

А.Б. ФАДЕЕВ

# Метод КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ в геомеханике



МОСКВА «НЕДРА» 1987

Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. 221 с.

Обобщены работы в области решения нелинейных задач механики сыпучих тел, грунтов и горных пород. Рассмотрены теоретические основы механики деформируемого твердого тела. Изложен наиболее эффективный метод численного анализа в геомеханике — метод конечных элементов. Приведены основные приемы получения нелинейных уравнений с помощью этого метода. Освещены новейшие результаты исследования механических свойств грунтов и горных пород в процессе деформации. Представлены примеры решения геотехнических задач, возникающих при проектировании, строительстве и эксплуатации горных предприятий, гидротехнических и других объектов. Описана разработанная под руководством автора программа "Геомеханика" на языке Фортран.

Для работников научно-исследовательских и проектных организаций, преподавателей и студентов горных, строительных, гидротехнических и транспортных вузов.

Табл. 8, ил. 125, список лит. — 50 назв.

Рецензент: *Е.И. Шемякин*, акад. АН СССР (Институт горного дела Сибирского отделения АН СССР)

Основными направлениями экономического и социального развития СССР на 1986 — 1990 годы и на период до 2000 года предусмотрено дальнейшее развитие горнодобывающих отраслей промышленности, занимающих ведущее положение в сфере производства энергетического и минерального сырья для удовлетворения постоянно растущих потребностей народного хозяйства в разнообразных полезных ископаемых.

В этой связи развитие науки и техники должно быть еще в большей мере подчинено решению экономических и социальных задач советского общества, ускорению перевода экономики на путь интенсивного развития, повышению эффективности общественного производства.

Увеличение объема строительства подземных сооружений, рост использования недр для различных хранилищ, все более возрастающие масштабы горного производства, огромные перспективы его развития, связанные с увеличением глубины работ, и включение в эксплуатацию более сложных месторождений выдвигают на первое место изучение проблем горной физики и механики недр — механики породных массивов.

Наука о механическом поведении породного массива под действием внешних сил называется геомеханикой. Развитие этой науки связано с развитием вычислительной техники.

До появления мощных численных методов и широкого распространения ЭВМ в шестидесятых-семидесятых годах традиционная геомеханика делила геомеханические задачи на две группы: предельного состояния и деформационные. В первую группу попадали задачи определения несущей способности фундаментов; устойчивости откосов, насыпей, плотин, подземных выработок и камер, давления на подпорные стенки. Ко второй группе относились задачи расчета осадок грунтовых оснований под нагрузками от зданий и других сооружений, в том числе с учетом фильтрационной консолидации, контактные задачи взаимодействия сооружений с грунтами, прогноза устойчивости подземных выработок путем сопоставления напряжений с прочностными свойствами пород.

Теоретическая основа для решения задач первой группы была заложена Ш. Кулоном в конце XVIII-го столетия. Решения предельных задач основаны на анализе уравнений равновесия в плоскости, в пространстве или по какой-либо поверхности, отсекающей часть массива от целого. Получаемые решения определяют только предельные сочетания действующих нагрузок при заданных прочностных свойствах грунта.

Решения задач второй группы базировались на предположении о линейной связи напряжений и деформаций в грунте, что давало основание для использования методов теории упругости при анализе

деформаций грунтов под нагрузкой. Ввиду сложности получения упругих решений деформационные задачи механики грунтов обычно расчленяются на расчет напряжений в грунте и расчет деформаций. При этом как расчет напряжений, так и расчет деформаций выполняются обычно с целым рядом упрощающих допущений, что позволяет использовать известные решения простейших задач (в частности, решение Буссинеска о действии силы на упругое полупространство), игнорировать те или иные компоненты тензора напряжений при расчете деформаций.

Как видим, эти две группы задач рассматривают работу грунта с совершенно различных позиций и требуют даже разных характеристик грунта: для задач предельной группы характеристиками являются сцепление  $C$  и угол внутреннего трения  $\varphi$ , а для задач деформационной группы — модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

При решении задач первой группы деформации грунта не рассматриваются и предполагаются достаточными для полной мобилизации сил сопротивления. Во второй группе задач напряжения и деформации предполагаются достаточно малыми, при которых еще не образуется зои предельного состояния, или эти зоны настолько малы, что их можно игнорировать. Между тем во всех представляющих реальный интерес задачах механики грунтов и горных пород имеют место смешанные деформации обоих типов — упругие и пластические. При малой величине пластических зон ими пренебрегают и задачу рассматривают как упругую. При существенном развитии пластических деформаций их необходимо учитывать и решать смешанную задачу.

Аналитическим путем решено крайне ограниченное число смешанных задач. Для реальных же граничных условий, характерных для задач фундаментостроения и горного дела, а тем более в неоднородных средах аналитическое решение, как правило, недостижимо. Еще 10 — 15 лет тому назад получение каждого упругопластического решения было заметным явлением в механике. Сейчас же численные методы позволяют без особых усилий получать решения при сколь угодно сложных граничных условиях. Усилиями исследователей диапазон реализуемых в программах механических свойств грунтов непрерывно расширяется.

Среди различных численных методов механики сплошных сред наиболее совершенным является метод конечных элементов. Идеи приближенных методов вычисления, на которых базируется метод конечных элементов, начали развиваться еще с конца XIX — начала XX столетия. Значительный вклад в их развитие внесли и отечественные ученые. В частности, метод приближенного решения дифференциальных уравнений Бубнова — Галеркина с исключительным успехом используется в конечно-элементной интерпретации.

Развитие численных методов опиралось на успехи линейной алгебры и вычислительной техники. Метод конечных элементов (МКЭ) был сформулирован в трудах Дж. Аргириса, М. Тернера, Р. Клафа в эпоху первых вычислительных машин в 50-х годах. Популярность

этого метода очень быстро росла в различных областях науки и техники. Мощность ЭВМ первого поколения позволяла решать с помощью МКЭ линейные задачи типа задач установившейся теплопроводности и упругости.

В областях техники, использующих расчеты на прочность по упругим напряжениям, МКЭ сразу нашел применение. С его помощью рассчитываются корпуса кораблей, летательных аппаратов, строительные конструкции.

Большое быстродействие и объемы памяти ЭВМ второго поколения привели к быстрому развитию приемов решения нелинейных задач, которые, как правило, сводятся к многократному повторению линейных задач. Этот этап открыл путь исключительно продуктивному внедрению МКЭ в механику грунтов. Можно сказать, что насколько ранее механика грунтов была неотделима от метода предельного равновесия, настолько же она неотделима в настоящее время от метода конечных элементов.

МКЭ предоставляет возможность учитывать в расчетах разнообразные и сложные свойства грунтов, а не два показателя ( $E$  и  $\nu$  или  $C$  и  $\varphi$ ), как прежние методы механики грунтов. Этим самым МКЭ стимулировал развитие методов испытаний грунтов и горных пород и новых теорий их прочности и деформируемости.

Характер публикаций, связанных с аналитическими и численными методами решения задач механики, существенно различен. Аналитические решения задач, скажем, теорин упругости, относятся, как правило, к телам простой формы, аналогию с которыми можно найти во многих областях техники. Решения эти точные, дальнейшей корректировке не подлежат, и они представляют сами по себе интерес для всех инженеров, тогда как метод аналитического решения интересен лишь для математиков. Поэтому публикации по аналитическим методам решений неизменно содержат детальное изложение конкретных задач.

Численные же методы используются для решения сложных задач, каждая из которых практически уникальна по своим граничным условиям, свойствам среды. Результаты таких решений для широкого круга читателей представляют интерес в основном как иллюстрации эффективности использования метода решения и в меньшей степени сами по себе. Машинная же реализация достаточно полно изложенного метода и получение с его помощью неограниченного числа новых решений не представляет трудности.

Поэтому публикации, посвященные численным методам, обычно содержат сравнительно мало примеров конкретных решений, а в основном посвящаются изложению методов. Поток публикаций по применению МКЭ в геомеханике необычайно велик. Приблизительно каждая третья статья в геотехнических журналах так или иначе связана с МКЭ, издается специальный международный журнал по численным методам в геомеханике, вышел ряд монографий.

Несмотря на то, что учебные программы по механике грунтов и горных пород еще не включают в себя разделы, посвященные МКЭ,

тём не менее в передовых вузах начинается преподавание этого раздела совместно с вопросами нелинейной механики грунтов и горных пород в виде спецкурса студентам-дипломникам, слушателям факультета повышения квалификации. Автор рассматривает данную книгу в основном как систематизированное пособие, дающее читателю основные представления о нелинейных свойствах грунтов и горных пород и о способах решения нелинейных задач. Изложение МКЭ дается в форме, доступной для восприятия инженерами и студентами технических вузов горного и строительного профиля. В сжатой, конспектной форме приводятся также сведения из теории напряжений, деформаций и теории пластичности. При написании книги автор использовал свой опыт чтения курса лекций по МКЭ и нелинейной механике грунтов в Ленинградском инженерно-строительном институте.

## 1.1. НАПРЯЖЕНИЯ

В трехмерной декартовой системе координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  напряженное состояние характеризуется напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ . Используются две системы краткой записи и анализа напряжений: векторно-матричная и тензорная. Вектором напряжений  $\{\sigma\}$  называют матрицу-столбец (вектор), составленный из вышеперечисленных компонентов напряжений:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \left\{ \sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \right\}^T.$$

Операции с вектором напряжений выполняются по правилам алгебры матриц. Тензором напряжений  $T_\sigma$  называют квадратную таблицу вида

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

где цифры 1, 2, 3 заменили собой обозначения координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ .  $\sigma_{11} = \sigma_x$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_y$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_z$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau_{yz}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{zx}$ .

При анализе в тензорной системе указывается правило вычисления произвольного компонента тензора  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Отметим, что у компонентов нормальных напряжений индексы одинаковы:  $i = j$ , у касательных  $i \neq j$ .

В соответствии с правилами тензорного анализа повторяющийся индекс означает суммирование:  $\sigma_{ii}$ , или  $\sigma_{jj}$ , или  $\sigma_{kk}$  и означает  $\sum_{i=1,2,3} \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ . Мы в дальнейшем будем преимущественно пользоваться векторно-матричной системой анализа, хотя в некоторых случаях во избежание громоздких выражений будем использовать и тензорную систему.

Девизатором напряжений  $D_\sigma$  называют результат вычитания из тензора напряжений шарового тензора  $T_{\sigma_0}$ :

$$D_\sigma = T_\sigma - T_{\sigma_0} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

где  $T_0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}$  — шаровой тензор,  $\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) =$   
 $= \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  — среднее напряжение.

Величина  $\sigma_0$  равна нормальному напряжению на площадке, равнонаклоненной по всем трем координатным осям (октаэдральной площадке), поэтому его также называют октаэдральным нормальным напряжением.

Обозначая произвольный компонент девиатора  $D_{ij}$  как  $\sigma'_{ij}$ , соотношение (1.1) можно записать кратко:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}.$$

Величина  $\delta_{ij}$  называется символом Кронекера:  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . При неизменном напряженном состоянии компоненты напряжений зависят от выбора направлений осей координат, в частности, может быть найдено такое направление, когда касательные напряжения обратятся в ноль. Нормальные напряжения при этом называются *главными* и обозначаются  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$ .

Независимо от направления осей координат из компонентов тензора напряжений можно составить три комбинации  $I_1, I_2, I_3$ , называемые *инвариантами*, величина которых не будет зависеть от напряжений осей:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0; \\ I_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1); \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В теории напряжений показано, что при известных инвариантах три главных напряжения являются тремя корнями кубического уравнения:

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1 - \sigma I_2 - I_3 = 0.$$

Несложно вычисляются и направления главных напряжений.

Аналогичные инварианты могут быть вычислены и для девиатора напряжений. Инварианты девиатора напряжений будем обозначать символами  $J_1, J_2, J_3$ . Видно, что  $J_1 = 0$ .

$$\begin{aligned} J_2 &= -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \end{aligned}$$



$$J_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - s_x^2 \tau_{yz} - s_y^2 \tau_{zx} - s_z^2 \tau_{xy} =$$

$$= s_1 s_2 s_3,$$

где  $s_x = \sigma_x - \sigma_0$ ,  $s_y = \sigma_y - \sigma_0$ ,  $s_z = \sigma_z - \sigma_0$ ,  $s_1 = \sigma_1 - \sigma_0$ ,  $s_2 = \sigma_2 - \sigma_0$ ,  $s_3 = \sigma_3 - \sigma_0$ .

Касательное напряжение на октаэдральной площадке  $\tau_0$  называют октаэдральным:  $\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2$ .

Среднее напряжение  $\sigma_0$  связано с инвариантом  $I_1$  соотношением

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1.$$

Величину  $\tau_i = \sqrt{J_2}$  называют интенсивностью касательных напряжений.

В дальнейшем анализе используются производные  $\left\{ \frac{\partial \sigma_0}{\partial \sigma} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial \tau_i}{\partial \sigma} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right\}$ , представляющие собой векторы из частных производных  $\sigma_0$ ,  $\tau_i$ ,  $J_3$  по компонентам напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ . Эти векторы имеют следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_0}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\left\{ \frac{\partial \tau_i}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{2\tau_i} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\left\{ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right\} = \begin{Bmatrix} s_y s_z - \tau_{yz}^2 \\ s_x s_z - \tau_{xz}^2 \\ s_x s_y - \tau_{xy}^2 \\ 2(\tau_{xy} \tau_{xz} - s_x \tau_{yz}) \\ 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}) \\ 2(\tau_{yz} \tau_{xy} - s_z \tau_{xy}) \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \tau_i^2 + \frac{1}{3} \tau_i^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

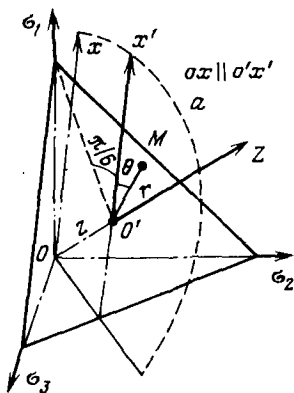


Рис. 1.1. Графическое изображение напряжений в декартовых и цилиндрических координатах

Напряженное состояние, характеризуемое тремя главными напряжениями, может быть изображено в виде точки  $M$  в трехмерном декартовом пространстве с осями координат  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рис. 1.1).

Линия  $oz$ , имеющая уравнение  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , называется *гидростатической осью*. Несложно убедиться, что в точках, лежащих на гидростатической оси, компоненты девиатора напряжений равны нулю. Плоскости, перпендикулярные к гидростатической оси и соответственно равнонаклонные к осям координат, называют *девиаторными, октаэдральными* или  $\pi$ -плоскостями. Одна из них, проходящая через точку  $M$ , изображена на рис. 1.1. Уравнение девиаторной плоскости имеет вид:  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$ .

В точках девиаторной плоскости среднее напряжение, а с ним и в целом шаровой тензор, остаются постоянными, а переменной является девиаторная часть тензора напряжений.

Положение точки  $M$  в пространстве может быть охарактеризовано в цилиндрической системе координат с осью  $oz$ . Направление полярной оси  $ox$  выберем таким, что оно лежит в плоскости  $a$  с уравнением  $2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = 0$  (см. рис. 1.1).

С помощью формул преобразования координат, известных из аналитической геометрии, несложно выразить цилиндрические координаты точки  $M$  ( $r = o'M, z = oo', \theta$ ) через ее декартовы координаты:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2} = \sqrt{J_2} = \tau_1; \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 = \sqrt{3}\sigma_0; \\ \theta &= \arctg \left( - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Величину  $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = -\sqrt{3} \text{tg} \theta$  называют параметром Лоде, а угол  $\theta$  — углом Лоде. Набор  $\tau_1, \sigma_0$  и  $\theta$  будем называть координатами Лоде.

О.Зенкевич и Г.Панде [50] приводят другую, весьма удобную формулу для определения угла  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right).$$

Таблица 1

Показатели	Значения показателей при напряжениях		
	$\sigma_2 = \sigma_3$	$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$	$\sigma_2 = \sigma_1$
$\mu_\sigma$	-1	0	+1
$\theta$	$+\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$

Главным напряжениям\* присваивают номера таким образом, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

При изменении  $\sigma_2$  в этих пределах параметр и угол Лоде принимают значения, приведенные в табл. 1.

Три главных напряжения могут быть выражены через инварианты следующим образом [50]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \sin(-\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} T_1. \quad (1.4)$$

При лабораторных компрессионных и стабилометрических испытаниях грунтов в образцах  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Отвечающие этому условию точки на рис. 1.1 будут лежать в плоскости  $\sigma_1 oz$ . Для характеристики положения точки в этой плоскости достаточно двух координат:  $r = \sqrt{2J_2}$  и  $z = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1$  или пропорциональных им величин  $\sqrt{J_2}$  и  $I_1$  (рис. 1.2, а). Отметим, что при условии  $\sigma_2 = \sigma_3$  выражения для инвариантов принимают более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3} \\ J_2 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{3} \end{aligned} \right\}$$



Рис. 1.2. Системы координат для изображения напряженного состояния

\* В геомеханике напряжения и деформации сжатия считаются положительными, растяжения — отрицательными.

Если анализ напряженного состояния ведется только в плоскости действия двух главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , а промежуточное по величине напряжение  $\sigma_2$  не рассматривается, то для графического изображения напряженного состояния могут быть использованы прямоугольные координаты  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (рис. 1.2, б) или координаты Мора  $\tau$ ,  $\sigma$  (рис. 1.2, в). В координатах Мора абсцисса и ордината точки  $N$  характеризуют нормальное и касательное напряжение по площадке, наклоненной под углом  $\alpha$  к направлению напряжения  $\sigma_1$ .

## 1.2. ДЕФОРМАЦИИ

Вектор деформаций в точке имеет вид, подобный вектору напряжений:  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$ . Тензор деформаций отличается от тензора напряжений тем, что в нем фигурируют половинные значения сдвиговых деформаций:

$$T_\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix}.$$

Тензор деформаций тоже симметричен относительно главной диагонали. Его можно представить в виде суммы девиатора деформаций и шарового тензора:

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_0 \delta_{ij},$$

где  $\epsilon_0 = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$  — средняя (октаэдральная) нормальная деформация. Объемная деформация  $\epsilon_V = \Delta V / V = 3\epsilon_0$ .

Как и в случае с напряжениями, в пространстве можно выбрать такое направление осей координат, что в координатных плоскостях деформаций сдвига не будет. Нормальные деформации вдоль этих направлений называют *главными нормальными деформациями*  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ . Максимальная деформация сдвига  $\gamma_{\max} = (\epsilon_1 - \epsilon_3)$ . Инварианты тензора деформаций:

$$I_1(\epsilon) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_V = 3\epsilon_0, \quad (1.5)$$

$$I_2(\epsilon) = -\epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_y \epsilon_z - \epsilon_z \epsilon_x + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\ = -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1),$$

$$I_3(\epsilon) = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \epsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \epsilon_y \gamma_{zx}^2 - \\ - \frac{1}{4} \epsilon_z \gamma_{xy}^2 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3.$$

Инварианты девiatorа деформаций:

$$\begin{aligned}
 J_2(\epsilon) &= -e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\
 &= \frac{1}{6} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2], \\
 J_3(\epsilon) &= e_x e_y e_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} e_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} e_y \gamma_{zx}^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{4} e_z \gamma_{xy}^2 = e_1 e_2 e_3, \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

где  $e_x = \epsilon_x - \epsilon_0$ ,  $e_y = \epsilon_y - \epsilon_0$ ,  $e_z = \epsilon_z - \epsilon_0$ ,  $e_1 = \epsilon_1 - \epsilon_0$ ,  $e_2 = \epsilon_2 - \epsilon_0$ ,  $e_3 = \epsilon_3 - \epsilon_0$ . \tag{1.7}

Величину  $\gamma_0 = 2\sqrt{\frac{2}{3} J_2(\epsilon)}$  называют октаэдральной деформацией сдвига, а величину  $\gamma_i = 2\sqrt{J_2(\epsilon)}$  — интенсивностью сдвига.

### 1.3. УПРУГОСТЬ. ЗАКОН ГУКА

Характер зависимостей, связывающих напряжения и деформации в точке среды, определяет ее поведение под нагрузкой. Изучение этих зависимостей и использование их в расчетах является целью и предметом механики деформируемых тел, в частности, механики грунтов. Простейшим видом связи напряжений и деформаций являются линейные уравнения теории упругости, известные как закон Гука:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}. \tag{1.8}$$

Различным видам напряженно-деформированного состояния соответствуют разные наборы напряжений и деформаций  $\{\sigma\}$  и  $\{\epsilon\}$  и различные матрицы  $[D]$ :

а. Трехосное напряженно-деформированное состояние.

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\} &= \left\{ \sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \right\}^T; \quad \{\epsilon\} = \left\{ \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \right\}^T; \\
 [D] &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{1.9} \\
 &\quad \text{СИММ}
 \end{aligned}$$

б. Плоское напряженное состояние

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \right\}^T; \quad \{\epsilon\} = \left\{ \epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy} \right\}^T;$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{симм} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

в. Плоская деформация

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}\}^T; \quad \{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}\};$$

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ \text{симм} & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

г. Осесимметричное напряженно-деформированное состояние

$$\{\sigma\} = \{\sigma_r \sigma_z \sigma_\theta \tau_{rz}\}^T; \quad \{\epsilon\} = \{\epsilon_r \epsilon_z \epsilon_\theta \gamma_{rz}\}^T;$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ \text{симм} & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Возможны другие формы записи закона Гука с использованием других пар упругих констант, в частности, констант Ляме  $\lambda$  и  $\mu$ , модуля объемного сжатия  $K$ , модуля Юнга  $E$ , которые связаны между собой соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} E &= 2G(1+\nu), \\ \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad \mu = G, \\ K &= \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Закон Гука в тензорной форме записывается весьма лаконично:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}.$$

Несложно убедиться в справедливости соотношений

$$\sigma_o = 3K\epsilon_o = K\epsilon_V, \quad \tau_o = G\gamma_o.$$

Линейно-упругая среда может быть графически изображена с помощью двух упругих элементов (пружин), имитирующих реакцию среды на гидростатическую и девиаторные составляющие тензора напряжений (рис. 1.3). Направления главных напряжений и деформаций в линейно-упругом теле соосны, а направляющие тензоры напряжений и деформаций одинаковы.

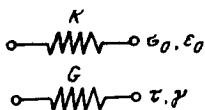


Рис. 1.3. Модель линейно-упругой среды

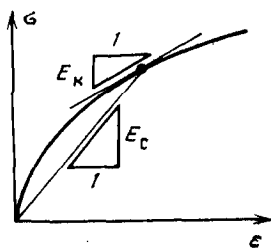


Рис. 1.4. Графическое изображение секущего  $E_c$  и касательного  $E_k$  модулей:

$l$  — единичная деформация

Нелинейной упругостью называют возникновение в телах под нагрузкой обратимых деформаций, связанных с напряжениями нелинейными соотношениями.

Для описания нелинейной упругости используются уравнения линейной упругости — матрица  $[D]$ , однако с переменными, зависящими от уровня напряжений, упругими константами  $K$  и  $G$

$$K = K(\{\sigma\}), \quad G = G(\{\sigma\}).$$

Характеристики, связывающие полные напряжения и деформации, называются секущими, а соответствующая им матрица — секущей матрицей  $[D_c]$  рис. (1.4):

$$\{\sigma\} = [D_c] \{\epsilon\}.$$

Характеристики и матрицы, связывающие малые приросты напряжений и деформаций при достигнутом уровне напряжений, называются касательными:

$$\{d\sigma\} = [D_k] \{d\epsilon\}. \quad (1.14)$$

#### 1.4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Прочностные свойства материалов ограничивают области возможных видов напряженного состояния в пространстве главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Грунты и горные породы могут быть подвергнуты любой величине гидростатического сжатия, т.е. область возможных видов напряженного состояния будет неограниченной вдоль гидростатической оси пространства.

Величина же касательных напряжений ограничивается прочностными свойствами среды. Для описания предельных поверхностей, ограничивающих области прочности при неравномерном сжатии, используются критерии Треска, Мизеса, Кулона и Боткина.

Критерий Треска (Сен-Венана) утверждает, что предельное касательное напряжение в среде равно некоторой постоянной величине  $C$ , т.е.  $\tau - C = 0$ .

Поскольку максимальная величина касательного напряжения равна  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , то уравнение предельной поверхности по критерию Треска в пространстве  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  имеет вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2C = 0. \quad (1.15)$$

Такое уравнение описывает плоскость, параллельную гидростатической оси.

Если не ограничиваться условием  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , а считать все главные напряжения равноправными, то уравнение (1.15) превратится в шесть уравнений, получаемых по формуле

$$\sigma_i - \sigma_j - 2C = 0 \quad (1.16)$$

при  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; i \neq j$ .

Шесть плоскостей, отвечающих шести уравнениям типа (1.16), образуют в пространстве главных направлений правильную шестигранную призму (рис. 1.5).

Критерий Мизеса утверждает, что предельное октаэдральное касательное напряжение имеет постоянную величину  $C$ :

$$\tau_0 - C = 0,$$

иная форма критерия Мизеса

$$\sqrt{J_2} - C = 0. \quad (1.17)$$

Поверхность, отвечающая критерию Мизеса, имеет вид цилиндра, ось которого совпадает с гидростатической осью (см. рис. 1.5).

Как из формул, выражающих критерий Треска и Мизеса, так и из графического изображения, видно, что эти критерии не ставят предельную величину касательных напряжений в зависимости от величины гидростатического сжатия: сечения призмы и цилиндра любой октаэдральной плоскости будут одинаковы.

Критерий Кулона ставит величину предельного касательного напряжения  $\tau$  на площадке в зависимости от нормального напряжения на этой площадке  $\sigma$ :

$$\tau = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.18)$$

или иначе:

$$C + \sigma \operatorname{tg} \varphi - \tau = 0. \quad (1.19)$$

Величину  $C$  называют сцеплением, а  $\varphi$  — углом внутреннего трения. Касательное напряжение максимальной величины будет существовать на площадках, нормальных к плоскости действия максимального и минимального главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

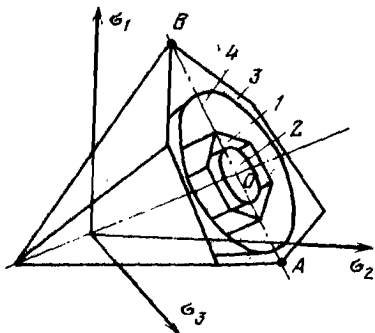


Рис. 1.5. Графическое изображение предельных поверхностей Треска (1), Мизеса (2), Кулона (3) и Боткина (4)



Напряжения  $\tau$  и  $\sigma$  на таких площадках могут быть выражены через главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , с помощью формул поворота осей координат:

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha; \quad (1.20)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha, \quad (1.21)$$

где  $\alpha$  — угол между площадкой и направлением  $\sigma_1$ .

Подставив значения  $\sigma$  и  $\tau$  из выражений (1.20) и (1.21) в формулу (1.19), взяв производную от полученного выражения по  $\alpha$  и приравняв ее нулю, получим уравнение, из решения которого будет найден угол наклона площадок сдвига  $\alpha$ , на которых разность удерживающих ( $C + \sigma \operatorname{ctg} \varphi$ ) и сдвигающих  $\tau$  напряжений максимальна:

$$\alpha = \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Подставив это значение  $\alpha$  в выражения (1.20) и (1.21), а далее значения  $\sigma$  и  $\varphi$  — в формулу (1.19), получим критерий Кулона в главных напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ :

$$\sigma_1 - \operatorname{ctg} \psi \sigma_3 - S = 0, \quad (1.22)$$

где  $\operatorname{ctg} \psi = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ ;  $S = 2C \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$  — прочность на одноосное сжатие, или иначе:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3 + 2C \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (1.23)$$

Вновь считая главные напряжения равноправными, запишем уравнение (1.22) в общем виде:

$$\sigma_i - \operatorname{ctg} \psi \sigma_j - S = 0 \quad (1.24)$$

при  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j$ .

Шесть плоскостей, описываемых уравнением (1.24), образуют шестиугольную пирамиду, изображенную на рис. 1.5. Рассмотрим особенности шестиугольника, полученного при пересечении пирамиды Кулона произвольной октаэдральной плоскостью.

Минимальная полярная координата вершин этого сечения  $r_{\min} = OA$  определяется формулой (1.4) при  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ . По формуле (1.24) имеем:

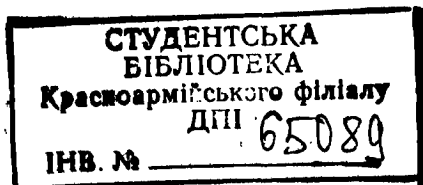
$$\sigma_1 = \sigma_2 = S + \sigma_3 \operatorname{ctg} \psi. \quad (1.25)$$

При этом:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2S + \sigma_3 (2 \operatorname{ctg} \psi + 1)}{3}, \quad (1.26)$$

откуда

$$\sigma_3 = \frac{3\sigma_0 - 2S}{2 \operatorname{ctg} \psi + 1}. \quad (1.27)$$



Подставив значение  $\sigma_3$  из формулы (1.27) в формулу (1.25) и далее подставляя значения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в первое из уравнений (1.3), получим:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{S + \sigma_0 \operatorname{ctg} \psi - \sigma_0}{1 + 2 \operatorname{ctg} \psi} \quad (1.28)$$

Проделав аналогичную цепь выкладок при условии  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ , определим максимальную полярную координату  $r_{\max} = OB$ :

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{S + \sigma_0 \operatorname{ctg} \psi - \sigma_0}{2 + \operatorname{ctg} \psi} \quad (1.29)$$

Из формул (1.28) и (1.29) имеем:

$$\frac{r_{\min}}{r_{\max}} = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \quad (1.30)$$

Обобщенный критерий Кулона — Мизеса, называемый также критерием Мизеса — Шлейхера, критерием Боткина, ставит величину октаэдрального касательного напряжения в линейную (кулоновскую) зависимость от октаэдрального нормального напряжения:

$$\tau_0 - C_0 - a\sigma_0 = 0, \quad (1.31)$$

где  $C_0$  и  $a$  — константы, близкие по смыслу к  $C$  и  $\operatorname{tg} \varphi$  в уравнении Кулона (1.19).

Обобщенный критерий Кулона — Мизеса описывает в пространстве главных напряжений конус (см. рис. 1.5). Чисто геометрической задачей является отыскание констант в уравнении (1.31) для описания конуса, вписанного в пирамиду Кулона; или конуса, описанного вокруг нее.

Общий вид уравнения предельной поверхности таков:

$$F(\{\sigma\}) = 0. \quad (1.32)$$

Среду, деформирующуюся упруго вплоть до момента выхода в предельное состояние и не изменяющую сопротивление при дальнейшем деформировании, называют идеальной упругопластической средой, или средой Рейсса — Праундтля (рис. 1.6). Для графического изображения свойств такой среды используют так называемый элемент сухого трения с предельным сопротивлением  $\tau_{\text{пр}}$ , деформация которого равна нулю при  $\tau < \tau_{\text{пр}}$  и не определена при  $\tau = \tau_{\text{пр}}$ . Деформационная модель идеальной упругопластической среды, которая реаги-

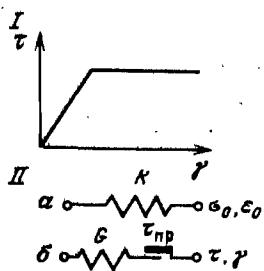


Рис. 1.6. Деформационная характеристика (I) и модель идеальной упругопластической среды (II)

рует упруго на гидростатическое сжатие и имеет предел касательных напряжений, определяемый тем или иным критерием, изображена на рис. 1.6, II, а и 1.6, II, б.

### 1.5. ПОВЕРХНОСТЬ ТЕКУЧЕСТИ

Реальные материалы в отличие от идеальной среды Рейсса — Прандтля в процессе накопления пластических (необратимых) деформаций изменяют свою сопротивляемость действующим нагрузкам. При этом одновременно с пластической деформацией в материале возникают и упругие обратимые деформации. Если материал имеет компактную структуру и от действия гидростатической составляющей напряженного состояния приобретает только упругие объемные деформации (как, например, металлы, водонасыщенная глина в недренажированных условиях или скальная порода), то пластические деформации могут возникать лишь под действием девиаторной части тензора напряжений. График связи касательного напряжения со сдвигом общего вида приведен на рис. 1.7. Деформированное состояние в точке  $A$  характеризуется пластическим компонентом  $\gamma_n$  и упругим компонентом  $\gamma_y$ . Разгрузка материала от точки  $A$  будет сопровождаться восстановлением упругих деформаций, а при повторном нагружении до ранее достигнутого уровня  $\tau_A$  будет происходить чисто упруго, без возникновения дополнительных пластических деформаций. Таким образом, достигнутый уровень напряжений при повторном нагружении после предварительной разгрузки будет служить границей области упругого состояния, и его называют пределом текучести. Пока уровень  $\tau$  не превышает предельного сопротивления материала  $\tau_{пр}$ , процесс нагружения сопровождается увеличением предела текучести, называемым упрочнением. Деформирование материала после достижения предельного сопротивления может сопровождаться снижением предела текучести, называемым разупрочнением.

В пространстве главных напряжений предел текучести будет формировать некоторую поверхность, которую называют поверхностью текучести. Для рассматриваемого материала, у которого пластические деформации возникают только под действием касательных напряжений, простейшей формой поверхности текучести будет поверхность, описываемая уравнением, подобным уравнению предельной поверхности. Поверхность текучести, описываемая критерием Треска, будет иметь уравнение:

$$F = \tau - C + f(k) = 0, \quad (1.33)$$

критерием Мизеса:

$$F = \tau_0 - C + f(k) = 0, \quad (1.34)$$

критерием Кулона:

$$F = \tau - C - \sigma \operatorname{tg} \varphi + f(k) = 0, \quad (1.35)$$

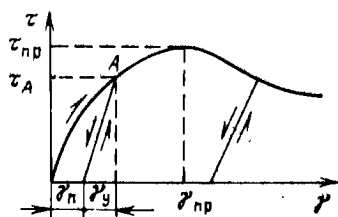


Рис. 1.7. График нелинейной зависимости напряжений и деформаций

обобщенным критерием Кулона — Мизеса:

$$F = \tau_0 - C_0 - \alpha \sigma_0 + f(k) = 0, \quad (1.36)$$

где  $f(k)$  — некоторая функция, характеризующая расширение поверхности текучести по мере возрастания параметра упрочнения  $k$ . Функция  $f(k)$  монотонно убывает до нуля на участке упрочнения и вновь возрастает на участке разупрочнения. В качестве параметра упрочнения обычно используется величина накопленных пластических деформаций (деформационное упрочнение) или энергии пластического деформирования (энергетическое упрочнение).

Уравнения поверхностей текучести (1.33) — (1.36) могут быть выражены через главные напряжения или через компоненты тензора напряжений путем соответствующих подстановок. Общий вид уравнения поверхности текучести таков:

$$F(\{\sigma\}, f(k)) = 0. \quad (1.37)$$

При  $f(k) > 0$  уравнения описывают поверхности, находящиеся внутри соответствующей предельной поверхности; при  $f = 0$  поверхность текучести совпадает с предельной поверхностью.

В процессе нагружения и пластического деформирования  $F = 0$  (1.38). Если же имеет место разгрузка, то  $\tau$  в уравнениях (1.33) — (1.36) снижается, а  $f(k)$  постоянно; соответственно становится  $F < 0$ , что, собственно, и может служить признаком перехода среды к упругой связи приростов напряжений и деформаций.

Если рассматривается идеальная упругопластическая среда Рейсса — Прандтля, то ее предельная поверхность является единственной поверхностью текучести. Уравнение этой поверхности не содержит в себе функции упрочнения  $f(k)$ .

До сих пор мы рассматривали материалы, у которых необратимые (пластические) деформации возникают только под действием касательных напряжений. Предельная поверхность у них оказывается одной из семейства поверхностей текучести. В то же время пористые материалы, к которым относятся грунты, могут приобретать необратимые пластические деформации под действием не только девиаторного, но и гидростатического компонента напряженного состояния. Плотность пористой среды при всестороннем сжатии может необратимо возрастать и не восстанавливаться при разгрузке; именно таковы компрессионные свойства грунтов при нагрузках, превышающих давления, испытанные грунтом в ходе геологической истории.

Поверхности текучести у подобных материалов должны ограничивать в пространстве главных напряжений некоторые замкнутые области. *Область упругости*, например, может быть ограничена двумя поверхностями текучести (рис. 1.8, а): поверхность  $F_1$  описывает предел текучести по отношению к девиаторному компоненту, а поверхность  $F_2$  — по отношению к гидростатическому. В качестве поверхностей текучести  $F$  могут использоваться и гладкие замкну-

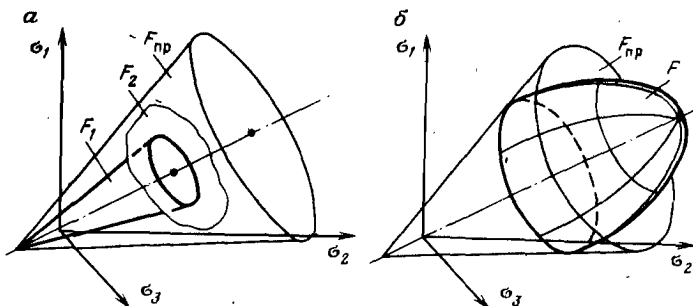


Рис. 1.8. Графическое изображение поверхности текучести сред:  
 а — неуплотняемых; б — уплотняемых

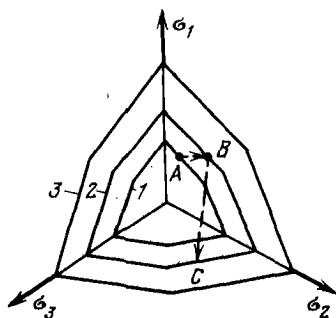


Рис. 1.9. Графическое изображение  
 изотропного упрочнения:

1, 2 — последовательное положение  
 поверхностей текучести; 3 — предельная  
 поверхность

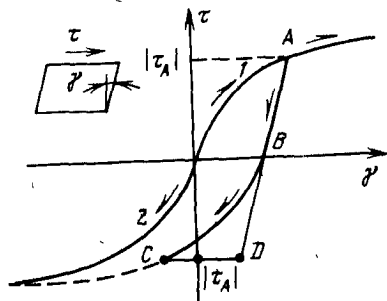


Рис. 1.10. График гистерезисных явлений  
 при разнонаправленном нагружении

тые шатровые поверхности (рис. 1.8, б).  $F_{пр}$  на рис. 1.8 — предельные поверхности.

Для всех рассмотренных поверхностей текучести и предельных поверхностей гидростатическая ось являлась центральной осью. Процесс упрочнения, описываемый такими поверхностями, называют изотропным упрочнением. В соответствии с концепцией изотропного упрочнения нагружение материала от точки  $A$  до точки  $B$  приведет к расширению поверхности текучести от положения 1 до положения 2 (рис. 1.9). Последующее изменение напряженного состояния в пределах контура 2 (например, до точки  $C$ ) у изотропного упрочняющегося материала уже не будет сопровождаться появлением пластических деформаций. Фактически, однако, поведение упругопластических материалов при повторном нагружении может быть существенно иным.

Рассмотрим образец грунта, подверженного сдвигу в различных направлениях. На рис. 1.10 кривые 1 и 2 изображают графики связи касательных напряжений и деформаций при сдвиге образца вправо

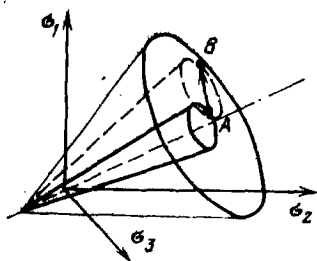


Рис. 1.11. Графическое изображение кинематического упрочнения

и влево из начального недеформированного состояния. Если образец был сдвинут вправо до точки  $A$ , то при последующей разгрузке деформации будут чисто упругие (точка  $B$ ), однако дальнейшее нагружение напряжениями противоположного знака — т.е. влево — будет сопровождаться возникновением пластических деформаций с более низким абсолютного уровня напряжений, и график деформирования будет иметь вид  $BC$ , а не  $BD$ , как прогнозирует модель изотропно упрочняющегося материала. Таким образом, поверхность текучести у

реальных упругопластических тел (рис. 1.11) при изменении напряженного состояния из точки  $A$  в точку  $B$  будет изменять не только свои размеры, но и положение в пространстве главных напряжений. Подобный вид упрочнения называют кинематическим.

Будем называть простым нагружением такой ход изменения напряженного состояния, при котором все компоненты напряжений увеличиваются пропорционально одному монотонно возрастающему параметру. Очевидно, годограф такого изменения напряженного состояния в пространстве главных напряжений будет иметь вид луча, исходящего из начала координат. При простом нагружении материалы с кинематическим и изотропным упрочнением ведут себя одинаково, и анализ таких процессов может быть построен на гипотезе изотропного упрочнения, что позволяет оперировать более простым математическим аппаратом, требует меньшего набора характеристик материала. Для анализа процессов со знакопеременными нагружениями учет кинематического характера упрочнения становится необходимым. Для решения упругопластических задач в ряде случаев оказывается удобным поверхности текучести и предельные поверхности, в том числе и не являющиеся телами вращения, представлять в виде гладких поверхностей, уравнения которых имеют непрерывные производные. О. Зенкевич и Г. Панде [50] предлагают для этого использовать координаты Лоде.

Уравнения любой из ранее рассмотренных поверхностей можно выразить в координатах Лоде, подставив в него выражения главных напряжений через координаты Лоде по формулам (1.4). Например, подставив в критерий Кулона (1.23) выражения (1.4), получим

$$\tau_i \left( \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta \sin \varphi \right) - \sigma_0 \sin \varphi - C \cos \varphi = 0. \quad (1.39)$$

Это уравнение в интервале  $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$  описывает одну из шести граней пирамиды Кулона. Подстановка в это уравнение  $\sigma_0 = \text{const}$  дает сечение критериальной поверхности октаэдральной

плоскостью, а подстановка  $\theta = \text{const}$  дает меридиональное сечение, отражающее связь  $\tau_i$  и  $\sigma_0$  при конкретном значении параметра Лода.

Уравнение критериальной поверхности (предельной) или поверхности текучести в общем виде можно записать так

$$F = f(\sigma_0) + h(\tau_i)/g(\theta) = 0, \quad (1.40)$$

где  $f(\sigma_0)$ ,  $h(\tau_i)$ ,  $g(\theta)$  — функции.

Критерий Кулона (1.39) является одним из частных случаев уравнения (1.40).

Поскольку в октаэдральной плоскости  $f(\sigma_0) = \text{const}$ , то и  $\tau_i/g(\theta) = \text{const}$ .

Для описания изменения  $\tau_i$  в меридиональных сечениях достаточно рассмотреть одно из них, например, сечение  $\theta = \pi/6$ . Обозначив величину  $\tau_i$  при  $\theta = \pi/6$  как  $\bar{\tau}_i$ , запишем  $\tau_i = \bar{\tau}_i g(\theta)$ .

Функция  $g(\theta)$  при  $\theta = \pi/6$  должна принимать значение  $g(\frac{\pi}{6}) = 1$ . В этом меридиональном сечении уравнение  $A$  примет вид  $F = f(\sigma_0) + h(\bar{\tau}_i) = 0$ .

Чтобы избежать острой вершины в меридиональном сечении, О. Зенкевич [50] предлагает меридиональное сечение критериальной поверхности описывать уравнением второго порядка общего вида:

$$F = a\sigma_0^2 + \beta\sigma_0 + \gamma + \tau_i^2 = 0. \quad (1.41)$$

Соответствующее уравнение всей поверхности при этом будет иметь вид

$$F = a\sigma_0^2 + \beta\sigma_0 + \gamma + \left(\frac{\bar{\tau}_i}{g(\theta)}\right)^2 = 0. \quad (1.42)$$

Прямолинейный график Кулона (рис. 1.12, а) может быть с любой степенью приближения аппроксимирован уравнением ветви гиперболы, получаемой из уравнения (1.41), при подстановке в него значений

$$a = -\frac{b^2}{a^2}; \quad \beta = -2\frac{b^2}{a^2}d; \quad \gamma = b^2 - \frac{b^2}{a^2}d^2;$$

$$\frac{d - \sigma_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\tau}_i}{b^2} + 1\right)} = 0.$$

Величины  $a$ ,  $b$  и  $d$  показаны на рис. 1.12, а.

Очевидно,  $d = \text{Cctg } \varphi$ ;  $\frac{b}{a} = \text{tg } \varphi$ . Выбирая малое значение  $a$ , можно получить сколь угодно близкое приближение к заданному графику Кулона. Параболическая аппроксимация криволинейного графика Кулона — Мора (рис. 1.12, б) может быть взята в виде

$$\sqrt{\frac{ad + \sigma_0}{a}} - \bar{\tau}_i = 0.$$

Эллиптическое сечение поверхности текучести может быть описано уравнением

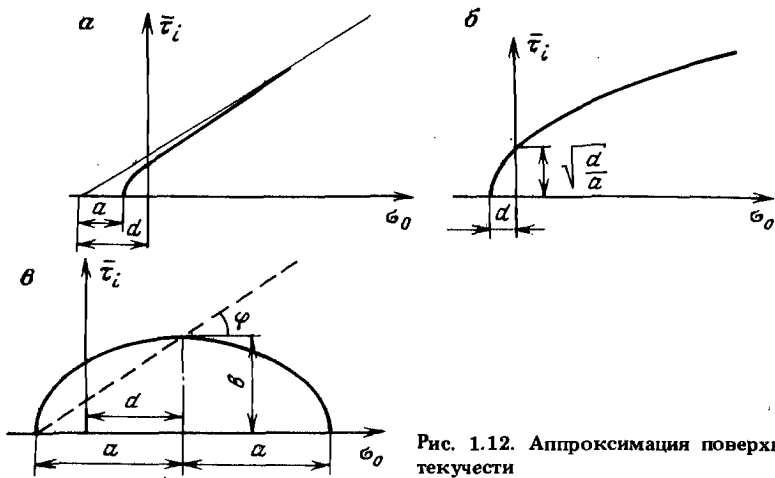


Рис. 1.12. Аппроксимация поверхностей текучести

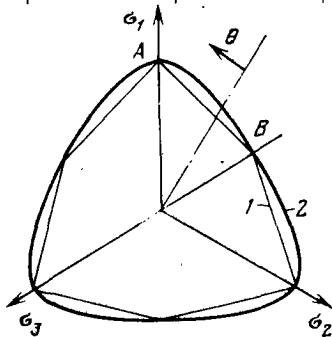


Рис. 1.13. Сечение октаэдральной плоскостью пирамиды Кулона (1) и аппроксимирующей поверхности (2)

$$\left(\frac{\sigma_0 - d}{a}\right)^2 + \frac{\bar{\tau}_i^2}{b^2} = 1. \quad (1.43)$$

Если задаться условием, что эллипс привязан к графику Кулона, как показано на рис. 1.12, в, то:  $a = d + C \operatorname{ctg} \varphi$ ;  $b = a \operatorname{tg} \varphi$ .

В октаэдральном сечении уравнение Кулона (1.39) дает прямую линию с уравнением

$$g(\theta) = \frac{\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{6} \sin \varphi}{\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta \sin \varphi}$$

с узловыми точками  $A$  и  $B$  на концах отрезка при  $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$  (рис. 1.13).

Чтобы избежать углов с разрывом производных в них, К.Гудехус предлагал функцию

$$g(\theta) = \frac{2k}{(1+k) - (1-k) \sin 3\theta} \quad (1.44)$$



Это уравнение описывает в полярных системах координат фигуру с тремя осями симметрии, соотношение минимальной и максимальной полярных координат у которой

$$k = \frac{g(\theta)_{\min}}{g(\theta)_{\max}} \quad (1.45)$$

При  $k = 1$  уравнение (1.44) описывает круг (такое сечение дают поверхности по критериям текучести Мизеса и обобщенного критерия Кулона — Мизеса, не зависящие от третьего инварианта).

Соотношение  $r_{\min}/r_{\max}$  в октаэдральном сечении пирамиды Кулона было установлено ранее — формула (1.31). При  $K = (3 - \sin \varphi)/(3 + \sin \varphi)$  уравнение (1.44) дает близкую гладкую аппроксимацию шестиугольного сечения Кулона (рис. 1.13).

## 1.6. ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Основные представления деформационной теории пластичности (ДТП) сформулировал Генки. В современной интерпретации применительно к материалам типа грунтов ДТП сводится к утверждению: напряжение в среде однозначно определяется ее деформациями

$$\{\sigma\} = [D_{\text{уп}}] \{\epsilon\} \quad (1.46)$$

Поскольку матрица  $[D_{\text{уп}}]$  связывает текущие значения деформаций и напряжений, ее называют секущей.

Элементы упругопластической матрицы  $[D_{\text{уп}}]$  являются функциями деформаций (или напряжений). В общем случае матрица  $[D_{\text{уп}}]$  несимметрична относительно главной диагонали.

Если пластическое деформирование не сопровождается разрывлением, матрицу можно подобрать в виде упругой секущей матрицы  $[D_{\text{с}}]$  с переменными секущими упругими константами  $G = G(\epsilon)$ ,  $K = K(\epsilon)$  или  $G = G(\sigma)$ ,  $K = K(\sigma)$ . Схематически это изображено на рис. 1.14.

ДТП подразумевает соосность главных напряжений и деформаций и их приращений на всех этапах деформирования. Условиями успешного применения принципов ДТП к исследованию упругопластических задач являются простое нагружение с пропорциональным возрастанием деформаций (и соответственно с сохранением направлений главных деформаций) и относительно малая величина деформаций.

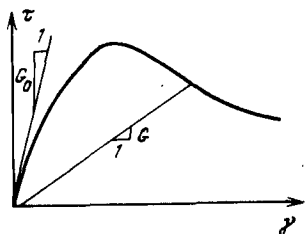


Рис. 1.14. Схема учета пластических свойств при сдвиге переменным модулем  $G$  ( $G_0$  — начальный модуль,  $1$  — единичная деформация)

## 1.7. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Если не ограничиться условием простого пропорционального нагружения, то общим случаем нагружения является несоосность тензоров прироста нагрузки и действующих напряжений (неравенство их направляющих тензоров).

Пусть исходное напряженно-деформированное состояние элемента упругопластической среды характеризуется точкой  $A$  (рис. 1.15) с соответствующими векторами напряжений и деформаций  $\{\sigma\}$  и  $\{\epsilon\}$ . Если к этому элементу приложен прирост напряжений  $\{d\sigma\}$ , то полный прирост деформаций  $\{d\epsilon\}$  может быть разделен на упругую  $d\epsilon^y$  и пластическую  $\{d\epsilon^n\}$  части:

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^y\} + \{d\epsilon^n\}.$$

Прирост упругих деформаций соосен с приростом напряжений и связан с ним соотношением

$$\{d\epsilon^y\} = [D]^{-1} \{d\sigma\},$$

где  $[D]^{-1}$  — матрица, обратная упругой матрице  $[D]$ .

Связь приростов пластических деформаций с приростом напряжений совершенно иная! Пластическое деформирование происходит путем возникновения сдвигов на площадках с некоторой критической величиной касательных напряжений или путем разрыва каких-то предельно напряженных связей.

Если к этому критически напряженному элементу прикладывается прирост напряжений  $\{\Delta\sigma\}$ , то вследствие малости этого прироста направления главных напряжений и связанных с ними критически напряженных площадок не изменятся и прирост пластических деформаций за счет дополнительных сдвигов в этих площадках будет соосен с действующими напряжениями  $\{\sigma\}$ .

Соосность главных приростов пластических деформаций с главными напряжениями позволяет анализировать их в осях, совпадающих с осями главных напряжений, а тензор прироста пластических деформаций может быть представлен в виде

$$d\epsilon_{ij}^n = \lambda G_{ij}, \quad (1.47)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности;  $G_{ij}$  — некоторый симметричный тензор, собственный с тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ .

Соосность тензора  $G_{ij}$  с тензором  $\sigma_{ij}$  будет обеспечена в том случае, если компоненты тензора  $G_{ij}$  являются частными производными некоторой скалярной функции от главных напряжений (или инвариантов) тензоров напряжений:

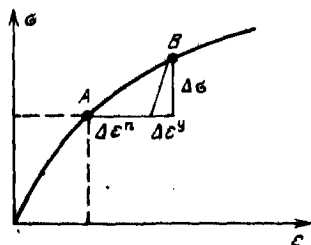


Рис. 1.15. Графическое изображение упругих и пластических деформаций

$$G_{ij} = \partial g / \partial \sigma_{ij}, \quad (1.48)$$

где  $g = g(\{\sigma\}, k)$  — скалярная функция от инвариантов напряжений и истории нагружения, характеризуемой параметром упрочнения  $k$ . Если, например, функция  $g$  зависит от среднего напряжения  $\sigma_0$ , интенсивности касательных напряжений  $\tau_i$  и параметра упрочнения  $k$ , которые, в свою очередь, являются функциями напряжений, то производная  $\partial g / \partial \sigma_{ij}$  будет вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} \partial g / \partial \sigma_{ij} = & (\partial g / \partial \sigma_0) (\partial \sigma_0 / \partial \sigma_{ij}) + (\partial g / \partial \tau_i) (\partial \tau_i / \partial \sigma_{ij}) + \\ & + (\partial g / \partial k) (\partial k / \partial \sigma_{ij}). \end{aligned}$$

Значения векторов производных  $\{\partial \sigma_0 / \partial \sigma\}, \{\partial \tau_i / \partial \sigma\}$  приводились в формуле (1.3).

Поверхность, описываемую функцией  $g$  в пространстве главных напряжений, называют *поверхностью пластического потенциала*.

Подстановка уравнения (1.48) в уравнение (1.47) дает

$$d\epsilon_{ij}^n = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.49)$$

или в матричной форме

$$\{d\epsilon^n\} = \lambda \{a\}, \quad (1.50)$$

где  $\{a\} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} \quad \dots \right\}^T$ .

Перед приложением прироста напряжений уравнение текущей имело вид

$$F(\{\sigma\}, k) = 0. \quad (1.51)$$

После прироста напряжений на величину  $\{\Delta \sigma\}$  уравнение текущей приобрело вид

$$F(\{\sigma\} + d\sigma, k + dk) = 0. \quad (1.52)$$

Сопоставляя равенства (1.51) и (1.52), убеждаемся, что  $dF = 0$ . Дифференцирование уравнения (1.52) по частям приводит к уравнению

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = \{b\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0, \quad (1.53)$$

где  $\{b\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \dots \right\}^T$ .

Если параметром упрочнения является работа пластических деформаций

$$k = \int \{\sigma\}^T \{d\epsilon^h\},$$

то

$$dk = \{\sigma\}^T \{d\epsilon^n\}. \quad (1.54)$$

Подставим уравнение (1.50) в (1.54) и далее в (1.53):

$$dF = \{b\}^T \{d\sigma\} + \lambda \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\} = 0, \quad (1.55)$$

откуда

$$\{b\}^T \{d\sigma\} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}. \quad (1.56)$$

Подставим соотношение (1.46) и (1.50) в уравнение (1.45)

$$\{d\epsilon\} = [D]^{-1} \{d\sigma\} + \lambda \{a\}. \quad (1.57)$$

Умножим обе части уравнения (1.57) на  $\{b\}^T [D]$ :

$$\{b\}^T [D] \{d\epsilon\} = \{b\}^T [D] [D]^{-1} \{d\sigma\} + \lambda \{b\}^T [D] \{a\}.$$

Первый член правой части заменим в соответствии с уравнением (1.56) на  $-\lambda \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}$  и из полученного уравнения выразим  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\{b\}^T [D] \{d\epsilon\}}{\{b\}^T [D] \{a\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}}. \quad (1.58)$$

Подставляя полученное значение  $\lambda$  в уравнение (1.57), после преобразований получаем

$$\{d\sigma\} = [D_{yn}] \{d\epsilon\}, \quad (1.59)$$

где  $[D_{yn}] = [D] - \frac{[D] \{a\} \{b\}^T [D]}{\{b\}^T [D] \{a\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}}$  — упруго-

пластическая матрица связи напряжений и деформаций [50].

Элементы матрицы  $[D_{yn}]$  зависят от текущего уровня напряжений и деформаций. Она связывает между собой бесконечно малые приращения напряжений и деформаций, и ее называют касательной упругопластической матрицей.

Если рассматривается неупрочняющая среда Рейсса — Прандтля, то у нее  $\partial F / \partial k = 0$ , и в знаменателе дроби в формулах (1.59) — (1.60) остается один член [3].

Если поверхности текучести и пластического потенциала совпадают, то вектор прироста деформации  $d\epsilon^n$  оказывается нормальным к поверхности текучести. В теории пластичности несжимаемых сред (металлов), приобретающих пластические деформации только под действием дивергента напряжений и имеющих поверхности текучести,

параллельные гидростатической оси, совпадение поверхности текучести и пластичности обосновывается физически и математически. Перпендикулярность вектора  $\{d\epsilon^n\}$  к поверхности текучести в теории пластичности металлов называют принципом нормальности или ассоциированным законом течения.

Рассмотрим особенности процесса пластического деформирования при ассоциированном законе течения и поверхности текучести типа Треска (рис. 1.16).

Во-первых, любой из векторов  $d\bar{\epsilon}^n$ , будучи перпендикулярным к поверхности текучести и ее оси, будет соответственно лежать в какой-то октаэдральной плоскости, характеризуемой уравнением

$$\epsilon_1^n + \epsilon_2^n + \epsilon_3^n = \text{const},$$

а поскольку  $(\epsilon_1^n + \epsilon_2^n + \epsilon_3^n)$  — объемная деформация, то, при данной форме поверхности текучести при ассоциированном законе течения объемные пластические деформации отсутствуют. Сразу же отметим, что если поверхность текучести не параллельна гидростатической оси, то ассоциированный закон течения прогнозирует объемные изменения в ходе пластического течения: возрастание объема ( $d\epsilon_1^n + d\epsilon_2^n + d\epsilon_3^n$ ) при расширяющихся поверхностях текучести (типа Кулона или конической поверхности обобщенного критерия Кулона — Мизеса), у которых  $\frac{\partial J_2}{\partial I_1} > 0$ , и сокращение объема при поверхностях с  $\frac{\partial J_2}{\partial I_1} < 0$  (сужающихся в сторону гидростатического сжатия).

Анализируя рис. 1.16, несложно убедиться, что вектор  $\{d\epsilon^n\}$  перпендикулярен к оси  $\epsilon_2^n$ , т.е. деформации  $d\epsilon_2^n$  вдоль действия напряжений  $\sigma_2$  отсутствует. При этом очевидно, что грань призмы, к которой нормален изображенный вектор  $d\bar{\epsilon}^n$ , характеризуется неравенством

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.61)$$

Критерий Треска, так же как и критерий Кулона, утверждает, что процесс деформирования определяется лишь соотношением максимального и минимального главных напряжений ( $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ), а величина промежуточного напряжения  $\sigma_2$  роли не играет, и пластические деформации вдоль него отсутствуют. Таким образом, в данном случае ассоциированный закон течения соответствует механике процесса.

Единая поверхность текучести и пластического потенциала при ассоциированном законе течения дает

$$g = F, \quad \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}.$$

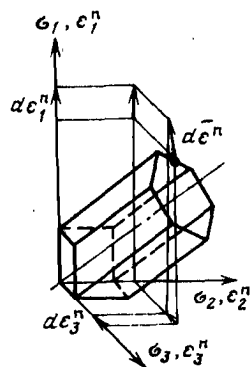


Рис. 1.16. Графическое изображение ассоциированного закона течения

Произведение  $\{a\}\{b\}^T$  в формуле (1.60) и вся матрица  $[D_{уп}]$  при этом являются симметричными матрицами. Матрица  $[D_{уп}]$  для упрочняющихся тел с ассоциированным законом течения и не увеличивающих объема при пластическом течении (т.е. при поперечностях текучести с  $\frac{\partial J}{\partial I} < 0$ ) может быть представлена как упругая матрица с переменными касательными значениями  $G$  и  $K$ .

## 1.8. ВЯЗКОУПРУГОСТЬ И ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТЬ

Деформирование материалов во времени под постоянной нагрузкой называют ползучестью, а снижение напряжений в материале при постоянных деформациях — релаксацией. Для графического изображения реологических свойств материалов используется элемент вязкости в виде гидравлического амортизатора, скорость деформирования которого  $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$  пропорциональна напряжению  $\sigma$ :

$$\dot{\epsilon} = \sigma/\eta,$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости.

Среду, содержащую в своей деформационной модели элемент вязкости, соединенный последовательно с любыми другими элементами или блоками, называют вязкой. Такая среда под постоянной нагрузкой будет приобретать деформации, неограниченно возрастающие во времени.

Среду, содержащую в своей модели вязкий элемент, только параллельно соединенный с упругим элементом, называют вязкоупругой. Простейшая вязкоупругая среда изображена на рис. 1.17, а. Деформации такой среды под постоянной нагрузкой будут возрастать во времени с затухающей скоростью до предела, пропорционального суммарной податливости элементов, по зависимости

$$\epsilon = \sigma \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right] \left( 1 - e^{-\frac{t E_2}{\eta}} \right). \quad (1.62)$$

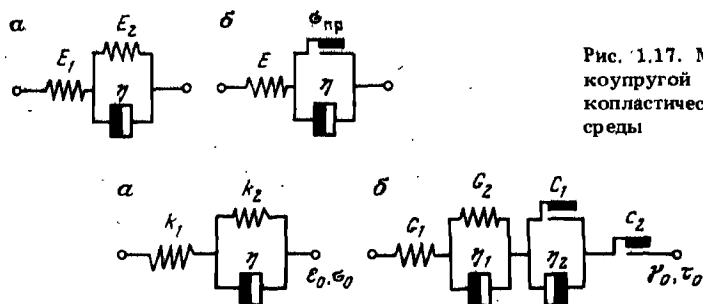


Рис. 1.17. Модели вязкоупругой (а) и вязкопластической (б) среды

Рис. 1.18. Модели сред с различной реакцией на гидростатическую (а) и девиаторную (б) части тензора напряжений ( $C_1 < C_2$ )

Если среда содержит в своей модели вязкий элемент, но параллельно соединенный с пластическим, то ее называют вязкопластической средой. Простейший пример вязкопластической среды изображен на рис. 1.17, б. При нагрузке ниже предельной ( $\sigma < \sigma_{пр}$ ) деформации такой среды чисто упругие, а при нагрузке выше предельной среда ведет себя как вязкая и деформации возрастают неограниченно.

Среда может иметь различные реологические модели по отношению к гидростатической и девиаторной составляющим тензора напряжений (рис. 1.18). Реакция на гидростатическое сжатие, разумеется, не может быть вязкой или вязкопластической, потому что объемная деформация не может быть неограниченной. В то же время реакция на девиаторную составляющую может быть вязкоупругой ( $\tau < C_1$ ), вязкопластической ( $C_2 > \tau > C_1$ ), и пластической ( $\tau > C_2$ ) при различном уровне напряжений.

При анализе реологических процессов стараются свойства сред описать простейшими деформационными моделями. Рассмотрим закономерности деформирования и уравнения связи для двух простейших сред.

а) Пусть объемная реакция среды — чисто упругая, а девиаторная — вязкоупругая (рис. 1.17, а). Если решается задача о деформировании во времени такой среды под постоянной нагрузкой, приложенной в момент времени  $t = 0$ , то решение на любой момент времени  $t$  может быть получено в линейной постановке с использованием упругой матрицы  $[D_t]$ , в которой модуль объемного сжатия постоянен, а модуль сдвига  $G_t$  зависит от времени:

$$\{\sigma\} = [D_t] \{\epsilon\}.$$

Модуль сдвига  $G_t$  определяется выражением, получаемым из формулы (1.62), а коэффициент Пуассона легко выражается из формул (1.13):

$$G_t = \frac{G_1 G_2}{G_1 \left(1 - e^{-\frac{t G_2}{\eta}}\right) + G_2}; \quad (1.63)$$

$$\nu_t = \frac{3K - 2G_t}{6K + 2G_t},$$

где  $K$  — модуль объемного сжатия.

Этот метод применим при относительно небольших деформациях ползучести потому, что при их возрастании  $G_t \rightarrow 0$ , а  $\nu_t \rightarrow 0,5$ , что вызовет трудности в получении упругого решения.

б) Рассмотрим среду, у которой объемная реакция — упругая, а сдвиговая — вязкопластическая (рис. 1.17, б).

Связь напряжений  $\{\sigma\}$  и деформаций  $\{\epsilon\}$  в такой среде будет определяться соотношением

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^p\}).$$

При этом скорость вязкопластического деформирования  $\{\epsilon^p\}$  будет зависеть от степени перегруза среды, а соотношение компонентов  $\epsilon_{ij}^p$  — от закона пластического течения.

Как отмечалось ранее, единственной поверхностью текучести идеальной — упругопластической среды является ее предельная поверхность с уравнением

$$F(\{\sigma\}) = 0.$$

Если  $F > 0$ , то это будет означать, что среда перегружена, и в ней протекают ползуче-релаксационные процессы со скоростью, пропорциональной  $F$ .

Для определения соотношения компонентов пластических деформаций должна быть определена и поверхность пластического потенциала  $g$ . Тогда прирост компонента пластических деформаций на интервал времени  $dt$

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{\eta} F \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} dt. \quad (1.64)$$

Полная величина пластических деформаций

$$\{\epsilon^p\} = \int_0^t \{d\epsilon^p\}. \quad (1.65)$$

Очевидно, что к моменту времени  $t = \infty$ , когда напряжения в среде не будут выходить за предельную поверхность, скорость нарастания деформаций во времени будет равна нулю и элемент вязкости уже не будет играть никакой роли. Конечное напряженно-деформированное состояние такой среды под постоянной нагрузкой будет аналогично состоянию идеальной упругопластической среды под той же нагрузкой.

### 1.9. МЕХАНИКА ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Рассмотрим плоский установившейся поток в квадратном элементе пористого фильтрующего тела размером  $dx \times dy$ . Расход (приток или отток) через каждую грань элемента в единицу времени равен произведению площади этой грани на компонент скорости фильтрации, нормальной к этой грани. Алгебраически суммируя расходы через грани элемента и приравнивая сумму нулю, получим равенство, характеризующее сплошность потока

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.66)$$

Движение жидкостей в пористых фильтрующих грунтах является ламинарным. Скорости фильтрации в ламинарном потоке связаны с соответствующими градиентами напоров законом Дарси:



$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}; \quad v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}; \quad v_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (1.67)$$

где  $k_x, k_y, k_z$  — коэффициенты фильтрации соответственно в направлениях осей  $x, y, z$ ;  $H$  — напор.

Подставляя соотношения в уравнение (1.66), получаем

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (1.68)$$

В изотропно-фильтрующем теле при  $k_x = k_y = k_z$  уравнение (1.68) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (1.69)$$

Это дифференциальное уравнение называют *гармоническим*, или *уравнением Лапласа*.

Решение конкретной задачи установившейся фильтрации сводится к решению дифференциального уравнения (1.68) или уравнения (1.69) при конкретных граничных условиях.

Пусть теперь рассматриваемый квадратный элемент за отрезок времени  $dt$  получает деформацию  $d\epsilon_x, d\epsilon_y, \dots, d\gamma_{yz}$ . При этом объемная деформация элемента

$$d\epsilon_V = d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z. \quad (1.70)$$

В дискретных пористых средах типа грунтов сжимаемость частиц скелета составляет ничтожную долю в общей сжимаемости среды, и без заметной погрешности можно считать, что объемная деформация пористой среды равна изменению объема порового пространства, заполненного жидкостью.

Изменение объема жидкости в поровом пространстве за время  $dt$  складывается из чистого притока жидкости в элемент, равного алгебраической сумме расходов через грани:

$$q dt = \left( k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) dt \quad (1.71)$$

и упругой объемной деформации жидкости в элементе при изменении ее давления, равной

$$n dp / K, \quad (1.72)$$

где  $n$  — пористость;  $dp$  — изменение порового давления жидкости;  $K$  — модуль объемной сжимаемости жидкости.

