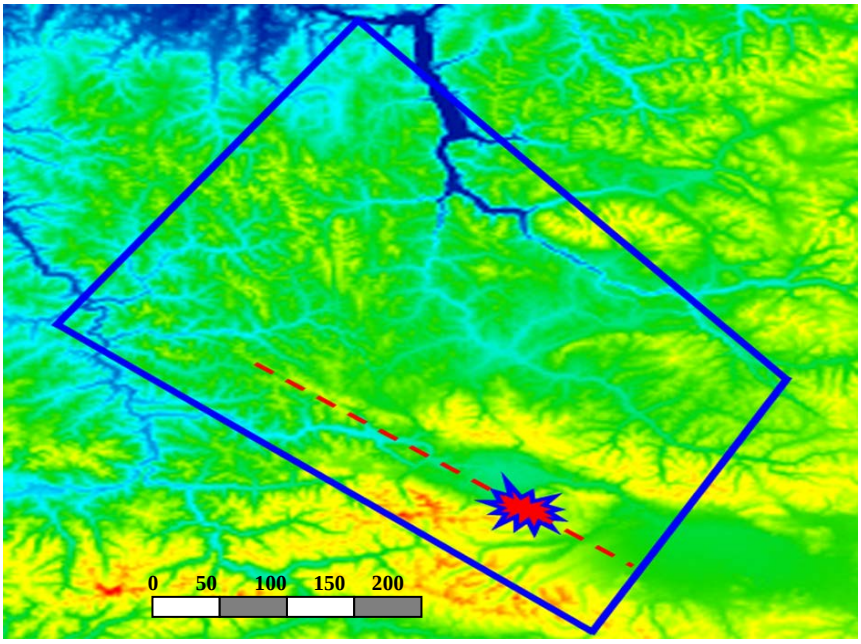


Рис. 50. Исследуемый район косейсмических деформаций

Приведем примеры компьютерной визуализации полей косейсмических смещений и деформаций в обозначенном нами районе. Поле смещений однозначно определяется двумя компонентами вектора

смещений δ в каждой точке – формула (122). Деформация связана со смещениями соотношением – формула (123).

Используя метод конечных элементов, величины (122) и (123) могут быть рассчитаны для любой точки района. Исходными являются дискретные в пространстве данные о смещениях, в нашем случае данные о горизонтальных косейсмических смещениях GPS-пунктов из работы [165]. В формулах (122) и (123), а также далее в рисунках индекс ***x*** относится к оси координат запад – восток, ***y*** – к оси юг – север.

Поле горизонтальных смещений (122) иллюстрирует рисунок 51. Изображение изменения формы и деформированной границы после землетрясения дано на рисунке 52. Эти рисунки имеет два масштаба изображения – мелкий для контура района и крупный (утрированный) для векторов смещений.

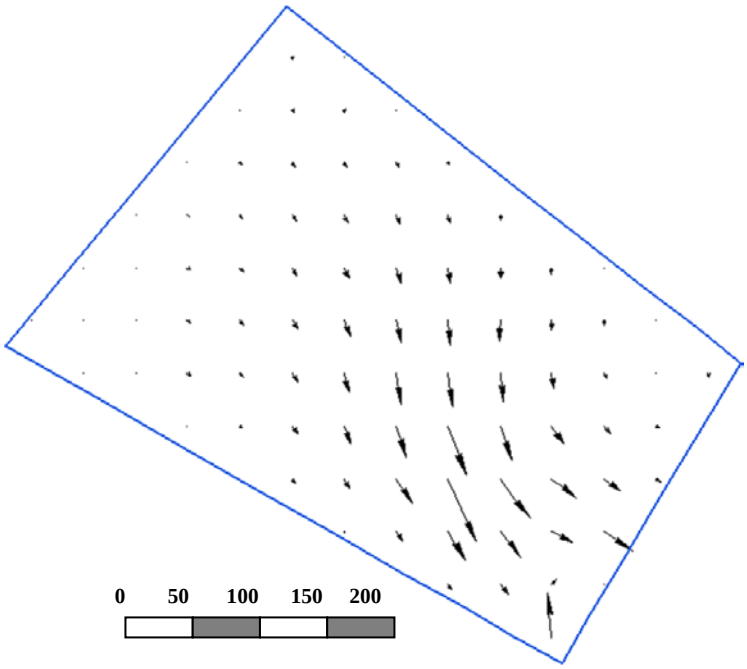


Рис. 51. Поле горизонтальных смещений

Графическая интерпретация тензоров деформаций представлена рисунком 53. Красные стрелки наружу – растяжение, синие стрелки внутрь – сжатие.

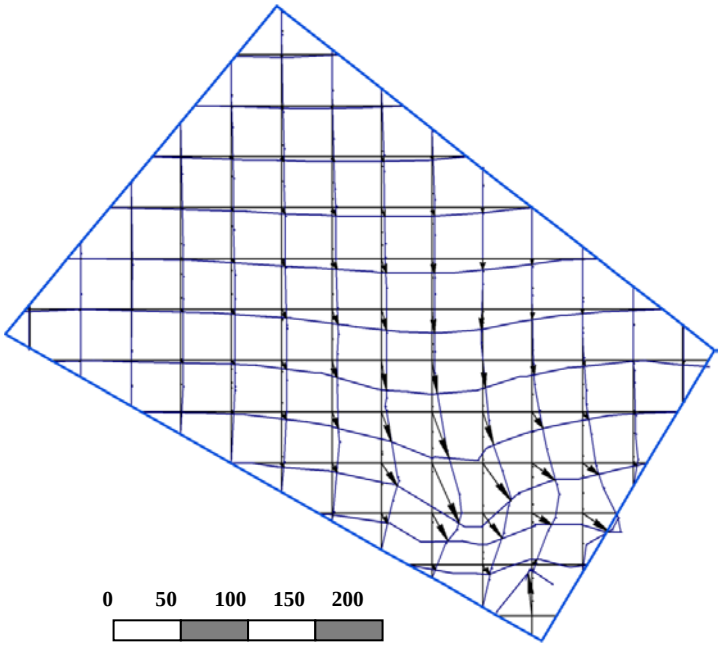


Рис. 52. Измененная форма и деформированная граница

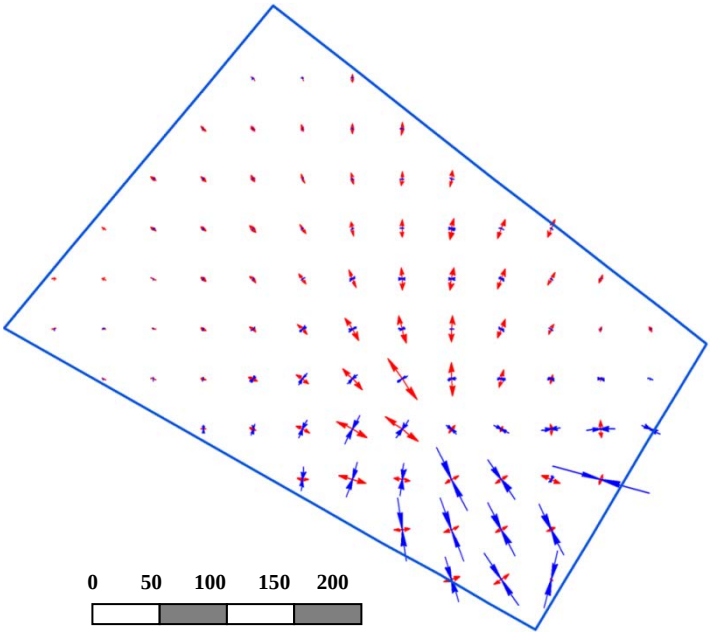


Рис. 53. Тензоры деформаций

На рисунке 54 показано поле абсолютных значений векторов смещений $\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$. Замечаем соответствие зоны самых больших значений смещений зоне эпицентров землетрясения и афтершоков вдоль нодальной плоскости (рис. 50). Рисунки 55–57 иллюстрируют поля деформаций – формула (123).

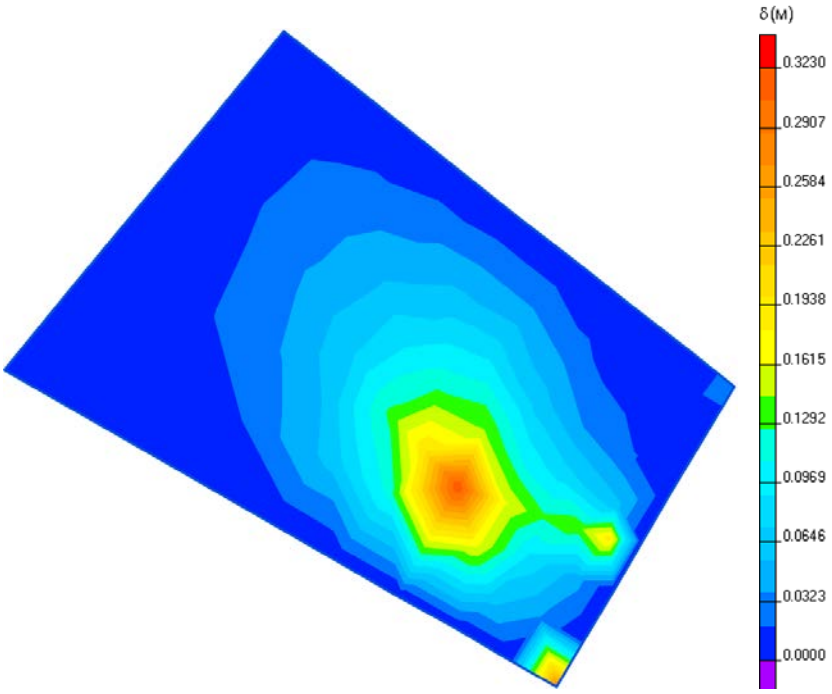


Рис. 54. Поле величин смещений δ

В работе [165] выполнен анализ полей и моделей косейсмических смещений Горного Алтая. Основой анализа являлись векторы смещений GPS-пунктов. Здесь показаны некоторые элементы технологии компьютерной визуализации, позволяющей по тем же исходным данным более наглядно представить поля смещений и деформаций. А это, в свою очередь, позволит заметить новые интересные стороны сложного геодинамического явления, выполнить более точный и комплексный его анализ и моделирование.

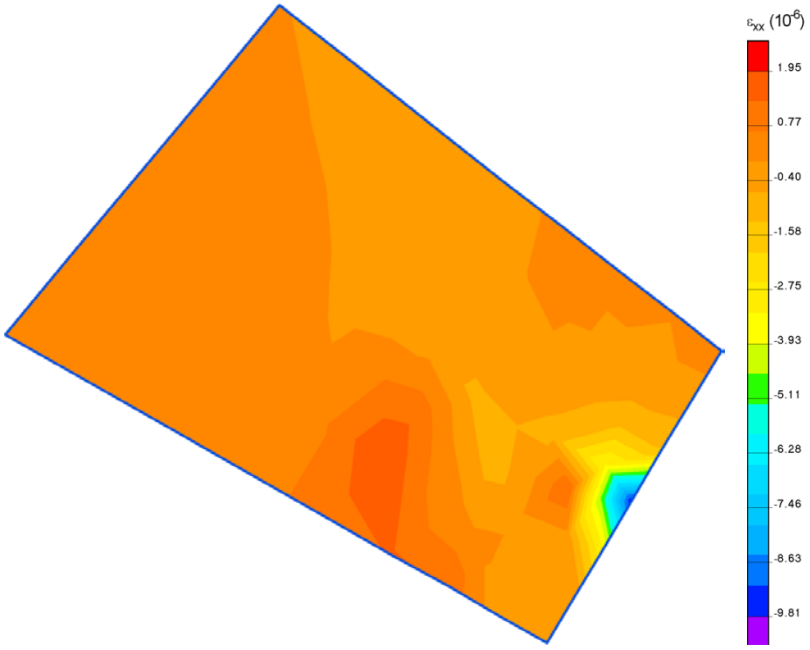


Рис. 55. Поле деформации εxx

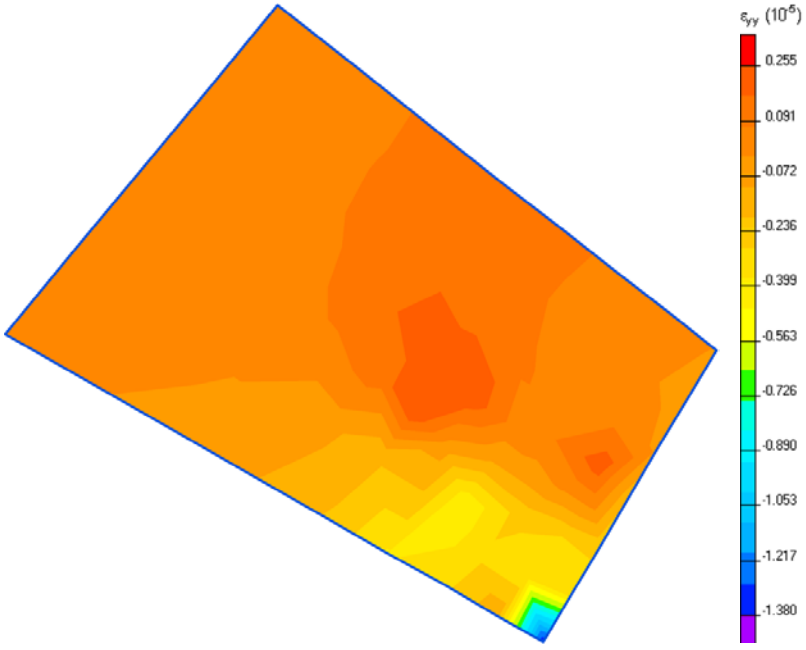


Рис. 56. Поле деформации εyy

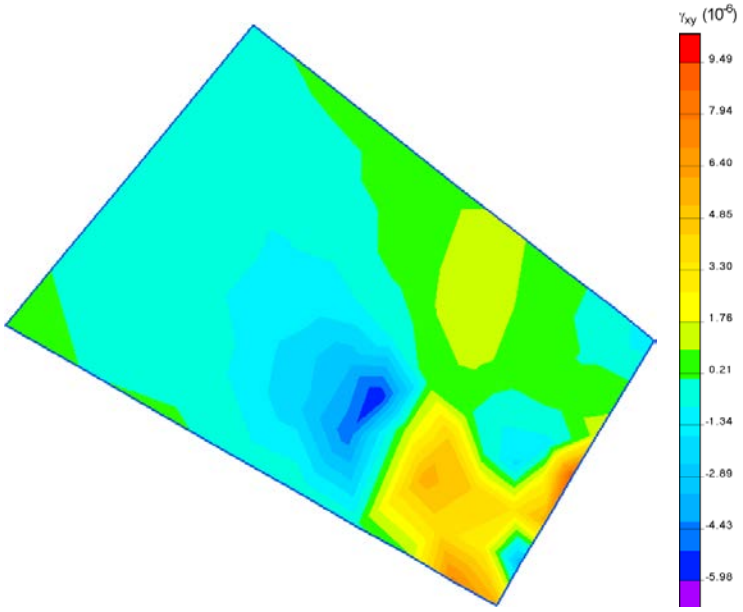


Рис. 57. Поле деформации γ_{xy}

5.5 Выводы

Для проверки и уточнения алгоритмов и создания элементов информационной технологии изучения геодинамических объектов и процессов по пространственно-временным рядам разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений были разработаны программы в различных средах программирования. Моделирование геодинамических объектов, моделирование пространственно-временных рядов комплексных геодезических и гравиметрическим наблюдений, их математическая обработка, статистический анализ и наглядное представление результатов вычислительных экспериментов выполнялись по этим программам в средах программирования Delphi и Matlab. Так же использовались электронные таблицы Excel и пакеты прикладных программ (Maple, Derive, Mathcad, Mathematica, StatGraphics, Matrixer, Surfer, Elcut, Microdem и др.).

Для проверки алгоритма, описанного в разделе 2.4, были написаны и отлажены программы по вычислению коэффициентов матрицы жесткости.

Для визуализации полей деформаций и напряжений использовались графические функции математического пакета Matlab и пакет Surfer. Для отработки алгоритмов совместной математической обработки и пространственно-временной интерпретации результатов раз-

нородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений больших объемов была написана соответствующая программа, реализующая алгоритм фильтра Калмана-Бьюси в среде MATLAB.

Достоинством созданной программы является, то, что она применима к любому виду измерительной информации и любому ее объему. Это тот случай, когда вся сложность решения задачи математической обработки сводится к подготовке исходных данных. Размерность решаемой задачи ограничивается только характеристиками конкретного компьютера – размерами оперативной и дисковой памяти.

Приводятся примеры изучения геодинамических объектов по натурным измерениям. По спутниковым наблюдениям в Горном Алтае в период 2001-2002 гг., т.е. до катастрофического землетрясения 27 сентября 2003 г., выполнена оценка движений и деформаций состояния земной коры.

Изучаемый регион территориально охватывает структурные элементы Горного Алтая и его предгорий в пределах Российской Федерации. Полученные параметры поля деформаций с последующей компьютерной визуализацией этих полей позволили дать качественно новую информацию о геодинамических процессах в районе Горного Алтая, актуальную в связи с происшедшим землетрясением 27 сентября 2003 года.

На примере обработки натурных данных Алтайской GPS-сети 2001 – 2004 годов представлены некоторые возможности технологии компьютерной визуализации полей деформаций, с помощью которой можно было бы экспертно определять место возможного эпицентра землетрясения. Показаны некоторые элементы технологии компьютерной визуализации, позволяющей по дискретным данным о горизонтальных движениях пунктов наглядно представить поля смещений и деформаций. А это, в свою очередь, позволит заметить новые интересные стороны сложного геодинамического явления, выполнить более точный и комплексный его анализ и моделирование.

«Существует еще одна причина, по которой математику надлежит ценить высоко: именно математика придает естественным наукам степень достоверности, недостижимую без нее.»

Альберт Эйнштейн

6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

6.1 Леонард Эйлер – вклад для астрономии, небесной механики, геодезии, картографии, геодинамики (совместно с Медведевым П.А.)

Леона́рд Э́йлер (нем. Leonhard Euler;15 апреля 1707, Базель, Швейцария 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие многих наук. Эйлер – автор более чем 850 работ (включая два десятка фундаментальных монографий). Академик Петербургской, Берлинской, Туринской, Лиссабонской и Базельской академий наук, иностранный член Парижской академии наук. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. С точки зрения математики, XVIII век – это век Эйлера. Значительная часть математики преподаётся с тех пор «по Эйлеру» почти без изменений.

Помимо математических исследований, он руководил обсерваторией в России. 1772: «Новая теория движения Луны». Эйлер наконец завершил свой многолетний труд, приближённо решив задачу трёх тел. В 1779 году опубликована «Всеобщая сферическая тригонометрия», это первое полное изложение всей системы сферической тригонометрии.

Эйлер много работал в области небесной механики. Одной из актуальных задач в тот период было определение параметров орбиты небесного тела (например, кометы) по небольшому числу наблюдений. Эйлер существенно усовершенствовал численные методы для этой цели и практически применил их к определению эллиптической орбиты кометы 1769 года; на эти работы опирался Гаусс, давший окончательное решение задачи.

Эйлер заложил основы теории возмущений, позднее завершённой Лапласоми и Пуанкаре. Ввёл фундаментальное понятие оскулирующих элементов орбиты и вывел дифференциальные уравнения, определяющие их изменение со временем. Построил теорию прецессии и нутации земной оси, предсказал «свободное движение полюсов» Земли, открытое сто лет спустя Чандлером. В 1756 году он опубликовал дифференциальное уравнение астрономической рефракции, исследовал зависимость рефракции от давления и температуры воздуха в месте наблюдения. Эти результаты оказали огромное влияние на развитие астрономии в последующие годы.

Эйлер изложил очень точную теорию движения Луны, разработав для этого особый метод вариации орбитальных элементов. Впоследствии, в XIX веке, этот метод был расширен, применён в модели движения больших планет и используется до настоящего времени.

Эйлер исследовал поле тяготения не только сферических, но и эллипсоидальных тел, что представляло собой существенный шаг вперёд. Он также впервые в науке указал на вековое смещение наклона плоскости эклиптики, и по его предложению в качестве опорного был с тех пор принят наклон в начале 1700 года. Разработал основы теории движения спутников Юпитера и других сильно сжатых планет.

В течение 1730-х годов Эйлер возглавлял работу по картографированию Российской империи, которая (уже после отъезда Эйлера, в 1745 году) завершилась изданием атласа территории страны. В 1771 году Эйлер опубликовал сочинение «О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость». В этой работе введено понятие развёртывающейся поверхности, то есть поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов. В связи с задачами картографии Эйлер глубоко исследовал конформные отображения, впервые применив для этого средства комплексного анализа.

В глобальной и региональной геодинамики математической основой для рассмотрения «мгновенной» кинематической картины движения литосферных плит служит известная теорема Леонарда Эйлера. Теорема гласит, что произвольное перемещение твердого тела с некоторой неподвижной, расположенной внутри тела точкой можно представить как результат его вращения относительно фиксированной оси, проходящей через эту точку. Применяя эту теорему Эйлера к «мгновенному» перемещению литосферных плит по поверхности сферической Земли, получаем, что это перемещение (при условии, что плита в .некотором приближении ведет себя как жесткое тело) можно описать вращением с вектором угловой скорости *Q*, проходящим через центр Земли (рис. 58). Следовательно, описание геометрии перемещения плит базируется на предположении об относительной жесткости каждой плиты.

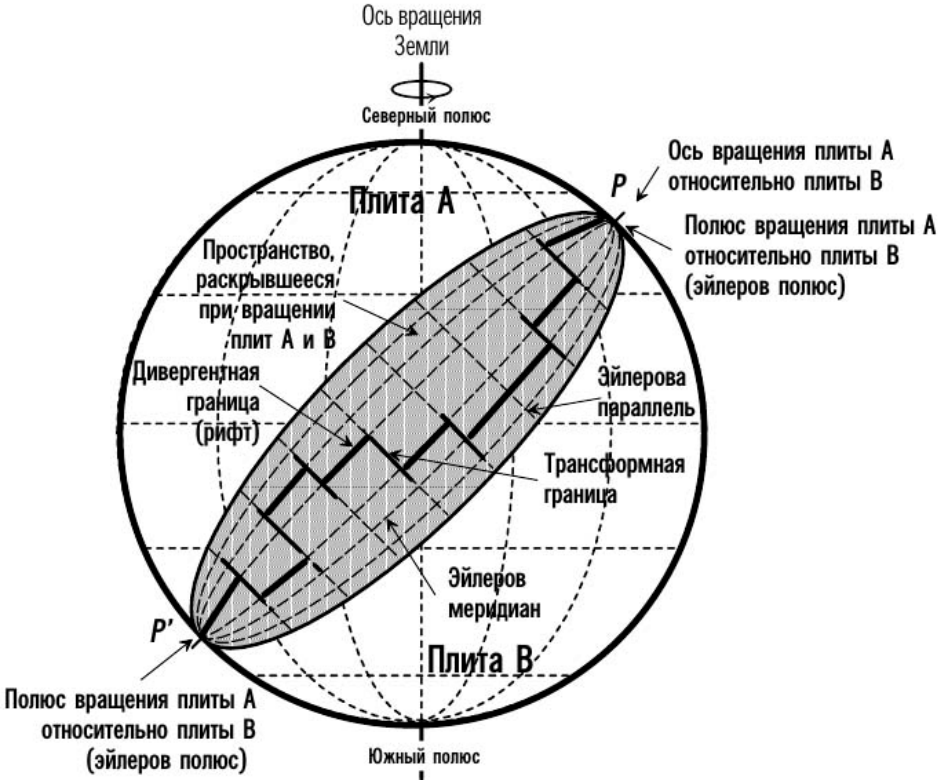


Рис. 58. Вращение плит на сферической Земле

Заметный след Эйлер оставил и в области высшей геодезии. В 1732 году он вывел общее уравнение геодезических линий на поверхности. В 1760 году вышли фундаментальные «Исследования о кривизне поверхностей». Эйлер обнаружил, что в каждой точке гладкой поверхности имеются два нормальных сечения с минимальным и максимальным радиусами кривизны и что плоскости их взаимно перпендикулярны. Вывел формулу связи кривизны сечения поверхности с главными кривизнами. В статье «Элементы тригонометрии сфероида», опубликованной в 1753 году, Эйлер рассматривает Землю как сфероид, образованный вращением эллипса вокруг его малой оси. На его поверхности, с помощью линий наименьшей длины, образует треугольник P_1P_cP с вершиной в полюсе P_c. Уравнение кривой P_1P . Эйлер устанавливает с помощью разработанной им теории экстремума функционала, приведшей к созданию вариационного исчисления.

Для вычисления длины дуги меридиана от экватора до текущей точки P с геодезической широтой B получает формулу [1, с. 261]:

$$S(0;B)=c\left(\left(1+\frac{15}{16}m^2\right)B-\frac{3}{4}m\sin 2B+\frac{15}{64}m^2\sin 4B\right), \quad (124)$$

где $m=\left(a^2-b^2\right)/\left(a^2+b^2\right)$;

a, b – полуоси эллипса;

$c=a(1-m)\sqrt{1+m}$.

При выводе дифференциальных уравнений геодезической линии в качестве независимой переменной берет не параметр S, а широту B текущей точки. Полученные уравнения представляет в форме [241, с. 273]:

$$\sin A=\frac{\sin A_1\cos B_1\cdot\sqrt{1+m\cos 2B}}{\cos B\cdot\sqrt{1+m\cos 2B_1}}, \quad (125)$$

$$dS=\frac{a(1-m)\sqrt{1+m}\cdot\cos B\cdot\sqrt{1+m\cos 2B_1}\cdot dB}{(1+m\cos 2B)^{3/2}\cdot\sqrt{\cos^2 B(1+m\cos 2B_1)-\sin^2 A_1\cos^2 B_1(1+m\cos 2B)}}, \quad (126)$$

$$dl=\frac{(1-m)\sin A_1\cdot\cos B_1\cdot dB}{\cos B\cdot\sqrt{1+m\cos 2B}\cdot\sqrt{\cos^2 B(1+m\cos 2B_1)-\sin^2 A_1\cos^2 B_1(1+m\cos 2B)}}. \quad (127)$$

Следует отметить, что Л. Эйлером впервые получены общие дифференциальные уравнения геодезической линии, справедливые при любом ее расположении на поверхности эллипсоида. Уравнения (126) и (127) Эйлер интегрирует. Но учитывая небольшую разность между полуосями земного эллипсоида и сложность формул при разложениях dS и dl в ряды, сохраняет только величины порядка m.

В соответствии с этим он получает:

$$l_0=\arcsin\left(\frac{\sin A_1\cos B_1\sin B}{\cos B\sqrt{1-\sin^2 A_1\cos^2 B_1}}\right)-\arcsin\left(\frac{\sin A_1\sin B_1}{\sqrt{1-\sin^2 A_1\cos^2 B_1}}\right);$$

$$l=l_0-m\sin A_1\cos B_1\arcsin\left(\frac{\sin l_0\cos B}{\sin A_1}\right)-\frac{m\sin l_0\cos A_1\cos^2 B_1\cos B}{\sqrt{\cos^2 B-\sin^2 A_1\cos^2 B_1}};$$

$$S = c\left(\left(1-\frac{1}{2}m\sin^2 A_1\cos^2 B_1\right)\arcsin\left(\frac{\sin l_0\cos B}{\sin A_1}\right)-\right.$$
$$-\frac{m\sin l_0\sin A_1\cos A_1\cos^3 B_1\cos B}{\sqrt{\cos^2 B-\sin^2 A_1\cos^2 B_1}}-$$
$$\left.-\frac{3}{2}m\left(\sin B\sqrt{\cos^2 B-\sin^2 A_1\cos^2 B_1}-\cos A_1\sin B_1\cos B_1\right)\right).$$

С помощью этих зависимостей Эйлер выполняет решения сфероидического треугольника по любым трем его заданным элементам. При этом отмечает [241, с. 277]: “Если из четырех величин азимутов и широт конечных пунктов даны три, то определение остальных интересующих нас величин не вызывает затруднений. Но не так просто обстоит дело, если среди трех данных величин имеется или сторона, или разность долгот. В этом случае формулы будут весьма сложными и применимыми лишь для очень малых значений сжатия. Поэтому здесь в общем случае определить искомые величины невозможно. Однако для случаев очень малого сжатия вычисления нужно вести только сферически, так как поправки определяются затем обычным приближенным методом”.

Таким образом, Эйлер Л. сфероидическому треугольнику ставит в соответствие сферический при условии равенства их исходных данных. При этом сферическая часть решения задачи выполняется не по полученным выражениям из рядов, а по строгим формулам сферической тригонометрии. Оставшаяся сфероидическая часть имеет не только более компактный вид, но и оценивается отброшенными членами сфероидического вида, меньшими на один-два порядка соответствующих сферических. Такой подход повышает точность и приводит к более простым формулам.

Предложенный Эйлером способ решения сфероидических треугольников, нашел широкие приложения в сфероидеской геодезии. Эта идея в дальнейшем многими авторами неоднократно использовалась:

- как один из методов решения задач;
- для улучшения сходимости рядов путем выделения из разложений сферических величин с помощью формул сферической тригонометрии;
- путем деления алгоритмов на сферическую и сфероидическую части, в которых сферическая часть решения проводится по замкнутым формулам сферической тригонометрии, а сфероидическая – по разложениям в ряды.

Следует отметить, что Эйлер Л. не решает прямую геодезическую задачу и ошибочно отрицает ее практическую необходимость [241, с. 277]: "… так как азимуты и широты конечных пунктов всегда будут известны, ибо они определяются посредством легкой операции".

В честь Эйлера названы: множество понятий в математике и других науках, см.: список объектов, названных в честь Леонарда Эйлера; Кратер Эйлер на Луне; Астероид 2002 Эйлер; Международный математический институт им. Леонарда Эйлера Российской Академии наук, основанный в 1988 году в Петербурге; Золотая медаль имени Леонарда Эйлера Академии наук СССР и Российской академии наук; Медаль Эйлера, с 1993 года ежегодно присуждаемая канадским Институтом комбинаторики и её приложений за достижения в этой области математики; Международный благотворительный фонд поддержки математики имени Леонарда Эйлера

Полное собрание сочинений Эйлера, издаваемое с 1909 года Швейцарским обществом естествоиспытателей, до сих пор не завершено; планировался выпуск 75 томов, из них вышло 73: 29 томов по математике; 31 том по механике и астрономии; 13 – по физике.

6.2. Метод наименьших квадратов (статика, динамика, модели с уточняемой структурой) (Основной текст написан Падве В.А.)

6.2.1 Введение

Метод наименьших квадратов (МНК) был *изобретён* в первом десятилетии XIX века практически одновременно тремя учёными, два из которых – это широко известные математики А.М. Лежандр (1752-1833) [261] и К.Ф. Гаусс (1777-1855) [243]. В том же десятилетии на другом берегу Атлантики третий автор изобретения Р.А. Эдрейн (1775-1843) (Рис. 59) опубликовал свой вывод нормального закона распределения вероятностей ошибок измерений и применил его «к установлению принципа наименьших квадратов» [219].

Авторы [121] не берут на себя ответственность в определении приоритета по данному вопросу. На русском языке имеется ряд публикаций, в которых приводятся сведения как о хронологии первых научных сообщений о методе, так и о содержании этих публикаций. Вот неполный список таких публикаций: [79, 149 – 152, 226, 231, 239].

Очевидно, как это было не раз, проблема поиска оптимального решения задачи математической обработки результатов измерений, необходимо искажаемым разного рода неопределённостями, была реа-

лизована практически одновременно. Её предыстория насчитывала века, она созрела и была решена.

Рис. 59. Математики, создатели метода наименьших квадратов (слева направо) А.М. Лежандр, К.Ф. Гаусс и Р.А. Эдрейн

6.2.2 Статика

В 1806 году А. М. Лежандр опубликовал [261] алгоритм метода наименьших квадратов и небольшой пример его реализации, не дав, де-юре, обоснования возникновению идеи метода, а, де-факто, он привёл алгебраическое решение задачи и пояснение «о применении способа к меридианному измерению во Франции», наложив на искомые поправки ограничение в форме

$$\sum_i \tilde{v}_i^2 = \min . \qquad (128)$$

Лежандр представил «метод наименьших квадратов» как вычислительный приём и предложил использовать его всем исследователям. По этому поводу можно процитировать слова Горация: «Я сделал всё, что мог, Если ты знаешь что-либо лучшее – бесхитростно поделись, если нет – пользуйся этим». Это был вариант обработки равноточных, некоррелированных результатов измерений *по способу условий*, так сейчас называется этот способ компенсации ошибок наблюдений.

Небольшое замечание. В русскоязычной и зарубежной научной литературе для отражения факта связи случайных событий и величин, особенно результатов измерений, используется термин «зависимость». Это не вполне корректно. Совершенно очевидно, что данные измерений, будучи результатами некоторого повторяющегося статистического эксперимента, необходимо «зависят» от истинного значения изме-

ряемой величины. Это детерминированная, функциональная связь явлений. А вот неопределённости, то есть погрешности, таких результатов могут быть связаны между собой стохастически. Данная связь называется коррелированностью. Она может быть парной, тройственной и … в совокупности. Чаще всего используется парная корреляционная связь в форме парных корреляционных моментов (ковариаций) или парных коэффициентов корреляции, которые формируют ковариационную или корреляционную матрицы, соответственно. Такой подход к этому вопросу уже встречается научной литературе, например, в работах [149, 275].

К.Ф. Гаусс в 1809 году публикует свою работу «Теория движения небесных тел … » [242], в которой он вначале даёт вероятностное обоснование МНК, а далее, в разделе 186 этой работы, указывает, что «принцип … может рассматриваться следующим образом, даже независимо от теории вероятностей». Несколько ниже, в том же разделе, Гаусс отмечает, что «наш принцип, которым мы пользуемся с 1795 г., ещё недавно был изложен известным Лежандром в его труде [261], где приведено много других свойств этого принципа».

Учёт неравноточности данных с помощью «весов», введение которых впервые было предложено Р. Котсом (1682-1716) [231] до разработки МНК, проводился «графически». «Вес» Котса отличался, по сути, от «меры точности» h, использовавшейся Гауссом. В последствие, мера неравноточности наблюдений p, как величина обратно пропорциональна квадратам этих ошибок, сохранила за собой название «вес». Это привело к усложнению ограничения (128) до вида

$$\sum_i p_i \tilde{v}_i^2 = [p\tilde{v}\tilde{v}] = \min . \qquad (129)$$

Первопроходцы, создатели МНК, полагали [261] и [243], что имеют дело только со случайными погрешностями. Они считали, что систематические ошибки должны изучаться предварительно и исключаться из обрабатываемых материалов. *Это первое важнейшее условие* применимости МНК для оптимизации данных. Первые применения МНК, упоминаемые в предыдущих абзацах, были реализованы для уточнения параметров орбит малых планет. В такой ситуации функциональная составляющая математической модели (эллиптическая форма орбиты) была известна с точностью до уточняемых параметров этой орбиты. Это один из законов Кеплера. Само уравнение эллипса («коническое сечение») сомнению не подвергалось. *Это было второе условие* применимости МНК. Таким образом, важно подчеркнуть, что

изначально МНК не использовался для подбора функциональной основы математической модели параллельно с оцениванием её параметров.

П.С. Лаплас (1749-1827), французский гигант науки, известный своей приверженностью к детерминизму, наряду с огромным вкладом в космологию, астрономию, физику и математику, уделял большое внимание математической обработке наблюдений и, особенно закону распределения ошибок измерений. Имея свой взгляд на эту проблему, он впоследствии оценил достоинство МНК и занимался вопросом вероятностного обоснования метода на основе нормального закона, который справедливо называют законом Лапласа-Гаусса.

Углубляя свои исследования по МНК и закону распределения ошибок наблюдений, Лаплас позднее пришёл к выводу, что при неограниченном увеличении числа наблюдений МНК даёт наилучшие результаты при законе распределения, отличном от нормального. В 1821 году Гаусс опубликовал «Сообщения (Anzeigen)» [243], в которых он «исходил из такой же точки зрения, как и Лаплас, но … не приблизительно, но со всей математической строгостью, причём ***функция вероятности может быть какой угодно***, и число наблюдений может быть большим или малым» (стр. 144). Этим самым Гаусс вновь подтвердил свою мысль о самодостаточности МНК «независимо от теории вероятностей» [243]. *Таково третье условие* с одной стороны не отменяющее два первых, а с другой – расширяющее область применения МНК для оптимальной по точности компенсации случайных погрешностей наблюдений.

Разработанный в начале XX века Р. Фишером [239] «метод максимального правдоподобия» (ММП), который «восходит ещё к Даниилу Бернулли и К.Ф. Гауссу» [150], предполагает максимум плотности вероятности вектора выборки:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \max. \qquad (130)$$

Метод дал новый импульс теории оценивания в математической статистике. Принцип максимума плотности вероятности для многомерного нормального распределения привёл к тому, что МНК стал рассматриваться [271] как частный случай ММП. Функционал наименьших квадратов приобрёл новую форму:

$$\Psi = \tilde{V}_{1n}^T K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1} = \min, \qquad (131)$$

где K_{nn} – это ковариационная матрица результатов наблюдений. Знак « ~ » (тильда), стоящий над именем оценки поправки, удовлетворяющей ограничениям (1)-(3), подчёркивает тот факт, что из этих (да и вообще любых!) вычислений мы не можем полу-

чить истинных значений погрешностей наблюдений. Абсолютная истина не познаваема.

Ограничение (131) – это квадратичная форма, матрицей которой является обратная ковариационная матрица K_{nn}^{-1}. Исходная ковариационная матрица K_{nn} представляет собой (с позиций системного подхода) *второй информационный уровень, уровень числовых характеристик* о случайном векторе V_{n1} истинных поправок к измерениям. *Первый информационный уровень* – это закон распределения вероятностей истинных поправок к наблюдениям. Переход с первого уровня на второй выполняется однозначно для любого закона: $K_{ij} = E((X_i - E(X_i) \cdot (X_j - E(X_j))$. Однако восстановить закон распределения вероятностей, то есть вернуться на первый уровень, в общем случае не возможно. Таким образом, хотя форма МНК-функционала (4) связана с многомерным нормальным законом распределения, содержательно он включает в себя числовые характеристики второго уровня: дисперсии и ковариации. Следовательно, такой функционал является условием *второго информационного уровня* и не предполагает знание закона распределения погрешностей наблюдений. Этот факт понимали и Лаплас и Гаусс [243], естественно не пользуясь принципами «системного подхода», который в то время ещё не был сформулирован, а Лежандр вообще не касался вероятностной стороны вопроса, предлагая МНК как простой и удобный способ обработки результатов измерений.

Вопрос о геометрической интерпретации воздействия МНК-функционала на вектор истинных случайных погрешностей V_{n1} рассматривался в научной литературе в аспекте его проецирования на плоскость МНК-решений [150].

С другой стороны, функционал (4) представляет собой гиперповерхность второго порядка (гиперэллипсоид) в *n*-мерном пространстве. Когда соответствующие элементы вектора $\tilde{V}_{n1}$ (вектора МНК-поправок в результаты наблюдений) и элементы ковариационной матрицы K_{nn} выражены в единицах одной и той же размерности, одинаковой дольности или кратности, квадратичная форма Ψ будет представлять собой безразмерное число.

Очевидно, что минимизация ограничения (4) без учёта функциональной зависимости элементов вектора $\tilde{V}_{n1}$, даёт тривиальное решение $\tilde{V}_{n1} = 0_{n1}$, которое не согласуется с уравнениями связи, моделирующими их зависимости.

Элементы вектора $\tilde{V}_{n1}$ объединяются в систему с помощью уравнений связи (УС), моделирующих такую систему и представленных ниже в линейной форме:

а) условные $\quad$ УС $-\ B_{rn}\tilde{V}_{n1} + W_{r1} = 0_{r1}$ $\quad$ (132)

или

б) параметрические $\quad$ УС $-\ A_{nk}\tilde{X}_{k1} - L_{n1} = \tilde{V}_{n1}$. $\quad$ (133)

Минимизируя «площадь» функционала Ψ, мы воздействуем тем самым на компоненты вектора V_{n1}, преобразуя их в компоненты вектора $\tilde{V}_{n1}$, которые продолжают удовлетворять уравнениям связи (132) или (133). Это означает, что МНК-оптимизация случайных погрешностей измерений, *независимо от закона распределения их вероятностей*, даёт совокупность векторов, реализующих алгоритм МНК-оптимизации измерений, в общем случае коррелированных и неравноточных, которые всегда обладают следующими числовыми характеристиками (на примере коррелатного способа, таб. 42) [152].

Таблица 42

Статистические свойства векторов-оценивателей коррелатной версии МНК-оптимизации измерений

Вектор	Математические ожидания	Ковариационные матрицы	Комментарии
Измерения y	$E(y) = \mathscr{Y}^{*)} \rightarrow$	$K_y = K$	*) Отсутствие в коррелированных, неравноточных измерениях систематических погрешностей.
истинные поправки $\boldsymbol{V}$	$E(\boldsymbol{V}) = 0^{*)} \rightarrow$	$K_V = K$	*) Остаются непознанными. $\lvert v_i\rvert << \lvert y_i\rvert \ \forall i$
невязки W	$E(W) = 0^{*)} \rightarrow$	$K_W = N$	*) Допуски для невязок: $W_j^{\text{доп}} = t\cdot\sqrt{N_{jj}}$
коррелаты Λ	$E(\Lambda) = 0^{*)} \rightarrow$	$K_\Lambda = N^{-1}$	*) Допуски для коррелат: $\Lambda_j^{\text{доп}} = t\cdot\sqrt{N_{\text{jj}}^{-1}}$
МНК- поправки $\tilde{V}$	$E(\tilde{V}) = 0^{*)}$ $E(\tilde{V}) \neq V^{**)}$	$K_{\tilde{V}} = KB^{\text{T}}\text{N}^{-1}\text{BK}$	*) Допуски для МНК-поправок: $\tilde{V}_{\text{i}}^{доп} = t\cdot\sqrt{\{K_{\tilde{V}}\}_{ii}}$ **) оценки $\tilde{V}$ смещены!
уравненные измерения $\overline{Y}$	$E(\overline{Y}) = \mathscr{Y}^{*)}$	$K_{\overline{Y}} = K - K_{\tilde{V}}$	*) Несмещённость уравненных значений $\overline{Y}$.

Двухвековая история применения МНК в астрономии и геодезии, использовавших этот метод для аппроксимации (точностной оптимизации) данных наблюдений в *моделях с известной функциональной структурой*, демонстрирует его вычислительную простоту и универсальность. Метод успешно применяется как для обработки и анализа фиксированных в пространстве данных, так и для свободных геодезических построений. Технологии спутникового позиционирования (GPS, ГЛОНАС и другие) вполне успешно опираются на алгоритм МНК-оптимизации данных.

6.2.3 Динамика

Объём информации, содержащейся в системах уравнений связи (5) или (6), всегда был и остаётся значительным. Задача последовательного или раздельного решения таких больших систем возникла с самого начала обработки результатов геодезических измерений, разделённых пространством-временем. Гаусс, Бессель, Крюгер и Гельмерт успешно вводили групповые методы обработки объёмной информации.

Вычислительные технологии до конца первой половины XX века эволюционировали медленно. В средине 20-ых годов этого века появилась работа C.R. Rao [275], положившая начало рекуррентному решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по методу наименьших квадратов. При этом важно отметить, что изучаемый объект предполагался статичным во времени.

После окончания Второй Мировой войны стала бурно развиваться электроника и, как естественное следствие, электронно-вычислительная техника. Появилась возможность выполнять математическую обработку результатов радиоэлектронных измерений сразу после их выполнения и принимать соответствующие решения. В таких условиях стало доступным отслеживать эволюции динамичных объектов [254], вектор состояний которых X_{n1} менялся во времени t:

$$X_{t+1} = \Phi_{t+1,t} \cdot X_t + W_t \ , \qquad (134)$$

где $\Phi_{t+1,t}$ – матрица, описывающая динамику вектора X_{n1} во времени,

W_t – вектор погрешностей динамической модели (134).

Дополнительно, состояние вектора X_{n1} отслеживается внешними наблюдениями

$$Y_t = A_t \cdot X_t + V_t \ , \qquad (135)$$

где Y_t – вектор результатов измерений, выполненных на момент t,

A_t – матрица плана этих измерений,

V_t – вектор погрешностей измерений. Системы (134) и (135) решаются под расширенным условием МНК:

$$\left(\tilde{W}^T \quad \tilde{V}^T\right)\cdot\begin{pmatrix} K_W^{-1} & 0 \\ 0 & K_V^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \min . \qquad (136)$$

Детально рекуррентный алгоритм фильтра Калмана описан неоднократно в различной литературе, например [254]. Методы рекуррентного оценивания, в частности фильтр Калмана, все чаще используется в различных геодезических приложениях. Например, при мониторинге объектов инженерной геодинамики [90], вулканизма и прогноза землетрясений.

В эти же годы стало наблюдаться качественно другое воздействие на математическую модель изучаемого явления – проникновение в её стохастическое расширение, ковариационную матрицу. Возникшая технология обработки и анализа данных получила название «средняя квадратическая коллокация» (СКК). Она подробно изложена в работе Г. Морица «Современная физическая геодезия» [271]. Автор представляет «среднюю квадратическую коллокацию» как метод определения значений гравитационного поля Земли путем комбинации геодезических измерений различных видов. Главной особенностью коллокации является факт, отмеченный в начале данного абзаца, об учёте стохастических связей между причиной и следствием через описание ковариационной функции. При этом МНК-ограничение накладывается одновременно как на погрешности наблюдений, так и на «сигнал», информация о котором задаётся с помощью ковариационной функции.

В случае алгоритма СКК с параметрами, Мориц [271], опираясь на предлагаемый им вариант модели

$$Y = AX + Us + n , \qquad (137)$$

обосновывает следующее МНК-решение задачи:

параметры $$\hat{X} = (A^T \bar{K}^{-1} A)^{-1} \cdot A^T \bar{K}^{-1} L , \qquad (138)$$

сигналы $$\hat{s} = K_{st} \bar{K}^{-1} \cdot (L - A\hat{X}) , \qquad (139)$$

где $\bar{K}$ - общая ковариационная матрица, учитывающая ковариации погрешностей измерений и сигналов.

6.2.3 Модели с уточняемой структурой

В XIX-XX веках МНК внедрился в математическую статистику, или, лучше сказать математическая статистика взяла на вооружение МНК. Он стал одним из важнейших методов построения «оценок» параметров генеральной совокупности наблюдений по материалам выборки из такой совокупности.

Оценки, а правильнее «оценивающие функции» (ОФ) [275] генеральной совокупности, как это определяется в математической статистике, должны быть *состоятельными* и *несмещёнными*, Для одного и того же параметра можно построить разные несмещённые ОФ. Предпочтение отдаётся той ОФ, дисперсия которой минимальна. При этом ОФ должна быть *эффективной*, то есть использовать всю информацию (согласно условию Рао-Фишера), имеющуюся в выборке, а это происходит лишь для тех МНК-оценок, которые получены по выборке из нормальной генеральной совокупности. Данный вопрос достаточно освещён в нашей научной литературе, например в [150, 152].

Эконометрика широко применяет в своих исследованиях средства и методы математической статистики. Упомянутые методы используются для построения математических моделей изучаемых экономических процессов. Важнейшим аппаратом таких исследований является регрессионный анализ, поддержанный дисперсионным анализом исходных данных, промежуточных преобразований и окончательных результатов. Простейшим видом математических моделей в эконометрике служит *парная линейная регрессионная модель*, с рассмотрения которой обычно начинается конкретное изложение материала в литературе по этой тематике. Примером могут служить такие хорошо известные книги, как «Статистические выводы и связи» [239], «Прикладной регрессионный анализ» [238], «Введение в эконометрику» [229], «Эконометрика» [229] и многие другие источники.

Хорошо известно МНК-решение такой проблемы для случая парной линейной регрессии. Предполагаемая зависимость отражается системой уравнений, линейных относительно неизвестных параметров β_0 и β_1:

$$y_{n1} = x_{n2} \cdot \beta_{21} + \varepsilon_{n1}. \qquad (140)$$

Однозначное решение системы (140) относительно вектора β_{21} достигается по методу наименьших квадратов:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n[x^2]-[x]^2} \begin{pmatrix} [x^2] & -[x] \\ -[x] & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [y] \\ [xy] \end{pmatrix}. \qquad (141)$$

Получаемое уравнение регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x, \qquad (142)$$

обычно дополняется оценкой коэффициента корреляции ρ_{xy} и анализом его на незн*а*чимость. Используя массивы данных $x_1, \ldots x_n$ и $y_1, \ldots y_n$, оценивают их выборочную «*ковариацию*» и выборочные «*дисперсии*»:

$$\overline{k}_{XY} = [xy] / n - \overline{x} \cdot \overline{y}, \qquad (143)$$

$$s^2_x = [x^2] / n - \overline{x}^2, \quad s^2_y = [y^2] / n - \overline{y}^2. \tag{144}$$

По этим числам находят «оценку коэффициента корреляции»:

$$r_{xy} = \overline{k}_{XY} / (s_x \cdot s_y). \tag{145}$$

Формулы (143)–(145) имеют в качестве аргументов коэффициенты и свободные члены тех же нормальных уравнений, по которым найдены оценки параметров b_0 и b_1. Комбинируя эти формулы и формулу коэффициента регрессии

$$b_1 = \frac{[xy] - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{[x^2] - n \cdot \overline{x}^2}, \tag{146}$$

устанавливают зависимость между «*коэффициентом корреляции*» r_{xy} и угловым коэффициентом уравнения регрессии b_1, оценивающим величину β_1:

$$r_{xy} = \frac{s_x}{s_y} b_1. \tag{147}$$

Следующим шагом исследования предполагается анализ коэффициента «корреляции» (145) на незн*а*чимость, а так же вычисление и анализ коэффициента «детерминации» [17, 244]:

$$R^2 = \frac{[(\hat{y} - \overline{y})^2]}{[(y - \overline{y})^2]}, \tag{148}$$

численно равного квадрату коэффициента «корреляции» (145) или (147).

Позволим себе усомниться в целесообразности таких действий по следующим соображениям. Величины s^2_x и s^2_y, определяемые по формулам (144), оценивают не *дисперсии* наблюдений, а *разбросы* массивов данных, представляющих собой не элементы спектров случайных величин X и Y, а эмпирические значения x и y функционально зависимых величин $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, *припорошенных флёром* случайностей δx и δy. Эти же величины s^2_x и s^2_y используются при построении регрессионной модели (142), откуда элементы вектора $\hat{y}_{n1}$ попадают в формулу коэффициента детерминации (148).

Резюмируя всё вышеизложенное, считаем целесообразным при построении линейной регрессионной модели ограничиваться только оценками её параметров b_0 и b_1, самим уравнением регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x$ и дисперсионным анализом модели на адекватность и зн*а*чимость коэффициентов. Вычисление «коэффициента корреляции» r_{xy} и «коэффициента детерминации» R^2 и, тем более их последующий анализ, является, на наш взгляд, некорректной процедурой, так как ар-

гументами данных формул являются не случайные величины, а функционально зависимые данные, лишь несколько искажённые погрешностями δx и δy сбора информации.

Функциональная зависимость массивов $x_1, \ldots x_n$ и $y_1, \ldots y_n$, неумолимо устремляет «коэффициенты» $|r_{xy}|$ и R^2 к их предельным значениям «единица». Отклонение от единицы тем сильнее, чем больше погрешности δx и δy в информации, но истинная корреляция r_{xy} массивов $x_1, \ldots x_n$ и $y_1, \ldots y_n$ остаётся *непознанной* и, по нашему убеждению, *не познаваемой* в подобных обстоятельствах. Какой можно проводить, в таком случае, анализ и давать заключения?

6.3 Математическое и алгоритмическое обеспечение мониторинга с использованием ГНСС-технологий

Выполним описание некоторых математических методов создания прогнозных моделей, обозначим сферу их применимости. Это традиционный метод наименьших квадратов с возможностью включения в состав уравнений модели различных опорных функций – степенных полиномов, экспоненциальной, логарифмической, показательной и т. д., регрессионные модели, сплайны. Результаты, аналогичные тем, которые получены по методу наименьших квадратов, дает фильтр Калмана [254].

Использовать можно классический алгоритм метода наименьших квадратов. Например, если в качестве опорной функции был степенной полином, матрица коэффициентов следующая:

$$A = \begin{pmatrix} (t_1 - t_0)^n & (t_1 - t_0)^{n-1} & \ldots & 1 \\ (t_2 - t_0)^n & (t_2 - t_0)^{n-1} & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ (t_i - t_0)^n & (t_i - t_0)^{n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Те же данные обрабатываются по фильтру Калмана (рисунок 2).

Используется также классическая формула регрессии

$$\begin{aligned} y &= a + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_k x_{ik} + e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ F(x) &= a_1 + a_2 F + a_3 W + a_4 T + a_5 H, \end{aligned} \tag{149}$$

$$\begin{aligned} F(x) = a_1 + a_2 F + a_3 W + a_4 T + a_5 H + a_6 FW + a_7 FT + a_8 FH + a_9 WT + \\ + a_{10} WH + a_{11} HT + a_{12} F^2 + a_{13} W^2 + a_{14} T^2 + a_{15} H^2, \end{aligned} \tag{150}$$

где F – нагрузка машин на мост в данный момент времени (т);

W – скорость ветра (м/с);

T – температура (C°);
H – влажность (%).

Алгоритм представлен в в виде блок-схемы (рис. 60).

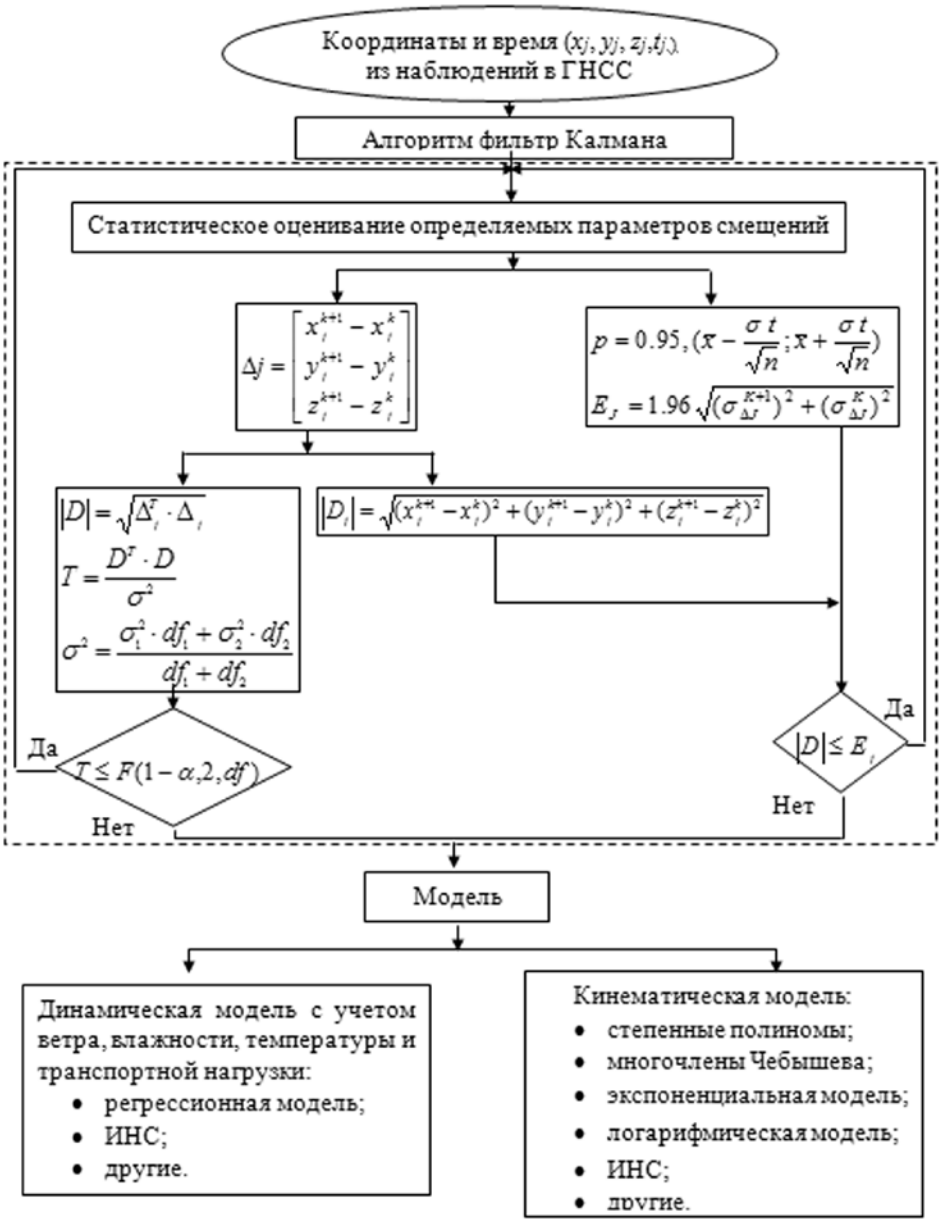


Рис. 60. Блок-схема алгоритма нахождения аппроксимационной модели

Становится востребованным метод информационной нейронной сети (ИНС). Для данного реального объекта именно этот метод оказался наиболее применимым к прогнозированию. Выполнена реализация алгоритма выбора прогнозных моделей, как кинематических, так и динамических, в системе программирования MATLAB. Основная идея алгоритма нейронных сетей показана на рисунке 61.

