

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНЫХ КУПОЛОВ В ЗЕМНОЙ КОРЕ

Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И.,  
Танирбергенов А.Г.

Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И.,  
Танирбергенов А.Г.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНЫХ КУПОЛОВ**

**В ЗЕМНОЙ КОРЕ**

Ответственный редактор

д.ф.-м.н., профессор Алексеева Л.А.

Алматы 2017

**Институт математики и математического моделирования  
Институт механики и машиноведения им. Академика  
У.А. Джолдасбекова Министерства образования и науки  
Республики Казахстан**

**Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И.,  
Танирбергенов А.Г.**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ  
СОЛЯНЫХ КУПОЛОВ В ЗЕМНОЙ КОРЕ**

**Ответственный редактор  
д.ф.-м.н., профессор Алексеева Л.А.**

**Алматы 2017**

УДК 550.3

ББК

**Б**

**Б Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Математическое моделирование формирования соляных куполов в земной коре.** – Алматы: Издательство - 242 страниц, 73 рисунка, библиография из 218 наименований.

Работа выполнена в рамках финансирования по гранту МОН РК «Фундаментальные исследования в области математики, механики, физики» № 0826 / ГФ4.

ISBN

В монографии изложены результаты математического моделирования формирования соляных куполов в земной коре на основе базовых уравнений гидродинамики.

На основе модели вязкопластической среды исследована начальная фаза формирования соляного диапиризма. Показано, что реология слоев для возмущений обладает анизотропией, что приводит к образованию целого семейства разных по масштабу диапиров, которые распределены по пространству неоднородно. При определенных условиях возможно образование соляных столбов, а также куполов-гигантов с семейством соляных валов.

Разработаны и обоснованы численные инструменты с помощью которых исследованы механизм, основные закономерности и особенности формирования плоских, осесимметричных, трехмерных солянокупольных структур. Показано, что формирование и развитие соляно-купольных структур в природной обстановке и численных моделях определяются одинаковыми факторами.

Разработаны и обоснованы физическая, математическая и дискретные модели формирования соляного диапиризма глубокого залегания в температурном поле на основе релей - тейлоровской неустойчивости в приближении Буссинеска с экспоненциальной зависимостью динамической вязкости от температуры. Показано, что температурные градиенты существенно влияют как на формы образования соляных куполов и на профили подсолевого ложа, так и на скорость их развития. Разработана методика выделения нефтегазовых ловушек (коллекторов нефти и газа), которая подтверждена экспериментальными данными. Показано, что углеводородные запасы привязаны к областям с повышенными температурными градиентами. На основе проведенных расчетов и полученных результатов были выработаны некоторые рекомендации в приложении к нефтегазовому делу.

С помощью разработанных численных инструментов проведено исследование формирования астеносферного диапиризма на основе трех общепризнанных физических моделей астеносферного диапиризма. Показано, что общая модель, учитывающая фазовые переходы, наиболее полно отражает физику явления и описывает формирование расплавленной астеносферы в виде диапиров, что оправдывает название «астеносферный диапиризм». Количественно подтверждена теория Ботта о блоковом строении земной коры.

Сформулированы некоторые возможные направления дальнейших исследований.

Монография предназначена для механиков, геофизиков, геологов и студентов ВУЗов.

Рекомендовано к печати: Ученым советом Института математики и математического моделирования МОН РК,

Ученым советом Института механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова МОН РК.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор АЛЕКСЕЕВА Л.А.

Доктор физико-математических наук, профессор КУДАЙКУЛОВ А.К.

УДК 550.3

ББК

ISBN

© Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И.,  
Танирбергенов А.Г. 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

От авторов.....	5
Введение.....	13
Соляные купола .....	19

### **1 ЛИНЕЙНАЯ ФАЗА ФОРМИРОВАНИЯ**

<b>СОЛЯНОКУПОЛЬНЫХ СТРУКТУР.....</b>	<b>31</b>
1.1 Плоская, двухслойная модель.....	31
1.2 Осесимметричная двухслойная модель.....	42
1.3 Особенности начальной стадии диапиризма в пространст-венном случае.....	50
1.4 Трехслойная модель вязкопластической среды.....	55

### **2 ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ**

<b>СОЛЯНЫХ ДИАПИРОВ.....</b>	<b>69</b>
2.1 Общая постановка задачи. Безразмерная форма Уравнений.....	69
2.2 Плоская задача.....	74
2.2.1 Разностная начально-краевая задача I, ее реализация и аппроксимация.....	76
2.2.2 Устойчивость, теорема существования и единственности.....	81
2.2.3 Итерационный метод.....	87
2.2.4 Разностная начально-краевая задача II.....	90
2.2.5 О более точном прослеживании эволюции границы раздела слоев. Практическая проверка метода.....	94
2.3 Численный метод II.....	100
2.4 Трехмерная задача.....	106

### **3 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**

<b>ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНЫХ КУПОЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ.....</b>	<b>115</b>
3.1 Механизм тейлоровской неустойчивости.....	115

3.2 Зависимость основных характеристик от физических параметров среды.....	123
3.3 Фазы развития и генерация вторичных возмущений.....	132
3.4 Сравнительный анализ характеристик формирования соляного купола в плоской и осесимметричной моделях.....	138
3.5 Трехмерное формирование соляных куполов.....	142

## **4 СОЛЯНЫЕ КУПОЛА ГЛУБОКОГО**

<b>ЗАЛЕГАНИЯ</b> .....	151
4.1 Введение, некоторые замечания.....	151
4.2 Численный метод.....	159
4.3 Результаты расчетов.....	173
4.4 Нефтегазовые ловушки.....	180
4.5 Приложение к нефтегазовому делу.....	189

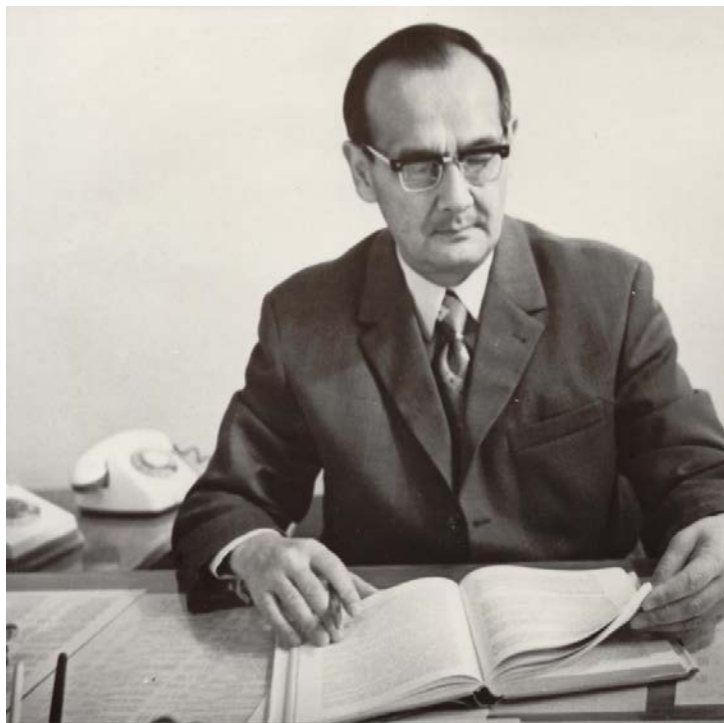
## **5 ФОРМИРОВАНИЕ АСТЕНОСФЕРНОГО**

<b>ДИАПИРИЗМА</b> .....	191
5.1 Современное состояние вопроса формирования астеносферного диапиризма.....	191
5.2 Математические модели формирования астеносферного диапиризма.....	195
5.3 Численный метод.....	204
5.4 Результаты расчетов формирования астеносферного диапиризма.....	206
5.4.1 Модель I а.....	206
5.4.2 Модель I б.....	211
5.4.3 Модель II.....	213

Заключение.....	219
Список использованных источников.....	223

## ОТ АВТОРОВ

*Посвящается  
светлой памяти  
великого Учителя*



10 февраля 2017 г. научная общественность Казахстана широко отметила 95-летие со дня рождения академика Жакана Сулейменовича Ержанова – основоположника казахстанской школы механики горных пород, механики подземных сооружений, математической теории складкообразования в земной коре, геомеханики, механики Земли.

Жакан Сулейменович Ержанов - выдающийся ученый-механик с мировым именем, основатель казахстанской школы геомеханики, заслуженный деятель науки, лауреат Государственной премии, академик Национальной академии

наук и Национальной инженерной академии Республики Казахстан, доктор технических наук, профессор.

В разные годы занимал должности заведующего лабораторией, заместителя директора Института математики и механики, заведующего отделом Института механики и машиноведения, директора Института сейсмологии, академика-секретаря Отделения наук о Земле, главного ученого секретаря Президиума Академии наук Казахстана.

Был членом Генеральной Ассамблеи Международного союза по теоретической и прикладной механике (IUTAM), председателем Национального комитета РК по теоретической и прикладной механике, членом Президиума Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Награжден орденом Трудового Красного Знамени, орденом «Знак Почета», медалями СССР и ГДР.

Автор более 350 индивидуальных и коллективных работ, включая 40 монографий. Подготовил более 100 кандидатов и около 50 докторов наук.

Согласно официальной биографии, Ж.С. Ержанов родился в 1922 году в семье учителя в Баянаульском районе Павлодарской области. В 1944 г. окончил маркшейдерское отделение Казахского горно-металлургического института, затем аспирантуру Казахского филиала АН СССР. В 1949 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему: «Исследование деформации горных пород при разработке круто падающих рудных месторождений» и перешел на научно-педагогическую работу в Казахский государственный университет. С 1951 по 1960 гг. - доцент Днепропетровского горного института. В 1960 г. академиком К.И. Сатпаевым приглашен в АН КазССР.

Здесь, в республиканской академии, под руководством Ж.С. Ержанова начались систематические исследования по механике. Они охватывали широкий круг вопросов по теории наследственности и ползучести горных пород, складкообразованию в земной коре, теории подземных сооружений, которые обладали единой базой реологического подхода и получили целостное развитие. В результате в 1965 году казахстанскими механиками во главе с Ж.С. Ержановым

была организована и проведена I Всесоюзная научная конференция по механике горных пород.

В своей докторской диссертации Ж.С. Ержанов разработал теорию ползучести горных пород, основанную на классических представлениях наследственности Больцмана-Вольтерра. Диссертацию блестяще защитил в Сибирском отделении АН СССР в присутствии виднейших советских механиков. Академики АН СССР Ю.Н. Работнов, П.Я. Полубаринова-Кочина, С.А. Христианович, Т.Ф. Горбачев, К.В. Руппенейт дали высокую оценку и предсказали большое будущее изложенным в диссертации идеям. Опубликованная в 1965 г. монография «Теория ползучести горных пород и ее приложения» дала большой толчок развитию отечественной механики горных пород. Совместные разработки с Институтом безопасности горных работ (г. Лейпциг) в 1971-1985 гг., опубликованы в виде монографий на русском и немецком языках. Теория нашла эффективное применение в горнотехнических расчетах, удостоилась Государственной премии Казахской ССР в области науки и техники 1974 года.

Теорию складкообразования в земной коре Ж.С. Ержанов апробировал в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР на семинаре академика С.А. Христиановича, директора института. Пораженный смелостью постановки проблемы, красотой ее решения и эрудицией докладчика, эмоциональный академик воскликнул: "Местом рождения математической тектоники является Алма-Ата". Систематически новейшие результаты по этой тематике докладывались на семинарах всемирно известного тектониста, академика АН СССР А.Л. Яншина, который затем редактировал одну из монографий Ж.С. Ержанова в центральном издательстве "Наука" в г. Москве.

Общая теория вращения Земли и комплекс работ, связанный с нею, составляют еще одно важное направление, развитое при научном руководстве Ж.С. Ержанова. Казахстанская наука вправе гордиться тем, что расчетный аппарат этой теории в свое время был принят в качестве Международного стандарта редуccionных вычислений такими международными

организациями, как Астрономический союз, Бюро времени, Служба движения полюсов, Геодезическим и геофизическим союзом.

Известный геодезист М.М. Машимов ряд результатов Ж.С. Ержанова включил в свои учебники "Уравнения геодезических сетей" (Москва, 1979) и "Высшая геодезия. Методы изучения фигуры Земли и создания общеземной системы геодезических координат" (Москва, 1991).

Ж.С. Ержанова интересовали вопросы полноты выемки рудных пород, с одной стороны, и безопасной и длительной эксплуатации шахт, с другой стороны. В связи с этим он плотно работал с Донбасским и Карагандинским угольными бассейнами, Джезказганским медным и Ачисайским полиметаллическими месторождениями, солерудными и соляными ископаемыми разрезами. Он изучал в лабораторных и натуральных условиях прочностные характеристики этих ископаемых пород и рассчитывал основные барьерные и поддерживающие опорные целики в шахтах.

Перечисленные результаты исследований вылились в теорию подземных сооружений. Особенно следует отметить его методы эффективной эксплуатации соляных шахт, строительство которых проводится подземным выщелачиванием. Они являются подземными хранилищами природных газов, ионизирующих элементов и жидких углеводородов.

В рамках приложений теории складкообразования удалось описать механизм образования купола в соляной толще. При этом установлено, что мощность, плотность, вязкость и другие физико-механические характеристики слоев, а также действие массовых и поверхностных (граничных) сил определяют будущие складки в виде куполов. Было доказано существование трех видов куполов: плато, грибообразные и стержневидные купола, причем было выявлено, что под шляпками грибообразного купола формируются нефтегазовые ловушки.

Сопоставление этих результатов с материалами геолого-географических исследований и сейсмического зондирования складчатых образований подтвердило основные выводы

математической теории гравитационной неустойчивости в земной коре, разработанной Ж.С. Ержановым.

Складкообразование, напряженно–деформированное состояние складчатых структур, куполообразование и гравитационная неустойчивость соляно-купольных образований, формирование нефтегазовых ловушек и их механическая реакция на нарушение сплошности, например, путем заложения нефтегазовых скважин и многие другие явления, связанные с складкообразованием, носят нелокальный характер. Они характерны для любой складчатости и имеют место во всей земной коре, даже в пределах литосферы и астеносферы. Обобщая все предыдущие результаты, Ж.С. Ержанов создал математическую теорию глобальной тектоники Земли.

Всем ходом своих научных исследований и созданием теории глобальной тектоники Земли, Ж.С. Ержанов шел к созданию механики Земли. Оставалось оживить рассмотренные выше неэволюционные процессы, т.е. надо было подключить время в них и рассматривать их, как протекающие и эволюционирующие во времени процессы. Очевидно, к таким процессам в первую очередь относятся сейсмические явления, т.е. землетрясения. Они в свою очередь делятся на коровые и подкоровые (глубинные) процессы. Своими дальнейшими исследованиями Ж.С. Ержанов доказал, что очаг зарождения сейсмических процессов может лежать от поверхности Земли на расстоянии до одной десятой радиуса, т.е. на глубине до 650 – 700 км. Из этих глубин могут идти и достичь поверхность Земли только низкочастотные волны, интенсивность которых может измеряться десятками, а то и сотнями мегаватт на каждый квадратный метр поверхности Земли на фронте. Так прямо родилась волновая динамика как природных (землетрясения), так и техногенных процессов (бегущие волны в метрополитенах).

Ж.С. Ержанова интересовало внутреннее строение Земли и ее внешний облик, особенно взаиморасположение материков, их распределение по полушариям, очертание материков, их сходство с рельефом подокеанических хребтов, механизмы горообразования, опускания и/или поднятия материков и многие

другие явления, имеющие место в масштабе всей планеты. Конечно, и до Ж.С. Ержанова были различные модели внутреннего строения Земли. Но Ж.С. Ержанов определил математически корректную и физически адекватную модель Земли, внутренние слои которой в агрегатном состоянии взаимодействуют между собой так, что напряженно-деформируемое состояние Земли близко к наблюдаемому.

Сформулированная математическая модель внутреннего строения Земли позволила построить картину пульсационного движения «астеносфера - литосфера», исследовать устойчивость и получить критические значения нагружения этой пары, условия формирования магнетизма, электромагнетизма и термонапряженного состояния. Эти результаты легли в основу его теории внутреннего строения и формирования структурных ликв Земли путем расхождения континентов и раскрытия дна молодых океанов.

Сформированная Ж. С. Ержановым механика Земли была бы неполной без учета ее пространственных движений: вращения около собственной оси и орбитального обращения вокруг Солнца в гравитационном поле ньютоновских взаимодействий Луны, Солнца и планет Солнечной системы. Эти взаимодействия, названные Ержановым внешними силами космического происхождения, и силы инерции вращения Земли, названные им же внутренними объемными силами, наряду с силами взаимодействия внутренних слоев (физической природы) включены в естественные механизмы вышеописанных процессов. Они определяют фигуру Земли, ее внешний континентально – океанический лик, механизмы движения материков, раскрытия дна молодых океанов, горообразования, землетрясения, складчатости земной коры и многих других явлений.

С учетом всей гаммы действующих на Землю сил и их моментов относительно центра вращения были построены общая теория вращения абсолютно твердой Земли (базовая модель), затем теория вращения слоистой Земли, теория формирования лика вращающейся Земли, теория распределения

материков и океанических оснований Земли во вращении в ньютоновском поле.

Его имя, как основателя науки «Механика Земли», широко известно, и было почитаемо в Советском Союзе и за рубежом. Герой Социалистического труда, вице – президент АН СССР, академик АН СССР А.Л. Яншин говорил, что «Жакан Сулейменович Ержанов создал математическую основу количественного исследования тектонического развития Земли. Его механика тектонического развития Земли - суть установления движущих механизмов глобальных тектонических процессов как земного, так и космического происхождения, их синтеза и формирования лика Земли. Это относится и к его теории ползучести и наследственности, и к теории складкообразования, и к теории вращения Земли». Трижды Герой Социалистического труда, Лауреат Ленинских и Государственных премий СССР академик АН СССР С.А. Христианович, высоко оценивая его результаты по динамике гравитационной неустойчивости, сказал: «Расчетную часть этой теории довести до числа и вооружить ими геологов – поисковиков нефти и газа».

Жакан Сулейменович Ержанов скончался 27 февраля 2003 г., оставив после себя целый мир науки и знаний, собрание глубоких идей и представлений.

Более ста прямых учеников имел академик. Известность получили и сами ученики академика Ж.С. Ержанова. В их числе доктор физико-математических и технических наук академик НАН РК Ш.М. Айталиев, Ю.А. Векслер (Германия), И.А. Гарагаш, В.Ю. Изаксон, С.Б. Колоколов (Россия), Н.И. Мироненко (Украина), А.А. Калыбаев, Ю.Н. Серегин, академик АТ РФ Ж.К. Масанов, Л.А. Алексеева, М.Т. Тусупов, А.К. Егоров, член-корреспондент НАН РК Ж.Ш. Жантаев, К.К. Коксалов, З.К. Куралбаев, Ж.О. Отарбаев, В.Н. Попов, А.И. Искакбаев, К.Б. Алдамжаров, М.Е. Ескалиев, О.Н. Нуржумаев, З.М. Рахимбекова, М. Умаров, Б.Б. Телтаев, А.А. Баймухаметов, Н.И. Мартынов, У.Д. Ершибаев, А.С. Ким, А.К. Уразбеков, С.К. Тлеукенов, Ж.Б. Бакиров, А.И. Имангалиев, А.А. Такишов, Е.Т. Божанов, Т.Б. Байтелиев, кандидаты физико-математических

наук А.Г. Танирбергенов, М.А. Баймухаметов, Т.Б. Мадалиев и многие другие.

Многочисленные ученики чтят память о своем выдающемся Учителе:

*Учитель!  
По научным трудам,  
по делам Вашим учились.  
За знания благодарны Вам.  
Но знаний круг широк и крепок!  
В каком бы ни были пути,  
Везде над нами и всегда  
Одна, но ярче всех свети –  
Свети, Учителя звезда!*

## ВВЕДЕНИЕ

Более 70% мировых месторождений нефти и газа располагаются в областях соляно-купольной тектоники. Классическим примером является Прикаспийская впадина, две трети которой расположены на территории Казахстана, где находятся порядка 1300 соляных куполов (диapiroв), из которых более 1000 еще не разведаны. Поэтому формированию соляно-купольных структур в земной коре посвящены геолого-геофизические изыскания (поиск структурных и стратиграфических условий, благоприятных для аккумуляции углеводородов, а также гравиметрическая, магнитометрическая и сейсмическая съемки) и натурные наблюдения, лабораторное и численное моделирование, а также аналитические исследования. Кроме того, соляные купола используются как резервуары хранения нефти и газа, а также как могильники радиоактивных и нефтепромысловых отходов. Каменная соль (галит) является основой для производства поваренной соли и различных химикатов. Отметим, что ежегодно человечество потребляет более семи миллионов тонн поваренной соли.

Линейная стадия формирования соляного диапиризма достаточно подробно изучена аналитическими методами. Нелинейная стадия мало изучена. Основные результаты, получены в основном лабораторным моделированием, а также численными методами. Следует отметить, что лабораторное моделирование не обеспечивает достаточное подобие реальных тектонических процессов. Численные же исследования в этой области немногочисленны, особенно трехмерных процессов, и существуют определенные трудности в описании границ раздела слоев.

Получение информации о структуре подсолевого ложа и вероятных коллекторов нефти и газа в нем сейсмической, гравитационной и магнитной разведками практически не представляется возможным. Поэтому на первый план выдвигаются методы математического моделирования. Кроме того, в последнее время учеными СО РАН получены принципиально новые данные о возможности образования

тяжелых углеводородов на больших глубинах, что подтверждает гипотезу Д.И. Менделеева о неорганическом происхождении нефти и указывает на перспективу ее поиска и добычи на больших глубинах. Для этого необходима информация о формировании соляных диапиров на больших глубинах, что связано с учетом тепловых эффектов и усложнением реологии. Исследования в этом направлении практически отсутствуют в открытой мировой печати.

Данная монография посвящена 95-летию академика Ж.С. Ержанова - основателя казахстанской школы геомеханики. В ней изложены результаты комплексного исследования формирования соляных куполов, полученные учениками академика Ж.С.Ержанова на основе математического моделирования с разработкой новых реологических тепловых моделей, что, несомненно, будет способствовать более эффективной разведке и добыче углеводородов.

Основной материал в предлагаемой читателю монографии изложен в пяти разделах. Во введении приведено краткое изложение исследований по разделам. В конце монографии подытожены результаты исследования. В заключении сформулированы основные результаты исследования и возможные направления дальнейших исследований. Список литературы включает 218 библиографических наименований.

Изложение материала начинается с подраздела «Соляные купола», в котором приводится необходимая для дальнейшего изложения краткая информация о соляных куполах, методах исследований формирования соляно-купольных структур. Показано, что одним из эффективных инструментов исследования формирования соляно-купольных структур является математическое моделирование. Проведен краткий обзор работ, не претендующий на полноту по математическому моделированию формирования соляных куполов в земной коре. Сделан вывод о том, что работы в этой области немногочисленны и далеки от своего завершения.

Первый раздел монографии посвящен линейной фазе формирования соляно-купольных структур на основе модели неньютоновской вязкопластической жидкости. Рассмотрены

плоская, осесимметричная и пространственные двухслойные и трехслойные модели. Показано, что реология слоев для возмущений обладает анизотропией, что приводит к образованию целого семейства разных по масштабу диапиров, которые распределены по пространству неоднородно. При определенных условиях возможно образование соляных столбов (соляных пальцев). Для двухслойной осесимметричной модели образуется купол-гигант с одиночным соляным валом, для трехслойной - купол-гигант с семейством соляных валов. Таким образом, показано, что реология слоев оказывает существенное влияние на зарождение и дальнейшее формирование соляных куполов.

Во втором разделе приводится разработка и обоснование двух численных методов, для расчета нелинейной фазы плоского и трехмерного формирования соляных диапиров в земной коре. Первый численный метод основан на циклическом методе расщепления Г.И. Марчука для уравнения неразрывности и схеме слабо сжимаемой жидкости Г.М. Кобелькова - Н.Н. Яненко для реализации уравнений импульса. Разностная начально-краевая задача, соответствующая исходной дифференциальной, записана в дивергентном виде, что является необходимым и достаточным условием сходимости разностного решения к точному для широкого класса задач. Она имеет второй порядок точности по пространственной и временной переменным. Доказано, что она абсолютно устойчива и однозначно - разрешима. Для более точного прослеживания эволюции поверхности раздела слоев предложен дифференциальный анализатор, основанный на постоянстве меры зоны размазывания физических параметров слоев. Во втором численном методе уравнение неразрывности аппроксимировано монотонной разностной донорной ячейкой против потока, а уравнения импульса - дивергентной разностной схемой, которая реализуется схемой расщепления по физическим процессам. Показано, что применение дифференциальных анализаторов во втором численном методе не обязательно. Методы проверены на тестах. Приведены

примеры расчета плоских, осесимметричных, пространственных задач формирования соляных диапиров в земной коре.

В третьем разделе с помощью численных инструментов, разработанных во втором разделе, исследуются основные закономерности и особенности формирования соляных куполов в земной коре. Исследован механизм и зависимость основных характеристик тейлоровской неустойчивости от физических и геометрических параметров среды. Описаны фазы развития формирования соляных диапиров и генерация вторичных возмущений. Проведен сравнительный анализ характеристик формирования соляного купола в плоской, осесимметричной и трехмерных моделях. Показано, что формирование и развитие соляно-купольных структур в природной обстановке и численных моделях определяются одинаковыми факторами.

Четвертый раздел посвящен формированию соляных куполов глубокого залегания, т. е. формированию соляных куполов в температурном поле. Предварительно описываются физическая и математические модели такого формирования. В общем случае, они описываются релей-тейлоровской неустойчивостью в приближении Буссинеска с экспоненциальной зависимостью динамической вязкости от температуры. Далее, разрабатывается и обосновывается численный инструмент с использованием монотонных разностных схем и схемы расщепления по физическим процессам для расчета соляного диапиризма глубокого залегания. Проведенные расчеты показали, что температурные градиенты существенно влияют как на формы образования соляных куполов и на профили подсолевого ложа, так и на скорость их развития, но имеют те же закономерности, которые справедливы при чисто динамическом формировании соляных куполов. Разработанная методика выделения нефтегазовых ловушек (коллекторов нефти и газа) и последующие расчеты показали, что для соляных куполов нефтегазовые ловушки формируются в областях их крыльев (надкрылового и подкрылового пространства), а также в области подкупольного пространства подсолевого ложа, что было подтверждено глубинным бурением соляных диапиров. Кроме того, расчетные данные количественно показали, что

углеводородные запасы привязаны к областям с повышенными температурными градиентами. Это было подтверждено космическим мониторингом месторождений Западного Казахстана и акватории Аральского моря. На основе проведенных расчетов и полученных результатов были выработаны некоторые рекомендации в приложении к нефтегазовому делу.

В пятом разделе показано, как с помощью численных инструментов, разработанных в четвертом разделе, можно проводить исследование астеносферного диапиризма, эволюции тепловых плюмов в нижней мантии Земли. Мы остановились на плоских задачах формирования астеносферного диапиризма (переход к трехмерной модели носит редакционный характер). Предварительно изложено современное состояние вопроса формирования астеносферного диапиризма. Из приведенного краткого обзора следует, что в настоящее время при численном моделировании астеносферного диапиризма в верхней мантии обычно используют две наиболее признанные в настоящее время, физические модели. В упрощенной модели I (модель I а) реология верхней мантии и литосферы с достаточной степенью точности аппроксимируется ньютоновской вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью и вязкостью, зависящими от температуры. В общей модели I (модель I б), кроме того, вязкость зависит еще от гидростатического давления. При этом теплопоглощением за счет фазовых переходов в астеносфере пренебрегают по сравнению с тепловым потоком, идущим с нижних слоев астеносферы. В модели II непосредственно учитываются фазовые переходы, основанные на экспериментальной кривой плавления в верхней мантии. Земная кора и астеносфера на больших отрезках времени аппроксимируются ньютоновской вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью, зависящей от температуры и доли подплавленной фазы. Проведенные расчеты по трем моделям формирования астеносферного диапиризма показали, что применение моделей I а, I б для описания астеносферного диапиризма ограничено относительно небольшим диапазоном изменения эффективной вязкости. Тем не менее, они позволяют

установить утонение и опускание земной коры в результате конвекции в верхней мантии, а также зоны разрушения в земной коре. Установлено, что учет влияния давления на динамическую вязкость в модели I б существенно замедляет процесс развития астеносферного диапиризма. Общая модель II, учитывающая фазовые переходы, наиболее полно отражает физику явления и описывает формирование расплавленной астеносферы в виде диапиров. Это оправдывает название астеносферный диапиризм. Кроме того, количественно подтверждена теория Ботта блокового формирования земной коры.

## СОЛЯНЫЕ КУПОЛА

Соляной купол (диапир) - часть пласта каменной соли (галита), внедрившаяся в вышележащий пласт осадочных пород. Внедрение относительно пластичной соли в купол является результатом разности плотностей соли и осадочных пород. Соляные толщи обладают более низкой плотностью и более высокой пластичностью в условиях высокого давления, чем осадочные породы.

Каменная соль - минерал класса хлоридов, NaCl. Содержит до 40 % Na и 60% Cl, а также примеси: Br, NH<sub>3</sub>, Mn, Cu, Ga, As, I, Ag, Ba, Tl, Pb, K, Ca, SO<sub>3</sub> образует кубические, реже октаэдрические кристаллы. Обычно встречается в виде зернисто-кристаллических агрегатов. Галит бесцветен и прозрачен, чаще серовато-белый. Примесями он окрашивается в разные цвета (зеленый, красный, синий, оранжевый и т.д.). Блеск стеклянный, хрупок, изотропен, легко растворим в воде, характерен солёный вкус.

Осадочный чехол обычно представлен группой глинистых, кремневых, сульфатных, медистых, карбонатных пород.

Соляные купола состоят в основном из соляного массива (или штока), который слагает центральную часть (ядро) структуры; толщи вмещающих соляной массив более молодых осадочных горных пород; подсолевых горных пород, более древних чем солевой шток. На поверхности соляных куполов нередко образуется так называемая каменная шляпа, или «кепрок» (от англ. cap - шапка, rock - камень, порода), сложенная гипсом и брекчией из обломков плохо растворимых пород [1, 2]. Чаще всего соляные купола возникают в межгорных или краевых прогибах и вдоль линий тектонических разрывов. Соляные купола часто сопровождаются выходами горючих газов и залежами нефти. С соляными куполами геологически часто связаны месторождения нефти и газа (например, Эмбинское, Галф-Кост в США). Самые большие скопления соляных куполов находятся в Мексиканском заливе и в Прикаспийской впадине.

На рисунке 1 показано формирование соляного купола в слоистой толще осадочных пород. На крыльях купола

расположены нефтегазовые ловушки (обозначены-Oil). Форма и размеры соляных куполов могут быть разными. Известны округлые, овальные и неправильные купола. Неправильные купола представлены огромными «колоннами», «пнями», «конусами», «грибами». Они, по геофизическим данным, могут распространяться до глубин 10-15 км. Их размеры колеблются от долей квадратных километров до нескольких сотен квадратных километров. Так, например, площадь Челкарского соляного купола составляет более 500 км<sup>2</sup>.

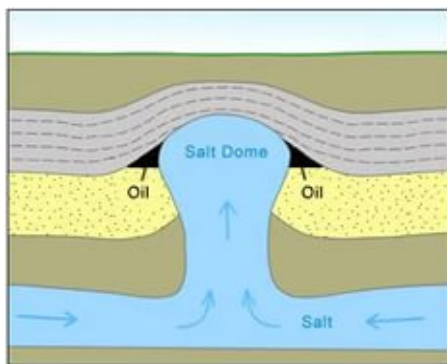


Рисунок 1 - Формирование соляного купола в слоистой толще осадочных пород

Соляные штоки залегают на разных глубинах, однако имеются и открытые соляные купола, и соляные столбы. Горы Кухи-Намак в Южном Иране (высота 1200м) и Ходжа-Мумим в Таджикистане (высота 900м) представляют вышедшие на поверхность соляные купола.

Крупные соленосные бассейны присутствуют на всех континентах. В работе [3] проведена их классификация по пространственно - временному распределению. Согласно [3], в Европе и Азии находятся 48 соленосных бассейнов, в Северной Америке-19, в Южной Америке-17, в Африке и Аравии-19, в Австралии-9. Почти все области соляной тектоники являются крупнейшими нефтегазоносными бассейнами.

Прикаспийская впадина является уникальным соленосным бассейном, две трети которой расположены на территории Казахстана, где находятся порядка 1300 соляных куполов (диapiroв), из которых более 1000 еще не разведаны. В Казахстане находятся известные месторождения нефти и газа: Тенгиз, Жанажол, Кульсары, Каратюбе, Карашыганак, Акжар и другие [4-7].

Поиск углеводородов является одной из сложных и актуальных задач геологии нефти и газа, которая как наука оформилась к 1915 г. Задача обнаружения новых месторождений нефти и газа на практике, как правило, сводится к поискам возможных ловушек (коллекторов) углеводородов. До сих пор нет методик, аппаратуры и механизмов, которые могли бы безошибочно обнаруживать подземные резервуары, где имеются нефтяные или газовые месторождения. Геолого-геофизические методы включают в себя поиск структурных и стратиграфических условий, благоприятных для аккумуляции углеводородов, а также гравиметрическую, магнитометрическую и сейсмическую съемку [1-8]. Затем выделенные участки исследуются на наличие нефти и газа путем бурения разведочных скважин. Следует отметить, что отношение скважин, которые дали хоть какие-нибудь притоки нефти или газа, к безуспешным скважинам составляет в среднем 10%. Кроме того, по оценкам [4-6], только одна из семидесяти скважин, пробуренных для поисков новых месторождений, приводит к коммерчески выгодному месторождению. Поэтому формированию соляных структур посвящены также лабораторное и численное моделирование, аналитические исследования.

Первые работы по изучению гравитационной неустойчивости в жидкостях, по-видимому, были выполнены Х.Г. Бенаром [9], экспериментально изучавшим стационарную конвекцию в однородной жидкости, а также Релеем [10], использовавшим теорию возмущений линеаризованных уравнений Буссинеска для объяснения такого явления. В более ранней работе Релей [11] провел математический анализ развития неустойчивости на границе раздела двух жидкостей различной плотности,

находящихся в поле сил тяжести, а позже его результаты были обобщены Г. Тейлором [12]. Именно поэтому такого рода неустойчивость в обычных жидкостях получила название релей-тейлоровской неустойчивости, а в физике ее называют просто тейлоровской неустойчивостью [13, 14]. Экспериментальной проверке результатов Г.Тейлора в идеальной жидкости посвящена работа [15]. Р.Белман и Р.Х.Пенингтон [16] обсудили стабилизирующее воздействие поверхностного натяжения на систему жидких слоев. Ими показано существование, по крайней мере, одного волнового числа, для которого скорость роста возмущений достигает максимума. Теория Белмана-Пенингтона была распространена на трехмерный случай С.Чандрасехаром [17, 18].

Нелинейная стадия тейлоровской неустойчивости идеальной несжимаемой жидкости изучалась в работах Э.Ферми, Э.Ферми и Дж. фон Неймана [13, 14], а Ю.Н. Давыдовым методом крупных частиц проведено численное моделирование [19, 20]. Полученные Ю.Н.Давыдовым результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными Д.Льюиса [21]. Плоская задача слабовязкой несжимаемой жидкости с учетом конвективных членов в уравнениях движения изучалось в [22], а со свободной поверхностью в [23]. Различные вопросы неустойчивости стратифицированной жидкости освещены, например, в монографии Дж. Тернера [24], где дана подробная библиография.

В условиях гравитационной неустойчивости количественные оценки нестационарных полей тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, формирующих соляные структуры в земной коре, как правило, проводятся на основе модельных уравнений геодинамики: ползущих течений Стокса неоднородной вязкой несжимаемой жидкости в поле сил тяжести.

Линейная стадия тейлоровской неустойчивости ползущего движения вязкой несжимаемой жидкости достаточно полно исследована аналитическими методами [25-36]. Подробный обзор этих исследований дан, например, в [36]. Суть подобных исследований коротко состоит в следующем. В приближении

Стокса, когда вклад инерционных членов в уравнении движения отсутствует, на основе линеаризованных уравнений или соответствующего вариационного принципа исследуется поведение возмущений в малой окрестности начального момента времени. Анализируются особенности формирования поверхностей раздела в зависимости от различных входных параметров задачи. При этом силами поверхностного натяжения пренебрегают по сравнению с архимедовыми и вязкими силами. Показано, что существует доминантная длины волны (волновое число), для которого скорость роста возмущений максимальна.

Следует отметить, что до середины тридцатых годов прошлого столетия существовало две концепции формирования соляных диапиров [1, 2]. Согласно первой концепции, движущей силой соляных диапиров, прорывающихся сквозь толщу осадочных пород, во многих районах земного шара являются горизонтальные тектонические силы. Согласно второй концепции, высказанной С.А. Арренниусом еще в 1912 году относительно куполов на севере Европы, движущей силой является сила всплывания (архимедова сила), вызванная разностью плотностей галита и осадочного чехла. В 1934 году Л.Нетлтон [25] на моделях, состоявших из двух слоев вязких жидкостей с различной плотностью, впервые показал процесс формирования соляных куполов. Это были первые динамические модели формирования соляных куполов в результате действия лишь одной силы всплывания в поле силы тяжести. После этой работы приоритетной стала вторая концепция, хотя среди геологов даже в настоящее время есть и сторонники первой концепции.

Влияние реологии слоев, находящихся под действием тектонических сил, на развитие начального этапа диапиризма мало изучены. Исследованию в этой области посвящены работы [37-46]. В первых двух работах этого направления рассмотрена устойчивость вязкопластического течения весомой слоистой среды, приведены основные соотношения для возмущений. Оценено влияние степени контрастности параметров вязкопластического слоя, заключенного между двумя вязкими слоями, на скорость роста возмущений. В [39] рассмотрена

гравитационная неустойчивость идеально пластического слоя, покоящегося на слое вязкой жидкости. Следует отметить, что в целях упрощения исследования авторы вывели основные соотношения для возмущений из физически неверных утверждений, в результате чего потерян скачок касательных напряжений на границе раздела слоев. Поэтому результаты этого исследования нуждались в проверке и более строгом обосновании. Это было сделано в работах [40-46], где в качестве реологической модели была выбрана модель неньютоновской вязкопластической среды, которая позволила обобщить и уточнить результаты предыдущих исследований. Показано, что реология слоев для возмущений обладает анизотропией, что проявляется в неоднородном распределении диапиров по пространству и приводит к разномасштабности их размеров. Там же показано существование целого спектра локальных максимумов, что говорит о возможности формирования диапиров с другими геометрическими параметрами и формами.

Осесимметричная потеря устойчивости двухслойной среды приводит к формированию одиночного соляного купола (как правило, купола-гиганта), или одиночного соляного купола и кругового соляного вала правильной формы. Подобные купола-гиганты характерны для Прикаспийской Впадины Казахстана. В трехмерном случае усложненная реологическая среда ведет себя как жидкость Вейссенберга и обладает эффектом продомости [47], что приводит к образованию соляных столбов в земной коре, которые встречаются в природе.

Следует заметить, что на образование соляных диапиров оказывают существенное влияние распространение деформационных фронтов в земной коре, природа которых заложена в формировании и распространении уединенных тектонических волн на границе упругой литосферы, сцепленной с вязкой астеносферой [48-52]. Эти уединенные тектонические волны распространяются со скоростью порядка 1 км. в год. Они описываются уравнениями типа Картевега-де Фриза-Бюргера, а также регуляризованным уравнением Картевега-де Фриза с кубической нелинейностью. По своей природе они близки к гравитационно-капиллярным волнам на поверхности жидкости

и вызывают слабо затухающие колебания земной поверхности в течение десятков тысяч лет [48-52].

Нелинейная стадия тейлоровской неустойчивости ползущих движений мало изучена. Результаты, относящиеся к некоторым задачам тектоники, преимущественно соляной, получены лабораторным моделированием [53-60], а также численными методами. В результате экспериментов, проводившихся на моделях, как правило, состоящих из двух слоев вязких несжимаемых жидкостей различной плотности, а также аномально-вязких многослойных жидкостей с помощью центрифуги, было установлено следующее. Область движения разбивается на отдельные ячейки, напоминающие ячейки Бенара при стационарной тепловой конвекции. Установлены фазы развития формирования соляно-купольных структур. Развитие неустойчивости приводит к образованию округлых выступов. Получены качественные и количественные зависимости некоторых характеристик тейлоровской неустойчивости от различных соотношений толщин, плотностей и вязкостей слоев. Подтверждена гипотеза С.А. Арпенниуса о гравитационной неустойчивости формирования соляных диапиров. Следует подчеркнуть, что экспериментальное изучение не обеспечивает достаточное подобие реальных тектонических процессов [61].

Первые работы по численному моделированию формирования соляных куполов в земной коре посвящены плоским задачам и носили скорее прикидочный характер. В работе [62] решение строилось в рядах, и фактически описана стадия развития диапиризма, мало отличная от линейной. В работе [63] была использована стохастическая модель Монте-Карло, основанная на диффузионной модели В.Н. Швердтнера [64]. Диффузионная модель В.Н. Швердтнера [64] не учитывает деформацию верхнего и боковые деформации нижнего слоев. В [65] разностная схема записана в не дивергентном виде, что привело к дисбалансу импульса и сильному биению плотности. В [66, 67] применялся метод конечных элементов (МКЭ). Применение МКЭ к описанию развитой фазы диапиризма затруднительно. Обзор и анализ этих работ подробно дан в [68-70].

Математическим вопросам механики неоднородной, вязкой несжимаемой жидкости посвящены исследования [71-76]. Модель неоднородной жидкости позволила исключить из рассмотрения сложные граничные условия на неизвестных границах раздела слоев и «естественно» проследить их эволюцию. Были разработаны корректные вычислительные технологии для расчета плоских [66-70, 77-87], осесимметричных [77, 88, 89], а с развитием вычислительной техники, и пространственных течений [90-106].

В перечисленных выше работах по формированию соляных диапиров исследованы некоторые закономерности и особенности развития нелинейной стадии гравитационной неустойчивости. Были выделены фазы развития неустойчивости, показана ячеистая структура течения, оценены влияние пристеночных эффектов на развитие гравитационной неустойчивости. Так в работах [67-70, 77-80, 87, 98-100, 106] оценены параметры всплывания купола и показано, что на процесс формирования соляных диапиров в земной коре существенное влияние имеют как физические, так и геометрические параметры среды.

В работах [69, 70, 78, 98, 106] исследовано влияние подсолевого ложа и наклона пласта каменной соли на рост и развитие соляных куполов. В работе [106] проведен сравнительный анализ развития плоской гравитационной неустойчивости с пространственной при одинаковых физико-геометрических параметрах среды. Сравнительный анализ показал, что закономерности, справедливые для плоских течений, имеют место и в трехмерном случае, но имеются и отличия.

Среди разнообразия численных технологий, используемых для исследования формирования соляно-купольных структур в чисто динамической постановке задачи, отметим работы Б.В.Лунева [82, 87], численные методы которого базируются на известных функциях Грина для полуплоскости и полупространства однородной по вязкости жидкости. Они позволяют достаточно просто рассчитывать многослойные

течения, но ограничены постоянством вязкости для всего разреза [87].

Основные исследования нелинейной фазы формирования соляных структур в земной коре выполняются Московской школой, ведущими сотрудниками института Физики Земли, и Казахстанской - сотрудниками Института математики и математического моделирования МОН РК, а также сотрудниками Института механики и машиноведения им.У.А. Джолдасбекова МОН РК. Исследования этого направления проводятся также в Институте прикладной математики им.М.В. Келдыша, но они не публикуются в открытой печати.

Вычислительная технология Московской школы строится на разложении разностного решения по базисным конечным носителям [81, 90-92], а уравнение сохранения массы разрешается на разностном уровне методом характеристик с использованием распараллеливания вычислений. Это гарантирует выполнение законов сохранения. Тем не менее, с помощью метода характеристик практически затруднительно описать образование соляных линз.

В Казахстане многие задачи соляно-купольной тектоники поставлены академиком Ж.С. Ержановым, и решены его учениками. Были разработаны и обоснованы несколько консервативно-разностных методов с использованием монотонных разностных схем [68-70, 78, 96-106] и итерационных процессов, базирующихся на схеме расщепления физических процессов, позволяющих корректно проследить эволюцию поверхности раздела слоев вплоть до образования соляных линз. На разработку этих методов оказал огромное влияние академик Ш.С. Смагулов.

В последнее время учеными СО РАН получены принципиально новые данные о возможности образования тяжелых углеводородов на больших глубинах, что подтверждает гипотезу Д.И. Менделеева о неорганическом происхождении нефти и указывает на перспективу ее поиска и добычи на больших глубинах. В настоящее время в мире пробурено более 2000 нефтяных скважин глубиной более 7 км и около 100 скважин глубиной от 10 км до 11,4 км. Отметим, что в Казахстане

совместно с Россией будет применено технологическое сверхглубокое бурение при строительстве параметрической скважины «Каспий-1». Об этом было заявлено на 3-й международной научной геологической конференции «Атыраугео - 2015». Но для этого необходима информация о формировании соляных диапиров на больших глубинах, что связано с учетом тепловых эффектов и усложнением реологии.

Известно, что среднее изменение температурных градиентов в верхних горизонтах земной коры составляет  $20^{\circ}\text{C}$  на один километр. Оценка чисел Релея [107-111] показывает возможность существования мелкомасштабной тепловой конвекции в верхних горизонтах земной коры. Последняя оказывает существенное влияние на распределение и формирование соляных диапиров в осадочном чехле. Поэтому необходимо внести коррективы в физическую и математическую модели формирования соляных диапиров глубокого залегания, т.е. помимо учета гравитационной неустойчивости, учесть и конвективные движения. Кроме того, необходимо учесть влияние теплового потока, идущего с глубинных горизонтов земной коры на реологические параметры среды.

Отметим, что близкой к задаче формирования соляного диапиризма глубокого залегания, но более сложной, является задача формирования астеносферного диапиризма с фазовыми переходами [112-120]. Существуют различные модели формирования астеносферного диапиризма. Но все они базируются на модели релей-тейлоровской неустойчивости в приближении Буссинеска и зависимости вязкости от температуры.

В работах [121-124] на основе модели релей-тэйлоровской неустойчивости в приближении Буссинеска с вязкостью, независимой от температуры, исследовано влияние тепловых эффектов на формирование плоских соляных структур. Было установлено, что температурные градиенты существенно влияют на структуру и профили формирования соляных куполов. Они также существенно влияют на профили формирования подсолевого ложа (подкупольного пространства).

Работы [125-130] посвящены выделению нефтегазовых ловушек (коллекторов нефти и газа). Для соляных куполов нефтегазовые ловушки формируются в областях их крыльев (надкрылового и подкрылового пространства), а также в области подкупольного пространства подсолевого ложа, что было обнаружено глубинным бурением соляных диапиров. В работе [131] построены карты распределений геотермического градиента верхней части земной коры и теплового потока Казахстана с помощью космического мониторинга. Анализ этих карт показал, что месторождения Западного Казахстана и акватории Аральского моря расположены в зонах с повышенным уровнем геотермического градиента. Расчетные данные работ [125-130] количественно подтвердили, что углеводородные запасы привязаны к областям с повышенными температурными градиентами.

Другие работы в открытой научной мировой печати по математическому моделированию формирования соляных куполов в земной коре с учетом тепловых эффектов авторам данной монографии в настоящее время неизвестны.

Из приведенного, не претендующего на полноту, краткого обзора современного состояния математического моделирования формирования соляных диапиров в земной коре можно сделать следующие выводы:

1. Численные исследования динамических плоских и осесимметричных задач позволили выявить основные закономерности и особенности процесса формирования соляных структур. Результаты этих исследований подтверждены геофизическими изысканиями, лабораторным моделированием, но многие вопросы еще не исследованы.

2. Трехмерные численные модели представлены небольшим спектром работ и далеки от своего завершения. Существуют определенные трудности в описании поверхностей раздела вязких сред.

3. Линейная фаза зарождения и начального развития соляных диапиров на основе модели ползущих течений Стокса достаточно подробно исследована аналитическими методами. Работы этого направления с усложненной реологией

немногочисленны и нуждаются в дополнительном исследовании.

4. Работы по математическому моделированию соляных диапиров глубокого залегания представлены первым десятком работ и посвящены плоским моделям. В них не учтена зависимость динамической вязкости от температуры. Работы этого направления нуждаются в учете влияния тепловых факторов на реологические параметры среды и более глубоком исследовании.

В настоящей монографии излагаются основные результаты школы Ержанова Ж.С. по математическому моделированию формирования соляно-купольных структур в земной коре и смежные прикладные вопросы, которые могут быть полезны в нефтегазовом деле. Кроме того, изложены три численные модели формирования астеносферного диапиризма, которые могут быть полезны в различных геофизических исследованиях и при оценке твердых полезных ископаемых.

# 1 ЛИНЕЙНАЯ ФАЗА ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНО-КУПОЛЬНЫХ СТРУКТУР

Хорошо известно, что на больших отрезках времени осадочный чехол, каменная соль и подсолевые породы в первом приближении ведут себя, как вязкие несжимаемые жидкости [107, 108]. На основе этой модели линейная стадия диапиризма достаточно полно исследована аналитическими методами [36]. Аналитические исследования базировались на уравнениях ползущих течений Стокса вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости. Показано, что существует доминантная длина волны, при которой скорость роста границы возмущения слоёв максимальна.

Вопросы влияния реологии слоёв, находящихся под действием тектонических сил, на развитие начального этапа диапиризма мало изучены [36-46]. В настоящем разделе излагаются результаты работ [40-46], в которых проведено исследование линейной фазы формирования соляных диапиров в земной коре на основе модели вязкопластической жидкости в плоской, осесимметричной и трехмерной постановках задачи.

## 1.1 Плоская двухслойная модель

**Постановка задачи, основные соотношения.** Рассмотрим в плоской постановке задачу о гравитационной неустойчивости двухслойной неньютоновской вязкопластической среды на жестком основании, подверженной действию горизонтальных тектонических усилий  $q_1 = q_1(x_2)$ ,  $q_2 = q_2(x_2)$  (рисунок 2).

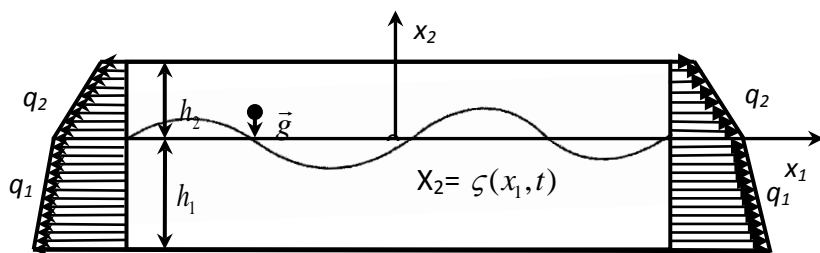


Рисунок 2- Схема двухслойной среды ( $\rho_2 > \rho_1$ )

Уравнения ползущих движений и уравнения состояния несжимаемой неньютоновской вязкопластической среды имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij,j} - \rho g \delta_{2i} = 0, \quad (1.1)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\theta e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (1.3)$$

$$\theta = \eta + \frac{\tau_s}{H}, \quad \eta = \mu H^{n-1}, \quad H^2 = 2e_{ij}e_{ij}, \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$  - соответственно, тензоры напряжений, скоростей деформаций;  $p$  - давление;  $v_i$  - компоненты вектора скорости;  $\rho$  - плотность;  $g$  - ускорение силы тяжести;  $\tau_s$  - предел текучести при сдвиге;  $\mu$  - реологический параметр;  $H$  - интенсивность скоростей деформаций. Параметр  $n$  в (1.4) – показатель нелинейности, характеризующий отклонение вязкой жидкости от ньютоновской. При  $\tau_s = 0$  и  $n = 1$  получим ньютоновскую жидкость ( $\eta = \mu$  - динамическая вязкость); при  $\tau_s = 0$ ,  $n < 1$  имеем «псевдопластическую», а при  $\tau_s = 0$ ,  $n > 1$  - «дилатантную» жидкость. Поскольку осадочный чехол по своим реологическим свойствам ближе к «псевдопластическим» жидкостям, а галит хорошо аппроксимируется вязкопластической жидкостью [36], то в дальнейшем полагаем, что  $0 \leq n \leq 1$ . Соотношения (1) - (4) имеют место для каждого слоя со своими значениями физических параметров. Вязкопластическое течение в каждом слое возможно при условии

$$\sigma_n > \tau_s, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} \quad (1.5)$$

Здесь  $\sigma_n$  - интенсивность касательных напряжений сдвига,  $S_{ij}$  - компоненты девиатора тензора напряжений.

К соотношениям (1.1) - (1.5) добавляются граничные условия. Примем, что слои между собой сцеплены, поверхность верхнего слоя свободна от напряжений, а нижний слой может скользить по жесткому основанию без трения.

Рассмотрим основное однородное состояние, обусловленное действием боковых нагрузок, такое, что

$$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} \neq 0, \sigma_{12} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Соответствующее решение, удовлетворяющее (1.1) - (1.5) и граничным условиям (1.6), имеет вид:

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= Ax_1, & v_2^{(1)} &= -A(x_2 + h_1), & H_0 &= 2A, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= \rho_1 g x_2 + B_1, & \sigma_{12}^{(1)} &= 0, & \sigma_{22}^{(1)} &= \rho_1 g x_2 - \rho_2 g h_2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$B_1 = 2\theta_1 H_0 - \rho_2 g h_2$$

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= Ax_1, & v_2^{(2)} &= -A(x_2 + h_1), & \sigma_{12}^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \rho_2 g x_2 + B_2, & \sigma_{22}^{(2)} &= \rho_2 g (x_2 - h_2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$B_2 = 2\theta_2 H_0 - \rho_2 g h_2$$

На боковой границе распределение тектонических усилий, обеспечивающих однородное состояние (1.6) в каждом слое, будет

$$q_2(x_2) = \sigma_{11}^{(2)} = \rho_2 g x_2 + B_2, \quad q_1(x_2) = \sigma_{11}^{(1)} = \rho_1 g x_2 + B_1, \quad (1.8a)$$

а из условия

$$\frac{1}{2}(q_1(0) - q_2(0)) = (\theta_1 - \theta_2)H_0 \quad (1.8б)$$

определяется скорость деформации  $A$ , удовлетворяющая условию текучести (1.5). При  $A > 0$  тектонические нагрузки растягивающие, мощности слоев с течением времени уменьшаются; при  $A < 0$  - тектонические нагрузки сжимающие, и мощности слоев увеличиваются.

Наряду с основным течением (1.7) - (1.8б), возможно появление с течением времени малых возмущений, которыми обусловлено изменение формы границы между слоями:  $x_2 = \zeta(x_1, t)$ . Представим компоненты вектора скорости, тензора напряжений в новом, возмущенном состоянии в виде суммы соответствующих компонентов основного состояния и малых возмущений:

$$v_i' = v_i^0 + v_i, \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}. \quad (1.9)$$

Произведя линеаризацию соотношений (1.1) - (1.4), получим:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.10)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad (1.11)$$

$$\sigma_{11} = -p + 2n\eta v_{1,1}, \sigma_{22} = -p + 2n\eta v_{2,2}, \sigma_{12} = \theta(v_{1,2} + v_{2,1}), \quad (1.12)$$

где

$$\theta = \eta + \frac{\tau_s}{H_0}, \eta = \mu H_0^{n-1}, H_0^2 = 4A^2. \quad (1.13)$$

Влияние свободной поверхности и жёсткого основания на зарождение диапиризма мало, им можно пренебречь, поэтому на жёстком основании и свободной поверхности примем условие прилипания для возмущения скоростей. Компоненты нормали к поверхности  $x_2 = \zeta(x_1, t)$  с точностью до малых второго порядка имеют вид:  $\tau_1 = -\zeta_{,1}$ ,  $\tau_2 = 1$ . Кроме того, за характерное время зарождения диапиризма ( $t_0 = 25 - 30$  тыс. лет) изменением мощностей слоев в граничных условиях можно пренебречь [36, 37]. Учитывая вышесказанное и удерживая в граничных

условиях члены до первого порядка малости (по возмущениям) включительно, получим:

а) при  $x_2 = -h_1$ ,  $v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0$ ; б) при  $x_2 = h_2$ ,  $v_1^{(2)} = v_2^{(2)} = 0$ ;

в) при  $x_2 = 0$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$ ,  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ ;

$$\sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)} = (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(2)})\zeta_{,1}; \quad (1.14)$$

$$\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{22}^{(2)} = (\sigma_{22}^{(2)} - \sigma_{22}^{(1)}) = (\rho_2 - \rho_1)g\zeta.$$

К соотношениям (1.14) для возмущений необходимо добавить начальное условие:

$$\zeta(x_1, 0) = 0. \quad (1.14a)$$

Если рассматривать среду конечной длины, то для возмущений на боковых гранях выполняются в интегральном смысле условия шарнирного опирания [37]. Здесь будем рассматривать бесконечные слои в горизонтальном направлении, требуя, чтобы возмущения и их производные по  $x_1$  при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  обращались в нуль.