Приравнявая объемную деформацию элемента сумме выражений (1.71) и (1.72), получаем следующее дифференциальное уравнение сплошности потока жидкости:

$$\frac{\partial \epsilon_V}{\partial t} - \frac{n}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + q = 0. \quad (1.73)$$

Напряжения в грунте  $\sigma^r$  состоят из порового давления и напряжений в скелете (эффективных напряжений):

$$\sigma_{ij}^r = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad (1.74)$$

где  $\sigma_{ij}$  — эффективное напряжение;  $p$  — поровое давление;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Если считать скелет грунта изотропным линейно-упругим телом, то связь деформаций эффективных напряжений и деформаций будет описываться законом Гука:

$$\sigma_{ij} = -\lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2G\epsilon_{ij}. \quad (1.75)$$

Подставляя уравнение (1.75) в уравнение (1.74), получаем уравнение равновесия, связывающее полное напряжение в грунте с деформациями,

$$\sigma_{ij}^r = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2G\epsilon_{ij} + p\delta_{ij}. \quad (1.76)$$

Уравнения (1.73) и (1.76) определяют ход процессов в пористой водонасыщенной среде под постоянной и переменной нагрузкой. Совместное интегрирование их в пространстве при заданных граничных условиях и во времени при заданных начальных условиях дает ответ о напряженно-деформированном состоянии скелета и распределении порового давления на конкретный момент времени.

Пренебрегая сжимаемостью жидкости и объединяя уравнения (1.73) и (1.76), для одномерной задачи несложно прийти к известному уравнению одномерной фильтрационной консолидации Терцаги. Закон Гука (1.75) для одномерного случая принимает вид:

$$\epsilon = m_v \sigma, \quad (1.77)$$

где  $m_v$  — коэффициент сжимаемости грунта.

Величина  $\partial\epsilon_v$  в уравнении (1.73) при этом равна дифференциалу от уравнения (1.77)

$$\partial\epsilon_v = m_v \partial\sigma. \quad (1.78)$$

Если пренебрегать сжимаемостью поровой жидкости, то второй член в формуле (1.74) исчезает.

Третий член формулы (1.74) определяется из формулы (1.71) при  $\partial H/\partial x = \partial H/\partial z = 0$ :

$$q = k \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \quad (1.79)$$

Поскольку  $\partial^2 H/\partial z^2 = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$ , то формулу (1.79) можно представить в виде

$$q = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}, \quad (1.80)$$

где  $\gamma_w$  — удельный вес воды.

Подставляя выражения (1.78) и (1.80) в формулу (1.74), получаем дифференциальное уравнение одномерной консолидации Терцаги

$$m_v \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$$

## 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов является продуктом и в то же время мощным движущим средством современного научно-технического прогресса. Большие возможности МКЭ особенно ярко проявились в механике грунтов и горных пород с их многообразием механических свойств материалов и условий нагружения.

Достоинствами, обеспечивающими популярность МКЭ, являются: простота получения конкретных решений по имеющейся готовой программе; возможность сгущения сети элементов в ожидаемых местах высоких градиентов, исследуемого параметра; возможности задания любых граничных условий; принципиальная возможность реализации в программах произвольных механических свойств материала, любой последовательности нагружения и т.д.

Современные программы МКЭ представляют собой уже не просто метод расчета напряжения которые в дальнейшем инженер должен сопоставлять со свойствами грунтов; современные программы МКЭ по существу являются аппаратом математического моделирования всех процессов, протекающих в грунте. Они автоматически сопоставляют напряжение с прочностными свойствами грунтов и с помощью определенных процедур обеспечивают соответствие картины напряжений условиям равновесия и заданным свойствам грунта. При этом инженеру уже нет нужды самому анализировать поля напряжений, да и информация о них становится излишней. Совершенная программа может обеспечить инженера информацией, не требующей дальнейшей обработки, в том числе в графическом виде.

Основная процедура МКЭ обеспечивает решение линейных задач: установившейся ламинарной фильтрации и напряженно-деформированного состояния среды с линейно-упругой связью напряжений и деформаций. Получение различных нелинейных решений достигается многократным повторением линейных решений. В настоящей главе рассматриваются основные процедуры МКЭ, а описание процедур получения нелинейных решений будет проводиться вместе с описанием конкретных грунтовых моделей.

Основная концепция МКЭ состоит в том, что искомую непрерывную величину, будь то напор фильтрационного потока или перемеще-

ния точек деформированного тела, аппроксимируют кусочным набором простейших функций, заданных над ограниченными конечными подобластями (элементами). С помощью такой процедуры интегрирование дифференциальных уравнений аналитической постановки задачи сводится к решению системы линейных уравнений. Количественные значения неизвестной величины отыскиваются в ограниченном числе точек (узлов) области, а в пределах элементов значения неизвестной функции и ее производных определяются уже аппроксимирующими функциями и их производными.

## 2.1. УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Рассмотрение задачи установившейся фильтрации в контексте данной книги представляет интерес по двум причинам: во-первых, решение фильтрационной задачи будет использоваться при рассмотрении задачи фильтрационной консолидации грунта, во-вторых, на примере этой задачи в наиболее доступной форме излагаются основные принципы метода конечных элементов. Весь математический аппарат задачи установившейся фильтрации полностью применим к решению задачи установившейся теплопроводности.

### 2.1.1. Дискретизация области. Треугольный элемент

Рассмотрим всю последовательность операций МКЭ на конкретной задаче плоской установившейся фильтрации под плотиной (рис. 2.1, а). Границы области, плотина и противofильтрационные завесы считаются непроницаемыми. Требуется определить распределение напоров под плотиной, а также суммарный расход подземного потока. В качестве неизвестной функции рассматривается напор.

Гладкая поверхность функции  $H$  аппроксимируется набором треугольных участков плоскостей типа  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  (рис. 2.2), определенных над треугольной же подобластью  $i, j, k$  (конечным элементом) рассматриваемой области в плоскости  $xy$ .

Положение плоскости в пространстве определяется однозначно тремя точками, лежащими не на одной прямой. Очевидно, для аппроксимации гладкой поверхности функции  $H$  участками плоскостей конечные элементы  $i, j, k$  должны быть треугольными. Отклонение аппроксимирующей кусочной поверхности от реальной гладкой будет тем больше, чем больше кривизна гладкой поверхности и чем больше размер конечного элемента. Отсюда вытекает основное правило построения сетей конечных элементов: сгущение сети в местах ожидаемых высоких градиентов искомой функции, в частности напоров.

Математический аппарат МКЭ обеспечивает сведение задачи интегрирования бигармонического дифференциального уравнения к решению системы линейных уравнений, в которой в качестве неизвестных фигурируют значения напоров в узлах конечных элементов.

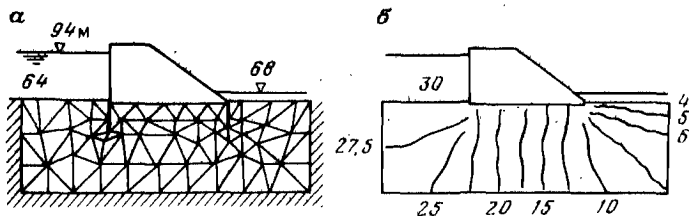
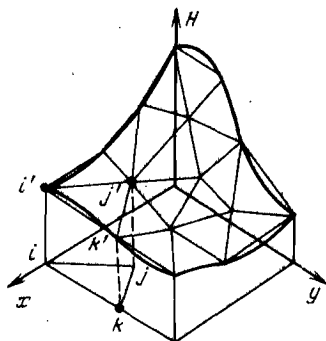


Рис. 2.1. Сеть конечных элементов (а) и изолинии напоров (б) под плотиной

Рис. 2.2. Кусочно-элементная аппроксимация гладкой функции  $H(x, y)$



### 2.1.2. Матрица жесткости элемента и системы элементов

Плоский участок, аппроксимирующий функцию напора над одним конечным элементом, имеет уравнение линейного полинома

$$H = a_1 + a_2 x + a_3 y, \quad (2.1)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — константы.

В узлах  $i, j$  и  $k$  элемента значения напоров равны  $H_i, H_j$  и  $H_k$ , и определяются они уравнением (2.1) при  $x$  и  $y$ , последовательно равных  $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ . В матричной форме эти соотношения имеют вид:

$$\{H\} = [A] \{a\}, \quad (2.2)$$

где  $\{H\} = \{H_i, H_j, H_k\}^T$  — вектор узловых напоров элемента,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}; \quad \{a\} = \{a_1, a_2, a_3\}^T.$$

Решим систему трех линейных уравнений (2.2) относительно вектора  $\{a\}$ :

$$\{a\} = [A]^{-1} \{H\}. \quad (2.3)$$

Преобразуя матричное соотношение (2.3) к обычному виду, имеем:

$$a_1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_j y_k - x_k y_j) H_i + (x_k y_i - x_i y_k) H_j + (x_i x_j - x_j y_i) H_k],$$

$$a_2 = \frac{1}{2\Delta} [(y_i - y_k) H_i + (y_k - y_i) H_j + (y_i - y_j) H_k], \quad (2.4)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\Delta} [(x_k - x_j) H_i + (x_i - x_k) H_j + (x_j - x_i) H_k],$$

где  $2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$  — определитель,  $\Delta$  — площадь элемента.

Подставляя найденные значения  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  в соотношение (2.1), после несложных преобразований получаем

$$H = N_i H_i + N_j H_j + N_k H_k, \quad (2.5)$$

где

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y), \quad (2.6)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j. \quad (2.7)$$

Выражения для функций  $N_j$  и  $N_k$  получаются путем круговой подстановки индексов в порядке  $i, j, k$ .

Функции  $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_k$  называют функциями формы. Пожалуй, эти функции правильнее было бы называть функциями влияния узлов, потому что они отражают влияние узлового напора на величину напора в произвольной точке элемента  $(x, y)$  в соответствии с аппроксимирующей функцией. Придерживаясь, однако, общепринятого термина, отметим следующие особенности функций формы. Они имеют вид полинома той же степени, что и аппроксимирующий полином. В любой точке элемента  $N_i + N_j + N_k = 1$ . Функция формы  $l$ -го узла равна единице в узле  $l$  (при  $x = x_l$  и  $y = y_l$ ) и нулю в остальных узлах элемента.

Поверхности, описываемые тремя функциями формы над плоскостью треугольного элемента, показаны на рис. 2.3. Имея в виду, что градиенты напора  $I_x$  и  $I_y$  равны частным производным функции напора по координатам, определим их путем дифференцирования соотношения (2.1):

$$I_x = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} H_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} H_k; \quad (2.8)$$

$$I_y = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} H_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} H_k \quad (2.9)$$

или в матричной форме:

$$\{I\} = [B] \{H\}, \quad (2.10)$$

где

$$\{I\} = \{I_x, I_y\}^T, \\ [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Частные производные от функции формы легко вычисляются из выражения (2.6) и являются константами в пределах элемента. Действительно,

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}; \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}. \quad (2.11)$$

Вообще говоря, при изложении процедуры МКЭ для треугольных элементов с аппроксимирующей функцией линейного вида можно было бы обойтись и без введения понятия функций формы. Действительно, продифференцировав уравнение (2.1) по координатам, можем получить выражения для градиентов напоров без функций формы:

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [B'] \{a\} = [B'] [A]^{-1} \{H\}, \quad (2.12)$$

где

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В ранних публикациях по МКЭ функции формы не использовались. Однако функции формы окажутся необходимыми при рассмотрении более сложных элементов, а сущность функций формы легче всего иллюстрируется на примере треугольного элемента.

Скорости фильтрации  $v_x$  и  $v_y$  равны произведению градиентов напора на коэффициент фильтрации  $k_\phi$ :

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = k_\phi \{I\} = k_\phi [B] \{H\}. \quad (2.13)$$

В МКЭ принимается, что обмен жидкостью между элементами происходит только в узловых точках в виде сосредоточенных потоков. В частности, рассматриваемый элемент будет иметь узловые расходы в единицу времени  $Q_i, Q_j, Q_k$ , большие нуля, меньшие или равные нулю. Очевидно, что при установившейся фильтрации имеет место равенство

$$Q_i + Q_j + Q_k = 0. \quad (2.14)$$

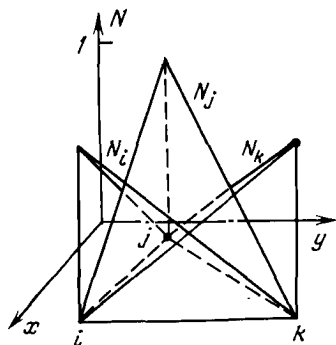


Рис. 2.3. Графическое изображение функций формы

Основной операцией МКЭ является установление связи между узловыми расходами и узловыми напорами. Это соотношение может быть выведено известным в вариационном исчислении методом минимизации функционала или методом взвешенных невязок Галеркина. Мы воспользуемся упрощенным приемом, приводящим к тем же соотношениям. Для этого без доказательства по аналогии с известным в строительной механике принципом возможных перемещений сформулируем применительно к фильтрационным задачам принцип возможных вариаций напоров: в замкнутой области установившегося потока при возможном бесконечно малом изменении (вариации) напоров дополнительная работа потока на контуре области должна быть равна соответствующей дополнительной работе в пределах области.

Если в качестве замкнутой области рассматривать конечный элемент, то контурный поток сводится к трем узловым расходам при напорах  $H_i, H_j, H_k$ . Итак, дадим напору  $H_i$  возможное изменение  $dH$ . Поскольку в остальных узлах вариации пока не задаются, вектор вариаций напоров равен  $\{dH\} = \{dH \ 0 \ 0\}^T$ . Дополнительная работа потока на контуре равна сумме произведений узловых расходов и вариаций напоров

$$A_{\kappa} = \{Q\}^T \{dH\} = Q_i dH, \quad (2.15)$$

где  $\{Q\} = \{Q_i \ Q_j \ Q_k\}^T$  — вектор узловых притоков элемента.

Вариации градиентов напоров в пределах элемента по уравнению (2.10) равны

$$\{dI\} = [B] \{dH\}. \quad (2.16)$$

Дополнительная работа потока в пределах элемента равна интегралу по площади элемента от произведения скоростей на вариации градиентов напора:

$$A_{\text{вн}} = \int_S (v_x dI_x + v_y dI_y) dS = \int_S \{dI\}^T \{v\} dS. \quad (2.17)$$

Подставляя в соотношение (2.17) выражения (2.13) и (2.16), получаем

$$A_{\text{вн}} = \int_S \{dH\}^T [B]^T k_{\Phi} [B] \{H\} dS. \quad (2.18)$$

Приравнявая  $A_{\kappa}$  и  $A_{\text{вн}}$  из соотношений (2.15) и (2.18) и сокращая обе части на  $dH$ , получаем выражение для расхода  $Q_i$ :

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_S k_{\Phi} [dH]^T [B]^T [B] \{H\} dS = \\ &= k_{\Phi} dH \int_S \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [B]^T [B] \{H\} dS. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Давая последовательно вариации  $dH$  в узлах  $j$  и  $k$ , получим выражения для притоков  $Q_j$  и  $Q_k$ , аналогичные выражению (2.19),



лишь во втором члене которых единица будет фигурировать соответственно на второй и третьей позиции. Полученные таким образом три выражения для притоков можно объединить в одну матричную формулу

$$\{Q\} = k_{\Phi} \int_S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^T [B] \{H\} dS. \quad (2.20)$$

Удаляя единичную матрицу, получаем

$$\{Q\} = [K] \{H\}, \quad (2.21)$$

где  $[K] = \int_S k_{\Phi} [B]^T [B] dS$  — матрица, характеризующая фильтрационные свойства элемента. Матрицу  $[K]$  в дальнейшем в целях унификации терминологии мы будем называть матрицей жесткости элемента (МЖЭ). Фильтрационная МЖЭ имеет ранг  $3 \times 3$ . Знак интегрирования по площади означает, что каждый член этой матрицы представляет собой интеграл по площади элемента. Однако производные функций формы треугольного элемента с тремя узлами не зависят от координат, и элементы подынтегральной матрицы  $k_{\Phi} [B]^T [B]$  также являются постоянными величинами. При этом интегрирование каждого элемента по площади может быть заменено просто умножением его на площадь элемента  $\Delta$ . Вынося площадь как общий множитель, получаем окончательное выражение для матрицы жесткости треугольного элемента с тремя узлами

$$[K] = \Delta k_{\Phi} [B]^T [B]. \quad (2.22)$$

Используя уравнение (2.12), выражение для МЖЭ можно записать в другом виде

$$[K] = \Delta k_{\Phi} [A]^{-1 T} [B']^T [B'] [A]^{-1}. \quad (2.23)$$

Для фильтрационно анизотропной среды с двумя различными коэффициентами фильтрации  $k_{x'}$  и  $k_{y'}$  в двух взаимно перпендикулярных направлениях ( $x'$  и  $y'$ ), не совпадающих с направлениями осей координат, МЖЭ имеет вид

$$[K] = \Delta [B]^T [\theta]^T [D] [\theta] [B], \quad (2.24)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{x'} & 0 \\ 0 & k_{y'} \end{bmatrix}; \quad [\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

где  $\theta$  — угол между осями  $x$  и  $y$ .

Выполнив всю последовательность матричных операций, несложно убедиться, что матрица жесткости изотропного элемента имеет вид

$$[K] = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ a & -(a+c) & c \\ b & c & -(b+c) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$a = \Delta k_{\Phi} [(y_k - y_i)(y_j - y_k) + (x_i - x_k)(x_k - x_j)], \quad (2.26)$$

где  $\Delta$  — площадь элемента.

Выражения для  $b$  и  $c$  получаются из уравнения (2.26) путем круговой подстановки индексов в порядке  $k-j-i$ .

Рассмотрим теперь треугольную ячейку, составленную из трех трубок с проводимостью  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 2.4). Расходы по каждой из трубок определяются ее проводимостью и разностью напоров на концах:

$$Q_{ij} = a(H_i - H_j); \quad Q_{jk} = c(H_j - H_k); \quad Q_{ki} = b(H_k - H_i). \quad (2.27)$$

Притоки в узлы определяются как суммы расходов в примыкающих к узлу трубкам:

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= -Q_{ij} + Q_{ki} = -a(H_i - H_j) + b(H_k - H_i) \\ Q_j &= -Q_{jk} + Q_{ij} = -c(H_j - H_k) + a(H_i - H_j) \\ Q_k &= -Q_{ki} + Q_{jk} = -b(H_k - H_i) + c(H_j - H_k) \end{aligned} \right\}. \quad (2.28)$$

В матричной форме эти три равенства имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ a & -(a+c) & c \\ b & c & -(b+c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

Матрицы жесткости сплошного конечного элемента и треугольной ячейки из трубок оказались одинаковыми. Таким образом, процедура МКЭ заменяет сплошную фильтрующую область сетью дискретных проводящих элементов. Из матриц жесткости элементов формируется матрица жесткости всей системы элементов (МЖС) путем рассылки членов матриц жесткости отдельных элементов в соответствующие адреса МЖС и алгебраического суммирования их с ранее накопленными там величинами. На рис. 2.5 показано, к каким членам МЖС добавляются члены матрицы жесткости конечного элемента с узлами  $i$ ,  $j$  и  $k$ . Общее выражение для фильтрационной МЖС имеет вид

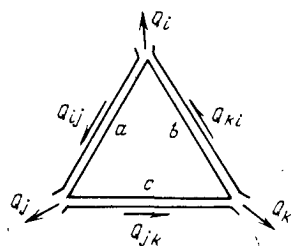


Рис. 2.4. Треугольная трубчатая ячейка

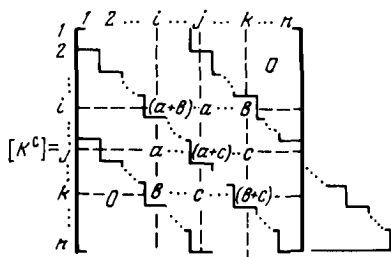


Рис. 2.5. Схема рассылки МЖЭ в МЖС

$$[K_{\Phi}^c] = \sum_{i=1}^M [K_i]. \quad (2.30)$$

МЖС представляет собой набор коэффициентов системы линейных уравнений, связывающих  $n$  узловых расходов  $\{Q^c\}$  с  $n$  узловыми напорами  $\{H^c\}$ :

$$[K_{\Phi}^c] \{H^c\} = \{Q^c\}. \quad (2.31)$$

Члены полного вектора узловых расходов области  $\{Q^c\}$  представляют собой притоки (оттоки) извне в данный узел области. Если в узле  $i$  притока (оттока) жидкости не имеется, то сумма расходов элементов, примыкающих к этому узлу, и  $i$ -й член общего вектора расходов также будут равны нулю.

МЖС, как и матрицы жесткости элементов, симметрична относительно главной диагонали. Наибольшим по абсолютной величине членом каждой строки является член на главной диагонали. МЖС имеет ленточную структуру, т.е. ненулевые члены группируются в виде полосы вдоль главной диагонали. Поскольку эта полоса симметрична относительно главной диагонали, то в памяти ЭВМ достаточно формировать и хранить лишь ее верхнюю половину. Ширина формируемой ленты, т.е. число членов каждой строки МЖС, определяется максимальной разницей номеров одного элемента  $P_{\max}$  и равна  $(P_{\max} + 1)$ . МЖС обычно хранят в выделенной области памяти ЭВМ построчно, причем для хранения последних коротких строк для однообразия выделяются отрезки памяти такой же длины  $(P_{\max} + 1)$ , как и для верхних строк. Таким образом, для хранения МЖС необходима область длиной  $n(P_{\max} + 1)$  чисел.

### 2.1.3. Граничные условия

МЖС связывает узловые расходы с неизвестными узловыми напорами. Однако в части узлов на границах, а также внутренних узлов могут быть заданы напоры: постоянный уровень воды в водоеме на границе области в водопонизительной скважине, в водосборнике строительного котлована. Каждый заданный узловой напор сокращает на единицу число неизвестных. Для введения заданного напора в  $i$ -м узле необходимо умножить этот напор на коэффициенты  $i$ -го столбца МЖС и результаты умножения добавить (с обратным знаком) к соответствующим элементам вектора узловых расходов. После этого  $i$ -я строка и  $i$ -й столбец в составленной МЖС становятся излишними, их можно удалить и решать систему уравнения относительно остающихся неизвестных. Другие возможные способы решения систем с неполным числом неизвестных рассматриваются в разделе 2.2.2.

После решения системы уравнений подстановка найденных (и заданных) узловых напоров в формулу (2.13) позволяет определить скорости фильтрации в элементах, а подстановка их в уравнение (2.21) позволяет определить расходы в узлах с заданным напором. На рис. 2.16 представлены изолинии напоров под плотиной.

## 2.2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 2.2.1. Конечный элемент и его свойства

В плоской задаче теории упругости точки напряженной области получают перемещения, характеризуемые компонентами  $u$  и  $v$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Каждый из этих компонентов является непрерывной функцией координат, которые можно графически изобразить в виде гладких поверхностей над плоскостями  $x$  и  $y$  (рис. 2.6). Разбив заданную область в плоскости  $x$  и  $y$  на треугольные элементы, аппроксимируем гладкие функции перемещений в пределах элементов ("над элементом" на рис. 2.6) линейными полиномами:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \right\}, \quad (2.32)$$

где  $a_1 \dots a_6$  — набор констант.

При подстановке в уравнения (2.32) узловых координат получим выражения для шести компонентов узловых перемещений:

$$\{\delta\} = [A] \{a\}, \quad (2.33)$$

где  $\{\delta\} = \{u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k\}$ :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

Выразим из уравнения (2.33) вектор  $\{a\}$  через узловые перемещения

$$\{a\} = [A]^{-1} \{\delta\}. \quad (2.34)$$

Вычислив значения всех шести констант  $a$  и подставив их в уравнения (2.32), получим выражения, аналогичные формуле (2.5):

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k \end{aligned} \right\}, \quad (2.35)$$

где  $N_i, N_j, N_k$  — функции формы треугольного элемента, определяемые уравнением (2.6).

Относительные деформации в

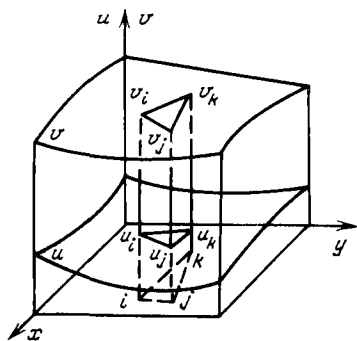


Рис. 2.6. Кусочно-элементная аппроксимация гладких функций перемещений

пределах элемента определяются путем дифференцирования выражений (2.35) по координатам:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = N'_{ix} u_i + N'_{jx} u_j + N'_{kx} u_k; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = N'_{iy} v_i + N'_{jy} v_j + N'_{ky} v_k; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = N'_{iy} u_i + N'_{jy} u_j + N'_{ky} u_k + N'_{ix} v_i + \\ &+ N'_{jx} v_j + N'_{kx} v_k,\end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}, \quad (2.36)$$

где  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}\}^T$ ,

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{ix} & N'_{jx} & N'_{kx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_{iy} & N'_{jy} & N'_{ky} \\ N'_{iy} & N'_{jy} & N'_{ky} & N'_{ix} & N'_{jx} & N'_{kx} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Значения производных функции формы легко получить дифференцированием их выражений. Например, дифференцируя выражение (2.6), имеем

$$N'_{ix} = \frac{1}{2\Delta} b_i; \quad N'_{iy} = \frac{1}{2A} c_i. \quad (2.38)$$

Напряжения  $\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \gamma_{xy}\}^T$  в упругом элементе связаны с деформациями законом Гука

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] \{\delta\}. \quad (2.39)$$

Формы матрицы  $[D]$  для условий плоской деформации и плоского напряженного состояния определены уравнениями (1.10) и (1.11). Отметим важные характерные особенности треугольного конечного элемента:

а) перемещения  $u$  и  $v$ , линейно зависящие от координат в пределах элемента, изменяются линейно вдоль любой прямой линии в элементе, т.е. прямые отрезки в недеформируемом элементе — в том числе и стороны элемента — остаются прямыми и в деформированном элементе;

б) производные функции формы  $N'$  не зависят от координат; их величины, а также и определяемые ими деформации и напряжения в пределах элемента являются постоянными.

Условие сплошности удовлетворяется тем, что элементы в процессе деформирования области не теряют контакта друг с другом в узловых точках.

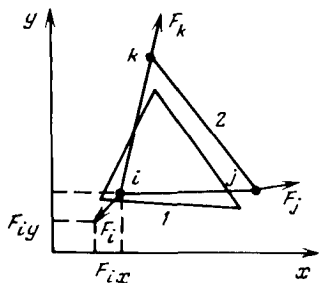


Рис. 2.7. Схема деформирования элемента узловыми силами

Метод конечных элементов предполагает, что силовые взаимодействия между элементами осуществляются только в узловых точках. Деформирование элемента от формы 1 (рис. 2.7) до формы 2 обусловлено приложением со стороны соседних элементов или внешних воздействий узловых сил  $F_i$ ,  $F_j$  и  $F_k$ , каждая из которых раскладывается на две составляющие вдоль координатных осей. Для вывода зависимости шести компонентов узловых сил от шести компонентов узловых перемещений используется принцип возможных перемещений

в следующей формулировке: при возможном бесконечно малом перемещении узловых точек работа узловых сил должна быть равна работе внутренних напряжений. Дадим бесконечно малое перемещение  $d\delta$  узлу  $i$  в направлении оси  $x$ . Полный вектор узловых перемещений при этом будет иметь вид

$$\{d\delta\} = \{d\delta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T = d\delta \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (2.40)$$

При таком перемещении из внешних узловых сил работу будет совершать лишь сила  $F_{ix}$ , и работа внешних сил

$$A_{\kappa} = d\delta F_{ix}.$$

Деформации в элементе, вызванные заданным перемещением узла  $i$ , определяются по формуле (2.36):

$$\{d\epsilon\} = [B] \{d\delta\}. \quad (2.41)$$

Работа внутренних, реально существующих напряжений при возникновении дополнительных (бесконечно малых по отношению к реальным) деформаций  $\{d\epsilon\}$

$$A_{\text{вн}} = \int_S (d\epsilon_x \sigma_x + d\epsilon_y \sigma_y + d\gamma_{xy} \tau_{xy}) dS = \int_S \{d\epsilon\}^T \{\sigma\} dS. \quad (2.42)$$

Подставив в уравнение (2.42) выражения (2.39), (2.40) и (2.41), получим

$$A_{\text{вн}} = d\delta \int_S \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} [B]^T [D] [B] \{\delta\} dS. \quad (2.43)$$

Приравнявая  $A_{\kappa}$  и  $A_{\text{вн}}$  и сокращая обе части равенства на  $d\delta$ , получаем выражение для силы

$$F_{ix} = \int_S \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} [B]^T [D] [B] \sigma. \quad (2.44)$$

Давая поочередно возможные перемещения  $d\delta$  в направлении остальных пяти компонент узловых сил, получаем все шесть урав-

нений, связывающих узловые силы с вектором узловых перемещений. Каждое из этих уравнений будет иметь такой же вид, как и уравнение (2.44), лишь в первом члене подынтегрального выражения единица будет поочередно занимать места со второго по шестое. Объединяя все шесть уравнений в одно матричное уравнение и опуская единичную матрицу, образуемую первыми членами уравнений, получаем

$$\{F\} = [K] \{\delta\}, \quad (2.45)$$

где  $[K] = \int_S [B]^T [D] [B] dS$  — матрица жесткости элемента (МЖЭ).

Как и в ранее рассмотренной фильтрационной задаче, ввиду постоянства производных функций формы в пределах элемента интегрирование по площади заменяем умножением на площадь  $\Delta$  и получаем окончательное выражение для МЖЭ треугольного элемента:

$$[K] = \Delta [B]^T [D] [B]. \quad (2.47)$$

Матрица жесткости треугольного элемента (как и фильтрационная матрица — см. формулу 2.23) может быть представлена в виде, не содержащем в явном виде функции формы

$$[K] = [A]^{-1T} [B']^T [D] [B'] [A]^{-1}, \quad (2.48)$$

где

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что  $[B] = [B'] [A]^{-1}$ .

Матрица жесткости треугольного элемента имеет ранг 6, она симметрична относительно главной диагонали. Имея в виду соотношение (2.48) и (2.39), формулу (2.45) можно представить в виде:

$$\{F\} = \int_S [B]^T \{\sigma\} dS = \Delta [B]^T \{\sigma\}. \quad (2.49)$$

Это важное соотношение, связывающее напряжения в элементе с узловыми силами.

## 2.2.2. Матрица жесткости системы

Объединение матриц жесткости элементов в МЖС  $[K^c]$  производится по формуле (2.30) и по тому же правилу, что и в фильтрационной задаче: член МЖС  $K_{ij}^c$  является суммой членов  $K_{ij}$  из матриц жесткости всех элементов, примыкающих к узлу с  $i$ -й степенью свободы ( $i$ -м перемещением и  $i$ -й силой).

Если  $i = j$ , то член  $K_{ij}^c$  МЖС будет находиться на главной диагонали, и он будет представлять собой сумму соответствующих членов из матриц жесткости всех элементов, примыкающих к узлу с  $i$ -й степенью свободы. Если же  $i \neq j$ , то член  $K_{ij}$  будет находиться

не на главной диагонали, и он будет представлять собой сумму двух членов из матриц жесткости лишь двух элементов, одновременно примыкающим к узлам со степенями свободы  $i$  и  $j$ . Таким образом, диагональный член в МЖС заведомо больше любого члена, расположенного в той же строке или столбце, но на главной диагонали. Эта особенность является существенной при выборе методов решения системы уравнений. МЖС имеет ранг, равный удвоенному числу узлов: каждый узел имеет две степени свободы, и им соответствуют два уравнения. МЖС упругой области, как и в фильтрационной задаче, симметрична и имеет ленточную структуру. В памяти ЭВМ формируется и хранится только верхняя часть полосы, ширина которой равна  $2(P_{\max} + 1)$ , где  $P_{\max}$  — максимальная разница номеров узлов одного элемента. Для хранения формируемой части МЖС необходимо поле, длиной  $4(P_{\max} + 1)$ , где  $n$  — число узлов всей системы элементов.

МЖС связывает собой в систему линейных уравнений известные узловые силы и неизвестные узловые перемещения;

$$[K^c] \{ \delta^c \} = \{ F^c \}. \quad (2.50)$$

Вектор узловых сил формируется из реально заданных сосредоточенных нагрузок или сведенных к узловым силам распределенных по контуру или по площади области сил. Сведение сил тяжести (или инерционных) к узловым обычно включается в программу. При этом вес каждого элемента, рассчитанного как произведение его площади на плотность и на земное (или иное заданное) ускорение, распределяется поровну между тремя узлами элемента.

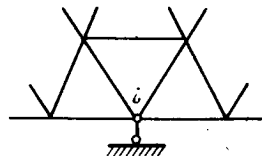
Если какое-то  $i$ -е узловое перемещение задано, то число неизвестных уменьшается на единицу. При этом элементы  $i$ -го столбца МЖС следует умножить на заданное перемещение и результаты умножения добавить (с обратным знаком) к заданным узловым силам. После этого  $i$ -й столбец и  $i$ -я строка МЖС, а также  $i$ -й неизвестный член в векторе сил могут быть удалены. Возможны и другие приемы, позволяющие избежать громоздкой процедуры "изгнания" излишних строк и столбцов из МЖС.

В нашей программе, приводимой в приложении, при решении системы уравнений просто игнорируются строки и столбы МЖС, имеющие номер заданного перемещения. Для хранения признака заданного перемещения при этом используется знаковый разряд соответствующей координаты узла (а вся сеть элементов строится в положительном квадранте координат). Суммирование произведений заданных перемещений на соответствующие коэффициенты МЖС с элементами вектора сил производится непосредственно в ходе решения системы, что позволяет сохранить вектор сил в неизменном виде. Подробнее процедура изложена в разделе 2.11.

Р.Пэйн и Дж. Айронс [5] предложили иной прием, заключающийся в следующем. Диагональный член  $i$ -й строки МЖС заменяется некоторым числом  $A$ , на несколько порядков большим, чем осталь-



Рис. 2.8. Схема к расчету суммарной узловой силы



ные элементы МЖС (например,  $A = 10^8$ ), а на место неизвестной  $i$ -й силы в вектор узловых сил помещается число, равное  $DA$  ( $D$  — заданное перемещение). После этого система решается в обычном порядке.

Очевидно, что после таких подстановок  $i$ -я строка уравнения в системе (2.50) принимает вид

$$A\delta_i + \sum (k_{ij} \delta_j) = DA, \quad (j \geq i + 1), \quad (2.51)$$

где  $\sum (k_{ij} \delta_j)$  — сумма произведений недиагональных членов  $i$ -й строки МЖС на неизвестные перемещения,  $\delta_j$ .

Поскольку величина  $A$  намного больше, чем  $\sum (k_{ij} \delta_j)$ , то в результате решения системы уравнения величина перемещения  $\delta_i$  будет найдена практически равной заданной величине  $D$ .

По формулам (2.36) и (2.39) найденные узловые перемещения позволяют рассчитать деформации и перемещения в элементах. Силы, передаваемые системой элементов на связи с заданными перемещениями, могут быть найдены двумя способами. Во-первых,  $i$ -й (неизвестный) компонент вектора сил может быть найден путем суммирования произведений коэффициентов  $i$ -й строки МЖС на члены вектора перемещений. Если в процессе решения системы уравнений необходимые строки МЖС не сохраняются, то этот метод расчета неизвестных сил потребовал бы повторного формирования МЖС.

Возможен и другой путь. При этом по формуле (2.49) по уже известным напряжениям рассчитывают силовой вклад всех элементов (на рис. 2.8 трех), примыкающих к рассматриваемому узлу с заданным перемещением. Сумма этих вкладов даст искомую величину усилия, воспринимаемого связью.

### 2.2.3. Постановка задачи и назначение граничных условий

Рассмотрим последовательность решения задачи на конкретном примере (полосовой фундамент, находящийся под заданной распределенной нагрузкой на упругом полупространстве (рис. 2.9)).

Наличие оси симметрии позволяет рассматривать только одну половину области. Размеры области назначаем, исходя из ожидаемого характера напряженно-деформированного состояния среды таким образом, чтобы задаваемые граничные условия мало влияли на интересующие нас результаты — осадки фундамента или напряжения в ближайшей к фундаменту области. Разумеется, увеличение рассматриваемой области увеличит точность решения, однако это будет сопровождаться ростом затрат машинного времени и усилий на подготовку информации.

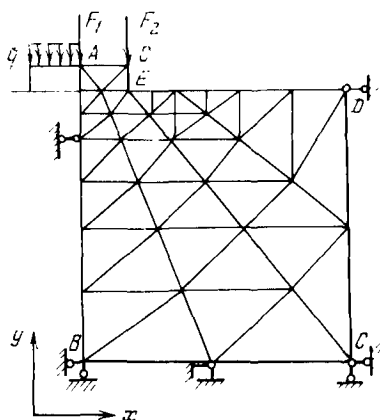


Рис. 2.9. Схема к решению фундаментной задачи

Разбивку сети конечных элементов следует производить с учетом того, что решение МКЭ дает в пределах треугольного элемента постоянные значения напряжений. Поэтому в местах ожидаемых высоких градиентов напряжений сеть элементов следует сгущать. Поскольку стороны треугольного элемента при деформировании остаются прямыми, следует избегать использования узких и длинных элементов. Применение стандартных сеток элементов (равномерных или построенных по какому-либо закону) позволяет автоматизировать расчет узловых координат и сократить объем вводимой информации, но нерегулярные сетки, как правило, экономичнее в отношении затрат машинного времени.

По оси симметрии касательные напряжения равны нулю и равны нулю перемещения, нормальные к этой границе. Такие условия совершенно точно обеспечиваются заданием узлам на границе  $AB$  (см. рис. 2.9) перемещений:  $u = 0$ .

Если к элементам области прикладываются силы тяжести и можно ожидать общего оседания узлов, то по границе  $CD$  наиболее логичным будет задание узлам нулевых горизонтальных перемещений. Если силы тяжести не задаются, а деформации будут обусловлены только нагрузкой на фундамент, то узлам на границе  $CD$  можно задать и нулевые вертикальные перемещения. По нижней границе логично будет задать узлам нулевые горизонтальные и вертикальные перемещения.

Система связей (заданных перемещений) должна быть во всяком случае такова, чтобы исключалось свободное перемещение или вращения области в поле координат. Минимальное число связей, обеспечивающих это условие, — две по одной оси и одна по другой. Чем больше связей, тем меньше остается неизвестных перемещений, тем меньше затраты машинного времени.

Заданную на фундамент распределенную нагрузку  $q$  будет логично разделить пополам между узлами в точках  $A$  и  $G$ , при этом

$$F_1 = F_2 = ql_{AG}/2,$$

где  $q$  — нагрузка на единицу площади фундамента;  $l_{AG}$  — длина нагруженного отрезка  $AG$ .

Разумеется, система и масштаб единиц при задании сил, модулей и плотности должны быть одни. В этом же масштабе получается

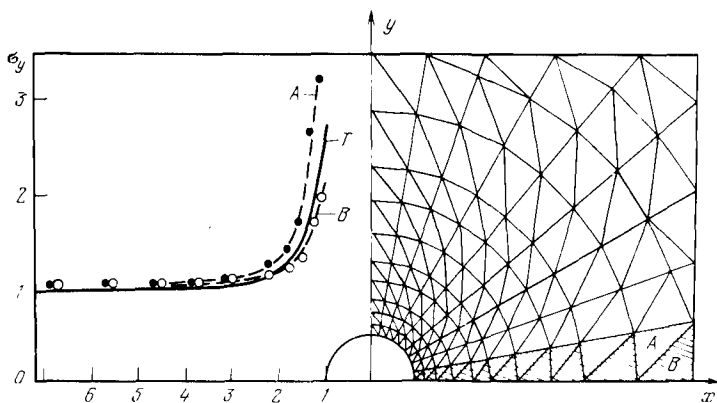


Рис. 2.10. Графики напряжений по теоретическому ( $T$ ) и конечному элементному ( $A$  и  $B$ ) решениям

и решение. Опыт показывает, что при решении плоских задач сети элементов более чем на 300 — 500 узлов являются нерациональными. Если такое число узлов не обеспечивает необходимой густоты сети в подобласти высоких градиентов, то лучше решение провести в два этапа. На первом этапе область и подобласть разбиваются на крупные элементы и производится расчет. Далее проводится решение уже только для подобласти, которая разбивается на более мелкие элементы, а узловые перемещения по контуру подобласти, полученные в первом решении, вводятся как заданные граничные условия. В областях с простой геометрией при относительно небольшом числе элементов может быть достигнута высокая точность. На рис. 2.10 сопоставлены напряжения в точках массива вокруг выработки из аналитического и численного решения (программа "Геомеханика"). Заданные напряжения на границах области:  $\sigma_x = 0,3$ ;  $\sigma_y = 1$ . В элементах  $A$  (косая штриховка) уровень напряжения вблизи выработки оказался несколько выше теоретического, а в элементах  $B$  (пологая штриховка) — несколько ниже. Перемещения узлов в решении МКЭ отличались от аналитически полученных величин не более чем на 3 — 5 %.

Разброс напряжений в элементах затрудняет анализ полей напряжений (построение изолинии, эпюр). Для сглаживания напряжений в упругих решениях возможно арифметическое усреднение компонентов напряжений ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) в парах треугольных элементов, образующих в сумме более или менее правильный четырехугольник, и отнесение усредненных напряжений к середине четырехугольника либо усреднение компонентов напряжений по всем элементам, примыкающим к данному узлу, и отнесение усредненных напряжений к узлу.

### 2.3. ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

При наличии осевой симметрии в геометрии, свойствах нагружаемой области и в граничных условиях в результате нагружения будут изменяться только координаты  $r$  и  $z$  точек среды, а узловая цилиндрическая координата  $\theta$  будет оставаться неизменной.

Вследствие этого анализ можно вести лишь в координатной плоскости  $r - z$ , рассматривая при этом конечный элемент как кольцо треугольного поперечного сечения (рис. 2.11). Вновь аппроксимируем функции перемещений в пределах элемента линейными полиномами:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 + a_2 r + a_3 z \\ v &= a_4 + a_5 r + a_6 z \end{aligned} \right\}, \quad (2.52)$$

или аналогично уравнениям (2.5) и (2.35)

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k \end{aligned} \right\}, \quad (2.53)$$

где  $N_i, N_j, N_k$  — функции формы, определяемые уравнением (2.6);  $u_i, \dots, v_k$  — узловые перемещения.

Деформированное состояние точек осесимметричной области характеризуется четырьмя ненулевыми компонентами:

$$\left\{ \epsilon \right\} = \left\{ \epsilon_r \epsilon_z \epsilon_\theta \gamma_r z \right\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{u}{r} \left( -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\}^T. \quad (2.54)$$

Подставляя в уравнение (2.54) функции (2.53) и дифференцируя, получаем

$$\left\{ \epsilon \right\} = [B] \left\{ \delta \right\}, \quad (2.55)$$

где

$$[B^i] = \begin{bmatrix} N'_{ir} & N'_{jr} & N'_{kr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_{iz} & N'_{jz} & N'_{kz} \\ \frac{N_i}{r} & \frac{N_j}{r} & \frac{N_k}{r} & 0 & 0 & 0 \\ N'_{iz} & N'_{jz} & N'_{kz} & N'_{ir} & N'_{jr} & N'_{kr} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

Несложно убедиться, что

$$[B] = [B^i] [A]^{-1}, \quad (2.57)$$

где

$$[B^i] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; [A] = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_j & z_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_k & z_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_i & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_j & z_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_k & z_k \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука. Зависимость узловых сил от узловых перемещений определяется вновь с использованием принципа возможных перемещений из условия равенства работы внешних сил и внутренних напряжений. При этом интеграл берется не по площади элемента, а по объему конечного элемента:

$$\{F\} = \int_V [B]^T [D] [B] \{\delta\} dV. \quad (2.59)$$

Отметим, что в отличие от плоской задачи матрица  $[B]$  непостоянна в пределах элемента, о чем свидетельствует наличие в ней членов, зависящих от  $r$  и  $z$  (см. уравнение (2.56)). Вообще говоря, имеются методы, позволяющие осуществить численное интегрирование в уравнении (2.59), и эти методы будут нами рассмотрены в дальнейшем. Однако при использовании треугольных элементов с тремя узлами в вершинах вполне удовлетворительные результаты получаются, если элементы матрицы  $[B]$  в уравнении (2.56) (или матрицы  $[B']$  в уравнении (2.58)) определить для центра элемента с координатами

$$r_0 = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_k), \quad z_0 = \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_k)$$

и считать ее неизменной во всем элементе. Очевидно, это аналогично допущению о постоянстве напряжений и деформаций в пределах элемента. Подобное допущение позволяет вновь заменить интегрирование по объему элемента умножением на объем, который приблизительно равен  $2\pi r_0 \Delta$  ( $\Delta$  — площадь элемента):

$$[F] = [K] \{\delta\}, \quad (2.60)$$

где  $[K] = 2\pi r_0 \Delta [B]^T [D] [B]$ ,

$$\{\delta\} = \{u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k\}.$$

Связь между напряжениями и узловыми силами определяется соотношением

$$\{F\} = 2\pi r_0 \Delta [B]^T \{\sigma\}. \quad (2.61)$$

Объединение матриц жесткости элементов в матрицы жесткости системы производится в том же порядке, что и в плоской задаче. Следует лишь иметь в виду, что в качестве узловых сил рассматриваются суммарные величины, распределенные по окружности, описываемой вершиной узла вокруг оси симметрии. Вес элемента (или другие направленные вдоль оси  $z$  распределенные силы) — это также вес всего кольца.

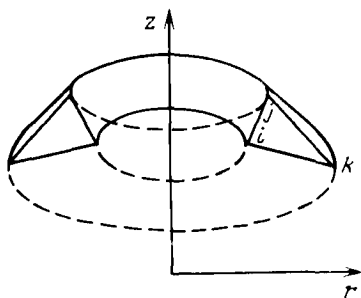


Рис. 2.11. Конечный элемент в осесимметричной задаче

Если узлам, расположенным на оси симметрии, не задать в качестве граничного условия  $u = 0$ , то в результате расчета у них могут быть получены ненулевые (хотя и малые) радиальные перемещения.

Допущение о постоянстве матрицы  $[N']$  и метод вычисления объема элемента дают наибольшие погрешности в элементах, у которых размер по координате  $r$  близок к их величине  $r_0$ , поэтому в элементах, близких к оси, неизбежны значительные погрешности.

#### 2.4. ПЛОСКИЙ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ

В качестве функции, аппроксимирующей неизвестную функцию перемещения в пределах элемента, может быть принят не только линейный полином, но и полиномы более высоких порядков. При этом напряжения и деформации уже не будут постоянными в пределах элемента.

В литературе [5, 46] приводится описание множества различных типов элементов. Рассмотрим лишь один из них, пользующийся в геомеханике наряду с простейшим треугольным элементом наибольшей популярностью, — четырехугольный элемент с восемью узлами.

Первоначально рассмотрим квадратный элемент в координатах  $\xi\eta$  (рис. 2.12). Функции, аппроксимирующие перемещения  $u$  и  $v$  в пределах такого элемента, будут представлять собой полиномы третьей степени:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi\eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \\ v &= \alpha_9 + \alpha_{10} \xi + \alpha_{11} \eta + \alpha_{12} \xi\eta + \alpha_{13} \xi^2 + \alpha_{14} \eta^2 + \alpha_{15} \xi^2 \eta + \alpha_{16} \xi \eta^2 \end{aligned} \right\} (2.62)$$

Подставив в уравнения (2.62) значения координат узлов, получим систему уравнений, аналогичную системе (2.2), и связывающую 16 узловых перемещений с 16 коэффициентами  $\alpha$ ,

$$\{\delta\} = [A] \{\alpha\}. \quad (2.63)$$

Решение этой системы относительно коэффициентов  $\alpha$  и подстановка этих значений в формулы (2.62) позволяют их представить в другом виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_8 u_8 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_8 v_8 \end{aligned} \right\}, \quad (2.64)$$

где  $N_1, \dots, N_8$  — функции формы;  $u_1, \dots, v_8$  — узловые перемещения вдоль осей  $\xi$  и  $\eta$ .

Восемь функций формы могут быть вычислены по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{i=1,3,5,7} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \\ N_{i=2,4,6,8} &= \frac{1}{2} (1 - \eta_i^2 \xi^2 - \xi_i \eta^2) (1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

Рис. 2.12. Графическое изображение квадратного элемента

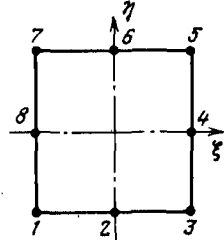
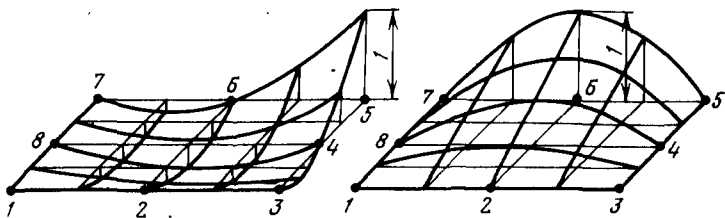


Рис. 2.13. Графическое изображение поверхности функций формы углового узла и угла на середине стороны элемента (1 - 8 - номера узлов)



Функции формы двух характерных узлов изображены графически на рис. 2.13. Функции формы вновь равны единице при  $\xi = \xi_i$  и  $\eta = \eta_i$  и нулю во всех остальных узлах. Сумма всех восьми функций формы в любой точке элемента с координатами  $\xi, \eta$  равна единице.

Набор деформаций  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\}$  зависит от координат точки в пределах элемента и определяется путем дифференцирования уравнений (2.2):

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}, \quad (2.66)$$

где  $\{\delta\} = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_8 v_8\}^T$ ,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Вычисление значений производных от функций формы, определяемых формулами (2.65), в любой точке элемента с конкретными координатами  $\xi$  и  $\eta$  не составляет труда:

при  $i = 1, 3, 5, 7$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i \eta) (2\xi_i \xi + \eta_i \eta),$$

при  $i = 2, 4, 6, 8$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{2} [ - 2\eta^2_i \xi (1 + \xi_i \eta + \eta_i \eta) + \xi_i (1 + \eta_i^2 \xi^2 - \xi_i^2 \eta_i) ]. \quad (2.68)$$

Для получения производных по  $\eta$  достаточно в формулах (2.68) поменять  $\xi$  и  $\eta$  (в том числе и индексирование) местами.

Напряжения связаны с деформациями через матрицу упругости  $[D]$ , приведенную в уравнениях (1.9) и (1.10):

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}.$$

Использование принципа возможных перемещений приводит нас к системе уравнений, связывающих 16 компонентов узловых сил с аналогичным числом узловых перемещений,

$$\{F\} = [K] \{\delta\}, \quad (2.69)$$

где

$$[K] = \int_S [B]^T [D] [B] dS = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] d\xi d\eta. \quad (2.70)$$

Отметим, что элементы подынтегральной матрицы не являются постоянными по площади элемента, и замена интегрирования умножением некоторого стационарного значения подынтегральной матрицы на площадь элемента сопровождалось бы неоправданной потерей точности.

Метод численного интегрирования, известный как квадратура Гаусса — Лежандра, [5], предусматривает вычисление интеграла от функции по площади подобного элемента следующим образом.

Элемент разделяется на 9 частей (рис. 2.14). В каждой части элемента назначается одна точка, называемая точкой интегрирования, в которой вычисляется одно значение функции, умножаемое на площадь этой части ( $\Delta_{mn}$ ), а общий интеграл по площади элемента принимается как сумма этих произведений:

$$[K] = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} [B_{mn}]^T [D_{mn}] [B_{mn}]. \quad (2.71)$$

Отметим, что упругие свойства элемента, определяющие матрицу  $[D_{mn}]$ , также могут быть различными по площади элемента. Абсциссы точек интегрирования в столбцах  $m = 1, 3$  и ординаты точек в строках  $n = 1, 3$  (рис. 2.14) равны  $\pm 0,774597$ . Площади частей элемента равны:  $\Delta_{1,1; 1,3; 3,3; 3,1} = (\frac{5}{9})^2$ ;  $\Delta_{2,1; 3,2; 2,3; 1,2} = (\frac{5}{9})(\frac{8}{9})$ ;  $\Delta_{2,2} = (\frac{8}{9})^2$ . Этим исчерпывается общий вывод матрицы жесткости квадратного элемента с восемью вершинами.

Обращаем внимание на то, что аппроксимирующие полиномы и равные им по рангу функции формы имеют вид полиномов третьей степени. Если же взять одну из координат постоянной (а вдоль



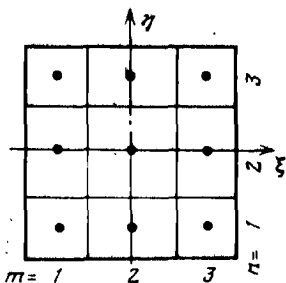


Рис. 2.14. Схема интегрирования по площади элемента

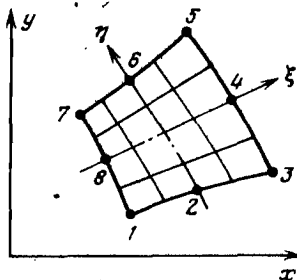


Рис. 2.15. Графическое изображение криволинейного элемента

каждой из сторон элемента одна из координат постоянна), то полиномы превращаются в уравнения парабол. Первоначально прямая линия в пределах деформированного элемента превращается в плавную кривую линию.

Использование квадратных элементов само по себе не представляет особого интереса, однако проведенные выкладки могут быть использованы для вывода матрицы жесткости элемента более сложной формы. Представим себе, что элемент, изображенный на рис. 2.12, уже раньше был деформирован таким образом, что сильно изменил свою форму, а первоначально прямые линии в нем превратились в кривые (рис. 2.15).

Координаты  $\xi$ ,  $\eta$  и нумерацию узлов элемента от 1 до 8 будем называть локальными координатами и локальной нумерацией в отличие от глобальных координат  $x$ ,  $y$  и глобальной сплошной нумерации узлов во всей системе элементов. Рассматривая глобальные координаты узлов как компоненты узловых перемещений, полученных в результате деформирования, можем использовать уравнения (2.64) для установления связи координат  $x$  и  $y$  любой внутренней точки элемента с ее координатами  $\xi$  и  $\eta$  в квадратном прообразе элемента и узловыми координатами  $\{x_1, y_1, \dots, y_8\}$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_8 y_8 \end{aligned} \right\}, \quad (2.72)$$

где  $N_1 - N_8$  — функции формы, определяемые уравнениями (2.65).

Если заданный таким образом криволинейный элемент получит новые деформации, то перемещения внутренних точек могут быть связаны с перемещениями узловых точек через уравнения (2.64) с помощью тех же самых функций формы  $N_1 - N_8$ , описанных в исходной системе координат  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_8 u_8 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_8 v_8 \end{aligned} \right\}, \quad (2.73)$$

Элемент, в котором как для описания преобразования координат, так и для аппроксимации искомой функции (перемещений, напоров и т.д.) используется одинаковый набор функций формы, называется изопараметрически м. Отображение криволинейного элемента на квадратный прообраз позволяет использовать хорошо разработанные приемы численного интегрирования при выводе его матрицы жесткости. Деформации в элементе  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$  определяются путем дифференцирования уравнений (2.73) по координатам  $\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}$ ,

$$\text{где } [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Функции формы являются функциями координат  $x$  и  $y$ , и вычисление производных  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  и  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$  производится по формуле

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (2.75)$$

где  $[J]$  — матрица преобразования координат (матрица Якоби);

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

где  $|J|$  — детерминант матрицы Якоби (якобиан):

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (2.78)$$

Напряжения связаны с деформациями матрицей упругости  $[D]$  — см. формулы (1.8), (1.10), (1.11):

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}.$$

Матрица жесткости элемента получается с использованием принципа начальных перемещений и имеет вид

$$[K] = \int_S [B]^T [D] [B] dS. \quad (2.79)$$

Интегрирование по площади реального элемента заменяется интегрированием по площади его квадратного прообраза. Между элементарными площадями  $dS = dx dy$  в реальной системе координат и  $d\xi d\eta$  в системе координат прообраза имеется соотношение

$$dS = \text{abs } |J| d\xi d\eta, \quad (2.80)$$

где  $\text{abs } |J|$  — абсолютная величина якобиана. При этом выражение (2.79) принимает вид

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{abs } |J| [B]^T [D] [B] d\xi d\eta. \quad (2.81)$$

Переходя к численному интегрированию, по аналогии с формулой (2.71), имеем окончательную формулу матрицы жесткости элемента (МЖЭ):

$$[K] = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} \text{abs } |J_{mn}| [B_{mn}]^T [D_{mn}] [B_{mn}]. \quad (2.82)$$

По аналогии с формулой (2.49) из выражения для МЖЭ (2.82) запишем соотношение между узловыми силами и напряжениями в восьмиузловом изопараметрическом элементе

$$\{F\} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} \text{abs } |J_{mn}| [B_{mn}]^T \{\sigma_{mn}\}, \quad (2.83)$$

где  $\{\sigma_{mn}\}$  — напряжения  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$  в точке интегрирования. Координаты точек интегрирования  $\xi$  и  $\eta$  и величины  $\Delta_{mn}$  указаны в пояснениях к формуле (2.71). Значения  $[B_{mn}]$  и  $|J_{mn}|$  вычисляются в каждой точке интегрирования.

При использовании изопараметрических элементов эквивалентные узловые силы от распределенных сил с интенсивностью на единицу площади  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  (вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно) определяются по формуле

$$\begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_S \gamma_x N_i dS \\ \int_S \gamma_y N_i dS \end{Bmatrix} = \int_S N_i dS \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}. \quad (2.84)$$

Переходя к интегрированию по координатам  $\xi$  и  $\eta$  и далее, выполняя численное интегрирование, получаем

$$F_{x,i} = \gamma_x \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} \text{abs } |J_{mn}| N_{i,mn}. \quad (2.85)$$

Выражение для  $F_{y,i}$  имеет аналогичный вид. Значения коэффициента  $\Delta_{mn}$  и выражение для  $|J|$  приводились выше.

Распределение рассчитанных таким образом эквивалентных узловых сил может показаться неожиданным. На рис. 2.16 приведены такие силы, имитирующие силы тяжести в квадратном элементе с удельным весом, равным единице. Еще более сложным будет распределение сил в элементе с криволинейными сторонами.

Сведение равномерно распределенной контурной нагрузки к эквивалентным узловым силам следует производить соответственно ненулевым функциям формы, существующим на этой границе. Например, если задана (не обязательно равномерная) нагрузка на стороне элемента с узлами 5, 6, 7 (рис. 2.17), то ненулевыми на этой стороне будут функции  $N_5, N_6, N_7$ . На элементарный участок границы, проекция которого на ось  $x$  равна  $dx$ , будет действовать сила  $q_y dx$ . Эта сила распределится между узлами 5, 6, 7 пропорционально величине функции формы этих узлов на отрезке  $dx$ :

$$\begin{Bmatrix} dF_{y,5} \\ dF_{y,6} \\ dF_{y,7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y dx. \quad (2.86)$$

Координата  $x$  есть функция координат прообраза  $\xi$  и  $\eta$ , и величина

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta. \quad (2.87)$$

На стороне с узлами 5, 6, 7  $\eta = \text{const}$ . Отбрасывая в соответствии с этим второй член в формуле (2.87) и продифференцировав функцию  $x$  (2.72), имеем

$$dx = \beta d\xi, \quad (2.88)$$

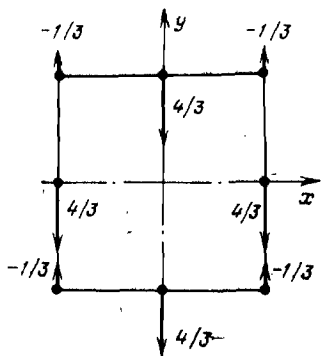


Рис. 2.16. Схема сведения распределенных сил к узловым

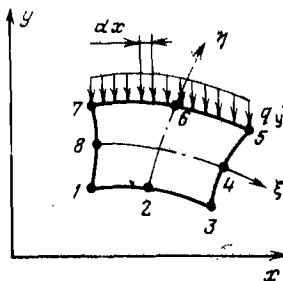


Рис. 2.17. Схема сведения контурных нагрузок к узловым силам

где

$$\beta = (N'_5 \xi x_5 + N'_6 \xi x_6 + N'_7 \xi x_7). \quad (2.89)$$

Производные остальных функций формы (2.89) не представлены, поскольку  $N_{1-4,8}$  на этой стороне элемента равны нулю.

Подставив значение  $dx$  из уравнения (2.28) в уравнение (2.86) и проинтегрировав по  $\xi$  от  $-1$  до  $+1$  (от узла 7 до узла 5), получим

$$\begin{Bmatrix} F_{y,5} \\ F_{y,6} \\ F_{y,7} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y \beta dx. \quad (2.90)$$

Воспользовавшись квадратурой Гаусса — Лежандра, можно положить численную аппроксимацию интеграла (2.90)

$$\begin{Bmatrix} F_{y,5} \\ F_{y,6} \\ F_{y,7} \end{Bmatrix} = \frac{5}{9} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix}_{\xi=-0,774597} q_y \beta + \frac{8}{9} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix}_{\xi=0} q_y \beta + \frac{5}{9} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix}_{\xi=0,774597} q_y \beta.$$

Это будет довольно грубая аппроксимация, и сумма рассчитанных сил не будет в точности равна суммарной нагрузке на сторону элемента. Небольшую разницу можно распределить между узлами равномерно. Если рассматриваемая сторона элемента есть отрезок прямой длиной  $2b$  и средний узел лежит точно на середине стороны, то приложенная равномерно распределенная нагрузка делится между узлами точно в пропорции  $\frac{1}{3}qb$ ,  $\frac{4}{3}qb$ ,  $\frac{1}{3}qb$ . Сведение распределенных по площади сил к узловым, конечно, необходимо программировать и лучше всего выполнять в цикле составления матриц жесткости элементов. Вычисление же узловых сил от заданных распределенных по контуру нагрузок проще выполнить вручную.

Изложенный алгоритм составления матриц жесткости изопараметрического элемента с первого взгляда кажется чрезвычайно громоздким, однако рационально организованная программа оказывается ненамного сложнее, чем для треугольного элемента с линейной аппроксимацией перемещений.

Из формулы (2.82) очевидно, что МЖЭ представляет собой по существу сумму девяти матриц, вычисленных для каждой точки интегрирования. Поэтому целесообразно, организовав циклы по номерам столбцов  $m$  и строк  $n$  точек интегрирования, вычислять эти матрицы и сразу же рассылать их элементы на свои места в поле матрицы жесткости системы. При этом могут оказаться полезными следующие формулы, записанные на языке Фортран. Координаты точки интегрирования  $\xi$  и  $\eta$  ( $KSI$  и  $ETA$ ) в зависимости от номера столбца  $M$  и номера строки  $N$ , необходимые при вычислении элементов матриц  $[B]$  и  $[J]$  в формуле (2.82):

$$\left. \begin{aligned} KSI &= (M - 2) * 0,774597 \\ ETA &= (N - 2) * 0,774597 \end{aligned} \right\};$$

коэффициенты  $\Delta_{mn}$  ( $DEL$ ) в формуле (2.82) в зависимости от  $M$  и  $N$ :

$$\begin{aligned} DEL &= (5./9.) ** (IABS (2 * (N/2) - N) + \\ &+ IABS * (2 * (M/2) - M)) * (8./9.) ** ((1 - \\ &- IABS (2 * (N/2) - N) + (1 - IABS (2 * (M/2) - M))). \end{aligned}$$

Если составление матрицы  $[B]$  по формуле (2.74) производится в цикле по номерам узлов от  $I = 1$  до  $I = 8$ , то координаты узла  $\xi_i$  и  $\eta_i$  могут вычисляться по формулам:

$$KSI I = (I - 4) * (8 - I) / (IMAX(IABS (I - 4), 1) * IMAX((8 - 1), 1));$$

$$ETA I = (2 - I) * (I - 6) / (IMAX(IABS (2 - I), 1) * IMAX(IABS * (I - 6), 1)).$$

Общая блок-схема программы составления МЖЭ приведена на рис. 2.18.

Достоинствами изопараметрических элементов высоких порядков по сравнению с трехузловыми элементами являются более высокая точность решения (при одинаковом числе узлов), возможность более точного описания криволинейных границ, возможность сокращения объема вводимой информации. Недостатками являются сложность задания контурных сил, геометрические ограничения при конструировании сети элементов, большая ширина полосы ненулевых членов в МЖС.

На рис. 2.19 по данным [5] приведена схема консольной балки, разбитой сетью треугольных ( $a$ ) и восьмиузловых изопараметрических ( $b$ ) элементов. Число узлов в обеих схемах одинаковое, однако при треугольных элементах перемещение точки приложения нагрузки составило 0,53 от точного решения, а максимальное напряжение в балке — 0,51; при изопараметрических же элементах как перемещение, так и напряжение составили 0,99 от результатов точного решения.

В рассмотренном изопараметрическом элементе для описания геометрии (уравнения (2.72)) и перемещений (уравнения (2.73)) использовался одинаковый набор функций формы. Если же для описания перемещения используются полиномы более низкого порядка, то элемент называют суперпараметрическим, а если более высокого порядка — субпараметрическим. В частности, в рассмотренном восьмиузловом элементе для описания перемещений можно

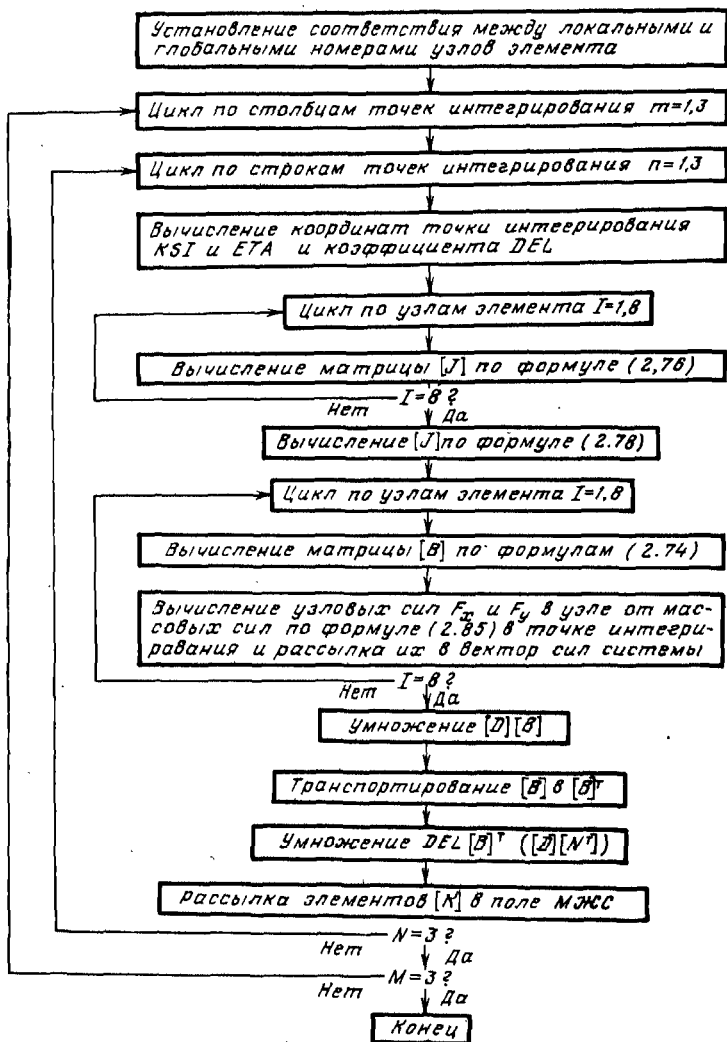


Рис. 2.18. Общая блок-схема программы составления МЖС

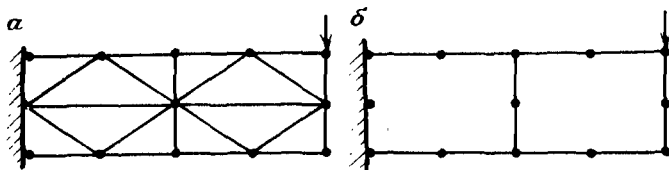


Рис. 2.19. Консольная балка

использовать только перемещения четырех угловых узлов через соответствующие им четыре функции формы более низкого порядка:

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_3 u_3 + N_5 u_5 + N_7 u_7 \\ v &= N_1 v_1 + N_3 v_3 + N_5 v_5 + N_7 v_7 \end{aligned} \right\}, \quad (2.91)$$

где  $N_1 - N_7$  — функции формы, определяемые выражением

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta). \quad (2.92)$$

Такой суперпараметрический элемент с восемью узлами и четырьмя внутренними точками интегрирования получил применение в упругопластическом анализе (см. раздел 2.7).