Имеют развитие вопросы улучшения качества координатных определений и возможностей использования ГНСС-технологий для крупных инженерных сооружений. Реальными объектами исследований были вантовые мосты (Хангу и Хуанпу в Китае) с данными геодезического мониторинга его кинематики в течение года. Приведены этапы вычислительного эксперимента на реальных данных (40000), его результаты, сопровождающие графики и рекомендации по выполнению математической обработки данных ГНСС-мониторинга.

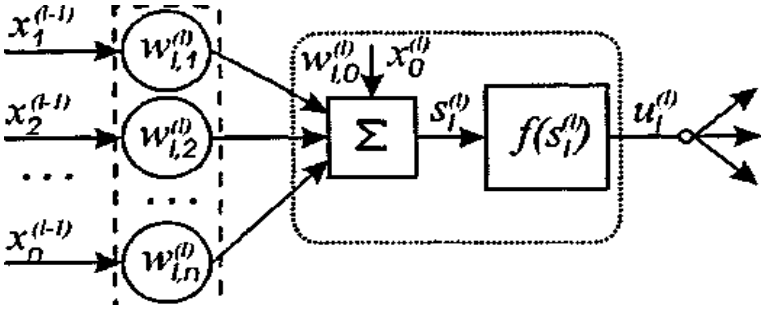


Рис. 61. Информационная нейронная сеть

Хангу-мост – вантовый мост (рис. 62), построенный в городе Хангу. Он имеет четыре полосы движения общей длиной 510 м, а длина главного пролета моста 260 м. Результаты обработки и прогноза даны в таблице 43.

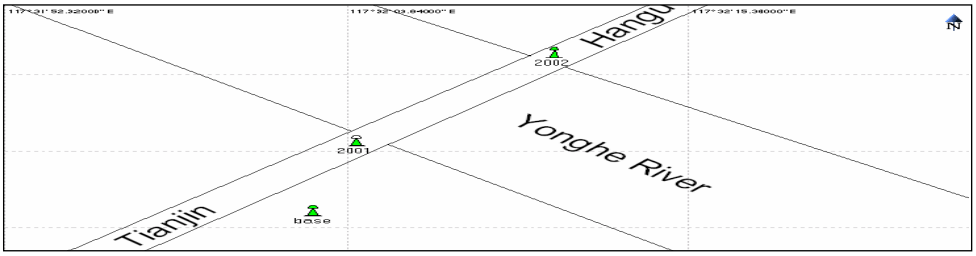


Рис. 62. Геометрия и расположение на мосту
в г. Хангу приемников ГНСС

Таблица 43

Средние значения наблюдений и прогноз

Смещения, см	6-2007	8-2007	10-2007	1-2008	2-2008	4-2008 (прогноз)	6-2008 (прогноз)
dx_1	0,29	-0,23	2,44	8,30	8,82	5,37	-0,87
dy_1	-0,14	0,51	1,54	5,99	5,92	4,79	-0,11
dx_2	0,39	1,71	-0,68	-0,91	-0,71	-0,18	1,83
dy_2	0,46	-1,28	-0,88	-0,99	-1,43	-2,93	1,24

Достаточно убедительные результаты для целей прогноза смещений подвесного моста в условиях воздействия на него внешних сил были получены при использовании нейронных сетей. Различия между реальными и прогнозными значениями смещений не превысили 3 см. Наглядно показывают результаты сравнения прогнозных качеств степенных полиномов, кубических сплайнов и нейронных сетей рисунки 63 и 64.

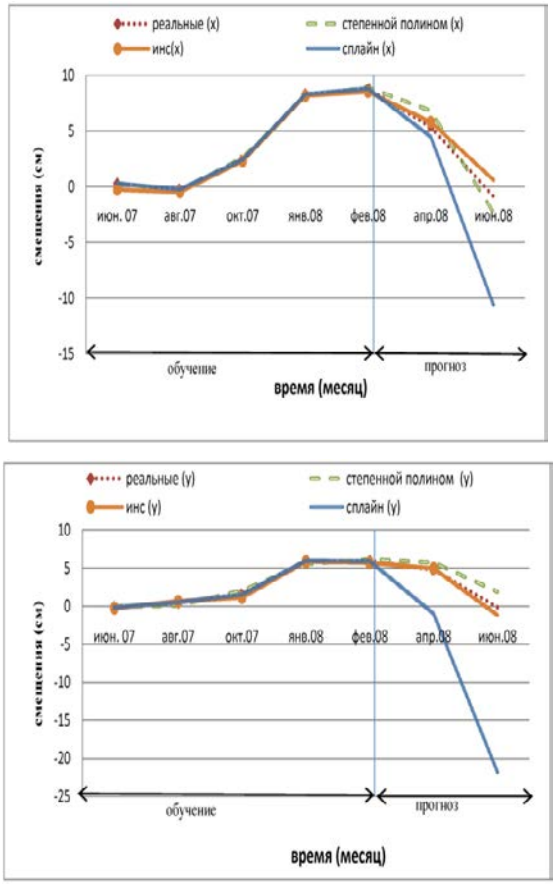


Рис. 63. Смещения x и y для пилона № 1

Результаты обработки реальных данных показали, что южный пилон вернулся в исходное положение спустя десять месяцев. Отметим, что прогнозируемые значения зависят не только от времени – мы должны были учесть влияние транспортного движения и ветра.

Мост Хуанпу был открыт в 2008 году. Он был в то время третьим по длине подвесным мостом в Китае. Мост имеет общую длину 2,27 км.

Расстояние между базовой станцией и пунктом 107 составляет 1,0 км и 1,5 км от пункта 101 (рис. 65).

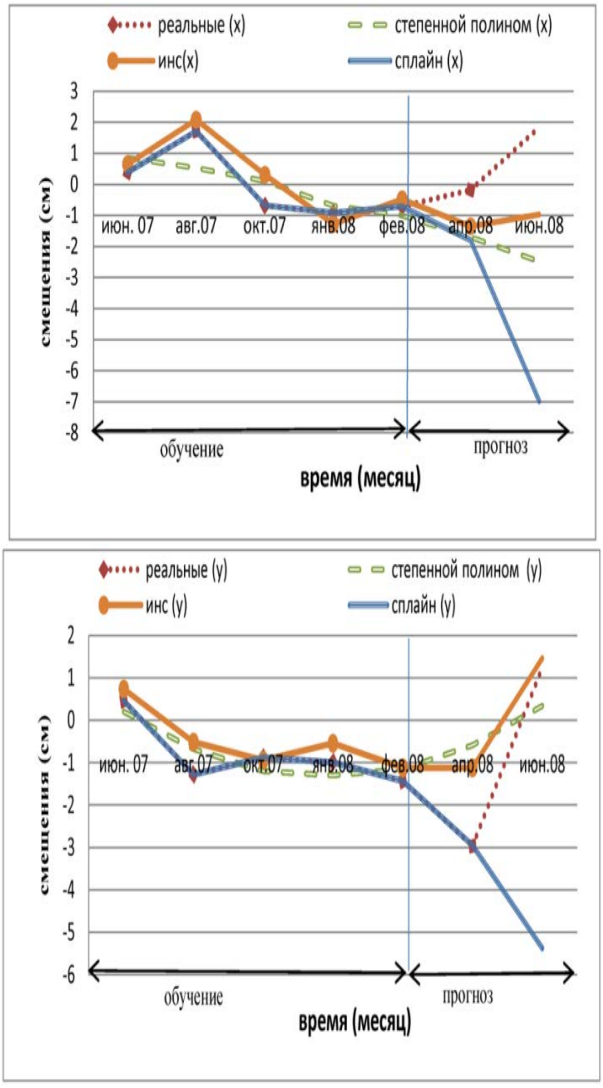


Рис. 64. Смещения *x* и *y* для пилона № 2

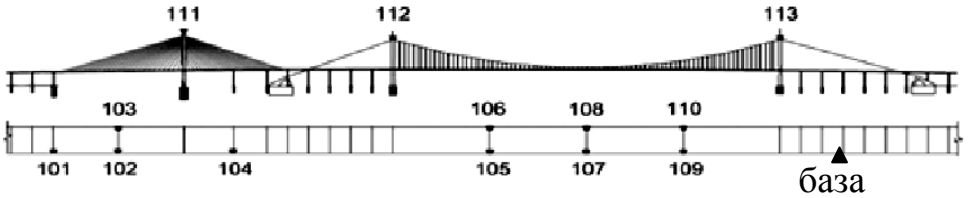


Рис. 65. Нумерация ГНСС наблюдаемых точек моста
(101-102-103-104-105-106-107-108-109-110)

Угловая характеристика продольного наклона по результатам мониторинга (как показано на рисунке 8) вычислялась по следующей формуле:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{Z - \overline{Z}}{B}\right),$$

где z и $\overline{z}$ – вертикальные смещения в симметричных участках;

B – расстояние между двумя станциями.

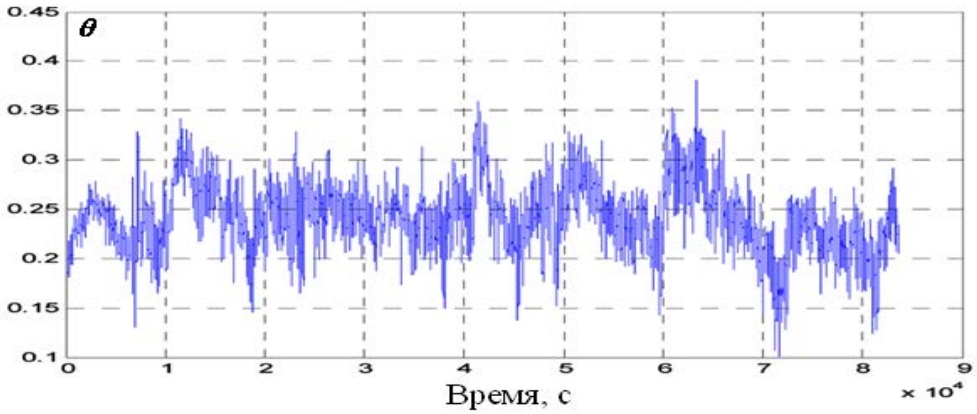


Рис. 66. Продольный наклон в зависимости от нагрузок

Описание метода определения смещений моста в зависимости от нагрузок:

- этап 1 – поиск всех критических точек моста;
- этап 2 – расположение в каждой критической точке приемника ГНСС;
- этап 3 – подготовка автотранспортного средства массой 50 т;
- этап 4 – расположение приемника ГНСС на автотранспортном средстве;
- этап 5 – начало движения автотранспортного средства массой 50 т со скоростью 64 км/ч;

– этап 6 – рассмотрение состояния критических точек в момент движения автотранспортного средства по мосту в реальном времени с использованием относительного метода;
– этап 7 – фиксация результатов наблюдений (составление графика смещений);
– этап 8 – повторение пятого, шестого и седьмого этапов эксперимента многократно для получения СКО.

В ходе эксперимента были определены отклонения по высоте с учетом влияния движения 50-тонного автомобиля. Рисунок 9 показывает высотную компоненту определений координат всеми приемниками ГНСС на пролетах моста. Выявлено, что мост отклоняется примерно на (15±1) см.

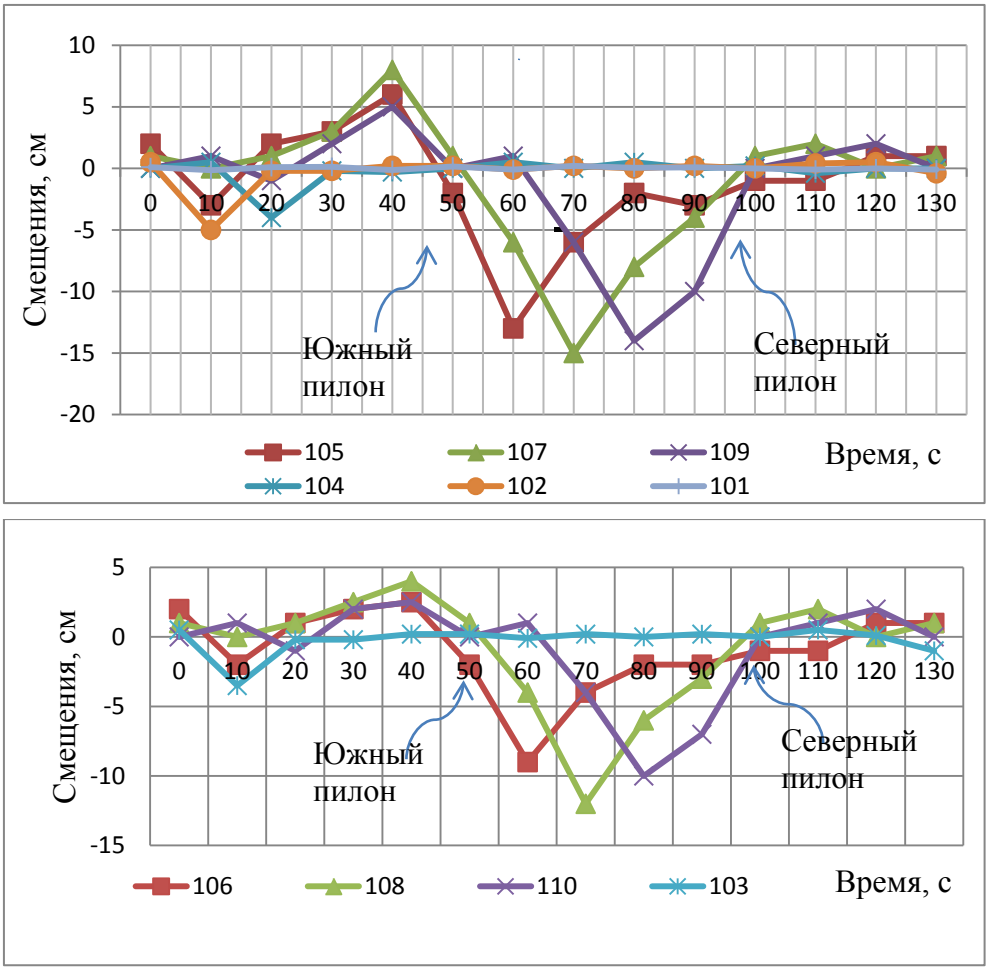


Рис. 67. Отклонение по высоте в зависимости от времени наблюдения

Модель мониторинга и прогнозирования

Блок-схема алгоритма основной программы прогнозирования следующая (рис. 68).

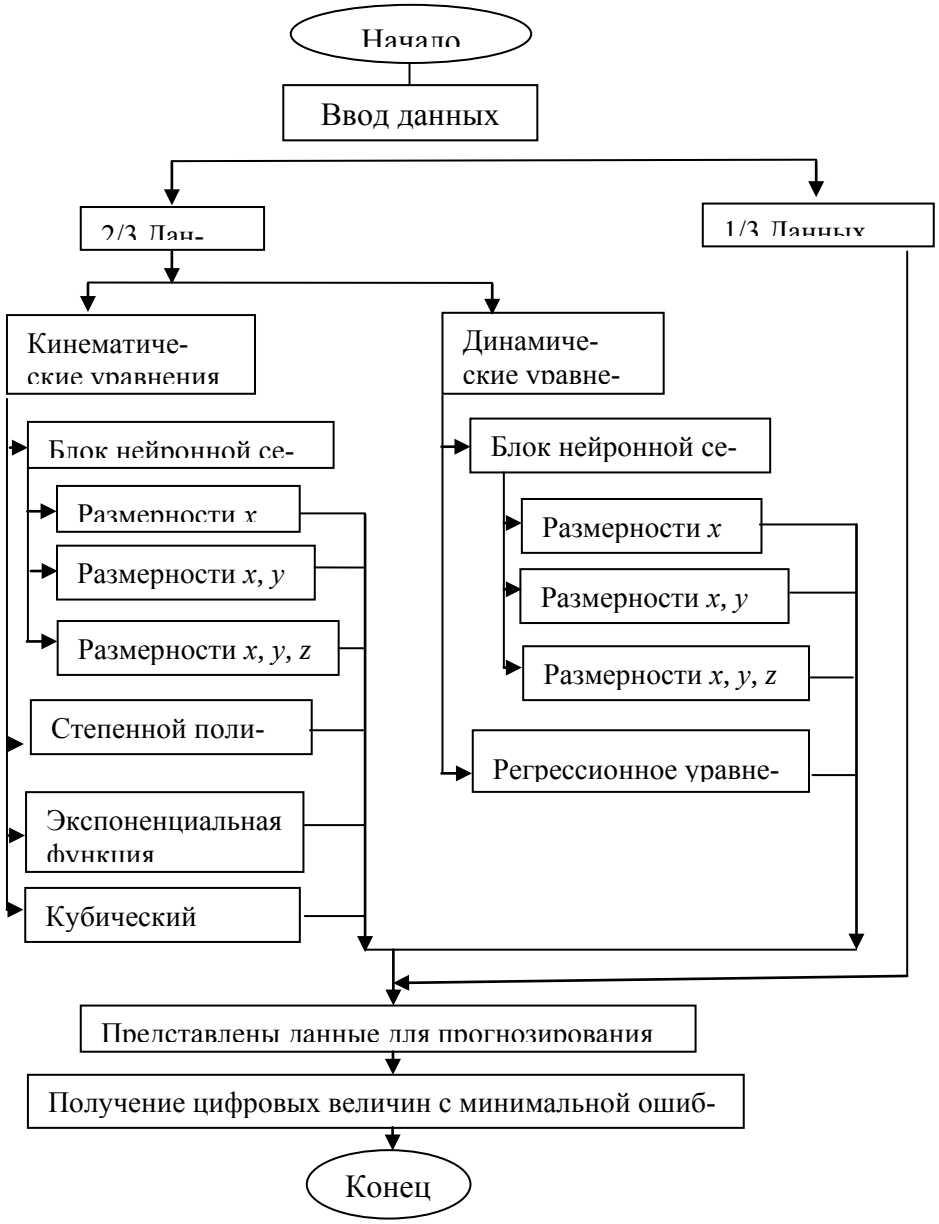


Рис. 68. Блок-схема алгоритма основной программы прогнозирования

Результаты прогнозирования различными моделями для *x*-смещений представлены на рисунке 69.

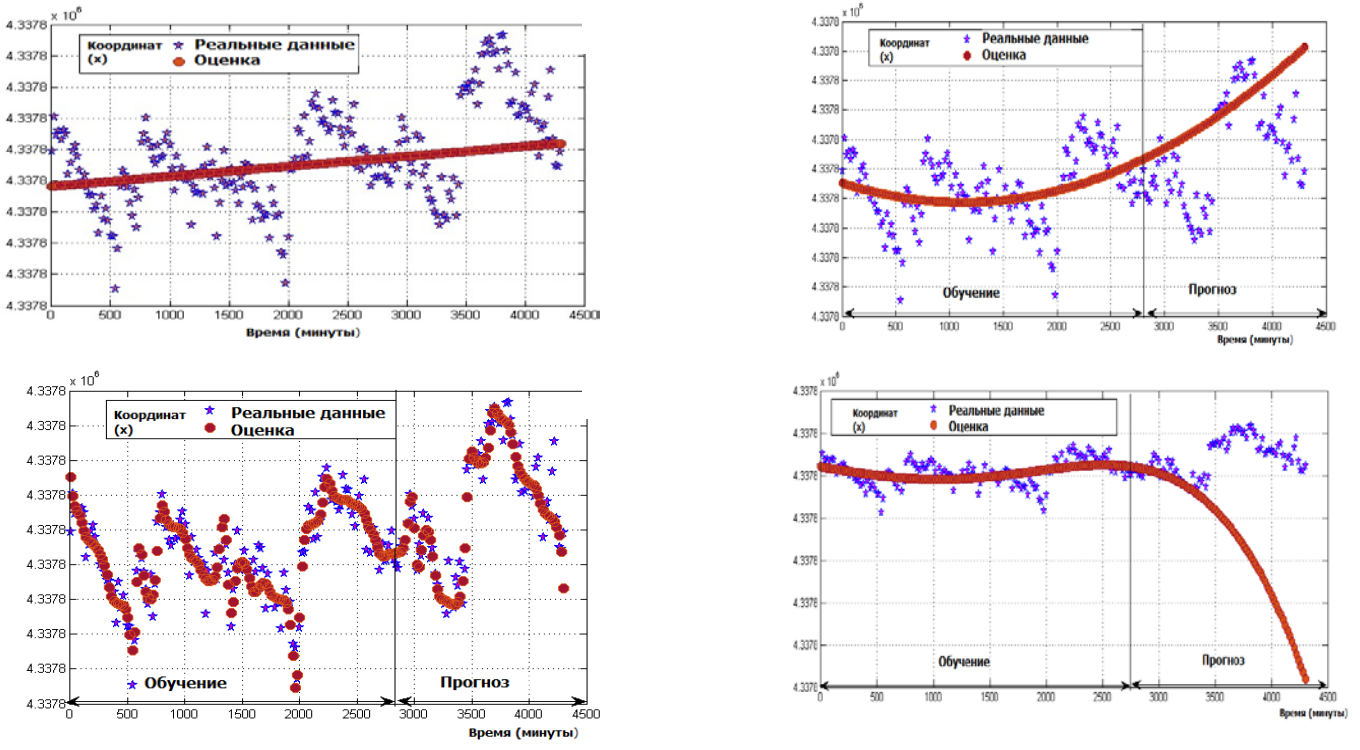
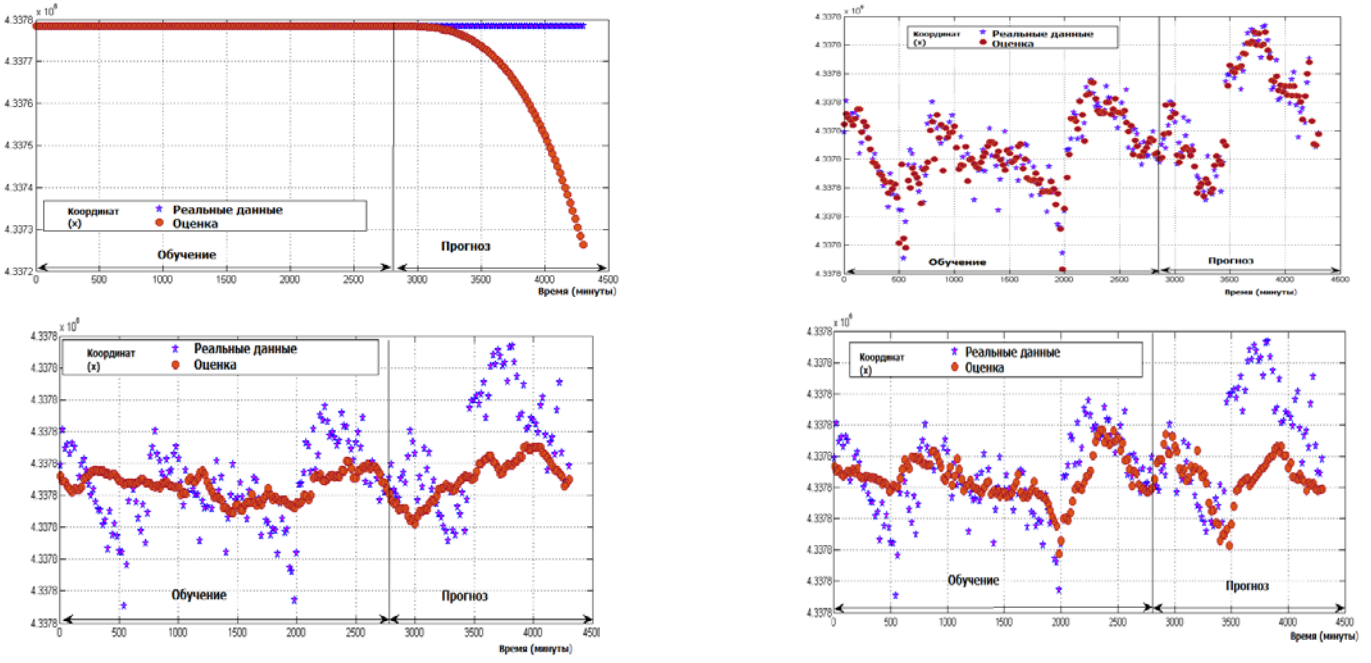


Рис. 69. Результаты прогнозирования для *x*-смещений с использованием:
а) линейного уравнения; *б)* многочлена второй степени; *в)* кинематической нейронной сети;
г) многочлена четвертой степени;

Продолжение рис. 69



д) кубического сплайна; *е)* динамической нейронной сети;
ж) метода регрессии первой степени; *и)* метода регрессии второй степени

Эмпирически получены математические уравнения связи смещений с некоторыми метеорологическими факторами (ветром, температурой, влажностью) и транспортной нагрузкой.

Метод регрессии первой степени представлен формулой

$$xReg_1(H, F, T, W, X) = 0{,}120W - 0{,}131T - 0{,}000\ 3F + 0{,}021\text{H} + 3{,}235. \quad (151)$$

Метод регрессии второй степени представлен формулой

$$xReg_2(H, F, T, W, X) = 0{,}03W^2 - 0{,}003T^2 + 0{,}008H^2 + 0{,}00F^2 - 0{,}002FW + \\ +0{,}005FT + 0{,}040TW + 0{,}160HW - 0{,}016HT + 0{,}001HF + \\ +0{,}774W - 0{,}043T - 0{,}015F - 0{,}352H + 2{,}640. \quad (152)$$

Развитие общеметодологических принципов ИНС было выполнено в определении блоков информационных нейронных сетей (системы уравнений) для каждого приемника, используемого в мониторинге вантовых мостов. Одним из результатов решения поставленной в диссертации цели является разработанная методика обработки данных ГНСС-измерений с целью получения прогнозных моделей, учитывающих влияние на динамику инженерных сооружений изменений ветра, температуры, влажности, транспортных нагрузок и др.

Взятая за алгоритмическую основу информационная нейронная сеть рекомендуется как часть новой методики прогнозирования деформаций вантовых мостов по данным ГНСС-измерений критических точек мостов, испытывающих влияние переменной транспортной нагрузки и различных метеорологических факторов.

6.4 Аналитический метод определения коэффициентов корреляции между результатами наблюдений

Существует задача обеспечения безопасности вантовых мостов при их эксплуатации в условиях разнообразных внешних и климатических воздействий. Важным является обоснованное статистическое создание прогнозных моделей для таких объектов [46]. Идентификация движений природных объектов [91-93, 97-101] и напряженно-деформированного состояния сооружений и объектов инженерной геодинамики [71, 72] имеет важное практическое значение при решении задач проектирования и эксплуатации, при определении допустимых нагрузок и других задачах. Сопутствующие технологические приемы визуализации позволяют более обоснованно выполнять экспертную оценку выявляемых моделей смещений и деформаций [102, 103, 119].

Рассмотрим в качестве примера мониторинг моста Эль-Дерасат в городе Мансура с помощью двух тахеометров. Мост имеет длину

54,5м и ширину 6,85 м. Мост подвергается нагрузкам двух типов. Первый тип – статическая нагрузка, которая включает в себя собственный вес моста. Второй тип – динамические нагрузки, как результат перемещения транспортных средств.

Далее в статье приведены данные анализа для наиболее показательных в смысле определения максимальных деформаций точки (10, 7, 5, 2) из 14-ти точек измерений на мосту и для крайних двух реперов (BM1 и BM2). Для данного исследования были проведены две группы наблюдения – первая группа без нагрузок; другая группа включала в себе нагрузки. Использовались тахеометры DTM850 в точке (A), а SET300 в точке (B), $\sigma_s = \pm (3 + 2\ \text{ppm} \times s)$ мм, $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = 1''$.

Скорректированные координаты каждой точки в сети мониторинга с учетом погрешности измерений рассчитывались с использованием МНК. Координаты точки (B) могут быть определены по измеренным горизонтальным и вертикальным углам и расстоянию (рис. 70).

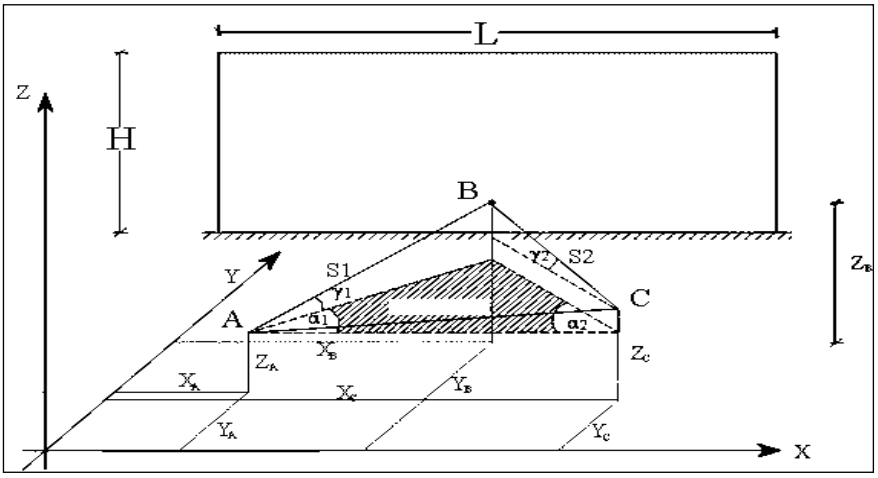


Рис. 70. Определение координат тахеометром

$$\begin{aligned} X_B &= X_A + S\cos\gamma\cdot\cos\alpha, \\ Y_B &= Y_A + S\cos\gamma\cdot\sin\alpha, \\ Z_B &= Z_A + S\sin\gamma. \end{aligned} \qquad (153)$$

Для стандартов координат будет уравнение следующее:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial X}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial Z}{\partial S} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z}{\partial \gamma} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_l^2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sigma_\alpha^2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \sigma_\gamma^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Z}{\partial S} \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial \gamma} & \frac{\partial Y}{\partial \gamma} & \frac{\partial Z}{\partial \gamma} \end{bmatrix},$$

Коэффициент корреляции является мерой того, насколько близко две величины связаны между собой:

$$R_{(X,Y)} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (154)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение. Корреляция между парами величин измерений должна быть принята во внимание при математической обработке.

Элементы используемой матрицы *Q* являются коэффициентами корреляции между непосредственно соседствующими значениями наблюдений из регрессионного анализа. Соответственно весовая матрица *W* может быть рассчитана следующим образом:

$$W = Q^{-1}. \qquad (155)$$

Эта новая матрица весов *W* использовалась при регрессионном анализе (по МНК) для вычисления новых значений параметров (таблица 44) и их погрешностей. Скорректированные координаты и связанные с ними погрешности каждой точки в сети мониторинга рассчитывались с учетом парной корреляции.

Таблица 44

Сравнение регрессионного анализа с учетом парной корреляции ($\sigma_{\text{парные}}$) и без нее (σ). Их отношение, выраженное в %.

Точки	Мост без нагрузок			Мост с нагрузкой		
	$\sigma_{X\ \text{парные}}/\sigma_{X1}$ %	$\sigma_{Y\ \text{парные}}/\sigma_{Y1}$ %	$\sigma_{Z\ \text{парные}}/\sigma_{Z1}$ %	$\sigma_{X\ \text{парные}}/\sigma_{X1}$ %	$\sigma_{Y\ \text{парные}}/\sigma_{Y1}$ %	$\sigma_{Z\ \text{парные}}/\sigma_{Z1}$ %
ВМ1	29,35	15,47	891,63	29,55	15,47	891,63
2	15,25	12,64	584,39	20,17	16,66	781,71
5	6,77	7,52	469,83	10,82	13,10	498,78
7	12,83	13,92	540,58	10,85	11,75	453,59
10	13,90	11,84	726,25	16,16	10,00	539,36
ВМ2	12,98	6,49	429,97	17,05	4,82	298,47

6.5 Выводы

Король математики Карл Фридрих Гаусс ноднократно упоминал влияние на него математических исследований Леонарда Эйлера. Эйлер большую часть жизни провел в России. 19-летним гением Эйлер вместе с братьями Даниилом и Николаем Бернулли уехали в Россию, где как раз шла организация Петербургской Академии наук. Эйлер в качестве российского ученого создал важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии, геодезии, картографии и по ряду прикладных наук. Познания Эйлера были энциклопедичны. Кроме математики, он глубоко изучал ботанику, медицину, химию, теорию музыки, множество европейских и древних языков.

С точки зрения математики, XVIII век – это век Эйлера. Если до него достижения в области математики были разрознены и не всегда согласованы, то Эйлер впервые увязал анализ, алгебру, геометрию, тригонометрию, теорию чисел и другие дисциплины в единую систему, добавив при этом немало собственных открытий. Значительная часть математики преподаётся с тех пор «по Эйлеру» почти без изменений.

Благодаря Эйлеру в математику вошли общая теория рядов, фундаментальная «формула Эйлера» в теории комплексных чисел, операция сравнения по целому модулю, полная теория непрерывных дробей, аналитический фундамент механики, многочисленные приёмы интегрирования и решения дифференциальных уравнений, число e, обозначение i для мнимой единицы, ряд специальных функций и многое другое.

По существу, именно он создал несколько новых математических дисциплин – теорию чисел, вариационное исчисление, теорию комплексных функций, дифференциальную геометрию поверхностей; он заложил основы теории специальных функций. Другие области его трудов: диофантов анализ, математическая физика, статистика и т. д.

В 1760 году вышли фундаментальные «Исследования о кривизне поверхностей». Эйлер обнаружил, что в каждой точке гладкой поверхности имеются два нормальных сечения с минимальным и максимальным радиусами кривизны и что плоскости их взаимно перпендикулярны. Вывел формулу связи кривизны сечения поверхности с главными кривизнами. Это важнейшие параметры геометрии эллипсоида, узучаемые в курсе высшей геодезии.

В 1771 году Эйлер опубликовал сочинение «О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость». В этой работе введено поня-

тие развёртывающейся поверхности, то есть поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов. Эйлер, однако, даёт здесь вполне общую теорию метрики, от которой зависит вся внутренняя геометрия поверхности. Позже исследование метрики становится у него основным инструментом теории поверхностей.

В связи с задачами картографии Эйлер глубоко исследовал конформные отображения, впервые применив для этого средства комплексного анализа. И было бы справедливо упоминать при изучении конформной проекции Гаусса-Крюгера, что основы заложены Леонардом Эйлером.

Здесь описаны научные достижения Эйлера, которые относятся к математическому анализу свойств эллипсоида вращения и объяснению движения на сфере. Эйлеровы полюса движений литосферных плит – один из научных результатов, очень востребованных в науках о Земле.

Могила Эйлера находится на Лазаревском кладбище Александро-Невской лавры поблизости от могилы М. В. Ломоносова.

Обсуждены вопросы истории возникновения технологии метода наименьших квадратов (МНК), как варианта решения проблемы компенсации случайных погрешностей наблюдений в астрономии и геодезии. Рассматривается эволюция МНК-функционала от суммы квадратов МНК-поправок $[\tilde{v}\tilde{v}] = \min$ до квадратичной формы $\Psi = \tilde{V}_{1n}^T K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1} = \min$, учитывающей предполагаемую коррелированность и неравноточность данных. Освещается успешное использование МНК при анализе и интерпретации данных в стационарных и динамических системах с известной структурой. В порядке дискуссии затрагивается вопрос об ограниченности использования технологии, опирающейся на МНК, в ситуациях с неизвестной структурой объекта изучения.

Во-первых, метод наименьших квадратов предназначен его изобретателями для компенсации влияния *только случайных погрешностей* наблюдений.

Во-вторых, *структура* наблюдаемого явления, процесса *должна быть известна априори* как для функциональной составляющей математической модели, так и для её стохастического расширения в форме ковариационной матрицы измерений.

В-третьих, *функционал МНК* является ограничением на уровне числовых характеристик, и *не связан ни с каким конкретным законом распределения* вероятностей случайных ошибок наблюдений.

В-четвёртых, МНК доставляет исследователю состоятельные, несмещённые оценки с минимальными дисперсиями, когда функцио-

нальная модель – линейная. Это хорошо известная теорема Гаусса-Маркова. Если при этом, погрешности наблюдений подчиняются нормальному закону (а это всегда вопрос, ответ на который характеризуется некоторой вероятностью), оценки будут *дополнительно* эффективными, то есть из выборки будет получена максимально возможная информация.

В-пятых, использование МНК в ситуациях, когда на него возлагаются дополнительные задачи нахождения функциональной составляющей математической модели, требует от исследователя осторожности в выводах и рекомендациях.

Экспериментально доказано, что для системы OmniSTAR, применяемой в странах Среднего Востока, время наблюдений уменьшается на десятки процентов; доказано возможное повышение точности ГНСС-измерений при использовании метеосенсоров;

- установлено, что при измерениях с использованием одной станции (взамен нескольких базовых) точность координирования при коротких расстояниях (до 10 км) практически не снижается;
- выполнен анализ математического обеспечения мониторинга с использованием ГНСС-технологий. Представлен анализ использования ряда математических методов для создания прогнозных моделей: метода наименьших квадратов с возможностью включения в состав различных опорных функций, регрессионных и других моделей. Эмпирически получены математические уравнения, указывающие на связь смещений с рядом погодных факторов (ветром, температурой, влажностью одновременно), которые при доверительном интервале $\Delta = \pm 2\sigma$ при вероятности $\rho = 0{,}95$ улучшают корреляцию до 0,81;
- показано применение метода информационной нейронной сети, который для доверительного интервала $\Delta = \pm 2\sigma$ при вероятности $p = 0{,}95$ обеспечил корреляцию 0,96. Доказано преимущество нейронных сетей для достоверной оценки как кинематики, так и динамики наблюдаемого объекта;
- разработаны алгоритм и комплекс вычислительных программ для обоснованного выбора прогнозных моделей смещений и деформаций вантовых мостов с возможностью их оперативного сравнения с допустимыми значениями в системе программирования MATLAB;

– экспериментально доказано, что для крупных инженерных конструкций при измерениях, например, величины и частоты прогибов моста наиболее перспективны ГНСС-наблюдения, обеспечивающие получение наиболее достоверной информации о состоянии инженерных сооружений, а, следовательно, делающие оценку их безопасности более надежной при эксплуатации.

Рекомендуется использование ИНС-моделей, как динамических, так и кинематических, при прогнозировании деформаций не только вантовых мостов, но и всех других инженерных сооружений. В этом плане перспективны дальнейшие научные исследования по поиску других динамических регрессионных формул и последующее их развитие и использование. Предлагаемые геодезические методы с использованием двух тахеометров могут обеспечить ценные данные о деформации конструктивных элементов и движения зданий. Метод парной корреляции в основном зависит от дисперсии ковариационной матрицы наблюдений, он улучшает стандартное отклонение в горизонтальной плоскости (X и Y), но не улучшает результат по высоте (Z).

Дайте мне точку опоры, и я переверну земной шар.

Архимед

7 КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

7.1 Теоретические основы качественного исследования горизонтальных движений геодинамических систем

Несмотря на многочисленные работы и исследования, посвященные изучению движений земной поверхности по данным GPS-наблюдений, горизонтальные движения земной коры на сегодняшний день остаются менее изученными, чем вертикальные. Степень изученности горизонтальных движений проявляется в частности в том, что при наличии значительных объемов результатов геодезических измерений анализ многих из них выполняется в сжатом малоинформативном виде или с помощью методов, аналогичных применяемым для интерпретации вертикальных движений.

Геодезическими методами возможна точная и оперативная фиксация и изменение во времени координат точек земной поверхности, элементов различных инженерных сооружений. Традиционно представления изменений координат точек земной поверхности во времени выполняются в виде векторов. Для горизонтальных движений некоторые интегральные характеристики деформационных полей возможно получать, используя модель локально-однородной деформации [52, 284]. Вычисляются тензоры деформаций, по элементам которых определяется дилатация (сжатие/растяжение), сдвиговые компоненты и угол вращения. Для геодинамических систем глобального и регионального масштаба процесс их идентификации усложняется ввиду кривизны земной поверхности [42]. В связи с принятием гипотезы движения литосферных плит как главенствующую, востребованы модели их относительных движений на основе теоремы Леонарда Эйлера [115]. Примером такой модели является NUVEL1A.

Изучение горизонтальных движений земной поверхности (ГДЗК) получило активное развитие с появлением спутниковых технологий. В настоящее время непрерывные и повторные GPS измерения проводятся на территории многих стран и регионов, появляется все больше работ, посвященных наблюдениям и анализу горизонтальных движений и деформаций на геодинамических полигонах (ГДП).

Локальная геодинамика кроме не очень больших (до 100 км) сейсмоопасных территорий, включает также техногенные регионы. Например, месторождения полезных ископаемых [94, 117, 119, 123, 124], крупные гидроузлы (ГЭС), мегаполисы, инженерные сооружения, здания и др.

При изучении вертикальных движений земной коры (ВДЗК) наиболее точные результаты дает геометрическое нивелирование. По ним создают карты вертикальных движений, совместно с гравиметрическими данными создают некоторые модели глубинных процессов, например подготовку вулканического извержения [97-101]. То есть, делается попытка по геодезическим и гравиметрическим данным решать некорректные обратные задачи геофизики.

Характер горизонтальных смещений земной коры принципиально отличается от вертикальных, поэтому и подходы к их изучению должны быть различными. Одним из примеров характерных горизонтальных движений земной поверхности являются вращательные движения. В последнее время получило развитие направление в тектонике и геодинамике названное «вихревой геодинамикой» [18, 19, 73, 77]. Некоторые примеры распределений векторов горизонтальных смещений земной коры, полученных по геодезическим измерениям на некоторых ГДП Евразии и указывающих на вращательный характер земной поверхности даны в [80, 81, 89, 107, 109, 117, 119, 123]. Природные процессы имеют преимущественно нелинейный характер [74, 78]. Нелинейные процессы присутствуют при движениях тектонических блоков. И, в частности, при разнонаправленном движении соседних блоков, когда возникает опасность сейсмического события – землетрясения. Геодезические данные и их последующий статистический анализ в совокупности с геофизическими наблюдениями позволяет выполнять математическое моделирование и идентификацию напряженно-деформированного состояния геодинамических систем в аспекте прогноза природных и техногенных катастроф [184].

Имеется объективная потребность использования методов и приемов качественного исследования динамических систем и одновременно естественность использования этой теории при рассмотрении математических моделей реальных систем, в том числе геодинамических.

Одним из основных математических понятий является дифференциальное уравнение. Дифференциальное уравнение – способ нахождения функций, производные которых соответствуют некоторым наперед заданным условиям. Исследование какого-либо реального, природного в том числе, явления или процесса может иметь одним из ре-

зультатов дифференциальную модель этого явления или процесса. Конечно же, дифференциальные модели являются частным случаем множества моделей, которые могут быть построены при изучении окружающего мира. Существуют различные типы дифференциальных моделей. Для таких уравнений особенностью является то, что неизвестные функции в этих уравнениях зависят только от одной переменной.

Здесь рассматриваются вопросы приложения к интерпретации пространственно-временных рядов геодезических наблюдений обыкновенных дифференциальных уравнений [10, 235, 237]. Конечно же, в процессе построения обыкновенных дифференциальных моделей для геодинамических исследований геодезическими методами важно учитывать законы, объясняющие геодинамические процессы и явления и даже гипотезы, как элементы развития науки. И, если результаты исследования полученного дифференциального уравнения как математической модели согласуются с опытными данными, то это весомый аргумент правильности (адекватности) проверяемой гипотезы.

Осложняет процесс исследования большая сложность решения дифференциальных уравнений в замкнутой форме – аналитической формулы, использующей конечное число простейших операций над элементарными функциями. Примером таких решений есть, например законы Кеплера движения планет. Основываясь на законе всемирного тяготения, все три законы Кеплера получаются как решения дифференциальных уравнений. Другой пример касается получения уравнения упругой линии, используемой для определения максимального прогиба, например балки конструкции мостов.

Если для представления решений дифференциальных уравнений использовать бесконечные ряды того или иного вида, выявить наиболее существенные и интересные свойства решений очень затруднительно. Необходимы приемы и методы, которые позволяли бы, не решая самих дифференциальных уравнений, получать необходимые сведения о тех или иных свойствах решений. Такие методы существуют – они составляют содержание качественной теории дифференциальных уравнений [10]. В ее основе лежат общие теоремы о существовании и единственности решений, о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \qquad (156)$$

Пусть динамическая система, состоит из частицы единичной массы, которая движется по оси x (рис. 71) и на которую действует сила $f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$. Тогда уравнение движения частицы может быть описано нелинейным дифференциальным уравнением (156). Значениям x и $\frac{dx}{dt}$, в любой момент времени характеризующим состояние системы, соответствует точка на плоскости $(x,\frac{dx}{dt})$ (рис. 72).

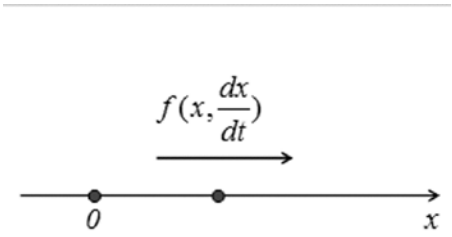


Рис. 71. Движение частицы по оси x

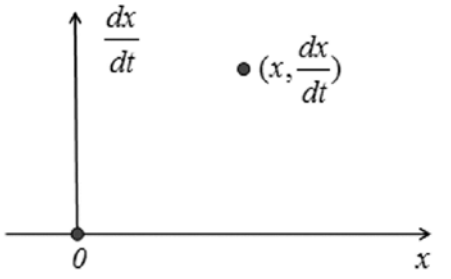


Рис. 72. Точка на фазовой плоскости

Данная плоскость называется плоскостью состояний или фазовой плоскостью. Данная плоскость является изображением совокупности всех возможных состояний динамической системы. Различные точки (изображающие) фазовой плоскости отражают каждое новое состояние системы. Траектория изображающей точки называется фазовой траекторией, а скорость этой точки – фазовой скоростью.

После введения переменной $y=\frac{dx}{dt}$ уравнение (156) сводится к системе двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \ \frac{dy}{dt}=f(x,y). \qquad (157)$$

Если считать t параметром, решением системы (157) является пара функций $x(t)$ и $y(t)$. Они определяют в фазовой плоскости (x, y) упомянутую выше фазовую траекторию.

Из многих качеств, присущим подобным системам выделим случай, когда траектория вырождается в точку. В данном случае используются термин особая точка. Если особая точка не устойчива, применяют понятие точка бифуркации. Термин "точка бифуркации" пришел

из теории хаоса и описывает такое состояние системы, при котором любое, сколь угодно малое воздействие способно привести к любому, сколь угодно большому изменению состояния системы. Теория бифуркаций направлена на объяснение целого ряда нелинейных эффектов в реальных системах. Это может быть перенесено на исследование геодинамических систем, как поиск возможного предвестника (места) резкого изменения состояния (землетрясение, оползни и др.).

Современные геодезические методы координатизации предоставляют данные, анализ которых может быть использован для качественного оценивания геодинамических систем локального и регионального масштабов. В том числе, с использованием методов отображения поведения геодинамических систем в фазовом пространстве. Как для исследования ВДЗК, так и ГДЗК, и даже в пространстве, что актуально в предгорных и горных территориях. Именно они являются зонами максимального риска возникновения сейсмических событий.

Математическое обеспечение исследования горизонтальных движений ввиду их двухмерного описания объективно должно быть значительно расширено за счет использования самых различных методов моделирования.

Рассмотрим автономную динамическую систему на плоскости. Многие задачи механики и физики при упрощающих предположениях приводят к рассмотрению одного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} - f(x, \dot{x}, t) = 0 . \qquad (158)$$

В элементах формулы (1) точки над символами обозначают скорость (одна точка) и ускорение (две точки). Вводится новое обозначение $\dot{x} = y$. Соответственно, $\ddot{x} = \dot{y}$. И уравнение (158) тогда запишется в виде системы двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y , \quad \dot{y} = f(x, y, t) . \qquad (159)$$

Представление (158) в виде (159) является значительно удобнее для выполнения исследования динамических систем на плоскости. В том числе для исследования геодинамических систем на плоскости, а конкретно на плоскости конформной проекции некоторого участка поверхности Земли. Геодинамические объекты регионального и локального масштаба имеют соответствующее координатное обеспечение геодезических пунктов при исследовании горизонтальных движений земной поверхности.

Более общий вид системы двух дифференциальных уравнений для решения задач написания уравнений движения следующий

$$\dot{x} = P(x, y, t), \quad \dot{y} = Q(x, y, t). \tag{160}$$

Также интересен для практических приложений случай, если исключить в (3) из списка переменных t

$$\dot{x} = N(x, y), \quad \dot{y} = M(x, y). \tag{161}$$

Система (161) является автономной динамической системой второго порядка. Она определяет векторное поле и имеет также название динамическая система на плоскости. И вопрос в том, как найти решение динамической системы.

Если математической моделью реальной физической системы является динамическая система вида (161), то с помощью этой системы возможно проследить изменение состояний рассматриваемой реальной системы при изменении времени t. Задание начальных значений x_0, y_0, t_0 однозначно определяет решение для всех значений t – описывает «прошлое» и «будущее» (экстраполяция, прогноз). Для этого нужно найти решение (проинтегрировать) (161). В большинстве случаев выразить решение системы (161) через элементарные функции или через интегралы от элементарных возможно лишь в случае частных типов этой системы. Например, в случае линейных систем. Но, не каждая физическая система может быть хотя бы приближенно описана линейной системой. Это относится к природным и природно-техническим системам в большинстве случаев. В том числе к геодинамическим системам различных пространственно-временных масштабов.

В случае же нелинейных систем к вопросу нахождения решения можно подойти так: отказаться от отыскания аналитических выражений для решений и, задавая с той или иной степенью точности некоторые начальные значения, приближенно вычислять решения на заданном промежутке значений. При наличии современных информационных технологий такое приближенное вычисление решений для некоторых задач может дать в некоторых случаях необходимый ответ.

Важно также понимать, для многих задач иногда представляет интерес не аналитический вид решения и не приближенное вычисление решений, а, учет состояния равновесия у конкретной динамической системы, и насколько оно устойчиво. В [10] приведены примеры качественного исследования динамической системы. Они могут быть перенесены на исследование геодинамических систем, например горизонтальных движений земной поверхности, техногенных объектов.

В настоящее время непрерывные и повторные геодезические измерения проводятся на территории многих стран и регионов. Появляется все больше исследований, посвященных наблюдениям и анализу

горизонтальных движений и деформаций природных геодинамических систем глобального, регионального [30-33, 43, 56, 65, 102, 165, 184, 185, 195, 197-199, 209, 222, 223, 234, 235] и локального масштабов [28, 67, 71, 72, 92-101, 117, 153-156, 173, 177, 178, 221, 224]. К локальным геодинамическим системам относятся также объекты недропользования, инженерные сооружения. Геодезические исследования таких систем [89, 91, 157] имеют свои особенности, являющимися следствиями особого пространственно-временного масштаба изменения деформационных полей.

Имеется объективная потребность использования методов и приемов качественного исследования динамических систем и одновременно естественность использования этой теории при рассмотрении математических моделей реальных систем, в том числе геодинамических.

Пример 1. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$

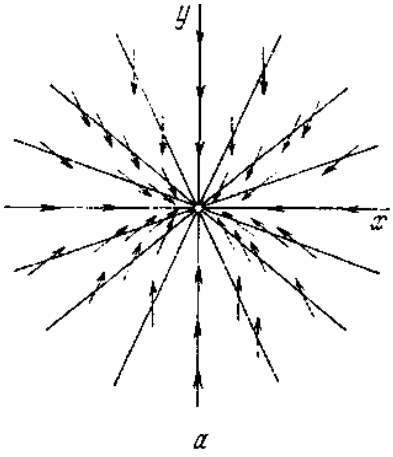
Траектории – прямые, параллельные оси x

$$y = c_1, \quad x = t + c_2.$$

Пример 2. $\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = by.$ (162)

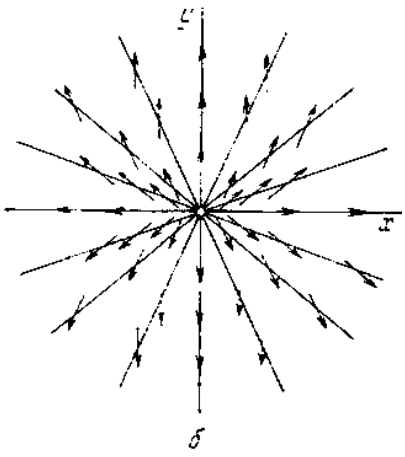
При этом a и b одного знака.

На фазовой плоскости системы (162) создается векторное поле (рис..73 а, б),



а

Рис. 73.а – $a < 0, b < 0$



б

Рис.73.б – $a > 0, b > 0$

Решение системы (162) для начальных значений t_0, x_0, y_0 имеет вид

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y = y_0 e^{b(t-t_0)}. \tag{163}$$

Отмечаем, что аргументом уравнений системы (163) является $t - t_0$, и в приложении к геодинамическим системам это есть интервал времени.

Если исключить $t - t_0$ в (163), траектории системы (162) возможно получить переходя к декартовым координатам. Траектории будут представлять собой семейство парабол

$$y = y_0 \frac{x^{b/a}}{x_0^{b/a}}.$$

Для случая, когда полагаем $x_0 \neq 0$ и $c = \frac{y_0}{x_0^{b/a}}$ получаются параболы $y = cx^{b/a}$ (рис. 74) и система (162) записывается в виде одного уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax}{by}.$$

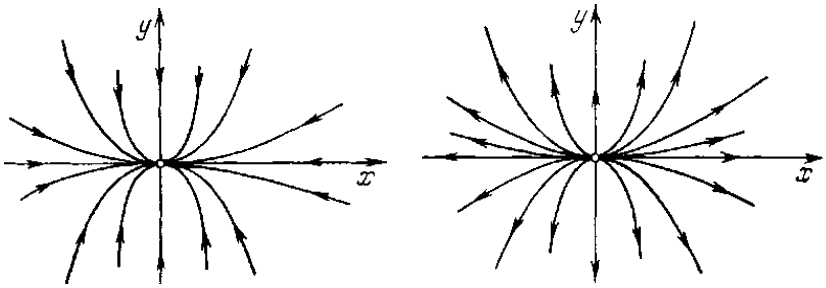


Рис. 74. Семейство траекторий дифференциальных уравнений (7)

Интегральными кривыми системы (162) в пространстве (x, y, t) могут быть не только параболы, например:

1) ось t, т. е. x=0, y=0 (эти уравнения получаются из уравнений (163) при x_0=y_0=0);
2) показательные кривые $x = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y = 0;$
3) показательные кривые $x = 0, \quad y = y_0 e^{b(t-t_0)}.$

Для дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = y \tag{164}$$

и при начальных значениях t_0, x_0, y_0 решение системы (164) имеет вид

$$x = x_0 e^{-(t-t_0)}, \quad y = y_0 e^{(t-t_0)}.$$

Система имеет аналитический интеграл $xy = C$, которому соответствуют интегральные кривые в виде гипербол. Они иллюстрируют векторные поля (рис. 75), семейство траекторий (рис. 76).

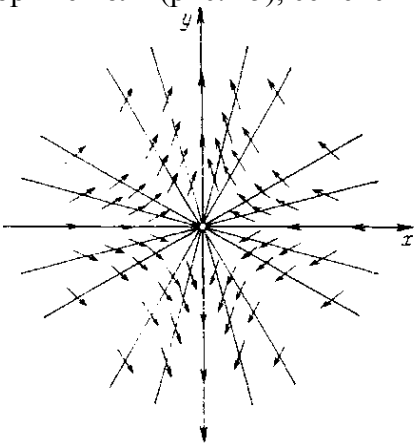


Рис. 75. Векторное поле

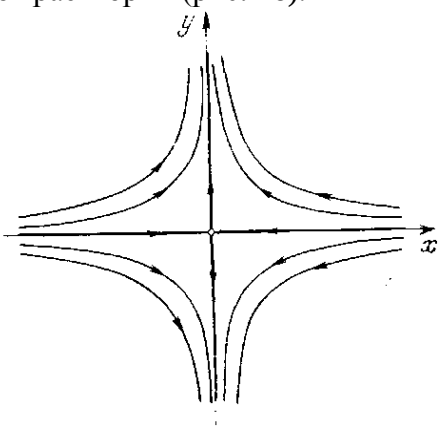


Рис. 76. Траектории

В продолжение приведенных выше примеров качественного исследования динамических систем на плоскости рассмотрим теоретические основы описания вращательных движений системой дифференциальных уравнений. Пусть система записана как

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x, \quad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y, \tag{165}$$

в которой α – отличная от нуля постоянная. При α<0 имеем векторное поле (рис. 77).

