550.36
И 20

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Н. С. Иванов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МЕРЗЛОТОВЕДЕНИЯ

Н. С. Иванов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

УДК 550.362.001.57:624.139.

Моделирование тепловых процессов в горных породах.
Иванов Н.С. М., Изд-во "Наука", 1972 г., 138.

В монографии изложены основные положения теории моделирования процессов тепло- и массообмена в горных породах. Рассмотрены различные принципы аналогии термодинамических процессов с электрическими, гидро- и аэродинамическими, механическими и диффузионными. Развиты теоретические и методические предпосылки физического моделирования процессов тепло- и массообмена в горных породах. Описана универсальная установка для физического моделирования теплофизических процессов в естественных средах и инженерных сооружениях. Рассмотрены методы гидродинамического моделирования процессов промерзания в тонкодисперсных средах, решения некоторых задач теплопроводности, прямых и обратных задач Стефана на электрических моделях. Приведены результаты исследований по физическому и математическому моделированию процессов теплообмена в подземных трубопроводах и холодильниках.

Издание рассчитано на научных и инженерно-технических работников, занятых изучением теплового режима мерзлых горных пород и использующих прогнозирование теплового взаимодействия различных объектов с мерзлыми группами. Книга может быть использована как учебное пособие преподавателями и студентами геологических, горных и строительных вузов.

Таблиц 3, иллюстраций 47, библиогр.72 назв.

2-9-2
258-71 (2-е полугодие)

ВВЕДЕНИЕ

Сложность термодинамических процессов, происходящих при промерзании и протаивании горных пород, и ограниченные возможности аналитических методов обусловливают первостепенное значение методов физического и математического моделирования при изучении теплового режима мерзлых толщ земной коры и прогнозировании теплового взаимодействия инженерных сооружений с мерзлыми грунтами.

Даже для тел простейшей формы разработка теории переноса тепла и вещества сопряжена со значительными трудностями. Большинство же задач общей и инженерной геокриологии связано с процессами тепло- и массообмена тел, имеющих самые разнообразные формы, при наложении различных механизмов переноса тепла и вещества. Решение подобного рода задач аналитическими методами пока не всегда возможно. Во многих случаях применение их, хотя и позволяет получить решение задач, становится нецелесообразным из-за большого объема вычислительных операций.

Истоки исследований по теории моделирования физических процессов и испытанию моделей механизмов и инженерных сооружений связаны с именами таких гениальных ученых, как Галилей, Ньютон, Эйлер, Фурье, Коши, Рейнольдс, Крылов и др.

Основы теории подобия и моделирования физических и механических процессов были развиты в трудах выдающихся отечественных ученых: В.Л.Кирпичева (1947, 1950, 1951), М.А.Михеева (1949), Л.И.Гутенмахера (1949), Л.С.Эйгенсона (1952), П.К.Конакова (1959), И.М.Тетельбуама (1959), П.А.Алабужева и др. (1968) и многих других.

Теория моделирования процессов тепло- и массопереноса в горных породах является частным разделом общей теории моделирования физических процессов и состоит из двух основных разделов: физического и математического.

Физическое моделирование в геокриологии развивалось работами С.С.Ковнера (1943), Г.С.Шадрина (1954), И.А.Горячевой и Г.С.Шадрина (1958), П.А.Богословского (1959), В.Г.Гольдтмана (1959), И.А.Горячевой (1960), Н.С.Иванова (1961, 1965, 1966), Н.С.Иванова, Ю.Н.Анненкова, Ю.А.Тышева (1963), С.В.Томирдиаро (1963), Л.Н.Прозорова (1963).

В этих работах были рассмотрены исходные теоретические предпосылки физического моделирования процессов тепло- и массопереноса в промерзающих протаивающих средах при наличии миграции и фильтрации влаги. Методами физического моделирования решен ряд задач по тепловому взаимодействию инженерных сооружений с мерзлыми грунтами.

Следует, однако, отметить, что возможности физического моделирования в геокриологии исользуются еще очень слабо. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, недостаточно разработаны теоретические основы физического моделирования процессов тепло- и массопереноса, лучистого, конвективного и кондуктивного теплообмена, процессов фильтрации и испарения в системах природных тел и инженерных сооружениях. Не выяснены условия моделирования тепловых процессов при неодинаковых физических свойствах натурной и моделирующей систем. Второй причиной является отсутствие установок, позволяющих моделировать достаточно широкий круг явлений тепло- и массопереноса и обмена.

Принципиальный интерес для геокриологии представляют теоретические положения, развиваемые В.М.Брейтманом (1966) об интегральном моделировани теплофизических явлений, сопровождаемых фазовыми изменениями среды.

Математическое моделирование тепловых процессов в геокриологии развивалось по двум основным направлениям: гидродинамическому моделированию процессов промерзания – протаивания и электрическому моделированию стационарных температурных полей.

Теория и методика гидродинамического моделирования тепловых процессов разрабатывалась Д.В.Будриным (1955), В.С.Лукьяновым и М.Д.Головко (1957), Л.В.Кузьменко (1959), А.Д.Муром (Moore, 1949, 1950), В.С.Лукьяновым (1937).

Дальнейшее развитие методики гидродинамического моделирования связано с моделированием тепловых процессов при коэффициентах, зависящих от температуры, с решением систем уравнений тепло- и массопроводности.

Электрическое моделирование стационарных тепловых процессов в мерзлых толщах земной коры осуществляется с помощюь электроинтеграторов системы Л.И.Гутенмахера (1949), М.П.Кузьмина (1964), П.Ф.Фильчакова и В.И.Панчишина (1961), электролитических ванн; нестационарных – на универсальной сеточной машине УСМ-1.

Используя первые результаты в области электрического моделирования тепловых процессов в средах с переменными свойствами (Вулис, Жеребятьев, Лукьянов, 1963; Жеребятьев, Лукьянов, Рыкова, 1966) и решения систем уравнений тепло-массопроводности (Коздоба, 1963), предстоит развить и применить эти методы для изучения процессов тепло- и массопереноса в мерзлых горных породах. Для широкого внедрения математического моделирования в расчетную практику следует разрабатывать также методику моделирования и малогабаритную и экономичную аппаратуру для исследования стационарных и нестационарных процессов (Иванов, 1966).

Не нашла еще применения мембранная аналогия тепловых процессов, предложенная Вильсоном и Майлсом (Wilson, Mills, 1950), возможности применения которой в строительной теплофизике и геокриологии были раскрыты А.В.Лыковым (1961) и К.Э.Клааном (1960б). В аналогичном положении находится также аэродинамическая аналогия (Койл, 1959) и аналогия между процессами фильтрации и теплопроводности (Лыков, 1961).

Наряду с развитием теории гидродинамического и электрического моделирования тепловых процессов в мерзлых горных породах все возрастающее значение приобретают в геокриологии методы математического моделирования геотеплофизических задач на электронных вычислительных машинах. Это направление развивается исследованиями В.Г.Меламеда (1958, 1960), К.Э.Клаана (1960а), Албасини (1960).

Настоящая работа представляет первый этап иследований по теории и методике физического и математического моделирования и решению методами моделирования геотеплофизических и геотеплотехнических задач. Эти исследования проведены автором и выполнены под его руководством сотрудниками Лаборатории тепло- и массообмена Института мерзлотоведения СО АН СССР и студентами Якутского государственного университета.

В проведении исследований по моделированию и в подготовке раздела I главы 1У и раздела 3 главы У принимал участие Г.Е.Ли, в подготовке разделов 2 главы 1У и 3 главы У – В.Д.Шестаков. Им же написан раздел 2 главы 1У. В исследованиях по физическому моделированию и в подготовке раздела I главы У участвовал Ю.К.Мальков.

Глава 1

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. МОДЕЛИРОВАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Любой термодинамический процесс в промерзающих и протаивающих горных породах, в подземных и наземных инженерных сооружениях характеризуется совокупностью величин. К числу их относятся геометрические и физические величины, определяющие положение системы и отдельных ее частей, свойства среды, взаимодействие системы с окружающими телами, а также характеристики состояния.

Вся совокупность рассматриваемых переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ состоит из независимых k и $n-k$ зависимых величин (функций). К числу первых в термодинамической системе относятся координаты, размеры системы и ее структурных составляющих, время.

Зависимые переменные определяются как функции координат, размеров системы, времени, физических и механических параметров, характеризующих свойства среды, граничных и начальных условий. В качестве таких функциональных переменных, описывающих термодинамическое состояние горных пород, могут быть температура ϑ, влажность W, льдистость $W_л$, химический потенциал влаги $\mu_в$, электрический потенциал φ, скорость движения свободной воды $V_в$, водяного пара $V_{вп}$ и поровых газов $V_{пг}$, скорость миграции связанной влаги $V_{св}$, давление P.