## 2.5. ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Для решения трехмерных задач могут использоваться элементы в виде четырехузловых тетраэдров с линейными аппроксимирующими функциями перемещений или изопараметрические элементы любого типа.

Конструирование пространственной сети конечных элементов из разномерных тетраэдров геометрически сложно, поэтому обычно область делят прежде всего на какие-то стандартные гексаэдры ("кирпичи") с восемью вершинами. Каждый из этих "кирпичей" можно стандартным образом разделить на пять тетраэдров и рассматривать каждый из них как конечный элемент. Однако, разбив область на кирпичи, более естественно рассматривать эти "кирпичи" в качестве изопараметрических элементов с восемью узлами в вершинах. Принципиально возможно на ребрах этих гексаэдров сделать еще по одному или несколько узлов, однако применение сложных изопараметрических элементов в пространственных задачах ведет к резкому увеличению ширины полосы ненулевых членов МЖС, что и без этого является достаточно сложной проблемой.

Поэтому в практике решения пространственных задач наибольшее применение нашел восьмиузловой гексаэдр, выводом матрицы жесткости которого и ограничимся.

Прообразом неправильного гексаэдра (рис. 2.20) является куб в координатах  $\xi, \eta$ , координаты вершин которых равны 0, +1 или -1. По аналогии с уравнением (2.72) представим координаты  $x, y$  и  $z$  внутренних точек элемента через узловые координаты и координаты прообраза  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= N_1 x_1 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + \dots + N_8 y_8 \\ z &= N_1 z_1 + \dots + N_8 z_8 \end{aligned} \right\}, \quad (2.93)$$



где  $x_1, y_1, \dots, z_8$  — координаты узлов;  $N_1 - N_8$  — функции формы, определяемые уравнением общего вида

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \quad (2.94)$$

Несложно убедиться, что при нумерации узлов, показанной на рис. 2.20, координаты  $i$ -го узла  $\xi_i, \eta_i$  и  $\zeta_i$  могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (-1)^i, \quad \eta_i = (-1)^{\text{int} \frac{i+1}{2}} \\ \zeta_i &= (-1)^{\text{int}(\frac{i+3}{4})}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

где  $\text{int}$  обозначает целую часть.

Функции перемещений в пределах элемента имеют вид, аналогичный уравнениям (2.73):

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + \dots + N_8 u_8 \\ v &= N_1 v_1 + \dots + N_8 v_8 \\ w &= N_1 w_1 + \dots + N_8 w_8 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Относительные деформации в пределах элемента  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

определяются путем дифференцирования выражений (2.96)

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\},$$

где  $\{\delta\} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, \dots, u_8, v_8, w_8\}^T$ .

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{1x} & 0 & 0 & N'_{2x} & 0 & \dots & N'_{8x} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{1y} & 0 & 0 & N'_{2y} & \dots & 0 & N'_{8y} & 0 \\ 0 & 0 & N'_{1z} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N'_{8z} \\ N'_{1y} & N'_{1x} & 0 & N'_{2y} & N'_{2x} & \dots & N'_{8y} & N'_{8x} & 0 \\ 0 & N'_{1z} & N'_{1y} & 0 & N'_{2z} & \dots & 0 & N'_{8z} & N'_{8y} \\ N'_{1z} & 0 & N'_{1x} & 0 & N'_{2z} & \dots & N'_{8z} & 0 & N'_{8x} \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

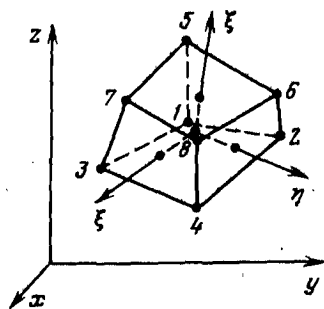


Рис. 2.20. Трехмерный изопараметрический элемент — гексаэдр

Производные функций формы по координатам  $x, y, z$  связаны с производными прообраза  $\xi, \eta, \zeta$  соотношением

$$\begin{Bmatrix} N'_{ix} \\ N'_{iy} \\ N'_{iz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N'_i \xi \\ N'_i \eta \\ N'_i \zeta \end{Bmatrix}, \quad (2.98)$$

$$\text{где } [J] = \begin{bmatrix} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_{1\xi} & N'_{2\xi} & \dots & N'_{8\xi} \\ N'_{1\eta} & N'_{2\eta} & \dots & N'_{8\eta} \\ N'_{1\zeta} & N'_{2\zeta} & \dots & N'_{8\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad \text{— матрица Якоби.} \quad (2.99)$$

Правила вычисления обратной матрицы  $[J]^{-1}$ , а также детерминанта  $|J|$  приводятся в учебниках по линейной алгебре.

Общее выражение для производных функций форм по координатам прообраза имеет вид

$$N'_{i\xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \quad (2.100)$$

Выражения для  $N'_{i\eta}$  и  $N'_{i\zeta}$  получаются из формулы (2.100) путем круговой подстановки координат в порядке  $\xi \rightarrow \eta \rightarrow \zeta \rightarrow \xi \rightarrow \eta \rightarrow \dots$ . Напряжения связаны с деформациями законом Гука (см. формулы (1.8; 1,9; 2.66)):

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] \{\delta\}. \quad (2.101)$$

Связь узловых сил с узловыми перемещениями вновь определяется с помощью принципа начальных перемещений путем приравнивания работы узловых сил работе внутренних напряжений, вычисляемых путем интегрирования величины  $\{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\}$  по объему элемента:

$$\{F\} = [K] \{\delta\}, \quad (2.102)$$

$$\text{где } [K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |J| [B]^T [D] [B] d\xi d\eta d\zeta,$$

$[K]$  — матрица жесткости.

Вычисление тройного интеграла заменяется по квадратуре Гаусса—Лежандра вычислением значения подынтегрального выражения в восьми точках интегрирования и умножением этих значений на долю объема элемента, приходящегося на данную точку интегрирования (весовой коэффициент)  $\Delta$ , который в данном случае равен единице и может не записываться:

$$[K] = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 \text{abs } |J_{mnk}| [B_{mnk}]^T [D_{mnk}] [B_{mnk}]. \quad (2.103)$$

Узловые силы связаны с напряжениями в точках интегрирования соотношением

$$\{F\}_x = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 \text{abs } |J_{m n k}| [B_{m n k}]^T \{\sigma_{m n k}\}. \quad (2.104)$$

Координаты точек интегрирования  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , в которых вычисляются значения матриц  $[J_{m n k}]$ ,  $[B_{m n k}]$ , могут быть определены по формулам:

$$\xi_m = (-1)^m 0,57735; \quad \eta_n = (-1)^n 0,57735; \quad \zeta_k = (-1)^k 0,57735. \quad (2.105)$$

По аналогии с формулой (2.85) сведение распределенных сил к узловым можно проделать с помощью формулы

$$F_{x, i} = \gamma_x \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 N_{i, m n k} \text{abs } |J|, \quad (2.106)$$

где  $N_{i, m n k}$  — значение функции формы  $i$ -го узла в очередной точке интегрирования;  $\gamma_x$  — удельная (на единицу объема) массовая сила, действующая вдоль оси  $x$ .

Весовой коэффициент  $\Delta$  в формуле (2.106) отсутствует, поскольку он равен единице. Аналогичная формула может быть записана и для составляющих узловых сил по осям  $y$  и  $z$ . У кубического элемента с восемью узлами суммарная распределенная по объему сила делится между узлами поровну.

Если по какой-либо грани элемента, например по грани  $\zeta = +1$  с узлами 5, 6, 7, 8 (см. рис. 2.20), приложена распределенная нагрузка, то она должна быть распределена между узлами 5, 6, 7, 8 имеющими ненулевые функции формы на этой грани. С каждого элементарного участка грани площадью  $dx dy$  нагрузка  $q dx dy$  распределяется между узлами 5, 6, 7, 8 пропорционально величине функции формы на этом участке. Для читателя не составит труда вывести формулу для расчета узловых сил, аналогичную по смыслу формуле (2.90), проделав ту же последовательность выкладок. При квадратной форме грани и равномерной нагрузке суммарная нагрузка на грань делится поровну между узлами.

Если элементы по форме не сильно отличаются от кубических, то не будет большой ошибкой распределенные по объему и по контуру силы делить поровну между соответствующими узлами.

## 2.6. ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Хотя в геомеханике и упругие решения иногда представляют интерес, например при расчете осадок, оценке устойчивости подземных камер в скальных массивах, однако в максимальной степени возможности МКЭ раскрываются при анализе явлений в средах со сложными нелинейными свойствами. Существует несколько различных методов получения нелинейных решений.

### 2.6.1. Нелинейная упругость с секущей матрицей

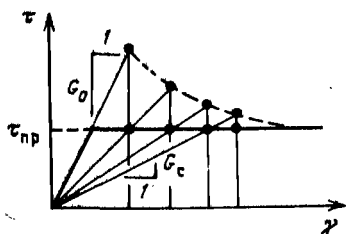


Рис. 2.21. Графическое изображение получения нелинейного решения методом переменных секущих характеристик

Свойства среды задаются в виде начального набора упругих характеристик и функций, определяющих секущие характеристики в зависимости от деформации. Например, для идеальной упругопластической среды (рис. 2.21) зависимость секущего модуля сдвига от деформации имеет вид:

$$\text{если } \gamma \leq \tau_{\text{пр}}/G_0, \quad \text{то } G = G_0,$$

$$\text{если } \gamma > \tau_{\text{пр}}/G_0, \quad \text{то } G = \tau_{\text{пр}}/\gamma.$$

Если при этом предельная поверхность описывается критерием Треска или Мизеса, то  $\tau_{\text{пр}} = \text{const}$ ; если же предельная поверхность описывается критерием Кулона или Боткина, то  $\tau_{\text{пр}} = f(I_1)$ .

Первоначально элементы рассматриваемой области наделяются начальным модулем  $G_0$  (см. рис. 2.21), и решается упругая задача при полной нагрузке. После этого для каждого из элементов по вышеприведенному алгоритму (или по иному, соответствующему рассматриваемой модели) вычисляются новые значения  $G_{\text{сек}}$ . Если хотя бы в одном элементе новое значение  $G_{\text{сек}}$  отличается от старого, проводится повторное решение с новой матрицей жесткости, составленной по новым упругим характеристикам. При повторном решении в элементах с новыми (сниженными) модулями уровень напряжения снизится, а через несколько итерационных циклов приблизится к заданному предельному уровню (см. рис. 2.21). Итерация прекращается, когда разница  $(\tau_{\text{пр}} - \tau)$  во всех элементах не станет достаточно малой по абсолютной или относительной величине.

Очевидно, что процедура обеспечивает соосность полных напряжений и деформаций. Коэффициент Пуассона не может достигать величины 0,5, так как в знаменателе членов упругой матрицы содержится величина  $(1 - 2\nu)$ ; следовательно, подобный метод неприменим для анализа процессов в разрыхляющихся средах. Метод предполагает одновременное приложение всех нагрузок, и его возможности для решения задач с неодновременно прикладываемыми нагрузками ограничены.

### 2.6.2. Нелинейная упругость с касательной матрицей

Свойства среды задаются в виде набора начальных упругих характеристик и функций, определяющих касательные характеристики в зависимости от деформаций или напряжений.

Нагрузка прикладывается малыми ступенями в нужной последовательности, не обязательно пропорционально, а напряжения в элементах после каждой ступени нагружения суммируются.

Первый шаг решения проводится при упругих свойствах элементов, соответствующих заданному исходному напряженно-деформированному состоянию, а для каждого очередного шага упругие свойства элементов определяются заново соответственно достигнутому уровню напряжений (или деформаций). Ход получения решения условно изображен на рис. 2.22. Поскольку упругие свойства принимаются соответствующими состоянию элемента перед приложением очередной ступени нагрузки, шаг за шагом будет набегать ошибка, уводящая расчетные точки от заданной связи напряжений и деформаций. Однако при делении нагрузки на 20 или более ступеней ошибка оказывается мала; кроме того, возможна корректировка каждого шага путем повторного решения с модулями, рассчитанными для среднеарифметической величины напряжений (деформаций) до и после приложения ступени нагрузки.

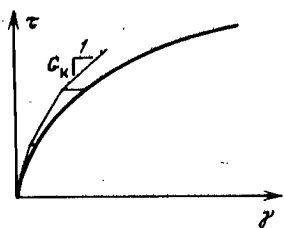


Рис. 2.22. Графическое изображение получения нелинейного решения методом переменных касательных характеристик

Метод применим лишь для упрочняющихся сред, так как в области разупрочнения касательные модули отрицательны. Метод непригоден для разрыхляющихся сред. Метод обеспечивает соосность приростов напряжений и деформаций в каждом шаге, что не характерно для пластического деформирования, и при сильно изменяющемся направлении главных напряжений в процессе непропорционального нагружения может приводить к получению искаженных результатов.

Тем не менее метод успешно используется для решения геотехнических задач, он достаточно популярен и поныне. Некоторые решения, полученные с его помощью, рассматриваются в разделе 6.1.

### 2.6.3. Метод начальных напряжений — деформационная теория пластичности

Метод начальных напряжений, первоначально предложенный О. Зенкевичем [5], называют иногда *модифицированным методом Ньютона — Рафсона*. Этот эффективный и универсальный метод весьма популярен при решении нелинейных задач. Пусть нелинейная связь полных напряжений и деформаций имеет вид

$$\sigma = [D_{уп}] \{ \epsilon \}. \quad (2.107)$$

Элементы матрицы  $[D_{уп}]$  не являются постоянными величинами, а зависят от деформации. Матрица  $[D_{уп}]$  не обязательно должна быть задана в явном виде: достаточно задать серию операций, с помощью которых по заданным деформациям  $\{ \epsilon \}$  можно было бы вычислить теоретические напряжения в данной нелинейной среде.

Решение достигается следующим образом. Элементы среды наде-

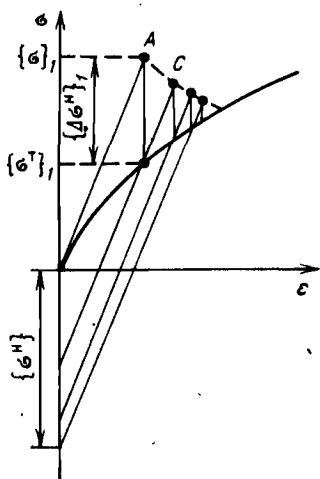


Рис. 2.23. Графическое изображение процедуры "начальных напряжений"

ляются начальными упругими свойствами, и составляет постоянная матрица жесткости системы. Прикладывается полная заданная нагрузка, решается упругая задача и рассчитываются напряжения и деформация — точка A на рис. 2.23. Соответствующие рассчитанным деформациям теоретические напряжения  $\{\sigma^T\}_1$ , вычисленные по формуле (2.107), будут отличаться от упругих напряжений  $\{\sigma\}_1$ . Разница между упругими и теоретическими напряжениями рассматривается как прирост начальных напряжений:

$$\{\Delta \sigma^H\}_1 = \{\sigma\}_1 - \{\sigma^T\}_1. \quad (2.108)$$

Прирост начальных напряжений элемента пересчитывается в начальные узловые силы по формуле

$$\{F\} = k_y \int_S [B]^T \{\Delta \sigma^H\} dS, \quad (2.109)$$

где  $k_y$  — коэффициент ускорения сходимости.

По нашему опыту  $k_y = 1,5$  оказывается оптимальной величиной для широкого диапазона моделей сред. О. Зенкевич [50] предлагает довольно сложную процедуру определения величины  $k_y$  индивидуально для каждого элемента, что позволяет еще более оптимизировать итерационный процесс. Начальные узловые силы добавляются к вектору сил системы, и проводится следующее упругое решение с прежней матрицей жесткости, но с новым набором узловых сил.

Добавление начальных сил увеличит упругие напряжения в элементе, однако на величину меньшую, чем начальные напряжения, по которым были рассчитаны узловые силы, поскольку в ансамбле элементов добавленные начальные силы распределяются также и на другие элементы области. Поэтому после вычитания из рассчитанных напряжений введенных начальных напряжений получим точку C, более близкую к теоретическому графику, чем точка A. Вновь определяем теоретические напряжения  $\{\sigma^T\}_2$ , соответствующие новым деформациям, и дополнительные начальные напряжения. Таким образом, итерации повторяются до тех пор, пока найденные упругие напряжения за вычетом суммарных накопленных начальных  $\{\sigma^H\}$  не станут достаточно близки к теоретическим.

Достоинством метода начальных напряжений является постоянство МЖС, что позволяет лишь однократно формировать ее и вычислять обращенную матрицу. Кроме того, метод не предъявляет каких-либо требований, например симметричности, к матрице  $[D_{y\pi}]$  в уравнении (2.107): среда может обладать любым законом пластического течения. Реализация группы эффективных моделей сред с помощью этого метода изложена в разделе 5.

## 2.6.4. Теория пластического течения

В общем случае исходное напряженное состояние рассматриваемой области характеризуется точками, находящимися внутри поверхности текучести  $F(\{\sigma\}, k) = 0$ . При постепенном увеличении нагрузок первоначально область будет деформироваться упруго, и лишь по достижении определенного уровня нагрузки напряжения в элементах наиболее напряженных зон начнут последовательно выходить на поверхность текучести.

Для получения конечно-элементного решения нагрузка прикладывается малыми ступенями, а связь напряжений и деформаций в элементе в пределах ступени определяется либо упругой матрицей, если элемент упруг, либо упругопластической матрицей  $[D_{уп}]$  по формуле (2.107), если напряжения в элементе вышли на поверхность текучести. Шаг за шагом напряжения в элементах суммируются. В литературе описано несколько вариантов реализации этого процесса.

Шаговый процесс с переменной МЖС. В этом варианте для всех элементов, напряженное состояние которых находится на поверхности текучести, по формуле (1.90) составляют упругопластические касательные матрицы  $[D_{уп}]$ ; для элементов, напряженное состояние которых находится внутри поверхности текучести, составляются упругие матрицы  $[D]$ ; величина очередной ступени нагружения принимается такой, чтобы напряженное состояние наиболее нагруженного элемента (ННЭ) из числа упругих элементов вышло на поверхность текучести. На  $n$ -м шаге нагружения матрицы  $[D_{уп}]$  элементов, зависящие от напряжений, оказываются рассчитанными по напряженному состоянию на конец  $(n - 1)$ -го шага. Этот процесс применим для сред с ассоциированным законом течения, обеспечивающим симметричность матриц  $[D_{уп}]$ , так как несимметричность МЖЭ привела бы к несимметричности МЖС, что сильно осложнило бы решение системы уравнений. Величина очередной ступени нагружения, обеспечивающей вывод ННЭ на поверхность текучести, определяется следующим образом. Пусть напряженное состояние упругого элемента определяется точкой  $A$  внутри поверхности текучести (рис. 2.24), т.е.  $F(\{\sigma\}, k) < 0$ . Прикладываем пробную ступень нагрузки, которая выводит напряженное состояние элемента в точку  $B$  вне поверхности текучести или внутри нее. Решая совместно уравнения прямой  $AB$  и поверхности текучести  $F(\{\sigma\}, k) = 0$ , определяем точку пересечения прямой  $AB$  с поверхностью текучести — точку  $C$ , которая будет лежать внутри отрезка  $AB$  или вне его. Отношение длин отрезков  $AC/AB$  называют

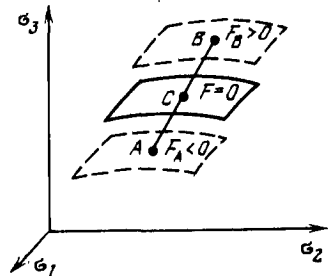


Рис. 2.24. Графическое изображение вывода ННЭ на поверхность текучести

коэффициентом перегрузки  $k_n$ . Если  $AB > AC$ , то  $k_n > 1$ , и наоборот.

Возможен и другой метод определения коэффициента перегрузки. Обозначим величину функции  $F(\{\sigma\}, k)$  при исходном напряженном состоянии элемента  $F_A$ . Очевидно, что  $F_A < 0$ , поскольку точка  $A$  находится внутри поверхности текучести с уравнением  $F = 0$ . Величину функции  $F$  в точке  $B$  обозначим  $F_B$ .  $F_B > 0$ , если точка  $B$  лежит вне поверхности текучести, и  $F_B < 0$ , если точка  $B$  лежит внутри. Коэффициент перегрузки при этом

$$k_n \approx (F_A - F_B) / F_A \quad (2.110)$$

Зеикевич [50] предлагает уточнение к формуле (2.110), учитывающее нелинейную зависимость функции  $F$  от напряжений.

Элемент с максимальным коэффициентом перегрузки  $k_n$  называют наиболее напряженным элементом (ННЭ). Все задаваемые узловые силы (и перемещения) пробной ступени нагрузки делятся на  $k_n$ , и таким образом определяется расчетная ступень нагрузки, выводящая напряженное состояние ННЭ на поверхность текучести. Повторять решение с расчетной ступенью нагрузки нет необходимости — достаточно просто разделить рассчитанные от пробной ступени приращения напряжений на  $k_n$  и вычислить приращения, соответствующие расчетной ступени нагрузки.

На следующей ступени нагружения для ННЭ, выведенных на поверхность текучести, составляется уже упругопластическая матрица. Если нагрузки возрастают пропорционально, то излагаемая процедура выводит первый элемент в пластику за один шаг. Дальнейшие ступени, каждая из которых выводит в пластику один ННЭ, оказываются довольно мелкими. Отметим, что для каждой ступени нагружения составляется новая МЖС, и при использовании таких методов решения системы уравнений каждый раз требуется ее трудоемкое обращение.

Поскольку упругопластические матрицы жесткости элементов составляются по напряженно-деформированному состоянию перед приложением ступени нагрузки, напряженное состояние элемента после приложения нагрузки не оказывается точно на поверхности текучести, и эта ошибка шаг за шагом набегаем подобно схеме на рис. 2.22, хотя вследствие отмеченной малости расчетных ступеней нагрузки она не достигает большой величины.

Подобный процесс использовал А.К. Бугров [3] применительно к идеальной упругопластической среде с предельной поверхностью Кулона, которая одновременно является единственной поверхностью текучести и пластического потенциала.

Шагово-итерационный процесс с постоянной МЖС является вариантом метода начальных напряжений. МЖС составляется однократно по исходным упругим характеристикам, и в соответствии с используемым методом решения системы уравнений вычисляется обращенная матрица того или иного вида.

Заданная нагрузка прикладывается ступенями заранее заданной



величины. Решение для очередного  $n$ -го шага нагрузки достигается точно по ранее изложенному методу начальных напряжений. К началу шага известны суммарные напряжения в элементах от  $(n-1)$  предыдущих ступеней  $\{\sigma\}_{n-1}$ .

К области прикладывается вектор сил (и заданных перемещений) очередной ступени нагрузки и в итерационном режиме повторяются упругие решения с изменяемым вектором сил.

В очередном  $i$ -м цикле итерации в элементах вычисляются: прирост деформаций  $\{\Delta \epsilon\}_n^i$ , соответствующий им упругий прирост напряжений

$$\{\Delta \sigma^Y\}_n^i = [D] \{\Delta \epsilon\}_n^i; \quad (2.111)$$

упругие напряжения

$$\{\sigma^Y\}_n^i = \{\sigma\}_{n-1} + \{\Delta \sigma^Y\}_n^i, \quad (2.112)$$

"фактический" прирост напряжений, равный разности между упругим приростом и накопленным на предыдущих  $(n-1)$  циклах итерации начальными напряжениями:

$$\{\Delta \sigma^{\Phi}\}_n^i = \{\Delta \sigma^Y\}_n^i - \{\sigma^H\}_n. \quad (2.113)$$

По заданной модели среды вычисляется "теоретический" прирост напряжений  $\Delta \sigma^T$ , соответствующий приросту деформаций  $\{\Delta \epsilon\}_n^i$ . Разность между фактическим и теоретическим приростами рассматривается как прирост начальных напряжений:

$$\{\Delta \sigma^H\}_n^i = \{\Delta \sigma^{\Phi}\}_n^i - \{\Delta \sigma^T\}_n^i. \quad (2.114)$$

По приросту начальных напряжений рассчитывается по формуле (2.109) добавка к вектору начальных сил. Начальные напряжения цикл за циклом в пределах шага нагрузки накапливаются:

$$\{\sigma^H\}_n = \{\sigma^H\}_n + \{\Delta \sigma^H\}_n^i.$$

Если прирост начальных напряжений еще в каждом из элементов не стал достаточно мал, начинается следующая  $(i+1)$ -я итерация. Когда же необходимая точность достигнута, прикладывается следующая  $(n+1)$ -я ступень нагрузки. Теоретический прирост напряжений может быть вычислен следующим образом.

а) Если элемент до приложения  $n$ -й ступени нагрузки уже находился в пластике, то

$$\{\Delta \sigma^T\}_n^i = [D_{уп}] \{\Delta \epsilon\}_n^i. \quad (2.115)$$

Элементы упругопластической матрицы  $[D_{уп}]$ , зависящие от напряжений (или деформаций), можно вычислять по напряжениям  $\{\sigma\}_{n-1}$ .

Если элемент до приложения  $n$ -й ступени был упруг, т.е.  $F(\{\sigma\}_{n-1}, k) < 0$ , а после приложения  $n$ -й ступени выходит в пластику, т.е.  $F(\{\sigma\}_n^i) > 0$ , то в пределах  $n$ -й ступени нагружения

элемент будет деформироваться частично упруго, частично — пластически. Доля деформаций, проходящих элементом в упругом состоянии, составляет  $r$ , а в пластическом  $(1 - r)$ . Несложно убедиться, что  $r$  связано с использованным в разделе коэффициентом перегрузки  $k_n$  соотношением:  $r = 1/k_n$ , и для его вычисления можно воспользоваться теми же способами. Теоретический прирост напряжений будет складываться из упругой и упругопластической долей:

$$\left\{ \Delta \sigma^T \right\}_n^i = r \left\{ \Delta \sigma^y \right\}_n^i + (1 - r) [D_{yn}] \left\{ \Delta \epsilon \right\}_n^i. \quad (2.116)$$

В формулах (2.115) и (2.116) матрицы  $[D_{yn}]$  соответствуют напряжениям до начала упругопластического деформирования, что при крупных ступенях нагрузки будет уводить напряжения в элементе от поверхности текучести и приводить к накоплению ошибки. Для уменьшения ошибки в работе [84] предлагается при вычислении "теоретического" прироста напряжений интервал деформаций  $\left\{ \Delta \epsilon \right\}_n^i$  и  $(1 - r) \left\{ \Delta \epsilon \right\}_n^i$  в формулах (2.115) и (2.116) делить на  $m$  ( $m = 5 \div 10$ ) подынтервалов. Формула (2.115) при этом приобретает вид

$$\left\{ \Delta \sigma^T \right\}_n^i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [D_{yn}]_j \left\{ \Delta \epsilon \right\}_n^i. \quad (2.117)$$

Матрица  $[D_{yn}]$  составляется по уровню напряжений  $(\left\{ \sigma \right\}_{n-1} + \Delta \sigma^T \left\{ \sigma \right\}_n^i)$ , достигнутому к началу  $j$ -го подынтервала.

Эта процедура с использованием метода начальных напряжений применима к средам как упрочняющимся, так и разупрочняющимся с ассоциированным и неассоциированным законом течения. Изложенная процедура условно изображена на рис. 2.25, а.

Реализация некоторых моделей сред с помощью этой процедуры изображена в разделах 5.3 и 5.4.

Смешанная процедура. При анализе напряженно-деформированного состояния в средах с ассоциированным законом течения с целью экономии машинного времени оказывается целесообразным для каждого относительно крупного шага нагрузки составлять

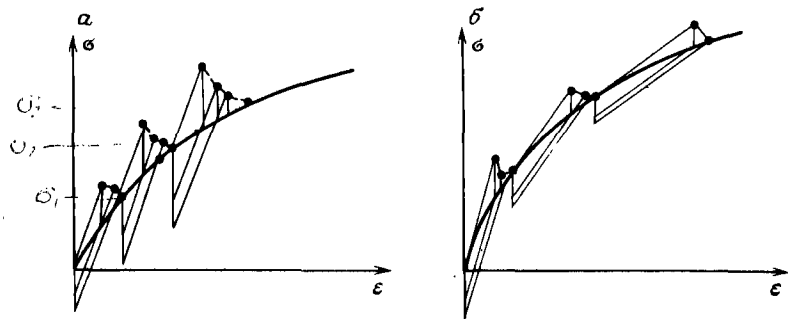


Рис. 2.25. Графическое изображение шаговых процедур с постоянной (а) и переменной (б) МЖС

новую МЖС с использованием симметричных матриц элементов  $[D_{уп}]$ , а в пределах шага вести итерационный процесс методом начальных напряжений в порядке, изложенном в предыдущем разделе (см. рис. 2.25, б).

Метод начальных деформаций. В некоторых моделях сред задаются не приросты напряжений в зависимости от прироста деформаций, а приросты деформаций  $\{\Delta \epsilon\}$  в зависимости от прироста напряжений  $\{\Delta \sigma\}$ , действующий напряжений  $\{\sigma\}$ , интервала времени  $\Delta t$ , прироста температуры  $\Delta \theta$  и других факторов. Этот прирост деформаций может быть введен в расчет путем добавления к общему вектору нагрузок начальных сил, величина которых в элементе определяется формулой

$$\{F\} = \int_S [B]^T [D] \{\epsilon\} dS. \quad (2.118)$$

Для плоского треугольного элемента формула (2.118) может быть представлена в виде

$$F = \Delta [A]^{-1T} [B^1]^T [D] \{\epsilon\}. \quad (2.119)$$

Если прирост деформаций  $\{\Delta \epsilon\}$  не зависит от деформаций, напряжений или их прироста, то достаточно однократного добавления начальных сил к вектору нагрузок, например, при введении приростов температурных деформаций. Если же прирост деформаций  $\{\Delta \epsilon\}$  зависит от напряженно-деформированного состояния (например, деформации ползучести), то необходима дополнительная корректировка вектора нагрузок в итерационном цикле до тех пор, пока фактические приросты деформаций в элементах не станут достаточно близки к теоретическим значениям, определяемым моделью среды. Пример такой процедуры в приложении к упруговязкопластической среде изложен в разделе 6.5.

## 2.7. ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

По мере увеличения нагрузки все большее число элементов выходит в пластику. Если в упругом состоянии плоская область с  $n$  узлами обладает  $2n$  степенями свободы, то выход одного элемента с  $k$  точками интегрирования в пластику уменьшает число степеней свободы на  $k$ , поскольку заданный ассоциированный или неассоциированный закон течения налагает определенные ограничения на перемещение узлов этого элемента: например, сохранение объема или изменение объема в определенной зависимости от сдвига и т.п.

Когда большие группы элементов выходят в пластику, то может оказаться, что число налагаемых связей может превысить число степеней свободы области или подобласти.

В этом случае происходит "замыкание" области или подобласти, и предельное решение не достигается. В работе С. Слоана и М. Ран-

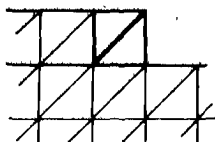


Рис. 2.26. Сеть треугольных элементов

Рис. 2.27. Типы элементов и их применимость для задач предельного состояния

Тип элемента	1	2	3	4	5
$l$	1	2	6	6	32
$k$	1	4	9	4	16
	$l = k$	$l < k$	$l < k$	$l > k$	$l > k$

дольфа [46] указывается условие применимости типа элемента, гарантирующее от замыкания

$$l \geq k, \quad (2.120)$$

где  $l$  — число степеней свободы на один элемент, равное  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p}{m}$ ,  $p$  — число степеней свободы области,  $m$  — число элементов,  $k$  — число точек интегрирования в элементе.

Несложно убедиться, что у простого линейного треугольного элемента  $l = 1$ : действительно (рис. 2.26), при добавлении к большой области двух треугольных элементов добавляется один узел с двумя степенями свободы.

На рис. 2.27 приведены некоторые типы элементов (точками отмечены узлы, крестами — точки интегрирования), параметры  $l$ ,  $k$  и их применимость к предельному анализу (по [46, 50]). Из рис. 2.27 очевидна непригодность по критерию (2.120) изопараметрических элементов типа 2 к предельному анализу. О. Зенкевич [50] отмечает целесообразность использования суперпараметрических элементов типа 4, в которых для описания перемещений внутри элемента используются функции более низкого порядка, чем для описания геометрии. С. Слоан и М. Рандольф [46] описывают 15-узловой треугольный элемент с тремя внутренними узлами (тип 5 на рис. 2.27), приводят для него набор функций формы и демонстрируют его высокую эффективность для решения предельных задач. По нашему опыту, использование линейных треугольных элементов позволяет получать удовлетворительные решения, если размер пластических областей не превосходит 40 — 50 % от всей площади области.

## 2.8. ИМИТАЦИЯ ИЗМЕНЕНИЯ КОНТУРА ОБЛАСТИ

При исследовании геотехнических ситуаций бывает необходимо провести серию решений с последовательно изменяемыми контурами области: например, при послойной выемке котлована (рис. 2.28), поэтапной проходке тоннеля. Вся серия решений может быть проведена по одной сети конечных элементов в автоматическом режиме. Удаление той или иной группы элементов достигается присвоением им модуля упругости, равного нулю, при одновременной фиксации узлов, окруженных только нулевыми элементами. Программное последовательное удаление ряда групп элементов можно осуществить с помощью следующей процедуры, используемой нами в одном из вариантов комплекса программ "Геомеханика".

Элементам нулевого типа присваиваются характеристики  $E = 0$ ,  $\nu = 0$ . Набор таких свойств гарантирует нулевые напряжения в элементах этого типа при любых деформациях. Элементам последовательно вынимаемых слоев присваиваются номера типов, равные номеру этапа выемки, а всем этим типам присваиваются реальные характеристики грунтов.

Организуется цикл по числу этапов выемки. В каждом цикле: а) всем элементам, номер типа которых совпадает с номером цикла, присваивается номер типа 0; б) просматриваются все узлы области, а в каждом цикле по узлам просматриваются все элементы области. Если узел окружен только элементом нулевого типа, то узлу присваиваются признаки фиксации по всем координатным направлениям; в) для всех элементов области, имеющих тип 0 (т.е. извлекаемых в данном этапе выемки), вычисляются узловые силы по напряжениям, предшествующим выемке данного слоя, по формуле (2.49). Из вычисленных узловых сил (с обратным знаком) формируется вектор нагрузки системы.

После выполнения всех перечисленных операций из области будет удалена очередная группа элементов, а по вновь образованному участку контура будут приложены силы, эквивалентные напряжениям, снимаемым с контура при удалении слоя. Силы, вычисляемые и прикладываемые к внутренним узлам удаленной зоны, никакого участия в дальнейших решениях принимать не будут, так как этим узлам присвоены признаки фиксации и при решении системы соответствующие уравнения игнорируются.

## 2.9. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Методы решения больших систем линейных уравнений в линейной алгебре хорошо разработаны. Среди этих методов выделяют: итерационные методы, среди которых наиболее эффективным является

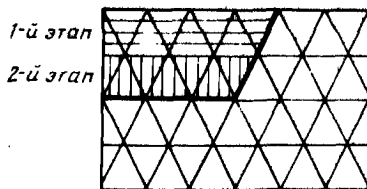


Рис. 2.28. Схема послойного углубления котлована

метод Гаусса — Зейделя, и прямые методы, из которых наиболее часто применяют метод Гаусса и метод Холецкого ("квадратного корня"). Особую группу прямых методов составляют так называемые фронтальные [28]. Для получения однократного решения безусловными преимуществами обладают прямые методы.

Если проводится серия решений с одной матрицей жесткости, но с изменяемым вектором узловых сил, то прямые методы также предпочтительны, так как основную массу вычислений, связанную с вычислением той или иной обращенной матрицы, необходимо произвести только однажды.

Если же проводится серия решений с изменяемой матрицей жесткости, то может оказаться целесообразным первое решение получить прямым методом, а все последующие — итерационным. Наличие в каждом случае приближенного исходного значения вектора перемещений радикально ускоряет сходимость итерационных методов.

Рассмотрим кратко модификацию итерационного метода Гаусса — Зейделя и прямого метода Холецкого, учитывающую заданные перемещения узлов без перестройки МЖС и вектора узловых сил.

Метод Гаусса — Зейделя. Уравнение равновесия, получаемое при умножении  $j$  строки МЖС на вектор перемещений, имеет вид

$$F_j = \sum_{i=1}^r k_{ij} \delta_i = k_{j1} \delta_1 + k_{j2} \delta_2 + \dots + k_{jr} \delta_r, \quad (2.121)$$

где  $F_j$  —  $j$ -й член вектора сил;  $\delta_i$  —  $i$ -й член вектора перемещений;  $k_{ij}$  — член МЖС,  $r$  — число неизвестных.

Представим уравнение (2.121) в виде:

$$F_j = \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij} \delta_i + k_{jj} \delta_j + \sum_{i=j+1}^r k_{ij} \delta_i. \quad (2.122)$$

В методе Гаусса — Зейделя в текущем цикле итерации ( $s+1$ ) используются текущие, найденные в течение этого цикла, приближенные значения перемещений, т.е. перемещения  $\delta_i^{(s+1)}$  при  $i < j$  и  $\delta_i^s$  при  $i > j$  (перемещения с номером, меньшим номера рассматриваемой строки, — уже новые, найденные в  $(s+1)$ -м цикле итерации, а в дальнейших строках — еще старые). Из уравнения (2.122) получим очередное приближение неизвестного перемещения  $\delta_j$ :

$$\delta_j^{(s+1)} = [F_j - \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij} \delta_i^{s+1} - \sum_{i=j+1}^r k_{ij} \delta_i^s] / k_{jj}. \quad (2.123)$$

Метод Гаусса — Зейделя применим, если диагональный член матрицы  $k_{jj}$  по абсолютной величине больше любого другого члена в  $j$ -й строке. Как отмечалось выше, МЖС обладает этим свойством.

Сходимость метода может быть ускорена, если вычислять и далее использовать "откорректированное" значение искомого перемещения  $\delta_j^{s+1}$  по формуле

$$\delta_j^{s+1} = \beta (\delta_j^{s+1} - \delta_j^s) + \delta_j^s, \quad (2.124)$$

где  $\beta$  — коэффициент релаксации, равный  $1,8 \div 1,95$ .

Для учета заданных узловых перемещений необходимо просто пропускать в каждом цикле итерации вычисление нового значения  $\delta_j$ , если по  $j$ -й связи задано перемещение. Разумеется, при этом само заданное перемещение должно находиться на своем месте в векторе перемещений.

Метод Холецкого (метод квадратного корня) применим при симметричных матрицах и особенно эффективен при их ленточном строении; оба признака безусловно присутствуют в любой МЖС. Этот метод использован в программе, приводимой в приложении.

Матрица жесткости представляется в виде произведения верхней треугольной матрицы  $[R]$  на ее транспонированную:

$$[K] = [R]^T [R]. \quad (2.125)$$

Матрицу  $[R]$  будем называть союзной. Ее диагональные элементы находятся по формуле

$$r_{ii} = \text{sign}(b) \sqrt{|b|}, \quad (2.126)$$

где

$$b = k_{ii} - \sum_{\nu = \max(1, (i - \text{III} + 1))}^{i-1} \text{sign}(r_{\nu\nu}) r_{\nu i}^2 c_{\nu}, \quad (2.127)$$

$i$  — номер строки; III — ширина полосы ненулевых членов МЖС;  $c_{\nu} = 1$  при заданной силе по связи  $\nu$ ,  $c_{\nu} = 0$  при заданном перемещении по связи  $\nu$ .

Суммирование в формуле (2.126) не производится, если верхний предел суммирования ( $i - 1$ ) меньше нижнего предела.

Элементы матрицы  $R$  хранятся в поле исходной МЖС, т.е. вычисленный член  $r_{ii}$  хранится на месте использованного и в дальнейшем ненужного члена  $k_{ii}$ .

Вычисления по формуле (2.126) не производятся, если  $c_i = 0$ , т.е. если данная  $i$ -я строка соответствует заданному перемещению. Таким образом, на месте  $r_{ii}$  в новой матрице при  $c_i = 0$  сохраняется элемент исходной МЖС  $k_{ii}$ .

Присутствие множителя  $c_{\nu}$  в формуле (2.127) игнорирует члены строк МЖС, относящихся к заданным перемещениям.

Члены, стоящие не на главной диагонали, вычисляются по формуле

$$r_{ij} = \frac{k_{ij} - \sum_{\nu = \max(1, (j - \text{III} + 1))}^{i-1} \text{sign}(r_{\nu\nu}) r_{\nu i} r_{\nu j} c_{\nu}}{r_{ii}}. \quad (2.128)$$

Член  $r_{ij}$  не вычисляется, если  $c_i = 0$  или  $c_j = 0$ . Таким образом, на месте строк и столбцов с номерами, равными номерам заданных перемещений, остаются строки и столбцы исходной МЖС.

На этом кончается первая, наиболее трудоемкая часть вычислений, связанных с решением системы уравнений. В приводимой в приложении программе эта часть выделена в самостоятельную подпрограмму "SOUS 5".

Дальнейшие вычисления сводятся к решению двух систем уравнений. Сначала вычисляется промежуточный вектор  $\{\omega\}$  из решения системы:

$$[R] \{\omega\} = \{F\}, \quad (2.129)$$

где  $\{F\}$  — вектор узловых сил системы.

И, наконец, находится вектор неизвестных перемещений  $\{\delta\}$  из решения системы уравнений:

$$[R] \{\delta\} = \{\omega\}. \quad (2.130)$$

Компоненты вектора  $\{\omega\}$  определяются по формуле

$$\omega_i = \frac{F_i - \sum_{\nu=\max(1, i-\text{III}+1)}^{i-1} \text{sign}(r_{\nu\nu}) r_{\nu i} c_{\nu}}{r_{ii} - \sum_{\nu=\max(1, i-\text{III}+1)}^{i-1} k_{\nu i} \delta_{\nu} (1 - c_{\nu})} \quad (2.131)$$

где  $n$  — число уравнений в системе.

Вектор  $\omega$  удобно располагать в поле, выделенном для вектора узловых перемещений  $\{\delta\}$ . Вычисление по формуле (2.131) не производится, если  $c_i = 0$ , т.е. заданные перемещения сохраняются в поле вектора узловых перемещений.

Присутствие множителя  $c_{\nu}$  во втором члене числителя в формуле (2.131) позволяет игнорировать элементы, сохранившиеся от исходной МЖС, а члены с множителями  $(1 - c_{\nu})$  используют эти элементы для добавления произведений заданных перемещений на соответствующие элементы МЖС к узловой силе  $F_i$ . Вновь, если верхний предел суммирования меньше нижнего, суммирование не производится, и при  $i = 1$  формула (2.131) автоматически принимает вид:

$$\omega_1 = F_1 / r_{11}.$$

Элементы искомого вектора  $\{\delta\}$  определяются обратным ходом от  $i = n$  ( $n$  — число уравнений) до  $i = 1$  по формуле

$$\delta_i = \frac{\omega_i - \sum_{\nu=i+1}^{i=\min(n, i+\text{III}-1)} r_{i\nu} \delta_{\nu} c_{\nu}}{|r_{i\nu}|} \quad (2.132)$$

Вычисление  $\delta_i$  не производится, если  $c_i < 0$ ; суммирование не производится, если верхний предел суммирования меньше нижнего. В результате вычислений вектор заданных узловых сил сохранился в неприкосновенности. В программе, приводимой в приложении, вторая часть решения системы уравнений (формула (2.129 — 2.132)) выделена в подпрограмму "OMEGA".

Если матрица жесткости не вмещается в оперативную память ЭВМ, ее приходится составлять отдельными зонами и выводить на внешнюю память. Зоны должны перекрывать друг друга на  $\text{III}$  урав-



нений ( $\Delta$  — ширина полосы ненулевых членов матрицы — см. рис. 2.29), поскольку при обработке очередной строки в ходе решения системы нужны коэффициенты  $\Delta$  предыдущих уравнений.

Фронтальный метод решения систем уравнений является вариантом метода исключений Гаусса. Основной идеей фронтального метода является одновременное составление уравнений и исключение переменных. Как только коэффициенты уравнения полностью собраны из матриц жесткости элементов, окружающих узел, так соответствующее неизвестное (перемещение данного узла) может быть исключено. Поэтому полная матрица жесткости системы не формируется, а коэффициенты каждого очередного исключаемого уравнения, модифицированные в процессе исключения предыдущих уравнений, выводятся во внешнюю память. На месте исключенного уравнения начинается формирование очередного уравнения.

В оперативной памяти одновременно хранится только верхняя треугольная часть квадратной матрицы, содержащей уравнения, формируемые в данный момент. Эти уравнения, их соответствующие узлы и степени свободы называют фронтом. Число неизвестных во фронте называется шириной фронта. Максимальный размер решаемой задачи определяется максимальной шириной фронта. Во время процесса "сборка — исключение" элементы рассматриваются по очереди.

Когда вызывается очередной элемент, коэффициенты его матрицы жесткости считываются с диска и либо суммируются к формируемым уравнениям, либо заносятся в пустую строку исключенного уравнения. Если в вызванном элементе какой-то узел встречается последний раз, то относящиеся к нему уравнения можно исключать. После обработки всех элементов и последовательного исключения всех уравнений вплоть до последнего, в котором остается одно неизвестное, на диске оказывается выведенной треугольная система уравнений, из которой обратным ходом находят неизвестные перемещения.

Фронтальный метод позволяет ограничиваться относительно небольшим объемом оперативной памяти; правда, он требует достаточно многочисленных обращений к внешней памяти. Поскольку метод требует тщательной нумерации элементов для обеспечения минимальной ширины фронта, а порядок нумерации узлов безразличен, он оказывается особенно удобен при использовании многоузловых элементов при решении трехмерных задач.

Точность решения системы уравнений. Конечно-элементное решение неизбежно отличается от "точного". Источниками откло-

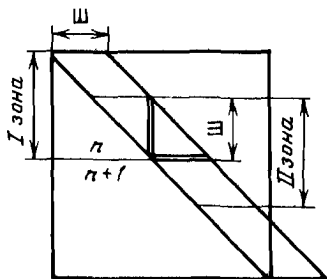


Рис. 2.29. Схема зоны при выводе МЖС во внешние запоминающие устройства

нений являются: *a* — конечно-элементная дискретизация пространства; *b* — аппроксимация функций перемещения в элементах простейшими полиномами; *c* — ошибки округления в ЭВМ.

Величина ошибок группы *a* может быть уменьшена рационализацией сети элементов, ее сгущением в местах высоких градиентов. Ошибки группы *b* определяются типом используемого элемента; величина этих ошибок при неизменном типе элемента снижается сгущением сети элементов. Обе первые группы ошибок в значительной степени зависят от опыта исследователя в конструировании сетей конечных элементов и могут быть заведомо уменьшены до приемлемого уровня в процессе постановки задачи.

Ошибки группы *c* являются сугубо математическими, обусловленными особенностью машинного представления чисел с плавающей запятой.

Для представления действительных чисел в ЭВМ используется двоично-восьмеричная система с ограниченным числом знаков после запятой. Если число, заданное во вводимой информации или получаемое в ходе операций ЭВМ, имеет большее число знаков после запятой, то последние просто отбрасываются: число округляется. ЭВМ серии ЕС позволяют использовать для представления чисел 4 или 8 байтов (32 или 64 двоичных разряда). Для большинства расчетов достаточно использования чисел с одинарной точностью (4 байта), однако при решении больших систем уравнений этой точности зачастую оказывается недостаточно. Особенно это относится к так называемым плохо обусловленным системам уравнений, когда элементы на главной диагонали МЖС резко отличаются друг от друга. Такие плохо обусловленные матрицы жесткости образуются при использовании в одной сети элементов с резко различными модулями упругости при величине коэффициента Пуассона, близкой к 0,5, что приближает к нулю знаменатель  $1 - 2\nu$  в ряде элементов матрицы  $[D]$ .

Практика показывает, что если разница модулей элементов сети составляет 4 порядка и выше, то ошибки округления при одинарной точности искажают решение до неузнаваемости. При числе элементов свыше 300 — 400 или величине коэффициента Пуассона более 0,48 также одинарной точности недостаточно.

Использование двойной точности от начала до конца программы сильно снижает ее эффективность: уменьшается емкость внутренней памяти в 2 раза, снижается скорость вычислений примерно в 4 раза. По опыту, подсказанному нам канд. техн. наук А.М. Шарыгиным, МЖС можно составлять и хранить с одинарной точностью, а с двойной точностью следует выполнять лишь операции, связанные с решением системы уравнений — формулы (2.125) — (2.132). При этом даже элементы матрицы  $[R]$ , будучи вычисленными по формулам (2.126) — (2.128) с двойной точностью, отправляются на хранение в поле матрицы жесткости с одинарной точностью, а перед дальнейшим использованием в формуле (2.131) выбираются из поля в рабочую ячейку с двойной точностью.

Такой прием использован в программе, приводимой в приложе-

нии. Он позволяет решать геотехнические задачи с разницей в модулях на 4 — 5 порядков, а именно такова разница модулей железобетона фундамента и сильносжимаемого грунта. Затраты времени по сравнению с одинарной точностью возрастают на ~ 25 %.

В целом, влияние ошибок округления на точность решений МКЭ — сложный, трудно поддающийся анализу вопрос: существующие по этому вопросу рекомендации имеют в основном общий характер. Полезным при решении систем уравнений является нормализация элементов МЖС относительно диагонального члена; полезной может оказаться подстановка найденных перемещений в систему уравнений и проверка соблюдения равенств получаемых и заданных узловых сил.

## 2.10. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

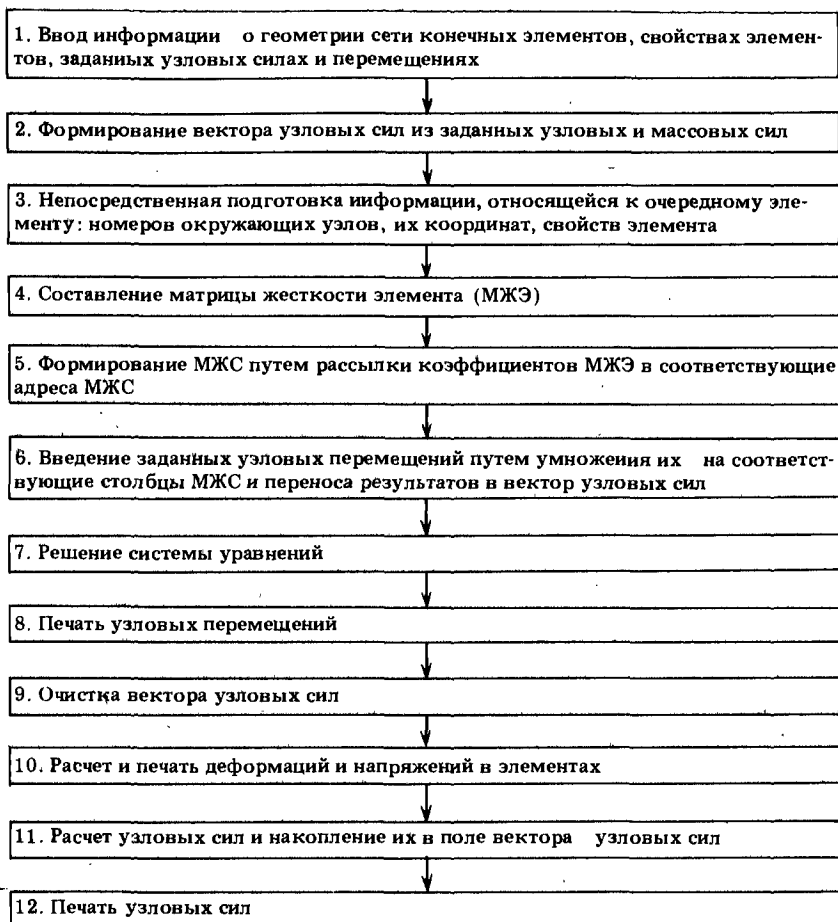
Общая структура программы решения упругой задачи методом конечных элементов дается в последовательности, приведенной в табл. 2.1. Вводимая в ЭВМ информация должна обеспечить на этапе непосредственной подготовки информации (блок 3) возможность определения номеров узлов, их координат, упругих характеристик каждого элемента; на этапе 5 — возможность определения узловых сил, а на этапе 6 — возможность определения заданных перемещений в конкретных узлах. Простейшая, наиболее универсальная, но и наиболее объемная информация включает в себя координаты всех узлов, заданные узловые силы, заданные узловые перемещения; номера трех узлов, окружающих каждый из элементов, номер типа каждого из элементов; модуль упругости, коэффициент Пуассона, объемный вес элементов каждого типа.

При подобном составе вводимой информации третий блок программы — непосредственная подготовка информации — состоит буквально из нескольких операторов, выбирающих номера узлов и свойства очередного обрабатываемого элемента.

При использовании программы для решения однотипных задач возможно применять типовые сети конечных элементов той или иной структуры. При этом удастся сильно сократить объем вводимой информации. Например, если узлы располагаются рядами, то можно задать номера и координаты узлов конкретного ряда лишь на левой и правой границе, а вычисление номеров и координат промежуточных узлов описать в блоке 3 определенными операторами. Однако практика показывает, что затраты усилий на разработку приемов автоматизации конструирования сетей конечных элементов при решении плоских задач обычно не оправдываются. В то же время они, безусловно, необходимы при решении объемных задач или очень больших двумерных задач.

Формирование вектора нагрузки (ВН) начинается с засылки нулей в поле ВН. Затем туда засылаются введенные узловые силы. Далее вычисляется площадь каждого элемента, умножается на объем-

Таблица 2.1



ный вес, делится на три, и результат добавляется к вертикальным компонентам сил, окружающих элемент узлов.

При составлении матрицы жесткости системы (блок 5) возможно сразу задать ее ранг уменьшенным на число наложенных связей. Однако в этом случае, достигая некоторой экономии объема памяти ЭВМ для хранения МЖС, возможно учитывать лишь связи с наложенными нулевыми перемещениями. Более рациональным является составление полной МЖС и игнорирование строк и столбцов, относящихся к фиксированным связям, в процессе решения системы. В этом случае возможно решение задач с заданными ненулевыми перемещениями путем умножения соответствующего столбца коэффициентов

МЖС на заданное перемещение и переноса результата в вектор узловых сил (блок 6).

Блок 9 предусматривает очистку поля вектора узловых сил, который уже в прежнем виде не нужен, для накопления там узловых сил, рассчитанных по найденным напряжениям.

Ниже приводится простейший алгоритм получения упругого решения с использованием треугольных конечных элементов, соответствующий математическому аппаратуру раздела 2.2. Алгоритм записан на языке Фортран. Комментарии, предшествующие операторам, в приводимом алгоритме довольно лаконичны, и для полного понимания операций необходимо их выполнение вручную, задавшись, например, системой из двух элементов.

В приводимом алгоритме решение системы уравнений производится итерационным методом Гаусса — Зейделя. Алгоритм предназначен только для учебных целей, поэтому в нем опущены описания массивов, форматы ввода-вывода; имеются некоторые отклонения от синтаксиса языка Фортран в целях облегчения усвоения.

C: БЛОК 1, ВВОД ИНФОРМАЦИИ

C: ВВОД ЧИСЛА УЗЛОВ  $N$ , ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ  $M$ , ЧИСЛА ТИПОВ ЭЛЕМЕНТОВ  $L$

1 READ ( $N, M, L$ )

C: ВВОД КООРДИНАТ УЗЛОВ  $XV(I)$ , ПРИЗНАКОВ ЗАДАННЫХ УСЛОВИЙ  $KP(I)$ , ( $KP(I) = 1$  — ЗАДАНА СИЛА,  $KP(I) = 2$  — ЗАДАНО ПЕРЕМЕЩЕНИЕ), ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРОВ  $FD(I)$  ( $FD(I)$  РАВНО ЗАДАННОЙ СИЛЕ ПРИ  $KP(I) = 1$  И ЗАДАННОМУ ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРИ  $KP(I) = 0$ ).

2 READ ( $XV(I), KP(I), FD(I), I = 1, 2 * N$ )

C: ВВОД ИНФОРМАЦИИ ОБ ЭЛЕМЕНТАХ ( $NN(I, 1)$ ), ( $NN(I, 2)$ ), ( $NN(I, 3)$ ) — ТРИ НОМЕРА УЗЛОВ, ОКРУЖАЮЩИЙ  $I$ -Й ЭЛЕМЕНТ;  $NL(I)$  — НОМЕР ТИПА ЭЛЕМЕНТА)

3 READ ( $NN(I, 1), NN(I, 2), NN(I, 3), NL(I), I = 1, M$ )

C: ВВОД ХАРАКТЕРИСТИК ТИПОВ ЭЛЕМЕНТОВ ( $EA(I)$ ), ( $VA(I)$ ), ( $GA(I)$ ) — МОДУЛЬ УПРУГОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА, ОБЪЕМНЫЙ ВЕС ЭЛЕМЕНТА  $I$ -ГО ТИПА)

4 READ ( $EA(I), VA(I), GA(I), I = 1, L$ )

C: БЛОК 2, ФОРМИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ УЗЛОВЫХ СИЛ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

C: ЗАСЫЛКА НУЛЕЙ В ПОЛЯ ВЕКТОРОВ УЗЛОВЫХ СИЛ  $F$  И УЗЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  $D$

5 DO 7 I = 1, 2 \* N

6 F(I) = 0

7 D(I) = 0

C: РАССЫЛКА ЗАДАННЫХ УЗЛОВЫХ СИЛ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПОЛЯ  $VF$  И  $VD$

8 DO 13 I = 1, 2 \* N

9 IF ( $KP(I) \cdot EQ \cdot 0$ ) GO TO 12

10  $F(I) = FD(I)$

11 GO TO 13

12  $D(I) = FD(I)$

13 CONTINUE

C: ОПРЕДЕЛЕНИЕ В АДРЕСЕ NW ШИРИНЫ ПОЛОСЫ МАТРИЦЫ  
ЖЕСТКОСТИ

14  $NB = 0$

15 DO 29 I = 1, M

16 MAX = 0

17 MIN = 2000

18 DO 25 J = 1, 3

19 IF (NN(I, J).GT.MAX) GO TO 22

20 IF (NN(I, J).LT.MIN) GO TO 24

21 GO TO 25

22 MAX = NN(I, J)

23 GO TO 25

24 MIN = NN(I, J)

25 CONTINUE

26  $NWA = 2 * (MAX - MIN + 1)$

27 IF (NWA.LT.NB) GO TO 29

28 NB = NWA

29 CONTINUE

C: ЗАСЫЛКА НУЛЕЙ В ПОЛЕ МЖС

30 DO 31 I = 1, 2 \* NW \* N

31 S(I) = 0

C: ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ И РАС-  
СЫЛКА ИХ В МЖС

32 DO 67 I = 1, M

C: ЗАСЫЛКА НУЛЕЙ В ПОЛЯ ОПЕРАЦИЙ С МАТРИЦАМИ

33 DO 36 J = 1, 6

34 DO 36 K = 1, 6

35 RR(J, K) = 0

36 RL(J, K) = 0

C: ВЫЗОВ ПОДПРОГРАММЫ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ПОДГОТОВ-  
КИ ИНФОРМАЦИИ ОБ ЭЛЕМЕНТЕ (БЛОК 3)

37 CALL INFORM(I, ...)

C: БЛОК 4, НАЧАЛО ФОРМИРОВАНИЯ МЖЭ

C: ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ  $2\Delta[A]^{-1}$  В ПОЛЕ RR

38 DO 47 J = 0, 1

39  $RR(1 + 3 * J, 1 + 3 * J) = X(2) * Y(3) - X(3) * Y(2)$

40  $RR(1 + 3 * J, 2 + 3 * J) = X(3) * Y(1) - X(1) * Y(3)$

41  $RR(1 + 3 * J, 3 + 3 * J) = X(1) * Y(2) - X(2) * Y(1)$

42  $RR(2 + 3 * J, 1) = Y(2) - Y(3)$

43  $RR(2 + 3 * J, 2) = Y(3) - Y(1)$

$$44 \quad RR(2 + 3 * J, 3) = Y(1) - Y(2)$$

$$45 \quad RR(3 + 3 * J, 1) = X(3) - X(2)$$

$$46 \quad RR(3 + 3 * J, 2) = X(1) - X(3)$$

$$47 \quad RR(3 + 3 * J, 3) = X(2) - X(1)$$

C: ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ  $\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} [B']^T [D] [B']$  В ПОЛЕ  
RL

$$48 \quad RL(2, 2) = 1 - V$$

$$49 \quad RL(6, 6) = 1 - V$$

$$50 \quad RL(2, 6) = V$$

$$51 \quad RL(6, 2) = V$$

$$52 \quad RL(3, 3) = (1 - 2 * V) / 2$$

$$53 \quad RL(3, 5) = (1 - 2 * V) / 2$$

$$54 \quad RL(5, 3) = (1 - 2 * V) / 2$$

$$55 \quad RL(5, 5) = (1 - 2 * V) / 2$$

C: ОБРАЩЕНИЕ К ПРОГРАММЕ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

56 CALL MATMU (RR, RL, RES, ...)

C: ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ  $2\Delta [A]^{-1T}$  В ПОЛЕ RL ПУТЕМ  
ТРАНСПОНИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ ИЗ ПОЛЯ RR

$$57 \quad DO \ 59 \ J = 1, 6$$

$$58 \quad DO \ 59 \ K = 1, 6$$

$$59 \quad RL(K, J) = RR(J, K)$$

C: ПЕРЕСЫЛКА МАТРИЦЫ  $2\Delta \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} [B']^T [D] [B] [A]^{-1}$

ИЗ ПОЛЯ RES В ПОЛЕ RR

$$60 \quad DO \ 62 \ J = 1, 6$$

$$61 \quad DO \ 62 \ K = 1, 6$$

$$62 \quad RR[J, K] = RES[J, K]$$

C: ОБРАЩЕНИЕ К ПОДПРОГРАММЕ

63 CALL MATMU (RR, RL, RES, ...)

C: РАСЧЕТ ПЛОЩАДИ ЭЛЕМЕНТА

$$64 \quad A = ABS((X(1) - X(2)) * (Y(1) - Y(3)) - (X(1) - X(3)) * (Y(1) - Y(2))) / 2$$

C: ЗАВЕРШЕНИЕ СОСТАВЛЕНИЯ МЖЭ В ПОЛЕ RES

$$65 \quad DO \ 67 \ J = 1, 6$$

$$66 \quad DO \ 67 \ K = 1, 6$$

$$67 \quad RES(J, K) = RES(J, K) * E / (4 * A * (1 + V) * (1 - 2 * V))$$

C: БЛОК 5, ДОБАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МЖЭ К ЭЛЕМЕНТАМ  
МЖС, ФОРМИРУЕМОЙ ПОСТРОЧНО В ПОЛЕ S

$$68 \quad DO \ 74 \ J = 1, 6$$

$$69 \quad DO \ 74 \ K = 1, 6$$

$$70 \quad IF (NW(K) .LT. NW(J)) GO TO 73$$

$$71 \quad L = (NW(J) - 1) * NB + NW(K) - NW(J) + 1$$

$$72 \quad GO \ TO \ 74$$

73  $L = (NW(K) - 1) * NB + NW(J) - NW(K) + 1$   
 74  $S(L) = S(L) + RES(J, K)$   
 C: ВЫЗОВ ПОДПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ,  
 КОТОРАЯ РАЗМЕЩАЕТ НАЙДЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УЗ-  
 ЛОВ В ПОЛЕ D  
 75 CALL SOLVE (S, D, ...)  
 C: БЛОК 8, ПЕЧАТЬ НОМЕРА УЗЛОВ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
 76 WRITE (I, D(2\*I-1), D(2\*I), I = 1, N)  
 C: БЛОК 9, ОЧИСТКА ВЕКТОРА УЗЛОВЫХ СИЛ  
 77 DO 78 I = 1, 2 \* N  
 78 F(I) = 0  
 C: РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  В АДРЕСАХ EX, EY, EXY  
 И НАПРЯЖЕНИЙ  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  В АДРЕСАХ SX, SY, SXY И  
 ИХ ПЕЧАТЬ  
 79 DO 106 I = 1, M  
 80 CALL INFORM (I, ...)  
 C: ВЫБОРКА УЗЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
 81 DO 84 J = 1, 3  
 82 DO 84 K = 1, 2  
 83  $L = NW(2 * I + K - 2)$   
 84  $U(K, J) = D(L)$   
 85  $A = E / ((1 + V) * (1 - 2 * V))$   
 86  $B = (X(2) - X(1)) * (Y(3) - Y(1)) - (X(1) - X(3)) * (Y(1) - Y(2))$   
 87  $EX = (U(1, 1) * (Y(2) - Y(3)) + U(1, 2) * (Y(3) - Y(1)) + (U(1, 3) * (Y(1) - Y(2)))) / B$   
 88  $EY = (U(2, 1) * (X(3) - X(2)) + U(2, 2) * (X(1) - X(3)) + U(2, 3) * (X(2) - X(1))) / B$   
 89  $EXY = (U(1, 1) * (X(3) - X(2)) + U(1, 2) * (X(1) - X(3)) + U(1, 3) * (X(2) - X(1)) + U(2, 1) * (Y(2) - Y(3)) + U(2, 2) * (Y(3) - Y(1)) + U(2, 3) * (Y(1) - Y(2))) / B$   
 90  $SX = A * ((1 - V) * EX + V * EY)$   
 91  $SY = A * (V * EX + (1 - V) * EY)$   
 92  $SXY = A * (1 - 2 * V) * EXY / 2$   
 93 WRITE (I, EX, EY, EXY, SX, SY, SXY)  
 C: БЛОК 11, РАСЧЕТ УЗЛОВЫХ СИЛ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ В  
 ЭЛЕМЕНТАХ  
 94  $K = NW(1)$   
 95  $F(K) = (SX * (Y(2) - Y(3)) + SXY * (X(3) - X(2))) / 2$   
 96  $K = NW(3)$   
 97  $F(K) = (SX * (Y(3) - Y(1)) + SXY * (X(1) - X(3))) / 2$   
 98  $K = NW(5)$   
 99  $F(K) = (SX * (Y(1) - Y(2)) + SXY * (X(2) - X(1))) / 2$   
 100  $K = NW(2)$   
 101  $F(K) = (SXY * (Y(2) - Y(3)) + SY * (X(3) - X(2))) / 2$



102  $K = NW (4)$   
 103  $F(K) = (SXY * (Y(3) - Y(1)) + SY * (X(1) - X(3))) / 2$   
 104  $K = NW (6)$   
 105  $F(K) = (SXY * (Y(1) - Y(2)) + SY * (X(2) - X(1))) / 2$   
 106 CONTINUE  
 C: БЛОК 12, ПЕЧАТЬ НОМЕРОВ УЗЛОВ И УЗЛОВЫХ СИЛ  
 107 WRITE (I, VF (2 \* I - 1), VF (2 \* I), I = 1, N  
 108 STOP  
 109 END  
 C: КОНЕЦ ОСНОВНОЙ ПРОГРАММЫ  
 C: ДАЛЕЕ СЛЕДУЮТ ПОДПРОГРАММЫ  
 C: ПОДПРОГРАММА НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ПОДГОТОВКИ ИН-  
 ФОРМАЦИИ ОБ I-М ЭЛЕМЕНТЕ  
 110 SUBROUTINE INFORM (I, ...)  
 C: НУМЕРАЦИЯ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ЭЛЕМЕНТА  
 111 DO 113 J = 1, 3  
 112  $NW (2 * J) = 2 * NN (I, J)$   
 113  $NW (2 * J - 1) = NW (2 * j) - 1$   
 C: ВЫБОР МОДУЛЯ УПРУГОСТИ E, КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА V, УДЕЛЬНОГО ВЕСА G  
 114  $J = NK (I)$   
 115  $E = EA (J)$   
 116  $V = VA (J)$   
 117  $G = GA (J)$   
 C: ВЫБОР КООРДИНАТ  
 118 DO 121 J = 1, 3  
 119  $K = NW (2 * J)$   
 120  $Y(J) = XY (K)$   
 121  $X(J) = XY (K - 1)$   
 122 RETURN  
 123 END  
 C: ПОДПРОГРАММА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ РАНГА 6x6, ПРАВЫЙ СОМНОЖИТЕЛЬ ЗАПИСАН ПОСТРОЧНО В ПОЛЕ RR, ЛЕВЫЙ — В ПОЛЕ RL, РЕЗУЛЬТАТ ЗАНОСИТСЯ В ПОЛЕ RES, СОМНОЖИТЕЛИ СОХРАНЯЮТСЯ  
 124 SUBROUTINE MATMU (RR, RL, RLS, ...)  
 125 DO 129 J = 1, 6  
 126 DO 129 K = 1, 6  
 127  $RES (J, K) = 0$   
 128 DO 129 L = 1, 6  
 129  $RES (J, K) = RES (J, K) + RL (J, L) * RR (L, K)$   
 130 RETURN  
 131 END  
 C: БЛОКИ 6, 7, РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ

```

132 SUBROUTINE SOLVE (S, D, F, K, P, ...)
133 EP = 0
134 ER = 0
135 DO 152 I = 1, 2 * N
136 IF (KP(I). EQ. 1) GO TO 152
137 A = 0
138 DO 144 J = 2, NB
139 IF ((I - J). LT. 0) GO TO 142
140 A = A + S (NB * (I - J) + J * D(I - J + 1))
141 GO TO 143
142 IF ((I + J - 1). GT. 2 * NB) GO TO 144
143 A = A + S (NB * (I - 1) + J) * D(I + J - 1)
144 CONTINUE
145 B = (F(I) - A) / S (NB * (I - 1) + 1)
146 A = B - D(I)
147 D(I) = D(I) + 1.85 * A
148 IF (ABS(A/D(I)). LT. 0.01) GO TO 150
149 EP = 1
150 IF (ABS(A). LT. 0.000001) GO TO 152
151 ER = 1
152 CONTINUE
153 IF (EP * ER. NE. 0) GO TO 133
RETURN
END

```

### 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ

Связь между напряжениями и деформациями в грунтах обычно изучается на стабилометрах, реже — на специальных приборах, обеспечивающих условия плоской деформации, независимое задание трех главных напряжений или поворот главных напряжений. Для описания напряженно-деформированного состояния образцов при различных видах механических испытаний удобно использовать набор инвариантных параметров  $p$ ,  $q$ ,  $v$  и  $\gamma$ , вкладывая в них несколько различный смысл в зависимости от вида испытаний. В литературе чаще всего используются три набора этих параметров:

$$\begin{aligned}
 1. \quad p &= \frac{1}{3} (\sigma_a + 2\sigma_r), \quad q = \sigma_a - \sigma_r, \quad v = \epsilon_a + 2\epsilon_r, \\
 \gamma &= \frac{2}{3} (\epsilon_a - \epsilon_r),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\sigma_a$ ,  $\sigma_r$ ,  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_r$  — осевые и радиальные напряжения и деформации при стабилометрических испытаниях цилиндрического образца

[40]. Очевидно, что в этом случае  $p = \sigma_0$ ,  $q = 2\tau_{\max}$ ,  $v = \epsilon_Y$ ,  $\gamma = \gamma_{\max}$ .

$$2. p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), v = \epsilon_1 + \epsilon_3, \\ \gamma = \epsilon_1 - \epsilon_3, \quad (3.2)$$

где  $\sigma_1, \sigma_3, \epsilon_1, \epsilon_3$  — главные напряжения и деформации при нагружении в условиях плоской деформации [48].

$$3. p = \sigma_0, q = \tau_i = \sqrt{J_2}, v = \epsilon_0, \gamma = \gamma_i = 2\sqrt{J_2/\epsilon}. \quad (3.3)$$

Этот набор параметров используется при анализе в трехмерном пространстве.