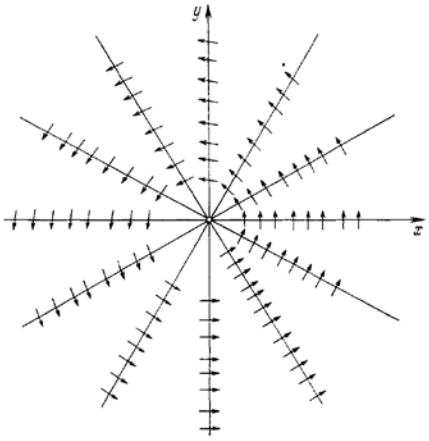


Рис. 77. Векторное поле системы (165).

Система (165) является линейной системой с постоянными коэффициентами. При начальных значениях x_0, y_0, t_0 ее решение будет следующим:

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha(t-t_0)}\left[x_0\cos(t-t_0)-y_0\sin(t-t_0)\right], \\ y &= e^{\alpha(t-t_0)}\left[x_0\sin(t-t_0)-y_0\cos(t-t_0)\right]. \end{aligned} \tag{166}$$

Для более удобного рассмотрения характера траекторий перейдем к полярным координатам. Получим

$$\frac{d\rho}{dt}=\alpha\rho,\quad \frac{d\theta}{dt}=1. \tag{167}$$

Решение системы (167)

$$\rho=\rho_0 e^{\alpha(t-t_0)},\quad \theta=\theta_0+t-t_0 \tag{168}$$

является уравнением в полярных координатах траектории системы (165). Траектория проходит при $x=x_0$ через начальную точку $M(x_0, y_0)$ с полярными координатами (ρ_0,θ). Все траектории системы (168) описывает формула

$$\rho=\rho_0 e^{\alpha(\theta-\theta_0)}. \tag{169}$$

Если $\rho_0\neq 0$, эти траектории являются логарифмическими спиралями. При $\rho_0=0$ получается состояние равновесия $O(0,0)$.

Первое из уравнений (168) показывает, что все траектории стремятся к состоянию равновесия O при $t\to+\infty$, если $\alpha<0$ (рис. 78), и при $t\to-\infty$, если $\alpha>0$ (рис. 79).

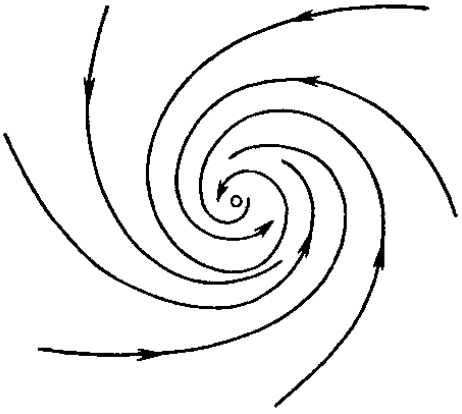


Рис. 78. Устойчивое равновесие

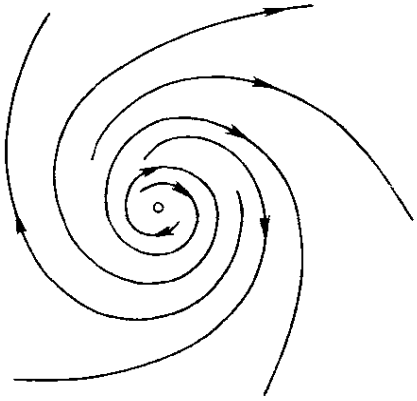


Рис. 79. Неустойчивое равновесие

Состояние равновесия, называется фокусом, устойчивым в первом случае и неустойчивым во втором случае.

Частный случай системы (165) описывается системой

$$\frac{dx}{dt} = -y\,,\quad \frac{dy}{dt} = x \tag{170}$$

при $\alpha = 0$.

Решения, соответствующие начальным значениям x_0, y_0, t_0, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \sin(t - t_0), \\ y &= x_0 \sin(t - t_0) - y_0 \cos(t - t_0). \end{aligned} \tag{171}$$

Из (171) вытекает формула общего аналитического интеграла системы.

$$x^2 + y^2 = C\,. \tag{172}$$

Таким образом, система имеет аналитический интеграл. Траекториями системы являются состояние равновесия $O(0,0)$ и замкнутые территории – концентрические окружности с центром в начале (рис. 80). Решения (171) соответствуют замкнутым территориям – окружностям, периодическими функциями с периодом 2π.

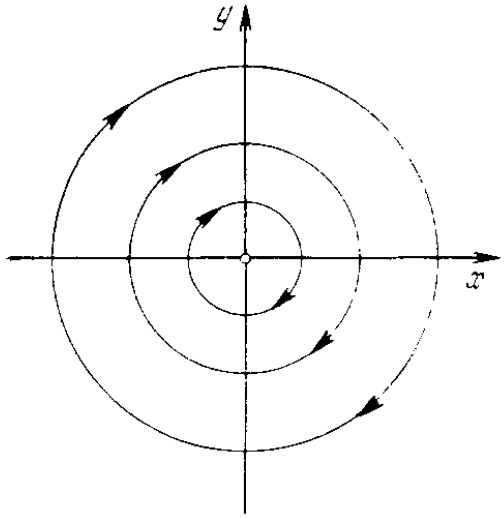


Рис. 80. Траектории системы (171)

Приведенные выше примеры интегральных кривых могут быть качественными характеристиками геодинамических систем. Во многих случаях подобные траектории соответствуют горизонтальным движе-

ниям земной поверхности, в том числе косейсмическим, в местах активных тектонических разломов, сочленений блоков земной коры. Именно эти места наиболее вероятны в аспекте возникновения сейсмических событий – землетрясений, например. Современные геодезические методы координатизации предоставляют данные, анализ которых может быть использован для качественного оценивания геодинамических систем локального и регионального масштабов.

7.2 Методы и алгоритмы оценки дивергенции векторных полей движений земной поверхности по геодезическим данным

Современные геодинамические исследования должны развиваться с обязательным математическим сопровождением, соответствующим задачам исследований. Отметим также, что среди многочисленных измерительных данных специалистов в разных науках о Земле важное место занимают результаты геодезических наблюдений. Земля представляет собой сложную самоорганизующуюся природную систему. Очень важную информацию о её развитии и потенциальной опасности геодинамических проявлений (землетрясения, вулканизм, цунами) позволяют получить геодезические методы координатного мониторинга, включая как классические, так и основанные на ГНСС-технологиях. Геодезические методы востребованы и при изучении техногенной геодинамики на территориях инженерных комплексов и в местах разработки полезных ископаемых [92, 94, 117, 119].

Особенно интенсивно геомеханические явления и процессы происходят в местах активной разработки полезных ископаемых по причине интенсивных техногенных воздействий на приповерхстностный слой Земли [153-156]. Один из результатов геодезического метода изучения, а также моделирования геодинамических проявлений и вызывающих их геодинамических процессов – объективная картина смещений земной поверхности. Для конкретной исследуемой территории их совокупность обычно представляется векторами. Важно, что эти результаты в некоторой степени отражают динамику всей поверхности данной области. Математическое определение этому соответствует понятию векторного поля [2, 29, 132, 180, 181]. Одна из дифференциальных характеристик векторного поля – дивергенция, представляющая собой одно число (скаляр), относящееся к определённой точке. Векторное поле описывается скалярным полем дивергенции, которая отражает изменение величины векторов в непосредственной близости от рассматриваемой точки во всех направлениях. Дивергенция является

объёмной производной векторных полей. Приведём определение дивергенции в математической записи:

$$divF = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi_F}{V}, \qquad (173)$$

где Φ_F – поток векторного поля F через сферическую поверхность площадью S, которая ограничивает объём V.

Дивергенция – одна из наиболее часто используемых дифференциальных характеристик векторного поля, представляющая собой одно число (скаляр), относящееся к определенной точке [2, 29, 132, 180, 181]. Векторное поле в целом описывается скалярным полем дивергенции, которая отражает изменение величины векторов в непосредственной близости от рассматриваемой точки во всех направлениях, то есть, дивергенция относится к числу объемных производных векторного поля. По знаку дивергенции можно определить расхождение входящего и исходящего потоков в окрестности конкретной точки деформационного поля. При положительных значениях дивергенции точки поля являются источниками деформаций, а при отрицательных – деформационными стоками.

В общем случае формула (173) допустима к любой форме области с поверхностью S и объёмом V. Но существует требование нахождения всей поверхности в бесконечно малой окрестности исследуемой точки – lim. Таким образом, дивергенция (173) представляет собой локальную математическую операцию. С точки зрения физики дивергенция векторного поля количественно характеризует некоторую точку пространства как источник или сток этого поля. Дивергенция выражает удельную плотность источников или стоков поля: div$F$<0 – точка поля является стоком; div$F$=0 – стоков и источников нет или они компенсируют друг друга; div$F$>0 – точка поля является источником. В случае двухмерного пространства можно также использовать понятие градиента (направлений и величины наискорейшего спуска). В таком случае значение дивергенции векторного поля указывает на местоположение вершин и впадин. На вершинах дивергенция положительна, во впадинах – отрицательна.

Многие геодинамические процессы в мантии и ядре Земли могут иметь какое-то объяснение с учётом положений теории поля. К таким, например, относятся деформации в сильно текущих горных породах осадочного покрова и в массах пород, испытывающих региональный метаморфизм в глубине земной коры. Сложные деформации возникают в гнейсах при значительном протекании масс. Есть возможность

оценить значения магматических расплавов в механизмах тектонических процессов [68], а также идентифицировать смещения крупных деформированных массивов приповерхностных структур земной коры [69].

Для алгоритмизации метода оценивания дивергенции векторных полей в соответствии с формулой (173) нами использованы понятия потока векторного поля и векторной трубки. Учтена также дискретность координатизации земной поверхности и её трёхмерных сдвижений в условиях использования геодезического метода наблюдений. Некоторая замкнутая поверхность Σ (сфера, параллелепипид или даже произвольной формы) делится на элементарные площади dσ. У каждого элемента имеется свой орт нормали $\vec{n}$ и вектор данного поля $\vec{V}$ (средний для элемента). Поток векторного поля каждого элемента – это скалярное произведение орта нормали $\vec{n}$ на её вектор $\vec{V}$, умноженное на площадь элемента dσ. После интегрирования по всей поверхности мы имеем общий поток векторного поля:

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{n}\vec{V}) d\sigma. \qquad (174)$$

Если вектор $\vec{V}$ отображает скорость течения материала (например, пластичных горных пород), то значение Q, вычисленное по формуле (174), отражает объём материала, протекающего в единицу времени через выбранную поверхность Σ. Векторная трубка определяется, если через произвольный замкнутый контур L в каждой его точке провести силовую линию поля (рис. 81).

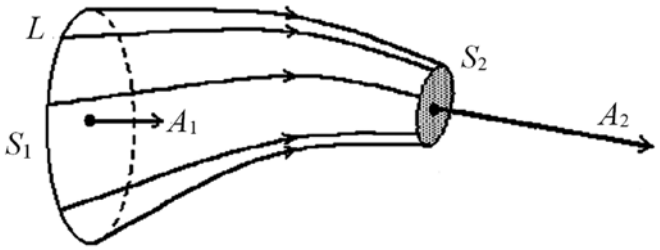
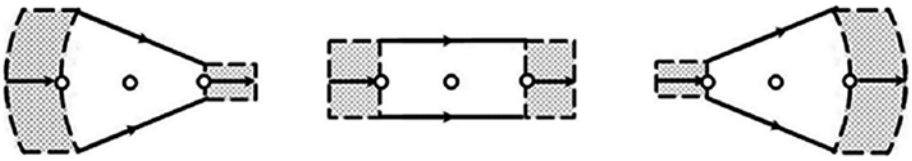


Рис. 81. Векторная трубка, ограниченная силовыми линиями, входным сечением S_1 и выходным сечением S_2

Основное положение нашего метода и алгоритма количественной оценки дивергенции – вычисление разности площади выходного сечения S_2 и входного сечения S_1 векторной трубки при малых её размерах. Также предполагается равенство входного и выходного векторов движений материала (рис. 82).



а *б* *в*

Рис. 82. Некоторые варианты дивергенции:
$а - divF < 0$; $б - divF = 0$; $в - divF > 0$

Аналитической формулы пространственного векторного поля для геодинамических систем не может существовать ввиду большой сложности реальных геодинамических систем, поэтому при формировании алгоритма оценивания дивергенции была использована аппроксимирующая математическая модель векторного поля. Векторное поле смещений предлагается представлять полиномиальными моделями. В условиях геодезической технологии координатизации пространственное векторное поле для каждой точки с известными координатами *x, y, z* и смещениями u_x, u_y, u_z авторы предлагают моделировать полиномами второй (175) или третьей степени:

$$\begin{cases} u_x = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz; \\ u_y = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz; \\ u_z = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz. \end{cases} \quad (175)$$

В общем случае степень полиномов, аппроксимирующих векторное поле сдвижений, может быть выбрана исходя из реальной схемы сети геодезического мониторинга и величин смещений геодезических пунктов. Для техногенных полигонов в местах разработки полезных ископаемых, а также для прогнозных полигонов в сейсмоопасных и вулканических областях для вычисления дивергенции в большинстве случаев достаточно будет аппроксимации полиномами второй степени. Для определения коэффициентов полиномов *a, b, c* выполняется решение общей системы таких полиномов, составленных для всех пунктов геодезической сети, где вычислены смещения за определённый временной интервал. Полученные уравнения векторного поля, аппроксимирующие векторное поле смещений, позволяют вычислять вектора смещений в любой точке. Эти вектора могут быть использованы для формирования векторных трубок малого объёма. Далее идёт определение площадей входных и выходных сечений и по ним – количественное оценивание дивергенции.

В результате повторных геодезических наблюдений и их математической и статистической обработки получают значения и направле-

ния пространственных смещений. Используют в настоящее время преимущественно ГНСС для координатных определений. Однако для определения высотных смещений продолжает оставаться более точным метод высокоточного геометрического нивелирования. Для техногенных геодинамических полигонов, маркшейдерских работ в реальных условиях разработки полезных ископаемых эффективно используются тахеометры с достаточной точностью измерений. Для направлений в I четверти геодезической прямоугольной системы координат будет следующая картина векторов, позволяющих сформировать векторную трубку в окрестности наблюдаемого геодезического пункта А (рис. 83, а). Для II–IV четвертей иллюстрациями служит рисунок 83, *б, в, г*.

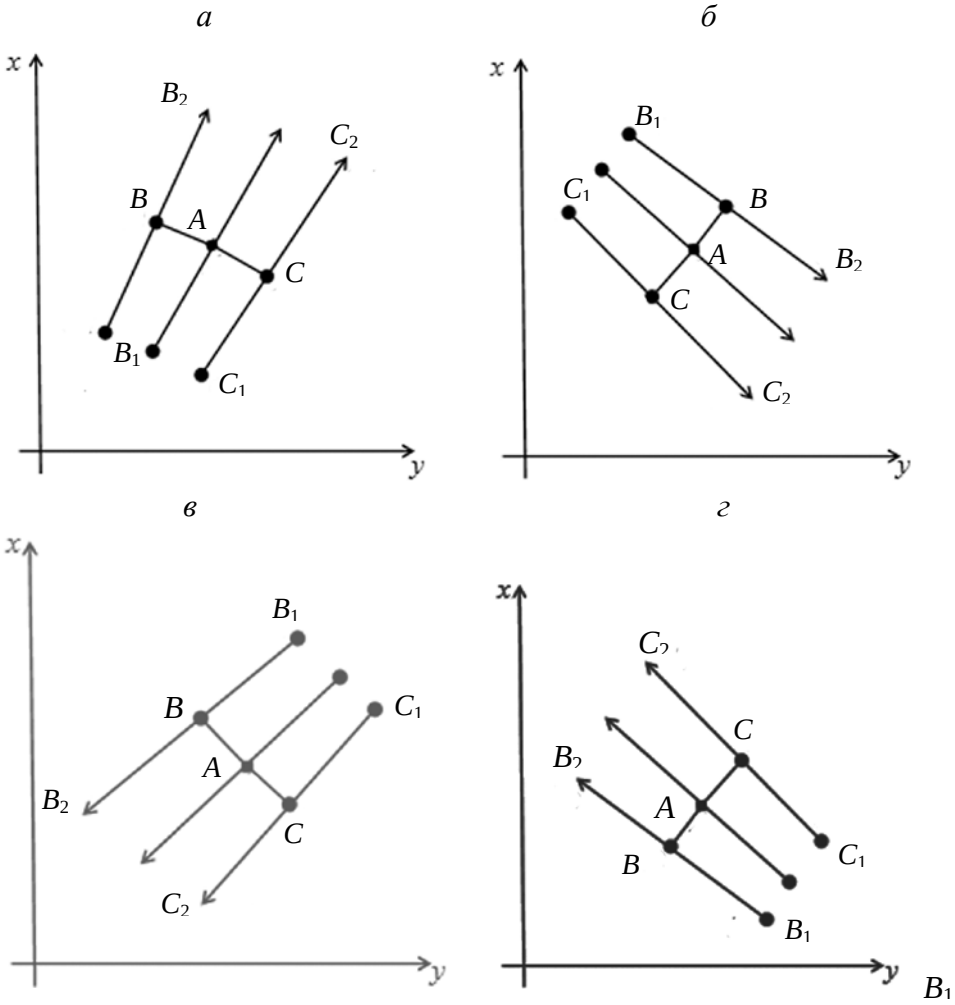


Рис. 83. Вектора
а – в I четверти; *б* – во II четверти; *в* – в III четверти; *г* – в IV четверти

В приведенных выше рисунках вектор, проходящий через т. $A(x_A, y_A, z_A)$, содержит компоненты Δx_A, Δy_A, Δz_A, полученные путём сравнения координатных определений двух циклов наблюдений (не обязательно соседних по времени наблюдения). Алгоритм автора монографии предполагает использовать достаточно простые геометрические соотношения. Перпендикулярно (в пространстве) к измеренному вектору по обе стороны от него находятся координаты точек *B* и *C*:

$$\begin{cases} x_B = x_A + \dfrac{\Delta y_A}{100}; x_C = x_A - \dfrac{\Delta y_A}{100}; \\ y_B = y_A - \dfrac{\Delta x_A}{100}; y_C = y_A + \dfrac{\Delta x_A}{100}. \end{cases} \quad (176)$$

Возможен другой вариант определения координат пунктов *B* и *C* (рис. 84): через вычисление дирекционных углов, отличающихся на 90˚ от направления вектора смещения α_A, полученного после обработки двух циклов геодезических наблюдений.

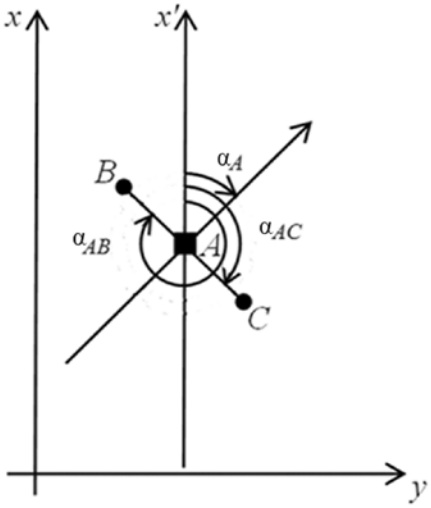


Рис. 84. Дирекционные углы для определения координат пунктов *B* и *C*

Традиционно решаем обратную геодезическую задачу на плоскости (177), (178) и вычисляем дирекционные углы (179) в соответствии с рис. 84:

$$\alpha_A = \text{arctg}\frac{\Delta y_A}{\Delta x_A}; \quad (177)$$

$$r_A = \sqrt{\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2 + \Delta z_A^2}; \quad (178)$$

$$\begin{cases} \alpha_{AB} = \alpha_A + 270°; \\ \alpha_{AC} = \alpha_A + 90°. \end{cases} \quad (179)$$

И, используя формулы прямой геодезической задачи, вычисляем координаты:

$$\begin{cases} x_B = x_A + \frac{r_A}{2}\cos\alpha_{AB}; y_B = y_A + \frac{r_A}{2}\sin\alpha_{AB}; \\ x_B = x_A + \frac{r_A}{2}\cos\alpha_{AB}; y_B = y_A + \frac{r_A}{2}\sin\alpha_{AB}. \end{cases} \quad (180)$$

Расстояние r_A, на котором точки B и C расположены от т. A, рекомендуется задавать экспертным путём с учётом среднего расстояния между пунктами геодезической сети; для реальных схем техногенных полигонов оно может составлять несколько метров. Также следует учесть величины векторов смещений. В формулах (176), например, дана связь с приращениями координат смещений. Расстояние r_A в 100 раз меньше их среднего значения на исследуемой территории, т.е. составляет 1%, а в формулах (190) это расстояние r_A в два раза меньше длины вектора смещения.

По координатам пунктов B и C, используя полиномиальные модели векторного поля (175), вычисляют вектора, проходящие через них. Именно эти вектора являются составляющими векторного поля. Они расположены на боковой поверхности векторной трубки. После того, как эти вектора стали известны, легко определить координаты их начал – B_1, C_1 и концов – B_2, C_2. По их значениям определяют компоненты векторов смещений в т. B: Δx_B , Δy_B и Δz_B. В т. C соответственно Δx_C, Δy_C, Δz_C. Для I четверти (см. рис. 83, *а*) будут следующие формулы алгоритма:

$$\begin{cases} x_{B_1} = x_B - \frac{\Delta x_B}{2}; y_{B_1} = y_B - \frac{\Delta y_B}{2}; z_{B_1} = -\frac{\Delta z_B}{2}; \\ x_{B_2} = x_B + \frac{\Delta x_B}{2}; y_{B_2} = y_B + \frac{\Delta x_A}{2}; z_{B_2} = \frac{\Delta z_B}{2}. \end{cases} \quad (181)$$

$$\begin{cases} x_{C_1} = x_C - \frac{\Delta x_C}{2}; y_{C_1} = y_C - \frac{\Delta y_C}{2}; z_{C_1} = -\frac{\Delta z_C}{2}; \\ x_{C_2} = x_C + \frac{\Delta x_C}{2}; y_{C_2} = y_C + \frac{\Delta x_C}{2}; z_{C_2} = \frac{\Delta z_C}{2}. \end{cases} \quad (182)$$

По полученным координатам (181), (182) начала и концов векторов B и C определяем расстояния между ними на входе в векторную трубку $d_{\text{вх}}$ и на выходе $d_{\text{вых}}$:

$$\begin{cases} d_{\text{вх}} = \sqrt{(x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2 + (z_{B_1} - z_{C_1})^2}; \\ d_{\text{вых}} = \sqrt{(x_{B_2} - x_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2 + (z_{B_2} - z_{C_2})^2}. \end{cases} \quad (183)$$

Используя их значения, вычисляем площади выходного сечения S_2 и входного сечения S_1 векторной трубки. При этом допускаем, что сечения представляют собой круги:

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi\left(\frac{d_{\text{вх}}}{2}\right)^2; \\ S_2 &= \pi\left(\frac{d_{\text{вых}}}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (184)$$

Зная площади входного, выходного сечений, а также значения векторов смещений, количественно оцениваем дивергенцию векторного поля в выбранной точке координатных определений на поверхности. Автор предлагает следующую формулу оценки дивергенции для т. A:

$$divA = (S_2 - S_1)\left|\vec{V}_A\right|. \quad (185)$$

Метод и алгоритмы проверены на многих реальных данных мониторинговых наблюдений, например, на Таштагольском железорудном месторождении (рис. 85).

Для смещений восьми пунктов геодезической наблюдательной сети были выбраны следующие полиномиальные модели, дополнительно имеющие компоненты третьей степени:

$$\begin{cases} u_x = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7y^3; \\ u_y = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy + b_6x^3 + b_7y^3; \\ u_z = c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4y^2 + c_5xy + c_6x^3 + c_7y^3. \end{cases} \quad (186)$$

Приведём результаты вычислительного эксперимента оценивания дивергенции векторного поля горизонтальных смещений по результатам наблюдений в период 28.06.2005–25.09.2005 г. В этот период были проведены плановые массовые взрывы (разрыхление породы). В таблице 45 приведены координаты, смещения пунктов геодезической сети и оценки дивергенции в них в соответствии с предлагаемым алгоритмом.

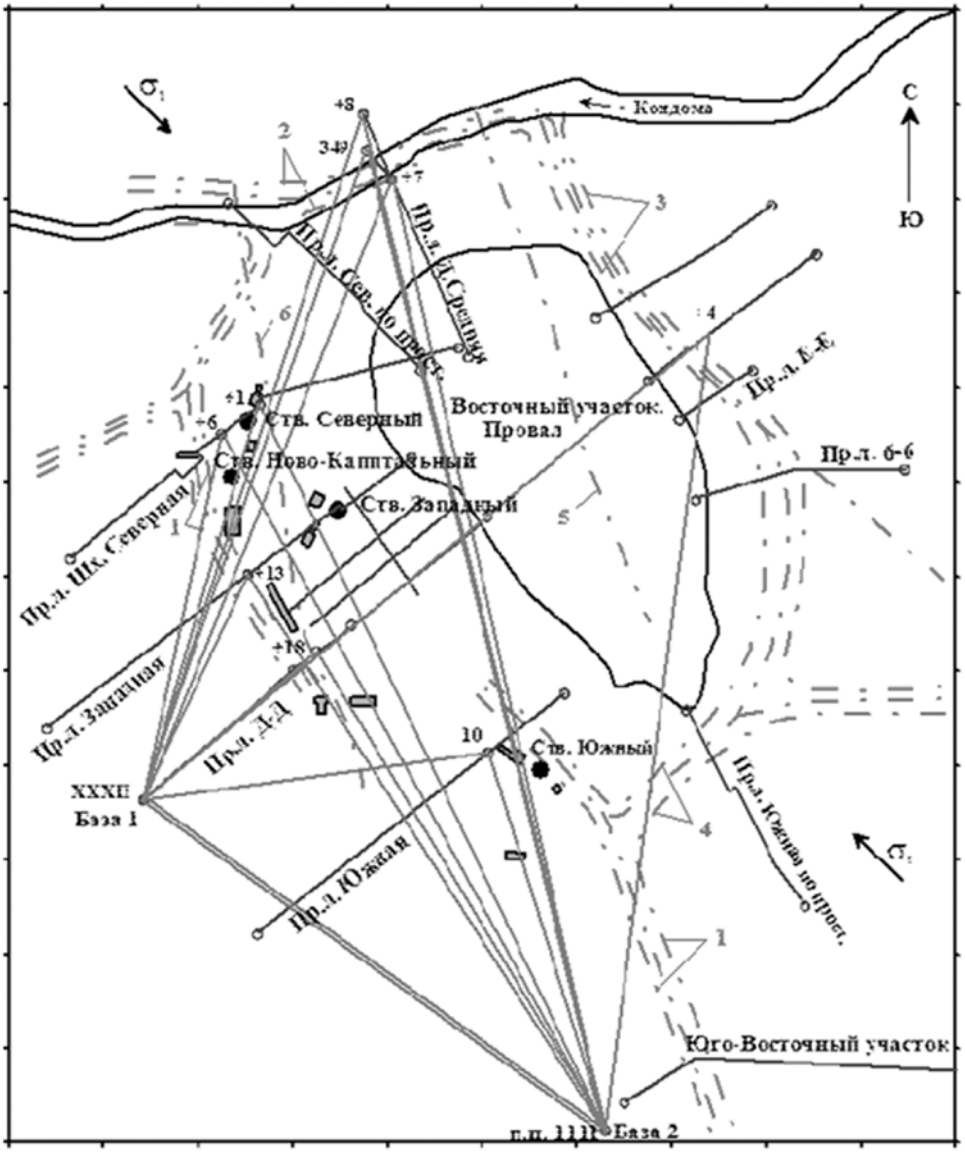


Рис. 85. Схема наблюдательной геодезической сети
на Таштагольском железорудном месторождении

После моделирования векторного поля системой полиномов (186) были вычислены размеры векторных трубок, включая площади входного и выходного сечений. В соответствии с формулой (185) были определены значения дивергенции на территории месторождения. Рисунок 86 дает представление о распределении поля дивергенции.

Таблица 45

Результаты наблюдения смещений и оценки дивергенции в период 28.06. 2005 г. – 25.09.2005 г.

Реперы, профильные линии	Геодезические координаты, м		Компоненты векторов смещений, мм			**div, см^3**
	X	X	ΔX	ΔY	ΔZ	
10, Южная (ствол Южный)	836	1025	122	–19	1	–1435
18, (административно-бытовой комбинат шахты)	1045	660	55	–48	1	–167
13, (административно-бытовой комбинат шахты)	1208	475	42	–77	9	–113
6, шахта Северная	1496	460	26	–127	–12	–57
1, шахта Северная	1565	530	50	–133	13	–252
7, Средняя (р. Кондома)	2038	820	87	–216	9	–1257
349, (р. Кондома)	2092	760	76	–225	3	–955
8, Средняя (р. Кондома)	2185	760	81	–233	–18	–1132

Современные информационные технологии, программное обеспечение значительно расширили возможности моделирования векторных полей сдвижений. Методов интерполяции достаточно много. Перечислим некоторые из них: локальные полиномиальные модели, регрессионные модели, обратных расстояний, минимальной кривизны, ближнего или среднего соседа, Шепарда, радиальных базисов, триангуляции с линейной интерполяцией, Пример использования локальных полиномиальных моделей для восстановления векторных полей дан в [68, 69]. Очень популярен у исследователей динамики земной поверхности метод крайгинга (Kriging). Сделаем обзор его алгоритмической основы и использования.

Оптимизация методом наименьших квадратов имеет более чем 200- летнюю историю. Наиболее раннее использование в геостатистике отражено в работах [236, 246, 251, 267, 274, 277]. Эффективным инструментом для создания традиционных картографических отображений является метод крайгинга. Интерполяция крайгинг-методом носит название по имени одного из создателей – Даниель Криге, горный инженер из Южной Африки. Первая работа была опубликована в 1950 году [257]. Затем разработка была продолжена Георгом Матероном в 1961/62 годах [228, 263, 273], Вебстером и Бургессом. Крайгинг очень востребован как результативный компонент многих методов геостатистического моделирования.

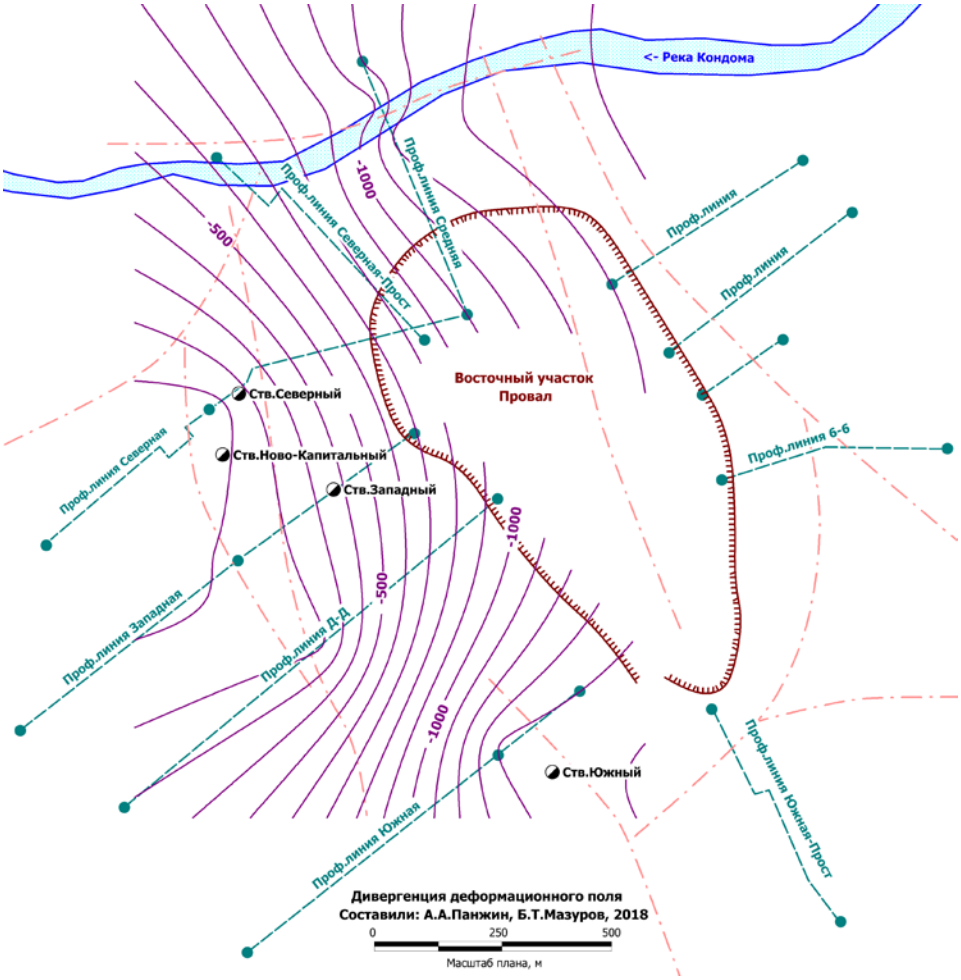


Рис. 86. Изображение дивергенции деформационного поля Таштагольского месторождения изолиниями

Основное применение крайгинга – прогноз атрибутивных значений в неопорных местоположениях. Крайгинг (Kriging) взвешивает окружающие измеряемые значения для предсказания неизмеренного местоположения. Основная формула крайгинга формируется как взвешенная сумма данных:

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z(s_i), \qquad (187)$$

где $\hat{Z}(s_0)$ - оценка неизмеренного значения в неопорном местоположении 0,

$Z(s_i)$ – измеряемое значение в местоположении *i;*

λ_i – неизвестный вес для измеряемого значения в местоположении *i;*

s_0 – местоположение прогноза;

N – количество измеряемых значений.

Крайгинг формирует веса из окружающих измеренных значений для прогнозирования неизмеренных местоположений. измеренные значения, расположенные наиболее близко к неизмеренным местоположениям, имеют наибольшее влияние.

Доступны два метода крайгинга: ординарный и универсальный. Ординарный крайгинг – наиболее общий и широко используемый из методов крайгинга, он используется по умолчанию.

Метод крайгинг-интерполяции позволяет более детально и в то же время статистически обоснованно выполнять моделирование векторных полей с регулируемой по необходимости решения задачи плотностью узлов сетки (GRID). Для данных мониторинга, выполненных коллективом Института горного дела УрОАН РФ на Киембаевском ГОК, была с целью вычисления дивергенции использована равномерная сетка с плотностью узлов через 50 м (рис. 87).

Рис. 87. Нижний левый участок (юго-западный) равномерной сетки

Для каждой пары соседних узлов по смоделированным в них пространственным векторам смещений (рис. 88, 89) находятся векторные трубки, диаметры (183) и площади входных и выходных сечений (184) и оценивается дивергенция по формуле (185).

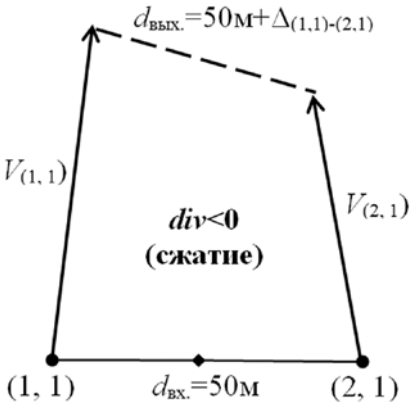


Рис. 88. Векторы соседних узлов сетки для div<0.

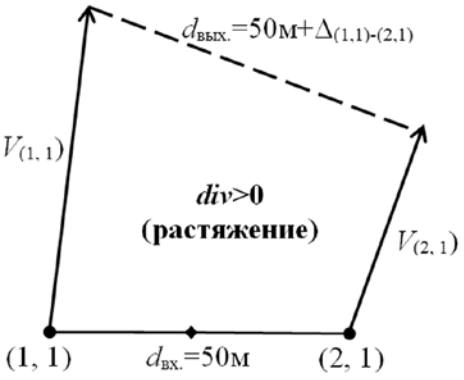


Рис. 89. Векторы соседних узлов сетки для div>0.

Визуализация полей дивергенции может быть выполнена отрисовкой изолиний (Рис. 90) и псевдо3D-поверхностями (рис. 91).

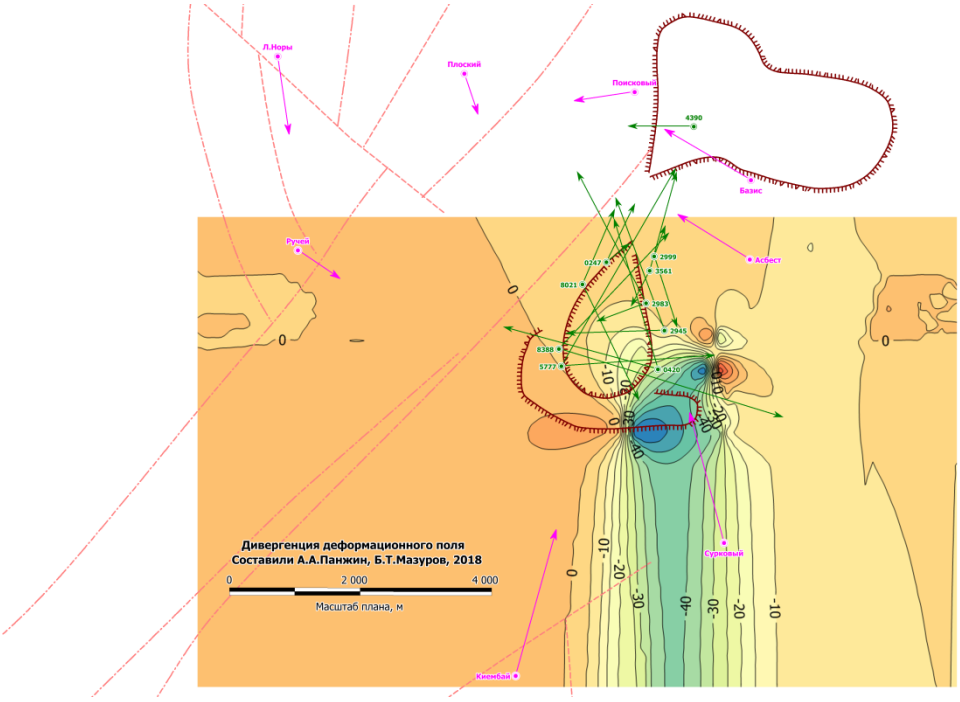


Рис. 90. Поле дивергенции на территории Киембаевского ГОК

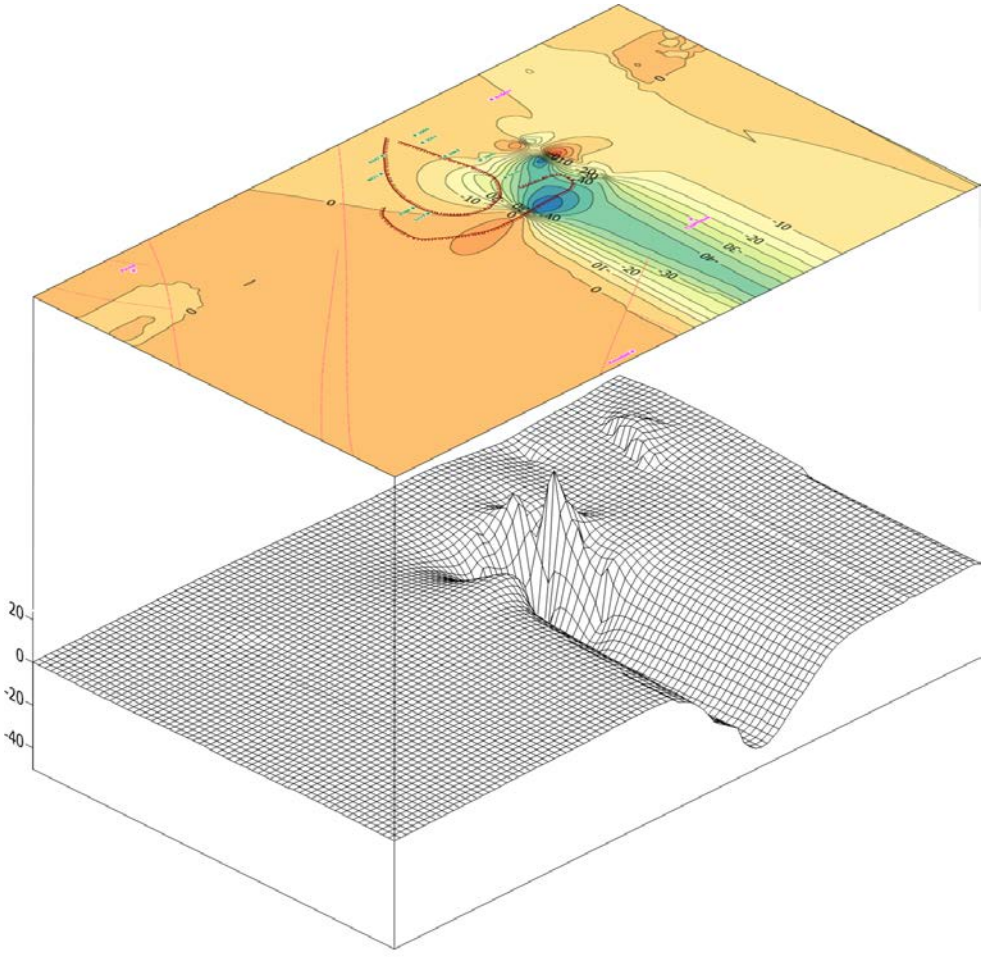


Рис. 91. 3D-представление поля дивергенции на Киембаевском ГОК

Предлагаемые методы оценивания полей дивергенции позволяют дополнить картину деформационного состояния изучаемой территории новыми качественными характеристиками. В совокупности с традиционными методами анализа может быть увеличена достоверность прогноза нарушений напряженно-деформированного состояния приповерхностного слоя вследствие техногенного на него воздействия. Тем самым могут обосновываться организационные меры для снижения риска возникновения нежелательных технологических, экологических и социальных последствий.

Автор, имея плодотворные научные контакты с коллегами, развил алгоритмы для предлагаемых методов. Полученные новые результаты могут быть очень важны как при общей, так и при кусочной

оценке геодинамического состояния территории месторождений. В совокупности с векторными полями, поля дивергенции будут объективным основанием для принятия мероприятий по обеспечению безопасной и эффективной эксплуатации месторождений полезных ископаемых.

7.3 Выводы

Важнейшим продолжением исследовательской работы является математическое моделирование геодинамических систем в прогнозных целях. Для исследования сложных (нелинейных) геодинамических процессов должна быть выбрана соответствующая математическая основа. Здесь обращено внимание на привлечение математических основ теории поля. Предлагаются варианты определения дивергенции – одной из дифференциальных характеристик пространственных векторных полей.

Также описаны некоторые теоретические основы исследования вращательных движений земной поверхности. Упомянута математическая модель вращательных кольцевых структур Земли. Имеются математические модели, объясняющие природу внезапных глобальных, региональных и некоторых локальных геодинамических процессов. Они основаны на учете различий в пространственно-временных масштабах геодинамических систем. Рассмотрены теоретические основы описания вращательных движений на плоскости системой дифференциальных уравнений. Приведены примеры интегральных кривых, которые могут быть качественными характеристиками геодинамических систем. Во многих случаях подобные траектории соответствуют вращательным горизонтальным движениям земной поверхности.

Природные процессы преимущественно являются нелинейными, для их исследования должна быть использована соответствующая математическая основа. Здесь описаны некоторые возможности использования систем дифференциальных уравнений для качественного исследования геодинамических систем в фазовом пространстве.

Общепризнана важная роль геодезических методов наблюдений в решении сложнейшей задачи исследований геодинамических объектов различных пространственных масштабов. Геодезические данные и их последующий статистический анализ в совокупности с геофизическими наблюдениями позволяет выполнять математическое моделирование и идентификацию напряженно-деформированного состояния геодинамических систем в аспекте прогноза природных и техногенных катастроф. Данные об изменении координат точек земной поверхности

являются экспериментальной основой понимания деформационных полей и причин происходящих в них изменений. Природные процессы преимущественно являются нелинейными, Нелинейные процессы присутствуют при движениях тектонических блоков. И, в частности, при разнонаправленном движении соседних блоков, когда возникает опасность сейсмического события – землетрясения. Для исследования нелинейных процессов должна быть выбрана соответствующая математическая основа. Здесь описаны некоторые теоретические основы качественного исследования горизонтальных движений земной поверхности как одного из приложений качественной теории дифференциальных уравнений. Приведены примеры интегральных кривых, которые могут быть качественными характеристиками геодинамических систем. Во многих случаях подобные траектории соответствуют горизонтальным движениям земной поверхности.

«Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, на сколько сможете и на сколько это потребуется вам, чтобы их было легко решить »

Декарт

8 СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЛОКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

8.1 . Кинематические и деформационные модели блоковых движений

Информация о движениях и напряженно-деформированном состоянии (НДС) земной поверхности и земной коры, обусловленных эндогенными и экзогенными факторами, является важнейшей в аспекте прогноза катастрофических геодинамических процессов (землетрясений [102, 165, 247], извержений вулканов [14, 53, 97-101], оползней [207], сходов ледников, горных ударов и проседания грунтов в области разработки полезных ископаемых [94, 119, 153-155, 177, 178] и т. п.). Аномальные техногенные геодинамические процессы вызывают горизонтальные сдвиги земной коры, разломообразование, подземные аварии, наводнения; при этом страдают не только промышленные объекты, инженерные конструкции, жилые здания, но и население, что особенно чуствительно.

Кинематическими моделями блоков Земли глобального масштаба являются модели движения литосферных плит. Для их исследования на сферической Земле традиционно используют научные результаты великого математика Леонарда Эйлера [115]. Известна геофизическая модель движения литосферных плит NNR–NUVEL1A, которой соответствуют кинематические характеристики координатной системы ITRF. В последнее десятилетие предложены модели движений литосферных плит GEODVEL, MORVEL [220, 222, 234, 268].

Однако, эти модели применимы, если считать плиты твердотельными. Но, внутри плит существует иерархически связанная система вращающихся элементов (менее крупных плит, блоков), разделенных тектоническими разломами. Многие геодинамические системы различного пространственного масштаба представляют собой блочно-иерархические структуры [174, 175]. Одним из результатов исследований М. А. Садовского является определение важной константы, которой является примерное отношение средних размеров блоков соседних

уровней (3.5±0.9). Таким образом, геодинамические системы в общем случае являются сложными в структурном отношении и при решении задачи моделирования это необходимо учитывать обязательным образом.

Детализация при исследовании геодинамических систем должна учитывать в дополнение к вращениям также изменяемое во времени напряженно-деформированное состояние внутри самих блоков. Экспериментальные возможности получения необходимых количественных характеристик деформационных полей в настоящее время связаны с использованием ГНСС-технологий.

В [278] в дополнение к определениям вращения блока и характеристик сдвигов горных пород, используются два дополнительных типа параметров: один для описания деформационного поля в пределах блоков, а другой для характеристики вращения в общей «системе координат» данных ГНСС-определений. Предполагается, что поля скоростей деформации в пределах блока могут содержать изменяемую (упругую) составляющую из-за изменения напряжений на границах разломов и неустранимую (постоянную) часть, которая предположительно происходит путем скольжения или локализованной деформации из-за внутренних сдвигов горных пород.

Исследование горизонтальных скоростей и тензора деформации для плит на сферической Земле дается в работе [280]. Уравнения смещений точки на плите $V_\theta(\theta,\lambda)$ и $V_\lambda(\theta,\lambda)$, предлагаются следующие.

$$V_\theta(\theta,\lambda) = e_{\theta\theta}R(\theta-\theta_C) + e_{\theta\lambda}R\sin\theta_C(\lambda-\lambda_C),$$
$$V_\lambda(\theta,\lambda) = e_{\theta\lambda}R(\theta-\theta_C) + e_{\lambda\lambda}R\sin\theta_C(\lambda-\lambda_C).$$

В уравнениях $\theta = 90^\circ - \phi$ – дополнение астрономической широты ϕ до 90°, λ – астрономическая долгота. R – радиус Земли, θ_C, λ_C – координаты центра тяжести блока (геометрического центра формы). Три независимых компонента симметричного тензора деформации $e_{\theta\theta}, e_{\lambda\lambda,} e_{\theta\lambda}$ являются характеристиками изменения формы плиты.

Для региональных геодинамических систем возможен переход к исследованию в плоскости. В работе [118] предложено использование для качественного описания геодинамических систем дифференциальных уравнений. Некоторые кинематические модели связаны с понятием волноводов в земной коре. Большое внимание в науках о Земле уделяется вращательным движениям. В работах [118, 42, 123, 124] приведены примеры исследований вращательных движений геодинамических систем различных масштабов геодезическими методами. Приме-

ры оценки деформационного состояния вулканических областей по комплексным геодезическим данным даны в [97-101].

Для пространственного тела тензор его деформаций T математически выражается в виде матрицы, элементы которой формируются из частных производных смещений u, v, w по осям координат x, y, z:

$$T = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Обычно из соображения наглядности и удобства анализа деформационных свойств тензор T разлагается на два тензора T_ε и T_ω. Симметричный тензор T_ε отражает чистую деформацию, а кососимметричный тензор T_ω (девиатор) – вращение пространственного тела.

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{e_{xy}+e_{yx}}{2} & \frac{e_{xz}+e_{zx}}{2} \\ \frac{e_{yx}+e_{xy}}{2} & e_{yy} & \frac{e_{yz}+e_{zy}}{2} \\ \frac{e_{zx}+e_{xz}}{2} & \frac{e_{zy}+e_{yz}}{2} & e_{zz} \end{pmatrix},$$

$$T_\varpi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e_{xy}-e_{yx}}{2} & \frac{e_{xz}-e_{zx}}{2} \\ \frac{e_{yx}-e_{xy}}{2} & 0 & \frac{e_{yz}-e_{zy}}{2} \\ \frac{e_{zx}-e_{xz}}{2} & \frac{e_{zy}-e_{yz}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Важными характеристиками, независимыми относительно системы координат являются основные инварианты тензора второго ранга, либо их комбинации [284]. Для пространственной модели локально-однородного деформирования с учетом классических методов геодезических наблюдений за современными движениями земной коры в [52] описаны такие инвариантные характеристики (таблица 46).

Таблица 46

Основные инварианты тензора второго ранга либо их комбинации

Данные о движениях	Линейный симметричного тензора	Квадратичный симметричного тензора	Квадратичный (девиатора)
Вертикальные (по профилю)	e_{zz}	$-\frac{1}{4}e_{zx}$	$-\frac{1}{4}(e_{zx}+e_{zz})$
Вертикальные (по площади)	e_{zz}	$2e_{zz}-\frac{1}{4}(e_{zx}^2+e_{zz}^2)$	$-\frac{1}{4}(e_{zx}^2+e_{zy}^2+e_{zz}^2)$
Горизонтальные	$e_{xx}+e_{yy}$	$e_{xx}e_{yy}-\frac{1}{4}(e_{xy}+e_{yx})^2$	$-\frac{1}{4}\left[\begin{matrix}(e_{xx}+e_{yy})^2+\\+(e_{xy}+e_{yx})^2\end{matrix}\right]$

Конечно, наиболее востребованной является технология конечно-элементного (КЭ) разделения исследуемой территории и оценка деформационных параметров отдельно в каждом КЭ. Более общий случай – это конечно-элементное разделение на тетраэдры в трехмерных геодезических сетях. Объективно, востребованность в пространственном КЭ исследовании связана с горными и предгорными областями, вулканами, а также техногенными объектами типа крупных угольных разрезов, кимберлитовых месторождений, плотин ГЭС, крупных инженерных сооружений, мостов и др. Качество анализа обусловлено необходимостью учета свойств упругой среды, структурных связей между элементами, положений теории упругости теоретической механики. В пространственном случае оценка деформационных характеристик опирается на вычислении некоторых величин, в том числе инвариантных (независимых от системы отсчета координат).

Более часто используется модель плоской локально-однородной деформации. И, если для пространства КЭ – тетраэдр, то для плоскости это треугольник.

Основные характеристики деформации каждого треугольника

1. Среднее расширение треугольника

$$Q = e_{11} + e_{22}$$

2. Компоненты сдвига:

$$Z_1 = e_{11} - e_{22};$$

$$Z_2 = e_{12} + e_{21}$$

3. Максимальный сдвиг района:

$$Z_m = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

4. Максимальное растяжение:

$$E_1 = \frac{Q}{2} + \frac{Z_m}{2}$$

5. Минимальное растяжение:

$$E_2 = \frac{Q}{2} - \frac{Z_m}{2}$$

6. Ориентация главных осей чистой деформации определяется углом *W*:

$$W = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{Z_2}{Z_1}$$

7. Разворот треугольника $\omega = \frac{e_{12} - e_{21}}{2}; \omega'' = \rho''\omega$.

Параметры, характеризующие напряженное состояние объекта, определяются на основе моделей теории упругости. Тензор напряжений в отдельном треугольном элементе *r* вычисляется в соответствии с формулами закона Гука и формулами Коши, приведенными в раделе 2.

Для определения поля скоростей деформации по данным ГНСС-наблюдений используется в некоторых случаях методика, основанная на методе Шена (Shen) [280]**.** В этом методе компоненты горизонтальной скорости смещения *u, v*, компоненты тензора скорости деформации e_{xx}, e_{xy}, e_{yy} и скорость вращения ω в произвольной точке с координатами x_i, y_i связаны со скоростью смещения *U, V* в точке наблюдения с координатами *X, Y* следующим образом:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x_i & \Delta y_i & 0 & \Delta y_i \\ 0 & 1 & 0 & \Delta x_i & \Delta y_i & -\Delta x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{yy} \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_y^i \end{pmatrix}, \qquad (188)$$

$$\varepsilon_x^i = \sigma_x^i e^{\frac{\Delta x_i^2}{2D^2}},$$

$$\varepsilon_y^i = \sigma_y^i e^{\frac{\Delta y_i^2}{2D^2}}.$$

В этих формулах

$\Delta x_i = X - x_i$, $\Delta y_i = Y - y_i$. σ_x^i, σ_y^i – ошибки измерения скоростей смещения компонент *X, Y* . *D* – вес измерения (Distance Decaying Constant, DDC). Значение DDC зависит от сети точек наблюдений, скорости смещения и тектонических особенностей региона. Дилатация (первый инвариант) θ и деформация сдвига в каждой точке вычисляются как:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy},$$

$$\Sigma = \sqrt{e_{xy}^2 + \frac{\left(e_{xx} - e_{yy}\right)^2}{4}}.$$

При вычислении компонент скорости деформации, компонент горизонтальной скорости смещения и скорости вращения в *i*-ой точке используются данные векторов всех соседних точек, расположенных в радиусе 2*D* от нее. При этом ε_x^i и ε_y^i играют роль весовых коэффициентов при решении системы уравнений, построенной согласно (188). Чем дальше от текущей точки находится пункт ГНСС-измерения и чем больше ошибка измерения скорости в нем, тем меньшее влияние он оказывает на результат решения системы уравнений для данной точки. Исходные данные для оценки скорости деформации представляли собой поле векторов скоростей, полученных по результатам геодезических наблюдений.

При визуализации полей напряжений облегчается экспертная оценка геодинамических систем, в том числе и наличия в них блоковых структур [95, 119, 28, 86-88]. Существенную помощь дает использование визуализации вертикальных смещений. Также актуальными являются технологии создания тематических карт и ГИС [110, 111].

Заметим, что выделить один универсальный метод определения количественных оценок деформационного состояния геодинамических систем было бы неправильно. Выбор того или иного метода зависит от цели исследования, размеров и пространственных качеств наблюдаемой территории или техногенного объекта, плотности пунктов геодезической сети, частоты повторных наблюдений, опыта исследователя. И, конечно, лучшим вариантом является использование нескольких методов с дальнейшим сравнением полученных деформационных моделей и получением максимально объективной картины состояния геодинамических систем.

8.2 Модель локально-однородной деформации. Тензоры деформации

Вся поверхность ГДС разбивается на треугольные конечные элементы (КЭ) (рис. 92).