В общем виде зависимыми переменными являются и параметры, характеризующие свойства среды: коэффициенты конвективной и кондуктивной теплопроводности λ, потенциалопроводности $a_м$, термоградиентный $б$, температуропроводности a, фильтрации $K_ф$, теплообмена α, теплоемкость $c_т$ и массоемкость $c_м$, объемная плотность грунта и его составляющих γ, плотность воды ρ.

И, наконец, условия однозначности – граничные и начальные – задаются как функции координат и времени.

Для однозначной характеристики рассматриваемой системы необходимо $m=n-k$ уравнений, которые позволили бы определить все зависимые переменные как функции независимых – аргументов.

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$.

При решении большинства геотеплофизических и геотеплотехнических задач конечной целью является определение полей таких величин, как температура и влагосодержание, скорости потоков вещества.

Определение полей этих величин может быть осуществлено аналитическими методами, путем решения дифференциальных и интегральных уравнений тепло- и массопереноса. Однако до настоящего времени методами математической физики могут быть решены лишь наиболее простые задачи для идеализированных систем, т.е. для тел простой геометрической формы (неограниченная и полуограниченная среда, неограниченная пластина, шар, цилиндр, конус) при постоянных коэффициентах тепло- и массопереноса.

Реальные же процессы тепло- и массопереноса в промерзающих–протаивающих горных породах и в системах грунт–сооружение происходит в телах сложной геометрической формы с произвольными граничными и начальными условиями при наложении различных форм и механизмов переноса. Рассматриваемые системы обычно многослойны, а свойства сред могут изменяться не только в пространстве, но и во времени. И, наконец, в процессах промерзания и протаивания границы многослойных сред становятся подвижными, а коэффициенты переноса – функциями потенциалов переноса.

Решение подобного рода нелинейных задач тепло- и массопереноса может быть получено только на основе применения методов физического и математического моделирования.

Моделирование физических процессов является одним из наиболее мощных и универсальных методов исследования современной науки и техники. Он позволяет получать как качественное, так и количественное решение наиболее сложных задач.

Физическое моделирование основано на воспроизведении на уменьшенной или увеличенной модели однородных по физической сущности процессов, происходящих в природе.

Методы математического моделирования основаны на аналогии или тождественности дифференциальных уравнений, формально описывающих процессы, происходящие в натуре и на модели, что позволяет изучить природные процессы на их моделях. В частности, закономерности термодинамических процессов в естественных условиях могут быть установлены на основе изучения аналогичных процессов в электрической, гидродинамической, аэродинамической и других модельных системах.

Основу теории моделирования составляет теория размерностей и теория подобия физических и иных явлений в самом широком понимании. Теория подобия объединяет как физическое подобие, так и аналогию процессов. С помощью теории моделирования результаты исследования, полученные на частном опыте или совокупности опытов, могут быть распространены на широкий класс подобных (аналогичных) явлений.

Под подобными понимаются системы, характеризующиеся геометрическим и физическим подобием.

Геометрически подобными являются такие тела и системы, которые могут быть совмещены путем равномерной деформации, т.е. одинакового изменения всех размеров тела. Такие системы представляют частный случай афинных систем, совмещение которых достигается неравномерной деформацией размеров по различным направлениям. Точки подобных тел и систем, которые в результате деформации совпадают при совмещении, называются сходственными, а расстояния между ними – сходственными параметрами. К сходственным геометрическим параметрам относятся, например, радиусы-векторы сходственных точек, радиусы, высоты, размеры граней и т.п.

При равномерной деформации двух подобных систем (натурной и моделирующей) между координатами сходственных точек x_1, x_2, x_3 и сходственными параметрами $l_1, l_2, \dots, l_i$ справедливо соотношение:

$$\frac{x_{1,н}}{x_{1,м}}=\frac{x_{2,н}}{x_{2,м}}=\frac{x_{3,н}}{x_{3,м}}=\frac{l_{1,н}}{l_{1,м}}=\frac{l_{2,н}}{l_{2,м}}=\dots=\frac{l_{i,н}}{l_{i,м}}=c_l\ , \tag{2}$$

где индексы н и м отнесены к натурной и моделирующей системам; c_l – множитель подобия, характеризующий коэффициент деформации систем при их совмещении.

Выберем в качестве масштабов длин сходственные параметры $l_{iн}$ и $l_{iм}$ и разделим члены уравнения (2) на отношение $\dfrac{l_{iн}}{l_{iм}}$:

$$\frac{\dfrac{x_{1,н}}{l_{i,н}}}{\dfrac{x_{1,м}}{l_{i,м}}}=\frac{\dfrac{x_{2,н}}{l_{i,н}}}{\dfrac{x_{2,м}}{l_{i,м}}}=\frac{\dfrac{x_{3,н}}{l_{i,н}}}{\dfrac{x_{3,м}}{l_{i,м}}}=\frac{\dfrac{l_{1,н}}{l_{i,н}}}{\dfrac{l_{1,м}}{l_{i,м}}}=\frac{\dfrac{l_{2,н}}{l_{i,н}}}{\dfrac{l_{2,м}}{l_{i,м}}}=\dots=\frac{\dfrac{l_{(i-1),н}}{l_{i,н}}}{\dfrac{l_{(i-1),м}}{l_{i,м}}}=1\,. \tag{3}$$

Введем обозначения для безразмерных координат и параметров, входящих в равенство (3):

$$X_{1,н}=\frac{x_{1,н}}{l_{i,н}};\ X_{2,н}=\frac{x_{2,н}}{l_{i,н}};\ X_{3,н}=\frac{x_{3,н}}{l_{i,н}};\ L_{1,н}=\frac{l_{1,н}}{l_{i,н}},\dots,L_{(i-1),н}=\frac{l_{(i-1),н}}{l_{i,н}}\ ;$$

$$X_{1,м}=\frac{x_{1,м}}{l_{i,м}};\ X_{2,м}=\frac{x_{2,м}}{l_{i,м}};\ X_{3,м}=\frac{x_{3,м}}{l_{i,м}};\ L_{1,м}=\frac{l_{1,м}}{l_{i,м}};\ L_{2,м}=\frac{l_{2,м}}{l_{i,м}};\dots;L_{(i-1),м}=\frac{l_{(i-1),м}}{l_{i,м}}\,. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что сходственные безразмерные координаты и геометрические параметры натурной и моделирующей систем равны:

$$\begin{aligned} &X_{1н}=X_{1м}; && L_{1н}=L_{1м};\\ &X_{2н}=X_{2м}; && L_{2н}=L_{2м};\\ & && \dots\dots\\ &X_{3н}=X_{3м}; && L_{(i-1),н}=L_{(i-1),м}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Приведем уравнения, описывающие геометрические подобные системы, в безразмерном виде:

$$F_н(X_{1н},X_{2н},X_{3н},L_{1н},L_{2н},\dots,L_{(i-1),н})=0; \tag{6}$$

$$F_м(X_{1м},X_{2м},X_{3м},L_{1м},L_{2м},\dots,L_{(i-1),м})=0.$$

Из этого условия и условия (5) следует тождественность безразмерных уравнений, характеризующих геометрически подобные системы. Вторым признаком геометрического подобия является равенство масштабов всех координатных осей в каждой из подобных систем (Эйгенсон, 1952). В качестве таких масштабов служат сходственные параметры в уравнениях (2) и (3).

Физические явления, происходящие в геометрически подобных системах, физические поля величин, характеризующие эти явления, будут подобными, если для каждой пары сходственных точек, удовлетворяющих уравнению (2), справедиивы аналогичные соотношения для пары любых сходственных физических переменных и параметров φ_i:

$$\frac{\varphi_{1,н}}{\varphi_{1,м}}=\frac{\varphi_{2,н}}{\varphi_{2,м}}=,\dots,=\frac{\varphi_{n,н}}{\varphi_{n,м}}=c_\varphi\ , \tag{7}$$

в сходственные моменты времени

$$\frac{\tau_{1,н}}{\tau_{1,м}}=\frac{\tau_{2,н}}{\tau_{2,м}}=,\dots,=\frac{\tau_{m,н}}{\tau_{m,м}}=c_\tau\ , \tag{8}$$

где c_τ и c_φ – множители подобия.