Как видно из приводимых формул,  $p$  является средним давлением или его аналогом в случае плоской деформации;  $q$  — мерой касательных напряжений,  $v$  — мерой объемных деформаций;  $\gamma$  — мерой деформации сдвига. Каждый из трех наборов удовлетворяет требованию, чтобы работа напряжений  $p$  и  $q$  на приращениях деформаций  $\dot{v}$  и  $\dot{\gamma}$  была равна работе главных напряжений на приращениях главных деформаций  $\dot{\epsilon}$  [40]:

$$p\dot{v} + q\dot{\gamma} = \sigma_1\dot{\epsilon}_1 + \sigma_2\dot{\epsilon}_2 + \sigma_3\dot{\epsilon}_3. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) удовлетворяется для первого и второго наборов всегда, в чем легко убедиться, подставив в него соответствующие значения  $p, q, \dot{v}$  и  $\dot{\gamma}$ . Для третьего набора равенство (3.4) удовлетворяется при условии пропорциональности девиатора прироста деформаций и девиатора напряжений, что в должной степени имеет место при пластическом деформировании.

В качестве напряжений введе рассматриваются напряжения в скелете грунта (эффективные). Там, где рассматриваются полные напряжения, это специально подчеркивается.

Изотропной компрессией будем называть дренированное нагружение образца всесторонним равномерным давлением ( $q = 0$ ); чистым сдвигом будем называть такое нагружение, когда величина  $p$  в процессе нагружения остается неизменной.

Данный раздел является вспомогательным в книге. Поэтому рассматриваются лишь основные свойства основных разновидностей грунтов и горных пород с известными упрощениями, позволяющими реализовать эти свойства в численных моделях.

### 3.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕСКА

Сыпучий сухой бесвязный кварцевый песок является простейшей грунтовой средой. Гранулометрический состав песков, а также степень окатанности зерен оказывают определенное влияние на его механические свойства, однако при постоянстве этих характеристик единственным определяющим параметром является плотность.

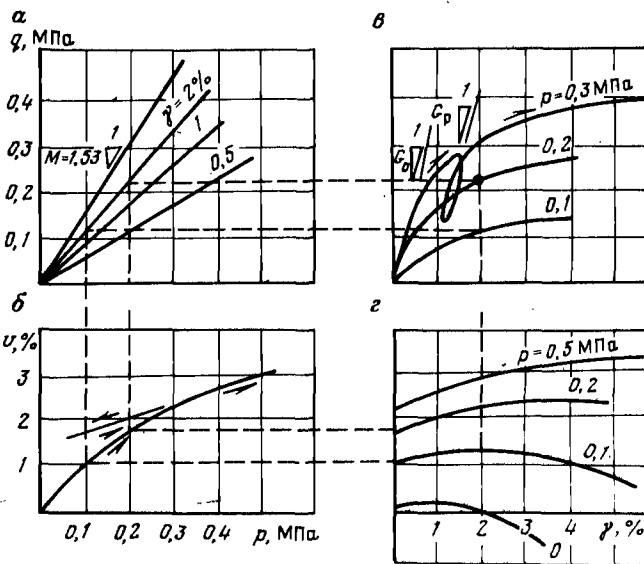


Рис. 3.1. Комплекс графиков, характеризующих свойства рыхлого песка

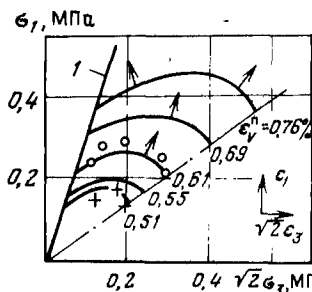


Рис. 3.2. Изохоры и векторы пластических деформаций

На рис. 3.1 на основе результатов стабилометрических испытаний, приведенных в работе Т. Кокушо [32], и с учетом близких к ним данных [31] и [34] приведены свойства рыхлого песка с исходным коэффициентом пористости  $e = 0,73$ .

График на рис. 3.1, б представляет собой зависимость объемных деформаций от гидростатического давления при изотропной компрессии. Разгрузка и повторное нагружение характеризуются иными графиками, чем первичная компрессия. В образце при первичном гидростатическом сжатии накапливаются необратимые (пластические) объемные деформации уплотнения. Правда, величина как упругих, так и пластических деформаций даже рыхлого песка относительно невелика, коэффициент пористости изменяется при сжатии на сотые доли, и при статическом сжатии рыхлый песок остается рыхлым.

Р. Косла и Т. Ву [31] проводили исследование песка средней плотности в стабилометре. На рис. 3.2 изображены предельная поверхность 1, семейство поверхностей равных объемных деформа-

ций (изохор) и векторы пластических деформаций. Авторы [31] отмечают нормальность векторов деформаций к изохорам, предлагают рассматривать изохоры как ассоциированные поверхности текучести и пластического потенциала (см. раздел 6.2). По этим данным, так же как и по рис. 3.1, 2, нагружение песка напряжениями чистого сдвига при постоянном  $p$  сопровождалось увеличением плотности.

Касательные модули объемного сжатия рыхлого песка при компрессии  $K_k$  и декомпрессии  $K_d$  в интервале давлений 0,05 — 0,4 МПа дотаточно точно аппроксимируются выражениями  $K_k = 94,5p$ ;  $K_d = 283,5p$ .

Если обжатый гидростатическим давлением образец подвергается нагружению чистым сдвигом, т.е. каждому приращению осевых давлений  $\Delta\sigma$  соответствует снижение радиальных давлений  $\frac{1}{2}\Delta\sigma$ , то траектория изменений напряженного состояния в координатах  $p$  и  $q$  (рис. 3.1, а) будет параллельна оси  $q$  и исходить из точки на оси  $p$ , соответствующей давлению предшествующей изотропной компрессии. Зависимость деформаций сдвига  $\gamma$  от величины  $q$  приведена на рис. 3.1, в. При разгрузке касательных напряжений модуль сдвига  $G_p$  приблизительно равен начальному значению модуля сдвига при нагружении  $G_0$ .

Предельное значение девиаторного напряжения связано с величиной  $p$  соотношением

$$q = Mp. \quad (3.5)$$

Предельное значение осевого напряжения в зависимости от радиального при стабилометрических испытаниях бесвязного песка определяется соотношением

$$\sigma_a = \sigma_r \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (3.6)$$

Подставив это значение  $\sigma_a$  в формулы (3.1), а далее — полученные выражения для  $p$  и  $q$  в уравнение (3.5), найдем соотношение между  $M$  и  $\sin \varphi$ :

$$M = 6 \sin \varphi / (3 - \sin \varphi). \quad (3.7)$$

Приведенное на рис. 3.1, а значение  $M = 1,53$  соответствует углу  $\varphi = 37^\circ 40'$ . Это высокое значение  $\varphi$  для рыхлого песка. Следует подчеркнуть, что при стабилометрических испытаниях углы внутреннего трения всегда получаются существенно выше, чем при прямом сдвиге. На рис. 3.1, а ниже предельной линии  $q = Mp$  проведено несколько лучей, каждый из которых характеризуется уравнением:

$$\eta = q/p = \text{const}. \quad (3.8)$$

По данным [32] каждому значению  $\eta$ , независимо от абсолютных значений  $p$  и  $q$ , соответствует одинаковая деформация сдвига  $\gamma$ . При этом на графиках рис. 3.1, а при различной величине  $p$  одинако-

вым величинам  $\gamma$  (например, 2%), соответствуют и одинаковые значения  $\eta$ .

Многие авторы [32, 34, 41] отмечают, что если деформирование песка идет при непрерывном возрастании деформации  $v$  и  $\gamma$  (без этапов разгрузки), то конкретным величинам  $v$  и  $\gamma$  однозначно соответствует пара конкретных значений напряжений  $p$  и  $q$ . Если линии равных сдвигов в координатах  $p, q$  — прямые линии с уравнениями вида (3.8), то графики на рис. 3.1, в отличаются друг от друга лишь вертикальным масштабом.

Если по оси ординат на рис. 3.1, в откладывать не  $q$ , а  $\eta$ , то графики сольются в одну линию. Сопротивление грунта сдвигу при данных значениях  $p$  и  $\gamma$  можно назвать "мобилизованным сопротивлением сдвигу"  $\eta_{\text{моб}}$ , которое через формулу (3.7) может быть охарактеризовано мобилизованным углом внутреннего трения —  $\varphi_{\text{моб}}$ . Очевидно, что  $\eta_{\text{моб}} \leq M, \varphi_{\text{моб}} \leq \varphi$ .

Т. Кожушо [32] приводит линии равных сдвигов не в виде прямых лучей, а с небольшой кривизной выпуклостью кверху. При этом точки на графиках (см. рис. 3.1, в) сместились бы вправо тем больше, чем выше точка, т.е. одинаковому сдвигу  $\gamma$  при больших  $p$  будут соответствовать меньшие  $\eta$ .

В процессе сдвигового деформирования при постоянной величине среднего давления  $p$  песок получает объемные деформации, развитие которых определяется графиками на рис. 3.1, г. Первоначально образцы в процессе сдвига даже при очень низких значениях среднего давления  $p$  получают дополнительное уплотнение, однако при дальнейшем сдвиге при малых  $p$  начинается разрыхление.

Процесс уплотнения при больших  $p$  может длиться и до очень больших деформаций сдвига, выходящих за пределы возможностей стабилметра. Многие авторы не без оснований полагают, что плотность песка в процессе сдвига стремится путем разрыхления или уплотнения к некоторому критическому значению, соответствующему среднему давлению  $p$ .

На рис. 3.3 по тем же источникам изображен аналогичный комплекс графиков для плотного песка ( $e = 0,52$ ). Угол внутреннего трения оказался равным  $46^\circ 30'$ , объемная сжимаемость — примерно в 2 раза ниже, чем у рыхлого песка.

Касательные модули компрессии и декомпрессии на графиках рис. 3.3, б в интервале давлений 0,05 — 0,5 МПа хорошо аппроксимируются выражениями:  $K_{\text{к}} = 153,5p$ ;  $K_{\text{д}} = 505p$ .

Самым характерным свойством плотного песка является разрыхляемость (рис. 3.3, г) уже при небольшом сдвиге и даже при значительных величинах  $p$ . Механизм разрыхления первоначально плотной упаковки зерен уже давно нашел объяснение. Л. Бьеррум [4] связывает изменение угла внутреннего трения с проявлением разрыхления и называет эту связь  $\alpha$ -эффектом (рис. 3.4). Если плотность грунта ниже критической и в ходе сдвига она возрастает, то выделяющаяся энергия  $\delta\sigma$  компенсирует часть энергетических затрат на сдвиг, проявляясь в снижении сопротивления сдвигу и угла внутреннего

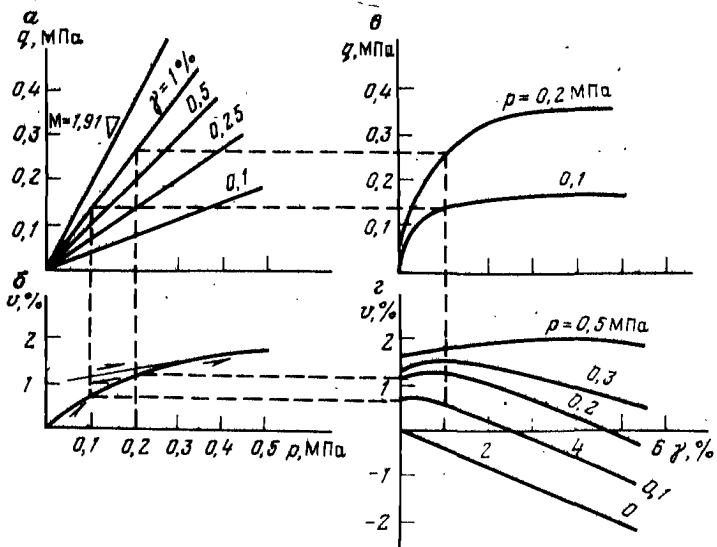


Рис. 3.3. Комплекс графиков, характеризующих свойства плотного песка

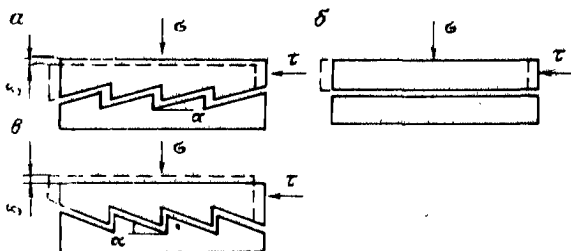


Рис. 3.4. Схема а — эффекта Бьеррума:

а — рыхлый грунт; б — грунт средней плотности; в — плотный грунт

трения по сравнению с критической плотностью.

В очень рыхлом мелкозернистом песке Бьеррум наблюдал угол внутреннего трения  $12^\circ$ .

Напротив, в переуплотненном грунте разрыхление  $\delta$  совершает "отрицательную" работу  $\delta\sigma$ , которая суммируется с собственно работой сдвига и проявляется в виде возрастания угла внутреннего трения. Ж. Косте и Г. Сангlera [7] указывают диапазон изменения угла внутреннего трения песков  $29 - 48^\circ$  в зависимости от плотности. Они рекомендуют формулу Како для определения угла внутреннего трения в зависимости от коэффициента пористости:  $\operatorname{tg}\varphi = k/c$ . Коэффициент пористости  $k = 0,55$  соответствует пескам однородного гранулометрического состава с шероховатыми зернами,  $c$  — коэффициент пористости.

Р. Лэйд и Дж. Данкан [34] утверждают, что если процесс нагружения песка в стабилметре идет с непрерывным возрастанием  $\eta$ , то величина сдвига  $\gamma$  однозначно зависит от напряжений независимо от пути нагружения. Если добавить еще условие непрерывного возрастания  $\rho$ , то можно говорить об однозначной зависимости деформаций песка от приложенных напряжений при  $\eta < M$ .

М.В. Мальшев и др. [36] проводили испытания песка в условиях плоской деформации ( $\epsilon_2 = 0$ ). Первоначально образцы подвергались обжатю "гидростатическим" давлением  $\sigma_1 = \sigma_3$  (точка *A* на рис. 3.5). Дальнейшее нагружение до вывода в предельное состояние осуществлялось тремя путями: путем увеличения  $\sigma_1$  при  $\sigma_3 = \text{const}$  (I на рис. 3.5), путем увеличения  $\sigma_1$  и снижения в той же степени  $\sigma_3$  (чистый сдвиг — II на рис. 3.5), путем снижения  $\sigma_3$  (III на рис. 3.5). Угол внутреннего трения в их опытах оказался зависимым от пути нагружения: он был приблизительно одинаков при I и III путях нагружения  $42^\circ$ ,  $39^\circ$ ,  $37^\circ$  соответственно у песков с индексом плотности  $I = 0,8$ ;  $0,55$  и  $0,23$  и заметно ниже при II пути нагружения ( $37^\circ$ ,  $34,5^\circ$ ,  $32,5^\circ$  у песков той же плотности).

Наблюдавшуюся зависимость угла внутреннего трения от пути нагружения едва ли следует признать закономерным свойством песка. Ее можно отчасти объяснить тем, что при III пути нагружения образец к моменту выхода в предельное состояние переуплотнен предварительным более высоким гидростатическим сжатием, а при I пути нагружения, по опыту автора, предельные нагрузки вообще фиксируются с трудом, так как предельная нагрузка оказывается большой, образец к концу испытания накапливает большие деформации, форма его существенно изменяется и на экспериментальных графиках момент выхода в предельное состояние четко не виден, а создается впечатление неограниченного упрочнения образца.

Авторы работы [36] отмечают, что при малых касательных напряжениях, когда поведение песка близко к чисто упругому, коэффициент поперечного расширения близок к нулю.

К. Роско [41] проводил испытания песка в специальных сдвиговых приборах с широкой зоной сдвига (приборы скашивания), в которых возможно изменять ориентировку главных напряжений. Деформации образца измерялись по заложенным внутрь свинцовым маркам с помощью рентгеновских лучей. По результатам испытаний установлено, что в полном соответствии с принципами теории пластичности инкременты (приращения) пластических деформаций при возрастании касательных напряжений соосны с действующими главными напряжениями, а инкременты деформаций при разгрузке соосны с инкрементами напряжений.

Соосность инкрементов главных деформаций с действующими главными напряжениями позволяет изображать их в одних осях.

Р. Лэйд и Х. Мусанте [35] проводили испытания песка в приборе, позволяющем варьировать величиной  $\sigma_2$  в пределах от  $\sigma_1$  до  $\sigma_3$ . На рис. 3.6 изображены продольное и поперечное сечения предельных поверхностей рыхлого (1) и плотного (2) песка по данным их экспе-



Рис. 3.5. График различных видов нагрузений:  
 I — сжатие; II — чистый сдвиг; III — растяжение

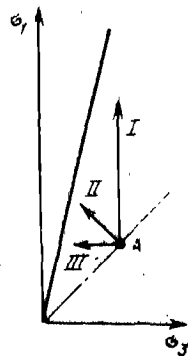
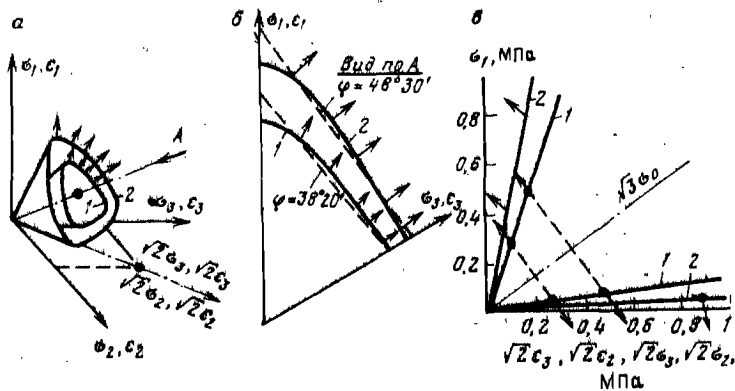


Рис. 3.6. Графическое изображение предельной поверхности рыхлого (1) и плотного (2) песка



риментов, а также направления векторов пластических деформаций в предельном состоянии. На рис. 3.6, б штриховыми линиями также приведены сечения пирамиды Кулона при  $\varphi 48^\circ 30'$  и  $\varphi 38^\circ 20'$ . Близость экспериментальных предельных поверхностей к поверхностям Кулона с такими же  $\varphi$  позволяет присвоить и пескам эти значения углов внутреннего трения.

Рассмотрение векторов пластических деформаций на рис. 3.6, б позволяет отметить, что большинство из них приблизительно нормальны к линиям пересечения октаэдральной плоскости с соответствующими пирамидами Кулона. Более или менее существенные отклонения от этого наблюдаются у рыхлого песка вблизи оси  $\sigma_1$  (т.е. при  $\sigma_2$ , близком к  $\sigma_3$ ). Очевидно, что в рыхлом песке в отличие от плотного пластическое деформирование при близких величинах  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  развивалось с появлением деформаций  $\epsilon_2$ , а не только деформаций  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$ . В продольном сечении предельных поверхностей (рис. 3.6, в) векторы у рыхлого песка почти точно перпендикулярны к гидростатической оси, т.е. деформирование рыхлого песка в предельном состоянии происходит без изменения объема. Ориентировка векторов пластических деформаций у плотного песка свидетельствует о разрыхлении ( $|\Delta \epsilon_3| > \Delta \epsilon_1$ ) при течении в предельном состоянии.

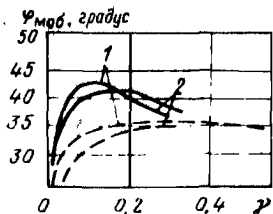


Рис. 3.7. Зависимость угла внутреннего трения от величины сдвига у плотного (сплошные линии) и рыхлого (штриховые линии) песка при нормальном напряжении в плоскости сдвига 1 (42 кПа) и 2 (390 кПа)

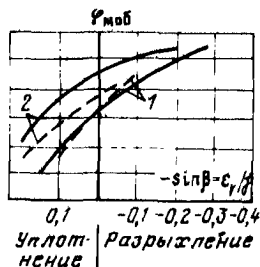


Рис. 3.8. Зависимость угла разрыхления от мобилизованного угла песка плотного (сплошные линии) и рыхлого (штриховые линии) при нормальном напряжении в плоскости сдвига 1 (42 кПа) и 2 (390 кПа)

Однако векторы пластических деформаций даже у плотного песка в этом сечении не перпендикулярны к предельной линии, т.е. поверхности пластического потенциала, какие бы они ни были, не совпадают с предельной поверхностью.

Конструкция упоминавшегося прибора К. Роско с широкой зоной сдвига позволяла давать образцам большие деформации сдвига. На рис. 3.7 (по [41]) приведены зависимости мобилизованного угла внутреннего трения от деформации сдвига для рыхлого ( $e = 0,75$ ) и плотного ( $e = 0,53$ ) песка при  $\sigma = 42$  и 390 кПа. Во-первых, отметим близость графиков для  $\sigma = 42$  и 390 кПа и возможность изображения их одной кривой. Во-вторых, сопротивляемость рыхлого и плотного песка при больших деформациях сближается. Снижение сопротивления (разупрочнение) плотного песка и упрочнение рыхлого, безусловно, объясняются разрыхлением первого и уплотнением второго. Максимальная сопротивляемость сдвигу плотных песков и его снижение, однако, достигаются при больших сдвигах.

К. Роско [41] вводит понятие "угол разрыхления", синус которого равен отношению приращений объемной и сдвиговой деформаций в процессе сдвига при постоянном напряжении  $\sigma_0$ :

$$\sin \beta = - \frac{dv}{d\gamma} \quad (3.9)$$

Близость понятий  $\alpha$ -эффекта Бьеррума и угла разрыхления очевидна, как и существование связи между величиной мобилизованного угла внутреннего трения с разрыхлением. На рис. 3.8 (по [41]) приведены графики зависимости угла разрыхления от мобилизованного угла внутреннего трения для рыхлого и плотного песка при различных давлениях  $p$ . Смысл этих графиков следующий. У плотного песка при малой величине сдвига и малых деформациях

$\gamma$  (и малых  $\varphi_{\text{моб}}$ ) при возрастании  $\gamma$  (соответственно и  $\varphi_{\text{моб}}$ ) наблюдается уплотнение ( $\sin \beta > 0$ ). Это можно проследить и на графиках рис. 3.7. Начиная с некоторого уровня, соответствующего  $\varphi_{\text{моб}} \approx 31 - 37^\circ$ , прирост сдвиговых деформаций сопровождается разрыхлением. Величина угла разрыхления  $\beta$  достигает максимума при максимальной сопротивляемости плотного песка при  $\gamma \approx 0,1$  (см. рис. 3.7), а далее начнет снижаться.

Аналогично и у рыхлого песка на начальных этапах возрастания  $\gamma$  и  $\varphi_{\text{моб}}$  происходит уплотнение, а начиная с некоторого уровня  $\gamma$ , соответствующего углу  $\varphi_{\text{моб}} = 31 \div 34^\circ$ , песок начинает разрыхляться.

Поскольку все экспериментальные графики на рис. 3.8 оказались близки друг к другу, К.Роско со ссылкой на работы Т. Коула и П. Роу приводит формулу:

$$\sin \varphi_{\text{моб}} = \frac{(k-1) - (k+1) \sin \beta}{(k+1) - (k-1) \sin \beta}, \quad (3.10)$$

где  $k = \text{tg}^2(45^\circ + \frac{\varphi_{\text{к}}}{2})$ ,  $\varphi_{\text{к}}$  — конечное значение мобилизованного угла внутреннего трения.

На рис. 3.7  $\varphi_{\text{к}} \approx 34^\circ$  как для рыхлого, так и для плотного песка. К. Роско приводит максимальные наблюдавшиеся у плотных песков значения  $\beta = 15^\circ$  и даже  $23^\circ$  (при этом  $\varphi_{\text{моб}} \leq 47,8^\circ$ ).

В условиях плоской деформации  $\sin \varphi_{\text{моб}} = (\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 + \sigma_3)$ ,  $d\epsilon = d\epsilon_1 + d\epsilon_3$ ,  $d\gamma = d\epsilon_1 - d\epsilon_3$ . Подставив эти соотношения в уравнения (3.9) и (3.10), получим более простую форму уравнения (3.10) для условий плоской деформации, которую приводит К. Роско [41]:

$$\frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} = \frac{1}{k} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}. \quad (3.11)$$

На рис. 3.9 по данным Г. Раймонда и В. Дьялжи [39] приведены графики испытаний крупнообломочного искусственного грунта (щебня для железнодорожного балласта) на большом стабилометре при боковой удельной нагрузке  $35 \text{ кН/м}^2$ . Линия 1 относится к доломитовому щебню, 2 — к шлаку. Укладка материала в камеру стабилометра производилась с вибрацией. Между графиками 1 и 2 на всех рисунках авторы [39] приводят целое семейство графиков, характеризующих гравий, гранитный, мраморный и известняковый щебень. На рис. 3.9, а и 3.9, б охарактеризованы свойства образцов при первичном нагружении, а рис. 3.9, в и 3.9, г — образцов, подвергнутых предварительному циклическому нагружению осевой нагрузкой ( $10^6$  циклов). Щебень для образцов имел оптимальный гранулометрический состав. Как видим, предварительное циклическое нагруже-

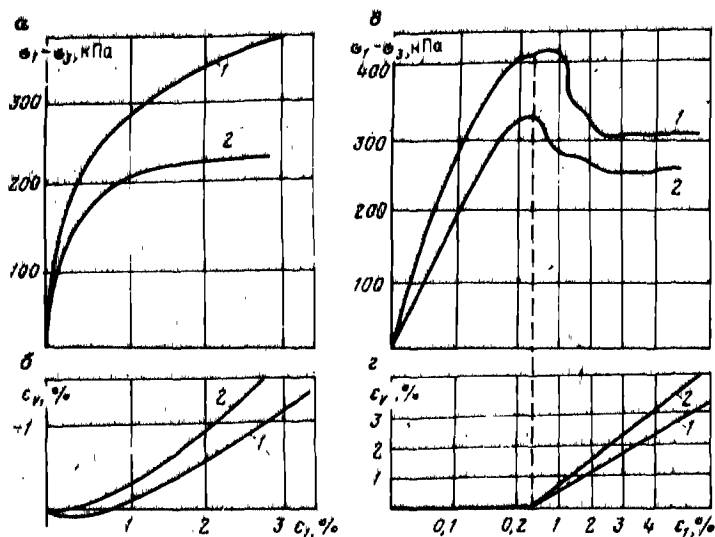


Рис. 3.9. График результатов стабилометрических испытаний доломитового щебня (1) и шлака (2)

ние повысило жесткость, разрыхляемость и максимальную сопротивляемость сдвигу образцов. Образцы приобрели свойство разупрочнения после достижения пиковой сопротивляемости.

### 3.2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЛИНЫ

Рассматриваются свойства водонасыщенных глин и глинистых грунтов на основе концепций теории критического состояния глин, разработанной трудами М. Хворслева [27], К. Роско и Дж. Берланда [40], А. Скофильда и С. Рота [45], Д. Кекеля [25] и целым рядом других исследователей.

#### 3.2.1. Сжимаемость глины

В отличие от песков глины в процессе компрессии (дренированного сжатия) могут приобретать любую физически возможную плотность, переходят от текучего в пластичное и даже твердое состояние.

Графики зависимости коэффициента пористости от давления при компрессии глин в полулогарифмических координатах часто оказываются близки к прямым линиям (рис. 3.10); при этом уравнение изотропной гидростатической компрессии и декомпрессии (набухания) имеет вид:

$$e = e_A - \lambda \ln(p/p_A); \quad (3.12)$$

$$e = e_B + k \ln(p/p_B). \quad (3.13)$$

Величины  $e_A$  и  $e_B$  в уравнении (3.10) — константы, определяющие положение графика первичной компрессии;  $e$  — коэффициент пористости;  $p$  — гидростатическое давление. Точка с координатами  $e_A$  и  $p_A$  может лежать на экспериментальном определенном отрезке графика  $e-p$  или его продолжении. Целесообразно принимать  $p_A$  равным атмосферному давлению или единице давления в принятой системе единиц. В уравнении декомпрессии (3.11)  $p_B$  представляет собой давление, которое претерпел образец до процесса декомпрессии,  $e_B$  — коэффициент пористости при этом.

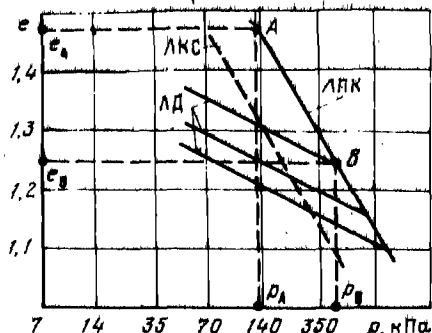


Рис. 3.10. График компрессионных свойств каолиновой пасты: ЛПК — линия первичной компрессии; ЛД — линия декомпрессии; ЛКС — линия критического состояния

График одноосной компрессии по результатам сжатия в обычном компрессионном приборе (см. рис. 3.10) изобразился бы линией, параллельной графику первичной изотропной компрессии, но лежащей выше него.

Объемная деформация грунта  $dv$  при изменении коэффициента пористости  $de$  составляет

$$dv = de / (1 + e).$$

С учетом этого соотношения касательные модули объемного сжатия при компрессии и декомпрессии определяются из уравнений (3.12) и (3.13):

$$K_k = dp/dv = p(1 + e)/\lambda; \quad (3.14)$$

$$K_d = p(1 + e)/k. \quad (3.15)$$

Касательные модули объемного сжатия у глин сильно зависят от гидростатического давления; в формулах (3.14) и (3.15)  $K_k$  и  $K_d$  прямо пропорциональны давлению  $\sigma_0$ .

По результатам, которые приводит С. Рот [48], для Бостонской синей глины,  $\lambda \approx 0,145$ ,  $k \approx 0,0578$ . Из анализа данных Хенкеля для пасты, приготовленной из лондонской глины ( $I_p = 0,52$ ),  $\lambda \approx 0,157$ ,  $k \approx 0,0577$ , а для пасты из глины Виалд ( $I_p = 0,25$ ),  $\lambda \approx 0,091$ ,  $k \approx 0,0302$ .

Если состояние грунта характеризуется точкой на графике первичной компрессии, то такой грунт называется нормально уплотненным. Если же грунт испытал давление  $p_k$  большее, чем испытываемое им в настоящее время давление  $p$ , т.е. претерпел процесс декомпрессии, то такой грунт называется переуплотненным, а соотношение  $p_k/p$  называют степенью переуплотнения (СП). При повторном

нагружении переуплотненного грунта (рекомпрессии) вплоть до максимального испытанного ранее грунтом давления связь коэффициента пористости с давлением близка к графику декомпрессии, хотя при точных измерениях можно наблюдать небольшую петлю гистерезиса. Наличие этой петли гистерезиса приводит к большим деформациям сжатия под многократно приложенной (циклической) нагрузкой, чем под статической. Образец реального грунта, который в своей геологической истории претерпел консолидацию под каким-то давлением  $p_k$ , при лабораторных компрессионных испытаниях вплоть до давления  $p_k$  будет вести себя как переуплотненный, т.е. связь коэффициента пористости и давления будет характеризоваться рекомпрессионной кривой, и лишь при давлениях свыше  $p_k$  процесс станет первичной компрессией.

По отношению к природному давлению  $p_{np}$ , равному давлению от веса вышележащих слоев за вычетом гидростатического давления грунтовых вод, грунт называют нормально уплотненным при  $p_k/p_{np}$ , при  $p_k/p_{np} > 1$  переуплотненным и недоуплотненным при  $p_k/p_{np} < 1$ . В нормально уплотненном грунте степень консолидации грунта соответствует давлению от вышележащих слоев грунта. Какое-либо увеличение давления в нем от возводимых сооружений будет сопровождаться уплотнением по графику первичной компрессии. Причиной переуплотненного состояния грунта является снятие части природного давления, под которым протекала консолидация, в результате таяния ледника, эрозионного среза слоя горных пород и т.п. На территориях, покрытых молодыми морскими или озерно-ледниковыми осадками, нередко наблюдаются недоуплотненные глины, в которых процесс консолидации под природным давлением еще не завершился.

Рассмотрим поведение водонасыщенного грунта при быстром (недренированном) приложении к нему дополнительного давления  $\Delta p_n$ . Это давление будет складываться из дополнительного эффективного напряжения в скелете  $\Delta p$  и прироста порового давления  $\Delta p_w$ :

$$\Delta p_n = \Delta p + \Delta p_w. \quad (3.16)$$

Относительная объемная деформация скелета  $\epsilon_V = \Delta V/V$ , где  $\Delta V$  — изменение объема грунта.

Изменение напряжений в скелете связано с изменением его деформаций через касательный модуль объемного сжатия:

$$\Delta p = K_k \epsilon_V. \quad (3.17)$$

Модуль объемного сжатия воды ( $K_w \approx 2 \cdot 10^3$  МПа) более чем на порядок ниже по сравнению с модулями минеральных частиц скелета, поэтому уменьшение объема грунта  $\Delta V$  практически равно уменьшению объема порового пространства, объем которого равен  $nV$  ( $n$  — пористость). Относительная объемная деформация воды

$$\epsilon_V(w) = \Delta V/nV = \frac{1}{n} \epsilon_V,$$

а возникающее в ней поровое давление

$$\Delta = p_w = K_w \epsilon_V(w). \quad (3.18)$$

Подставив выражения (3.17) и (3.18) в уравнение (3.16), получим:

$$\epsilon_V = \Delta p / K_{нд}, \quad (3.19)$$

где  $K_{нд} = K_k + K_w/n$  — недренированный модуль объемного сжатия, равный  $K_k + K_w/n$ .

Если грунт к моменту быстрого пригружения был в нормально уплотненном состоянии, то  $K_k$  в формуле (3.17) будет равен касательному модулю первичной консолидации — величине малой по сравнению с модулем сжимаемости воды  $K_w$ . В нормально уплотненных грунтах при быстром сжатии практически все давление воспринимается поровой водой.

Если грунт к моменту быстрого пригружения был переуплотнен, то  $K_k$  в формуле (3.17) будет равен касательному модулю рекомпрессии. При высокой степени переуплотнения  $K_k$  может стать соизмеримой с  $K_w$ , и уже значительная доля нагрузки будет восприниматься скелетом.

При быстром (недренированном) снятии нагрузки в качестве  $K_k$  в формуле (3.17) будет выступать модуль декомпрессии. Расчет изменений величин порового давления по формуле (3.18) при этом может привести к отрицательным величинам. Появление порового вакуума неоднократно фиксировалось экспериментально при разгрузке глин как в лабораторных, так и в полевых условиях.

В водонасыщенном нормально уплотненном грунте даже после однократного недренированного нагружения и разгрузки возникает остаточное поровое давление, что наглядно иллюстрировано на рис. 3.11, на котором график  $EACF$  представляет собой кривую первичной компрессии скелета, а график  $AB$  — график сжимаемости поровой воды.

Пусть исходное напряжение состояния образца характеризуется отсутствием порового давления ( $p_w = 0$ ), полным напряжением  $p_{п}$  и соответственно напряжением в скелете  $p'$ , которое равно полному напряжению ( $p' = p_{п}$  — точка  $A$ ). Недренированное сжатие на величину  $v$  приведет скелет в состояние, характеризующееся точкой  $C$  на графике первичной компрессии скелета, а поровую воду — в точку  $B$  на графике сжимаемости воды. Необходимое для этого полное

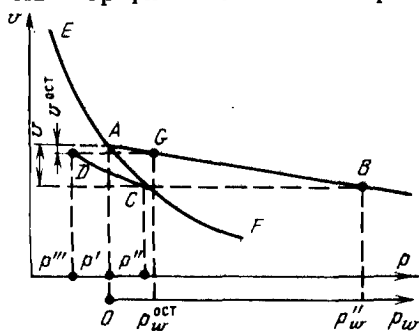


Рис. 3.11. Графическое изображение механизма возникновения остаточного порового давления после цикла нагрузка-разгрузка в водонасыщенном грунте

давление  $p_n'' = p_w'' + p''$ . При последующем снижении полного давления до исходной величины  $p_n'$  снижение напряжений в скелете будет происходить по графику декомпрессии  $CD$ , а снижение порового давления — по упругому графику  $AB$ . Конечное состояние скелета грунта и поровой воды будет характеризоваться точками  $D$  и  $C$  соответственно, так что сумма напряжений в скелете  $p'''$  и остаточного порового давления  $p_w^{ост}$  равна первоначальному (и конечному) полному давлению:

$$p''' + p_w^{ост} = p_n \quad (3.20)$$

Напряжение в скелете снизилось, а в поровой воде давление возросло. Элемент грунта приобретает остаточную объемную деформацию  $v^{ост}$ , правда, весьма малой величины.

Наличие петли гистерезиса при декомпрессии и рекомпрессии приводит к тому, что остаточное поровое давление при многократном циклическом нагружении и разгрузке будет нарастать и может в конце концов составить существенную долю от статической нагрузки. При часто меняющихся (вибрационных, периодических) нагрузках описанный эффект нарастания порового давления наблюдается и в песках ниже средней плотности.

### 3.2.2. Реакция нормально уплотненных глин на касательные напряжения

Приложение к нормально уплотненному грунту напряжения чистого сдвига (увеличение  $q$  при  $p \neq const$ ) в дренированных условиях сопровождается снижением его коэффициента пористости, уплотнением грунта. Этот факт объясняется тем, что увеличение главного напряжения  $\sigma_1$  сопровождается большими деформациями сжатия, чем деформация расширения в направлении снижающегося напряжения  $\sigma_3$ , за счет разницы между модулями нагрузки в направлении  $\sigma_1$  и разгрузки в направлении  $\sigma_3$ .

На рис. 3.12 изображен комплекс графиков, характеризующих поведение образца нормально уплотненной глины при приложении к нему чистого сдвига [42, 49].

Исходное состояние образца характеризуется точкой  $A$  на рис. 3.12,  $a$  ( $p \neq 0, q = 0$ ), точкой  $A'$  на кривой первичной компрессии (рис. 3.12,  $b$ ) точкой  $A'''$  на рис. 3.12,  $z$ , где изображена зависимость объемной деформации образца от сдвига. По мере увеличения касательного напряжения от точки  $A$  до предельной точки  $B$  (см. рис. 3.12,  $a$ ) плотность возрастает и переходит из точки  $A'$  на рис. 3.12,  $b$  в точку  $B'$ . Сумма предельных точек типа  $B$  на рис. 3.12,  $a$  образует предельную линию  $OD$ . По данным многих исследователей [25, 40, 48], предельная линия (ПЛ) при трехосном сжатии в стабилометре является прямой с уравнением

$$q = Mp. \quad (3.21)$$



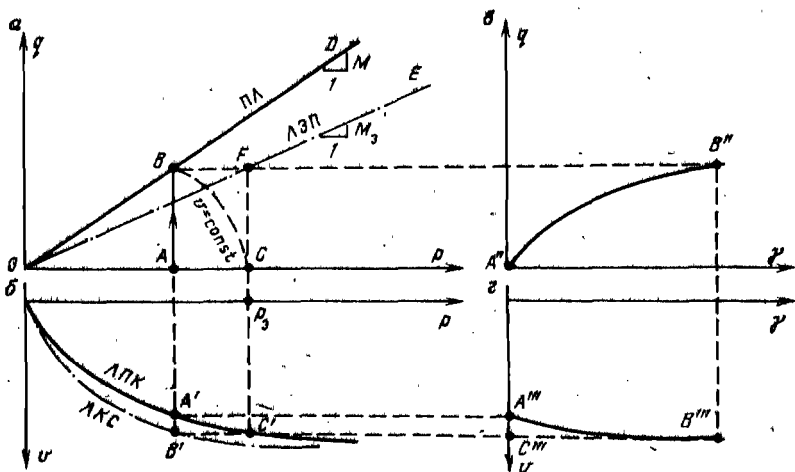


Рис. 3.12. Комплекс графиков, характеризующих свойства нормально уплотненной глины

Для упоминавшейся ранее глины Виалд по данным [64] коэффициент  $M$  составляет  $\sim 0,8575$ ; для бостонской глины [48]  $M \approx 1$ . К. Роско и Дж. Берланд [40] оценивают возможный для различных глин диапазон  $M$  от 0,7 до 1,2, что соответствует углам внутреннего трения от  $18^\circ 40'$  до  $30^\circ$ . Такие углы внутреннего трения для глин выглядят на первый взгляд непривычно большими и могут быть получены лишь при условии очень медленного нагружения касательными напряжениями с полным рассеянием возникающего порового давления после приложения каждой малой ступени касательно напряжения.

Сумма точек, аналогичных точке  $B'$  и характеризующих связь плотности грунта со средним давлением в предельном состоянии, образует график, подобный графику первичной компрессии и называемый линией критического состояния (ЛКС). ЛКС в полулгарифмических координатах близка к прямой линии, параллельной линии первичной компрессии (ЛПК) с уравнением того же вида (рис. 3.10). Точка  $C'$  на рис. 3.12, б имеет ту же ординату, что и точка  $B$ , но лежит на ЛПК. Ее абсцисса  $p_3$  определяет то давление, которое бы довело образец в условиях изотропной компрессии до той же плотности, что и нагружение сдвигом по траектории  $AB$  (рис. 3.12, а). Величину  $p_3$  еще М. Хворслев [27] назвал эквивалентным давлением. Точка  $F$  на рис. 3.12, а имеет абсциссу, равную эквивалентному давлению, а ординату — равную сопротивлению сдвигу нормально уплотненного грунта. Линию  $OE$ , представляющую собой сумму точек, подобных  $F$ , можно назвать линией эквивалентной прочности (ЛЭП). Ее уравнение имеет вид:

$$q = M_3 p. \quad (3.22)$$

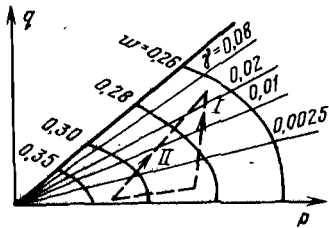


Рис. 3.13. Линии равных сдвигов и равной влажности глины

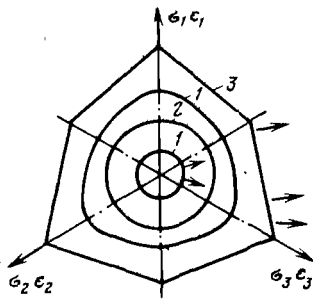


Рис. 3.14. Графическое изображение изменения формы поверхности текучести при нагружении:

1 — поверхность текучести; 2 — предел изотропной текучести; 3 — предельная поверхность

Величина коэффициента  $M_3$  связана с коэффициентом уравнения (3. 21) предельной линии  $M$ . По данным [27], для венской глины эти коэффициенты связаны приблизительным соотношением ( $M_3 \approx 0,6M$ ).

Между точками  $B$  и  $C$  на рис. 3.12,  $a$  проведена штриховая линия, точки которой характеризуют напряженное состояние образцов с одинаковой плотностью. Эквивалентном этой линии на рис. 3.12,  $b$  и  $г$  являются линии  $B'C'$  и  $B''C''$ .

На рис. 3.12,  $г$  приведен график нарастания объемной деформации сжатия по мере сдвига (при  $p = \text{const}$ ). Уплотнение нормально уплотненного грунта в процессе сдвига сопровождается уменьшением влажности в плоскости или зоне сдвига с отжимом воды в окружающие слои. Во избежание появления порового давления нагружение должно производиться чрезвычайно медленно.

На рис. 3.12,  $в$  график характеризует связь касательных напряжений и деформаций. По данным, приводимым Р. Йонгом и Е. Маккейсом [49], графики  $q - \gamma$  при различных  $p$  могут быть охарактеризованы одной кривой, построенной в координатах  $q/q_{\text{пр}}, \gamma$  ( $q_{\text{пр}}$  — предельная величина  $q$  при данном  $p$ ). Таким образом, так же как и ранее на рис. 3.1 и 3.3, может быть построено семейство лучей, характеризующих напряженное состояние с одинаковыми величинами сдвига  $\gamma$  (рис. 3.13), и семейство некоторых поверхностей с одинаковой влажностью (и соответственно с одинаковой объемной деформацией). Графики рис. 3.13 при определенной траектории нагружения устанавливают однозначное соответствие между деформациями и напряжениями, и это соответствие более или менее выдерживается, если траектории нагружения на всем своем протяжении характеризуются возрастанием  $p$  и  $q$  (траектории I и II на рис. 3.13). Для более сложных путей нагружения устанавливаются зависи-

мости не между полными напряжениями и деформациями, а между приращениями напряжений и деформаций.

В упоминавшейся работе [49] по результатам экспериментов на нормально уплотненной глинистой пасте утверждается, что до величины  $\gamma \approx 0,5\%$  ( $q \approx \frac{1}{3} q_{пр}$ ) векторы пластических деформаций в проекции на октаэдральную плоскость (рис. 3.14) нормальны к круговым поверхностям типа Мизеса — Боткина, а при более высоких уровнях касательных напряжений и деформаций, когда в образцах начинают формироваться поверхности скольжения, параллельные направлению  $\sigma_2$ , ориентировка векторов пластических деформаций приближается к нормальям к шестиугольному сечению пирамиды Кулона.

### 3.2.3. Сопротивление сдвигу переуплотненных глин

Если образец глины с характерными линиями ПЛ, ЛЭП, ЛПК, ЛКС подвергся в своей истории изотропной компрессии при давлении  $p_k$  (точки  $A$  и  $A'$  на рис. 3.15,  $a$  и  $b$ ), затем был разгружен до точки  $C$  и при этом давлении подвергается чистому сдвигу, то предельная (разрушающая) нагрузка будет выше предельной линии нормально уплотненных образцов (ПН). Точка  $D$ , характеризующая предельную нагрузку, будет принадлежать некоторой линии  $DF$ . По данным

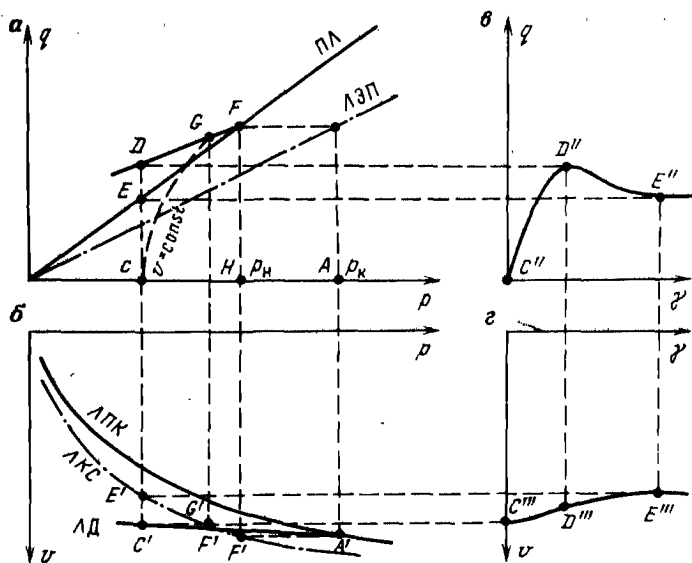


Рис. 3.15. Комплекс графиков, характеризующих свойства переуплотненной глины

[27], для переуплотненной пасты из венской глины эта линия  $DF$  (и серия родственных ей линий, соответствующих иным давлениям переуплотнения) является прямой, которая в координатах  $\tau$  и  $\sigma$  описывается уравнением Кулона:

$$\tau = C_n + \sigma \operatorname{tg} \varphi_n, \quad (3.23)$$

где  $C_n$  и  $\varphi_n$  — сцепление и угол внутреннего трения переуплотненного грунта.

Точка  $F$  (место расщепления предельной линии) такова, что давление  $p_k$  является эквивалентным давлением для точки  $F$ . Это и изображено построением на рис. 3.15, *а* и 3.15, *б*, т.е. в точке  $F$  нормально уплотненный образец имел бы такую же плотность, как образец в точке  $A$ .

График связи касательных напряжений и деформаций (рис. 3.15, *в*) у переуплотненных глин имеет четко выраженное максимальное значение. При дальнейшем увеличении деформаций сдвига за счет развития микротрещин сопротивляемость снижается до уровня, приблизительно равного сопротивлению нормально уплотненного образца (точки  $E$ ,  $E''$ ), образец в зоне сдвига разрыхляется (точка  $E'''$  на рис. 3.15, *г*) до уровня, близкого к точке  $E'$  на линии критического состояния. Влажность в зоне сдвига возрастает за счет подсоса воды из окружающих слоев грунта. Если сдвиг производится быстро (недренированный сдвиг), то в зоне сдвига развивается отрицательное поровое давление, увеличивающее гидростатическое сжатие в скелете и сопротивляемость образца сдвигу, так что запредельное разупрочнение может оказаться в этом случае заглушенным.

Линия  $CG$  (см. рис. 3.15, *а*) является изохорой, точки на которой характеризуются одинаковой объемной деформацией. Для сильно переуплотненного грунта изохора вогнута в сторону возрастания  $p$ ; при нагружении переуплотненного образца касательным напряжением из точки  $C$  до точки  $D$  будут последовательно пересекаться изохоры с уменьшающейся объемной деформацией, что характеризует разрыхление образца. Напомним, что для нормально уплотненных образцов (см. рис. 3.12, *а*) изохоры были выпуклые и характеризовали уплотнение образца при сдвиге.

Можно найти такую точку  $H$ , характеризующую некоторым давлением  $p_n$ , при котором приложение касательного напряжения не будет вызывать ни уплотнения, ни разрыхления, т.е. изохора будет  $FH$ . Такой образец при сдвиге не будет ни упрочняться, как нормально уплотненный грунт, ни разупрочняться, и его график  $q - \gamma$  будет близок к идеальной упругопластичности. По данным [25], так себя ведут образцы со степенью переуплотнения  $p_k/p_n \approx 2$ .

При стабилметрических испытаниях нагружение образцов обычно производится в два этапа: сначала прикладывается всестороннее давление  $\sigma_a = \sigma_r = p$ , а после этого прикладываются девиаторные напряжения. Девиаторные напряжения обычно создаются тремя путями: а) сжатие — осевое напряжение  $\sigma_a$  увеличивается, а боковое давление сохраняется постоянным, среднее давление  $p$  при этом

возрастает; б) *растяжение* — осевое напряжение  $\sigma_a$  уменьшается, а боковое давление сохраняется, при этом величина  $p$  снижается; в) *чистый сдвиг* — осевое напряжение увеличивается, а боковое давление снижается таким образом, чтобы среднее давление оставалось постоянным:  $p = \text{const}$ ; г) *чистый сдвиг* — боковое давление  $\sigma_r$  увеличивается, а осевое напряжение  $\sigma_a$  снижается таким образом, чтобы сохранялось  $p = \text{const}$ .

Если испытания проводятся в дренированном режиме и поровое давление постоянно равно нулю, то напряжения в скелете будут равны прикладываемым полным напряжениям и траектории их изменения будут соответствовать принятому пути нагружения (рис. 3.16).

Если же девиаторное нагружение производится в недренированном режиме (быстро или с закрытым каналом оттока поровой воды), то траектория изменений напряжений в скелете не будет повторять траекторию изменения полных напряжений, а будет идти вдоль изохоры.

На рис. 3.16 по данным [25] изображены траектории изменения напряжений в скелете при недренированных испытаниях образцов из пасты уилдской глины, уплотненных при давлении 0,84 МПа (точка А). Стрелки а, б, в, г указывают направления изменения полных напряжений при вышерассмотренных способах нагружения. При испытании нормально уплотненного образца траектории изменения напряжений в скелете 1 и 2 повторяют выпуклую изохору (сравните с рис. 3.12) независимо от пути изменения полных напряжений а, б, в или г.

У образцов со степенью переуплотненности свыше 2 траектории изменения напряжений в скелете оказываются вогнутыми (сравните с рис. 3.15). При этом к моменту разрушения напряжения в скелете могут даже превышать полные напряжения за счет отрицательного порового давления. Максимально возможное превышение напряжения в скелете над полным равно атмосферному давлению (при возникновении в порах вакуума), так что у сильно переуплотненных образцов траектория напряжений в скелете вблизи предельной линии при возникновении порового вакуума может отрываться от изохоры.

Таким образом, при увеличении скорости нагружения, что будет

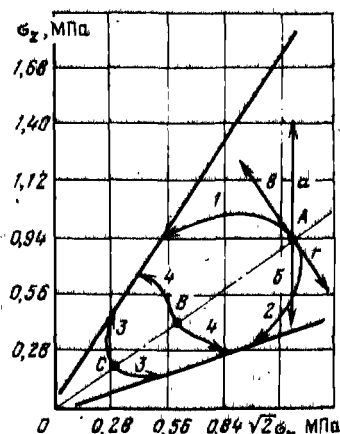


Рис. 3.16. Зависимость напряжений в скелете от пути нагружения:

1 — траектории изменения напряжений в скелете при изменении полных напряжений по траекториям а и в; 2 — то же, при изменении полных напряжений по траекториям б и г; 3 — то же, для сильно переуплотненного образца; 4 — то же, для образца со степенью переуплотнения 2

сопровождаться снижением степени дренированности, сопротивляемость сдвигу у нормально уплотненных образцов будет снижаться за счет возникающего порового давления, а у переуплотненных возрастать за счет порового вакуума. Вообще, прочность переуплотненных глин — весьма неустойчивый показатель, что хорошо известно по склонности откосов в переуплотненных глинах к оползням через более или менее длительный промежуток времени после отрывки котлована. При решении вопросов устойчивости переуплотненных глин самым надежным является расчет на остаточную (а не пиковую) сопротивляемость, соответствующую прочности нормально уплотненного состояния той же глины.

Рассмотренный механизм работы глины позволяет прогнозировать поведение ее в недренированных условиях, если известны свойства скелета по результатам дренированных испытаний. Возможность такого единого подхода к недренированному и дренированному нагружению является важным и весьма удобным обстоятельством.

Ранее отмечалась возможность существования в природе и недоуплотненных глин. Л. Бьеррум [4] при полевых испытаниях методом вращательного среза в таких глинах получил угол внутреннего трения  $\sim 10^\circ$  (считая нормальное напряжение на площадке среза равным природному вертикальному давлению грунта на глубине испытания), тогда как в дренированных лабораторных условиях угол внутреннего трения составлял  $28 - 32^\circ$ . Бьеррум подчеркивает, что иногда изменение пористости на 1 % может сопровождаться изменением угла внутреннего трения на  $10^\circ$ .

### 3.3. ГРУНТЫ ПОД ДИНАМИЧЕСКИМИ НАГРУЗКАМИ

Поведение грунтов под сильными динамическими воздействиями импульсного характера типа взрывных волн является специальным вопросом, не представляющим массового интереса.

Гораздо чаще встречаются ситуации, когда грунтовое основание оказывается подверженным вибрационному, циклическому или периодическому нагружению, например, от воздействия работающих механизмов (компрессоры, молоты и т.п.), землетрясений. В последние годы интерес к этому вопросу особенно возрос в связи с оценкой устойчивости оснований шельфовых гравитационных буровых платформ под воздействием морских волн.

В п. 3.2.1 уже отмечалось, что под циклическим гидростатическим давлением за счет петли гистерезиса в скелете накапливается необратимая деформация. Если это нагружение производится в недренированных условиях, а в силу быстроты смены знаков напряжений при циклическом нагружении условия действительно являются недренированными не только для глин, но и для песков, то уплотняющийся скелет освобождается из-под нагрузки и поровое давление возрастает.

Аналогично и при девиаторном нагружении (см. рис. 3.1, в)

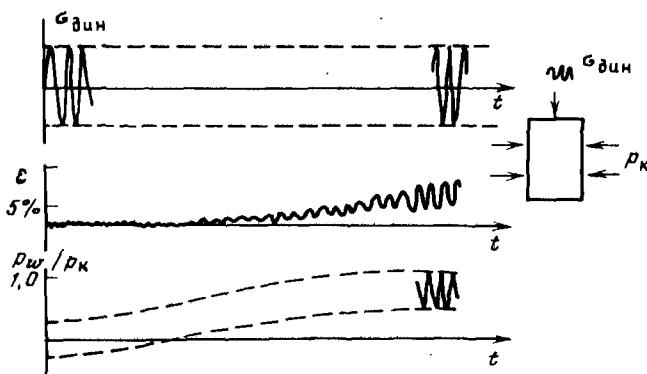
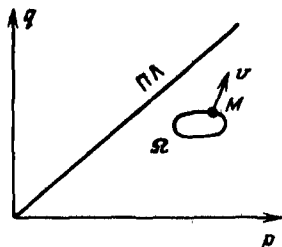


Рис. 3.17. Зависимость осевой деформации образца  $\epsilon$  и порового давления  $p_w$  под действием вибрации от времени ( $p_k$  — давление в камере стабилометра)

Рис. 3.18. Графическое изображение перемещения поверхности текучести при изменении напряженного состояния



циклической нагрузкой образца, находящегося под статической нагрузкой  $\tau_{ст}$ , за счет гистерезисных явлений величина деформации возрастает от статического значения  $\gamma_{ст}$  до некоторого конечного (циклического) значения  $\gamma_{цик}$ . У нормально уплотненных грунтов сдвиг сопровождается уплотнением скелета, т.е. приложение сдвиговой циклической нагрузки приведет к освобождению скелета из-под нормального напряжения, к росту порового давления.

На рис. 3.17 [29] показан типичный график нарастания порового давления  $p_w$  в нормально уплотненном водонасыщенном образце после приложения к нему осевой циклической нагрузки. После тридцати циклов поровое давление достигало величины давления в камере стабилометра. Деформация образца при этом достигла 10%. Поскольку поровое давление сравнялось с гидростатической составляющей, образец по отношению к динамической нагрузке оказался по существу в условиях одноосного сжатия, произошло разжижение грунта. Число циклов, необходимых для полного разжижения грунта, зависит от плотности грунта и интенсивности вибрации; обычно это 5 — 10 циклов. Именно возрастание порового давления и соответствующее снижение сопротивления сдвигу под знакопеременной нагрузкой является главной причиной оползней, потери несущей способности оснований при землетрясениях, под ударами морских волн, а не само по себе кратковременное (и обычно относительно небольшое) увеличение нагрузки за счет динамического компонента.

Гистерезисные явления, приводящие к уплотнению скелета при наложении на статическую нагрузку знакопеременной составляющей, свидетельствуют о том, что упрочнение грунтов не является изотропным. В изотропно упрочняющейся среде достигнутый уровень напряжений определяет симметричную относительно гидростатической оси поверхность текучести, внутри которой заключена обширная упругая зона. Фактически же, как показывают вышеприведенные экспериментальные данные и обширный опыт, изменение напряженного состояния грунтов в пределах предполагаемой изотропной поверхности текучести сопровождается неупругими деформациями. Очевидно, что изотропной поверхности текучести у грунтов нет. Судя по всему, при напряженном состоянии, характеризуемом точкой  $M$  (рис. 3.18), и траектории его изменения  $V$  формируется лишь небольшая зона истинной упругости, ограниченная замкнутой поверхностью текучести  $\Omega$ , которая перемещается вместе с точкой  $M$ , возможно, видоизменяясь в процессе перемещения. Если точка  $M$  начнет двигаться в другом направлении, то грунт будет вести себя упруго лишь при изменении напряженного состояния в пределах поверхности  $\Omega$ , а дальше появляются необратимые пластические деформации, обуславливающие гистерезисные явления.

#### 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЬНЫХ ПОРОД

Скальные (и полускальные) горные породы отличаются наличием прочных кристаллизационных связей и высокой прочностью монолитных (нетрещиноватых) элементов. Трещиноватый массив скальных пород представляет собой плотно упакованную систему прочных элементов. Деформирование и разрушение этой системы под строительной нагрузкой (например, под пятой арочной плотины) возможно главным образом за счет смещения блоков по контактам трещин.

##### 4.1. СВОЙСТВА МОНОЛИТНЫХ ОБРАЗЦОВ

Большинству скальных пород свойственна малая пористость, измеряемая сотыми и тысячными долями. Образцы таких пород при гидростатическом сжатии деформируются упруго, лишь в самом начале нагружения (до давления 10 — 15 МПа) проявляя повышенную сжимаемость, которая объясняется закрытием плоских микротрещин на контактах между зернами.

Наряду с плотными породами могут встречаться и сильнопористые породы типа пемзы, которые могут существенно уплотняться при увеличении гидростатического давления. Подобными свойствами обладают и тощие бетоны, применяемые в качестве закладочного материала при добыче ценных руд. Графики изотропной компрессии



таких пористых пород будут близки по форме к графикам глинистых грунтов, разумеется, с иным масштабом давлений.

При девиаторном нагружении до напряжений, составляющих около  $2/3$  от предельных, горные породы приобретают только упругие деформации. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к прорастанию внутренних дефектов — трещинок и появлению нелинейности в графиках связи напряжений и деформаций.

Роль микротрещин в хрупких материалах была показана А. Гриффитсом [12]. Вблизи них при девиаторном нагружении возникают местные концентрации напряжений, определяющие условия и направление их прорастания. Прорастающие трещины снимают концентрации напряжений и первоначально как бы упрочняют образец. Однако при определенной степени деформированности дальнейшее прорастание и смыкание внутренних трещинок начинает приводить к снижению сопротивляемости образца, и процесс упрочнения после достижения предела прочности переходит в процесс запредельного разупрочнения.

На рис. 4.1 приведены графики, характеризующие прочность образцов уральского мрамора и карельского гранита при стабильном испытании. Разупрочнение образцов в запредельной стадии завершается стабилизацией сопротивляемости образца на некотором уровне, называемом остаточной прочностью. У образцов мрамора (рис. 4.1, а, б) повышение гидростатического давления сопровождается уменьшением степени разупрочнения в запредельной стадии деформирования, а при радиальном давлении  $\sigma_r > > 20$  МПа разупрочнения вообще не наблюдается. Соответственно и график остаточной прочности мрамора (ЛЮП) в области высоких давлений смыкается с предельной линией ПЛ.

Наряду с этим у гранита при давлениях до 50 МПа степень разупрочнения не уменьшается, и график остаточной прочности не сближается с предельным графиком. Крутизна запредельной части деформационного графика характеризует меру хрупкости породы. К моменту снижения сопротивляемости образца до остаточной прочности он оказывается пронизанным сетью макроскопических трещин, однако еще сохраняет связность и до полного распада на отдельные куски зачастую способен накапливать еще большие деформации.

С начала прорастания микродефектов в допредельной, а особенно в запредельной стадии деформирования прирост сдвиговых деформаций в образцах скальных пород сопровождается разрыхлением, наиболее сильным при одноосном сжатии и уменьшающемся при увеличении бокового давления. Процесс разрыхления не безграничен: он завершается при достижении некоторого конечного уровня разрыхленности, тем меньшего, чем больше гидростатическое давление.

Если образец, находящийся в некоторой стадии запредельного деформирования (например, в точке *B* на рис. 4.2), разгрузить, а затем испытывать повторно, то он, будучи ослаблен развившими-

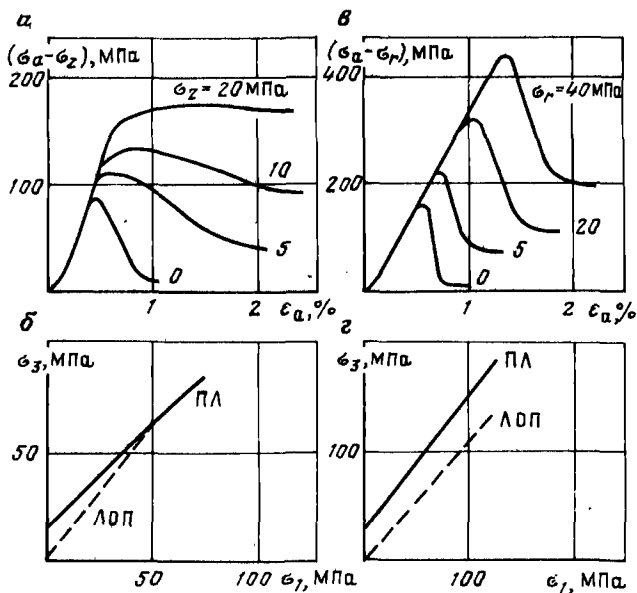


Рис. 4.1. Комплекс графиков, характеризующих свойства образцов мрамора (а и б) и гранита (в и г)

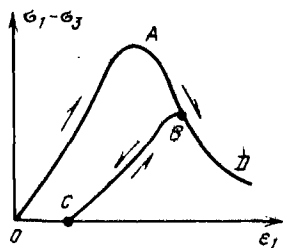


Рис. 4.2. График изменения свойств образца в запредельной стадии деформирования

ся в нем трещинами, будет иметь другой вид допредельной ветви деформационного графика —  $CB$ , а его запредельная часть  $BD$  будет совпадать с запредельной частью графика  $OAD$  исходного образца. Предельный график такого образца будет лежать где-то в промежутке между предельным графиком и графиком остаточной прочности исходного образца.

Предельные графики скальных пород, как правило, криволинейные, однако в области высоких гидростатических давлений они не представляют интереса для горного дела и строительства, а начальную часть графика можно аппроксимировать отрезком прямой линии, описываемой уравнением Кулона. При этом параметр  $\varphi$ , по-прежнему называемый углом внутреннего трения, но имеющий существенно иной механический смысл, может быть достаточно высок, достигая, например, 50 или даже 60° (см. рис. 4.1, г). Многочисленные сведения о прочностных и деформационных свойствах горных пород приведены в работе [12].