Таким образом, для возмущений справедлива линейная начально-краевая задача (1.10) - (1.14a) с условиями на бесконечности, для решения которой удобно воспользоваться совместным преобразованием Лапласа и Фурье:

$$U(k, x_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x_1, x_2, t) \exp(-\sigma t - ikx_1) dx_1 dt,$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{-\infty}^\infty U(k, x_2, \sigma) \exp(\sigma t + ikx_1) dk d\sigma. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.12) в (1.10), (1.14), учитывая (1.13), (1.14a) и выполняя преобразование Лапласа и Фурье, получим:

$$ikp^* = D^2 v_1 + k^2(1-2\chi)v_1, \quad Dp^* = -k^2 v_2 - k^2(1-2\chi)D^2 v_2,$$

$$ikv_1 + Dv_2 = 0, \quad (1.16)$$

$$p^* = \frac{p}{\theta^0}, \quad \chi = \frac{n\eta}{\theta}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

а) при  $x_2 = -h_1$ ,  $v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0$ ; б) при  $x_2 = h_2$ ,  $v_1^{(2)} = v_2^{(2)} = 0$ ;

$$\text{в) при } x_2 = 0, \quad \zeta = \frac{v_2^{(1)}}{\sigma} = \frac{v_2^{(2)}}{\sigma}, \quad v_1^{(1)} = v_1^{(2)},$$

$$p^{(2)} - p^{(1)} + 2D(n_1\eta_1 v_2^{(1)} - n_2\eta_2 v_2^{(2)}) = (\rho_2 - \rho_1)g v_2^{(1)}/\sigma, \quad (1.17)$$

$$ik(\theta_1^0 - \theta_2^0)(\sigma - 2H_0)v_2^{(1)} + \sigma D(\theta_1^0 v_1^{(1)} - \theta_2^0 v_2^{(1)}) = 0.$$

Решение (1.16) ищем в виде:

$$v_1 = kDf, \quad v_2 = -ik^2 f. \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.16) и исключая  $p^*$ , получим:

$$(D^4 - 2k^2(2\chi - 1)D^2 + k^4)f = 0. \quad (1.19)$$

Так как  $0 \leq n \leq 1$ , то  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $-1 \leq 2\chi - 1 \leq 1$ . Полагая

$$\alpha^2 = \chi, \quad \beta^2 = (1 - \chi), \quad (1.20)$$

корни характеристического уравнения (1.19) можно представить в виде:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm(\alpha \pm i\beta), \quad (1.21)$$

а решение (1.19) как:

$$f(x_2) = (c_1 \operatorname{ch} d_1 + c_2 \operatorname{sh} d_1) \sin d_2 + (c_3 \operatorname{ch} d_1 + c_4 \operatorname{sh} d_1) \cos d_2,$$

где  $d_1 = k\alpha x_2$ ,  $d_2 = k\beta x_2$ ;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - произвольные постоянные. Записывая решение для каждого слоя и подставляя в (1.17), получим систему однородных линейных уравнений восьмого порядка относительно произвольных постоянных. Для существования нетривиальных решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая его, получим квадратное уравнение относительно  $\sigma$ :

$$\varepsilon_0 \sigma^2 + \varepsilon_1 \sigma + \varepsilon_2 = 0, \quad (1.22)$$

где  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  - коэффициенты, зависящие от физико-геометрических параметров слоёв. В силу (1.15), если существует хотя бы один корень (1.22), для которого  $\text{Re } \sigma > 0$ , то система слоёв неустойчива.

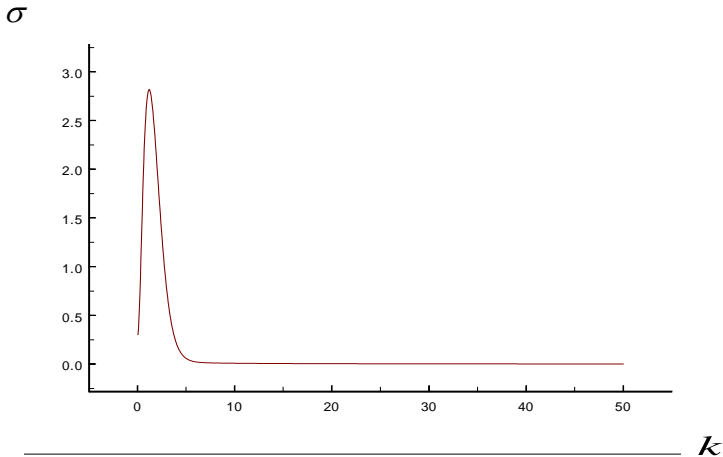
**Анализ численных расчетов.** Прямой расчет показывает, что  $\varepsilon_2 = 0$ . Один корень (1.22) нулевой, второй - действительный. Перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= h_1 k, \bar{h} = h_2 / h_1, \bar{\rho} = \rho_1 / \rho_2, \bar{\theta} = \theta_1 / \theta_2, \bar{x}_1 = \alpha_1 \bar{k}, \bar{y}_1 = \beta_1 \bar{k}, \\ \bar{x}_2 &= \alpha_2 \bar{k} \bar{h}, \bar{y}_2 = \beta_2 \bar{k} \bar{h}, a = (1 - \bar{\theta}) H_0 t_0, \bar{\sigma} = \sigma t_0, \\ h_1 &= h_2 = 5 \text{ км}, d = \rho_2 (1 - \bar{\rho}) g h_1 t_0 / \theta_2, t_0 = 30 \text{ тыс. лет} \end{aligned}$$

На рисунках 3 - 7 даны зависимости  $\bar{\sigma}$  от  $\bar{k}$  для различных значений реологических параметров слоёв.

Характерные значения плотностей надсолевых осадков и галита приняты:  $\rho_2 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,  $\rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ , а реологические параметры  $n_1 = n_2 = 1$  выбраны, как у ньютоновской жидкости.

На рисунке 3 показана зависимость  $\sigma = \sigma(k)$  скорости роста возмущений от волнового числа, из которого следует, что существует волновое число  $k^*$ , при котором  $\sigma$  достигает максимального значения. Это согласуется с результатами работ [36].



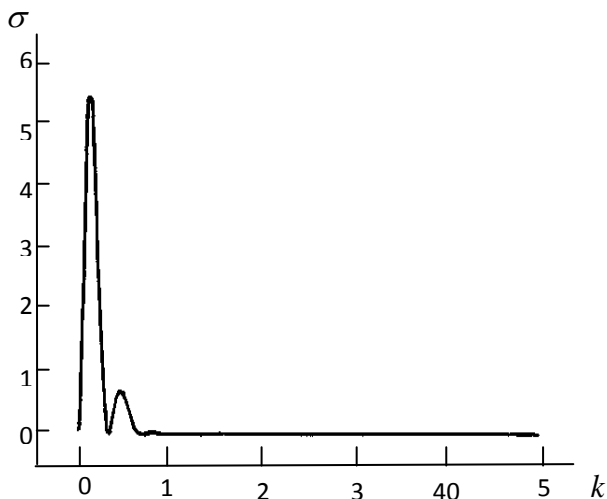
$$\eta_1 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = \tau_{2S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Рисунок 3 - График зависимости амплитуды возмущений от волнового числа для двухслойной вязкой жидкости

Как показали расчеты, если оба слоя вязкопластичные и по реологическим параметрам одинаковы или верхний слой вязкий, а нижний пластичный, то картина аналогична. Изменяются только размеры кривой  $\sigma = \sigma(k)$ , которые гомеоморфны кривой для двухслойной жидкости.

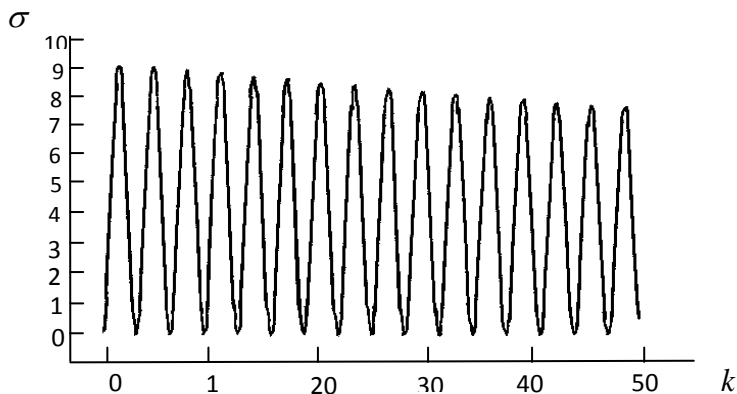
Если оба слоя вязкопластичные и по реологическим параметрам верхний слой более «жесткий» (рисунок 4), то к основному максимуму  $\sigma$ , обусловленному вязкой реологией, добавляется локальный максимум, обусловленный пластическими свойствами слоёв.

Для случая, когда оба слоя пластичные и верхний слой более «жесткий», то, как показали расчеты, существует уже бесконечная серия максимумов, что связано с периодичностью собственных функций и отсутствием диссипации энергии для идеальной пластичности.



$$\eta_1 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \tau_{2S} = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

Рисунок 4- График зависимости амплитуды возмущений в зависимости от волнового числа для вязкопластических слоёв



$$\eta_1 = \eta_2 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \tau_{2S} = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

Рисунок 5- График зависимости амплитуды возмущений в зависимости от волнового числа пластических слоёв

Если оба слоя пластичные и нижний слой более «жесткий», то кривая для этого случая совпадает с кривой  $\sigma = \sigma(k)$ , изображенной на рисунке 5.

Если верхний слой пластичный и по реологическим параметрам «жестче» нижнего слоя, то серия максимумов начинает затухать, что связано с диссипацией энергии вязкого нижнего слоя.

Для двух пластичных слоев с одинаковыми реологическими параметрами наблюдается бесконечная серия локальных затухающих максимумов (рисунок 6). Амплитуда первого из максимумов на 20%-60% больше амплитуд последующих максимумов.

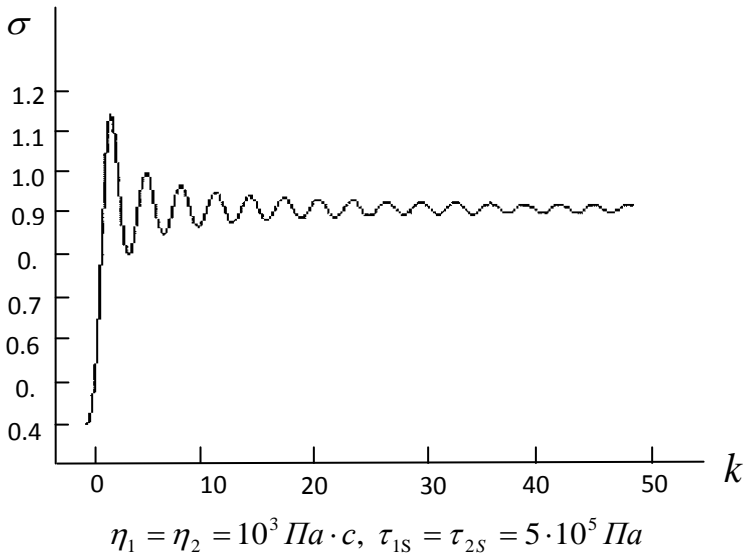
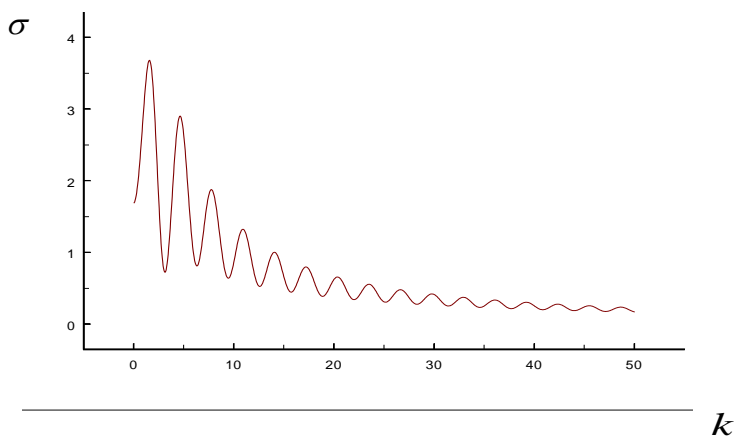


Рисунок 6 - Зависимость  $\sigma = \sigma(k)$  для пластических слоёв

Длина волны, соответствующая первому максимуму, больше соответствующих длин волн последующих максимумов. Удельная работа на единицу длины волны гравитационных и тектонических сил, затрачиваемое на искривление слоёв, меньше для первого максимума, чем для остальных. Поэтому

основная часть этой работы идет на формирование «первого максимума».

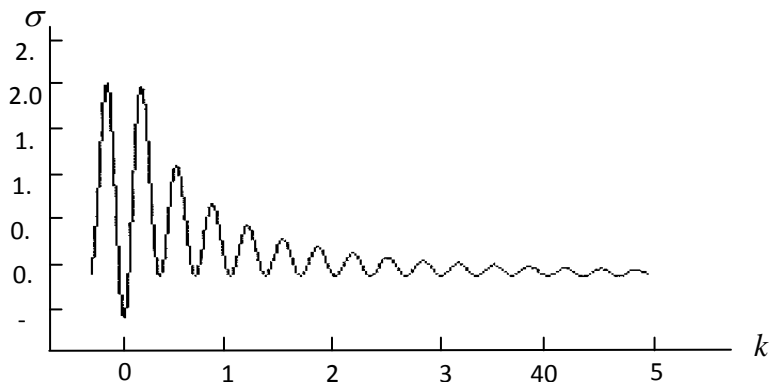
На рисунках 7, 8 изображены зависимости  $\sigma = \sigma(k)$ , когда реология слоёв разнородна, но их реологические параметры одного порядка. Природа первых максимумов заложена в чисто вязких, а вторых – в чисто пластических свойствах. Существенное значение имеет здесь реология верхнего слоя. Из рисунка 8 следует, что существует узкий диапазон волновых чисел, где потеря устойчивости не наблюдается ( $\sigma < 0$ ). Он является областью «точек возврата» реологических механизмов перестройки потери устойчивости. Другими словами, это означает, что существует узкий диапазон длин волн, где зарождение и формирование диапиров невозможно.



$$\eta_1 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}, \tau_{2S} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

Верхний слой пластичный, нижний – вязкий.

Рисунок 7- Зависимость  $\sigma = \sigma(k)$



$$\eta_1 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \tau_{2S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Рисунок 8 - Зависимость  $\sigma = \sigma(k)$ . Верхний слой вязкий, нижний пластичный.

Из приведенного анализа следует, что на формирование начальной стадии диапиризма существенное влияние оказывает тектонические силы и реология слоёв. Соотношения (1.12), (1.13) говорят о том, что реология слоёв для возмущений обладает анизотропией. Поскольку осадочный чехол неоднороден по своему составу и реологическим свойствам, то зарождающее семейство диапиров может иметь самую «причудливую форму». Поэтому в начальной стадии формирования имеет место неоднородное распределение диапиров по пространству и разномасштабность их характерных размеров.

### 1.2 Осесимметричная двухслойная модель

В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  рассмотрим задачу о гравитационной неустойчивости двухслойной круговой пластинки на жёстком основании, подверженной действию горизонтальных тектонических усилий  $q_1(z), q_2(z)$  (рисунок 9). Реология слоёв представляет собой неньютоновскую вязкопластическую жидкость.

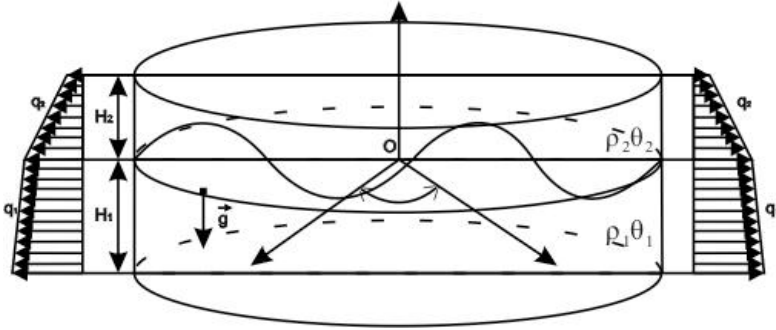


Рисунок 9 - Схема двухслойной среды ( $\rho_2 > \rho_1$ )

Выполняя процедуру, аналогичную процедуре, приведенной выше для плоской задачи, получим:  
параметры основного состояния:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1)} = u_2^{(2)} = Ar, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} = -2A(z + h_1), \quad H_0 = 2\sqrt{3}A, \\
 \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = (\rho_1 z - \rho_2 h_2)g + 6\theta_1^0 A, \\
 \sigma_{33}^{(1)} = g(\rho_1 z - \rho_2 h_2), \quad \theta_1^0 = \eta_1 + \frac{\tau_{1s}}{H_0},
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22}^{(2)} = g\rho_2(z - h_2) + 6\theta_2^0 A, \quad \sigma_{33}^{(2)} = g\rho_2(z - h_2) \\
 \theta_2^0 = \eta_2 + \frac{\tau_{1s}}{H_0},
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

распределение тектонических усилий:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(1)} = (\rho_1 z - \rho_2 h_2)g + 6\theta_1^0 A = g_1, \\
 \sigma_{11}^{(2)} = g\rho_2(z - h_2) + 6\theta_2^0 A = g_2
 \end{aligned} \tag{1.24a}$$

Из условия

$$6(\theta_1^0 - \theta_2^0)A = g_1(0) - g_2(0) \tag{1.24б}$$

определяется скорость деформации  $A$ , удовлетворяющая условию текучести.

Связь для возмущений между тензором напряжений и скоростей деформаций имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p + A_1 e_{11} - A_2 e_{22}, \\ \sigma_{22} &= -p - A_2 e_{11} + A_1 e_{22}, \\ \sigma_{33} &= -p - (A_1 - A_2)(e_{11} + e_{22}),\end{aligned}\tag{1.25}$$

$$\sigma_{ij} = 2\overset{0}{\theta} e_{ij} \quad (i \neq j),\tag{1.25a}$$

$$A_1 = \overset{0}{\theta} + n\eta, \quad A_2 = \overset{0}{\theta} - n\eta, \quad \overset{0}{\theta} = \eta + \frac{\tau_s}{H_0},$$

$$\eta = \mu H_0^{n-1}, \quad H_0^2 = 12A^2,\tag{1.25б}$$

а граничные условия для возмущений:

а) при  $z = -h_1$ ,  $u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = u_3^{(1)} = 0$

б) при  $z = h_2$ ,  $u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = u_3^{(2)} = 0$

в) при  $z = 0$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_3^{(1)} = u_3^{(2)}$ ,  $u_1^{(1)} = u_1^{(2)}$ ,  $u_2^{(1)} = u_2^{(2)}$ ,

$$\sigma_{13}^{(1)} - \sigma_{13}^{(2)} = -6A(\overset{0}{\theta}_2 - \overset{0}{\theta}_1) \frac{\partial \zeta}{\partial r},\tag{1.26}$$

$$\sigma_{23}^{(1)} - \sigma_{23}^{(2)} = -6A(\overset{0}{\theta}_2 - \overset{0}{\theta}_1) \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi},$$

$$\sigma_{33}^{(1)} - \sigma_{33}^{(2)} = (\rho_2 - \rho_1) g \zeta$$

К соотношениям (1.26) для возмущений необходимо добавить начальное условие  $\zeta(r, \varphi, 0) = 0$ .

В общем случае возмущения не будут обладать осевой симметрией. Рассмотрим осесимметричную форму потери устойчивости. Тогда начально-краевая задача упростится и, с учётом приведенных выше соотношений, запишется в виде:

$$p_r^* = u_{1z^2} - \chi u_{3rz},$$

$$p_z^* = (u_{3r^2} + \frac{1}{r}u_{3r}) + (2\chi - 1)u_{3z^2}, \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{r}u_1 + u_{1r} + u_{3z} = 0, u_{1r}|_{r=0} = 0,$$

$$\sigma_{13}^* = u_{3r} + u_{1z}, \sigma_{33}^* = -p^* + 2\chi u_{3z}, \chi = \frac{n\eta}{\theta},$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\theta}, p^* = \frac{p}{\theta} \quad (1.28)$$

а) при  $z = -h_1, u_1^{(1)} = u_3^{(1)} = 0$ ; б) при  $z = h_2, u_1^{(2)} = u_3^{(2)} = 0$

в) при  $z = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, u_1^{(1)} = u_1^{(2)},$

$$\bar{\theta} \sigma_{13}^{*(1)} - \sigma_{13}^{*(2)} = -6A(1 - \bar{\theta})\zeta, \bar{\theta} = \theta_1/\theta_2 \quad (1.29)$$

$$\bar{\theta} \sigma_{33}^{*(1)} - \sigma_{33}^{*(2)} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g\zeta}{\theta_2},$$

$$\zeta(r, \varphi, 0) = 0 \quad (1.29a)$$

Таким образом, для возмущений справедлива линейная начально-краевая задача (1.27) - (1.29a) с условиями на бесконечности (и при  $r=0$ ), для решения которой удобно воспользоваться совместным преобразованием Лапласа и Ганкеля:

$$f^*(s, z, \sigma) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(r, z, t) e^{-\sigma t} \cdot r J_m(sr) dr dt,$$

$$f(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_0^* f(s, z, \sigma) e^{\sigma t} s J_m(sr) ds dr, \quad (1.30)$$

$$(m \geq -\frac{1}{2}),$$

где  $J_m$  - функция Бесселя порядка  $m$ . Выполняя преобразование Лапласа плюс Ганкеля для (1.27) – (1.29а), и оставив прежние обозначения для изображений всех переменных, получим:

$$\begin{aligned} -sp^* &= u_{1z^2} + s\chi u_{3z}, \\ p_z^* &= -s^2 u_3 + (2\chi - 1)u_{3z^2}, \\ su_1 + u_{3z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

- а) при  $z = -h_1$ ,  $u_1^{(1)} = u_3^{(1)} = 0$ ; б) при  $z = h_2$ ,  $u_1^{(2)} = u_3^{(2)} = 0$   
 в) при  $z = 0$ ,  $\sigma\zeta = u_3^{(1)} = u_3^{(2)}$ ,  $u_1^{(1)} = u_1^{(2)}$ ,

$$s(1 - \bar{\theta})\left(1 - \frac{6A}{\sigma}\right)u_3^{(1)} + D(\bar{\theta}u_1^{(1)} - u_1^{(2)}) = 0, \quad (1.32)$$

$$p^{(2)} - p^{(1)} + 2D(n_1\eta_1u_3^{(1)} - n_2\eta_2u_3^{(2)}) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gu_3^{(1)}}{\sigma}, \quad D = \frac{d}{dz}$$

Здесь для изображения  $u_1$  используется преобразование Ганкеля первого порядка, а для остальных переменных  $u_3$ ,  $p^*$ ,  $\zeta$  - преобразование Ганкеля нулевого порядка. Для первого и третьего (которое предварительно продифференцировано по  $r$ ) уравнений (1.27) и скачка касательных напряжений используется преобразование Ганкеля первого порядка, для остальных соотношений (1.27) – (1.29) – преобразование Ганкеля нулевого порядка. Кроме того, использованы следующие свойства преобразования Ганкеля:

$$\begin{aligned} K_1[f'(r)] &= -sK_0[f(r)], \\ K_0[f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)] &= -s^2K_0[f(r)], \\ K_1[f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{1}{r^2}f(r)] &= -s^2K_1[f(r)], \end{aligned} \quad (1.33)$$

где

$$K_i[f(r)] = \int_0^\infty f(r)r J_i(sr)dr \quad (i = 0, 1)$$

Исключая из соотношений (1.29)  $u_1, p^*$ , получим уравнение четвертого порядка для  $u_3$ :

$$(D^4 - (3\chi - 1)S^2 D^2 + S^4)u_3 = 0 \quad (1.34)$$

Так как  $0 \leq n \leq 1$ , то  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $-1 \leq \frac{1}{2}(3\chi - 1) \leq 1$ .

Полагая

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}(3\chi + 1), \quad \beta^2 = \frac{3}{4}(1 - \chi), \quad (1.35)$$

корни характеристического уравнения (3.34) можно представить в виде:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm(\alpha \pm i\beta)S, \quad (1.36)$$

а решение (1.34) как

$$u_3(z) = (c_1 chd_1 + c_2 shd_1) \sin d_2 + (c_3 chd_1 + c_4 shd_1) \cos d_2, \quad (1.37)$$

где  $d_2 = s\beta z$ ;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - произвольные постоянные.

Записывая решение для каждого слоя и подставляя в (1.32), получим систему однородных линейных уравнений восьмого порядка относительно произвольных постоянных. Для существования нетривиальных решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая его, получим квадратное уравнение относительно  $\sigma$ :

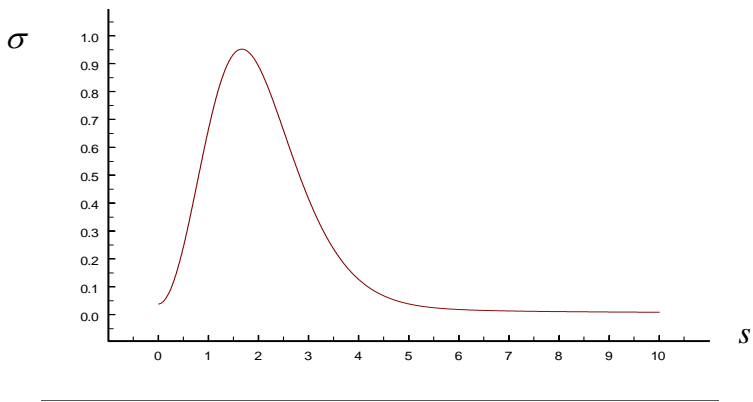
$$\varepsilon_0 \sigma^2 + \varepsilon_1 \sigma + \varepsilon_2 = 0,$$

где  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  - коэффициенты, зависящие от физико-геометрических параметров слоёв.

**Анализ численных расчетов.** Прямой расчет показывает, что  $\varepsilon_2 = 0$ . На рисунках 10 - 12 представлены зависимости  $\sigma$  от  $s$  для различных значений реологических параметров слоёв. Характерное значение плотностей надсолевых осадков и галита

приняты:  $\rho_2 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,  $\rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ , а реологические параметры  $n_1 = n_2 = 1$  выбраны, как у ньютоновской жидкости.

Для всех вариантов (независимо от реологии слоёв) характерно существование доминантной длины волны, на которой скорость роста возмущений максимальна. Слои ведут себя как вязкие жидкости. Это связано с особенностью осесимметричной потери устойчивости, которая маловероятна и реализуется редко [36]. Тем не менее, влияние реологии просматривается на рисунках 11, 12 в виде локального второго максимума. Основным максимум, обусловленный вязким механизмом, реализуется на оси осевой симметрии круговой пластины, в то время как второй локальный максимум, обусловленный пластичными свойствами, реализуется в виде кругового вала.

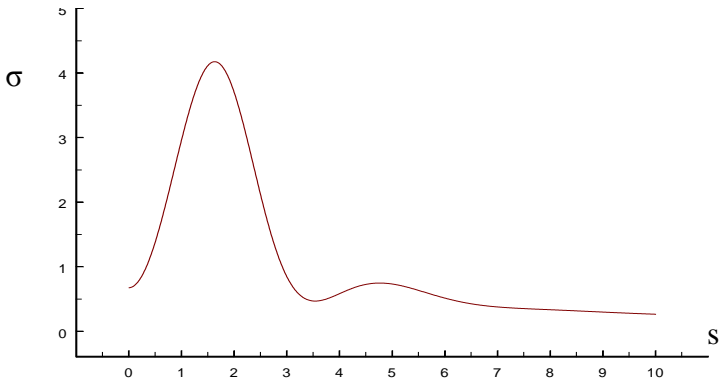


$$\eta_1 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1s} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \tau_{2s} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Рисунок 10 - График зависимости  $\sigma = \sigma(s)$ .

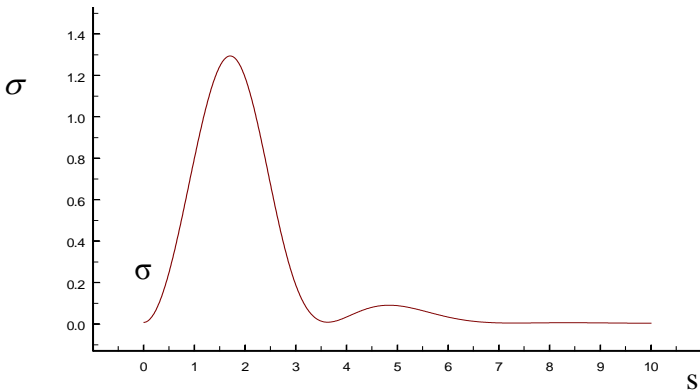
Расчёты для неньютоновских жидкостей показали, что вид зависимостей  $\sigma = \sigma(s)$  примерно такой же, как и для

ньютоновских жидкостей (незначительно изменяются размеры кривой  $\sigma = \sigma(s)$ ).



$$\eta_1 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}, \tau_{2S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Рисунок 11 - График зависимости  $\sigma = \sigma(s)$ .



$$\eta_1 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}, \tau_{2S} = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

Рисунок 12 - График зависимости  $\sigma = \sigma(s)$ .

Таким образом, осесимметричная потеря устойчивости двухслойной среды приводит к формированию одиночного соляного купола (как правило, купола-гиганта), или одиночного соляного купола и кругового соляного вала правильной формы. Подобные купола-гиганты характерны для Прикаспийской Впадины Казахстана [1, 2, 4, 5].

### *1.3 Особенности начальной стадии диапиризма в пространственном случае*

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $(0, x_1, x_2, x_3)$  задачу о гравитационной неустойчивости двухслойной пластинки на жёстком основании, подверженной действию горизонтальных тектонических усилий  $q_{1i} = q_1(x_3), q_{2i}(x_3) \ i = 1, 2$ .

Основное состояние имеет вид:

$$\begin{aligned}
 v_1^{(1)} &= Ax_1, & v_2^{(1)} &= Ax_2, & v_3^{(1)} &= -(A_1 + A_2)(x_3 + h_1), \\
 p^{(1)} &= g(\rho_2 h_2 - \rho_1 x_3) - 2\theta_1(A_1 + A_2), & H_0^2 &= 4(A_1^2 + A_1^2 + A_1 A_2), \\
 \sigma_{11}^{(1)} &= g(\rho_1 x_3 - \rho_2 h_2) + 2\theta_1(2A_1 + A_2), & & (1.38) \\
 \sigma_{22}^{(1)} &= g(\rho_1 x_3 - \rho_2 h_2) + 2\theta_2(A_1 + 2A_2), \\
 \sigma_{33}^{(1)} &= g(\rho_1 x_3 - \rho_2 h_2), & \theta_1 &= \eta_1 + \frac{\tau_{1S}}{H_0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1^{(2)} &= Ax_1, & v_2^{(2)} &= Ax_2, & v_3^{(2)} &= -(A_1 + A_2)(x_3 + h_1), \\
 p^{(2)} &= g\rho_2(h_2 - x_3) - 2\theta_2(A_1 + A_2), \\
 \sigma_{11}^{(2)} &= g\rho_2(x_3 - h_2) + 2\theta_2(2A_1 + A_2), \\
 \sigma_{22}^{(2)} &= g\rho_2(x_3 - h_2) + 2\theta_2(A_1 + 2A_2), & & (1.39)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = g\rho_2(x_3 - h_2), \quad \theta_2 = \eta_2 + \frac{\tau_{2S}}{H_0}$$

где  $A_1, A_2$  - скорости деформаций основного состояния вдоль осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . Аналогично приведенному выше выписываются граничные условия для распределения тектонических усилий, обеспечивающих однородное основное состояние на торцевых границах. Из этих условий определяются скорости деформаций  $A_1, A_2$ .

Начально-краевая задача, описывающая поведение возмущений, имеет следующий вид (она получается с помощью линеаризации и той техники, которая приведена выше):

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j,j} &= 0, \quad v_{i,i} = 0, \\ \sigma_{11} &= -p + A_{11}v_{1,1} - A_{12}v_{2,2}, \quad \sigma_{22} = -p - A_{21}v_{1,1} + A_{12}v_{2,2}, \\ \sigma_{33} &= -p + (A_{21} - A_{11})v_{1,1} + (A_{12} - A_{22})v_{2,2}, \\ \sigma_{ij} &= \overset{0}{\theta}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3), \\ \overset{0}{\theta} &= \eta + \frac{\tau_S}{H_0}, \quad \eta = \mu H_0^{n-1}, \quad \frac{H_0^2}{4} = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \\ A_{11} &= \frac{4}{H_0^2} \{A_2(A_1 + 2A_2)\theta + A_1(2A_1 + A_2)n\eta\}; \\ A_{12} &= \frac{4A_1(A_1 + 2A_2)(\theta - n\eta)}{H_0^2}; \quad A_{21} = \frac{4A_2(2A_1 + A_2)(\theta - n\eta)}{H_0^2}; \\ A_{22} &= \frac{4}{H_0^2} \{A_1(2A_1 + A_2)\theta + A_2(A_1 + 2A_2)n\eta\}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

а) при  $x_3 = -h_1$ ,  $v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = 0$ ;

б) при  $x_3 = h_2$ ,  $v_1^{(2)} = v_2^{(2)} = v_3^{(2)} = 0$ ;

в) при  $x_3 = 0$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_3^{(1)} = v_3^{(2)}$ ,  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ ,  $v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$ ; (1.42)

$$\sigma_{13}^{(1)} - \sigma_{13}^{(2)} = -2(\theta_2 - \theta_1)(2A_1 + A_2)\zeta_{,1};$$

$$\sigma_{23}^{(1)} - \sigma_{23}^{(2)} = -2(\theta_2 - \theta_1)(A_1 + 2A_2)\zeta_{,2};$$

$$\sigma_{33}^{(1)} - \sigma_{33}^{(2)} = (\rho_2 - \rho_1)g\zeta, \quad \zeta(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (1.43)$$

В целях упрощения задачи будем рассматривать бесконечные слои в горизонтальных направлениях, требуя, чтобы возмущения и их производные по  $x_1, x_2$  при  $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$  обращались в нуль.

Таким образом, для возмущений справедлива линейная начально-краевая задача (1.40) – (1.43) с условиями на бесконечности, для решения которой удобно воспользоваться совместным преобразованием Лапласа и Фурье:

$$U(k_1, k_2, x_3, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-\sigma \cdot t - i(k_1 x_1 + k_2 x_2)) dx_1 dx_2 dt,$$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty U(k_1, k_2, x_3, \sigma) \exp(\sigma \cdot t + i(k_1 x_1 + k_2 x_2)) dk_1 dk_2 d\sigma$$
(1.44)

Подставляя (1.41) в (1.40), (1.42), учитывая (1.43), условия на бесконечности, выполняя преобразование Лапласа плюс Фурье, оставив прежние обозначения для преобразований всех переменных, получим:

$$ik_1 p^* = v_{3,33} - (k^2 + k_1^2 a_1) v_1 + b_1 k_1 k_2 v_2,$$

$$ik_2 p^* = v_{2,33} + b_2 k_1 k_2 v_1 - (k^2 + k_2^2 a_2) v_2,$$

$$P_{,3}^* = ik_1 (b_2 - a_1 - 1) v_{1,3} + ik_2 (b_1 - a_2 - 1) v_{2,3} - k^2 v_3,$$

$$ik_1 v_1 + ik_2 v_2 + v_{3,3} = 0, \quad (1.45)$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2; \quad P^* = \frac{P}{\theta}; \quad a_1 = \frac{A_{11}}{\theta} - 2; \quad a_2 = \frac{A_{12}}{\theta} - 2,$$

$$b_1 = \frac{A_{12}}{\theta}; \quad b_2 = \frac{A_{21}}{\theta};$$

а) при  $x_3 = -h_1, \quad v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = 0$

б) при  $x_3 = h_2, \quad v_1^{(2)} = v_2^{(2)} = v_3^{(2)} = 0$

в) при  $x_3 = 0$ ,  $\sigma\zeta = v_3^{(1)} = v_3^{(2)}$ ,  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ ,  $v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$ ,

$$ik_1\omega_1v_3^{(1)} + \bar{\theta} v_{1,3}^1 - v_{1,3}^2 = 0, \quad (1.46)$$

$$ik_2\omega_2v_3^{(1)} + \bar{\theta} v_{2,3}^1 - v_{2,3}^2 = 0,$$

$$P^{(2)} - P^{(1)} + ik_1\sigma_1v_1^{(1)} + ik_2\sigma_2v_2^{(1)} - \frac{(\rho_2 - \rho_1)gv_3^{(1)}}{\sigma} = 0,$$

где

$$\omega_1 = (1 - \bar{\theta}) \cdot \left[ \frac{2(2A_1 + A_2)}{\sigma} - 1 \right]; \quad \omega_2 = (1 - \bar{\theta}) \left[ \frac{2(A_1 + 2A_2)}{\sigma} - 1 \right];$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad \delta_1 = (A_{21}^{(1)} - A_{11}^{(1)}) - (A_{21}^{(2)} - A_{11}^{(2)}) \quad (1.46a)$$

$$\delta_2 = (A_{12}^{(1)} - A_{22}^{(1)}) - (A_{12}^{(2)} - A_{22}^{(2)})$$

Решение системы уравнений (1.45) ищем в виде:

$$v_1 = k_1 Df_1(x_3), \quad v_2 = k_2 Df_2(x_3), \quad D = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$v_3 = -i(k_1^2 f_1(x_3) + k_2^2 f_1(x_3) + k_2^2 f_2(x_3)) \quad (1.47)$$

Подставляя (1.47) в (1.45) и исключая давление  $P^*$ , для функций  $f_1(x_3)$ ,  $f_2(x_3)$  получим систему уравнений, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$(D^2 - k^2)(D^4 - 2a_0D^2 + b_0) = 0, \quad (1.48)$$

где

$$a_0 = k^2 - 2(1 - \chi)\left(k^2 - \frac{3}{H_0}(k_1^2 A_2^2 + k_2^2 A_1^2)\right),$$

$$b_0 = k^4 - \frac{4(1 - \chi)(A_1 - A_2)^2 k_1^2 k_2^2}{H_0^2}, \quad \chi = \frac{n\eta}{\theta}. \quad (1.48a)$$

Зная корни уравнения (1.48) нетрудно записать решение для каждого слоя, подставив которые в (1.46), получим систему

однородных линейных уравнений двенадцатого порядка относительно произвольных постоянных. Для существования нетривиальных решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая его, получим кубическое уравнение относительно  $\sigma$  :

$$\varepsilon_0 \sigma^3 + \varepsilon_1 \sigma^2 + \varepsilon_2 \sigma + \varepsilon_3 = 0, \quad (1.49)$$

где коэффициенты  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  зависят от физико – геометрических параметров слоёв и волновых чисел  $k_1, k_2$ .

Выше рассмотрена аналогичная задача, но только в плоской постановке. Показано, что усложненная реология с совместным действием тектонических сил приводит к неравномерному распределению диапиров по пространству и по их характерным масштабам.

Плоская постановка задачи является частным случаем трёхмерной. Поэтому эффекты неоднородного распределения диапиров по пространству будут иметь место и для трёхмерной задачи, где ситуация существенно усложняется. Не проводя вычислений, можно качественно оценить дополнительные эффекты, если обратиться к реологическому для возмущений закону (1.41). Из (1.41) следует, что компоненты тензора напряжений описываются анизотропными реологическими соотношениями, которые имеют место и в плоской постановке. Но в плоском случае «продольные вязкости» у нормальных напряжений одинаковы, а здесь – разные. Поэтому усложненная реологическая жидкость ведёт себя как жидкость Вейссенберга и может обладать эффектом продомостью [37]. Следовательно, рельеф зарождающих диапиров может иметь самые причудливые формы, а эффект продомости может привести к образованию соляных столбов в земной коре.

Подытоживая это исследование, можно утверждать, что неоднородное распределение диапиров по пространству и по их масштабам результат действия тектонических сил и усложненной реологии.

## 1.4 Гравитационная неустойчивость трёхслойной вязкопластической среды

В настоящем подразделе дан краткий анализ начальной стадии диапиризма на основе модели трёхслойной реологически неоднородной среды. Трёхслойная гравитационная модель реологически неоднородной среды, находящейся под действием горизонтальных тектонических сил, позволяет исследовать закономерности и особенности формирования диапиризма и подсолевого ложа.

**Плоская модель.** Рассмотрим в плоской постановке задачу о гравитационной неустойчивости двухслойной неньютоновской вязкопластической среды на деформируемом весомом основании, подверженном действию горизонтальных тектонических сил. Физико-геометрические параметры слоёв обозначим с индексом  $j$ , причем  $j = 1$  относится к параметрам галита,  $j = 2$  – надсолевым породам,  $j = 3$  – подсолевого ложа. Система координат  $Ox_1x_2$  привязана к основному состоянию среды следующим образом: ось  $Ox_1$  направлена вдоль границы раздела слоёв 1, 2, а ось  $Ox_2$  - вертикально вверх. Весомое деформируемое основание ( $j = 3$ ), в целях упрощения решения начальной краевой задачи для возмущений, простирается вниз до бесконечности.

Вывод начально - краевой задачи для возмущённой среды аналогичен выводу плоской начально - краевой задаче в п. 1.3 с той лишь разницей, что для возмущений основания на бесконечности ставятся условия затухания. Приведем окончательные соотношения в изображениях решения начально-краевой задачи для возмущений. Компоненты скорости и давления в каждом слое удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} ikp^{*(j)} &= D^2 v_1^j + k^2 (1 - 2\chi_j) v_1^{(j)} \quad , \\ Dp^{*(j)} &= -k^2 v_2^{(j)} - k^2 (1 - 2\chi_j) D^2 v_2^j \quad , \\ ikv_1^{(j)} + Dv_2^{(j)} &= 0 \quad , \end{aligned}$$

$$p^{*(j)} = \frac{p^{(j)}}{\theta_i^0}, \quad \chi_j = \frac{n_j \eta_j^0}{\theta_j^0}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (1.50)$$

и граничным условиям:

а) при  $x_2 = +h_2$ ,  $v_1^{(2)} = v_2^{(2)} = 0$ ;

б) при  $x_2 = 0$ ,  $\zeta_2 = \frac{v_2^{(1)}}{\sigma} = \frac{v_2^{(2)}}{\sigma}$ ;

$$p^{(2)} - p^{(1)} + 2D(n_1 \eta_1 v_2^{(1)} - n_2 \eta_2 v_2^{(2)}) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g v_2^{(1)}}{\sigma},$$

$$ik(\theta_1^0 - \theta_2^0)[\sigma - 2H_0]v_2^{(1)} + \sigma D(\theta_1^0 v_1^{(1)} - \theta_2^0 v_1^{(2)}) = 0$$

в) при  $x_2 = -h_1$ ,  $v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0$ ;

$$\zeta_3 = \frac{v_2^{(1)}}{\sigma} = \frac{v_2^{(3)}}{\sigma}; \quad (1.51)$$

$$p^{(1)} - p^{(3)} + 2D(n_3 \eta_3 v_2^{(3)} - n_1 \eta_1 v_2^{(1)}) = \frac{(\rho_1 - \rho_3) g v_2^{(3)}}{\sigma};$$

$$ik(\theta_3^0 - \theta_1^0)[\sigma - 2H_0]v_2^{(3)} + \sigma D(\theta_3^0 v_1^{(3)} - \theta_1^0 v_1^{(1)}) = 0$$

г) при  $x_2 \rightarrow -\infty$ ,  $v_1^{(3)} = v_2^{(2)} = 0$ .

Решение (1.51) ищется в виде:

$$v_1 = kDf, \quad v_2 = -ik^2 f,$$

и имеет вид:

$$f_j(x_2) = (c_1^{(j)} \operatorname{ch} d_1^{(j)} + c_2^{(j)} \operatorname{sh} d_1^{(j)}) \sin d_2^{(j)} + (c_3^{(j)} \operatorname{ch} d_1^{(j)} + c_4^{(j)} \operatorname{sh} d_1^{(j)}) \cos d_2^{(j)},$$

(j=1,2)

$$f_3(x_2) = \exp(d_1^{(3)}) \cdot (c_1^{(3)} \sin d_2^{(3)} + c_2^{(3)} \cos d_2^{(3)}), \quad (1.52)$$

где  $d_1^{(j)} = k\alpha_j x_2$ ,  $d_2^{(j)} = k\beta_j x_2$ ,  $\beta_j^2 = (1 - \chi_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\alpha_j^2 = \chi_j$ , а  $c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, c_3^{(j)}, c_4^{(j)}$  - произвольные постоянные.

Структура решения  $f_3(x_2)$  учитывает условия затухания возмущений на бесконечности. Записывая решения для каждого слоя и подставляя в граничные условия, получим систему однородных линейных уравнений десятого порядка относительно произвольных постоянных. Для существования нетривиальных решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая его, получим кубическое уравнение относительно  $\sigma$ :

$$\varepsilon_0 \sigma^3 + \varepsilon_1 \sigma^2 + \varepsilon_2 \sigma + \varepsilon_3 = 0, \quad (1.53)$$

где  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - коэффициенты, зависящие от физико-геометрических параметров слоёв. Если существует хотя бы один корень (1.53), для которого  $\text{Re } \sigma > 0$ , то система слоёв в общем случае неустойчива.

**Анализ численных результатов.** В исследуемой задаче представляет интерес вопрос, при каких компоновках материала и основания может произойти потеря устойчивости трехслойной среды под действием тектонических сил. Согласно критерию устойчивости Раусса - Гурвица определители, составленные из коэффициентов уравнения (1.53),

$$\Delta_1 = \varepsilon_2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix}$$

должны быть больше нуля. Если хотя бы один из определителей отрицателен, то система слоев неустойчива. Поэтому по критерию Раусса - Гурвица может быть отделена зона устойчивого и неустойчивого состояний среды в зависимости от её физико-геометрических параметров.

На рисунках 13а) - 16в) приведены графики корней характеристического уравнения (1.53) в зависимости от

волнового числа при различных реологических параметрах среды. Во всех вариантах плотности слоев выбраны равными  $\rho_1 = 2200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = \rho_3 = 2600 \text{ кг/м}^3$ , а мощности слоев выбраны равными  $h_1 = h_2 = 5000 \text{ м}$ . За характерное время зарождения диапиризма принято время  $t_0 = 30000$  лет.

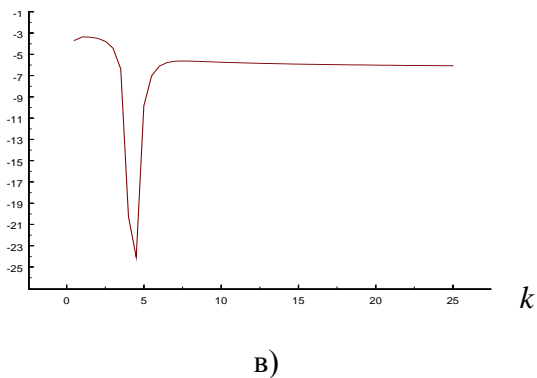
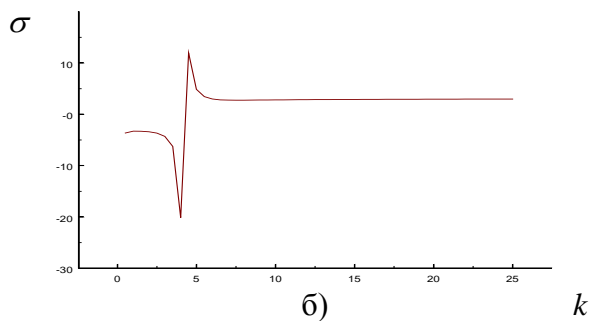
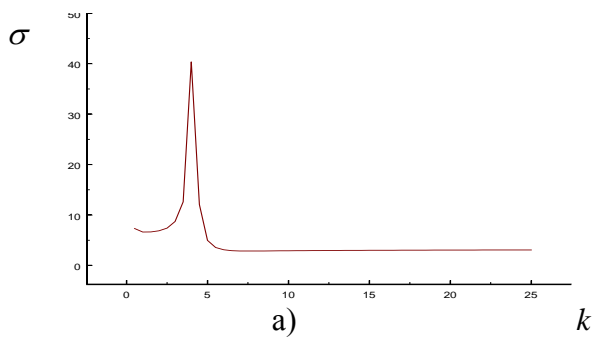
На рисунках 13а) – 13в) приведены графики корней характеристического уравнения (1.53) в зависимости от волнового числа для чисто вязкой модели. Как видно из рисунка 13 (а, б, в), существует доминантная длина волны, при которой скорость роста возмущений максимальна. Это согласуется с результатами более ранних работ [36].

На рисунке 14 (а, б, в) приведены графики корней характеристического уравнения (1.53), когда двухслойная вязкая среда покоится на пластичном весомом деформированном основании. Следует отметить, что второй корень характеристического уравнения стремится к значению 1.5. Как видно, реология основания влияет как на численные значения скорости роста неустойчивости, так и на характер корней.

На рисунке 15 (а, б, в) даны зависимости корней характеристического уравнения от волнового числа для пластичного слоя, находящегося в вязкой среде. Причем вязкие свойства окружающей среды превосходят пластические свойства галитового слоя. Это сказывается в том, что вязкие свойства окружающей среды формируют доминантную длину волны, на которой скорость роста возмущений максимальна.

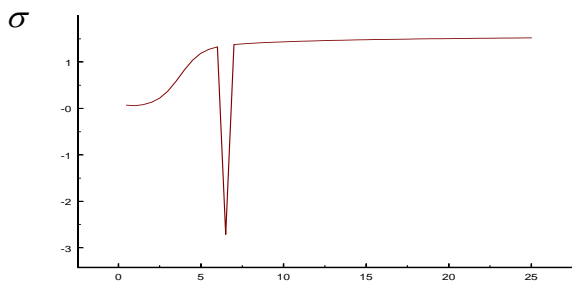
Рисунок 16 (а, б, в) дает представление о характере поведения корней характеристического уравнения от волнового числа двухслойной пластичной среды, покоящейся на вязком основании.

Следует отметить разнообразие локальных максимумов и минимумов корней, которые формируют неоднородное зарождение диапириров по пространству и их разномасштабность.

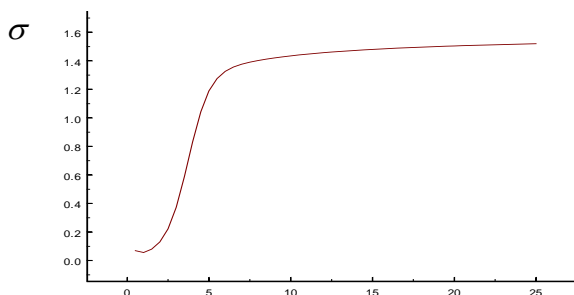


$$\eta_1 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = \eta_3 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \tau_{1S} = \tau_{2S} = \tau_{3S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

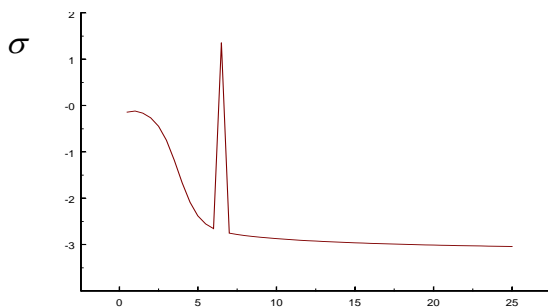
Рисунок 13 (а, б, в) - Графики зависимостей корней характеристического уравнения от волнового числа для чисто вязкой модели



a)  $k$



б)  $k$

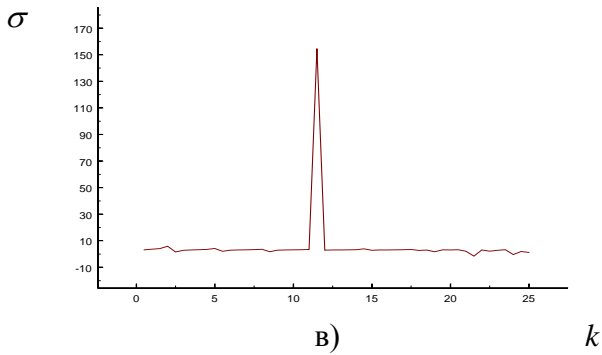
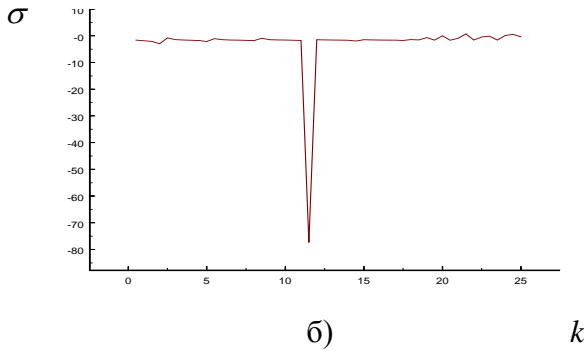
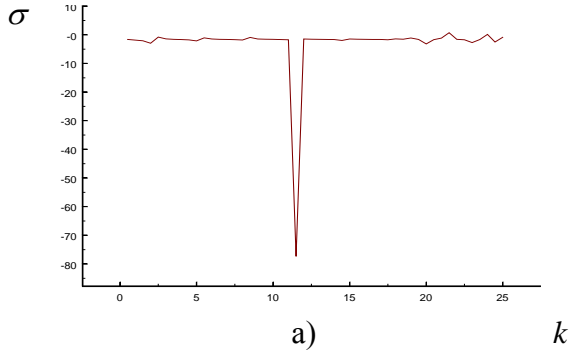


в)  $k$

$$\eta_1 = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_2 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \eta_3 = 5 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\tau_{1s} = \tau_{2s} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}, \quad \tau_{3s} = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

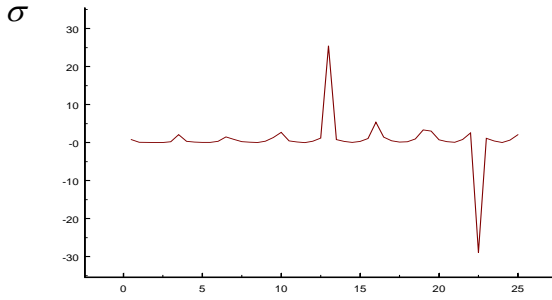
Рисунок 14 (а,б,в) - Графики зависимостей корней характеристического уравнения от волнового числа для случая пластичного основания



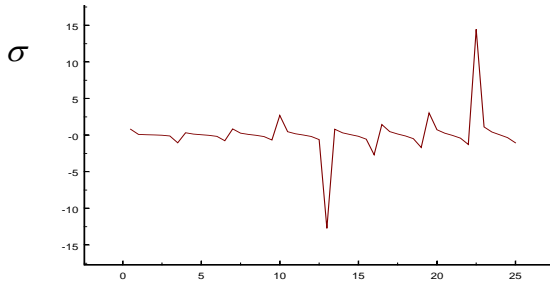
$$\eta_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_2 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_3 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\tau_{2S} = \tau_{3S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}, \quad \tau_{1S} = 5 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

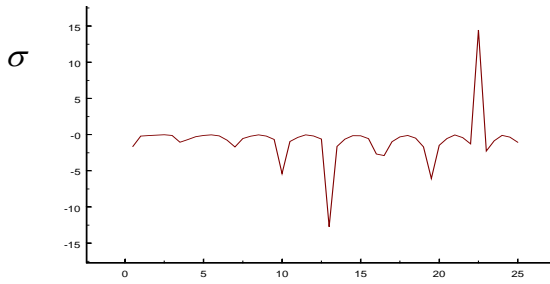
Рисунок 15 (а, б, в) - Графики зависимостей корней характеристического уравнения от волнового числа



а)  $k$



б)  $k$



в)  $k$

$$\eta_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_3 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\tau_{2S} = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \tau_{1S} = 5 \cdot 10^8 \text{ Па}, \quad \tau_{3S} = 5 \cdot 10^3.$$

Рисунок 16 (а, б, в) - Графики зависимостей корней характеристического уравнения от волнового числа для двухслойной пластической среды на вязком основании

**Осевая симметрия.** Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  задачу о гравитационной неустойчивости двухслойной круговой пластинки на деформируемом основании, подверженной действию горизонтальных тектонических сил.

Реология слоёв представляет собой неньютоновскую вязкопластическую жидкость. Индексация слоев, выбор системы координат, условия затухания возмущений на бесконечности такие же, как и в плоской задаче.

Выполняя процедуру, аналогичную процедуре, проведенной выше для осесимметричной, двухслойной задачи, получим начально-краевую задачу для возмущений. В изображениях Лапласа-Ганкеля она имеет вид:

Компоненты скорости и давления в каждом слое удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} -s p^{*(j)} &= u_{1z^2}^{(j)} + s \chi_j u_{3z}^{(j)}, \\ p_z^{*(j)} &= -s^2 u_3^{(j)} + (2\chi_j - 1) u_{3z}^{(j)}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$s u_1^{(j)} + u_{3z}^{(j)} = 0, \quad \chi_j = \frac{n_j \eta_j^0}{\theta_j^0}, \quad p^{*(j)} = \frac{p^{(j)}}{\theta_j^0}, \quad D = \frac{d}{dz},$$

и граничным условиям:

а) при  $z = h_2$ ,  $u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = 0$

б) при  $z = 0$ ,  $\sigma \zeta_2 = u_3^{(1)} = u_3^{(2)}$ ,  $u_1^{(1)} = u_1^{(2)}$ ,

$$s(1 - \theta_{12}^-)(1 - \frac{6A}{\sigma}) u_3^{(1)} + D(\theta_{12}^- u_1^{(1)} - u_1^{(2)}) = 0, \quad (1.55)$$

$$p^{(2)} - p^{(1)} + 2D(n_1 \eta_1 u_3^{(1)} - n_2 \eta_2 u_3^{(2)}) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g u_3^{(1)}}{\sigma}$$

в) при  $z = -h_1$ ,  $u_1^{(1)} = u_1^{(3)} = 0$ ,  $\sigma \zeta_3 = u_3^{(1)} = u_3^{(3)}$ ,

$$s(1 - \bar{\theta}_{13})(1 - \frac{6A}{\sigma})u_3^{(3)} + D(\bar{\theta}_{31}u_1^{(3)} - u_1^{(1)}) = 0, \quad (1.55a)$$

$$p^{(1)} - p^{(3)} + 2D(n_3\eta_3u_3^{(3)} - n_1\eta_1u_3^{(1)}) = \frac{(\rho_1 - \rho_3)gu_3^{(3)}}{\sigma}$$

г) при  $z = -\infty$ ,  $u_3^{(3)} = u_1^{(3)} = 0$ ,

$$\bar{\theta}_{12} = \frac{\theta_1^0}{\theta_2}, \bar{\theta}_{31} = \frac{\theta_3^0}{\theta_1} \quad (1.55б)$$

ключая  $u_1^{(j)}$ ,  $p^{*(j)}$  из (1.55), получим уравнение четвертого порядка

$$(D^4 - (3\chi_j - 1)s^2D^2 + S^4)u_3^{(j)} = 0 \quad (1.56)$$

Решение (1.56) имеет вид:

$$u_3^{(j)} = (c_1^{(j)}chd_1^{(j)} + c_2^{(j)}shd_1^{(j)})\sin d_2^{(j)} + (c_3^{(j)}chd_1^{(j)} + c_4^{(j)}shd_1^{(j)})\cos d_2^{(j)},$$

( $j=1,2$ )

$$u_3^{(3)} = \exp(d_1^{(3)}) \cdot (c_1^{(3)}\sin d_2^{(3)} + c_2^{(3)}\cos d_2^{(3)}), \quad (1.57)$$

где  $d_1^{(j)} = s\alpha_j z$ ,  $d_2^{(j)} = s\beta_j z$ ,  $\beta_j^2 = \frac{3}{4}(1 - \chi_j)$ ,  $j=1,2,3$ ,

$\alpha_j^2 = \frac{1}{4}(3\chi_j + 1)$ , а  $c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, c_3^{(j)}, c_4^{(j)}$  - произвольные

постоянные.