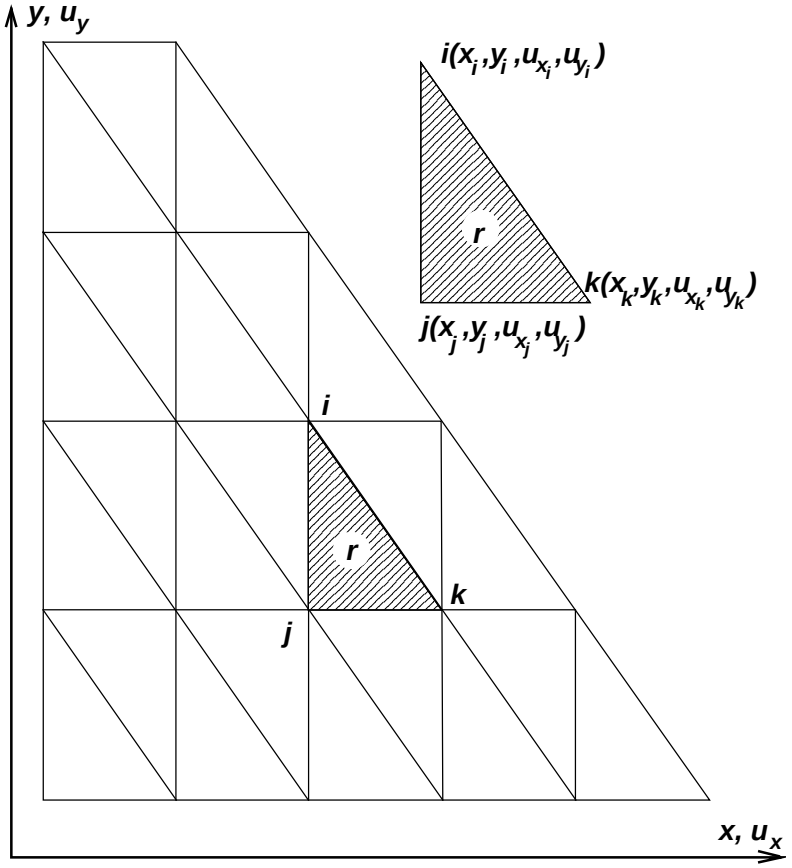


Рис. 92. Разбиение поверхности ГДС на треугольные КЭ

Для каждого КЭ может быть записана своя модель локально-однородной деформации для плоского объекта. Координаты вершин *i*, *j*, *k* треугольного КЭ *r* известны – $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$. Вектор перемещений узлов U также может быть рассчитан. Для всех трех вершин принимаем, что закон деформирования одинаков. Поэтому можно записать:

$$\left.\begin{aligned} u_{x_i} &= e_{10} + e_{11}x_i + e_{12}y_i, \\ u_{y_i} &= e_{20} + e_{21}x_i + e_{22}y_i, \\ u_{x_j} &= e_{10} + e_{11}x_j + e_{12}y_j, \\ u_{y_j} &= e_{20} + e_{21}x_j + e_{22}y_j, \\ u_{x_k} &= e_{10} + e_{11}x_k + e_{12}y_k, \\ u_{y_k} &= e_{20} + e_{21}x_k + e_{22}y_k. \end{aligned}\right\} \qquad (189)$$

Система (189) состоит из 6-ти линейных уравнений с 6-ю неизвестными – коэффициентами линейной модели перемещений:

$$e = \begin{bmatrix} e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{20} & e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}^T. \qquad (190)$$

Из решения системы (189) эти коэффициенты определяются так:

$$\left.\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2S_r}((u_{x_i} - u_{x_j})(y_i - y_k) - (u_{x_i} - u_{x_k})(y_i - y_j), \\ e_{12} &= -\frac{1}{2S_r}((u_{x_i} - u_{x_j})(x_i - x_k) - (u_{x_i} - u_{x_k})(x_i - x_j), \\ e_{21} &= \frac{1}{2S_r}((u_{y_i} - u_{y_j})(y_i - y_k) - (u_{y_i} - u_{y_k})(y_i - y_j), \\ e_{12} &= -\frac{1}{2S_r}((u_{y_i} - u_{y_j})(x_i - x_k) - (u_{y_i} - u_{y_k})(x_i - x_j), \end{aligned}\right\} \qquad (191)$$

$$\left.\begin{aligned} e_{10} &= u_{x_i} - e_{11}x_i - e_{12}y_i, \\ e_{20} &= u_{y_i} - e_{21}x_i - e_{22}y_i, \end{aligned}\right\} \qquad (192)$$

где S_r – площадь треугольного КЭ r:

$$S_r = \frac{1}{2}((x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)). \qquad (193)$$

Однако нужно помнить, что значения коэффициентов e_{10}, e_{20}, отвечающих за параллельный перенос КЭ, будут зависеть от выбранной системы координат. При расчете напряженно-деформированного состояния эти коэффициенты участия не принимают. Важны другие 4 коэффициента, которые обычно записывают в виде квадратной матрицы – тензора деформации:

$$T = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}. \quad (194)$$

В тензоре T выделяются симметричная часть T_ε, отражающая чистую деформацию КЭ *r*, и кососимметричная часть T_ω, отражающая вращение КЭ *r* как абсолютно твердого тела:

$$T = T_\varepsilon + T_\omega, \quad (195)$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{e_{12}+e_{21}}{2} \\ \frac{e_{21}+e_{12}}{2} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad (196)$$

$$T_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e_{12}-e_{21}}{2} \\ \frac{e_{21}-e_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (197)$$

Компоненты тензора деформаций T_ε выделяются в отдельный вектор:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yy} & e_{xy} \end{pmatrix}^T, \quad (198)$$

где $$\varepsilon_{xx} = e_{11}, \varepsilon_{yy} = e_{22}, \varepsilon_{xy} = \frac{e_{12}+e_{21}}{2}. \quad (199)$$

Затем выполняется расчет параметров, характеризующих напряженное состояние объекта. Параметры, характеризующие напряженное состояние объекта, определяются на основе моделях теории упругости.

Тензор напряжений в отдельном треугольном элементе *r* вычисляется в соответствии с формулами закона Гука и формулами Коши, приведенными в разделе 2.

Для оценки НДС для остальных КЭ области Ω вычисления повторяют с координатами и смещениями узловых точек, соответствующих каждому конкретному КЭ.

8.3 Методика определения компонент плоской деформации. Характеристики плоской деформации. Карто-схемы деформации

Порядок выполнения расчетов:

1. Определение координат центров тяжести треугольников и пересчет координат вершин треугольников в систему с началом в центре тяжести (рис. 93).

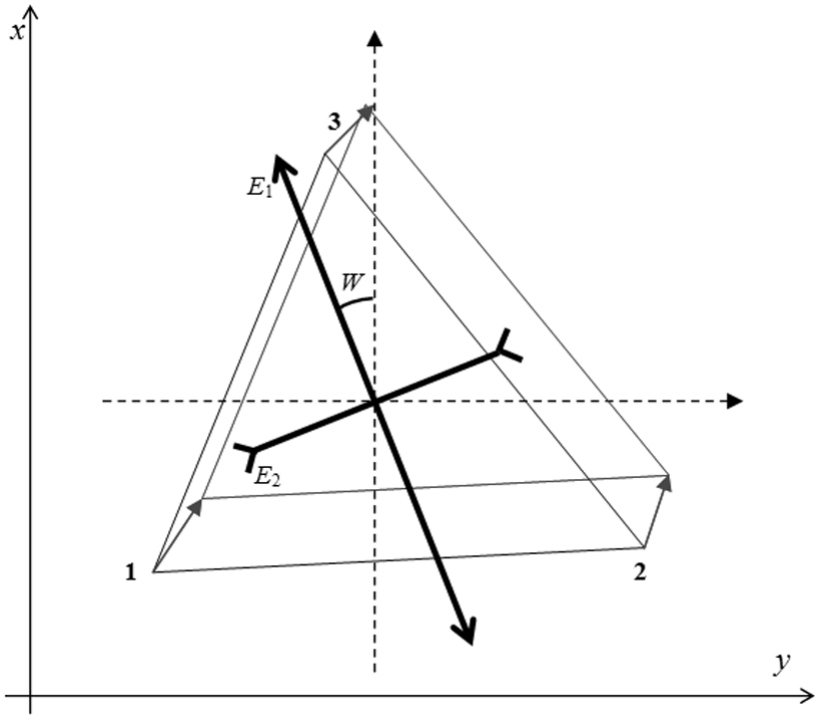


Рис. 93. Карто-схема деформаций треугольника 123.
В 1 см схемы 200 м. 10 см вектора смещения – 1 см схемы.
Стрелки соответствуют главным осям растяжения или сжатия:

растяжение,

сжатие.

Формулы для вычисления координат центра тяжести треугольника:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \\ Y_0 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \end{aligned}\right\}$$

Координаты пунктов треугольника в системе с началом в центре тяжести треугольника:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= X_i - X_0; \\ Y_i &= Y_i - Y_0. \end{aligned}\right\}$$

2. Вычисление компонентов тензоров деформации для всех четырех треугольников *Ui – dx, Vi – dy*.

$$e_{11}=\frac{\left(U_1-U_2\right)\left(y_1-y_3\right)-\left(U_1-U_3\right)\left(y_1-y_2\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(y_1-y_3\right)-\left(x_1-x_3\right)\left(y_1-y_2\right)},$$

$$e_{12}=\frac{\left(U_1-U_2\right)\left(x_1-x_3\right)-\left(U_1-U_3\right)\left(x_1-x_2\right)}{\left(y_1-y_2\right)\left(x_1-x_3\right)-\left(y_1-y_3\right)\left(x_1-x_2\right)},$$

$$e_{21}=\frac{\left(V_1-V_2\right)\left(y_1-y_3\right)-\left(V_1-V_3\right)\left(y_1-y_2\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(y_1-y_3\right)-\left(x_1-x_3\right)\left(y_1-y_2\right)},$$

$$e_{22}=\frac{\left(V_1-V_2\right)\left(x_1-x_3\right)-\left(V_1-V_3\right)\left(x_1-x_2\right)}{\left(y_1-y_2\right)\left(x_1-x_3\right)-\left(y_1-y_3\right)\left(x_1-x_2\right)}.$$

$$e_{10}=U_1-e_{11}x_1-e_{12}y_1,$$

$$e_{20}=V_1-e_{21}x_1-e_{22}y_1.$$

3. Определение характеристик деформации каждого треугольника
Среднее расширение треугольника 123 (Рисунок 42)

$$Q=e_{11}+e_{22}.$$

Компоненты сдвига:

$$Z_1=e_{11}-e_{22};$$

$$Z_2=e_{12}+e_{21}.$$

Максимальный сдвиг района: $Z_m=\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}$.

Максимальное растяжение: $E_1=\frac{Q}{2}+\frac{Z_m}{2}$.

Минимальное растяжение: $E_2=\frac{Q}{2}-\frac{Z_m}{2}$.

Ориентация главных осей чистой деформации определяется углом *W*:

$$W=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Разворот треугольника $\omega=\frac{e_{12}-e_{21}}{2};\omega''=\rho''\omega$.

8.4 Непараметрический подход к структурному моделированию

8.4.1 Структурное моделирование геодинамических систем с позиций системного подхода и системного анализа

Конструктивная реализация системного подхода базируется на теории и методах системного анализа, основой которого является построение альтернативных математических моделей. В теории системного анализа часто используется объектный подход к анализу и синтезу модели: выделение подсистем путём поэлементного деления объектов на более мелкие. Это рекомендуется в том случае, когда объект имеет количественно сложную структуру, но состоит из относительно небольших по сложности подсистем (первичных объектов). Целесообразно выделять группы сходных по свойствам первичных объектов и анализировать наиболее типичные характеристики каждой группы. Уместно здесь вспомнить цитату из работы Демокрита «Письмо ученому соседу»: «Если тебе, дорогой друг, нужно разобраться в сложном нагромождении фактов или вещей, ты сначала разложи их на небольшое число куч по похожести. Картина прояснится, и ты поймешь природу этих вещей».

Исследование систем при их растущей сложности возможно выполнять в аспекте объектно-ориентированного проектирования (идентификация классов и объектов, идентификация их семантики, идентификация связей между ними).

Объектно-ориентированный подход базируется на том, что сложные системы необходимо проектировать как совокупность взаимодействующих друг с другом объектов, рассматривая каждый объект как экземпляр определенного класса, причем классы при этом образуют иерархию. Проектирование объектно-ориентированной системы (ООС) предполагает эволюционный путь развития системы на базе небольших подсистем. Создание такой модели ООС, которая основывается на объектах (объектах окружающей среды), принадлежащих проблемной области, и сформулирована как результат применения объектно-ориентированной декомпозиции. От того насколько правильно будет разделена ООС на подсистемы, зависит эффективность отладки (настройки) каждой из этих систем и в какой степени конечный продукт функционирования системы будет свободен от ошибок. Таким образом, ООС рассматривается как упорядоченная совокупность объектов на различных иерархических уровнях, которые в процессе взаимодействия друг с другом обеспечивают функционирование системы как единого целого.

Построение математической модели, как правило, опирается на систему гипотез, отражающих понимание исследователем изучаемого объекта. Важным является не просто описать объект, а выделить наиболее существенные его черты, представляющие интерес для решения поставленной задачи.

Будем исходить из того, что вербальная модель ГДС опирается на модель блочно-иерархического строения земной коры [174, 175] и заключается в следующем: наблюдаемые движения земной коры есть следствие движения отдельных блоков, различных по величине. Размеры блоков горной породы подчиняются иерархической последовательности, описываемой законом геометрической прогрессии. Установлено также, что эти блоки разделены прослойками из более измельченной породы. В свою очередь каждый блок испытывает деформацию – изменяет объём и форму. Описание этих изменений основывается на понятиях и представлениях механики сплошной среды и заключается в нахождении параметров модели локально-однородного деформирования земной коры (см. п. 5.1). Модель линейного поля перемещений и деформаций для двумерного случая представлена системой уравнений вида (189).

В зависимости от цели исследований и состава измерений из (189) можно получить различные частные модели для описания поведения ГДС.

Если допускается гипотеза движения жестких блоков, то симметричная часть тензора деформации (196), отражающая чистую деформацию, принимается нулевой:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} e_{11} & \dfrac{e_{12}+e_{21}}{2} \\ \dfrac{e_{21}+e_{12}}{2} & e_{22} \end{pmatrix} = 0\,. \qquad (200)$$

Предполагая отсутствие вращения, кососимметричную часть тензора деформации (197), отражающую вращение блока как абсолютно твердого тела, принимаем нулевой:

$$T_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{e_{12}-e_{21}}{2} \\ \dfrac{e_{21}-e_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0. \qquad (201)$$

Если нулевыми являются оба тензора T_{ε} и T_{ω} , то имеем случай поступательного движения без вращения и деформации.

Методы оценивания параметров математической модели геодинамической системы и оценивания их точности и достоверности решают задачу параметрической идентификации, когда структура модели задана по априорной информации. Если же априорная информация отсутствует или требует объективной проверки формальными математическими методами, то возникает задача идентификации в широком смысле (структурная идентификация). В нашем случае структурная идентификация выполняет разбиение всей ГДС на подсистемы (блоки) и определение принадлежности пунктов системы наблюдений (в частности, геодезических) тому или иному блоку ГДС.

При решении задачи структурной и параметрической идентификации ГДС возникает необходимость в генерировании широкого класса моделей-претендентов, которые бы отражали структурированность (блочность, иерархичность, фрактальность).

8.4.2 Метод структурной идентификации ГДС на основе кластерного анализа

Структурная идентификация движений и деформаций блоков ГДС может быть осуществлена методами распознавания образов, в частности, методами кластер-анализа или на основе комбинации методов кластерного анализа, комитетов и фильтра Калмана-Бьюси. Главное предназначение кластер-анализа заключается в поиске существующих кластеров (групп, блоков), даже если число кластеров (блоков) не определено заранее. В этом коренное отличие кластер-анализа от методов распознавания образов с учителем, в частности, от дискриминантного анализа, который приписывает объекты к уже существующим группам, а не создает новые группы. Одним из самых используемых алгоритмов кластер-анализа является иерархическая агломеративная (объединяющая) кластер-процедура. С ее помощью можно выполнить тонкий структурный анализ совокупности кластеризуемых объектов и при помощи некоторых критериев определять наиболее оптимальные варианты разбиений на однородные кластеры.

Иерархическая агломеративная кластер-процедура представляет собой пошаговый алгоритм, при котором на каждом шаге происходит объединение множества объектов, подлежащих классификации, в непересекающиеся кластеры, при этом каждое последующее объединение относится к кластерам, полученным на предыдущем шаге.

Перемещающиеся со временем блоки земной поверхности традиционно описываются векторами скоростей смещения. Более общий случай предполагает расширение вектора параметров модели включе-

нием векторов ускорений. К числу признаков, описывающих геодинамическую систему, относятся также компоненты тензоров деформаций (196, 197) и/или вычисленные по ним инвариантные характеристики.

Остановившись первоначально на модели равномерного перемещения (линейная ГДС), рассмотрим алгоритм структурной идентификации, основанный на иерархическом агломеративном кластерном методе.

Пусть на территории исследуемой ГДС имеется сеть, состоящая из N геодезических пунктов P_i, $i = 1, 2, ..., N$. Каждому i-пункту соответствует вектор горизонтальных смещений $\vec{U}_i = \left(u_{x_i} \quad u_{y_i}\right)^T$. Оценки скоростей могут быть определены из математической обработки повторных геодезических наблюдений с учетом модели произвольного смещения пунктов.

Введём некоторую метрику $\rho(P_i, P_j)$, определяющую меру несходства между величиной и направлением движения пары пунктов P_i и P_j. В качестве признаков кластеризуемых объектов выберем компоненты вектора смещений u_x и u_y. Исходя из физической природы объекта и учитывая однородность признаков u_x и u_y, примем в качестве метрики Евклидово расстояние:

$$\rho(P_i, P_j) = \sqrt{(u_{x_j} - u_{x_i})^2 + (u_{y_j} - u_{y_i})^2}\,. \qquad (202)$$

Геометрически (202) можно интерпретировать как расстояние между концами векторов смещений точек P_i и P_j (Рис. 94).

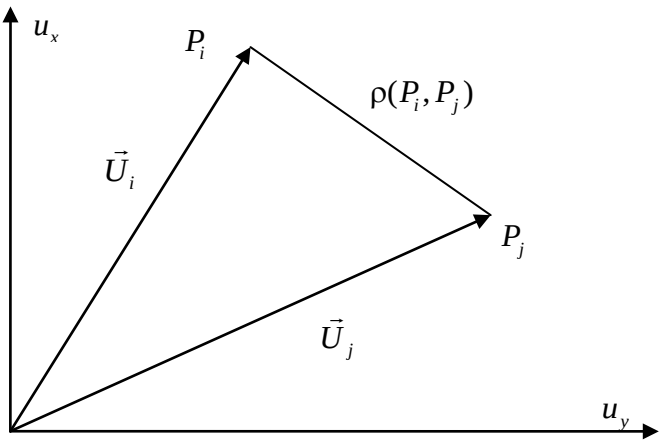


Рис. 94. Евклидово расстояние между пунктами P_i и P_j в пространстве признаков u_x и u_y

При конструировании различных кластер-процедур возникает также понятие расстояния не между отдельными объектами, а между целыми группами объектов. Наиболее часто используется пять функций межкластерных расстояний:

1) расстояние между группой S_i с числом объектов N_i и группой S_j с числом объектов N_j равно расстоянию между ближайшими объектами из этих групп (стратегия "ближайшего соседа"):

$$\rho_1(S_i, S_j) = \min_{P_k \in S_i, P_m \in S_j} \{\rho(P_k, P_m)\}, \quad (203)$$

где P_k, P_m – k-й и m-й объекты ($k = 1, 2, ..., N_i; m = 1, 2, ..., N_j$),

$\in$ – знак принадлежности;

2) расстояние между группой S_i и группой S_j равно расстоянию между их математическими ожиданиями ("центроидная" стратегия):

$$\rho_2(S_i, S_j) = \rho\left\{\overline{P}(i), \overline{P}(j)\right\}, \quad (204)$$

где $\overline{P}(i), \overline{P}(j)$ – векторы математического ожидания для группы S_i и группы S_j соответственно;

3) расстояние между группами равно расстоянию между их самыми дальними объектами (стратегия "дальнего соседа"):

$$\rho_3(S_i, S_j) = \max_{P_k \in S_i, P_m \in S_j} \{\rho(P_k, P_m)\}; \quad (205)$$

4) расстояние между группами равно среднему арифметическому всевозможных попарных расстояний между объектами рассматриваемых групп (стратегия "группового среднего"):

$$\rho_4(S_i, S_j) = \frac{1}{N_i N_j} \sum_{P_k \in S_i} \sum_{P_m \in S_j} \rho(P_k, P_m); \quad (206)$$

5) межгрупповое расстояние определяется как увеличение внутригрупповой суммы квадратов (суммы квадратов расстояний от соответствующих центров) при объединении (метод Уорда).

Существует формула, которая позволяет представить стратегию группировки в общем виде для любого иерархического агломеративного метода:

$$\rho\{S(m,q), S_i\} = \alpha\rho(S_i, S_m) + \beta\rho(S_i, S_q) - \gamma\rho(S_m, S_q) + \delta\left|\rho(S_i, S_m) - \rho(S_i, S_q)\right|, \quad (207)$$

где параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяют тип стратегии объединения,

$\rho\{S(m,q),S_i\}$ – расстояние от вновь образованного кластера $S(m,q)$ до кластера S_i.

Значения параметров $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ для различных стратегий объединения представим в виде таблицы 47:

Таблица 47

Значения параметров $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ для различных стратегий объединения

Стратегия объединения	α	β	γ	δ
Ближнего соседа	0.5	0.5	0	-0.5
Центроидная	$\frac{N_i}{N_k}$	$\frac{N_j}{N_k}$	$-\alpha\beta$	0
Дальнего соседа	0.5	0.5	0	0.5
Группового среднего	$\frac{N_i}{N_k}$	$\frac{N_j}{N_k}$	0	0
Уорда	$\frac{N_h+N_i}{N_h+N_k}$	$\frac{N_h+N_j}{N_h+N_k}$	$-\frac{N_h}{N_h+N_k}$	0

В таблице 47 N_h – число объектов в необъединяемых кластерах, а $N_k=N_i+N_j$.

Стратегия "ближнего соседа" является сжимающей пространство стратегией, "группового среднего" и "центроидная" – сохраняющими метрику пространства, а "дальнего соседа" и по методу Уорда – растягивающими пространство. Эти различия вызывают, как следствие, неодинаковые варианты разбиения на кластеры. Заметим, что это не является минусом кластерного метода, так как использование нескольких конкурирующих гипотез является обязательным условием при идентификации (моделировании) систем.

Общий алгоритм иерархической агломеративной кластер-процедуры в задаче выделения блоков ГДС будет иметь следующий вид:

1) Все объекты считаются отдельными кластерами;
2) Два самых близких кластера (в смысле принятой метрики) объединяются в один;
3) Пересчитываются межклассовые расстояния (формула 207);
4) Переход к п.2.

Для горизонтальных перемещений N геодезических пунктов с векторами смещений $\vec{U}_i = \begin{pmatrix} u_{x_i} & u_{y_i} \end{pmatrix}^T$, ($i = 1,2,...,N$) вышеописанная иерархическая кластер-процедура будет выглядеть следующим образом:

1) Каждый геодезический пункт P_i будем считать принадлежащим одному отдельному кластеру (блоку) S_i. Число таких кластеров будет равно числу пунктов N.

2) По формуле (207) вычисляем всевозможные межкластерные расстояния $\rho(S_i, S_j)$. Представим вычисленные $\rho(S_i, S_j)$ в виде квадратной матрицы R:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \rho(S_1, S_2) & ... & \rho(S_1, S_N) \\ \rho(S_2, S_1) & 0 & ... & \rho(S_2, S_N) \\ ... & ... & ... & ... \\ \rho(S_N, S_1) & \rho(S_N, S_2) & ... & 0 \end{pmatrix}. \qquad (208)$$

Матрица (208) является симметричной, поэтому достаточно работать только с верхним или нижним треугольником без главной диагонали, содержащей всегда только нули. Это следует из следующих свойств метрики:

1. $\rho(S_i, S_i) = 0$,

2. $\rho(S_i, S_j) = \rho(S_j, S_i)$.

Найдем минимальное межкластерное расстояние. Пусть это будет $\rho(S_k, S_m)$. Следовательно, в пространстве признаков u_x и u_y кластеры S_k и S_m (в нашем случае это блоки земной поверхности с геодезическими пунктами P_k и P_m) наиболее близки из всевозможных пар кластеров в смысле принятой метрики (202). Эти два самых близких кластера объединяются в один.

3. Размерность матрицы уменьшается на единицу (удаляются m-я строка и m-й столбец, а элементы k-й строки и k-го столбца пересчитываются по формуле (207) с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, соответствующими какой либо стратегии объединения (таблица 6).

4. Переход к пункту 2.

8.4.3 Критерии, определяющие структурную модель разбиения на блоки

Очевидно, что за *N*-1 шагов описанная в предыдущем разделе процедура объединит все пункты сети в один блок-кластер. Следовательно, должен быть некоторый критерий или ансамбль критериев, определяющий разбиение, наиболее адекватное исходным данным, применяемым стратегии объединения и метрике.

Существует несколько различных критериев, тем или иным образом решающих задачу определения оптимального разбиения в общем случае или для некоторых конкретных приложений кластер-анализа. Учитывая специфику проблемы идентификации геодинамических объектов, рассмотрим два критерия, которые должны использоваться совместно :

1) Критерий "топографической близости" (был предложен автором).

Необходимость этого критерия покажем на следующем примере. Пусть имеется 9 геодезических пунктов с известными векторами горизонтальных смещений (рис. 95).

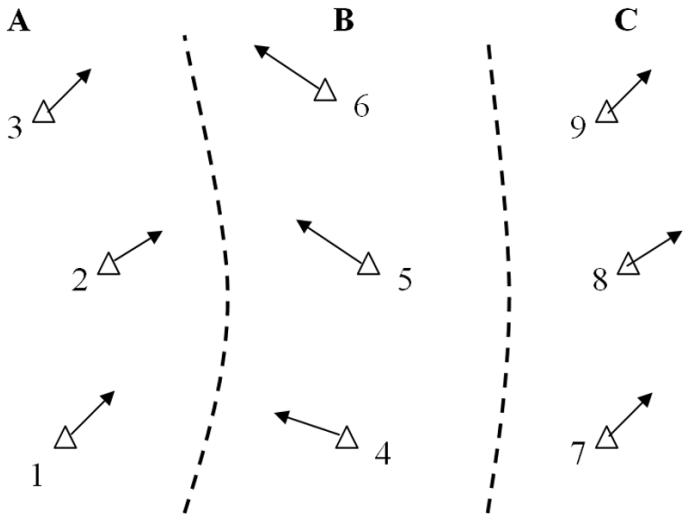


Рис. 95. Горизонтальные движения геодезических пунктов, принадлежащих трем блокам A, B и C

Если использовать описаную выше кластер-процедуру, то мы получим в итоге два кластера-блока. Один будет включать в себя пункты 1,2,3,7,8,9, а другой – пункты 4,5 и 6. Наличие разбиения на три блока A(1,2,3), B(4,5,6) и C(7,8,9) не будет выявлено. Это произойдет по при-

чине того, что признаковое пространство построено только на основе компонентов вектора горизонтальных движений.

Поэтому при выполнении пункта 2 кластер-процедуры необходимо учесть плановую ("топографическую") близость объединяемых кластеров. Это предлагается автором осуществлять следующим образом.

Дополнительно к матрице R формируется матрица R_t межкластерных расстояний в пространстве топографических координат x, y геодезических пунктов:

$$R_t = \begin{pmatrix} 0 & \rho_t(S_1,S_2) & \dots & \rho_t(S_1,S_N) \\ \rho_t(S_2,S_1) & 0 & \dots & \rho_t(S_2,S_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_t(S_N,S_1) & \rho_t(S_N,S_2) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (209)$$

Каждый элемент матрицы R_t находится как простое Евклидово расстояние: $\rho_t(S_i,S_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, где x_i, y_i, x_j, y_j – топографические координаты пунктов P_i и P_j соответственно.

Далее при выполнении агломеративной последовательной кластер-процедуры на каждом этапе объединения наряду с пересчётом элементов матрицы межкластерных расстояний R пересчитываются элементы матрицы R_t по формуле простого Евклидого расстояния с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ для стратегии "ближнего соседа" (см. таблицу 47). Если для найденного очередного минимального межкластерного расстояния $\rho(S_k,S_m)$ соответствующее "топографическое" расстояние $\rho_t(S_k,S_m)$ больше некоторой наперед заданной величины $\rho_{t\min}$, то эти два кластера объединить нельзя (по причине удалённости в топографическом признаковом пространстве).

Выбор пороговой величин $\rho_{t\min}$ необходимо делать с учётом плотности размещения пунктов на данном участке местности, например, как удвоенное среднее расстояние между соседними пунктами. При этом нужно помнить, что в общем случае для разных $\rho_{t\min}$ могут получаться различные структуры моделей.

При использовании этого критерия блоки A и C (рис. 95) уже не будут отнесены к одному блоку, несмотря на близость векторов смещений.

2) Критерий, основанный на анализе функции минимальных межкластерных расстояний.

Введем дискретную функцию $f_{\min}(g)$ – минимальное межкластерное расстояние, соответствующее шагу объединения:

$$f_{\min}(g) = \rho_g(S_k, S_m), \tag{210}$$

где g – номер шага объединения.

Эта функция будет монотонно возрастать (рис. 96), поскольку каждый раз происходит объединение ближайших кластеров, расстояние между которыми на данном шаге наименьшее. Если на (q+1)-м шаге объединения межкластерное расстояние резко возрастает, значит, были объединены кластеры, далеко лежащие друг от друга. Следовательно, можно сделать вывод, что на шаге q имелась наиболее правдоподобная классификация.

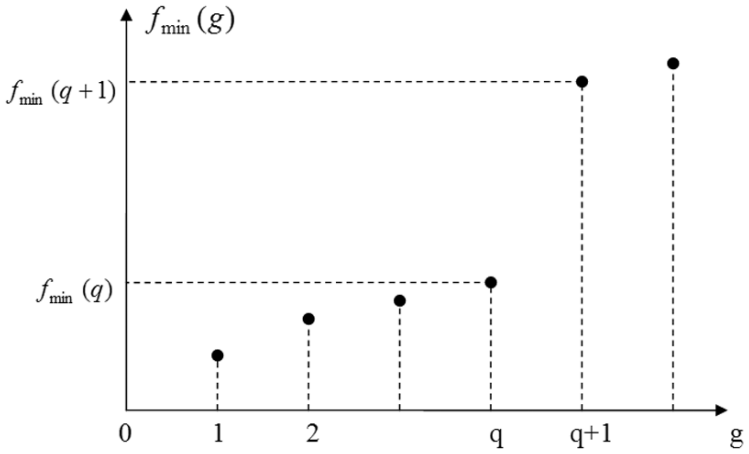


Рис. 96. Функция $f_{\min}(g)$ – минимальное межкластерное расстояние, соответствующее шагу объединения

Аналогичный результат можно получить, если использовать функцию приращения межкластерных расстояний, которая является разностным аналогом первой производной функции минимальных межкластерных расстояний $f_{\min}(g)$. Её глобальный максимум соответствует шагу, на котором произошло насильственное объединение естественных групп (блоков), а значит, наиболее вероятная классификация имеет место на предыдущем шаге.

В дополнение к приведенным выше критериям может применяться также критерий, учитывающий статистический характер геодезических данных, используемых в качестве признаков объектов кластеризации.

Так как геодезические измерения отягощены ошибками, попарные расстояния в (209) будут также иметь некоторую ошибку m_ρ. Приближенно ее можно вычислить как среднюю квадратическую ошибку функции от определенных с ошибками аргументов. Если величина межкластерного расстояния больше некоторого порогового значения, например, если

$$\rho(S_i, S_j) > 3m_\rho, \tag{211}$$

то можно предполагать с вероятностью 0.997, что различие между кластерами есть следствие не только шумов наблюдений, но и различного характера движений и деформаций на разных участках исследуемого района. Полученная на шаге, соответствующем условию (211), структура пространственно-временной модели ГДС может быть включена в список моделей-претендентов.

Для различных наборов признаков, стратегий объединения могут находиться разные структуры пространственно-временной модели ГДС. Последующая за этим параметрическая идентификация позволит выбрать из этих моделей-претендентов адекватную результатам измерений модель ГДС

Если в рамках ограничения (211) структура не выявляется, то это не является неудачной кластеризацией, а говорит о предполагаемой гомогенности, однородности кластеризуемых объектов, об отсутствии явного разделения на блоки с различной динамикой. Это так же пространственно-временная модель движений и деформаций, претендующая на роль адекватной модели результатам измерений.

Таким образом, определение адекватной структурной модели разбиения на блоки для геодинамических объектов должно опираться на соответствующие критерии и свойства пород поверхностного слоя земной коры. В качестве таковых автором предлагается использовать "критерий топографической близости" и критерий, основанный на анализе функции минимального межкластерного расстояния.

8.4.4 Структурные модели ГДС и соответствующие им наборы признаков

Узловым моментом структурной идентификации методами кластерного анализа является выбор конкретного вида метрики (меры близости), от которого решающим образом зависит окончательное разбиение на классы. Исходя из физической и статистической природы объектов и из содержания решаемой задачи, наиболее подходит в качестве метрики для пары объектов геодинамической природы простое

(202) или взвешенное евклидово расстояние. Взвешенное евклидово расстояние отличается от простого возможностью учесть веса признаков (212).

$$\rho(P_i, P_j) = \sqrt{p_x(u_{x_j} - u_{x_i})^2 + p_y(u_{y_j} - u_{y_i})^2}\,, \qquad (212)$$

где p_x, p_y – веса признаков u_x и u_y.

Набор признаков и их вид может быть различным в зависимости от того, какие свойства исследуемой области предполагается изучать, т.е. от конкретного вида математической модели. Далее опишем наборы признаков для некоторых возможных при идентификации ГДС типов структурных математических моделей.

В случае поступательного движения жестких блоков логично выбрать в качестве объектов кластеризации пункты геодезической сети P_i и P_j, а в качестве признаков – компоненты вектора смещения u_x, u_y, u_z или вектора скорости поступательного движения v_x, v_y, v_z. Значения смещений и скоростей могут быть определены из математической обработки многомерных пространственно-временных рядов геодезических наблюдений с учётом модели произвольного смещения пунктов, которая принимается как предварительная, начальная модель геодинамического объекта.

Модель произвольного смещения пункта P_i может быть записана следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_i(t=2) &= x_i(t=1) + u_{x_i};\\ y_i(t=2) &= y_i(t=1) + u_{y_i};\\ z_i(t=2) &= z_i(t=1) + u_{z_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

Мера близости (метрика по типу взвешенного Евклидова расстояния) для модели вида (213) будет:

$$\rho(P_i, P_j) = \sqrt{p_x(u_{x_j} - u_{x_i})^2 + p_y(u_{y_j} - u_{y_i})^2 + p_z(u_{z_j} - u_{z_i})^2}\,, \qquad (214)$$

где p_x, p_y, p_z – веса признаков u_x, u_y и u_z.

Модель произвольного смещения может быть также записана через компоненты вектора скоростей v_x, v_y, v_z:

$$\left.\begin{aligned} x_i(t=2) &= x_i(t=1) + v_x \Delta t; \\ y_i(t=2) &= y_i(t=1) + v_y \Delta t; \\ z_i(t=2) &= z_i(t=1) + v_z \Delta t, \end{aligned}\right\} \qquad (215)$$

где $\Delta t = (t=2) - (t=1)$.

В этом случае мера близости для пунктов геодезической сети P_i и P_j будет вычисляться следующим образом:

$$\rho(P_i, P_j) = \sqrt{p_x (v_{x_j} - v_{x_i})^2 + p_y (v_{y_j} - v_{y_i})^2 + p_z (v_{z_j} - v_{z_i})^2}\,, \qquad (216)$$

или в более компактной записи:

$$\rho(P_i, P_j) = \sqrt{\sum_{k=x,y,z} p_k (v_{k_j} - v_{k_i})^2}\,, \qquad (217)$$

где p_k – вес k-го признака.

Если ведётся поиск модели ГДС, предполагая отсутствие какой-либо деформации, то симметричная часть тензора деформации, отражающая чистую деформацию, принимается нулевой:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{11} & \dfrac{e_{12}+e_{21}}{2} & \dfrac{e_{13}+e_{31}}{2} \\ \dfrac{e_{21}+e_{12}}{2} & e_{22} & \dfrac{e_{23}+e_{32}}{2} \\ \dfrac{e_{31}+e_{13}}{2} & \dfrac{e_{32}+e_{23}}{2} & e_{33} \end{pmatrix} = 0\,. \qquad (218)$$

Здесь и далее $e_{11}, e_{12}, ..., e_{33}$ – коэффициенты линейно-однородной модели деформаций, являющиеся компонентами тензора деформации (случай трехмерного пространства).

В этом случае модель ГДС принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_k(t=2) \\ y_k(t=2) \\ z_k(t=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k(t=1) \\ y_k(t=1) \\ z_k(t=1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{10} \\ e_{20} \\ e_{30} \end{pmatrix} + T_\omega \begin{pmatrix} x_k(t=1) \\ y_k(t=1) \\ z_k(t=1) \end{pmatrix}, \qquad (219)$$

В (219) e_{10}, e_{20}, e_{30} – составляющие параллельного переноса вдоль осей x, y, z; T_ω – тензор вращения:

$$T_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e_{12} - e_{21}}{2} & \frac{e_{13} - e_{31}}{2} \\ \frac{e_{21} - e_{12}}{2} & 0 & \frac{e_{23} - e_{32}}{2} \\ \frac{e_{31} - e_{13}}{2} & \frac{e_{32} - e_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (220)$$

Формула (219) описывает разложение перемещения на поступательное и вращательное. Известно, что данное разложение неоднозначно и может быть проведено бесконечным числом способов, но угол поворота во всех случаях будет один и тот же.

Поэтому при определении параметров модели априорно выбирается некоторая закреплённая в пространстве ось вращения. Обычно в качестве точки, через которую она проходит, принимают центр тяжести геометрической фигуры (симплекса в *k*-мерном пространстве). Следовательно, определение меры близости, которая учитывала бы и поступательное и вращательное движения, в принципе невозможно. Нельзя причислить к одному блоку точки, которые совершают круговые движения вокруг различных осей, пусть даже и с одной угловой скоростью.

Могут представлять интерес только два частных случая, когда либо определено поступательное движение, либо закреплена ось вращения в пространстве, а это может быть сделано только априорно.

Кинематическую модель, отражающую движение жёстких блоков, аналогичную по сути (188), можно представить в векторном виде:

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t_0) + \vec{V}\tau + \omega\tau\left\{\vec{\xi} \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\omega})\right\}, \qquad (221)$$

где $\vec{r}_i(t), \vec{r}_i(t_0)$ – радиусы-векторы *i*-точки в принятой пространственной системе координат в начальный t_0 и текущий t моменты времени;

$\tau = t - t_0$ – промежуток времени;

$\vec{V}$ – вектор скорости поступательного движения блока; ω – угловая скорость вращения блока;

$\vec{\xi}$ - единичный вектор, определяющий ориентацию оси вращения;

$\vec{r}_{\omega}$ – радиус-вектор любой точки, расположенной на оси вращения.

Найдем меры близости для двух частных случаев априорного задания части параметров математической модели (221).

1-й случай: априорно известна некоторая точка, принадлежащая оси вращения.

Пусть априорно известны координаты точки Ω на оси вращения, т.е. задан вектор $\vec{r}_\omega$.

В этом случае компоненты вектора скорости $\vec{V}$, ω и $\vec{\xi}$ можно найти по величинам смещения двух соседних пунктов сети. Для нахождения ω и $\vec{\xi}$ воспользуемся понятием ротора векторного поля.

Из (221) имеем вариант формулы векторного поля $\vec{\Delta}r(x,y,z,t)$ при $\tau = const$, описывающий вектор перемещения как функцию от координат:

$$\vec{\Delta}r(x,y,z,t) = \vec{V}\tau + \omega\tau\left\{\vec{\xi}\times(\vec{r}_i(x,y,z) - \vec{r}_\omega)\right\}. \qquad (222)$$

Определим ротор данного векторного поля:

$$\overrightarrow{rot\vec{\Delta}r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ \Delta r_x & \Delta r_y & \Delta r_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\delta(\Delta r_z)}{\delta y} - \frac{\delta(\Delta r_y)}{\delta z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\delta(\Delta r_z)}{\delta z} - \frac{\delta(\Delta r_z)}{\delta x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\delta(\Delta r_y)}{\delta x} - \frac{\delta(\Delta r_x)}{\delta y}\right)\vec{k}. \qquad (223)$$

Вид функций $\Delta r_x, \Delta r_y, \Delta r_z$ получим после преобразования (223) в систему из трёх уравнений. После выполнения операции векторного умножения имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_x &= V_x\tau + \omega\tau\left[(z - z_\omega)\xi_y - (y - y_\omega)\xi_z\right]; \\ \Delta r_y &= V_y\tau + \omega\tau\left[(x - x_\omega)\xi_z - (z - z_\omega)\xi_x\right]; \\ \Delta r_z &= V_z\tau + \omega\tau\left[(y - y_\omega)\xi_x - (x - x_\omega)\xi_y\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (224)$$

В (224) $V_x, V_y, V_z, x_\omega, y_\omega, z_\omega, \xi_x, \xi_y, \xi_z$ компоненты векторов $\vec{V}$, $\vec{r}_\omega$ и $\vec{\xi}$ соответственно. Компоненты вектора скорости $\vec{V}$ поступательного движения постоянны для любой точки пространства. Тогда, согласно (223) с учетом (224), получим выражение для ротора векторного поля:

$$\overrightarrow{rot\vec{\Delta}r} = 2\omega\tau k_x\vec{i} + 2\omega\tau k_y\vec{j} + 2\omega\tau k_z\vec{k} = 2\omega\tau\vec{\xi}. \qquad (225)$$

Поле смещений (213) определено дискретно – в пунктах геодезической сети. Поэтому, по известным координатам пунктов в два различных момента времени t_0 и $t = t_0 + \tau$ можно определить приближенный, разностный аналог ротора векторного поля для каждой пары соседних пунктов P_i и P_j.

Если понимать частные производные в (223), как отношение разности приращений координат двух точек к разности их координат, то разностный аналог ротора запишется:

$$rot\vec{\Delta r}(P_i, P_j) = \left(\frac{\Delta z_j - \Delta z_i}{y_j - y_i} - \frac{\Delta y_j - \Delta y_i}{z_j - z_i} \right) \vec{i} + \\ + \left(\frac{\Delta x_j - \Delta x_i}{z_j - z_i} - \frac{\Delta z_j - \Delta z_i}{x_j - x_i} \right) \vec{j} + \left(\frac{\Delta y_j - \Delta y_i}{x_j - x_i} - \frac{\Delta x_j - \Delta x_i}{y_j - y_i} \right) \vec{k} \quad . \qquad (226)$$

Из (226) с учётом (225) легко получить разностный аналог ω и $\vec{\xi}$. Длина вектора $\overrightarrow{rot\Delta r}$ равна 2ω, а его отношение к своей длине – вектор $\vec{\xi}$ единичной длины.

При известных величинах ω, τ, $\vec{r}_\omega$ и $\vec{\xi}$ компоненты V_x, V_y, V_z находятся из решения системы (224).

Составляющие векторов $\vec{V}$ и $\omega\vec{\xi}$ на практике могут ощутимо отличаться по абсолютной величине: порядка $(10^{-2} - 10^{0})$ для $\vec{V}$ и $(10^{-6} - 10^{-4})$ для $\omega\vec{\xi}$. Поэтому для использования в качестве признаков кластеризуемых объектов их нужно либо пронормировать, либо учесть это обстоятельство при подборе весов признаков. Иначе существует опасность того, что один из признаков "перетянет" при кластерном анализе. Подбор весов нужно решать экспертным путем в зависимости от цели исследования.

В трёхмерном случае каждый объект кластеризации (пара соседних точек) характеризуется шестью признаками – составляющими векторов $\vec{V}$ и $\omega\vec{\xi}$. Поэтому может быть полезным при структурной идентификации кластерным методом сократить их число без существенного увеличения ошибки распознавания. Это можно выполнить, например, методом главных компонент (разложение Карунена-Лоэва).

Для двухмерного случая (горизонтальные движения) число признаков будет равно трём: V_x, V_y и ω, т.к. $\omega\vec{\xi} = (0, 0, \omega)^T$, и мера близости будет следующая:

$$\rho_{\Gamma}(P_i, P_j) = \sqrt{p_x(V_{x_j} - V_{x_i})^2 + p_y(V_{y_j} - V_{y_i})^2 + p_{\omega}(\omega_j - \omega_i)^2}\,. \qquad (227)$$

Заметим, что в (227), когда хотя бы одна пара соответствующих координат пунктов P_i и P_j равна между собой, возможно нахождение только одной компоненты ротора векторного поля (из-за невозможности деления на ноль).

Для вертикальных движений признаками будут V_z, $\omega\xi_x$, $\omega\xi_y$, а мера близости:

$$\rho_B(P_i, P_j) = \sqrt{p_z(V_{z_j} - V_{z_i})^2 + p_{\omega}[(\omega\xi_{x_j} - \omega\xi_{x_i})^2 + (\omega\xi_{y_j} - \omega\xi_{y_i})^2]}\,. \quad (228)$$

2-й случай: Априорно известен вектор скорости поступательного движения $\vec{V}$

Определим меру близости для случая вращения жесткого тела в горизонтальной плоскости. В этом случае $\vec{\omega\xi} = (0, 0, \omega)^T$.

Пусть априорно известен вектор $\vec{V}$. Формулу (221) перепишем в следующем виде:

$$\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t_0) - \vec{V}\tau = \vec{\omega\xi} \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\omega})\tau\,. \qquad (229)$$

Будем искать $\vec{r}_{\Omega}(t)$ для точки Ω оси вращения, причем Ω принадлежит горизонтальной плоскости, содержащей $\vec{r}_i(t)$. Тогда вектора $\vec{\omega\xi}$, $\Delta\vec{r}_{\omega} = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t_0) - \vec{V}\tau$ и $\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\omega}$ будут взаимноперпендикулярны (рис. 97).

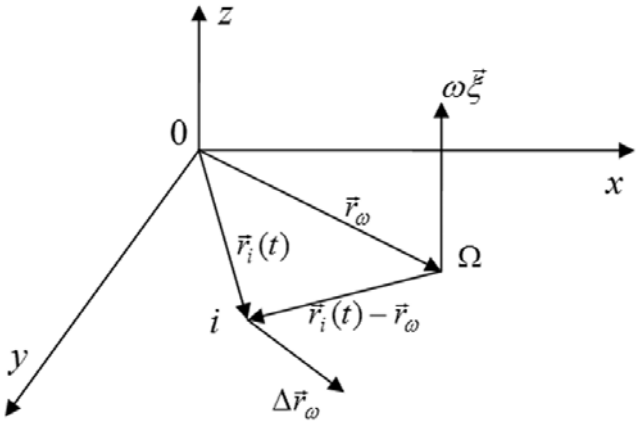


Рис. 97. Вращение жесткого тела в горизонтальной плоскости

Это позволяет из (221) получить выражение для $\vec{r}_{\omega}$:

$$\vec{r}_i(t) - \vec{r}_\omega = (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t_0) - \vec{V}) \times \omega\vec{\xi}\tau,$$

$$\vec{r}_\omega = \vec{r}_i(t) - (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t_0) - \vec{V}) \times \omega\vec{\xi}\tau. \qquad (230)$$

Вектор $\omega\vec{\xi}$ находится в соответствии с (224):

$$\omega\vec{\xi} = \left(0, \quad 0, \quad \frac{\Delta y_j - \Delta y_i}{x_j - x_i} - \frac{\Delta x_j - \Delta x_i}{y_j - y_i} \right)^T. \qquad (231)$$

Таким образом, для каждой пары соседних точек с известными векторами смещений в горизонтальной плоскости может быть найден набор из трёх признаков x_ω, y_ω и ω.

Соответствующая мера близости будет:

$$\rho_\omega(P_i, P_j) = \sqrt{p_{z,y}[(x_{\omega_j} - x_{\omega_i})^2 + (y_{\omega_j} - y_{\omega_i})^2] + p_\omega(\omega_j - \omega_i)^2}, \qquad (232)$$

где P_i и P_j – *i*-я и *j*-я пары соседних точек, а не отдельные точки;

$p_{x,y}$ - вес признаков, в качестве которых используются координаты центра вращения,

p_ω – вес признака, которым является угловая скорость вращения.

8.4.5 Набор признаков при кластеризации для модели локально-однородного деформирования

Для модели линейного поля перемещений и деформаций (213) невозможно в общем случае определить признаки для формировании метрики типа (216), которые отражали бы поступательное, вращательное движения и деформацию совместно. Поэтому необходимо либо пользоваться некоторой априорной информацией, либо выполнять распознавание по признакам объекта, инвариантным относительно системы координат. Для моделей ГДС вида (213) такими признаками являются основные инварианты тензора второго ранга, либо их линейные комбинации. Эти величины для пространственной модели приводим в таблице 48.

Для всех трёх случаев движений, приведённых в таблице 48, имеем три признака, которые после проведения нормирующего преобразования или назначения весов, используются при вычислении метрики – взвешенного Евклидова расстояния. Тем самым определяется мера близости для организации кластерной (таксономической) процедуры. Однако нужно помнить, что полученные таким образом кластеры (блоки) будут однородны только в смысле деформации (чистой и сдвиговой). Учесть вращение и поступательное движение невозможно изна-

чально, и поэтому любые попытки решить эту задачу без априорного задания некоторых параметров не могут иметь успеха.

Таблица 48

Основные инварианты тензора второго ранга, либо их линейные коминации

Данные о современных движениях	Линейный симметричного тензора	Квадратный симметричного тензора	Квадратичный (девиатора)
Вертикальные (по профилю)	e_{33}	$-\frac{1}{4}e_{31}$	$-\frac{1}{4}(e_{31}+e_{33})$
Вертикальные (по площади)	e_{33}	$2e_{33}-\frac{1}{4}(e_{31}^2+e_{33}^2)$	$-\frac{1}{4}(e_{31}^2+e_{32}^2+e_{33}^2)$
Горизонтальные	$e_{11}+e_{22}$	$e_{11}e_{22}-\frac{1}{4}(e_{12}+e_{21})^2$	$-\frac{1}{4}[(e_{11}-e_{22})^2+$ $+(e_{12}+e_{21})^2]$

8.4.6 Набор признаков при кластеризации для нелинейных моделей вертикальных движений геодинамических объектов

При наличии большого числа наблюдений за вертикальными движения геодинамических объектов, выполненных в разное время (более двух эпох), есть возможность описывать вертикальные смещения каждого репера (марки) с помощью нелинейных (в том числе полиномиальных) моделей. Это могут быть решения дифференциального уравнения первого порядка, описывающие временную модель нормированных смещений, нелинейные расширенные пространственно-временные модели состояния объекта, комбинации степенных полиномов и априорно известных базисных функций, чисто полиномиальные модели.

В этих случаях возможно в качестве признаков, по которым должна проводиться структурная идентификация методами кластерного анализа, использовать коэффициенты при нелинейных функциях. Значения этих коэффициентов могут быть определены после предварительной математической обработки результатов измерений.

Пример. Пусть отметка j-го репера (марки) в момент времени t описывается полиномом вида:

$$H_j = H_j^0 + H_j^{'}(t-t_0) + H_j^{''}(t-t_0)^2, \qquad (233)$$

где H_j^0 – высота репера (марки) в начальный момент времени t_0; $H_j^{'}$, $H_j^{''}$ – скорость и ускорение вертикального движения репера.

Тогда признаками для объединения i-го и j-го реперов (марок) будут являться скорости и ускорения $H^{'}$, $H^{''}$. Мера близости будет вычисляться по формуле:

$$\rho_H(P_i, P_j) = \sqrt{p_{H^{'}}(H^{'}_j - H^{'}_i)^2 + p_{H^{''}}(H^{''}_j - H^{''}_i)^2}\,, \qquad (234)$$

где $p_{H^{'}}$, $p_{H^{''}}$ – веса признаков $H^{'}$, $H^{''}$.

8.4.7 Набор признаков при кластеризации для совместной обработки разнородных явлений-предвестников землетрясений и вулканизма

Для достоверного анализа сейсмичности и вулканизма необходимо объединение усилий геодезистов, геофизиков, сейсмологов, геохимиков и многих других специалистов, которые определяют предвестники землетрясений различными методами и инструментами.

К основным явлениям-предвестникам относятся следующие: деформации и напряжения земной поверхности, наклоны и деформации, форшоки, микросейсмичность, геомагнетизм, земные токи, содержание радона, вариации силы тяжести.

Выполненные с достаточной плотностью и частотой, данные наблюдения описывают дискретно соответствующее поле. Каждое поле содержит некоторую информацию об одном и том же объекте – приповерхностном слое Земли. Методы теории распознавания образов могут учесть в совокупности объективную информацию, заложенную в этих полях.

Кластерный анализ, как один из методов теории распознавания образов, позволяет четко выделять интервалы, для которых характерна однородная (в смысле используемых признаков) динамика. Разумное использование этого метода для оценки степени сейсмичности исследуемого района земной поверхности может реально повысить достоверность прогнозных результатов. Одно из главных достоинств кластерного анализа заключается в том, что возможен совместный учет разнородных экспериментальных данных, отражающих один и тот же геодинамический объект или процесс. Например, в работе определялась кластеризация аномалий в сейсмическом режиме перед землетрясениями. Учитывались такие признаки как местоположение гипоцентров землетрясений, разница во времени их появления и энергия.

При анализе сейсмичности перечень признаков может быть расширен. Результаты каждого вида наблюдений за предвестниками (деформации и напряжения земной поверхности, наклоны и деформации, форшоки, микросейсмичность, геомагнетизм, земные токи, содержание

радона, вариации силы тяжести и др.) могут быть использованы как признаки для многомерной классификации методами кластерного анализа. Но при этом появляется проблема выбора весов признаков при формировании меры близости и проблема учета коррелированности разнородных явлений-предвестников. Единого рецепта здесь нет – как правило, это должно решаться субъективно, но с обязательным учетом накопленной ранее информации о данном конкретном геодинамическом объекте. Веса признаков должны соответствовать значимости данного предвестника, некоторому предполагаемому значению вероятности землетрясения при его прогнозе данным видом наблюдений. Для более полного анализа можно также рекомендовать выполнять структурную обработку для различных комбинаций признаков и для различных моделей весов этих признаков.

8.4.8 Пример структурной идентификации ГДС методом кластерного анализа

Изложенный выше метод структурной идентификации неоднократно проверялся на реальных и модельных данных.

Например, была выполнена обработка реальных данных (нивелирование I класса 1985-91 гг.) о вертикальных движениях на Тункинском и Зейском геодинамических полигонах (ГДП). В качестве признака для каждого репера принималось значение вертикального смещения

$$dH_i = H_i(t=2) - H_i(t=1),$$

где $H_i(t=1), H_i(t=2)$ – отметки i-го репера в эпохи наблюдений $t=1, t=2$.

По результатам этих исследований были сделаны предположения о наличии мобильных блоков на этих ГДП. Например, на Зейском ГДП выделены три блока, разделенные разломами, проходящим по реке Громакан и ее притоку. Среднее значение смещений на юго-западном участке составляет около 1см. Опускание северо-западного участка (-2.5 см) может быть вызвано давлением масс воды на ложе водохранилища. Причем, участок, непосредственно прилегающий к водохранилищу, испытывает опускание порядка -4.5 см.

8.5 Выводы

Аналитическое описание поверхностных горизонтальных и вертикальных движений является сложной проблемой. Но, попытки создания математических моделей необходимы, как важнейшие методы исследования сложных природно-технических и геодинамических сис-

тем. А, именно таковой системой является Земля, ее непознанная структура и происходящие в ее теле физико-химические процессы. Человеку можно исследовать только поверхностные проявления этих процессов. И поэтому очень важное место среди наук о Земле занимает геодезия и гравиметрия.

Для описания горизонтальных движений земной поверхности существует несколько моделей. Они дают приблизительно одни результаты. Здесь они описаны. Для экспертной визуальной оценки картины смещений применяются метод конечных элементов, кригинг-метод и различные способы компьютерной визуализации.

Выполнялась проверка метода структурной идентификации с использованием кластерного анализа для смоделированных горизонтальных движений земной коры. В качестве объектов, для которых проводилась кластеризация, принимались геодезические пункты. В качестве признаков использовались составляющие смещения пунктов вдоль осей координат.