## 4.2. СВОЙСТВА ТРЕЩИНОВАТОГО МАССИВА

Хотя в земной коре и встречаются массивы практически нетрещиноватых пород — свидетельством тому могут служить гранитные колонны Исаакиевского собора в Ленинграде, однако, как правило, скальные и полускальные породы разбиты тремя или более системами трещин. На глубине эти трещины могут быть плотно сомкнуты, и в их плоскостях может сохраняться значительное сцепление — до 20 — 30 % от сцепления в сплошном теле. Трещины могут быть раскрытые, заполненные милонитом, даже зияющие. В зонах тектонического дробления густота трещин может возрастать вплоть до щебнеобразного состояния породы. Трещиноватый массив можно рассматривать как некогда монолитный и подвергнутый запредельному деформированию до определенной степени, предельный график которого находится где-то в промежутке между предельным графиком и графиком остаточной прочности. В зависимости от степени трещиноватости сцепление массива будет составлять некоторую долю  $\lambda$  от сцепления образца. Показатель  $\lambda$  называют коэффициентом структурного ослабления.

В табл. 4.1 приведены ориентировочные значения коэффициента структурного ослабления для различных пород. Трещины, наклоненные под углом 30 — 50° к направлению действия нагрузки, в наибольшей степени снижают прочность, поэтому в табл. 4.1 для массивов с наклонными трещинами значения  $\lambda$  ниже. Трещины больше снижают прочность пород с высокой прочностью монолитных образцов, поэтому в табл. 4.1  $\lambda$  зависит от прочности монолитных образцов.

Породы с нарушенной структурой (зоны дробления, деформированные породы в зонах сдвижения от подземных работ и т.п.) по существу имеют остаточную прочность.

Малотрещиноватые массивы с высокими значениями коэффициента структурного ослабления ( $\lambda > 0,25$ ) сохраняют основные свойства монолитных образцов, в частности хрупкость, разупрочнение в запредельной области деформирования, склонность к динамическому разрушению при мягком нагружении. У сильно ослабленных массивов крутизна запредельной части деформационных графиков снижается или запредельное разупрочнение вообще отсутствует, что лишает их способности к хрупкому разрушению (хрупким мы называем разрушение, происходящее без подвода энергии извне лишь за счет упругой энергии, накопленной в самом нагруженном материале, испытательной машине или окружающем массиве).

Относительно угла внутреннего трения трещиноватого массива  $\varphi_M$  и соотношения его с аналогичным показателем лабораторных образцов  $\varphi$  высказывались различные мнения:  $\varphi_M = \varphi$ ;  $\varphi_M < \varphi$ ;  $\varphi_M > \varphi$ . По-видимому, все эти варианты возможны, что можно видеть и на рис. 4.1, а и 4.1, б при сопоставлении предельных графиков пиковой и остаточной прочности образцов. При отсутствии конкретных данных можно принимать  $\varphi_M = \varphi$ .

Таблица 4.1

Характеристика породы	Коэффициент структурного ослабления при прочности пород на сжатие в образце (МПа)			
	< 2	2 — 10	10 — 40	> 40
Без четко видимой трещиноватости	0,9	0,7	0,6	0,5
Плотного сложения с нормальносекущей трещиноватостью	0,5	0,4	0,35	0,3
Плотного сложения с прерывистыми кососекущими трещинами	0,3	0,25	0,2	0,15
С нарушенной структурой	0,1	0,08	0,06	0,03

### 4.3. КОНТАКТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В геотехнических расчетах существенную роль играют прочностные и деформационные свойства контактов сооружений с грунтом и контактов крупных трещин, по которым могут развиваться сдвиги.

В некоторых случаях контакт может иметь прочность выше, чем слабейшая из контактирующих сред. Например, контакт бетона (без гидроизоляции) с глиной будет, как правило, иметь большее сопротивление сдвигу, чем глина за счет миграции поровой влаги в бетон и некоторого осушения приконтактной области. По-видимому, это является одной из причин "отдыха" свай — возрастания их несущей способности во времени после забивки. Контакт такого рода можно не учитывать в геотехнических расчетах. Но, как правило, контакты обладают пониженной прочностью по сравнению с контактирующими средами.

Наибольший интерес здесь представляет механика работы трещин в скальных породах. Если трещина имеет значительное раскрытие, превышающее высоту шероховатости стенок, и заполнена мелкодисперсным милонитом, то механические свойства контакта будут определяться свойствами заполнителя. Если же раскрытие трещины мало, то шероховатости стенок находятся во взаимном зацеплении (рис. 4.3) и своеобразно модифицируют работу контакта. Угол трения ровных (неполированных) поверхностей горных пород  $\varphi$  обычно близок к  $30^\circ$ . Если сдвиг сопровождается скольжением по наклонной поверхности шероховатостей с углом  $\alpha$ , то видимый угол трения по контакту  $\varphi'$  увеличивается на величину  $\alpha$ :

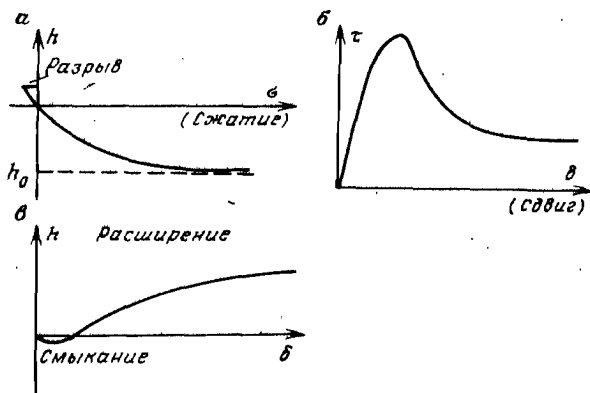
$$\varphi' = \varphi + \alpha. \quad (4.1)$$

Если суммарная величина  $(\varphi + \alpha)$  превышает  $90^\circ$ , то скольжение по такой крутой шероховатости без ее среза невозможно. На поверхностях реальных трещин имеются шероховатости различной формы, каждая из которых вносит свой вклад в работу контакта. Наиболее

Рис. 4.3. Схема шероховатого контакта



Рис. 4.4. Графики, характеризующие механические свойства контакта



крутые шероховатости, а также отдельные кристаллические связи между контактирующими поверхностями обеспечивают сцепление в плоскости контакта, которое может колебаться от  $\sim 0,3C$  ( $C$  — сцепление монолитной породы) у волосных трещин до  $50 \text{ кН/м}^2$  и менее у трещин, в плоскостях которых были сдвиги. Также и угол трения по ненарушенным контактам может достигать  $60^\circ$ , снижаясь до  $25 - 30^\circ$  и менее у контактов, претерпевших сдвиг [12].

Контактирующие поверхности под воздействием только нормальной нагрузки будут смыкаться за счет упругого (и неупругого) смятия шероховатостей. График такого смыкания приведен на рис. 4.4, а. По мере увеличения нормальной нагрузки величина смыкания  $h$  асимптотически стремится к пределу, равному начальному раскрытию трещины  $h_0$ .

Сдвиг в плоскости шероховатого контакта будет сопровождаться расширением зазора между контактирующими поверхностями, а сопротивляемость сдвигу контакта по мере выхода из зацепления шероховатостей будет снижаться. Типичные графики, характеризующие сдвиг в плоскости контакта, приведены на рис. 4.4, б и рис. 4.4, в. На начальном этапе сдвига, пока происходит обжатие шероховатостей, и они входят в более плотное зацепление, наблюдаются некоторое смыкание стенок контакта и нарастание сопротивляемости. Далее по мере сдвига происходят расширение зазора и снижение сопротивляемости контакта  $\tau$  по мере выхода шероховатостей из зацепления или их среза.

С. Вайдис и др. [16] утверждают существование масштабного

эффекта, снижающего пиковую сопротивляемость сдвигу контактов при увеличении площади сдвига в определенных пределах. Результаты их экспериментов приведены на рис. 4.5, а и 4.5, б.

Масштабный эффект может и отсутствовать. Для получения стабильной, уже не зависящей от размеров сопротивляемости контакта, не требуется испытание чрезмерно больших образцов. В упомянутых опытах С. Бандиса и др. сопротивляемость контактов площадью более 100 — 200 см<sup>2</sup> уже практически не менялась.

Н. Бартон и В. Чубей [18] предлагают формулу для определения сопротивления контакта сдвигу  $\tau$  в зависимости от прочности на одноосное сжатие пород в куске  $\sigma_{сж}$  шероховатости контакта, нормального давления  $\sigma$  и угла трения  $\varphi$  равных поверхностей  $\varphi$ :

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \left[ k \operatorname{lg} \left( \frac{\sigma_{сж}}{\sigma} \right) + \varphi \right].$$

Коэффициент  $k$ , характеризующий шероховатость контакта в формуле (4.2), приблизительно равен среднему углу наклона шероховатостей и определяется путем графической обработки профилей стенок контакта. Они же отмечают, что пиковая сопротивляемость контакта достигается при величине сдвига  $\delta$ , составляющей  $\sim 10\%$  от величины сдвига, при которой сопротивляемость контакта снижается до остаточного значения, равного силам трения равных поверхностей после выхода из зацепления шероховатостей. Максимальное расширение контакта  $h$  при сдвиге равно высоте неровностей, а максимальная скорость расширения  $h_{\max}$  наблюдается в момент достижения пиковой сопротивляемости контакта.

В рассмотренной схеме работы контакта с некоторым начальным раскрытием характерными являются сжимаемость контакта под действием нормальных напряжений и приблизительно линейная податливость контакта под действием касательных напряжений, не достигающих пиковой прочности контакта. Раскрытые трещины в породах коры выветривания действительно обладают такими свойствами, и сжимаемость трещиноватых массивов при возведении

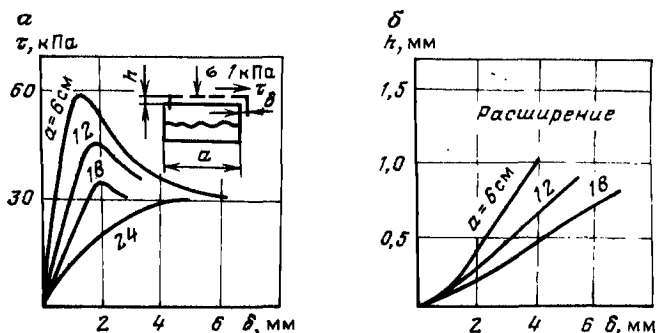


Рис. 4.5. Графики, характеризующие масштабный эффект при сдвиге в плоскости контакта

на них, скажем, гидротехнических плотин за счет смыкания трещин оказывается выше, чем монолита.

Однако на глубинах ведения горных работ за пределами зоны выветривания, где исходное напряженное состояние массива характеризуются высокими сжимающими напряжениями, трещины плотно сомкнуты. Такие контакты не будут обладать какой-либо податливостью по отношению к нормальным или касательным напряжениям, пока напряжения эти не превысят сопротивляемость контакта. При напряжениях ниже предельных массив с такими трещинами будет вести себя как упругая среда с характеристиками монолитных образцов, и лишь при возникновении в плоскости трещин предельной комбинации напряжений в ней начнут возникать сдвиги и существование трещины скажется на общей картине напряженно-деформированного состояния массива.

Характеристики подобной плотно сомкнутой трещины с наличием исходных кристаллических связей приведены на рис. 4.6. Такой контакт никак не реагирует на изменение нормального сжимающего напряжения, и лишь при нормальном напряжении, равном прочности контакта на разрыв, стенки контакта неограниченно расходятся (рис. 4.6, а). Сдвига в плоскости контакта нет, пока касательные напряжения не достигают предела прочности контакта  $\tau_{пр}$ , зависящей как от шероховатостей, так и от наличия кристаллических связей. Разрушение кристаллических связей произойдет при весьма малых сдвигах в плоскости контакта  $d\delta$  (рис. 4.6, б), а дальнейшее снижение сопротивляемости сдвигу и расширение контакта (рис. 4.6, в) будут обусловлены только характеристиками шероховатостей. Экспериментальное измерение характеристик плотно сомкнутых контактов с кристаллическими связями весьма затруднительно, так как все процессы происходят при малых перемещениях и высоких напряжениях, что требует весьма жесткой аппаратуры.

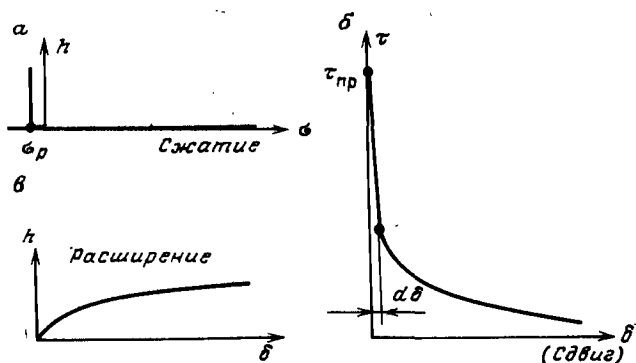


Рис. 4.6. Графики, характеризующие механические свойства плотно сомкнутого контакта

#### 4.4. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ И ГОРНЫХ ПОРОД

Обычным проявлением реологических свойств грунтов является ползучесть. Можно выделить два существенно различных как по природе, так и по проявлению типа ползучести: объемная и сдвиговая.

Проявлением объемной ползучести обычно объясняют длительное развитие "вековых" осадок сооружений на водоиссыщающих глинах со скоростью 1 — 2 см/год после завершения процесса фильтрационной консолидации.

Объемная ползучесть всегда затухающая, в какой бы степени она ни проявлялась. Для расчета конечных осадок учет объемной ползучести не нужен, так как компрессионные показатели сжимаемости включают в себя все временные процессы. Учет же ползучести при прогнозе развития деформаций во времени, сильно загромождая расчеты, не очень сильно меняет результаты по сравнению с расчетами по теории фильтрационной консолидации. Как правило, в отечественных и зарубежных практических методах прогноза осадок объемной ползучестью пренебрегают.

Сдвиговая ползучесть под действием девiatorной части тензора напряжений проявляется гораздо чаще с весьма наглядными последствиями. Проявление сдвиговой ползучести глинистых грунтов, каменной соли, связанных глинистых или глинизирующихся в процессе выветривания горных пород (аргиллитов, алевролитов, метаморфических тонкослоистых сланцев) безусловно связано со свойствами адсорбированной воды: ее вязкостью, способностью переносить ионы растворимых солей с более нагруженных граней на менее нагруженные. Сдвиговая ползучесть проявляется в медленных движениях оползневом типа, которые, впрочем, нередко переходят в быстрые, в конвергенции стенок подземных выработок, в деформировании соляных целиков и соответствующих оседаниях поверхности. Пожалуй, самым ярким проявлением ползучести являются соляные купола и блоковые оползни.

На рис. 4.7 кривой 1 изображен характерный график связи напряжений и деформаций при быстром нагружении, а кривой 2 — при бесконечно медленном нагружении ( $\tau_{кр}$  — это кратковременная прочность;  $T_{дл}$  — длительная прочность). При напряжениях ниже  $\tau_n$  — порога ползучести — ползучесть не проявляется. Если образец будет быстро нагружен до точки А (ниже  $\tau_{дл}$ , но выше  $\tau_n$ ), то процесс затухающей ползучести выведет его в конечное состояние — точку А' на кривой 2. Если же образец будет быстро нагружен до точки В, то в нем будет протекать процесс незатухающей, ускоряющейся ползучести, который завершится в некоторой точке В' разрушением.

Реология сдвиговых процессов в общем случае характеризуется: а — порогом ползучести, который у глин с  $I_l \approx 1$  может быть близок к нулю, а у скальных пород — близок к уровню  $\tau_{дл}$ ; б — длительной прочностью — границей между затухающей и незатухающей



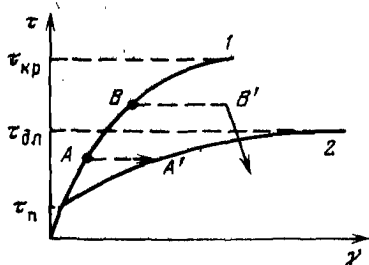


Рис. 4.7. Зависимость скорости приложения нагрузки от деформационных свойств грунта

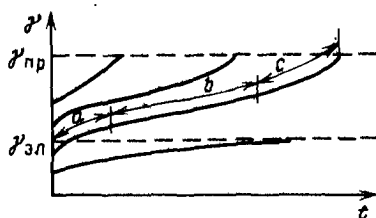


Рис. 4.8. Зависимость характеристик ползучести грунта от времени при различной нагрузке

ползучестью, которая характеризуется величинами  $C_{дл}$  и  $\varphi_{дл}$ ;  $e$  — кратковременной прочностью — абсолютным пределом сопротивляемости — с кулоновскими характеристиками  $C_{кр}$ ,  $\varphi_{кр}$ .

Величины  $\varphi_{дл}$  и  $\varphi_{кр}$  обычно близки между собой, а  $C_{дл}$  составляет 40 — 50 % от  $C_{кр}$  у глин и 60 — 80 % у связных горных пород.

На рис. 4.8 приведены графики развития деформаций ползучести во времени при различной нагрузке. Если уровень напряжений  $\tau$  превышает уровень длительной прочности, то процесс ползучести заканчивается разрушением тем скорее, чем выше уровень  $\tau$ . С определенным приближением можно считать, что предельная деформация  $\gamma_{пр}$ , при которой процесс ползучести заканчивается разрушением, не зависит от уровня напряжений  $\tau$  (в пределах  $\tau_{дл} \leq \tau \leq \tau_{кр}$ ).

На графиках незатухающей ползучести выделяют три участка: начальный участок неустановившейся ползучести  $a$ , основной участок установившейся ползучести с постоянной скоростью  $b$  и участок ускоряющейся ползучести  $c$ . Установившаяся ползучесть — это равновесный процесс разрушения одних и возникновения новых связей. Ускорение ползучести связано с тем, что число разрывающихся связей начинает превышать число вновь возникающих, и возникающая неравновесность необратимо усиливается.

Если грунт быстро нагрузить нагрузкой, превышающей длительную прочность  $\tau_{дл}$ , и оставить при достигнутой деформации, то реологические процессы приведут к снижению (релаксации) напряжений до уровня  $\tau_{дл}$ .

## 5. РЕШЕНИЕ ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКТА ПРОГРАММ "ГЕОМЕХАНИКА"

Под руководством автора во ВНИМИ и в ЛИСИ разработана группа программ, реализующих на базе МКЭ ряд механических моделей грунтов и горных пород.

Все программы, входящие в комплект "Геомеханика", имеют одинаковую систему входной и выходной информации, общие основные подпрограммы.

### 5.1. ДЕФОРМАЦИОННАЯ ИДЕАЛЬНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ

Данная модель является обобщением упругой и жесткопластической среды с внутренним трением. Реализация модели в деформационной постановке гарантирует единственность получаемых решений, соосность напряжений и деформаций. В литературе известен ряд аналитических решений задач для такой среды, что позволило провести сопоставление ряда полученных численных решений с точными аналитическими. Модель по существу сочленяет две теории, на которых базируется современная механика грунтов: теорию упругости и теорию предельного состояния; для описания модели достаточно обычного набора механических характеристик, получаемых при инженерно-геологических исследованиях. Такая простота модели, ее тесная связь с традиционным аппаратом механики грунтов обеспечили ей довольно широкое использование при решении разнообразных задач.

Описание модели среды (плоская деформация). Если напряжения в среде не превосходят заданного предельного уровня, связь напряжений и деформаций описывается законом Гука, который для условий плоской деформации может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_{\Pi} (\epsilon_1 + \nu_{\Pi} \epsilon_3) / (1 - \nu_{\Pi}^2) \\ \sigma_3 &= E_{\Pi} (\epsilon_3 + \nu_{\Pi} \epsilon_1) / (1 - \nu_{\Pi}^2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $E_{\Pi} = E / (1 - \nu^2)$ ;  $\nu_{\Pi} = \nu / (1 - \nu)$  — "плоские" аналоги модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Предельные напряжения в области растяжения ограничиваются прочностью на растяжение  $T (T < 0)$ :

$$\sigma_3 = T, \quad (5.2)$$

а в области сжатия — критерием Кулона:

$$\sigma_1 = S + \operatorname{ctg} \psi \sigma_3, \quad (5.3)$$

где  $S = 2C \operatorname{ctg} (45^\circ - \frac{\varphi}{2})$ ,  $\operatorname{ctg} \psi = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi)$ ,  $C, \varphi$  — сцепление и угол внутреннего трения.

Уравнения (5.2) и (5.3) на рис. 5.1, а описывают прямые  $AB$  и  $BD$ . В программах "Геомеханика" прочность на растяжение  $T$  автоматически принимается равной  $C/5$  для элемента, не вышедшего в пластику, и равной нулю для элемента, вышедшего в пластику на предыдущих циклах итерации.

Подставив соотношения (5.1) в формулы (5.2) и (5.3), получим

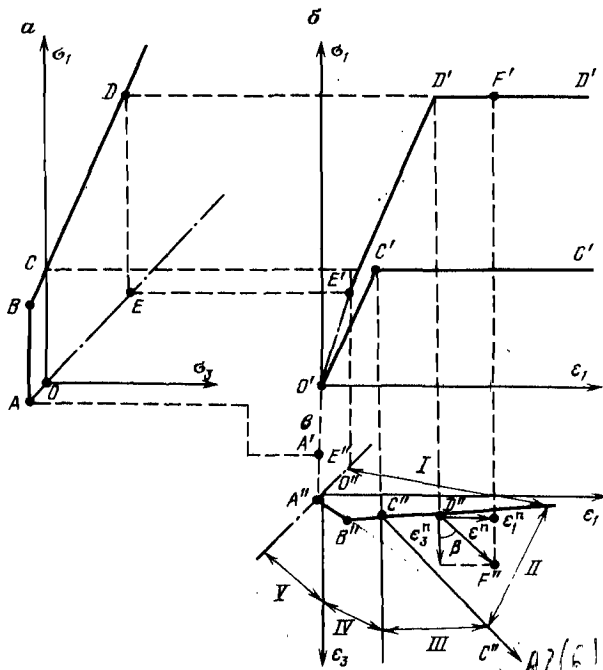


Рис. 5.1. Комплекс графиков, характеризующих свойства идеальной упругопластической среды в условиях плоской деформации:

$a$  — в осях  $\sigma_1, \sigma_3$ ;  $b$  — в осях  $\sigma_1, \epsilon_1$ ;  $в$  — в осях  $\epsilon_1, \epsilon_3$

описание пределов прочности (упругости) через главные деформации:

$$f_1 = [(E_{\text{п}} \epsilon_1 - S) (1 - \nu_{\text{п}} \text{ctg } \psi) / (\text{ctg } \psi - \nu_{\text{п}}) - \nu_{\text{п}} S] / E_{\text{п}} - \epsilon_3 = 0, \quad (5.4)$$

$$f_2 = T(1 - \nu_{\text{п}}^2) / E_{\text{п}} - \nu_{\text{п}} \epsilon_1 - \epsilon_3 = 0. \quad (5.5) \quad \checkmark$$

Уравнения (5.4) и (5.5) описывают на рис. 5.1, б прямые  $B''D''$  и  $A''B''$  соответственно. Контур  $EABD$  на рис. 5.1, а характеризует область упругих напряжений, а контур  $E''A''B''D''$  на рис. 5.1, в — область упругих деформаций.

Таким образом, в области I по известным деформациям  $\epsilon_1, \epsilon_3$  напряжения  $\sigma_1, \sigma_3$  могут быть найдены по формулам (5.1). За пределами контура  $E''A''B''D''$  действуют иные уравнения связи деформаций и напряжений. В рассматриваемой деформационной модели предполагается, что весь процесс пластического деформирования являлся непрерывным сжатием в направлении  $\sigma_1$  и расширением в направлении  $\epsilon_3$ . Лишь при этом условии обеспечивается однозначная зависимость напряжений от деформаций за пределами упругости.

Пусть в процессе нагружения деформированное состояние элемента среды вышло в точку  $D$  на границе зоны упругости (рис. 5.1, в). Рассмотрим закономерности дальнейшего пластического деформирования, протекающего в условиях  $\sigma_3 = \text{const}$ , т.е. при постоянном минимальном главном напряжении.

Увеличение деформации  $\epsilon_1$  (укорочение) сопровождается уменьшением деформации  $\epsilon_3$  (расширением в перпендикулярном направлении). Полный вектор пластических деформаций  $\epsilon^{\text{II}}$  ( $D''F''$  на рис. 5.1, в) при этом состоит из двух компонентов  $\epsilon_1^{\text{II}}$  и  $\epsilon_3^{\text{II}}$ , а взаимосвязь этих компонентов определяется соотношением.

$$\epsilon_3^{\text{II}} = - \text{ctg } \beta \epsilon_1^{\text{II}}.$$

Угол  $\beta$  определяет закон пластического течения: при  $\beta = \frac{\pi}{4}$  течение является равнообъемным, при  $\beta = \psi$  соотношение (5.6) соответствует ассоциированному закону течения.

Упругие компоненты  $\epsilon_1^{\text{Y}}$  и  $\epsilon_3^{\text{Y}}$  являются координатами точки  $D''$ , и определить их не составляет труда как координаты точки пересечения прямой  $B''D''$ , описываемой уравнением (5.4), и прямой  $D''F''$ , проходящей через заданную точку  $F''$  с координатами  $\epsilon_1, \epsilon_3$  под заданным углом  $\beta$  к вертикали. Найденные таким образом компоненты  $\epsilon_1^{\text{Y}}$  и  $\epsilon_3^{\text{Y}}$  подставляются в уравнения закона Гука (5.1), и вычисленные по ним напряжения соответствуют любой точке на луче  $D''F''$ , в том числе и заданной точке  $F$  зоны II:

$$\sigma_3 = [E_{\text{II}} (\epsilon_1 + \epsilon_3) + S (\nu_{\text{II}} - 1)] / (1 - \nu_{\text{II}} \text{ctg } \beta + \text{ctg } \beta - \nu_{\text{II}}) \quad (5.7)$$

$$\sigma_1 = S + \sigma_3 \text{ctg } \psi. \quad (5.8)$$

Если деформации рассматриваемого элемента среды характеризуются точкой в зоне III (см. рис. 5.1, в), то этот элемент будет разорван в направлении  $\epsilon_3$ ; соответственно  $\sigma_3 = 0$ , т.е. элемент перейдет в условия одноосного сжатия, и при этом  $\sigma_1 = S$ .

В зоне IV элемент также будет разорван в направлении  $\epsilon_3$ , т.е.  $\sigma_3 = 0$ , но поскольку деформация  $\epsilon_1$  меньше предельной величины, то напряжение  $\sigma_1$  определится законом Гука (при одноосном сжатии  $\sigma_1 = E_{\text{II}} \epsilon_1$ ). В зоне V элемент будет разорван в обоих направлениях, т.е.  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ .

Таким образом, полностью и однозначно определены теоретические главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , которые будет иметь элемент данной среды при заданных деформациях  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$ .

Общий алгоритм получения конечно-элементного решения методом начальных напряжений имеет следующий вид.

1. Ввод информации об узлах и элементах.
2. Формирование векторов заданных узловых сил  $\{F^c\}$  и перемещений  $\{\delta^c\}$ .
3. Засылка нулей в поле хранения начальных напряжений в элементах  $\{\sigma\}_n$ .
4. Формирование МЖС (матрицы жесткости системы).

5. Вычисление обращенной МЖС (первая часть решения системы уравнений).

6. Вычисление неизвестных перемещений в векторе  $\{\delta^c\}$  по текущему значению вектора сил  $\{F^c\}$  (завершение решения системы уравнений).

7. Для каждого из элементов выполняются операции 8—20.

8. Вычисляются относительные деформации  $\epsilon$ .

9. По деформациям  $\{\epsilon\}$  и формулам закона Гука вычисляются упругие напряжения:

$$\{\sigma\}_y = [D] \{\epsilon\}.$$

10. Вычисляются фактические напряжения путем вычитания ранее накопленных начальных напряжений из упругих:

$$\{\sigma\}_\Phi = \{\sigma\}_y - \{\sigma\}_n.$$

11. Вычисляются главные фактические напряжения  $\{\sigma\}_\Phi = \{\sigma_\Phi^1 \quad \sigma_\Phi^3 \quad \alpha\}^T$  по формулам:

$$\sigma_\Phi^1, \sigma_\Phi^3 = \frac{1}{2} [(\sigma_\Phi^x + \sigma_\Phi^y) \pm \sqrt{(\sigma_\Phi^x - \sigma_\Phi^y)^2 + 4\tau_{xy}^{\Phi 2}}],$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right) \text{arctg} \left( \frac{\tau_{xy}^\Phi}{\sigma_\Phi^1 - \sigma_\Phi^3} \right).$$

12. Вычисляются главные деформации  $\{\epsilon\}_\Gamma = \{\epsilon_\Gamma^1 \quad \epsilon_\Gamma^3 \quad \rho\}^T$  по формулам:

$$\epsilon_\Gamma^1, \epsilon_\Gamma^3 = \frac{1}{2} [(\epsilon_x + \epsilon_y) \pm \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}],$$

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right) \text{arctg} \frac{\gamma_{xy}}{2(\epsilon_1 - \epsilon_3)}.$$

13. По формулам (5.7) и (5.8) определяются "теоретические" главные напряжения  $\{\sigma\}_\Gamma$ , которые имела бы заданная упругопластическая среда при деформациях  $\{\epsilon\}_\Gamma$ .

14. Вычисляются осевые теоретические напряжения  $\{\sigma\}_\tau = \{\sigma_x^\tau, \sigma_y^\tau, \tau_{xy}^\tau\}^T$  по формулам:

$$\sigma_x^\tau = \sigma_1^\tau \cos^2 \rho + \sigma_3^\tau \sin^2 \rho,$$

$$\sigma_y^\tau = \sigma_1^\tau \sin^2 \rho + \sigma_3^\tau \cos^2 \rho,$$

$$\tau_{xy}^\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1^\tau - \sigma_3^\tau) \sin 2\rho.$$

Примечание: использование в формулах угла  $\rho$  обеспечивает соосиальность главных деформаций и напряжений.

15. Вычисляются приращения начальных напряжений  $\{\Delta \sigma\}_n$ :

$$\{\Delta \sigma\}_n = k \left( \{\sigma\}_\Phi - \{\sigma\}_T \right)$$

$k$  — коэффициент ускорения сходимости итерационного процесса.

Наилучшие результаты достигаются при  $k = 1,5$ .

16. Накопление начальных напряжений:

$$\{\sigma\}_n = \{\sigma\}_n + \{\Delta \sigma\}_n$$

17. Вычисление "начальных" узловых сил элемента по формуле

$$\{F\}_n = [B]^T \{\Delta \sigma\}_n$$

18. Добавление начальных узловых сил элемента к вектору сил системы  $\{F^c\}$ :

$$\{F^c\} = \{F^c\} + \{F\}_n$$

19. Проверка достигнутой точности решения: если хоть один компонент напряжений  $\{\Delta \sigma\}_n$  превышает заданную допустимую величину, то вводится признак необходимости продолжения итерации.

20. Конец цикла по элементам.

21. Если признак продолжения итерации введен (необходимая точность не достигнута), то вновь выполняются все операторы, начиная с номера 6.

22. Печать выводимой информации.

23. Конец.

Сущность выполняемых операций в основной области неупругих деформаций ( $II$  на рис. 5.1) сводится к следующему. В результате первого решения в рассматриваемом элементе вычисляются напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , выходящие за предельный график (рис. 5.2). Круг "теоретических" напряжений  $\sigma_1^T$  и  $\sigma_3^T$  касается предельного графика. Положение центра "теоретического" круга определяется принятым законом течения: если течение равнообъемное ( $\beta = \frac{\pi}{4}$ ), то средние напряжения в заданном и теоретическом напряженных состояниях должны быть одинаковы, т.е. центры кругов совпадают. Если среда разрыхляется (дилатирует) при пластическом течении ( $\beta <$

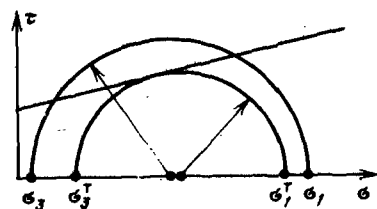


Рис. 5.2. Графическое изображение положения круга теоретических напряжений

$< \frac{\pi}{4}$ ), то среднее напряжение возрастает и центр теоретического круга лежит правее центра исходного круга, и наоборот.

Наибольшее число расчетов было проведено для сред с равнообъемным течением. Такая модель среды близка по деформационным характеристикам к грунтам средней плотности, итерационный процесс для нее сходится быстро.

Комплекс свойств, которыми наделена модель среды, позволяет исследовать области не только сдвигового неупругого деформирования, но и области с разрывами. Текст этого варианта программы с подробными инструкциями по использованию приводится в приложении.

Ниже рассматриваются примеры решения некоторых геотехнических задач по этой программе.

### 5.1.1. Задача Галина

Рассматриваемое ниже решение [43] представляет интерес лишь как сопоставление численного решения с точным аналитическим. Решение задачи о распределении напряжений и деформаций вокруг круглого отверстия в плоском негидростатическом поле напряжений в идеальной упруго-пластической среде с критерием пластичности Треска является одним из немногих точных аналитических упруго-пластических решений. Оно получено Л.А. Галиным.

Критерий пластичности Треска является частным случаем критерия Кулона. Действительно, подстановка значения угла внутреннего трения  $\varphi = 0$  в критерий Кулона (1.19) превращает его в области сжатия в критерий Треска.

Для сопоставления конечно-элементного решения с решением Л.А. Галина были взяты следующие свойства среды:  $E = 10^3$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $C = 1,0$  МПа. Сеть конечных элементов и граничные условия приведены на рис. 5.3.

Для того чтобы выяснить характер роста зоны пластических деформаций с изменением напряжения, задача решалась в двух вариантах. В первом варианте напряжения  $\sigma_y = 3$  МПа и  $\sigma_x = 2,4$  МПа

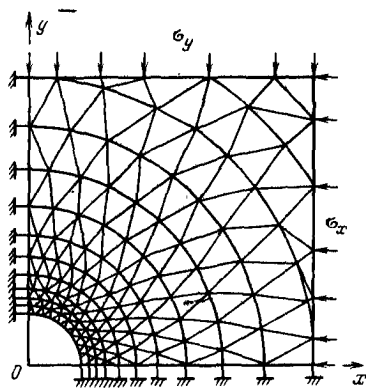


Рис. 5.3. Конечно-элементная расчетная схема для круглого отверстия

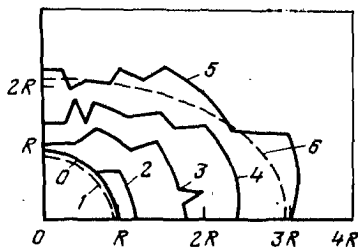


Рис. 5.4. Решение задачи Л.А. Галина: 0 — исходный контур отверстия; 1 — контур после погружения; 2 — 5 — границы пластических зон после 2, 3, 4, 5 шагов нагружения; 6 — контур пластической зоны по аналитическому решению

Таблица 5.1

$r/R$	Напряжение (МПа) на горизонтальной оси				$r/R$	Напряжение (МПа) на вертикальной оси			
	по Галину	по МКЭ	по Галину	по МКЭ		по Галину	по МКЭ	по Галину	по МКЭ
	$\sigma_y$		$\sigma_x$			$\sigma_x$		$\sigma_y$	
1	0	0,1	2	2,07	1	0	0	2	2,08
1,28	0,49	0,49	2,49	2,62	1,14	0,27	0,39	2,27	2,39
1,8	1,18	1,20	3,18	3,37	1,28	0,49	0,58	2,49	2,58
2,14	1,52	1,50	3,52	3,60	1,64	0,99	1,10	2,99	2,88
2,57	1,89	1,85	3,89	3,92	—	—	—	—	—

прикладывались целиком, во втором — задавались приращениями в пять ступеней. Результаты расчетов по этим вариантам, соответствующие полной нагрузке, совпадают.

На рис. 5.4 приведены перемещения точек контура отверстия и рост зоны пластических деформаций. По полученному решению контур пластической зоны 5 представляет собой эллипсоподобную фигуру с большой полуосью  $a \approx 3,14R$  и малой полуосью  $b = 1,77R$  ( $R$  — радиус отверстия). Из решения Л.А. Галина следует, что зона пластических деформаций имеет вид эллипса с полуосями  $a = 3,05R$ ,  $b = 1,64R$ .

Напряжения вблизи контура отверстия равны пределу прочности на одноосное сжатие, а вдали от контура на поверхности равны заданным напряжениям. Сопоставление напряжений в пластической зоне по Галину и МКЭ приведено в табл. 5.1. Даже при сравнительно крупной сети элементов аналитическое и численное решения очень близки, особенно в отношении перемещений контура, представляющих на практике наибольший интерес.

### 5.1.2. Устойчивость насыпи на слабом основании

На одном из горнодобывающих предприятий встал вопрос об определении предельно допустимой высоты внутреннего автомобильного отвала [14]. В основании отвала залегают твердые глины, однако фильтрующаяся в основании вода замачивает поверхностный слой глины и переводит его в пластическое состояние. Тело отвала сложено грунтами типа супесей. Прочностные показатели отвальной массы и контактного слоя определены натурными крупномасштабными испытаниями (табл. 5.2). Упругие характеристики выбраны приближенно по таблицам СНиП.

Сеть конечных элементов изображена на рис. 5.5. Напряжения на уровне подошвы отвала пропорциональны величине  $\gamma H$ , т.е. увеличение высоты откоса  $H$  при постоянной величине удельного веса  $\gamma$  вызывает такое же увеличение напряжений, как увеличение  $\gamma$  при постоянной величине  $H$ . Изменение высоты откоса в серии



Таблица 5.2

Грунт	Показатели, характеризующие свойства грунтов				
	С, МПа	Е, МПа	$\nu$	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , градус
Отвальная масса	0,07	100	0,3	20	17
Контактный слой	0,02	100	0,4	20	10

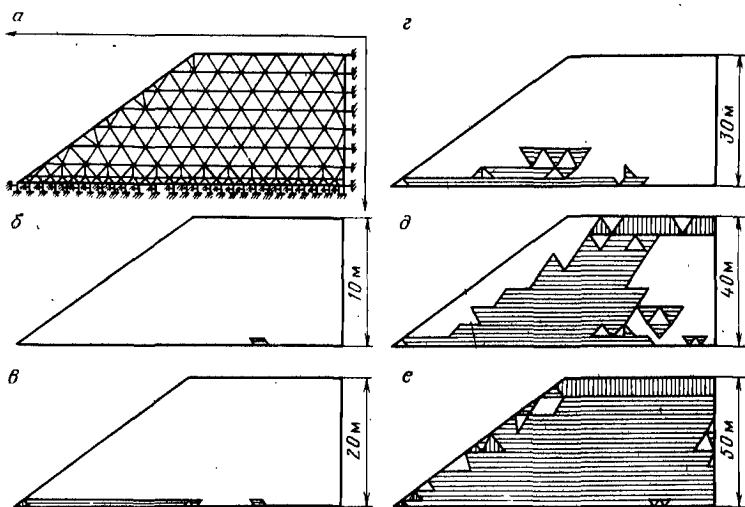
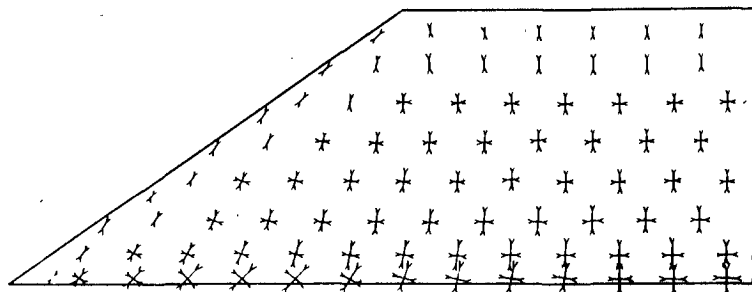
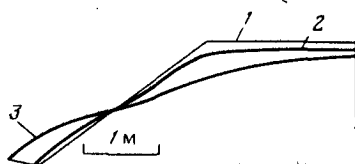


Рис. 5.5. Схема сети конечных элементов (а) и контуры пластических зон в отвале различной высоты (б — е)

Рис. 5.6. Контур отвала:

1 — исходный; 2 — контур отвала высотой 40 м; 3 — контур 50-метрового отвала на некоторый момент оползания (масштаб перемещения указан на рисунке)

Рис. 5.7. Векторы главных напряжений в теле отвала высотой 40 м



последовательных решений с целью поиска предельной величины  $H$  потребовало бы изменения всей информации, касающейся координат узлов.

Поиск предельной высоты откоса оказалось возможным выполнить гораздо проще: информация о координатах была подготовлена в расчете на откос высотой в 10 м, а величина  $\gamma$  умножалась на 1, 2, 3 и т.д. при постоянном объемном весе.

Кроме того, программа "Геомеханика" позволяет все задаваемые нагрузки, в том числе и объемный вес, делить на заданное число частей. Эти части автоматически последовательно прибавляются по одной, и после каждого шага нагружения на печать выдаются результаты счета.

Таким образом, в данной задаче была задана плотность  $5\gamma$  и 5 ступеней нагружения, т.е. были просчитаны откосы высотой 10, 20, 30, 40 и 50. Все это потребовало около 1 ч машинного времени.

Последовательность развития пластической зоны в откосах различной высоты показана на рис. 5.5, б, в, г, д, е. Последнее устойчивое решение соответствовало высоте откоса 40 м; при высоте 50 м итерационный процесс стал безостановочным. Выданные на печать через 100 циклов итерационные перемещения соответствовали некоторому положению в процессе оползания откоса (рис. 5.6). Следует отметить, что в карьере действительно имел место оползень отвала, когда его высота была увеличена до 45 м. В элементах контактного слоя, находящихся в предельном состоянии, векторы  $\sigma_1$  были наклонены к направлению сдвига под углом  $\sim 40^\circ \approx (45^\circ - \varphi/2)$  (рис. 5.7), как и должно быть теоретически.

### 5.1.3. Задача о проходимости тяжелого экскаватора

Перегон тяжелого драглайна массой 12 тыс. с монтажной площадки до карьера по заболоченному грунту по предложению проф. Г.Л. Фисенко проводили, когда слой сезонной мерзлоты достигает 2 м. Наибольшее давление на грунт развивалось при опоре драглайна на две опорные лыжи, имеющие длину 40 м и ширину 4 м каждая. Напряженное состояние грунта под лыжей таких размеров можно рассматривать как плоскую деформацию, а задачу считать вполне эквивалентной задаче о предельной нагрузке на ленточный фундамент.

Следует отметить, что расчет предельных нагрузок является "узким местом" в механике грунтов. Ряд приближенных расчетных схем разработан лишь для однородных грунтов с такими приближениями, что результаты расчетов, как правило, оказываются весьма далеки от реальных величин.

Для таких резко неоднородных оснований, как мерзлый слой на пластичной глине, приемлемых расчетных схем вообще нет.

Сеть конечных элементов приведена на рис. 5.8, элементам были присвоены свойства грунтов (табл. 5.3).

Нагрузка от экскаватора имитируется узловыми силами, приложенными сверху. Мерзлый слой проламывается, как плита, а не продавливается. Под лыжей образуются разрывы в нижней части слоя, а на некотором удалении от нее — в верхней. В подмерзлом грунте образуется небольшая пластическая область. Однако в целом решение устойчивое. Контур поверхности под нагрузкой также показан на рис. 5.8. Экскаватор благополучно

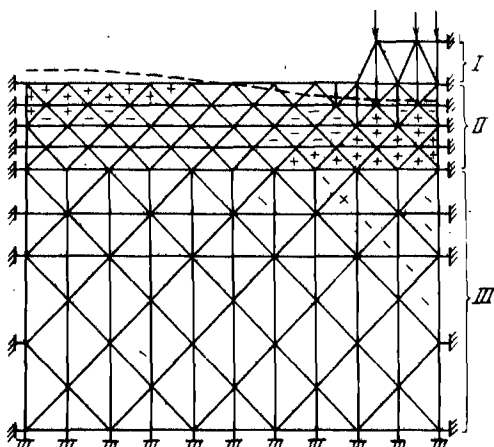


Рис. 5.8. Схема к задаче о проходимости экскаватора:

I — лыжа экскаватора; II — мерзлый слой; III — талый грунт

пошел по трассе, а проводившиеся наблюдения показали, что осадки были близки к расчетным.

Устойчивым оказалось и решение при удвоенной величине приложенных сил, что свидетельствует о более чем двукратной величине запаса несущей способности. На рис. 5.8 знаком " + " обозначены элементы мерзлого слоя, разорванные как в первом, так и во втором решении, а знаком " - " — разорванные только во втором решении, аналогично знаками "x" и "/" обозначены элементы талого слоя, вышедшие в пластику по механизму сдвига в обоих решениях и только во втором решении.

При анализе осадок следует иметь в виду следующее. Приводимый вариант программы "Геомеханика" предусматривает одновременное приложение всех нагрузок — массы экскаватора и собственного веса грунта. Поэтому рассчитанные осадки включают и осадки от собственного веса грунта, которых в натуре мы не наблюдаем. Для выделения в чистом виде осадок от дополнительной нагрузки, осадки от собственного веса грунта в пределах рассматриваемой толщи следует вычесть из общих осадок.

Таблица 5.3

Характеристика грунта	Показатели, характеризующие свойства грунтов				
	$C$ , МПа	$E$ , МПа	$\nu$	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , градус
Мерзлый слой	1	1000	0,3	20	17
Талый грунт	0,035	35	0,4	20	14

Осадку  $S$  толщи глубиной  $H$  от собственного веса можно рассчитать отдельно вручную по формуле

$$S = [\gamma H^2 (1 - \nu - 2\nu^2)] / [2E(1 - \nu)],$$

либо получить конечно-элементное решение с учетом собственного веса грунта (при отсутствии дополнительных нагрузок).

Если анализ ведут только в упругой постановке, то во избежание выхода элементов в пластику им следует задавать заведомо высокие прочностные свойства.

#### 5.1.4. Расчет давления на обделку тоннеля

На рис. 5.9 приведена схема задачи о расчете нормальных и касательных напряжений на контакте породы и бетонной обделки тоннеля [1]. Там же изображены рассчитанные эпюры  $\sigma$  и  $\tau$ . Массив принимался невесомым, а нагрузка от собственного веса пород ( $\gamma h = 30$  МПа) на отметке расположения оси тоннеля переносилась на верхнюю границу области. Решение проведено в трех вариантах при условиях, приведенных в табл. 5.4.

Однако эта задача наиболее сложная, и результаты решения не являются достоверными, поскольку обделку фактически возводят тогда, когда выработка уже пройдена и массив претерпел процесс упругого восстановления. Это обстоятельство, а также реологические свойства пород и временную последовательность проходки, возведения обделки и твердения бетона необходимо учитывать при расчете давления пород на обделки тоннелей.

Таблица 5.4

Материал	Показатели, характеризующие свойства грунтов				
	$C$ , МПа	$E$ , МПа	$\nu$	$\varphi$ , градус	Мощность слабого слоя
Бетон	$10^4$	$25 \cdot 10^3$	0,2	30	—
Порода	3,43	$6 \cdot 10^3$	0,2	30	—
Пластичный слой:					
I вариант	1,72	$3 \cdot 10^3$	0,48	30	$m_1 = R$
II вариант	0,343	$0,6 \cdot 10^3$	0,48	30	$m_2 = R$
III вариант	0,343	$0,6 \cdot 10^3$	0,48	30	$m_3 = R/2$

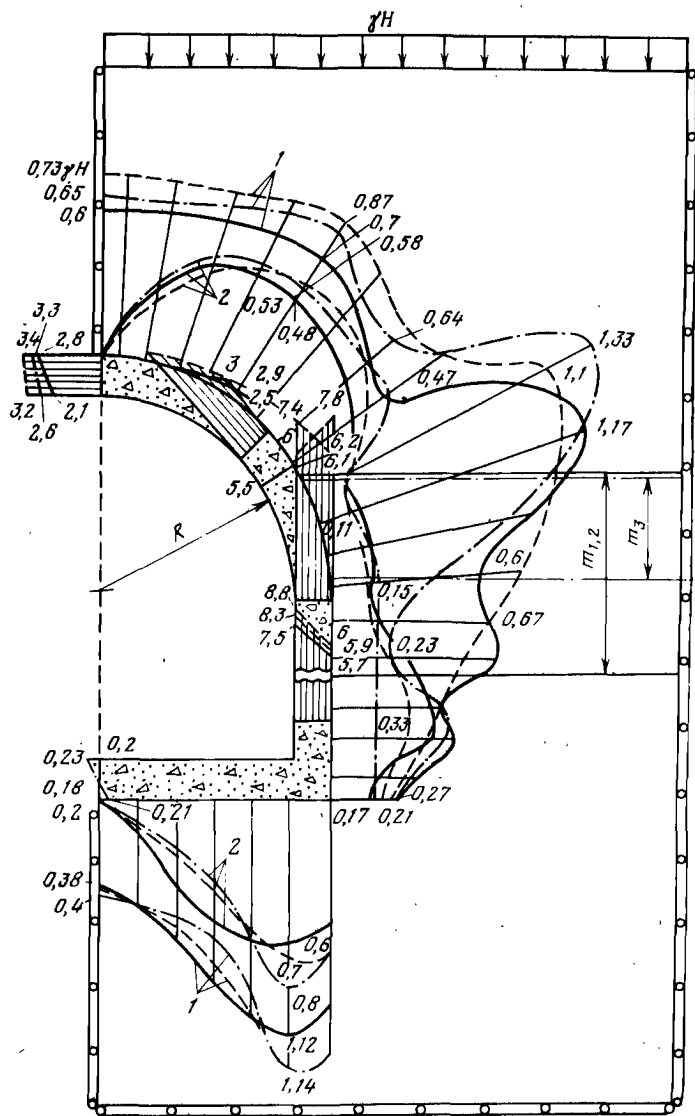


Рис. 5.9. Эпюры нагрузок на обделку и напряжений в обделке тоннеля:

1 — нормальных; 2 — касательных (сплошная линия — I вариант нагружения, штриховая — II вариант; штрих-пунктирная — III вариант)

### 5.1.5. Исследование зависимости осадки жесткого полосового фундамента от нагрузки

Расчеты проведены Х.З. Бакеновым по схеме, приведенной на рис. 5.10, при свойствах грунта, близких к свойствам ленинградских ленточных глин:  $E = 1,4$  МПа,  $\nu = 0,4$ ,  $\gamma = 0,0192$  МН/м<sup>3</sup>,  $C = 0,04$  МПа,  $\varphi = 10^\circ$ . Элементом фундамента заданы высокие прочностные свойства, чтобы избежать их неожиданного разрушения. Первоначально они были наделены свойствами грунта, и рассчитывалась осадка лишь под действием сил тяжести. В серии последующих решений элементам фундамента были присвоены их реальные свойства, и кроме сил тяжести прикладывалась нагрузка на фундамент, соответствующая дополнительной удельной нагрузке по подошве фундамента  $p = 90; 180; 270; 362; 422; 430; 440; 460$  кН/м<sup>2</sup>. Последнее устойчивое решение получено при  $p = 422$  кН/м<sup>2</sup>. Дальнейшее увеличение нагрузки приводило к несходимости итерационного процесса, т.е. к математической неустойчивости, что свидетельствует о потере устойчивости основания. На рис. 5.11 приведен построенный по результатам решения график зависимости осадки фундамента от нагрузки. Интересно сопоставить результаты расчетов с нормативными значениями удельных расчетной и предельной нагрузок.

СНиП 2.02.01-83 определяет расчетную удельную нагрузку  $R$  как нагрузку, при которой глубина зон предельного состояния ниже подошвы фундамента равна 1/4 ширины подошвы. Для наших условий по формуле СНиП имеем:

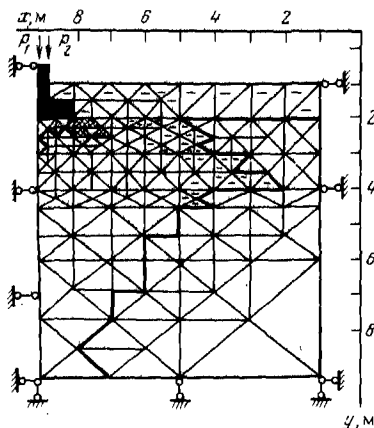


Рис. 5.10. Графическое изображение развития зон пластических деформаций под жестким ленточным фундаментом

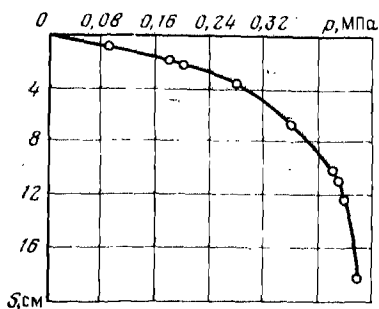


Рис. 5.11. Зависимость осадки жесткого полосового фундамента от давления

$$R = \frac{\gamma_{c1} - \gamma_{c2}}{k} [M_{\gamma} k_z b \gamma_{II} + M_q (d_1 + d_b) \gamma'_{II} + M_c C'_{II} - d_b \gamma'_{II}] = \frac{1 \cdot 1}{1} [0,18 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 19,2 + 1,73 \cdot 1 \cdot 1,92 + 4,17 \cdot 40 - 0] = 206,82 \text{ кН/м}^2.$$

Элементы предельной зоны при удельной нагрузке  $p = 210 \text{ кН/м}^2$ , полученной МКЭ, на рис. 5.10 заштрихованы. Глубина ее равна примерно 1/4 ширины фундамента. Связь осадок и нагрузок близка к линейной приблизительно до этой же величины нагрузки (см. рис. 5.11). Как видим, результаты аналитического и конечно-элементного расчетов достаточно близки.

Удельная максимальная нагрузка при данных грунтовых условиях, соответствующая потере устойчивости основания, составляет при данных размерах фундамента по формуле СНиП 2.02.01-83:

$$p_{\text{пр}} = N_{\gamma} \xi_{\gamma} b' \gamma_I + N_q \xi_q \gamma_I^d + N_c \xi_c C_I = 0,6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 19,2 + 2,47 \cdot 1 \cdot 19,2 \cdot 1 + 8,34 \cdot 1 \cdot 40 = 393,5 \text{ кН/м}^2.$$

Эти цифры также близки к удельной нагрузке в последнем устойчивом решении МКЭ ( $430 \text{ кН/м}^2$ ). Контур пластической зоны при этом, обведенный жирной линией на рис. 5.10, охватывает большую зону под основанием. (Знаком — отмечены разорванные элементы).

Таким образом, МКЭ позволяет рассчитывать осадки фундамента с учетом развития пластических деформаций в основании и прогнозировать величину предельной нагрузки.

### 5.1.6. Давление на шпунтовое ограждение

Вдоль длинного здания проектируется отрывка глубокой траншеи под шпунтовыми ограждениями [14]. До рытья котлована между шпунтовыми стенками устанавливают жесткие распорки  $p$  (рис. 5.12). Требуется определить усилие в распорке и оценить осадку здания. Шпунт типа "Ларсен" II — IV, ширина шпунта — 0,4 м, жесткость одной шпунтины ( $EI$ )<sub>ш</sub> = 83160 кН/м<sup>2</sup>. Грунтовые условия: до глубины 8 м — ленточные глины, с глубины 8 м — морена. Показатели грунтов приведены в табл. 5.5.

Элементам фундаментных блоков приданы свойства бетона ( $E = 0,2 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0,25$ ). Вопрос о прочности фундамента в данной задаче не стоит, поэтому во избежание итераций из-за разрушения фундаментных элементов им задаются заведомо высокие прочностные свойства  $C = 1 \text{ МПа}$ ,  $\varphi = 45^\circ$ . Погонная нагрузка 1000 кН/м задана на уровне подошвы фундамента, поэтому у элементов фундаментных блоков принимается  $\gamma = 0$ .

Прорисовка шпунтовой стенки реальной толщины потребовала бы чрезвычайно мелких элементов, что сильно увеличило бы объем

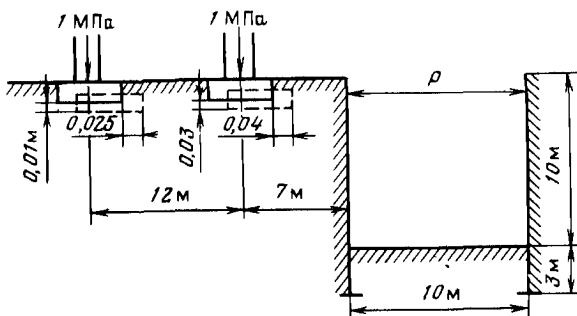


Рис. 5.12. Схема к задаче о давлении на шпунтовые ограждения

Таблица 5.5

Вид грунта	Показатели, характеризующие свойства грунтов				
	$E$ , МПа	$\nu$	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$C$ , МПа	$\varphi$ , градус
Ленточные глины Морена	0,6	0,45	19,5	0,02	10
	3	0,3	21,0	0,1	30

информации. Поэтому стенка имитируется двумя рядами довольно крупных элементов, наделенных таким модулем упругости, что жесткость фиктивной стенки толщиной 1 м равна жесткости реальной шпунтовой стенки. В условиях плоской задачи рассматривается плоский слой толщиной 1 м. На 1 м уместится 2,5 шпунтины, т.е. реальная жесткость шпунтовой стенки в слое толщиной 1 м составляет

$$(EI)_p = 2,5 (EI)_{ш} = 2,5 \cdot 83160 \text{ кН м}^2.$$

Момент инерции фиктивной шпунтовой балки шириной 1 м

$$I_{\phi} = bh^3/12 = 1/12 \text{ м}^4.$$

Исходя из условия равенства жесткостей реальной и фиктивной шпунтовых стенок, можно определить модуль деформации элементов, составляющих фиктивную стенку:

$$E_{\phi} = \frac{2,5 (EI)_{ш}}{I_{\phi}} = \frac{2,5 \cdot 83160 \cdot 12}{1} = 2,49 \text{ МПа.}$$



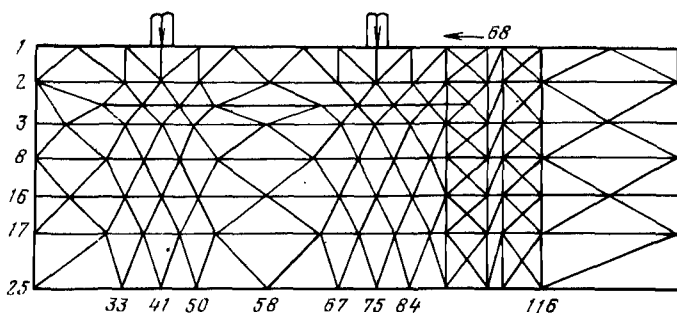


Рис. 5.13. Конечно-элементная схема

Прочность шпунтовой стенки не рассматривается, поэтому элементам придаются заведомо высокие прочностные свойства, исключающие выход их в предельное состояние:

$$C = 1 \text{ МПа}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Схема разбивки на конечные элементы изображена на рис. 5.13.

Задача решается в два приема. Сначала элементы внутри траншеи наделяются всеми свойствами, присущими грунту, и рассчитывается ситуация до рытья траншеи. Нас интересуют осадки фундаментов зданий и горизонтальное перемещение шпунта.

Затем приступают ко второму этапу решения. При этом элементам внутри траншеи придаются модуль упругости  $E = 0$  и объемный вес  $\gamma = 0$ , что эквивалентно удалению грунта из траншеи. Точке 68 задается горизонтальное перемещение, полученное из первого решения, этим учитывается факт установки распорки после строительства здания, но до рытья траншеи. Одновременно точкам 1, 2, 3, 8, 16 и 17 задаются вертикальные перемещения, а точкам 33, 41, 50, 58, 67, 75, 84, 116 — горизонтальные перемещения, полученные из первого решения, этим учитывается наличие грунта за границами рассматриваемой области.

В результате отрывки траншеи ближайший к ней фундамент опустился на 3 см и получил перемещение в сторону траншеи на 4 см, а дальний фундамент опустился на 1 см и переместился на 2,5 см (см. рис. 5.12). Усилие в распорке  $p$  составляет 587 кН.

#### 5.1.7. Упругая задача в условиях плоского напряженного состояния

Приводимая в приложении программа может быть использована для получения упругого (но не упругопластического) решения в условиях плоского напряженного состояния. Для этого необходимо [14]:

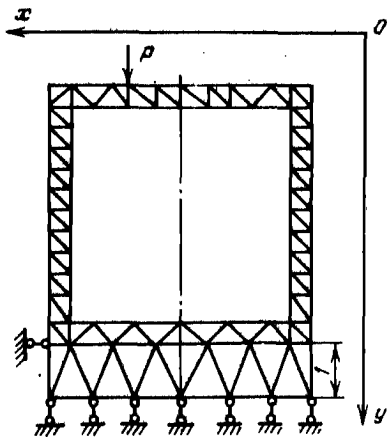


Рис. 5.14. Графическое изображение плоской рамы на винклеровском основании

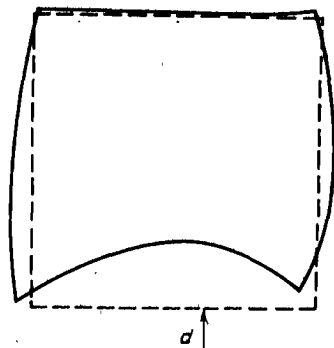


Рис. 5.15. Изогнутая ось рамы под нагрузкой

а) вводить не истинные величины модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , а фиктивные, определяемые по формулам:

$$E_{\Phi} = E \frac{1 + 2\nu}{(1 + \nu)^2}; \quad \nu_{\Phi} = \frac{\nu}{1 + \nu};$$

б) вводить не истинные узловые силы  $F$  и удельный вес  $\gamma$ , а фиктивные, определяемые по формулам

$$F_{\Phi} = F/b; \quad \gamma_{\Phi} = \gamma/b,$$

где  $b$  — толщина плоской конструкции;

в) показатели, характеризующие прочностные свойства, задавать заведомо большими, гарантирующими получение упругого решения, например,  $C = 1$  МПа,  $\varphi = 45^\circ$ .

*Пример.* Рассмотрим расчет упругой рамы на винклеровском основании при эксцентричном нагружении (рис. 5.14). Балка железобетонная сечением  $0,4 \times 4$  м. Показатели, характеризующие свойства бетона:  $E = 0,02$  МПа,  $\nu = 0,25$ , нагрузка  $p = 100$  кН. Коэффициент постели  $k_{\text{п}} = 10^5$  кН/м<sup>3</sup>. Фиктивные значения упругих характеристик рамы:  $E = 0,0192$  МПа,  $\nu = 0,2$ . Фиктивное значение нагрузки  $F_{\Phi} = 250$  кН.

Местное упругое основание имитируется слоем элементов толщиной  $1$  м с модулем упругости  $E = 0,1$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0$ . Слой толщиной в единицу длины обладает коэффициентом постели, равным модулю упругости. Фиктивные значения упругих характеристик для слоя равны истинным:  $E_{\Phi} = E$ ,  $\nu_{\Phi} = \nu = 0$ . Форма нейтральной оси рамы до и после приложения нагрузки показана на рис. 5.15. Для повышения точности решения балку следовало бы разбить на более мелкие элементы.

## 5.2. СРЕДА С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

Одна из программ "Геомеханика" [13] реализует деформационную модель среды с разупрочнением. Комплекс графиков, характеризующих среду, изображен на рис. 5.16. Прямая  $BD$  на рис. 5.16 характеризует начальную прочность и имеет уравнение

$$\sigma_1^{\text{нр}} = S + \text{ctg } \psi \sigma_3. \quad (5.9)$$

Отрезок  $MN$  характеризует остаточную сопротивляемость и имеет уравнение

$$\sigma_1^{\text{ост}} = S^{\text{ост}} + \text{ctg } \psi^{\text{ост}} \sigma_3. \quad (5.10)$$

При величине  $\sigma_3 \geq \sigma_3^N$  разупрочнения в ходе запредельного деформирования не происходит. Если же  $\sigma_3 < \sigma_3^N$ , то снижение предельной величины  $\sigma_1$  от  $\sigma_1^{\text{нр}}$  до  $\sigma_1^{\text{ост}}$  принято линейным, причем сопротивляемость снижается до остаточной при величине деформации  $\epsilon_1$ , в 3 раза превышающей предельную упругую деформацию  $\epsilon_1^y$ , равную:

$$\epsilon_1^y = [S + \sigma_3 (\text{ctg } \psi - \nu_n)] / E_n. \quad (5.11)$$

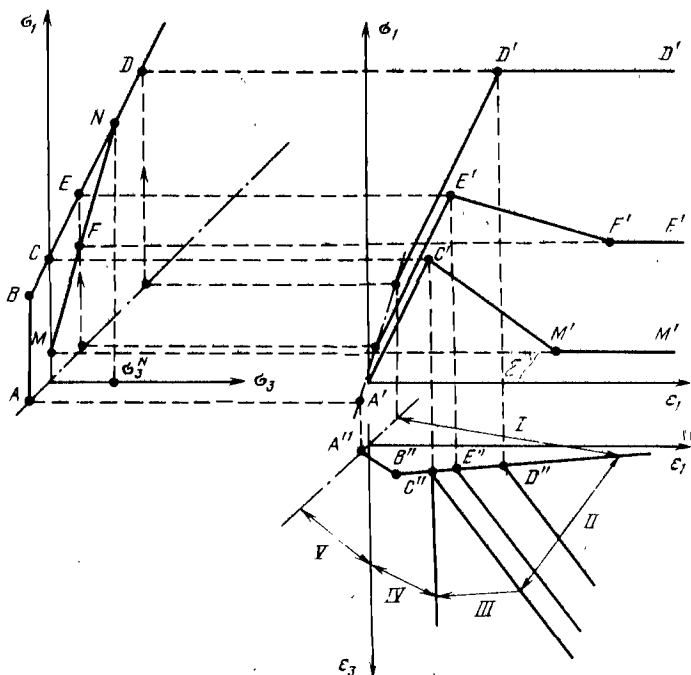


Рис. 5.16. Комплекс графиков, характеризующих свойства разупрочняющейся среды

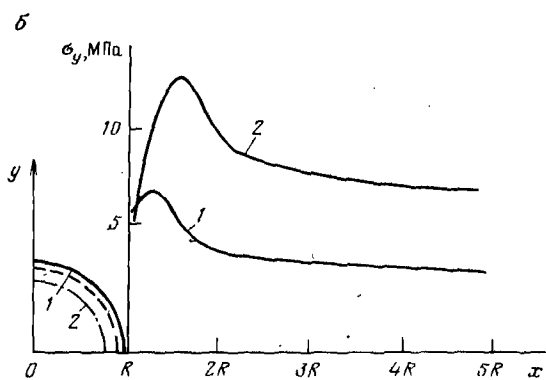
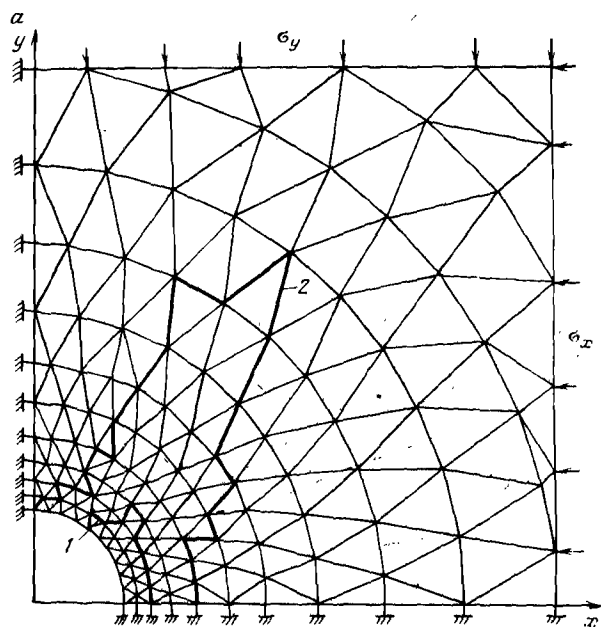


Рис. 5.17. Контуры пластических зон (а), эпюры напряжений и деформаций контура выработки (б)

При  $\epsilon_1^y \ll \epsilon_1 \ll 3\epsilon_1^y$  предельная величина  $\sigma_1$  находится в интервале между начальной прочностью и остаточным сопротивлением и определяется линейным интерполяционным уравнением

$$\sigma_1 = \sigma_1^{\text{ост}} + \frac{\sigma_1^{\text{нр}} - \sigma_1^{\text{ост}}}{2\epsilon_1^y} (3\epsilon_1^y - \epsilon_1). \quad (5.12)$$

Таким образом, единственным отличием данной модели от модели с идеальной пластичностью, изложенной в разделе 5.1, является определение напряжения  $\sigma_1^T$  при заданных деформациях, попадающих в зону II (см. рис. 5.16); вместо единственной формулы (5.9) фигурирует алгоритм:

вычисляется  $\epsilon_1^y$  по формуле (5.11):

вычисляется  $\sigma_1^{\text{ост}}$  как минимальное из значений, даваемых уравнениями (5.9) и (5.10):

$$\sigma_1^{\text{ост}} = \min((S^{\text{ост}} + \text{ctg}\psi^{\text{ост}}\sigma_3), (S + \text{ctg}\psi\sigma_3));$$

если  $\epsilon_1 \geq 3\epsilon_1^y$ , то  $\sigma_1^T = \sigma_1^{\text{ост}}$ ; если  $\epsilon_1^y \leq \epsilon_1 < 3\epsilon_1^y$ , то  $\sigma_1^T$  вычисляется по формуле (5.12).