Структура решения в третьем слое учитывает условие затухания возмущений на бесконечности.

Зная  $u_3^{(j)}$ , определим остальные неизвестные из (1.57). Затем подставим найденные решения для каждого слоя в граничные условия (1.55), (1.55a), получим систему однородных линейных уравнений десятого порядка. Для существования решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая его, получим кубическое уравнение относительно

$$\varepsilon_0 \sigma^3 + \varepsilon_1 \sigma^2 + \varepsilon_2 \sigma + \varepsilon_3 = 0 \quad (1.58)$$

где  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - коэффициенты, зависящие от физико-геометрических параметров слоёв. Если существует хотя бы один корень (1.58), для которого  $\text{Re } \sigma > 0$ , то система слоёв в общем случае неустойчива.

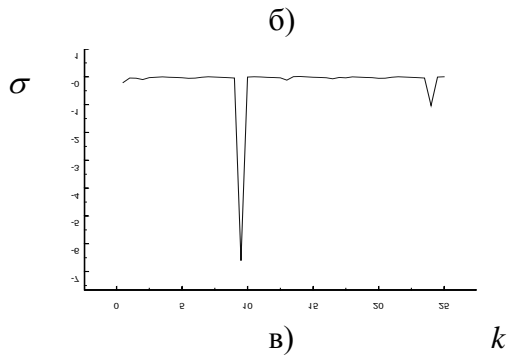
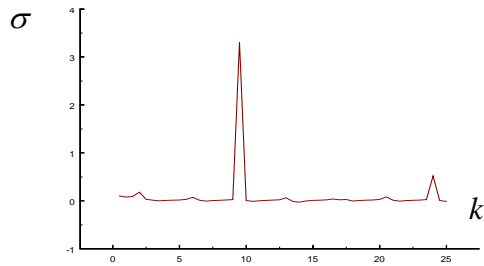
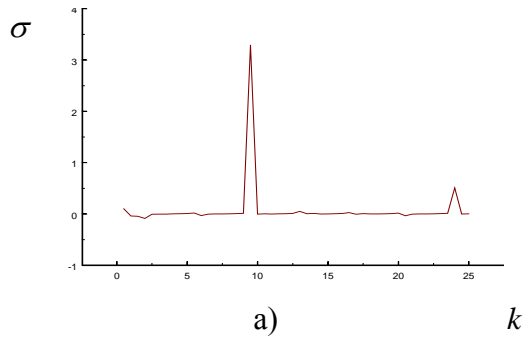
**Анализ численных результатов.** Для осесимметричной модели значения мощностей, плотностей и их характерных масштабов выбраны такими же, как и для плоской модели.

Как показали расчеты, чисто вязкая модель дает такое же распределение корней характеристического уравнения, как и для плоской чисто вязкой модели. Изменяются лишь их численные значения.

На рисунке 17 (а, б, в) приведена структура корней пластического среднего слоя, погруженного в вязкую среду. Следует отметить формирование одиночного соляного купола на оси симметрии и вала правильной круговой формы. Это связано с тем, что вязкие эффекты преобладают над пластическими. Подобная картина наблюдается и для двухслойной среды.

На рисунке 18 (а, б, в) показана структура корней характеристического уравнения для чисто пластической среды. Формирование соляного купола и множества соляных валов – это следствие влияния подсолевого ложа на механизм зарождения и формирования диапиров.

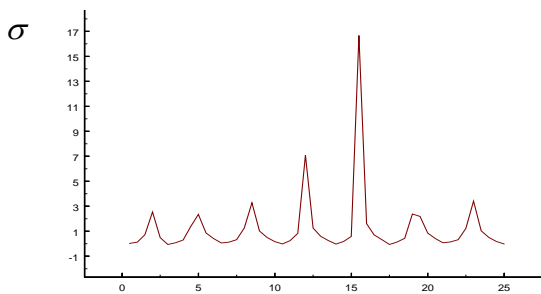
Следует отметить, что двухслойная модель описывает только формирование одиночного купола или одиночного купола и вала правильной круговой формы. Здесь отчетливо видно формирование одиночного купола и серии соляных валов. Подобные структуры встречаются в верхних горизонтах земной коры Прикаспийской Впадины [1, 2, 4, 5].



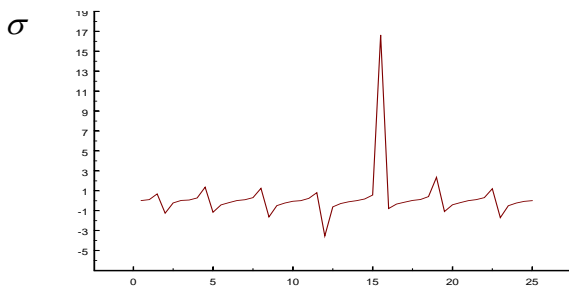
$$\eta_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_2 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_3 = 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\tau_{2S} = \tau_{3S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}, \quad \tau_{1S} = 5 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

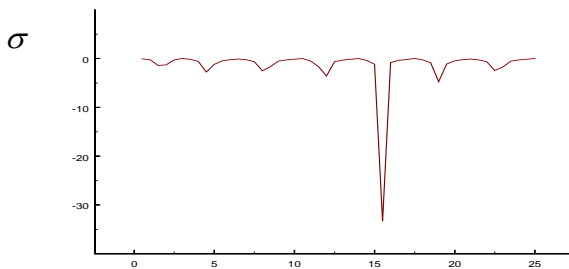
Рисунок 17(а, б, в) - Графики зависимостей корней характеристического уравнения от волнового числа для пластического слоя в вязкой среде.



а) k



б) k



в) k

$$\eta_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_2 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \eta_3 = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\tau_{2,S} = \tau_{3,S} = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \tau_{1,S} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Рисунок 18 (а, б, в) - Графики зависимостей корней характеристического уравнения от волнового числа для чисто пластической среды

**Пространственная модель.** Пространственная задача формулируется аналогичным образом, но приводит к громоздким вычислениям. Если выполнить процедуру, аналогичную плоской и осесимметричной задачам, то в результате придём к вычислению определителя пятнадцатого порядка. Не производя вычислений, можно сделать следующие качественные выводы.

Плоская задача является частным случаем трехмерной. Поэтому эффекты неоднородного распределения диапиров по пространству будут иметь место и для трехмерной задачи, где ситуация усложняется. Выше показано, что реология слоёв для возмущений представляет собой жидкость Вейссенберга и может обладать эффектом продомости. Это ведёт к образованию соляных столбов («соляных пальцев»). При определенных условиях линейная модель «улавливает» тенденцию к образованию «подсолевых пальцев». Дальнейшее их развитие необходимо проводить на основе нелинейной модели. Необходим достаточно сильный «подсос» со стороны подсолевого ложа (природа которого заключена в архимедовой силе между первым и вторым слоями, а также в силе сцепления между первым и третьим слоем) для образования подобных структур. Поскольку  $\rho_1 < \rho_3$ ,  $\rho_3 \geq \rho_2$ , то простой подсчет баланса энергии показывает, что образование «подсолевых столбов» практически невозможно без наличия радиогенных источников тепла.

Подытоживая это исследование можно утверждать, что неоднородное распределение диапиров по пространству и по их масштабам - результат действия тектонических сил и усложненной реологии. На неоднородное распределение диапиров по пространству и формирование профилей подсолевого ложа существенное влияние оказывает её реология.

## 2 ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНЫХ ДИАПИРОВ

### 2.1 Общая постановка задачи. Безразмерная форма уравнений.

В данном разделе описание нелинейной стадии тейлоровской неустойчивости базируется на модели неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. Такой подход позволяет исключить из рассмотрения сложные нелинейные граничные условия на неизвестной поверхности раздела, и «естественно» проследивать ее эволюцию [69, 137].

В системе координат  $Ox_1x_2x_3$  (ось  $Ox_3$  - направлена вверх; сила тяжести – вниз, рисунок 19) начально-краевая задача, описывающая ползущие движения неоднородной жидкости в поле сил тяжести, формулируется следующим образом.

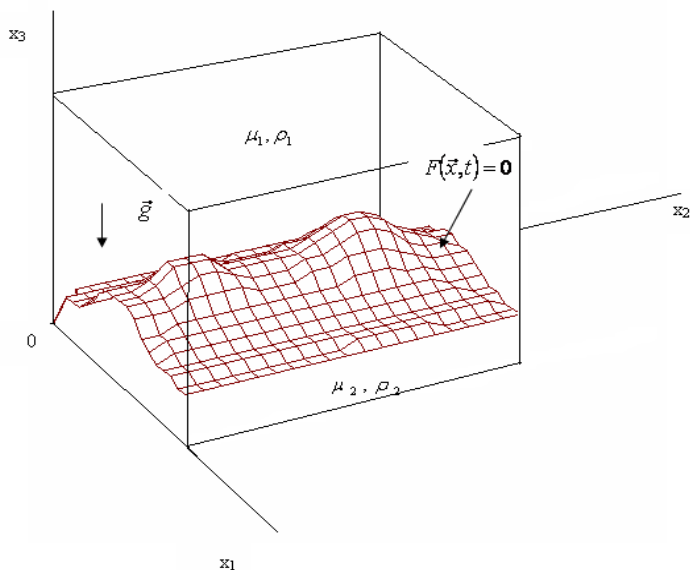


Рисунок 19 – Схема расчетной области

В области  $\Omega$  (для простоты – в прямоугольном параллелепипеде с длинами сторон  $l_1, l_2, l_3$  вдоль осей  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ , соответственно) требуется определить вектор скорости  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , динамическую вязкость  $\mu$  в момент времени  $t \in [0, T]$ , удовлетворяющие системе уравнений:

$$A(\mu)\vec{v} + \vec{\nabla}p = -\rho\vec{g}, \quad \vec{g} = (0, 0, g)^T, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega} p dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu = 0, \quad (2.5)$$

включающей начальные и граничные условия:

$$\rho(\vec{x}, 0) = \rho_0(\vec{x}), \quad \mu(\vec{x}, 0) = \mu_0(\vec{x}), \quad (2.6)$$

$$0 < m_1 \leq \rho_0(\vec{x}) \leq m_2 < \infty, \quad 0 < n_1 \leq \mu_0(\vec{x}) \leq n_2 < \infty, \quad (2.7)$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{v} |_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0 \quad (2.8)$$

Здесь значок  $T$  - означает знак транспонирования, а оператор градиента  $\vec{\nabla}$  и оператор  $A(\mu)$  имеют следующий вид:

$$\vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T,$$

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \right), & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \right), & \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \right), & 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \right), & \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \right), & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \right), & 2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

,  $\vec{g}$  - ускорение силы тяжести.

Система уравнений (2.1) - (2.3) описывает ползущее движение неоднородной вязкой несжимаемой жидкости, т.е. течения Стокса [132, 138-140], в виду малости чисел Рейнольдса ( $Re = 10^{-26} \div 10^{-20}$ ). Уравнения (2.4), (2.5) учитывают сохранение плотности и динамической вязкости жидкой частицы в любой момент времени [132, 141]. Поясним условие (2.3). Из уравнения (2.1) следует, что давление  $p$  определяется с точностью до постоянной, условие (2.3) фиксирует эту постоянную. Граничное условие (2.8) – условие прилипания. Возможны и другие условия, например, условия скольжения, условия симметрии и периодичности на боковых стенках.

Для описания движения двухслойной среды (рисунок 19) с постоянными физическими параметрами слоев ( $\rho_i, \mu_i = const; i = 1, 2, \rho_1 > \rho_2$ ), заключенной в жесткую матрицу (прямоугольный параллелепипед), терпящими разрыв вдоль неизвестной границы раздела  $F(\vec{x}, t) = 0$ , необходимо перейти к обобщенной постановке задачи с заменой дифференциальных уравнений соответствующими интегральными тождествами. Для широкого класса задач с разрывными коэффициентами, как показано Тихоновым А.Н., Самарским А.А. и их учениками [137], свойство консервативности разностной схемы является необходимым и достаточным условием сходимости разностного решения к точному решению. Конструирование разностного метода производилось с учетом этого требования, поэтому автоматически выполнены сумматорные тождества, соответствующие интегральным в обобщенной постановке

задачи. При этом конфигурация неизвестной границы раздела  $F(\bar{x}, t) = 0$ , в соответствии с общей теорией однородных разностных схем, определяется местоположением точек, для которых  $\rho = 0,5(\rho_1 + \rho_2)$ .

**Безразмерная форма уравнений.** Перейдем к безразмерной форме уравнений с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= l_* \bar{\bar{x}}, \quad \rho = \alpha \rho_* \bar{\rho}, \quad \mu = \nu_* \rho_* \bar{\mu}, \quad t = t_* \bar{t}, \\ \bar{v} &= \nu_* \bar{\bar{v}}, \quad p = \alpha \rho_* g l_* \bar{p}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $l_*$  - характерный линейный размер (например,  $l_* = l_1$ , или  $l_* = l_2$ , или  $l_* = l_3$ );  $\rho_*, \nu_*$  - плотность и кинематическая вязкость элемента (точки) среды при  $t = 0$ , соответственно, а  $\alpha$  - нормирующий множитель.

Поскольку в задаче о тейлоровской неустойчивости отсутствует характерный масштаб скорости, то в качестве последнего примем «вязкую скорость»:

$$U_* = g \frac{1+n}{2} \cdot l_* \frac{1+3n}{2} \cdot \nu_*^{-n}, \quad (2.11)$$

где  $n$  - произвольное число. Выражение (2.11) имеет размерность скорости при любом  $n$ . Выбирая  $n$  определенным образом, получим необходимый масштаб скорости. Тогда характерное время можно определить, как:

$$t_* = \frac{l_*}{U_*} \quad (2.12)$$

Нормирующий множитель  $\alpha$  удобно выбрать в виде отношения числа Фруда  $Fr = U_*^2 / g l_*$  к числу Рейнольдса  $Re = U_* l_* / \nu_*$ :

$$\alpha = \frac{Fr}{Re} = \nu_*^{1-n} \cdot g \frac{n-1}{2} \cdot l_*^{\frac{3}{2}(n-1)} \quad (2.13)$$

который характеризует движение вязкой жидкости в поле сил тяжести. Тогда безразмерную систему уравнений (2.14) – (2.23), соответствующую начально - краевой задаче (2.1) – (2.9), можно записать в развернутом виде:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} - \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right\} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} - \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}_2} \right) \right\} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} - \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}_2} \right) \right\} = -\bar{\rho} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}_3} = 0 \quad (2.17)$$

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{p} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{z}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}_3} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{z}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} = 0 \quad (2.20)$$

$$\bar{\rho}(\bar{x}, 0) = \bar{\rho}_0(\bar{x}), \quad \bar{\mu}(\bar{x}, 0) = \bar{\mu}_0(\bar{x}) \quad (2.21)$$

$$0 < \bar{m}_1 \leq \rho_0(\bar{x}) \leq \bar{m}_2 < \infty, \quad 0 < \bar{n}_1 \leq \mu_0(\bar{x}) \leq \bar{n}_2 < \infty, \quad (2.22)$$

$$\bar{v} \Big|_{\partial \Omega_{[0, \bar{r}]}} = 0 \quad (2.23)$$

В дальнейшем черточки над безразмерными величинами опускаем, где это не вызывает недоразумений.

## 2.2 Плоская задача. Дискретная модель I

В 60-90 годы прошлого столетия интенсивно развивались вычислительная техника и численные методы решения сложных начально-краевых задач естествознания, инженерных и прикладных наук. Поэтому представляется целесообразным начать изложение численных инструментов исследования нелинейной фазы формирования соляных куполов в земной коре с наиболее простых дискретных моделей, которые характерны для школы Ержанова Ж.С. 1975-1995 годов того времени. Постепенно двигаясь от простого к сложному (критически разбирая численные инструменты), придем к более глубокому пониманию вещей.

Изложение начнем с несколько упрощенной плоской задачи [68, 69], чтобы понять детали численных конструкций. В области  $\Omega$  (для простоты - в прямоугольнике с длинами сторон  $l_1, l_2$  вдоль осей  $Ox_1, Ox_2$ , соответственно) требуется определить вектор скорости  $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , динамическую вязкость  $\mu$  в момент времени  $t \in [0, T]$ , удовлетворяющие системе уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} - \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right) = -\rho, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad (2.16)$$

$$\int_{\Omega} p dx_1 dx_2 = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0, \quad (2.18)$$

$$\mu = f(\rho), \quad 0 < n_1^* \leq f(\rho) \leq n_2^* < \infty, \quad n_1^*, n_2^* = \text{const}, \quad (2.19)$$

включающей начальные и граничные условия:

$$\rho(\bar{x}, 0) = \rho_0(\bar{x}), \quad 0 < m_1 \leq \rho_0(\bar{x}) \leq m_2 < \infty, \quad m_1, m_2 = \text{const}, \quad (2.20)$$

$$\vec{v}|_{\partial\Omega \times [0, T]} = \vec{0} \quad (2.21)$$

Ускорение силы тяжести  $\vec{g}$  направлено вертикально вниз, по оси  $Ox_2$ . Начально- краевая задача (2.14) - (2.21) записана в безразмерном виде (черточки над безразмерными переменными опущены). Уравнение переноса (2.20) для динамической вязкости заменено соотношением (2.19), где функция  $f(\rho)$ - монотонная функция от  $\rho$ . Для двухслойной среды она может быть выбрана, например, линейной функцией, такой, чтобы согласовывались физические параметры среды:  $\mu_1 = f(\rho_1)$ ,  $\mu_2 = f(\rho_2)$ .

Как указывалось выше, возможны и другие граничные условия условия, например, условия скольжения, условия симметрии и периодичности на боковых стенках. Чтобы понять детали конструирования численных технологий в зависимости от вида граничных условий, здесь мы рассмотрим условия симметрии на вертикальных границах области:

$$\begin{aligned} v_1(0, x_2, t) = v_1(l_1, x_2, t) &= 0, \\ \frac{\partial v_2(0, x_2, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2(l_1, x_2, t)}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial \rho(0, x_2, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho(l_1, x_2, t)}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Другие виды граничных условий рассматриваются аналогично. Начально-краевую задачу (2.14)-(2.21) будем называть начально-краевой задачей I, а начально краевую задачу (2.14)-(2.20), (2.22) будем называть начально-краевой задачей II.

### **2.2.1 Разностная начально-краевая задача I, ее реализация и аппроксимация**

Разобьем цилиндр  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  плоскостями

$$x_1(i) = ih, \quad x_2(j) = jh, \quad t_k = k\Delta t, \quad h, \Delta t > 0, \quad N_1 \cdot h = l_1, N_2 \cdot h = l_2, \\ N \cdot \Delta t = T, \quad 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, 0 \leq k \leq N,$$

где  $i, j, k, N_1, N_2, N$  - целые числа. Обозначим сечение цилиндра  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  плоскостью  $t_k = k \cdot \Delta t$  - через  $\Omega^k$ , а  $\partial\Omega^k$  - его границу так, что  $\bar{\Omega}^k = \Omega^k \cup \partial\Omega^k$ . Пусть множество узлов внутри  $\Omega^k$  есть  $\Omega_h^k$ , а  $\partial\Omega_h^k$  - множество узлов, лежащих на  $\partial\Omega^k$ . Введем следующие сетки:

$$\bar{\Omega}_h^k = \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, \quad x_2 = jh, \quad t = t_k, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2 \right\},$$

$$\bar{\Omega}_{1h}^k = \left\{ \bar{x} : x_1 = (i-1/2)h, \quad x_2 = jh, \quad t = t_k, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2 \right\},$$

$$\bar{\Omega}_{2h}^k = \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, \quad x_2 = (j-1/2)h, \quad t = t_k, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2 \right\},$$

$$\bar{\Omega}_{3h}^k = \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, \quad x_2 = jh, \quad t = t_k, \quad 0 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq j \leq N_2 - 1 \right\},$$

и, соответственно, их границы  $\partial\Omega_h^k, \partial\Omega_{1h}^k, \partial\Omega_{2h}^k, \partial\Omega_{3h}^k$ . Сетка  $\bar{\Omega}_{1h}^k$  - получается сдвигом сетки  $\bar{\Omega}_h^k$  на  $h/2$  влево, а  $\bar{\Omega}_{2h}^k$  - получается сдвигом сетки  $\bar{\Omega}_h^k$  на  $h/2$  вниз.

Начально-краевой задаче (2.14)-(2.21) поставим в соответствие начально-краевую задачу (2.23)-(2.30). Будем определять сеточные функции  $\rho_h^k, \mu_h^k, v_{1h}^k, v_{2h}^k, p_h^k$ , соответственно, на сетках  $\bar{\Omega}_h^k, \bar{\Omega}_h^k, \Omega_{1h}^k, \Omega_{2h}^k, \bar{\Omega}_{3h}^k$  (при  $k=0,1,2,\dots,N$ ), удовлетворяющие системе разностных уравнений:

$$p_{hx_1}^k(x_1+h/2, x_2) - \left\{ 2\left(\mu_h^k(x_1+h/2, x_2)v_{1hx_1}^k\right)_{\bar{x}_1} + \left(\mu_h^k(x_1, x_2+h/2)v_{1hx_2}^k\right)_{\bar{x}_2} + \left(\mu_h^k(x_1, x_2+h/2)v_{2hx_1}^k(x_1-h/2, x_2+h/2)\right)_{\bar{x}_2} \right\} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_{1h}^k \quad (2.23)$$

$$p_{hx_2}^k(x_1, x_2+h/2) - \left\{ \left(\mu_h^k(x_1+h/2, x_2)v_{1hx_2}^k(x_1+h/2, x_2-h/2)\right)_{\bar{x}_1} + \left(\mu_h^k(x_1+h/2, x_2)v_{2hx_1}^k\right)_{\bar{x}_1} + 2\left(\mu_h^k(x_1, x_2+h/2)v_{2hx_2}^k\right)_{\bar{x}_2} \right\} = -\rho_h^k(x_1, x_2), \quad \bar{x} \in \Omega_{2h}^k \quad (2.24)$$

$$v_{1hx_1}^k(x_1-h/2, x_2) + v_{2hx_2}^k(x_1, x_2-h/2) = 0, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_{3h}^k \quad (2.25)$$

$$\sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{3h}^k} p_h^k(x_1, x_2)h^2 = 0 \quad (2.26)$$

$$(k=0,1,2,\dots,N)$$

$$\frac{\rho_h^{k-1/2} - \rho_h^{k-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}A_1^{(k)}(\rho_h^{k-1/2} + \rho_h^{k-1}) = 0, \quad \frac{\rho_h^k - \rho_h^{k-1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{2}A_2^{(k)}(\rho_h^k + \rho_h^{k-1/2}) = 0,$$

$$\frac{\rho_h^{k+1/2} - \rho_h^k}{\Delta t} + \frac{1}{2}A_2^{(k)}(\rho_h^{k+1/2} + \rho_h^k) = 0, \quad \frac{\rho_h^{k+1} - \rho_h^{k+1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{2}A_2^{(k)}(\rho_h^{k+1} + \rho_h^{k+1/2}) = 0, \quad (2.27)$$

$$\bar{x} \in \bar{\Omega}_h^k$$

$$A_1^{(l)}\varphi_h = \frac{1}{2}\left\{(v_{1h}^l(x_1-h/2, x_2)\varphi_h)_{x_1} + v_{1h}^l(x_1-h/2, x_2)\varphi_{h\bar{x}_1}\right\},$$

$$A_2^{(l)}\varphi_h = \frac{1}{2}\left\{(v_{2h}^l(x_1, x_2-h/2)\varphi_h)_{x_2} + v_{2h}^l(x_1-h/2, x_2)\varphi_{h\bar{x}_2}\right\}$$

$$\mu_h^k = f(\rho_h^k), \quad 0 < n_1^* \leq f(\rho_h^k) \leq n_2^* < \infty, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^k \quad (2.28)$$

$$(k=0,1,2,\dots,N)$$

$$\rho_h^0(\bar{x}, 0) = \rho_{0h}(\bar{x}), \quad 0 < m_1 \leq \rho_{0h}(\bar{x}) \leq m_2 < \infty \quad (2.29)$$

$$v_{1h}^k \left| \partial \Omega_{1h}^k - v_{2h}^k \right| \partial \Omega_{2h}^k = 0 \quad (2.30)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, N),$$

где  $a_{hx} = \frac{1}{h} \{a_h(x+h) - a_h(x)\}$ ,  $a_{hx} = \frac{1}{h} \{a_h(x) - a_h(x-h)\}$  - разделенные разности, соответственно, вперед и назад. В дальнейшем индекс  $h$  у сеточных функций, где это не вызывает недоразумений, опускается.

Отметим, что уравнение (2.23) записывается в узлах сетки  $\Omega_{1h}^k$ ; (2.24) - в  $\Omega_{2h}^k$ ; (2.25), (2.26) - в  $\bar{\Omega}_{3h}^k$ ; (2.27) - (2.29) - в  $\Omega_h^k$ ; граничные условия (2.30) - на границах сдвинутых сеток  $\partial \Omega_{1h}^k, \partial \Omega_{2h}^k$ . Уравнение сохранения массы (2.18) аппроксимировано двуциклической схемой расщепления (2.27) - трехслойной разностной схемой [142, 143]. Поэтому начальное условие необходимо задавать на нулевом и первом слоях по времени. Определение  $\rho_h^1$  возможно двумя способами. Зная решение задачи (2.23) - (2.30) при  $t=0$  из двух последних уравнений (2.27) при  $k=0$ , продольно-поперечной немонотонной прогонкой [144, 145] можно определить  $\rho_h^1$ . Либо определить  $\rho_h^1$  по формуле:

$$\rho_h^1 = \left( E - \Delta t \cdot (A_1^{(0)} + A_2^{(0)}) \right) \rho_{0h}(\bar{x}),$$

где  $E$  - единичный оператор. В обоих случаях  $\rho_h^1$  имеет второй порядок аппроксимации [145].

Остановимся на реализации разностной начально -краевой задачи (2.23) - (2.30). При  $t=0$  ( $k=0$ ) из соотношения (2.29) известна величина  $\rho_h^0$ , а из уравнения (2.28) - вязкость  $\mu_h^0$ . Итерационным методом, о котором сказано ниже, определим решение системы (2.23) - (2.26), т.е. величины  $v_{1h}^0, v_{2h}^0, p_h^0$ . Из двух последних соотношений (2.27) при  $t=0$  определяем  $\rho_h^1$ , а из (2.28) -  $\mu_h^1$ , и итерационным методом -  $v_{1h}^1, v_{2h}^1, p_h^1$  из (2.23) - (2.26).

Далее, из уравнения (2.27), применив два раза немонотонную продольно-поперечную прогонку, определяем  $\rho_h^2$ , а из (2.28) -  $\mu_h^2$ . Далее из системы (2.23) - (2.26) определяем  $v_{1h}^2, v_{2h}^2, p_h^2$ . Подставляя  $\rho_h^1, v_{1h}^1, v_{2h}^1$  в (2.27), находим  $\rho_h^3$ . Продолжая процесс и так далее, определим все величины  $\rho_h^k, v_{1h}^k, v_{2h}^k, p_h^k, \mu_h^k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, N$ ), вплоть до слоя  $t_N$ . Достоинство разностной схемы (2.23) - (2.30) состоит в том, что она соответствует нелинейной системе уравнений (2.14) - (2.21), а ее реализация сводится к последовательному решению серии линейных разностных задач.

Используя результаты работы [142], а также разложения в ряд Тейлора, нетрудно доказать, что разностная начально-краевая задача (2.23) - (2.30) аппроксимирует исходную начально-краевую задачу (2.14) - (2.21) на достаточно гладком решении со вторым порядком точности по пространственным и временной переменным. Более точно может быть доказано следующее утверждение [69]:

Пусть  $f(\rho)$  - четырежды непрерывно-дифференцируемая функция по  $\rho$ , решение начально-краевой задачи (2.14) - (2.21) существует, и  $\vec{v} \in C^{(4,0)}(Q_T)$ ,  $p \in C^{(3,0)}(Q_T)$ ,  $\rho \in C^{(3,0)}(Q_T)$ . Тогда схема (2.23) - (2.30) аппроксимирует (2.14) - (2.21) с точностью  $O(h^2 + \Delta t^2)$ . Здесь  $C^{(s,l)}$  - пространство функций в  $Q_T$ , имеющих непрерывно-дифференцируемые производные по  $x_1, x_2$  до  $s$ -порядка и по  $t$ -до  $l$ , включительно.

Кроме того, в работе [69] доказано, что разностная схема (2.23) - (2.30) записана в дивергентном виде. На этом мы останавливаться не будем.

Для удобства дальнейших выкладок сделаем замену сеточных функций:

$$v_{1h}^k(x_1 - h/2, x_2) \equiv v_{1h}^k(x_1, x_2), \quad v_{2h}^k(x_1, x_2 - h/2) \equiv v_{2h}^k(x_1, x_2), \quad p_h^k(x_1, x_2) \equiv p_h^k(x_1, x_2), \dots,$$

которые определяются в  $\Omega_h^k$  ( $\rho_h^k$  - определяется в  $\bar{\Omega}_{23h}^k$ ). Тогда разностную начально-краевую задачу (2.23) - (2.30) можно записать в виде (штрихи над новыми функциями опущены):

$$\bar{\nabla}_h p^k + A(\mu^k) \bar{v}^k = F^k, \quad \bar{x} \in \Omega_h^k, \quad (2.31)$$

$$\operatorname{div}_h \bar{v}^k = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_{3h}^k, \quad (2.32)$$

$$\sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{3h}^k} p^k(x_1, x_2) h^2 = 0, \quad (2.33)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{k-1/2} - \rho^{k-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_1^{(k)} (\rho^{k-1/2} + \rho^{k-1}) &= 0, \quad \frac{\rho^k - \rho^{k-1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_2^{(k)} (\rho^k + \rho^{k-1/2}) = 0, \\ \frac{\rho^{k+1/2} - \rho^k}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_2^{(k)} (\rho^{k+1/2} + \rho^k) &= 0, \quad \frac{\rho^{k+1} - \rho^{k+1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_2^{(k)} (\rho^{k+1} + \rho^{k+1/2}) = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\bar{x} \in \Omega_h^k$$

$$A_i^{(k)} \varphi = \frac{1}{2} \left\{ (v_i^k \varphi)_{x_i} + v_i^k \varphi_{\bar{x}_i} \right\}, \quad (i = 1, 2), \quad \bar{x} \in \Omega_h^k,$$

$$\mu^k = f(\rho^k), \quad 0 < n_1^* \leq f(\rho^k) \leq n_2^* < \infty, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^k, \quad (2.35)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\rho^0(\bar{x}, 0) = \rho_0(\bar{x}), \quad 0 < m_1 \leq \rho_0(\bar{x}) \leq m_2 < \infty, \quad (2.36)$$

$$\bar{v}^k |_{\partial \Omega_h^k} = 0, \quad (2.37)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, N),$$

где  $\bar{v}^k = (v_1^k, v_2^k)^T$ ,  $F^k = -\frac{1}{2} (0, \rho^k(x_1, x_2 - h) + \rho^k(x_1, x_2))$ ,

$$A(\mu^k) \bar{v}^k = - \begin{pmatrix} 2(av_{1\bar{x}_1})_{x_1}^k + (bv_{1\bar{x}_2})_{x_2}^k + (bv_{2\bar{x}_1})_{x_2}^k \\ (bv_{1\bar{x}_2})_{x_1}^k + (bv_{2\bar{x}_1})_{x_1}^k + 2(cv_{2\bar{x}_2})_{x_2}^k \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a^k(\bar{x}) &\equiv \mu^k(x_1 - h, x_2), \quad b^k(\bar{x}) \equiv \mu^k(x_1 - h/2, x_2 - h/2), \\
c^k(\bar{x}) &\equiv \mu^k(x_1, x_2 - h), \quad \operatorname{div}_h \vec{v}^k \equiv v_{1x_1}^k + v_{2x_2}^k, \quad \vec{\nabla} p^k \equiv (p_{x_1}^k, p_{x_2}^k)^T
\end{aligned} \tag{2.38}$$

В случае постоянной динамической вязкости во всей области под  $A(\mu)$  следует понимать разностный оператор Лапласа:

$$-\Delta_h \equiv - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{\bar{x}_1 x_1} - \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_{\bar{x}_2 x_2} \tag{2.39}$$

### 2.2.2 Устойчивость, теорема существования и единственности

Приведем некоторые сведения, доказательства которых имеются в соответствующих работах. Условимся через  $C$  и  $C_i$  с индексом обозначать всевозможные константы, не зависящие от  $h$  и  $\Delta t$ . Обозначим через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  множество узлов вида:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2 - 1 \}, \\
\omega_2 &= \{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 \},
\end{aligned}$$

и введем сеточные аналоги  $L_{2h}(\Omega_h)$ ,  $W_{2h}^0$  пространств суммируемых функций Соболева  $L_2(\Omega)$ ,  $W_2^0$  со скалярными произведениями и нормами:

$$(u, v) \equiv (u, v)_{L_{2h}(\Omega_h)} \equiv h^2 \cdot \sum_{\bar{x} \in \Omega_h} u(\bar{x})v(\bar{x}), \quad \|u\| \equiv \sqrt{(u, u)} \tag{2.40}$$

$$(u, v)_1 \equiv (u, v)_{W_{2h}^{01}(\Omega_h)} \equiv (u_{\bar{x}_1}, u_{\bar{x}_1})_{\omega_1} + (u_{\bar{x}_2}, u_{\bar{x}_2})_{\omega_2}, \quad \|u\|_1 \equiv \sqrt{(u, u)_1} \tag{2.41}$$

В выражениях (2.41) предполагается, что на границе области  $\partial\Omega_h$   $u, v$  обращаются в нуль. Если сеточная функция

векторозначна, то ее норма определяется через сумму норм ее компонент.

1. Если  $u \in W_{2h}^1(\Omega_h)$ , то справедлив сеточный аналог неравенства Фридрихса [143, 146]:

$$\|u\| \leq c \|u\|_1 \quad (2.42)$$

2. Если  $\bar{u} = (u_1, u_2)^T \in W_{2h}^1(\Omega_h)$ , то справедлив сеточный аналог первого неравенства Корна [146-148]:

$$D^2(\bar{u}) \equiv 2\|u_{1\bar{x}_1}\|_{\omega_1}^2 + \|u_{1\bar{x}_2}\|_{\omega_2}^2 + 2(u_{1\bar{x}_2}, u_{2\bar{x}_1}) + \|u_{2\bar{x}_1}\|_{\omega_1}^2 + 2\|u_{2\bar{x}_2}\|_{\omega_2}^2 \geq C \|\bar{u}\|_1 \quad (2.43)$$

3. Если  $A$  - самосопряженный и положительно-определенный оператор ( $A = A^* > 0$ ), то  $\forall x, y$  справедливо обобщенное неравенство Коши-Буняковского [144, 149, 150]:

$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)(Ay, y)} \quad (2.44)$$

При  $A = E$ , где  $E$  - единичный оператор, получим неравенство Коши - Буняковского:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (2.45)$$

4. Пусть  $\bar{\varphi}$  - сеточная функция, определенная в  $\bar{\Omega}_h$  и  $\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h} = 0$ , и пусть  $div_h \bar{\varphi} \equiv \varphi_{1x_1} + \varphi_{2x_2} \neq 0$  на  $\bar{\Omega}_{3h}$ . Тогда для любой сеточной функции  $q$ , такой, что  $\sum_{\bar{x} \in \Omega_{3h}} qh^2 = 0$ , справедливо неравенство [151, 152]:

$$\|q\|_{L_{2h}(\bar{\Omega}_{3h})} \leq C \|q\|_* = C \cdot \frac{\sup_{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h} = 0} |(q, div_h \bar{\varphi})_{\bar{\Omega}_{3h}}|}{\|\bar{\varphi}\|_1} = C \cdot \frac{\sup_{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h} = 0} |(q, div_h \bar{\varphi})_{\bar{\Omega}_{3h}}|}{\|\bar{\varphi}\|_1} \quad (2.46)$$

5. Для  $\forall \vec{x}, \vec{y}$  справедливо неравенство треугольника:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (2.47)$$

6. Для любых  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) справедливо неравенство Коши :

$$\left( \sum_{i=1}^N a_i \right)^2 \leq N \sum_{i=1}^N a_i^2, \quad (2.48)$$

и любых  $a, b$  и  $\varepsilon \neq 0$  имеет место  $\varepsilon$  - неравенство [144] :

$$ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon^2} \quad (2.49)$$

7. Имеют место формулы суммирования по частям [144]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} u_{\bar{x},i} v_i h &= - \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_{i,x} h + (u_{N-1} v_N - u_0 v_0), \\ \sum_{i=1}^{N-1} u_{x,i} v_i h &= - \sum_{i=1}^N u_i v_{\bar{x},i} h + (u_N v_N - u_1 v_0), \\ \sum_{i=1}^{N-1} u_0 v_{x,i} h &= - \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_0 h + \frac{1}{2} [(u_N v_{N-1} + u_{N-1} v_N) - (u_1 v_0 + u_0 v_1)] \end{aligned} \right\} (2.50)$$

где  $\phi_0 = \frac{1}{2}(\phi_x + \phi_{\bar{x}})$  - центральная разность.

8. Если на границе прямоугольного параллелепипеда сеточные функции обращаются в нуль ( $u, v|_{\partial\Omega_n} = 0$ ), то справедливы разностные формулы Грина [144-146]:

$$\left. \begin{aligned} ((\eta u_{\bar{x}_i})_{x_j}, v) &= -(\eta u_{\bar{x}_i}, v_{\bar{x}_i})_{\omega_i} = (u, (\eta v_{\bar{x}_i})_{x_j}), (i = 1, 2, 3), \\ ((\eta u_{\bar{x}_i})_{x_j}, v) &= -(\eta u_{\bar{x}_i}, v_{\bar{x}_j}) = (u, (\eta v_{\bar{x}_j})_{x_i}), (i \neq j, i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \right\} (2.51)$$

а также формула суммирования по частям:

$$(u_{\bar{x}_i}, v) = -(u, v_{\bar{x}_i}), (i = 1, 2, 3) \quad (2.52)$$

Здесь  $\eta$  - произвольная сеточная функция, определенная в  $\bar{\Omega}_h$ .

Исследуем свойства операторов  $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, A(\mu^k)$ . Рассмотрим разностный аналог уравнения несжимаемости (2.32). Так как  $v_1^k(0, j) = v_2^k(0, j) = 0$ , то из (2,32) следует, что  $v_1^k(1, j) = 0$ , и тогда для любых сеточных функций  $\varphi, \psi$  имеем:

$$\left( (v_1^k \varphi)_{x_1}, \psi \right) = -(v_1^k \varphi, \psi_{\bar{x}_1}), \quad (v_1^k \varphi_{\bar{x}_1}, \psi) = -(\varphi, (v_1^k \psi)_{x_1}) \quad (2.53)$$

Аналогично получаем:

$$\left( (v_2^k \varphi)_{x_2}, \psi \right) = -(v_2^k \varphi, \psi_{\bar{x}_2}), \quad (v_2^k \varphi_{\bar{x}_2}, \psi) = -(\varphi, (v_2^k \psi)_{x_2}) \quad (2.54)$$

Из определения операторов  $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}$  и из (2.53), (2.54) следует, что они кососимметричны, то есть

$$(A_i^{(k)} \varphi, \psi) = -(\varphi, A_i^{(k)} \psi), \quad (i = 1, 2), \quad (2.55)$$

и, следовательно

$$(A_i^{(k)} \varphi, \varphi) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (2.56)$$

Рассмотрим оператор  $A(\mu^k)$  (2.38). Используя разностные формулы Грина (2.51), для любых сеточных функций  $\bar{u}, \bar{v}$ , обращающихся в нуль на границе  $\partial\Omega_h$ , будем иметь:

$$(A(\mu^k) \bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, A(\mu^k) \bar{v}), \quad (2.57)$$

т.е. оператор  $A(\mu^k)$  - самосопряженный. Из (2.51),  $\varepsilon$  - неравенства (при  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), сеточных неравенств Фридрихса (2.42) и Корна (2.43), а также (2.35) получим:

$$c_1 n_1^* \|\vec{v}\|^2 \leq n_1^* \|\vec{v}\|_1^2 \leq (A(\mu^k)\vec{v}, \vec{v}) \leq 2n_2^* \|\vec{v}\|^2 \quad (2.58)$$

То есть разностный оператор вязких напряжений положительно определенный, самосопряженный и равномерно эллиптический. Заметим, что на подпространстве соленоидальных векторов ( $div_h \vec{v} = 0$ ) :

$$n_1^* \|\vec{v}\|_1^2 \leq (A(\mu^k)\vec{v}, \vec{v}) \leq n_2^* \|\vec{v}\|_1^2 \quad (2.59)$$

Теперь можно установить априорную оценку на решение разностной начально-краевой задачи (2.31) - (2.38).

Лемма. Пусть решение (2.31) - (2.38) существует и пусть  $\|\rho_0(\vec{x})\| \leq C$ . Тогда для решения (2.31) - (2.38) справедлива априорная оценка:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}^k\|_1 &\leq C_1 \cdot \|\rho_0\| \leq C_{11}, \quad \|p^k\|_{L_{2h}(\bar{\Omega}_{3h})} \leq C_2 \cdot \|\rho_0\| \leq C_{22}, \\ \|\rho^N\| &= \|\rho^{N-1/2}\| = \dots = \|\rho^{1/2}\| = \|\rho_0\|, \quad (0 \leq k \leq N) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Умножим уравнение (2.31) на  $\vec{v}^k$ , а (2.32) - на  $p^k$  и результаты сложим. Используя формулы суммирования по частям (2.50), определение  $\vec{f}^k$ , неравенства Коши - Буняковского (2.44), Фридрихса (2.42) и треугольника (2.47), а также (2.58), получим:

$$n_1^* \|\vec{v}^k\|_1^2 \leq c_3 \|\vec{f}^k\| \|\vec{v}^k\|_1 \leq c_4 \|\rho\| \cdot \|\vec{v}^k\|_1,$$

отсюда

$$\|\bar{v}^k\|_1 \leq c_1 \|\rho^k\| \quad (2.61)$$

Умножая (2.31) скалярно на  $\bar{\varphi}$  с учетом формул суммирования по частям и (2.46), имеем:

$$\|\rho^k\|_* \leq \sup_{\substack{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h^k}=0 \\ \|\bar{\varphi}\|_1=1}} \left| \left( \bar{\varphi}, \bar{f}^k \right) \right| + \sup_{\substack{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h^k}=0 \\ \|\bar{\varphi}\|_1=1}} \left| \left( A(\mu^k) \bar{v}^k, \bar{\varphi} \right) \right|,$$

а используя обобщенное неравенство Коши – Буняковского (2.44), (2.46), (2.59), (2.61), получим:

$$\begin{aligned} \|\rho^k\|_{L_2(\bar{\Omega}_{3h}^k)} &\leq c_0 \|\rho^k\|_* \leq 2c_0 \sup_{\substack{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h^k}=0, \|\bar{\varphi}\|_1=1}} \left\{ \|\bar{\varphi}\|_1 \cdot \|\rho^k\| + \sqrt{A(\mu^k) \bar{v}^r, \bar{v}^k} (A(\mu^k) \bar{\varphi}^k, \bar{\varphi}^k) \right\} \leq \\ &\leq c_1 \|\rho^k\| \leq c_2 \|\rho_0\| \end{aligned} \quad (2.62)$$

Умножая первое уравнение (2.34) на  $(\rho^{k-1} + \rho^{k-1/2})$ , второе – на  $(\rho^k + \rho^{k-1/2})$ , третье – на  $(\rho^k + \rho^{k+1/2})$ , четвертое – на  $(\rho^{k+1} + \rho^{k+1/2})$ , используя кососимметричность операторов  $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}$ , найдем, что

$$\|\rho^{k+1}\|^2 = \|\rho^{k+1/2}\|^2 = \|\rho^k\|^2 = \|\rho^{k-1/2}\|^2 = \|\rho^{k-1}\|^2 \quad (2.63)$$

Полагая в (2.63)  $k=1, 2, \dots, N-1$ , получим последнюю оценку (2.60), а с учетом (2.61), (2.62)- и две первые оценки (2.60). Лемма доказана, и, следовательно, разностная схема (2.31) - (2.38) абсолютно устойчива, ибо ее решение ограничено постоянной, независимой от  $h, \Delta t$  на всем отрезке времени [143-145]. Отсюда вытекает разрешимость задачи (2.31) - (2.38).

Теорема. Пусть  $\rho_0 \in L_{2h}(\bar{\Omega}_h^0)$ . Тогда в  $Q_T$  существует единственное решение задачи (2.31) - (2.38), и

$$\rho^k \in L_{2h}(\Omega_h^k), \quad p^k \in L_{2h}(\bar{\Omega}_{3h}^k), \quad \bar{v}^k \in \overset{0}{W}_{2h}^1(\Omega_h^k), \quad 0 \leq k \leq N$$

Действительно, при  $\rho_0 = 0$  в силу (2.60) соответствующая система однородных алгебраических уравнений (2.31) - (2.38) на каждом шаге по времени имеет тривиальное решение. Поэтому при  $\rho_0 \neq 0$  соответствующая система неоднородных алгебраических уравнений (2.31- 2.38) имеет ненулевое единственное решение.

Заодно доказана корректность применения метода немонотонной продольно - поперечной прогонки для реализации системы (2.34).

### 2.2.3 Итерационный метод

Для решения уравнений движения (2.31) совместно с уравнением несжимаемости (2.32) и условием (2.33) используется итерационный метод, идея построения которого базируется на работах [151, 153]. Рассмотрим итерационный процесс вида [69]:

$$\left. \begin{aligned} B\bar{v}_\tau + A(\mu)\hat{v} + \bar{\nabla}_h \hat{p} &= \bar{f} \\ \beta\tau p_\tau + \text{div}_h \hat{v} &= \bar{0} \end{aligned} \right\}, \quad (2.64)$$

$$\sum_{\bar{x} \in \Omega_{3h}} p \cdot h^2 = 0, \quad (2.65)$$

$$\hat{v} \Big|_{\partial\Omega_h^k} = \bar{0}, \quad (2.66)$$

где  $\hat{v} = \bar{v}(t + \tau)$ ,  $\bar{v}_\tau = (\bar{v}(t + \tau) - \bar{v}(t)) / \tau$ ,  $\tau$  - итерационный параметр,  $\beta$  - малая постоянная,  $B$  - некоторый самосопряженный, положительно определенный оператор. Остановимся сначала на реализации (2.64) - (2.66). Из второго уравнения (2.64) находим  $\hat{p} = p - \beta^{-1} \cdot \text{div}_h \hat{v}$ . Подставляя это

выражение в первое уравнение (2.64) и приведя подобные члены, получим уравнение для нахождения  $\hat{v}$  :

$$C\hat{v} = \left\{ B - \tau A(\mu) - \frac{\tau}{\beta} \bar{\nabla}_h(\operatorname{div}_h) \right\} \hat{v} = B\bar{v} - \tau \bar{\nabla}_h p + \tau \bar{f} \quad (2.67)$$

Из этого соотношения следует, что для нахождения  $\bar{v}$  достаточно, чтобы оператор

$$C \equiv B - \tau A(\mu) - \frac{\tau}{\beta} \bar{\nabla}_h(\operatorname{div}_h) \quad (2.68)$$

был легко обратим. Пусть  $C$ , например, выбран в виде:

$$C = (E - \gamma \Delta h) I, \quad (2.69)$$

где  $I$  - единичный оператор,  $E$  - единичная матрица,  $\gamma$  - положительная константа. Его обращение можно производить разложением в ряд Фурье, методом неполной редукции или другим каким-либо методом [144]. Из соотношения (2.68) определяется вид оператора  $B$ . Заметим, что операторы  $A, B, C$  - энергетически эквивалентны при определенных соотношениях  $\gamma, \delta, \beta$ . Условие (2.65) для давления должно быть удовлетворено лишь в начальном приближении, так как далее оно выполняется автоматически для любой итерации  $n$ . Это следует из суммирования второго соотношения (2.64) и граничного условия (2.66), из которых получаем  $\sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{3h}^k} p \cdot h^2 = 0$ , а отсюда и

(2.64).

В работе [69] доказаны следующие теоремы:

Теорема I. Пусть  $B \geq E, -\varphi_1 \Delta_h \leq B \leq -\varphi_2 \Delta_h, \alpha_1 B \leq A \leq \alpha_2 B$ ,

$(\bar{v}_0, p_0), \sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{3h}^k} p h^2 = 0$  произвольное начальное приближение

$$\|\bar{v}_0\|_B^2 + \beta \tau \|p_0\|^2 = M_0^2, \quad \|\bar{f}\|_{-1} \leq \text{const}.$$

Тогда существует  $\tau_0$  такое, что  $\forall \tau \leq \tau_0$ , и любой итерации  $n$  выполняется неравенство:

$$\|\vec{v}^n\|_B^2 + \beta\tau\|p^n\|^2 \leq \max(M_0^2, M_1^2) = M^2,$$

причем  $M_1$  зависит от  $\gamma, \tau, \Omega_h$  и начального приближения. Иначе говоря, итерационный процесс ограничен.

Теорема II. Пусть правая часть  $\|\vec{f}\|_{-1} \leq const$  и параметры  $\gamma, \delta_0$  таковы, что итерационный процесс ограничен некоторой постоянной  $M$ . Тогда  $\forall \tau \leq \tau_0$  и любого начального приближения итерационный процесс сходится, и для достижения точности  $\varepsilon$  необходимо  $O\left(\frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$  итераций.

Здесь под  $\|\vec{f}\|_{-1}$  понимается разностный аналог негативной формы:

$$\|\vec{f}\|_{-1} = \sup_{\vec{\varphi}|_{\partial\Omega_h}=0} \frac{(\vec{f}, \vec{\varphi})}{\|\varphi\|_1} = \sup_{\vec{\varphi}|_{\partial\Omega_h}=0, \|\varphi\|_1=1} (\vec{f}, \vec{\varphi}). \quad (2.70)$$

При практических расчетах в момент времени  $t_0 = 0$  значительная часть расчетного времени тратится на выполнение условия соленоидальности вектора скорости. Поэтому начальное приближение необходимо задавать следующим образом: начальное давление необходимо принимать близким к гидростатическому с условием выполнения (2.64), а вектор скорости – близким к соленоидальному вектору. При дальнейших расчетах подобная корректировка не требуется, т.к. решение, полученное на предыдущем слое, используется в качестве начального приближения на следующем шаге по времени.

### 2.2.4 Разностная начально-краевая задача II

Построим разностную схему, соответствующую начально-краевой задаче с условиями симметрии на вертикальных границах прямоугольника. Введем сетки:

$$\Omega_h^k = \{ \bar{x}: x_1 = ih, x_2 = jh, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2 \},$$

$$\Omega_{1h}^k = \{ \bar{x}: x_1 = (i-1/2)ih, x_2 = hj, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1 - 1, 0 \leq j \leq N_2 \},$$

$$\Omega_{2h}^k = \{ \bar{x}: x_1 = ih, x_2 = (j-1/2)h, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2 - 1 \},$$

$$\bar{\Omega}_{3h}^k = \{ \bar{x}: x_1 = ih, x_2 = jh, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2 - 1 \},$$

Величины  $\rho_h^k, \mu_h^k, v_{1h}^k$  будем определять на сетке  $\Omega_h^k$ ,  $v_{2h}^k$  - на сетке  $\Omega_{2h}^k$ , а  $p_h^k$  - на  $\bar{\Omega}_{3h}^k$ . Продолжим сетки на один шаг влево ( $x_1 = -h$ ) и на один шаг вправо ( $x_1 = l_1 + h$ ). Аппроксимируем условия симметрии (2.22), положив:

$$\begin{aligned} v_1^k(0, x_2) &= v_1^k(l_1, x_2) = 0, \quad v_1^k(-h, x_2) = -v_1^k(h, x_2), \\ v_1^k(l_1 - h, x_2) &= -v_1^k(l_1 + h, x_2), \quad v_2^k(-h, x_2) = v_2^k(h, x_2), \\ v_2^k(l_1 - h, x_2) &= v_2^k(l_1 + h, x_2), \quad \rho^k(-h, x_2) = \rho^k(h, x_2), \\ \rho^k(l_1 - h, x_2) &= \rho^k(l_1 + h, x_2), \end{aligned} \quad (2.71)$$

где  $v_2^k(x_1, x_2) = v_2^k(x_1, x_2 - h/2)$ ,  $x_2 = jh$ . В дальнейшем штрих над функцией  $v_2^k(x_1, x_2)$ , определенной в целых узлах сетки, опускается.

Уравнение неразрывности (2.18) будем аппроксимировать двуциклической схемой расщепления (2.34), где

$$\begin{aligned} (A_1^{(k)}\varphi)_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ (\varphi \cdot v_1^k)_{x_1^0} + v_1^k \cdot \varphi_{x_1^0} \right\}_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ (A_1^{(k)}\varphi)_{0j} &= \frac{1}{2h} (\varphi \cdot v_1^k)_{1j}, \quad (A_1^{(k)}\varphi)_{N_1j} = -\frac{1}{2h} (\varphi \cdot v_1^k)_{N_1-1j}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$(A_2^{(k)}\varphi)_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ (\varphi \cdot v_2^k)_{x_2} + v_2^k \cdot \varphi_{x_2} \right\}_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1$$

Здесь  $a_{x_0} = \frac{1}{2h} (a(x+h) - a(x-h))$  - центральная разность.

Конструкция оператора в точках  $(0, x_2)$ ,  $(l_1, x_2)$  составлена с учетом граничных условий (2.71).

Скалярное произведение введем следующим образом:

$$(u, v) \equiv h^2 \cdot \sum_{j=1}^{N_2-1} \left( \sum_{i=1}^{N_1-1} u_{ij} v_{ij} + \frac{1}{2} (u_{0j} v_{0j} + u_{N_1j} v_{N_1j}) \right) \quad (2.73)$$

Уравнение несжимаемости (2.16) будем аппроксимировать уравнением (2.74):

$$\begin{aligned} v_{1x_1^0}^k + v_{2x_2}^k &= 0, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq i \leq N_2 - 1, \\ \frac{1}{h} (v_1^k)_{1j} + (v_{2x_2}^k)_{0j} &= 0, \quad -\frac{1}{h} (v_1^k)_{N_1-1j} + (v_{2x_2}^k)_{N_1j} = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Используя определение скалярного произведения (2.73), третью формулу суммирования по частям (2.50), получим:

$$(A_1^{(k)}\varphi, \varphi) = (A_2^{(k)}\varphi, \varphi) = 0 \quad (2.75)$$

Уравнения движения (2.14), (2.15) аппроксимируем разностными уравнениями (2.76), (2.77), соответственно:

$$p_{x_1^0}^k - 2\left(\mu^k(x_1 - h/2, x_2)v_{1\bar{x}_1}^k\right)_{x_1} - \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{1\bar{x}_2}^k\right)_{x_2} - \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{2x_1^0}^k\right)_{x_2} = 0, \quad (2.76)$$

$$p_{x_2}^k - \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{1\bar{x}_2}^k\right)_{x_1} - \left(\mu^k(x_1 - h/2, x_2 - h/2)v_{2\bar{x}_1}^k\right)_{x_1} - 2\left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{2x_2}^k\right)_{x_2} = -\rho^k(x_1, x_2 - h/2), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad h \leq x_2 \leq l_2 - h \quad (2.77)$$

Используя граничные условия для плотности (2.71), зависимость (2.19), получим:

$$\begin{aligned} \mu^k(-h, x_2) &= \mu^k(h, x_2), \quad \mu^k(l_1 - h, x_2) = \mu^k(l_1 + h, x_2), \quad \mu^k(-h/2, x_2) = \mu^k(h/2, x_2), \\ \mu^k(l_1 - h/2, x_2) &= \mu^k(l_1 + h/2, x_2), \quad \mu^k(-h, x_2 - h/2) = \mu^k(h, x_2 - h/2), \\ \mu^k(l_1 - h, x_2 - h/2) &= \mu^k(l_1 + h, x_2 - h/2), \quad \mu^k(-h/2, x_2 - h/2) = \mu^k(h/2, x_2 - h/2), \\ \mu^k(l_1 - h/2, x_2 - h/2) &= \mu^k(l_1 + h/2, x_2 - h/2) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Третье – пятое соотношения (2.78) получаются с помощью линейной интерполяции вязкости и выполняются с точностью  $O(h^2)$ . Оценивая члены уравнений (2.76), (2.77) на вертикальных границах области с помощью соотношений (2.71), (2.78), получим:

$$\begin{aligned} \left(\mu^k(x_1 - h/2, x_2)v_{1\bar{x}_1}^k\right)_{x_1} \Big|_{x_1=0} &= \left(\mu^k(x_1 - h/2, x_2)v_{1\bar{x}_1}^k\right)_{x_1} \Big|_{x_1=l_1} = 0, \\ \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{1\bar{x}_2}^k\right)_{x_2} \Big|_{x_1=0} &= \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{1\bar{x}_2}^k\right)_{x_2} \Big|_{x_1=l_1} = 0, \\ p_{x_1^0}^k \Big|_{x_1=0} &= p_{x_1^0}^k \Big|_{x_1=l_1} = 0, \\ \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{2x_1^0}^k\right)_{x_2} \Big|_{x_1=0} &= \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{2x_1^0}^k\right)_{x_2} \Big|_{x_1=l_1} = 0, \\ \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{1\bar{x}_2}^k\right)_{x_1^0} \Big|_{x_1=0} &= \frac{\mu^k(h, x_2 - h/2)}{h} v_{1\bar{x}_2}^k(h, x_2) \\ \left(\mu^k(x_1, x_2 - h/2)v_{1\bar{x}_2}^k\right)_{x_1^0} \Big|_{x_1=l_1} &= -\frac{\mu^k(l_1 - h, x_2 - h/2)}{h} v_{1\bar{x}_2}^k(l_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \left( \mu^k (x_1 - h/2, x_2 - h/2) v_{2\bar{x}_1}^k \right)_{x_1} \Big|_{x_1=0} &= \frac{2\mu^k (h/2, x_2 - h/2)}{h} v_{2x_1}^k (0, x_2) \\ \left( \mu^k (x_1 - h/2, x_2 - h/2) v_{2\bar{x}_1}^k \right)_{x_1} \Big|_{x_1=l_1} &= -\frac{2\mu^k (l_1 - h/2, x_2 - h/2)}{h} v_{2\bar{x}_1}^k (l_1, x_2) \end{aligned}$$

Как и в разностной начально - краевой задаче I с использованием разностных неравенств Фридрихса, Корна, соотношений (2.71), (2.79), (2.35) показываем, что соответствующий разностный оператор  $A(\mu^k)$  в уравнениях движения (2.76), (2.77) будет самосопряженным, положительно определенным и равномерно эллиптическим.