Выбрав по аналогии с геометрическим подобием отношения сходственных масштабов для времени $\dfrac{\tau_{0н}}{\tau_{0м}}$ и физических переменных (параметров) $\dfrac{\varphi_{0н}}{\varphi_{0м}}$ и разделив на эти величины члены равенств (7) и (8), получим

$$\begin{aligned} &T_{1н}=\frac{\tau_{1,н}}{\tau_{0,н}}=T_{1,м}=\frac{\tau_{1,м}}{\tau_{0,м}};\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &T_{m,н}=\frac{\tau_{m,н}}{\tau_{0,н}}=T_{m,м}=\frac{\tau_{m,м}}{\tau_{0,м}};\\ &\Phi_{1,н}=\frac{\varphi_{1,н}}{\varphi_{0,н}}=\Phi_{1,м}=\frac{\varphi_{1,м}}{\varphi_{0,м}};\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\Phi_{n,н}=\frac{\varphi_{n,н}}{\varphi_{0,н}}=\Phi_{n,м}=\frac{\varphi_{n,м}}{\varphi_{0,м}}\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, в подобных системах для одинаковых значений сходственных параметров в сходственные безразмерные моменты времени (T) значения сходственных безразмерных параметров и переменных (Φ) должны быть равны.

Введем масштабные преобразования для основных физических параметров и переменных, которые характеризуют процесс тепло- и массопереноса в промезающих и протаивающих горных породах.

$$\begin{gathered}
\vartheta=\vartheta_0\theta, \quad \vartheta_п(x,y,z,\tau)=\vartheta_0\theta_п(X,Y,Z,T), \quad \lambda=\lambda_0\Lambda, \quad \gamma=\gamma_0\Gamma, \\
w=w_0W, \quad \vartheta_н(x,y,z)=\vartheta_0\theta_н(X,Y,Z), \quad a_м=a_{0,м}A_м, \\
c_т=c_{т,0}C_т, \quad w_л=w_{л,0}W_л, \quad W_п(x,y,z,\tau)=W_0W_п(X,Y,Z,T), \\
\delta=\delta_0\Delta, \quad c_м=c_{м,0}c_м, \quad w_н(x,y,z)=w_0W_н(X,Y,Z), \\
a=a_0A, \quad p=p_0P, \quad k_\varphi=k_{\varphi,0}K_\varphi, \\
\mu_в=\mu_{в,0}M, \quad \varphi=\varphi_0\Phi, \quad \alpha=\alpha_0\mathcal{A},
\end{gathered} \tag{10}$$

где $\vartheta_п(x,y,z,\tau)$ и $\vartheta_н(x,y,z)$; $w_п(x,y,z,\tau)$ и $w_н(x,y,z)$ — соответственно граничные и начальные условия тепло- и массопереноса, а индекс 0 относится к масштабам соответствующих величин.

Переменные величины и параметры, приведенные в (10), определяют совокупности основных величин, характеризующих процессы тепло- и массопереноса в промерзающих и протаивающих горных породах.

Уравнения, описывающие подобные физические поля в геометрически подобных системах, выраженные в безразмерной форме, запишутся в виде

$$\begin{gathered}
F_н(X_{1,н},X_{2,н},X_{3н},\alpha_{1,н},\alpha_{2,н},\ldots,L_{(i-1),н},T_н,\theta_н,\theta_{п,н},\theta_{н,н},W_н, \\
W_{л,н},W_{п,н},W_{н,н},M_н,\Phi_н,\gamma_н,P_н,\Lambda_н,A_{м,н},A_н,K_{\varphi,н},\mathcal{A}_н,\Gamma_н,C_{т,н},C_{м,н})=0; \\
F_м(X_{1,м},X_{2,м},X_{3,м},L_{1,м},L_{2,м},\ldots,L_{(i-1),м},T_м,\theta_м,\theta_{п,м},\theta_{н,м},W_м,W_{л,н},W_{н,м}, \\
W_{п,м},M_м,\Phi_м,\gamma_м,P_м,\Lambda_м,A_{м,м},\Delta_м,A_м,K_{\varphi,м},\mathcal{A}_м,\Gamma_м,C_{т,м},C_{мм})=0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Соответствующие безразмерные координаты, характеристические размеры, время и физические параметры связаны соотношением типа (5):

$$X_{1,н}=X_{1,м},\ldots,W_{н,н}=W_{м,м},\ldots,C_{н,м}=C_{м,м}. \tag{12}$$

Как уже отмечалось, в общем случае физические параметры могут быть функциями координат, времени, температуры, влажности, плотности. Тогда равенства, входящие в (12), заменяются равенствами соответствующих характеристических уравнений. Так, для коэффициента теплопроводности можно записать

$$\begin{gathered}
\Lambda_н(X_{1,н},X_{2,н},X_{3,н},T_н,\theta_н,W_н,W_{л,н},\Gamma_н)= \\
=\Lambda_м(X_{1,м},X_{2,м},X_{3,м},T_м,\theta_м,W_м,W_{л,м},\Gamma_м).
\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнения (11) могут быть разрешены относительно любой переменной или физического параметра. В частности, для переменных θ и W имеются

$$\begin{gathered}
\theta_н=\theta_н(X_{1,н},\ldots,\Gamma_н); \\
W_н=W_н(X_{1,н},\ldots,\Gamma_н); \\
\theta_м=\theta_м(X_{1,м},\ldots,\Gamma_м); \\
W_м=W_м(X_{1,м},\ldots,\Gamma_м).
\end{gathered} \tag{14}$$

Попарные равенства безразмерных величин $\theta_н,\theta_м$ и $W_н,W_м$ для модельной и натурной систем справедливы при любых значениях безразмерных координат и времени и являются тождественными:

$$\begin{gathered}
\theta_н=\theta_м; \\
W_н=W_м.
\end{gathered} \tag{15}$$

Изложенные положения относятся к анализу однородных по физической сущности подобных явлений. Однако они могут быть распространены и на условия подобия разнородных физических явлений, описываемых формально аналогичными уравнениями тепло- и массопереноса.

Физические явления, различные по своей природе, происходящие в геометрически подобных системах, будут подобными (аналогичными), если в геометрически сходственных точках (при равенстве безразмерных координат и характеристических размеров) в сходственные моменты времени (для равных безразмерных значений времени) при равенстве аналогичных безразмерных физических параметров (соответствующих характеристических уравнений) будут тождественно равны значения аналогичных переменных (потенциалов переноса).

2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

При переходе от уравнений, описывающих подобные физические явления в геометрически подобных системах в абсолютной форме, к уравнениям в безразмерном виде применяются масштабные соотношения вида (4-10). Выбор масштабов не является произвольным. Соотношения между ними могут быть установлены на основе теории размерностей.

Все физические величины характеризуются размерностью, в силу чего все уравнения и формулы, устанавливающие зависимости между различными величинами, являются одновременно уравнениями связи между размерностями. При переходе к безразмерным величинам эти уравнения определяют связи между масштабами.

В теории размерностей различают понятия основных и производных, независимых и зависимых размерностей. Число основных и производных размерностей определяется общим количеством переменных N и числом уравнений связи между масштабами. Число уравнений связи на единицу меньше числа членов уравнения. Размерности, которые не могут быть взаимно получены путем любых комбинаций, называются независимыми. Все остальные размерности, которые могут быть получены как степенные комплексы из основных, называются производными (Конаков, 1959). Если размерности только отличаются одна от другой, но не удовлетворяют условию независимости, то они называются неодинаковыми. Различные физические величины с одинаковыми размерностями называются одноименными.

Фундаментальное значение в теории размерностей и теории моделирования имеет π-теорема, которая позволяет сократить общее число величин, описывающих систему. Такое сокращение достигается с помощью безразмерных комплексов и симплексов величин. Под комплексами (инвариантами) понимаются комбинации нескольких, а под симплексами – отношение двух величин. Комплексы инвариантны при преобразованиях подобия.

Общее количество комплексов и симплексов определяется π-теоремой, которая формулируется следующим образом: "Всякое уравнение, связывающее между собой N физических величин, среди которых k величин обладают независимыми размерностями, может быть преобразовано к уравнению, связывающему $N-k$ безразмерных комплексов и симплексов, составленных из этих величин" (Эйгенсон, 1949, стр.40).

При этом число критериев-комплексов равно разности между числом величин с неодинаковыми размерностями n и числом величин с независимыми размерностями k, а число критериев-симплексов – соответственно разности $N-n$.

В качестве примера преобразования дифференциальных уравнений к безразмерному виду рассмотрим систему уравнений тепло- и массопереноса для капиллярно-пористой неограниченной пластины, толщиной $2l$ $(-l \leq x \leq l)$:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a_т \nabla^2 \vartheta + \varepsilon \frac{q_0}{c_т} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}; \qquad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a_м \nabla^2 w + a_м \delta \nabla^2 \vartheta,$$

где ε – безразмерный критерий фазовых превращений жидкости в пар; $c_т$ – удельная теплоемкость; q_0 – удельная теплота испарения; ϑ – температура; w – влажность; $a_т$ – коэффициент температуропроводности; $a_м$ – коэффициент потенциалопроводности; δ – термоградиентный коэффициент.