На рис. 5.17 приведены результаты расчетов для круглой горизонтальной выработки в разупрочняющейся и разрыхляющейся среде, свойства которой таковы:  $E = 1 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $C = 1$  МПа,  $C^{\text{ост}} = 0,05$  МПа,  $\varphi^{\text{ост}} = 35^\circ$ ,  $\text{ctg}\beta = 3$ :

Расчеты проведены при  $\sigma_x = 1,15$  МПа,  $\sigma_y = 3,5$  МПа (вариант 1) и при  $\sigma_x = 2,3$  МПа,  $\sigma_y = 7$  МПа (вариант 2). На рис. 5.17, а показаны контуры пластических зон, соответствующие вариантам 1 и 2, а на рис. 5.17, б — эпюры вертикальных напряжений и смещения точек контура выработки. Разупрочняемость среды при деформировании привела к тому, что в варианте 2 напряжения вблизи контура выработки оказались ниже, чем в варианте 1. Разрыхление обеспечило большие перемещения точек контура выработки (конвергенцию), которые достигли 100 мм.

Авторы [13] отмечают, что расчетные параметры задачи и полученные результаты близки к реальным свойствам пород и деформациям выработок на угольных шахтах.

### 5.3. ПРОГРАММА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ (ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)

Для решения задач, в которых в процессе нагружения главные напряжения меняют направление, необходимо производить пошаговое нагружение и использовать модель, отвечающую принципам теории пластического течения.

Процедура получения упругопластического решения имеет следующий вид. Нагрузка прикладывается малыми ступенями в той последовательности, в какой происходит реальное нагружение в природе. Напряжения и деформации в элементах, а также перемещения узлов от каждой ступени нагружения накапливаются в специально отведен-

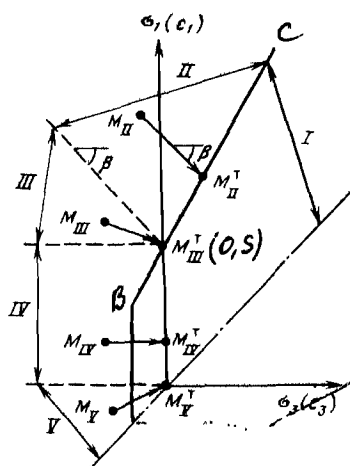


Рис. 5.18. Схема к определению теоретических напряжений

что элемент находится в упругом состоянии и корректировка напряжений не требуется.

Если же точка оказывается вне контура текучести, то находятся точки теоретических напряжений в следующем порядке. Если точка суммарных напряжений  $M_{II}$  попадает в область II (основная зона пластичности), то теоретическая точка  $M_{II}^T$  лежит на пересечении границы текучести с прямой  $M_{II}M_{II}^T$ . Угол  $\beta$  наклона прямой  $M_{II}M_{II}^T$  определяется законом течения (см. раздел 5.1) и задан. При известных координатах точки  $M_{II}(\sigma_1^c, \sigma_3^c)$  уравнение прямой  $M_{II}M_{II}^T$  имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_1^c) = -\operatorname{tg} \beta (\sigma_3 - \sigma_3^c). \quad (5.13)$$

Уравнение предельной линии BC известно:

$$\sigma_1 = S + \operatorname{ctg} \psi \sigma_3. \quad (5.14)$$

Совместное решение уравнений (5.13) и (5.14) относительно  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  даст координаты точки  $M_{II}^T$  — теоретические напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3^T &= (\sigma_1^c - S + \operatorname{tg} \beta \sigma_3^c) / (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \psi), \\ \sigma_1^T &= S + \sigma_3^T \operatorname{ctg} \psi \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Отметим вновь, что при  $\beta = \psi$  поверхность пластического потенциала, не изображенная на рис. 5.18, к которой перпендикулярен вектор  $M_{II}M_{II}^T$ , совпадает с границей текучести, т.е. закон течения является ассоциированным. При  $\beta = \frac{\pi}{4}$  поверхность пластического потенциала параллельна гидростатической оси и течение является равнообъемным.

ных полях. Матрицы жесткости элементов и всей области формируются один раз и в процессе всего решения остаются постоянными.

Для каждой ступени нагружения, прикладываемой к области, первоначально решается система уравнений с вектором сил, составленным из нагрузок данной ступени нагружения. По найденным перемещениям узлов рассчитываются упругие напряжения.

Найденные упругие напряжения суммируются с ранее накопленными в данном элементе, вычисляются главные суммарные напряжения и сравниваются с границами текучести (рис. 5.18). Если определяемая главными суммарными напряжениями  $\sigma_1^c$  и  $\sigma_3^c$  точка попадает в пределы области упругости I, то это значит,

Если точка суммарных напряжений попадает в зону III (точка  $M_{III}$  на рис. 5.18), то теоретические напряжения таковы:  $\sigma_1^T = S$ ,  $\sigma_3^T = 0$ . Элемент при этом будет разорван в направлении действия напряжения  $\sigma_3$ , а напряжение  $\sigma_1$  снизится до уровня сопротивления среды одноосному сжатию.

Для области IV, в которой напряжения  $\sigma_1$  не превосходят сопротивления среды одноосному сжатию,  $\sigma_1^T = \sigma_1^c$ ;  $\sigma_3^T = 0$ . Наконец, для области V, в которой элемент будет разорван по всем направлениям,  $\sigma_1^T = \sigma_3^T = 0$ . Если параметры границы текучести  $C$ ,  $\varphi$  и  $T$  постоянны, то среда является идеальнопластической. Если задать тот или иной закон расширения границ текучести (возрастания  $C$  и  $\varphi$  вплоть до предельных значений) в зависимости от накопленной пластической деформации, то среда будет упрочняющейся; если же границы текучести будут сужаться по мере пластического деформирования, то среда будет разупрочняющейся.

Величину  $\beta$  также можно поставить в зависимость от накопленных деформаций, что позволяет в рамках этой модели учесть изменение разрыхляемости (дилатантных свойств) грунта в процессе деформирования.

Разница между исходными суммарными и теоретическими напряжениями рассматривается как начальные главные напряжения  $\{\sigma\}_n$ . Использование этих начальных напряжений в счете по каждой ступени нагружения аналогично описанию в разделе 5.1 последовательности. Общий алгоритм получения упругопластического решения с пошаговым нагружением:

1. Ввод информации.

2. Засылка нулей в поле хранения накапливаемых напряжений  $\{\sigma\}$  в элементах, суммарных перемещений узлов  $\{\delta^c\}_c$ .

3. Формирование МЖС и ее обращение.

4. Для каждой ступени нагружения выполняются операторы 5 — 24.

5. Засылка в вектор  $\{F^c\}$  сил от очередной ступени нагружения.

6. Засылка нулей в поле хранения начальных напряжений  $\{\sigma\}_n$ .

7. Вычисление неизвестных перемещений в векторе  $\{\delta^c\}$  по текущему значению вектора  $\{F^c\}$  путем решения системы уравнений.

8. Для каждого из элементов выполняются операторы 9 — 21.

9. По найденным перемещениям вычисляются деформации, далее по формулам закона Гука — упругие приращения напряжений  $\{\Delta\sigma\}_y$ .

10. Вычисляются фактические приращения напряжений путем вычитания ранее накопленных начальных из упругих:

$$\{\Delta\sigma\}_\Phi = \{\Delta\sigma\}_y - \{\sigma\}_n$$

11. Вычисляются суммарные напряжения путем суммирования фактических приращений и ранее накопленных напряжений:

$$\{\sigma\}_c = \{\sigma\} + \{\Delta\sigma\}_\Phi$$

12. Вычисляются главные суммарные напряжения  $\{\sigma\}_{\text{сг}} = \left\{ \sigma_1^{\text{с}}, \sigma_3^{\text{с}}, a \right\}^T$ .

13. По заданным законам упрочнения (разупрочнения) и пластического течения вычисляются текущие параметры границы текучести и поверхности пластического потенциала ( $C, \varphi, T, \beta$ ).

14. В соответствии с ранее изложенной процедурой вычисляются главные теоретические напряжения  $\{\sigma\}_{\text{тг}} = \left\{ \sigma_1^{\text{т}}, \sigma_3^{\text{т}} \right\}^T$ .

15. Вычисляются осевые теоретические напряжения  $\{\sigma\}_{\text{т}}$  по формулам:

$$\sigma_x^{\text{т}} = \sigma_1^{\text{т}} \cos^2 \alpha + \sigma_3^{\text{т}} \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_y^{\text{т}} = \sigma_1^{\text{т}} \sin^2 \alpha + \sigma_3^{\text{т}} \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_{xy}^{\text{т}} = \frac{\sigma_1^{\text{т}} - \sigma_3^{\text{т}}}{2} \sin 2\alpha.$$

(Использование в формулах угла  $\alpha$  обеспечивает соосность приращений главных пластических деформаций с главными напряжениями, что соответствует положениям теории пластического течения.)

16. Вычисляются приращения начальных напряжений:

$$\{\Delta \sigma\}_{\text{н}} = k (\{\sigma\}_{\text{с}} - \{\sigma\}_{\text{т}}),$$

$k \approx 1,5$  — коэффициент ускорения итераций.

17. Накопление начальных напряжений:

$$\{\sigma\}_{\text{н}} = \{\sigma\}_{\text{н}} + \{\Delta \sigma\}_{\text{н}}.$$

18. Вычисление начальных узловых сил в узлах элемента по формуле

$$\{F\}_{\text{н}} = [B]^T \{\Delta \sigma\}_{\text{н}}.$$

19. Добавление начальных узловых сил к вектору сил:

$$\{F^{\text{с}}\} = \{F^{\text{с}}\} + \{F\}_{\text{н}}.$$

20. Проверка достигнутой точности решения в элементе: если хоть один компонент напряжений  $\{\Delta \sigma\}_{\text{н}}$  превосходит заданную допустимую величину, то вводится признак необходимости продолжения итерации.

21. Конец цикла по элементам.

22. Если признак необходимости продолжения итерации введен, то вновь выполняются операторы, начиная с № 7.

23. Добавление напряжений  $\{\Delta \sigma\}_{\text{ф}}$  и узловых перемещений  $\{\delta^{\text{с}}\}$  к накапливаемым:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma\} + \{\Delta \sigma\}_{\text{ф}}, \\ \{\delta^{\text{с}}\}_{\text{с}} &= \{\delta^{\text{с}}\}_{\text{с}} + \{\delta^{\text{с}}\}. \end{aligned}$$



24. Конец цикла по ступеням нагружения.

25. Печать выводимой информации.

26. Конец.

Если нагрузку прикладывать сразу полностью (в одну ступень), то получаемые по этой процедуре решения оказываются тождественны (в пределах заданной точности) с решениями по деформационным моделям.

Ниже приводятся результаты решения по этой процедуре задачи деформирования откоса при углублении котлована. Котлован извлекался в пять ступеней (описание процедуры формирования вектора узловых сил при извлечении слоя см. в разделе 2.12).

Размеры расчетной схемы взяты близкие к размерам реальной лабораторной модели, а упругие и прочностные свойства элементов — равные свойствам эквивалентного материала, используемого при моделировании:  $E = 6 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$ ,  $C = 0,01 \text{ МПа}$ ,  $\varphi = 32^\circ$ .

Расчеты были проведены для идеальной упругопластической среды и упрочняющейся среды, поверхность текучести у которой характеризуется уравнением гиперболического типа:

$$\tau = \frac{\gamma G}{1 + \gamma G / \tau_{\text{пр}}},$$

где  $\gamma$  — сдвиг;  $G$  — начальный модуль сдвига;  $\tau_{\text{пр}} = C + \sigma \text{ tg}\varphi$ .

Расчетные контуры откоса при глубине котлована 80 см приведены на рис. 5.19. При извлечении пятого слоя итерационный процесс

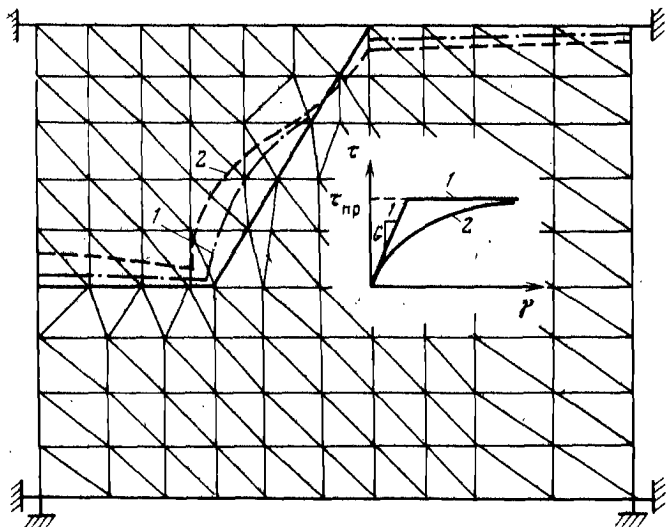


Рис. 5.19. Контуры деформированного откоса в идеальной упругопластической (1) и упрочняющейся (2) средах

стал несходящимся, т.е. расчетная предельная высота откоса находится где-то в пределах 0,8 — 1 м. Предельная высота фактического откоса на моделях составляла 85 — 95 см, т.е. численный прогноз предельной высоты оказался практически точным.

Расчетные и фактические перемещения точек на откосе оказались достаточно близки. К сожалению, фактические и расчетные перемещения точек поверхности и дна котлована существенно различны. Расчетная схема предполагает в пределах контура текучести "реверсивность" упругих свойств, тогда как у реального материала модули деформации при нагрузке и разгрузке существенно различны. Вследствие этого расчеты дают значительно больший подъем дна котлована, чем наблюдается фактически. Зона оседания за верхней бровкой откоса на модели имеет небольшую ширину, значительно меньшую, чем получаемые при расчетах. Модель упрочняющейся среды обеспечивает большую близость расчетных перемещений точек откоса к фактическим.

Нужно отметить, что задача о деформациях откоса при углублении выемки, несмотря на кажущуюся простоту, является весьма сложной. Прделанные нами попытки решения этой задачи на основе различных (а не только этих двух) моделей сред не привели нас к желаемой близости расчетных и фактических деформаций во всех точках области.

#### 5.4. ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Процедура получения осесимметрического упругопластического решения имеет ту же самую последовательность операций, что и плоского решения (см. предыдущий раздел). Сами по себе операции, разумеется, становятся несколько более громоздкими из-за появления тангенциальных напряжений. Наиболее существенной операцией является определение теоретических напряжений по комплексу найденных суммарных напряжений.

Пусть текущее положение поверхности текучести описывается в области сжатия уравнением Кулона (1.45)

$$\sigma_i = S + \text{ctg } \psi \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

где  $S$  — предел прочности на сжатие, а в области растяжения определяется прочностью на разрыв  $T$ :

$$\sigma_i = T \quad (i = 1, 2, 3).$$

Соответствующая этим уравнениям поверхность является шестигранной пирамидой, в области растяжения которую венчает трехгранная вершина (рис. 5.20).

Ограничимся вариантом среды с равнообъемным пластически течением. В этом случае заданные суммарные напряжения и теоретические напряжения будут лежать в пространстве главных напряжений в одной октаэдральной плоскости, при этом среднее напряжение и соответственно объемная деформация будут постоянны.

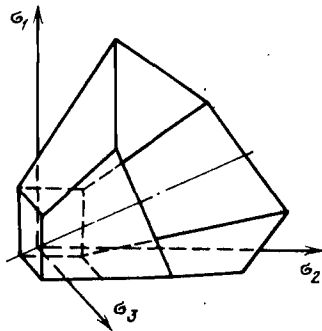


Рис. 5.20. Графическое изображение комбинированной предельной поверхности

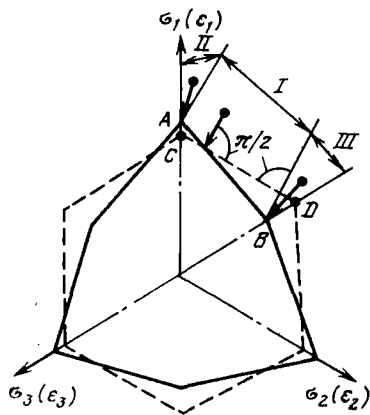


Рис. 5.21. Графическое изображение поверхности текучести ( $AB$ ) и пластического потенциала ( $CD$ )

Рассмотрим варианты определения теоретических напряжений для главного случая, когда октаэдральная плоскость, определяемая заданными суммарными напряжениями, пересекает поверхность текучести в области сжимающих напряжений, что имеет место при условии  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) > S$ .

На рис. 5.21 приведено сечение пирамиды октаэдральной плоскостью, в которой лежит точка суммарных напряжений. Рабочий участок  $AB$  этого сечения характеризуется соотношением главных напряжений

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Поверхность пластического потенциала принимается в виде правильной шестигранной призмы Треска (рабочий участок  $CD$ ). Векторы пластических деформаций, нормальных к  $CD$ , характеризуются компонентом  $\epsilon_2^{\text{II}} = 0$ , т.е. отсутствием деформаций в направлении  $\epsilon_2$  при пластическом течении под действием предельной комбинации напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Если точка заданных суммарных напряжений попадает в зону  $I$ , то точка теоретических напряжений лежит на пересечении перпендикуляра, опущенного из этой точки на участок поверхности текучести  $CD$ , с предельной поверхностью  $AB$ . Если точки заданных напряжений попадают в зоны  $II$  или  $III$ , то для них теоретическими точками будут точки  $A$  и  $B$  соответственно; в обоих этих случаях все три компонента пластических деформаций не равны нулю.

Рассмотрим подробнее все возможные варианты комбинации заданных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  и отыскания теоретических напряжений  $\sigma_1^T$ ,  $\sigma_2^T$ ,  $\sigma_3^T$  (рис. 5.22). Приведенные на рисунке варианты  $a$  — и рассмотрены ниже.

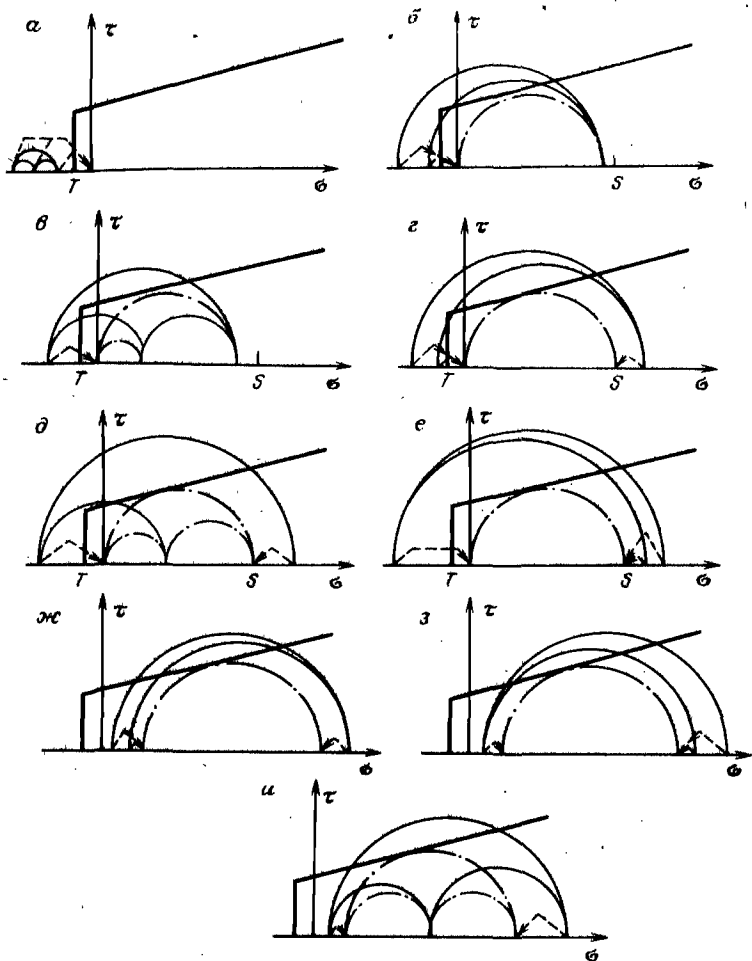


Рис. 5.22. Графическое определение теоретических напряжений (сплошные линии — круги заданных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; штрих-пунктирные — круги теоретических напряжений  $\sigma_1^T, \sigma_2^T, \sigma_3^T$ )

а)  $\sigma_1 < T$ . Все три главных напряжения ниже заданной прочности на растяжение. Происходит разрыв среды во всех направлениях, и все три теоретических напряжения равны нулю:

$$\sigma_1^T = \sigma_2^T = \sigma_3^T = 0.$$

б) Напряжение  $\sigma_1$  меньше прочности на одноосное сжатие, а напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  ниже прочности на растяжение  $\sigma_3 < T$ . Этому соответствуют:

$$\sigma_1^T = \sigma_1; \quad \sigma_2^T = \sigma_3^T = 0.$$

$$в) \quad \sigma_1 < S; \quad \sigma_2 > T; \quad \sigma_3 < T,$$

$$\sigma_1^T = \sigma_1; \quad \sigma_2^T = \sigma_2; \quad \sigma_3^T = 0.$$

$$г) \quad \sigma_1 > S; \quad (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) < S; \quad \sigma_2 < 0.$$

Образующийся разрыв по направлениям  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  снизит  $\sigma_1$  до величины прочности на одноосное сжатие  $S$ :

$$\sigma_1^T = S; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

$$д) \quad \sigma_1 > S; \quad (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) < S; \quad S > \sigma_2 > 0.$$

Образующийся разрыв по направлению  $\sigma_3$  снижает  $\sigma_1$  до величины  $S$ ;  $\sigma_2$  остается неизменным:

$$\sigma_1^T = S; \quad \sigma_2^T = \sigma_2; \quad \sigma_3^T = 0$$

$$е) \quad \sigma_1 > \sigma_2 > S; \quad (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) < S.$$

Этот случай маловероятный. Образующийся разрыв по направлению снижает  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  до величины  $S$ :

$$\sigma_1^T = \sigma_2^T = S; \quad \sigma_3^T = 0.$$

Далее рассматриваются основные варианты, соответствующие областям *I, II, III* на рис. 5.21.

Как уже указывалось, сумма трех заданных напряжений равна сумме трех теоретических:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1^T + \sigma_2^T + \sigma_3^T. \quad (5.16)$$

Минимальное значение  $\sigma_2^T$  (в точке *A* на рис. 5.21) равно  $\sigma_3^T$ ,

$$\sigma_2^T = \sigma_3^T, \quad (5.17)$$

а напряжения  $\sigma_1^T$  и  $\sigma_3^T$  связаны соотношением

$$\sigma_1^T = S + \operatorname{ctg} \psi \sigma_3. \quad (5.18)$$

Подстановка соотношений (5.17) и (5.18) в формулу (5.16) позволяет определить максимально возможное напряжение  $\sigma_3^T$  при заданной сумме напряжений:

$$\sigma_3^T \max = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - S) / (2 + \operatorname{ctg} \psi). \quad (5.19)$$

При этом

$$\sigma_1^T \max = S + \sigma_3^T \max \operatorname{ctg} \psi. \quad (5.20)$$

Максимальное значение  $\sigma_2^T$  (точка *B* на рис. 5.21) равно  $\sigma_1^T$ :

$$\sigma_2^T = \sigma_1^T. \quad (5.21)$$

Подстановка соотношения (5.18) и (5.21) в формулу (5.16) позволяет определить возможное напряжение  $\sigma_3^T$ :

$$\sigma_3^T \min = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2S)/(1 + 2\text{ctg } \psi); \quad (5.22)$$

при этом

$$\sigma_1^T \min = S + \sigma_3^T \min \text{ctg } \psi. \quad (5.23)$$

Итак, перед рассмотрением следующих вариантов вычисляются  $\sigma_3^T \max$ ,  $\sigma_1^T \max$ ,  $\sigma_3^T \min$ ,  $\sigma_1^T \min$  по формулам (5.19), (5.20), (5.22) и (5.23). Во всех следующих вариантах  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) > S$ , соответственно и  $(\sigma_1^T + \sigma_2^T + \sigma_3^T) > S$ .

Последнее неравенство гарантирует, что все три теоретических напряжения будут ненулевыми сжимающими.

ж)  $\sigma_2 < \sigma_{3 \max}^{II}$  (зона II на рис. 5.21, рис. 5.22, ж);

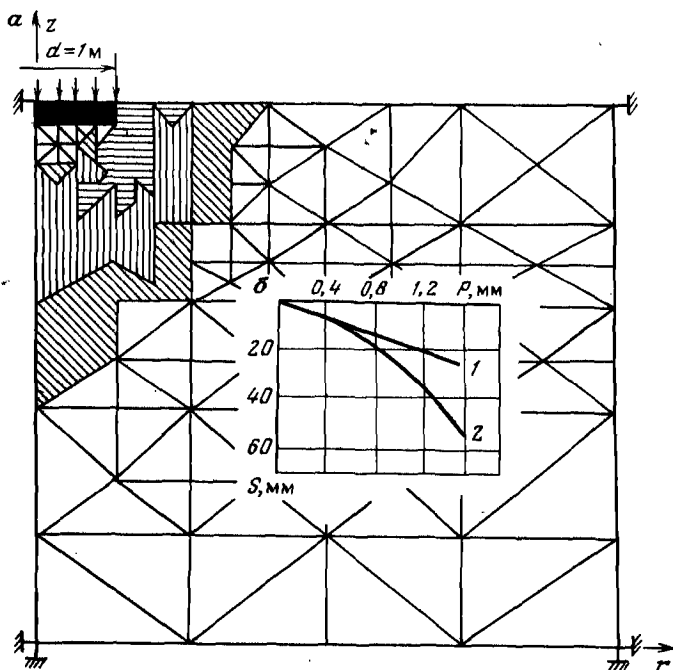


Рис. 5.23. Схема нагружения круглого штампа:

*a* — схема нагружения и пластические зоны; *б* — график зависимости осадок от нагрузки при упругом (1) и упругопластическом (2) грунтах

$$\sigma_2^T = \sigma_3^T = \sigma_3^T \max; \quad \sigma_1^T = \sigma_1^T \max;$$

$$з) \sigma_2 > \sigma_1^T \min \quad (\text{зона III на рис. 5.21});$$

$$\sigma_1^T = \sigma_2^T = \sigma_1^T \min; \quad \sigma_3^T = \sigma_3^T \min;$$

$$и) \sigma_1^T \min > \sigma_2 > \sigma_3^T \max \quad (\text{зона I на рис. 5.21});$$

$$\sigma_3^T = (\sigma_1 + \sigma_3 - S) / (1 + \operatorname{ctg} \psi);$$

$$\sigma_2^T = \sigma_2; \quad \sigma_1^T = S + \sigma_3^T \operatorname{ctg} \psi.$$

По паре главных теоретических напряжений, действующих в плоскости  $r, z$ , вычисляются осевые теоретические напряжения  $\sigma_r^T, \sigma_z^T, \tau_{rz}^T; \sigma_\theta$  является одним из главных.

На рис. 5.23 приведены схема и результаты расчета пластических зон и осадок под круглым жестким штампом. Расчеты проводил А.Л. Прегер. Характеристики грунта:  $E = 10$  МПа,  $\nu = 0,35; \gamma = 19$  кН/м<sup>3</sup>,  $C = 0,005$  МПа,  $\varphi = 25^\circ$ .

Пластические области достигли глубины, равной 1/4 размера приведенного квадратного штампа при нагрузке  $P = 0,19$  МН. Расчетная нагрузка, определенная по формулам СНиП II-15-74 и соответствующая такой глубине пластической зоны, для грунта с данными свойствами составляет 0,185 МН. На рис. 5.23 горизонтальной штриховкой показана пластическая зона при нагрузке 0,4 МН, вертикальной штриховкой — при нагрузке 1,2 МН. Процесс итерации при нагрузке 1,6 МН стал несходящимся, т.е. основание вышло в предельное состояние. Предельная нагрузка, рассчитанная по формулам В.Г. Березанцева, для этих условий составляет 1,5 МН.

На рис. 5.23 приведены также графики зависимости осадок от нагрузки в упругой и упругопластической постановке.

## 6. ДРУГИЕ МОДЕЛИ ГРУНТОВ И ГОРНЫХ ПОРОД

### 6.1. НЕЛИНЕЙНОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ГРУНТА

В теории по нелинейной механике грунтов пользуется заслуженной популярностью нелинейноупругая модель А.И. Боткина [2].

Во-первых, А.И. Боткин предложил описывать условия прочности уравнением типа Кулона, но записанным через октаэдральные напряжения:

$$\tau_0 - \sigma_0 \operatorname{tg} \varphi_0 - C_0 = 0. \quad (6.1)$$

Коническая поверхность, описываемая таким уравнением, рассматривалась ранее в разделе 1.4, а уравнение было названо обобщен-

ным критерием Кулона — Мизеса. Величины  $C_0$  и  $\varphi_0$  могут быть названы октаэдральным сцеплением и углом внутреннего трения.

Основной модели А.И. Боткина является предложенное им уравнение, связывающее октаэдральные деформации с октаэдральным сдвигом:

$$\tau_0 = A\gamma_0 / (B + \gamma_0), \quad (6.2)$$

где  $A = G_0 + \sigma_0 \operatorname{tg} \varphi_0$  — предельная величина касательного напряжения, определяемая уравнением (6.1) и достигаемая при  $\gamma_0 \rightarrow \infty$ ,  $B$  — экспериментальная константа.

Уравнение А.И. Боткина (6.2) является уравнением гиперболы (см. график 2 на рис. 5.19), проходящей через начало координат и имеющей две асимптоты с уравнениями:

$$\gamma_0 = -B; \quad \tau_0 = A.$$

Тангенс угла наклона кривой в точке  $(0, 0)$   $\operatorname{tg} \alpha = A/B$  может быть назван начальным модулем сдвига  $G_0$ .

В 1963 г. Р. Конднер [33], по-видимому не зная работ А.И. Боткина, предложил для описания нелинейной связи напряжений и деформаций грунтов уравнение, совершенно аналогичное уравнению (6.2). В зарубежных публикациях такую модель грунта именуют гиперболической аппроксимацией Конднера, обычно используя ее для описания связи между максимальными (а не октаэдральными) касательными напряжениями  $q$  и деформациями  $\gamma$ .

Уравнение (6.2) легко преобразуется к виду

$$\frac{\gamma_0}{\tau_0} = \frac{B}{A} + \frac{1}{A} \gamma_0. \quad (6.3)$$

Это уравнение может быть изображено в виде линейного графика. Такую форму обычно используют для нанесения экспериментальных точек и подбора коэффициентов  $A$  и  $B$ .

Для описания связи объемных деформаций и напряжений при изотропной компрессии М.В. Малышевым [27] предложены уравнения, сводящиеся к такой зависимости

$$\sigma_0 = K \epsilon_V / (1 - \epsilon_V a K), \quad (6.4)$$

где  $K$  — экспериментальная константа, которая может быть названа начальным модулем объемного сжатия;  $a$  — экспериментальная константа.

Т. Кокушо [32] для описания связи объемных напряжений и деформаций при нагружении и нагрузке использует зависимости вида (3.10), (3.11).

Из формулы (6.2) легко выводятся значения секущих и касательных модулей сдвига:

$$G_c = \tau_0 / \gamma_0 = G_0 (1 - f), \quad (6.5)$$



$$G_{\kappa} = \partial \tau_0 / \partial \gamma_0 = G_0 (1 - f)^2, \quad (6.6)$$

где

$$G_0 = A/B = \frac{C_0 + \sigma_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{B}; \quad f = 1 - \tau_0/A.$$

Модуль сдвига разгрузки  $G_p$  обычно принимают равным величине  $G_0$ , соответствующей достигнутому максимальному значению  $\sigma_0$ .

Величины секущих и касательных модулей объемного сжатия, соответствующие формуле (6.4), выражаются так:

$$K_c = K(1 + a\sigma_0), \quad (6.7)$$

$$K_{\kappa} = K(1 + a\sigma_0)^3. \quad (6.8)$$

Модуль объемного сжатия декомпрессии  $K_d$  в несколько раз превосходит  $K_{\kappa}$ , соответствующий текущему значению  $\sigma_0$  (Т. Кокушо [32] принимает  $K_d \approx 3K_{\kappa}$ ).

Некоторые авторы [8, 32] дополняют модель Боткина — Конднера введением деформаций разрыхления.

Прирост общей объемной деформации  $d\epsilon_V$  при изменении напряженного состояния при этом состоит из двух частей: компрессионной  $d\epsilon_V^K$ , зависящей от изменения среднего напряжения  $d\sigma_0$ , и разрыхления  $d\epsilon_V^P$ , зависящего от прироста деформаций сдвига  $d\gamma$ :

$$d\epsilon_V = d\epsilon_V^K + d\epsilon_V^P.$$

Разрыхление не учитывается кусочно-линейной процедурой МКЭ и должно вводиться отдельно. Т. Кокушо [32] после каждого шага нагружения, обеспечивающего расчет сдвиговых деформаций и компрессионной части объемных, для каждого из элементов рассчитывает разрыхление и вводит его методом начальных напряжений: рассчитывает набор узловых сил, обеспечивающий деформацию  $d\epsilon_V$  по формуле (2.118), добавляет его к вектору узловых сил системы и в итерационном цикле несколько раз повторяет решение, пока теоретическое и фактическое разрыхления не станут достаточно близки.

Разумеется, функция, связывающая разрыхление с приростом сдвига, должна быть задана. М.В. Малышев [8] связывает разрыхление с касательными деформациями постоянным коэффициентом разрыхления. Такая же методика использовалась нами ( $\operatorname{ctg} \beta$  в формуле (5.6)).

П. Роу [43] для песка предлагает уравнение, связывающее разрыхление с деформацией сдвига и уровнем напряжений:

$$d\epsilon_V^P = \frac{K\sigma_3 - \sigma_1}{K\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_1} d\gamma. \quad (6.9)$$

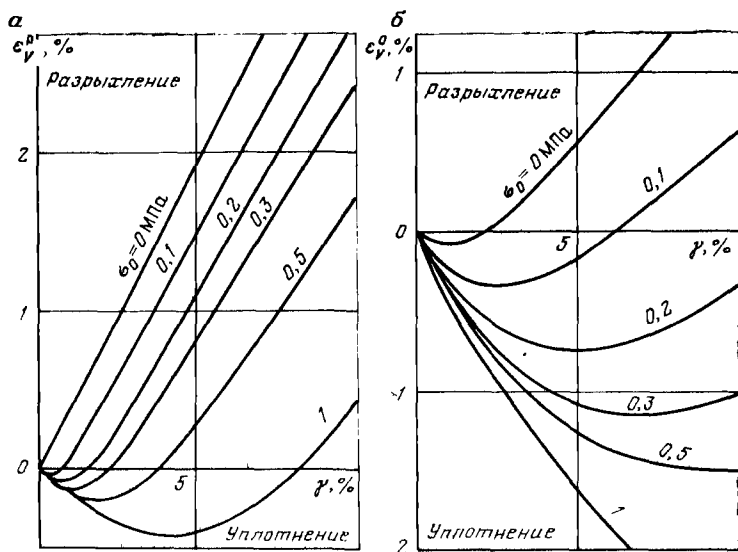


Рис. 6.1. Зависимости разрыхления от сдвига для плотного (а) и рыхлого (б) песка

Для песка в условиях плоской деформации М.В. Малышев и др. [36] предлагают уравнение, связывающее разрыхление с деформациями сдвига, уровнем и видом напряженного состояния и содержащее две экспериментальные константы.

В работе [32] графики зависимости  $\epsilon_v^p$  от  $\gamma$  (рис. 6.1) представлены в табличной форме, и при решении задач на ЭВМ для определения величины  $d\epsilon_v^p$  по известным величинам  $\sigma_0$  и  $d\gamma$  производилось дифференцирование таблично заданной функции  $\epsilon_v^p = f(\sigma_0, \gamma)$ .

Гиперболическая аппроксимация Боткина — Конднера заманчива своей простотой: в добавление к обычным характеристикам грунтов  $S$  и  $\varphi$  она требует единственного экспериментального параметра  $B$ . Учет компрессионной нелинейности требует по меньшей мере еще одной экспериментальной константы ( $\alpha$  в уравнении (6.4)); учет разрыхления даже самым простым и грубым способом требует по меньшей мере еще одну константу.

Для определения большого числа констант требуется проведение многочисленных и точных экспериментов, поэтому часто при описании нелинейных свойств грунтов ограничиваются гиперболической аппроксимацией зависимости  $\tau - \gamma$ , как это было сделано, например, в разделе 5.3, либо исключают из внимания разрыхление, если это не оказывает большого влияния на результат.

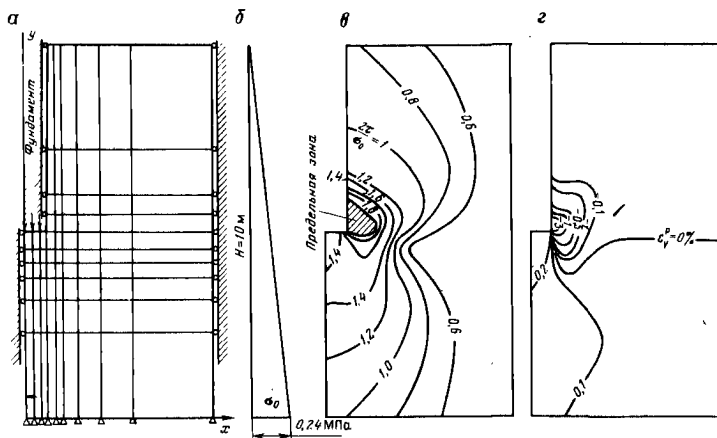


Рис. 6.2. Схема нагружения глубокого фундамента:

*a* — сеть элементов; *б* — исходные напряжения; *в* — изолинии уровней напряженности; *г* — изолинии разрыхления

Ниже рассматриваются результаты некоторых решений, полученных различными авторами методом кусочно-линейной упругости на основе нелинейноупругой модели.

*Ленточный фундамент глубокого заложения в плотном песке.* Сеть изопараметрических элементов и некоторые результаты решения приведены на рис. 6.2. По данным работы [32] исходное напряженное состояние было задано, давление по подошве фундамента увеличивалось малыми ступенями вплоть до 2 МПа. Величины модуля сдвига  $G$  и объемного модуля  $K$  при сопоставлении матриц жесткости элементов для очередной ступени нагружения принимались в соответствии с изменением напряженного состояния элемента на предыдущем шаге: если это была разгрузка по  $\tau$  или по  $\sigma$ , то соответственно принимались модули разгрузки, если нагрузка, то модули нагружения. После первого расчета по принятым модулям дополнительно проверялось соответствие принятых модулей изменению напряженного состояния, и если выявлялось несоответствие, то принимались исправленные значения модулей и расчет повторялся. После каждого шага нагружения для каждого из элементов вычислялось разрыхление и вводилось методом начальных напряжений в итерационном цикле.

Как видно из рис. 6.2, *б* и *в*, зона наиболее существенного разрыхления примерно совпадает с зоной предельного состояния. По расчету зависимость осадки от нагрузки до весьма больших значений последних (2 МПа) оказалась практически линейной.

*Деформация откосов водохранилища.* В процессе отрывки котлована водохранилища при глубине 49 м возникали деформации отко-

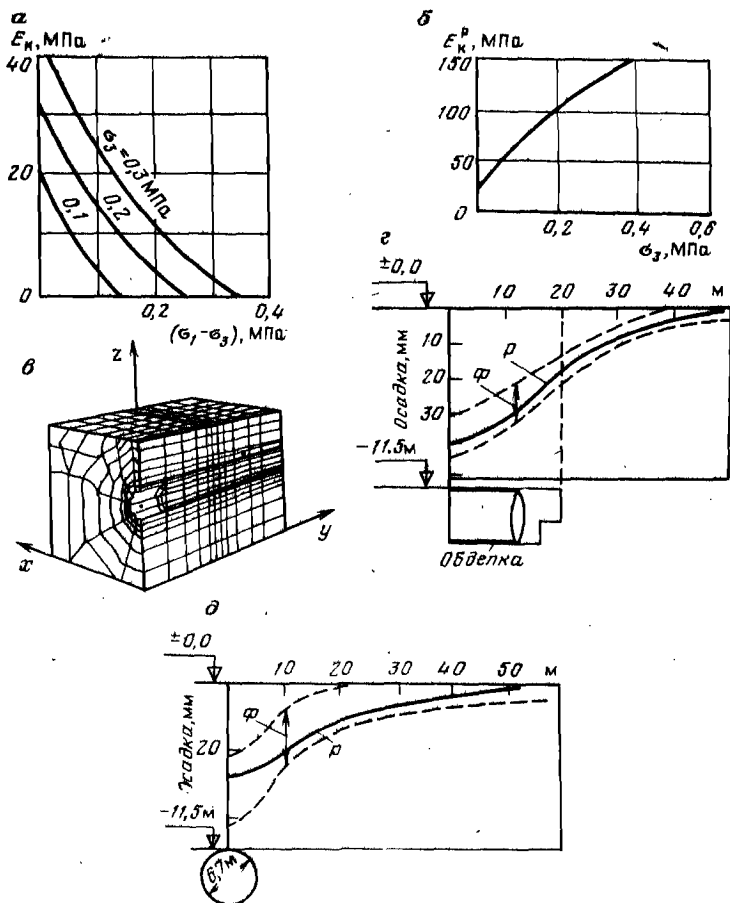


Рис. 6.3. Схемы к расчету оседаний поверхности:

а, б — зависимости модулей от напряжений; в — конечно-элементная схема; з, д — оседания:  $P$  — расчетные;  $\Phi$  — фактические

сов, поставившие под сомнение возможность дальнейшего углубления до проектной глубины 62 м [19]. Были отобраны образцы для лабораторного исследования, а на откосах, в приоткосной зоне на поверхности и на уровне проектного дна котлована (через скважины) были установлены геодезические марки. Результаты лабораторных испытаний были аппроксимированы зависимостью гиперболического типа и была выведена формула для касательного модуля упругости (коэффициент Пуассона принимался постоянным), а также модуля упругости при разгрузке. Разрыхление во внимание не принималось. Задача решалась в условиях плоской деформации. Пошаговое нагружение имитировалось послойным углублением котлована и снятием по контуру сил тяжести извлекаемых слоев. При

глубине котлована 49 м, при которой были приостановлены работы, расчетные и фактические деформации оказались близки. Расчеты при проектной глубине котлована прогнозировали увеличение оседания откосов и гущения дна, однако общая устойчивость откосов обеспечивалась. Котлован был успешно углублен до проектной глубины, а перемещения вскрытых марок в придонной части котлована и на откосах были близки к расчетным.

*Деформации поверхности при проходке городских тоннелей.* В пространственной, трехмерной постановке рассмотрены деформации поверхности при проходке транспортного тоннеля неглубокого заложения в плотных глинах Франкфурта [30]. Стенки тоннеля вслед за продвижением забоя облицовываются набрызгбетоном.

В настоящее время таким способом производится обделка станций метро с площадью поперечного сечения более 100 м<sup>2</sup> с оставлением в кровле тонкого слоя прочных пород даже менее радиуса проходимой выработки.

Зависимость касательного модуля упругости при нагружении  $E_k$  и при разгрузке  $E_k^p$  от действующих напряжений, определенная стабилметрическими испытаниями, приведена на рис. 6.3, а и б. Сеть шести- и восьмиузловых изопараметрических элементов изображена на рис. 6.3, в. Всего было 990 элементов, 3700 уравнений при ширине полосы ненулевых членов МЖС 300.

Продвижение забоя тоннеля имитировалось выемкой внутренних элементов в 15 и 30 шагов; результаты были при этом практически одинаковы. Исходное напряженное состояние было принято таким:  $\sigma_z = \gamma H$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 0,8\sigma_z$ . Элементы, имитирующие набрызгбетонную обделку, включались в работу с некоторым отставанием после прохождения соответствующего участка забоем.

Как видно из рис. 6.3, г и д, результаты расчетов близки к фактически наблюдаемым деформациям поверхности.

## 6.2. ШАТРОВЫЕ МОДЕЛИ

Шатровые модели (cap-models), впервые предложенные исследователями Кембриджского университета для описания свойств нормально уплотненных глин, в дальнейших модификациях получили применение для описания свойств и переуплотненных дисперсных грунтов и даже скальных и полускальных пород.

Ниже, по К. Роско и Дж. Берланду [40], излагаются модели "кэм-клиз" (кембриджская глина) и "модифицированная кем-клиз", которые послужили основой для всех дальнейших модификаций шатровых моделей.

Рассматривается инкрементальная связь напряжений и деформаций при трехосных стабилметрических испытаниях.

Анализ ведут в напряжениях  $p$  и  $q$  и деформациях  $v$  и  $\gamma$ . Напряжения эффективные. Грунт нормально уплотненный, не испытывавший в своей истории компрессии под более высоким давлением. Нагружение абсолютно дренированное.

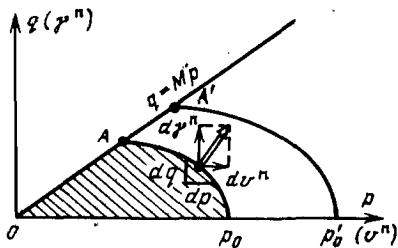


Рис. 6.4. Графическое изображение шатровой модели грунта

Линия с уравнением (3.21)  $q = Mp$  на рис. 6.4 является предельной линией для данного грунта. Смысл коэффициента  $M$  и его связь с углом внутреннего трения рассматривались в разделе 3.1. Первым основным допущением модели является утверждение, что изотропная компрессия под давлением  $p_0$  образует зону упругости  $OAp_0$ . Все возможные изменения напряженного состояния в

пределах зоны  $OAp_0$  будут сопровождаться только малыми обратимыми упругими деформациями. Выход же напряжений за границу поверхности текучести  $Ap_0$  будет сопровождаться появлением пластических деформаций  $d\gamma^n$  и  $dv^n$ . На всей поверхности текучести  $Ap_0$  уровень достигнутых пластических деформаций одинаков. Вторым основным допущением является утверждение, что поверхность текучести  $Ap_0$  является одновременно и поверхностью пластического потенциала, и в соответствии с принципом нормальности (ассоциированным законом течения) полный вектор пластических деформаций (изображен двойной стрелкой на рис. 6.4) нормален к поверхности текучести.

Возрастание напряжений, сопровождающееся накоплением пластических деформаций, приведет к расширению области упругости, и ассоциированная поверхность текучести, которую мы будем называть шатром, (в англоязычной литературе ее именуют "кэп" — шапка), займет новое положение  $A'R'$ . Объемная пластическая деформация в любой точке нового шатра независимо от пути нагружения будет постоянна и равна деформации, которую бы получил грунт при изотропной компрессии от давления  $p_0$  до давления  $p_1$ . Зависимость коэффициента пористости от давления при первичной изотропной компрессии принимается в виде

$$e = e_a - \lambda \ln p, \quad (6.10)$$

а при упругом набухании (разгрузке) в пределах шатра

$$e = e_b - k \ln p. \quad (6.11)$$

Дифференцируя уравнение (6.10) и (6.11), имеем:

$$de = -\lambda \frac{dp}{p}, \quad (6.12)$$

$$de^y = -k \frac{dp}{p}. \quad (6.13)$$

В соответствии с принципом нормальности (см. рис. 3.10) соотношение компонентов пластических деформаций определяется наклоном поверхности текучести в этой точке, который временно будем обозначать как  $\psi$ :

$$\frac{1}{\psi} = \frac{d\gamma^{\Pi}}{dv^{\Pi}} = \frac{dp}{dq} \quad (6.14)$$

По аналогии с уравнением (3.21) выразим величину  $q$  на шатре в долях от  $p$ :

$$\begin{aligned} q &= \eta p, \\ dq &= p d\eta + \eta dp, \end{aligned} \quad (6.15)$$

отсюда с учетом уравнения (6.14) имеем:

$$-p d\eta = dp(\psi + \eta).$$

Решаем это дифференциальное уравнение, разделяя переменные:

$$\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\psi + \eta} = \int_{p_0}^p - \frac{dp}{p} \quad (6.16)$$

Интегрируя, получаем

$$\ln p_0 - \ln p = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\psi + \eta} \quad (6.17)$$

При стационарном положении шатра величина  $p_0$ , которую можно назвать эквивалентным давлением, является постоянной. Если же шатер расширяется, то  $p_0$ , определяющее размер шатра, так же как и  $p$ , определяющее конкретную точку на шатре, является переменной.

Возьмем полные дифференциалы от левой и правой частей уравнения (6.17) и из их равенства получим

$$\frac{dp_0}{p_0} - \frac{dp}{p} - \frac{d\eta}{\psi + \eta} = 0. \quad (6.18)$$

Из формулы (6.18) имеем

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \quad (6.19)$$

Полный прирост объемной деформации состоит из упругой и пластической частей:

$$dv = dv^y + dv^{\Pi}. \quad (6.20)$$

Изменение пластической объемной деформации при изотропной компрессии обозначим  $dv_0^{\Pi}$ .

Ввиду постоянства пластических деформаций на всей поверхности шатра при его расширении разница в объемной пластической

деформации будет постоянна и равна величине  $dv_0^n$ , которую бы приобрел грунт при гидростатическом увеличении эквивалентного давления:

$$dv^n = dv_0^n.$$

Но при изотропной компрессии полная объемная деформация также состоит из упругой и пластической частей:

$$dv_0 = dv_0^n + dv_0^y. \quad (6.21)$$

Из (6.21) имеем

$$dv_0^n = dv_0 - dv_0^y. \quad (6.22)$$

Как известно, объемная деформация связана с коэффициентом пористости соотношением

$$dv = - de / (1 + e).$$

Из соотношений (6.12) и (6.13) при этом имеем:

$$dv_0^n = \frac{\lambda}{(1 + e)} \frac{dp_0}{p_0}, \quad (6.23)$$

$$dv_0^y = \frac{k}{(1 + e)} \frac{dp_0}{p_0}. \quad (6.24)$$

Аналогично определяется величина  $dv^y$  в уравнении (6.19):

$$dv^y = \frac{k}{(1 + e)} \frac{dp}{p}. \quad (6.25)$$

Подставляя соотношения (6.23) и (6.24) в уравнение (6.20), получаем

$$dv_0^n = \frac{\lambda - k}{(1 + e)} \frac{dp_0}{p_0}. \quad (6.26)$$

Далее, подставляя в уравнение (6.26) выражение для  $dp_0/p_0$  из формулы (6.19), получаем

$$dv^n = dv_0^n = \frac{\lambda - k}{1 + e} \left( \frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right). \quad (6.27)$$

Подставляя соотношения (6.25) и (6.27) в уравнение (6.20), получаем выражение для полного прироста объемной деформации

$$dv = \frac{k}{(1 + e)} \frac{dp}{p} + \frac{\lambda - k}{1 + e} \left( \frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\psi - \eta} \right). \quad (6.28)$$

При сдвиговом деформировании грунта доля упругой деформа-



ции ничтожна и ею можно пренебречь. Прирост сдвиговой пластической деформации получаем из формулы (6.14)

$$d\gamma = d\gamma^{\text{II}} = \frac{1}{\psi} dv^{\text{II}} = \frac{1}{\psi} dv_0^{\text{II}} = \frac{1}{\psi} \frac{(\lambda - k)}{(1 + e)} \left( \frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\psi - \eta} \right). \quad (6.29)$$

Полная работа  $dA$ , совершаемая напряжениями при пластическом деформировании единичного объема грунта, состоит из работ напряжений  $q$  и  $p$ :

$$dA = pdv^{\text{II}} + qd\gamma^{\text{II}}. \quad (6.30)$$

Для завершения модели авторы [40] вводят третье предположение, утверждающее, что полная работа пластических деформаций  $dA$  фактически совершается путем взаимного смещения зерен друг друга, т.е. работу совершает только сдвиговое напряжение. Но взаимный сдвиг зерен происходит только при условии, что на контактах между ними величина сдвигового напряжения  $q$  достигнет предельной величины,  $q_{\text{max}}$ , соответствующей давлению  $p$ :  $q_{\text{max}} = Mp$ .

При этом условии работа пластических деформаций будет равна произведению  $q_{\text{max}}$  на деформацию сдвига  $d\gamma^{\text{II}}$ :

$$dA = Mpd\gamma^{\text{II}}. \quad (6.31)$$

Приравняв выражения (6.30) и (6.31) и подставив  $q = \eta p$ , по формуле (6.15) получим

$$dv^{\text{II}}/d\gamma^{\text{II}} = M - \eta.$$

Соотношение  $dv^{\text{II}}/d\gamma^{\text{II}}$  есть не что иное как величина  $\psi$  в уравнениях (6.14), (6.31) и (6.29). Подставляя  $\psi = M - \eta$  в формулу (6.16), получаем дифференциальное уравнение, решением которого является соотношение, описывающее поверхность текучести,

$$\eta = M \ln \frac{p_0}{p},$$

а подставляя  $\psi = M - \eta$  в формулы (6.28) и (6.29), получим в окончательной форме уравнения связи инкрементов деформаций и напряжений для модели "кез-клэй". Эта поверхность пересекается с осью  $p$  под острым углом, т.е. прогнозирует возникновение пластической деформации сдвига даже при изотропной компрессии, что, разумеется, противоречит действительности.

Для исправления этого недостатка в той же работе [40] предлагается модель "модифицированная кем-клэй".

В этой модели предполагается, что работа пластических деформаций равна:

$$dA = p \sqrt{(dv^{\text{II}})^2 + (Md\gamma^{\text{II}})^2}. \quad (6.32)$$

Приравнивая выражения (6.35) и (6.38), после элементарных преобразований получаем

$$\psi = \frac{dv}{d\gamma} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}$$

Подставляя это значение  $\psi$  в формулы (6.28) и (6.29), получаем уравнение связи, а подставляя в формулу (6.18) и интегрируя, получаем другое уравнение поверхности текучести

$$p/p_0 = M^2 (M^2 + \eta^2),$$

или иначе

$$F = p^2 - pp_0 + q^2/M^2 = 0. \quad (6.33)$$

Это уравнение описывает эллипс (см. рис. 6.4), большая ось которого совпадает с осью  $p$ , пересекающийся с предельной линией на конце малой полуоси. При изотропной компрессии эта модель предсказывает только объемную деформацию, а в предельном состоянии — в точке  $A$  — только сдвиговую деформацию (равнообъемное течение). Несомненно, и у этой модели есть слабые места. Например, если грунт находится в состоянии, близком к предельному (чуть правее точки  $A$  на эллиптической поверхности текучести), то приложение малого инкремента  $\Delta p$  по модели будет сопровождаться преимущественно сдвиговыми деформациями, что, разумеется, фактически не будет иметь места. Но если нагружение идет по траектории, приблизительно нормальной к расширяющемуся шатру поверхности текучести, то эта модель неплохо описывает связь деформаций и напряжений. Основным же ее достоинством является малое число экспериментальных параметров:  $\lambda$ ,  $k$  и  $M$  — три величины, определяемые при компрессионных и стабиллометрических испытаниях.

Поскольку шатер является ассоциированной поверхностью текучести и пластического потенциала и матрица связи напряжения и деформаций симметрична, шатровые модели позволяют с одинаковым успехом использовать как итерационные (метод начальных деформаций), так и инкрементальные и смешанные инкрементально-итерационные процедуры.

Рассматривая напряжения  $p$  и  $q$  в уравнении (6.33) как октаэдральные, П. Банержи и А. Стифо [17] приводят матричное уравнение инкрементальной связи напряжений и деформаций для модели "модифицированная кем-клей", пригодное для использования в итерационной и инкрементальной процедурах:

$$\left\{ d\sigma \right\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix} = \left[ [D] - \frac{[D]^T \{a\} \{a\}^T [D]}{\{a\}^T [D] \{a\} + b \{m\}^T \{a\}} \right] \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = [D_{yn}] \{d\epsilon\},$$

где

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} \partial F / \partial \sigma_1 \\ \partial F / \partial \sigma_2 \\ \partial F / \partial \sigma_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{3}{M^2} (\sigma_1 - p) + \frac{1}{3} (2p - p_0) \\ \frac{3}{M^2} (\sigma_2 - p) + \frac{1}{3} (2p - p_0) \\ \frac{3}{M^2} (\sigma_3 - p) + \frac{1}{3} (2p - p_0) \end{Bmatrix},$$

$$\{m\}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0\},$$

$$b = -p p_0 (1 + e_0) / (\lambda - k),$$

$[D]$  — упругая матрица связи главных напряжений и деформаций;

$[D]_{уп}$  — упругопластическая матрица.

Ниже излагается разработанный А.Л. Прегером под руководством автора вариант шатровой модели.  $p$  и  $q$ ,  $v$  и  $\gamma$  рассматриваются как октаэдральные напряжения и деформации.

Ассоциированная поверхность текучести (шатер) принята в виде эллиптической кривой со смешанным вдоль оси  $p$  центром (рис. 6.5, а)

$$F = \frac{q^2}{b^2} + \frac{(p - c)^2}{a^2} - 1 = 0, \quad (6.34)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — размеры полуосей и абсцисса центра эллипса.

Предельная поверхность описывается уравнением  $q = Mp$ . На всей поверхности шатра величина объемных пластических деформаций

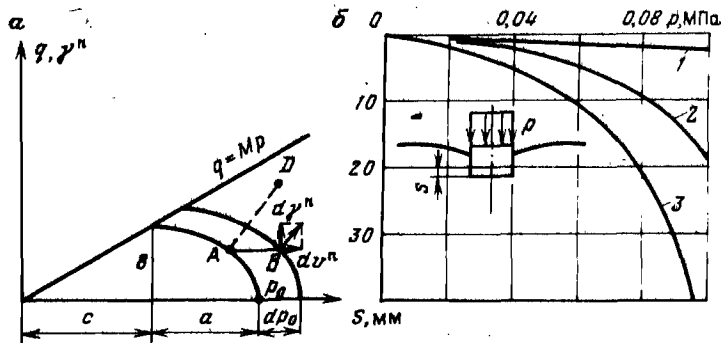


Рис. 6.5. Графическое изображение шатровой модели (а) и результаты расчета осадок штампа по ней (б)

ций  $v^{\text{п}}$  постоянная и определяется величиной  $p_0$ . Зависимость  $v^{\text{п}}$  от гидростатического давления принята в виде, предложенном С. Стьюре и др. [47]:

$$v^{\text{п}} = V(e^{Rp_0} - 1), \quad (6.35)$$

где  $V, R$  — постоянные величины, определяемые в ходе дренированного испытания грунта на гидростатическое сжатие.

Параметры эллиптической поверхности текучести пропорциональны величине  $p_0$ :

$$a = h_1 p_0; \quad b = h_2 p_0; \quad c = h_3 p_0, \quad (6.36)$$

где  $h_1, h_2, h_3$  — постоянные величины, определяемые в ходе испытания грунта по различным траекториям загрузки. Из анализа рис. 6.5 очевидно, что:

$$h_3 = (1 - h_1); \quad h_2 = h_3 M = (1 - h_1) M.$$

Решение достигается методом начальных напряжений в том же порядке, что и при решении задач по другим вариантам программы "Геомеханика" (см. разделы 5.1, 5.3). Специфическим является лишь вычисление теоретических главных напряжений в следующем порядке. Прикладывается очередной шаг нагрузки и решается упругая задача с постоянными упругими характеристиками. Суммируя найденные при этом упругие напряжения и деформации в элементах к ранее накопленным величинам, определим суммарные напряжения  $\{\sigma\}_c$  и деформации  $\{\epsilon\}_c$ . Проверяем, находится ли точка, определяющая напряженное состояние элемента (точка  $D$  на рис. 6.5), в пределах упругой области. При выходе за ее пределы необходимо найти теоретические напряжения (точку  $B$  на рис. 6.5), т.е. напряжения, которые должны соответствовать достигнутому уровню деформаций.

Уравнение новой, пока неизвестной поверхности текучести с учетом уплотнения:

$$\frac{(q + dq)^2}{(b + db)^2} + \frac{(p + dp - c + dc)^2}{(a + da)^2} - 1 = 0. \quad (6.37)$$

Подставляя в уравнение (6.37) вместо величин  $da, db, dc$  их значения из формул (6.36) и пренебрегая величинами порядка  $d^2$ , получим уравнение относительно  $dp_0$ :

$$dp_0 = \frac{dp + \frac{qa^2 dq}{b^2(p-c)}}{F_1}, \quad (6.38)$$

где  $F_1 = h_3 + \frac{(p-c)}{a} h_1 + \frac{q^2 a^2}{b^3(p-c)} h_2$ .

Прирост объемной пластической деформации при переходе на новую поверхность определяется как

$$dv^n = V(c^{R(p_0 + dp_0)} - c^{Rp_0}). \quad (6.39)$$

Теоретический прирост напряжений определяется:

$$dp = dp^y - K dv^n, \quad (6.40, a)$$

$$dq = dq^y - 2Gdq^y, \quad (6.40, б)$$

где  $dq^y$ ,  $dp^y$  — упругий прирост напряжений (прирост напряжений по упругому решению МКЭ);  $K$ ,  $G$  — модули объемной деформации и сдвига соответственно.

Согласно ассоциированному закону пластического течения компоненты деформаций определяются соотношениями (см. раздел 1.7):

$$dv^n = \lambda \frac{\partial F}{\partial p}, \quad d\gamma^n = \lambda \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Тогда

$$d\gamma^n = dv^n \frac{\partial F}{\partial q} / \frac{\partial F}{\partial p}. \quad (6.41)$$

После подстановки соотношения (6.41) в уравнение (6.40, б) и соотношения (6.39) в уравнение (6.40, а), разлагая экспоненциальную функцию и функцию  $\partial F / \partial p$  в ряд Тейлора, взяв 2 члена ряда, получим:

$$dp = dp^y - \frac{K}{3} V c^{Rp_0} R dp_0, \quad (6.42a)$$

$$dq = dq^y - 2G \frac{V e^{Rp_0} R q a^2}{(p_0 - c) b^2} dp_0. \quad (6.42б)$$

Уравнения (6.38) и (6.42) представляют собой систему трех уравнений с тремя неизвестными. Подставляя уравнения (6.40) в уравнение (6.38), получим разрешающее уравнение относительно параметра  $dp_0$

$$dp_0 = \frac{dp + \frac{qa^2}{b^2(p-c)} dq^y}{F_1 F_2},$$

$$\text{где } F_2 = 1 + \left( \frac{K}{3} V e^{Rp_e} R + \frac{2Ga^4 \tau_0^2 V e^{Rp_e} R}{b^4 (\sigma_0 - c)^2} \right) / F_1.$$

Подставив найденное значение  $dp_0$  в соотношения (6.42), определим теоретический прирост напряжений  $dp$  и  $dq$ . Добавив  $dp$  и  $dq$  к исходным  $p$  и  $q$ , получим теоретические  $p$  и  $q$ .

Переход от октаэдрических  $p$  и  $q$  к главным теоретическим напряжениям можно осуществить с помощью зависимости (1.4).

Зная теоретические главные напряжения, нетрудно найти начальные напряжения, а далее и начальные узловые силы.

По изложенному алгоритму с использованием метода начальных напряжений решалась задача об осадке круглого жесткого штампа на нелинейно-деформирующемся основании.

На штампе диаметром 0,8 м, заглубленный на 0,4 м, прикладывается ступенями нагрузка до среднего давления по подошве 0,1 МПа. Основание — слой грунта глубиной 3 м, простирающийся от оси вращения на расстояние 2,5 м. Вся область разбита на 127 кольцевых элементов треугольного сечения.

Показатели, характеризующие свойства грунта:  $K = 60,2$  МПа;  $C = 10,2$  МПа;  $\varphi = 22^\circ$ ;  $\gamma = 19$  кН/м<sup>3</sup>;  $I = 0,044$ ;  $R = 0,0156$ ;  $h_1 = 0,454$ ;  $h_2 = 0,12$ ;  $h_3 = 0,546$ .

Исходное положение шатра определялось природным напряженным состоянием, которое принималось гидростатическим.

Результаты расчета осадок штампа при различных нагрузках приведены на рис. 6.5, б (кривая 3). Там же для сравнения кривой 1 приведены результаты расчетов осадок упругого основания с теми же  $K$  и  $G$ , что использованы в шатровой модели, а кривая 2 — результаты расчетов для идеального упругопластического основания с теми же  $K$ ,  $G$  и  $\varphi$ . Изложенная шатровая модель разработана для анализа работы в основаниях золошлаковых отложений.

И. Сандлер и М. Барон расширяют область применения шатровой модели типа "модифицированная кем-клей" на переуплотненные грунты.

Они ассоциируют с поверхностью пластического потенциала не только отрезок  $Ap_0$  (рис. 6.4), но и отрезок предельной линии  $OA$ . Если напряженное состояние выходит у них на отрезок  $Ap_0$ , то грунт ведет себя как нормально уплотненный и уплотняется, а шатер при этом расширяется, как в моделях "кем-клей". Если же напряженное состояние из упругой зоны выходит на предельную линию  $OA$ , то ассоциированное течение с полным вектором пластических деформаций, нормальным к  $OA$ , дает отрицательный инкремент объемной деформации, т.е. разрыхление. Поскольку же величина  $p_0$ , определяющая положение шатра, равна накопленной величиной пластического уплотнения, то разрыхление среды сопровождается сокращением шатра до тех пор, пока точка  $A$  не опустится вдоль линии  $q = Mp$  до точки, где напряжения вышли на предельную линию. Математическая реализация такого подхода элементарно проста.

Т. Танака [11], С. Петрушак и З. Мроз [38] предлагали модели с эллиптическим шатром, позволяющие вводить не только разрыхление, но и разупрочнение и, таким образом, пригодные не только для грунтов, но и для скальных пород. В обеих упомянутых моделях

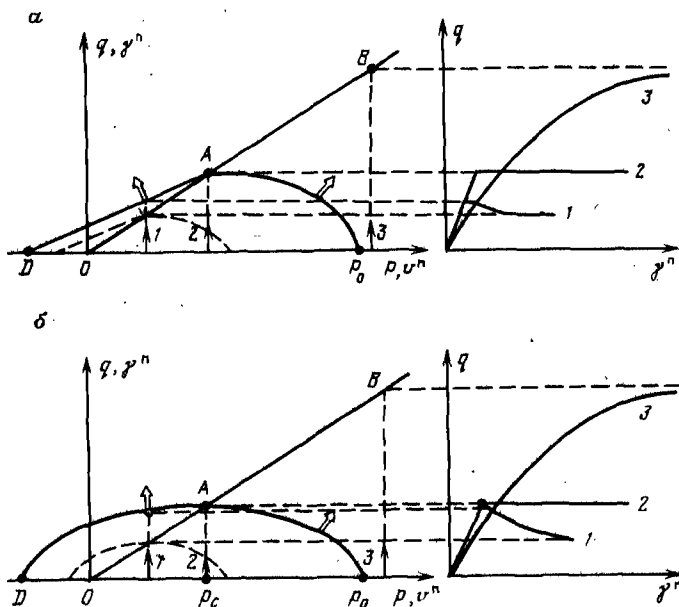


Рис. 6.6. Графики, характеризующие модели Танаки (а) и Петрушака — Мроза (б)

(рис. 6.6) линия  $OB$  рассматривается как предельная линия для нормально уплотненного грунта. Если нагружение идет по пути 2 или 3 на той или другой модели, то предельная величина напряжения  $q$  определится точками  $A$  и  $B$ , лежащими на предельной линии  $OB$  с уравнением вида  $q = M\rho$ .