Возможно использование кластерного метода при структурной идентификации блочно-иерархических структур в рамках непараметрического подхода. Являясь элементом технологии идентификации сложных геодинамических систем с природными компонентами, данный подход позволяет генерировать модели-претенденты в рамках различных типов структурных моделей ГДС. При этом возможен совместный учет характеристик различных полей, содержащих информацию о ГДС.

Земля вращается вокруг своей оси.
Цицерон Марк Туллий

9 ОСНОВЫ И ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

9.1 Вращательные (вихревые) движения

В данном разделе рассматриваются теоретические вопросы исследования вращательных (вихревых) горизонтальных движений земной поверхности. Отметим, что причинами этих движений могут быть как глубинные природные процессы, так и техногенное воздействие (разработка месторождений, создание крупных гидроузлов, инженерных сооружений, разнообразное воздействие мегаполисов и др.).

Основы математического моделирования движения пластины на сфере связаны с именем великого математика Леонарда Эйлера [241] (рис. 98).

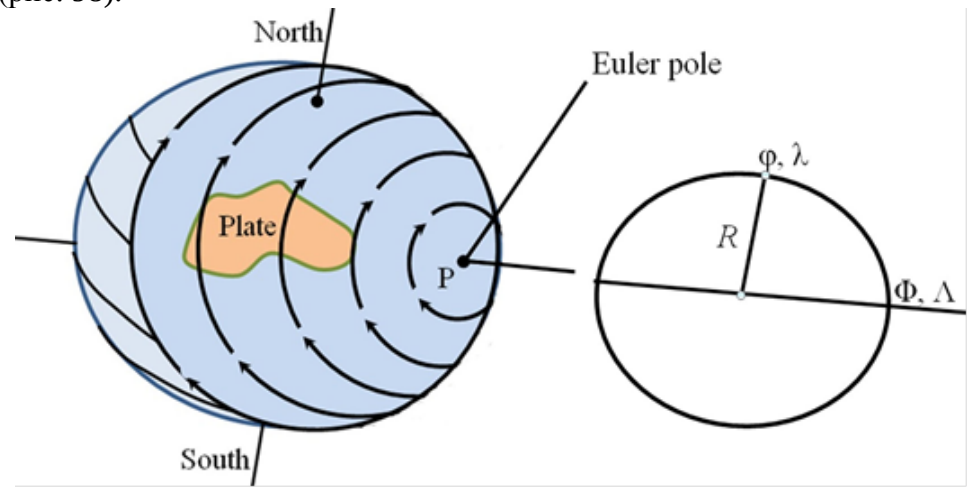


Рис. 98. Движение пластины по сфере

Модель Эйлера используется для связи скоростей горизонтальных смещений пунктов с координатами φ и λ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = R\omega \cos\Phi \sin(\lambda - \Lambda);$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = R\omega\left[R\omega\Phi - \cos(\lambda - \Lambda) tg\phi \cos\Phi\right],$$

где Φ, Λ, ω – координаты Эйлерова полюса вращения плиты и его угловая скорость, R – радиус Земли.

Но, кроме оценивания межплитовых движений, важны оценки скоростей вращения и их направлений для каждой отдельной твердотельной плиты и в местах сочленений двух или трех плит. В контексте предлагаемой темы интересна оценка вращений самых активных участков всей поверхности Земли в работе [264]. На основе векторной карты – модели литосферных плит (Plate Boundary Model PB2002) [222] предложена визуализация вращательных движений литосферных плит и их сочленений (рис. 99).

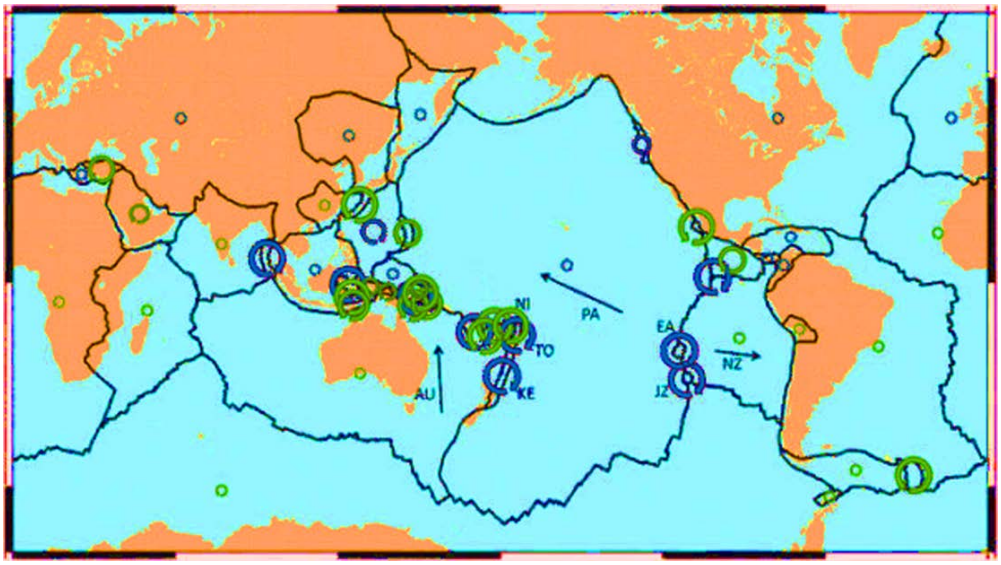


Рис. 99. Вращательные движения глобального масштаба. Bird, P., 2003

Сине-зеленые изогнутые стрелки изображают направления движения по часовой стрелке или против часовой стрелки, соответственно. Размеры этих кольцеобразных стрелок соответствуют величинам скорости вращательного движения.

Проводятся натурные наблюдения геодинамических систем регионального масштаба. В работе [199] сделан обзор современных исследований дальневосточного региона России. Здесь сходятся три большие тектонические плиты (рис. 100) – Евроазиатская, Северо-Американская и Тихоокеанская, а также несколько «микроплит» – Охотоморская, Амурская и плита моря Беринга.

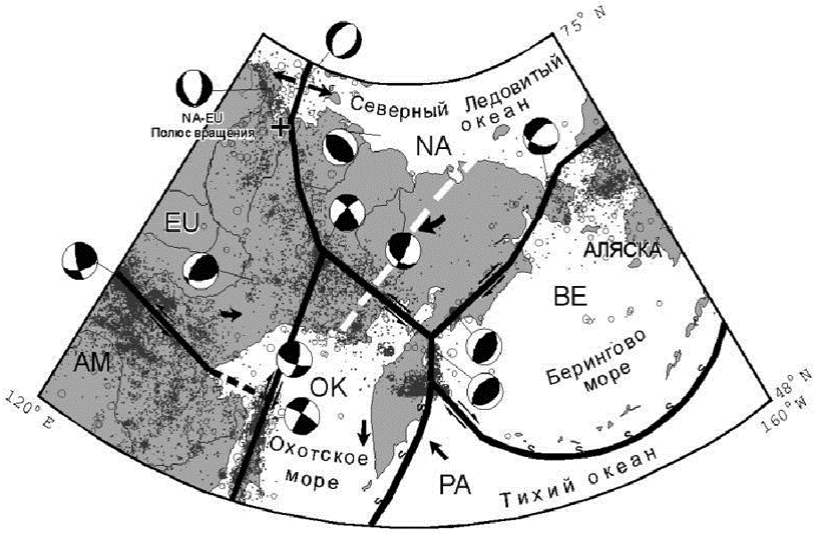


Рис. 100. Положение и границы тектонических плит
на Северо-Востоке Азии

Имеется также анализ имеющихся данных о положении межплитных границ и полюсов взаимного вращения плит (таб. 49).

Таблица 49

Модели движения Евразии, координаты полюса Эйлера

Модель	Широта	Долгота	Угловая скорость в млн. лет
SOPAC-2008	55,851°N ± 0,53°	262,622°E ± 0,16° (–97,378°E)	0,263°± 0,001°
ITRF-2008	54,2°N ± 0,7°	259,3°E ± 0,5° (–100,7°E)	0,251°± 0,002°
ANI-2010	53,1°N ± 1,8°	259,5°E ± 0,5° (–100,5°E)	0,244°± 0,002°

Вихревые движения природного характера наблюдаются уже десятки лет. Приведем несколько примеров, подтверждающие такие региональные кинематические явления в Японии (рис. 101-104).

Рис. 101. Землетрясение Канто, 01.09.1923, повторная геодезическая съемка 1 класса сразу после землетрясения.
По Fujiwhara et al., 1933 (из работы Ли Сы-гуана, 1958) [80].

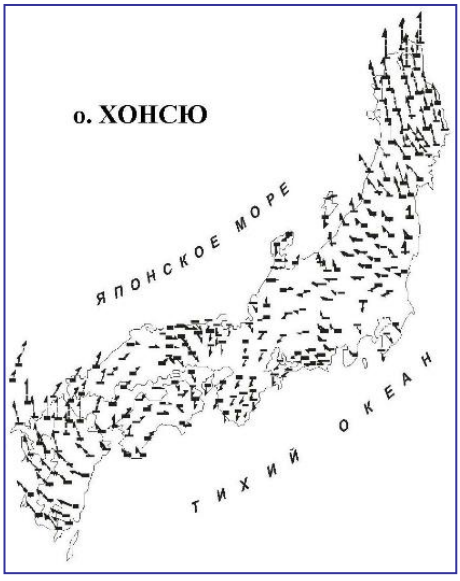


Рис. 102. Инструментальные измерения с интервалом 60 лет, XIX, XX век. Т.Рикитаке, 1970, [171]

Поле векторов перемещений может быть представлено как совокупность вращающихся (вихревых структур). Подобная ситуация, например, существует в Китае (рис. 103).

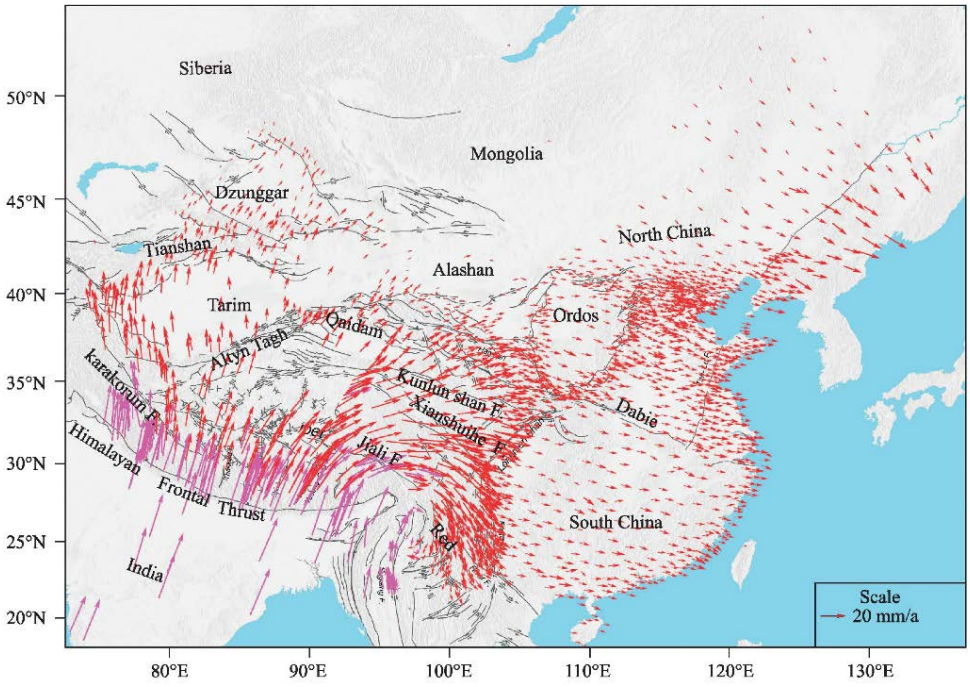


Рис. 103. Современные движения.
Wang Wei, Wang Dijin, Zhao Bin et al., 2014

Имеется много примеров вращательных движений геодинамических систем, определенных геодезическими методами [41, 42, 102, 109, 199]. Для очень близких по математическому содержанию описанию вращательных движений природных геодинамических систем дифференциальными уравнениями являются, например, движения плит и их сочленения (рис. 99), привулканические территории [97-101]. а также рифтовые зоны [107].

Интересный результат показала визуализация поля горизонтальных смещений на Тункинском геодинамическом полигоне (ГДП), расположенном на юго-западном фланге Байкальской рифтовой зоны (рис. 104). Данные о горизонтальных смещениях поверхности получены по результатам светодальномерных и триангуляционных измерений (по программе 1 класса) на 11 пунктах в 1975–1986 гг.

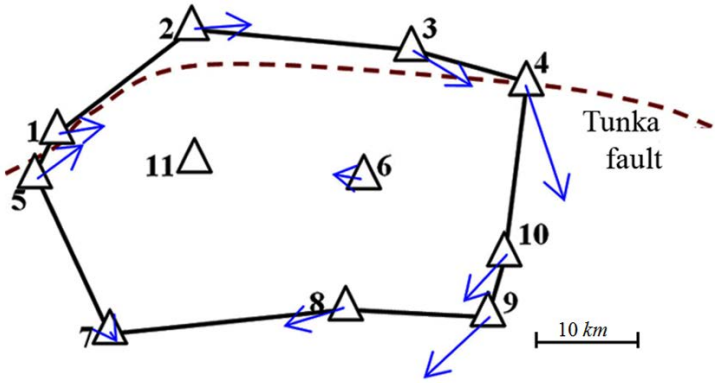


Рис. 104. Пункты триангуляции на Тункинском ГДП и их смещения

Конечно-элементный анализ этих данных позволил визуализировать некоторые характеристики деформационных процессов на Тункинском ГДП: поле горизонтальных движений, деформирование и изменение границы, тензоры деформаций. Горизонтальные движения имеют вращательный характер (рис. 105).

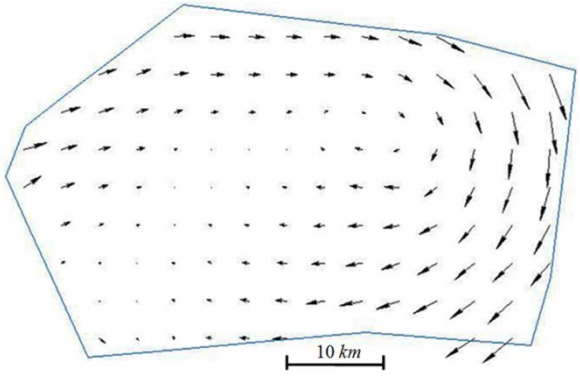


Рис. 105. Вращательные движения на Тункинском ГДП

Представляют интерес ГНСС-определения на Горно-Алтайском ГДП (рис. 106), проводимые коллективом Института геофизики нефтегазовой геологии СО РАН РФ (г. Новосибирск) [198, 247] начиная с 2000 года. На рисунке 107 показаны вращательные движения, которые были определены в течение двух лет, предваряющих сейсмическое событие. Их изображение получено с использованием метода конечных элементов [146].

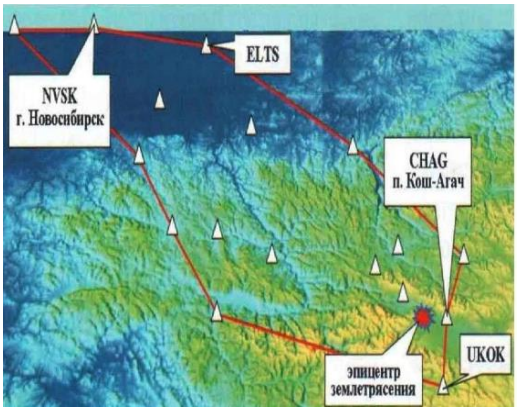


Рис. 106. Землетрясение КошАгач, 23.09.2003

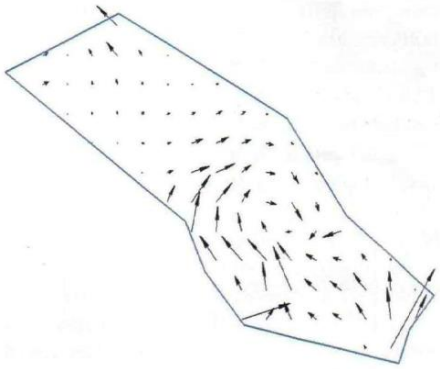


Рис. 107. Вращательные движения, зафиксированные до землетрясения

Очень часто вращательные движения являются следствием эксплуатации крупных месторождений полезных ископаемых [40- 42, 109, 155, 156]. Приведем пример такого движения на Коркинском геодинамическом полигоне (Челябинская область) [25]. Территория вблизи Коркинского угольного разреза (рис. 108) является зоной повышенного риска возникновения техногенной катастрофы. Движения земной поверхности, полученные после математической обработки повторных геодезических измерений, также имеют четко выраженный вращательный характер (рис. 109). Круг в центре полигона соответствует контуру Коркинского разреза (более 500 м глубиной).

Рис. 108. Коркинский разрез

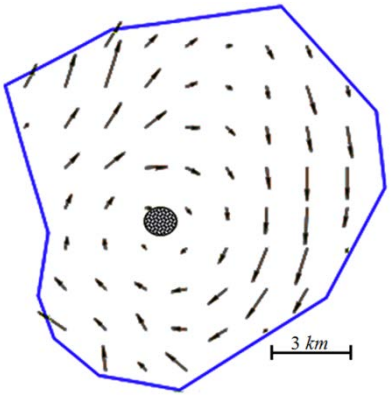


Рис. 109. Вращательные движения

По данным многократных геодезических наблюдений можно также количественно оценить вращательный характер движения блока.

Это включает в себя: для плоскости – определение координат центра вращения, а для сферы – определение координат Эйлеровых полюсов и угловой скорости вращения. Однако, если угловая скорость является инвариантной характеристикой, то определение координат центра только по координатам и смещениям пунктов всегда неоднозначно. Требуется назначение неподвижного (стабильного) пункта. Обычно выбор стабильного пункта делают, исходя из некоторых априорных предположений, основанных, например, на геолого-геофизической информации.

9.2 Выводы

Таким образом, выполненные к настоящему времени и продолжающиеся геодезические работы по изучению геодинамических процессов могут быть решающими для выяснения истинной природы геодинамики Земли, имеющей, возможно, доминирующую вращательную компоненту. Выводы этих исследований касаются не только чисто фундаментальной науки, но и практических ее приложений.

Расширение теоретических основ исследований может быть, в частности, основано на использовании качественного описания геодинамических систем дифференциальными уравнениями.

Облетев Землю в корабле-спутнике, я увидел, как прекрасна наша планета. Люди, будем хранить и приумножать эту красоту, а не разрушать её.

Юрий Алексеевич Гагарин

10 МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ УЧЕТА ГРАВИТАЦИОННОГО ВЛИЯНИЯ РЕЛЬЕФА

10.1 Закон всемирного тяготения Ньютона

В рамках классической механики гравитационное взаимодействие описывается законом всемирного тяготения Ньютона, который гласит, что сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массы m и M, разделёнными расстоянием R, пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния – то есть:

$$F = G\frac{mM}{R^2}.$$

Здесь G – гравитационная постоянная, равная примерно $6{,}6725\times10^{-11}$ м³/(кг·с²).

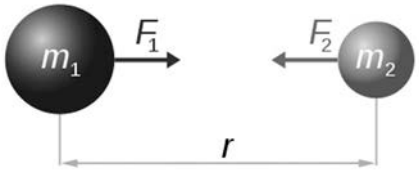


Рис. 110. Гравитационное притяжение двух масс

$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 + m_2}{r^2}.$$

Этот закон Ньютона лежит в основе многочисленных дальнейших научных и научно-практических исследований в решении проблемы изучения гравитационного поля.

Глобальные модели гравитационного поля используются при решении задач для больших регионов земной поверхности (определение орбит ИСЗ, обработка измерений с инерциональными геодезическими системами, создание геофизических и геодинамических моделей), а также являются моделями относимости для представления местных полей. Глобальные модели основаны на разложении в ряд по шаровым функциям возмущающего потенциала.

Локальная аппроксимация гравитационного поля требуется при создании опорных геодезических сетей для задач высшей и прикладной геодезии, прикладной геофизики и геодинамики.

На практике возникает вопрос решения прямой задачи – определение гравитационного влияния распределенных в пространстве масс. Их положение, форма и плотность каким-то образом заданы или определены. В этом случае, в соответствии с законом всемирного тяготения, получается единственное решение.

10.2 Гравитирующее влияние конусообразных форм рельефа на результаты геодезических измерений

Изучение такой сложной самоорганизующейся природной системы, которой является меняющаяся со временем земная поверхность, очень актуальная задача геодинамических исследований. Ее успешное решение предполагает комплексность наблюдений различных видов с соответствующей последующей математической обработкой [97-101, 184]. При решении некоторых задач геодинамики, когда интерпретация результатов наблюдений за движениями земной поверхности должна учитывать изменения поля силы тяжести, встает вопрос аппроксимации гравитирующих тел в исследуемом районе. Для достижения цели моделирования выбор сложности модели должен основываться на точностных характеристиках экспериментальных данных. Например, какой сложности (подробности) должна быть модель, аппроксимирующая гравитационное влияние рельефа, чтобы высокоточные геодезические и гравиметрические измерения при их комплексной математической обработке соответствовали выбранной модели гравитирующего тела.

При решении прямых задач в результаты геодезических измерений (нивелирование, угловые измерения) вводятся поправки за уклонение отвесной линии. Для этого, чаще всего, гравитирующее тело представляют как совокупность множества элементарных тел, например, кубов. Результирующее влияние всего гравитирующего тела складывается из суммы (суперпозиции) влияний каждого элементарного куба.

В работах [99 – 101] даются примеры решения обратных задач, когда результатом совместной математической обработки многократных геодезических и гравиметрических наблюдений на земной поверхности являются оценки не только координат пунктов, их смещений, но и масс гравитирующих тел, а также изменений этих масс. Эти примеры даны в отношении вулканического извержения и подготовки к

нему. Меняющимися гравитирующими телами являлись шарообразный глубинный магматический очаг вулкана и его поверхностный конус.

Достаточно типичной элементарной формой тела для рельефа земной поверхности является конус. Причем, более общий случай – усеченный конус. В естественной среде кроме вулканов это могут быть отдельные составляющие горных хребтов. В техногенной сфере мы имеем не только конусообразные возвышения, но и конусообразные выемки [94]. При открытых горных разработках пространство выработанной породы является конусообразным. Конусообразными являются, например, кимберлитовые месторождения. Разработка трубки Мир (Якутия) привела к образованию конусообразного карьера глубиной 520 метров. Отвалы также часто представляют собой усеченные конусы.

В работах [94, 99 – 101] конусообразные гравитирующие тела аппроксимировались шаром (одной точечной массой). Будет вполне разумным уточнить аппроксимирующую модель конуса путем увеличения числа точечных масс. Но при этом желательным является, чтобы число оцениваемых параметров осталось минимально необходимым. Тем самым будет выполняться требование большей избыточности измерений, которая необходима при математической обработке. Например, пусть оцениваемым параметром будет оставаться общая масса конуса, но рассредоточенная определенным образом в пространстве (в пяти точках) (рис. 111).

Таким образом, имеем следующую задачу. Известны размеры усеченного конуса R_1 – радиус нижнего основания, r – радиус верхнего основания, h_1 – высота конуса (рис.112).

Необходимо разбить конус на пять равнообъемных частей и для каждой части найти координаты центра тяжести. Вариантов разбиения на пять равнообъемных частей может быть много. Здесь выбран следующий (рис. 112). Горизонтальной плоскостью отсекается верхний усеченный конус объемом одну пятую от объема всего конуса. Нижний усеченный конус делим на четыре сектора двумя вертикальными взаимноперпендикулярными плоскостями.

Найдем радиус R_2 горизонтального сечения и высоту верхнего конуса. Воспользуемся формулами вычисления объема усеченного конуса для исходного V_1 (235) и для верхнего V_2 (236), полученного после отсечения горизонтальной плоскостью.

$$V_1 = \frac{\pi h_1}{3}(R_1^2 + r^2 + R_1 r), \tag{235}$$

$$V_2 = \frac{\pi h_2}{3}(R_2^2 + r^2 + R_2 r). \tag{236}$$

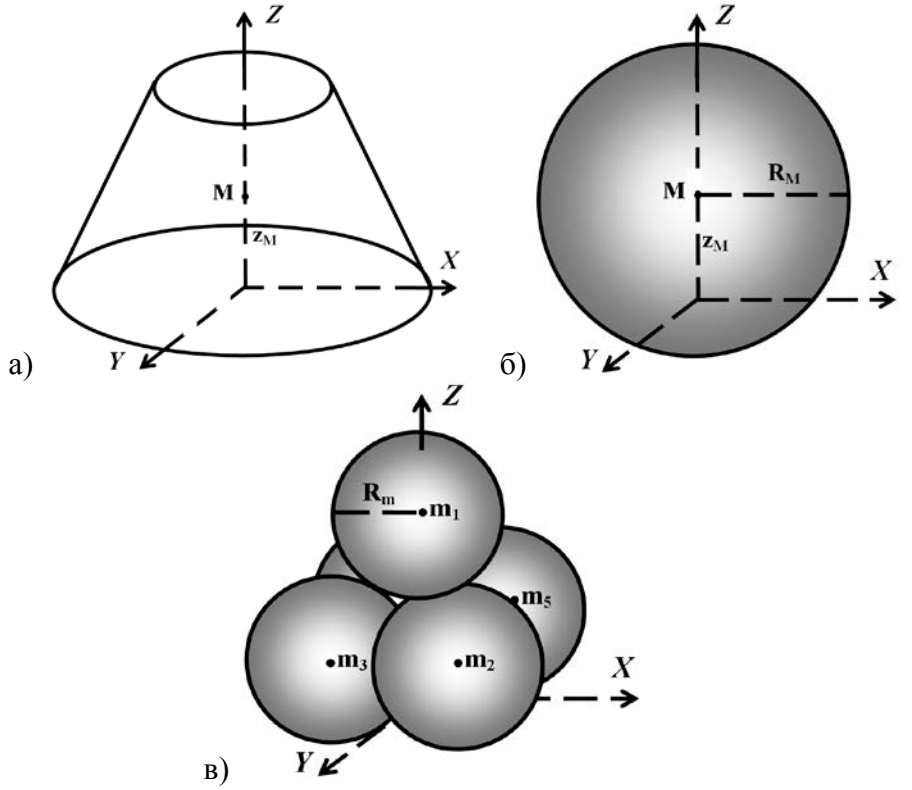


Рис. 111. Усеченный конус и модели аппроксимации его гравитационного влияния
а) усеченный конус, б) одноточечная модель, в) пятиточечная модель

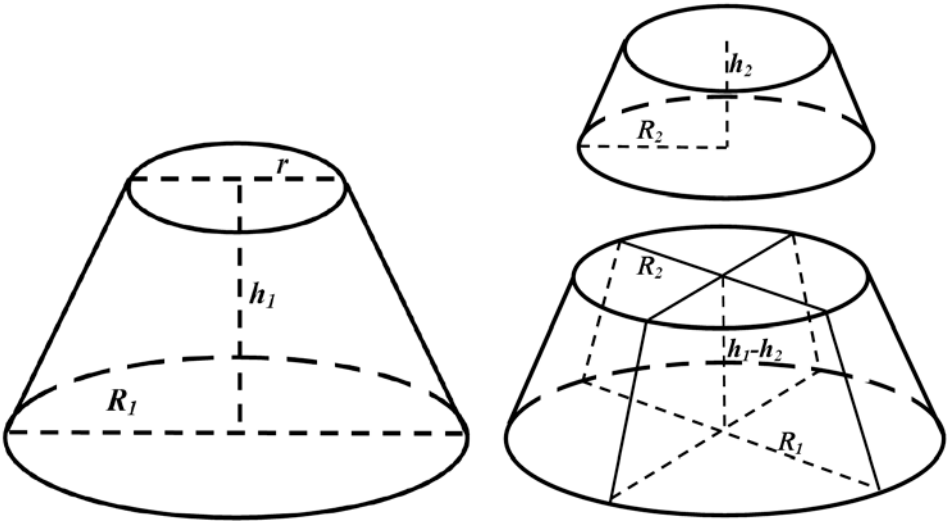


Рис. 112. Разбиение усеченного конуса на пять равнообъемных частей

С учетом того, что

$$V_2 = \frac{1}{5}V_1, \text{ а } h_2 = h_1\frac{R_2 - r}{R_1 - r},$$

получаем после преобразований

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{5}(R_1^3 - r^3) + r^3}\ .$$

Теперь стало возможным аналитическое определение координат центра тяжести верхнего усеченного конуса. Для этого будем использовать классический подход из теории сопротивления материалов к таким вычислениям через суммы статических моментов элементарных геометрических фигур (прямоугольник, треугольник, сектор круга).

Вертикальное сечение усеченного конуса представляет собой трапецию, которую можно разделить на две симметричные прямоугольные трапеции (рис. 113). Прямоугольную трапецию можно представить сочетанием прямоугольника и треугольника.

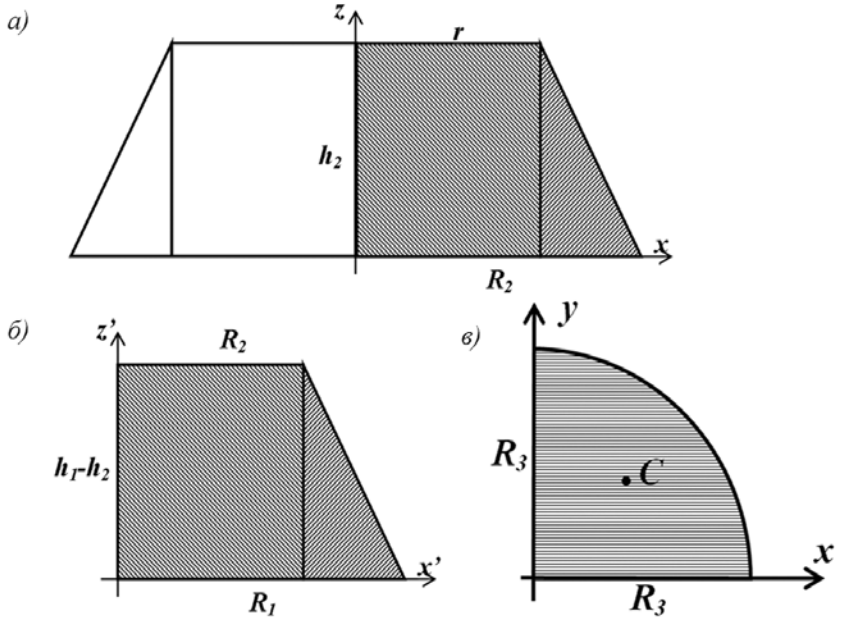


Рис. 113. Усеченный конус после разбиения:
а – вертикальное сечение верхнего усеченного конуса;
б – вертикальное сечение нижнего объемного сектора;
в – горизонтальное сечение нижнего объемного сектора

И, обращаясь к теории сопротивления материалов, находим статические моменты прямоугольника и треугольника. Это произведение

площади этих элементарных фигур на расстояние от принятых осей координат. Для общего сечения в виде равнобедренной трапеции с осью z проходящей через ось симметрии координата x центра тяжести будет равна нулю. Координата z центра – расстояние от основания трапеции вычисляемая величина. Согласно правилу теории сопротивления материалов, координаты центра тяжести всей трапеции будут находиться как результат деления суммы статических моментов этих фигур на сумму их площадей. Таким образом, для сечения верхнего объемного сектора центр тяжести будет иметь координаты

$$x = 0, \quad z = \frac{\frac{rh_2^2}{2} + \frac{(R_2 - r)h_2^2}{6}}{rh_2 + \frac{(R_2 - r)h_2}{2}}. \tag{237}$$

С четырьмя нижними объемными секторами поступим следующим образом. Для 90-градусного сектора плоскость симметрии будет проходить под углом 45º. Сечение этой плоскостью будет представлять собой прямоугольную трапецию, которую мы представляем сочетанием прямоугольника и треугольника.

Вычислим площади фигур S_1 – прямоугольника, S_2 – треугольника

$$S_1 = R_2(h_1 - h_2), \quad S_2 = \frac{1}{2}(h_1 - h_2)(R_1 - R_2). \tag{238}$$

Координаты центра тяжести трапеции в целом

$$x' = \frac{S_1 \frac{R_2}{2} + S_2\left(\frac{R_1 + 2R_2}{3}\right)}{S_1 + S_2}. \tag{239}$$

$$z' = \frac{S_1 \frac{h_1 - h_2}{2} + S_2 \frac{h_1 - h_2}{3}}{S_1 + S_2}. \tag{240}$$

Определяем радиус горизонтального сечения конуса на высоте, равной z':

$$R_3 = R_1 - (R_1 - R_2)\frac{z'}{h_1 - h_2}. \tag{241}$$

Найдем координаты центра тяжести C четверти этого сечения. Это четверть круга радиусом R_3. С учетом уравнения окружности, координаты будут вычисляться

$$x_c = y_c = \frac{\int_0^{R_3} dx \int_0^{\sqrt{R_3^2 - x^2}} y dy}{\frac{1}{4}\pi R_3^2} = \frac{4R_3}{3\pi}. \qquad (242)$$

Итоги определения координат пяти точечных масс представлены в таблице. Координаты соответствуют системе координат рис. 113.

Таблица 50

Координаты центров тяжести точечных масс

	Масса 1	Масса 2	Масса 3	Масса 4	Масса 5
X	0	x_c	$-x_c$	$-x_c$	x_c
Y	0	y_c	y_c	$-y_c$	$-y_c$
Z	$h_1 - h_2 + z$	z'	z'	z'	z'

Ниже приведены результаты вычислительного эксперимента, целью которого было определение величин влияния на результаты геодезических и гравиметрических измерений двух вариантов аппроксимации гравитирующего усеченного конуса – простой одноточечной и уточненной пятиточечной моделью.

Модель объекта. На плоской поверхности (локальный участок) со значением силы тяжести $g_0 = 980$ Гал появляется аномальная гравитирующая масса *M* в форме усеченного конуса с радиусом нижнего основания *R*, радиусом верхнего основания r и высотой *h* (рис. 114), с плотностью $\delta = 2,63$ г/см^3. Это вызывает изменение вектора силы тяжести g_0 в окружающем пространстве. В каждой точке это изменение различно: g_M^A, g_M^B, g_M^1. Следствием появления аномальной массы *M* является также уклонение отвесной линии (УОЛ) u_M^1 в месте стояния нивелира (т. 1), являющаяся, в свою очередь, причиной смещения пузырька уровня этого прибора. После приведения его в нульпункт визирная ось нивелира будет показывать отчет a_M по задней рейке и b_M по передней рейке. Превышение $h_M^{A,B} = a_M - b_M$ будет отличаться от превышения $h_0^{A,B} = a_0 - b_0$, измеренного до появления аномальной массы М на величину $\delta h_M^{A,B} = h_M^{A,B} - h_0^{A,B}$. Заметим, что нивелирные рейки, отвесность которых также определяется их круглым уровнем, будут иметь другой наклон, но возникающие при этом различия в отсчетах на высоте 1.3 м (высота инструмента) будем считать несущественными.

На рисунке 114 показана первая станция с расстоянием между т.А и т.В 100 м. Также в месте установки нивелира (например, первая станция т.1 на рис. 114), было смоделировано определение абсолютных значений силы тяжести.

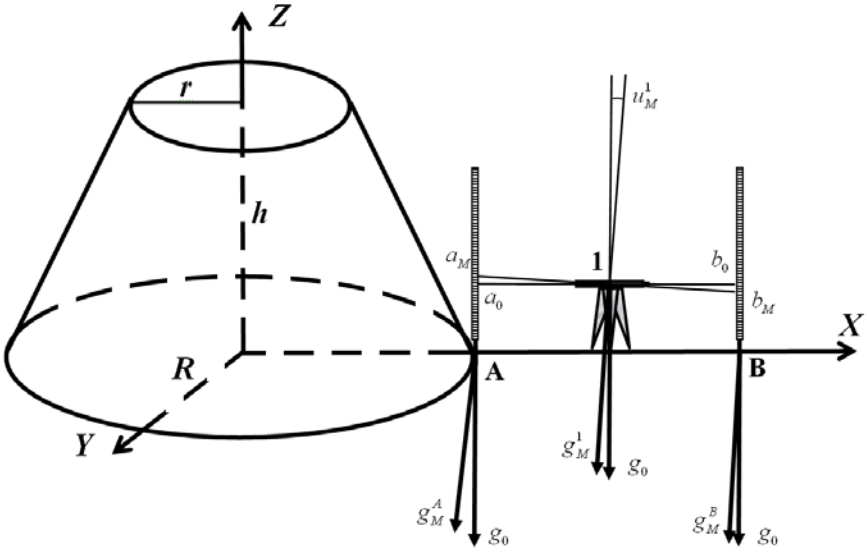


Рис. 114. Первая станция нивелирного хода

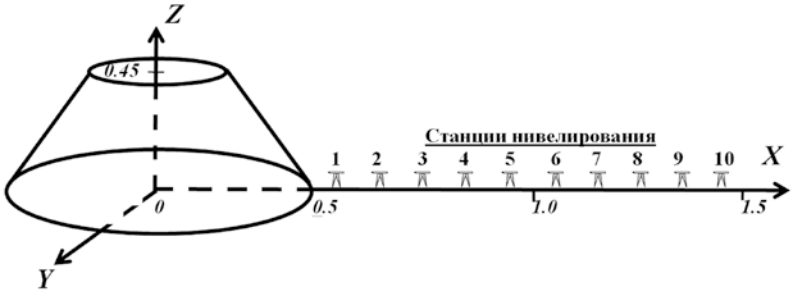


Рис. 115. Модельный нивелирный ход (координаты в км)

Порядок проведения и результаты вычислительного эксперимента.

Для усеченного конуса с геометрическими характеристиками R=500 м, r=200 м, h=500 м его объем V=0,204 км^3, при гомогенности пород с плотностью δ=2,63 г/см^3 масса M=5,37*108 т., был смоделирован нивелирный ход от основания усеченного конуса (т.*А* на рис. 114) длиной 1 км, состоящий из десяти станций через 100 метров друг от друга. Длина плеч 50 метров.

Случайные ошибки не вводились. Вычислялись только методические погрешности, возникающие вследствие неполноты модели гравитирующего тела.

10.3 Конечно-элементная модель гравитационного влияния конусообразных форм земного рельефа

Геодинамическо-геомеханические движения породных массивов на рудниках и шахтах в подземных условиях и на поверхности являются следствием сильных техногенных воздействий. Необходим комплексный подход к их изучению, позволяющий решать как прямые задачи, так и в некоторых случаях снять часть неоднозначностей, неизбежно появляющихся при решении обратных задач.

Примерами таких геодинамических полей могут служить взаимосвязанные техногенные изменения земной поверхности и поля силы тяжести Земли. Эксплуатация нефтегазовых месторождений сопровождается опусканием 10 см в год, горизонтальными смещениями до 6 см в год. В техногенной сфере часто возникают ситуации ощутимого изменения локального поля силы тяжести в относительно короткие периоды времени (годы, месяцы, недели). Изменения уровня водохранилища крупных ГЭС могут вызывать как вертикальные смещения прилегающей территории, так и изменения силы тяжести до 10 мкгал (10^7 м/с^2) Но еще более значительные воздействия на приповерхностный слой Земли и поле силы тяжести вызываются перемещениями больших масс пород при крупномасштабных горных работах (выемка руды, формирование отвалов и др.) [94]. В этих случаях возможно возникновение неоднозначности в интерпретации, например, результатов обработки нивелирных наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности.

В работе [94] приведен пример совместной математической обработки и интерпретации пространственно-временных рядов комплексных геодезических и геофизических наблюдений в условиях перемещения больших объемов руды и пород. Этот пример соответствует задаче разделения собственно движений физической поверхности и вариаций во времени внешнего гравитационного поля Земли (смещений уровенных поверхностей потенциала силы тяжести и изменений положений отвесных линий во времени). Результатом математической обработки наблюдений являются как оценки отметок мобильных пунктов, их вертикальных смещений, так и оценки параметров меняющегося гравитационного поля с оценкой точности всех определяемых параметров. Введение в вектор параметров масконов (аномальных масс) позволило компактно описывать локальное гравитационное поле.

Значимые вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей во времени могут возникать, в частности, при разработке крупных месторождений полезных ископае-

мых. В России имеется ряд месторождений, для которых характерно перемещение больших масс руд и пород. Например, за более чем 60 лет извлечено и перемещено более 1 млрд. $м^3$ фосфатных руд в Хибинском массиве, причем ежегодно извлекается и перемещается 160 млн. т. руд и пород. Глубина работ достигает 600-700 метров. Откосы стен рудника порядка 35–40 градусов. Город Мирный (Якутия) обязан своим возникновением и собственно именем известному алмазному карьеру «Мир» с глубиной отработки 525 метров и объемом отгруженной горной массы 168.7 млн. $м^3$.

В таких условиях ведения крупномасштабных горных работ геомеханическая ситуация значительно усложняется. Для своевременного прогноза и профилактики катастрофических явлений выполняется комплексный мониторинг массива горных пород. В частности, для мониторинга деформационных процессов применяют высокоточные геодезические наблюдения.

Для определения вертикальных движений земной поверхности в районах добычи полезных ископаемых используется геометрическое нивелирование. Как известно, нивелир в рабочее положение приводится путем установки в нульпункт пузырька уровня. При этом визирная ось зрительной трубы нивелира является касательной линией к уровенной поверхности потенциала силы тяжести. Поле силы тяжести в конкретном районе зависит от распределения масс внутри Земли. Перераспределение масс вызовет соответственно изменение поля силы тяжести. При этом визирная ось зрительной трубы займет другое положение, отсчеты по задней и передней рейкам изменятся (с разным знаком). Следовательно, будет измерено другое превышение. Накопившись по линии нивелирования, эти изменения в превышениях могут достигать нескольких миллиметров. Эти величины в десятки раз превышают ошибки измерений при высокоточном нивелировании и сопоставимы со значениями вертикальных смещений реперов в районах добычи полезных ископаемых. Следовательно, недоучет влияния перемещенных масс на результаты нивелирования может быть причиной неверного представления о картине вертикальных движений.

Конус является достаточно типичной формой земного рельефа в естественной и техногенной среде. Примерами являются вулканы, отдельные составляющие горных хребтов. В относительно короткое время (годы, месяцы) вследствие выемки и первичной переработки руды образуются конусообразные карьеры, отвалы. В этом случае возникают ситуации ощутимого изменения локального поля силы тяжести в относительно короткие периоды времени [94].

Выражение гравитационного или электростатического потенциала конкретных тел в элементарном виде или через хорошо известные функции имеет определенные трудности. Есть частные решения для фигур равновесия небесных тел, для прямоугольной призмы бесконечного простирания, для прямоугольного параллелепипеда и вертикального цилиндра для точки на его оси. В работе [112] предлагаются формулы вычисления гравитационного потенциала однородного эллиптического конуса через однократные интегралы. В случае кругового конуса они сводятся к элементарным функциям, но имеют практическое приложение для пространства вблизи вершины конуса.

При решении прямых и обратных задач физической геодезии предпочтительнее использовать аппроксимационные модели. Самой удобной для вычислителя моделью аппроксимации гравитационного влияния конуса является точка (сфера, шар, маскон)/ Шаровая модель была использована, например, при аппроксимации гравитационного влияния конуса вулкана в работах [104, 105]. В работе [104] представлена пятиточечная модель, причем для вычисления координат центров тяжести пяти равнообъемных масс, аппроксимирующих гравитационное влияние усеченного конуса, аналитически выведены строгие математические формулы. В работе [106] приведены результаты вычислительного эксперимента по оценке степени влияния конусообразного тела на результаты геодезических измерений.

Пространственное тело в качестве конечного элемента предложено в [108, 113]. Весь объем конуса представлялся совокупностью кольцевых секторов (криволинейные параллелепипеды). Здесь описан авторский алгоритм, позволяющий аппроксимировать гравитационное влияние конуса, как сумму влияний конечных элементов – кольцевых секторов.

Дано:

Круговой конус с радиусом основания R, высотой H (рисунок 114), плотность пород δ.

Найти:

Гравитационный потенциал $T^{C}_{конуса}$, вызываемый этим конусом в любой точке С окружающего пространства.

Алгоритм решения:

1. Делим конус горизонтальными плоскостями на K объемных тел: K-1 усеченных конуса и один (верхний с номером K) неусеченный. Радиусы оснований этих тел, начиная с нижнего r_1, r_2, …, $r_{k\cdot}$, где $\underline{k}$ – номер объемного тела от 1 до K. Высота каждого конуса $h=H/K$. На рисунке 116 показано вертикальное сечение этого деления для K=10.

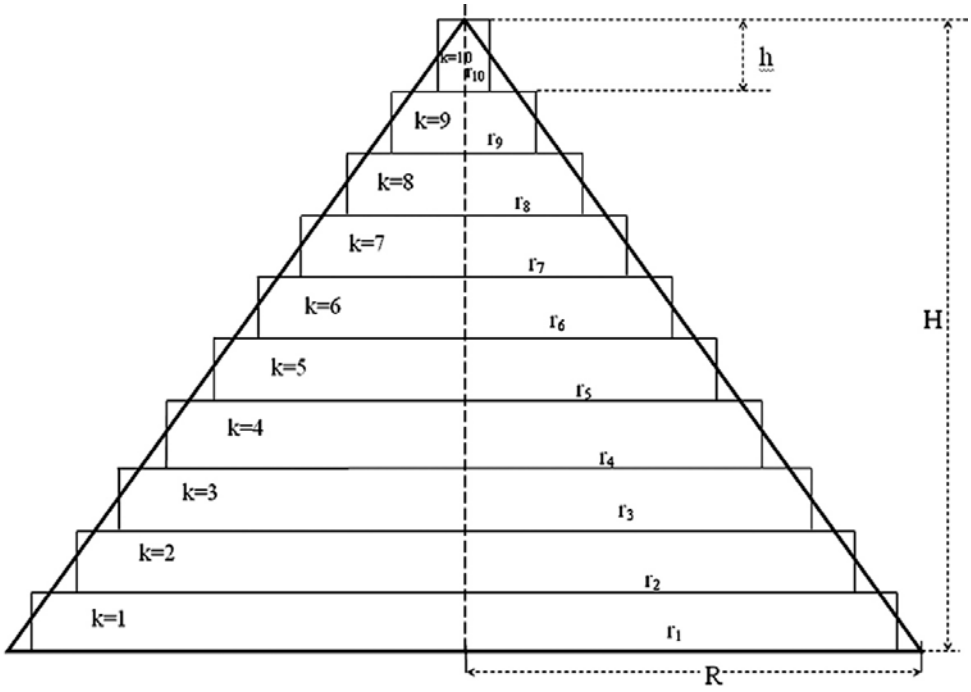


Рис. 116. Вертикальное сечение деления конуса для K=10

2. Заменяем каждый k-й конусообразный слой с радиусом нижнего основания r_i и радиусом верхнего основания r_{i+1} на его аппроксимирующий k-й цилиндрический слой той же высоты h под условием равенства их объемов:

$$V_{конуса}(r_i; r_{i+1}) = V_{цилиндра}(r_k);$$

или

$$\frac{1}{3}\pi h(r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) = \pi h r_k.$$

Таким образом, радиус основания аппроксимирующего цилиндра может быть вычислен

$$r_k = \frac{1}{3}(r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2).$$

3. Делим каждый цилиндрический слой на Jk концентрических колец с радиусами через равное расстояние $dr=r_k/Jk$. Каждое кольцо делим на N кольцевых секторов (криволинейные параллелепипеды) через угол α=360/N. На рисунке 2 показан пример такого конечноэлементного разбиения при K=10; Jk=2*(11-k); α=6°.

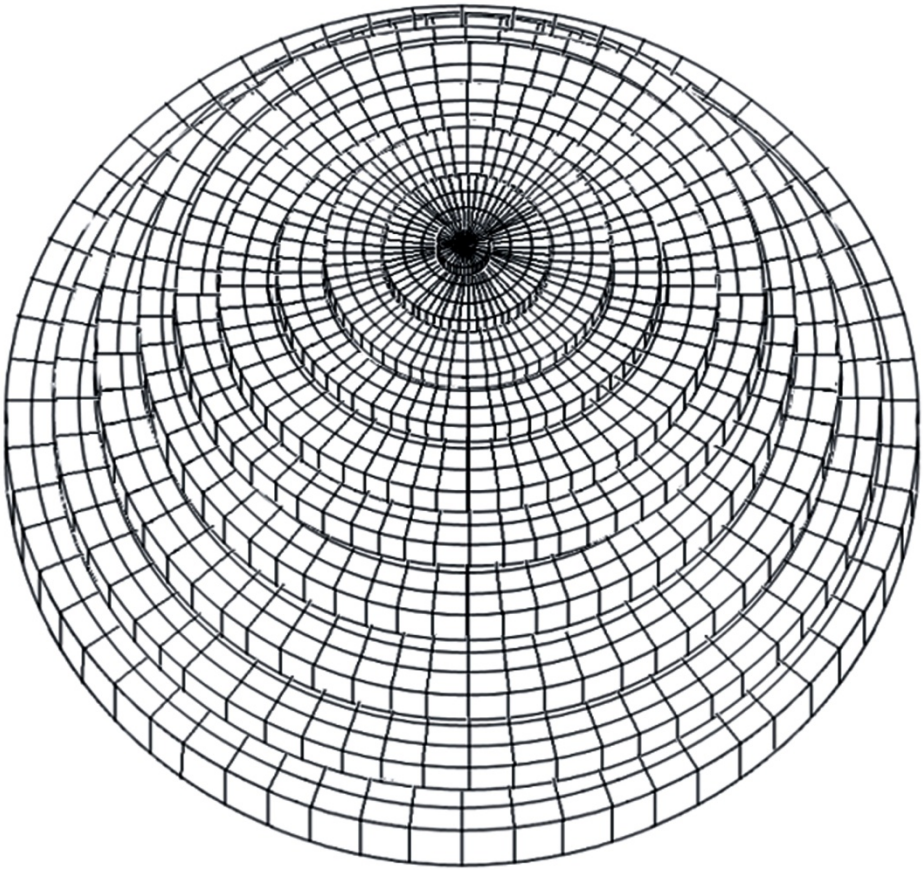


Рис. 117. Конечноэлементное разбиение конуса

4. Для того, чтобы заменить каждый объемный конечный элемент на точечную массу, найдем координаты его центра масс. Нахождение координаты z (по вертикали) не представляет трудностей. Очевидно, что для любого кольцевого сектора *k*-го цилиндрического слоя:

$$z_k = h/2 + h(k-1).$$

Координаты x, y будем находить, используя известные в теории сопротивления материалов формулы для кольцевого сектора и его свойство симметрии. Для сектора угловой величины α, внутренним радиусом $r_{k,j}$, внешним радиусом $r_{k,j+1}$ может быть найдено расстояние $rm_{k,(j;j+1)}$. от центра образующего кольца *O* до центра масс кольцевого сектора *m* (рис. 118).

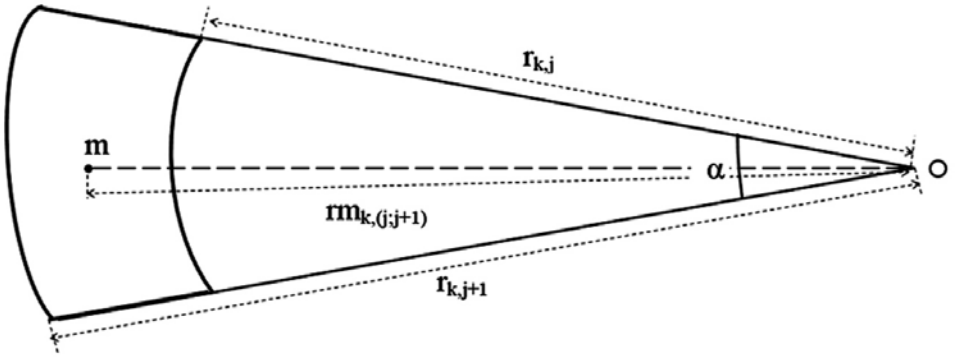


Рис. 118. Нахождение центра масс кольцевого сектора

Для угла α, выраженного в радианной мере

$$rm_{k,(j;j+1)} = \frac{4}{3}\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}\frac{(r_{k,j+1}^3 - r_{k,j}^3)}{(r_{k,j+1}^2 - r_{k,j}^2)}.$$

5. Зная радиус $rm_{k,(j;j+1)}$, можно вычислить координаты x, y центра масс каждого конечного элемента:

$$x_{k,(j;j+1),n} = rm_{k,(j;j+1)}\cos\beta_n \ ,$$

$$y_{k,(j;j+1),n} = rm_{k,(j;j+1)}\sin\beta_n \ ,$$

где $\beta_n = \alpha/2 + \alpha(n-1);\ \ n = 1,2,...,N$.

6. Объем каждого кольцевого сектора вычисляем

$$V_{k,(j;j+1)} = \alpha(r_{k,j+1}^2 - r_{k,j}^2)h,$$

и, с учетом плотности пород δ, вычисляем массу сектора *j*-го кольца *k*-го слоя

$$m_{k,(j;j+1)} = V_{k,(j;j+1)}\delta.$$

7. Гравитационный потенциал в точке C окружающего пространства, вызываемый точечной массой величины $m_{k,(j;j+1)}$ с координатами $x_{k,(j;j+1),n}$,

$y_{k,(j;j+1),n}$, $z_k = h/2 + h(k-1)$ определяем как $T_{k,(j;j+1),n}^C = G\frac{m_{k,(j,j+1),n}}{r_{k,(j;j+1),n}^C}$,

где G – гравитационная постоянная,

$r_{k,(j;j+1),n}^C$.- расстояние от центра масс конечного элемента до точки C.

Общий гравитационный потенциал в точке С окружающего пространства, вызываемый конусом, вычисляем как сумму потенциалов точечных масс:

$$T^{C}_{конуса} = G\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N}\frac{m_{k,(j,j+1),n}}{r^{C}_{k,(j;j+1),n}}$$

Таким образом, здесь представлен алгоритм аппроксимации гравитационного влияния конуса, как типичной формы земного рельефа. Учет гравитирующего влияния перемещаемых масс необходим при проектировании деформационных сетей, организации полевых работ и последующей интерпретации результатов регулярно повторяемых натурных наблюдений, например, нивелирных цикловых наблюдений при изучении вертикальных движений на территории горных выработок.

Сравнение одноточечной (1т) и пятиточечной (5т) моделей выполнялось с моделью (5400т) гравитационного влияния усеченного конуса, полученной как сумма влияний 5400 элементов (рис. 117). В модели (5400т) в качестве элементов были выбраны 6-градусные сектора цилиндрических труб высотой 75 м (для высоты конуса 450 это составило шесть слоев с числом труб в слоях: 20, 18, 16, 14, 12 и 10). Каждый элемент заменялся гравитирующей точкой в центре тяжести данного элемента в соответствии с его объемом. Заметим, что нивелирные рейки, отвесность которых также определяется их круглым уровнем, будут иметь другой наклон, но возникающие при этом различия в отсчетах на высоте 1.3 м (высота инструмента) будем считать несущественными. Приведем результаты сравнения в виде табл. 51.

Таблица 51

Различия в уклонениях отвесной линии, силы тяжести и нивелирных превышениях, аппроксимированных одноточечной и пятиточечной моделью конуса

Номер станции *i*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Координата X (м)	550	650	750	850	950	1050	1150	1250	1350	1450
УОЛ (5 т.)-(1 т.) ″	-0,10	-0,08	-0,05	-0,04	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
g (5 т.)-(1 т.) мкгал	-75	-24	-52	-54	-48	-41	-35	-29	-24	-20
h (1 т.) мм	0,98	0,74	0,58	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17
h (5 т.) мм	1,03	0,78	0,60	0,48	0,39	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17
h (5 т.)-*h* (1 т.) мм	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00

Различие между одноточечной и пятиточечной моделями проявляет себя в определении силы тяжести (различие до 0,1 мГал), в непосредственной близости к конусу на нивелирные превышения (различие до 0,2 мм на 1 км). Незначительно это различие для горизонтальных углов. Различие в уклонениях отвесных линий до 0,1″. Это для конуса с вышеуказанными геометрическими параметрами. Для редко встречающихся более крупных конусообразных гравитирующих тел различие между одноточечной и пятиточечной моделями будет проявляться в больших масштабах. Например, для конуса с размерами 1000 м, 800 м, 300 м – 0,15.

10.4 Аппроксимация гравитационного влияния локального рельефа по его цифровым моделям

Недостаточно функционально и технологически была до сих пор использована формула гравитационного влияния параллелепипеда (рис. 119), которая представлена выраженным аналитически замкнутым интегралом (243).