Граничные условия тепло- и массообмена:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(-l,\tau)}{\partial x} = \alpha_т[\vartheta_c - \vartheta(-l,\tau)] + (1-\varepsilon) q_0 \alpha_м [w_c - w(-l,\tau)];$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(l,\tau)}{\partial x} = \alpha_т[\vartheta_c - \vartheta(l,\tau)] + (1-\varepsilon) q_0 \alpha_м [w_c - w(l,\tau)]; \qquad (17)$$

$$-a_м \gamma_0 \frac{\partial w(-l,\tau)}{\partial x} - a_м \gamma_0 \delta \frac{\partial \vartheta(-l,\tau)}{\partial x} = \alpha_м [w_c - w(-l,\tau)];$$

$$-a_м \gamma_0 \frac{\partial w(l,\tau)}{\partial x} - a_м \gamma_0 \delta \frac{\partial \vartheta(l,\tau)}{\partial x} = \alpha_м [w_c - w(l,\tau)],$$

где ϑ_c и w_c – температура и влажность среды; λ – коэффициент теплопроводности; $\alpha_т$ – коэффициент теплообмена; $\alpha_м$ – коэффициент массообмена; γ_0 – объемная плотность среды.

Начальные условия:

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_н; \qquad (18)$$

$$w(x,0) = w_н.$$

Применим к системе уравнений (16), граничным условиям (17) и начальным условиям (18) масштабные преобразования

$$\vartheta = \vartheta_0 \Theta; \quad a_м = a_{м,0} A_м; \quad \vartheta_н = \vartheta_{н,0} \Theta_н; \quad \tau = \tau_0 T;$$

$$\delta = \delta_0 \Delta; \quad \gamma_0 = \gamma_{0,0} \Gamma_0; \quad a_т = a_{т,0} A_т; \quad \lambda = \lambda_0 \Lambda; \quad x = l_0 X; \qquad (19)$$

$$q_0 = q_{0,0} Q_0; \quad \alpha_т = \alpha_{т,0} \mathcal{A}_т; \quad l = l_0 L; \quad w = w_0 W; \quad \alpha_м = \alpha_{м,0} \mathcal{A}_м;$$

$$w_c = w_{c,0} W_c; \quad c_т = c_{т,0} C_т; \quad \vartheta_c = \vartheta_{c,0} \Theta_c; \quad w_н = w_{н,0} W_н.$$

Общее количество величин, описывающих рассматриваемые процессы тепло- и массопереноса, равно 18. Из них, как это показано в табл. 1, неодинаковую размерность имеют одиннадцать величин, из которых пять может быть выбрано с независимой размерностью, и следующими произвольно взятыми масштабами:

$$\vartheta_0 = \vartheta_c - \vartheta_н; \quad x_0 = l_0 = l; \quad c_{т,0} = c_т, \quad \lambda_0 = \lambda, \quad \gamma_{00} = \gamma_0. \qquad (20)$$

Кроме того, масштабом величины w выберем $w_c - w_н$.

Для определения масштабов остальных шести величин с зависимыми размерностями используются уравнения связи, получаемые при преобразовании уравнений (16–17) к безразмерному виду:

$$\frac{\vartheta_c-\vartheta_н}{\tau_0}=\frac{a_{т,0}(\vartheta_c-\vartheta_н)}{l^2};\qquad \frac{(w_c-w_н)}{\tau_0}=\frac{a_{м,0}(w_c-w_н)}{l^2};$$

$$\frac{\vartheta_c-\vartheta_н}{\tau_0}=\frac{\varepsilon q_0(w_c-w_н)}{c_т\tau_0};\quad \frac{\lambda}{l_0}=\alpha_{т,0};\quad \frac{w_c-w_н}{\tau_0}=\frac{a_{м,0}\delta_0(\vartheta_c-\vartheta_н)}{l^2}; \qquad (21)$$

$$\frac{a_{м,0}\gamma_0(w_c-w_н)}{l}=\alpha_{м,0}(w_c-w_н);\quad \frac{\lambda(\vartheta_c-\vartheta_н)}{l}=(1-\varepsilon)q_{0,0}\alpha_{м,0}(w_c-w_н).$$

Масштабы величин $\vartheta_{н,0}$ и $w_{н,0}$ находятся из (20):

$$\vartheta_{н,0}=\vartheta_c-\vartheta_н;\quad w_{н,0}=w_c-w_н. \qquad (22)$$

Совместное решение системы уравнений связи между масштабами позволяет найти неизвестные масштабы

$$\tau_0=\frac{l_0}{a_{т,0}};\quad \alpha_{т,0}=\frac{\lambda}{l};\quad q_{0,0}=\frac{(\vartheta_c-\vartheta_н)c_т}{(w_c-w_н)\varepsilon};$$

$$(23)$$

$$\delta_0=\frac{w_c-w_0}{\vartheta_c-\vartheta_н};\quad a_{м,0}=a_{т,0};\quad \alpha_{м,0}=\frac{a_{м,0}\gamma_0}{l}.$$

На основе масштабных соотношений (19), (20), (22) и (23) получаем следующую систему критериев-комплексов и симплексов применительно к данной задаче:

$$\Theta=\frac{\vartheta}{\vartheta_c-\vartheta_н};\quad T=\frac{a_т\tau}{l^2}=\frac{a_т}{a_м}\,\frac{a_м\tau}{l^2};\quad A_т=1;\quad Q_0=\frac{\varepsilon q_0}{c_т}\,\frac{w_c-w_н}{\vartheta_c-\vartheta_н}; \quad (24)$$

$$W=\frac{w}{w_c-w_н};\quad C_т=1;\quad A_м=1;\quad \Delta=\frac{\delta(\vartheta_c-\vartheta_н)}{w_c-w_н};\quad \Lambda=1;\quad \mathcal{A}_т=\frac{\alpha_т l}{\lambda};$$

$$\mathcal{A}_м=\frac{\alpha_м l_0}{a_м\gamma_0};\quad \Gamma_0=1;\quad X=\frac{x}{l};\quad L=1;\quad \Theta_c=\frac{\vartheta_c}{\vartheta_c-\vartheta_н};\quad \Theta_н=\frac{\vartheta_н}{\vartheta_c-\vartheta_н};$$

$$W_c=\frac{w_c}{w_c-w_н}=1;\quad W_н=\frac{w_н}{w_c-w_н}.$$

Таблица 1

Размерности величин, входящих в уравнения (17–18)

Обозначение величин (N)	Размерность	Неодинаковая размерность (n)	Независимая размерность (k)
ϑ	град	ϑ, град	ϑ, град
τ	час	τ, час	
a	м^2/час	a, м^2/час	
x	м	x, м	x, м
q_0	ккал/кг	q_0, ккал/кг	
$c_т$	ккал/кг·град	$c_т$, ккал/кг·град	$c_т$, ккал/кг·град
w			
$a_м$	м^2/час		
δ	1/град	δ, 1/град	
λ	ккал/м·час·град	λ, ккал/м·час·град	λ, ккал/м·час·град
l	м		
$\alpha_т$	ккал/м^2·час·град	$\alpha_т$, ккал/м^2·час·град	
γ_0	кг/м^3	γ_0, кг/м^3	
$\alpha_м$	кг/м^2·час·град	$\alpha_м$, кг/м^2·час·град	
ϑ_c	град		
w_c			
$\vartheta_н$	град		
$w_н$			

Из 18 безразмерных величин шесть являются комплексами, а семь – симплексами, что находится в соответствии с π-теоремой. Действительно, согласно табл. 1, число комплексов $t_n = n - k = 11 - 5 = 6$, а число симплексов $t_s = N - n = 18 - 11 = 7$.

Дифференциальные уравнения тепло- и массопереноса (16) с граничными (17) и начальными (18) условиями в безразмерном виде запишутся так:

$$\frac{\partial\theta(X,Fo_{\text{т}})}{\partial Fo_{\text{т}}} = \frac{\partial^2\theta(X,Fo_{\text{т}})}{\partial x^2} - \varepsilon Ko\,Lu\,\frac{\partial W(X,Fo_{\text{м}})}{\partial Fo_{\text{м}}} =$$

$$= \frac{\partial^2\theta(X,Fo_{\text{т}})}{\partial x^2} - \varepsilon Ko\,\frac{\partial W(X,Fo_{\text{т}})}{\partial Fo_{\text{т}}}; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial W(X,Fo_{\text{т}})}{\partial Fo_{\text{т}}} = Lu\,\frac{\partial^2 W(X,Fo_{\text{т}})}{\partial x^2} - Pn\,Lu\,\frac{\partial^2\theta(X,Fo_{\text{т}})}{\partial x^2},$$

где $Ko = \dfrac{[w_{\text{н}} - w_{\text{c}}]\,q_0}{c_{\text{т}}[\vartheta_{\text{c}} - \vartheta_{\text{н}}]}$ – критерий Коссовича;

$Lu = \dfrac{a_{\text{м}}}{a_{\text{т}}}$ – критерий Лыкова;