Условие (2.17) заменяется суммой по  $\bar{\Omega}_{3h}$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что схема имеет второй порядок аппроксимации. Основные свойства операторов  $A_1^{(k)}$ ,  $A_2^{(k)}$ ,  $A(\mu^k)$  в разностной начально-краевой задаче II такие же, как и свойства соответствующих операторов в разностной начально-краевой задаче I. Поэтому все результаты, справедливые для разностной начально-краевой задачи I, переносятся и на разностную начально-краевую задачу II. Итерационный процесс с учетом структуры оператора  $A(\mu^k)$  на вертикальных границах области строится аналогичным образом, и для него остаются в силе теоремы I, II.

### 2.2.5 О более точном прослеживании эволюции границы раздела слоев. Практическая проверка метода

Для более точного прослеживания эволюции границы раздела слоев без явного выделения на сетке ее фронта применяют дифференциальные анализаторы [154-157]. При этом вычисления проводят на двух сетках, обычно грубой и более мелкой, а затем с помощью определенной процедуры уточняется положение границы раздела. Это требует увеличение памяти ЭВМ и расчетного времени. Поэтому в целях экономии последних в [69] был разработан анализатор типа «маркеров», учитывающий постоянство меры зоны «размазывания» физических параметров слоев.

Суть его состоит в следующем. В расчет вводятся частицы «маркеры» для определения конфигурации границы раздела [158]. Пусть  $\vec{\xi}^k = (\xi_1^k, \xi_2^k)$ ,  $\vec{\xi}^{k+1} = (\xi_1^{k+1}, \xi_2^{k+1})$  - координаты частиц «маркеров» в момент времени  $t_k = k \cdot \Delta t$ ,  $t_{k+1} = (k+1) \cdot \Delta t$ , соответственно. Если известна конфигурация границы раздела  $\vec{\xi}^k$  при  $t = t_k$ , то ее конфигурацию  $\vec{\xi}^{k+1}$  в момент времени  $t = t_{k+1}$  определяют по формуле [158]:

$$\vec{\xi}^{k+1} = \vec{\xi}^k + \vec{v} \cdot \Delta t, \quad (2.80)$$

где  $\vec{v}$  - осредненная по пространству и времени скорость частиц «маркеров». В соответствии с [158] она определяется следующим образом. Если частица «маркер» попадает в ячейку с номером  $(i, j)$ , то

$$\vec{v} = \frac{1}{2h^2} \left\{ S_{ij} (\vec{v}_{i+1j+1}^{k+1} + \vec{v}_{i+1j+1}^k) + S_{i+1j+1} (\vec{v}_{ij}^{k+1} + \vec{v}_{ij}^k) + S_{ij+1} (\vec{v}_{i+1j}^{k+1} + \vec{v}_{i+1j}^k) + S_{i+1j} (\vec{v}_{ij+1}^{k+1} + \vec{v}_{ij+1}^k) \right\}, \quad (2.81)$$

где  $S_{ij}, \dots, S_{i+1j}$  - площади заштрихованных областей, прилегающих к узлам ячейки (рисунок 20), а  $\vec{v}_{i+1j+1}^{k+1}, \dots, \vec{v}_{ij+1}^k$  -

скорости стрелы в соответствующих узлах ячейки в соответствующие моменты времени.

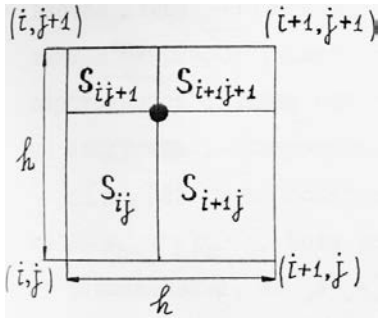


Рисунок 20 – частица маркер (•) в ячейке

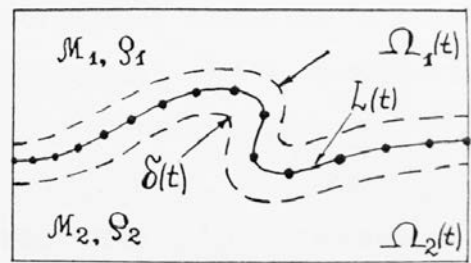


Рисунок 21-Зона «размазывания» и области  $\Omega_1(t), \Omega_2(t)$  постоянных значений физических параметров среды

Так как в расчетах значения физических параметров в окрестности границы раздела «размазываются» на несколько числовых ячеек, что влияет на точность вычислений, то будем контролировать меру зоны «размазывания». Поскольку среда несжимаемая с постоянными плотностями и вязкостями в каждом слое, а разностная схема, описывающая тейлоровскую неустойчивость, записана в дивергентном виде, то мера «размазывания» физических параметров среды  $S$  остается постоянной в любой момент времени. Обратимся к рисунку 21, на котором «маркерами» обозначена граница раздела в момент времени  $t$  с толщиной зоны «размазывания»  $\delta(t)/2$  по обе ее стороны. При этом

$$\delta(t) = S/L(t), \quad (2.82)$$

где  $L(t)$ - длина границы раздела в тот же момент времени. Величина  $S$  определяется в начальный момент времени и

обусловлена первоначальной конфигурацией границы раздела слоев. В момент времени  $t = 0$  известна граница раздела слоев, которая задается координатами достаточно большого числа частиц «маркеров», а также  $\delta(0)$ . Значения  $\rho, \mu$  на границе раздела, в соответствии с теорией однородных разностных схем [137,159], полагаются равными среднему арифметическому соответствующих значений  $\rho, \mu$  слоев. Затем из (2.31) - (2.34) определяются  $\bar{v}^0, \bar{v}^1, p^0, p^1, \rho^1$ , а из (2.80), (2.81) - конфигурация границы раздела, и подсчитывается длина  $L(\Delta t)$ , как сумма расстояний между соседними частицами «маркеров», соединенных отрезками ломанных. Из (2.82) определяется толщина зоны «размазывания»  $\delta(\Delta t)$  и производится регуляризация. Если расчетная точка сетки  $(i, j) \in \Omega_1(t)$ , то полагается  $\mu = \mu_1, \rho = \rho_1$ ; если  $(i, j) \in \Omega_2(t)$ , то  $\mu = \mu_2, \rho = \rho_2$ . Если расчетная точка сетки  $(i, j)$  попадает в зону «размазывания», то полагается  $\mu = 0.5(\mu_1 + \mu_2), \rho = 0.5(\rho_1 + \rho_2)$ . Вновь находится решение (2.31) - (2.34) при  $t = \Delta t$ , но уже с регуляризованной правой частью и вязкостью  $\mu^1$ . Затем из (2.35) определяется  $\rho^2$ , и вся процедура расчета повторяется. Заметим, что методика вычислений предполагает пересчет уравнений (2,31) - (2.34) с регуляризованными коэффициентами. Как показали расчеты, на пересчет (2,31) - (2.34) с регуляризованными коэффициентами дополнительно требуется не более 30-50 итераций.

По-видимому, не существует точного аналитического решения, удовлетворяющего начально-краевой задаче I или II, которое имело бы физический смысл. С другой стороны, в исследованиях нелинейной стадии тейлоровской неустойчивости не приводится начальное возмущение границы раздела слоев, а, следовательно, невозможно провести сравнение расчетов с расчетами других авторов. Поэтому численный метод был проверен на тестах, математическом и физических. В

качестве первого выбрано решение задачи (2.14) - (2.21) с измененной правой частью в уравнениях движения (2.14), (2.15):

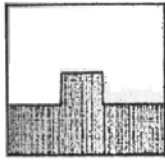
$$F_1 = 12x_1^2(x_1 - 1)^2(x_2 - 1), F_2 = -2(x_1 - 1)\left(x_1(x_1^2 + 3x_1 - 2)(x_2^2 - 6x_2 + 1) + 6x_2(x_2 - 1)^2\right),$$

и начальным условием  $\rho_0 = 1$ . Безразмерная вязкость  $\mu$  выбиралась равной безразмерной плотности  $\rho$ , т.е.  $\mu = f(\rho) = \rho$ . Аналитическое решение в  $\Omega_T$ , основанием которого является квадрат с единичной стороной, удовлетворяющее такой начально-краевой задаче, имеет вид:

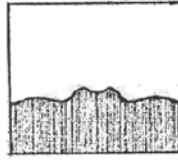
$$\mu = \rho = \rho_0, p = 4x_1x_2(2x_1^2 - 3x_1 + 1)(2x_2^2 - 3x_2 + 1), \\ v_1 = 2x_1^2x_2(x_1 - 1)^2(2x_2^2 - 3x_2 + 1), v_2 = 2x_2^2x_1(x_2 - 1)^2(2x_1^2 - 3x_1 + 1).$$

Аналитическое и численные решения были сравнены на отрезке времени  $[0, 1]$ . При  $\Delta t = h = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  - максимальная относительная ошибка составила 9,23 %, а при  $\Delta t = h = 0.04$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  - 2,84%.

Во втором, физическом, тесте (рисунок 22) была выбрана задача оседания тяжелой жидкости в легкой с условием прилипания. Начальное возмущение границы раздела задавалось в форме пьедестала ( $n = 4/3$ ,  $h = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $l_1 = 1.25 \text{ км}$ ). На рисунке 22 показано плоское оседание тяжелой жидкости в легкой (условия прилипания) для трех моментов безразмерного времени. Расчеты показали, что с течением времени тяжелая жидкость оседает с образованием достаточно быстро затухающих внутренних волн на границе раздела (рисунок 22б) - 22в)). При этом наибольшая горизонтальная составляющая скорости изменяется от 0,2939 при  $\bar{t} = 0$  до 0,0141 при  $\bar{t} = 1$ , уменьшаясь примерно в 15 раз, а вертикальная составляющая - вдвое более: от 0,7331 ( $\bar{t} = 0$ ) до 0,0225 ( $\bar{t} = 1$ ).



а)  $\bar{t} = 0$ .



б)  $\bar{t} = 0,3$ .

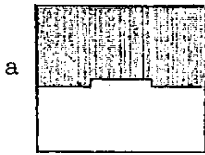


в)  $\bar{t} = 1,0$ .

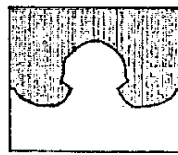
$$\mu_{*2} = 2,6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_{*2} = 2,6 \text{ г/см}^3, \mu_{*1} = 1,3 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_{*1} = 2,16 \text{ г/см}^3$$

Рисунок 22 – Граница раздела слоев при оседании тяжелой жидкости в легкой для трех моментов безразмерного времени

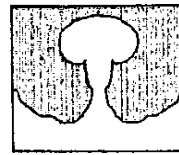
В качестве следующего физического теста было рассчитано всплывание легкой жидкости в тяжелой (условия прилипания, рисунок 23).



а



б



в

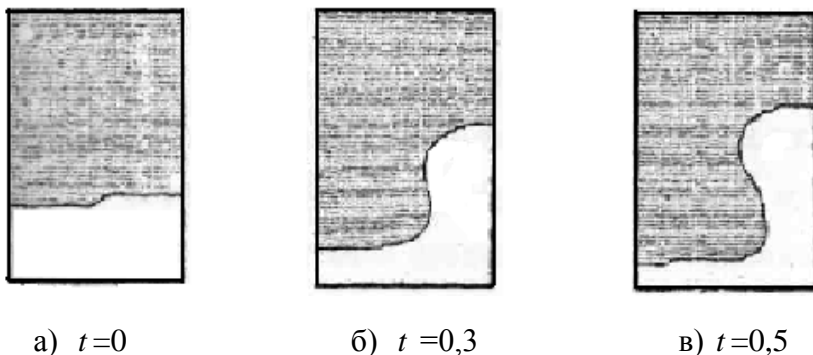
а –  $\bar{t} = 0$ , б –  $\bar{t} = 0,6$ , в –  $\bar{t} = 1,0$

$$\mu_1 = 2,6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_1 = 2,6 \text{ г/см}^3, \theta = M = 1,2$$

Рисунок 23 – Положение граница раздела жидкостей для трех моментов безразмерного времени

На рисунках 23 а, б хорошо видны фазы развития нелинейной стадии тейлоровской неустойчивости, характеризующие изменение с течением времени формы границы раздела слоев жидкости. Часть легкой жидкости, заполняющая нижний слой, внедряясь в тяжелую (верхний слой, рисунок 23 в), стремится к отрыву и полному всплытию.

На рисунках 24а - 24в показано всплытие легкой жидкости в тяжелой с условиями симметрии на вертикальных границах области.



$$\mu_{*2} = 10^{17} \text{ П}, \rho_{*2} = 2,16 \text{ г/см}^3, \mu_{*1} = 2,6 \cdot 10^{17} \text{ П}, \rho_{*1} = 2,6 \text{ г/см}^3$$

Рисунок 24 - Граница раздела слоев при всплывании легкой жидкости в тяжелой для трех моментов безразмерного времени при условии симметрии на вертикальных границах области

Как видно из рисунков 22-24, численный метод и программные средства правильно описывают как физику явления (затухание внутренних волн, образование соляного купола), так и специфику течения с условиями симметрии на вертикальных границах области.

Отметим, что в работе [69] проводилось сопоставление расчетных данных с данными физических экспериментов, выполненных А.М. Сычевой-Михайловой на аномально-вязких жидкостях [56]. И хотя это сопоставление не совсем корректно, тем не менее, максимальное относительное отклонение рассчитанных и экспериментальных характеристик тейлоровской неустойчивости составило 15,83% и 18,3% [69]. Между рассчитанными и экспериментальными профилями куполов наблюдалось определенное сходство [69].

Кроме того, цикл расчетов показал, что в развитой фазе тейлоровской неустойчивости максимальное относительное биение плотности не превышает 12%, а относительный дисбаланс массы составляет не более 0,32%, что практически подтверждает дивергентность разностной схемы [69]. Было также установлено [69], что при измельчении сетки в случае разрыва вязкости ( $M \neq 1$ ) сходимость разностного решения к точному несколько хуже, чем при  $M = 1$ , но решение разностной задачи «достаточно быстро» выходит на предельный режим. Показано, что в развитой фазе, когда возможен отрыв всплывающей жидкости, желателен использование анализатора.

Подводя итоги практической проверки численного метода, можно сделать вывод о том, что он пригоден для расчета развитой фазы тейлоровской неустойчивости. К его недостаткам следует отнести значительное увеличение числа итераций при большом отношении динамических вязкостей слоев.

### 2.3 Численный метод II

Следующий этап разработки численных инструментов для исследования тейлоровской неустойчивости школы Ж. С. Ержанова представляет собой разработку дискретных моделей с использованием монотонных разностных схем и итерационных процессов, основанных на схеме расщепления по физическим процессам [70, 152, 160-163].

Рассмотрим плоскую начально - краевую задачу (2.14) - (2.21), в которой уравнение (2.19) для динамической вязкости заменено более общим уравнением и начальным условием:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \mu}{\partial x_2} = 0 \quad (2.83)$$

$$\mu^0(\bar{x}, 0) = \mu_0(\bar{x}), \quad 0 < n_1^* \leq \mu_0 \leq n_2^* < \infty, \quad n_1^*, n_2^* = const$$

Дифференциальной начально-краевой задаче (2.14) - (2.18), (2.83), (2.20), (2.21) поставим в соответствие разностную

начально-краевую задачу (2.31) - (2.33), (2.84), (2.85), (2.37), (2.38):

$$\rho_t^k + \sum_{i=1}^2 (b_i^+ \rho_{\bar{x}_i}^k + b_i^- \rho_{x_i}^k) = 0, \bar{x} \in \Omega_h^k, (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.84)$$

$$\rho^0(\bar{x}, 0) = \rho_0(\bar{x}), \quad 0 < m_1 \leq \rho_0(\bar{x}) \leq m_2 < \infty$$

$$\mu_t^k + \sum_{i=1}^2 (b_i^+ \mu_{\bar{x}_i}^k + b_i^- \mu_{x_i}^k) = 0, \bar{x} \in \Omega_h^k, (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.85)$$

$$\mu^0(\bar{x}, 0) = \mu_0(\bar{x}), \quad 0 < n_1^* \leq \mu_0 \leq n_2^* < \infty, \quad n_1^*, n_2^* = const,$$

$$b_i^+ = \frac{1}{2}(v_{hi}^k + |v_{hi}^k|) \geq 0, \quad b_i^- = \frac{1}{2}(v_{hi}^k - |v_{hi}^k|) \leq 0.$$

Разностные сетки, сеточные функции и т.д. определяются также, как и в разностной начально-краевой задаче (2.31) - (2.38). Уравнения для плотности и динамической вязкости аппроксимированы, соответственно, консервативными разностными схемами (2.84), (2.85) против потока донорной ячейки [160, 162], которые устойчивы и монотонны (выполняется принцип максимума), а также обладают свойствами транспортности при:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sum_{i=1}^2 \max |v_{hi}^k|} \quad (2.86)$$

Условие (2.86) не обременительно при численных расчетах, поскольку компоненты скорости малы и  $\Delta t$  порядка  $h$ . Схемы (2.84), (2.85) имеют порядок аппроксимации  $O(\Delta t + h)$ , а при  $\rho_*, \mu_* = const - O(\Delta t + h^2)$ . Они дают «удивительное» согласие результатов расчета и экспериментальных данных [160, 162]. Данные схемы намного точнее описывают реальные течения в

отличие от многих схем с повышенным порядком аппроксимации. Здесь уместно привести выказывание из работы [162, с.75]: «При недостаточной гладкости решения формальное повышение точности схемы может привести к увеличению фактической погрешности и искажению качественных черт приближенного решения». В нашем случае терпят разрыв начальные условия. Кроме того, разностные схемы (2.84), (2.85) обладают свойствами позитивности (при условии (2.86)), которое заключается в том, что разностные решения  $\rho_h^k, \mu_h^k$  уравнений (2.84), (2.85) всегда неотрицательны, если неотрицательны начальные и граничные условия [160, 162]. Все это побудило нас в первом приближении для уравнений переноса  $\rho, \mu$  ограничиться разностными схемами (2.84), (2.85). Из принципа максимума для разностных уравнений (2.84), (2.85) следуют оценки для  $\rho_h^k, \mu_h^k$  [162]:

$$0 < m_1 \leq \rho_h^k \leq m_2, 0 < n_1 \leq \mu_h^k \leq n_2 \quad (2.87)$$

Кроме того, системы разностных уравнений (2.84), (2.85) при заданной скорости однозначно разрешимы, что следует из принципа максимума [162]. Величины  $v_1^k, v_2^k$  в целочисленных узлах сетки и значения вязкости и плотности в дробных узлах проводятся с помощью линейной интерполяции.

Для решения разностной краевой задачи (2.31) - (2.33) с граничным условием (2.38) рассмотрим итерационный метод, основанный на схеме расщепления по физическим процессам [70, 161-163]:

1.  $\frac{\tilde{\bar{v}} - \bar{v}^n}{\tau} = -A(\mu^k)\tilde{\bar{v}} - \bar{\nabla}_h p^n + \bar{f};$
2.  $\Delta_h(\delta p) = \frac{\bar{\nabla}_h \cdot \tilde{\bar{v}}}{\tau}$ , где  $\delta p = p^{n+1} - p^n;$  (2.88)
3.  $\frac{\bar{v}^{n+1} - \tilde{\bar{v}}}{\tau} = -\bar{\nabla}_h(\delta p), (\bar{\nabla}_h \cdot \bar{v}^{n+1} = 0).$

Здесь  $\tau$  - итерационный параметр,  $n$  – номер итерации. На первом этапе перенос количества движения (импульса единицы массы) происходит за счет конвективного переноса (для ползущих течений Стокса конвективным переносом можно пренебречь по сравнению с диффузией), диффузии и объемных сил. Полученное таким образом промежуточное поле скоростей  $\tilde{\vec{v}}$ , вообще говоря, не удовлетворяет условию несжимаемости ( $\vec{\nabla}_h \cdot \tilde{\vec{v}} = 0$ ).

На втором этапе по найденному промежуточному полю скорости  $\tilde{\vec{v}}$  с учетом соленидальности вектора скорости  $\vec{v}^{n+1}$  ( $\vec{\nabla}_h \cdot \vec{v}^{n+1} = 0$ ) определяется поправка на давление  $\delta p$ .

На третьем этапе перенос осуществляется за счет приращения давления  $\delta p$  (конвективный перенос и диффузия отсутствуют).

Отметим, что второе уравнение (2.88) получается путем взятия разностного оператора дивергенции от обеих частей третьего равенства (2.88) с учетом условия соленидальности ( $\vec{\nabla}_h \cdot \vec{v}^{n+1} = 0$ ) вектора скорости  $\vec{v}^{n+1}$ .

Таким образом, по известным в начальный (или предыдущий) момент «времени» распределениям скорости, давления и объемной силы из первого уравнения (2.88) определяется промежуточное поле скорости, которое позволяет вычислить правую часть второго уравнения (2.88). Затем разрешается задача Неймана для уравнения Пуассона для приращения давления. После этого подправляется окончательное поле скорости. Итерационный процесс повторяется до выполнения некоторого критерия установления, например, до выполнения условия

$$\max \left\{ \left| v_1^{n+1} - v_1^n \right| + \left| v_2^{n+1} - v_2^n \right| + \left\| v_3^{n+1} - v_3^n \right\| \right\} \leq \varepsilon, \quad x \in \Omega_h^k,$$

где  $\varepsilon$  - достаточно малое число.

Краевое условие для приращения давления в случае условия прилипания на твердой стенке получается однородным для нормальной производной:

$$\left. \frac{\partial(\delta p)}{\partial n} \right|_{\text{стенка}} = 0 \quad (2.89)$$

Это следует из граничного условия для вектора скорости на твердой стенке, уравнения несжимаемости, и третьего уравнения (2.88), записанных в узлах сдвинутых сеток, прилегающих к твердой стенке. Для других видов граничных условий правая часть в граничном условии Неймана (2.89) вычисляется, например, по методике, предложенной в [161].

Задача Неймана для уравнения Пуассона для приращения давления разрешается каким-либо прямым или итерационным методом [142-145]. Мы остановились на итерационном методе верхней релаксации. Обратим внимание на то, что задача Неймана для уравнения Пуассона решается не для давления, а для приращения давления, что позволяет избавиться от жесткого ограничения на шаг по  $\tau$  и ускоряет скорость итерационного процесса [161].

Предложенная дискретная модель устойчива при выполнении условия (2.86). Доказательство аналогично тому, как это сделано для первой дискретной модели (см. п.2.2.2). Сходимость итерационного метода (2.88) следует из результатов работ [70, 161, 163].

Для более точного прослеживания эволюции поверхности раздела сред, без явного выделения на сетке ее фронта, применяют «маркеры» и дифференциальные анализаторы [154-157]. Танирбергеновым А.Г. показано, что применение различных анализаторов не вносит существенных изменений в положение границы раздела сред. Это связано с малой скоростью всплывания соляного диапира и монотонности разностных схем для плотности и динамической вязкости [157]. К сказанному следует добавить, что сама модель вязкой несжимаемой жидкости для описания соляного диапиризма в земной коре является приближенной. Поэтому расчеты формирования соляных диапиров этим методом в дальнейшем проводились без использования анализаторов.

На рисунках 25 а -25 б показано формирование соляных куполов, вторичных соляных куполов и соляной линзы,

полученные с помощью численного метода II. Как видно из рисунков 25 а - 25 б, численный метод правильно отражает симметрию течения и физику явления (образование вторичных соляных куполов и соляной линзы). Подобные структуры встречаются в земной коре [1, 2, 6-8].



а)  $t=0.5$



б)  $t=1.0$

$$\mu_1 = 10^{18} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}), \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad h_1 = 6000 \text{ м},$$

$$\mu_2 = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}), \quad \rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad h_2 = 3000 \text{ м}$$

Рисунок 25 - Профили соляных куполов в моменты безразмерного времени

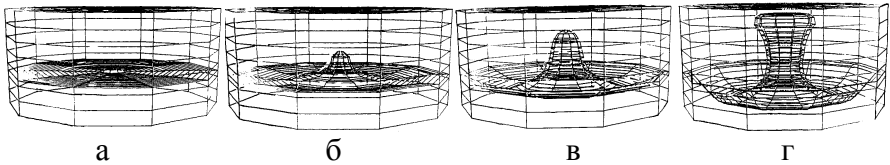
Расчеты показали, что при небольших разрывах динамических вязкостей слоев (до одного порядка) время расчета разностной краевой задачи (2.31) - (2.33) итерационным методом I и итерационным методом II примерно одинаково. При более сильном разрыве время расчета вторым методом существенно меньше. Поэтому предпочтение отдано итерационному методу II, базирующемуся на схеме расщепления по физическим процессам. Нетрудно видеть, что предложенные здесь плоские дискретные модели в естественных переменных

$(\vec{v}, p)$  без особого труда переносятся на трехмерный случай. Об этом будет сказано ниже.

## 2.4 Трехмерная задача

Для расчета осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости можно использовать схему расщепления, предложенную в [161]. Подобная схема расчета была переработана и модифицирована в [70] для численного моделирования формирования соляных куполов в земной коре. Отметим, что введением функции тока для осесимметричных течений удастся рассчитать приращение давления на втором этапе схемы расщепления явным образом, т.е не решать задачу Неймана для приращения давления [70].

На рисунке 26, взятом из работы [70], показано осесимметричное формирование соляного купола. Из рисунка 26 г видно, что в осесимметричном случае купол, вплоть до достижения верхней стенки, принимает столбообразную форму. При этом поперечный размер его ствола примерно равен мощности каменной соли.



$$\mu_1 = 5 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_1 = 6000 \text{ м},$$

$$\mu_2 = 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_2 = 3000 \text{ м}, \quad R = 18000 \text{ м}.$$

$$a - \bar{t} = 0, \quad б - \bar{t} = 0,5, \quad в - \bar{t} = 0,7, \quad г - \bar{t} = 1,0$$

Рисунок 26 - Формирование осесимметричного соляного купола

Переход от двумерной задачи к трехмерной не представляет труда и носит чисто методический характер. Приведем

основные соотношения и результаты для трехмерной дискретной модели.

Разобьем цилиндр  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$  плоскостями:

$$\begin{aligned} x_1(i) &= ih; \quad x_2(j) = jh; \quad x_3(n) = nh; \quad h > 0; \quad t_k = k\Delta t; \\ N_1 h &= l_1; \quad N_2 h = l_2; \quad N_3 h = l_3; \quad N\Delta t = T; \\ 0 &\leq i \leq N_1; \quad 0 \leq j \leq N_2; \quad 0 \leq n \leq N_3; \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned}$$

где  $i, j, n, N_1, N_2, N_3, N$  - целые числа, а  $h, \Delta t$  - равномерные шаги сетки по пространственной и временной переменным соответственно.

Обозначим сечение цилиндра  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$  плоскостью  $t_k = k\Delta t$  через  $\bar{\Omega}^k$ , а  $\partial\Omega^k$  - его границу так, что  $\bar{\Omega}^k = \Omega^k \cup \partial\Omega^k$ . Пусть множество узлов внутри  $\bar{\Omega}^k$  есть  $\Omega_h^k$ , а  $\partial\Omega_h^k$  - множество узлов, лежащих на  $\partial\Omega^k$ . Введем следующие сетки:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_h^k &= \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, x_3 = nh, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, 0 \leq n \leq N_3 \right\}, \\ \bar{\Omega}_{1h}^k &= \left\{ \bar{x} : x_1 = \left(i - \frac{1}{2}\right)h, x_2 = jh, x_3 = nh, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, 0 \leq n \leq N_3 \right\}, \\ \bar{\Omega}_{2h}^k &= \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = \left(j - \frac{1}{2}\right)h, x_3 = nh, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, 0 \leq n \leq N_3 \right\}, \\ \bar{\Omega}_{3h}^k &= \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, x_3 = \left(n - \frac{1}{2}\right)h, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, 0 \leq n \leq N_3 \right\}, \\ \bar{\Omega}_{4h}^k &= \left\{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, x_3 = nh, t = t_k, 0 \leq i \leq N_1 - 1, 0 \leq j \leq N_2 - 1, 0 \leq n \leq N_3 - 1 \right\}, \end{aligned}$$

и, соответственно, их границы  $\partial\Omega_h^k, \partial\Omega_{1h}^k, \partial\Omega_{2h}^k, \partial\Omega_{3h}^k, \partial\Omega_{4h}^k$ .

Сетка  $\bar{\Omega}_{1h}^k$  получается сдвигом сетки  $\bar{\Omega}_h^k$  на  $\frac{h}{2}$  влево вдоль оси  $Ox_1$ ,  $\bar{\Omega}_{2h}^k$  - влево вдоль оси  $Ox_2$ ,  $\bar{\Omega}_{3h}^k$  - сдвигом  $\bar{\Omega}_h^k$  на  $-\frac{h}{2}$  вниз.

Будем определять сеточные функции  $\rho_h^k, \mu_h^k, p_h^k, v_{1h}^k, v_{2h}^k, v_{3h}^k$ , соответственно на сетках  $\bar{\Omega}_h^k, \bar{\Omega}_{2h}^k, \bar{\Omega}_{4h}^k, \bar{\Omega}_{1h}^k, \bar{\Omega}_{2h}^k, \bar{\Omega}_{3h}^k$  (при  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), удовлетворяющих системе разностных уравнений (соответствующей исходной дифференциальной (2.1) – (2.9)):

$$\begin{aligned}
 & p_{\bar{x}_1}^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) - \left\{ 2 \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{1h x_1}^k \right)_{\bar{x}_1} + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{1h x_2}^k \right)_{\bar{x}_2} \right. \\
 & + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{1h x_3}^k \right)_{\bar{x}_3} + \left. \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{2h x_1}^k \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) \right)_{\bar{x}_2} \right. \\
 & \left. + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{3h x_1}^k \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_3} \right\} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_{1h}^k
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
 & p_{\bar{x}_2}^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) - \left\{ \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{1h x_2}^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 \right) \right)_{\bar{x}_1} + 2 \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{2h x_2}^k \right)_{\bar{x}_2} \right. \\
 & + \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{2h x_1}^k \right)_{\bar{x}_1} + \left. \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{2h x_3}^k \right)_{\bar{x}_3} \right. \\
 & \left. + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{3h x_2}^k \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 + \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_3} \right\} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_{2h}^k
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}
 & p_{\bar{x}_3}^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) - \left\{ \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{1h x_3}^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 - \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_1} \right. \\
 & + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{2h x_3}^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 - \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_2} + 2 \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{3h x_3}^k \right)_{\bar{x}_3} \\
 & \left. + \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{3h x_1}^k \right)_{\bar{x}_1} + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{3h x_2}^k \right)_{\bar{x}_2} \right\} = -\rho_h^k(x_1, x_2, x_3), \quad \bar{x} \in \Omega_{3h}^k
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

$$v_{1hx_1}^k \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) + v_{2hx_2}^k \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 \right) + v_{3hx_3}^k \left( x_1, x_2, x_3 - \frac{h}{2} \right) = 0, \bar{x} \in \bar{\Omega}_{4h}^k, \quad (2.93)$$

$$\sum_{\bar{x} \in \Omega_{4h}^k} p_h^k(x_1, x_2, x_3) h^3 = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.94)$$

$$\rho_{ht}^k + \sum_{s=1}^3 (b_i^+ \rho_{\bar{x}_i} + b_i^- \rho_{x_i}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_h^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.95)$$

$$\mu_{ht}^k + \sum_{i=1}^3 (b_i^+ \mu_{\bar{x}_i} + b_i^- \mu_{x_i}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_h^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.96)$$

где

$$b_i^+ = \frac{1}{2} (v_{hi}^k + |v_{hi}^k|) \geq 0, \quad b_i^- = \frac{1}{2} (v_{hi}^k - |v_{hi}^k|) \leq 0.$$

$$\begin{aligned} \rho_h^0(\bar{x}, 0) &= \rho_{0h}(\bar{x}), \quad \mu_h^0(\bar{x}, 0) = \mu_{0h}(\bar{x}), \\ 0 < m_1 &\leq \rho_{0h} \leq m_2, \quad 0 < n_1 \leq \mu_{0h} \leq n_2, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$v_{1h}^k \Big|_{\partial\Omega_{1h}^k} = v_{2h}^k \Big|_{\partial\Omega_{2h}^k} = v_{3h}^k \Big|_{\partial\Omega_{3h}^k} = 0 \quad (2.98)$$

Система уравнений (2.90) - (2.98) записана в безразмерном виде (см. соотношения (2.10) - (2.13)). Прежде всего заметим, что уравнение (2.90) записывается в узлах сетки  $\Omega_{1h}^k$ , уравнение (2.91) – в  $\Omega_{2h}^k$ , уравнение (2.92) – в  $\Omega_{3h}^k$ , уравнения (2.93), (2.94) – в  $\bar{\Omega}_{4h}^k$ , уравнения (2.95) - (2.97) - в  $\Omega_h^k$ . Граничные условия (2.98) для компонент скорости  $v_{1h}^k, v_{2h}^k, v_{3h}^k$  записываются на границах сдвинутых сеток  $\partial\Omega_{1h}^k, \partial\Omega_{2h}^k, \partial\Omega_{3h}^k$  соответственно.

Система разностных уравнений (2.90) – (2.94) на каждом шаге по времени аппроксимирует исходные уравнения (2.1) – (2.5) с точностью  $O(h^2)$  на достаточно гладком решении при точном задании  $\rho, \mu$ . Разностная схема записана в дивергентном виде. Граничные условия на твердой стенке

выполняются с точностью  $O(h^2)$ , что следует из условия (2.93) соленоидальности вектора скорости и граничного условия (2.98). Разностные операторы градиента и дивергенции сконструированы таким образом, что выполняются условия согласованной аппроксимации дифференциальных операторов градиентов и дивергенции [151, 152, 163]. Система уравнений (2.90) - (2.94) реализуется итерационным методом, основанном на идеях Яненко Н.Н. - Кобелькова Г.М. слабой сжимаемости жидкости (см.2.2.3), либо итерационным методом, основанным на схеме расщепления по физическим процессам (2.2.4). Все утверждения п.2.2.3 и п.2.2.4, имеющие место для плоской задачи, имеют место и для трехмерной задачи.

Уравнения для плотности (2.4) и динамической вязкости (2.5) аппроксимированы соответственно консервативными разностными схемами (2.95), (2.96), против потока донорной ячейки [160, 162], которые устойчивы и монотонны (выполняется принцип максимума), а также обладают свойствами транспортности при:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sum_{i=1}^3 \max |v_{hi}^k|} \quad (2.99)$$

Условие (2.99) не обременительно при численных расчетах, поскольку компоненты скорости малы и  $\Delta t$  порядка  $h$ .

В трехмерном случае вводятся сетки  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, x_3 = nh, 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2 - 1, 1 \leq n \leq N_3 - 1 \}, \\ \omega_2 &= \{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, x_3 = nh, 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2, 1 \leq n \leq N_3 - 1 \}, \\ \omega_3 &= \{ \bar{x} : x_1 = ih, x_2 = jh, x_3 = nh, 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1, 1 \leq n \leq N_3 \}, \end{aligned}$$

с помощью которых определяются скалярное произведение и нормы сеточных функций:

$$(u, v) \equiv (u, v)_{L_{2h}(\Omega_h)} \equiv h^3 \sum_{\bar{x} \in \Omega_h} u(\bar{x}) \cdot \bar{v}(x), \quad \|u\| \equiv \sqrt{(u, u)} \quad (2.100)$$

$$(u, v)_1 \equiv (u, v)_{W_{2h}^1(\Omega_h)} \equiv (u_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1} + (u_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_2} + (u_{\bar{x}_3}, v_{\bar{x}_3})_{\omega_3}, \quad \|u\|_1 \equiv \sqrt{(u, u)_1}, \quad (2.101)$$

$$\|u^k\|_\infty = \|u^k\|_{L_\infty} = \max |u_{ijl}^k|, \quad x_h \in \bar{\Omega}_h^k \quad (2.102)$$

Соотношения (2.42) - (2.52) имеют место и для трехмерного случая, только в (2.43) под  $D^2$  следует понимать величину:

$$D_2(\bar{u}) \equiv \|u\|_1^2 + \left( \|u_{1\bar{x}_1}\|_{\omega_1}^2 + \|u_{2\bar{x}_2}\|_{\omega_2}^2 + \|u_{3\bar{x}_3}\|_{\omega_3}^2 \right) + 2\left( (u_{1\bar{x}_2}, u_{2\bar{x}_1}) + (u_{1\bar{x}_3}, u_{3\bar{x}_1}) + (u_{2\bar{x}_3}, u_{3\bar{x}_2}) \right) \geq C \|u\|_1^2$$

Соотношение для негативной нормы формулируется следующим образом. Пусть  $\bar{\varphi}$  - сеточная функция, определенная в  $\bar{\Omega}_h$  и  $\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h} = 0$ , и пусть  $div_h \bar{\varphi} \equiv \varphi_{1x_1} + \varphi_{2x_2} + \varphi_{3x_3} \neq 0$  на  $\bar{\Omega}_{4h}$ . Тогда для любой сеточной функции  $q$  такой, что  $\sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{4h}} qh^3 = 0$ , справедливо неравенство [4,5]:

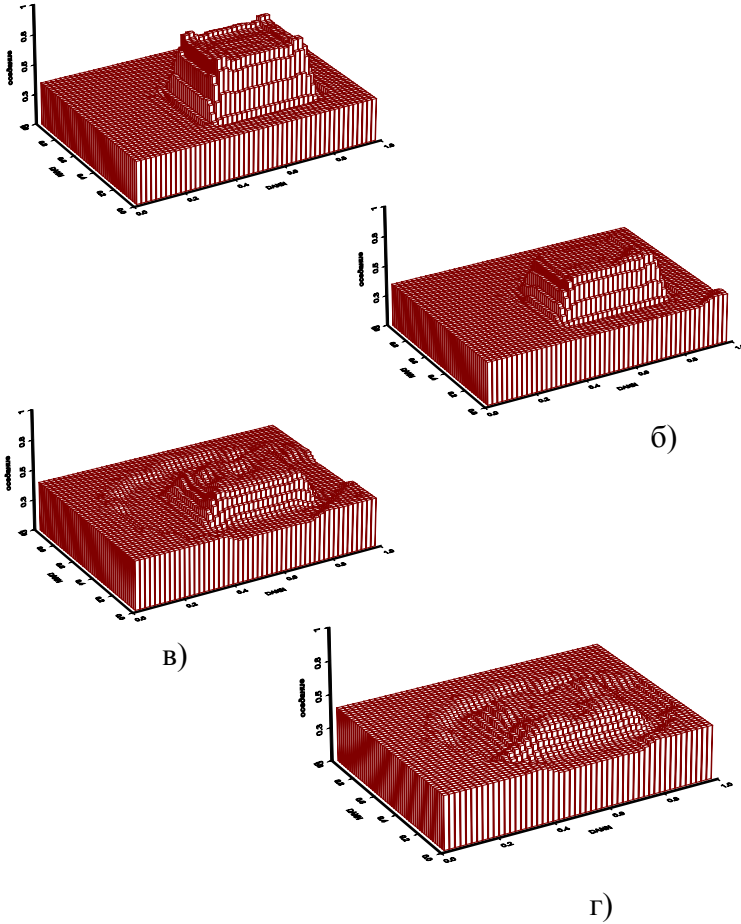
$$\|q\|_{L_{2h}(\bar{\Omega}_{4h})} \leq c \|q\|_* \leq c \cdot \sup_{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h}=0} |(q, div_h \bar{\varphi})_{\bar{\Omega}_{4h}}| = c \sup_{\bar{\varphi}|_{\partial\Omega_h}=0} \frac{(q, div_h \bar{\varphi})_{\bar{\Omega}_{4h}}}{\|\varphi\|_1} \quad (2.103)$$

Из принципа максимума для разностных уравнений (2.95), (2.96) и техники, изложенной в п.2. 2, 2, следует оценка:

$$\|\bar{v}^k\|_1 + \|p^k\|_{L_2(\Omega_h^k)} + \|\mu^k\|_\infty + \|\rho^k\|_\infty \leq c_1 \|\rho_0\|_\infty + c_2 \|\mu_0\|_\infty, \quad (2.104)$$

которая выражает устойчивость разностной начально-краевой задачи. Из нее следует теорема существования и единственности разностного решения для трехмерного случая.

Для проверки численного метода расчета трехмерных течений и отладки программ было проведено тестирование.



а) -  $\bar{t} = 0$ , б) -  $\bar{t} = 0,1$ , в) -  $\bar{t} = 0,3$ , г) -  $\bar{t} = 0,5$

$$\mu_{*2} = 2,6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_{*2} = 2,6 \text{ г/см}^3, \mu_{*1} = 1,3 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_{*1} = 2,16 \text{ г/см}^3$$

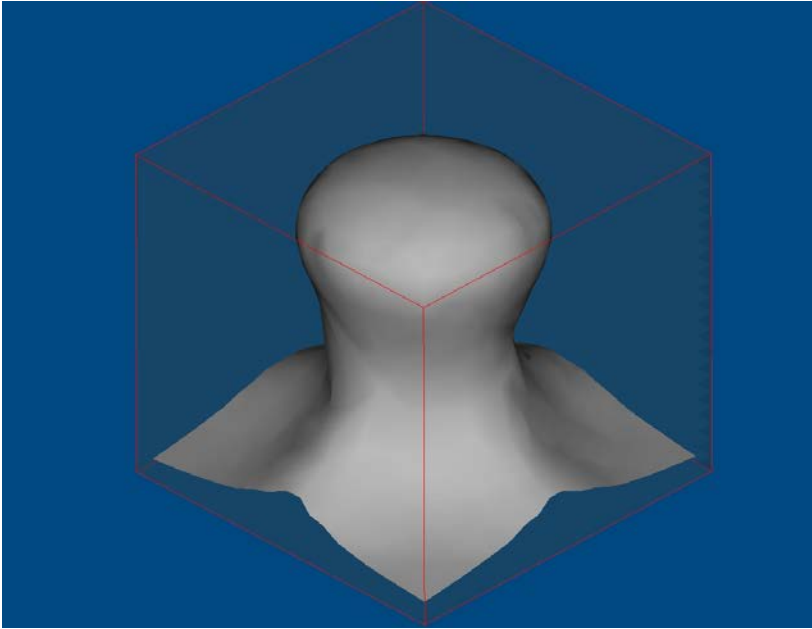
Рисунок 27 - Оседание тяжелой жидкости в легкую

В качестве первого теста рассмотрена задача опускания тяжелой жидкости в легкой с условиями прилипания на горизонтальных стенках и условиями скольжения на боковых стенках. В качестве второго теста рассмотрена задача всплывания легкой жидкости в тяжелой с аналогичными граничными условиями.

На рисунке 27 приведены тестовые расчеты оседания тяжелой жидкости в легкой с образованием внутренних волн. В пространственной модели первоначальное возмущение тоже задавалось в виде пьедестала, но уже объемного, смещенного от центральной части области (рисунок 27а)). На рисунках 27б) - 27г) отчетливо видно, что оседание тяжелой жидкости в легкой происходит не симметричным образом. На рисунках 27в), 27г) при  $\bar{t} = 0,3$ ,  $\bar{t} = 0,5$  внутренние волны между границами раздела слоев достигли правой и передней части боковых стенок, в то время как до левой и задней боковых стенок они не дошли. В силу условий скольжения на боковых стенках, объемный пьедестал практически «проваливается» в тяжелую жидкость, повышая уровень последней (сравните рисунки 27а) и 27г)).

На рисунке 28 изображен сформировавшийся в момент времени  $\bar{t} = 0,5$  динамический купол при условии инверсии плотностей горных пород. Подобные соляные структуры встречаются в натуральных наблюдениях, а также при лабораторном моделировании и численных расчетах других авторов [1, 2, 53-57, 86, 87, 92].

Таким образом, численный метод правильно отражает как трехмерную физику явления, так и симметрию и антисимметрию течения, а программные средства адекватно описывают численный метод.



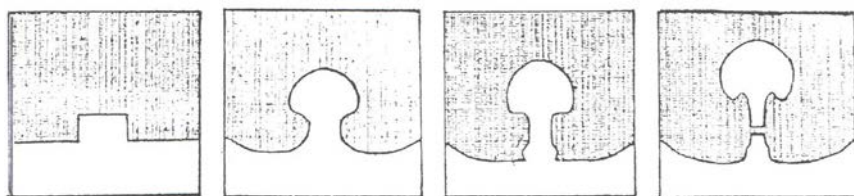
$$\mu_{*2} = 10^{18} \text{ П}, \rho_{*2} = 2,16 \text{ г/см}^3, \mu_{*1} = 5 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_{*1} = 2,6 \text{ г/см}^3, \bar{t} = 0,5$$

Рисунок 28 - Сформировавшийся соляной купол

### 3 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНЫХ ДИАПИРОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ

#### 3.1 Механизм тейлоровской неустойчивости

На рисунках 23а - 23в; 29а - 31г показана эволюция поверхности раздела при тейлоровской неустойчивости двумерного ползущего движения. Во всех вариантах, за исключением одного, плотность тяжелой жидкости выбиралась равной  $\rho_1 = 2,6 \text{ г/см}^3$ , а плотность легкой  $\rho_2 = 2,2 \text{ г/см}^3$ . Динамические вязкости изменялись в пределах  $\mu_1 = 10^{17} \div 10^{20} \text{ П}$ ,  $\mu_2 = 10^{17} \div 10^{19} \text{ П}$ , а шаг пространственно-временной сетки изменялся от 0,005 до 0,05.



а)  $t=0$ .

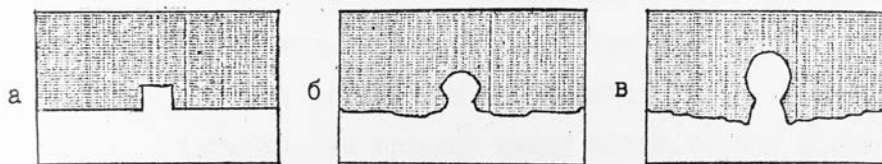
б)  $t=0.375$

в)  $t=0.475$

г)  $t=0.575$

$$\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

Рисунок 29 – Эволюция поверхности раздела



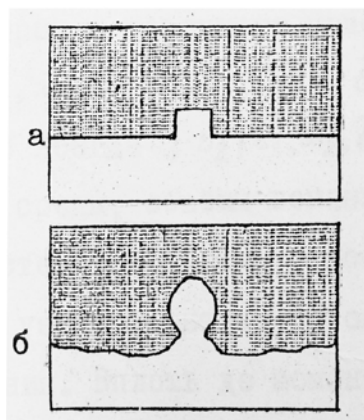
а)  $t=0$ .

б)  $t=0.1$

в)  $t=0.3$

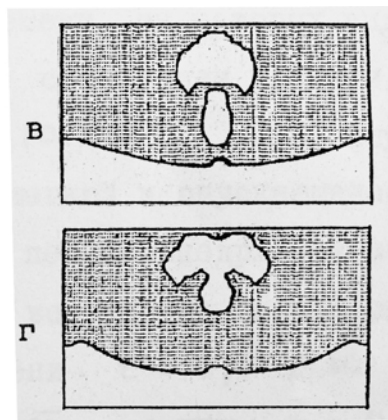
$$\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 10$$

Рисунок 30 – Эволюция поверхности раздела



а)  $t=0$ .

б)  $t=0.2$



в)  $t=0.4$

г)  $t=0.5$

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{19} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

Рисунок 31– Эволюция поверхности раздела

Как показали расчеты, характерным для тейлоровской неустойчивости было то, что движение легкой и тяжелой жидкости происходило отдельными ячейками. Так, например, на рисунке 23 а-23 в в каждый момент времени изображена одна ячейка, на рисунке 38в-38д- две ячейки, на рисунке 46б-46г- три, а на рисунке 24а, б - половина ячейки (другая половина симметрична относительно правой вертикальной оси симметрии), в пределах которой движение происходит следующим образом. При опускании тяжелой жидкости в легкую, последняя в нижней части ячейки отжимается в правую сторону, что способствует всплыванию легкой жидкости. Так как среда несжимаема, то более легкая жидкость в правой средней части ячейки вытесняет более тяжелую. Таким образом, движение тяжелой жидкости в пределах ячейки вызывает поднятие легкой, которая поднимаясь, способствует перемещению новых порций тяжелой жидкости вниз. Движение в ячейках по форме напоминает конвективные ячейки Бенара при тепловой стационарной конвекции, возникающей при подогреве снизу однородной жидкости. Движение каждой

жидкой частицы происходит непрерывно и по круговым замкнутым траекториям. Отметим, что для жидкостей, находящихся в обстановке инверсии плотностей с резкой границей раздела, движение не является круговым. Легкая жидкость, поднимаясь вверху, там и остается, а тяжелая, опускаясь, замыкает ячейку снизу. Движение жидкости заканчивается, как только легкая жидкость поднимется наверх, и инверсия плотностей исчезнет.

Обратимся к рисункам 24 а-в, на которых показана эволюция границы раздела в случае условий симметрии течения на вертикальных границах области.

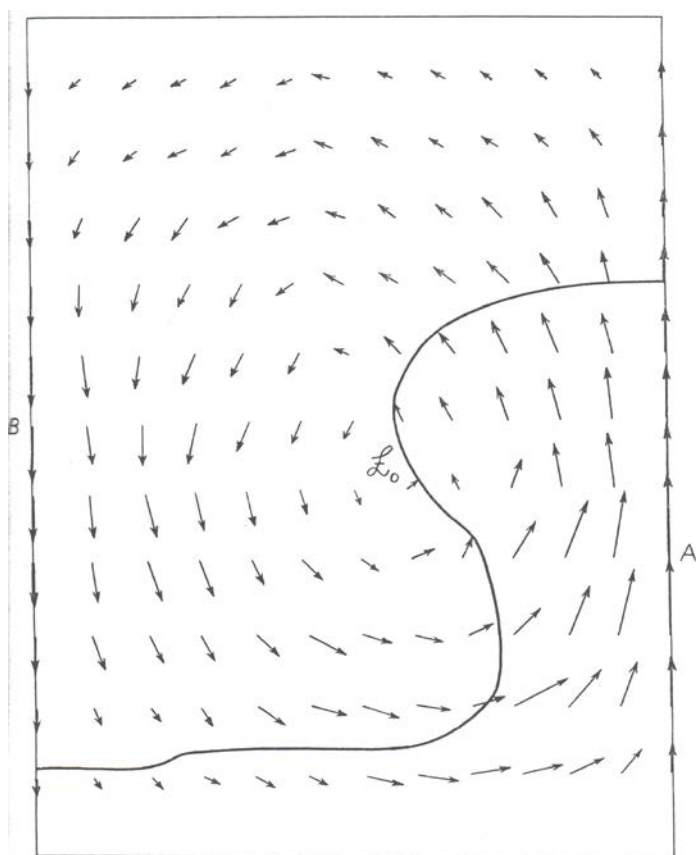
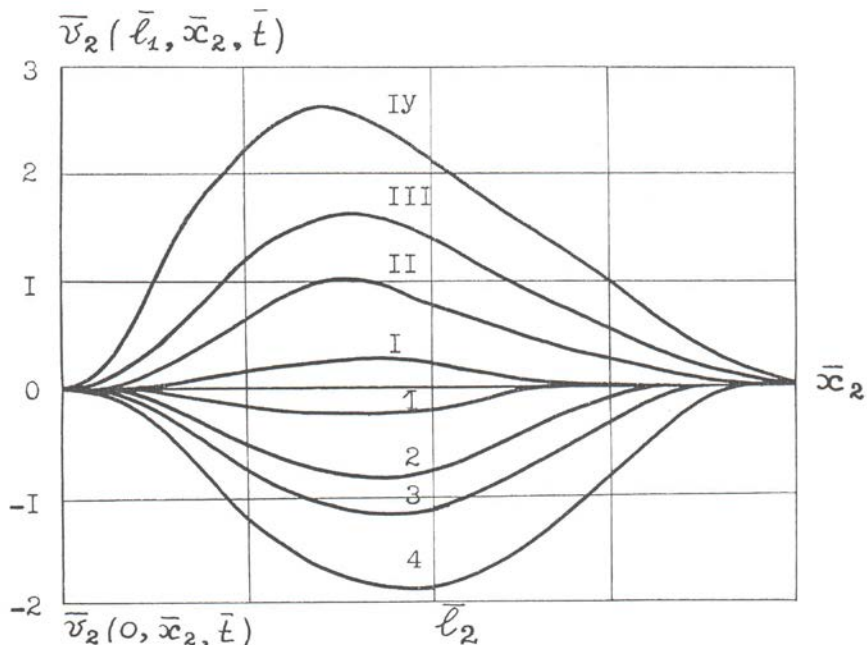


Рисунок 32- Поле скоростей для рисунка 24 в

Начальная граница раздела слоев имела пологую форму, причем жидкие объемы легкой и тяжелой жидкости примерно равны (рисунок 24а). На рисунке 24 б уже видна некоторая асимметрия, а именно: тяжелая жидкость внедряется в легкую более широким фронтом, а легкая в тяжелую - более узким. В дальнейшем в средней части всплывающей жидкости происходит утоньшение, а в верхней - расширение (рисунок 24 в).

На рисунке 32 в момент времени  $t = 0,5$  показано распределение поля скоростей, которое имеет циркуляционный характер вокруг центра  $L_0$ , смещенного в сторону всплывающей жидкости. Заметим, что интенсивность поля скоростей возрастает при удалении от центра  $L_0$  циркуляционной зоны к осям симметрии. При этом наибольшая скорость всплывания наблюдается на оси симметрии в точке  $A$ , примерно, на границе между расширяющейся и сужающейся зонами легкой жидкости, а наибольшая скорость погружения - в точке  $B$ , тоже на оси симметрии, причем  $|\vec{v}_{2A}| > |\vec{v}_{2B}|$ . На рисунке 33 показаны графики распределения скоростей на осях симметрии в различные моменты времени, из которых видно, что  $|\vec{v}_2(l_1, x_2, t)|, |\vec{v}_2(0, x_2, t)|$  с течением времени возрастают, но всегда  $|\vec{v}_2(l_1, x_2, t)| > |\vec{v}_2(0, x_2, t)|$ . В силу несжимаемости среды, объемы всплывающей легкой и опускающейся тяжелой жидкости одинаковы, а поскольку первая внедряется во вторую более узким фронтом, то скорость всплывания больше скорости погружения. Вплоть до момента времени  $t = 0,3$   $\max v_2(l_1, x_2, t)$  смещается в сторону возрастания  $x_2$ , а при  $t = 0,5$  немного смещается в сторону убывания  $x_2$ , что связано с перестройкой фронта всплывающей легкой жидкости (рисунок 24 в).



I -  $t=0$ , II -  $t=0.2$ , III -  $t=0.3$ , IV -  $t=0.5$

Рисунок 33- Графики распределения скоростей на осях симметрии

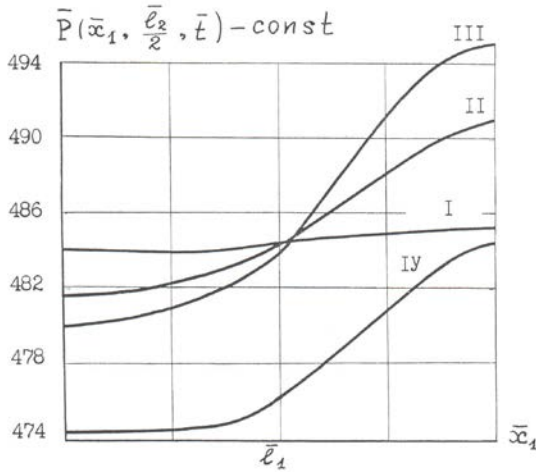
Расчеты показали, что с течением времени распределение давления близко к гидростатическому и с течением времени слабо изменяется, за исключением вертикальной зоны ( $x_2 \approx l_2$ ), где оно мало по абсолютной величине. На рисунке 34 приведены графики распределения давления в горизонтальном сечении  $x_2 = 0,5l_2$  в моменты времени  $t = 0; 0,2; 0,3; 0,5$ . При  $t = 0$ , когда граница раздела слоев слабо искривлена, давление распределено почти гидростатически и затем повышается при

$t = 0,2; 0,3$  в области, прилегающей к оси симметрии  $x_1 = l_1$ , достигая в ней максимума, а при  $t = 0,5$  относительно резко падает. В другой области, прилегающей к оси симметрии  $x_1 = 0$ ,

с течением времени давление медленно убывает. Заметим, что такое нарастание давления с течением времени и относительно быстрое убывание согласуется с механизмом ограниченного конвективного движения жидкости в ячейке. Действительно, до того момента времени пока граница раздела жидких слоев не пересекла сечение  $x_2 = 0,5l_2$ , всплывающая легкая жидкость, вытесняя тяжелую, создает в ней область повышенного давления (в непосредственной близости к границе раздела), которая способствует перемещению тяжелой жидкости вверх. В свою очередь, в левой части ячейки тяжелая жидкость, вытесняя легкую, удаляет фронт повышенного давления от сечения  $x_2 = 0,5l_2$ , поэтому давление в этом сечении с течением времени убывает. В момент времени  $t = 0,5$ , когда граница раздела пересекла сечение  $x_2 = 0,5l_2$ , и высота тяжелой жидкости над всплывающей легкой уменьшилась более, чем в два раза (по сравнению с высотой на рисунке 24а), давление относительно быстро падает, так как распределение его близко к гидростатическому. На рисунке 24 в хорошо видно начало образования шейки и плоской капли в верхней части всплывающей жидкости. При этом скорость движения верхнего фронта округлого выступа несколько замедляется. Давление в нижней левой части ячейки ( $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ ) всегда больше давления в нижней центральной части ячейки ( $x_1 \leq l_1, x_2 \leq 0$ ), поэтому частицы легкой жидкости из периферии ячейки мигрируют в ее центральную часть.