Если же грунт переуплотненный, т.е. величина действующей  $p$  меньше  $p_0$ , испытанной грунтом ранее и определяющей положение шатра (путь нагружения 1), то предельная поверхность — она же и поверхность текучести, ассоциированная с поверхностью пластического потенциала, — будет лежать вне линии  $OB$ . В модели Танаки это прямая линия  $AD$ , в модели Петрушака и Мроза это продолжение эллиптического шатра влево от точки  $A$  — участок  $AD$ . Нагружение по пути 1 в обеих моделях вплоть до выхода напряженного состояния на предельную поверхность  $AD$  сопровождается только упругими деформациями; при выходе на предельную поверхность происходит пластическое течение, подчиняющееся принципу нормальности. При этом в грунте происходит разрыхление; давление  $p_0$ , эквивалентное текущей плотности грунта, уменьшается, шатер сокращается, точка  $A$  опускается вдоль линии  $OB$ , соответственно понижается и предельная поверхность  $AD$ .

Окончательное положение шатров и предельных поверхностей при пути нагружения 1 изображено на рис. 6.6, а и б штриховыми линиями.

Таким образом, для переуплотненных грунтов, к которым можно отнести и скальные грунты, линия  $OB$  в описанных моделях определяет остаточную прочность.

Модель Т. Танаки описывает максимальную прочность ( $AD$  на рис. 6.6) прямой линией с привычным уравнением кулоновского типа. При выходе напряженного состояния в любой точке предельной линии коэффициент разрыхления  $\frac{d v^p}{d \delta}$  будет одинаков.

В модели С. Петрушака и Э. Мроза ассоциированные поверхности текучести и пластического потенциала для нормально уплотненного грунта ( $A\rho_0$  на рис. 6.6) и для переуплотненного грунта ( $AD$ ) являются участками одного эллипса, описываемыми одним уравнением эллипса со смещенным центром:

$$(\rho - \rho_0)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 - a^2 = 0, \quad (6.43)$$

где  $\rho_0$  — абсцисса центра эллипса;  $a$  — большая полуось эллипса;  $n = a/b$  — соотношение полуосей.

Положение эллипса однозначно определяется двумя константами  $n$  и  $a$  и функцией  $\rho_c = f(v^p)$ , связывающей положение шагра с объемной пластической деформацией  $v^p$  или с каким-либо эквивалентным ей показателем (пористостью, коэффициентом пористости и др.).

### 6.3. КОНТАКТ-ЭЛЕМЕНТЫ

При анализе работы трещиноватых массивов, сооружений, имеющих ослабленный контакт с окружающим грунтом, оказывается необходимым введение в общую сеть элементов, имитирующих трещины, контакты сооружений с грунтом. Вообще говоря, возможно изображение таких контактов набором элементов обычной формы с пониженными прочностными свойствами, пример такого рода, решенный по программе "Геомеханика", приведен в разделе 5.1.3. Однако использование обычных элементов, которые не могут быть очень узкими и длинными, требует искусственного увеличения толщины контакта либо чрезмерного сгущения сети элементов.

Р. Гудман и др. [22] предложили специальный контакт-элемент, который завоевал широкую популярность при решении задач подобного рода. Контакт-элемент схематически изображен на рис. 6.7. Хотя он изображен в виде прямоугольника с четырьмя узлами 1, 2, 3, 4, пары узлов 1 и 2, 3 и 4 имеют одинаковые координаты, т.е. фактически элемент имеет нулевое раскрытие.

Под действием нормального  $\sigma$  и касательного  $\tau$  напряжений элемент испытывает нормальные  $\lambda_\eta$  и касательные  $\delta_\xi$  деформации. Связь напряжений с деформациями характеризуется линейными уравнениями:

$$\sigma = k_\eta \delta_\eta; \quad \tau = k_\xi \delta_\xi. \quad (6.44)$$



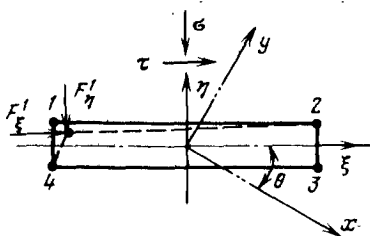


Рис. 6.7. Схема контакт-элемента Гудмана:

1 4 — узлы

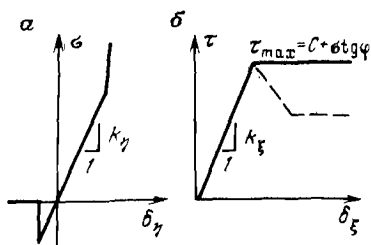


Рис. 6.8. Зависимость нормальных и касательных напряжений от нормальных (а) и сдвиговых (б) деформаций

Минимально возможное (растягивающее) напряжение, нормальное к плоскости контакта, ограничивается прочностью контакта на растяжение  $T$  ( $\sigma_{\min} = T$ ). У разорванного контакт-элемента прочность на растяжение снижается до нуля.

После полного закрытия контакта при сжатии его нормальный модуль  $K$  возрастает до модуля окружающих блоков.

Предельное сопротивление сдвигу характеризуется уравнением Кулона

$$\tau_{\max} = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.45)$$

Т. Грот [23], развивая модель Гудмана, вводит разупрочнение контакта в процессе сдвига.

Механические характеристики контакт-элемента (его реакция на нормальные и касательные деформации) изображены на рис. 6.8.

Система уравнений, связывающая восемь нормальных и касательных узловых сил с восемью перемещениями, имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} F_{\xi}^1 \\ F_{\eta}^1 \\ F_{\xi}^2 \\ F_{\eta}^2 \\ F_{\xi}^3 \\ F_{\eta}^3 \\ F_{\xi}^4 \\ F_{\eta}^4 \end{Bmatrix} = l \begin{bmatrix} 2k_{\xi} & 0 & -k_{\xi} & 0 & k_{\xi} & 0 & -2k_{\xi} & 0 \\ 0 & 2k_{\eta} & 0 & -k_{\eta} & 0 & k_{\eta} & 0 & -2k_{\eta} \\ -k_{\xi} & 0 & 2k_{\xi} & 0 & -2k_{\xi} & 0 & k_{\xi} & 0 \\ 0 & -k_{\eta} & 0 & 2k_{\eta} & 0 & -2k_{\eta} & 0 & k_{\eta} \\ k_{\xi} & 0 & -2k_{\xi} & 0 & 2k_{\xi} & 0 & -k_{\xi} & 0 \\ 0 & k_{\eta} & 0 & -2k_{\eta} & 0 & 2k_{\eta} & 0 & -k_{\eta} \\ -2k_{\xi} & 0 & k_{\xi} & 0 & -k_{\xi} & 0 & 2k_{\xi} & 0 \\ 0 & -2k_{\eta} & 0 & k_{\eta} & 0 & -k_{\eta} & 0 & 2k_{\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{\xi}^1 \\ \delta_{\eta}^1 \\ \delta_{\xi}^2 \\ \delta_{\eta}^2 \\ \delta_{\xi}^3 \\ \delta_{\eta}^3 \\ \delta_{\xi}^4 \\ \delta_{\eta}^4 \end{Bmatrix} \quad (6.46)$$

где  $l$  — длина элемента;  $k_{\xi}$ ,  $k_{\eta}$  — коэффициенты (модули) сдвиговой и нормальной жесткости контакта, отнесенные к единице площади.

Если направления осей глобальных координат  $x$  и  $y$  не совпадают с направлениями локальных осей  $\xi$  и  $\eta$ , как это изображено на рис. 6.7, то узловые перемещения и узловые силы в глобальной системе будут связаны с аналогичными величинами в локальной системе следующими соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{\xi}^i \\ \delta_{\eta}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (6.47)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{\xi}^i \\ F_{\eta}^i \end{Bmatrix}. \quad (6.48)$$

Подстановка попарно уравнений (6.47) в уравнения (6.48), а затем уравнений (6.46) попарно в формулы (6.48) приводит к системе уравнений между узловыми силами и перемещениями в глобальной системе координат:

$$\begin{Bmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_2^x \\ F_2^y \\ F_3^x \\ F_3^y \\ F_4^x \\ F_4^y \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{l}} \begin{bmatrix} -2A & 2B & A & -B & -A & B & 2A & -2B \\ 2B & 2A & -B & -A & B & A & -2B & -2A \\ A & -B & -2A & 2B & 2A & -2B & -A & B \\ -A & B & 2A & -2B & -2A & 2B & A & -B \\ B & A & -2B & -2A & 2B & 2A & -B & -A \\ -2A & -2B & -A & B & A & -B & -2A & 2B \\ -2B & -2A & B & A & -B & -A & 2B & 2A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad (6.49)$$

где  $A = \sin \theta \cos \theta (k_{\xi} + k_{\eta})$ ;  $B = k_{\xi} \cos^2 \theta + k_{\eta} \sin^2 \theta$ .

Коэффициенты матриц жесткости контакт-элементов используются при формировании МЖС обычным образом. Удовлетворение условий прочности по отношению к растяжению и сдвигу в контакт-элементах может осуществляться с помощью переменных модулей методом начальных напряжений или комбинированным способом, изображенным на рис. 6.9 (по Т. Гроту [23]). Матрица жесткости системы при этом перестраивалась после каждого шага нагружения, а в пределах шага итерация велась с постоянной матрицей методом начальных напряжений.

В той же работе [23] вводится в анализ расширение (дилатансия) шероховатого контакта при сдвиге  $\delta_{\eta}^{\text{дил}}$ , связанное со сдвигом

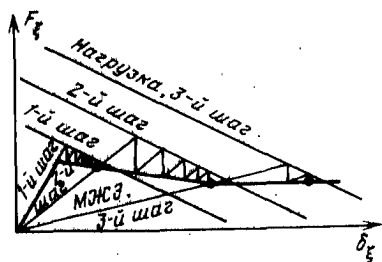
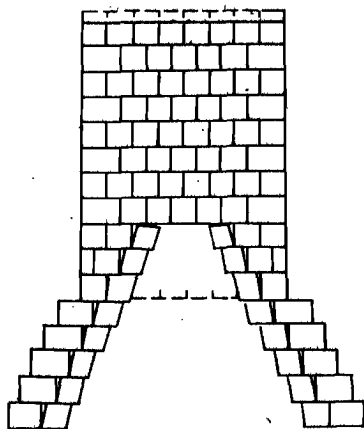


Рис. 6.9. Графическое изображение смешанной процедуры введения сопротивляемости контакта

Рис. 6.10. Схема образования свода обрушения над выработкой в блочной среде



$\delta_{\xi}$ . Величина расширения рассчитывается после приложения очередного шага нагрузки и вводится методом начальных напряжений.

Контакт-элементы Р. Гудмана получили очень широкое распространение, и примеров их успешного использования есть много, но самым эффективным, пожалуй, остается решение, приведенное на рис. 6.10 (по [22]).

Блочная структура с выработкой трапециевидной формы нагружается вертикальным давлением. Решение свидетельствует о частичном развороте блоков в стенках выработки и о формировании свода обрушения. Аналогичный результат был получен на блочной модели из эквивалентного материала.

Альтернативный метод введения контакта в конечно-элементную схему разработан автором совместно с Ю.В. Андреевым. Контакт рассматривается как трещина с плотно сомкнутыми шероховатыми берегами, не обладающая какой-либо податливостью в нормальном и касательных направлениях. Пока напряжения в плоскости контакта не достигают заданной прочности на растяжение ( $\sigma = T$ ) или на сдвиг ( $\tau = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi$ ), то в плоскости контакта область сохраняет сплошность. Если же на очередном шаге нагружения тот или иной компонент напряжений в плоскости контакта достигает предельного значения, то на этом участке контакта среда теряет сплошность. Если происходит разрыв под действием растягивающего напряжения, то берега образующейся трещины не влияют друг на друга, и в дальнейшем область рассматривается как область с разрезом. Если же предельного значения достигает сдвигающее напряжение, то разрыв сплошности возникает, однако берега продолжают взаимодействовать (рис. 6.11). Во-первых, движение берегов контакта возможно лишь под некоторым углом  $\alpha$  к плоскости контакта. Угол  $\alpha$ , определяемый шероховатостью берегов, может быть назван углом расширения (дилатансии). Этот угол будет у реального контакта зависеть от величины сдвига  $\delta$ ; нами принята зависимость в виде

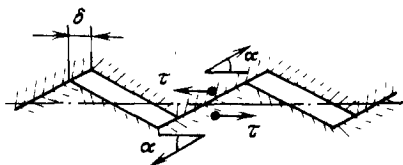


Рис. 6.11. Схема расширения контакта при сдвиге

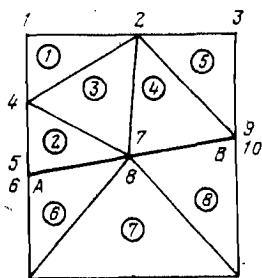


Рис. 6.12. Расположение контакта  $AB$  в сети конечных элементов

$$\alpha = \alpha_0 (1 - e^{-\beta\delta}), \quad (6.50)$$

где  $\alpha_0, \beta$  — экспериментальные параметры.

Во-вторых, противоположный берег будет вызывать на поверхности контакта силы сопротивления, которые также уменьшаются по мере сдвига:

$$\tau = C(\delta) + \sigma \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.51)$$

Зависимость  $C$  от  $\delta$  принята в виде

$$C = C_0 (1 - e^{-\gamma\delta}), \quad (6.52)$$

где  $C_0, \gamma$  — экспериментальные параметры.

Реализация изложенной модели достигается в следующем порядке. Пусть в рассматриваемой области (рис. 6.12) линия  $AB$  является контактом с пониженными прочностными свойствами.

Область разбивается на элементы таким образом, чтобы линия контакта совпадала с границами элементов. Узлам, лежащим на контакте, присваиваются двойные номера: каждый из этих номеров принадлежит элементам по одну сторону контакта.

В обычном порядке составляется МЖС, которая по существу будет представлять собой набор изолированных матриц жесткости для каждой из подобластей, разделенных контактами. Далее в цикле по всем контактным парам узлов работает подпрограмма MODIF, модифицирующая МЖС в зависимости от условий в узловой паре. По напряжениям в элементах, примыкающих к узлу (например, в элементах 2, 3, 4, примыкающих к узлу 7), вычисляются силы  $F_x$  и  $F_y$  в этом узле, нормальная и касательная силы  $F_\eta$  и  $F_\xi$  к плоскости контакта:

$$\begin{Bmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}. \quad (6.53)$$

Нормальная и касательная силы делятся на длину участка контакта, примыкающую к данному узлу, и определяются нормальное и касательное напряжения  $\sigma$  и  $\tau$ . Напряжения сравниваются с заданными предельными величинами, и в зависимости от результатов проверки производится модификация МЖС.

а.  $\sigma > T, \tau < C(\delta) + \sigma \operatorname{tg} \varphi$ . Безусловно, этим условиям удовлетворяет исходное состояние, когда напряжения в элементах равны нулю. Разрыва сплошности в узле нет, оба узла контактной пары (7 и 8 в рассматриваемом примере) будут иметь одинаковые перемещения. Коэффициенты 15-го и 16-го столбцов МЖС, относящиеся к узлу 8, добавляются соответственно к 13-му и 14-му столбцам, относящимся к узлу 7. Узлу 8 присваиваются признаки фиксации по направлениям  $x$  и  $y$ , которые при использовании подпрограммы решения системы уравнений из комплекта "Геомеханика" (см. приложение) обеспечивают игнорирование 15-го и 16-го уравнений. Модифицированная таким образом МЖС уже не содержит разрыва в узле 7.

б.  $\sigma \leq T$ . В узле имеет место разрыв, модификация МЖС не нужна. Оба узла по обе стороны контакта будут иметь совершенно независимые перемещения.

в.  $\tau \geq C(\delta) + \sigma \operatorname{tg} \varphi$ . В узле происходит сдвиг по контакту. Анализируется направление напряжения  $\tau$ , которое определит направление сдвига контакта. В примере на рис. 6.13 предполагается, что верхняя половина контакта с узлом 7 сдвигается вправо по контакту. Направление скольжения  $A_1$  определяется ориентировкой контакта  $\beta$  и углом расширения  $\alpha = \alpha(\delta)$ . Таким образом, перемещения узла 7 не являются независимыми параметрами, а связаны друг с другом соотношением

$$v_7 = u_7 \operatorname{tg}(\beta + \alpha(\gamma)).$$

Элементы 14-го столбца МЖС, относящиеся к  $v_7$ , умножаются на  $\operatorname{tg}(\beta + \alpha(\gamma))$  и добавляются к элементам 13-го столбца. Узлу 7 по направлению  $y$  присваивается фиксация, что обеспечивает игнорирование 14-й строки при решении системы уравнений, ранг которой таким образом уменьшился на единицу.

К узлу 7 прикладывается сила трения по контакту, равная  $F_7 = l [C(\delta) + \sigma \operatorname{tg} \varphi]$  и противоположная направлению сдвига. Два компонента этой силы  $F_{7x} = F_7 \cos \beta$ ,  $F_{7y} = F_7 \sin \beta$ , добавляются к общему вектору сил.

Аналогичные операции выполняют и в другом узле контактной пары. После просмотра всех контактных пар и модификации МЖС решается система уравнений. Рассчитываются напряжения в элементах. На место модифицированной МЖС вводится исходная МЖС. Вновь по подпрограмме

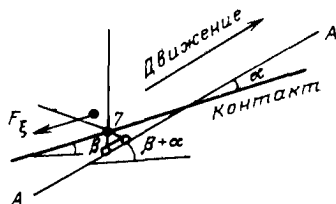


Рис. 6.13. Схема сдвига узла по контакту

*MODIF* анализируются условия в узловых парах, и если условия не выполняются (с заданной точностью хотя бы в одной контактной паре), то по вновь модифицированной МЖС и новом наборе узловых сил снова решается система уравнений — и т.д.

При пошаговом нагружении рациональным вариантом данного метода оказалось модифицирование МЖС перед каждым шагом нагружения, а в пределах шага — итерации с изменяемыми касательными силами на контактах до удовлетворения условия (6.51).

#### 6.4. АРМИРОВАННЫЙ ГРУНТ

В последние годы при сооружении насыпей, набережных, портовых причалов для уменьшения давления на подпорные стенки или вообще вместо подпорных стенок получил метод армирования грунта гибкой металлической арматурой. В качестве арматуры используются обычно тонкие ленты из нержавеющей металла, обладающие большой площадью контакта и соответственно высоким сцеплением с грунтом.

Расчет армированного грунта возможен двумя методами:

дискретный — грунт и арматура изображаются в виде различных конечных элементов, плоских и линейных, обладающих соответственно свойствами грунта и арматуры;

композитный — армированный грунт разбивается на элементы, включающие в себя грунт и арматуру и наделяемые композитными свойствами, учитывающими свойства грунта, арматуры и контактов между ними.

Дискретный метод, несомненно, позволяет получить более точные решения, так как в нем учитывается взаимодействие с грунтом каждой отдельной полосы арматуры, однако он требует чрезвычайно мелкой сети элементов. Композитный метод рассматривает арматуру уже не как набор конкретных полос, а как сплошную среду с определенными свойствами, пронизывающую грунт. Сеть элементов при исследовании одной и той же задачи композитным методом может быть значительно реже, чем дискретным методом. Композитный метод получил преимущественное развитие как при решении геотехнических задач с армированным грунтом, так и при исследовании железобетонных конструкций.

В большинстве публикаций при построении матрицы жесткости композитного элемента предполагается отсутствие проскальзывания арматуры в грунте; в ряде более поздних публикаций вводится учет проскальзывания арматуры в грунте.

Ниже излагается композитная модель армированного грунта с учетом проскальзывания, которую предложили Д. Нейлор и Х. Ричардс [37] для анализа в условиях плоской деформации.

На рис. 6.14, а изображена одна арматурная лента с относящимся к ней грунтом,  $T$  — расстояние между слоями арматуры,  $B$  — шаг арматуры в слое,  $b$ ,  $t$  — размеры поперечного сечения арматуры. Принимается, что вокруг арматуры имеется некоторый контактный

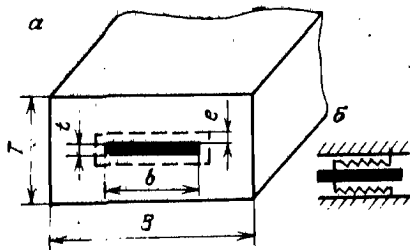


Рис. 6.14. Расчетная схема армированного грунта

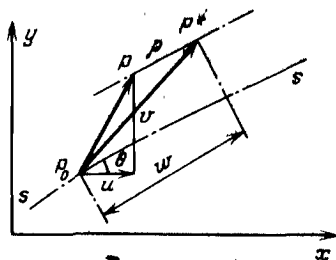


Рис. 6.15. Графическое изображение деформирования армированного грунта

слой  $e$ , сдвиговая деформация в котором  $\gamma_s$  пропорциональна величине касательного напряжения на контакте арматуры с грунтом  $\tau_s$ . Модуль сдвига контактного слоя  $G_s$  принимается произвольно "большим", так, чтобы выдерживалось неравенство

$$\rho e G_s / B \gg a E_s, \quad (6.53)$$

где  $a = bt/BT$  — доля арматуры в сечении;  $e$  — толщина контактного слоя, принимаемая равной 1;  $E_s$  — модуль упругости грунта;  $\rho = 2b/T$ .

Взаимодействие арматуры с грунтом через упругий эквивалентный слой аналогично наличию контактных пружин (рис. 6.14, б).

Высокая жесткость контактного слоя обеспечивает малый сдвиг точек арматуры относительно грунта, т.е. практическое отсутствие проскальзывания арматуры в грунте при использовании "композитной" матрицы жесткости элемента. Если же уровень  $\tau_s$  ограничить кулоновским критерием, то, используя ступенчатое нагружение и переменный "касательный" модуль  $G_s$ , удастся имитировать проскальзывание арматуры.

На рис. 6.15 ось  $ss$  — ось арматуры до приложения нагрузки. После приложения нагрузки ось арматуры переместится в положение  $PP^*$ . Ось  $PP^*$  практически параллельна оси  $ss$ , поскольку арматура может смещаться относительно грунта лишь в направлении своей оси.

Исходная точка  $P_0$  после нагружения в грунте перемещается в положение  $P$ , а в арматуре — в положение  $P^*$ . Таким образом,  $\rho$  — смещение арматуры относительно грунта.

Продольная деформация арматуры  $\epsilon_s$  — это градиент вдоль  $ss$  общего перемещения  $w$ . Из рис. 6.15 видно, что

$$w = u \alpha x + v \alpha y + \rho = u \cos \theta + v \sin \theta + \rho. \quad (6.54)$$

Таким образом, продольная деформация арматуры

$$\epsilon_s = \frac{dw}{ds} = \cos \alpha \frac{du}{ds} + \sin \alpha \frac{dv}{ds} + \frac{d\rho}{ds}, \quad (6.55)$$

но

$$\frac{du}{ds} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.56)$$

Аналогично могут быть представлены производные  $dv/ds$  и  $d\rho/ds$ . С учетом этого выражения (6.55) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \epsilon_s = & \cos^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial v}{\partial y} + \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & + \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Сдвиговая деформация контактного слоя определяется выражением

$$\gamma_s = \frac{\rho}{e} \quad (6.58)$$

Компоненты деформаций грунта определяются обычными уравнениями:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

В уравнениях (6.57), (6.58), определяющих деформации элементов композитной модели, в качестве неизвестных перемещений фигурируют обычные величины  $u$  и  $v$  и третья величина  $\rho$ .

В дальнейшем изложении не заложен конкретный тип элемента, однако, по утверждению авторов [37], точечный четырехугольный элемент с квадратичной аппроксимацией в направлении арматуры, с линейной — в перпендикулярном и с четырьмя точками интегрирования оказался наилучшим.

Матрица жесткости композитного элемента состоит из двух частей — грунтовой  $[K_1]$  и арматурно-контактной  $[K_2]$ :

$$[K] = [K_1] + [K_2]. \quad (6.59)$$

Матрица  $[K]$  имеет ранг  $3n$  ( $n$  — число узлов элемента). Соответственно матрицы  $[K_1]$  и  $[K_2]$  также должны иметь ранг  $3n$ .

Согласно принципу возможных перемещений и по аналогии с формулой (2.46) каждая из матриц может быть представлена в виде

$$[K_l] = \int_s [B_l]^T [D_l] [B_l] ds, \quad (6.60)$$

где  $l = 1$  или  $2$  и обозначает грунт или арматуру.

Матрица  $[B_1]$  имеет обычный вид для условий плоской деформации (см. формулу 2.37) за исключением того, что столбец нулей добавляется в качестве каждого третьего столбца, так что матрица  $[B_1]$  имеет размер  $3n \times 3n$ . Матрица  $[B_1]$  состоит из  $n$  подматриц вида  $[B_i]$



$$[B_1] = [[B_{11}] \dots [B_{1i}] \dots [B_{1n}]], \quad (6.61)$$

где

$$[B_{1y}] = \begin{bmatrix} N'_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{iy} & 0 \\ N'_{iy} & N'_{ix} & 0 \end{bmatrix},$$

$N'_{ix}, N'_{iy}$  — производные функции формы узла  $i$ .

Столбцы нулей игнорируют сдвиг арматуры  $\rho_i$  в узле при вычислении деформаций в грунте.

$[D_1]$  в уравнении (6.60) — обычная, не обязательно линейная матрица связи напряжений и деформаций при плоской деформации ранга  $3 \times 3$ .

Матрица  $[B_2]$  связывает деформации арматуры и контактной зоны  $\epsilon_s$  и  $\gamma_s$  с узловыми перемещениями; она представляет собой дискретизацию уравнений (6.57) и (6.58) и также состоит из подматриц. Подматрица для узла  $i$  имеет вид:

$$[B_{2i}] = \begin{bmatrix} Q_i \cos \theta_i & Q_i \sin \theta_i & Q_i \\ 0 & 0 & N_i/e \end{bmatrix}, \quad (6.62)$$

где  $Q_i = N'_{ix} \cos \theta + N'_{iy} \sin \theta$ .

Матрица  $[D_2]$  связывает продольные напряжения в арматуре  $\sigma_s$  и касательные напряжения на контакте  $\tau_s$  с деформациями  $\epsilon_s$  и  $\gamma_s$ . Для того чтобы интегрирование уравнения (6.60) можно было проводить по площади композитного элемента (а не по объему арматуры и объему контактной зоны),  $E_s$  умножается на  $a$ , а  $G_s$  — на  $\rho e/B$ :

$$[D_2] = \begin{bmatrix} a E_s & 0 \\ 0 & \frac{\rho e G_s}{B} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Матрица  $[K_2]$  получается подстановкой соотношений (6.62) и (6.63) в уравнение (6.60). Она имеет структуру

$$[K_2] = \begin{bmatrix} [K_{211}] \dots [K_{21j}] \dots [K_{21n}] \\ [K_{2i1}] \dots [K_{2ij}] \dots [K_{2in}] \\ \dots \\ [K_{2n1}] \dots [K_{2nj}] \dots [K_{2nn}] \end{bmatrix}, \quad (6.64)$$

при этом

$$[K_{2ij}] = a E_s Q_i Q_j \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 + R_{ij} \end{bmatrix},$$

$$R_{ij} = \frac{pG_s}{Ba e E_s} \left( \frac{N_i N_j}{Q_i Q_j} \right).$$

Итак, композитная матрица жесткости элемента (соответственно и всей системы) определена. Решение системы уравнений дает перемещения  $u, v, \rho$  в узлах. Напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в грунте и  $\tau_s, \sigma_s$  в арматуре находятся по формулам:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_1] [B_1] \left\{ \sigma \right\}, \quad (6.65)$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s, \quad \tau_s = G_s \gamma_s.$$

При этом деформации  $\epsilon_s, \gamma_s$  определяются выражением

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = [B_2] \left\{ \delta \right\}, \quad (6.66)$$

где  $\left\{ \delta \right\} = \{u_1 v_1 \rho_1 \dots u_n v_n \rho_n\}$  — узловые параметры элемента.

Для учета проскальзывания использовалась следующая процедура. Предельный уровень контактных напряжений определяется критерием Кулона

$$\tau_s^f = C_s + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi, \quad (6.67)$$

где  $C_s$  — сцепление по контакту;  $\sigma_n$  — нормальное напряжение на поверхности контакта, определяемое из грунтового тензора.

Нагрузка прикладывается шагами с пропорциональным увеличением всех компонентов, т.е. инкремент вектора нагрузки  $\left\{ \Delta F_i \right\}$  является скалярной долей от полного вектора  $\left\{ F \right\}$ :

$$\left\{ \Delta F_i \right\} = \lambda_i \left\{ F \right\}, \quad (6.68)$$

где  $\lambda_i$  — скалярный множитель.

Порядок определения касательного модуля сдвига контактного слоя  $G_s^{\text{кас}}$  для  $i$ -го шага нагружения иллюстрирован на рис. 6.16. Напряженно-деформированное состояние контакта до нагружения характеризуется точкой  $A$ , точка  $B$  определяет конечное — пока неизвестное состояние. Ожидаемый на  $i$ -м шаге прирост деформаций  $\Delta \gamma_s^*$  оценивается экстраполяцией из предыдущего инкремента:

$$\Delta \gamma_s^* = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \Delta \gamma_s (i-1). \quad (6.69)$$

Соответствующий упругий прирост напряжений  $\Delta \tau_s^* = G_s \Delta \gamma_s^*$  добавляется к ранее накопленному напряжению, и сумма сравнивается с предельной величиной  $\tau_s^f$ , рассчитанной по уравнению (6.67) при  $\sigma_n$ , экстраполированном к концу инкремента. Если критерий превзойден (точка  $E$  на рис. 6.16), прирост напряжений ограничи-

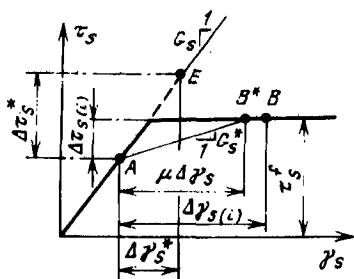


Рис. 6.16. Графическое изображение деформационных свойств контакта грунта с арматурой

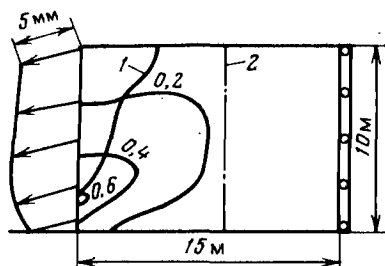


Рис. 6.17. Деформации армированной насыпи и изолинии напряжений в арматуре (в долях от предела прочности):

1 — линия максимальных напряжений в арматуре; 2 — граница армирования

вается величиной  $\Delta \tau_s(i)$ . Приблизительный модуль  $G_s^*$  для составления МЖЭ на  $i$ -м шаге определяется выражением

$$G_s^* = \frac{\Delta \tau_s^*}{\Delta \gamma_s^*} \quad (6.70)$$

Авторы отмечают, что иногда у них наблюдались резкие колебания  $\tau_s$  между элементами и даже внутри изопараметрического элемента. Для ликвидации этого явления оказалось целесообразным вычислять среднюю деформацию  $\Delta \gamma_s(i)$  в элементе по четырем точкам интегрирования.

На рис. 6.17 приведена схема рассчитанной армированной насыпи. Нагружение производилось путем снятия напряжений с левой границы, что имитировало удаление подпорного сооружения, используемого при отсыпке насыпи. Сеть элементов состояла из 8 рядов по 10 прямоугольных элементов.

Нагрузка прикладывалась в 24 одинаковых шага.

На рис. 6.17 также изображены результаты расчета — перемещения лицевой плоскости и графики, характеризующие усилия в арматуре. Авторы отмечают, что учет проскальзывания является существенным для выбора арматуры.

## 6.5. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Если реологические свойства среды характеризуются линейной вязкоупругостью (см. рис. 1.17, а), то для расчета напряженно-деформированного состояния области на некоторый момент времени  $t$  под действием постоянной нагрузки, приложенной при  $t = 0$ , наиболее целесообразным и достаточно точным способом является

предварительный расчет упругих констант, соответствующих этому моменту времени по формулам (1.97), и решение упругой задачи с этими расчетными параметрами. Такой способ рекомендует О. Зенкевич [5].

Если реологические свойства среды характеризуются вязкопластической моделью (см. рис. 1.17, б), но интерес представляет лишь окончательное напряженно-деформированное состояние при  $t \rightarrow \infty$  под действием постоянных во времени нагрузок, то также нет нужды просматривать ход ползуче-релаксационного процесса деформирования во времени, а достаточно получить лишь упругопластическое решение при характеристиках длительной прочности  $\sigma_{дл}$  и  $\varphi_{дл}$ . Именно такой прием использован в работе [19] при прогнозе деформаций откосов котлована.

Если же представляет интерес именно ход развития деформаций, то необходимо организовать шаговый процесс во времени.

Ниже приводится описание простейшей процедуры, реализованной автором и Х.З. Бакеновым на базе программы "Геомеханика".

Реологическая модель приведена на рис. 1.17, а. Реакция среды на объемные деформации — упругая с постоянным модулем объемного сжатия  $K$ ; реакция на сдвиг — упруговязкопластическая с кулоновским критерием пластичности. Вязкое сдвиговое течение принимается равнообъемным.

Распределение напряжений в области в момент приложения нагрузки ( $t = 0$ ) соответствует упругому решению. Если напряженное состояние элемента (точка  $M$  на рис. 6.18) оказывается за пределами длительной прочности, то в нем развиваются деформации ползучести, полный вектор которых  $\epsilon$  нормален к поверхности вязкопластического потенциала  $A-A$ , которая в силу принятого равнообъемного характера течения параллельна гидростатической оси.

Точка  $M_T$ , лежащая на предельной границе длительной прочности, представляет собой "теоретическое" напряженное состояние,

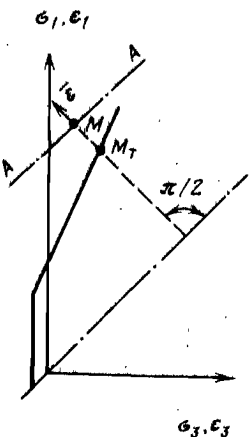
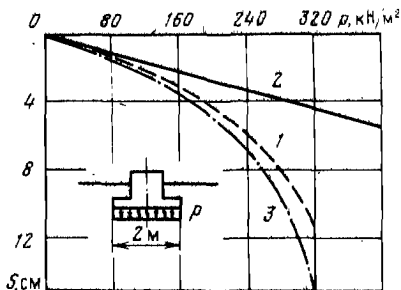


Рис. 6.18. Графическое изображение изменения напряжений и деформаций упруговязкопластической среды во времени;  $M_T$  напряжения после релаксации

Рис. 6.19. Зависимости осадок фундамента от давления на различном основании



к которому в релаксационном режиме пришел бы элемент, будь он оставлен при постоянных деформациях. Координаты точки  $M^T$  определяются уравнениями, аналогичными формулам (5.15):

$$\sigma_3^T = (\sigma_1 - S_{дл} + \sigma_3) / (1 + \text{ctg} \psi_{дл});$$

$$\sigma_1^T = S_{дл} + \sigma_3^T \text{ctg} \psi_{дл},$$

где  $S_{дл}$ ,  $\psi_{дл}$  — характеристики длительной прочности. Несложно убедиться, что

$$\sigma_1 = \sigma_1^T + \tau^П;$$

$$\sigma_3 = \sigma_3^T - \tau^П,$$

где  $\tau^П = (\sigma_1 - \sigma_3 \text{ctg} \psi_{дл} - S) / (1 + \text{ctg} \psi_{дл})$  — полная разность между действующим (в точке  $M$ ) и теоретическим (в точке  $M^T$ ) касательными напряжениями. При решении упругопластической задачи (раздел 5.3) разность между главными напряжениями в точках  $M$  и  $M^T$  рассматривалась как начальные напряжения  $\tau^П$ . В вязкопластической среде величина  $\tau^П$  будет определять скорость деформаций ползучести

$$\dot{\gamma} = \tau^П / \eta, \quad (6.71)$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости. За время  $\Delta t$  прирост сдвиговой деформации

$$\Delta \gamma = \Delta t \tau^П / \eta. \quad (6.72)$$

Чтобы вызвать такую деформацию при неизменной матрице жесткости элемента, к нему необходимо приложить дополнительное касательное напряжение  $\Delta \tau$ :

$$\Delta \tau = G \Delta t \frac{1}{\eta} \tau^П = G \Delta \gamma = \frac{G \Delta t \tau^П}{\eta}. \quad (6.73)$$

Направление  $\Delta \tau$  должно совпадать с направлением максимального касательного напряжения в элементе. Таким образом, вектор главных добавочных напряжений представляет собой набор

$$\left\{ \Delta \sigma \right\}_r = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_3 \\ \alpha \end{Bmatrix}, \quad (6.74)$$

$$\text{где } \Delta \sigma_1 = - \Delta \sigma_3 = \frac{G \Delta t \tau^П}{\eta}, \quad (6.75)$$

$\alpha$  — угол ориентировки главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Главные добавочные напряжения пересчитываются по формулам поворота осей координат в осевые добавочные  $\left\{ \Delta \sigma \right\} =$

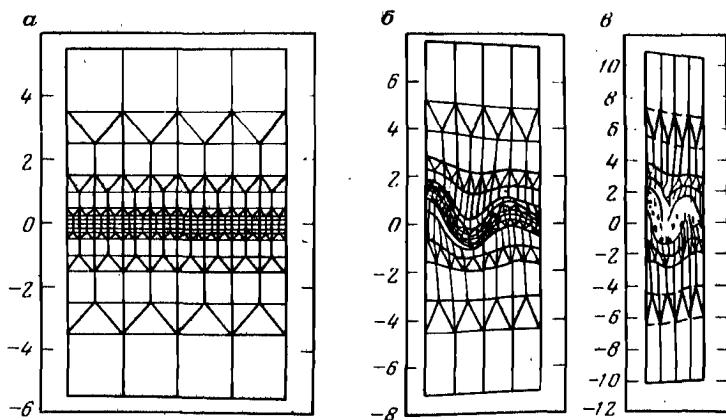


Рис. 6.20. Схема формирования геологической складки при величине горизонтального сжатия:

*a* — 0%; *б* — 48%; *в* — 73%

$= \{ \Delta \sigma_x \Delta \sigma_y \Delta \tau_{xy} \}^T$ , далее по вектору  $\{ \Delta \sigma \}$  вычисляются добавочные узловые силы, добавляемые к вектору сил. Следующее решение задачи с прежней МЖС, по новым значениям вектора сил дает ответ о состоянии области на момент времени  $t_0 + \Delta t$  и т.д. Процедура получения упруговязкопластического решения оказывается в точности подобна получению упругопластического решения методом начальных напряжений (см. раздел 5.1 и 5.3) с той лишь разницей, что там в качестве начальных напряжений на очередном цикле итерации фигурировал набор  $\{ k\tau^n - k\tau^n a \}^T$ , где  $k \approx 1,5$  — коэффициент ускорения сходимости итераций, а здесь на очередном временном интервале  $\Delta t$  фигурирует набор добавочных напряжений  $\{ k\tau^n - -k\tau^n a \}^T$ , где  $k = G\Delta t/\eta$ . Дальнейшее использование начальных и добавочных напряжений одинаковое. Обе процедуры при возрастании числа циклов ведут к одному и тому же упругопластическому решению.

Таким образом, упруговязкопластическое решение может быть получено с помощью упругопластических процедур, изложенных в разделах 5.1 и 5.3, при замене в них коэффициента  $k = 1,5$  на величину  $k = G\Delta t/\eta$ . Напряженно-деформированное состояние области после *i*-го цикла итерации будет соответствовать времени  $t = t_0 + +i\Delta t$ .

Процедура будет безусловно устойчивой при  $k = G\Delta t/\eta < 1$ , т.е. при  $\Delta t < \eta/G$ .

На рис. 6.19 приведены графики зависимости осадок ленточного фундамента от удельной нагрузки для упруговязкопластического основания через 1 год после приложения нагрузки (1), а также для упругого (2), и упругопластического основания (3). Характеристики упруговязкопластической среды:  $E = 8$  МПа,  $\nu = 0,4$ ,  $\gamma = 19,1$  кН/м<sup>3</sup>,

$C_{дл} = 34,4$  кПа,  $\varphi_{дл} = 7^\circ$ ,  $\eta = 1,5 \cdot 10^{-10}$  кПа·с. Для получения упругого решения были использованы характеристики  $E$  и  $\nu$ , а для упругопластического решения — характеристики  $E$ ,  $\nu$ ,  $C_{дл}$  и  $\varphi_{дл}$  из этого набора. Как и должно быть, с увеличением времени упруговязкопластическое решение приближается к упругопластическому.

При анализе больших деформаций вязкого течения становится необходимым учитывать изменение геометрии тела. На рис. 6.20 по данным работы [15] приведена последовательность формирования во времени складки геологического слоя при горизонтальном сжатии тектоническими силами, смоделированная методом конечных элементов. Этот необыкновенный результат достигнут с использованием тензора Яумана, который позволяет сопоставлять напряжения в теле при изменении его формы и положения в пространстве.

### 6.6. ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Рассматривается процесс изменения во времени напряженно-деформированного состояния упругой пористой среды, насыщенной газосодержащей жидкостью. Пусть в момент времени  $t = 0$ , когда отсутствуют напряжения в скелете и поровое давление, к области прикладываются заданные граничные условия (заданные силы, перемещения узлов, напоры, расходы поровой жидкости). Поскольку газосодержащая жидкость сжимаемая, то часть напряжений будет воспринята жидкостью, а часть — скелетом.

Ход процесса рассеяния возникшего порового давления, передачи нагрузки на скелет грунта и его деформирования определяется совместным решением двух систем уравнений: равновесия системы элементов и сплошности потоков в ней (по [6], [26], [44]):

$$[K^c] \{ \delta^c(t) \} + [C^c] \{ p^c(t) \} = \{ F^c \}; \quad (6.76)$$

$$[C^c]^T \{ \delta^c(t) \} - g^* [K_\Phi^c] \{ p^c(t) \} - [E] \{ p^c(t) \} = 0. \quad (6.77)$$

В уравнении равновесия (6.76) вектор узловых сил за счет деформаций скелета  $[K^c] \{ \delta^c(t) \}$  и вектор узловых сил за счет градиента порового давления  $[C^c] \{ p^c(t) \}$  в сумме равны вектору заданных сил.

В уравнении фильтрации (6.77) сумма объемной деформации грунтового скелета  $[C^c]^T \{ \delta^c(t) \}$ , притока жидкости благодаря поровому давлению  $g^* [K_\Phi^c] \{ p^c(t) \}$  и изменению объема газовых пузырьков  $[E] \{ p^c(t) \}$  равна нулю.

В формулах (6.76) и (6.77)  $[K^c]$  — матрица жесткости системы элементов скелета,  $[K_\Phi^c]$  — фильтрационная матрица жесткости области. Матрица сжимаемости газонасыщенной поровой жидкости  $[E]$  определяется выражением

$$[E] = \int_s \frac{\pi}{K} [N_\alpha] [N_\alpha]^T dS,$$

где  $\mu$  — пористость;  $K$  — модуль сжимаемости газосодержащей жидкости;  $[N_u]$  — матрица функций формы для центра элемента. При использовании трехузлового элемента все функции формы в центре элемента равны  $1/3$ , поэтому для такого элемента

$$[N_u] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Матрица  $[C^c]$  является "стыковочной" между деформационной и фильтрационной частями задачи. Она представляет собой объединение стыковочных матриц элементов  $[C]$ , определяемых для условий плоской деформации выражением

$$[C] = \int_s \{N'\} \{\Phi\}^T dS, \quad (6.78)$$

где  $\{N'\} = \{N'_{1x}, N'_{2x}, \dots, N'_{kx}, N'_{1y}, \dots, N'_{ky}\}^T$ ,  $\{\Phi\}^T = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_l\}$ ,  $N_i, \Phi_i$  — функции формы, используемые соответственно для описания перемещений и поровых давлений в пределах элемента. Сеть элементов для составления уравнений равновесия и фильтрации одна, однако набор функций формы для описания перемещений и поровых давлений может быть взят как одинаковый (тогда  $N_i = \Phi_i$  и  $k = l$ ), так и различный.

В частности, в работах [6, 26, 44] используются треугольные элементы, но для описания поровых давлений используются линейные функции формы и давления в трех узловых узлах (число узлов элемента  $l = 3$ ), а для описания перемещений используются квадратичные функции формы и перемещения в трех узловых узлах на серединах сторон элементов (число узлов элементов  $k = 6$ ).

Если для перемещений и давлений используется линейный трех-узловой треугольный элемент с площадью  $\Delta$ , то:

$$\left. \begin{aligned} N_i = \Phi_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y); \\ N'_{ix} &= \frac{1}{2\Delta} b_i, \quad N'_{iy} = \frac{1}{2\Delta} c_i. \end{aligned} \right\} \quad (6.79)$$

Величины  $a_i, b_i, c_i$  определены формулой (2.6).

В центре такого элемента все три функции формы равны  $1/3$ . Несложно убедиться, что формула (6.78) при этом примет вид



$$[C] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

Число строк в матрице  $[C]$  равно  $2k$  — удвоенному числу узлов упругого элемента, а число столбцов равно  $l$  — числу узлов фильтрационного элемента.

Приток жидкости в элемент за счет градиента порового давления в системе уравнений за интервал времени  $\Delta t$  от момента  $t_{n-1}$  до  $t_n$  представляет собой интеграл

$$g^* [K_\Phi] \left\{ p(t) \right\} = [K_\Phi] \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\{ p(t) \right\} dt. \quad (6.81)$$

Фильтрационная матрица жесткости элемента  $[K_\Phi]$  вынесена за знак интеграла, так как она не зависит от времени (во всяком случае в пределах интервала времени  $\Delta t$ ). Поровое давление в конкретной точке представляет собой некоторую функцию, интеграл которой  $\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(t) dt$  может быть получен через граничные значения по формуле

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(t) dt = \Delta t (1 - \alpha) p_{n-1} + \Delta t \alpha p_n, \quad (6.82)$$

где  $p_{n-1}$  и  $p_n$  — давления в начале и конце интервала;  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от вида функций  $p(t)$ .

Если принять, что поровое давление в течение интервала  $\Delta t$  остается постоянным, то  $\alpha = 0$ . Такой прием называют "прямой процедурой". Решение при этом упрощается, однако требуются очень мелкие интервалы, так как в противном случае процесс решения может быть неустойчивым.

Если считать, что в течение интервала  $\Delta t$  поровое давление изменяется линейно, то  $\alpha = 0,5$ . В литературе неоднократно отмечалось, что при  $\alpha > 0,5$  решения получаются безусловно устойчивыми, а величина  $\Delta t$  влияет лишь на точность.

Процесс консолидации затухает во времени, поэтому С. Хванг и др. [26] считают рациональным использование не постоянного шага во времени, а логарифмического. Поровое давление в пределах интервала при этом они интерполируют с помощью безразмерных параметров  $\tau = (t - t_{n-1})/t_{n-1}$  и  $\tau_0 = \Delta t/t_{n-1}$  следующим логарифмическим соотношением

$$p(t) = p(\tau) = p_{n-1} + (p_n - p_{n-1}) \frac{\ln(1 + \tau)}{\ln(1 + \tau_0)}. \quad (6.83)$$

Для функций такого вида

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\ln(1 + \tau_0)} \quad (6.84)$$

Введение соотношения (6.82) в уравнение (6.77) дает окончательный набор уравнений для решения:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} [K^c] & [C^c] \\ [C^c] & a\Delta t [K_\Phi^c] - [E] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta^c(t_n) \\ p^c(t_n) \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{c} F^c \\ [C^c] \end{array} \right\} \left\{ \delta^c(t_{n-1}) + \Delta t(1-a)[K_\Phi] \left\{ p(t_{n-1}) \right\} - [E] \left\{ p(t_{n-1}) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (6.85)$$

Переменными во времени являются только подматрица  $a\Delta t [K_\Phi^c] - [E]$  и правая часть системы. Это позволяет сохранять обращенные матрицы  $[K^c]$  и  $[C^c]$ , а на каждом интервале времени выполнять только обращение, связанное с  $a\Delta t [K_\Phi^c]$  и вычислить правые части уравнений. Объединенная матрица левой части формируется тройками строк (и столбцов), относящихся к одному узлу, так что элементы входящих в нее подматриц чередуются. Верхний левый угол объединенной матрицы выглядит так:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} k_{11} & k_{12} & c_{11} & k_{13} & k_{14} & c_{12} & \dots \\ & k_{22} & c_{21} & k_{23} & k_{24} & c_{22} & \dots \\ & & c_{31} & k_{33} & k_{34} & c_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right],$$

где  $k, c$  — элементы соответственно подматриц  $[K^c]$  и  $[C^c]$ .

На базе программы "Геомеханика" А.В. Мельниковым под руководством автора разработана программа решения плоских задач фильтрационной консолидации. Программа реализует вышеизложенную процедуру и использует трехузловые линейные элементы как для скелета грунта, так и для поровой газосодержащей воды. Вблизи фильтрующих границ в начальные моменты времени наблюдаются аномальные скачки порового давления, связанные с усреднением порового давления в центрах элементов; с течением времени эти скачки сглаживаются. Измельчение сети элементов вблизи границы снижает амплитуду скачков. Эти факты иллюстрируются рис. 6.21, где приведены численные решения одномерной задачи консолидации слоя с фильтрующей верхней границей под постоянной нагрузкой при различных сетках элементов.

На рис. 6.22 приведено сравнение решения задачи фильтрационной консолидации водонасыщенного слоя на жестком непроницаемом основании под полосовой проницаемой нагрузкой с аналитическим

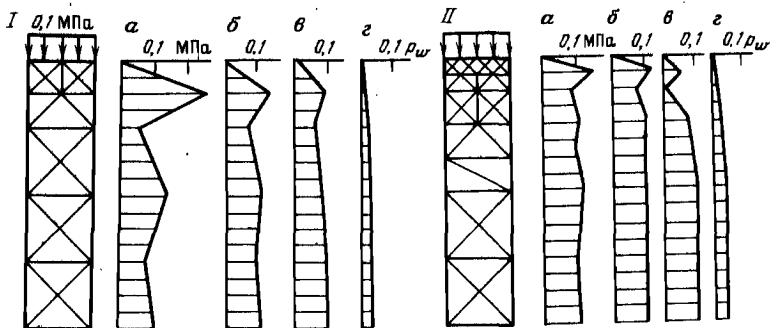
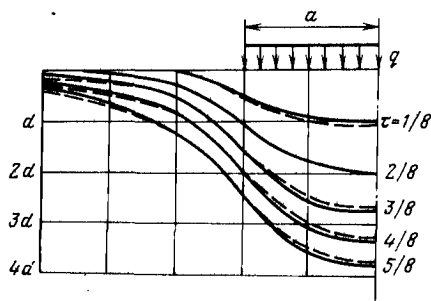


Рис. 6.21. Эпюры порового давления в слое при крупной (I) и мелкой (II) сетях элементов в различные моменты времени:

$a - 0,1$  сут;  $б - 1$  сут;  $в - 10$  сут;  $г - 100$  сут

Рис. 6.22. Кривые развятия осадки во времени (сплошные линии — решение МКЭ, штриховые — аналитическое решение):

$d$  — осадка при  $\tau = \sqrt{Ct/a}$  под сплошной нагрузкой; ( $C$  — коэффициент консолидации)



ким решением [44]. Боковые границы рассматривались как гладкие проницаемые. Результаты численного решения оказались близки к аналитическому решению.

## 6.7. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ С ПРОМЕРЗАНИЕМ И ОТТАИВАНИЕМ ГРУНТА

### 6.7.1. Температурный расчет промерзания

Изложение этой нестационарной задачи с фазовым переходом приводится в работах [20, 24]. Распространение тепла в плоскости описывается уравнением

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (6.86)$$

при граничных условиях

$$T = T_w \quad (6.87)$$

на части границы  $\Gamma_1$  (заданная температура), и

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \frac{\partial T}{\partial y} l_y \right) + q + a(T - T_a) = 0 \quad (6.88)$$

на части границы  $\Gamma_2$  (заданный тепловой поток), где  $l_x, l_y$  — направляющие косинусы нормали к границе;  $T_a$  — внешняя температура;  $C$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — плотность;  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура;  $t$  — время;  $q$  — плотность теплового потока;  $\alpha$  — коэффициент конвективной теплопередачи.

Неизвестная функция температуры  $T$  аппроксимируется на момент времени  $t$  в элементах и во всей рассматриваемой области функциями формы  $N(x, y)$ :

$$T = \sum_{i=1}^n \left\{ N(x, y) \right\}_i^T \left\{ T(t) \right\}_i = [N] \left\{ T \right\}. \quad (6.89)$$

Дискретизация уравнения (6.88) приводит к матричному соотношению

$$[K^c] \left\{ T^c \right\} + [C^c] \left\{ T^c \right\} + \left\{ Q^c \right\} = 0. \quad (6.90)$$

Типичные элементы матриц при этом имеют вид:

$$K_{ij}^c = \sum_S \int k \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS +$$

$+ \sum_{\Gamma_2} \int \alpha N_i N_j d\Gamma$  — элемент теплопроводной МЖС;

$C_{ij}^c = \sum \int \rho c N_i N_j dS$  — элемент матрицы теплоемкости области;

$Q_i^c = \sum_{\Gamma_2} \int N_i (q - \alpha T_a) d\Gamma$  — элемент вектора узловых теплопотоков.

Суммирование подразумевает вклад каждого из элементов в соответствующую матрицу;  $S$  — площадь элемента, а  $\Gamma_2$  относится к элементам, имеющим внешние границы, на которых задано условие (6.88).

Система уравнений (6.90) сильно нелинейна, поскольку свойства материала  $k$  и  $\rho c$  зависят от  $T$ , резко изменяясь при фазовом переходе.

Если предположить, что температура изменяется линейно на малом интервале времени от  $t - \Delta t$  до  $t + \Delta t$ , уравнение (6.90) может быть аппроксимировано выражением

$$[K^c]_t \left( \left\{ T^c \right\}_{t+\Delta t} + \left\{ T^c \right\}_t + \left\{ T^c \right\}_{t-\Delta t} \right) / 3 + [C^c]_t \left\{ T^c \right\}_{t+\Delta t} -$$

$$- \left\{ T^c \right\}_{t-\Delta t} / (2\Delta t) + \left\{ Q^c \right\}_{t+\Delta t} + \left\{ Q^c \right\}_t +$$

$$+ \left\{ Q^c \right\}_{t-\Delta t} / 3 = 0. \quad (6.91)$$

Из формулы (6.91) получаем рекуррентную формулу для окончательного интегрирования по времени:

$$\left\{ T^c \right\}_{t+\Delta t} = - \left( [K^c]_t + \frac{3}{2\Delta t} [C^c]_t \right)^{-1} \left( [K^c]_t \left\{ T^c \right\}_t + \right.$$

$$+ [K^c]_t \left\{ T^c \right\}_{t-\Delta t} - \frac{3}{2\Delta t} [C^c]_t \left\{ T^c \right\}_{t-\Delta t} + \left\{ Q^c \right\}_{t+\Delta t} +$$

$$\left. \left\{ Q^c \right\}_{t-\Delta t} \right). \quad (6.92)$$

В формуле (6.92) фигурируют только средние по интервалу времени значения матриц жесткости  $[K^c]$  и теплоемкости  $\{c^c\}$ , что позволяет избежать итераций при отыскании вектора  $\{T^c\}_{t+\Delta t}$ . Для отыскания вектора  $\{T^c\}_{t+\Delta t}$  требуются значения температур на два предыдущие момента времени  $t$  и  $t-\Delta t$ , т.е. процесс счета не самостартующий, но, поскольку известные стационарные условия всегда оказывают преобладающее влияние на процесс, два исходных значения легко могут быть заданы условно.

Данный алгоритм безусловно устойчив. Колебания, возникающие при внезапном изменении граничных условий, могут быть взяты под контроль путем корректировки шага во времени, описанной в работе [20].

Возникающий "численный шум" можно сильно ослабить, если на каждом шаге времени (после первого) вектор  $\{T^c\}_{t-\Delta t}$  перед началом вычислений по формуле (6.92) переопределять по выражению

$$\{T^c\}_{t-\Delta t} = (\{T^c\}_t + \{T^c\}_{t-\Delta t} + T_{t-2\Delta t})/3. \quad (6.93)$$

Эффект проявления скрытой теплоты фазового перехода имитируется высоким уровнем теплоемкости  $\rho c$  на интервале температур фазового перехода (рис. 6.23).

Интервал температур фазового перехода даже у тонкодисперсных глинистых грунтов невелик ( $3-4^\circ$ ), в песках он еще меньше, порядка  $1^\circ$ . Чтобы при интегрировании по времени не проскочить этот интервал температур и не упустить пикового подъема теплоемкости на этом интервале, вводится вспомогательная функция  $H$  (энтальпия), как интеграл от функции  $\rho c$  (см. рис. 6.21):

$$H = \int_{T_0}^T \rho c dT. \quad (6.94)$$

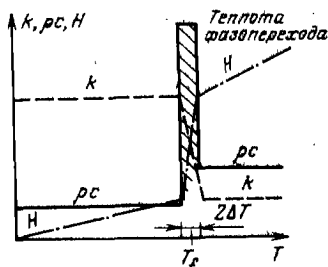
Энтальпия является непрерывной функцией температуры в зоне фазового перехода. Поэтому рациональней оказывается интерполировать энтальпию, а не прямо  $\rho c$ . Дискретизация функции энтальпии имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n \left\{ N(x, y) \right\}_i^T \left\{ H(t) \right\}_i = \\ &= [N] \{H\}, \end{aligned} \quad (6.95)$$

где  $N_i$  — функция формы;  $\{H\}_i$  — значения энтальпии в узлах.

Из уравнения (6.94) следует, что

$$\rho c = dH/dT. \quad (6.96)$$



Эта производная по отношению к ориентированному направлению  $s$  температурного градиента имеет вид

Рис. 6.23. Зависимость теплоемкости свойств среды с фазовым переходом от температуры

$$\langle \rho c \rangle_{x, y} = \frac{\partial H}{\partial s} / \frac{\partial T}{\partial s} = \left( \frac{\partial H}{\partial x} l_{sx} + \frac{\partial H}{\partial y} l_{sy} \right) / \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (6.97)$$

где  $l_{sx}$  и  $l_{sy}$  — направляющие косинусы  $s$ .

Поскольку

$$l_{sx} = \frac{\partial T}{\partial x} / \frac{\partial T}{\partial s}, \quad l_{sy} = \frac{\partial T}{\partial y} / \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \sqrt{\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]},$$

из уравнения (6.97) следует:

$$\langle \rho c \rangle_{x, y} = \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) / \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (6.98)$$

Эта процедура усреднения всегда дает представительные значения теплоемкости. В зонах постоянной температуры, где  $\partial T / \partial s = 0$ , теплоемкость определяется прямым методом. Подобная же процедура используется и для лучшего определения теплопроводности.

На рис. 6.24 приведены схема и результаты расчета теплового режима дорожного полотна с теплоизолирующим пенополистироловым слоем для устранения явлений лучения грунта под дорожным покрытием. Среднесуточная температура воздуха в течение года изменяется от  $-18^\circ\text{C}$  в январе — феврале до  $+16^\circ\text{C}$  в июле. Граничные условия таковы: коэффициент конвективной теплопередачи на границе с атмосферой  $\alpha = 20 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$ , на нижней границе на глубине 11 м — постоянная температура  $+6^\circ$ . Боковые границы приняты нетеплопроводными. Был просчитан период 2,5 года с длиной временного интервала 4 дня. Влияние неопределенности начального распределения температуры перестало сказываться к 19-му месяцу.

Расчетные характеристики материалов приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Материал	Расчетные характеристики материалов			
	Влажность объемная, %	$\rho_c$ , Дж/м <sup>3</sup> ·К	$k$ , Вт/м <sup>2</sup> ·К	$\lambda$ , Дж/м <sup>3</sup>
Глина:				
таялая	39	$3,28 \cdot 10^6$	1,49	$1,31 \cdot 10^8$
мерзлая		$2,46 \cdot 10^6$	1,86	
Щебень:				
талый	14	$2,63 \cdot 10^6$	1,49	$4,65 \cdot 10^7$
мерзлый		$2,35 \cdot 10^6$	1,61	
Асфальт	—	$1,95 \cdot 10^6$	0,6	—
Пенополистирол	—	$5,43 \cdot 10^4$	0,035	—

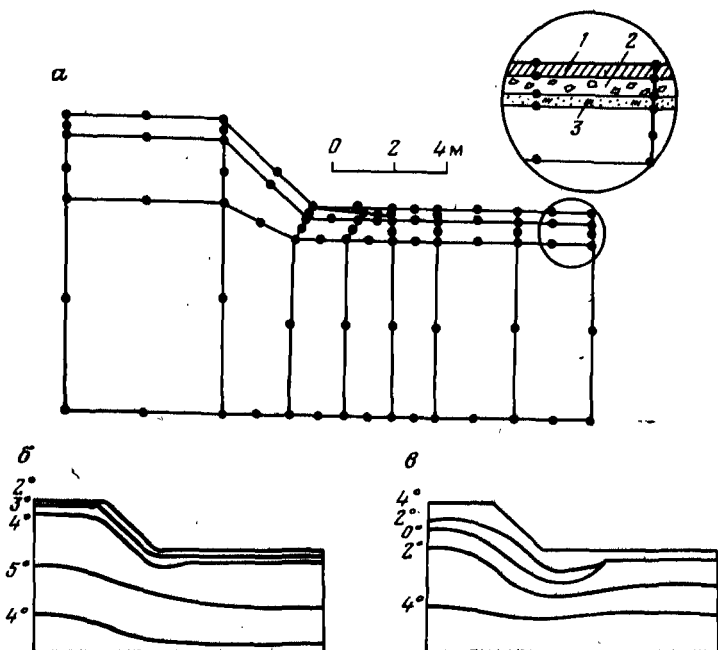


Рис. 6.24. Графическое изображение промерзания грунта под дорожным полотном:

*a* — сеть конечных элементов; *б* — изотермы на 1 октября; *в* — изотермы на 1 марта; 1 — асфальт; 2 — щебень; 3 — пенополистирол

Температурный интервал фазоперехода принят для глины и щебня  $2\Delta T = 3\text{K}$ . Расчеты показали, что без пенополистироловой изоляции глубина промерзания в марте достигает 2 м и мерзлота сохраняется до июня. Пенополистироловая изоляция исключает промерзание под дорожным покрытием.

### 6.7.2. Расчет сил морозного пучения

Как известно, вода при замерзании увеличивается в объеме. Кроме того, в тонкодисперсных грунтах промерзание сопровождается миграцией влаги в зоне фазоперехода. Разность в химических потенциалах между адсорбированной и капиллярной водой ведет к образованию градиентов напора в порах на границах лед — вода, которые тем больше, чем тоньше поры. В итоге происходят подсос воды к фронту промерзания и существенное увеличение объема грунта, которое в стесненных условиях вызывает силы морозного пучения, достигающие максимальной величины в направлении промерзания. Промерзший грунт при дальнейшем охлаждении испытывает температурную усадку.

В работах Г.Н. Полянкина и др. [9, 10] излагается метод анализа взаимодействия фундаментов с промерзающими пучинистыми грунтами, основанный на следующих допущениях:

а. Грунт при охлаждении проходит четыре стадии: начального заморзания, при котором температурных деформаций нет; активного заморзания и пучения в промежутке температур  $T_{н.п}$  (начала пучения) и  $T_{к.п}$  (конец пучения); дальнейшего охлаждения, при котором пучение и температурное сжатие взаимно компенсируются; морозной усадки при температуре ниже  $T_{т.с}$  (температурного сжатия).

б. Температура на поверхности грунта  $T_r$  изменяется монотонно.

в. Температура по глубине промерзающего слоя изменяется линейно.

г. Компоненты вектора деформаций пучения  $\{\epsilon_{п}\} = \{\epsilon_{хп} \epsilon_{уп} \epsilon_{zп}\}^T$  определяются в зависимости от напряженного состояния в элементе по формулам:

$$\epsilon_{zп} = \epsilon_0 (1 - \sigma_0 / \sigma_k)$$

$$\epsilon_{хп} = \epsilon_{уп} = \psi \epsilon_{zп}$$

где  $\sigma_k$  — напряжение, при котором пучение прекращается;  $\psi$  — коэффициент бокового пучения, равный отношению боковой деформации пучения к деформации пучения в направлении промерзания;  $\epsilon_0$  — пучение свободного от нагрузки грунта.

д. Модуль упругости грунта принимается переменным в зависимости от температуры и напряженного состояния грунта.

е. По контакту фундамента с грунтом величина касательных напряжений ограничивается некоторой предельной величиной.

Расчеты напряженно-деформированного состояния проводятся для ряда последовательных температурных состояний основания.

Каждое очередное решение достигается методом начальных деформаций. Для этого в каждом элементе по известной температуре и напряженному состоянию рассчитываются деформации пучения или усадки  $\{\epsilon\}$ ; по этим деформациям рассчитывают узловые силы в элементе:  $\{F\} = \int [B]^T [D] \{\epsilon\} dS = \Delta [B]^T [D] \{\epsilon\}$  — для линейного треугольного элемента.

Начальные узловые силы добавляются к заданному вектору нагрузки, и решается система уравнений с откорректированным вектором сил. Полученное решение рассматривается как окончательное. Вообще говоря, решение нужно было в итерационном цикле повторять, вводя каждый раз в расчет деформации пучения, соответствующие изменяющемуся напряженному состоянию элементов, и продолжать этот итерационный процесс с добавочной корректировкой вектора сил до тех пор, пока расчетные деформации пучащихся элементов не станут достаточно близки к теоретическому значению деформации пучения при данном напряженном состоянии.

На рис. 6.25 по данным Г.Н. Полянкина приведена расчетная схе-



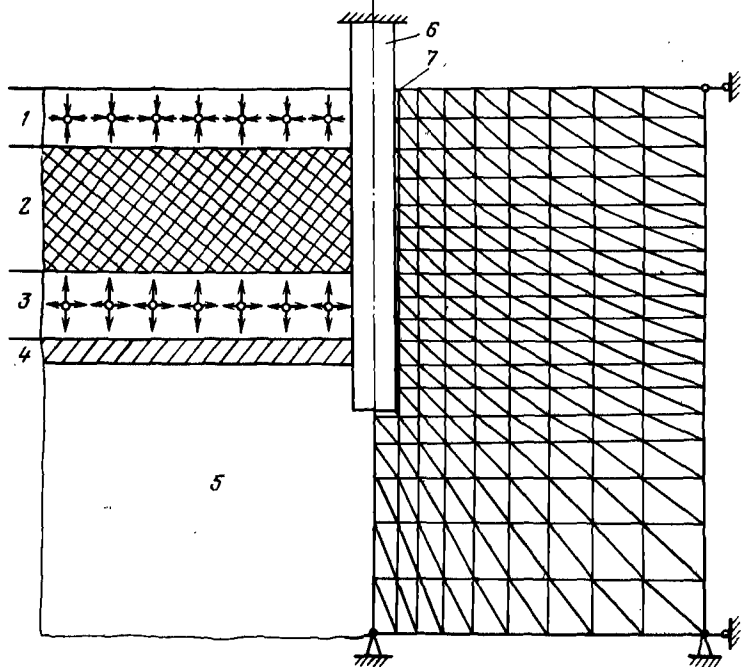


Рис. 6.25. Схема расчета взаимодействия свай с промерзающим пучинистым грунтом:

1 — слой морозной усадки; 2 — слой дальнейшего охлаждения; 3 — слой активного пучения; 4 — слой начального промерзания; 5 — талая зона; 6 — свая; 7 — контакт-элемент

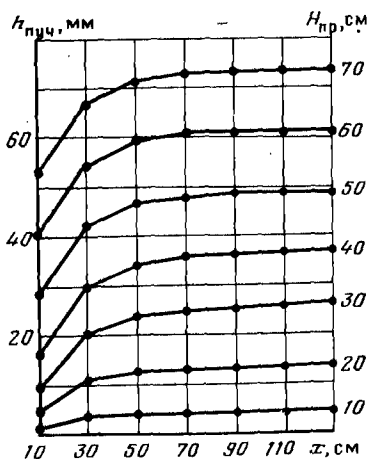


Рис. 6.26. Зависимость подъема грунта ( $h_{пуч}$ ) вокруг свай от глубины промерзания  $H_{пр}$  ( $x$  — расстояние от свай)

ма взаимодействия свай с промерзающим грунтом, а на рис. 6.26 — рассчитанные деформации поверхности вокруг свай при различной глубине промерзания.

Несложная, оригинальная и эффективная процедура П. Кюндалла [21], позволяет анализировать кинематику больших деформаций, самого процесса разрушения блочного массива, имитируемого набором дискретных элементов. Метод по-настоящему эффективен лишь при использовании видеотерминала ЭЛТ (электроннолучевой трубки), позволяющего вводить информацию в графической форме и в таком же виде выводить результаты расчета.