$Pn = \dfrac{\delta\,[\vartheta_{\text{c}} - \vartheta_{\text{н}}]}{w_{\text{н}} - w_{\text{c}}}$ – критерий Поснова;

$Bi_{\text{т}} = \dfrac{\alpha_{\text{т}}\,l}{\lambda}$ – критерий Био, теплообменный;

$Bi_{\text{м}} = \dfrac{\alpha_{\text{м}}\,l}{a_{\text{м}}\gamma_0}$ – критерий Био, массообменный;

При $X = \pm 1$

$$\frac{\partial\theta(-1,Fo_{\text{т}})}{\partial x} + Bi_{\text{т}}\left[\theta_c - \theta(-1,Fo_{\text{т}})\right] - (1-\varepsilon)\,Ko\,Lu\left[1-\theta(-1,Fo_{\text{т}})\right] = 0;$$

$$\frac{\partial\theta(1,Fo_{\text{т}})}{\partial x} + Bi_{\text{т}}\left[\theta_c - \theta(1,Fo_{\text{т}})\right] - (1-\varepsilon)\,Ko\,Lu\left[1-\theta(1,Fo_{\text{т}})\right] = 0; \qquad (26)$$

$$\frac{\partial W(-1,Fo_{\text{т}})}{\partial X} - Pn\,\frac{\partial\theta(-1,Fo_{\text{т}})}{\partial X} = Bi_{\text{м}}\left[1 - W(-1,Fo_{\text{т}})\right];$$

$$\frac{\partial W(1,Fo_{\text{т}})}{\partial X} - Pn\,\frac{\partial\theta(1,Fo_{\text{т}})}{\partial X} = Bi_{\text{м}}\left[1 - W(1,Fo_{\text{т}})\right].$$

При $Fo_{\text{т}} = 0$

$$\theta(X,0) = 0;$$
$$W(X,0) = 0. \qquad (27)$$

3. УСЛОВИЯ И ПРАВИЛА МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

На основе ранее изложенных основных положений теории размерностей и теории подобия физических процессов сформулируем основные условия и правила моделирования.

Необходимые и достаточные условия моделирования физических процессов определяются прямой и обратной теоремами подобия.

Прямая теорема определяет необходимые условия подобия множества явлений и формулируется следующим образом: "Если качественно различные явления разнородно подобны, то искомые относительные величины явлений удовлетворяют тождественно замкнутым системам уравнений, написанным в относительной форме" (Конаков, 1959, стр.101–102). Тождественная замкнутость систем предопределяет единственность значений всех входящих в нее переменных в относительной (безразмерной) форме.

Обратная теорема подобия впервые сформулированная В.Л.Кирпичевым, характеризует достаточные условия подобия. Она утверждает, что если указанные в первой теореме относительные величины удовлетворяют тождественно замкнутым системам уравнений, то соответствующие явления разнородно подобны.

Третьей теоремой подобия является уже рассмотренная π–теорема.

Моделирование исследуемого физического явления сводится к воспроизведению его на модели таким образом, чтобы поля всех соответствующих физических переменных сохранялись подобными. Переход к безразмерным величинам, параметрам, граничным и начальным условиям позволяет распространить результаты моделирования единичного явления на целую группу подобных явлений.

Основные правила моделирования физических явлений были сформулированы Л.С.Эйгенсоном (1952) и сводятся к следующим положениям.

1. Натурный объект и модель должны отвечать условиям геометрического подобия. Под натурным объектом понимаются как природные среды, так и инженерные сооружения и устройства.

2. Дифференциальные и иные уравнения, описывающие процессы тепло- и массопереноса в натурном объекте и модели, являются тождественными для всего интервала изменения параметров и переменных. Физические явления в натурном объекте и модели могут быть как однородными по своей сущности – физическое подобие, так и разнородными, относящимися к различным классам (аналогия) – разнородное подобие.

3. Краевые (граничные и начальные) условия тепло- и массообмена в натурном объекте и модели, выраженные в безразмерной форме, тождественны.

4. Одноименные или аналогичные безразмерные параметры в дифференциальных уравнениях для натурного объекта и модели должны быть равны. В более общем случае должны быть равны безразмерные характеристические уравнения, отражающие зависимость одноименных или аналогичных параметров от безразмерных координат, времени, потенциалов тепло- и массопереноса.

2 911

При задинии краевых условий тепло- и массообмена на модели необходимо учитывать, что они могут быть управляемыми и неуправляемыми. К управляемым относятся такие условия, которые могут быть воспроизведены на модели. Граничные условия, происходящие внутри моделируемой системы между отдельными ее зонами, на границе двух или извести по механико-конструктивным причинам или из-за трудностей определения закономерностей тепло- и массообмена, называются неуправляемыми.

Область задания исследуемого явления должна обеспечивать воспроизведение на модели управляемых граничных условий тепло- и массообмена.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математическое моделирование процессов тепло- и массообмена основано на общей теории подобия разнородных физических явлений, описываемых формально тождественными уравнениями.

Для подобного рода явлений, называемых аналогичными, протекающих в геометрически подобных системах при равенстве аналогичных безразмерных параметров и тождественности безразмерных краевых условий, аналогичные безразмерные переменные равны между собой в сходственные моменты времени и в сходственных точках.

Аналогичные параметры и переменные (потенциалы переноса) определяются на основе анализа дифференциальных и других уравнений, описывающих аналогичные процессы.

При моделировании термодинамических процессов в горных породах могут быть использованы следующие виды аналогии:

а) процессы переноса тепла и вещества в горных породах и перенос электрической энергии в электрических системах – электротепловая или тепломассоэлектрическая аналогия (ТМЭА);

б) тепловые и массообменные процессы в дисперсных средах и гидродинамические процессы в гидравлических моделях – тепломассогидродинамическая аналогия (ТМГА);

в) термодинамические и аэродинамические процессы – тепломассоаэродинамическая аналогия (ТМАА);

г) тепловые и механические процессы – тепломеханическая аналогия, частным видом которой является тепломембранная аналогия (ТМА);

д) процессы конвективного тепло- и массообмена в жидких и газовых средах и процессы диффузии в движущейся жидкости – теплоконвективнодиффузионная аналогия (ТКДА).

Математическое моделирование имеет ряд преимуществ перед физическим: высокую оперативность, универсальность модели, сравнительную простоту набора элементов модели и простоту измерительного процесса. Однако в тех случаях, когда полное математическое описание исследуемого процесса еще не получено или не найден аналог известной математической модели, физическое моделирование остается единственным методом исследования.

2. ТЕПЛОМАССОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методы электрического моделирования физических процессов получили наибольшее распространение в силу исключительной их универсальности, оперативности и непрерывного роста парка моделирующих машин.

Моделирование физических и в том числе теплофизических процессов осуществляется на машинах дискретного и непрерывного действия. Машины дискретного действия, которые в настоящее время являются быстродействующими электронно-цифровыми вычислительными машинами (ЭЦВМ), предназначены для решения уравнений тепло- и массопереноса с помощью запрограмированной последовательности логических и арифметических операций.

Машины непрерывного действия предназначены либо для получения численных решений, необходимых для управления исполнительными механизмами, либо для изучения полей физических величин. Для решения задач первого рода применяются структурные модели, а второго – модели-аналоги.

Аналоговые моделирующие вычислительные машины построены на соответствии элементов физической системы и элементов электрической модели. При этом входные и выходные данные характеризуют непосредственно аналогичные величины, а параметры модели соответствуют аналогичным параметрам натурного объекта.

Аналогия между процессами переноса тепла или вещества в горных породах и электричества в модельных системах основывается на формальной идентичности соответствующих уравнений переноса. Так, при отсутствии источников и стоков тепла эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial\varphi_э}{\partial\tau_э} = \frac{1}{r_э C_э}\nabla^2\varphi_e;$$

$$\frac{\partial\theta_м}{\partial\tau_м} = \frac{1}{r_м c_м \gamma_0}\nabla^2\theta_м; \qquad (28)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_т} = \frac{1}{r_т c_т \gamma_0}\nabla^2\vartheta.$$

Значения аналогичных переменных величин и параметров, входящих в (28), охарактеризованы в табл.2, составленной А.В.Лыковым (Лыков, Михайлов, 1963) и несколько видоизмененной.