На рисунке 30 а - 30 в показана эволюция поверхности раздела при тейлоровской неустойчивости для двухслойной среды, заключенной в жесткую матрицу. Первоначальная граница раздела задавалась в форме пьедестала с высотой  $h_0$  и шириной  $r_0$ . Отношение вязкости слоев было выбрано  $M = 10$  при вязкости нижнего слоя  $\mu_2 = 2,6 \cdot 10^{18} \text{ П}$ . На рисунке 30 б в центральной его части видно формирование фронта всплывающей жидкости с образованием пологого прогиба нижнего слоя. Дальнейшее развитие неустойчивости (рисунок

30 в) сопровождается образованием выступа округлой формы, который вытягивается, образуя мощный ствол, связывающий его с питающим слоем.



I -  $t=0$ , II -  $t=0.2$ , III -  $0.3$ , IV -  $0.5$

Рисунок 34-Графики распределения давления в сечении  $x_2 = 0.5l_2$

Глубина внедрения тяжелой жидкости с течением времени увеличивается, причем максимум ее внедрения смещается в центральную часть ячейки. В левой части рисунка 35 (правая получается зеркальным отражением относительно вертикальной оси  $S - S$ ) показано распределение поля скоростей для рисунка 30 в. Здесь, как и на рисунке 32, наблюдается относительно интенсивное циркуляционное движение вязкой жидкости вокруг центра  $L_2$ , находящегося над максимальным краевым прогибом и смещенного в сторону оси симметрии  $S - S$ . Это связано с тем, что легкая жидкость всплывает узким фронтом, а тяжелая внедряется в легкую широким фронтом. Поэтому скорость всплывания больше скорости погружения.

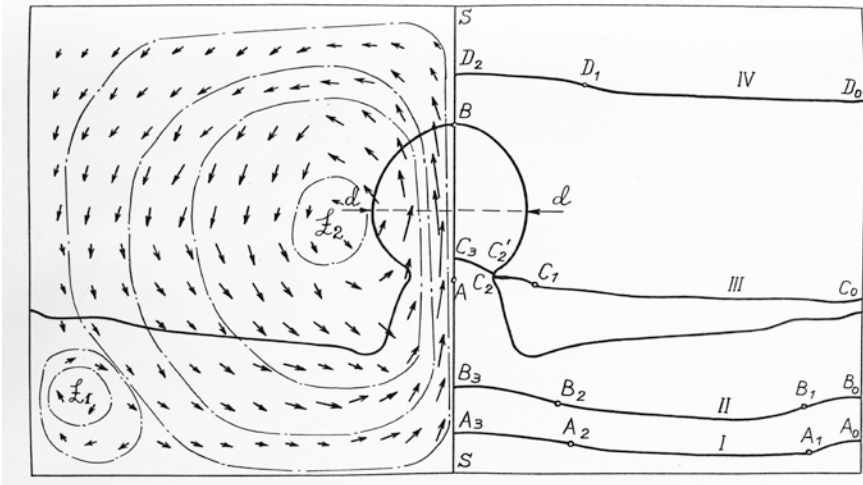


Рисунок 35 - Распределение поля скоростей и изобар для рисунка 30 в

На рисунке 35 видно также наличие малой застойной зоны  $L_1$ , где циркуляция мала и направлена в противоположную сторону основному движению. Максимальная скорость всплытия наблюдается на границе округлой плоской капли и области утоньшения питающего ствола в точке  $A$ , которая лежит на оси симметрии  $S-S$ . На правой части рисунка 35 (левая получается зеркальным отражением относительно оси  $S-S$ ) изображены кривые изобар. Для изобар I, II, проходящих в нижнем слое, можно выделить три характерных участка. На участках  $A_0A_1, A_2A_3$  изобара выпукла вверх, а на участке  $A_1A_2$  - выпукла вниз. Так как градиент давления нормален к изобарам и направлен в сторону их выпуклости, то течение легкой жидкости будет происходить из зон вогнутости изобар в зоны их выпуклости. Это хорошо согласуется с левой частью рисунка 35. Для изобары III, проходящей через тяжелую и легкую жидкости, характерно то, что на участке  $C_0C_1$  она выпукла вниз, а на участках  $C_1C_2, C_2C_3$  - вверх и в точке  $C_2$  терпит разрыв (поскольку давление при переходе через границу раздела терпит

разрыв). Для изобары IV имеются два участка -  $D_0D_1$  (выпукла вниз),  $D_1D_2$  (выпукла вверх). Миграция частиц тяжелой жидкости в периферийной части ячейки происходит вниз, а в ее центральной части жидкие частицы легкой и тяжелой жидкостей поднимаются вверх.

### ***3.2 Зависимость основных характеристик от физических параметров среды***

В целях выяснения некоторых закономерностей основных характеристик тейлоровской неустойчивости от физических параметров среды была проведена серия расчетов. Геометрические размеры области, отношение мощностей слоев тяжелой и легкой жидкости, а также первоначальное пьедестальное возмущение поверхностей раздела были выбраны одинаковыми для всех вариантов (что видно, например, из рисунков 30а, 31а, 36а, 37а). Предварительно сделаем некоторые замечания.

Произведя расчет в безразмерных переменных и определив безразмерные характеристики течения с учетом геометрического подобия и соответствующих соотношений, перейдем в область размерных величин. В безразмерных переменных определяющими параметрами тейлоровской неустойчивости при малых числах Рейнольдса являются отношение плотностей  $\theta$ , динамических вязкостей  $M$  и отношение числа Фруда к числу Рейнольдса  $\alpha$  (2.13). Изменяя, например, характерный размер  $l_*$  и соответствующим образом характерную динамическую вязкость, так, чтобы величина  $\alpha$  не изменялась, получим уже другой масштаб скорости и характерного времени. Поэтому одному расчету в области размерных переменных соответствует бесчисленное множество (соответствующих) расчетов в области размерных переменных.

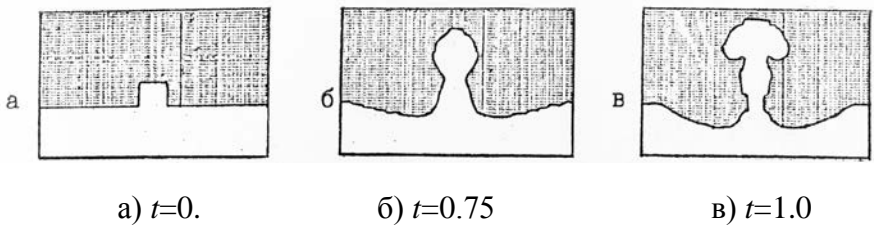
Для одиночного купола, изображенного на рисунке 30 в момент времени  $t$ , возможны, например, три варианта основных размерных характеристик тейлоровской неустойчивости:

$$a) \begin{cases} h_1 = 2 \text{ км}, h_2 = 1 \text{ км}, \mu_1 = 5,2 \cdot 10^{19} \text{ П}, M = 10, h_0 = 0,5 \text{ км}, r_0 = 0,75 \text{ км}, \\ \rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, t = 0,75 \text{ млн. лет}, v_{\max} = 0,21 \text{ см/год}, \\ v_k = 0,192 \text{ см/год}, h_k = 1,38 \text{ км}, d = 1,0 \text{ км}, h_m = 0,375 \text{ км} \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} h_1 = 4,5 \text{ км}, h_2 = 1,5 \text{ км}, \mu_1 = 9,55 \cdot 10^{19} \text{ П}, M = 10, h_0 = 0,75 \text{ км}, r_0 = 1,125 \text{ км}, \\ \rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, t = 0,904 \text{ млн. лет}, v_{\max} = 0,256 \text{ см/год}, \\ v_k = 0,232 \text{ см/год}, h_k = 2,07 \text{ км}, d = 1,5 \text{ км}, h_m = 0,563 \text{ км} \end{cases}$$

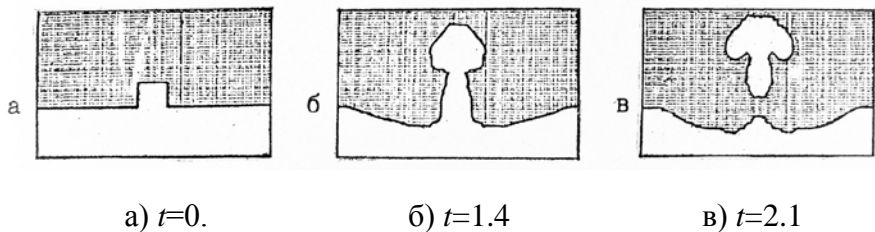
$$в) \begin{cases} h_1 = 4,0 \text{ м}, h_2 = 2,0 \text{ км}, \mu_1 = 1,47 \cdot 10^{20} \text{ П}, M = 10, h_0 = 1,0 \text{ км}, r_0 = 1,5 \text{ км}, \\ \rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, t = 1,056 \text{ млн. лет}, v_{\max} = 0,296 \text{ см/год}, \\ v_k = 0,273 \text{ см/год}, h_k = 2,76 \text{ км}, d = 2,0 \text{ км}, h_m = 0,75 \text{ км} \end{cases}$$

Здесь  $v_k$  - скорость вершины купола,  $t$  - время формирования,  $h_k$  - высота,  $d_k$  - средний поперечный размер шапки (крыльев) купола,  $v_{\max}$  - максимальная скорость всплывания,  $h_m$  - максимальная глубина погружения тяжелой жидкости. Подобные размеры соляных структур и масштабы скоростей их роста встречаются в природе [1-8].



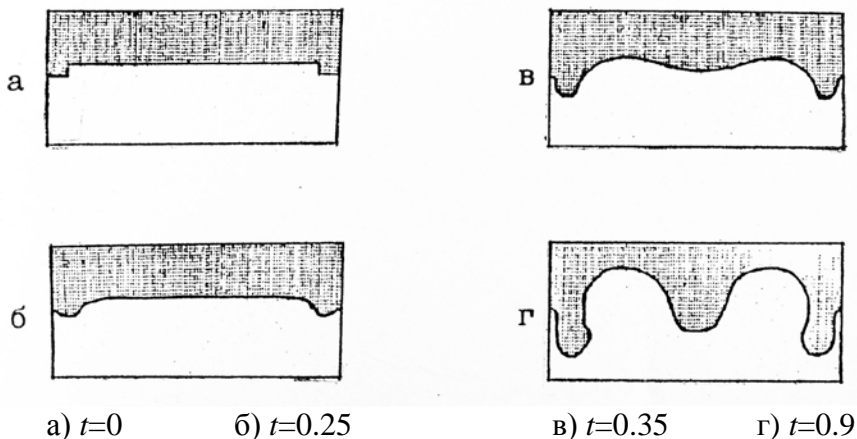
$$\mu_1 = 2,6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \rho_1 = 2,6 \text{ г/см}^3, \theta = 1,2, M = 1$$

Рисунок 36– Эволюция поверхности раздела



$$\mu_1 = 5.2 \cdot 10^{17} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

Рисунок 37– Эволюция поверхности раздела

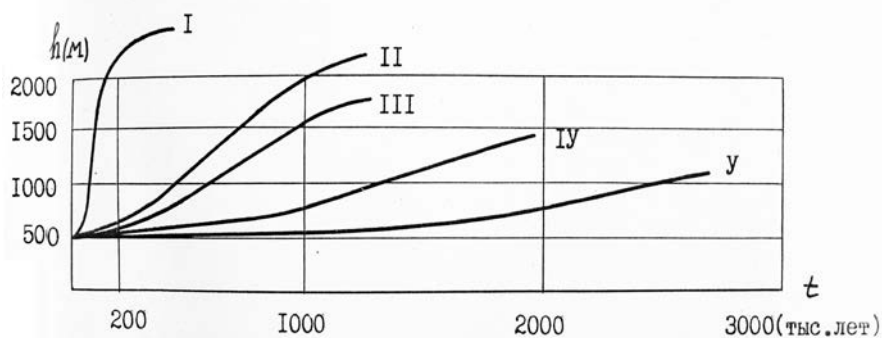


$$\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

Рисунок 38– Выделение двух доминантных длин волн и образование двойных выступов

Обратимся к рисункам 39, 40, на которых изображены графики зависимости высоты и скорости всплывания (вершины) легкой жидкости, как функции времени при различных соотношениях физических параметров жидких слоев. Мощность

верхнего слоя  $h_1 = 2$ км, мощность нижнего -  $h_2 = 1$ км. Первоначальное пьедестальное возмущение поверхности раздела имело высоту  $h_0 = 500$ м и ширину  $r_0 = 750$ м. Графики строились до момента отрыва легкой жидкости от основного слоя. Из приведенных рисунков видно, что в начале происходит относительно медленное нарастание высоты (кривые II-Y) и скорости внедрения легкой жидкости в тяжелую (кривые II-Y), которое занимает достаточно большой интервал времени (до 1млн.400 тыс.лет). Затем процесс развития неустойчивости ускоряется и вновь несколько замедляется, что отчетливо видно для кривой I (рисунок 39), а величина  $v_B$  для кривой I (рисунок 40) падает.



$$\begin{aligned}
 I - \mu_1 &= 5.2 \cdot 10^{17} \text{ П}, M = 1, \theta = 1.2; & II - \mu_1 &= 5.2 \cdot 10^{18} \text{ П}, M = 1, \theta = 1.2; \\
 III - \mu_1 &= 5.2 \cdot 10^{19} \text{ П}, M = 10, \theta = 1.2; & IV - \mu_1 &= 5.2 \cdot 10^{19} \text{ П}, M = 1, \theta = 4; \\
 Y - \mu_1 &= 5.2 \cdot 10^{19} \text{ П}, M = 1, \theta = 1.2.
 \end{aligned}$$

Рисунок 39- Графики зависимости высоты внедрения соляного купола в осадочные породы при различных соотношениях физических параметров слоев

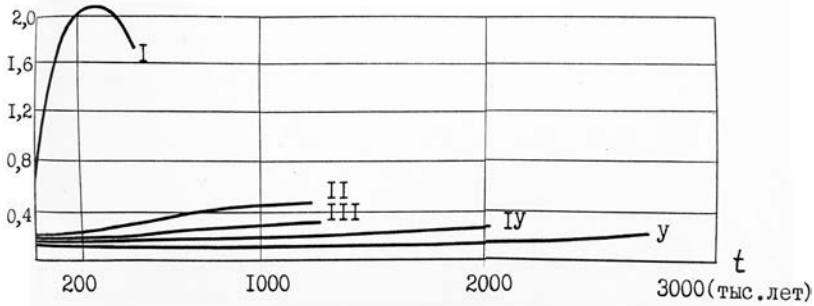
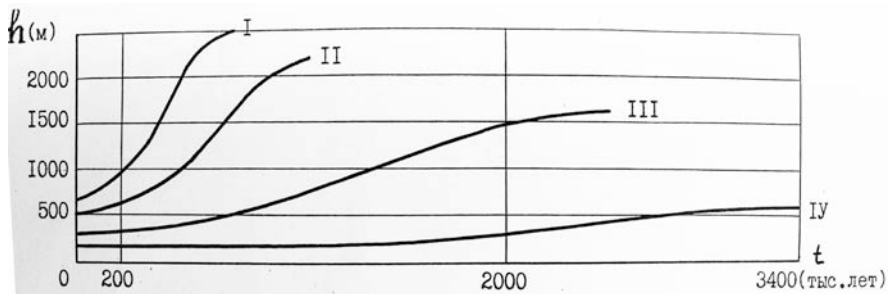


Рисунок 40- Графики зависимости скорости внедрения вершины соляного купола в осадочные породы при тех же соотношениях физических параметров, что и на рисунке 39

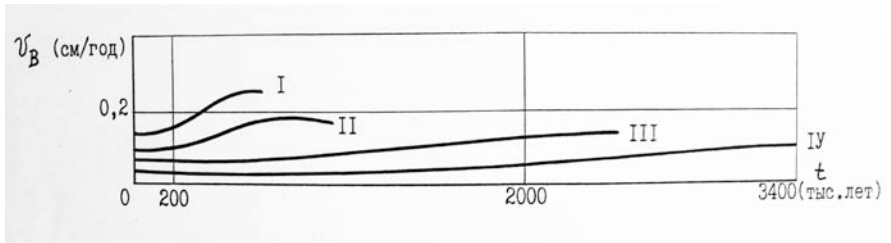


$$\mu_1 = 5.2 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

Рисунок 41- Графики зависимости высоты внедрения вершины соляного купола в осадочные породы от высоты первоначального пьедестального возмущения поверхности раздела слоев

Нижняя ветвь кривой I (рисунок 40) соответствует тому моменту времени, когда всплывающая масса легкой жидкости образует ствол, соединяющий ее с питающим слоем, который

вытягивается и быстро сужается в нижней части (рисунок 36в). Характер поведения  $h(t)$  таков: вначале кривая  $h(t)$  выпукла вниз, а затем выпукла вверх. Это, по-видимому, связано с качественным изменением фронта всплывающей легкой жидкости, что можно проследить по рисункам 30 а-в; 31 а, б; 36 а-в. Из приведенных расчетов следует, что поведение  $h(t), v_k(t)$  определяется как вязкостью верхнего слоя, так и вязкостью нижнего, а также отношением их плотностей. Если  $M = 1$ , то с увеличением вязкости нижнего слоя рост  $h(t), v_k(t)$  замедляется (кривые I, II, IV, V).



$$\mu_1 = 5.2 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

Рисунок 42- Графики зависимости скорости внедрения вершины соляного купола в осадочные породы от высоты первоначального пьедестального возмущения поверхности раздела слоев

Из сравнения кривых II, III и III, V следует, что с увеличением вязкости верхнего слоя величины  $h(t), v_k(t)$  уменьшаются, а с уменьшением вязкости нижнего слоя -возрастают. С увеличением отношения плотностей (кривые IV, V) процесс развития тейлоровской неустойчивости ускоряется.

На рисунках 41, 42 приведены графики зависимости от времени величин  $h(t), v_k(t)$  при  $h_1 = 2\text{км}; h_2 = 1\text{км}; r_0 = 750\text{м}$  и разной высоте  $h_0$  первоначального пьедестального возмущения поверхности раздела жидких слоев. Как видно из сопоставления I - IV, с уменьшением  $h_0$  процесс развития тейлоровской неустойчивости замедляется и требуется относительно длительное время для более интенсивного его протекания.

Приведенные выше соображения и проведенная серия расчетов [69, 70] по изучению закономерностей тейлоровской неустойчивости позволила установить:

1 Если увеличивать параметр  $M$ , характеризующий отношение динамических вязкостей слоев (динамической вязкости верхнего слоя к динамической вязкости нижнего слоя), то процесс развития гравитационной неустойчивости замедляется;

2 Если увеличивать вязкость слоев, оставляя  $M$  неизменным, то процесс развития гравитационной неустойчивости замедляется;

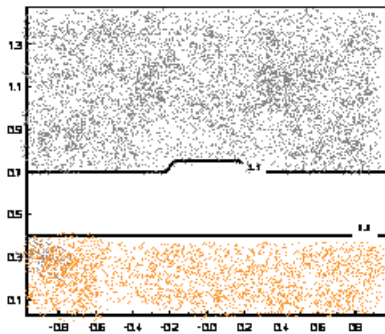
3 Увеличение мощности верхнего слоя способствует внедрению легкой жидкости в тяжелую более узкими «языками», а тяжелой в легкую – широким фронтом. Если увеличивать мощность соли, оставляя при этом мощность надсолевых пород неизменной, то поперечные размеры соляных куполов увеличиваются, а расстояния между куполами уменьшаются. Если увеличивать мощность надсолевых пород, оставляя при этом мощность соли неизменной, то поперечные размеры куполов уменьшаются, расстояния между куполами увеличиваются. Соляной купол растет быстрее в той среде, где имеются большие мощности соли и надсолевых пород;

4 С увеличением  $M$  купола приобретают шарообразную форму, а с уменьшением  $M$  - столбообразную.

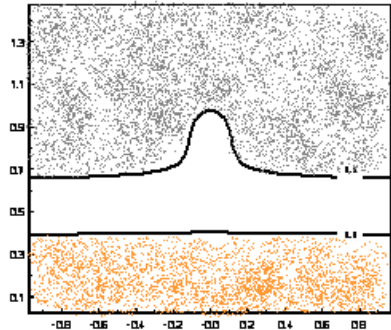
Таким образом, на процесс формирования соляных диапиров в земной коре существенное влияние имеют как физические, так и геометрические параметры среды.

С целью выяснения влияния подсолевого ложа на рост соляных куполов была проведена серия расчетов для

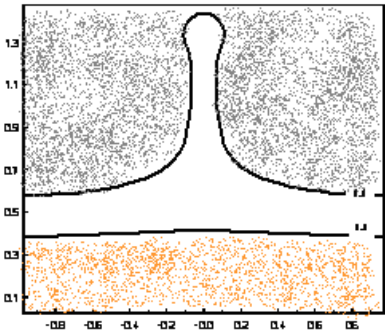
трехслойной среды [70], в которой каменная соль расположена между двумя более плотными породами (рисунок 43а-43г). Было установлено, что характер перемещения соли в трехслойной среде отличается от двухслойной, поскольку подошва каменной соли сцеплена с деформированным основанием, которая в процессе неустойчивости вовлекается в движение вверх по тем же каналам, что и соль, хотя плотность соли меньше плотности подсолевого слоя.



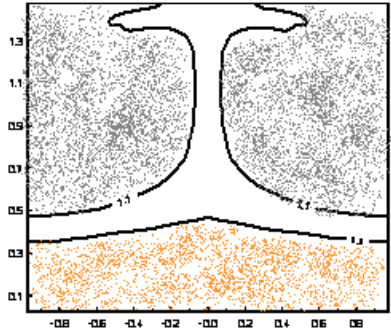
а)  $t=0$



б)  $t=0,2$



в)  $t=0,6$

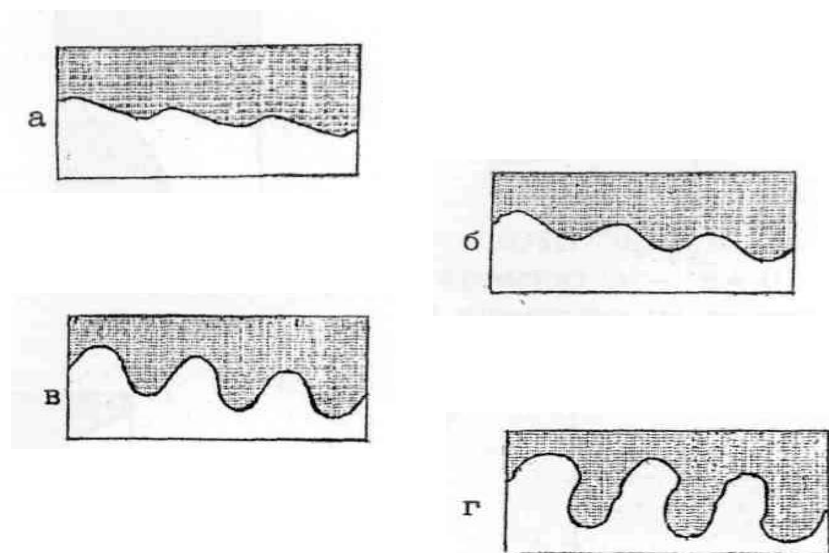


г)  $t=1,2$

$$\mu_1 = \mu_3 = 10^{19} \text{ П}, \quad \rho_1 = \rho_3 = 2.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \mu_2 = 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Рисунок 43 – Формирование соляного диапира с образованием подсолевого вздутия

Это объясняется тем, что соляной купол, двигаясь вверх, вытесняет тяжелый надсолевой слой вниз, вследствие чего под куполом создается область пониженного давления, куда и перетекает часть подсолевого слоя. Следует отметить, что когда вязкость подсолевого слоя намного больше вязкости соли и надсолевых пород ( $\mu_3/\mu_2 \geq 500$ ), то процесс развития неустойчивости будет происходить так же, как и в двухслойной модели, т.е. подсолевой слой не деформируется.



$$\mu_1 = 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \mu_2 = 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$$a - \bar{t} = 0, \quad б - \bar{t} = 0,25, \quad в - \bar{t} = 0,45, \quad г - \bar{t} = 0,65$$

Рисунок 44 – Эволюция наклонной поверхности раздела

На рисунках 44а – 44г показана эволюция поверхностей раздела, когда в начальный момент времени поверхность раздела задана в виде трех пологих гряд и имеет небольшой наклон. Течение жидкости здесь разбито на три ячейки, причем на границе ячеек скорости попутных потоков возрастают до максимума.

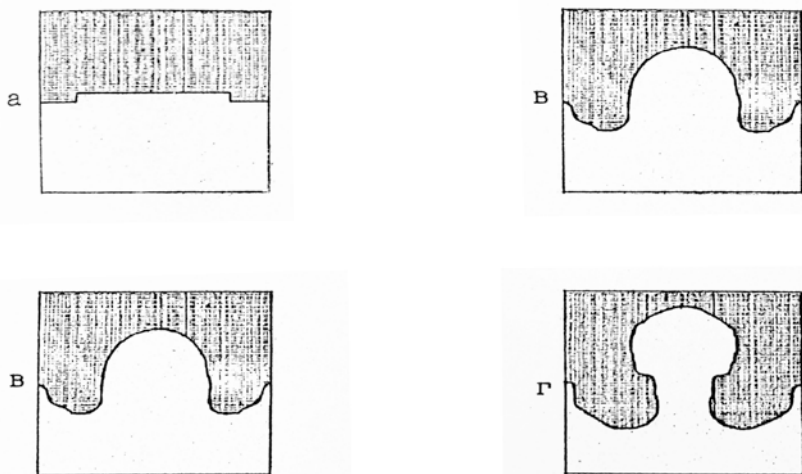
При приближении к боковым стенкам жесткой матрицы, наоборот, скорости течения затухают в силу условий прилипания. Сначала (рисунки 44а, 44б) всплывание легкой жидкости происходит тремя пологими выступами, которые ориентированы в сторону увеличения толщины нижнего слоя. Затем, на фоне гравитационной неустойчивости, проявляется влияние первоначального наклона поверхности раздела. Происходит поворот всплывающей легкой жидкости в сторону уменьшения толщины нижнего слоя (рисунки 44в, 44г). В силу того, что распределение давления близко к гидростатическому, результирующие усилия действия верхней тяжелой жидкости на разные стороны пологих гряд – разные, причем на длинные больше. Поэтому возникает дополнительный момент, способствующий повороту всплывающей каменной соли в сторону уменьшения толщины соляного массива. Подобная особенность характерна для соляно-купольной тектоники Прикаспийской впадины [1, 2, 6].

### ***3.3 Фазы развития и генерация вторичных возмущений***

Результаты расчетов позволили выделить три характерные фазы развития гравитационной неустойчивости [69, 70].

Первая – линейная фаза, когда на границе раздела сред появляются малые хаотические возмущения разной длины волн, среди которых довольно скоро выделяются доминирующие. Длина волны доминирующего возмущения определяется геометрией и физическими параметрами среды. В аналитических исследованиях начальной фазы тейлоровской неустойчивости среда в горизонтальном направлении предполагается бесконечной, и решение в горизонтальном направлении получается периодическим. В среде же, заключенной в жесткую матрицу, существенную роль играют пристеночные эффекты у вертикальных стенок, условия прилипания и градиенты давления в этой области [69]. Если геометрия области и начального возмущения таковы, что

градиент давления в периферийной части ячейки достаточен для переноса легкой жидкости из периферии ячейки в ее центральную часть, то выделяется одна доминантная волна (рисунок 45а, 45б), если нет, то выделяется две (рисунок 38 а-в) или более доминантных длин волн. На рисунках 46а-46г, взятых из [69], показано формирование трех доминантных длин волн и последующее образование тройных соляных диапиров (выступов).



$$\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

а)  $t=0$ .

б)  $t=0.7$

в)  $t=0.8$

г)  $t=1.0$

Рисунок 45 – Эволюция поверхности раздела

На второй фазе развития гравитационной неустойчивости, когда явно выделилась доминантная мода спектра возмущения границы раздела (38в, 45б, 46б), происходит относительно быстрое внедрение легкой жидкости в тяжелую. При этом граница раздела слоев имеет профиль, напоминающий нормальное (гауссово) распределение (рисунок 45 б, 45в), либо вид уединенной волны (солитона) (рисунок 24б), а затем

происходит ее перестройка. В результате образуется выступ округлой формы (рисунки 29б, 30в, 36б, 37б, 38г, 45г, 46б), который со временем вытягивается, приобретая ствол, связывающий его с питающим слоем легкой жидкости.



а)  $t=0$



б)  $t=0,25$



в)  $t=0,75$

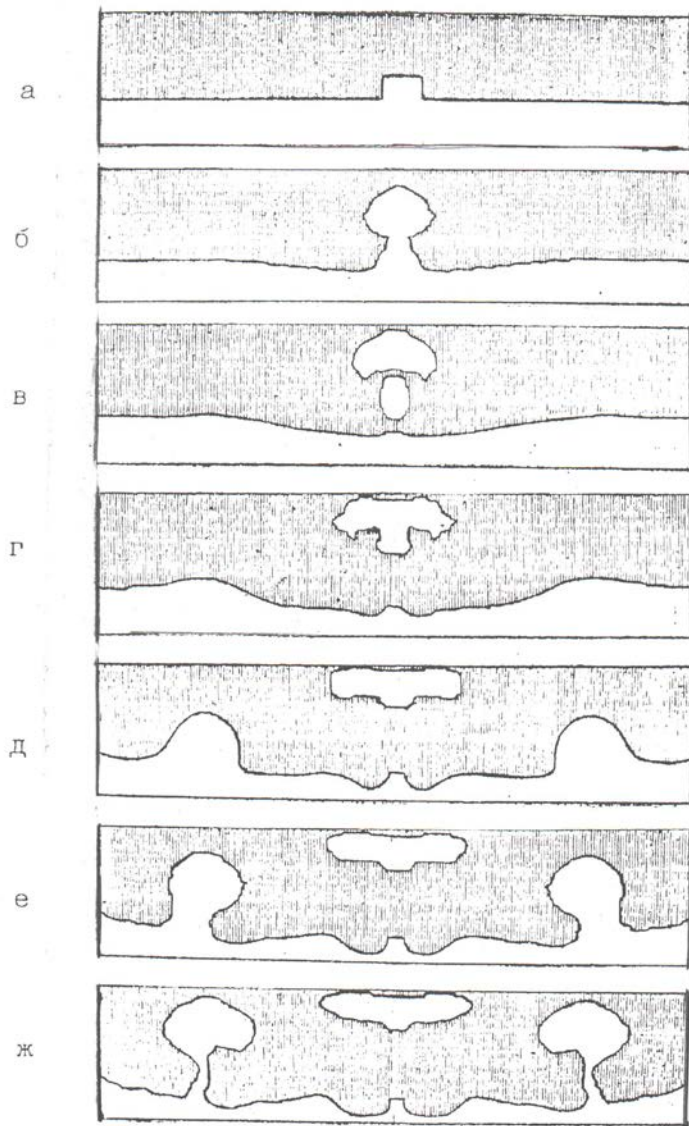


г)  $t=1,15$

$$\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \mu_2 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.16 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Рисунок 46 – Выделение трех доминантных длин волн и образование тройных выступов

В верхней части выступа налицо либо округлая (рисунки 30в, 45г), либо приплюснутая (рисунки 46г), либо вытянутая капля (или купол) (рисунки 36б, 37б). Внедрение тяжелой жидкости в легкую происходит с образованием краевого прогиба возрастающей глубины.



$$\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{19} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \text{ г/см}^3, \quad \theta = 1.2, \quad M = 1$$

а)  $t=0$ ; б)  $t=0.3$ ; в)  $t=0.4$ ; г)  $t=0.6$ ; д)  $t=0.8$ ; е)  $t=0.9$ ; ж)  $t=1.0$

Рисунок 47 – Эволюция поверхности раздела

На третьей фазе развития неустойчивости увеличение краевого прогиба способствует перекрытию движения частиц легкой жидкости в нижнем слое из периферии в центральную часть ячейки, а всплывающая под действием архимедовых сил масса легкой жидкости вытягивает ствол, нижняя часть которого быстро сужается. В результате образуется шейка. Наличие шейки говорит о том, что всплывающая в центральной части ячейки масса легкой жидкости готовится к отрыву (23в, 36в). Затем происходит отрыв от основного питающего слоя, что и объясняет механизм образования соляных линз в земной коре (рисунки 25б, 29г, 31в, 31г, 37в, 47в, г).

Обратимся к рисункам 47а-47ж, на которых хорошо прослеживается вторая и третья фазы тейлоровской неустойчивости, а также генерация вторичных возмущений. В центре области сформировался соляной купол с образованием шейки, что говорит о том, что купол готовится к отрыву. Так как толщина нижнего слоя небольшая (в 2 раза меньше толщины верхнего), то увеличение глубины внедрения тяжелой жидкости в центральной части ячейки способствует «пережатии» нижнего слоя, а это приводит к перекрытию (питания) всплывающей массы легкой жидкости ее жидкими частицами из периферии. В результате образуются пробки, что приводит к генерации вторичных возмущений и последующему образованию двух куполов рядом с центральным (рисунок 47г). Дальнейшие расчеты показывают (рисунки 47г-47ж), что «пережатие» шейки центрального купола приводит к его отрыву и образованию соляной линзы в центральной части области. В периферийной части области происходит (между стенкой и куполом второй генерации) формирование возмущений третьей генерации. Это приводит к формированию новых куполов. Т.е. развитие одних куполов становится причиной возникновения и роста других (вторичных), а те, в свою очередь, третьих и т.д. Все эти купола находятся на разной стадии развития, а по происхождению их следует отнести к одному семейству. Подобная картина наблюдается при лабораторном моделировании и в натуральных наблюдениях, полученных с помощью сейсмической разведки [1, 2, 54-59].

Обратимся к рисункам 31 а-31г ( $\mu_1 = \mu_2 = 5,2 \cdot 10^{19} П$ ), 37а-в ( $\mu_1 = \mu_2 = 5,2 \cdot 10^{18} П$ ), 36 а-в ( $\mu_1 = \mu_2 = 5,2 \cdot 10^{17} П$ ), на которых изображена эволюция поверхностей раздела при одинаковых геометрических размерах области, мощности слоев и начального возмущения границы раздела слоев, но с разным порядком величины их вязкостей. В зависимости от величины порядка динамической вязкости эволюционная форма поверхности раздела имеет свои особенности, но особенно они проявляются в момент отрыва плоской «капли» от нижнего слоя легкой жидкости. На рисунках 31в, 37в, 36в минимальное расстояние от верхней стенки до фронта легкой жидкости примерно одинаковы (на рисунке 36в немного меньше). При вязкости слоев порядка  $10^{18} П$  отрыв плоской «капли» наблюдался в одном месте (рисунок 37в), при вязкости слоев порядка  $10^{19} П$  - в двух местах (двойной отрыв, рисунок 31в), а при вязкости слоев порядка  $10^{17} П$  (рисунок 36в) отрыв не наблюдается, еще идет перекачка легкой жидкости через шейку ствола в верхнюю часть всплывающей легкой жидкости. На рисунке 29г при другом отношении мощностей слоев и  $\mu_1 = \mu_2 \square 10^{18} П$  наблюдается отрыв в одном месте. При  $\mu_1 = \mu_2 \square 10^{18} П$  (рисунок 47в) и отношении слоев верхнего к нижнему как 2:1, но с более протяженными горизонтальными размерами всей толщи, вновь наблюдается двойной отрыв плоской «капли». При измельчении пространственно-временной сетки и использовании анализатора [69], опять-таки наблюдался двойной отрыв.

Контрольный расчет при одинаковой мощностей слоев показал [69], что через длительное время, когда почти вся жидкость всплыла наверх, отрыв уже наблюдался в одном месте - нижней части ствола. Заметим, что отрыв «капли» от основного слоя легкой жидкости, двойной отрыв и т.д. наблюдался и в экспериментальных исследованиях [54-57]. Характеристики жидкой среды в таком состоянии, по всей видимости, зависят от отношения мощностей слоев, их величины вязкости, плотности и первоначального возмущения поверхности раздела. Исследование подобных явлений на

дифференциальном уровне представляет, по-видимому, достаточно сложную математическую задачу. В этом плане численные методы здесь имеют некоторые преимущества, поскольку в задачах с разрывными коэффициентами дают сходимость численного решения к обобщенному. По-видимому, поведение среды в момент отрыва аналогично в какой-то степени поведению материала в момент разрушения, и является достаточно сложной задачей механики и физики, требующей глубокого и тщательного исследования.

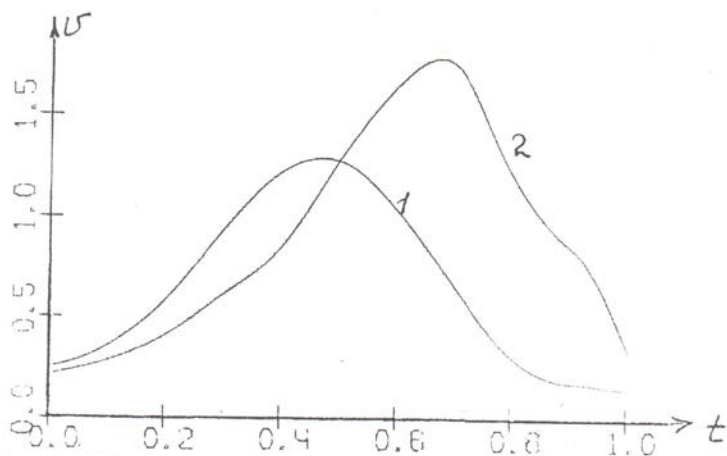
### ***3.4 Сравнительный анализ характеристик формирования соляного купола в плоской и осесимметричной моделях***

В работе [70] проведено исследование формирования осесимметричных соляных куполов, в которой показано, что влияние физико-геометрических параметров среды на весь процесс формирования такой же, как и для плоской модели, но имеются и различия.

Для выяснения различий формирования был проведен сравнительный анализ некоторых характеристик соляных куполов в плоской и осесимметричной постановках задачи [70]. С той целью рассмотрим вариант расчета осесимметричной модели с параметрами:  $\rho_1 = 2,2 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_2 = 2,6 \text{ г/см}^3$ ,

$\mu_1 = \mu_2 = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ П}$ , мощностями слоев  $h_1 = 6 \text{ км}$ ,  $h_2 = 3 \text{ км}$ , и радиусом  $R = 9 \text{ км}$ . Параллельно рассматривается вариант расчета плоской модели с теми же физико-геометрическими параметрами и первоначальным возмущением слоев.

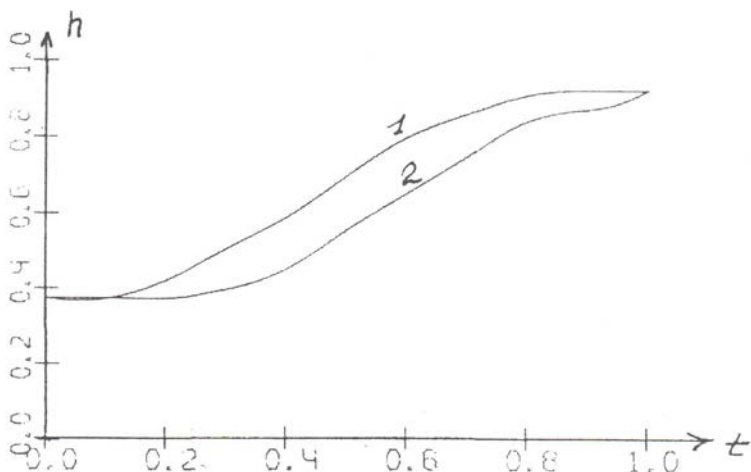
Расчеты показали, что в одинаковые моменты времени в осесимметричной модели купол, вплоть до достижения верхней стенки, принимает столбообразную форму. При этом поперечный размер его ствола широкий и, примерно, равен первоначальной мощности легкого слоя, тогда как в плоской постановке задачи свод купола, не достигая верхней стенки, растекается в горизонтальные стороны, а его ствол отжимается тяжелой жидкостью. Т.е. купол приобретает грибообразную форму.



1- плоская модель; 2- осесимметричная модель

Рисунок 48 – Графики зависимости скорости роста вершин куполов от времени для плоской и осесимметричной моделей

Процесс тейлоровской неустойчивости на определенном отрезке времени протекает быстрее в плоской постановке, чем в осесимметричной. На рисунках 48, 49 представлены графики скорости роста и высоты вершины купола. Цифра 1 соответствует плоской модели, цифра 2- осесимметричной. Из сопоставления графиков следует, что в осесимметричной модели до момента безразмерного времени  $t = 0,5$  купол растет значительно медленнее. Далее наблюдается обратная картина.



1- плоская модель; 2- осесимметричная модель

Рисунок 49 – Графики зависимости высот внедрения куполов от времени для плоской и осесимметричной моделей

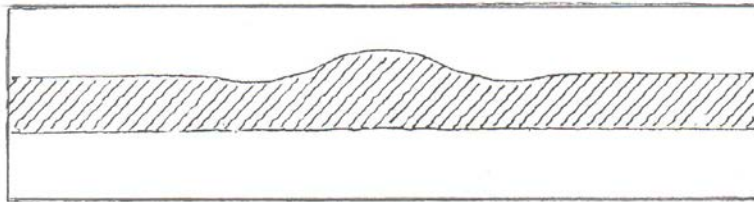
Из рисунка 49 следует, что высота всплывания вершины соляного купола на интервале безразмерного времени (0, 15; 1, 1) в осесимметричном случае меньше соответствующей высоты в плоском случае.

Из сравнения процессов развития тейлоровской неустойчивости в плоской и осесимметричной моделях с одинаковыми физико-геометрическими параметрами, можно сделать следующие выводы: характеристики роста купола, его форма в осесимметричной модели различаются от характеристик роста купола, его формы в плоской модели; влияние параметров на эти характеристики и на весь процесс формирования в осесимметричной модели такое же, как и в плоской модели.

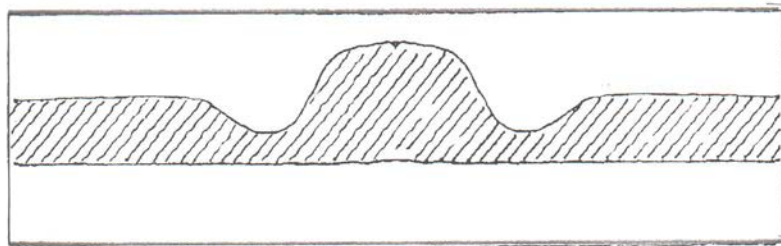
На рисунке 50а-50в показана эволюция поверхности раздела слоев (в разрезе) для трехслойной осесимметричной модели.

Параметры модели:  $\rho_2 = 2,2 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 2,6 \text{ г/см}^3$ ,

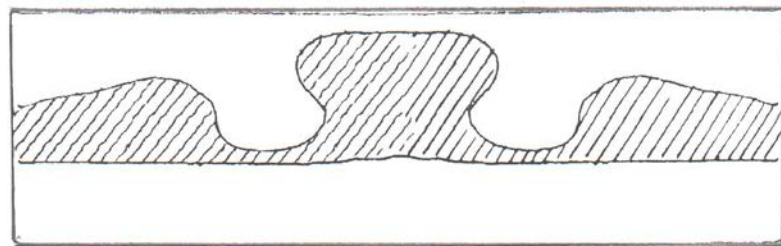
$$\mu_1 = \mu_3 = 2,6 \cdot 10^{20} \text{ П}, \quad h_1 = h_3 = 3,15 \text{ км}, \quad h_2 = 3,7 \text{ км}, \quad R = 9 \text{ км}.$$



а)  $t=0.5$



б)  $t=0.7$



в)  $t=0.8$

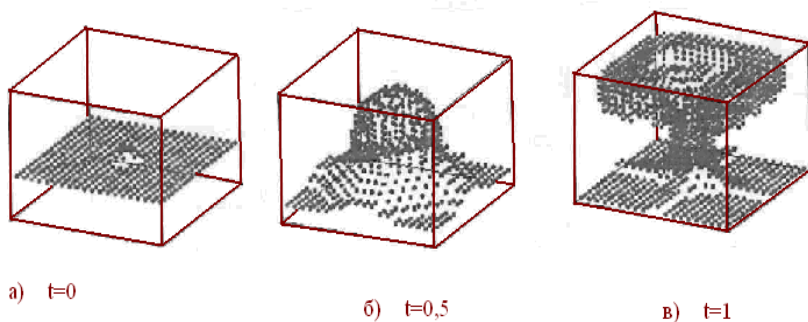
Рисунок 50- Эволюция поверхности раздела слоев при тейлоровской неустойчивости для осесимметричной модели

Как видно из рисунков 50 а-50в в центральной части области формируется купол-гигант, а вторичные купола представлены соляными валами округлой формы. Под центральным куполом наблюдается слабое искривление границы раздела подсолевого ложа, т.к. динамическая вязкость галита на два порядка меньше

динамической вязкости подсолевого ложа. Подобные структуры характерны для Прикаспийской впадины [1].

### 3.5 Трехмерное формирование соляных куполов

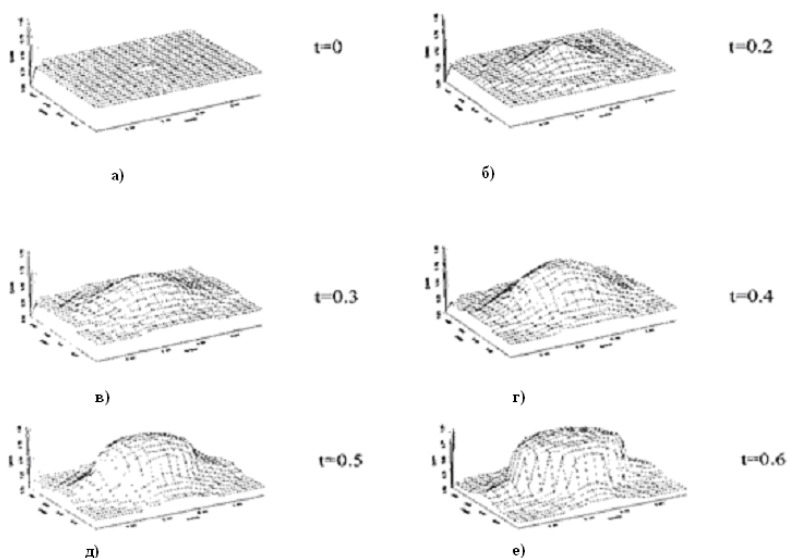
На рисунках 28, 51-53 показано трехмерное формирование соляных диапиров в земной коре.



Параметры модели:

$$\mu_1 = 5 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_1 = 6000 \text{ м},$$
$$\mu_2 = 3 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.16 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_2 = 3000 \text{ м}.$$

Рисунок 51 – Формирование пространственного диапира



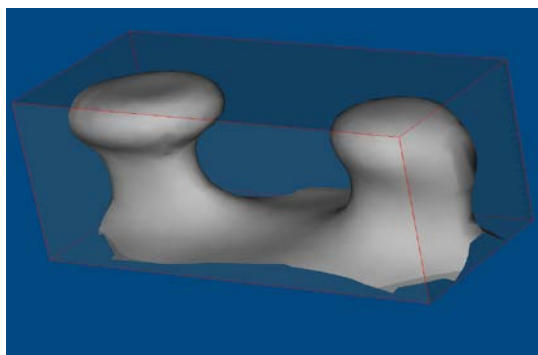
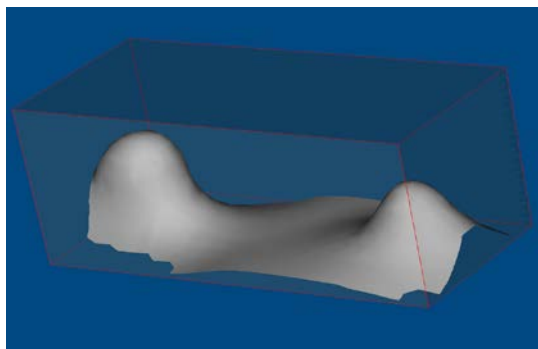
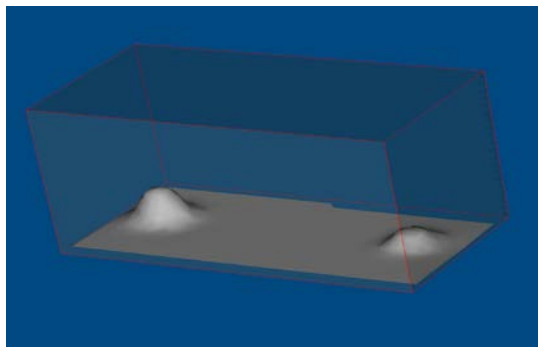
Параметры модели:

$$\mu_1 = 10^{19} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_1 = 6000 \text{ м},$$

$$\mu_2 = 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_2 = 3000 \text{ м}.$$

Рисунок 52 - Пространственная модель формирования соляного диапира (соляного выступа)

При формировании соляных диапиров в трехмерном случае, как и при формировании соляных диапиров в плоском и осесимметричном случаях, течение жидкости разбивается на ячейки. Движение в ячейках по форме напоминает конвективные ячейки Бенара, возникающие при тепловой стационарной конвекции при подогреве снизу однородной жидкости. Движение каждой жидкой частицы происходит по замкнутым траекториям, но имеет прерывистый режим. Легкая жидкость, поднимаясь вверх, там и остается, а тяжелая, опускаясь, замыкает ячейку снизу. Движение жидкостей заканчивается, как только легкая жидкость поднимется наверх, и инверсия поверхностей исчезнет.



$$\mu_1 = 5 \cdot 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_1 = 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_1 = 6000 \text{ м},$$
$$\mu_2 = 10^{18} \text{ П}, \quad \rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_2 = 3000 \text{ м}.$$

$$(t = 0, 1; t = 0, 3; t = 0, 5)$$

Рисунок 53 - Формирование двух соляных куполов  
(пространственная модель)

Расчеты трехмерных течений показали, что процесс формирования соляных диапиров протекает в три стадии, природа формирования вторичных диапиров и зависимость основных характеристик тейлоровской неустойчивости от физико-геометрических параметров среды такая же, как в плоской и осесимметричной моделях (см. п. 3.1- п. 3.4).

В целях установления некоторых закономерностей основных характеристик тейлоровской неустойчивости от физических параметров среды была проведена серия расчетов. Геометрические размеры области, отношения толщин слоев тяжелой и легкой жидкости, а также первоначальные пьедестальные возмущения поверхностей раздела были выбраны одинаковыми для всех вариантов.

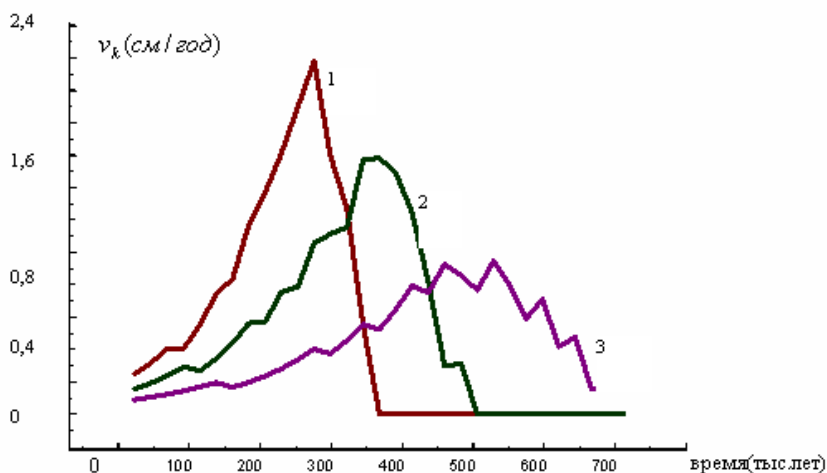
Для одиночного купола, изображенного на рисунке 28 в момент безразмерного времени  $\bar{t} = 0,5$  возможны, например, три варианта основных размерных характеристик тейлоровской неустойчивости:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \left\{ \begin{array}{l} h_1 = 6 \text{ км}, h_2 = 3 \text{ км}, \mu_1 = 5 \cdot 10^{18} \text{ П}, \mu_2 = 10^{18} \text{ П}, \\ \rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, v_k = 2,14 \text{ см/год}, \\ d_k \approx 3 \text{ км}, h_k \approx 8,76 \text{ км}, t = 916 \text{ тыс. лет}, \end{array} \right. \\
 \text{б) } & \left\{ \begin{array}{l} h_1 = 2 \text{ км}, h_2 = 1 \text{ км}, \mu_1 = 9,62 \cdot 10^{17} \text{ П}, \mu_2 = 1,924 \cdot 10^{17} \text{ П}, \\ \rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, v_k = 1,24 \text{ см/год}, \\ d_k \approx 1 \text{ км}, h_k \approx 2,92 \text{ км}, t = 176,3 \text{ тыс. лет}, \end{array} \right. \\
 \text{в) } & \left\{ \begin{array}{l} h_1 = 1 \text{ км}, h_2 = 0,5 \text{ км}, \mu_1 = 3,4 \cdot 10^{17} \text{ П}, \mu_2 = 0,68 \cdot 10^{17} \text{ П}, \\ \rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, v_k = 0,88 \text{ см/год}, \\ d_k \approx 0,5 \text{ км}, h_k \approx 1,47 \text{ км}, t = 62,3 \text{ тыс. лет}. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Здесь  $v_k$  - скорость вершины купола,  $t$  - время формирования,  $h_k$  - высота,  $d_k$  - средний поперечный размер шапки (крыльев) купола. Подобные размеры соляных структур и масштабы скоростей их роста встречаются в природе.

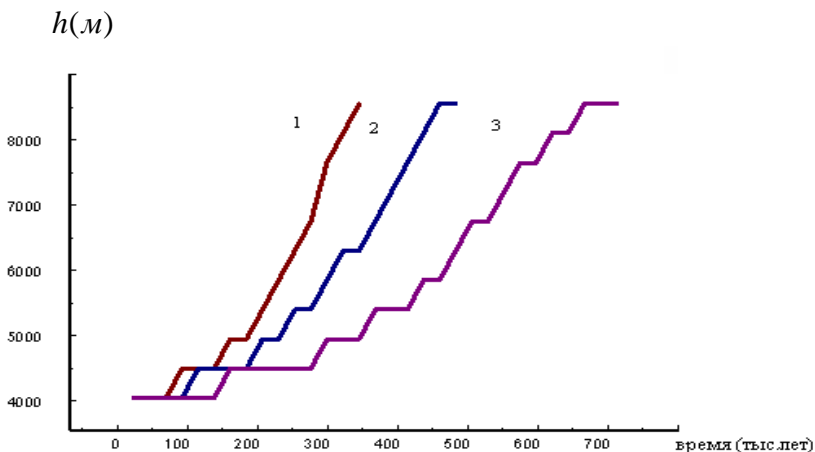
Обратимся к графикам 54 - 57, на которых изображены скорости всплывания вершины, высоты купола, как функции

времени в зависимости от отношения вязкостей слоев и отношения их плотностей. Мощности слоев были приняты:  $h_1 = 6 \text{ км}$ ,  $h_2 = 3 \text{ км}$ , а горизонтальные размеры области  $l_1 = l_2 = 12 \text{ км}$ . При этом для рисунков 54, 55 вязкость и плотность галита приняты:  $\mu_2 = 10^{18} \text{ П}$ ,  $\rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\theta = 1.2$ , а для рисунков 56, 57 -  $\mu_2 = 10^{18} \text{ П}$ ,  $\rho_2 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $M = 1$ . Первоначальное возмущение задавалось в виде объемного пьедестала, одинакового для всех вариантов, симметричного относительно горизонтальных координат и постоянной высоты.



1 -  $M = 0,5$ ; 2 -  $M = 1$ ; 3 -  $M = 2$

Рисунок 54 - Графики зависимостей скоростей всплывания вершин куполов от времени для трех различных значений вязкости осадочных пород

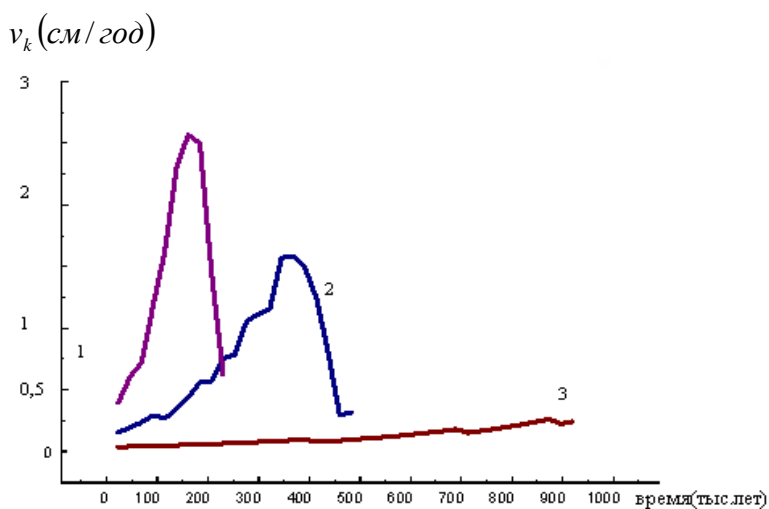


1 -  $M = 0,5$ ; 2 -  $M = 1$ ; 3 -  $M = 2$

Рисунок 55 - Графики зависимостей высот всплывания вершин куполов от времени для трех различных значений вязкости осадочных пород

Графики строились до момента достижения вершиной купола верхней стенки. Из рисунка 54 видно, что сначала скорость вершины купола увеличивается, а затем происходит ее падение до нуля, что связано с достижением вершины купола верхней стенки (кривые 1, 2). Наибольшая скорость всплывания характерна для кривой 1, когда вязкость надсолевых пород меньше вязкости галита. И наоборот, наименьшая скорость всплывания характерна для кривой 3, когда вязкость надсолевых пород больше вязкости галита. Последнее связано с тем, что более легкая жидкость должна вытеснить более «жесткую» тяжелую жидкость. Для кривой 1 время нарастания и убывания скорости вершины купола примерно в два раза меньше соответствующего времени для кривой 3. Физически это оправдано тем, что в начальный момент времени система жидких слоев обладает одинаковой для трех случаев запасенной потенциальной энергией, которая при исчезновении инверсии плотностей полностью переходит в диссипированное тепло.