Работа с программой протекает следующим образом. Пользователь программы рисует электронным карандашом свою конфигурацию сети элементов серией линий на экране ЭЛТ. По команде пользователя включается поле тяжести, и блоки начинают перемещаться, взаимодействуя с соседями.

Первые варианты программы П. Кюндалла были ограничены рассмотрением системы цилиндрических элементов, затем блоков, оформленных сетью регулярных трещин. Последние модификации программы не накладывают ограничений на ориентировку трещин, величину перемещений и допускают глубокое вмешательство пользователя в исследуемый процесс в ходе решения.

Программа состоит из трех главных фаз.

а) На экране ЭЛТ вычерчиваются все трещины, характеризующие блочную структуру массива; б) ЭВМ сканирует экран и определяет все замкнутые оконтуренные трещинами зоны, которые в дальнейшем рассматриваются как дискретные элементы (блоки); в) пользователь вынимает часть блоков, имитируя проходку выработки, задает фрикционные свойства контактов, граничные условия (фиксированные блоки, приложенные силы), включает силу тяжести и наблюдает результат движения блоков на ЭЛТ.

Первые две фазы программы и визуализация результатов расчетов в основном обеспечиваются стандартными программами обмена с видеотерминалом из системы матобеспечения ЭВМ. Расчетный цикл третьей фазы программы относительно прост и основан на двух зависимостях.

Взаимодействие двух блоков считается упругим, и возникающие между ними равные и противоположные силы  $F$  прямо пропорциональны смятию блоков  $x$  ( $F = kx$ ).

Все деформации, возникающие на контактах блоков, сводятся к углам блоков. Нормальные силы считаются пропорциональными иаложению двух блоков  $\delta$  (рис. 6.27). Константа пропорциональности  $k$  — нормальная жесткость контакта.

Соотношение касательных сил и перемещений несколько сложнее, потому что касательная сила зависит от прошлой истории взаимного смещения блоков и нормальной силы. Для учета этого касательная сила вычисляется инкрементально; при этом изменение касательной силы принимается пропорциональным сдвигу угла блока вдоль другой стороны контакта:

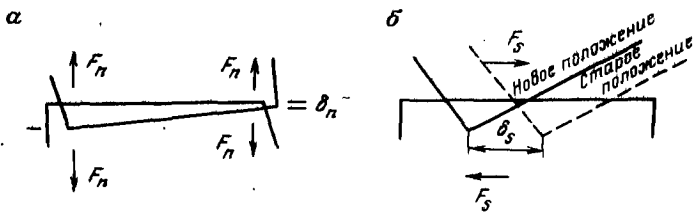


Рис. 6.27. Схема взаимодействия блоков:

а — определение нормальных сил; б — определение касательных сил.

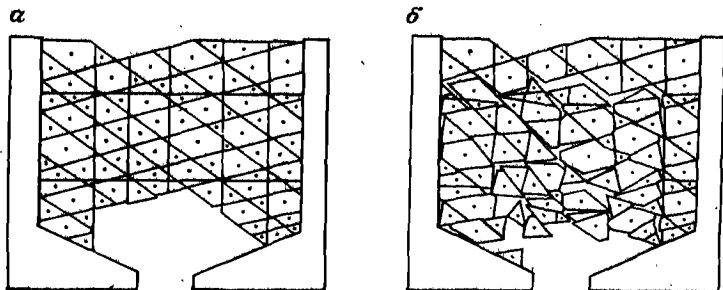


Рис. 6.28. Схема блочной среды до приложения сил тяжести (а) и в некоторый момент после приложения (б)

$$\Delta F_s = k_s \delta_s,$$

где коэффициент пропорциональности  $k_s$  — касательная жесткость.

Рассчитанный инкремент касательной силы  $\Delta F_s$  добавляется (с учетом направления движения) к касательной силе, уже существующей между двумя блоками (см. рис. 6.27):

$$F_s^{t+\Delta t} = F_s^t + \Delta F_s.$$

В программу включены и предельные условия. Во-первых, не допускается возникновение растягивающих напряжений, нормальных к плоскости контакта. Если рассчитанная нормальная сила отрицательна, то ей просто присваивается нулевое значение. Рассчитанная касательная сила сравнивается с предельной величиной  $F_s^{\max} = C + F_n \operatorname{tg} \varphi$ , и если рассчитанная величина превышает  $F_s^{\max}$ , то ей присваивается величина  $F_s^{\max}$ .

Таким образом, уравнения связи сил с перемещениями используются для расчета сил взаимодействия блоков, определяемых геометрией их взаимного расположения. Силы, действующие на каждый блок, затем трансформируются в эквивалентный вектор сил  $(F_x, F_y)$  и момент, действующие на центр масс блока.

По закону Ньютона рассчитывается вектор линейного ускорения как частное от деления суммы сил, действующих вдоль данного координатного направления, включая и силу тяжести, на массу элемента. Аналогично и угловое ускорение есть частное от деления результирующего момента на момент инерции блока.

Найденные ускорения численно интегрируются на подходящем интервале времени, и определяются инкременты линейных и угловых перемещений блоков.

Здесь расчетный цикл заканчивается, новое положение блоков выводится на экран ЭЛТ, и начинается новый цикл расчета сил взаимодействия блоков и т.д.

На рис. 6.28, *а* (по расчетам П. Кюндалла) приведена схема трещиноватости массива, подработанного выработкой, а на рис. 6.28, *б* — положение блоков этого оказавшегося неустойчивым массива на некоторый момент времени после включения силы тяжести.

1. Амузин Б.З., Абдылдаев Э.К., Фадеев А.Б. О расчете контактных нагрузок на обделку тоннелей методом конечных элементов. *Механика грунтов, основания и фундамента*. ЛИСИ, Л., 1980. 37 — 49 с.
2. Боткин А.И. О прочности сыпучих и хрупких материалов. *Известия. НИИГ*. Т. 26. 1940. 64 — 69 с.
3. Бугров А.К. О решении смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунтов. — *Основания, фундаменты и механика грунтов*, № 6, 1974. 20 — 23 с.
4. Бьеррум Л. Параметры эффективного сопротивления сдвигу чувствительных глин. *Механика грунтов и фундаментостроения*. (Труды V Международного конгресса МО МГиФ). М., Изд-во литературы по строительству, 1966, 5 — 19 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир. 1975, 539 с.
6. Зарецкий Ю.К., Орехов В.В. Напряженно-деформированное состояние грунтового основания под действием жесткого ленточного фундамента. — *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 1983, № 6, с. 21 — 24.
7. Косте Ж., Санглера Г. *Механика грунтов*. М., Стройиздат, 1981. 454 с.
8. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. М., Стройиздат, 1980. 134 с.
9. Полянкин Г.Н., Ким А.Ф., Пусков В.И. Оценка напряженно-деформированного состояния промерзающего слоя грунта при его взаимодействии с боковой поверхностью фундамента. Инженерно-геологические условия и особенности фундаментостроения при транспортном строительстве в Сибири. Новосибирск. НИИЖТ, 1980. 50 — 59 с.
10. Полянкин Г.Н. Исследование совместной работы основания и фундамента в промерзающих пучинистых грунтах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. НИИЖТ. Новосибирск, 1982. 130 с.
11. Танака Т. Анализ обобщенной упругопластической модели связанных грунтов методом конечных элементов. — *Ноё добоку сникэндзё хококу*, 1979, № 18, 101 — 122 с. (пер. № 844140. Всесоюзный центр переводов научнотехнической литературы и документации).
12. Прочность и деформируемость горных пород. Под ред. А.Б. Фадеева. М., Недра, 1979. 269 с.
13. Фадеев А.Б., Абдылдаев Э.К. Расчет деформируемости горных выработок с учетом разрыхляемости горных пород. — В кн.: *Горные удары, методы оценки и контроля удароопасности массивов горных пород*. Илим, Фрунзе, 1979. 126 — 134 с.
14. Фадеев А.Б., Репина П.И., Абдылдаев Э.К. Метод конечных элементов при решении геотехнических задач и программа "Геомеханика". ЛИСИ, Л., 1982. 72 с.
15. Anderson C.A., Bridwell R.J. A finite element method for studying the transient non — linear thermal creep of geological structures. — *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, vol. 4., 1980. 255 — 276.
16. Bandis S. Lumsden A.C., Barton N.R. Experimental studies of scale effects on the shear behaviour of rock joints. — *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.* Vol. 18. 1981. 1 — 21.
17. Banerjee P.K., Stipho A.S. Associated and non — associated constitutinal relations for undrained behaviour of isotropic soft clay. — *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* Vol. 2. No 1. 1978. 35 — 56.
18. Barton N., Choubey V. The shear strength of rock joints in theory and practice. *Rock Mech.* Vol. 10. 1977. 1 — 54.
19. Chang C. Y., Duncan J.M. Analysis of soil movement around a deep excavation. *Proc. ASCE*. Vol. 96. No SM5. 1970.

20. *Comini G., Del Giudice S., Lewis R.W., Zienkiewicz O.C.* Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change. "Int. J. Num. Meth. Engng". 8. 1974. 613 – 624.

21. *Cundall P.A.* A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. Symp. Int. Soc. Rock Mech. Nansy. 1971.

22. *Goodman R.E., Taylor R.L., Brekke T.L.* A model for the mechanics of jointed rock. Proc. ASCE. Vol. 94. No. EM3, 1968.

23. *Groth T.* Description and applicability of the BEFEM code. – "Appl. Rock Mech. Mining". Proc. Conf. Lulea. 1 – 3 June, 1980". London. 1981. 204 – 208.

24. *Guidice Del S., Comini G., Lewis R.W.* Finite element simulation of freezing process in soils. "Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech". 2. 1978. 223 – 235.

25. *Henkel D.J.* The relationship between the strength, pore – water pressure and volume – change characteristics of saturated clays. "Geotechnique". V. IX. 1959. 119 – 135.

26. *Hwang C.T., Morgenstern N.R., Murray D.W.* On solution of plain strain consolidation problems by finite element methods. "Can. Geotech. J". 109. 1971. 109 – 118.

27. *Hvorslev M.J.* Über die Festigkeiteigenschaften gestorten bindigen Böden. "Ingvjensk", SK2.A, No. 45. Kobenhavn. 1937.

28. *Irons B.M.* A frontal solution program. "Int. J. Num. Meth. Eng". 2. 1970. 5 – 32.

29. *Ishihara K., Yasuda S.* Sand liquefaction due to irregular excitation. "Soils and foundations". Vol. 12. No 4. 1972. 65 – 77.

30. *Katzenbach R., Breth H.* Nonlinear 3 – d. analysis for NATM in Frankfurt clay. Proc. 10th ICSMFE. Stockholm, 15 – 19 June 1981. A.A. Balkema. Rotterdam. 1981. 315 – 318.

31. *Khosla V.K., Wu T.H.* Stress – strain behaviour of sand. Proc. ASCE, No. GT4. 1976. 303 – 321.

32. *Kokusho T.* Nonlinear analysis of a dilative soil by finite element method. "Criepi report. E376001". Tokyo. Oct. 1976.

33. *Kondner R.L.* Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils. Proc. ASCE. Vol. 89. No SM1, 1963.

34. *Lade P.V., Duncan J.M.* Stress – path dependent behaviour of cohesionless soil. Proc. ASCE, No GT 1. 1976. 51 – 68.

35. *Lade P.V., Musante H.M.* Failure conditions in sand and remolded clay. Proc. IX – th ICSMFE. Vol. 1. Tokyo. 1977.

36. *Malyshev M.V., Ramadan T. Kh., Zaretsky Yu. K., Vorontsov E.I.* Deformability of sands at plane strain condition. Proc. 10th ICSMFE. Stockholm. 15 – 19 June 1981. Vol. 1. A.A. Balkema. Rotterdam. 1981. 697 – 698.

37. *Naylor D.J., Richards H.* Slipping strip analysis of reinforced earth. "Int. I. Num. Anal. Meth. Geomech". 2. 1978. 343 – 366.

38. *Pietruszczak S., Mroz Z.* Numerical analysis of elastoplastic compression of pillars accounting for material hardening and softening. "Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr". Vol. 17. No. 4, 1980. 199 – 207.

39. *Raimond G.L., Diyajee V.H.* Railroad ballast ranking classification. Proc. ASCE. Vol. 105. No. GT 10. 1979. 1133 – 1153.

40. *Roscoe K.H., Burland J.B.* On the generalized stress – strain behaviour of "wet" clay. "Engineering plasticity". Cambridge University press. Heyman, Leskie, Eds. 1968. 535 – 609.

41. *Roscoe K.H.* The influence of strains in soil mechanics. "Geotechnique", 20. No. 2. 1970. 129 – 170.

42. *Roscoe K.H., Schofield A.N., Thurairajah A.* Yielding of clays in states wetter than critical. "Geotechnique". 13. No. 3. 1963. 211 – 240.

43. *Rowe P.W.* Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soils. Proc. Roscoe Mem. Symp. Cambridge. 1971. 143 – 194.

44. *Sandhu R.S., Wilson E.L.* Finite element analysis of seepage in elastic media. Proc. ASCE. vol. 95. 1969. 641 – 652.

45. *Schofield A., Wroth P.* Critical state soil mechanics. McGraw-Hill, London, 1968. (Есть перевод № А — 38749а во Всес. центре переводов научно-техн. лит. и документации. М. 1978. Пер. В.Г. Федоровский).

46. *Sloan S.W., Randolph M.F.* Numerical prediction of collapse loads using finite element method. "Int.J. Num. Anal. Meth. Geomech". Vol. 6. 1982. 47 — 76.

47. *Sture S., Desai C.S., Janardhanam R.* Development of a constitutive law for an artificial soil. Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics/Aachen/. 2 — 6 April 1979. 309 — 317.

48. *Wroth C.P.* The predicted performance of soft clay under a trial embankment loading based on the cam — clay model. "Finite elements in geomechanics". Ed. G. Gudehus. John Wiley & Sons. L. — N.Y. — Syd. — Tor. 1977. 191 — 208.

49. *Yong R.N., McKyes E.* Yield and failure of a clay under triaxial stresses. Proc. ASCE. No. SM 1. 1971. 159 — 176.

50. *Zienkiewicz O.C.* The finite element method. Mc Graw — Hill. London. 1977. 787.

ПРОГРАММА "ГЕОМЕХАНИКА"

1. Постановка задачи и возможности программы. Программа реализует алгоритм, изложенный в разделе 5.1, и позволяет получать упругопластическое решение в условиях плоской деформации и только упругое решение в условиях плоского напряженного состояния в однородной и неоднородной среде. Упругопластическое решение достигается с помощью метода начальных напряжений.

Исследуемая область разбивается сеткой треугольных элементов (рис. П 1). В местах ожидаемых высоких градиентов напряжений она должна сгущаться. Координаты узлов ни в исходном состоянии, ни в процессе решения не должны принимать отрицательных значений, поэтому оси координат следует располагать на некотором расстоянии от области (рис. П. 1). Если область и граничные условия симметричны, то достаточно рассматривать лишь часть области по одну сторону от осей симметрии, совмещая направление осей координат с направлением осей симметрии. При этом узлам на осях симметрии следует задать нулевые перемещения перпендикулярно к этим осям.

Узлы и элементы нумеруются. Нумерацию узлов следует вести таким образом, чтобы максимальная из разностей между номерами узлов в элементе  $P$  была как можно меньше, так как от этого зависит время решения задачи на ЭВМ. Максимально допустимая величина  $P$  составляет 50. Нумерацию целесообразно вести вдоль короткой стороны рассматриваемой области. Общее число узлов  $n \leq 600$ .

Элементы нумеруются в произвольном порядке. Общее число элементов  $m$  не должно превышать 1200. Каждому элементу присваивается номер типа. Число типов  $z$  не должно быть больше 10. Каждому типу соответствуют определенные задаваемые характеристики  $E, \nu, \gamma, C, \varphi$  (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность, сцепление и угол внутреннего трения). Поверхности ослабления в массиве имитируются слоями элементов с соответствующими пониженными прочностными свойствами.

Граничные условия могут быть заданы в виде нулевых или ненулевых сил или перемещений. Программа обеспечивает пошаговое приложение заданных узловых сил и перемещений. Например, если число шагов задано 3, то заданная узловая сила  $Q_i$  сначала будет принята равной  $Q_i / 3$  и проведено упругопластическое решение по заданной процедуре, затем принята равной  $2Q_i / 3$  — вновь проведено решение, и, наконец, сила будет принята равной полному значению. Результат решения не зависит от числа шагов нагружения:



нагрузка будет либо сразу приложена полностью (в один шаг), либо в несколько шагов.

Программа автоматически учитывает силы тяжести элементов. Введенный объемный вес умножается на площадь элемента, и полученный вес элемента поровну делится между его тремя узлами и прикладываются в направлении оси  $y$ .

В ряде случаев вырез в области (траншею или выработку) удобно имитировать приданием модуля упругости  $E = 0$  и объемного веса  $\gamma = 0$  группе элементов, заполняющих эту область. При этом узлам, к которым примыкают только элементы с нулевым модулем, должны быть заданы нулевые перемещения.

2. Подготовка информации. Вводимая информация подготавливается в следующем виде. Первой идет перфокарта  $\_ r$  (где пробел,  $r$  — число задач). Например,  $r = 2$  означает, что решаются одновременно две задачи. Вторая перфокарта задачи имеет вид  $\_ \emptyset$  или же  $\_ 1$ . Если набита  $\_ M$ , то выводятся на печать главные значения напряжений и деформаций, если же  $\_ 1$ , то осевые значения. Далее непосредственно один за другим следуют семь числовых массивов, каждый из которых начинается с новой перфокарты.

**Массив 1.** Содержит шесть чисел: число узлов, элементов, типов элементов, шагов нагрузки, заданных нулевых сил и заданных ненулевых перемещений. Формат для ввода всех чисел 6/4.

**Массив 2.** Содержит описание всех элементов, начиная с первого, в следующем виде: номер типа элемента (I1), три номера узлов, окружающих элемент (3/3), и т.д. Формат ввода 8(I1, 3/3). Номера типов элементов изменяются в пределах от 0 до 9.

**Примечание.** Порядок перечисления номеров узлов, окружающих элемент, безразличен. Например, описания элементов 1001002003 и 1002001003 совершенно равноценны и означают, что элемент первого типа окружен узлами 1, 2 и 3.

**Массив 3.** Содержит описание координат всех узлов, начиная с первого, в следующем виде: координата  $x$  (F7.1), признак по  $x$  (I1), координата  $y$  (F7.1), признак по  $y$  (I1) и т.д. Формат ввода 10(F7.1, I1).

Координаты имеют знак "+", если по данному направлению задана (нулевая или ненулевая) сила, и знак "-", если задано (нулевое или ненулевое) перемещение. Признаки равны: 0 — если по данному направлению заданный параметр равен нулю; 1 — если задана ненулевая сила; 2 — если задано ненулевое перемещение.

**Массив 4.** Содержит значения всех заданных ненулевых узловых сил от первой до последней в порядке возрастающих номеров узлов (точнее, степеней свободы), к которым относятся силы. Формат 10F 8.2.

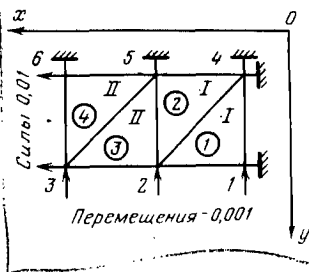


Рис. П 1. (Приложение).  
Схема к текстовому примеру

**Массив 5.** Содержит значения всех заданных ненулевых узловых перемещений в том же порядке. Формат 10F8.2.

**Примечание.** Силы или перемещения задаются со знаком " + ", если их направления совпадают с направлением осей координат, и со знаком " - " в противном случае. Массив 4 или массив 5 отсутствуют, если не заданы ненулевые узловые силы или перемещения.

**Массив 6.** Содержит контрольные цифры: алгебраическую сумму заданных сил и алгебраическую сумму заданных перемещений. Формат 2F 8.3.

**Массив 7.** Содержит характеристики всех типов элементов в порядке:  $E_1, \nu_1, \gamma_1, C_1, \varphi_1, E_{21}, \dots$  и т.д. Число типов элементов не может быть больше десяти. Формат ввода 10F8.3.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. П 1. Исходную информацию для этого примера удобно записать в табл. П 1.

Информация набивается на перфокарты, и перфокарты сразу нумеруются. Получаемая при этом распечатка сверяется с записанной информацией. Однако при этом не улавливаются механические дефекты перфорации, поэтому целесообразно до решения задачи ввести массив перфокарт с информацией в ЭВМ и получить с него контрольную распечатку. При совпадении распечатки с исходной информацией колода карт передается на решение.

Если  $r > 1$ , то вслед за информацией по первой задаче следует информация о следующих задачах.

3. **Порядок составления задания при работе с программой.** Программа "Геомеханика" составлена на языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ с объемом памяти, которую можно использовать для нужд программы, не менее 320К.

Таблица П.1

Номера перфокарт	Исходные данные	Примечания
1	└ 1	Число задач 1
2	└ 0	Печать главных напряжений и деформаций
3		Массив 1:
	0006	Число узлов
	0004	Число элементов
	0002	Число типов элементов
	0001	Число шагов нагрузки
	0002	Число ненулевых сил
	0003	Число перемещений
4		Массив 2:
	0	Номер типа элемента (0-й тип)
	001	Элемент окружен узлами 1, 2, 4
	002	
	004	

Номера перфокарт	Исходные данные	Примечания
	0	
	002	2
	004	
	005	
	1	Номер типа элемента (1-й тип)
	002	
	003	3
	005	
	1	
	003	
	005	4
	006	
5		Массив 3:
	- 0001.0 } 0	В первом узле по координате X задано нулевое перемещение, по координате y задано ненулевое перемещение
	- 0002.0 } 2	
	+ 0002.0 } 0	Во втором узле по координате x задана нулевая сила, а по y — ненулевое перемещение
	- 0002.0 } 2	
	+ 0003.0 } 1	В третьем узле по x задана ненулевая сила, а по y — ненулевое перемещение.
	- 0002.0 } 2	
	- 0001.0 } 0	В четвертом узле по x и y заданы нулевые перемещения
	- 0001.0 } 0	
	+ 0002.0 } 0	b
	- 0001.0 } 0	
	+ 0003.0 } 1	c
	- 0001.0 } 0	
7		Массив 4:
	+ 0000.01	Заданные узловые силы
	+ 0000.01	
8		Массив 5:
	- 000.001	Заданные узловые перемещения
	- 000.001	
	- 000.001	
9		Массив 6:
	+ 0000.02	Сумма сил
	- 000.003	Сумма перемещений

Номера перфокарт	Исходные данные	Примечания
10	1,00E+04 0.250000 00000000  100.0000 30.00000 8.00E+03 0.300000 00000000  1.000000 35.00000	Массни 7:  $\left. \begin{matrix} E_0 \\ \nu_0 \\ \gamma_0 \\ c_0 \\ \varphi_0 \end{matrix} \right\}$ характеристики 0-го типа элемента  $\left. \begin{matrix} E \\ \nu^1 \\ \gamma_1 \\ c_1 \\ \varphi_1 \end{matrix} \right\}$ характеристики 1-го типа элемента

Если решение проводится по программе, имеющейся в виде колоды перфокарт, то задание на решение задачи составляется следующим образом:

```
// JOB FAC - Ø Ø 1 КАФ.МЕХ. ГРУНТОВ, НИР, Х/Д № 123,
// ПИНА П.И.
// OPTION LINK
// EXEC FFORTRAN
// Текст программы.
/*
// EXEC LNKEDT
// EXEC
// Входная информация решаемой задачи
/*
//
```

Если программа закаталогизирована в ЛБОМ, порядок перфокарт на задание следующий:

```
// JOB FAC -ØØ 1 КАФ.МЕХ. ГРУНТОВ, НИР, Х/Д № 123,
// РЕПИНА П.И.
// OPTION LINK
// INCLUDE RE 6Ø33 01
// INCLUDE REPSOU
// INCLUDE PEROME
// INCLUDE RE 6 Ø 33 Ø 5
// INCLUDE REPSTR
// INCLUDE REPGN1
// INCLUDE REPSMA
// EXEC LNKEDT
// EXEC.
```

## Входная информация решаемой задачи

/\*

/∞

4. *Выводимая информация.* Выводимая информация будет в той же системе единиц, что и входная. Общий вид выводимой информации по рассматриваемому тестовому примеру приведен в табл. П 2. Выводимая на печать информация состоит из контрольной информации и результатов решения задачи.

В качестве контрольной информации на печать выдаются: заданные характеристики всех типов элементов; площади всех элементов от первого до последнего по десять чисел в строке; общая площадь рассматриваемой области; при несовпадении числа заданных ненулевых сил и перемещений с количеством соответствующих признаков выдается указание: "проверь признаки". При несовпадении суммы заданных сил и перемещений с контрольными значениями выдаются указания: "проверь силы" или "проверь перемещения". Если контроль информации не выявит погрешностей, программа продолжает работать.

Из результатов решения на печать выдаются:

по элементам: порядковый номер элемента ( $NO$ ); состояние ( $STATE$ ) элемента: если по данному элементу будет указан признак "0", то элемент деформируется упруго, если признак "1" — то пластически. Признак "—1" означает, что элемент будет порван хотя бы в одном направлении; главные напряжения  $\sigma_1$  ( $SIGM1$ ),  $\sigma_2$  ( $SIGM2$ ) и угол  $\alpha$  ( $ALPHA$ ) между направлением  $\sigma_1$  и осью  $x$ ; главные деформации  $\epsilon_1$  ( $DEF1$ ),  $\epsilon_2$  ( $DEF2$ ) и угол  $\beta$  ( $BETA$ ); теоретические значения главных напряжений  $\sigma_1^T$  ( $SIGM1T$ ) и  $\sigma_2^T$  ( $SIGM2T$ ).

*Примечание.* Если во вводимой информации 2-я перфокарта содержит признак — 1, то на печать выдаются  $\sigma_x$  ( $SIGMX$ ),  $\sigma_y$  ( $SIGMY$ ),  $\tau_{xy}$  ( $TAUXY$ ) и деформации  $\epsilon_x$  ( $DEFX$ ),  $\epsilon_y$  ( $DEFY$ ),  $\gamma_{xy}$  ( $GAMMAXY$ ).

По узлам: порядковый номер узла; перемещения каждого узла по направлению осей  $x$  и  $y$ ; узловые силы с учетом сил тяжести, в том числе по узлам с заданными перемещениями.

Устойчивые упругопластические решения обычно достигаются за 10 — 15 циклов итерации. Число циклов итерации указывается в выводимой информации. Если итерационный процесс не сошелся за 100 циклов, то надежды на его сходимость в дальнейшем нет и программа прекращает работу.

5. *Контроль и поиск ошибок* во входной информации производят в следующем порядке.

Если:

площадь области не совпадает с фактически измеренной величиной, то нужно просмотреть рассчитанные на ЭВМ площади и сопоставить их с фактическими площадями элементов; при этом если не совпадает площадь одиночного элемента, то ошибка кроется в описании элемента; если же не совпадают площади группы элементов,

Таблица II.2

LISI		E		HG		ГAMMA		C		CONTROL OF INPUT		PROGRAM GEOMECHANICS						
		0,100E 05		0,250E 00		0,0		0,100E 03		0,300E 02								
		0,800E 04		0,300E 00		0,0		0,100E 01		0,250E 02								
		0,500		0,500		0,500		0,500		0,500								
COMMON AREA=		2,000		1-STEP 34-ITERATION														
N ST	SIG1	SIG1T	SIG2	SIG2T	ALFA	N ST	SIG1	SIG1T	SIG2	SIG2T	ALFA	N ST	SIG1	SIG1T	SIG2	SIG2T	ALFA	
1 0	5,0	3,7	3,8	-15,7	-16,0	2 0	9,9	9,9	-5,9	-5,9	-5,9	3 1	4,0	3,8	0,0	0,0	-74,6	
4 1	3,7	3,8	-0,4	0,0	-85,0													
KNOT		X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y
1	0,0	-0,001	2	0,002	-0,001	3	0,003	-0,001	4	0,0	0,0	5	0,001	0,0	0,0	6	0,002	-0,0
6	0,002	-0,0	7	0,0	0,0	8	0,0	0,0	9	0,0	0,0	10	0,0	0,0				
KNOT		X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y	KNOT	X	Y
1	2,492	7,854	2	0,000	-6,866	3	0,018	-1,326	4	-2,512	-9,690	5	0,000	8,037				

DISPLACEMENTS OF KNOTS  
CONTROL KNOTS FORGFS

примыкающих к одному узлу, скорее всего ошибочно описаны координаты этого узла;

сумма сил и сумма перемещений не совпадают с фактическими значениями, то нужно проверить число ненулевых сил и перемещений, признаки в описании узлов и список ненулевых сил и перемещений;

напечатанная контрольная информация верна, но ЭВМ остановилась по коду исчезновения порядка, то возможными причинами являются следующие: неправильно указан номер типа одного из элементов; не приведены свойства одного из типов элементов; наложенные связи не обеспечивают неподвижности области в целом.

В результатах решения следует обязательно просмотреть перемещения. Перемещения узлов, в которых были заданы нулевые или ненулевые перемещения, должны быть равны заданным величинам. В других узлах не должно быть равных нулю перемещений. При обнаружении отклонений проверить признак в описании соответствующего узла и заданную величину в списке перемещений.

Узловые силы должны быть равны и противоположны по направлению заданным внешним силам (плюс силы тяжести).

При проверке правильности тех или иных чисел в информации следует одновременно проверять, на своем ли месте они находятся. Например, описание 4-го элемента в массиве 2 должно находиться в первой перфокарте и занимать там с 31-й по 40-ю позиции.

#### 6. Техническое описание программы и подпрограмм.

6.1. Основная программа. В головной программе используются следующие специальные подпрограммы: *CHOSE*, *SMAPL*, *SOUS5*, *OMEG5*, *STRPL*, *GN*.

В головной программе и во всех перечисленных подпрограммах используются следующие массивы переменных, общие для всех подпрограмм: *S* (64000), *LE* (1200), *LE1* (1200), *CO* (1300), *BHP* (2400), *N* (50), *P* (200).

*S* — массив размерности 64000. Он используется как поле вводимой информации, поле матрицы жесткости, поле напряжений.

*LE* — массив целых чисел размерностью 1200. В каждом элементе этого массива хранится следующая информация:

Разряды . . . . .	32	31	30 . . . 21	20 . . . 11	10 . . . 1
Информация . . . . .	±	P	$n_i \rightarrow$	$n_j \leftarrow$	$n_k$

где  $n_i$ ,  $n_j$ ,  $n_k$  — номера узлов, окружающих очередной треугольный элемент расчетной схемы; P — резервный разряд.

*LE1* — массив целых чисел размерности 1200, содержащий информацию о номерах типов элементов и их состоянии в следующем виде:

Разряды . . . . .	32	31	30 . . . 11	10 . . . 1
Содержание разряда . . . . .	±	n	$P \rightarrow$	$n_i \rightarrow$

где  $n_i$  — номер типа элемента; n — признак состояния элемента; P — резервные разряды.

*CO* — массив вещественных чисел размерности 1300. Первые 1200 элементов этого массива заняты координатами узлов в следующем порядке:  $x_1, y_1, x_2, y_2$  и т.д. Если по какой-либо координате задано нулевое или ненулевое перемещение, то ей присваивается знак " — ". Начиная с 1201-й ячейки располагаются свойства элементов по типам:  $E_1, \nu_1, \gamma_1, C_1, \varphi_1, E_2, \nu_2, \gamma_2, C_2, \varphi_2, \dots$

*VNP* — массив вещественных чисел размерности 2400. Первые 1200 элементов — это вектор нагрузки (узловые силы в последовательности  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, \dots$ ), вторые 1200 — это вектор решений (узловые перемещения  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots$ ).

*N* — массив целых чисел размерности 50, где  $N(1)$  — число узлов,  $N(2)$  — число элементов,  $N(3)$  — число шагов нагрузки,  $N(4)$  — число типов элементов,  $N(16)$  — используемая длина поля  $S$ ,  $N(31)$  —  $N(36)$  — номера связей элемента; остальные элементы этого массива используются как рабочие.

*P* — рабочий массив вещественных чисел размерности 200, используемый подпрограммами и основной программой.

6.2. Подпрограмма *CHOSE*. Обращение на языке Фортран *CALL CHOSE (LE, LE1, CO, N, P)*. Подпрограмма выбирает из исходной информации данные, относящиеся к очередному конечному элементу, и подсчитывает его площадь. По номеру элемента, находящемуся в  $N(7)$ , из массива *CO* выбираются координаты узлов, окружающих элемент, свойства элемента, подсчитывается площадь элемента  $\Delta$ . Эти данные засылаются в массив *P*, начиная с первого элемента этого массива, в следующем порядке:  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, E, \nu, \gamma, C, \varphi, \Delta$ .

Кроме того, по номерам узлов, окружающих данный элемент ( $N_1, N_2, N_3$ ), в массив *N*, начиная с  $N(31)$ , засылаются номера связей в следующем порядке:  $2N_1 - 2; 2N_1 - 1; 2N_2 - 2; 2N_2 - 1; 2N_3 - 2; 2N_3 - 1$ .

6.3. Подпрограмма *SMAPL*. Обращение на языке Фортран *CALL SMAPL (P, N, S)*. Подпрограмма формирует матрицу жесткости очередного треугольного элемента в МЖЭ и суммирует члены МЖЭ с матрицей жесткости системы МЖС. Строится только верхняя ненулевая часть матрицы. МЖС находится в массиве *S*. Перед первым обращением к подпрограмме *SMAPL* в поле *S* должны быть засланы нули. Кроме того, перед каждым обращением задается следующая информация:  $N(7)$  — номер очередного элемента,  $N(4)$  — ширина полосы матрицы жесткости,  $N(31)$  —  $N(36)$  — номера связей элемента,  $N(16)$  — длина поля *S*,  $P(7)$  — модуль упругости *E*,  $P(7)$  — коэффициент Пуассона  $\nu$ .

6.4. Подпрограмма *SOUS5* служит для вычисления союзной матрицы к матрице жесткости системы (первая часть решения системы линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня). Исходными данными для подпрограммы являются:

1)  $N(16)$  — длина поля *S*,  $N(5) = 1$ ,  $N(1)$  — число узлов  $N(4)$  — ширина полосы;

2) в массиве *CO* — координаты узлов с учетом знака. Знак



” ” должны иметь координаты, если по ним заданы перемещения. Если  $i$ -я координата  $CO(i) < 0$  ( $1 \leq i < N$ , где  $N$  — число уравнений), то  $i$ -е уравнение считается линейной комбинацией остальных и при решении игнорируется;

3) в массиве  $S$  находится МЖС. К концу работы подпрограммы союзная матрица находится в массиве  $S$ , МЖС не сохраняется. Если  $CO(i) < 0$ , то в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце сохраняются коэффициенты исходной МЖС.

Обращение на языке Фортран `CALL SOUS5 (S, BHP, N, CO)`.

6.5. Подпрограмма `OMEG5` является вторым этапом решения системы линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня.

Исходными данными для подпрограммы являются следующие:

1) в массиве  $N$ :  $N(1)$  — число узлов,  $N(5) = 1$ ,  $N(4)$  — ширина полосы МЖС,  $N(16)$  — длина поля.

2) заданные узловые силы и перемещения в массиве  $BHP$  в следующем порядке: первые 1200 элементов — это вектор нагрузки (узловые силы в последовательности  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ ), вторые 1200 элементов (с 1201-го по 2400-й) — вектор перемещений (узловые перемещения  $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots$ ).

Результат работы программы — найденные узловые перемещения  $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots$  в массиве  $BHP$ , начиная с 1201-го элемента. Союзная матрица сохраняется в массиве  $S$ . Векторы нагрузки (узловые силы) сохраняются неизменными.

Обращение на языке Фортран `CALL OMEG5 (S, BHP, N, CO)`.

6.6. Подпрограмма `STRPL`. Для работы подпрограммы должны быть заданы узловые перемещения в массиве  $BHP$ , начиная с 1201-й ячейки, номера связей в массиве ( $N(31) - N(36)$ ), а также координаты узлов очередного треугольного элемента; модуль упругости и коэффициент Пуассона в массиве  $P$  в следующем порядке:  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, E, \nu, \dots$

По этим данным программа вычисляет в элементе напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  и записывает их соответственно в  $P(31), P(32), P(33), P(42), P(43), P(44)$ .

Обращение на языке Фортран `CALL STRPL (P, N, BHP)`.

6.7. Подпрограмма `GN`. По напряжениям  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , находящимся в  $P(34), P(35), P(36)$ , вычисляются главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и угол  $\alpha$  между  $\sigma_1$  и осью  $x$ . Полученные величины записываются соответственно в  $P(38), P(39), P(37)$ . Обращение на языке Фортран `CALL GN(P)`.

Ниже приводится текст программы

# ТЕКСТ ПРОГРАММЫ ГЕОМЕХАНИКА

```

DIMENSION S(64000),LE(1200),LE1(1200),CO(1300),
*BHP(2400),N(50),P(200),A2(9),NN1(10000),SS1(8500)
INTEGER TP,PPI,PPN
EQUIVALENCE(S(1),NN1(1))
WRITE(3,3)
3 FORMAT(2X,4HLISI,40X,16HCONTROL OF INPUT,30X,
*20HPROGRAM GEOMECHANICS)
666 FORMAT(3I2,2I4)
READ(1,666) KV
DO 700 J5=1,KV
READ(1,666) TP,PPN,PPI,KP,NI
DO 6 I=1,2400
6 BHP(I)=0
READ(1,1)(N(I),I=1,6)
1 FORMAT(6I4)
N(40)=0
K=N(2)
KK=N(2)*4
READ(1,2)(NN1(I),I=1,KK)
2 FORMAT(8(I1,3I3))
J=0
DO 4 I=1,KK,4
J=J+1
LE1(J)=NN1(I)+1
4 LE(J)=NN1(I+1)*2**20+NN1(I+2)*2**10+NN1(I+3)
K=2*N(1)
READ(1,107)(CO(I),NN1(I),I=1,K)
107 FORMAT(10(E7.1,I1))
IF(N(5).EQ.0)GO TO 10
L=N(5)+6000
READ(1,5)(S(I),I=6001,L)
5 FORMAT(10F8.2)
J=1
DO 106 I=1,K
IF(NN1(I)-1)106,108,106
108 BHP(I)=S(J+6000)
J=J+1
106 CONTINUE
IF(J-1-N(5))9,10,9
9 WRITE(3,11)
11 FORMAT(2X,16HПРОВЕРЬ ПРИЗНАКИ)
N(40)=1
10 L=N(6)+6000
IF(N(6).EQ.0)GO TO 116
READ(1,12)(S(I),I=6001,L)
12 FORMAT(10F8.3)
J=1
DO 13 I=1,K
IF(NN1(I)-2)13,14,13
14 BHP(I+1200)=S(J+6000)
J=J+1
13 CONTINUE
IF(J-1-N(6))115,116,115
115 WRITE(3,11)
N(40)=1
116 P(1)=0
P(2)=0
DO 117 I=1,K
P(1)=P(1)+BHP(I)
117 P(2)=P(2)+BHP(1200+I)
READ(1,118)S(1),S(2)
118 FORMAT(2F8.3)
IF(S(1).EQ.0)GO TO 80
IF(ABS((P(1)-S(1))/S(1))-0.001)80,80,119

```

```

119 WRITE(3,120)
120 FORMAT(2X,12HПРОВЕРЬ СМЛН)
    N(40)=1
    80 IF(S(2).EQ.0)GO TO 124
321 IF(ABS((P(2)-S(2))/S(2))-0.001)124;124,122
122 WRITE(3,123)
123 FORMAT(2X,19HПРОВЕРЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ)
    N(40)=1
124 WRITE(3,335)
335 FORMAT(9X,1HE,8X,2HND,5X,5HГAMMA,9X,1HC,8X,2HNF)
    J=N(3)*5+1200
    READ(1,332)(CO(I),I=1201,J)
332 FORMAT(10F8.3)
    WRITE(3,334)(CO(I),I=1201,J)
334 FORMAT(5E10.3)
    IF(N(40).EQ.1)GO TO 700
    N(3)=N(4)
    N(16)=64000
    J=N(16)
    DO 7 I=1,J
      7 S(I)=0
        N(7)=0
        N(4)=0
15 P(61)=0
    IF(PPI.EQ.1) GO TO 16
    WRITE(3,41)
41 FORMAT(40X,17HAREAS OF ELEMENTS)
16 DO 38 I=1,20
    N(7)=N(7)+1
    N(40)=2000
    N(41)=0
    CALL CHOSE(LE,LE1,CO,N,P)
18 DO 22 K=1,6
    IF(N(K+30).GE.N(40))GO TO 21
    N(40)=N(K+30)
21 IF(N(K+30).LE.N(41))GO TO 22
    N(41)=N(K+30)
22 CONTINUE
    N(41)=N(41)-N(40)
23 IF(N(41).LE.N(4))GO TO 25
24 N(4)=N(41)+1
25 P(I+30)=P(12)
    P(61)=P(61)+P(12)
28 P(60)=P(12)*P(9)/3
    J=N(32)+1
    BHP(J)=BHP(J)+P(60)
    J=N(34)+1
    BHP(J)=BHP(J)+P(60)
    J=N(36)+1
    BHP(J)=BHP(J)+P(60)
36 IF(N(7).GE.N(2))GO TO 39
38 CONTINUE
39 IF(PPI.EQ.1) GO TO 1001
    WRITE(3,40)(P(J+30),J=1,I)
40 FORMAT(2X,10F11.3)
1001 IF(N(7).LT.N(2)) GO TO 16
    IF(PPI.EQ.1) GO TO 671
    WRITE(3,43)
43 FORMAT(2X,12HCOMMON AREA=)
42 WRITE(3,400) P(61)
400 FORMAT(2X,F15.3)
671 DO 8 I=1,8500
    8 SS1(I)=0
    J=2*N(1)
    DO 49 I=1,J
      BHP(I)=BHP(I)/N(3)
      SS1(6000+I)=BHP(I)

```

```

BHP(I+1200)=BHP(I+1200)/N(3)
49 SSI(7200+I)=BHP(I+1200)
N(6)=N(16)/N(4)
N(5)=(2*N(1)-N(4)+1)/(N(6)-N(4)+I)+1
JJ=N(6)*N(4)
J=N(16)

```

```

DO 64 I=1, J
64 S(I)=0
N(11)=0
N(12)=N(11)+N(6)-1
K=N(2)
DO 70 I=1, K
N(7)=I
CALL CHOSE(LE, LE1, CO, N, P)
CALL SMAPL(P, N, S)

```

```

70 CONTINUE
CALL SCUS5(S, BHP, N, CO)
N3=N(3)
DO 361 N9=1, N3 at 1. Nst
WRITE(3, 520) N9

```

```

520 FORMAT(3X, I3, 5H-STEP)
LL1=0
299 LL=0
300 N(41)=0
301 N(42)=0

```

```

IF(LL1.EQ.100) GO TO 700 recogitaz at sp
72 CALL OMEG5(S, BHP, N, CO) Evolve (K, P)
LL=LL+1
J=N(16)

```

```

[ 800 DO 800 J=4000, 5200
SSI(J)=0
MM=N(2)
I1=0

```

```

302 DO 356 I=1, MM for i=1..M
N(7)=I
N(46)=LE(I)
N41=LE1(I)
LE1(I)=IABS((LE1(I))-(LE(I)/2**5)*(2**5))

```

```

303 CALL CHOSE(LE, LE1, CO, N, P)
IF(P(7).EQ.0) GO TO 356
LE(I)=N(40)
LE1(I)=N41

```

```

304 CALL STRPL(P, N, BHP)
305 L=J*(I-1)

```

```

306 DO 307 J=1, 3
307 P(33+J)=P(30+J)-SSI(L+J)
P(194)=P(34)
P(195)=P(35)
P(196)=P(36)
P(19)=SIGN(1, ((P(1)-P(2))*P(4)-P(6))
*- (P(1)-P(3))*P(4)-P(5))) / 2.) * (-1.)
IF(N(41).EQ.0) GO TO 308

```

```

J=N(32)+4000
SSI(J)=SSI(J)+(P(34)*P(5)-P(6))+P(36)*(P(3)-P(2)))/2.*P(19)
SSI(J+1)=SSI(J+1)+(P(36)*(P(5)-P(6))+P(35)*(P(3)-P(2)))/2.*P(19)
J=N(34)+4000
SSI(J)=SSI(J)+(P(34)*P(6)-P(4))+P(36)*(P(1)-P(3)))/2.*P(19)
SSI(J+1)=SSI(J+1)+(P(36)*(P(6)-P(4))+P(35)*(P(1)-P(3)))/2.*P(19)
J=N(36)+4000
SSI(J)=SSI(J)+(P(34)*P(4)-P(5))+P(36)*(P(2)-P(1)))/2.*P(19)
SSI(J+1)=SSI(J+1)+(P(36)*P(4)-P(5))+P(35)*P(2)-P(1))/2.*P(19)

```

```

308 CALL ON(P)
P(37)=P(37)/57.29578
309 P(34)=((P(44)**2+(P(42)-P(43))**2)**0.5)/2.
P(35)=(P(45)+P(43))/2.
P(36)=P(35)-P(34)
P(35)=P(35)+P(34)

```

*MM=1/2 - mcao 2A.*

*if E=0 then break m f*

*By - 0m = 5f*

*P(34) = ...*

*P(35) = ...*

*P(36) = ...*

*P(37) = ...*

*SSI(4000... 5100) - ...*

```

IF(ABS(P(35)-P(43)).GT.ABS(0.001*P(34))) GO TO 501
500 P(34)=1.570796 80°
GO TO 310
501 P(34)=ATAN(P(44)/(2.*(P(35)-P(43)))) Pi
310 P(14)=P(8)/(1.-P(8))
311 P(13)=P(7)/(1.-P(8)**2) En
A=0.785398+P(11)/114.59156
312 P(15)=2.*P(10)*SIN(A)/COS(A) Si
313 P(16)=(1.+SIN(P(11)/57.29578))/(1.-SIN(P(11)/57.29578)) d/phi:
P(17)=P(13)/(1.-P(14))
322 P(21)=0
P(22)=0
P(48)=P(10)/100. c/100 Op - pmag
IF(ABS(LE1(I))-2**5)323,323,324 Imp. no.
323 P(48)=P(10)/5. c/5 Op
324 A2(1)=-P(48)
A2(2)=(P(15)+A2(1))*P(16)-P(14))/P(13)
A2(3)=A2(1)*(1.-P(14)**2)/P(13)-P(14)*P(35)
A2(4)=(A2(1)+1-P(14)*P(16))-P(14)*P(15))/P(13)
A2(5)=-((P(13)*P(35)-P(15))*(1-P(14)*P(16)))/
*(P(16)-P(14))-P(14)*P(15))/P(13)
A2(6)=A2(2)-P(36)+A2(4)
IF(P(35).LT.0.0.AND.P(36).LT.0.)GO TO 1023
IF(P(35)-A2(2))1000,1000,1010
1000 IF(P(36)-A2(3))1021,1150,1150 if (E3 > A/B)
1010 IF(P(36)-A2(5))1040,1150,1150 if (E3 > B/L)
1040 IF(P(35)-A2(6))1020,417,417 if (E3 > A/L)
1023 ST3=0
ST1=0
GO TO 1022
1021 ST3=0
ST1=P(38)
GO TO 1022
1020 ST3=0
ST1=P(15)
1022 IF(ABS(LE1(I))-2**5)326,326,328 - 1 M
326 LE1(I)=-ABS(LE1(I)+2**5)
328 P(22)=ST3
P(21)=ST1
GO TO 339
417 ST3=((P(35)+P(36))*P(13)-P(15)*(1.-P(14)))/((1.-P(14))*(1.+P(16))) II
ST1=P(15)+P(16)*ST3
IF(ABS(LE1(I))-2**5)338,1030,1030
338 LE1(I)=ABS(LE1(I))+2**5 1 M
1030 P(22)=ST3
P(21)=ST1
339 P(198)=P(21)*(COS(-P(34)))**2+P(22)*(SIN(-P(34)))**2
P(199)=P(21)*(SIN(-P(34)))**2+P(22)*(COS(-P(34)))**2
340 P(200)=SIN(2.*P(34))*(P(21)-P(22))/2.
P(48)=1.5*(P(194)-P(198))
P(49)=1.5*(P(195)-P(199))
P(50)=1.5*(P(196)-P(200))
GO TO 1151
1150 ST1=(P(35)+P(14)*P(36))*P(13)/(1.-P(14)**2)
ST3=(P(36)+P(14)*P(35))*P(13)/(1.-P(14)**2)
IF(ABS(LE1(I))-2**5).LT.0)GO TO 1030
LE1(I)=ABS(LE1(I))-2**5
GO TO 1030
1151 IF(N(41).EQ.1)GO TO 351
341 DO 342 J=1,3
342 P(44+J)=P(47+J)
J=N(32)
BHP(J)=BHP(J)+(P(45)*(P(5)-P(6))+P(47)*(P(3)-P(2)))/2.*P(19)
BHP(J+1)=BHP(J+1)+(P(47)*(P(5)-P(6))+P(46)*(P(3)-P(2)))/2.*P(19)
J=N(34)
BHP(J)=BHP(J)+(P(45)*(P(6)-P(4))+P(47)*(P(1)-P(3)))/2.*P(19)

```

BHP(J+1)=BHP(J)+(P(47)\*(P(6)-P(4))+P(46)\*(P(1)-P(3)))/2.\*P(19)  
J=N(36)

BHP(J)=BHP(J)+(P(45)\*(P(4)-P(5))+P(47)\*(P(2)-P(1)))/2.\*P(19)

BHP(J+1)=BHP(J)+(P(47)\*(P(4)-P(5))+P(46)\*(P(2)-P(1)))/2.\*P(19)

344 K=3\*(I-1)

345 DO 350 J=1,3

SS1(K+J)=SS1(K+J)+P(44+J)

IF(ABS(P(44+J)).LT.P(10))/2.OR.ABS(P(44+J)).LT.0.2) GO TO 350

N(42)=1

350 CONTINUE

GO TO 356

351 P(37)=P(37)\*57.29578

N(40)=LE1(I)/2\*\*5

IF(PFN.EQ.0) GO TO 991

IF(N(40).EQ.0) GO TO 356

991 P(31)=P(194)

I1=I1+1

P(34)=P(34)\*57.29578

P(32)=P(195)

P(33)=P(196)

IF(TP.EQ.1) GO TO 999

IF(I1.EQ.1) GO TO 1201

IF(I1.EQ.2) GO TO 1202

IF(I1.EQ.3) GO TO 1200

1201 WRITE(3,1210)I,N(40),P(38),ST1,P(39),ST3,P(37)

GO TO 356

1202 WRITE(3,1211)I,N(40),P(38),ST1,P(39),ST3,P(37)

GO TO 356

1200 WRITE(3,1212)I,N(40),P(38),ST1,P(39),ST3,P(37)

I1=0

1210 FORMAT(1X,I3,I2,4F7.1,F5.1)

1211 FORMAT(1H+,40X,I3,I2,4F7.1,F5.1)

1212 FORMAT(1H+,80X,I3,I2,4F7.1,F5.1)

GO TO 356

999 WRITE(3,777)I,N(40),P(38),P(39),P(37),

\*P(31),P(32),P(33),P(42),P(43),P(44)

777 FORMAT(1X,I3,I2,2F11.3,F9.2,6F11.6)

356 CONTINUE

IF(N(41).EQ.1) GO TO 900

J=N(16)

IF(N(42).EQ.0) GO TO 358

IF(LL.EQ.150) GO TO 358

GO TO 300

358 N(50)=N(42)

LL1=LL+LL

N(41)=1

WRITE(3,850)LL

850 FORMAT(1H+,10X,I3,10H-ITERATION)

IF(TP.EQ.1) GO TO 888

WRITE(3,357)

357 FORMAT(1X,39HN ST SIG1 SIG1T SIG2 SIG2T ALFA,

\*1X,39HN ST SIG1 SIG1T SIG2 SIG2T ALFA,

\*1X,39HN ST SIG1 SIG1T SIG2 SIG2T ALFA)

GO TO 72

888 WRITE(3,881)

881 FORMAT(50X,8HSTRESSES/3X,2HNO,2HST,6X,

\*5HSIGM1,6X,5HSIGM2,4X,5HALPHA,6X,5HSTGMX,

\*6X,5HSIGMY,5X,6HTAY XY,7X,4HDEFX,6X,

\*4HDEFY,2X,8HGAMMA XY)

GO TO 72

359 IF(N3.EQ.N9) GO TO 361

DO 360 J=1,2400

360 BHP(J)=BHP(J)+SS1(6000+J)

361 CONTINUE

900 WRITE(3,363)

363 FORMAT(40X,22HDISPLACEMENTS OF KNOTS)

```

A2(9)=0
840 WRITE(3,362)
362 FORMAT(3X,5(2)HKNOT X Y ))
M=1
364 K=2*M-2
IF(A2(9).EQ.1)GO TO 820
365 DO 366 I=1,10
366 P(50+I)=BHP(1200+I+K)
GO TO 367
820 LL=0
DO 830 I=1,10
830 P(50+I)=SS1(4000+K+I)
IF(CO(K+I).GT.0) GO TO 367
LL=1
367 DO 368 I=1,5
368 N(40+I)=M+I-1
IF(LL.EQ.0) GO TO 371
WRITE(3,370)N(41),P(51),P(52),N(42),P(53),P(54),N(43),P(55),
*P(56),N(44),P(57),P(58),N(45),P(59),P(60)
370 FORMAT(2X,5(I5,2F9.3))
371 M=M+5
372 IF(M.LE.N(1))GO TO 364
IF(A2(9)) 835,835,373
835 A2(9)=1
WRITE(3,836)
836 FORMAT(40X,2)HCONTROL KNOTS FORCES)
GO TO 840
373 IF(N(50).EQ.1)GO TO 299
IF(N9.NE.N3)GO TO 359
700 CONTINUE
STOP
END

```

```

SUBROUTINE SOUS5(S,BHP,N,CO)
DIMENSION S(6400),BHP(2400),N(50),CO(1300)
INTEGER CHZON,NIJGR,VERGR,CHUZ,SCH,H,HU
REAL*8 A,A1,B,B1,B2,B3,A2
SCH=N(4)
CHZON=N(5)
CHUZ=N(6)-SCH+1
N1=N(1)
J1=N(16)
JJ=N(6)*SCH
KK=CHUZ*SCH
LL=SCH*(SCH-1)
DO 1 K=1,CHZON
NIJGR=(K-1)*CHUZ+1
VERGR=MINO(2*N1,K*CHUZ+SCH-1)
NN=1
IF(K.EQ.1)IA=1
IF(K.NE.1)IA=NIJGR+SCH-1
DO 2 I=IA,VERGR
IF(CO(I).LT.0) GO TO 2
III=(I-NIJGR)*SCH+1
H=MAX0((I-SCH+1),1)
IF((I-1).EQ.0)GO TO 3
I5=I-1
A=S(III)
DO 5 M=H,I5
IF(CO(M).LT.0) GO TO 5
IMM=(M-NIJGR)*SCH+1
A1=S(IMM+I-M)**2
A2=S(IMM)
A=A-DSIGN(A1,A2)
5 CONTINUE
3 B)=DSIGN(DSQRT(DABS(A)),A)
S(III)=B9

```

```

H=MIN0(I+SCH-1,2*N1)
IF((I+1).GT.H) GO TO 2
L=I+1
DO 8 J=L,H
IF(CO(J).LT.0.)GO TO 8
A=S(III+J-I)
B=0.
HU=MAX0(J-SCH+1,1)
IF(HU.GT.(I-1)) GO TO 6
LI=I-1
DO 7 M=HU,LI
IF(CO(M).LT.0.)GO TO 7
IMM=(M-NIJGR)*SCH+1
B1=S(IMM+I-M)*S(IMM+J-M)
B=B+SIGN(1.0,S(IMM))*B1
7 CONTINUE
6 B2=(A-B)/S(III)
S(III+J-I)=B2,
8 CONTINUE
2 CONTINUE
1 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE OMEG5(S,BHP,N,CO)
DIMENSION S(64000),BHP(2400),N(50),CO(1300)
INTEGER CHZON,NIJGR,VERGR,CHUZ,SCH,H,HU
REAL*8 A,A1,A2
SCH=N(4)
CHZON=N(5)
CHUZ=N(6)-SCH+1
N1=N(1)
J1=N(16)
DO 10 K=1,CHZON
NIJGR=(K-1)*CHUZ+1
VERGR=MIN0(2*N1,K*CHUZ+SCH-1)
IF(K.EQ.1)IA=1
IF(K.NE.1)IA=NIJGR+SCH-1
DO 20 I=IA,VERGR
IF(CO(I).LT.0) GO TO 20
III=(I-NIJGR)*SCH+1
A=0.
IF(I.EQ.1)GO TO 30
H=MAX0(1,I-SCH+1)
I1=I-1
DO 4 M=H,I1
IMM=(M-NIJGR)*SCH+1
IF(CO(M).LT.0.)GO TO 50
A1=S(IMM+I-M)*BHP(1200+M)
A=A+SIGN(1.0,S(IMM))*A1
GO TO 4
50 A=A+S(IMM+I-M)*BHP(1200+M)
4 CONTINUE
IF(I-2*N1.EQ.0.)GO TO 33
30 H=MIN0(2*N1,I+SCH-1)
I4=I+1
DO 44 M=I4,H
IF(CO(M).GT.0.)GO TO 44
A=A+S(III+M-I)*BHP(1200+M)
44 CONTINUE
33 A1=(BHP(I)-A)/S(III)
BHP(1200+I)=A1
20 CONTINUE
10 CONTINUE
K1=0
DO 55 K=1,CHZON
K2=CHZON-K1
K1=K1+1
NIJGR=(K2-1)*CHUZ+1

```



```

VERGR=MIN0(2*N1, N2*CHUZ+SCH-1)
IF(N2.EQ.CHZON)IA=VERGR
IF(N2.NE.CHZON)IA=VERGR-SCH+1
I1=0
DO 66 I=NIJGR, IA
I2=IA-I1
I1=I1+1
IF(CO(I2).LT.0) GO TO 66
III=(I2-NIJGR)*SCH+1
IF(I2*N1-I2).EQ.0.)GO TO 22
N=MIN0(2*N1, I2+SCH-1)
N1=I2+1
DO 77 M=N1, H
IF(CO(M).LT.0.)GO TO 77
A=A+S(III+M-I2)*BHP(1200+M)
77 CONTINUE
A2=(BHP(1200+I2)-A)/ABS(S(III))
BHP(1200+I2)=A2
66 CONTINUE
55 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE CHOSE(LE, LE1, CO, N, P)
DIMENSION LE(1200), LE1(1200), CO(1300), N(50), P(200)
K=N(7)
N1=LB(K)-LE(K)/2**10*2**10
N1=IABS(N1)
N2=LE(K)/2**10-LE(K)/2**20*2**10
N2=IABS(N2)
N3=LE(K)/2**20-LE(K)/2**30*2**10
N3=IABS(N3)
NT=LE1(K)
NT=IABS(NT)
N(31)=2*N1-2
N(32)=2*N1-1
N32=N(32)
N(33)=2*N2-2
N(34)=2*N2-1
N34=N(34)
N(35)=2*N3-2
N(36)=2*N3-1
N36=N(36)
P(1)=ABS(CO(N32))
P(4)=ABS(CO(N32+1))
P(2)=ABS(CO(N34))
P(5)=ABS(CO(N34+1))
P(3)=ABS(CO(N36))
P(6)=ABS(CO(N36+1))
N4=5*NT+1195
DO 2 I=1, 5
2 P(I+6)=CO(I+N4)
S=((P(6)-P(4))*(P(1)-P(2))+(P(3)-P(1))*(P(5)-P(4)))/2.
P(12)=ABS(S)
P(13)=SIGN(1., S)
RETURN
END
SUBROUTINE STRPL(P, N, BHP)
DIMENSION N(50), P(200), BHP(2400)
DO 1 J=1, 6
K=N(30+J)-1
1 P(100+J)=BHP(1200+K)
P(50)=P(7)/((1.+P(8))*(1.-2.*P(8)))
P(51)=(P(1)-P(3))*(P(4)-P(5))-(P(2)-P(1))*(P(6)-P(4))
P(42)=(P(101)*P(5)-P(6))+P(103)*P(6)-P(4)+P(105)*P(4)-P(5)
)/P(51)
P(43)=(P(102)*P(3)-P(2))+P(104)*P(1)-P(3))+P(106)*
*(P(2)-P(1)))/P(51)
P(44)=(P(101)*P(3)-P(2))+P(103)*P(1)-P(3))+P(105)*P(2)-P(1))+

```

\*P(102)=P(5)-P(6)+P(104)\*(P(6)-P(4))+P(106)\*(P(4)-P(5))

P(31)=P(50)\*((1.-P(8))\*P(42)+P(8)\*P(43))

P(32)=P(50)\*(P(8)\*P(42)+(1.-P(8))\*P(43))

P(33)=P(50)\*(1.-2.\*P(8))\*P(44)/2.

RETURN

END

SUBROUTINE SMAPL(P,N,S)

DIMENSION S(64000),N(50),P(200)

DO 22 J=1,6

IF(N(30+J).GE.N(11).AND.N(30+J).LE.N(12))GO TO 21

22 CONTINUE

GO TO 5

21 DO 1 J=100,200

1 P(J)=0

P(101)=P(2)\*P(6)-P(3)\*P(5)

P(102)=P(3)\*P(4)-P(1)\*P(6)

P(103)=P(1)\*P(5)-P(2)\*P(4)

P(107)=P(5)-P(6)

P(108)=P(6)-P(4)

P(109)=P(4)-P(5)

P(113)=P(3)-P(2)

P(114)=P(1)-P(3)

P(115)=P(2)-P(1)

DO 2 J=101,103

P(21+J)=P(J)

P(27+J)=P(6+J)

2 P(33+J)=P(12+J)

P(158)=1.-P(8)

P(186)=P(158)

P(162)=P(8)

P(182)=P(162)

P(165)=(1.-2.\*P(8))/2

P(167)=P(165)

P(177)=P(165)

24 P(179)=P(165)

P(99)=-20.

3 DO 42 J=1,6

DO 42 K=1,6

NO=50+6\*(J-1)+K

P(NO)=0

DO 4 L=1,6

N1=150+6\*(J-1)+L

N2=100+6\*(L-1)+K

4 P(NO)=P(NO)+P(N1)\*P(N2)

42 CONTINUE

IF(P(99))6,6,7

6 DO 81 J=1,6

DO 8 K=1,6

NO=150+6\*(K-1)+J

N1=100+6\*(J-1)+K

8 P(NO)=P(N1)

81 CONTINUE

DO 9 J=1,36

9 P(J+100)=P(J+50)

P(99)=20.

GO TO 3

7 P(99)=P(7)/(4.\*P(12)\*(1.+P(8))\*(1.-2.\*P(8)))

DO 11 J=1,36

11 P(J+50)=P(J+50)\*P(99)

N(44)=N(31)

N(45)=N(33)

N(46)=N(35)

N(47)=N(32)

N(48)=N(34)

N(49)=N(36)

DO 111 J=1,6

DO 111 K=J,6

NO N(J+43)+1

```
N1=N(K+43)+1
IF(NO-N1)10,10,84
10 L=NO*(N(4)-1)+N1+1-N(4)*(N(11)+1)
GO TO 85
84 L=N1*(N(4)-1)+NO+1-N(4)*(N(11)+1)
85 N2=N(6)*N(4)
IF(L.LT.1.OR.L.GT.N2)GO TO 111
N2=50+6*(J-1)+K
S(L)=S(L)+P(N2)
111 CONTINUE
5 RETURN
END
SUBROUTINE GN(P)
DIMENSION P(200)
A=SQRT(4*P(36)*P(36)+(P(34)-P(35))**2)
P(38)=(P(34)+P(35)+A)/2.
P(39)=(P(34)+P(35)-A)/2.
A=P(38)-P(35)
P(37)=90.
IF(ABS(A).LT.0.0001)GO TO 2
P(37)=ATAN(P(36)/A)*57.29578
2 RETURN
END
```

$\sigma_1, \sigma_2, \phi$

$\alpha$

Введение . . . . .	3
1. Основы механики твердого деформируемого тела . . . . .	7
1.1. Напряжения . . . . .	7
1.2. Деформации . . . . .	12
1.3. Упругость. Закон Гука . . . . .	13
1.4. Предельные поверхности изотропных материалов . . . . .	15
1.5. Поверхность текучести . . . . .	19
1.6. Деформационная теория пластичности . . . . .	25
1.7. Теория пластического течения . . . . .	26
1.8. Вязкоупругость и вязкопластичность . . . . .	30
1.9. Механика двухфазных сред . . . . .	32
2. Метод конечных элементов . . . . .	35
2.1. Устаивившаяся фильтрация . . . . .	36
2.1.1. Дискретизация области. Треугольный элемент . . . . .	36
2.1.2. Матрица жесткости элемента и системы элементов . . . . .	37
2.1.3. Граничные условия . . . . .	43
2.2. Плоская задача теории упругости . . . . .	44
2.2.1. Конечный элемент и его свойства . . . . .	44
2.2.2. Матрица жесткости системы . . . . .	47
2.2.3. Постановка задачи и назование граничных условий . . . . .	49
2.3. Осесимметрическая задача . . . . .	52
2.4. Плоский изопараметрический элемент . . . . .	54
2.5. Трехмерная задача . . . . .	64
2.6. Основные процедуры при решении нелинейных задач . . . . .	67
2.6.1. Нелинейная упругость с секущей матрицей . . . . .	68
2.6.2. Нелинейная упругость с касательной матрицей . . . . .	68
2.6.3. Метод начальных напряжений — деформационная теория пластичности . . . . .	69
2.6.4. Теория пластического течения . . . . .	71
2.7. Особенности конечно-элементного решения задач предельного равновесия . . . . .	75
2.8. Имитация изменения контура области . . . . .	77
2.9. Решение системы уравнений . . . . .	77
2.10. Общая структура программы для ЭВМ . . . . .	83
3. Механические свойства грунтов . . . . .	90
3.1. Механические свойства песка . . . . .	91
3.2. Механические свойства глины . . . . .	100
3.2.1. Сжимаемость глины . . . . .	100
3.2.2. Реакция нормально уплотненных глины на касательные напряжения . . . . .	104
3.2.3. Сопротивление сдвигу переуплотненных глин . . . . .	107
3.3. Грунты под динамическими нагрузками . . . . .	110
4. Механические свойства скальных пород . . . . .	112
4.1. Свойства монолитных образцов . . . . .	112
4.2. Свойства трещиноватого массива . . . . .	115
4.3. Контактные характеристики . . . . .	116
4.4. Реологические свойства грунтов и горных пород . . . . .	120
5. Решение геотехнических задач с помощью комплекта программ "Геомеханика" . . . . .	121
5.1. Деформационная идеальная упругопластическая модель среды . . . . .	122

5.1.1. Задача Галина . . . . .	127
5.1.2. Устойчивость насыпи на слабом основании . . . . .	128
5.1.3. Задача о проходимости тяжелого экскаватора . . . . .	130
5.1.4. Расчет давления на обделку тоннеля . . . . .	132
5.1.5. Исследование зависимости осадки жесткого полосового фундамента от нагрузки . . . . .	134
5.1.6. Давление на шпунтовое ограждение . . . . .	135
5.1.7. Упругая задача в условиях плоского напряженного состоя- ния . . . . .	137
5.2. Среда с разупрочнением . . . . .	139
5.3. Программа на основе теории пластического течения (плоская деформация) . . . . .	141
5.4. Осесимметрические задачи . . . . .	146
6. Другие модели грунтов и горных пород . . . . .	151
6.1. Нелинейноупругая модель грунта . . . . .	151
6.2. Шатровые модели . . . . .	157
6.3. Контакт-элементы . . . . .	168
6.4. Армированный грунт . . . . .	174
6.5. Реализация реологических моделей . . . . .	179
6.6. Задачи фильтрационной консолидации . . . . .	183
6.7. Анализ процессов, связанных с промерзанием и оттаиванием грунта . . . . .	187
6.7.1. Температурный расчет промерзания . . . . .	187
6.7.2. Расчет сил морозного пучения . . . . .	191
6.8. Метод дискретных элементов Кюндалла . . . . .	194
Список литературы . . . . .	197
Приложение . . . . .	200