Принимая во внимание, что при установившемся режиме имеют место соотношения

$$\frac{Q_э}{\tau_э} = j_э, \quad \frac{Q_м}{\tau_м} = j_м, \quad \frac{Q_т}{\tau_т} = j_т, \qquad (29)$$

и сравнивая аналогичные безразмерные соотношения для зарядов и плотностей тока в табл.2, находим следующие критерии:

$$K_{э,1} = \frac{j_{э,0}\tau_{э,0}}{C_{э,0}\varphi_{э,0}} = idem; \qquad K_{э,2} = \frac{r_{э,0} j_{э,0}}{\varphi_{э,0}} = idem;$$

$$K_{м,1} = \frac{j_{м,0}\tau_{м,0}}{c_{м,0}\gamma_{0,0}\theta_{м,0}} = idem; \qquad K_{м,2} = \frac{r_{м,0} j_{м,0}}{\theta_{м,0}} = idem; \qquad (30)$$

$$K_{т,1} = \frac{j_{т,0}\tau_{т,0}}{c_{т,0}\gamma_{0,0}\vartheta_0} = idem; \qquad K_{т,2} = \frac{r_{т,0} j_{т,0}}{\vartheta_0} = idem.$$

Таблица 2

Аналогичные параметры и величины тепловых, массообменных и электрических процессов

Показатели, характеризующие процесс	Процесс переноса (тип)		
	электрический	массообменный	тепловой
Потенциал	φ, в	$\theta_м$, °М	ϑ, °С
Движущая сила	$\nabla\varphi$, в/м	$\nabla\theta_м$, °М/м	$\nabla\vartheta_м$, °С/м
Заряд	Электрический $Q_э = C_э\varphi$, к	Количество молей диффундирующего компонента $Q_м = c_м\gamma_0\theta_м$, кг(моль)	Величина энтальпии (количество тепла) $Q_т = c_т\gamma_0\vartheta$, ккал
Коэффициент проводимости	Электропроводность $\lambda_э$, $\frac{к}{м\cdot час\cdot в}$	Массопроводность $\lambda_м$, $\frac{кг(моль)}{м\cdot час\cdot °М}$	Теплопроводность λ, $\frac{ккал}{м\cdot час\cdot град}$
Сопротивление	Электрическое $r_э = \frac{1}{\lambda_э}\frac{l}{S}$, ом	Переносу вещества $r_m = \frac{1}{\lambda_m}\frac{l}{S}$, $\frac{°М\cdot час}{кг(моль)}$	Термическое $r_т = \frac{1}{\lambda}\frac{l}{S}$, град·час/ккал
Плотность тока	$j_э = \frac{\Delta\varphi}{r_э}$, а	$j_m = \frac{\Delta\theta_м}{r_м}$, $\frac{кг(или\ моль)}{ч}$	$j_т = \frac{\Delta\vartheta}{r_т}$, ккал/час
Емкость	Электрическая $C_э$, Ф	Массоемкость $C_м$, кг(или моль)/°М	Теплоемкость $C_т$, ккал/град

Из условий аналогии электрических, массообменных и тепловых процессов следуют равенства пар, аналогичных критериев (30):

$$K_{э,1} = K_{м,1}\,,$$
$$K_{э,2} = K_{м,2}\,.$$
$$K_{э,1} = K_{т,1}\,,$$
$$K_{э,2} = K_{т,2}\,. \qquad (31)$$

Из равенств (31) вытекают соотношения между масштабами времени аналогичных процессов при электрическом моделировании массообменных процессов

$$\frac{\tau_{э,0}}{\tau_{м,0}} = \frac{R_{э,0}C_{э,0}}{R_{м,0}C\gamma_{м,0}} \qquad (32)$$

и тепловых процессов

$$\frac{\tau_{э,0}}{\tau_{т,0}} = \frac{r_{э,0}C_{э,0}}{r_{т,0}C\gamma_{т,0}} \qquad (33)$$

где

$$C\gamma_{м,0} = c_{м,0}\gamma_{0,0}\,;$$
$$C\gamma_{т,0} = c_{т,0}\gamma_{0,0}\,.$$

Соотношения (32) и (33) могут быть получены также при приведении дифференциальных уравнений переноса (28) к безразмерному виду.

Кроме рассмотренной в табл.2 аналогии, существуют и другие системы теплоэлектрических аналогий. Анализ этих систем составляет предмет специальных исследований.

При моделировании нестационарных тепловых процессов используется принцип сосредоточенных параметров. С этой целью исследуемая область разбивается на ряд элементарных объемов, центрам которых (узловым точкам) приписываются сосредоточенные значения их физических параметров: сопротивлений, емкостей. При этом исследуемая область представляется в виде цепи, плоской или объемной сетки сопротивлений и емкостей.

На рис.1 представлены схематические цепи термической (а) и электрической (б) моделей участка полуограниченного стержня с боковой теплоизоляцией (Тетельбаум, 1959). Электрические потенциалы переноса, измеренные в точках 1, 2, 3, соответствуют аналогичным значениям температуры в узловых точках термической модели.

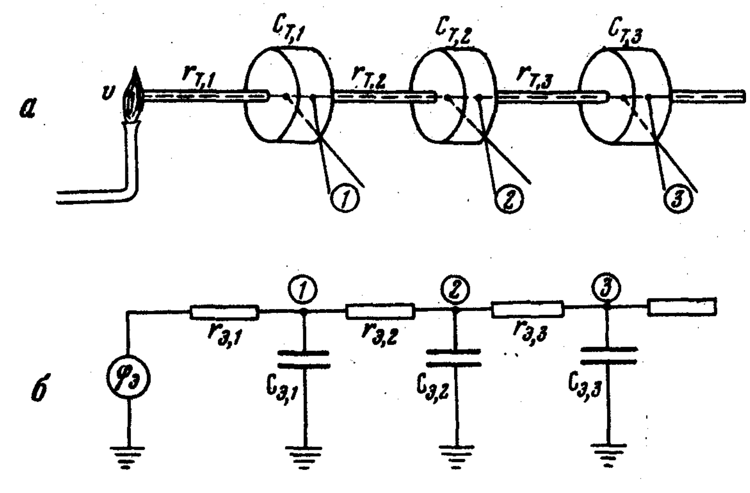


Рис.1. Термическая (а) и электрическая (б) модели тела с сосредоточенными параметрами

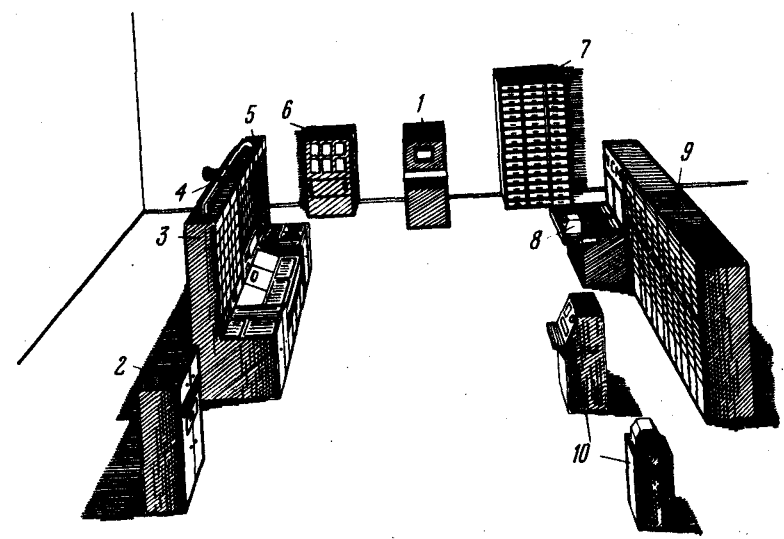


Рис.2. Блок-схема аналоговой универсальной сеточной машины УСМ-1
1 – индикатор; 2 – блок задания начальных условий; 3, 4, 5 – стойки блока задания граничных условий; 6 – блок питания; 7 – шкаф для хранения штеккерных сопротивлений; 8 – измерительное устройство; 9 – блок сетки; 10 – автоматическое измерительное устройство

Уравнения тепло-, массо- и электропроводности, описывающие системы с сосредоточенными параметрами, преобразуются к разностному виду. Решение этих уравнений осуществляется как на специализированных моделях и электрических интеграторах, так и на универсальных сеточных машинах.

Одной из наиболее совершенных машин такого типа является универсальная сеточная машина УСМ-1, блок-схема которой показана на рис.2.

Для решения разностных уравнений тепло- и массопереноса могут быть использованы также статические электроинтеграторы СЭИ, разработанные Л.А.Вулисом и др. (1963).

Стационарные поля температуры и потенциалов переноса горных пород описываются уравнениями Лапласа. В этом случае система уравнений (28) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\nabla^2\varphi = 0; \\ &\nabla^2\theta_м = 0; \\ &\nabla^2\vartheta = 0; \\ &\nabla^2 h_г = 0; \end{aligned} \qquad (34)$$

где $h_г$ гидравлический напор в фильтрационных процессах.

В отличие от системы (28) в (34) входит дифференциальное уравнение установившейся фильтрации, которое также описывается уравнением Лапласа (Аравин, Нумеров, 1953). Электрическое моделирование стационарных полей ϑ, $\theta_м$ и $h_г$ производится как на сеточных моделях, так и методом сплошных сред.