Поэтому с увеличением вязкости уменьшается средняя интенсивность тензора скоростей деформации и процессы развития неустойчивости замедляются. Для кривой 3 на отрезке времени, примерно, от 450 тыс. лет до 800 тыс. лет скорость вершины купола локально то возрастает, то убывает. Это связано с тем, что передний фронт купола тормозится, так как перед ним находится более «жесткая» среда, и требуются дополнительные порции легкой жидкости из периферии в центральную часть купола, чтобы «пробить» более «жесткую» среду.



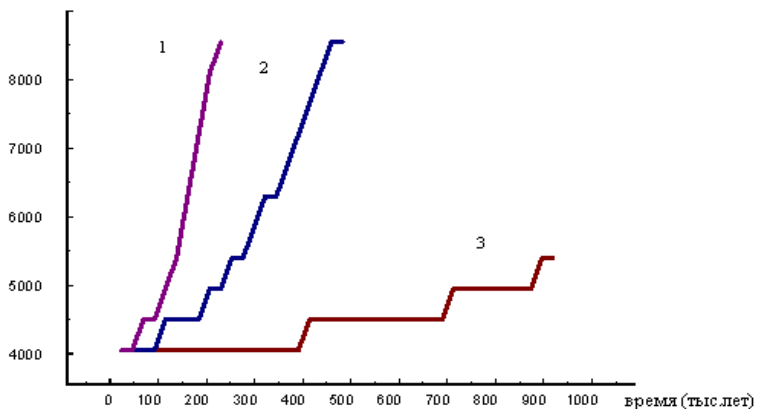
1 -  $\theta = 1,5$ ; 2 -  $\theta = 1,2$ ; 3 -  $\theta = 1,05$

Рисунок 56 - Графики зависимостей скоростей всплывания вершин куполов от времени для трех различных значений плотности осадочных пород

После перекачки этих порций в центральную часть купола, процесс всплывания ускоряется и т.д. Рисунок 55 дает представление о высоте внедрения купола в зависимости от времени для трех значений вязкости. Поведения кривых 1, 2, 3 на рисунках 54, 55 находятся в качественном согласии, и они

описывают кинематику процесса всплывания легкой жидкости в тяжелой.

$h_k$  (м)



1 -  $\theta = 1,5$ ; 2 -  $\theta = 1,2$ ; 3 -  $\theta = 1,05$

Рисунок 57 - Графики зависимостей высот всплывания вершин куполов от времени для трех различных значений плотности осадочных пород

Графики на рисунках 56, 57 дают представления о скорости всплывания и высоте купола, как функции времени для различных соотношений плотностей слоев. При более контрастном соотношении слоев скорость нарастания  $v_k, h_k$  увеличивается, и требуется значительно меньше времени для достижения вершиной купола верхней стенки, чем при умеренной контрастности плотностей слоев (кривые 1, 2). Для кривой 3 на рисунках 56, 57 процесс развития тейлоровской неустойчивости протекает очень медленно, по истечении одного миллиона лет вершина купола достигла всего лишь отметки примерно 5,3 км. Это говорит о том, что вершина купола

находится еще далеко от верхней стенки. Здесь существо дела состоит в том, что первоначально запасенная потенциальная энергия для первого варианта в 1,25 раза больше потенциальной энергии для второго варианта и в 1,425 раза больше соответствующей потенциальной энергии для третьего варианта. Поэтому средняя интенсивность тензора скоростей деформации наибольшая в первом варианте, и процесс развития тейлоровской неустойчивости протекает быстрее в первом варианте, чем во втором и третьем.

Сравнительный анализ развития трехмерной гравитационной неустойчивости с плоской и осесимметричной показывает, что процесс гравитационной неустойчивости протекает быстрее или медленнее (на отдельных фазах) в плоской и осесимметричной моделях, чем в пространственной в зависимости от физико-геометрических параметров среды и первоначального возмущения.

В работе [56] проведен сопоставительный анализ экспериментальных данных, полученных с помощью лабораторного моделирования с геологическими условиями образования соляных структур в Прикаспийской впадине. Проведенный анализ показал, что экспериментальные данные хорошо «коррелируют» и дополняют общую картину геологического формирования соляно-купольных структур в Прикаспийской впадине. Поскольку приведенные выше данные расчетов формирования соляных куполов хорошо «коррелируют» с результатами работы [56] (см. п. 2.2.5) и с результатами натурных наблюдений и геолого-геофизических изысканий [1-8], то можно утверждать, что формирование и развитие соляно-купольных структур в природной обстановке и численных моделях определяются одинаковыми факторами.

## 4 СОЛЯНЫЕ КУПОЛА ГЛУБОКОГО ЗАЛЕГАНИЯ

### 4.1 Физическая и математическая модели формирования соляных диапиров глубокого залегания

**Физическая модель.** Скорость возрастания температуры с глубиной в геофизике носит название геотермического градиента. В невулканических районах геотермический градиент составляет, примерно, три градуса Цельсия на сто метров глубины. Величина геотермического градиента, вообще говоря, заметно варьируется от места к месту и лежит в интервале от одного до пяти градусов Цельсия на каждые сто метров. В среднем у поверхности Земли геотермический градиент составляет двадцать градусов Цельсия на один километр. Второй геотермической величиной, которая может быть определена экспериментально, является тепловой поток из земных недр. По оценкам [107, 108], средний континентальный тепловой поток равен  $56,5 \text{ мВт/м}^2$ . По Земле он распределен неравномерно.

Простая оценка, получаемая из условий образования стационарной конвекции для горизонтального слоя жидкости [132] геотермического градиента  $\theta$  верхних горизонтов земной коры [121, 122], где формируются соляные диапиры, дает ее значения в пределах  $0,16^{\circ} \text{C/м}^2 \leq \theta \leq 0,30^{\circ} \text{C/м}^2$ . Таким образом, представляется возможным существование мелкомасштабной тепловой конвекции в верхних горизонтах Земли. Следует отметить, что в условиях гравитационной неустойчивости, формирующих соляные диапиры, мелкомасштабная конвекция будет вынужденной, что снижает ограничения на геотермический градиент. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть динамику формирования соляных куполов по пространству на базе модельной задачи с учетом геотермических градиентов.

На больших отрезках времени (сотни тысяч, миллионы лет) земную кору, астеносферу можно считать вязкими несжимаемыми жидкостями. Это следует из данных об

изостатическом поднятии поверхности Земли после снятия ледовой нагрузки, экспериментальных данных исследования ползучести горных пород при высоких температурах и давлениях, а также из теоретических исследований [107, 108, 133, 134].

В качестве реологической модели возьмем ньютоновскую несжимаемую вязкую жидкость, с динамической вязкостью, экспоненциально зависящей от температуры, но независимой от давления. Это справедливо для верхних горизонтов земной коры, что следует из результатов работ [133, 134] (более того, в первом приближении можно взять динамическую вязкость, независимую от температуры, что следует из результатов тех же работ).

Приведем основные уравнения динамики вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести под воздействием теплового поля, сделаем упрощение этих уравнений на основе корректных физических положений.

В декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  (ось  $Ox_3$  - направлена вертикально вверх) в некоторой пространственной области  $\Omega$  рассмотрим движение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в поле сил тяжести под воздействием теплового поля. В декартовых координатах такое движение описывается следующими, хорошо известными уравнениями [132, 135]:

уравнениями сохранения импульса (уравнениями Навье - Стокса):

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_\gamma \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{i\gamma}}{\partial x_\gamma} - \rho g \delta_{3i}, \quad (4.1)$$

уравнением несжимаемости:

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (4.2)$$

реологическим законом Ньютона:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.3)$$

уравнением сохранения энергии (уравнением теплопроводности):

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) + \sigma_{i\gamma} \dot{\varepsilon}_{i\gamma} + \rho Q(i, \gamma = 1, 2, 3), \quad (4.4)$$

уравнением состояния для плотности:

$$\rho(t, x) = \rho_*(t, x) F(T, p), \quad (4.5)$$

уравнением переноса температурно невозмущенной плотности:

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\rho_* V_\gamma) = 0. \quad (4.6)$$

Здесь по немым греческим индексам производится суммирование,  $\sigma_{ik}$  - вязкий тензор напряжений,  $\dot{\varepsilon}_{ik}$  - тензор скоростей деформации,  $\delta_{3i}$  - символ Кронекера,  $p$  - давление,  $V_k$  - компоненты скорости,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\rho$  - плотность,  $\rho_*$  - температурно невозмущенная плотность (плотность, зависящая от состава вещества),  $T$  - абсолютная температура,  $C_p$  - удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $\mu = \rho\nu$  - динамическая вязкость,  $\nu$  - кинематическая вязкость,  $Q$  - удельная мощность других (несвязанных с вязкостью) внутренних источников тепла,  $F$  - известная функция состояния.

Так как в задаче формирования соляных структур в земной коре перепад температур небольшой, то естественно воспользоваться приближением Буссинеска [132]. Тогда уравнение состояния (5) запишется в виде:

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha(T - T_*)) . \quad (4.7)$$

К уравнению (4.7) добавляется реологическое уравнение для динамической вязкости и уравнение переноса температурно невозмущенной динамической вязкости [108, 109, 132-135]:

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp\left(\frac{E}{RT} - \frac{E}{RT_*}\right) , \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mu_*}{\partial t} + \frac{\partial(\mu_* V_\gamma)}{\partial x_\gamma} = 0 . \quad (4.9)$$

Здесь  $\mu_* = \mu_*(t, x)$  - температурно невозмущенная вязкость,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $\alpha$  - коэффициент теплового объемного расширения,  $E$  - энергия активации. Кроме того, для простоты  $Q$  полагается равной нулю (не учитываются радиогенные источники тепла в земной коре).  $T_*$  - температура, при которой  $\rho = \rho_*$ .

Отметим, что параметры  $k, C_p, \alpha$  характеризуют свойства самой жидкости и поэтому переносятся ее частицами в процессе ее движения точно так же, как температурно невозмущенная плотность и вязкость. Поэтому они удовлетворяют уравнению переноса, аналогичному уравнению (4.6). Эти параметры могут сложным образом зависеть от  $T, p$ . Как показывают исследования [108, 132, 133, 136] для верхних горизонтов земной коры можно принять эти параметры постоянными. Тогда уравнения переноса будут удовлетворяться автоматически.

Таким образом, физическая модель процесса образования соляных структур глубокого залегания описывается системой уравнений (4.1) - (4.4), (4.6) - (4.9), которые будут упрощены ниже. К ним добавляются соответствующие начальные и краевые условия, о которых будет сказано чуть позже.

**Математическая модель. Безразмерная форма уравнений.**  
В дальнейшем область  $\Omega$  в трехмерной постановке задачи будем рассматривать в виде прямоугольного параллелепипеда

(рисунок 19) или прямоугольника с той же высотой для двумерной постановки задачи.

Согласно [108], коэффициенты  $k, C_p, \alpha$  можно принять постоянными во всей области и равными  $k = 2,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), C_p = 1,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}, \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  их средним значениям. Средняя плотность осадочного чехла принимается равной  $\rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность каменной соли  $\rho_2 = \rho_0 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$  [1,2], ускорение силы тяжести  $9,81 \text{ м}/\text{с}^2$ . В качестве характерного значения температуры принимается  $T_0 = T_* = 273 \text{ } ^\circ\text{K}$ , а энергия активации  $E_0 = E = 2 \cdot 10^4 \text{ Дж}/\text{моль}$  полагается постоянной во всей области [108, 136]. За характерный линейный размер примем  $L_0 = 10^4 \text{ м}$ , а за характерную динамическую вязкость примем:  $\mu_0 = \mu_{*2} = 2,2 \cdot 10^{17} \text{ П} = 2,2 \cdot 10^{16} \text{ Па} \cdot \text{с}$  ( $\nu_0 = \mu_0/\rho_0 = 10^{13} \text{ м}^2/\text{с}$ ) - вязкость галита.

В целях дальнейшего упрощения воспользуемся приближением Буссинеска для несжимаемой жидкости (4.7), согласно которой зависимость плотности от температуры учитывается в уравнениях импульса (4.1) только для архимедовой силы.

Введем безразмерные переменные, помеченные чертой и параметры:

$$u_0 = \frac{k}{L_0 \rho_0 C_p}, t_0 = \frac{L_0}{u_0}, p_0 = \omega \rho_0 g L_0, \mu_0 = \rho_0 \nu_0, x = \bar{x} L_0, t = \bar{t} t_0, V = \bar{V} u_0, \quad (4.10)$$

$$\mu = \mu_0 \bar{\mu}, \mu_* = \mu_0 \bar{\mu}_*, T = T_0 \bar{T}, \rho = \omega \rho_0 \bar{\rho}, \rho_* = \omega \rho_0 \bar{\rho}_*, \mu_0 = \rho_0 \nu_0.$$

Здесь  $u_0, t_0$  - характерная скорость и время, соответственно,  $\omega$  - нормирующий множитель. Запишем уравнения импульса (4.1) с учетом (4.3), (4.7), (4.10) в безразмерных переменных, используя приближение Буссинеска (черточки над безразмерными переменными опущены, чтобы не загромождать изложение). Тогда получим:

$$\omega \operatorname{Re} \rho_* \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} \right) = - \frac{\omega \operatorname{Re}}{Fr} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{3i} (1 - \alpha_0 (T - 1)) \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right),$$

$$\alpha_0 = \alpha T_0 = 5.46 \cdot 10^{-3} \quad (4.11)$$

Здесь  $\operatorname{Re} = u_0 L_0 / \nu_0$ ,  $Fr = u_0^2 / g L_0$  - числа Рейнольдса и Фруда, соответственно. При характерных параметрах задачи:

$$u_0 = 9,5 \cdot 10^{-11} \text{ м/с} = 2,92 \text{ мм/год}, \quad Fr = 9 \cdot 10^{-26}, \quad \operatorname{Re} = 9,5 \cdot 10^{-20},$$

$$t_0 = 3,4 \text{ миллионов лет}.$$

Положим  $\omega = Fr / \operatorname{Re} = 9,47 \cdot 10^{-7}$ . Тогда  $\omega \cdot \operatorname{Re} = Fr = 9 \cdot 10^{-26}$ , и левой частью уравнения (4.11) можно пренебречь. В результате уравнение (4.11) запишется в виде:

$$0 = - \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{3i} (1 - \alpha_0 (T - 1)) \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right), \quad \alpha_0 = \alpha T_0 = 5,46 \cdot 10^{-3}$$

$$(4.12)$$

Отметим, что  $\omega = Fr / \operatorname{Re} = u_0 \nu_0 / g L_0^2 = 1 / Ra$ , где  $Ra = \rho_0 g L_0^3 C_p / k \nu_0$  - где- число Релея.

Обратимся к уравнению (4.4), которое с учетом вышесказанного в безразмерных переменных примет вид:

$$\rho_* \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{Ra}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) + Ra \cdot Di \cdot \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right)^2 \quad (i, \gamma = 1, 2, 3)$$

$$(4.13)$$

Здесь  $\operatorname{Pr} = \nu_0 \rho_0 C_p / k$  - число Прандтля;  $Di = \nu_0 k / (T_0 L_0^2 C_p \rho_0)$  - безразмерный параметр диссипации. При заданных параметрах задачи безразмерные числа и их комбинации равны:

$$Ra = 1,06 \cdot 10^6, \quad \operatorname{Pr} = 1,06 \cdot 10^9, \quad Di = 2,9 \cdot 10^{-7},$$

$$Ra / \operatorname{Pr} \cdot \operatorname{Re} = 1,05 \cdot 10^6, \quad Ra \cdot Di = 0,31. \quad (4.14)$$

В работе [132] показано, что при малых скоростях можно пренебречь диссипацией вязкой жидкости. Это следует из правой части (4.13), где значение комбинации  $Ra/Pr \cdot Re$  на семь порядков больше, чем значение  $Ra \cdot Di$ . Поэтому в уравнении (4.13) вязкой диссипацией можно пренебречь. Тогда в безразмерных переменных система уравнений, описывающая формирования соляных диапиров глубокого залегания, запишется в виде:

$$0 = - \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{3i} (1 - \alpha_0 (T - 1)) \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right), \quad (4.15)$$

$$\alpha_0 = \alpha T_0 = 5,46 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (4.16)$$

$$\int_{\Omega} p dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (4.17)$$

$$\rho_* \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{Ra}{Pr Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) \quad (i, \gamma = 1, 2, 3) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \rho_*}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \mu_*}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \mu_*}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (4.20)$$

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp(\beta \left( \frac{1}{T} - 1 \right)), \quad \beta = \frac{E_0}{RT_0} = 10,58 \quad (4.21)$$

К системе уравнений (4.15) - (4.21) добавляются начальные и граничные условия. В начальный момент времени ( $t_0 = 0$ ) задаются распределения невозмущенной плотности  $\rho_*$ , динамической вязкости  $\mu_*$  и температуры  $T$ . Граничные

условия могут быть разнообразными. Если на части границы области заданы условия прилипания, а на другой ее части условия скольжения, то на первой части границы области все компоненты скорости обращаются в нуль, а на второй ее части обращаются в нуль нормальная компонента скорости и нормальная производная от касательной компоненты скорости. На части границы области задается температура, на другой ее части - тепловой поток.

Сформулируем, например, граничные и начальные условия для случая, когда боковые стенки параллелепипеда  $\Omega$  (размеры:  $a, b, 1$ ) теплоизолированы, и на них выполняются условия скольжения, а на верхней и на нижней стенках поддерживаются, соответственно, температуры  $T_1, T_2$ , ( $T_1 \leq T_2$ ) и выполняются условия прилипания.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \rho_*(x, 0) = \rho_*^0(x, 0), \quad \mu_*(x, 0) = \mu_*^0(x, 0), \quad T(x, 0) = T^0(x, 0), \\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.22)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T \Big|_{x_3=0} = T_2(x_1, x_2, 0), \quad T \Big|_{x_3=1} = T_1(x_1, x_2, 0), \quad V = (V_1, V_2, V_3) \Big|_{x_3=0,1} = 0, \\ \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} = V_1 = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0,a} = 0, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} = V_2 = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0,b} = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Кроме того, должны выполняться условия согласования начальных и граничных условий.

Таким образом, сформулированная выше задача описывается системой уравнений (4.15) - (4.21) с начальными и граничными условиями (4.22), (4.23).

## 4.2 Разностная начально - краевая задача

Как и в чисто динамической трехмерной задаче (см.п.2.4), вводятся сетки  $\bar{\Omega}_h^k, \bar{\Omega}_{1h}^k, \bar{\Omega}_{2h}^k, \bar{\Omega}_{3h}^k, \bar{\Omega}_{4h}^k$  и, соответственно, их границы  $\partial\bar{\Omega}_h^k, \partial\bar{\Omega}_{1h}^k, \partial\bar{\Omega}_{2h}^k, \partial\bar{\Omega}_{3h}^k, \partial\bar{\Omega}_{4h}^k$ . Сетка  $\bar{\Omega}_{1h}^k$  получается сдвигом сетки  $\bar{\Omega}_h^k$  на  $h/2$  влево вдоль оси  $Ox_1$ ,  $\bar{\Omega}_{2h}^k$  - влево вдоль оси  $Ox_2$ ,  $\bar{\Omega}_{3h}^k$  - сдвигом  $\bar{\Omega}_h^k$  на  $-h/2$  вниз.

Будем определять сеточные функции  $\rho_h^k, \mu_h^k, v_{1h}^k, v_{2h}^k, v_{3h}^k, p_h^k$ , соответственно, на сетках  $\bar{\Omega}_h^k, \bar{\Omega}_{1h}^k, \bar{\Omega}_{2h}^k, \bar{\Omega}_{3h}^k, \bar{\Omega}_{4h}^k, \bar{\Omega}_h^k, \bar{\Omega}_{1h}^k, \bar{\Omega}_{2h}^k, \bar{\Omega}_{3h}^k, \bar{\Omega}_{4h}^k$  (при  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), удовлетворяющих следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & p_{\bar{x}_1}^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) - \left\{ 2 \left( \mu^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{1hx_1}^k \right)_{\bar{x}_1} + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{1hx_2}^k \right)_{\bar{x}_2} \right. \\
 & + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{1hx_3}^k \right)_{\bar{x}_3} + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{2hx_1}^k \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) \right)_{\bar{x}_2} \\
 & \left. + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{3hx_1}^k \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_3} \right\} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_{1h}^k
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
 & p_{\bar{x}_2}^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) - \left\{ \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{1hx_2}^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 \right) \right)_{\bar{x}_1} + 2 \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{2hx_2}^k \right)_{\bar{x}_2} \right. \\
 & + \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{2hx_1}^k \right)_{\bar{x}_1} + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{2hx_3}^k \right)_{\bar{x}_3} \\
 & \left. + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{3hx_2}^k \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 + \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_3} \right\} = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_{2h}^k
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
& p_{h\bar{x}_3}^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) - \left\{ \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{1hx_3}^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 - \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_1} + \right. \\
& + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{2hx_3}^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 - \frac{h}{2} \right) \right)_{\bar{x}_2} + 2 \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2} \right) v_{3hx_3}^k \right)_{\bar{x}_3} + \\
& \left. + \left( \mu_h^k \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) v_{3hx_1}^k \right)_{\bar{x}_1} + \left( \mu_h^k \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2}, x_3 \right) v_{3hx_2}^k \right)_{\bar{x}_2} \right\} = -\rho_h^k(x_1, x_2, x_3), \quad \bar{x} \in \Omega_{3h}^k
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$v_{1hx_1}^k \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2, x_3 \right) + v_{2hx_2}^k \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 \right) + v_{3hx_3}^k \left( x_1, x_2, x_3 - \frac{h}{2} \right) = 0, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_{4h}^k \tag{4.27}$$

$$\sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{4h}^k} p_h^k(x_1, x_2, x_3) h^3 = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \tag{4.28}$$

$$\rho_{*h}^k (T_{ht}^k + \sum_{s=1}^3 ((b_i^+ + R) T_{h\bar{x}_i}^k + (b_i^- - R) T_{hx_i}^k)) - e_0 \sum_{i=1}^3 T_{\bar{x}_i x_i}^{k+1} = 0, \quad R = mh^{p_*} > 0, \quad p_* \geq 2 \tag{4.29}$$

$$e_0 = Ra / \text{Pr Re}, \quad \bar{x} \in \Omega_h^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\rho_{*ht}^k + \sum_{s=1}^3 (b_i^+ \rho_{*\bar{x}_i} + b_i^- \rho_{*x_i}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_h^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \tag{4.30}$$

$$\mu_{*ht}^k + \sum_{i=1}^3 (b_i^+ \mu_{*\bar{x}_i} + b_i^- \mu_{*x_i}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_h^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \tag{4.31}$$

где

$$b_i^+ = \frac{1}{2} (v_{hi}^k + |v_{hi}^k|) \geq 0, \quad b_i^- = \frac{1}{2} (v_{hi}^k - |v_{hi}^k|) \leq 0.$$

$$\rho_h^{k+1} = \rho_{*h}^{k+1} (1 - \alpha_0 (T_h^{k+1} - 1)), \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^{k+1} \tag{4.32}$$

$$\mu_h^{k+1} = \mu_{*h}^{k+1} \exp(\beta(1/T_h^{k+1} - 1)), \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^{k+1} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} \rho_{*h}^0(\bar{x}, 0) &= \rho_{*0h}(\bar{x}), \mu_{*h}^0(\bar{x}, 0) = \mu_{*0h}(\bar{x}), T_h^0(\bar{x}, 0) = T_{0h}(\bar{x}), \\ 0 < m_1 &\leq \rho_{*0h} \leq m_2, 0 < n_1 \leq \mu_{*0h} \leq n_2, \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^0 \\ 0 < T_1 &\leq T_h^0(\bar{x}, 0) \leq T_2, T_1, T_2 = const, \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} v_{1h}^k \Big|_{\partial\Omega_{1h}^k} &= v_{2h}^k \Big|_{\partial\Omega_{2h}^k} = v_{3h}^k \Big|_{\partial\Omega_{3h}^k} = 0, T_h^k \Big|_{\partial\Omega_h^k} = T_\Gamma, (k = 0, 1, 2, \dots, N), \\ 0 < T_1 &\leq T_\Gamma^k \leq T_2, T_1, T_2 = const, \bar{x}_h \in \bar{\Omega}_h^k. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Таким образом, дифференциальной начально-краевой задаче (4.15) - (4.23) ставится в соответствие разностная начально-краевая задача (4.24) - (4.35).

**Аппроксимация, реализация.** Система разностных уравнений (4.24) – (4.28) на каждом шаге по времени аппроксимирует исходные уравнения (4.15) – (4.17) с точностью  $O(h^2)$  на достаточно гладком решении при точном задании  $\rho_*, \mu$ . Она записана в дивергентном виде. Граничные условия на твердой стенке выполняются с точностью  $O(h^2)$ , что следует из условия (4.27) соленоидальности вектора скорости и граничного условия (4.35). Разностные операторы градиента и дивергенции сконструированы таким образом, что выполняются условия согласованной аппроксимации дифференциальных операторов градиентов и дивергенции [151, 152]. Система уравнений (4.24) - (4.28) реализуется итерационным методом I (см. п.2.2.3), основанном на идеях Яненко Н.Н. - Кобелькова Г.М. слабой сжимаемости жидкости, либо итерационным методом II (см.п.2.3), основанным на схеме расщепления по физическим процессам.

Уравнения для невозмущенной плотности (4.19) и невозмущенной динамической вязкости (4.20) аппроксимированы, соответственно, консервативными разностными схемами (4.30, 4.31) (против потока донорной ячейки), которые устойчивы и монотонны (выполняется принцип максимума), а также обладают свойствами транспортности при

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sum_{i=1}^3 \max |v_{hi}^k|} \quad (4.36)$$

Условие (4.36) не обременительно при численных расчетах, поскольку компоненты скорости малы и  $\Delta t$  порядка  $h$ . Разностные схемы (4.30), (4.31) обладают свойствами позитивности (при условии (4.36)), которое заключается в том, что разностные решения  $\rho_{*h}^k, \mu_{*h}^k$  уравнений (4.30), (4.31) всегда неотрицательны, если неотрицательны начальные и граничные условия [152, 162]. Из принципа максимума для разностных уравнений (4.30), (4.31) следуют оценки для  $\rho_{*h}^k, \mu_{*h}^k$  [162]:

$$0 < m_1 \leq \rho_{*h}^k \leq m_2, 0 < n_1 \leq \mu_{*h}^k \leq n_2 \quad (4.37)$$

Кроме того, системы разностных уравнений (4.30), (4.31) при заданной скорости однозначно разрешимы, что следует из принципа максимума.

Уравнение теплопроводности (4.18) аппроксимировано явно- неявной разностной схемой (4.29), причем в конвективные члены добавлен регуляризатор  $R$ , который, как нетрудно видеть, представляет собой «искусственную вязкость» [152, 162]. Выбором  $m, p_*$  определенным образом, регулируется зона размазывания разрыва. Конвективный член аппроксимирован направленными разностями против потока, обеспечивающими первый порядок точности по пространственным переменным и, при определенных условиях (об этом будет сказано ниже) гарантируют монотонность разностной схемы (4.18). При этом диффузионный член аппроксимируется со вторым порядком точности. Отметим, что уравнения (4.18) - (4.20) в дифференциальной форме и соответствующие им разностные уравнения (4.29) - (4.31) записаны в не дивергентной форме. Они эквивалентны соответствующим уравнениям, записанным в дивергентной форме в силу условия несжимаемости (4.16) и уравнений (4.19), (4.20) для невозмущенной плотности и

невозмущенной динамической вязкости, или на разностном уровне - в силу (4.27), (4.30), (4.31) [152].

Реализация разностного уравнения (4.29) производится каким-либо итерационным методом для уравнения теплопроводности [142, 145, 146, 152], поскольку конвективные члены аппроксимированы на предыдущем слое по времени и могут быть перенесены в правую часть уравнения (4.29). В дальнейшем разностная схема (4.29) реализуется итерационным методом переменных направлений [142, 145].

Таким образом, разностная начально-краевая задача (4.24) - (4.35) аппроксимирует исходную дифференциальную начально-краевую задачу (4.15) - (4.23) с точностью  $O(\Delta t + h)$ . Кроме того, она консервативна, что для широкого класса задач является необходимым и достаточным условием сходимости разностного решения к точному решению дифференциальной задачи [137].

Реализация начально-краевой задачи проводится следующим образом. При  $t \equiv 0$  из (4.34) известны значения  $\rho_{*h}^0, \mu_{*h}^0, T_h^0$ . Затем из (4.32), (4.33) определяются возмущенная плотность  $\rho_h^0$  и возмущенная динамическая вязкость  $\mu_h^0$ . Итерационным методом II (или I) определяются компоненты скорости  $v_{1h}^0, v_{2h}^0, v_{3h}^0$  и давление  $p_h^0$ , как решения системы разностных уравнений (4.24) - (4.28). Разностное уравнение (4.29) разрешается итерационным методом переменных направлений, что позволяет определить абсолютную температуру  $T_h^1$  на первом временном слое по времени. Явные схемы (4.30), (4.31) позволяют определить  $\rho_{*h}^1, \mu_{*h}^1$ , а затем вновь из соотношений (4.32), (4.33) определяем  $\rho_h^1, \mu_h^1$ , и т.д. Таким образом, определяем разностное решение в  $\bar{Q}_T$ .

Достоинство разностной схемы (4.24) - (4.35) состоит в том, что она соответствует нелинейной системе уравнений (4.15) - (4.23), а ее реализация сводится к последовательному решению серии линейных разностных задач. Чтобы определить

$v_{1h}^k, v_{2h}^k, v_{3h}^k$  в целочисленных узлах сетки, а значения вязкости и плотности в дробных узлах, необходимо провести линейную интерполяцию.

Для удобства дальнейших выкладок сделаем замену сеточных функций

$$\begin{aligned} v_{1h}^k(x_1 - \frac{h}{2}, x_2, x_3) &\equiv v_1^{*k}(x_1, x_2, x_3), v_{2h}^k(x_1, x_2 - \frac{h}{2}, x_3) \equiv v_2^{*k}(x_1, x_2, x_3), p_h^k = p^{*k}, \\ v_{3h}^k(x_1, x_2, x_3 - \frac{h}{2}) &\equiv v_3^{*k}(x_1, x_2, x_3), \rho_{*h}^k \equiv \rho_h^{*k}, \mu_{*h}^k \equiv \mu_h^{*k}, \rho_h^k \equiv \rho^{*k}, \mu_h^k \equiv \mu^{*k}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

которые определяются в  $\Omega_h^k$  ( $p_h^k$  - определяется в  $\bar{\Omega}_{4h}^k$ ). Тогда разностную начально-краевую задачу (4.24) - (4.35) можно записать в виде (штрихи над новыми функциями опущены):

$$\bar{\nabla}_h p^k + A(\mu^k) \bar{v}^k = \bar{f}^k, \bar{x} \in \Omega_h^k \quad (4.39)$$

$$\text{div}_h \bar{v}^k = 0, \bar{x} \in \bar{\Omega}_{4h}^k \quad (4.40)$$

$$\sum_{\bar{x} \in \bar{\Omega}_{4h}^k} p^k h^3 = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (4.41)$$

$$\rho_{*h}^k (T_{ht}^k + \sum_{s=1}^3 ((b_i^+ + R) T_{h\bar{x}_i}^k + (b_i^- - R) T_{hx_i}^k)) - e_0 \sum_{i=1}^3 T_{\bar{x}_i, x_i}^{k+1} = 0, R = mh^{p_*} > 0, p_* \geq 2 \quad (4.42)$$

$$e_0 = Ra/\text{Pr Re}, \bar{x} \in \Omega_h^k, (k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\rho_{*t}^k + \sum_{s=1}^3 (b_i^+ \rho_{*\bar{x}_i} + b_i^- \rho_{*x_i}) = 0, \bar{x} \in \Omega_h^k, (k = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (4.43)$$

$$\mu_{*t}^k + \sum_{i=1}^3 (b_i^+ \mu_{*\bar{x}_i} + b_i^- \mu_{*x_i}) = 0, \bar{x} \in \Omega_h^k, (k = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (4.44)$$

$$\rho^{k+1} = \rho_*^{k+1} (1 - \alpha_0 (T^{k+1} - 1)), \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^{k+1} \quad (4.45)$$

$$\mu^{k+1} = \mu_*^{k+1} \exp(\beta(1/T^{k+1} - 1)), \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^{k+1} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
\rho_*^0(\bar{x}, 0) &= \rho_{*0}(\bar{x}), \mu_*^0(\bar{x}, 0) = \mu_{*0}(\bar{x}), T^0(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x}), \\
0 < m_1 &\leq \rho_{*0} \leq m_2, \quad 0 < n_1 \leq \mu_{*0} \leq n_2, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^0 \\
0 < T_1 &\leq T_h^0(\bar{x}, 0) \leq T_2, T_1, T_2 = const, \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_h^0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}^k \Big|_{\partial\Omega_h^k} &= \bar{0}, T^k \Big|_{\partial\Omega_h^k} = T_\Gamma, \quad (k=0,1,2,\dots,N) \\
0 < T_1 &\leq T_{\Gamma h}^k \leq T_2, T_1, T_2 = const, \quad \bar{x}_h \in \bar{\Omega}_h^k,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{v}^k &= (v_1^k, v_2^k, v_3^k)^T, \bar{\nabla}_h p^k = (p_{\bar{x}_1}^k, p_{\bar{x}_2}^k, p_{\bar{x}_3}^k)^T, div_h \bar{v}^k = v_{1x_1}^k + v_{2x_2}^k + v_{3x_3}^k \\
\bar{f}^k &= -\frac{1}{2}(0, 0, \rho^k(x_1, x_2, x_3 - h) + \rho^k(x_1, x_2, x_3))^T
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$A(\mu^k) \bar{v}^k \equiv - \begin{pmatrix} 2(av_{1\bar{x}_1})_{x_1}^k + (bv_{1\bar{x}_2})_{x_2}^k + (cv_{1\bar{x}_3})_{x_3}^k + (bv_{2\bar{x}_1})_{x_2}^k + (cv_{3\bar{x}_1})_{x_3}^k \\ (bv_{1\bar{x}_2})_{x_1}^k + (bv_{2\bar{x}_1})_{x_1}^k + 2(dv_{2\bar{x}_2})_{x_2}^k + (cv_{2\bar{x}_3})_{x_3}^k + (ev_{3\bar{x}_2})_{x_3}^k \\ (cv_{1\bar{x}_3})_{x_1}^k + (ev_{2\bar{x}_3})_{x_2}^k + (cv_{3\bar{x}_1})_{x_1}^k + (ev_{3\bar{x}_2})_{x_2}^k + 2(gv_{3\bar{x}_3})_{x_3}^k \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
a^k(\bar{x}) &\equiv \mu^k(x_1 - h, x_2, x_3), b^k(\bar{x}) \equiv \mu^k\left(x_1 - h, x_2 - \frac{h}{2}, x_3\right), \\
c^k(\bar{x}) &\equiv \mu^k\left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2, x_3 - \frac{h}{2}\right), d^k(\bar{x}) \equiv \mu^k(x_1, x_2 - h, x_3), \\
e^k(\bar{x}) &\equiv \mu^k\left(x_1, x_2 - \frac{h}{2}, x_3 - \frac{h}{2}\right), g^k(\bar{x}) \equiv \mu^k\left(x_1, x_2, x_3 - \frac{h}{2}\right).
\end{aligned} \right\} \tag{4.51}$$

В случае постоянной динамической вязкости во всей области под  $A(\mu)$  следует понимать разностный оператор Лапласа:

$$-\Delta_h f \equiv -(f_{\bar{x}_1 x_1} + f_{\bar{x}_2 x_2} + f_{\bar{x}_3 x_3}) \tag{4.52}$$

**Устойчивость, монотонность. Теорема существования и единственности разностного решения.** Пусть  $\omega$  - конечное множество узлов (сетка) в некоторой ограниченной области  $n$ -мерного евклидова пространства,  $P \in \omega$ -точка сетки  $\omega$ . Рассмотрим уравнение [145, 152]:

$$A(P)T(P) = \sum_{Q \in \mathcal{N}'(P)} B(P, Q)T(Q) + F(P), \quad P \in \omega, \quad (4.53)$$

для функции  $T(P)$ , заданной на сетке  $\omega$ . Здесь  $A(P), B(P, Q), F(P)$ -заданные сеточные функции,  $\mathcal{N}'(P) \subset \omega$ -множество узлов сетки  $\omega$ , не содержащее узла  $P$ , - окрестность узла  $P$ . Шаблон сеточного уравнения (4.53) состоит из самого узла  $P$  и его окрестности  $\mathcal{N}'(P)$ .

В дальнейшем предполагается, что коэффициенты (4.53) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} A(P) > 0, B(P, Q) > 0 \\ D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{N}'(P)} B(P, Q) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

для любых  $P \in \omega$  и  $Q \in \mathcal{N}'(P)$ ,

Точка  $P$  называется граничным узлом сетки  $\omega$ , если в этой точке задано значение функции  $T(P)$ , т.е.

$$T(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma, \quad (4.55)$$

где  $\gamma$  - множество граничных узлов. Из сравнения (4.53) и (4.55) видно, что на границе  $\gamma$  следует формально положить:

$$A(P) = 1, B(P, Q) = 0, F(P) = \mu(P).$$

Узлы, в которых выполняются уравнения (4.53) при условии (4.54), называются внутренними узлами сетки, а  $\bar{\omega} = \omega + \gamma$  - множество всех узлов сетки. Далее предполагается, что сетка  $\omega$

- связная [145, 152], т.е. для любых точек  $P_1, P_2 \in \omega$  существует такая последовательность окрестностей  $\{Ш'(P)\}$ , что можно совершить переход от  $P_1$  к  $P_2$ , используя лишь узлы этих окрестностей.

Уравнение (4.53) можно записать в виде:

$$LT(P) = F(P), \quad (4.56)$$

где

$$LT(P) = A(P)T(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P, Q)T(Q) \quad (4.57)$$

Принцип максимума формулируется следующим образом [145, 152]. Пусть  $T(P) \neq const$  - сеточная функция, определенная на связной сетке  $\bar{\omega}$  и пусть выполнены условия (4.54). Тогда из условия  $LT(P) \leq 0$  на  $\omega$  следует, что  $T(P)$  не может принимать положительного значения во внутренних узлах сетки  $T(P) \neq const$ .

Запишем разностное уравнение энергии (4.42) в канонической форме (4.57).

$$\begin{aligned} (\rho_{ij}^k + \frac{6e_0 \Delta t}{h^2}) T_{ij}^{k+1} = \frac{e_0 \Delta t}{h^2} \{ (T_{i+1, j}^{k+1} + T_{i-1, j}^{k+1}) + (T_{ij+1}^{k+1} + T_{ij-1}^{k+1}) + (T_{ij+1}^{k+1} + T_{ij-1}^{k+1}) \} + \left\{ 1 - \frac{\Delta t}{h} (|v_1^k| + |v_2^k| + |v_3^k| + 6R) \right\} \rho_{ij}^k T_{ij}^k + \\ + \frac{\Delta t}{h} \{ (b_1^+ + R) T_{i-1, j}^k - (b_1^- - R) T_{i+1, j}^k + (b_2^+ + R) T_{ij-1}^k - (b_2^- - R) T_{ij+1}^k + (b_3^+ + R) T_{ij-1}^k - (b_3^- - R) T_{ij+1}^k \} \rho_{ij}^k \end{aligned} \quad (4.58)$$

В этом случае  $P$  есть узел сетки  $\bar{\omega} = \bar{\Omega}_p^{k+1} : P = P(x_{ijl}, t_{k+1})$ ,  $Ш'(P)$  состоит из узлов:

$$\begin{aligned} Q_1 = (x_{ijl}, t_k), Q_2 = (x_{i-1, jl}, t_{k+1}), Q_3 = (x_{ij-1l}, t_{k+1}), Q_4 = (x_{ijl-1}, t_{k+1}), Q_5 = (x_{i+1, jl}, t_{k+1}), Q_6 = (x_{ij+1l}, t_{k+1}) \\ Q_7 = (x_{ij+1, l}, t_{k+1}), Q_8 = (x_{i-1, jl}, t_k), Q_9 = (x_{ij-1l}, t_k), Q_{10} = (x_{ijl-1}, t_k), Q_{11} = (x_{i+1, jl}, t_k), Q_{12} = (x_{ij+1l}, t_k), \\ Q_{13} = (x_{ijl+1}, t_k), \end{aligned}$$

граница  $\gamma$  состоит из узлов  $\bar{\Omega}_h^0, \partial\bar{\Omega}_h^{k+1}$ . Нетрудно видеть, что  $\bar{\omega}$ -связная область.

Из (4.58) видно, что  $A(P) > 0, F(P) = 0, D(P) = 0$ , коэффициенты, стоящие в первых и третьих фигурных скобках  $B(P, Q) > 0$ . Потребуем, чтобы коэффициент во-вторых фигурных скобках был строго положительен. Положив

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sum_{i=1}^3 |v_i^k| + 6R}, \quad (4.59)$$

обеспечим строгую положительность второй фигурной скобки. В частности, выбирая  $m = 1/6, p_* = 2$ , получим:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sum_{i=1}^3 |v_i^k| + h^2} \quad (4.60)$$

Условие (4.60) не сильно отличается от условия (4.36), обеспечивающих устойчивость и монотонность разностных схем (4.43), (4.44).

Условие ограничения (4.60) на шаг по времени достаточно для выполнения принципа максимума для разностного уравнения (4.42). Из принципа максимума [145, 152] следует непрерывная зависимость решения разностного уравнения (4.42) от начальных и граничных условий:

$$\|T^k\|_{\infty} \leq \|T^0\|_{\infty} + \|T_r^k\|_{\infty}, \quad (4.61)$$

а также положительность температуры в любой момент времени, которая удовлетворяет соотношению (см. (4.47)):

$$0 < T_1 \leq T_h^k \leq T_2, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (4.62)$$

Таким образом, при выполнении (4.60) разностная схема устойчива и монотонна. Из (4.47), (4.48) принципа максимума и (4.62) следуют неравенства:

$$0 < \rho_{*h}^k (1 - \alpha_0(T_2 - 1)) \leq \rho_h^k \leq \rho_{*h}^k (1 - \alpha_0(T_1 - 1)) \leq \rho_{*h}^k, \quad (4.63)$$

$$n_1^* \leq \mu_h^k \leq n_2^* \leq \mu_{*h}^k, \quad n_1^* = \mu_{*h}^k \exp\{\beta(1/T_2^k - 1)\}, \quad n_2^* = \mu_{*h}^k \exp\{\beta(1/T_1^k - 1)\},$$

$$\|\rho^k\| \leq \|\rho_*^k\| \leq c \|\rho_*^0\|_\infty \leq c \|\rho_*^0\|_\infty$$

В последнем неравенстве (4.63) постоянная  $c$  равна корню квадратному из объема расчетной области. Полагая в (4.61)  $T^0, T_r^k = 0$ , получим, что однородная система разностных уравнений (4.42) имеет тривиальное решение. Следовательно, неоднородная система уравнений (4.42) имеет единственное решение.

Умножим уравнение (4.39) на  $\vec{v}^k$ , а (4.40) - на  $p^k$  и результаты сложим. Используя формулы суммирования по частям (2.50), определение  $\vec{f}^k$ , неравенства Коши – Буняковского (2.44), Фридрихса (2.42) и треугольника (2.47), а также (4.62), (4.63), получим:

$$n_1^* \|\vec{v}^k\|_1^2 \leq c_3 \|\vec{f}^k\| \|\vec{v}^k\|_1 \leq c_4 \|\rho_*^0\|_\infty \cdot \|\vec{v}^k\|_1$$

Отсюда

$$\|\vec{v}^k\|_1 \leq c_1 \|\rho_*^0\|_\infty \quad (4.64)$$

Умножая (4.39) скалярно на  $\vec{\varphi}$ . С учетом формул суммирования по частям и (2.103), имеем:

$$\|p^k\|_* \leq \sup_{\substack{\vec{\varphi}|\partial\Omega_h^k=0 \\ \|\vec{\varphi}\|_1=1}} \left| \left( \vec{\varphi}, \vec{f}^k \right) \right| + \sup_{\substack{\vec{\varphi}|\partial\Omega_h^k=0 \\ \|\vec{\varphi}\|_1=1}} \left| \left( A(\mu^k) \vec{v}^k, \varphi \right) \right|,$$

а используя обобщенное неравенство Коши – Буняковского (2.44), (2.103), равномерную ограниченность оператора  $A(\mu)$ , (4.64), получим:

$$\|p^k\|_{L_2(\bar{\Omega}_{4h}^k)} \leq c_0 \|p^k\|_* \leq 2c_0 \sup_{\vec{\varphi}|\partial\Omega_h^k=0, \|\vec{\varphi}\|_1=1} \left\{ \|\vec{\varphi}\|_1 \cdot \|p^k\| + \sqrt{A(\mu^k) \vec{v}^k, \vec{v}^k} (A(\mu^k) \vec{\varphi}^k, \vec{\varphi}^k) \right\} \leq$$

$$\leq c_1 \|p^k\| \leq c_2 \|\rho_*^0\|_\infty \quad (4.65)$$

Следовательно, для разностной краевой задачи (4.39) - (4.41) с условиями прилипания на границе области при выполнении (4.60) имеем равномерную оценку

$$\|\bar{v}^k\|_1 + \|p^k\|_{L_2(\Omega_h^k)} \leq c_5 \|\rho_*^0\|_\infty, \quad (4.66)$$

которая выражает устойчивость разностной краевой задачи. Из нее следует теорема существования и единственности разностного решения. Действительно, полагая в (4.66)  $\|\rho_*^0\|_\infty \equiv 0$ , получим, что система линейных разностных уравнений (4.39) - (4.41) имеет тривиальное решение. Поэтому при  $\rho_*^0 \neq 0$  соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение.

Учитывая приведенные выше замечания об устойчивости разностных схем (4.43) - (4.46) с начальными и краевыми условиями (4.47), (4.48), а также оценку (4.66) и замечания об единственности разностных схем, получим следующий результат: разностная начально-краевая задача (4.39) - (4.51) при условии (4.60) однозначно разрешима, устойчива, и для ее решения справедлива оценка

$$\|\bar{v}^k\|_1 + \|p^k\|_{L_2(\Omega_h^k)} + \|\mu_*^k\|_\infty + \|\rho_*^k\|_\infty + \|T^k\|_\infty \leq c_1 \|\rho_*^0\|_\infty + c_2 \|\mu_*^0\|_\infty + c_3 \|T^0\|_\infty + c_4 \|T_\Gamma\|_\infty \quad (4.67)$$

**Блок - схема программных средств.** В соответствии с календарным планом в третьем и четвертых кварталах 2016 года были разработаны и отлажены программные средства на алгоритмическом языке «Delphi» [25, 26] для расчета плоских (2D модель) и пространственных (3D модель) разностных начально-краевых задач, описывающих процесс формирования соляных диапиров глубокого залегания. Блок-схема разработанных программ (рисунок 2) состоит из следующих модулей: 1. Ввода входных параметров, начальных и граничных условий; 2. Расчета плотности, динамической вязкости; 3. Расчета компонент скоростей и давления; 4. Расчета абсолютной

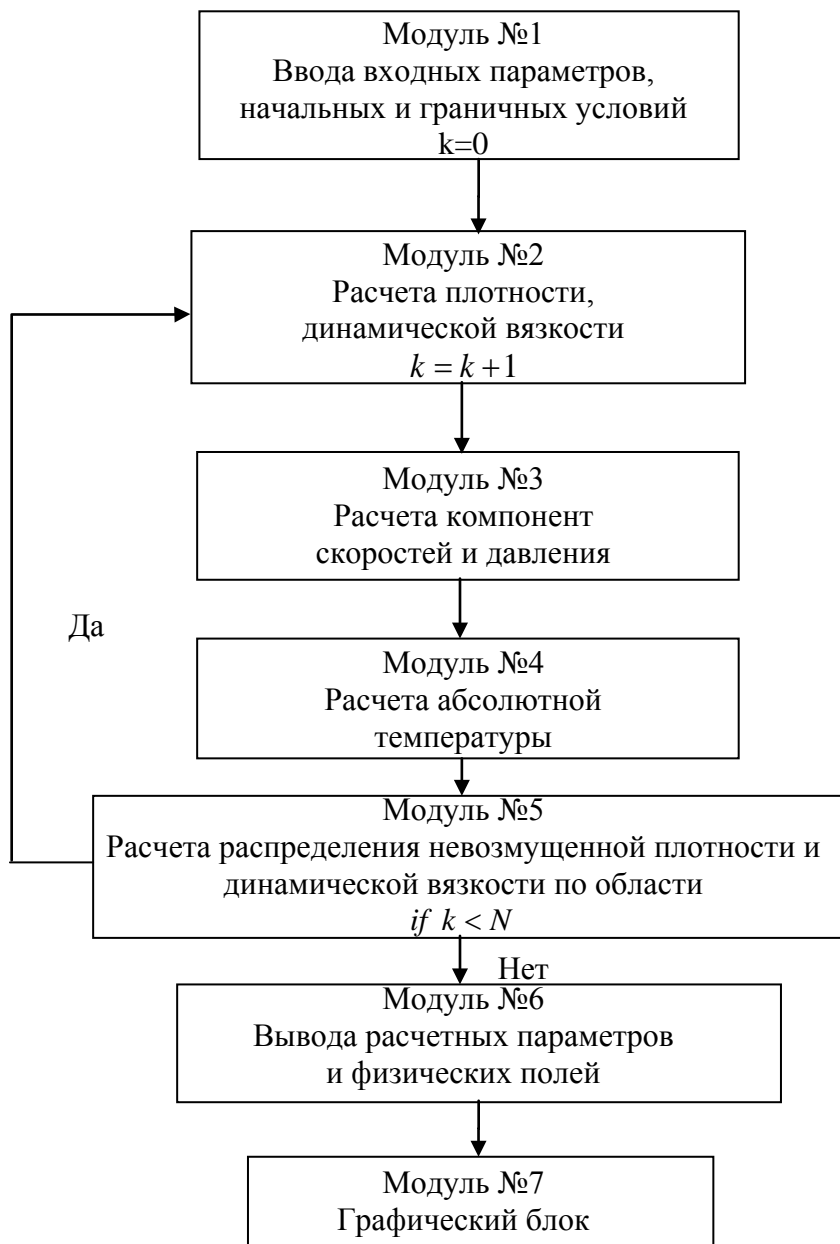


Рисунок 58 - Блок-схема программы «тепловой соляной  
диапир»

температуры; 5. Расчета распределения невозмущенной плотности и динамической вязкости по области; 6. Вывода расчетных параметров и физических полей; 7. Графического блока.

В первом модуле вводятся физико-геометрические параметры среды, начальные и граничные условия для невозмущенной плотности, динамической вязкости, абсолютной температуры.

Во втором модуле в начальный момент времени определяются значения плотности, динамической вязкости по области в зависимости от распределения абсолютной температуры по области.

В третьем модуле с помощью схемы расщепления по физическим процессам вычисляются значения компонент скорости и давления в начальный момент времени с использованием итерационного процесса верхней релаксации.

В четвертом модуле рассчитывается распределение абсолютной температуры по области из уравнения энергии на первом временном слое по времени с помощью явно-неявной схемы, с использованием итерационного процесса переменных направлений

При этом конвективные члены в уравнении энергии аппроксимируются явной схемой донорной ячейки против потока с использованием регуляризаторов, а диффузионные члены - неявной схемой, что обеспечивает монотонность разностной схемы.

В пятом модуле вычисляются значения невозмущенной плотности и динамической вязкости на первом слое по времени с помощью схем донорной ячейки против потока. Рассчитываются также поля напряжений и девиаторов касательных напряжений. Затем управление передается на второй модуль. Значения невозмущенной плотности и динамической вязкости, абсолютной температуры на нулевом слое по времени заменяются на соответствующие значения невозмущенной плотности и динамической вязкости, абсолютной температуры, и далее процесс вычислений повторяется. В результате вычислений определяются значения всех неизвестных величин на всех расчетных шагах по времени.

В шестом модуле выводятся на печать значения расчетных параметров и распределения физических полей, а также полей девиаторов касательных напряжений.

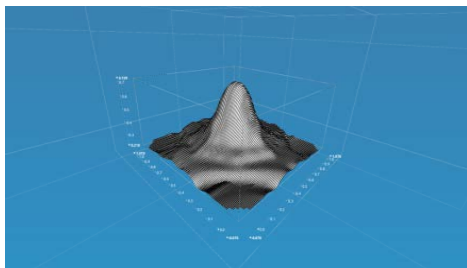
В седьмом модуле строятся границы раздела сред, строятся графики расчетных параметров, распределения изотерм и изолиний девиаторов касательных напряжений, необходимых для геофизической интерпретации. Для 2D модели, в соответствии с теорией однородных разностных схем, границы раздела сред строятся, как местоположения точек, в которых значение невозмущенной плотности равно половине суммы значений невозмущенных плотностей сопряженных подобластей. Поскольку в 3D модели расчет поверхностей раздела сред затруднен спецификой задачи, то в пятом модуле вводятся координаты маркеров, которые позволяют определять поверхности раздела сред и проследивать их эволюцию.

### ***4.3 Результаты расчетов***

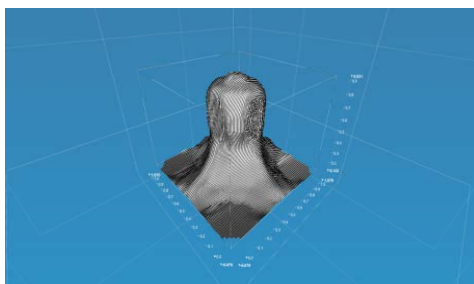
На рисунках 59а – 59в показано трехмерное формирование соляного диапира в глубоко залегающих осадочных комплексах в различные моменты безразмерного времени при определенных физико-геометрических параметрах осадочного чехла и каменной соли (галита). В начальный момент времени слои были горизонтальными. Температура на верхней стенке задавалась  $0\text{C}^0$ , на нижней -  $250\text{C}^0$ . В центральной части нижней границы температура задавалась на  $50\text{C}^0$  выше (моделирует неоднородность теплового потока с нижних слоев Земли). Динамические вязкости слоев в первом приближении [134] выбраны независимыми от температуры.

На рисунке 59б шапка купола- вытянутая. На рисунке 59в в развитой фазе шапка купола приплюснутая, в силу того, что на нее начинает активно действовать верхняя стенка области. Расчеты показали, что термические градиенты существенно влияют как на объемные профили, так и на скорость формирования соляных диапиров глубокого залегания. Процесс

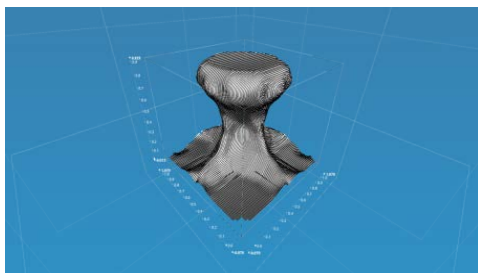
гравитационной неустойчивости преобладает над тепловыми эффектами [11].



а)  $t=0.3$



б)  $t=0.65$

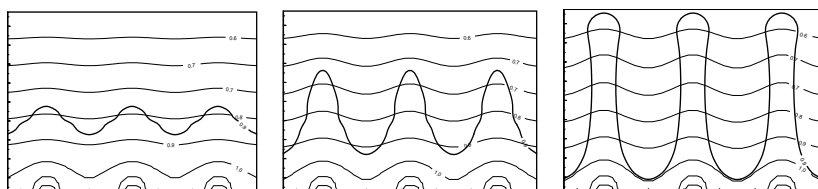


в)  $t=1.1$

$$\mu_{*2} = 2 \cdot 10^{17} \text{ П}, \mu_{*1} = 5 \cdot 10^{17} \text{ П}$$

Рисунок 59-Пространственные профили глубинного соляного диапиризма

На рисунках 60а - 60с показано формирование соляных столбов от трех температурных возмущений теплового потока (при динамической вязкости, независимой от температуры). Там же показано распределение изотерм во времени. Наличие относительно близкорасположенных температурных возмущений теплового потока с нижних горизонтов земной коры не позволяют сформироваться округлым, грибообразным соляным структурам. Они мешают друг другу сформироваться в грибообразные структуры, но за счет действия архимедовых сил процесс «всплытия» галита продолжается, и, как результат, образуются соляные столбы. Ранее образование подобных структур авторами данной работы было объяснено за счет усложненной реологии (вязко-пластичная модель), которая обладает свойствами «продомости» жидкости Вейссемберга [44, 45].



a)  $t=0.25$

b)  $t=0.45$

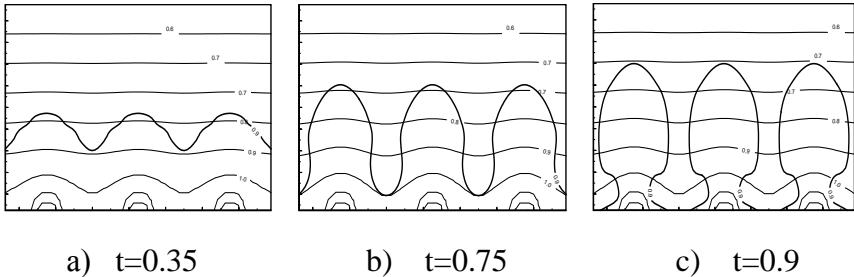
c)  $t=0.65$

$$\mu_{*2} = 10^{18} \text{ П}, \mu_{*1} = 2 \cdot 10^{18} \text{ П}$$

Рисунок 60 - Формирование соляных столбов от трех температурных возмущений теплового потока (при динамической вязкости, независимой от температуры)

На рисунках 61а – 61с показано формирование соляных куполов глубокого залегания в различные моменты безразмерного времени, рассчитанных на основе общей тепловой модели. Параметры, начальные и граничные условия выбраны такими же, как и в упрощенной модели (рисунок 60). Изотермы со временем слегка искривляются, что связано

действием на нижней стенке неоднородного теплового потока и тепловой диффузии в области. Из сопоставление рисунков 60а - 60с и 61а -61с видно, что для более общей тепловой модели процесс формирования соляных куполов замедляется, и профили соляных куполов существенно отличаются от профилей соляных столбов.