После решения интеграла получается формула вычисления аномальной силы тяжести в точке поверхности *P*

$$\Delta g = G \cdot \Delta\rho \,|||\; - \; x \cdot \ln(y + r) \; - y \cdot \ln(x + r) + \; z \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\,y}{z\,r} \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} , \quad (243)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

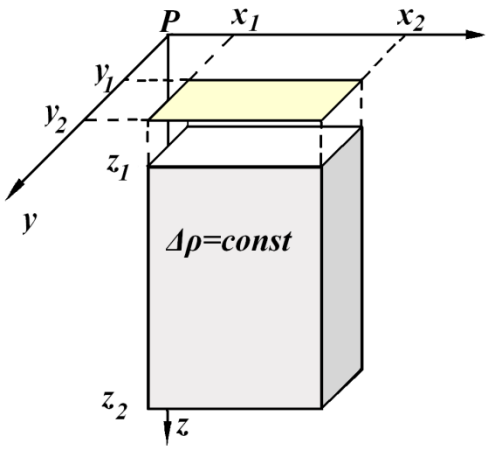


Рис. 119. Гравитирующее тело в виде параллелепипеда

В работе [116] предложена идея сочетания аналитической модели гравитационного влияния параллелепипеда (243) и цифровых моделей рельефа. Авторами выполнены вычислительные эксперименты для не-

которых реально существующих локальных участков – вулкан Св. Елена (США, штат Вашингтон) (рис. 120) и прибрежная территория полуострова Камчатка. Во втором случае были учтены рельеф суши и дна, а также различная плотность морской воды и горных пород.

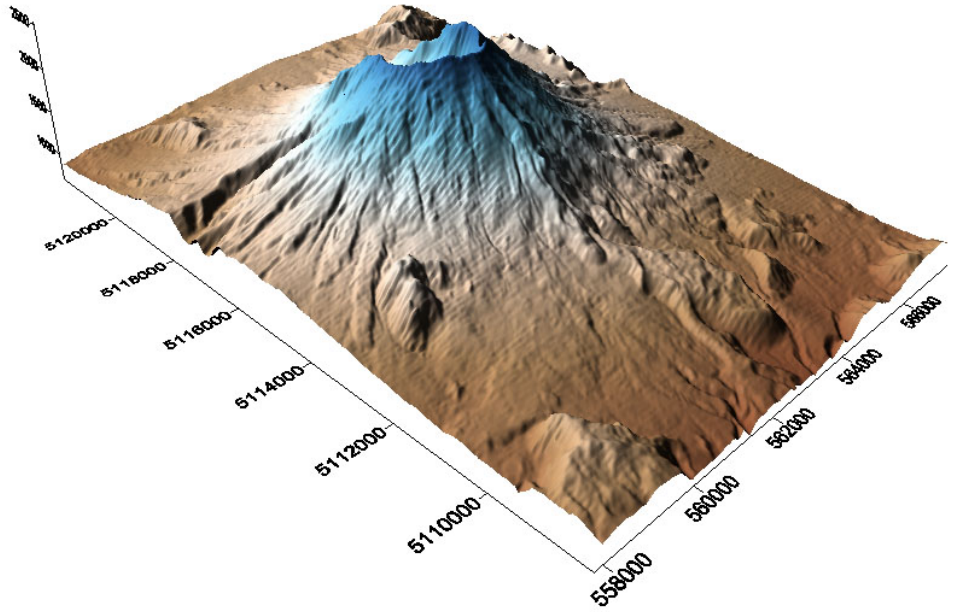


Рис. 120. Визуализация поверхности вулкана Святая Елена

Самым простым вариантом описания гравитационного влияния локальных элементов рельефа является использование точечной модели. Для некоторых прикладных задач это может быть достаточным. Но, существуют ситуации, которые требуют более точной аппроксимации. Например, геодинамические исследования, прогноз землетрясений и вулканизма, вопросы горной механики, обеспечения безопасности при разработке месторождений полезных ископаемых, включая нефтяные и газоносные объекты. Правильное сочетание аналитических моделей и метода конечных элементов, как в [116], позволяет повысить точность описания локального гравитационного поля по сравнению с существующими методиками примерно на 3-4 % для локальных объектов, имеющих размеры территории около 20 – 100 км^2 с горным и предгорным рельефом. Основой повышения аппроксимационной (прогнозной) точности для таковых геодинамических и природно-технических систем (актуальных в изучении для человеческого общества) является, по мнению автора монографии, сочетание аналитических моделей, метода конечных элементов и цифровых моделей рельефа (ЦМР).

Таблица 52

Сравнение моделей 1т и 5т с моделью ЧМ

Номер станции	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Координата X (м)	550	650	750	850	950	1050	1150	1250	1350	1450
Для уклонений отвесных линий в "										
УОЛ (5400т)	-2,71	-1,81	-1,31	-1,00	-0,79	-0,64	-0,53	-0,45	-0,38	-0,33
УОЛ (1т)-(5400т)	0,82	0,39	0,21	0,13	0,08	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
УОЛ (5т)-(5400т)	0,73	0,32	0,17	0,09	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01
Для абсолютных значений силы тяжести в мкгал										
g(1т)-g(5400т)	-1438	-1275	-939	-688	-512	-390	-302	-239	-192	-156
g(5т)-g(5400т)	-1525	-1270	-905	-649	-476	-358	-276	-216	-173	-140
Для нивелирных превышений в мм										
h(5400т)	1,31	0,88	0,63	0,48	0,38	0,31	0,26	0,22	0,18	0,16
h(1т)-h(5400т)	-0,40	-0,19	-0,10	-0,06	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01
h(5т)-h(5400т)	-0,36	-0,16	-0,08	-0,05	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00

Из анализа результатов вычислительного эксперимента для вышеопределенных размеров гравитирующего усеченного конуса можно сделать следующие выводы:

1. Гравитационное влияние использования моделей 1т и 5т на результаты измерений горизонтальных углов не будет значимым;

2. При обработке гравиметрических измерений обе модели являются сильно упрощенными;

3. При высокоточном нивелировании при расстоянии от подошвы гравитирующего конуса 450 м для модели 1т и 350 м для модели 5т методическая ошибка составляет 1/10 точности измерений на станции (0,5 мм). Этот факт необходимо учитывать при проектировании сетей, организации полевых работ и последующей интерпретации результатов натурных наблюдений;

4. Для каждого конкретного случая присутствия аномальных масс возникнут различные рекомендации по усложнению моделей их гравитационного влияния. Например, для редко встречающихся более крупных конусообразных гравитирующих тел различие между аппроксимационной одноточечной и пятиточечной моделей и реальным гравитирующим конусом будет проявляться в большей степени. Следовательно, необходима более детальная модель и/или факт соответствующей удаленности нивелирной и гравиметрической сети от гравитирующего конуса. В итоге, здесь представлена пятиточечная модель гравитирующего усеченного конуса, причем для вычисления координат центров тяжести пяти равнообъемных масс аналитически выведе-

ны строгие математические формулы. Использование этих формул для аппроксимации конусообразных тел земного рельефа (открытые горные разработки, отвалы, вулканы и т.д.) позволит уточнить их гравитационное влияние при совместной математической обработке повторных геодезических и гравиметрических наблюдений. При необходимости еще большей детализации гравитирующего конуса эти формулы также могут быть использованы.

Геодезические методы в геодинамических исследованиях играют важную роль. На результаты геодезических наблюдений значительное влияние оказывает меняющееся гравитационное поле. Значимые вертикальные смещения точек земной поверхности и смещения уровенных поверхностей во времени могут возникать, в частности, при разработке крупных месторождений полезных ископаемых [94]. Перераспределение больших объемов пород и руды вызывает значительное изменение поля силы тяжести, а недоучет влияния перемещаемых масс в результаты нивелирования может быть причиной неверного представления о картине вертикальных движений и оказывает влияние на результаты геодезических измерений и определяемые по ним деформации земной поверхности. Понимание локального гравитационного поля и его учет важен при мониторинге оползневых участков [207], при слежении за состоянием крупных инженерных сооружений, таких, как АЭС и ГЭС [71, 72].

В местной декартовой системе координат аномалия силы тяжести определяется формулой

$$\Delta g(r) = G\iiint_{\nu} \frac{\Delta\rho(r)(z' - z)}{\left|r' - r\right|^2} d\nu .$$

где $\Delta\rho$ – разность плотности возмущающего тела и плотности окружающей его среды,

G – гравитационная постоянная;

$d\nu = dx'dy'dz'$ элементарный объем.

Многие тела простой формы и постоянной плотности имеют влияние на силу тяготения, выражаемое аналитически в замкнутой форме (в квадратурах). Для шара радиуса R с постоянной плотностью или состоящего из концентрических слоев известна формула

$$\Delta g = \frac{4}{3}\pi G R^3 \Delta\rho \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad (244)$$

где x, y, z – координаты центра шара. Часто такие гравитирующие тела называют точечными массами, масконами.

Если гравитирующее тело представлять как бесконечно протяженное в горизонтальной плоскости, то формулы упрощаются. Есть технологическое допущение, что это возможно, когда горизонтальные размеры тела в два раза больше глубины его залегания. Это позволяет использовать аналитически выражаемую модель «бесконечного» плоского слоя.

Есть еще примеры аналитического подхода к анализу гравитирующего влияния тел простой формы. Например, вертикального цилиндра. Но формула работает только для точек, расположенных на его оси. В случае конуса это так же ограничено расположением точки пространства и гравитирующего конуса.

Конус является достаточно типичной формой рельефа в естественной и техногенной среде. Конусообразными являются вулканы, отдельные составляющие горных хребтов. Вследствие выемки и первичной переработки руды образуются конусообразные карьеры, отвалы. В этом случае возникают ситуации ощутимого изменения локального поля силы тяжести в относительно короткие периоды времени. Для решения практических и научно-практических задач возможно использование как аналитических, так и аппроксимационных [146], конечно-элементных методов. В работе [113] приведен пример конечно-элементной аппроксимации с делением конуса на сектора колец, послойно, с некоторым угловым шагом по периметру и различным радиусом колец.

Большое распространение имеют технологии разделения объема гравитирующей массы произвольной формы на кубы. Далее выполняются замены этих неконцентрических масс на точечные с нахождением их координат как координат центра тяжести пространственного тела с учетом гомогенности – равномерно распределенной плотности пород. Дальнейший учет гравитационного влияния шара (точечной массы) вычисляется с использованием формулы (244).

При замене куба шаром (рис. 121) возникают ошибки. Методическая ошибка состоит в следующем. Куб заменяется шаром того же объема. Радиус такого шара

$$R_{ш} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{a^2}{\pi}}\,.$$

Для $a = 1$ (при этом расстояние от центра куба до грани по перпендикуляру – 0,5) $R_{ш} = 0.62$.

Таким образом, при совмещении центра куба с центром шара для шести граней куба возникают выступающие секторы шара, усеченные гранями (см. рис. 121, области «+»). Оставшаяся часть шара «ком-

пактно» расположена внутри куба с возникновением для восьми его «углов» пустых (нулевых) областей (–)

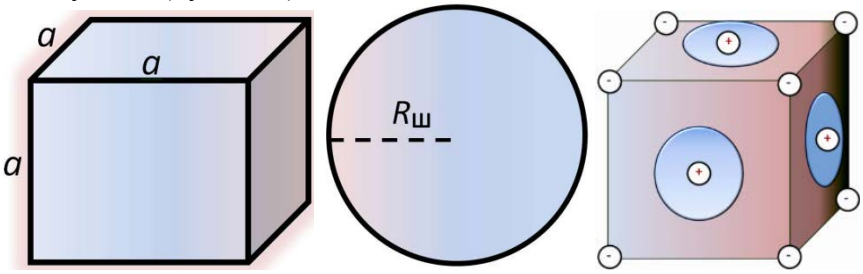


Рис. 121. Аппроксимация куба шаром того же объема

В общем случае области (+) и (–) не компенсируют друг друга при совместном гравитационном влиянии. Если для одного куба-шара ошибка незначительна, то при возрастании количества таких конечных элементов (до сотен, тысяч и даже десятков тысяч) влияние этой ошибки становится значимой (примерно 1–2 % и более).

Здесь описаны теоретические основы и алгоритм учета гравитационного влияния, свободные от влияния описанной выше ошибки.

Предлагаемый алгоритм позволяет исключить (уменьшить) также следствия нестрогой кубической формы верхнего конечного элемента в столбах-параллелепипедах, составленных кубическими конечными элементами (рис. 122).

В авторском подходе предложена методика аппроксимации гравитационного влияния тел сложной конфигурации (например, локального рельефа) с использованием выраженного аналитически замкнутого интеграла для параллелепипеда (рис. 119).

После решения интеграла получена формула для вычисления аномальной силы тяжести в точке поверхности *P* [200].

$$\Delta g = G\Delta\rho\left\|\left\|-x\ln(y+r)-y\ln(x+r)+z\,arctg\frac{x}{z}\frac{y}{r}\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\Bigg|_{z_1}^{z_2},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

В случае анализа локальных участков с произвольным рельефом предлагается выполнять конечно-элементную аппроксимацию параллелепипедами разной высоты (рис. 123). Необходимый результат получается путем суммирования аналитически вычисленных гравитационных влияний каждого из них.

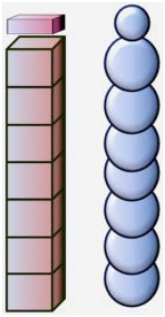


Рис. 122. Аппроксимация вертикального столба-параллелепипеда

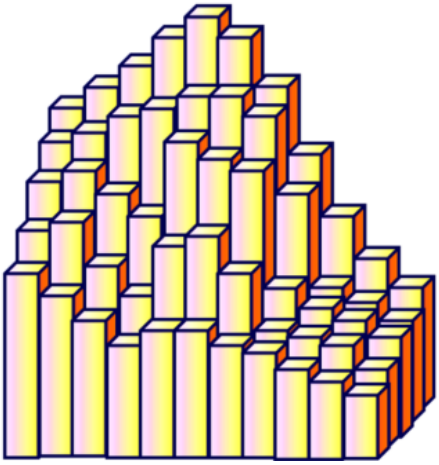


Рис. 123. Аппроксимация локального участка рельефа параллелепипедами

Отметим , что в этом случае количество выбранных конечных элементов значительно сокращается по сравнению с кубической аппроксимацией. Современные компьютеры позволяют быстро производить вычисления, и эта часть технологии не является сложной.

Технологически оптимизировать процесс вычисления также способствует достаточно развитая система данных цифровых моделей рельефа (ЦМР) (рис. 124). Популярным и эффективным методом геостатистической интерполяции является метод Криге – крайгинг [257, 263].

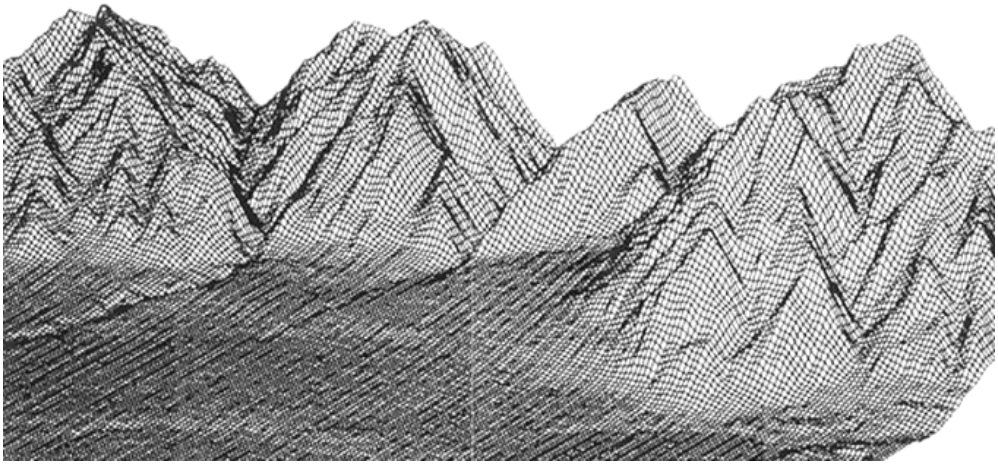


Рис. 124. Псевдо 3D представление с использованием метода крайгинга

Координаты *x* и *y* углов основания параллелепипеда на горизонтальной плоскости считаются по узлам сетки GRID с равномерным шагом. Определение координаты *z* (высоты параллелепипеда от основания) также выполняется арифметически по данным ЦМР. В библиографическом списке монографии есть авторские статьи с результатами данной технологии визуализации [105, 113, 116, 119, 123, 124].

10.5 Выводы

Были рассмотрены алгоритмы аппроксимации гравитационного влияния конусообразных форм рельефа. Находятся координаты центра масс каждого конечного элемента, который заменяется точечной массой, что позволяет вычислить потенциал от влияния конуса в любой точке пространства как сумму потенциалов влияния точечных масс.

Преимуществом данного технологического подхода является, в первую очередь, качественное улучшение оценки гравитационного влияния. Основой этого улучшения является более точное в совокупности вычисление влияния каждого параллелепипеда по аналитическим интегральным формулам, исключающее некоторые методические ошибки.

Из вышеизложенного можно сделать вывод о положительной перспективе внедрения представленного подхода.

Благославляю того, кто изобрёл глобус – за то, что я могу сразу этими двумя руками обнять весь земной шар – со всеми моими любимыми!

Марина Ивановна Цветаева

11 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

11.1 Использование специальных геодезических проекций и местных систем координат (совместно с Виноградовым А.В.)

Применение геодезических проекций в настоящее время в различных странах определялось во многом удобством при внедрении общегосударственной системы плоских прямоугольных координат и возможностями создания приемлемых наставлений и инструкций для потенциальных пользователей. Для решения локальных задач, в частности, при построении специальных высокоточных инженерно-геодезических построений, такие системы неудобны и, в таких случаях применяются локальные системы координат, часто не связанные с общегосударственной, но обеспечивающие минимальные искажения эллипсоидальных элементов на плоскости. Приложения созданной сети разнообразны, касаются не только картографических тем, инженерно-геодезического обеспечения, а также достоверности и наглядности представления природоохранных, экологических [110, 111] и геодинамических наблюдений [89].

Необходимость связи общегосударственных, инженерно-геодезических и городских работ основана на применении различных вариантов системы координат Гаусса-Крюгера: «частные начала», «частные меридианы», различные «компенсационные» системы и т.д. Несмотря на сохранение в них общепринятой технологической схемы использования проекции и системы координат Гаусса-Крюгера, отступления от нее существовали [21]. При конформном или ортогональном проектировании одной поверхности на другую происходят искажения объектов. Применяя стандартные формулы, можно учитывать масштаб искажения изображений при последующих обработках измерений в исходной или в новой системах координат (СК) [20-25]. При установлении новой СК вводят частные исходные параметры, которые известны только авторам. Иногда способы проектирования и СК устанавливали без всяких правил. В таких случаях трудно, а чаще, невозможно, найти масштабы искажений в данной СК. Следовательно, использова-

ние имеющиеся материалов, или дальнейшее расширение границ работ на объекте приведет к значительным искажениям топографической информации. Не случайно в городских геодезических работах в СССР в 1963 году Госстроем было запрещено применение системы координат Гаусса-Крюгера.

В Новосибирской области проводится работа по установлению местной системы координат путем рансформирования плоских прямоугольных координат Гаусса-Крюгера из МСК-54 в СК НСО. Следует отметить работы [1, 7]. Даны практические рекомендации по применению разработанных технологий на производстве.

Таким образом, необходимость выбора геодезической проекции для инженерно-геодезических и городских работ, математического обоснования этого выбора и практическое подтверждение является актуальной и в настоящее время.

При выборе такой проекции необходимо выдержать следующие условия:

1. Проекция должна быть конформной, начальные параметры которой выбирают таким образом, что бы масштаб искажения при проектировании с эллипсоида на плоскость не превышал относительной погрешностей измерения линий.

2. Система отсчёта должна иметь одну математическую основу для всех городских, инженерно-геодезических и кадастровых работ.

3. Математическая основа должна быть математически связана с государственной системой координат. Погрешности перевычисления координат из одной системы в любую другую не должны превышать 0,0005 м.

Актуальным является вопрос выбора проекции наиболее подходящей для введения плоской системы координат. Линии и направления искажаются в любой проекции, то есть масштаб различен в разных местах карты. В общем случае, в произвольной проекции, масштаб зависит от положения точки относительно основной (начальной) точки проекции или стандартной (осевой) линии (параллель или меридиан) и азимута направления в данной точке. В таких проекциях сложно учитывать искажения проектируемых элементов при переходе с эллипсоида на плоскость. Необходимо знать не только координаты точки относительно начальной точки или линии, но и азимуты направлений на другие точки. Для простого и точного учета искажений при переходе с эллипсоида на плоскость необходимо выбирать проекции, в которых масштаб искажений не зависит от направления. Этому требованию отвечают только равноугольные проекции. Технологическое требование к проекции состоит в возможности учитывать неизбежных искажений

направлений, длин и площадей на всей территории, которую охватывает МСК. Погрешности вычисления искажений должны быть меньше погрешностей измерения линий [24].

Требования к простоте вычислений и малой величине искажений неизбежно приводят к необходимости отображения земной поверхности в зонах ограниченного размера. Оптимальным является проекция с минимальным количеством зон максимального размера и их единообразие. Следовательно, требования к проекции будут:

- равноугольность;
- малые искажения в пределах листа топографической карты;
- простота учета искажений в границах территорий значительных размеров;
- малое количество зон;
- единообразие зон.

Равноугольные проекции, которые получают плоские координаты, называются геодезическими. К ним относятся – азимутальная проекция Руссиля, коническая проекция Ламберта-Гаусса и поперечно-цилиндрические проекции Гаусса-Крюгера и UTM (Universal Transverse Mercator).

Основной недостаток азимутальных и конических проекций это индивидуальность каждой зоны проекций. Для каждой зоны задают свои постоянные проекции. Но при установлении МСК для каждого района в любой проекции необходимо задавать свои постоянные или параметры МСК [166]. При установлении МСК района в проекции Гаусса-Крюгера необходимо задать:

1. Значение координат начального пункта в ГСК (X_0, Y_0).
2. Значение координат начального пункта в МСК (x_0, y_0).
3. Долгота осевого меридиана МСК (L_0).
4. Высота поверхности относимости МСК (H_0).
5. Угол поворота осей (γ) МСК относительно ГСК в начальном пункте.

В работе [142] приведены основные параметры азимутальной или стереографической проекции. Следовательно, на основе этой работы и [166] при установлении МСК необходимо задать:

1. Значение геодезических координат начального пункта в ГСК (B_0, L_0).
2. Значение координат начального пункта в МСК (x_0, y_0).
3. Долгота осевого меридиана МСК равна долготе начального пункта (L_0).

4. Высота поверхности относимости МС (H_0).
5. Угол поворота осей (γ) МСК относительно ГСК в начальном пункте.

Применение конической проекции Ламберта можно обосновать при установлении МСК для вытянутых вдоль параллели трасс различных коммуникаций. Для таких работ можно выбрать, с учетом рекомендаций работы [160, 161], одну, максимум две зоны на расстояния в 1000 км или более. Для установления МСК в такой проекции потребуется задать примерно 7–8 параметров.

Для установления любой МСК в любой проекции необходимо задавать начальные параметры. Количество и вид параметров будут различны, но они необходимы для последующего применения МСК. При современном развитии вычислительной техники сложности установления любой проекции связаны только с правильностью выбранной методики и подбором соответствующего математического аппарата.

Требования, предъявляемые к математическим формулам должны соответствовать возможностям современным средствам измерений. Если использовать проекции и формулы преобразования координат, а, главное, редуцирования полевых измерений, которые применялись для топографо-геодезических работ конца прошлого века, то в результате построенные цифровые модели местности объектов не будут соответствовать задачам и требованиям, предъявляемым к вводимой ГСК-2011.

11.2 Стереографические проекции на секущую плоскость для обеспечения инженерно-геодезических-работ

В случаях использования геодезического обеспечения на локальных территориях возникает необходимость выбора соответствующей геодезической проекции. Не всегда достаточно принятой государственной системы координат Гаусса-Крюгера, как следствия поперечно-цилиндрической проекции. Для инженерно – геодезических и городских работ логично используют локальные, местные системы координат. Главной причиной поиска и выбора варианта геодезической проекции является требование уменьшения линейных искажений. Если проекция конформная, то по определению углы при проецировании с эллипсоида на плоскость не искажаются. Приложения выбранной при таком условии геодезической проекции разнообразны, касаются не только картографических тем, инженерно-геодезического обеспечения, но и решения задач природоохранных, экологических и геодинамических наблюдений.

Соблюдение минимальности линейных искажений может быть успешно достигнуто с использованием стереографических проекций, имеющей некоторые преимущества в сравнении с проекцией Гаусса-Крюгера. Особенно эти достоинства проявляются для локальных территорий округлой формы [1, 142, 244].

Стереографическую проекцию желательно использовать при выполнении геодезических и топографических работ, инженерных изысканиях, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений, межевания земель, ведения кадастров и осуществления иных специальных работ. Наиболее важны для геодезических приложений две стереографические проекции со свободно выбираемой центральной точкой – в определении Гаусса [244] и Руссиля. Геометрически проекцию Руссиля представляют как перспективную проекцию земной поверхности на касательную плоскость (рис. 125, 126).

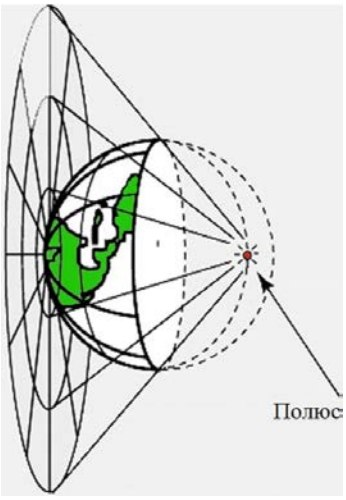


Рис. 125. Стереографическая проекция Руссиля

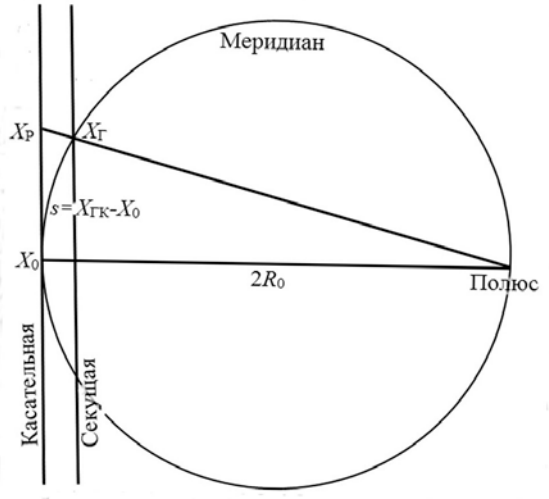


Рис. 126. Касательная и секущая плоскости

В работе [1] предложен модифицированный вариант реализации стереографической проекции Руссиля с проецированием на секущую плоскость, что предполагает уменьшение линейных искажений по сравнению с проекцией Гаусса-Крюгера.

Если совместить начало координат системы Гаусса-Крюгера и секущей проекции, достаточно просто осуществляется связь между абсциссами этих координат. Основой соотношения являются основные характеристические функции проекций на касательную плоскость (245) и секущую (246), геометрический смысл которых поясняет рисунок (Рис. 126).

$$x_P = 2R_0 tg\frac{s}{2R_0}, \tag{245}$$

$$x_c = 2R_0 \sin\frac{s}{2R_0} = 2R_0 \sin\frac{X - X_0}{2R_0}. \tag{246}$$

Обоснованать можно размеры территорий округлой формы (радиус 112 км и площадь 39400 км^2), для которых относительные линейные искажения

$$\frac{\Delta d}{d} \le \frac{1}{25000}.$$

с учетом рекомендаций [47]. Для вычислительного эксперимента была выбрана реально созданная около 200 лет назад триангуляционная сеть в Голландии (рис. 127). Результаты наблюдений углов и их уравнивания приведены в [244].

Методика перехода с проекции Гаусса-Крюгера на секущую плоскость была следующая.

1. Для сети как средние арифметические определяются координаты геометрического центра $B_0 = 53°6', L_0 = 6°12'$.
2. Начало системы координат Гаусса-Крюгера совмещается с началом системы координат стереографической проекции.
3. Выбираются два пункта сети, расположенные по разные стороны от центра в некотором удалении от него. На рис. 127 – это пункты, обозначенные заполненными треугольниками.
4. Производится пересчет координат этих пунктов из местной системы координат Гаусса-Крюгера в систему координат секущей плоскости в соответствии с формулами (245), (246).
5. По полученным координатам и измеренным углам выполняется расчет координат всех остальных пунктов сети. С использованием метода наименьших квадратов.
6. Использование для городских и инженерно-геодезических работ.

Далее был выполнен анализ линейных искажений для двух проекций по линии между пунктами, принятыми за опорные. Ее расстояние в пространстве $d = 114210,741$ м.

При использовании проекции Гаусса-Крюгера была вычислена длина между этими пунктами на плоскости $d = 114213,863м$.

Относительное искажение соответственно $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{36583}$.

При использовании стереографической проекции длина между этими пунктами на плоскости $d = 114213{,}387$ м. Относительное искажение соответственно $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{43159}$.

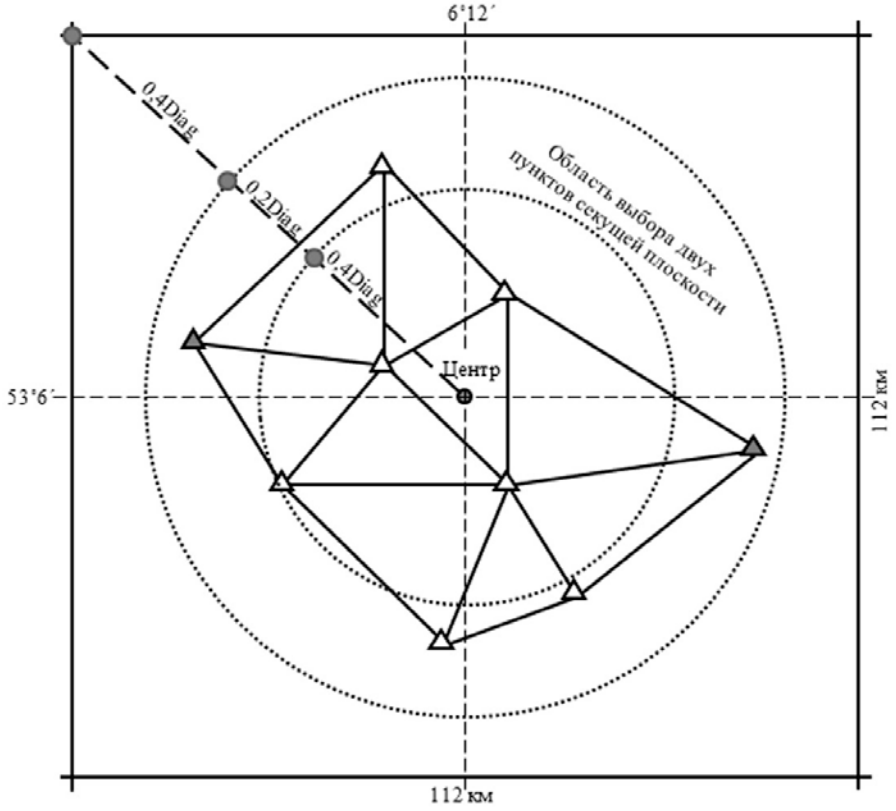


Рис. 127. Сеть триангуляции в Голландии

Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы:

1. Для локальных территорий использование стереографических проекций позволяет уменьшить линейные искажения.
2. Использование проекций на секущую плоскость целесообразно для обеспечения городских и инженерно-геодезических работ в горной местности [1], а также в маркшейдерских работах.

Автором были выполнены вычислительные эксперименты по собственным компьютерным программам, зарегистрированным в виде свидетельства в Министерстве РФ.

В настоящее время продолжаются научные исследования в направлении повышения точности преобразований координат [7, 24, 25]. Отметим фундаментальные работы [142, 244]. Сделано обоснование алгоритма повышения точности формулы масштаба для двенадцатиградусных зон.

Путей распространения координат много [7, 160, 161], но с учетом сложившихся обстоятельств дефицита времени, кадров, компьютеров придется выбирать какой-то компромиссный вариант на весь «переходный период». Точность геодезических сетей городов и республики в целом предопределяют качество и надежность многих других проектов, задач, связанных с земельным кадастром, навигацией, устойчивым развитием территорий.

Анализ геодезических проекций, применяющихся в настоящее время в различных странах, указывает на то, что каждая из них обладает как достоинствами, так и недостатками применительно к тем или иным условиям. Их выбор обусловлен главным образом удобством создания общегосударственной системы плоских прямоугольных координат и возможностью разработки приемлемых наставлений и инструкций для пользователей [12-14]. При этом, естественно, для решения локальных задач, например, при создании специальных высокоточных инженерно – геодезических построений такие системы неудобны. Здесь предлагается использовать локальные системы координат, часто не связанные с общегосударственной системой. Но, обеспечивающие минимальные искажения эллипсоидальных элементов на плоскости. Приложения созданной сети потенционально разнообразны, касаются не только картографических тем, инженерно-геодезического обеспечения, но и решения задач природоохранных, экологических и геодинамических наблюдений.

С точки зрения математического обеспечения самых различных геодезических проекций отмечается подавляющее преобладание проекций, полученных на основе теории конформных отображений поверхностей [241-244]. При оценке достоинств геодезических проекций учитывается их точность, удобство вычислений и величина искажений метрических элементов эллипсоида при их отображении на плоскости.

На территории Российской Федерации в настоящее время активно осуществляется практическая реализация государственной геодезической системы координат 2011 г. Соответственно существует необходимость уточнения математической и методологической основы сравнения параметров земного эллипсоида в государственных системах координат, схем преобразования координат, и решении проблем, возникающих при преобразовании координат из местных систем координат

в единую государственную. При этом должны учитываться результаты выполнения программы по построению современной спутниковой государственной геодезической сети России трех уровней (ФАГС, ВГС и СГС-1), а также точность ее связи с геодезическими сетями триангуляции и полигонометрии 1-4-го классов.

В статье [7] рассмотрено решение задачи по трансформированию плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из МСК-54 в СК НСО, возникшей в связи с введением на территории Новосибирской области новой местной системы координат. На реальном производственном объекте выполнено исследование применения различных математических моделей и технологий преобразования координат и сделано сравнение полученных результатов. Даны практические рекомендации по применению разработанных автором технологий на производстве.

При решении инженерно-геодезических задач в условиях городов общая принятая система порой дает большие исхажения и тем самым понижает точность выполняемых работ. Одним из способов решения этой проблемы является применение специального варианта проекции Гаусса-Крюгера для выполнения городских инженерно-геодезических работ [1].

В геодезической проекции Гаусса-Крюгера характеристическая функция (для точек осевого меридиана) наиболее проста и имеет вид:

$$x_G = X\ . \tag{247}$$

Такая характеристика проекции дает возможность перемещать начало координат по осевому меридиану в любую его точку, что может привести к упрощению формул без ущерба для их общности.

Это свойство проекции Гаусса-Крюгера имеет важное значение и будет использована для задания характеристической функции стереографической проекции сфероида со свободно выбираемой центральной точкой.

Пусть S – дуга центрального меридиана от параллели начала координат B_0 до параллели с широтой B, равная X-X_0 будет абсциссой x_G прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера. Тогда при y_R и y_G. Основная характеристическая функция стереографической проекции может быть представлена в виде

$$x_R = 2R_O tg\frac{s}{2R_O} = 2R_O tg\frac{x - x_O}{2R_O}\ . \tag{248}$$

где x_R - абсцисса в системе координат стереографической проекции, x_R - дуга меридиана от экватора до начала координат этой проекции,

X – дуга меридиана от экватора до текущей точки.

С помощью (247) и (248) легко установить аналитическую связь между характеристическими функциями проекций Гаусса-Крюгера. Совместим начала координат двух систем, тогда

$$x_R = 2R_O tg\frac{x_G}{2R_O}.$$

Полученную в таком виде характеристическую функцию стереографической проекции можно представить в более общей форме через абсциссу координат Гаусса-Крюгера, а именно

$$x_R = F(x_G) = 2R_O tg\frac{x_G}{2R_O}. \tag{249}$$

Рассмотрим теперь конформное преобразование плоскости Гаусса-Крюгера в плоскость Руссиля.

Известно, что конформное преобразование одной плоскости в другую должно удовлетворять комплексному уравнению

$$x_R + iy_R = F(x_G + iy_G). \tag{250}$$

Разложим $F(x_G + iy_G)$ по строке Тейлора, предполагая, что величина сравнительно невелика. Будем иметь

$$x_R + iy_R = F(x_G) + iy_G F^I(x_G) + \frac{i^2 y_G^2}{2}F^{II}(x_G) + \frac{i^3 y_G^3}{6}F^{III}(x_G) +$$
$$+\frac{i^4 y_G^4}{24}F^{IV}(x_G) + \frac{i^5 y_G^5}{120}F^V(x_G) + ...$$

Разделяя действительную и мнимую части обычных дифференциальных уравнений и учитывая, что $i^2 = -1, i^3 = -1, i^4 = 1, i^5 = 1$, получим

$$\begin{aligned} x_R &= F(x_G) - \frac{y_G^2}{2}F^{II}(x_G) + \frac{y_G^4}{24}F^{IV}(x_G) + ... \\ y_R &= y_G F^I(x_G) - \frac{y_G^3}{6}F^{III}(x_G) + \frac{y_G^5}{120}F^V(x_G) + ... \end{aligned} \tag{251}$$

Уравнения (251) в общем виде устанавливают связь прямоугольных конформных координат Гаусса-Крюгера и местной системы в стереографической проекции эллипсоида на плоскость.

Обе системы координат удовлетворяют условиям конформного отображения плоскостей, т. е. фундаментальным соотношениям Коши-Римана.

$$\frac{\partial x_R}{\partial x_G} = \frac{\partial y_R}{\partial y_G} = F^I(x_G) - \frac{y_G^2}{2} F^{III}(x_G) + \frac{y_G^4}{24} F^V(x_G) + \ldots$$
$$\frac{\partial x_R}{\partial y_G} = -\frac{\partial y_R}{\partial x_G} = -y_G F^{II}(x_G) + \frac{y_G^3}{6} F^{IV}(x_G) + \frac{y_G^4}{24} F^V(x_G) + \ldots \quad (252)$$

Имея в виду, что стереографическая проекция при заданной характеристической функции в виде (248) согласно уравнениям (252) является конформной, воспользуемся соотношениями (251) и установливается связь прямоугольных стереографических координат в местной системе с координатами Гаусса-Крюгера [47].

11.3 Линейные искажения при переходе от эллипсоида Красовского на секущий эллипсоид

При оценке достоинств геодезических проекций учитывается их точность, удобство вычислений и величина искажений метрических элементов эллипсоида при их отображении на плоскости. В случаях использования геодезического обеспечения на локальных территориях возникает необходимость выбора соответствующей геодезической проекции [1]. Для инженерно-геодезических и городских работ используют локальные, местные системы координат [7, 24, 25]. Если проекция конформная, то по определению углы при проецировании с эллипсоида на плоскость не искажаются. Приложения выбранной при таком условии геодезической проекции разнообразны, касаются не только картографических тем, инженерно-геодезического обеспечения, но и решения природоохранных, экологических и геодинамических задач. Главной причиной поиска и выбора варианта геодезической проекции является требование уменьшения линейных искажений. Соблюдение минимальности линейных искажений может быть успешно достигнуто с использованием стереографической проекции [244], имеющей некоторые преимущества в сравнении с проекцией Гаусса-Крюгера. Особенно эти достоинства проявляются для локальных территорий округлой формы [47, 142, 244]. Стереографическую проекцию желательно использовать при выполнении геодезических и топографических работ, инженерных изысканиях, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений, межевании земель, ведении кадастров и осуществлении иных специальных работ.

Для высокогорных территорий возникают определенные методические вопросы учёта рельефа [1]. Необходимость учёта высот геодезических пунктов над эллипсоидом (вспомогательной поверхностью) при переходе на плоскость известна. Например, в работах [22, 23] для

вычисления площади на заданной высоте предлагается использовать новый эллипсоид, поверхность которого совпадает с принятой для населённого пункта средней поверхностью.

Общая теория изображения земной поверхности на плоскости предусматривает первоначально редуцирование на принятый эллипсоид, а затем использование исходя из цели необходимой и достаточной картографической проекции. Например, целью является создание удобных и имеющих необходимую точность топографических карт и планов. Они востребованы для геодезического обеспечения как на государственном, региональном, местном, так и на локальном уровне. Карты 1 : 25 000 и крупнее востребованы при строительных изысканиях, геодинамических исследованиях и т. д. Развитие инженерно-геодезических работ определяет повышенные требования к минимальности искажений при создании картографических материалов о местности, где выполняется проектирование, изыскание, строительство и эксплуатация и о самом объекте строительства. Поэтому, в инженерно-геологических и геофизических работах в гидро- и энергостроительстве, в градостроительстве, в промышленном и гражданском строительстве, в горно-маркшейдерских работах востребованы специальные геодезические проекции и системы координат. Конечно, это должны быть конформные проекции, оптимально подходящие для решения инженерно-геодезических задач для конкретной территории. Вопрос выбора вида и характеристик геодезической проекции для многих инженерных объектов, городских работ актуален. Кроме учёта размеров картографируемой территории, бывает важен учёт её средней высоты над эллипсоидом.

Поэтому, рассмотрим степень влияния введения секущего эллипсоида, выбранного для высокогорной территории, на результаты проецирования на плоскость.

Учитывая относительную малость высоты поверхности в сравнении с размерами Земли, принимаем сжатие эллипсоида за константу равную сжатию эллипсоида Красовского (или любого другого). Соответственно, квадрат первого эксцентриситета не меняется e^2 = 0,006 693 4216.

Для принятого эллипсоида радиус кривизны первого вертикала

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}}.$$

И, соответственно

$$a = N_0 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}.$$

Пусть введён секущий эллипсоид (под принятым эллипсоидом высота $H_{\text{сек}}$ с минусом, над эллипсоидом с плюсом). На рисунке 128 секущий эллипсоид – вариант отсчётной поверхности для высокогорной территории.

При последующих процедурах редуцирования на эллипсоид и проецирования с эллипсоида на плоскость в алгоритмах особенно важен радиус первого вертикала. Поэтому увеличиваем его значение на величину $H_{\text{сек}}$ в центре локальной области (т. P с широтой $B_{\text{К}}$, см. рис. 128). В работе [142] это буквально так определено – «продолжение нормали к поверхности эллипсоида» и соответственно

$$N_{\text{сек}} = N_P + H_{\text{сек}}. \qquad (253)$$

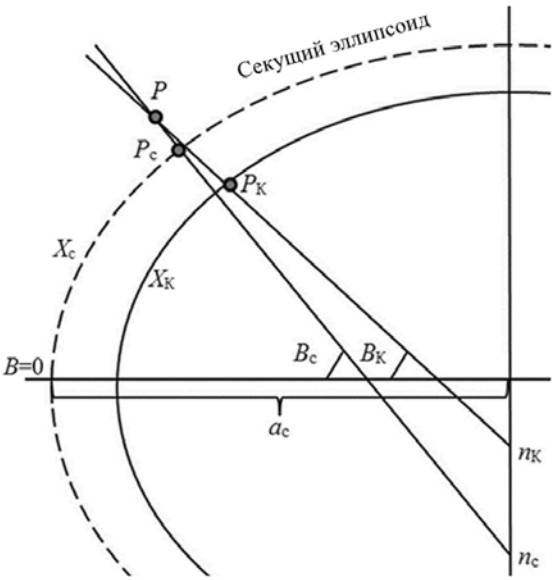


Рис. 128. Секущий (дополнительный, вспомогательный) эллипсоид

Получаем значение большой полуоси (см. рис. 128) для секущего эллипсоида и радиус меридиана, средний радиус кривизны для точки P:

$$a_c = N_{\text{сек}}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_P}\ ; \qquad (254)$$

$$M_{\text{сек}} = \frac{a_c}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B_P)^3}}; \qquad (255)$$

$$R_{\text{сек}} = \sqrt{M_{\text{сек}} N_{\text{сек}}}\ .$$

На рисунке 128 поясняются изменения при переходе на секущий эллипсоид направления нормальной линии и геодезической широты. Нормальная линия, проходящая через т. P, для эллипсоида Красовско-

го обозначена как $n_К$, для секущего эллипсоида $n_с$. Соответственно, геодезические широты подписаны как $B_К$ и $B_с$.

Пусть т. P имеет широту $B_К = 40^\circ 0' 0''$. Геодезическая высота над эллипсоидом Красовского $PP_К = H_К = 3000$ м. Это значение также назначаем величине $H_{сек} = 3000$ м. В соответствии с формулами (253) и (254) измененный радиус первого вертикала и большая полуось усеченного эллипсоида

$$N_{сек} = 6\ 387\ 083{,}047 \text{ м} + 3000{,}000 \text{ м} = 6\ 390\ 083{,}047 \text{ м};$$

$$a_с = 6\ 381\ 240{,}849 \text{ м}; \qquad a_с - a_к = 2995{,}849 \text{ м}.$$

После редуцирования т. P на секущий эллипсоид (т. $P_с$) по классическим алгоритмам сфероидической геодезии [142] широта $B_с$ и высота $PP_с = H_с$ будут иметь следующие значения: $B_с = 40^\circ 0' 0'',321$; $H_с = 8{,}310$ м. Длина дуги меридиана от экватора ($B = 0^\circ$) до точки на эллипсоиде с широтой B вычисляется как интеграл. Для точек $P_К$ и $P_с$, расположенных соответственно на эллипсоиде Красовского и на секущем эллипсоиде (см. рис.128), длины дуг будут следующие:

$$X_К = \int_0^{B_К} M_К dB_К \; ; \quad X_с = \int_0^{B_с} M_{сек} dB_с \; .$$

Их значения для приведённого выше примера (см. рис. 128) следующие:

$X_К = 4\ 429\ 607{,}368$ м; $X_с = 4\ 431\ 687{,}946$ м. Для широты $B = 40^\circ$ удлинение длины дуги меридиана от экватора составило $X_с - X_К = 2080{,}578$м. Относительное удлинение 1/2130.

Были сделаны расчёты для расстояний между двумя точками P и P' в одной меридианной плоскости (см. рис. 129).

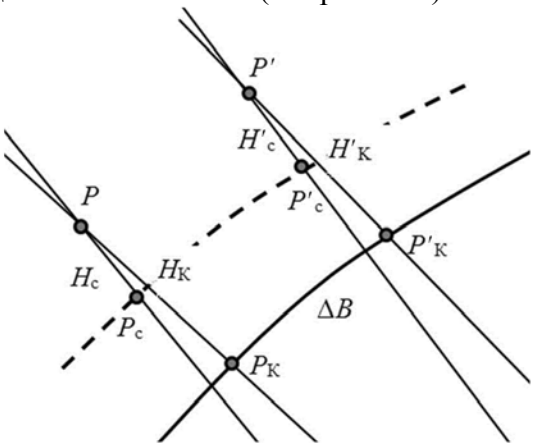


Рис. 129. Редуцирование точек на эллипсоид Красовского и на секущий (вспомогательный) эллипсоид

Выбор именно меридианной, а не произвольной секущей плоскости объясняется тем, что согласно теории сфероидической геодезии [142] в случае перехода на эллипсоид с другим значением большой полуоси геодезическая долгота не изменяется. Рисунок 129 является укрупнением рисунка 128 с добавлением второй точки P'. Проекция точки P на поверхность эллипсоида Красовского подписана как $P_К$, на поверхность секущего эллипсоида как $P_с$. Соответственно, для точки P' – это $P'_К$ и $P'_с$. Другие подписи на рисунке 129 поясняются приведенными ниже рисунка значениями исходных данных.

Задача: оценить величины линейных искажений по меридиану при переходе от эллипсоида Красовского к секущему эллипсоиду.

1. Исходные данные для разности широт между P и P' ($P_К$ и $P'_К$) $\Delta B = 1'$:

$$\text{т. } P\text{: } B_{P_К} = 40°0'0''; L_{P_К} = 73°30'0''; H_К = 3000\text{м};$$

$$\text{т. } P'\text{: } B_{P'_К} = 40°01'0''; L_{P'_К} = 73°30'0''; H'_К = 3000\text{м}.$$

Для секущего эллипсоида с $a_с$ = 6 381 240,849 м геодезические координаты будут следующие:

$$\text{т. } P_с\text{: } B_{P_с} = 40°0'0'',317754; L_{P_с} = 73°30'0''; H_с = 8,262\text{м};$$

$$\text{т. } P'_с\text{: } B_{P'_с} = 40°01'0'',317784; L_{P'_с} = 73°30'0''; H'_с = 8,268\text{м}.$$

Исходное расстояние между точками P и P'. После её редуцирования на эллипсоид Красовского и на секущий эллипсоид были получены значения 1850,612 м и 1851,481 м. На секущем эллипсоиде расстояние по меридиану стало больше, чем на эллипсоиде Красовского. Разность редуцированных расстояний 0,869 м. В относительной мере это соответствует 1/2130.

2. Исходные данные для разности широт между P и P' ($P_К$ и $P'_К$) $\Delta B = 1°$:

$$\text{т. } P\text{: } B_{P_К} = 40°0'0''; L_{P_К} = 73°30'0''; H_К = 3000\text{м};$$

$$\text{т. } P'\text{: } B_{P'_К} = 41°0'0''; L_{P'_К} = 73°30'0''; H'_К = 3000\text{м}.$$

Для секущего эллипсоида с $a_с$ = 6 381 240,849 м геодезические координаты будут следующие:

$$\text{т. } P\text{: } B_{P_с} = 40°0'0'',317754; L_{P_с} = 73°30'0''; H_с = 8,262\text{м};$$

$$\text{т. } P'\text{: } B_{P'_с} = 41°0'0'',319349; L_{P'_с} = 73°30'0''; H'_с = 8,605\text{м}.$$

Исходное расстояние между точками P и P' $S_{PP'} = 111097,131$м. После её редуцирования на эллипсоид Красовского и на секущий эллипсоид были получены значения 111046,181 м и 111098,339 м. Разность редуцированных расстояний равна 52,158 м. В относительной

мере это соответствует 1/2130, как и в описанном выше примере. То же соотношение соблюдается в случае использования значений больших полуосей принятого основного эллипсоида Красовского и секущего эллипсоида:

$$\frac{a_{\text{сек}} - a_{\text{К}}}{a_{\text{К}}} = \frac{1}{2130}.$$

Логично в этом случае назначить некоторый масштабный коэффициент. Для нашего примера

$$m_{\text{сек/К}} = \frac{a_{\text{сек}}}{a_{\text{К}}} = \frac{N_P + H_{\text{сек}}}{N_P} = 1,000469698. \qquad (256)$$

Полученные результаты свидетельствуют, что изменение длин линий после их редуцирования на секущий эллипсоид в горных и предгорных районах значимо и требует учета при использовании алгоритмов геодезических проекций для получения плоских координат.

Дополнительным подтверждением являются результаты вычислительного эксперимента по проецированию с эллипсоида на плоскость с использованием двух конформных проекций (см. табл. 53, 54).

Таблица 53

Результаты проецирования на плоскость дуги меридиана с $\Delta B = 1'$

Результаты проецирования, м	Проекция			
	Поперечно-цилиндрическая Гаусса- Крюгера ($L_0 = 75^\circ$)		Стереографическая Гаусса ($B_0 = 40^\circ$; $L_0 = 73^\circ 30'$)	
$H_{\text{сек}}$	0	3000	0	3000
x_1	4 430 677,254	4 432 761,218	–0,005	–0,005
y_1	–128 095,270	–128 155,519	–0,007	–0,007
x_2	4432527,974	4434612,808	1850,607	1851,476
y_2	–128064,113	–128124,348	–0,007	–0,007
d_{12}	1850,982	1851,853	1850,612	1851,481
$d_{12} - S_{12}$	–0,502	0,368	–0,873	–0,003
Относительные искажения	1/3685	1/5029	1/2122	1/543538

Для тех же точек P и P' (см. рис. 129), имеющих после редуцирования по нормалям на эллипсоиде Красовского точки $P_{\text{К}}$ и $P'_{\text{К}}$, выполнялось проецирование на плоскость в поперечно-цилиндрической проекции Гаусса-Крюгера и в стереографической проекции Гаусса. Для дуги меридиана $\Delta B = 1'$:

пункт 1 (P) $B_1 = 40^\circ 0'0''$; $L_1 = 73^\circ 30'0''$; $H_1 = 3000$ м;

пункт 2 (P') $B_2 = 40^\circ 1'0''$; $L_2 = 73^\circ 30'0''$; $H_2 = 3000$ м.

Координаты пунктов в пространственной прямоугольной системе координат:

$X_1 = 1\ 390\ 280{,}003$ м; $Y_1 = 4\ 693\ 506{,}605$ м; $Z_1 = 4\ 079\ 986{,}108$ м;

$X_2 = 1\ 389\ 941{,}934$ м; $Y_2 = 4\ 692\ 365{,}305$ м; $Z_2 = 4\ 081\ 404{,}254$ м.

Расстояние между пунктами 1 и 2 $S_{12} = 1851{,}485$ м.

Для дуги меридиана $\Delta B = 1°$:

пункт 1 (P) $B_1 = 40^\circ 0'0''$; $L_1 = 73^\circ 30'0''$; $H_1 = 3000$ м;

пункт 2 (P') $B_2 = 41^\circ 0'0''$; $L_2 = 73^\circ 30'0''$; $H_2 = 3000$ м.

Координаты пунктов в пространственной прямоугольной системе координат:

$X_1 = 1\ 390\ 280{,}003$ м; $Y_1 = 4\ 693\ 506{,}605$ м; $Z_1 = 4\ 079\ 986{,}108$ м;

$X_2 = 1\ 369\ 787{,}774$ м; $Y_2 = 4\ 624\ 326{,}001$ м; $Z_2 = 4\ 164\ 465{,}011$ м.

Расстояние между пунктами 1 и 2 $S_{12} = 111\ 097{,}131$ м.

Таблица 54

Результаты проецирования на плоскость дуги меридиана с $\Delta B = 1°$

Результаты проецирования, м	Проекция			
	Поперечно-цилиндрическая Гаусса – Крюгера ($L_0 = 75^\circ$)		Стереографическая Гаусса ($B_0 = 40^\circ$; $L_0 = 73^\circ 30'$)	
$H_{сек}$	0	3000	0	3000
x_1	4 430 677,254	4 432 761,218	–0,005	–0,005
y_1	–128 095,270	–128 155,519	–0,007	–0,007
x_2	4 541 729,266	4 543 865,463	111049,021	111 101,181
y_2	–126206,696	–126 266,057	–0,007	–0,007
d_{12}	111068,069	111 120,310	111 049,026	111 101,186
$d_{12} - S_{12}$	–29,061	23,180	–48,104	4,055
Относительные искажения	1/3823	1/4793	1/2310	1/27397

11.4 Выводы

1. Применение МСК необходимо для качественного обеспечения инженерной и любой другой деятельности на различных объектах.

2. Способы построения МСК и выбор проекции должен быть обоснован.

3. Информация о способах и параметрах построения МСК и выбранной проекции должна быть полной и доступной пользователям.

4. При обработке полевых измерений необходимо редуцировать результаты измерений в МСК.

5. Формулы прямого и обратного преобразования координат из МСК в общеземные должны быть в информации об МСК (п. 4) и с подробным числовым примером.

6. Используя формулу (252) можно установить связь прямоугольных стереографических координат в местной системе с координатами Гаусса-Крюгера.

7. Возможен выбор оптимального метода построения геодезической сети (триангуляция, полигонометрия, трилатерация, и их сочетания, спутниковые технологии), который при обеспечении требуемой точности является наиболее экономичным.

8. Для выполнения инженерно-геодезических работ в условиях городов рекомендуется применять более практичные проекции, в том числе специальный вариант проекции Гаусса – Крюгера для инженерно-геодезических работ на территории города.

Главное технологическое положительное решение по итогам проведённого исследования состоит в том, что имеющиеся алгоритмы по использованию геодезических проекций могут быть упрощенно реализованы без пересчёта соответствующих коэффициентов. Для этого достаточно учитывать только соотношения (253) и (254). Далее следует определение коэффициента (256), умножение на который адаптирует имеющиеся формулы вычисления плоских координат, масштаба изображения используемой специальной геодезической проекции [1]. Затем эти параметры точки на поверхности секущего эллипсоида могут быть использованы в традиционных алгоритмах геодезических проекций, в частности, для геодезического обеспечения маркшейдерских работ и инженерных работ в условиях высокогорья.