Сеточные устройства для моделирования стационарных полей значительно проще по устройству интеграторов и машин для решения нестационарных задач. Сетки в них не содержат электрических емкостей, отсутствуют блоки для задания начальных условий, а постоянные граничные условия задаются обычными делителями напряжения. Подобие полей физических параметров (сопротивлений) в термической, массообменной и электрических дискретных моделях достигается тождественностью их отношений для сходственных узловых точек (элементов).

Широкое распространение в практике электрического моделирования стационарных полей получили интеграторы ЭИ-12 системы Л.М.Гутенмахера (рис.3). Интегратор состоит из сеточной панели для набора электрических сопротивлений, коммутационных щитков для задания граничных условий, делителя напряжений, щитка для снятия значений потенциалов в узловых точках и электронного измерительного устройства (нуль-индикатор) для определения значений электрического потенциала в узловых точках.

Наряду с сеточными моделями для электрического моделирования стационарных температурных полей применяются сплошные среды: электропроводная бумага и покрытия, электролитические ванны со слабыми растворами солей, твердые модели.

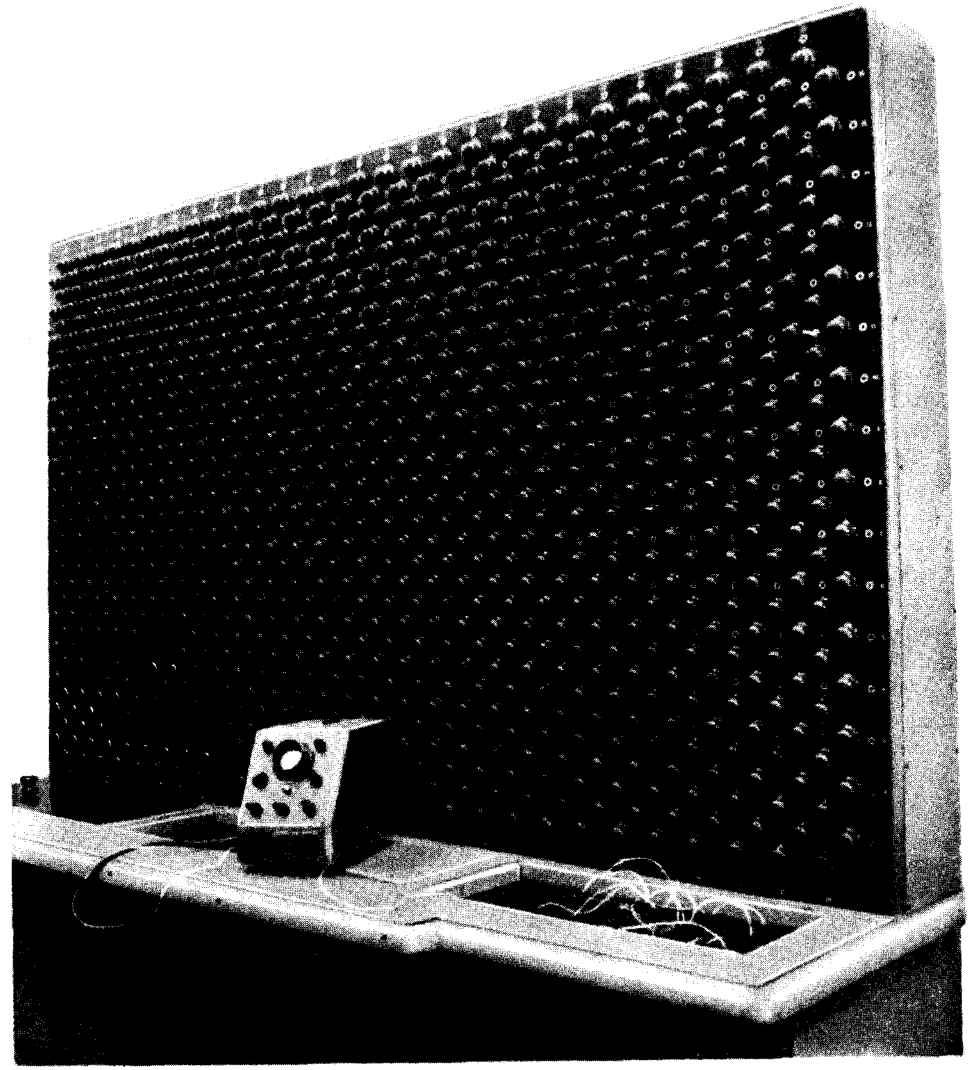


Рис.3. Общий вид электрического интегратора ЭИ-12

Метод сплошных сред обеспечивает получение решений уравнений Лапласа для полей температуры, потенциала переноса гидравлического потенциала и электрического потенциала в дифференциальной форме. Однако по сравнению с методом сеток в сплошных средах весьма затруднительно воспроизведение неоднородных по свойствам тел.

Метод электролитической ванны основан на ионной проводимости слабых растворов солей, кислот и щелочей: различных купоросов, поваренной соли, соды, поташа, едкого калия, серной кислоты. Требованиям раствора слабой концентрации удовлетворяет обычная водопроводная вода.

Электролитические ванны применяют для моделирования как плоских, так и объемных электрических полей. На рис.4 показана объемная электролитическая ванна для моделирования пространственных температурных полей. Она представляет собой прямоугольный ящик, собранный из толстого листового органического стекла, 1, электродов, моделирующих контуры тел, 2; источника переменного напряжения, делителя напряжений, нуль-индикаторного устройства собранного по компенсационной схеме, 3; измерительного зонда 4, устройства для перенесения координатных точек модели на плоскость чертежа 5 (пантографа).

Источником переменного напряжения, делителем напряжений и нуль-индикаторного измерительного устройства для электролитической ванны служат соответствующие блоки электроинтегратора ЭИ-12.

Измерение значений потенциалов исследуемого поля может осуществляться как вручную, так и полуавтоматическим или автоматическим способом (Тетельбаум, 1959).

Метод электрических покрытий и электропроводной бумаги. Для моделирования плоских стационарных полей применяются электропроводные покрытия: металлическая фольга, электропроводящие краски, лаки, электропроводная бумага.

Наиболее эффективным и перспективным оказалось применение электропроводной бумаги, получаемой добавлением в бумажную массу сажи и графита. Таким образом удается получить бумагу с удельным сопротивлением от десятков ом до десятков мегом. Варьирование электрического сопротивления бумаги при моделировании неоднородных областей достигается перфорацией и склеиванием листов.

На принципе использования электропроводной бумаги П.Ф.Фильчаков, В.И.Панчишин (1961) создали ряд простых и оперативных электроинтеграторов типа ЭГДА для электрического моделирования стационарных гидродинамических и тепловых процессов.

Устройство электроинтеграторов типа ЭГДА на электропроводной бумаге аналогично устройству электролитических моделей и плоских сеточных интеграторов. Контуры исследуемого тела на электропроводной бумаге задаются с помощью медных шин с зажимами, а также электродов из фольги, приклеиваемых электропроводящим клеем. На рис.5 показана модель электроинтегратора ЭГДА-9/60. Он смонтирован на столе, покрытом листом электроизоляционного материала. На поверхности этого листа располагается электропроводная бумага с металлическими шинами – электродами. Задание граничных условий осуществляется на основе делителей напряжения, а определение поля потенциалов, градиента потенциалов и построение эквипотенциальных линий производится с помощью измерительного зонда и нуль-индикаторного устройства.