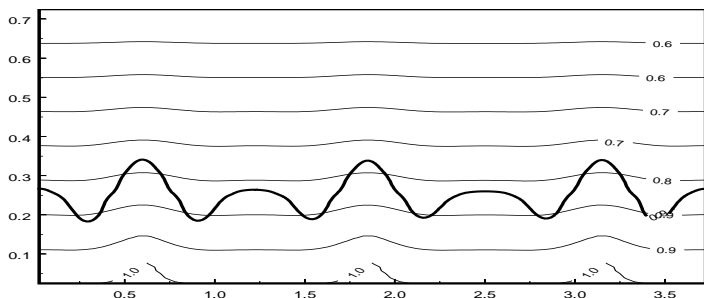


$$\mu_{*2} = 10^{18} \text{ П}, \mu_{*1} = 2 \cdot 10^{18} \text{ П}$$

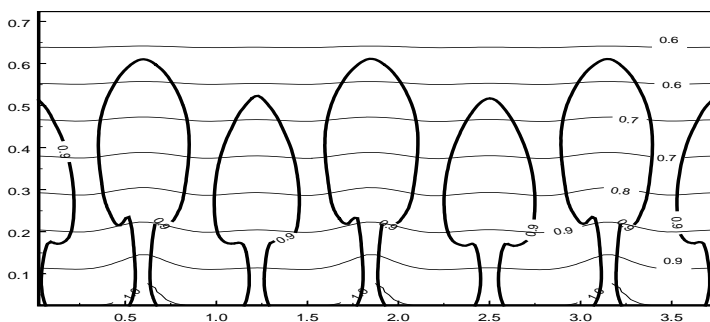
Рисунок 61- Формирование соляных диапиров глубокого залегания от трех температурных возмущений теплового потока (при динамической вязкости, экспоненциально зависящей от температуры)

Связано это с тем, что динамическая вязкость за счет действия температуры с высотой увеличивается, и процесс внедрения легкой жидкости в тяжелую происходит более узким фронтом [12, 13, 17], в результате образуется «листьеобразная» структура (рисунок 61с).

На рисунках 62а -62б показано формирование семейства соляных куполов на основе общей тепловой модели от трех разнесенных тепловых источников. Как видно из рисунка 62а, между тремя образующимися основными куполами от тепловых источников формируются вторичные соляные купола, которые вместе с основными куполами в развитой фазе имеют «листьеобразную» структуру. Отметим, что для упрощенной тепловой и чисто динамической моделей (при тех же параметрах) купола будут иметь грибообразную форму.



a)  $t=0.35$

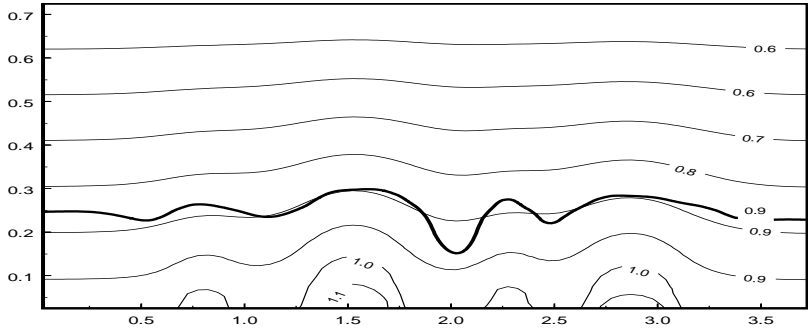


b)  $t=0.85$

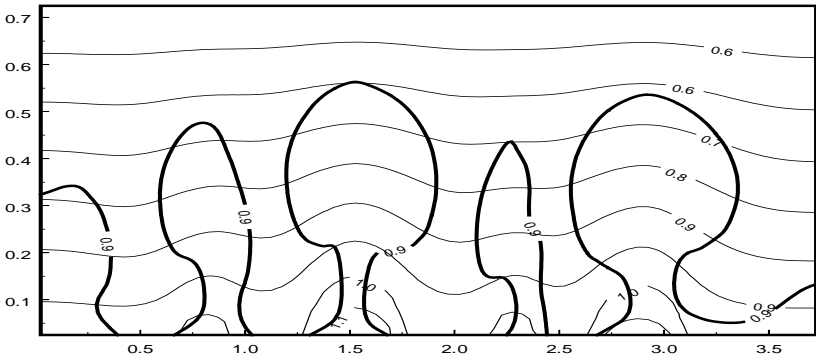
$$\mu_{*2} = 10^{18} \text{ П}, \mu_{*1} = 2 \cdot 10^{18} \text{ П}$$

Рисунок 62- Формирование семейства соляных диапиров глубокого залегания от трех температурных возмущений теплового потока (при динамической вязкости, экспоненциально зависящей от температуры)

На рисунках 63а - 63б показано формирование соляных диапиров при экспоненциальной зависимости динамической вязкости от температуры от четырех разных по интенсивности источников тепла (слева направо - 0.1, 0.2, 0.13, 0.16), а на рисунках 64а - 64б при тех же условиях, когда динамические вязкости слоев не зависят от температуры.

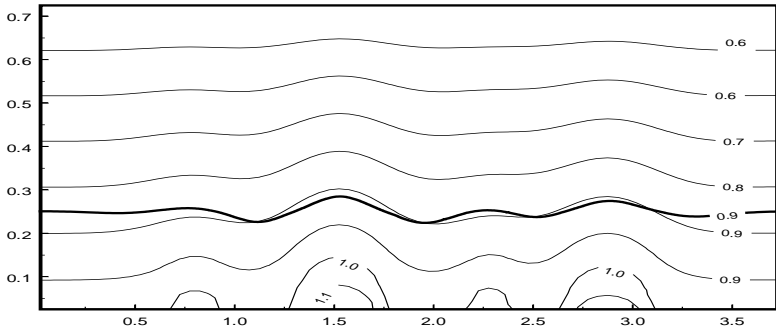


а)  $t=0.5$

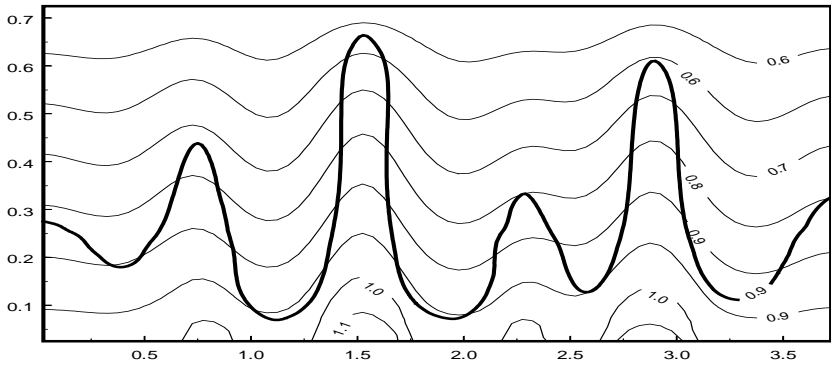


б)  $t=0.9$

Рисунок 63- Формирование соляных диапиров при экспоненциальной зависимости динамической вязкости от температуры от четырех разных по интенсивности источников тепла



а)  $t=0.5$



б)  $t=0.75$

Рисунок 64- Формирование соляных диапиров при динамической вязкости, независящей от температуры от четырех разных по интенсивности источников тепла

Как видно из этих рисунков, профили соляных куполов, картины их формирования во времени существенно отличаются.

Приведенные расчеты говорят о том, что температура, локальные источники тепла и усложненная реология являются весомыми факторами зарождения, развития и формирования глубинной соляно-купольной тектоники.

#### 4.4 Нефтегазовые ловушки

На фоне гидростатического давления, обусловленного залеганием слоёв горных пород, процесс формирования соляного диапиризма происходит за счет изменения во времени напряженно-деформируемого состояния слоёв горных пород и сопровождается образованием повышенных и пониженных зон концентраций напряжений и деформаций. Каменная соль (галит) представляет собой достаточно пластичный материал. Осадочный чехол и подсолевое ложе на больших отрезках времени хорошо аппроксимируются сильно вязкой несжимаемой жидкостью. На небольших отрезках времени они являются хрупкими горными породами, механизмом разрушения которых является хрупкое растрескивание (разрушение), сопровождающееся дилатансией. Именно благодаря тому, что горные породы обладают хрупким разрушением, в зонах повышенных концентраций напряжений происходит разрушение с образованием порового пространства, снимаются избыточные напряжения. В результате образуются локальные зоны пониженных напряжений (нефтегазовые ловушки), куда и мигрируют находящиеся в пластах горных пород углеводороды. Для соляных куполов нефтегазовые ловушки формируются в областях их крыльев (надкрылового и подкрылового пространства), а также в области подкупольного пространства подсолевого ложа, что было обнаружено геофизическими изысканиями и глубинным бурением соляных диапиров.

При расчете на прочность горных пород обычно используется критерий прочности, достаточный для практики, который гласит: если девиатор касательных напряжений  $\tau$  меньше определенного предела  $\tau_{np}$ , то разрушение горной породы не происходит; если девиатор касательных напряжений  $\tau$  больше или равен  $\tau_{np}$ , то происходит разрушение горной породы. Для плоской деформаций он выглядит так:

$$\tau = \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} \leq \tau_{np}$$

Заметим, что  $\tau_{np} \ll \tau_T = 0.1G$ , где  $\tau_T$  – теоретическая прочность при сдвиге,  $G$  – модуль сдвига верхнего горизонта земной коры. Условие  $\tau_{np} \ll \tau_T = 0.1G$  связано с тем, что в кристаллических твердых телах имеются дефекты – дислокации, трещины и их комбинации, что и понижает практический предел прочности горных пород относительно теоретического.

Поэтому для выделения возможных зон коллекторов нефти и газа схема расчета была принята следующей. Сначала численным моделированием определялись поле давлений, скоростей и температуры. Затем численным дифференцированием (через центральные разности на разнесенных сетках) строились поля напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и  $\tau$ . Выделялись зоны повышенных концентраций девиатора касательных напряжений и по ним определялись наиболее вероятные зоны нефтегазовых ловушек. Для изотропного упругого (вязкого) тела тензоры напряжений и деформаций (тензоры скоростей деформации) соосны. Поэтому зонам повышенных или пониженных напряжений соответствуют зоны повышенных или пониженных компонент тензора деформаций (тензора скоростей деформаций). Следовательно, достаточно выделить зоны концентраций напряжений. Схема расчета пространственной модели аналогично плоской (с соответствующим пересчетом девиатора касательных напряжений для пространственного случая). В данном исследовании авторы ограничились рассмотрением плоской модели с выделением нефтегазовых ловушек на основе оценки зон, где максимален девиатор касательных напряжений.

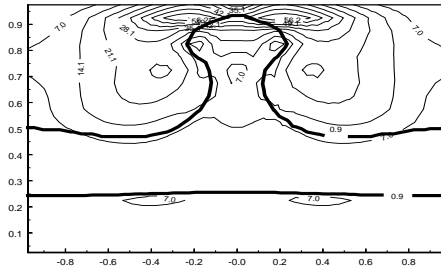
**Чисто динамическая модель.** На рисунках 65а - 65в показано чисто динамическое формирование соляного диапира для трехслойной модели. На них же нанесены изолинии девиаторов касательных напряжений. На всех границах расчетной области задавалось условие прилипания. Такой процесс описывается безразмерной системой уравнений (7) - (11), в которой необходимо положить  $T \equiv 0$ ,  $\rho \equiv \rho^*$ , а число Релея  $Ra$  заменить на отношение числа Рейнольдса

$Re = U_* H_0 / \nu_*$  к числу Фруда  $Fr = U_*^2 / g H_0$ , характеризующее движение вязкой жидкости в поле сил тяжести [1]. Здесь  $U_*$ ,  $\nu_*$  - характерные масштабы скорости и кинематической вязкости соответственно. Напомним, что в задаче о тейлоровской неустойчивости отсутствует характерный масштаб скорости, то в качестве последнего принимается "вязкая" скорость:

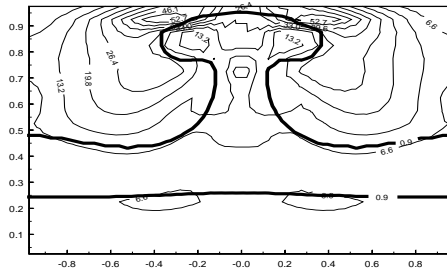
$$U_* = g^{\frac{1+n}{2}} H_0^{\frac{1+3n}{2}} \nu_*^{-n},$$

где  $n$  - произвольное число. Выбирая  $n$  определенным образом, получим необходимый масштаб скорости [1]. Тогда характерное время определяется как  $t_* = H_0 / U_*$ .

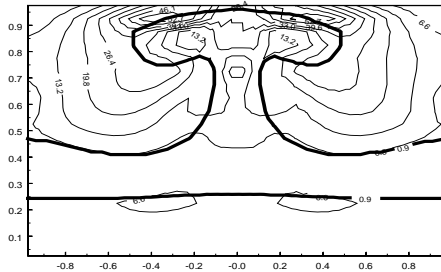
Поднимаясь вверх, соляной купол вспарывает вышележащие нефтяные пласты осадочного чехла, формируя в нем зоны повышенных девиаторов касательных напряжений в надкрыловом пространстве (рисунок 65а). Когда девиаторы касательных напряжений достигают критического значения, в этих зонах происходит хрупкое разрушение и сброс напряжений. Динамическое давление понижается, что способствует миграции углеводородов, т.е. образованию нефтегазовых ловушек. Со временем увеличиваются интенсивность внедрения в вышележащие слои осадочного чехла и размеры купола (рисунки 65б, 65в). Это приводит к радиальному перемещению нефтегазовых ловушек в областях надкрылового пространства и дополнительной миграции углеводородов в них. Одновременно в зонах подкрылового пространства увеличивается интенсивность девиатора касательных напряжений (рисунки 65б, 65в), что создает условия для образования новых нефтегазовых ловушек. Таким образом, формирование и развитие купола сопровождается возникновением и увеличением объема нефтегазовых ловушек в при купольных областях.



а)  $t=0,4$



б)  $t=0,6$



в)  $t=0,8$

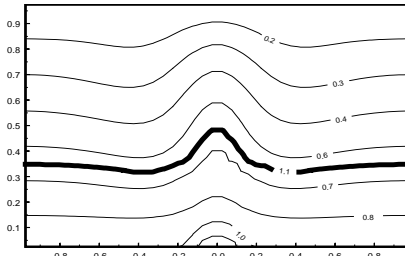
$$\mu_1 = 10^{18} \text{ П}, \mu_2 = 10^{17} \text{ П}, \mu_3 = 10^{19} \text{ П}$$

Рисунок 65 - Формирование соляного купола во времени (трехслойная модель) и распределение изолиний девиатора касательных напряжений

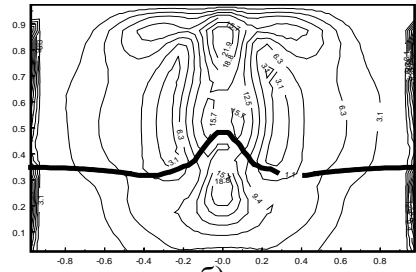
На рисунках 65а - 65в видно слабое искривление подсолевого ложа вследствие его низко интенсивного течения. Ранее (см.п.3.2) было установлено, что характер перемещения галита в трехслойной среде сильно отличается от двухслойной, поскольку подошва сцеплена с деформированным основанием, которое в процессе гравитационной неустойчивости вовлекается в движение вверх по тем же каналам, что и галит, хотя плотность подсолевого слоя выше плотности галита. Это объясняется тем, что соляной купол, двигаясь вверх, вытесняет тяжелый надсолевой слой вниз, вследствие чего под куполом образуется область пониженного давления, куда и перетекает часть подсолевого слоя. Следует отметить, что когда вязкость подсолевого слоя примерно на 2 порядка больше вязкости галита, то процесс развития неустойчивости будет происходить так же, как и в двухслойной модели, т.е. подсолевой слой не деформируется. При уменьшении разрыва вязкостей слоев подсолевое ложе деформируется более значительно, создавая предпосылки для формирования коллекторов нефти и газа, более крупных, чем прикупольные.

**Динамическая модель с учетом температуры.** На рисунках 66а - 66е показано формирование основного соляного диапира и вторичных диапиров в различные моменты безразмерного времени. Первоначальное распределение температуры по пространству было задано линейной функцией вертикальной координаты. На верхней стенке поддерживалась нулевая температура, на нижней  $-250^{\circ}\text{C}$ . В двух точках расчетной сетки, моделирующих локальный источник тепла, температура задавалась на  $50^{\circ}\text{C}$  выше. Первоначальная граница раздела – прямая линия. Кроме того, на рисунках 66а, 66в, 66д изображены изотермы  $T=\text{const}$ , а на рисунках 66б, 66г, 66е изображены изолинии девиатора касательных напряжений  $\tau = \text{const}$ .

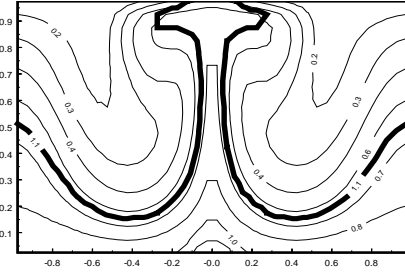
Расчеты показали, что величина компонент напряжений для развитой фазы примерно в 2 - 2,5 раза больше, чем для менее развитой фазы. Верхняя часть надкупольного пространства и самого купола представлена растягивающими горизонтальными напряжениями и сжимающими вертикальными напряжениями.



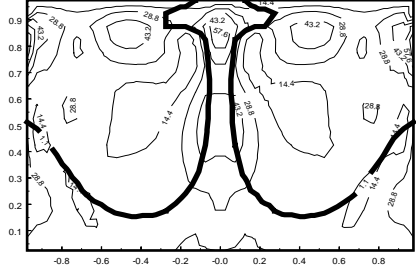
а)  $t=0,3$



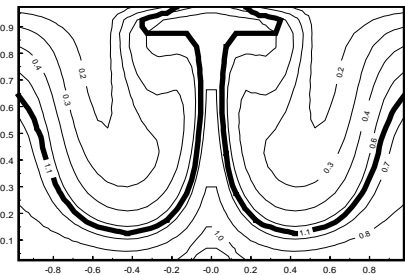
б)



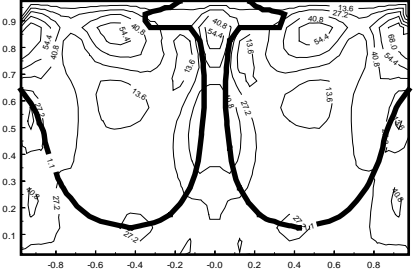
в)  $t=0,3$



г)



д)  $t=1,0$



е)

$$\mu_1 = 10^{18} \text{ П}, \quad \mu_2 = 5 \cdot 10^{17} \text{ П}$$

Рисунок бб - Формирование диапиров во времени (двухслойная модель) и распределение изотерм и изолиний девиатора касательных напряжений

Нижняя часть купола представлена сжимающими напряжениями. Нижняя центральная часть купола

характеризуется примерно одинаковой интенсивностью вертикальных напряжений, а наибольшее различие в интенсивности характерно для её периферийной части. Величина касательных напряжений изменяется в 1-1,5 раза, что связано с формированием вихревой зоны. Следует отметить, что распределение напряжений во времени согласуется с механизмом и формированием соляного купола. Аналогичная картина наблюдается в области формирования периферийных куполов.

Сопоставление рисунков 66б, 66г, 66е показывает, что развитая фаза соляно-купольного диапиризма характеризуется более интенсивными девиаторами касательных напряжений, чем менее развитая фаза.

Отличие местами составляет 3 и более раза. Наибольшие по величине девиаторы касательных напряжений в развитой фазе наблюдаются в областях надкрылового, подкрылового и нижней центральной частях купола. Следовательно, вероятные нефтегазовые ловушки образуются в примыкающих к крыльям куполов областях. Простая оценка площадей этих областей и дает возможные вероятные объёмы углеводородов.

На рисунках 66а, 66в, 66д изображены изотермы, соответствующие процессу формирования диапиров. Как видно из этих рисунков, изотермы высоких температур изогнуты сильнее, чем низких. Этот факт указывает на концентрацию движения в областях с повышенной температурой. При развитой гравитационной неустойчивости изотермы сильно изогнуты и диоморфны профилю соляного диапира. Изотермы от 0,3 до 0,5 заполняют область, прилегающую к крыльям соляного купола.

Поэтому в этих областях температура повышена на 30–90<sup>0</sup>С относительно соседних областей осадочного чехла. Хорошо известно, что величина геотермического градиента является одним из главных параметров и признаков генерации полезных ископаемых [131]. Повышение температуры на 10<sup>0</sup>С увеличивает скорость химической реакции в два раза в средах, благоприятных для выделения углеводородных соединений, в том числе нефти.



66а, 66в, 66д и распределение зон повышенных девиаторов касательных напряжений на рисунках 66г, 66е количественно подтверждают, что углеводородные запасы привязаны к областям с повышенными температурными градиентами.

Расчеты показали, что на формирование диапиров существенное влияние оказывают локальные источники тепла. При нулевой начальной температуре в осадочном чехле изотермы изгибаются в процессе формирования диапиров, но остаются в теле куполов. Это говорит о том, что процесс гравитационной неустойчивости преобладает над тепловыми эффектами. Конвекция просто не успевает развиваться.

На рисунках 67а - 67е показана эволюция формирования соляного диапира в глубоко залегающих осадочных комплексах (на глубинах 6 - 15 км).

Первоначальное распределение температуры по пространству было задано линейной функцией вертикальной координаты. На верхней стенке поддерживалась нулевая температура, на нижней -  $380^{\circ}\text{C}$ . В трех точках расчетной сетки, моделирующих локальный источник тепла, температура задавалась на  $70^{\circ}\text{C}$  выше. Рисунки 67а, 67в, 67д дают представление о распределении изотерм как в осадочном чехле, так и в теле купола и подсолевого ложа. Рисунки 67б, 67г), 67е дают представление о распределении изолиний девиаторов касательных напряжений. Как видно из этих рисунков, термические градиенты оказывают существенное влияние на формирование подсолевого ложа, сильно деформируя подкупольное пространство (области границ раздела галит под купольные осадочные породы). В подсолевом ложе наблюдаются обширные области, в которых повышены и достаточно большие по абсолютной величине девиаторы касательных напряжений. В нижней центральной части купола за счет динамического давления и повышенной температуры осуществляется значительный подсос подсолевого ложа. Поэтому, если в подсолевом ложе присутствуют большие запасы углеводородов, то они будут вследствие делатансии мигрировать в центральную часть под купольного пространства. Количественная оценка этих объемов позволяет определить вероятные запасы углеводородов.

Сравнивая рисунки 65б, 65в, 66г, 66е и 67г, 67е можем сделать вывод, что температура является весомым фактором формирования концентрации углеводородов как в при купольных, так и в под купольных областях.

#### *4.5 Приложение к нефтегазовому делу*

Приведенные выше результаты математического моделирования соляных куполов позволяют дать некоторые рекомендации в нефтегазовом деле [166].

Анализ плоских, осесимметричных и пространственных механизмов гравитационной неустойчивости может объяснить формирование куполов гигантов, кольцевых массивов, линейных гряд и соляных столбов и выступов, характерных для солнокупольной тектоники Прикаспийской впадины [1, 164, 165]. Начально-краевая динамическая задача, описывающая формирование соляных куполов, корректна при обратном течении времени. То есть, возможно восстановить предисторию формирования соляных куполов. Это даст дополнительную геолого-морфологическую информацию, которая может быть использована в геологоразведке [167]. Возможно провести проводку эксплуатационных скважин с наклонной криволинейной траекторией в обход слабо прочного соляного купола, предотвращая прихват бурильных колонн [168].

При известном профиле верхней шапки купола и мощности подсолевого ложа, а также распределении теплового потока, компьютерное моделирование позволяет детализировано «отбить» подкрыловое пространство куполов и подкупольного пространства. При известной петрографии осадочного чехла, галита и подсолевого ложа разработанная методика позволяет разведать и оценить возможные коллектора нефти и газа, что другими методами затруднительно.

На фоне пластового давления девиаторы касательных напряжений играют основополагающую роль при формировании нефтегазовых ловушек. Изменение же положения экстремальных значений девиаторов касательных напряжений может указать направление миграции нефти,

которая проявляется в том, что в под карнизной части соляных куполов нефть исчезает в процессе ее добычи.

Рациональное использование информации о распределении поля касательных напряжений позволит оптимально вести как разведку, так и добычу углеводородов с существенным снижением материальных затрат. Сюда относятся задачи оптимального размещения нагнетательных скважин, проведения гидравлического разрыва пласта, повышения нефтеотдачи пластов.

Могут быть сформулированы задачи фильтрации и вытеснения, выработаны меры по уменьшению смятия обсадных колонн, используя информацию о напряженно-деформированном состоянии осадочного чехла и подсолевого ложа.

Можно развить экологически безопасную технологию строительства глубоких и сверхглубоких в соляно-купольных структурах [169].

Это неполный перечень тех приложений компьютерного моделирования формирования соляных диапиров, который, в конечном счете, приведет к эффективному повышению нефтеотдачи пластов.

Таким образом, разработанная численная технология формирования соляных диапиров является эффективным инструментом в нефтегазовом деле. Она позволяет вместе с другими методами разрешить практические проблемы при разведке, разработке нефтегазовых месторождений.

## 5 ФОРМИРОВАНИЕ АСТЕНОСФЕРНОГО ДИАПИРИЗМА

### *5.1 Современное состояние вопроса формирования астеносферного диапиризма*

Среди различных задач геофизики особое место занимает задача астеносферного диапиризма в верхней мантии, которая органически связана с проблемами выноса тепла с глубинных недр Земли, распределением полезных ископаемых в земной коре, вулканической деятельности и землетрясениями, образования рифтовых зон, движения континентов, тектоники плит и с многими другими проблемами [107, 108, 170].

Анализ мировой научной литературы [107, 108, 116, 133, 134, 170-189], в которой отражены геологические и геофизические данные о формировании астеносферного диапиризма, предшествующего образованию континентального рифта, позволяет сделать следующие заключения. В настоящее время существуют две концепции природы образования рифтов: пассивная и активная.

Пассивная концепция основывается на том, что рифтогенез является реакцией на региональное растягивающее поле напряжений, в результате чего в литосферу внедряется астеносферный материал [116, 171, 174, 176].

В основе активной концепции лежит утверждение о том, что астеносферный диапиризм вызывается как неустойчивым распределением плотности (холодный плотный материал литосферы перекрывает горячую разуплотненную астеносферу), так и существенным значением теплового потока за счет конвективного переноса тепла [107, 108, 116, 176-183]. Утонение литосферы и коры происходит за счет их частичного плавления и фазовых переходов, а образование свободных поднятий и рифтовый вулканизм рассматриваются как вторичные процессы.

Экспериментально зафиксировано высокое значение теплового потока в области формирования рифтов. Его значение колеблется от 70 до 125 мВт/м<sup>2</sup> [179]. В работе [180] выделено три механизма повышения теплового потока: нагревание

вследствие кондуктивного теплопереноса, инъекции горячих магм, подъема астеносферного диапира. Наибольший вклад в тепловой поток вносит конвективный перенос тепла при внедрении диапира [171, 180]. Гравитационные экспериментальные исследования подтверждают существование обширных тел с пониженной плотностью. Сейсмические данные подтверждают внедрение мантийного диапира в земную кору [171, 181].

Отметим, что подробная библиография по астеносферному диапиризму в верхней мантии Земли и проблемные вопросы в этой области приведены в монографии [116].

Важнейшей чертой геофизики, использующей физические и механические методы для изучения Земли, является то, что по необходимости большой объем работ приходится на теоретические методы, так как проникновение в недра Земли затруднительно. Поэтому наряду с геологическими и геофизическими методами исследования Земли важную роль играют лабораторное и математическое моделирование.

Работы [57-58,190] посвящены лабораторному моделированию развития гравитационной неустойчивости, или неустойчивости Рэлея - Тэйлора. Эти работы позволили оценить время формирования диапировых структур, скорости их роста в зависимости от мощностей слоев, распределения плотности и вязкости. Следует отметить, что лабораторное моделирование не обеспечивает достаточного подобия реальных тектонических процессов [61].

Отметим, что неустойчивость Рэлея – Тэйлора порождена различием в химико-плотностном составе слоев, в то время как конвективная неустойчивость, приводящая к подъему астеносферного диапира, порождена разницей температур между верхними и нижними слоями жидкости. Кроме того, конвективная неустойчивость, являющаяся причиной мантийного диапиризма, осложнена наличием возможных фазовых переходов и сложной температурной зависимой реологией

Численное моделирование, основанное на базовых уравнениях механики сплошной среды, в отличие от

лабораторного моделирования, позволяет дать развернутую во времени количественную картину напряженно-деформируемого состояния среды, описать сценарий развития и выявить основные закономерности мантийного диапиризма от физико-геометрических параметров среды.

Численное моделирование тепловой конвекции проводилось рядом исследователей для постоянной вязкости, например, в [177, 191-193], и для переменной вязкости, например, в [115, 194-201]. Оно базировалось на методе конечных разностей, методе переменных сеток, а также на технологии разложения разностного решения по базисным конечным носителям с использованием распараллеливанием вычислений и метода характеристик (технология ИФЗ)]. Исследования [73-75, 202, 203] посвящены вопросам разрешимости начально - краевых и краевых задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости.

В работах [109, 112-114, 117-120, 204-211] проводилось компьютерное моделирование конвективной неустойчивости, являющейся причиной астеносферного диапиризма, на основе базовых уравнений гидродинамики Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Расчеты проводились методом конечных разностей, либо методом конечных элементов, либо методом конечных элементов с перестройкой расчетной сетки, либо с помощью технологии ИФЗ. В этих исследованиях динамическая вязкость принималась либо постоянной в каждом слое, либо экспоненциально зависящей от температуры. В [114, 117, 120, 210-213] учтены фазовые переходы, учитывающие плавление вещества астеносферы, что приводит к ее разуплотнению. В результате проведенных расчетов была прослежена динамика изменения полей скоростей, давления, температур и теплового потока от начальной стадии до развитой стадии астеносферного диапиризма. Показано, что в результате образования высокотемпературного диапира в астеносфере возникают и растут со временем растягивающие напряжения в литосфере, и происходит небольшое утонение литосферы.

Отметим также близкие к численным исследованиям [109, 112-114, 117-120, 204-211], работы [214-217]. В [214, 215]

проведено компьютерное моделирование диапиризма гранитной магмы в земной коре с помощью метода конечных элементов с адаптивной сеткой на основе упругопластической модели Хубера-Мизеса с учетом плавления в нижней коре. Определена структура гранитной магмы и возможные формы гранитогнейсовых диапировых тел. В [216, 217] с помощью численной технологии ИФЗ исследована эволюция тепловых плюмов в нижней мантии Земли. Показано, что плюмы, образованные на границе ядра и мантии, теряют свои ножки (вертикальные каналы поднимающегося вещества) в процессе тепловой эволюции плюма, что подтверждается проведенными недавно экспериментами [217].

Из приведенного краткого обзора следует, что в настоящее время при численном моделировании астеносферного диапиризма в верхней мантии обычно используют две, наиболее признанные в настоящее время, физические модели [109, 113-117, 216]. В упрощенной модели I (модель I а) реология верхней мантии и литосферы с достаточной степенью точности аппроксимируется ньютоновской вязкой несжимаемой жидкостью, с плотностью и вязкостью, зависящими от температуры. В общей модели I (модель I б), кроме того, вязкость зависит еще от гидростатического давления. При этом теплопоглощением за счет фазовых переходов в астеносфере пренебрегают по сравнению с тепловым потоком, идущим с нижних слоев астеносферы. В модели II непосредственно учитываются фазовые переходы, основанные на экспериментальной кривой плавления в верхней мантии. Земная кора и астеносфера на больших отрезках времени аппроксимируются ньютоновской вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью, зависящей от температуры и доли подплавленной фазы.

В настоящем разделе излагаются результаты исследований по формированию астеносферного диапиризма, полученные в школе Ж.С.Ержанова. Для простоты, мы ограничились двумерной моделью (переход к трехмерной модели носит редакционный характер).

## 5.2 Математические модели формирования астеносферного диапиризма

На больших отрезках времени (сотни тысяч, миллионы лет) земную кору, астеносферу можно считать вязкими несжимаемыми жидкостями. Это следует из данных об изостатическом поднятии поверхности Земли после снятия ледовой нагрузки, экспериментальных данных исследования ползучести горных пород при высоких температурах и давлениях, а также из теоретических исследований [107, 108, 133, 134].

Источники сил, приводящие к течениям в верхней мантии, делятся на две категории [107-109]. В качестве внешних воздействий, порождающих течения в верхней мантии, выступает гравитационное соскальзывание литосферы со срединно-океанического хребта или субдукция литосферы. Наряду с наведенными течениями существуют движения, обусловленные внутренней гравитационной неустойчивостью мантии. Неустойчивость такого рода является следствием разуплотнения нижних слоев астеносферы вследствие фазовых превращений [107-109]. Таким образом, развитие гравитационной неустойчивости, являющейся следствием теплового разуплотнения астеносферы, реализуется в аномально прогретых областях с пониженной вязкостью.

Приведенные выше замечания позволяют сформулировать физические и математические модели I а, I б, II процесса образования астеносферного диапиризма в поле сил тяжести следующим образом. Земную кору и астеносферу будем моделировать ньютоновской вязкой неоднородной несжимаемой жидкостью, зависящей от температуры и фазового состава вещества и заполняющей область в виде прямоугольника с высотой 250 км (в начальный момент времени на земную кору приходится 40 км мощности, на мощность верхней мантии – 210 км).

В декартовой системе координат  $Ox_1x_2$  (ось  $Ox_2$  - направлена вертикально вверх) в прямоугольной области  $\Omega$  рассмотрим движение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в поле сил тяжести под воздействием теплового поля. В декартовых

координатах такое движение описывается следующими хорошо известными уравнениями [132, 135]:

уравнениями сохранения импульса (уравнениями Навье - Стокса):

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_\gamma \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{i\gamma}}{\partial x_\gamma} - \rho g \delta_{2i} , \quad (5.1)$$

уравнением несжимаемости:

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.2)$$

реологическим законом Ньютона:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.3)$$

уравнением сохранения энергии (уравнением теплопроводности):

$$\left( \frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \rho C_p T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) + \sigma_{i\gamma} \dot{\varepsilon}_{i\gamma k} + \rho Q \quad (i, \gamma = 1, 2), \quad (5.4)$$

уравнением состояния для плотности:

$$\rho(t, x) = \rho_*(t, x) F(T, p, \varphi), \quad (5.5)$$

уравнением переноса температурно невозмущенной плотности:

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\rho_* V_\gamma) = 0, \quad (5.6)$$

Здесь по немым греческим индексам производится суммирование,  $\sigma_{ik}$  - девиатор тензора напряжений,  $\dot{\epsilon}_{ik}$  - тензор скоростей деформации,  $\delta_{2i}$  - символ Кронеккера,  $p$  - давление,  $V_k$  - компоненты скорости,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\rho$  - плотность,  $\rho_*$  - температурно невозмущенная плотность (плотность, зависящая от состава вещества),  $T$  - абсолютная температура,  $C_p$  - удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $\varphi$  - массовая доля подплавленной фазы ( $\varphi$  - известная непрерывная функция, такая, что в астеносфере  $\varphi = 1$ , в литосфере  $\varphi = 0$ , а в переходной области  $\varphi$  изменяется от 1 до 0),  $\mu = \rho\nu$  - динамическая вязкость,  $\nu$  - кинематическая вязкость,  $Q$  - удельная мощность других (не связанных с вязкостью) внутренних источников тепла,  $F$  - известная функция состояния.

Для физической модели I а: уравнения состояния (5.5) выбирается в виде:

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha(T - T_*)), \nu = \nu_0 \exp\left(\frac{\beta}{T} - \frac{\beta}{T_0}\right), \mu = \rho\nu, \quad (5.7)$$

а кинематическая вязкость экспоненциально зависит только от температуры (не зависит от давления). Здесь  $T_0$  - некоторая фиксированная температура, кинематическая вязкость при которой равна  $\nu_0$ ,  $\beta = \text{const}$ ;  $\rho_*$  - невозмущенная плотность, зависящая от химического состава материала, или плотность при абсолютной температуре  $T_*$ ;  $\alpha$  - коэффициент теплового расширения. В дальнейшем под  $T$  понимается сверх адиабатическая температура. Коэффициент  $\beta$  выбирается из условия [119]:  $\nu(T_0) = \nu_0$ ,  $\nu(T_2 = 1073K^0) = \nu_2$ .

Для физической модели I б: уравнения состояния (5.5) выбирается в виде:

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha(T - T_*)), \quad (5.8)$$

и добавляется реологическое уравнение для вязкости и уравнение переноса температурно невозмущенной вязкости [108, 109, 133, 134]:

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp\left(\frac{E + pV}{RT} - \frac{E_0 + p_0V_0}{RT_0}\right) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mu_*}{\partial t} + \frac{\partial(\mu_* V_\gamma)}{\partial x_\gamma} = 0 \quad (5.10)$$

где  $\mu_* = \mu_*(t, x)$  – температурно невозмущенная вязкость,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $V$  – объем активации,  $p$  – давление. Индексом «0» обозначены характерные значения параметров процесса.  $T_*$  – температура, при которой  $\rho = \rho_*$ . Так как процессы формирования астеносферного диапиризма медленные (десятки, сотни миллионов лет), то гидростатическое распределение давления, как минимум, на порядок, больше соответствующего динамического давления. Поэтому в соотношении (5.9) давление можно заменить гидростатическим давлением.

Для физической модели II: уравнения состояния (5.5) выбирается в виде:

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha(T - T_*) - \gamma\varphi), \quad (5.11)$$

где  $\gamma$  – скорость нарастания фазового перехода,  $\varphi$  – массовая доля подплавленной фазы. Отметим, что в данной модели фазовый переход происходит быстро относительно характерного времени развития неустойчивости. Тогда  $\varphi$  есть функция температуры и давления. Она непрерывным образом приближает скачок через

кривую плавления и может быть выбрана, например, в виде [170, 114]:

$$\varphi(p, T) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctg(\varepsilon(T - T_\phi(p))^{-1}) \quad (5.12)$$

где  $T_\phi(p)$  – известное уравнение кривой плавления, а  $\varepsilon$  определяет скорость изменения фазового состава (находится из экспериментального графика плавления [114]). При этом кинематическая вязкость подплавленной фазы  $\nu = 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}$ , а твердой фазы  $\nu = 10^{20} \text{ м}^2/\text{с}$ . Для существования частично расплавленного слоя необходимо, чтобы геотерма пересекалась с кривой плавления.

Удельная мощность  $Q$  определяется соотношением [107, 114]:

$$Q = -H \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.13)$$

где  $H$  – скрытая теплота плавления. Знак минус указывает на то, что при плавлении теплота поглощается. Для всех физических моделей в дальнейшем не учитываются радиогенные источники тепла в земной коре и астеносфере.

Отметим, что параметры  $k, C_p, \alpha$  характеризуют свойства самой жидкости и поэтому переносятся ее частицами в процессе ее движения точно так же, как температурно невозмущенная плотность и вязкость. Поэтому они удовлетворяют уравнению переноса, аналогичному уравнению (5.6). Эти параметры могут сложным образом зависеть от  $T, p, \varphi$ . Как показывают исследования [107, 108, 114], с достаточной для геофизических расчетов точностью для верхней мантии и литосферы эти параметры можно положить постоянными (т.е. для них уравнения переноса выполняются автоматически).

Таким образом, физическая модель I а описывается системой уравнений (5.1) - (5.4), (5.6), (5.7). Физическая модель I б описывается системой уравнений (5.1) - (5.4), (5.6), (5.8) - (5.10).

Физическая модель II описывается системой уравнений (5.1) - (5.4), (5.6), (5.11) - (5.13). К ним добавляются соответствующие начальные и краевые условия, о которых будет сказано ниже.

Для верхней мантии, согласно [133, 134], коэффициенты  $k, C_p, \alpha$  с достаточной степенью точности можно принять постоянными во всей области и равными их средним значениям:  $k = 2,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{C}^0), C_p = 1,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{C}^0, \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{0-1}$ .

Средняя плотность верхней мантии, согласно [108, 114], равна  $\rho_0 = 3,4 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность земной коры  $2,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , ускорение силы тяжести  $9,9 \text{ м}/\text{с}^2$ . Начальное распределение температуры соответствует профилю сверх адиабатической температуры под континентами. В качестве характерного значения температуры принимается  $1500^\circ\text{C}$ . Скрытая теплота плавления принимается равной  $H = 3,35 \cdot 10^4 \text{ Дж}/\text{кг}$  [108, 114]. При этом кинематическая вязкость подплавленной фазы  $\nu = 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}$ , а твердой фазы  $\nu = 10^{20} \text{ м}^2/\text{с}$  [108, 114], скорость нарастания фазового перехода  $\gamma$  полагается равной 0,04. Для физической модели I б, энергия активации  $E = E_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ Дж}/\text{моль}$ , объем активации  $V = V_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$  принимаются постоянными во всей области [108, 114].

В целях дальнейшего упрощения воспользуемся приближением Буссинеска для несжимаемой жидкости [108, 132, 135], согласно которому зависимость плотности от температуры и фазового состава (для физической модели I а - это первое уравнение (5.7), для физической модели I б - это уравнение (5.8), для физической модели II - это уравнение (5.11)) учитывается в уравнениях импульса (5.1) только для архимедовой силы.

Введем безразмерные переменные, помеченные чертой и параметры:

$$u_0 = \frac{k}{L_0 \rho_0 C_p}, \quad t_0 = \frac{L_0}{u_0}, \quad p_0 = \rho_0 g L_0, \quad \mu_0 = \rho_0 \nu_0, \quad x = \bar{x} L_0, \quad t = \bar{t} t_0, \quad V = \bar{V} u_0, \quad \mu = \mu_0 \bar{\mu}, \quad \mu_* = \mu_0 \bar{\mu}_*,$$

$$T = T_0 \bar{T}, \quad T_* = 273^\circ\text{K}, \quad \nu_0 = 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad \rho_* = \rho_0 \bar{\rho}_*, \quad \mu_0 = \rho_0 \nu_0, \quad \rho_0 = 3,4 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad L_0 = 250 \text{ км},$$

$$T_0 = 1773^\circ\text{K}$$

(5.14)

Здесь  $u_0, t_0$  - характерная скорость и время, соответственно. Запишем уравнения импульса (5.1) и уравнения энергии (5.4) с учетом (5.7), (5.14) в безразмерных переменных (черточки над безразмерными переменными опущены, чтобы не загромождать изложение) для физической модели I а. Тогда получим:

$$\frac{\rho_*}{Pr} \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} \right) = -\Lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{3i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right) + Ra \rho_* (T - \bar{T}_*) \delta_{3i}, \quad \bar{T}_* = \frac{T_*}{T_0}, \quad (5.15)$$

$$\rho_* \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) + Di \cdot \frac{\mu_*}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right)^2, \quad (5.16)$$

$$(i, k = 1, 2)$$

Здесь  $Ra = gL_0^3 \rho_0 C_p / (v_0 k)$  - число Релея;  $Pr = v_0 \rho_0 C_p / k$  - число Прандтля ;  $Di = v_0 k / (T_0 L_0^2 C_p \rho_0)$  - безразмерный параметр диссипации, а  $\Lambda = \frac{Ra}{\alpha T_0}$ . Число Прандтля входит множителем

$Pr^{-1}$  в левую часть безразмерных уравнений импульса (5.15). При характерных параметрах задачи число Прандтля порядка  $10^{22}$ , поэтому левые части уравнений (5.15) можно положить равными нулю. При тех же характерных параметрах задачи, число Релея  $Ra$  имеет порядок  $10^4$ , а  $Di \approx 4,85 \cdot 10^{-8}$ .  $\Lambda \approx 6 \cdot 10^5$ . В работе [135] показано, что при малых скоростях можно пренебречь диссипацией вязкой жидкости. Это подтверждает и значение параметра диссипации  $Di$ , имеющего восьмой порядок малости. Поэтому в уравнении (5.16) вязкой диссипацией пренебрегаем. Тогда в безразмерных переменных система уравнений, описывающая физическую модель I а, запишется в виде:

$$0 = -\Lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{2i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right) + Ra \rho_* (T - \bar{T}_*) \delta_{2i}, \quad (5.17)$$

$$\rho_* \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x_\gamma \partial x_\gamma}, \quad (i, \gamma = 1, 2) \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \rho_*}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.20)$$

$$v = \exp(\beta_0 (\frac{1}{T} - 1)), \quad \mu = v \rho^*, \quad \beta_0 = \beta / T_0 \quad (5.21)$$

Для физической модели I б упрощающаяся система уравнений, записанная в безразмерных переменных (рассуждения и упрощения аналогичны тому, как это сделано для первой физической модели Ia), имеет вид:

$$0 = -\Lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{2i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right) + Ra \rho_* (T - \bar{T}_*) \delta_{2i}, \quad (5.22)$$

$$\rho_* \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x_\gamma \partial x_\gamma}, \quad (i, \gamma = 1, 2) \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \rho_*}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \mu_*}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \mu_*}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.26)$$

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp(\beta_1(\frac{1}{T} - 1) + \beta_2(\frac{P}{T} - p_0)), \quad (5.27)$$

$$\beta_1 = \frac{E_0}{RT_0} = 1,35, \quad \beta_2 = \frac{\rho_0 g L_0 V_0}{RT_0} = 2,28, \quad T_0 = 1773^0 \text{ K}$$

Для физической модели II соответствующая система уравнений будет:

$$0 = -\Lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_* \delta_{3i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i} \right) \right) + Ra \rho_* (T - \bar{T}_* + \gamma_0 \varphi) \delta_{3i}, \quad (5.28)$$

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{\alpha T_0} = 1,128$$

$$\rho_* \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x_\gamma \partial x_\gamma} - H_0 \frac{d\varphi}{dt} \rho_*, \quad (i, \gamma = 1, 2), \quad (5.29)$$

$$H_0 = \frac{H}{C_p T_0} = 0,0158$$

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + V_\gamma \frac{\partial \rho_*}{\partial x_\gamma} = 0, \quad (5.31)$$

$$\varphi(p, T) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctg(\varepsilon(T - T_\phi(p))^{-1}) \quad (5.32)$$

$$T_\phi(p) = 1,09x_2^2 - 1,254x_2 + 1,0 \quad (5.33)$$

Соотношение (5.33) представляет собой кривую плавления в безразмерных координатах (в зависимости от глубины), взятую из работы [114] и построенную методом наименьших квадратов.

К системам уравнений (5.17) - (5.21), (5.22) - (5.27), (5.28) - (5.33) добавляются начальные и граничные условия. В начальный момент времени ( $t_0 = 0$ ) для модели I а задаются

распределения невозмущенной плотности  $\rho_*$  и температуры  $T$ . Для модели I б в начальный момент времени задаются распределения плотности  $\rho_*$ , динамической вязкости  $\mu_*$  и температуры  $T$ . Для модели II задаются значения  $\rho_*, T$ . Начальные значения  $\varphi$  вычисляются по известным значениям  $\rho_*(x, 0), T(x, 0)$ . Граничные условия могут быть разнообразными. В данном исследовании на боковых стенках ставились условия симметрии, а на верхней и нижней стенках - условия прилипания. Кроме того, на нижней стенке задавалась температура  $T(x_1)$ , а на верхней стенке температура полагалась равной нулю по Цельсию.

### **5.3 Численный метод.**

Для расчета формирования соляных диапиров глубокого залегания был разработан дивергентный численный метод (см. раздел 4), который с небольшими изменениями переносится на расчет астеносферного диапиризма.

Для модели Ia реализация разностной начально-краевой задачи, соответствующей исходной дифференциальной (5.17) - (5.21) проводится следующим образом. При  $t = 0$  известны начальные значения плотности, динамической вязкости (она вычисляется из первого и второго соотношений (5.21)) и температуры, по которым вычисляются объемные силы в уравнениях импульса. Разрешается разностный аналог уравнений (5.17), (5.19), позволяющий определить значения компонент скорости и давления в начальный момент времени. Разрешается разностный аналог уравнения (5.18), который дает распределение температуры по пространству на первом временном шаге. Затем схемой донорной ячейки против потока, являющейся разностным аналогом уравнений (5.19), (5.20) определяется распределение плотности на первом временном слое. Из соотношений (5.21) известны значения кинематической и динамической вязкостей на первом шаге по времени. Затем

процесс повторяется, и вычисления проводятся до необходимого временного слоя.

Для модели I б при  $t = 0$  известны начальные значения плотности, динамической вязкости (определяется из (5.27)) и температуры, по которым вычисляются объемные силы в уравнениях импульса. Разрешается разностный аналог уравнений (5.22), (5.24), позволяющий определить значения компонент скорости и давления в начальный момент времени. Разрешается разностный аналог уравнения (5.23), который дает распределение температуры по пространству на первом временном шаге, а реализация разностного аналога соотношений (5.24) - (5.27) (схемами донорной ячейки против потока) позволяет определить распределение вязкостей и плотностей на первом временном слое. Затем процесс повторяется, и вычисления проводятся до необходимого временного слоя.

Для модели II, при  $t = 0$  известны начальные значения плотности, и температуры, а также  $\varphi$  из соотношений (5.32), (5.33), по которым вычисляются объемные силы в уравнениях импульса. Разрешается разностный аналог уравнений (5.28), (5.30), позволяющий определить значения компонент скорости и давления в начальный момент времени. Разрешается разностный аналог уравнения (5.29), который дает распределение температуры по пространству на первом временном шаге. Реализация разностного аналога (5.31) позволяет определить значение плотности на первом шаге по времени. Из соотношений (5.32), (5.33) определяем значение  $\varphi$  на первом временном слое. Затем процесс повторяется, и вычисления проводятся до необходимого временного слоя.

В приводимых ниже расчетах вычислялся девиатор касательных напряжений аналогично тому, как это сделано в п.4.4. Далее выделяются зоны повышенных концентраций девиатора касательных напряжений, что позволяет определить вероятные зоны разрушения земной коры.

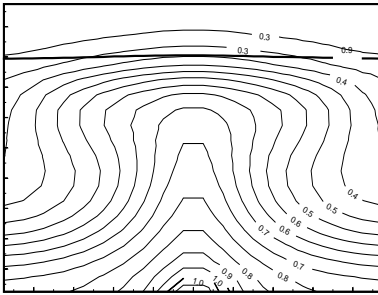
## 5.4 Результаты расчетов формирования астеносферного диапиризма

### 5.4.1 Модель I а

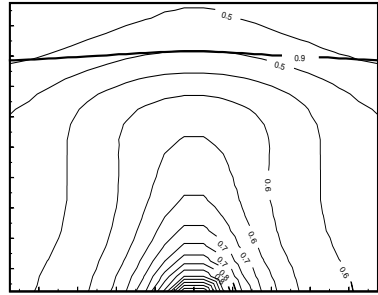
Построенные физическая, математическая и дискретная модели позволяют оценить характерные параметры формирования астеносферного диапира и сделать адекватную геофизическую интерпретацию этого процесса.

На рисунках 68а - 68г приведены профили изотерм и поля скоростей для двух моментов времени формирования астеносферного диапиризма. На нижней границе области задавалась температура  $1773^0 K$ , а в двух центральных соседних точках нижней границы области температура была задана на 20% выше, что моделирует неоднородность теплового потока с нижних слоев верхней мантии.

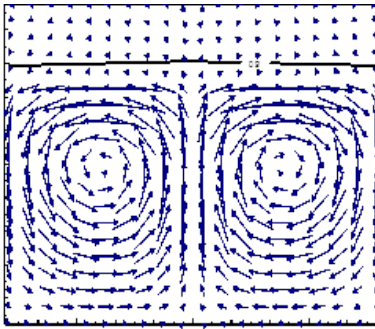
Расчеты показали, что процесс формирования астеносферного диапира протекает неравномерно. Сначала процесс формирования астеносферного диапира со временем ускоряется, а затем замедляется и, примерно, через 36 млн. лет выходит на стационарный режим. Так, значение максимальной скорости меняется от 1 до 12,4 км/млн. лет, достигая максимума при  $t=12.6$  млн. лет с постепенным выходом на стационарное значение 2,8 км/млн. лет. На рисунках 68в, 68г отчетливо видны две конвективные ячейки в верхней мантии. Интенсивность поля скоростей существенно выше на более раннем этапе (рисунок 68в) развития процесса, чем на более позднем (рисунок 68г). Рисунки 68а, 68б свидетельствуют о том, что изотермы высоких температур изогнуты сильнее, чем изотермы низких температур. Этот факт указывает на более интенсивные движения и в областях с большей температурой, что подтверждается рисунками 68в, 68г.



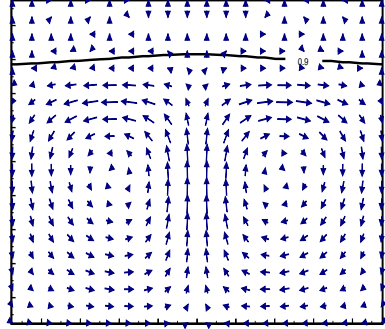
а)



б)



в)



г)

Рисунок 68 - Распределение изотерм (а, б) и поля скоростей (в, г) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t=11,5$  млн. лет (а, в) и  $t=34$  млн. лет (б, г)

При этом, тепловой поток в центральной части расчетной области повышается, а на периферии падает, что связано с опусканием вещества в этой области. Отметим, что значения

основных параметров, характеризующих формирование астеносферного диапира близки численно к значениям характерных параметров работы [109].

На рисунках 68а - 68г в процессе формирования астеносферного диапира отчетливо просматривается утонение земной коры в центральной части области, и практически незаметное опускание на этих рисунках земной коры на периферии (в силу того, что земная кора моделируется несжимаемой жидкостью). Расчеты показали, что этап медленного утонения земной коры сменяется этапом относительно быстрого утонения. Через 36 млн. лет утонение земной коры в центральной части составляет 5,3 км, а в ее периферийной части опускание составляет 0,4 км. Наибольшие значения девиатора касательных напряжений достигаются в областях земной коры, непосредственно примыкающих в области утонения к астеносфере. В результате в этих областях происходит хрупкое разрушение земной коры с образованием трещин, после чего происходит подъем магмы по этим трещинам [218].

Отметим следующее обстоятельство. На рисунке 68 г плотность астеносферы в области утонения земной коры равна  $3,06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , что больше плотности земной коры  $2,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , и следовательно, сила плавучести имеет отрицательный знак на границе астеносфера – земная кора. Тем не менее, утонение земной коры здесь происходит. В чем же здесь причина утонения земной коры? Причина здесь заключается в конвекции. Действительно, в верхних центральных слоях астеносферы, примыкающих к нижней подошве земной коры, за счет конвекции сила плавучести положительна. Поэтому сила воздействия на земную кору в центральной части области со стороны астеносферы имеет вертикальную составляющую, направленную вверх, в результате чего происходит утонение земной коры. На периферии же силы плавучести отрицательны, поэтому вертикальная составляющая этих сил направлена вниз, в

результате чего происходит опускание земной коры в этих областях.

Значение эффективной вязкости  $\nu_2 = 1,8 \cdot 10^{20} \text{ м}^2 / \text{с}$  для земной коры представляется заниженным. Поэтому были проведены расчеты, когда эффективная вязкость изменялась в пределах от  $1,8 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}$  до  $1,8 \cdot 10^{23} \text{ м}^2 / \text{с}$ , при прочих равных параметрах задачи. Расчеты показали, что утонение и опускание земной коры не происходит: граница разделала между земной корой и астеносферой остается прямолинейной. Для того, чтобы получить утонение земной коры, необходимо увеличивать тепловой поток на нижней границе астеносферы, как это сделано, например, в работе [109].

На рисунках 69а – 69е приведены профили изотерм и поля скоростей для трех моментов времени формирования астеносферного диапиризма при наличии двух термически симметричных возмущений тепловой границы области. На нижней границе области задавалась температура  $1773^0 \text{ K}$ , а на периферии границы задавались два симметричных возмущения температуры (на 20% выше).

Как видно из рисунков 69а – 69е конвективные ячейки поменяли ориентацию на противоположную (см. рисунки 68в, 68д). Область пониженных температур характерна для центральной части области, и наоборот, области повышенных температур – для ее периферийной части. В результате происходит неравномерное проседание Земной коры в центральной части области. При  $t=36$  млн. лет проседание земной коры составляет 5,6км, а утонение земной коры в периферийной области составляет 0,42 км.

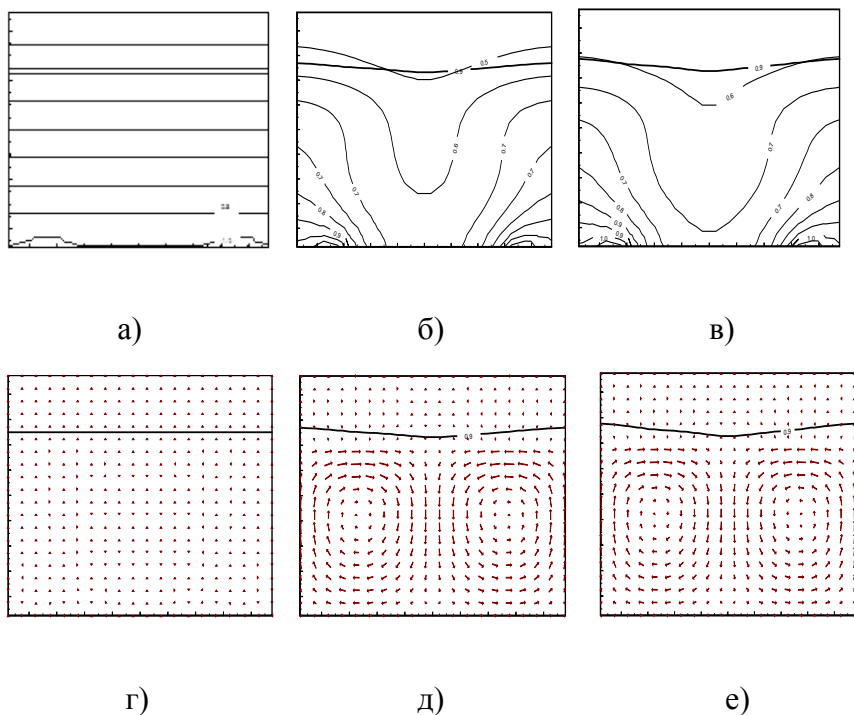


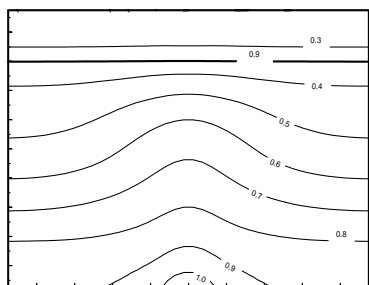
Рисунок 69 - Распределение изотерм (а, б, в) и поля скоростей (г, д, е) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t = 0$  млн. лет (а, г);  $t = 18$  млн. лет (б, д);  $t = 36$  млн. лет (в, е) при воздействии двух симметричных термических возмущений (а, б, в)

Повышенные значения девиаторов напряжений в Земной коре наблюдаются в периферийной ее части, где возможно внедрение магмы по трещинам, образованных в результате разрушения земной коры.