Учение не вправе считать себя кучкой избранных, чуждых задачам практической жизни. Будучи членами великой семьи трудящихся, они должны быть озабочены тем, как используются их открытия. Они хотят, чтобы наука была поставлена на службу народу.

Ф. Жолио-Кюри

12 СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУТЕМ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СДВИЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ДАННЫМ

12.1 Использование тематического картографирования

Моделирование методами картографии природных, социально-экономических и экологических систем (геосистем) позволяет выявить многие необходимые для их анализа свойства и характеристики. Многое зависит от успешного и адекватного объекту и его компонентам отображению, визуализации количественной пространственно-временной информации. Тем самым объясняется большое значение картографического метода для народного хозяйства в обеспечении всех видов научной, хозяйственной, образовательной, культурной, оборонной деятельности общества, включая задачи территориального управления и планирования, инженерного проектирования, строительства и освоения земель на всех уровнях.

Важность приобретают экологические территориальные факторы (источники и характер загрязнения, уровни загрязнения основных природных компонентов окружающей среды, особенности миграции ареалов загрязнения по территории и т. п.). В конечном счете, экологическое состояние территории обусловливает как общую концепцию хозяйственного использования территории, так и множество частных вопросов (развитие либо сокращение тех или иных отраслей промышленности, комфортность проживания населения, особенности рекреационного использования территории и пр.) [110, 111].

На сегодняшний день в тематической картографии весьма эффективным средством наглядного и обобщенного представления экологической обстановки в пределах конкретной территории являются интегральные экологические карты. В СГУГиТ была создана такая карта для г.Новосибирска. Очень важную информацию и возможность реализации последующих обоснованных организационных решений дают

цифровые карты для анализа радиационной обстановки [111]. При картографировании используются различные информационные источники, как например аэрокосмические снимки. В частности, они были использованы при картографировании экзогенных геологических процессов региональных морфосистем [114]. Разнообразность видов и большие объемы информации о природных ресурсах предполагают использование и совершенствование геоинформационных систем [144].

Здесь рассмотрены некоторые примеры использования тематического картографирования при изучении геодинамических процессов, как природного, так и техногенного происхождения. Тематические карты позволяют более качественно исследовать различные геодинамические системы в аспекте прогноза природных и техногенных катастроф [89]. Для региональных геодинамических объектов это могут быть сейсмоактивные области [102, 199, 247] и зоны вулканизма [93, 96-101]. Визуализация смещений точек земной поверхности [117, 119] по результатам цикловых геодезических и гравиметрических измерений позволяет более обосновано выделять активные геологические структуры, блоки, тектонические разломы. Это знание необходимо для прогнозирования мест возможных сейсмических событий и принятия соответствующих профилактических мер для обеспечения безопасности населения, промышленных объектов и др.

Разработка и эксплуатация многих месторождений вызывает изменение внутреннего состояния приповерхностного слоя земной коры. При добыче нефти и газа меняется внутрипластовое давление, добыча угля, полиметаллов и т.д. вызывает аналогичные явления, приводящие к горным ударам.

При разработке месторождений твердых полезных ископаемых нарушение устойчивости бортов карьера приводит к аварийным ситуациям – оползневым процессам, разрушению транспортных магистралей, завалам дорогостоящей техники и нередко сопровождается человеческими жертвами. При этом большую роль в устойчивости бортов карьера играет напряженно-деформированное состояние, изменяющееся как под воздействием техногенных факторов (выемка руды и породы), так и под влиянием природных факторов – современной геодинамической активности тектонических нарушений.

Поэтому, в районах эксплуатации месторождений создаются техногенные геодинамические полигоны. На них проводятся регулярные комплексные наблюдения, в том числе, геодезические. Результатом многоцикловых геодезических измерений является определение смещений центров, пунктов геодезической сети, развитой в пределах ме-

сторождений. Таким образом по количественным данным возможно понимание деформационных полей, блоковой структуры и количественные характеристики их динамики.

Авторм использованы результаты определения смещений пунктов геодезической сети Качканарского горнообогатительного комбината (ГОК) (г.Качканар, Свердловская обл.) в 2010 и 2011 годах. Пункты сети и некоторые объекты ГОК показаны на рис. 130. Интерполяционная картина горизонтальных движений территории ГДП – рис. 131. Зеленым цветом изображена сеть конечных элементов, использованная для необходимых вычислений. Обозначения осей соответствуют геодезической системе – *x* на север, *y* на восток.

На рисунке 132 изображено изменение границы и формы, а на рисунке 133 представлен основной инвариант – тензоры деформации. Сжатие – синие стрелки внутрь, растяжение – красные стрелки наружу.

На следующих рисунках 134-141 представлена визуализация полей смещений и их составляющих, а также общеупотребляемых характеристик полей деформаций.

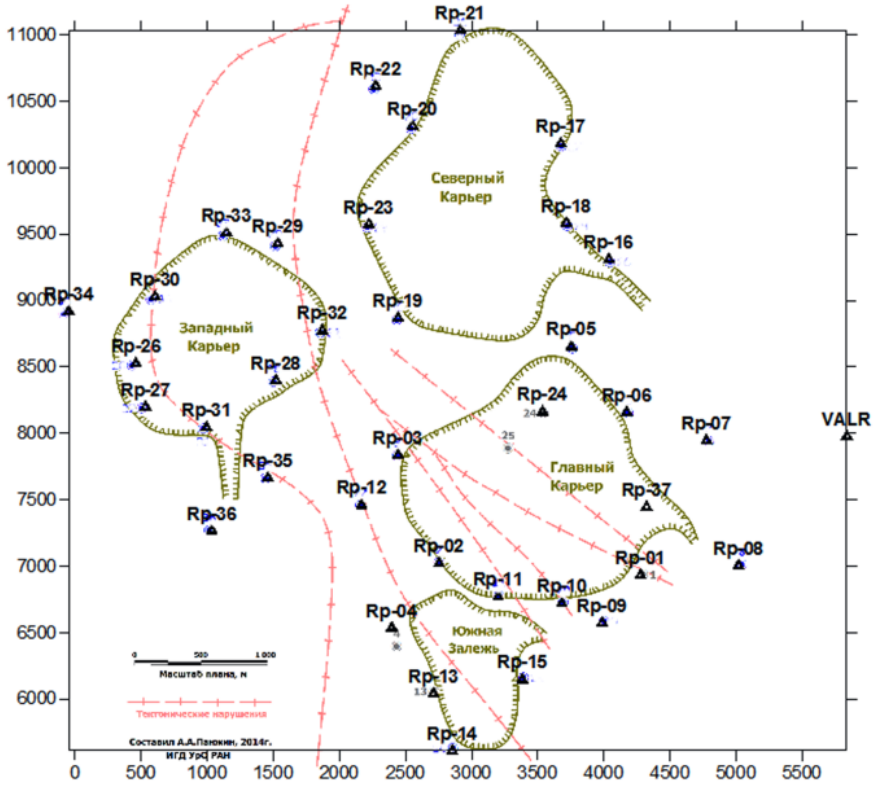


Рис. 130. Пункты сети наблюдений

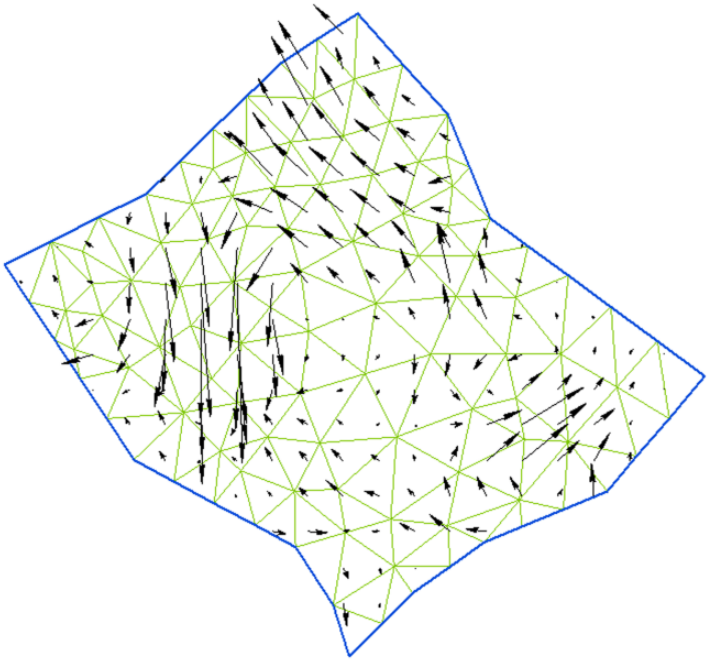


Рис. 131. Горизонтальные движения

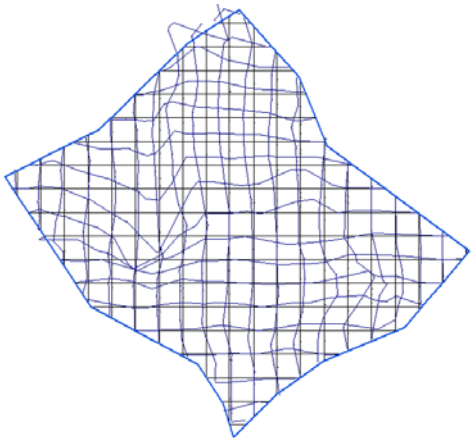


Рис. 132 Изменение формы

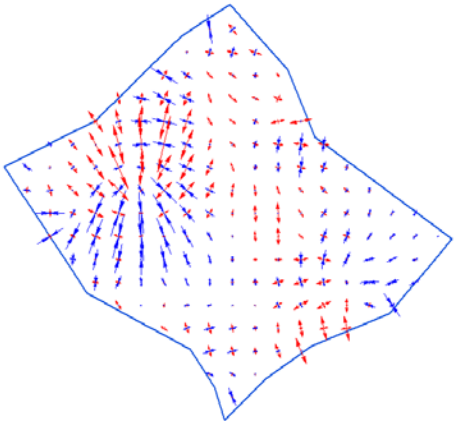


Рис. 133. Тензоры деформации

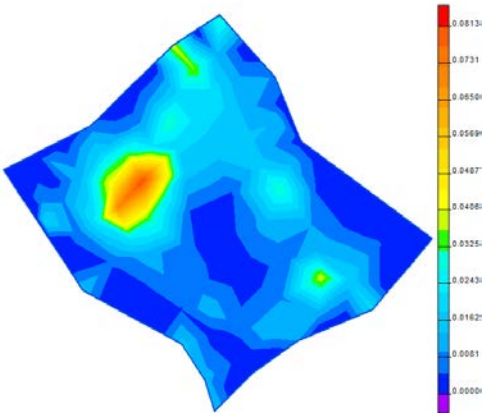


Рис. 134. Общие перемещения δ (м)

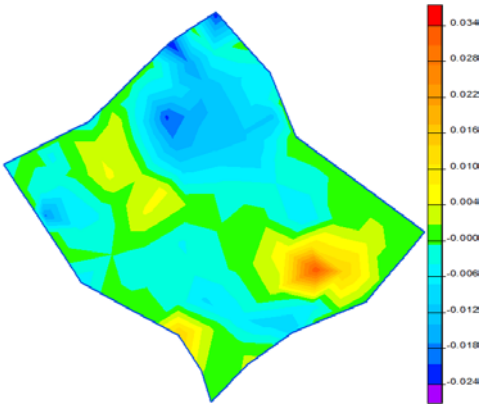


Рис. 135. Перемещения δ_x (м)

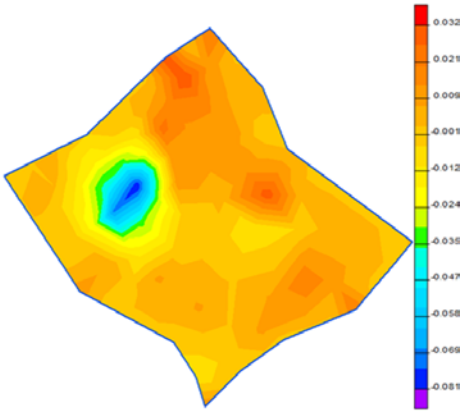


Рис. 136. Перемещения δ_y (м)

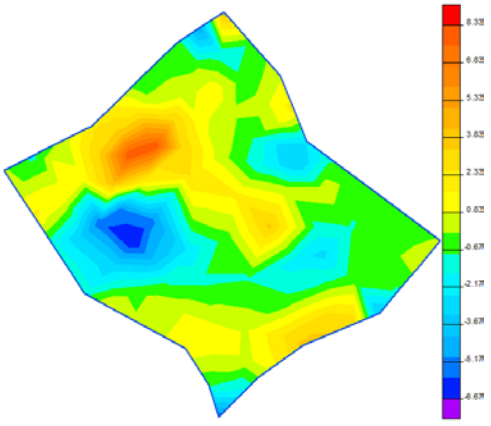


Рис. 137. Деформация ε_{xx} (10^{-5})

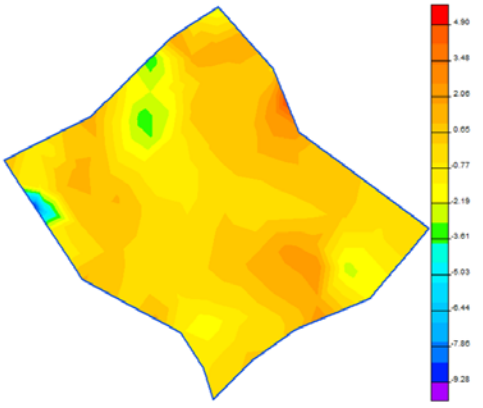


Рис. 138. Деформация ε_{yy} (10^{-5})

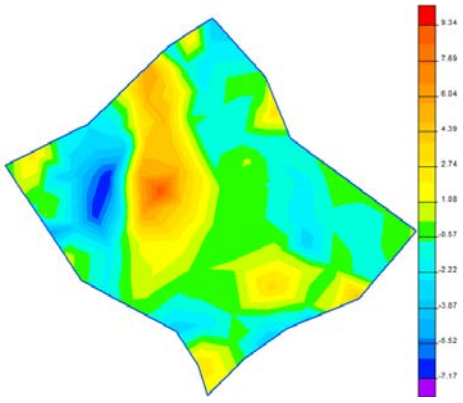


Рис. 139. Деформация γ_{xy} (10^{-5})

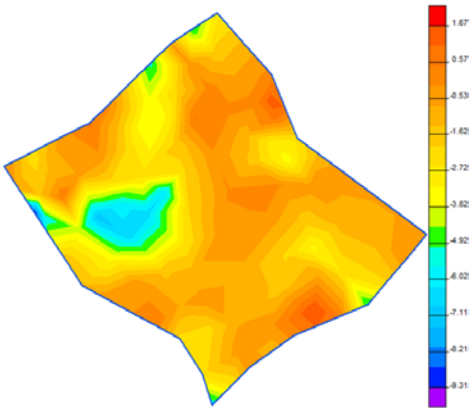


Рис. 140. Главная деформация ε_1 (10-5)

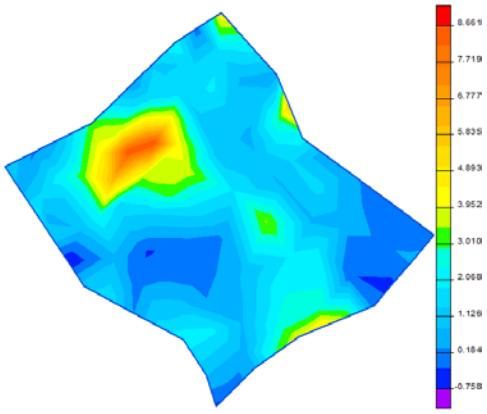


Рис. 141. Главная деформация ε_2 (10-5)

Также, для выполнения комплексного исследования структуры территории ГДП была сделана визуализация вертикальных смещений за тот же период наблюдений – рис. 142 и рис. 143.

Первоначальные выводы о геодинамической ситуации на Качканарском ГДП основанные на экспертной оценке визуализированных разнообразных полей следующие. Имеется три участка (кластера). Пункты внутри каждого кластера имеют сходные между собой характеристики физических полей горизонтальных смещений и деформаций. Картина вертикальных смещений также согласуется с ними.

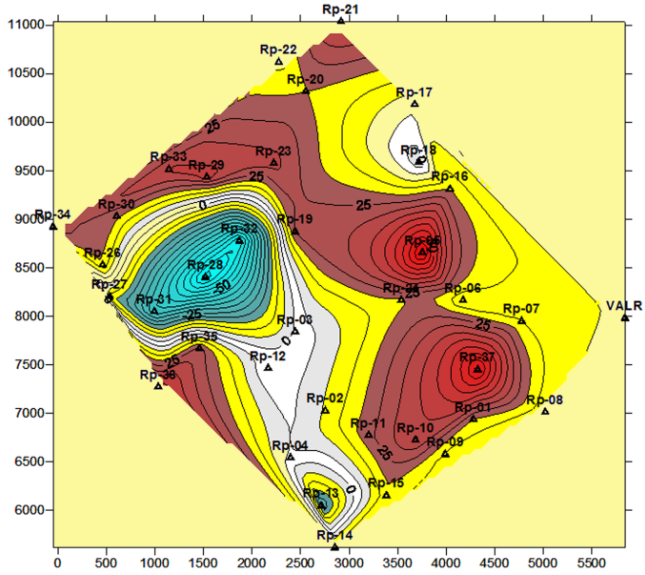


Рис. 142. Изолинии и заливка

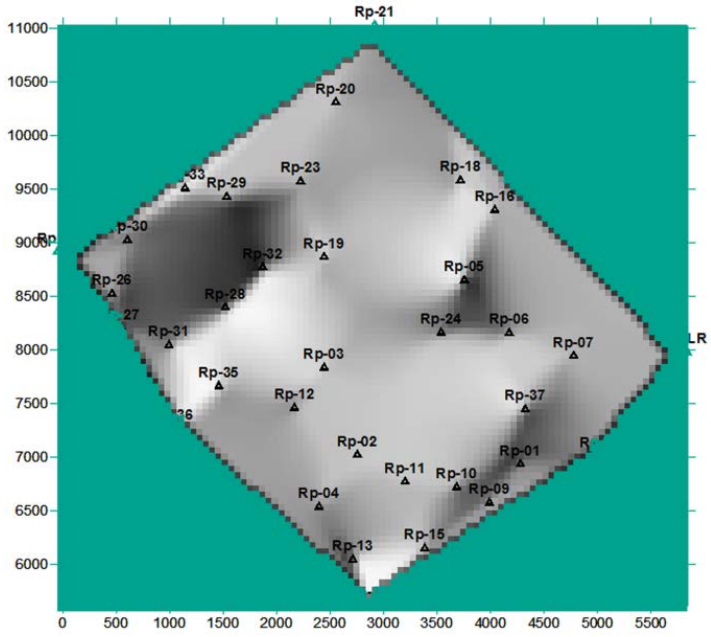


Рис. 143. Затененное изображение

Здесь рассмотрены некоторые примеры визуализации характеристик деформационных полей по данным геодезических наблюдений на Качканарском горнообогатительном комбинате (ГОК) (г. Качканар, Свердловская обл.). На основе полученных данных выполнена оценка напряженно-деформированного состояния массива в области влияния карьеров Качканарского ГОКа, установлена группировка векторов движений в кластеры, границы которых во многом совпадают с тектоническими структурами Гусевогорского месторождения. Зафиксированный измерениями в трех циклах знакопеременный характер трендовых и цикличных деформаций позволяет сделать выводы о наличии в массиве миграции зон концентрации деформаций. В результате регулярная смена направлений действия главных напряжений, приводит к «расшатыванию» массива горных пород и потере устойчивости бортов в областях концентрации деформаций [153-156, 176-178].

Приведенные здесь в качестве примера визуализационные картины могут быть далее представлены как слои в ГИС, тем самым облегчая процесс экспертной оценки исследуемого геодинамического объекта и последующей выработки оптимальных организационных решений по обеспечению промышленной безопасности.

12.2 Определение географического центра на основе геоинформационных технологий (на примере оз. Байкал)

(совместно с Калюжиным В.А., Обиденко В.И.)

12.2.1 Актуальность определения географического центра

Туризм является одной из крупнейших в мире сфер деятельности по оказанию услуг. На сферу туризма приходится около 10 % мировых инвестиций и 3,8 % от мирового валового внутреннего продукта (ВВП). Предполагается, что суммарный вклад международного туризма в ВВП ежегодно будет расти в среднем на 4 %. Согласно разработанной Всемирной туристической организацией Концепции развития туризма до 2020 г. количество международных туристов превысило 1 млрд человек в 2010 г. и составит 1,5 млрд человек к 2020 г. [179].

В России развитие внутреннего и въездного туризма в регионах является приоритетным направлением в экономике и важной государственной задачей [201]. За последнее время разработаны федеральный закон и ряд подзаконных актов, целью которых является создание условий для устойчивого экономического роста субъектов Российской Федерации и страны в целом.

Известно, что развитие регионального рынка туристических услуг в первую очередь зависит от туристско-рекреационных ресурсов субъекта федерации: природных, социально-экономических и историко-культурных [201].

В аспекте историко-культурного и природного ресурса территория каждого региона, рассматриваемая как объект для предложения туристических услуг, имеет свои уникальные метрические и морфометрические характеристики: граница, площадь, средняя высота над уровнем моря, географический центр. Закрепление на местности географического центра региона имеет общественный, политический, культурный, познавательный и практический смыслы. Географический центр является своеобразным символом целостности и стабильности границ территории. Наличие закреплённого на местности географического центра повышает привлекательность региона с позиции туристско-рекреационного использования. Для определения географического центра территории (центра тяжести) существует ряд способов [37, 58, 59, 232, 276].

За последние 10–15 лет геоинформационные технологии стали применяться во всех сферах деятельности человека, в том числе и в туризме. Наиболее широкое распространение в России получило программное обеспечение геоинформационных систем (ПО ГИС): произ-

водства США MapInfo Professional (MapInfo), GeoMedia Professional (GeoMedia), ArcGIS, а также ГИС «Карта 2011» (ГИС «Карта») программный продукт ЗАО Конструкторское бюро «Панорама» (Россия).

Сейчас трудно представить, например, разработку нового туристического маршрута, геомаркетинговые исследования, выбор места для отдыха и т. д. без применения ПО ГИС. ПО ГИС также обладает функционалом автоматического определения (вычисления) центра тяжести (центроида) для полигональных типов объектов, который можно использовать при определении географических центров территорий. Однако в настоящее время в научных публикациях отсутствуют исследования возможности использования центроида полигонального объекта, определенного с использованием ПО ГИС, в качестве географического центра территории. Это обусловило проведение исследования, описание которого представлено в настоящей статье.

В качестве объекта исследования принята территория оз. Байкал, являющегося уникальным природным объектом, самым глубоким озером на планете, крупнейшим естественным резервуаром пресной воды, обладающим огромным туристско-рекреационным потенциалом.

12.2.2 Исходные данные и методика

При выполнении исследований по определению метрических характеристик территорий следует использовать наиболее качественный и актуальный картографический материал, с достаточной степенью подробности отображающий особенности формы этой территории. В общем случае предпочтительнее использовать для подобных проектов государственные цифровые топографические карты (ЦТК), созданные в настоящее время на всю территорию Российской Федерации в масштабах
1 : 100 000 и 1 : 50 000. Достоинство этих карт заключается в том, что они являются наиболее точным (создание ЦТК осуществлялось путём векторизации растрового изображения комплектов издательских оригиналов топографических карт, изготовленных на малодеформируемом пластике) и наиболее актуальным информационным ресурсом о территории страны. Кроме того, использование государственных ЦТК для проведения исследований позволяет сохранить чистоту эксперимента и исключить влияние фактора качества используемого картографического материала на получаемые результаты. Такой эксперимент может быть полностью воспроизведён независимым исследователем, так как полученное им на основании государственных ЦТК метрическое описание объекта исследований (территория оз. Байкал) с достаточной

точностью (по количеству поворотных точек границ, их координат, площади и периметра объекта) будет идентично метрике объекта, использованной в исследованиях.

Для определения геометрическогоцентра оз. Байкал были использованы 56 номенклатурных листов (НЛ) ЦТК масштаба 1 : 100 000, обновленных в период 2008–2011 гг. На рисунке 144 отображены НЛ, обновленные в 2008 г. (ярко-зеленый); 2009 г. (зеленый); 2010 г. (коричнево-зеленый) и 2011 г. (лиловый).

Для получения единого площадного объекта фрагменты границы оз. Байкал, попадающие на отдельные НЛ ЦТК масштаба 1 : 100 000, были объединены. Затем были исключены из этого площадного объекта все острова и закрытые мелководные заливы. При этом за границу территории оз. Байкал была принята береговая линия с отметкой 455,9 м.

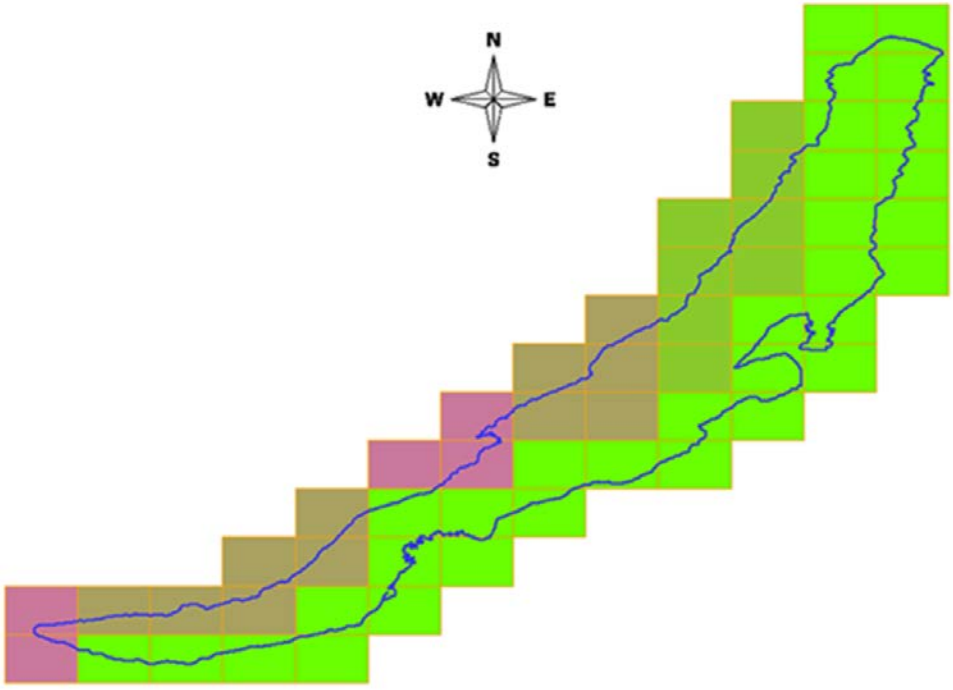


Рис. 144. Использованные в эксперименте НЛ ЦТК масштаба 1 : 100 000, покрывающие озеро Байкал

В конечном виде метрическое описание единого площадного объекта, соответствующего территории оз. Байкал, было подготовлено в системе геодезических координат СК-95 в форматах вышеуказанных ПО ГИС. Геометрические характеристики территории «озеро Байкал»

имеют следующие значения: площадь – 32 535 км^2; периметр – 2206,8 км.

Контур береговой границы оз. Байкал обладает следующими характеристиками детальности метрического описания: количество сегментов границ – 36 590; минимальная длина сегмента границы – 4,96 м; максимальная длина сегмента границы – 563,86 м; средняя длина сегмента границы – 60,32 м.

Таким образом, координатное описание объекта исследования в ЦТК масштаба 1 : 100 000, использованное для определения геометрического центра оз. Байкал, подготовлено с достаточной степенью детальности.

Критерий оценки качества результатов. Для оценки возможности принятия центроида полигонального (площадного) объекта, определенного в ПО ГИС (ArcView, MapInfo, GeoMedia и ГИС «Карта»), в качестве географического центра территории в исследовании предложено использовать следующий критерий качества определения центра территории.

Критерий качества определения центра территории вычисляется как минимум суммы квадратов расстояний S от центроида (центра тяжести) полигонального объекта, метрически описывающего в ПО ГИС данную территорию, до каждой поворотной точки её границы [58, 59, 232, 276] и определяется по следующей формуле

$$[S^2] = \min. \qquad (257)$$

12.2.3 Результаты

Основным способом определения географического центра территории как её центроида был выбран простой по реализации и теоретически обоснованный приём: среднее арифметическое из координат всех поворотных точек её границы [58]. При вычислении координат центроида территории оз. Байкал в ПО ГИС (MapInfo, GeoMedia, ArcGIS, ГИС «Карта») использовался стандартный инструментарий для определения центроида полигонального объекта.

Также в исследование было включено многофункциональное ПО GeoOper, специально разработанное в 2012 г. одним из авторов публикации для высокоточного определения геометрических характеристик больших по площади территорий на поверхности эллипсоида, использовавшееся для определения метрических параметров территории Российской Федерации и её регионов [144]. Программный модуль этого ПО позволяет автоматически оценивать качество векторизации конту-

ра объекта: насколько равномерно (с одинаковой детальностью) произведено метрическое описание контура границ территории.

Результаты определения координат центроида и вычисления суммы квадратов расстояний от него до всех вершин контура границ озера приведены в таблице 55.

По результатам исследования определено, что вычисленные географические центры территории оз. Байкал (см. таблицу 55) в вышерассмотренных ПО ГИС располагаются в пределах 120 км (рис. 145).

Географический центр оз. Байкал, полученный как среднеарифметическое из координат вершин границ территории и в ПО GeoOper, располагаются на о. Ольхон (см. рис. 145) в 2,6 км восточнее поселения Харанцы и в 2,0 км от западного берега острова на территории Островного лесничества Прибайкальского национального парка ФГБУ «Заповедное Прибайкалье». Расстояние на эллипсоиде между центроидами, определенными этими способами, составляет 7,3 м. Значение критерия (257) для программы GeoOper принимает минимальное значение из всех полученных в исследовании вариантов (см. таблицу 55).

Таблица 55

Ведомость координат центроидов оз. Байкал и значений критерия оценки качества результатов

Название ПО ГИС/способа	Широта (N)			Долгота (E)			Критерий оценки качества вычислений [S^2], км^2
	°	′	″	°	′	″	
Среднее арифметическое	53	13	5,5	107	27	27,7	1 077 590 047,3
MapInfo	53	37	2,9	109	7	22,3	1 612 819 263,8
GeoMedia	53	37	3,1	108	7	51,8	1 236 957 419,6
ArcGIS	53	22	14,8	107	34	51,2	1 090 651 617,6
ГИС «Карта»	53	37	0,2	108	7	51,8	1 227 419 350,0
GeoOper	53	13	5,3	107	27	27,5	1 077 589 557,0

В MapInfo центроид озера располагается у береговой линии Баргузинского залива в 118,9 км к северо-востоку от среднего арифметического варианта. Значение критерия (257) для центроида, определенного в MapInfo, на 49,7 % больше, чем в программе GeoOper (см. таблицу 55).

Центроид озера, определенный в GeoMedia, располагается вне водной поверхности оз. Байкал в 69 км западнее острова Ольхон (рис. 145). Значение критерия (257) в этом случае на 14,8% больше, чем в программе GeoOper (см. таблицу 55).

Определение географического центра озера в ArcGIS показывает его расположение примерно посередине пролива Малое Море (рис. 145) в 7,2 км к западу от западного берега о. Ольхон и в 18,8 км на северо-восток от варианта, вычисленного как среднее арифметическое. Значение критерия (257) для положения центроида, определённого в ArcGIS, на 1,2% больше, чем в программе GeoOper (см. таблицу 55).

Центроид озера, определённый в ПО ГИС «Карта», располагается внутри озера напротив полуострова Святой Нос в 63,0 км на северо-восток от арифметического (рис. 145). Значение критерия (257) на 13,9% больше, чем в программе GeoOper (см. таблицу 55).среднего географических центров оз. Байкал

Рис. 145. Схема расположения вариантов определения географического центра оз.Байкал

Исследованные авторами варианты (см. таблицу), показали, что для программы GeoOper критерий (257) принимает минимальное значение из рассмотренных способов определения положения геометрического центра оз. Байкал. Варианты положения центра оз. Байкал, полученные в ПО ГИС (MapInfo, GeoMedia, ArcGIS и ГИС «Карта») по критерию (257) отличаются от GeoOper на 1,2–49,7 %.

Таким образом, рассмотренное в работе ПО ГИС не всегда можно использовать для определения географического центра территории.

Географический центр оз. Байкал с координатами 53°13'5,3"N; 107°27'27,5"E может быть рекомендован для закрепления его на местности. Тем самым обеспечится социальное, туристическое и рекриационное значение такого географического символа.

12.3 Выводы

Приводится пример использования тематического картографирования при изучении геодинамических процессов в аспекте прогноза природных и техногенных катастроф. Визуализация смещений точек земной поверхности по результатам цикловых геодезических и гравиметрических измерений позволяет более обосновано выделять активные геологические структуры, блоки, тектонические разломы. Это знание необходимо для прогнозирования мест возможных сейсмических событий и принятия соответствующих профилактических мер для обеспечения безопасности населения, промышленных объектов и др.

Территория каждого региона, рассматриваемая как объект для предложения туристических услуг, имеет свои уникальные метрические и морфометрические характеристики: граница, площадь, средняя высота над уровнем моря, географический центр. Закрепление на местности географического центра региона имеет общественный, политический, культурный, познавательный и практический смыслы. Географический центр является своеобразным символом целостности и стабильности границ территории. Наличие закреплённого на местности географического центра повышает привлекательность региона с позиции туристско-рекреационного использования. В последние десятилетия разработаны новые геоинформационные технологии, которые стали широко применяться в геодезии, картографии и т. д. Программное обеспечение подобных технологий позволяет автоматически определять центроид объекта полигонального типа. Однако возможность использования центроида для определения географического центра территории изучена недостаточно. В этой связи выполнены обзор существующих способов определения географического центра и исследование существующих геоинформационных технологий. Дана оценка их применения при нахождении координат географического центра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии описана реализация принципа совместной математической обработки геодезических и гравиметрических измерений с включением в состав оцениваемого вектора параметров переменных масс геодинамического объекта. При этом обеспечивается оптимальное решение задачи определения закономерностей движений, текущих и прогнозных оценок геодинамических объектов и характеристик их точности в виде ковариационных матриц. Предлагается использование полученных уравнений наблюдений.

Представлена разработанная методика настройки по критерию оптимальности (минимуму обобщенной дисперсии оценок определяемых параметров). Она позволяет объективно определять дополнительные геодезические и гравитационные параметры (коэффициенты) модели динамики объекта, которые расширяют возможности применения геодезии и гравиметрии при изучении геодинамических процессов.

Предложены технологические решения и программное обеспечение, позволяющие выполнять оперативную комплексную математическую обработку и пространственно-временную интерпретацию больших массивов геодезических и гравиметрических наблюдений. При этом обеспечиваются более наглядная и информативная, чем раньше, визуализация полей смещений и деформаций по дискретным данным о движениях пунктов, новые возможности для оперативного решения задач прогноза, снижения риска и уменьшения последствий геодинамических катастроф природного и техногенного характера.

Таким образом, расширены возможности поиска решений обратных некорректных задач геофизики по разнородным данным. Разработанные методики изучения геодинамических процессов на основе моделирования меняющихся во времени геодезических и гравитационных параметров позволяют решать межотраслевые научно-технические проблемы исследований как на техногенных геодинамических полигонах в местах разработки полезных ископаемых, строительстве и эксплуатации крупных инженерных сооружений, так и в районах с повышенной природной сейсмо-тектонической опасностью (вулканы, зоны сочленения синклинальных образований и платформ и др.).

Разработанные технологические решения позволяют принимать более обоснованные управленческие решения по обеспечению устойчивого развития территорий, в том числе экологического равновесия, снижению риска и уровня последствий катастроф природного и техно-

генного характера, что имеет огромное социальное и экономическое значение для многих регионов России.

Проведенные в монографии научные исследования позволяют обозначить перспективы дальнейшего совершенствования комплексных исследований по изучению геодинамических явлений природного и техногенного характера. В частности, требуют проведения специального изучения вопросы включения в этап совместной математической обработки геодезических и геофизических наблюдений различного пространственно-временного масштаба. Их реализация потребует, по-видимому, выявления возможности автоматизированной идентификации структуры геодинамических объектов с учетом их прочностных, физических и механических характеристик для принятия решений по управлению геодинамической ситуацией. Математическая обработка и интерпретация результатов должны вестись в реальном времени с автоматической регистрацией развивающихся деформаций и связанных с ними изменений геофизических полей и пространственного положения опорных реперов. По-видимому, потребуется расширить класс математических моделей, описывающих структуру, меняющиеся гравитационное поле и напряженно-деформированное состояние геодинамических объектов.

Изучение геодинамических объектов и процессов должно опираться на серьезные теоретические исследования, основным содержанием которых является моделирование движений и полей деформаций и напряжений с учетом разрывов и неоднородностей в земной коре.

Здесь сделан обзор наиболее используемых в настоящее время кинематических и деформационных моделей блоковых движений и алгоритмов их получения по геодезическим данным. Отмечена наглядность и информативность визуализации полей смещений и деформаций по дискретным данным о движениях пунктов. Использование тематических карт и ГИС улучшают возможности для оперативного решения задач прогноза, снижения риска и уменьшения последствий геодинамических катастроф природного и техногенного характера.

Геодезические данные об изменении координат точек земной поверхности являются экспериментальной основой понимания картин деформационных полей и причин происходящих в них изменений. Здесь описаны некоторые возможности использования систем дифференциальных уравнений для качественного исследования горизонтальных движений земной поверхности.

Описание движений поверхности логично выполнять с использованием математической теории поля. По изменениям геодезических элементов (координат, высот, направлений) после повторных измере-

ний можно представить поле векторов смещения геодезических пунктов. При изучении напряжённо-деформированного состояния земной поверхности полученные вектора можно использовать не только для вычисления тензора деформации земной поверхности на исследуемом участке, но и дифференциальных характеристик векторного поля. Одна из них имеет название дивергенции. Авторы статьи предлагают определять дивергенцию векторного поля поверхностных смещений по дискретным геодезическим наблюдениям векторов смещений, выполненным только на поверхности изучаемой территории. Модель векторного поля сдвижений может быть выбрана с учетом набора исходных данных и плотности размещения геодезических пунктов – носителей пространственных координат.

В данной монографии рассмотрен специальный вариант проекции Гаусса-Крюгера для проектирования инженерно-геодезических работ для городских условий. Обращено внимание на положительные качества стереографических проекций. Для локальных территорий округлой формы линейные искажения при переходе на плоскость меньше, чем при переходе на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера.

Расширение объёмов изыскательских и инженерных работ, необходимых при создании различных крупных промышленных объектов, предъявляет требование уточнения многих алгоритмов и методик картографического отображения территорий строительства и эксплуатации. Таковыми объектами являются, например, линейные сооружения – автомобильные и железные дороги, ЛЭП, трубопроводы. Крупномасштабные карты должны сопровождать строительство и эксплуатацию плотин гидроэлектростанций, мест разработки полезных ископаемых, объекты городской инфраструктуры и др. Многие из объектов, требующих геодезического обеспечения, располагаются в предгорной и горной местности. В большинстве случаев используемые алгоритмы специальных геодезических проекций не учитывают высоту территории. Соответственно, необходим учёт высоты картографируемой местности. В данной монографии представлены результаты анализа значимости введения секущего (вспомогательного) эллипсоида для решения задачи уменьшения искажений при проецировании на плоскость линий и координат точек горных территорий. Приведены основные формулы, позволяющие в удобном виде уточнить алгоритмы геодезических проекций с учётом высоты территории. Даны результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих предложения по технологическому улучшению алгоритмов геодезических проекций. В основе улучшения лежит использование масштабного коэффициента, отражающего изменение большой полуоси эллипсоида.

Здесь представлены некоторые результаты научных исследований автора монографии в области геодезии и гравиметрии за 35 лет работы в НИИГАиК, СГГА, СГУГиТ. Это меняющиеся названия одного и того же высшего учебного заведения г.Новосибирска.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абжапарова Д. А. Математическая обработка инженерных геодезических сетей в стереографической проекции Гаусса // Вестник СГГА.– 2014. – Вып. 2 (26). – С. 27–32.
2. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 352 с.
3. Алексеев, А. С. К развитию концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений. Проблемы геофизики XXI века [Текст]: В 2 кн. Кн. 2 / А. С. Алексеев; отв. ред. А. В. Николаев. – М.: Наука, 2003. – 333 с.
4. Антонов, В.А. Введение в теорию ньютоновского потенциала / В.А. Антонов, Е.И. Тимошкова, К.В. Холшевников // М.: Наука, 1988. – 272 с.
5. Антонов, В.А. Аналитическое представление потенциала однородного эллиптического конуса / В.А. Антонов, Баранов А.С. // «Журнал технической физики», – 2001, т. 71, вып. 10. С. 8 – 12.Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии: В 2 т. Т.2. монография – М.: ФГУП «Картгеоцентр». 2006. – 360 с.
6. Артюшков, Е. В. Геодинамика [Текст] / Е. В. Артюшков. – М.: Наука, 1979.
7. Афонин К.Ф. Преобразование плоских прямоугольных координат Гаусса-Крюгера из МСК-54 в СК НСО // Вестник СГГА. – 2010. – Вып. 1 (12). – С. 57-62.
8. Афонин К.Ф. Технология редуцирования измеренных величин на плоскость для расширенных зон проекции Гаусса-Крюгера // Интерэкспо Гео-Сибирь. Выпуск № -1 / том 1 / 2011– С. 92-196.
9. Байкальский геодинамический полигон. Методика исследований и первые результаты изучения современных движений земной коры [Текст] / ред. Э. Э. Фотиади.- Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1970. – 180 с.
10. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486с.
11. Берлянт, А. М. Свойства визуализации как способа моделирования геоизображений [Текст] / А. М. Берлянт // Геодезия и картография. – 2005. – №12.- С. 43–52.

12. Берлянт, А. М. Картографический словарь [Текст] / А. М. Берлянт. – М.: Науч. мир., 2005.- 424 с.
13. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
14. Большое трещинное Толбачинское извержение (1975 – 1976 г.г., Камчатка) [Текст] / отв. ред. С.А.Федотов. – М.: Наука, 1984.- 637 с.
15. Бондаренко П. М. Моделирование тектонических полей напряжений элементарных деформационных структур. Экспериментальная тектоника: методы, результаты, перспективы [Текст] / П. М. Бондаренко.- М.: Наука, 1989. – с. 45-52.
16. Бородзич Э. В. Перспективы развития прогностических исследований / Э. В. Бороздич, А. М. Галинский, И. Н. Яницкий [Текст] // Прогноз землетрясений (Душанбе).- 1988.- № 10.- С. 268 – 285.
17. Вальтух, К.К. Теория стоимости: статистическая верификация, информационное обобщение, актуальные выводы. Вестник РАН, 2005, том 75, М 9, с. 793-817.
18. Викулин, А. В. Физика волнового сейсмического процесса [Текст] /А. В. Викулин. – Петропавловск-Камчатский: Изд-во КГПУ, 2003. – 150 с.
19. Викулин А.В. Мир вихрей. – Петропавловск-Камчатский: Камчат-ГТУ, 2008а. – 230 с.
20. Виноградов А.В. Формулы связи прямоугольных координат некоторых конформных проекций //Тр. ОмСХИ. – 1972. – Т. 90. – С.55-58.
21. Виноградов А.В. Анализ некоторых способов преобразования координат пунктов из системы в систему // Геодезия и картография. – 2007. – № 10. – С.31–36.
22. Виноградов А. В. Повышение точности вычисления площади участков застроенных территорий // Геодезия и картография. – 2010. – № 9. – С. 10–13.
23. Виноградов А. В., Столбов Ю. В. Учёт высоты при вычислении площади участка на застроенных территориях // Землеустройство, кадастр и мониторинг земель. – 2010. – № 5. – С. 61–63.
24. Виноградов А. В. Об установлении единой координатной системы в геодезических работах // Геодезия и картография. – 2010. – №5. – С.16-18.
25. Виноградов А. В., Мазуров Б. Т. Перспективы использования специальных геодезических проекций и местных систем координат // Вестн. СГУГиТ. – 2017. – Т. 22. – № 1. – С. 18–29.

26. Вовк, И. Г. Влияние техногенных вариаций силы тяжести на положение отвесов плотин ГЭС [Текст] / И. Г. Вовк, А. С. Суздалев // Геодезия и картография. – 1990. – № 2. – С. 14 – 16.
27. Вовк, И. Г. Моделирование результатов угловых измерений в переменном поле силы тяжести [Текст] / И. Г. Вовк // Геодезия и картография. – 1993. – № 2. – С. 8–10.
28. Воздействие современных геодинамических движений на устойчивость бортов карьеров / А. Д. Сашурин, В. А. Бермухамбетов, А.А. Панжин, С.В. Усанов, В.Е. Боликов // Проблемы недропользования. – 2017. – № 3 (14). – С. 38–43.
29. Гзовский М.В. Математика в геотектонике. – М. : «Недра». – 1971. – 240 с.
30. Геодинамика и напряженное состояние недр Земли [Текст] : тр. междунар. конф. – Новосибирск: СО РАН, 1999.- 511 с.
31. Геодинамика и напряженное состояние недр Земли [Текст] : тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2001.- 425с.
32. Геодинамика и напряженное состояние недр Земли [Текст] : тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2003.- 425с.
33. Геодинамика и напряженное состояние недр Земли [Текст] : тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2005.- 530с.
34. Гольдин С. В. Физика «живой» Земли. Проблемы геофизики XXI века [Текст] : В 2 кн. / С. В. Гольдин; отв. ред. А. В. Николаев. – М.: Наука, 2003. – 311 с.
35. Губанов В.С. Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. Санкт-Петербург. «Наука». 1997. 318 с.
36. Гуляев Ю.П. Прогнозирование деформаций сооружений на основе результатов геодезических наблюдений: монография. – Новосибирск: СГГА, 2008. – 256 с.
37. Джаман В. О., Заячук М. Д., Заячук О. Г. Определение географического центра территории и оценка транспортно-географического положения административных центров Черновицкой области. URL: http://collectedpapers.com.ua/ru/herald/527/viznachennya-geografichnogo-centru-teritoriyi-ta-ocinka-transportno-geografichnogo-polozhennya-administrativnix-centriv-cherniveckoyi-oblasti-dzhaman-v-o-zayachuk-m-d-zayachuk-o-g (дата обращения: 12.03.2018).

38. Демидов, С. П. Теория упругости [Текст] / С. П. Демидов. – М.: Высш. шк., 1979.- 432 с.
39. Добрецов Н. Л. Глубинная геодинамика [Текст] / Н. Л. Добрецов, А. Г. Кирдяшкин, А. А. Кирдяшкин.- 2-е изд., доп. и перераб. – Новосибирск: СО РАН, фил. «Гео», 2001.
40. Дорогова И. Е. Изучение движений и деформаций земной коры на геодинамическом полигоне Таштагольского железорудного месторождения // Вестник Сибирской государственной геодезической академии. – 2010. – № 2. С. 9-13.
41. Дорогова И.Е. Изучение горизонтальных движений земной коры вращательного характера по данным геодезических наблюдений. Геодезия и картография. 2013. № 4. С. 37-40.
42. Дорогова И. Е. Выявление блоковой структуры области земной коры, испытывающей горизонтальные движения вращательного характера // Геодезия и картография. – 2013. – № 5. – С. 36–39.
43. Дударев В.И., Колмогоров В.Г. Состояние проблемы комплексного изучения современной геодинамики Сибири в конце двадцатого столетия. Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). 2014. № 4 (28). С. 3-12.
44. Зарзура Ф.Х., Мазуров Б.Т. Исследование кодовых и фазовых дифференциальных ГНСС и систем WADGPS и OMNISTAR / Ф.Х. Зарзура, Б.Т. Мазуров // Геодезия и картография. – 2013. – № 7. – С. 2-4.
45. Зарзура Ф. Х., Мазуров Б. Т. Повышение точности дифференциальной GPS и кинематики реального времени для GPS-сетей / «ГЕО-СИБИРЬ-2013», 15-26 апреля 2013 г., Новосибирск: Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия»: сб. материалов в 3 т. – Новосибирск: СГГА, 2013. – Т. 1. – С. 200-205.
46. Зарзура Ф. Х., Мазуров Б. Т., ЭссаиАли М.Х. Прогнозные Модели динамики вантовых мостов по данным ГНСС// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2014. – №4С. – С. 40-44.
47. Зенин В.Н. К вопросу о выборе геодезической проекции для инженерно-геодезических работ. Известия Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1968, №6. С. 63-66.
48. Золотарев, Г. С. Инженерная геодинамика [Текст] / Г. С. Золотарев. – М.: МГУ, 1983.- 328 с.
49. Зоненшайн Л. П. Введение в геодинамику [Текст] / Л. П. Зоненшайн, Л. А. Савостин. – М.: Недра, 1979. 265 с.

50. Зубков, А. В. Напряженное состояние верхней части земной коры Урала [Текст] / А. В. Зубков // Докл.. РАН. – 1997. – Т. 356, № 6. С. 69-76.
51. Еремеев, В. Ф. Теория высот в гравитационном поле [Текст] / В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. – М.: Недра, 1972.- 145 с.
52. Есиков Н.П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности [Текст] / Н. П. Есиков. – Новосибирск: Наука, 1979. – 182 с.
53. Ефимов, А.Б. Исследование напряженно-деформированного состояния вблизи магматического очага [Текст] / А. Б. Ефимов, С. С. Демин // Вулканология и сейсмология. – 1979. – № 1. – С. 16 – 27.
54. Идельсон Н.И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. Геодезиздат. Москва 1947, 358 с.
55. Илюхин, С.Р. Исследование геодинамики региона Крым-Западный Кавказ методами GPS-измерений [Текст] / С. Р. Илюхин, В. Я. Шестопалов // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 3. – С. 9-16.
56. Идентификация движений и напряженно-деформированного состояния самоорганизующихся геодинамических систем по комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям [Текст] : монография / В. А. Середович, В. К. Панкрушин , Ю. И. Кузнецов, Б. Т. Мазуров , В. Ф. Ловягин ; под общ. ред. В.К. Панкрушина; СГГА. – Новосибирск, 2004. – 356 с.
57. Иордан В. Руководство по геодезии. Том 1. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов. РЕДБЮРО ГУГК при СНК СССР. М., 1939, 639 с.
58. Калюжина Л. Н., Калюжин В. А., Сачкова А. Н. Сопоставление способов определения географического центра территории // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2015. – № 5/С. – С. 34–38.
59. Калюжин В. А., Мазуров Б. Т., Обиденко В. И. Определение географического центра на основе геоинформационных технологий (на примере оз. Байкал). Геодезия и картография. – 2018. – Т. 79. – № 11. – С. 9–14..
60. Кафтан, В. И. Современные движения земной коры [Текст] / В. И. Кафтан, Л. И. Серебрякова.- М., 1990.- 149 с. Т. 28 (Геодезия и аэросъемка. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР).
61. Кашников, Ю. А. Исследования современных движений земной коры с помощью спутниковых систем [Текст] / Ю. А. Кашников,

С. В. Гришко, Н. Ю. Гуляев // Геодезия и картография. – 2001. – № 2. – С. 12 – 18.
62. Кейлис-Борок, В. И. Динамика литосферы и прогнозирование сейсмической опасности [Текст] / В. И. Кейлис-Борок // Комплексные исследования по физике Земли. – М.: Наука, 1989. – С. 9 – 26.
63. Кноринг, Л. Д. Геологу о математике. Советы по практическому применению [Текст] / Л. Д. Кноринг, В. Н. Деч. – Л.: Недра, 1989. – 208 с.
64. Колмогоров А.Н. К обоснованию метода наименьших квадратов. Успехи математических наук, т. 1, вып.1, 1946. С. 57-70.
65. Колмогоров, В. Г. Современная кинематика земной поверхности юга Сибири [Текст] / В. Г. Колмогоров, П. П. Колмогорова. – Новосибирск: Наука, 1990. – 153 с.
66. Колмогоров В. Г., Дударев В. И. Состояние проблемы комплексного изучения современной геодинамики Сибири в конце двадцатого столетия // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 4 (28). – С. 3–12.
67. Колмогоров В. Г., Калюжин В. А. Приповерхностные деформации в районе Таштагольского геодинамического полигона // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № С/5. – С. 15–19.
68. Колмогоров В.Г., Мазуров Б.Т., Панжин А. А. Алгоритм оценки дивергенции векторных полей движений земной поверхности по геодезическим данным. Геодезия и картография. 2018. – Т. 79. – № 10. – С. 46–53.
69. Колмогоров В.Г., Мазуров Б.Т. Определение дивергенции векторных полей движений земной поверхности. Интерэкспо ГеоСибирь. 2018. Т. 1. С. 165-170.
70. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
71. Крамаренко А. А., Мазуров Б. Т., Панкрушин В. К. Вычислительный эксперимент идентификации движений и напряженно-деформированного состояния сооружений и объектов инженерной геодинамики по геодезическим наблюдениям // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2005. – № 6. – С. 3–14.
72. Крамаренко А. А., Мазуров Б. Т., Панкрушин В. К. Математическое обеспечение идентификации движений и напряженно-деформированного состояния сооружений и объектов инженерной геодинамики по геодезическим наблюдениям // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2005. – № 5. – С. 3–13.
73. Кузнецов, Ю.И. Математическое обеспечивание решения задачи определения вращательных движений геодинамических объектов

по геодезическим данным / Ю.И. Кузнецов, В.К. Панкрушин // Сб. материалов науч. конгр. «ГЕО – Сибирь 2005», Т.3,ч.2. – Новосибирск: СГГА, 2005. – С. 146-155.
74. Кузнецов, Ю.И. Идентификация геодинамических систем на основе упруговязких механики Гамильтона – Лагранжа и рекуррентного фильтра Калмана / Ю.И. Кузнецов, В.К. Панкрушин // Вест. СГГА. – 2006. Вып. 11.- С. 65-79.
75. Кузнецов, Ю.И. Аэрокосмический мониторинг в анализе движения блока земной коры. / Ю.И. Кузнецов, В.И. Тихонов // Вест. СГГА. – 2006. – Вып. 11. С. 94-97.
76. Кузнецов Ю.И., Мазуров Б.Т., Никитина Ю.В. Математическая модель волноводов в земной коре. Интерэкспо Гео-Сибирь. 2008. Т. 3. № 1. С. 86-90.
77. Кузнецов Ю.И., Мазуров Б.Т., Тихонов В.И. Математическая модель вращательных кольцевых структур Земли // ГЕО-СИБИРЬ-2007. III Междунар. науч. конгр.: сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 25–27 апреля 2007 г.).– Новосибирск, 2007. Т. 3. – С. 61–66.
78. Курленя, М. В. Современные проблемы нелинейной геомеханики. Геодинамика и напряженное состояние недр Земли [Текст] / М. В. Курленя, В. Н. Опарин // Тр. междунар. конф. – Новосибирск: СО РАН, 1999. – С. 5-20.
79. Линник Ю.В.. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
80. Ли Сыгуан. Вихревые структуры Северо-Западного Китая. – М.–Л.: Госгеолтехиздат, 1958. – 130 с.
81. Лухнев А.В. Вращение и деформации земной поверхности в Байкало-Монгольском регионе по данным GPS-измерений [Текст] / А. В. Лухнев, А. И. Саньков, А. И. Мирошниченко, С. В. Ашурков, Э. Калле // Геология и геофизика. – 2010. – №7. – С. 1006-1009.
82. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли [Текст] / В. А. Магницкий. – М.: Недра, 1965.- 379 с.
83. Мазуров, Б. Т. Учет динамических свойств объекта при выборе схемы наблюдений [Текст] / Б. Т. Мазуров // Математ. обработка и интерпретация многомерных временных рядов геодез. наблюдений: межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск, НИИГА-иК, 1989.- Т. 39(79) – С. 62 – 71.
84. Мазуров, Б. Т. Выбор избыточных измерений для анализа динамических объектов с принятой моделью движения [Текст] / Б. Т.