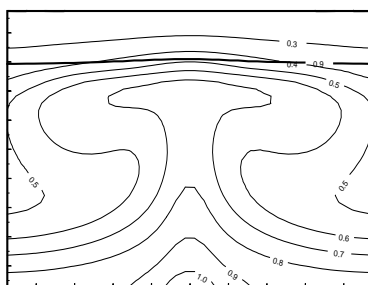
Отметим, что применение упрощенной модели I а для описания астеносферного диапиризма ограничено относительно небольшим диапазоном изменения эффективной вязкости и относительно умеренным тепловым потоком с нижних слоев верхней мантии.

### 5.4.2 Модель I б

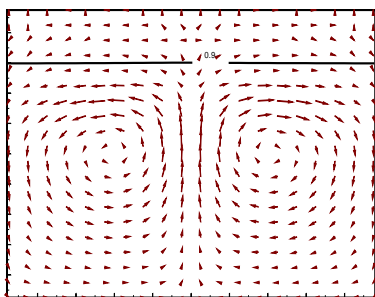
На рисунках 70а - 70г приведены профили изотерм и поля скоростей, рассчитанных на основе модели I б для двух моментов времени формирования астеносферного диапиризма для. Граничные значения для температуры на нижней границе области такие же, как и для модели I а (рисунок 68а-68г).



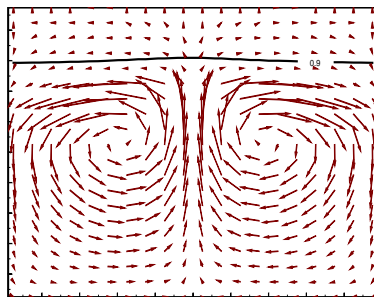
а)



б)



в)



г)

Рисунок 70- Распределение изотерм (а, б) и поля скоростей (в, г) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t=14$  млн. лет (а, в) и  $t=34$  млн. лет (б, г)

Расчеты также показали, что процесс формирования астеносферного диапира протекает неравномерно, как и для модели 68а. Сначала процесс формирования астеносферного диапира со временем ускоряется, а затем замедляется и, примерно, через 53 млн. лет, выходит на стационарный режим. Так, значение максимальной скорости меняется от 1 до 4,8 км/млн. лет, достигая максимума при  $t = 34.4$  млн. лет, с постепенным выходом на стационарное значение 1,3 км/млн. лет. На рисунках 70в, 70г отчетливо видны две конвективные ячейки в верхней мантии, центры которых смещены вверх. Модули скоростей больше в верхней части конвективных ячеек, чем в нижней, что связано с влиянием давления на динамическую вязкость. Отметим, что значения основных параметров, характеризующих формирование астеносферного диапира в 1,5-2,5 раза меньше соответствующих характерных параметров работы [109], в которой зависимость динамической вязкости от давления не учитывалась.

На рисунках 70а - 70г в процессе формирования астеносферного диапира, как и для модели I а, просматривается небольшое утонение земной коры в центральной части области, и практически незаметное опускание на этих рисунках земной коры на периферии. Расчеты показали, что этап медленного утонения земной коры сменяется этапом относительно быстрого утонения. Через 53 млн. лет утонение земной коры в центральной части составляет 1,8 км, а в ее периферийной части опускание составляет 0,3 км. Наибольшие значения девиатора касательных напряжений достигаются также в областях земной коры, непосредственно примыкающих к области утонения.

Были также проведены расчеты, когда эффективная вязкость изменялась в более широких пределах. Расчеты показали, что когда значение динамической вязкости изменяется на четыре порядка (при прочих равных параметрах задачи), утонение и опускание земной коры не происходит: граница раздела между земной корой и астеносферой остается прямолинейной.

Отметим, что учет влияния давления на динамическую вязкость замедляет процесс развития астеносферного диапиризма. Применение же усложненной модели I б для

описания астеносферного диапиризма ограничено относительно небольшим диапазоном изменения эффективной динамической вязкости.

### 5.4.3 Модель II

Наиболее полно отражает физику формирования астеносферного диапиризма общая модель II, учитывающей фазовые переходы. На рисунках 71а - 71е, 72а - 72г приведены профили изотерм, поля скоростей и распределения расплавленной фазы астеносферы для различных моментов времени формирования астеносферного диапиризма. Граничные значения для температуры на нижней границе области такие же, как и для модели I а (рисунок 68а-68г). Граница расплавленной фазы астеносферы, в соответствии с теорией однородных разностных схем определялась местоположением точек, где  $\varphi = 0,5$ .

Расчеты также показали, что процесс формирования астеносферного диапира протекает неравномерно. Сначала процесс формирования астеносферного диапира со временем ускоряется, а затем замедляется и примерно через 38 млн. лет начинает выходить на стационарный режим.

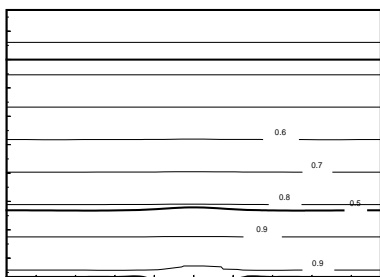
Если сопоставить расчеты, выполненные по модели II, с соответствующими расчетами, выполненными по моделям I а, I б, то выясняется, что процесс формирования астеносферного диапиризма несколько замедляется по отношению к упрощенной модели Ia и ускоряется по отношению к более общей модели I б. Это связано с тем, что часть энергии расходуется на фазовые переходы, а в общей модели Ib экспоненциальная зависимость динамической вязкости от гидростатического давления сильно замедляет процесс.

Значение максимальной скорости меняется от 0,8 до 10,6 км/млн. лет, достигая максимума при  $t=17.4$  млн. лет с постепенным выходом на стационарное значение 2,2 км/млн. лет. На рисунках 71б - 71е изотермы высоких температур изогнуты сильнее, чем изотермы низких температур. Этот факт указывает на более интенсивные движения в областях с большей температурой, что подтверждается рисунками 72б, 72в. При

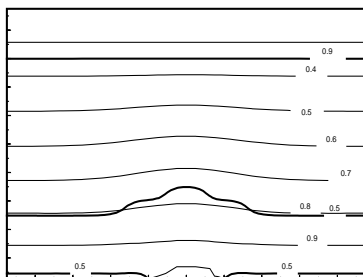
этом тепловой поток в центральной части расчетной области повышается, а на периферии падает, что связано с опусканием вещества в этой области.

На рисунках 72а - 72г отчетливо просматриваются две конвективные ячейки в верхней мантии. Интенсивность поля скоростей существенно выше на более раннем этапе (рисунок 72б) развития процесса формирования астеносферного диапиризма, чем на более позднем (рисунок 72г). На раннем этапе формирования астеносферного диапиризма подплавленная фаза астеносферы представляет собой прямоугольную область (рисунок 71а)), которая за счет повышенного теплового потока в центральной части области со временем начинает выпучиваться в центральной части (рисунки 71б, 71в). За счет сформировавшихся конвективных ячеек происходит проседание более тяжелой и более холодной нерасплавленной астеносферы в боковых периферийных частях ячеек, а вещество подплавленной части астеносферы устремляется в вверх в центральной части области (рисунки 72а, 72б). Со временем (рисунки 71г, 71б) происходит опускание холодного нерасплавленного вещества астеносферы, и подплавленная часть астеносферы вытесняется в центральную часть области (рисунки 71г, 71д, 72б).

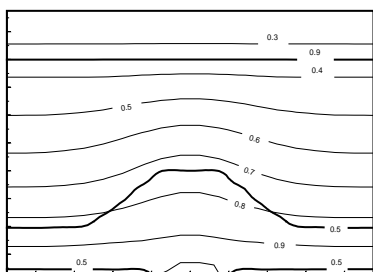
Это объясняется тем, что область подплавленной фазы астеносферы, которая определяется определенным диапазоном изменения температур и давлений, лежит между кривой плавления и геотермой. Геотерма же в областях опускания холодной астеносферы находится ниже кривой плавления. Поэтому фазовый переход в этих областях прекращается, а присутствующий ранее расплав астеносферы вытесняется в центральную часть области (рисунок 72д). Затем происходит всплывание расплава астеносферы, и в результате образуется грибовидная структура, похожая на соляной купол, - астеносферный диапир (рисунок 72в). Через определенное время (рисунок 72г) происходит отрыв подплавленного вещества астеносферы, и образуется астеносферная линза.



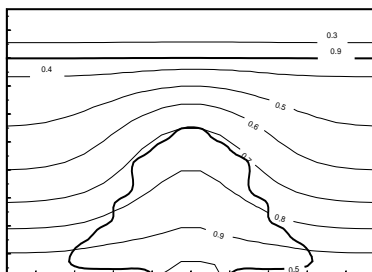
а)



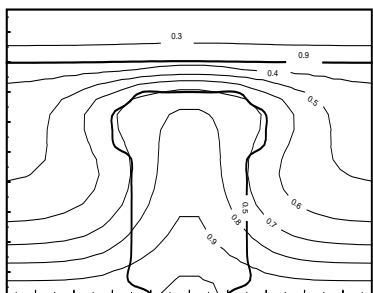
б)



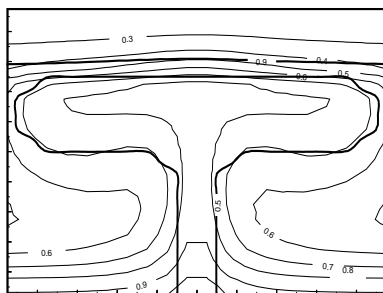
в)



г)



д)



е)

Рисунок 71- Распределение изотерм и подплавленной фазы астеносферы (а, б, в, г, д, е) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t=5,1$  млн.лет (а),  $t=10,2$  млн.лет (б),  $t=13,5$ млн.лет (в),  $t=16,2$ млн.лет (г),  $t=21,6$ млн.лет (д),  $t=38$ млн.лет (е)

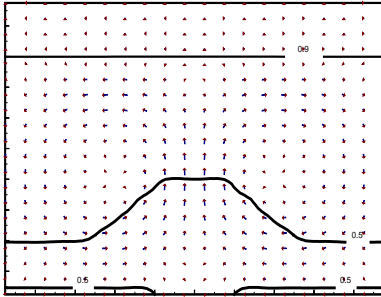
На рисунках 71д, 71е, 72в, 72г в процессе формирования астеносферного диапира отчетливо просматривается утонение земной коры (широкого сводного поднятия) в центральной части области, и практически незаметное опускание на этих рисунках земной коры на периферии. Расчеты показали, что этап медленного утонения земной коры сменяется этапом относительно быстрого утонения. Через 38 млн. лет утонение земной коры (сводного поднятия) в центральной части составляет 4,4 км, а в ее периферийной части опускание составляет 0,5 км.

Согласно Ботту [76], по обе стороны от вершины широкого сводного поднятия образуются два наклонных разлома, после чего блок земной коры, ограниченный этими разломами, начинает погружаться в результате растекания нижнего пластичного слоя под действием растягивающих напряжений.

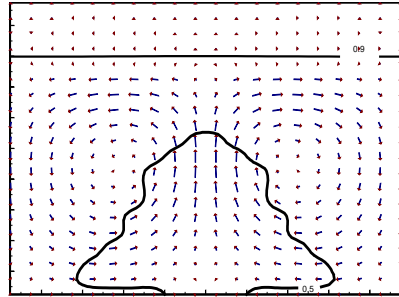
Как показали расчеты, развитие гравитационной неустойчивости на границе земной коры и астеносферы приводит к росту и перераспределению напряжений в среде. В области над диапиром действуют растягивающие напряжения, а по его сторонам – сжимающие. Наибольшие значения девиатора касательных напряжений достигаются в областях земной коры (симметричных относительно вертикальной оси, проходящей через центр области), непосредственно примыкающих к области утонения в астеносфере. В результате в этих областях происходит хрупкое разрушение земной коры с образованием трещин – разломов. Происходит подъем магмы по этим трещинам - разломам [75], а также погружение образовавшегося блока земной коры в центральной части области. Расчеты подтверждают теорию Ботта [182].

Отметим, что в рассматриваемой модели верхняя граница земной коры принята абсолютно жесткой. Если отказаться от этого требования, и считать верхнюю границу области свободной границей, то нетрудно видеть, что в результате образования астеносферного диапира, с плотностью меньше плотности земной коры, на нижнюю часть земной коры будет действовать, направленная вверх положительная сила плавучести. В результате земная кора будет подниматься, Земля

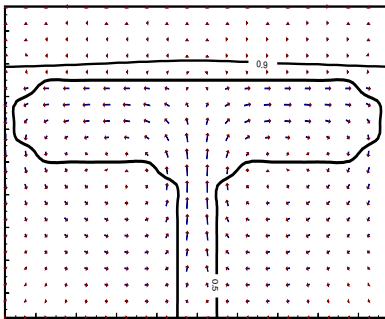
раздуваться, а вновь образовавшиеся в результате разрушения блоки - опускаться.



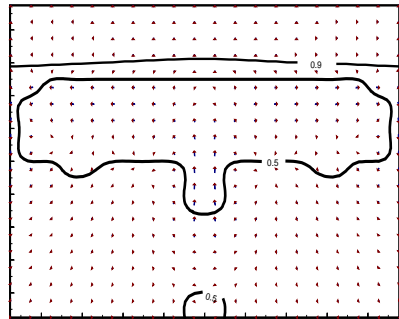
а)



б)



в)



г)

Рисунок 72- Распределение подплавленной фазы астеносферы и поля скоростей (а, б, в, г) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t = 13,5$  млн.лет (а),  $t = 16,2$  млн.лет (б),  $t = 38,5$  млн.лет (в),  $t = 48,6$  млн.лет (г).

Таким образом, рассмотрены три модели формирования астеносферного диапиризма. Исследования показали, что применение моделей Ia, Ib для описания астеносферного диапиризма ограничены относительно небольшим диапазоном изменения эффективной вязкости. Тем не менее, они позволяют

установить утонение и опускание земной коры в результате конвекции в верхней мантии, а также зоны разрушения в земной коре. Установлено, что учет влияния давления на динамическую вязкость в модели I б существенно замедляет процесс развития астеносферного диапиризма.

Общая модель II, учитывающая фазовые переходы, наиболее полно отражает физику явления и описывает формирование расплавленной астеносферы в виде диапиров. Это оправдывает название астеносферный диапиризм. Количественно подтверждена теория Ботта блокового формирования земной коры.

В заключение заметим, что применяемый здесь численный метод без особых затруднений переносится на задачи расчета диапиризма гранитной магмы в земной коре и эволюции тепловых плюмов в нижней мантии Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги исследования, резюмируем полученные результаты:

1. Краткий анализ научных исследований по математическому моделированию формирования соляно-купольных структур в земной коре показал, что численные исследования чисто динамических плоских и осесимметричных задач позволили выявить основные закономерности и особенности процесса формирования соляных структур. Результаты этих исследований подтверждены геофизическими изысканиями, лабораторным моделированием, но многие вопросы еще не исследованы. Трехмерные численные модели представлены небольшим спектром работ и далеки от своего завершения. Существуют определенные трудности в описании поверхностей раздела слоев вязких сред. Линейная фаза зарождения и начального развития соляных диапиров на основе модели ползущих течений Стокса достаточно подробно исследована аналитическими методами. Работы этого направления с усложненной реологией немногочисленны и нуждаются в дополнительном исследовании, особенно трехмерных задач. Работы по математическому моделированию соляных диапиров глубокого залегания представлены первым десятком работ и посвящены плоским моделям. В них не учтена зависимость динамической вязкости от температуры. Работы этого направления нуждаются в учете влияния тепловых факторов на реологические параметры среды, т.е. более глубоком исследовании.

2. На основе модели неньютоновской вязкопластической жидкости рассмотрена начальная стадия формирования и развития соляных диапиров. Рассмотрены плоская, осесимметричная и пространственные двухслойные и трехслойные модели. Показано, что реология слоев для возмущений обладает анизотропией. Это приводит к образованию целого семейства разных по масштабу диапиров, которые распределены по пространству неоднородно. При определенных условиях возможно образование соляных столбов

(соляных пальцев). Для двухслойной осесимметричной модели образуется купол-гигант с одиночным соляным валом, для трехслойной - купол-гигант с семейством соляных валов. Таким образом, показано, что реология слоев оказывает существенное влияние на зарождение и дальнейшее формирование соляных куполов.

3. Разработаны и обоснованы численные инструменты для исследования плоского, осесимметричного и трехмерного формирования соляных куполов в земной коре как в чисто динамической постановке, так и с учетом температуры и усложненной реологии.

4. С помощью численного моделирования установлены основные закономерности и особенности формирования соляных куполов в земной коре. Исследован механизм и зависимость основных характеристик тейлоровской неустойчивости от физико-геометрических параметров среды. Описаны фазы развития формирования соляных куполов и генерация вторичных возмущений. Полученные результаты согласуются с результатами лабораторного моделирования, натуральных и геофизических наблюдений, а также с результатами других авторов. Проведен сравнительный анализ характеристик формирования соляного купола в плоской, осесимметричной и трехмерных моделях. Показано, что формирование и развитие соляно-купольных структур в природной обстановке и численных моделях определяются одинаковыми факторами.

5. Проведенные расчеты показали, что температурные градиенты существенно влияют как на формы образования соляных куполов и на профили подсолевого ложа, так и на скорость их развития, но имеют те же закономерности, которые справедливы при чисто динамическом формировании соляных куполов. Разработанная методика выделения нефтегазовых ловушек (коллекторов нефти и газа) и последующие расчеты показали, что для соляных куполов нефтегазовые ловушки формируются в областях их крыльев (надкрылового и подкрылового пространства), а также в области подкупольного пространства подсолевого ложа, что было подтверждено

глубинным бурением соляных диапиров. Кроме того, расчетные данные количественно показали, что углеводородные запасы привязаны к областям с повышенными температурными градиентами, что было подтверждено космическим мониторингом месторождений Западного Казахстана и акватории Аральского моря. На основе проведенных расчетов и полученных результатов были выработаны некоторые рекомендации в приложении к нефтегазовому делу.

6. Проведено исследование формирования астеносферного диапиризма в верхней мантии на базе трех основных, наиболее признанных в настоящее время, физических моделей. Проведенные расчеты показали, что применение моделей Ia, Ib для описания астеносферного диапиризма ограничены относительно небольшим диапазоном изменения эффективной вязкости. Тем не менее, они позволяют установить утонение и опускание земной коры в результате конвекции в верхней мантии, а также зоны разрушения в земной коре. Установлено, что учет влияния давления на динамическую вязкость в модели Ib существенно замедляет процесс развития астеносферного диапиризма. Общая модель II, учитывающая фазовые переходы, наиболее полно отражает физику явления и описывает формирование расплавленной астеносферы в виде диапиров. Это оправдывает название астеносферный диапиризм. Кроме того, количественно подтверждена теория Ботта блокового формирования земной коры.

Таким образом, предложенные в монографии численные инструменты позволяют совместно с другими методами разрешить практические важные проблемы при разведке, разработке сложных нефтегазовых месторождений. При определенной модификации они могут быть полезны при разведке, разработке твердых полезных ископаемых и исследовании различных задач геофизики и естествознания.

Проведенное и изложенное в монографии исследование – это один из наиболее простых вариантов построения математической теории формирования соляных куполов в земной коре. Некоторые вопросы исследованы подробно, большинство вопросов – кратко, некоторые – вовсе не

рассматривались. В данном случае это не так важно. Важно то, что полученные теоретические результаты подтверждаются экспериментальными данными. Это говорит о том, что мы находимся на правильном пути. Исследования в этом направлении еще далеки от своего завершения. Основные дальнейшие исследования по математической теории формирования соляных куполов в земной коре на ближайшее будущее, на наш взгляд, должны включать следующие этапы:

1. Разработать теорию формирования соляно-купольной тектоники на основе реологической модели, учитывающей трещиноватость осадочного чехла и подсолевого ложа.

2. В последнее время в вычислительной математике появились численные технологии, позволяющие с повышенным порядком точности выделять зоны разрыва физических параметров среды и физических параметров процесса. Поэтому представляется целесообразным использовать эти достижения для более детального определения границы раздела сред, а также для выделения нефтегазовых ловушек и других аномальных зон.

3. Более детально исследовать тепловое формирование соляных куполов, а также тепловое формирование соляных куполов при наличии радиогенных источников тепла.

4. Теория водородной Земли В.Н. Ларина, рождение которой приходится на конец 80 годов прошлого столетия, несет новое, революционное мировоззрение о геологии Земли, энергетике будущего человечества. В связи с этим возникает необходимость новых постановок задач и исследований в свете этой теории в тектонике соляного диапиризма.

Это программа –минимум, позволяющая целенаправленно вести исследование в области геодинамики формирования соляных куполов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Косыгин Ю.А. Основы тектоники нефтеносных областей. - М.: Гостоптехиздат, 1950. - 248 с.
- 2 В. И. Серпухов и др. Курс общей геологии. - М.: Недра, 1976. - 535 с.
- 3 Беленицкая Г.А. Тектонические аспекты пространственного и временного распределения соляночных бассейнов мира // Электронное научное издание Альманах: Пространство и Время. - 2013.-Т.4.-Вып.1.-31с.
- 4 Гулиев Н.С. Федоров Д.Л., Кулаков С.И. Нефтегазоносность Каспийского региона. - Баку.: Nafta Press , 2009.- 409 стр.
- 5 Место рождения нефти и газа Казахстана. Справочник. Под. ред.А.А. Абдулина, Э.С.Вазалевского, Б.М. Куандыкова.- М.: Недра , 1993.- 247с.
- 6 Глумов И.Ф., Маловицкий Я.П., Новиков А.А., Сенин Б.В.- Региональная геология и нефтегазоносность Каспийского моря.- М.: Недра, 2004.- 342 с.
- 7 Гулиев И.С., Левин Л.Э., Федоров Д.Л. Углеводородный потенциал Каспийского региона.- Баку.: Nafta-Press,2003.- 127 с.
- 8 Матусевич А.В. Гравиразведка Прикаспийской впадины.- Ливны: Издатель Мухаметов Г., 2013.- 176 с.
- 9 Benard H. Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // Revue generale des Sciences pures et appliques et bulletin. - 1900. - Sc. 11, № 23 – 24. - P. 1261 - 1271; 1309 - 1328.
- 10 Rayleigh Lord. On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, when the Higher Temperature is on the under Side // Philosophical Magazine. - 1916. - Ser.6. - Vol.32. - P. 527-546.
- 11 Rayleigh Lord. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. Scientific Papers // Cambridge at the University Press. - 1900. - P. 200-207.
- 12 Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soe. - 1950. -Ser.A. - Vol.201. - P. 192-196.
- 13 Ферми Э. Тейлоровская неустойчивость несжимаемой жидкости //Соч.: В 2 т. - М.: Наука, 1972. - Т. 2. - С. 493-497.

14 Ферми Э., Дж. Фон Нейман. Тейлоровская неустойчивость на границе двух несжимаемых жидкостей // Соч.: В 2 т. - М., 1972. - Т. 2. - С. 498-501.

15 Allred T.G. and Blount G.H. Experimental studies of Taylor instability // Sci. lab. Rep. Los Alamos. -1951. - Vol. 1600. - P. 8-9.

16 Bellman R., Pennington R.H. Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability // Quart. Appl. Math. - 1954. - Vol. 12. - P. 151-162.

17 Chandrasekhar S. The character of equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. Combr. Phil. Soc. - 1955. - Vol. 51. - P. 162-178.

18 Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability // Oxford, Univ. Press. - 1961. - P. 428-477.

19 Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.Н. Метод крупных частиц для задач газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. - 1970. - Т. 1. - № 3. - С. 3-23.

20 Давыдов Ю.М. Численные исследования тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении // Численные методы механики сплошной среды. - 1978. - Т.9. - № 3. - С. 67-69.

21 Lewis W.I. The instability of liquid surfaces, when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soc. - Vol. 202. - P. 81-98.

22 Daly E.J. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. - 1967. - Vol.10. - № 2. - P. 297-307.

23 Harlow F.H., Welch J.E. Numerical study of large amplitude free surface motion // Phys. Fluids. - 1966. - Vol. 9. - № 5. - P. 842-851.

24 Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. - М.: Мир, 1978. - 431 с.

25 Nettleton L.L. Fluid mechanics of salt domes // Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol. - 1934. - Vol. 18. - № 9. - P. 1175 - 1204.

26 Selig P.A. Theoretical prediction of salt-dome patterns // Geophysics. - 1965. - Vol. 30. - № 4. - P. 633-643.

27 Новиков В.Л. Вариационный принцип адвективных движений // ДАН СССР. - 1981. - Т. 257. - № 3. - С. 578-580.

28 Новиков В.Л. Строение экстремального поля скоростей адвективных движений // Изв. АН СССР, Физика Земли. - 1982. - № 3. - С. 3-9.

29 Biot M.A. The influence of gravity on the folding of a layered viscoelastic medium under compressions // J. Franklin Inst. - 1959. - Vol. 267. - № 3. - P. 211-228.

30 Biot И.А. Stability of multilayered continua including the effect of gravity and viscoelasticity // J. Franklin Inst. - 1963. - Vol. 276, № 3. - P. 231-252.

31 Biot L.A., Ode H. Theory of gravity instability with variable overburden and compactions // Geophysics. - 1965. - Vol. 30. - № 2. - P. 213-227.

32 Danes Z.P. Mathematical formulation of salt-dome dynamics // Geophysics. - 1964. - Vol. 29. - № 3. - P. 414-424.

33 Hide, Raymond. The character of the equilibrium of an incompressible heavy viscous fluid of variable density: an approximate theory // Proc. Cambr. Phil. Soc. - 1955. - Vol. 51. - P. 179 - 201 .

34 Ramberg H. Fluid dynamics of layered systems (in the field of gravity, a theoretical basis for certain global structures) and isostatic adjustment // Phys. Earth Planet Interiors. - 1968. - Vol. 1. - № 2. - P. 63-87.

35 Ramberg H. Instability of layered systems in the field of gravity // Phys. Earth Planet Interiors. - 1968. - Vol. 1. - № 7. - P. 427-447.

36 Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаш И.А., Искакбаев А., Коксалов К. Теория складкообразования в земной коре. - М.: Наука, 1975. - 239 с.

37 Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Жантаев Ж.Ш. Устойчивость вязкопластического течения весомой слоистой среды // Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат. - 1981. - № I. - С. 17-23.

38 Ержанов Ж.С., Егоров А.К. Устойчивость неоднородного деформирования нелинейных тел. - Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1987. - 279 с.

39 Исмаил-заде А.Г., Биргер Б.И. Гравитационная неустойчивость идеально пластического слоя, находящегося на

слое вязкой жидкости: следствия для диапиризма // Физика Земли. - 2001. - №7. - С. 10-17.

40 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Гравитационная неустойчивость вязкопластической среды // Мат. журнал. - 2006. - Т.6. - № 4(22). - С.71-79.

41 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Релей-тейлоровская неустойчивость ползущих течений с осевой симметрией и усложненной реологией // Изв.НАН РК, сер. физ.-мат. - 2007. - №1(251). - С. 39-44.

42 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Особенности начальной стадии диапиризма // Поиск. - 2007. - № 1. - С.269-273.

43 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Исследование начальной фазы диапиризма на основе модели реологически неоднородной среды // Известия Киргизского гос. технического университета им.И.Раззанаова. - 2008. - № 13. - С. 18-22.

44 Martynov N.I., Tanirbergenov A.G., Baimakhan R.B. Research of Relay-Taylor instability of creeping flows with an axial symmetry and a complicated rheology // 7-th International Symposium «Enhancing Infrastructure development through innovative geoinformation technology». - Kuala Lumpur, Malaysia, 2008. - 70p.

45 Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Research of gravitational instability of the non-newtonian viscoplastic medium // Journal of Mathematics and Technology. - 2010. - April. - P. 22-29.

46 Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Research of relaytaylor instability of creeping flows with an axial symmetry and a complicated rheology // International Journal of Academic Research. - 2010. - Vol. 2. - № 2. - P. 180-187.

47 Лодж А. Эластичные жидкости. - М. : Наука. -1969. - 463 с.

48 Аманов Г.Ш., Мартынов Н.И. О численном решении начально-краевых задач для уравнений Кортевега-де Вриза // Тезисы II Республиканской конф. по проблемам выч.мат. и автомат. науч. исследований. - Алма-Ата, 1988. - Т.1. – С. 13.

49 Аманов Г.Ш., Мартынов Н.И. Численное моделирование гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости // Тезисы докладов 9 Республиканской меж. вуз. конф. по мат. и

мех. Часть 3. Теор. и приклад. мех. - Алма-Ата, 1989. - С. 117-118.

50 Мартынов Н.И., Аманов Г.Ш., Найзабаева Л. О численном решении некоторых краевых задач для нелинейных систем 3-го порядка // Тезисы докладов 9 Республиканской меж. вуз. конф. по мат. и мех. Часть 1. математика. - Алма-Ата, 1989. - С. 117-118.

51 Мартынов Н.И., Аманов Г.Ш. Численный метод расчета распространения нелинейных волн на границе раздела литосферы и астеносферы // 10-я отчетно - научная конф. Ин-та мат. и мех. АН КазССР. - Алма-Ата. - 1990. - 122 с.

52 Garagash I.A., Martynov N.I., Amanov G.Sh. About one mathematical model of propagation tectonical waves in lithosphere // VII - European seismological conference. - Spain, Barcelona. - 1990. - P. 175.

53 Nettleton L.L. Recent experimental and geophysical evidence of mechanics of salt dome formation // Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol. - 1943. - Vol. 27. - No.1. - P. 51-63.

54 Лебедева Н.Б. Моделирование процесса образования диапировых куполов // Сов. Геология. - 1956. - № 54. - С. 163-175.

55 Паркер Т.Д., Мак-Доуэлл А.П. Экспериментальное изучение солянокупольной тектоники // Вопросы экспериментальной тектоники. - 1957. - С. 9-136.

56 Сычева - Михайлова А.М. Механизм тектонических процессов в обстановке инверсии плотности горных пород. - М.: Недра, 1973. - 136 с.

57 Рамберг Х. Моделирование деформаций в земной коре с применением центрифуги. - М.: Мир, 1970. - 224 с.

58 Рамберг Х. Сила тяжести и деформации в земной коре. - М.: Недра, 1995. - 399 с.

59 Whitehead J.A., Huther D.S. Dynamics of laboratory diaper and plume models // Geophys. Res. - 1975. - Vol. 80. - № 5. - P. 705-717.

60 Jackson M.P., Tallot C.J. External shapes. Strain rates and dynamics of salt structures // Ged. Soc. Am. Bull. - 1986. - Vol. 97. - № 3. - P. 305-323.

61 Гуревич Г.И. Об исходных предпосылках подхода к моделированию в тектонике // Некоторые вопросы механики деформированных сред. - 1959. - С. 75-144.

62 Nasir N.E., Dabboosy O.B. The dynamics of salt-dome evolution // Tectonophysics. - 1978. - Vol. 47. - № 1. - P. 85-107.

63 Howard James C. Monte Carlo simulation model for piercement salt domes // Kansas Geol. Surv. Computer. Contrib. - 1968. - № 22. - P. 22-34.

64 Schwerdtner W.M. Preferred orientation of halite in a "salt seismogram" // H. O. Ohio Geol. Soc. - 1965. - Vol. 1. - P. 70-84.

65 Новиков В.Л., Сазонов Ю.В. Численное моделирование адвекции в среде с непрерывным распределением параметров // Изв. АН СССР, Физика Земли. - 1984. - № 6. - С. 15-20.

66 Woid W.D. Finite element calculations applied to salt-dome analysis // Tectonophysics. - 1978. - Vol. 50. - № 2. - P. 369-386.

67 Мясников В.П., Новиков В.Л., Сазонов Ю.В. Прямая задача моделирования соляных куполов // ДАН СССР. - 1980. - Т. 254, № 5. - С. 1105-1108.

68 Ержанов Ж.С., Мартынов Н.И. Тейлоровская неустойчивость двумерного ползущего движения границы раздела вязких несжимаемых жидкостей. // Изв. АН Каз.ССР, сер. физ.-мат., 1985, № 5, с. 79-84.

69 Мартынов Н.И. Эволюция поверхности раздела при тейлоровской неустойчивости двумерного ползущего движения: дис. на соиск. степени к.ф.-м.н. по специальности 01.02.05-Механика жидкостей, газа и плазмы. - Алма-Ата, 1985. - 107с.

70 Танирбергенов А.Г. Модельное исследование условий образования соляного купола: дис.на соиск. степени к.ф.-м.н. по специальности 01.02.07-Механика сыпучих тел, грунтов и горных пород. - Алма-Ата, 1994. - 112с.

71 Антонцев С.Н., Кажихов А.Б. Математические вопросы динамики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: НГУ, 1973. - 120 с.

72 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Разрешимость краевых задач для некоторых моделей неоднородных жидкостей // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию

со дня рождения академика И.Г.Петровского. - М. - 1978. - С. 30-33.

73 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Н.: Наука, 1983. - С. 320.

74 Ладыженская О.А, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970. - 288 с.

75 Ладыженская О.А., Солонников В.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких неоднородных несжимаемых жидкостей // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. - 1975. - Т.52. - С. 52-109.

76 Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. - 1976. - Т. 59. - С. 81-116.

77 Huppert Н.Е. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity current over a rigid horizontal surface // J.Fluid Mech.-1982.-V.121.-P.43-58.

78 Ержанов Ж.С., Мартынов Н.И. Тейлоровская неустойчивость двумерного ползущего движения границы раздела вязких несжимаемых жидкостей // Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат. - 1985. - № 5. - С.79-84.

79 Jackson V.P.A., Talbot C.J.Anatomy of mushroom-shaped diapirs//J.Struct.Geol.-1989.-Vol.11.- №1-2.-P211-230.

80 Dandre B., Cloetingh S. Numerical modeling of salt diapirism: Influence of the tectonic regime // Tectonophysics. - 1994. - Vol. 240. - № 1-4. - P. 59-79.

81 Наймарк Б.М., Малевский А.В. Приближенный метод расчета развития гравитационной неустойчивости // Изв. АН СССР, Физика Земли. - 1986. - № 2. - С.44-53.

82 Лунев Б.В. Изостазия как динамическое равновесие вязкой жидкости // ДАН АН СССР. - 1986. - Т. 290. - №1. - С. 72-76.

83 Zaleski S., Julien P. Numerical simulation of Rayleigh-Taylor instability for single and multiple salt diapirs // Tectonophysics. - 1992. - Vol. 206. - № 1-2. - P. 55-69.

84 Podladchikov Y., Talbaot C., Poliakov A.N. Numerical models of complex diapirs // *Tectonophysics*. - 1993. - Vol. 228. - № 3-4. - P. 189-198.

85 Van Keken P.E., Spiers C.J., van den Berg A.P., Muyzert E.J. The effective viscosity of rocksalt: Implementation of steady-state creep laws in numerical models of salt diapirism // *Tectonophysics*. - 1993. - Vol. 225. - №4. - P. 457-476.

86 Филиппов Ю.Ф., Лапковский В.В., Лунев Б.В. Численное моделирование соляного тектогенеза в кембрийских отложениях Преденейского осадочного бассейна (Западная Сибирь) // *Геология и геофизика*. - 2009. - Т. 50. - №2. - С. 127-136.

87 Лунев Б.В., Лапковский В.В. Быстрое численное моделирование соляной тектоники: возможность оперативного использования в геологической практике // *Физическая мезомеханика*. - 2008. - Т. 12. - №1. - С. 63-73.

88 Орунханов М.К., Танирбергенов А.Г. Численное моделирование процесса формирования нефтяных соляных куполов // *Нефть и газ*. - 2000. - № 2. - С. 72-76.

89 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Численное исследование тейлоровской неустойчивости ползущих движений Стокса // *Вопросы прикладной физики и математики*. - 2003. - С. 123-127.

90 Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М. и др. Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // *ЖВМ и МФ*. - 1998. - Т. 38. - № 7. - С. 1190-1203.

91 Исмаил-заде А.Т., Наймарк Б.М. и др. Численная реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // *Тр.ИММ Уро РАН*. - 1998. - Т. 5. - С. 142-172.

92 Исмаил-заде А.Т., Цепелев И.А., Тялбот К. и др. Трехмерное моделирование соляного диапиризма: Численный поход и алгоритм параллельных вычислений // *Вычислительная сейсмология*. - 2000. - Вып. 31. - С. 62-76.

93 Romer M.M. The salt dome problem: A multilayered approach // *Geophys. Res.* - 2000. - Vol. 196. - P. 5489-5496.

94 Орунханов М.К., Танирбергенов А.Г. Численное моделирование процесса пространственного движения соляного купола // Вычислительные технологии. - Новосибирск-Алматы, 2002. - Т.7. - С. 29-33.

95 Ismail-Zadeh A.T., Tsepelev I.A., Talbot C.J., Korotkii A.I. Trec-dimansional forward and backward modeling of diapirism: Numerical approach and applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics. - 2004. - Vol. 387. - №1-4. - P. 81-103.

96 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Численное моделирование условий формирования солянокупольных структур в земной коре // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: Труды межд.конф. - Новосибирск, 2003. - С. 132-136.

97 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Результаты численного моделирования формирования соляных диапиров в осадочном чехле // Поиск. - 2005. - № 4. - С. 302-305.

98 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Численное моделирование соляных диапиров в земной коре // Мат.журнал. - 2006. - Т. 6. - №1(19). - С. 67-73.

99 Умаров М.У., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Основные закономерности и особенности формирования солянокупольных структур // Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева. - 2004. - № 2. - С. 30-33.

100 Умаров М.У., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Численное исследование 3-х мерной модели движения соляного купола в зависимости от мощностей надсолевых пород и соли // Первые Ержановские чтения. Материалы международной научной конференции. - 2004. - Т. 1. - С. 121-126.

101 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Результаты численного моделирования формирования соляных куполов в земной коре // Тезисы докладов по проблемам современной математики и механики. Международная конференция, посвященная 40-летию Института математики и 60-летию создания первого научного учреждения по математическим исследованиям в Казахстане. Сектор математики и механики. - Алматы, 2005. - 49 с.

102 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Компьютерное моделирование формирования соляных диапиров в земной коре // Тезисы докладов международной 11 межвузовской конференции по математике и механике, посвященной 10-летию Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. - Астана, 2006. - 146 с.

103 Мартынов Н.И. Прикладные аспекты компьютерного моделирования соляного диапиризма // Известия НАН РК. - 2008. - сер. ф.-м., № 1. - С.31-34

104 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Влияние вязкости среды на формирование солянокупольных структур // Известия Кирг.ГТУ. - 2008. - № 13. - С. 23-27.

105 Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г., Чупрасов А.А. Численное исследование механизма формирования солянокупольных структур // Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», посвященной 75-летию академика А.Н. Тюреходжаева. – Алматы. - 2009. - Т.3. - С. 67-71.

106 Мартынов Н.И. Математические модели аномальных процессов в неоднородных средах и конструкциях. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. по специальностям: 01.02.04-механика деформируемого твердого тела и 01.02.07-механика сыпучих тел, грунтов и горных пород. Алматы, 2010. - 259 с.

107 Артюшков Е.В. Геодинамика. - М: Наука, 1979. - 326с.

108 Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. - М.: Мир, 1985.- 730с.

109 Малевский А.В. Численная модель астеносферного диапиризма // Физика Земли . - 1986.- №9. - С.37- 44.

110 Жантаев Ж.Ш., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Формирование соляных диапиров в температурном поле // Проблемы эволюции открытых систем. - 2009. - Т.1. - вып.11. - С. 70-76.

111 Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Влияние температурных градиентов на формирование соляных диапиров // Труды межд. Научно-практической конференции,

посвященной 75-летию заслуженного деятеля науки и техники Казахстана, академика НАН РК, д.т.н., профессора Айталиева Ш.М., «Механика и строительство транспортных сооружений». - Алматы, 2010. - С. 273 - 276.

112 Bridwell R.J., Potzick C. Thermal regimes mantle diapirs and crustal stresses of continental rifts // *Tectonophysics*.- 1981.-Vol.73.- P.15-32.

113 Наймарк Б.М., Малевский А.В. Приближенный метод решения задачи о гравитационной и тепловой устойчивости и расчеты полей смещений и напряжений для моделей верхней мантии Земли // *Вычислительная сейсмология*. - 1987.- Вып.20.- С.33-51.

114 Малевский А.В. Механика процесса образования астеносферного диапира // *Вычислительная сейсмология*. -1987. - Вып.20. - С.52-60.

115 Рыков В.В., Трубицын В.П. Численное моделирование трехмерной мантийной конвекции и тектоника континентальных плит // *Вычислительная сейсмология*. -1994. - Вып.26.-С.94-102.

116 Foulger G. B. *Plates vs. plumes: a geological controversy*.— New-York.- Willey-Blackwell, 2010. - P. 352.

117 Jörg Hasenclever et al. 2D and 3D numerical models on compositionally buoyant diapirs in the mantle wedge // *Earth and Planetary Science Letters*.-2011.-Vol. 311.-P.53-68.

118 Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Механика формирования астеносферного диапиризма // *Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения»*, посвященной 80 летию академика А.Н. Тюреходжаева. - 2014.-Т.2.- С.96-102.

119 Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Численное моделирование астеносферного диапиризма // *Известия НАН РК*. -2014. -сер.физ.-мат.- №2.- С.267-275.

120 A.A.Baimukhametov, N.I. Martynov, A.G. Tanirbergenov. Numerical design of asthenospheric diapirism with phase transitions. // *Science and world* - 2014.-№ 9(13)-P. 15-22.

121 Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Ramazanova M.A., Tanirbergenov A.G., Tanirbergenov B.A. Stress-strain state under

conditions of salt-dome tectonics// International scientific journal « Science and world ».- 2015.-№ 4(209).-Vol.I.-P. 21-27.

122 Baimukhametov A.A., Egorov A.K., Koksalov K.K., Martynov N.I., Baimukhametov M.A., Tanirbergenov A.G. Driving mechanisms of deep geodynamic processes // Book of Papers of the 24<sup>th</sup> ICTAM. - Montreal.- Canada.- 2016.-P. 2180-2181.

123 Мартынов Н.И., Танирбергенов Д.Г. Напряженно-деформируемое состояние осадочного комплекса и подсолевого ложа. //Научные труды «Эділет» Caspian social university. -2010.-№4.- С.182-188.

124 Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Influence of thermogradients on formational of oil and gas traps // International Journal of Acadtmic Research. - 2011. - 1 Part.- v.3.- P.7-12.

125 Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Numerical reseach stressed- deformed state of rocks in the salt dome areas of crust // Journal of Mathematics and Technology, ISSN: 2078-0257. - 2013.-Vol.4 - № 2. - P.9-13.

126 Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Thomogradient model of formation of oil and gas traps at salt diepirism // Proceeding of tye 23 rd ICTAM, Beijing, China.- 2012.- 2p.- sm06-013.

127 Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Влияние термоградиентов на формирование нефтегазовых ловушек. // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли. - Н- 2011. -Т.1- С.275-280.

128 А.А.Баймухаметов,Н.И.Мартынов,М.А.Рамазанова,А.Г.Танирбергенов,А.А.

Чупрасов. Особенности формирования нефтегазовых коллекторов в температурном поле. // Вестник НИА РК .- 2013.- №2 (48).- С.21-29.

129 А.А.Баймухаметов,Н.И.Мартынов,А.Г.Танирбергенов,А.А.Чупрасов. Формирование нефтегазовых ловушек в условиях солянокупольной тектоники // Труды XX Всероссийской конференции с участием иностранных ученых «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли». - Н, 2013.- С. 275-280.

130 Жантаев Ж.Ш. О характере изменения мощности земной коры в зависимости от величины геотермического градиента. //Материалы Российско-Казахстанского симпозиума по вопросам геодинамики.А-М. - 2007г. - С.14-23.

131 Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.Теоритическая физика. Гидродинамика.М: Наука, 1986. - с. 736.

132 Karato S.. Grain size distribution and rheology of the upper mantle. //Tectonophysics.- 1984. - Vol.104.- P.155-176.

133 Ranalli G., Fisher B. Difussion creep, dislocation creep and mantle rheology. // Phys. Earth Planet. Inter.- 1984.-Vol.34.-P.77-84

134 Chandrasekar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stabilite. Oxford: Clarendom press, 1961. - 652 p.

135 Исмаил-задеА.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев Н.А.Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // ЖВММФ.- 2001.- Т. 41.- № 9.- С. 1399- 1415.

136 Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. - М.: Высш. Шк., 1987. – 296 с.

137 Лойцянский Л.Г. Механика жидкостей и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

138 Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. - М.: Мир, 1976. – 632 с.

139 Yih, Chia-Shum. Dynamics of nouhomo – geneons fluidsю. - NY-London: Macmillan, 1965. – 301 p.

140 Годунов К.С. Элементы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1978. - 304 с.

141 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - Изд.2-е, перер.и доп., М: Наука, 1980. -536с.

142 Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М: Наука, 1981. - 416с.

143 Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 592 с.

144 Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. – 656 с.

145 Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы эллиптических уравнений. - М.: Наука, 1976. – 352 с.

- 146 Дюво Г., Лионс Ж.Л. Неравенства в механике и физике. - М.: Наука, 1980. - 383 с.
- 147 Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. - М.: Мир, 1974. - 130 с.
- 148 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972. - 496 с.
- 149 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. - М.: Высшая школа, 1982. - 271 с.
- 150 Кобельков Г.М. Об одном итерационном методе решения стационарного уравнения Навье-Стокса // Вестник МГУ, сер.15, Выч. математика и кибернетика. - 1980. - № 1. - С.3-13.
- 151 Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС. -2003.-784с.
- 152 Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - М.: Наука, 1967. - 195 с.
- 153 Наротов В.П., Черных Г.Г. О численном моделировании течения, возникающего при коллапсе зоны смещения в стратифицированной среде. / ИТПМ СО АН СССР. - Н., 1982. - препринт №15. - 23 с.
- 154 Зелинский Н.И., Сапожников В.А. Об одном методе построения конечно-разностных схем для расчета разрывных решений задач газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. - 1983. - Т. 14. - № 2, С. 57-67.
- 155 Зелинский Н.И., Сапожников В.А. Метод корректировки для построения разностных схем задач газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. - Т. 14. - №3. - С. 76-78.
- 156 Танирбергенов А.Г. Метод коррекции потоков при гравитационной неустойчивости высоковязких жидкостей // Вестник инженерной академии РК. - 2008.- № 3(29). - С. 41- 45.
- 157 Поттер Д. Вычислительные методы в физике.- М: Мир,1975.-392с.
- 158 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах. ЖВМ и МФ. - 1961.-Т.1. - №1. - С.5-63.
- 159 Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.

160 Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, 1984. – 519 с.

161 Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло-и массообмена. - М:Наука.-1984.-286с.

162 Вабищевич П.Н., Самарский А.А. Решение задач динамики несжимаемой жидкости с переменной вязкостью // ЖВМ и МФ. – 2000. - Т. 40. - № 12. - С. 1813-1822.

163 Айзенштад Г. Е.-А., Герштейн Э.К. О первоначальной мощности Кунгурского соляного комплекса Прикаспийской впадины // Доклады АН СССР. – 1963.-Т.151.- № 5.-С.1156-1158.

164 Соколов В.Л., Кричевский Г.Н. Об особенности солянокупольной тектоники Прикаспийской впадины в связи с разведочными работами на газ и нефть / Сб. «Условия образования и особенности нефтегазоносности солянокупольных структур» - Киев: Наукова думка, 1966.- С.146-153.

165 Baimukhametov A. A., Martynov N. I. , Ramazanova M. A. , Tanirbergenov A. G. Applied aspects of researches of the mathematical modelling of salt diapirism in oil and gas business // News of the academy of sciences of the RK. Series of geology and technical sciences.-2017.--№ 2-P.185-193.

166 Геология регионов Каспийского и Аральского морей. Под ред. Г.Р. Бекжанова.-Алматы: Изд. «КазГЕО»-2004. - 472с.

167 Айталиев Ш.М., Кудайкулов А.К., Мардонов Б.М. Механика прихвата бурильных колонн в нефтегазовых скважинах. -Атырау-Алматы: Изд. «Эверо».-1999.-82с.

168 Хаиров Г.Б. Экологически безопасная технология строительства глубоких разведочных скважин. - М: «ВНЦИОЭНГ». -1996.-204с.

169 Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. - М.: Наука,1983.- 415с.

170 Рамберг И., Морган П. Физические характеристики и направления эволюции континентальных рифтов // Тектоника: Материалы 27-го Междунар. геол. конгр. Секция С.07. М: Наука- 1984. - Т.7.- С.78-109.

171 Жарков В.Н., Трубицын В.П. Физика планетных недр. М.: Наука, 1980,448с. 6. Зорин Ю.А., Осокина С. В. Модель нестационарного температурного поля земной коры Байкальской рифтовой зоны // Изв.АН СССР. Физика Земли.-1981.-№ 7.- С.3-14.

172 Зорин Ю.А., Осокина С. В. Модель нестационарного температурного поля земной коры Байкальской рифтовой зоны // Изв.АН СССР. Физика Земли. - 1981.-№ 7.- С.3-14.

173 Стейси Ф. Д. Физика Земли.М.: Мир, 1972.- 343с.

174 Логачев Н.А., Зорин Ю.А.Строение и стадии развития Байкальского рифта. // Тектоника: Материалы 27-го Междунар. геол. конгр. Секция С.07. М: Наука, 1984. - Т.7.-С.126-134.

175 Turcott D.L., Emerman S.H. Mechanisms of active and passive rifting // Tectonophysics.-1983.-Vol.94.-P.39-50.

176 Turcott D.L .Convection //Rev.Geophys. and Spase Phys.-1979.-Vol.17.- № 6.- P. 1090-1097.

177 Illies J. H. Mechanism of graben formation // Tectonophysics.-1981.-Vol.73.-P.249-266.

178 Morgan P Constrains on thermal processes from heat uplift // Tectonophysics.-1983.-Vol.94.-P.277-298.

179 Marschal J.C. Mechanisms if uplift preceding rifting // Tectonophysics.-1983.-Vol.94.-P.51-66.

180 Olsen K.H. The role of seismic refraction data for studies of the origin and evolution of continental rifts// Tectonophysics.-1983.-Vol.94.-P.349-370.

181 Bott M.H.P. Crustal doming and mechanisms of continental rifting // Tectonophysics.-1981.-Vol.73.-P.1-8.

182 Mareschal J.C. Mechanisms of uplift preceding rifting // Tectonophysics.-1983.-Vol.94.-P.51-66.

183 Artyshkov E.V. Mechanisms of continental riftogenesis // Tectonophysics.- 1981.-Vol.73.-P. 9-14.

184 Рассказов С. В. Вулканизм горячего пятна и структура западной части Байкальской рифтовой системы // Геология и геофизика. – 1991. – № 9. – С. 72–81.

185 Rasskazov S. V. Magmatism related to the East Siberia rift system and the geodynamics // Bull. Centres Rech. Explor. – Prod. Elf. Aquitaine. – 1994. – Vol. 18.- N 2. – P. 437–452.

186 Pierce K. L., Morgan L.A. The track of the Yellowstone hotspot: volcanism, faulting and uplift // U.S. Geol. Surv. - 1991.- Open-File Report 90-415. – 68 p.

187 Keith M. Evidence for a plate tectonic debate // Earth-Sci. Reviews. – 2001. – Vol. 55. – P. 235–336.

189 Rasskazov S.V. Radiogenic isotopes in geologic processes [et al.]. – Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, N. Y., 2010. – 306 p.

190 Whitehead J.A., Huthner D.S. Dynamics of laboratory diaper and plume models // Geophys. Res. – 1975. - Vol. 80. - № 5. - P. 705-717.

191 Cserepes L., Rabinovich M., Rosenberg-Borot C. Three-dimensional convection in a two-layer mantle // J.Geophys. Res.-1988.-Vol.93.-P.12009-12025.

192 Houseman G. The dependence of convection planform on mode of heating // Nature.-1988.-Vol.332.-P.346-349.

193 Travis B., Oslion P., Schubert G. The Transition from two-dimensional to three-dimensional platform in infinite Prandtl-number thermal convection // J. Fluid Mech.-1990.-Vol.216.-P.71-91.

194 Frick H., Busse F.H., Clever R.M. Steady three-dimensional convection at high Prandtl number // J. Fluid Mech.-1983.-Vol.127.-P.141-153.

195 Busse F.H., Frick H. Square pattern convection in fluids strongly temperature-dependent viscosity // J. Fluid Mech.-1985.-Vol.150.-P.451-465.

196 Christensen U., Harder H. 3-D convection with variable viscosity // Geophys.J.Internat.-1991.-Vol.104.-P.213-226.

197 Owaga M., Schubert G., Zebib A. Numerical simulation of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity // J. Fluid Mech.-1991.-Vol.223.-P.299-328.

198 Tackley P.J., Hansen U. Effects of strongly temperature-dependent viscosity on time-dependent, three-dimensional models mantle convection // Geophys.Res.Lett.-1993.-Vol.20.-P.2187-2190.

199 Trompert R.A., Hansen U. The application of a finite volume multigrid method to three-dimensional flow problem in a highly viscous

fluid with a variable viscosity convection // *Geophys. Astrophys., Fluid Dynamics.*-1996.-Vol.83.-P.261-291.

200 Короткий А.И., Цепелев И.А., Гэлбот К. и др. Параллельные алгоритмы моделирования движения неоднородной вязкой жидкости // *Вычислительная сейсмология* .-1998.-Вып.30.-С.3-15.

201 Короткий А.И., Решетов В.М., Цепелев И.А. и др. К моделированию динамики вязкой жидкости // *Алгоритмы и программные средства вычислений. Уро РАН.*-2000.-Вып.4.-С.161-172.

202 Наймарк Б.М. Существование и единственность решения задачи Рэлея-Тэйлора // *Вычислительная сейсмология* .-1988.-Вып.21.-С.94-114.

203 Наймарк Б.М. Существование и единственность в малом решения задачи Рэлея-Бенара // // *Вычислительная сейсмология* .-1986.-Вып.18.-С.35-45.

204 Boss A.P., Sacks I.S. Time-dependent numerical models of mantle convection // *Carnegie Inst. Annu. Rep. Dep. Terrestrial Magnetism*, -1982. - P.543-549.

205 Shubert G., Anderson C.A. Finite element calculations of very high Rayleigh number thermal convection // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*-1985.-Vol.80.-, № 3.- P.575-601.

206 McKenzie D.P., Roberts J.M., Wells N.O. Convection in the Earth's mantle: towards a numerical solution // *J. Fluid Mech.*-1974.-Vol.63.- P. 465-4768.

207 Наймарк Б.М. Метод компьютерного моделирования мантийных течений с разрывами плотности и вязкости вдоль подвижных границ // *Доклады РАН.*- 1997.-Т.354.- № 5- С.676-678.

208 Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т., Короткий А.Т. и др. Моделирование трехмерных вязких течений в вязких слоях мантии // *Известия Уральского гос. ун-та.*-1999.-Вып.2-С.65-76.

209 M. Drury, J. de Smet, H. van Roermund, A. van den Berg, N. Vlaar Emplacement of deep mantle rocks into cratonic lithosphere by convection and diapiric upwelling // *J. of Petrology.*-2001.-Vol. 42.-№2.-P.131-140.

210 Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев Н.А. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // ЖВММФ. - 2001.- Т. 41.- № 9.- С. 1399-

211 Burg J.-P. et al. Translithospheric mantle diapirism: geological evidence and numerical modelling of the Kondyor zoned ultramafic complex (Russian Far-East) // J. of Petrology.-2009.- Vol.50.-P.289-321.

212 Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Механика формирования астеносферного диапиризма с фазовыми переходами // Вестник НАН РК.-2015.-№3-С.71-81.

213 Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Математические модели формирования астеносферного диапиризма // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.-2015.-№ 2.-С.57-63.

214 Полянский О.П., Коробейников С.Н., Бабичев А.В., Ревердатто В.В.,Свердлова В.Г. Компьютерное моделирование диапиризма гранитной магмы в земной коре // Док. РАН. - 2009.- Т. 429.- № 1.- С. 101-105.

215 O. P. Polyansky, S. N. Korobeynikov, A. V. Babichev, V. V. Reverdatto Formation and upwelling of mantle diapirs through the cratonic lithosphere: Numerical thermomechanical modeling // Petrology.- 2012.- Vol. 20.-№2.- P.120-137.

216 Крупский Д.П., Исмаил-Заде А.Т. Численное моделирование тепловой диффузии мантийных плюмов // Физика Земли. - 2005.- № 9.- С. 3-11.

217 Исмаил-Заде А.Т., Короткий А.И., Крупский Д.П., Цепелев И.А., Шуберт Д. Эволюция тепловых плюмов в мантии Земли // Док. РАН. - 2006.-Т. 411.- № 4.- С. 523-526.

218 Захаров В.В., Никитин Л.В. Механика подъема магмы по трещинам. // Известия АН СССР. Физика Земли.-1985.-№ 7.- С.14-24.

**Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И.,  
Танирбергенев А.Г.**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ  
СОЛЯНЫХ КУПОЛОВ В ЗЕМНОЙ КОРЕ**

Верстка Жадыранова Г.

Подписано к печати 23.06.2017 г.  
Тираж 600 экз

---

Типография РГП «Ғылым ордасы»