Мазуров // Тез. докл. IX-го съезда ВАГО, Новосибирск, 24-28 сент. 1990 г.- Новосибирск, 1990. С. 25 – 26.
85. Мазуров, Б. Т. Рекуррентные формулы для выбора наиболее информативных измерений [Текст] / Б. Т. Мазуров // Математ. обработка результатов геодез. наблюдений: межвуз. сб. науч. тр. / НИИГАиК.- Новосибирск, 1993.- Т. 51 (91).- С. 36 – 41.
86. Мазуров Б. Т. Структурная идентификация движений мобильных блоков с помощью последовательной кластер-процедуры [Текст] / Б. Т. Мазуров // Математ. обработка результатов геодез. наблюдений: межвуз. сб. науч. тр. / НИИГАиК.- Новосибирск, 1993.- С.75-81.
87. Мазуров Б. Т. Структурная идентификация движений земной коры с помощью последовательной кластер-процедуры [Текст] / Б. Т. Мазуров // Итоги XLII научно-техн. конф: межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск: СГГА, 1994.- С. 15 – 16.
88. Мазуров Б. Т. О непараметрических методах обработки геодезических данных [Текст] / Б. Т. Мазуров // Соврем. проблемы геодезии и оптики: L научно-техн. конф. преподавателей СГГА.- Новосибирск, 2000. – С. 33.
89. Мазуров Б.Т., Панкрушин В.К., Середович В.А. Математическое моделирование и идентификация напряженно-деформированного состояния геодинамических систем в аспекте прогноза природных и техногенных катастроф. Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). 2004. № 9. С. 30-35.
90. Мазуров, Б. Т. О возможностях геодезического метода определения напряженно-деформированного состояния геодинамических систем [Текст] / Б. Т. Мазуров // Соврем. проблемы геодезии и оптики: сб. материалов LIII междунар. научно-техн. конф., посвящ. 70-летию СГГА, 11-21 марта 2003 г. Ч.II. – Новосибирск: СГГА, 2003. – С. 247-251.
91. Мазуров Б. Т. Идентификация напряженно-деформированного состояния геодинамических систем на основе комплексных геодезических и геофизических наблюдений [Текст] / Б. Т. Мазуров, В. К. Панкрушин, В. А. Середович // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. междунар. конф.-Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2004.- С. 175 – 183.
92. Мазуров, Б. Т. Математическая обработка комплексных геодезических и геофизических наблюдений в условиях извлечения и перемещения больших объемов руды и пород [Текст] / Б. Т. Мазуров // Проблемы и перспективы развития горных наук: тр. меж-

дунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2005.- С. 184 – 193.
93. Мазуров Б.Т. Моделирование и идентификация геодинамического объекта в вулканической области по комплексным нивелирным и гравиметрическим наблюдениям [Текст]: / Вестник Сибирской государственной геодезической академии. – 2006. – № 11. – С. 84-94.
94. Мазуров Б.Т. Математическая обработка нивелирных и гравиметрических наблюдений в условиях извлечения и перемещения больших объемов руды и пород // Изв. вузов. Горный журнал. – 2006. – № 4. – С. 99–104.
95. Мазуров, Б. Т. Фрактальный подход к идентификации геологически закрытых разноглубинных структур по аэрокосмическим съемкам [Текст] / Б. Т. Мазуров, В. К. Панкрушин, В. А. Середович // Тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2006. – С. 161-165.
96. Мазуров, Б. Т. Анализ вертикальных движений по результатам нивелирования линии Кызыл – Кош-Агач / Б. Т. Мазуров, С. С. Титов // Геодезия и картография – 2006. – №4. – С. 53 – 57.
97. Мазуров Б. Т. Модель системы наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в районе действующего вулкана //Изв. вузов. Горный журнал. – 2007. – № 3. – С. 93–102.
98. Мазуров Б. Т. Идентификация напряженно-деформированного состояния вулканической области по результатам геодезических и геофизических наблюдений // Изв. вузов. Горный журнал. – 2007. – № 7. – С. 58–62.
99. Мазуров, Б.Т. Модель вертикальных движений земной поверхности и изменений гравитационного поля в районе действующего вулкана //Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 2. – С. 97–106.
100. Мазуров Б. Т. Совместная математическая обработка и интерпретация нивелирных и гравиметрических наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в районе действующего вулкана Известия высших учебных заведений // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 4. – С. 11–21.
101. Мазуров Б. Т. Совместная математическая обработка разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2007. – № 6. – С. 30–39.

102. Мазуров Б. Т. Поля деформаций Горного Алтая перед Чуйским землетрясением / Б. Т. Мазуров // Геодезия и картография. – 2007. – № 3. – С. 48–50.
103. Мазуров Б. Т. Компьютерная визуализация полей смещений и деформаций // Геодезия и картография. – 2007. – № 4. – С. 51–55.
104. Мазуров, Б.Т. Пятиточечная модель гравитирующего усеченного конуса / Б.Т. Мазуров // Изв. вузов. Горный журнал. – 2008. – № 5. С. 58–62.
105. Мазуров, Б.Т. Некоторые модели аппроксимации гравитирующего влияния усеченного конуса. Сб. материалов V Международного научного конгресса «ГЕО-СИБИРЬ-2009», т.1, ч.2. – Новосибирск, 2009. – С. 35-39.
106. Мазуров, Б.Т. Влияние перемещаемых гравитирующих масс на результаты наблюдений и их интерпретацию, Междунар.конф. «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли», ИГД СО РАН, – Новосибирск, 2009. – С. 115-118.
107. Мазуров Б. Т. Некоторые примеры определения вращательного характера движений земных блоков по геодезическим данным // Геодезия и картография. – 2010. – № 10. – С. 58–61.
108. Мазуров Б. Т. Аппроксимация гравитационного влияния конусообразных форм земного рельефа // Известия вузов. Горный журнал. – 2010. – № 8. – С. 62–66.
109. Мазуров Б. Т., Дорогова И. Е., Дербенев К. В. Горизонтальные движения земной коры вращательного характера, наблюдаемые на геодинамических полигонах // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2012. Т. 1. № 1. С. 232-236.
110. Мазуров Б.Т., Николаева О.Н., Ромашова Л.А. Совершенствование информационной базы региональных ГИС (РГИС) для инвентаризации и картографирования ресурсов. Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2012. № 2-1. С. 130-135.
111. Мазуров Б.Т., Николаева О.Н., Ромашова Л.А. Интегральные экологические карты как инструмент исследования динамики экологической обстановки промышленного центра Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2012. № 2-1. С. 88-92.
112. Мазуров Б.Т., Некрасова О.И. Гравитирующее влияние конусообразных форм рельефа на результаты геодезических измерений // Геодезия и картография. – 2013. – № 5. – С. 2–6.
113. Мазуров Б. Т., Некрасова О. И. Конечно-элементная модель конусообразных форм рельефа для учета их гравитирующего влия-

ния на результаты геодезических измерений // Геодезия и картография. – 2013. – № 6. – С. 42–46.
114. Мазуров Б.Т., Пластинин Л.А., Ступин В.П. Использование аэрокосмических снимков в картографировании экзогенных геологических процессов морфосистем «Байкальской горной страны» Известия высших учебных заведений. геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № s4. с. 113-117.
115. Мазуров Б.Т., Медведев П.А. Леонард Эйлер – вклад для астрономии, небесной механики, геодезии, картографии, геодинамики. // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2014. X Междунар. науч. конгр.: Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 8–18 апреля 2014 г.). – Новосибирск, СГГА, 2014. – Т. 1. – С. 186–192.
116. Мазуров Б. Т. Аппроксимация гравитационного влияния локального рельефа с использованием некоторых аналитических моделей и метода конечных элементов // Вестник СГУГиТ. – 2015. – Вып. 3 (31). – С. 5–15.
117. Мазуров Б.Т., Панжин А.А., Силаева А.А. Организация системы наблюдений за сдвижениями на Коркинском техногенном полигоне. Изв.вузов Геодезия и аэрофотосъемка. №S5, 2015. С. 29-33.
118. Мазуров Б. Т. Геодинамические системы (теоретические основы качественного исследования горизонтальных движений) // Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 1 (33). – С. 26–35.
119. Мазуров Б. Т., Панжин А. А., Силаева А. А. Структурное моделирование полученных по геодезическим данным сдвижений путем визуализации // Геодезия и картография. – 2016. – № 3. – С. 38–43.
120. Мазуров Б.Т. Высшая геодезия. Учебник. СГУГиТ, 2016, 203 с.
121. Мазуров, Б.Т., Падве В.А.. Метод наименьших квадратов (статика, динамика, модели с уточняемой структурой). Вестник СГУГиТ, Том 22, № 2, 2017. с.22-33.
122. Мазуров Б.Т., Аврунев Е.И., Хамедов В.А. Оперативный мониторинг лесных земель северных регионов на основе использования оптических и радарных космических снимков. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2017. Т. 14. № 4. С. 66–74.
123. Мазуров Б. Т. Геодинамические системы (качественное исследование вращательных движений). Геодезия и картография. 2017. №1. С.36-40.

124. Мазуров Б.Т. Геодинамические системы (теоретические основы качественного исследования горизонтальных движений). Вестник СГУГиТ, Том 22, № 1, 2017. с. 5-17.
125. Мазуров Б.Т. Современные проблемы геодезии и дистанционного зондирования. Учебное пособие. СГУГиТ, 2018. 175 с.
126. Мазуров Б.Т. Линейные искажения при переходе от эллипсоида Красовского на секущий эллипсоид. Геодезия и картография. – 2018. – Т. 79. – № 1. – С. 8–13.
127. Маслов, А. А. Расчет деформаций поверхности Земли по гравитационным данным [Текст] / А. А. Маслов // Геология и геофизика. – 1983. – №5. – С. 30-35.
128. Машимов, М. М. Согласование геодезических и геофизических параметров Земли на эпоху для решения геодинамических задач [Текст] / М. М. Машимов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1990. – № 4. – С. 30 – 37.
129. Машимов, М. М. Теоретическая геодезия [Текст] : справ. пособие / М. М. Машимов; под ред. В.П.Савиных и В.Р.Ященко. – М.: Недра, 1991. – 268 с.
130. Машимов, М. М. Геодинамика: современные проблемы и перспективы [Текст] / М. М. Машимов // Геодезия и картография.- 1995.- № 10. – С.20-30.
131. Марков А.А. Исчисление вероятностей. Государственное издательство. Москва. 1924, 589 с.
132. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М. : «Мир», 1974. – 319 с.
133. Менделеев Д. И. Познание России. Заветные мысли. – М.: Эксмо, 2008. – 688 с.
134. Метод конечных элементов [Текст] / П. М. Варвак и др.; под ред. П. М. Варвака.- Киев: Вища школа, 1981.-176 с.
135. Методы прогноза землетрясений. Их применение в Японии [Текст] / Т. Асада и др.; под ред. Т. Асада. – М.: Недра, 1984.- 312 с.
136. Мещеряков, Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля [Текст] / Г. А. Мещеряков. – М.: Наука, 1991.- 213 с.
137. Милановский Е. Е. Развитие и современное состояние проблемы расширения и пульсации Земли. Проблемы расширения и пульсации Земли [Текст] / Е. Е. Милановский. – М.: Наука, 1984.
138. Мовсесян Р. А. Теоретическое исследование предвестника землетрсений – деформационной кривой [Текст] / Р. А. Мовсесян, А. Г. Багдоев, А. В. Саакян // Геодезия и картография. – 2002. – №7. – С. 18–23.

139. Моги К. Предсказание землетрясений [Текст] / К. Моги. – М.: Мир, 1988. – 382 с.
140. Мозер Д.В., Левин Е.Л., Гей Н.И., Каранеева А.Д., Нагибин А.А. Мониторинг деформаций земной поверхности на территории Карагандинского угольного бассейна / Д.В. Мозер, Е.Л. Левин, Н.И. Гей, А.Д. Каранеева, А.А. Нагибин // Геодезия и картография. – 2015. – №3. – С.21-26.
141. Молоденский М. С. Современные задачи изучения фигуры Земли [Текст] / М. С. Молоденский // Геодезия и картография. – 1958. – № 7. – С. 3–5.
142. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1979. – 260с.
143. Николаев, А. В. Черты геофизики XXI века. Проблемы геофизики XXI века [Текст] : В 2 кн. / А. В. Николаев. – М.: Наука, 2003. – 311 с.
144. Обиденко В. И. Разработка и исследование специализированной программы для определения метрических параметров территории Российской Федерации // Вестник СГГА. – 2012. – № 3 (19). – С. 18 –29.
145. Оганисян, Ш. С. Совместный анализ геофизических и геодезических данных при изучении современной динамики земной коры на территории Армении. Комплексные геодинамические полигоны. Методика и результаты исследований [Текст] / Ш. С. Оганесян, А. О. Оганесян, Л. Б. Оганесян. – М.: Наука, 1984.-С. 71-74.
146. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред [Текст] / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
147. Океанология. Геофизика океана [Текст] Т. 2 : Геодинамика / отв. ред. О.Г. Сорохтин. – М.: Наука, 1979.
148. Оценка гравитационного влияния изменения массы водохранилища на результаты наблюдений за деформациями основных сооружений ГЭС [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Н. И. Стефаненко // Вестн. СГГА.- 2003. – № 8.- С. 44 – 46.
149. Падве В.А. Показатель точности геопространственных данных. Геодезия и картография. 2005. № 1. С. 18-19.
150. Падве В.А.. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Новосибирск. СГГА. 2013. 209 с.
151. Падве, В.А., Мурзинцев, П.П. Нормальные случайные погрешности измерений в геодезических сетях и их МНК-оценки [Текст] / В.А. Падве, Мурзинцев П.П // Вестник СГГА. Новосибирск: СГГА, 2013. – Вып. 3(23). – С.10–16.

152. Падве В.А. Математическая обработка и анализ результатов геодезических измерений. Ч.1., Основы …, Новосибирск. СГУГиТ. 2015. 162 с.
153. Панжин, А. А. Результаты наблюдений за деформациями породных массивов методами спутниковой геодезии [Текст] / А. А. Панжин // Тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2001. – С. 158-164.
154. Панжин, А. А. Мониторинг напряженно-деформированного состояния подработанной территории [Текст] / А. А. Панжин, С. В. Усанов //Тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2004. – С. 526-529.
155. Панжин А. А., Мазуров Б. Т., Силаева А. А. Визуализация характеристик деформационных полей по данным геодезических наблюдений // Проблемы недропользования, ИГД УрАН, Екатеринбург. – № 3. – 2015. – С. 13–18.
156. Панжин А. А., Сашурин А. Д., Панжина Н. А. Геодинамический мониторинг на Узельгинском месторождении // Маркшейдерия и недропользование. – 2016. – Т. 1. – № 3 (83). – С. 30–35.
157. Панкрушин, В. К. Математическое моделирование и идентификация геодинамических систем: монография [Текст] / В. К. Панкрушин; отв. ред. В. А. Середович. – Новосибирск: СГГА, 2002.- 423 с.
158. Пеллинен, Л. П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) [Текст] / Л. П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978.- 264 с.
159. Перегудов, Ф. И. Введение в системный анализ: учеб. пособие для вузов [Текст] / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко.- М.: Высш.шк.,1989.-367с.: ил.
160. Подшивалов, В. П. Теоретические основы формирования координатной основы для геоинформационных систем [Текст] / В. П. Подшивалов. – Новополоцк, ПГУ, 1998. – 125 с.
161. Подшивалов В.П. Композиционные геодезические проекции // Геодезия и картография. – 2000. – №8. – С.39–43.
162. Полищук Ю.М. Имитационно-лингвистическое моделирование систем с природными компонентами. – Новосибирск: Наука, 1992. С. 214.
163. Поле упругих напряжений Земли и механизм очагов землетрясений [Текст] / Л. М. Балакина и др. – М.: Наука, 1972. – 192с.
164. Поля напряжений и деформаций в литосфере [Текст] / под ред. А. С. Григорьева, Д. Н. Осокиной. – М.: Наука, 1979. – 256 с.

165. Поля и модели смещений земной поверхности Горного Алтая [Текст] / В. Ю. Тимофеев и др. // Геология и геофизика. – 2006.- Т. 47, № 8. – С. 923 – 937.
166. Правила установления местных систем координат. Утверждены постановлением Правительства Российской Федерации, постановлением № 139 от 3 марта 2007 г. (с изменениями на 27 августа 2014 года).
167. Прилепин М. Т. Некоторые результаты решения геодинамических задач геодезическими методами [Текст] / М. Т. Прилепин // Сб. материалов междунар. научно-техн. конф., посвящ. 225-летию МИИГАиК, Москва, 2004.- М.,2004.- С. 7-14.
168. Применение высокоточных геодезических методов для мониторинга деформационных процессов в зонах ведения крупномасштабных горных работ [Текст] / А. А. Козырев и др. // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. междунар. конф. – Новосибирск: СО РАН, 1999.- С. 356-362.
169. Проблемы и перспективы развития горных наук [Текст] : тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2004.- 456 с.
170. Проблемы современных движений земной коры [Текст]. Третий междунар. симпоз, Ленинград, СССР, 1968 г./ отв. ред. Ю. Д. Буланже, Ю.А. Мещеряков. – М.: , 1969.
171. Рикитаке Т. Геофизические и геологические данные о Японской островной дуге и ее обрамлении // Окраины континентов и островные дуги. – М.: Мир, 1970. – С. 216–236.
172. Родионов, В. Н. Основы геомеханики [Текст] / В. Н. Родионов, И. А. Сизов, В. М. Цветков. – М.: Недра, 1986. – 301 с.
173. Савиных, В. П. Геодезические исследования геодинамики рифтовой зоны озера Байкал [Текст] / В. П. Савиных, В. Р. Ященко, Х. К. Ямбаев // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.- 2006.- № 5. – С. 3–10.
174. Садовский М. А. Дискретные иерархические модели геофизической среды [Текст] / М. А. Садовский, В. Ф. Писаренко // Комплексные исследования по физике Земли. – М.: Наука, 1989. – С. 68–87.
175. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. – М.: Наука, 1991. – 96 с.
176. Сагитов, М. У. Иерархия гравиметрий [Текст] / М. У Сагитов // Изучение земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии: тр. II Орловской конф. / АН УССР. Гл. астроном. обсерватория. – Киев: Наукова думка, 1988. – С. 42-56.

177. Сашурин А. Д. Современная геодинамика и развитие катастроф на объектах недропользования [Текст] / А. Д. Сашурин // Тр. междунар. конф. – Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2004. – С. 369-372.
178. Сашурин А.Д., Панжин А.А. Организация геодинамического мониторинга на карьерах Качканарского ГОКа // Проблемы недропользования. – 2015. – № 1 (4). с. 45-48.
179. Севастьянова С. А. Региональное планирование развития туризма и гостиничного хозяйства: Учеб. пособие. – М.: КНОРУС, 2007. – 256 с.Середович, В. А. Идентификация движений и напряженно-деформированного состояния самоорганизующихся геодинамических систем по комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям: монография / В. А. Середович , В. К. Панкрушин, Ю. И. Кузнецов, Б.Т. Мазуров, В. Ф. Ловягин ; под общ. ред. В.К. Панкрушина; СГГА. – Новосибирск, 2004. – 356 с.
180. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. – М. : «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 536с.
181. Седов Л. И. Размышления о науке и об ученых. – М.: «Наука», 1980. – 440 с.
182. Серебрякова, Л. И. О постановке работ на прогнозных геодинамических полигонах [Текст] / Л. И. Серебрякова, П. А. Ходаков // Геодезия и картография. – 2006. -№ 5.- С. 27-35.
183. Серебрякова, Л. И. Краткий итог геодезических исследований по прогнозу сильных землетрясений [Текст] / Л. И. Серебрякова, Ю.Г. Кузнецов // Геодезия и картография. – 2005. -№ 2.- С. 27-35.
184. Середович, В.А. Идентификация напряженно-деформированного состояния и поворотных движений геодинамических систем по наземным и спутниковым наблюдениям [Текст] / В. А. Середович, В. К Панкрушин, Б.Т. Мазуров // Сб. материалов VIII междунар. научно-практ. конф. Geoinfocad, Франция, Ницца, 12-19 марта 2004 г.- Новосибирск: СГГА, 2004. – С.11-14.
185. Середович, В. А. Математическое моделирование и идентификация напряженно-деформированного состояния геодинамических систем по пространственно-временным рядам комплексных геодезических и геофизических наблюдений [Текст] / В. А. Середович, В. К. Панкрушин, Б. Т. Мазуров // Тр. междунар. конф. СУЧАСНІ ДОСЯГНЕННЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ НАУКИ ТА ВИРОБНИЦТВА, Збірник наукових праць Західного Геодезичного Товариства. – Львів: Ліга-Прес, 2004.- С. 409-416.

186. Сидоров В. А. Современные движения земной коры осадочных бассейнов [Текст] / В. А. Сидоров, Ю. О. Кузьмин. – М.: МГК при Президиуме АН СССР, 1989.- 181 с.
187. Смирнов Н.В., Белугин Д.В. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. – М.: Недра, 1969. – 384 с.
188. Соболев Г. А. Физика землетрясений и предвестники [Текст] / Г. Соболев, А. В. Пономарев. – М.: Наука,2003.
189. Современное состояние и направления развития геодезического обеспечения РФ. Системы координат [Текст] / В. П. Горобец, Г. В. Демьянов, А. Н. Майоров, Г. Г. Побединский // Геопрофи. – 2013. – № 6.– С. 4–9.
190. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987.- 711 с.
191. Статистические методы для ЭВМ [Текст] / под ред. К. Экслейна, Э. Рэлстона, Г. С. Уилфа; пер. с англ. М. Б. Малютова. – М.: Наука, 1986, 464 с.
192. Страхов, В. Н. Основные идеи и методы извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений [Текст] / В. Н. Страхов // Теория и методика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – М.: ИФЗ АН СССР, 1979. – С. 146–268.
193. Страхов, В. Н. Две парадигмы в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий [Текст] / В. Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли.- 1987.- № 1.- С. 46–61.
194. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000. – 376 с.
195. Татевян С. К. Использование спутниковых позиционных систем для геодинамических исследований [Текст] / С. К. Татевян, С. П. Кузин, С. П. Ораевская // Геодезия и картография. – 2004. – № 6. – С. 33 – 44.
196. Теркот Д. Геодинамика: Геологические приложения физики сплошных сред [Текст]. Ч. 2 / Д. Теркот, Дж. Шуберт; пер.с англ.- Мир, 1985. – 360 с.
197. Тимофеев В. Ю. Деформации в юго-западной части Байкальской рифтовой зоны по измерениям методами GPS, светодальнометрии и деформографии [Текст] / В. Ю. Тимофеев // Вестн. СГГА.- 2004.- Вып. 9. – С.21-26.
198. Тимофеев В. Ю. Мониторинг современных горизонтальных движений Алтая [Текст] / В. Ю. Тимофеев, Е. А. Запреева, Д. Г. Ардюков // Соврем. проблемы геодезии и оптики: Сб. материалов

LIII междунар. научно-техн. конф. СГГА. Ч. III.- Новосибирск: СГГА, 2003.- С. 217-219.
199. Тимофеев В.Ю., Ардюков Д.Г., Соловьев В.М., Шибаев С.В., Петров А.Ф., Горнов П.Ю., Шестаков Н.В. Современная геодинамика дальнего востока по результатам геофизических и геодинамических измерений. / Вестник Сибирской государственной геодезической академии. – 2012. – № 19. – С.30-36.
200. Торге В. Гравиметрия: Пер. с англ. – М., Мир, 1999. – 429 с.
201. Ушакова Е. О., Золотарев И. И., Вдовин С. А. Методологические основы оценки ресурсов развития туризма региона: Монография. – Новосибирск: СГГА, 2014. – 194 с.
202. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах [Текст] / под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 160 с.
203. Фотиади, Э. Э. Состояние, результаты и перспективы исследований современных движений земной коры на Байкальском геодинамическом полигоне [Текст] / Э. Э. Фотиади // Соврем. движения зем. коры (исследования на геодинам. полигонах).- Новосибирск: Наука, 1978.- С. 8–13 с.
204. Хаин В. Е. Геодинамические процессы, эволюция взглядов и современные представления. Океанология, геофизика океана [Текст] Т. 2: Геодинамика / В. Е. Хаин; отв. ред. О. Г. Сорохтин. – М.: Наука, 1979.
205. Хамедов В.А., Мазуров Б.Т. Разработка методических вопросов создания системы спутникового мониторинга состояния лесных экосистем в условиях воздействия нефтегазового комплекса территории Западной Сибири. Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). 2015. № 3 (31). С. 16-31.
206. Хорофас, Д. Н. Системы и моделирование [Текст] / Д. Н. Хорофас. – М.: Мир, 1967.
207. Хорошилов В. С., Павловская О. Г., Носков М. Ф. Анализ и оценка по геодезическим данным динамики оползней в условиях проведения взрывных работ и разгрузки склонов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4. – С. 19–24.
208. Церклевич, А. Современные вертикальные движения земной поверхности и их связь с геофизическими полями [Текст] / А. Церклевич, Ю. Дейнека //Сучасні досягнення геодезичноі науки та виробництва. – Зб. Наук. Праць.- Львів: Ліга-Прес, 2004.- С. 74–82.
209. Чуйское землетрясение 2003 года (M=7.5) [Электронный ресурс] / С. В. Гольдин и др. // Вестн. Отд-ния наук о Земле РАН.- 2003.-

№ 1(21). – Режим доступа: http://www.scgis.ru/russian/cp1251/hdgggms/1-2003/screp-7.pdf
210. Шеменда А. И. Моделирование крупномасштабных деформаций литосферы. Экспериментальная тектоника: методы, результаты, перспективы [Текст] / А. И. Шеменда. – М.: Наука, 1989.
211. Шейдеггер, А. Е. Физические аспекты природных катастроф [Текст] / А. Е. Шейдеггер. – М.: Недра, 1981. - 232 с.
212. Шестаков Н. В., Герасименко М. Д., Охзоно М. Движения и деформации земной коры Дальнего Востока Российской Федерации, вызванные землетрясением Тохоку 11.03.2011 г., и их влияние на результаты GNSS-наблюдений // Геодезия и картография. – 2011. – № 8. – С. 35–43.
213. Шерман С. И. Разломно-блоковая делимость литосферы: закономерности структурной организации и тектонической активности [Текст] / С. И. Шерман // Геодинамика и эволюция Земли, 1996. – №3.- С.74-77.
214. Шилов П.И. Способ наименьших квадратов. ГУГК при СНК СССР. М., 1941, 406 с.
215. Шмидт, Дж. Линейные и нелинейные методы фильтрации [Текст] / Дж. Шмидт // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. – М., 1980. – С. 49–73.
216. Эконометрика [Текст] /, под ред. чл.-корр. РАН И.И. Елисеевой, второе издание, М. Финансы и статистика, 2008. Учебник. – 576 с.
217. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976. 416 с.
218. Юркина, М. И. Исследования по совместному определению изменений земного гравитационного поля и вертикальных движений земной коры по повторным гравиметрическим и нивелирным наблюдениям [Текст] / М. И. Юркина // Повторные гравиметрические наблюдения. – М., 1988. – С. 6–22.
219. Adrian R. Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations. – The analyst or mathematical museum. – Philadelphia, 1908, V. 1, N 4, p. 93–109.
220. Argus DF, Gordon RG, Heflin MB, Ma C, Eanes RJ, Willis P, Peltier WR, Owen S (2010) The angular velocities of the plates and the velocity of Earth's centre from space geodesy. Geoophys J Int 180:913-960.
221. Battaglia M., Segall P. The interpretation of gravity changes and crustal deformation in active volcanic areas [Текст] / Geodetic and geo-

physical effects associated with seismic and volcanic hazards. Edited by Jose Fernandez. – Birkhauser Verlag, 2004. P. 1453-1467.
222. Bird, P., 2003. An updated digital model for plate boundaries. Geochem. Geophys. Geosyst., 4 (3): 1027, doi:10.1029/2001GC000252.
223. Bock Y., Prawirodirdjo L., Genrich J. F., Stevens C. W., McCaffrey R., Subarya C., Puntodewo S. S. O. and Calais E.. Crustal motion in Indonesia from Global Positioning System measurements [Текст] // JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 108, NO. B8, 2367, doi:10.1029/2001JB000324, 2003.
224. Bonaccorso A., D'Amico S., Mattia M., Patane D. Intrusive Mechanisms at Mt. Etna Forerunning the July-August 2001 eruption from seismic and ground deformation data [Текст] / Geodetic and geophysical effects associated with seismic and volcanic hazards. Edited by Jose Fernandez. – Birkhauser Verlag, 2004. P. 1469-1487.
225. Bonaccorso A., Sansosti E., Berardino P. Comparison of integrated geodetic data models and satellite radar interferograms to infer magma storage during the 1991-1993 Mt.Etna eruption [Текст] / Geodetic and geophysical effects associated with seismic and volcanic hazards. Edited by Jose Fernandez. – Birkhauser Verlag, 2004. P. 1345-1357.
226. Borel Em., Deltheil R., Huron R. (1972). Probabilités, erreurs. Armand Colin, Paris, France, 1964.
227. Bugayevskiy, L. M., J. P. Snyder, 1995, Map Projections [Электронный ресурс]: A Reference Manual (Taylor & Francis, London). – Режим доступа: http://www.worldcat. org/oclc/31737484.
228. Burrough, P. A. Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment. New York: Oxford University Press. 1986.
229. Christopher Dougherty, Introduction to Econometrics. Oxford University Press. – 2006. 573p.
230. Clayton, V. Deuth. Geostatistical reservoir modeling [Текст].- Oxford, University press, 2002,- 376 p.
231. Cotes, Rodger. Aestimatio errorum in mixta mathesi. Cambr. 1722.
232. Daley J. New Calculations Reposition the Geographical Center of North America URL: https://www.smithsonianmag.com/smart-news/new-calculations-reposition-geographical-center-north-america-1-180961932/ (дата обращения: 12.03.2018).
233. Donellan, A., Hager, B.H., King, R.W. Rapid north-south shortening jf the Ventura basis, southern Califotnia [Текст] // NATURE.- 1993.- V. 366.- P.333.

234. DeMets C, Gordon RG, Argus DF (2010) Geologically current plate motions. Geophys J Int 181:1-80
235. Derrick W.R., Grossman S.I. Elementary differential equations with applications. – 2-nd. ed. – Reading. Mass.: Addison-Wesley, 1981. – 532 p.
236. Deutsch C. V.. Geostatistical reservoir modeling. Oxford, University Press, 2002, 376 p.
237. Differential equation models / Ed.: Braun M. – New York etc.: Springer, 1983. – 380 p.
238. Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis, 3rd Edition. 1998 by John Wiley & sons, Inc. – 736 p.
239. Fisher R.A. (Sir Ronald). Statistical methods for research workers. Hafner Publishing Company Inc. New York. 1954. – 356 p.
240. Hager J. W., Behensky J. F., Drew B. W., 1989, The universalgrids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS) [Электронный ресурс], Technical Report TM 8358.2, Defense Mapping Agency. –http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tm8358.2/TM8358 2.pdf.
241. Euler L. Elemens de la Trigonometrie spheroidiйue tires de la methode des plus grands et plus petits / L. Euler // Histoire de l'Academie Royale des sciences. Annee. – 1749. – Paris. – 1753. – P. 258 – 293.
242. Gauss C.F. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Hamburg. 1809.
243. Gauss C F – Werke, Band 04, Göttingen, 1873. – 493 p.
244. Gauss C.F.– 9 Volume Set – Werke / Works Gottingen, Germany. 1903. 521 p.
245. Geodetic and geophysical effects associated with seismic and volcanic hazards. Edited by Jose Fernandez [Текст]. – Birkhauser Verlag, 2004. P. 1301-1611.
246. Goldberger A. Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model. JASA, 57:369-375, 1962.
247. Goldin V., Timofeev V.Yu., Ardyukov D.G. Fields of the Earth's Surface Displacement in the Chuya Earthquake Zone in Gornyi Altai. Doklady Earth Sciences, Vol. 405A, No. 9, 2005, pp. 1408–1413.
248. GPS monitoring in the N-W part of the volcanic island of Tenerife, Canaries, Spain: Strategy and results [Текст] / Geodetic and geophysical effects associated with seismic and volcanic hazards. Edited by Jose Fernandez. – Birkhauser Verlag, 2004. P. 1359-1377.

249. Heck, B. Time-dependent geodetic boundary value problems. Figure and dynamique Earth, Moon and Planets [Текст]: Proc. Int. Symp.: Prague, Sept. 15-20, 1986. Pt. 1 – Prague, 1987 .– P. 195-225.
250. Heck, B., Malzer, H. On some problems connected with the determination of recent vertical crustal movemens fro repeated levellings and gravitymeasurments tectonophysics [Текст]. 130 (1986). – P. 299 – 305.
251. Heine, G. W. "A Controlled Study of Some Two-Dimensional Interpolation Methods." COGS Computer Contributions 3 (no. 2): 60–72. 1986.
252. Herring T.A., Hager B.H., Meade B., Zubovich A.V. Contemporary horizontal and vertical deformation in the Tien Shan [Текст] // Сб. тр. семинара «APGS-Иркутск, 2002».- М.: ГЕОС, 2002.- С. 75-84.
253. International Conference “Ill – Posed and Inverse Problems” dedicated to Prof. M.M. Lavrent’ev on the occasion of his 70 th anniversary [Текст] (August 5-9, 2002, Novosibirsk, Russia): Fractalness and recursiveness. Yu. I. Kuznetsov. – Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 2002. – P. 101.
254. Kalman R., Busy R. New results in linear filtering and prediction theory. J/ Basic. Ehgr. (ASME Trans.) – 1961. – V. 83. – P. 95-108.
255. Kaniuth, K., Hafele, P., Effect of Atmospheric Pressure Loading on the EUREF Network. Simposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF) held in Dubrovnik, 16-18 May 2001[Текст] // EUREF Publication No 10, Mitteilungen des Bundesamtes fur Kartographie und Geodasie, Frankfurt am Main, 2002.- PP. 100-104.Kendall M.G., Stuart A. The Advanced theory of Statistics. London. 1961. – P. 676.
256. Kogan MG, Steblov GM (2008) Current global plate kinematics from GPS (1995–2007) with the plate-consistent reference frame. J Geophys Res 113:B04416
257. Krige D. G. A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the Witwatersrand. Master’s thesis, University of Witwaterstand, South Africa, 1951.
258. Kruger J. H. L., 1912, Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene [Text], New Series 52, Royal Prussian Geodetic Institute, Potsdam, doi:10.2312/GFZ.b103-krueger28.
259. Lagrange J. L., 1770, Nouvelle methode pour resoudre les requations littrerales par le moyen des sreries, in Oeuvres[Электронный ресурс], volume 3, pp. 5–73 (Gauthier-Villars, Paris, 1869), reprint of Mrem. del’Acad.Roy. des Sciences de Berlin 24, 251–326.– Режим доступа: http://books.google.com/books?id=YywPAAAAIAAJ&pg=PA5.

260. Lambert J. H., 1772, Anmerkungen und Zus Ëatzezur Entwerfung der Land- und Himmelscharten, number 54 in Klassiker ex. [Электронный ресурс], Wiss.(Engelmann, Leipzig, 1894), translated into English by W. R. Tobler as Notes and Comments on the Composition of Terrestrial andCelestial Maps, Univ. of Michigan (1972). – Режим доступа: http://books.google.com/books?id=o s MR3NUD4C.
261. Legendre A.M. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris, 1806. Appendice. Sur la methode des moindres carrés, p. 72-80.
262. Ljung L.. System Identification: Theory for the User. – New Jersey, 1999. 609 p.
263. Matheron G. Traite de geostatistique appliqué. Vol. 1 (1962), Vol. 2 (1963), ed. Technip, Paris, 1962.
264. Matsuyama T. and Iwamori H. Analysis of plate spin motion and its implications for strength of plate boundary. Earth, Planets and Space 2016, 68:36 (29 February 2016).
265. Mazurov, B. T., Pankrushin, V. K. Models Parameter Adaptation of Geodynamic Objects and Observation Systems with a Kalman-Bucy Filter [Текст] // Fifth International Symposium "Turkish-German Joint Geodetic Days' Berlin, Germany, March 29-31, 2006. – P.62 – 66.
266. Mazurov, B; Zarzoura, F; Hassan, Study of Suspension Bridge Deformation Using Neural Network which has been published in PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ACTUAL ISSUES OF MECHANICAL ENGINEERING 2017 (AIME 2017),
267. McBratney, A. B., and R. Webster. "Choosing Functions for Semivariograms of Soil Properties and Fitting Them to Sampling Estimates." Journal of Soil Science 37: 617–639. 1986.
268. McCaffrey R. Block kinematics of the Pacific–North America plate boundary in the southwestern United States from inversion of GPS, seismological, and geologic data. // J. Geophys. Res. 2005. Vol. 110, №B07401. doi:10.1029/2004JB003307.
269. Monmonier, M. Cartographies of danger [Текст]. – Chicago, 1997. – 363 p.
270. Mogi, K. Relations of eruptions of various volcanoes and the deformation of the ground surface around them [Текст] // Bull Earthquake Res. Inst., 1958, Tokyo Univ., 36, 99-134.
271. Moritz H. Advanced Physical Geodesy. Karlsruhe. 1980. – 498 p.
272. Nagy B. The gravitational attraction of a right angular prism / Geophysics 31, 362–371, 1966.

273. Oliver, M. A. "Kriging: A Method of Interpolation for Geographical Information Systems." International Journal of Geographic Information Systems 4: 313–332. 1990.
274. Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge University Press. 1988.
275. Rao C.R. Linear Statistical Inference and its Applications. Wiley, New York. 1973.
276. Rogerson P. Where's your county seat? A modern mathematical method for calculating centers of geography. URL: http://theconversation.com/wheres-your-county-seat-a-modern-mathematical-method-for-calculating-centers-of-geography-71060 (дата обращения: 12.03.2018).
277. Royle, A. G., F. L. Clausen, and P. Frederiksen. "Practical Universal Kriging and Automatic Contouring." Geoprocessing 1: 377–394. 1981.
278. Savage, J. C., W. Gan, and J. L. Svarc (2001), Strain accumulation and rotation in the eastern California shear zone, J. Geophys. Res., 106, 21,995–22,007.
279. Seredovich Vladimir A., Pankrushin Venyamin K. and Mazurov Boris T., Mathematical Modeling and Identification of the Stressed-deformed State of Geodynamic Systems by Spatio-temporal Series of Combined Geodetic and Geophysical Observations in the Light of Prediction of Natural and Technogenic Catastrophes [Текст] FIG Working Week 2004, Athens, Greece, May 22-27, 2004.Simmons G.F. Differential equations with applications and historical notes. – New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1972. – 465 p.
280. Shen Z., D.D. Jackson, B.X. Ge. Crustal deformation across and beyond the Los Angels Basin from geodetic measurements // J. Geophys. Res. – 1996. – V. 101. – P. 27957–27980.
281. Sherman, S. I., Gladkov, A. S. Fractals in studies of faulting and seisicity in the Baikal rift zone [Текст] // Tectonophysics. – 1999.- Vol. 308.- P. 133-142.
282. Shi, P., Segawa, J., Fukuda, Y., Effects of atmospheric pressure on the gravity changes measured by a superconducting gravimeter [Текст] // J. Geod. Soc. Japan, 39, 1993.- PP. 293-311.
283. Spiegel M.R. Applied differential equatons. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981. – 654 p.
284. Terada, T., Miyabe, N. Deformation of the earth crust in Kwansai districts and its relation to the orographic feature // Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. Tokyo, 7, 223 (1929).

285. Thomas P. D., 1952, Conformal projections in geodesy and cartography [Электронный ресурс], Special Publication 251, U.S. Coast and Geodetic Survey.– http://docs.lib.noaa.gov/rescue/cgs specpubs/QB275U35no2511952.pdf.
286. Tiampo K.F., Rundle J.B., Sa Martins J.S., Klein W., McGinnis S. Methods for evaluation of geodetic data and seismicity developed with numerical simulations: review and applications [Текст] / Geodetic and geophysical effects associated with seismic and volcanic hazards. Edited by Jose Fernandez. – Birkhauser Verlag, 2004. P. 1489-1507.
287. Turcotte Donald L.. Fractals and chaos in geology and geophysics [Текст] // Second edition. Cambridge universite press, 1997. – 398 p.Zarzoura F., Mazurov B., Ahmed C. Deformation analysis of cable-stayed bridges using neural networks. 2nd International workshop on “Integration of Point- and Area-wise Geodetic Monitoring for Structures and Natural Objects”, March 23-24, 2015, Stuttgart, Germany. P. 138 – 143.

Приложение 1

Значения координат станций GPS-сети, их смещений за 2 года и среднеквадратических ошибок смещений

Таблица

Название станции	x(м)	y(м)	u_x(мм)	u_y(мм)	m_{u_x} (мм)	m_{u_y} (мм)
NVSK	595	-114	0.00	0.00	0.00	0.00
YAZU	122	273	-0.10	4.18	0.85	1.02
CHAG	64	245	3.14	2.76	0.97	1.08
UKOK	8	234	21.32	17.10	1.73	1.94
BALY	135	213	-0.96	4.22	1.07	1.24
KURA	84	207	-0.50	-0.96	0.89	1.03
ULAG	112	189	-0.08	1.20	1.76	2.08
ARTB	257	158	-7.38	-3.20	1.89	2.06
TUNZ	280	101	-9.82	2.50	1.99	2.07
CHIK	128	93	0.20	2.00	0.88	1.05
ELTS	419	83	-0.34	3.76	1.21	1.20
SEMI	169	44	-0.14	1.72	0.86	1.10
KAYT	73	33	-3.18	19.26	1.56	1.91
KAIT	73	31	-0.70	1.80	0.88	1.03
USTK	161	-16	0.44	-2.28	0.89	1.02
ANUI	319	-16	-8.40	-1.46	1.98	1.94
SOLO	246	-40	2.26	-0.26	1.78	1.74
KRUT	497	-249	-2.66	9.42	1.58	1.47

Примечание: прямоугольные координаты даны в условной системе

Приложение 2

Компоненты симметричного тензора чистой деформации T_ε, вычисленные для каждого треугольного конечного элемента ГДС Горный Алтай

Таблица 56

№ тр-ка	Станции – вершины треугольных конечных элементов			$\varepsilon_{xx} = e_{11}$	$\varepsilon_{yy} = e_{22}$	$\varepsilon_{xy} = \frac{e_{12} + e_{21}}{2}$
1	KRUT	SOLO	ANUI	-1.08E-07	-6.89E-10	-7.85E-08
2	KRUT	ANUI	NVSK	-1.93E-09	-1.54E-08	-1.43E-08
3	NVSK	ANUI	ELTS	3.73E-08	1.77E-08	3.93E-08
4	ANUI	TUNZ	ELTS	1.07E-08	1.42E-08	5.41E-08
5	ANUI	SOLO	TUNZ	-5.39E-08	-2.50E-08	-5.12E-08
6	ELTS	TUNZ	ARTB	7.61E-08	-4.50E-09	-1.21E-08
7	SOLO	USTK	SEMI	-1.21E-08	4.11E-08	3.94E-08
8	SOLO	SEMI	TUNZ	-7.32E-08	-3.46E-09	-1.46E-08
9	TUNZ	SEMI	ARTB	5.33E-09	4.85E-08	-8.52E-08
10	SEMI	CHIK	ARTB	-2.99E-08	-3.05E-08	-3.19E-08
11	CHIK	ULAG	ARTB	-1.18E-08	-3.35E-08	-3.35E-08
12	ULAG	BALY	ARTB	9.10E-09	-2.76E-09	4.04E-08
13	BALY	YAZU	ARTB	3.18E-09	-6.77E-08	-3.32E-08
14	USTK	KAIT	SEMI	-1.06E-08	-9.65E-09	3.74E-08
15	SEMI	KAYT	CHIK	3.05E-08	-1.67E-07	-5.30E-08
16	CHIK	KAYT	KURA	1.24E-08	-1.99E-07	-2.82E-08
17	CHIK	KURA	ULAG	-5.01E-10	7.93E-08	9.71E-09
18	ULAG	KURA	BALY	-3.19E-08	9.78E-08	1.44E-08
19	BALY	KURA	YAZU	1.19E-08	9.94E-08	5.09E-09
20	KAYT	UKOK	KURA	3.31E-08	-2.74E-07	-1.87E-07
21	KURA	UKOK	CHAG	-6.42E-08	-2.49E-07	-1.71E-07
22	KURA	CHAG	YAZU	5.26E-08	-1.80E-08	2.64E-09

Приложение 3

СЛОВАРЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ТЕРМИНОВ

Астеносфера (от греч. asthenas– слабый и сфера) – слой пониженной твёрдости, прочности и вязкости в верхней мантии Земли, подстилающий литосферу. Верхняя граница на глубине около 100 км под материками и около 50 км под дном океана; нижняя– на глубине 250–350 км. Астеносфера играет важную роль в происхождении эндогенных процессов, протекающих в земной коре (магматизм, метаморфизм и др, ротационный механизм).

Вращение Земли^ (суточное) – вращение Земли вокруг своей оси с запада на восток, или против часовой стрелки, если смотреть с Северного полюса мира. Вращение Земли вызывает смену дня и ночи, определяет длительность суток. Происходит неравномерно: в течение года колеблется в пределах 1-2 мс. Положение оси вращения Земли, а следовательно, и земных географических полюсов меняется из-за прецессии и нутации.

Гипоцентр – точка начала перемещения масс (вспарывания разрыва) в очаге землетрясения. Глубина до 700 км. Геосинклиналь (от гео... и синклиналь) (геосинклинальный пояс) – длинный (десятки и сотни км) – относительно узкий и глубокий прогиб земной коры, возникающий на дне морского бассейна, обычно ограниченный разломами и заполненный мощными толщами осадочных и вулканических пород. В результате длительных и интенсивных тектонических деформаций превращается в сложную складчатую структуру – часть горного сооружения. Расположены обычно или в зоне перехода от океана к континенту, или между континентами. Рассматриваются как области превращения океанической земной коры в континентальную. Пример современного аналога геосинклинали – островные дуги (вместе с глубоководными желобами) окраинных и внутренних морей. В этом смысле геосинклиналь – синоним геосинклинального пояса.

Геоид (от гео... и греч. idos вид) – фигура Земли, ограниченная уровенной поверхностью, продолженной под континентами. Поверхность геоида отличается от физической поверхности Земли, на которой резко выражены горы и океанические впадины.

Дислокация (геол.) – нарушение первичного залегания горных пород, вызванное тектоническими, магматическими или экзогенными процессами.

Земля^ – третья от Солнца планета Солнечной системы, обращающаяся вокруг него по эллиптической орбите (близкой к круговой)

со средней скоростью 29,765 км/с на среднем расстоянии 149,6 млн. км за период, равный 365,24 средних солнечных суток. Наклон земной оси к плоскости эклиптики 66°33′22″, период вращения вокруг оси 23 ч 56 мин 4,1 с. Экваториальный радиус – 6378,16 км. Полярный радиус – 6356,778 км. Сплющенность эллипсоида ε=0,00335292 (теоретическое ε=0,003273). Отличие характеризует неоднородное внутреннее строение Земли. Ось вращения Земли описывает круги с периодом 1 и 1,2 года (радиусом 3 м). Ось вращения направленно смещается со скоростью 10 см/год. Полярный момент инерции C=8,0688*1044 г*см2. Экваториальный момент инерции C=8,042*1044 г*см2.

Земная кора – верхняя оболочка “твёрдой” Земли, ограниченная снизу поверхностью Мохоровичича. Различают континентальную кору (толщиной от 35-45 км под равнинами до 70 км в области гор) и океаническую (5-10 км). В строении первой имеются три слоя: верхний осадочный, средний, называется условно гранитным, и нижний базальтовый; в океанической коре гранитный слой отсутствует, а осадочный имеет уменьшенную мощность. Земная кора подвержена постоянным тектоническим движениям. В её строении выделяют подвижные области (складчатые пояса) и относительно спокойные – платформы.

Землетрясение – подземные толчки и колебания земной поверхности, возникающие в результате внезапных смещений и разрывов в земной коре или верхней части мантии и передающиеся на большие расстояния в виде упругих колебаний. Интенсивность землетрясения оценивается в сейсмических баллах, для энергетической классификации землетрясений пользуются магнитудой. Известны два главных сейсмических пояса: Тихоокеанский, охватывающий кольцом берега Тихого океана, и Средиземноморский, простирающийся через юг Евразии от Пиренейского полуострова на западе до Малайского архипелага на востоке. В пределах океанов значительной сейсмической активностью отличаются срединно-океанические хребты.

Земная ось (ось вращения Земли) – прямая, вокруг которой происходит суточное вращение Земли; проходит через центр Земли и пересекает земную поверхность в географических полюсах.

Литосферная плитаˆ – крупный (несколько тысяч километров в поперечнике) блок земной коры, включающий не только континентальную, но и сопряжённую с ней океаническую кору; ограничен со всех сторон сейсмически и тектонически активными зонами разломов.

Мантия Землиˆ – оболочка “твёрдой” Земли, расположенная между земной корой и ядром Земли. Составляет 83% объёма Земли (без атмосферы) и 67% её массы. Верхняя граница проходит на глубине от 5-10 до 70 км по Мохоровичича поверхности, нижняя – на глубине

2900 км по границе с ядром Земли. Предполагают, что мантия Земли в основном сложена оливином и делится на верхнюю мантию толщиной около 900 км и нижнюю – около 2000 км; благодаря высокому давлению – от 1 до 136 ГПа вещество мантии Земли, по-видимому, находится в твердом кристаллическом состоянии (за исключением астеносферы, где оно, возможно, аморфно). Температура в мантии, по–видимому, не превышает 2000–2500°С. С процессами в мантии Земли связаны тектонические движения, магматизм, вулканизм и др.

Мобилизм – геологическая гипотеза, предполагающая большие (до нескольких тысяч километров) горизонтальные перемещения крупных литосферных плит. Впервые выдвинута А. Вегенером в 1912 г.

Магнитуда землетрясения (от лат. magnitudo– величина) – условная величина, характеризующая общую энергию упругих колебаний, вызванных землетрясениями или взрывами; пропорциональна логарифму энергии землетрясений; позволяет сравнивать источники колебаний по их энергии. Максимальное значение – около 9.

“Новая глобальная тектоника” (тектоника литосферных плит) – тектоническая гипотеза, предполагающая, что литосфера разбита на крупные плиты, которые перемещаются по астеносфере в горизонтальном направлении. Близ срединно-океанических хребтов литосферные плиты наращиваются за счёт вещества, поднимающегося из недр, и расходятся в стороны (спрединг); в глубоководных желобах одна плита поддвигается под другую и поглощается (субдукция) мантией. Там, где плиты сталкиваются между собой, возникают складчатые сооружения.

“Новая глобальная тектоника” – современный вариант гипотезы мобилизма.

Нутация (от лат. Nutatio – колебание) – колебательное движение оси собственного вращения тела, происходящее одновременно с прецессией, при котором изменяется угол между осью собственного вращения тела и осью, вокруг которой происходит прецессия. В астрономии нутация – небольшие колебания земной оси, налагающиеся на её прецессионное движение и обусловленные притяжением Солнца и Луны.

Обдукция – процесс, в результате которого возникают складчатые сооружения там, где плиты сталкиваются между собой.

Ороген (от греч. ros гора и...ген) – горно-складчатое сооружение, возникающее на месте геосинклинальной системы в поздние стадии её эволюции (орогенный этап развития геосинклиналей).

Очаг землетрясения – область возникновения подземного удара в толще земной коры или верхней мантии, являющегося причиной землетрясения.

Оползни – скользящее смещение масс горных пород вниз по склону под влиянием силы тяжести. Возникают вследствие подмыва склона, переувлажнения (особенно при наличии чередования водоупорных и водоносных пород), сейсмических толчков и др.

Прецессия (предварение равноденствий) – медленное передвижение точек весеннего и осеннего равноденствий. Эти точки пересечения экватора с эклиптикой отступают по последней почти равномерно на встречу Земле в ее движении вокруг Солнца, и потому новое равноденствие настает раньше, чем Земля опишет полный круг. Счет долгот ведется от точки весеннего равноденствия по направлению движения Земли, поэтому все долготы равномерно увеличиваются. Прецессия происходит от изменения положения в пространстве оси вращения Земли под влиянием притяжений Луны и Солнца. Если бы Земля была однородным шаром или состояла из концентричных однородных сферических слоев различной плотности, равнодействующая притяжения проходила бы через ее центр, не изменяя вращения. Но Земля – сжатый по оси эллипсоид; ее экваториальную выпуклость можно представить себе кольцом, расположенным наклонно к эклиптике. Притяжение Солнца и Луны, находящихся всегда вблизи этой плоскости, стремится привести кольцо в совпадение с ней. С другой стороны, ось всякого вращающегося тела стремится сохранить неизменно свое положение в пространстве. От совместного действия Солнца и Луны и инерции вращения ось Земли, сохраняя неизменно свое наклонение к эклиптике, описывает коническую поверхность. Полюс экватора чертит круг около полюса эклиптики, а плоскость экватора, составляя постоянно один и тот же угол (около 23°27’) с плоскостью эклиптики, скользит по ней, и линия их пересечения (равноденственная линия) вращается по направлению часовой стрелки (если смотреть с северного полюса). Эта так называемая лунно-солнечная прецессия вследствие изменений земной орбиты не вполне постоянна; теперь она составляет 50”,36 в год и незначительно уменьшается. Около 2/3 ее зависят от притяжения Луны, остальное – Солнца. Громадная масса Солнца компенсируется большим расстоянием: прецессия пропорциональна массе и обратно пропорциональна кубу расстояния до возмущающего светила. Планеты не имеют никакого влияния на вращение Земли и положение ее экватора. Скорость точек равноденствия на эклиптике равна 4 км в час, т. е. скорости идущего человека. В прежнее положение они придут, иначе – полюс Мира опишет полный круг приблизительно – в 26 тыс. лет.

Срединно-океанические хребты – горные сооружения, образующие на дне Мирового океана единую систему, опоясывающую весь земной шар. Общая длина свыше 60 тыс. км, ширина до 2 тыс. км, относительная высота 3-4 тыс. м, отдельные вершины поднимаются над уровнем океана в виде вулканических островов. Склоны и гребни срединно-океанических хребтов сильно расчленены, вдоль оси хребтов простираются глубокие рифтовые впадины, характерны многочисленные поперечные разломы (так называемые трансформные).

Сейсмическая шкала – шкала для оценки интенсивности землетрясения на поверхности Земли. Часто используется 12-балльная сейсмическая шкала MSK-64. Для сравнения землетрясений по их энергии существует шкала магнитуд, или Рихтера шкала.

Тиксотропия (от греч. th xis прикосновение и trop поворот, изменение) – способность дисперсных систем восстанавливать исходную структуру, разрушенную механическим воздействием.

Спрединг – явление разрастания океана за счёт вещества, поднимающегося из недр и расходящегося в стороны;

Субдукция – процесс, в результате которого в глубоководных желобах одна плита поддвигается под другую и поглощается мантией. Там, где плиты сталкиваются между собой, возникают складчатые сооружения.

Новая глобальная тектоника – современный вариант гипотезы мобилизма....

Трансформные разломы – крупные поперечные разломы земной коры, рассекающие срединно-океанические хребты. Исходя из гипотезы новой глобальной тектоники, вдоль них осуществляется скольжение сегментов литосферных плит.

Тектоническая деформация – изменение формы залегания и объёма горных пород, обусловленное тектоническими движениями.

Тектоника – отрасль геологии, изучающая развитие структуры земной коры и её изменения под влиянием тектонических движений и деформаций, связанных с развитием Земли в целом. Представления, объясняющие деформации и движения земной коры, выражаются в гипотезах мобилизма и фиксизма.

Фиксизм – геологическая гипотеза, исходящая из представлений о незыблемости (фиксированности) положений континентов на поверхности Земли и о решающей роли вертикально направленных тектонических движений в развитии земной коры. Фиксизм противопоставляется мобилизму.

Форма Земли – геоид, приближённо – трёхосный эллипсоид, сфероид. Средний радиус 6371,032 км, экваториальный – 6378,160 км, по-

лярный – 6356,777 км. Площадь поверхности 510,2 млн. км^2; объём 1,083·1012 км^3; средняя плотность 5,518 г/см^3; масса 5976·1021 кг. Гравитационное поле Земли обусловливает сферическую форму Земли, существование атмосферы.

Эпицентр (от эпи... и центр) – проекция центральной точки очага землетрясения (гипоцентра) на земную поверхность.

Эндогенные процессы – геологические процессы, связанные с энергией, возникающей в недрах твердой Земли. К эндогенным процессам относятся тектонические процессы, магматизм, метаморфизм, сейсмическая активность.

Экзогенные процессы – геологические процессы, происходящие на поверхности Земли и в самых верхних частях земной коры (выветривание, эрозия, деятельность ледников и др.); обусловлены главным образом энергией солнечной радиации, силой тяжести и жизнедеятельностью организмов.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Мазуров Борис Тимофеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ГЕОДИНАМИКИ

Монография

Компьютерная верстка: ООО Изд-во “Сибпринт”

Подписано в печать 29.01.2019 с оригинал-макета.
Бумага офсетная 70х100, печать цифровая.
Усл. печ. л. 29,08. Тираж 100 экз., заказ № 0129-2019.

Отпечатано в типографии ООО Изд-во “Сибпринт”.
г. Новосибирск, ул. М. Горького 39, офис 122, 123.