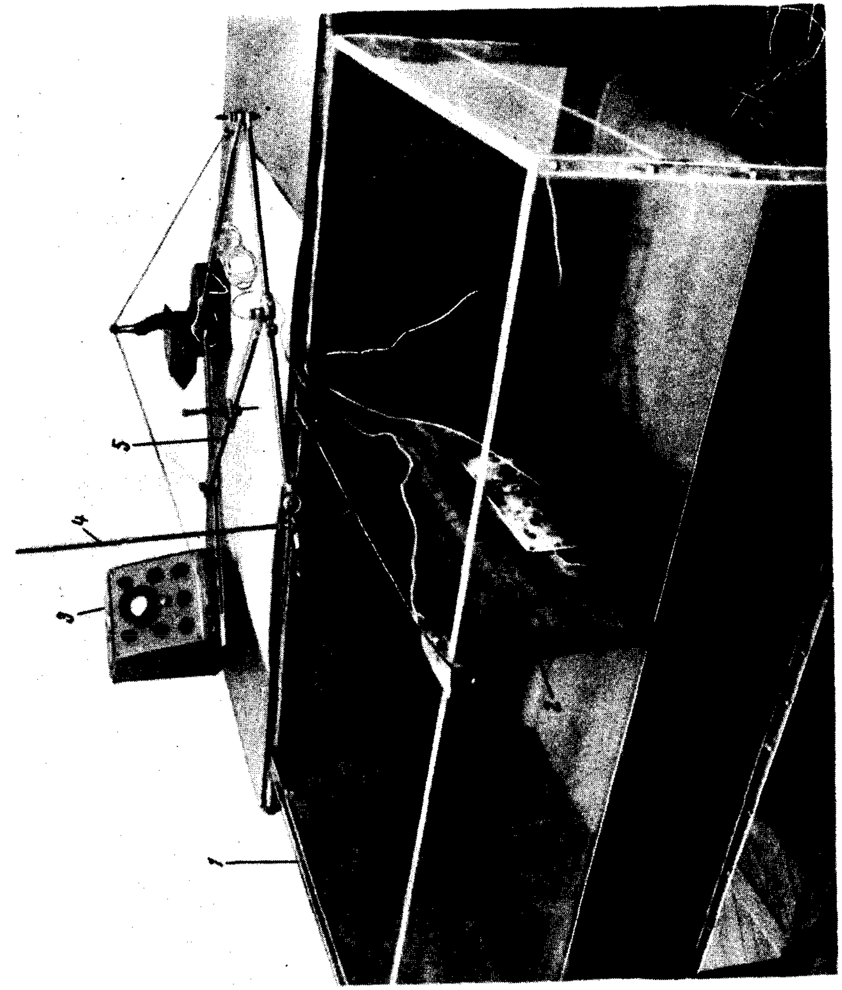


Рис.4. Электролитическая ванна с координатно-измерительным устройством

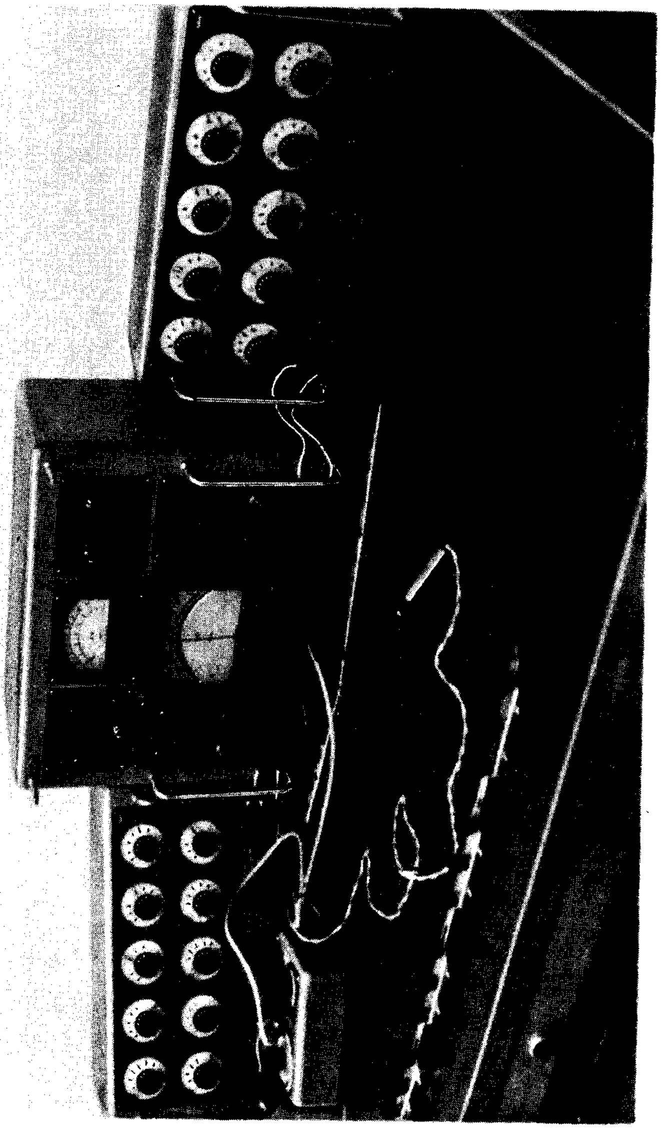


Рис.5. Электроинтегратор ЭГДА-9/60

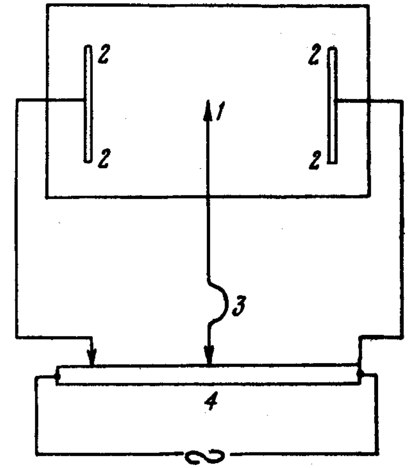


Рис.6. Схема измерения электрического потенциала методом электропроводной бумаги
1 - электропроводная бумага; 2 - электроды; 3 - измерительный зонд; 4 - делитель напряжения

Принципиальная схема измерения потенциалов для плоской системы на электропроводной бумаге приведена на рис.6.

Для моделирования пространственных полей температуры и потенциалов переноса определенный интерес представляют твердые модели из дисперсных и коллоидных материалов. В качестве таких материалов применяются смеси угольного и графитового порошка с мраморной мукой, тальком, мелким кварцевым песком, а также различные коллоиды, желатин, агар-агар в смеси с электролитами.

Даже из столь краткого анализа принципиальных возможностей и технических средств электрического моделирования тепловых и массообменных процессов следует перспективность методов ТМЭА для решения геокриологических и геотеплотехнических проблем. Следует, однако, отметить, что большинство наиболее сложных и важных проблем тепло- и массообмена в промерзающих и протаивающих горных породах не может быть решено с помощью существующих методов ТМЭА.

Только в последнее время была завершена разработка и проходит испытание вычислительного комплекса на базе электронно-цифровой вычислительной машины М-222 и аналоговой машины "Вега", на которой могут быть решены задачи о промерзании - протаивании грунтов.

3. КОМПЛЕКСНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Н.А.Фридлендером (1965) был разработан метод комплексного электрического моделирования нестанционарных процессов переноса тепла и вещества в дисперсных и пористых средах при постоянных коэффициентах переноса. Эти процессы описываются системой уравнений (17).

Электрическое моделирование взаимосвязанных процессов тепло- и массопереноса может быть осуществлено с помощью реостатно-емкостных сеток, показанных на рис. (7). Докажем идентичность соответствующих безразмерных уравнений переноса тепла, вещества и электричества для двухмерной среды (рис.7,б). Условимся сопротивления единицы длины реостатных цепей I и II обозначать $r_{э1}$ и $r_{э2}$, а емкости единицы площади - соответственно $C_{э1}$ и $C_{э2}$.

В соответствии с законом Кирхгофа сумма токов в узловой точке ячеек I и II подчиняется соотношению:

$$i_{э,1} - i_{э,2} + i_{э,3} - i_{э,4} = i_{э,5} - i_{э,6};$$
$$i_{э,9} - i_{э,10} + i_{э,7} - i_{э,8} = i_{э,6} - i_{э,11}. \qquad (35)$$

Значения величин токов, входящих в это уравнение для однородной системы, определяются следующим образом:

$$i_{э,1} = -\frac{\Delta y_{э,т}}{r_{э,1}}\,\frac{\partial\varphi_{т,1}}{\partial x_э};$$
$$i_{э,2} = -\frac{\Delta y_э}{r_{э,1}}\,\frac{\partial\varphi_{т,2}}{\partial x_э};$$
$$i_{э,3} = -\frac{\Delta x_э}{r_{э,2}}\,\frac{\partial\varphi_{т,3}}{\partial y_э};\qquad (36)$$
$$i_{э,4} = -\frac{\Delta x_э}{r_{э,2}}\,\frac{\partial\varphi_{т,3}}{\partial y_э};$$
$$i_{э,5} = c_{э,1}\,\Delta x_э\,\Delta y_э\,\frac{\partial\varphi_{т,1}}{\partial\tau_э};$$
$$i_{э,6} = c_э\,\Delta x_э\,\Delta y_э\,\frac{(\varphi_{т,2}-\varphi_{т,1})}{\partial\tau_э},$$

Принимая во внимание, что

$$i_{э,2} - i_{э,1} = -\frac{\Delta y_э}{r_{э,1}}\,\frac{\partial^2\varphi_{т,1}}{\partial x_э^2}\,\Delta x_э \qquad (37)$$

$$i_{э,4} - i_{э,3} = -\frac{\Delta x_э}{r_{э,1}}\,\frac{\partial^2\varphi_{т,2}}{\partial y^2}\,\Delta y_э,$$

и проведя аналогичные преобразования для ячейки второй сетки II, получаем после подстановки равенств (36-37) в уравнения (35) и несложных преобразований систему уравнений для определения потенциалов $\varphi_т$ и $\varphi_м$:

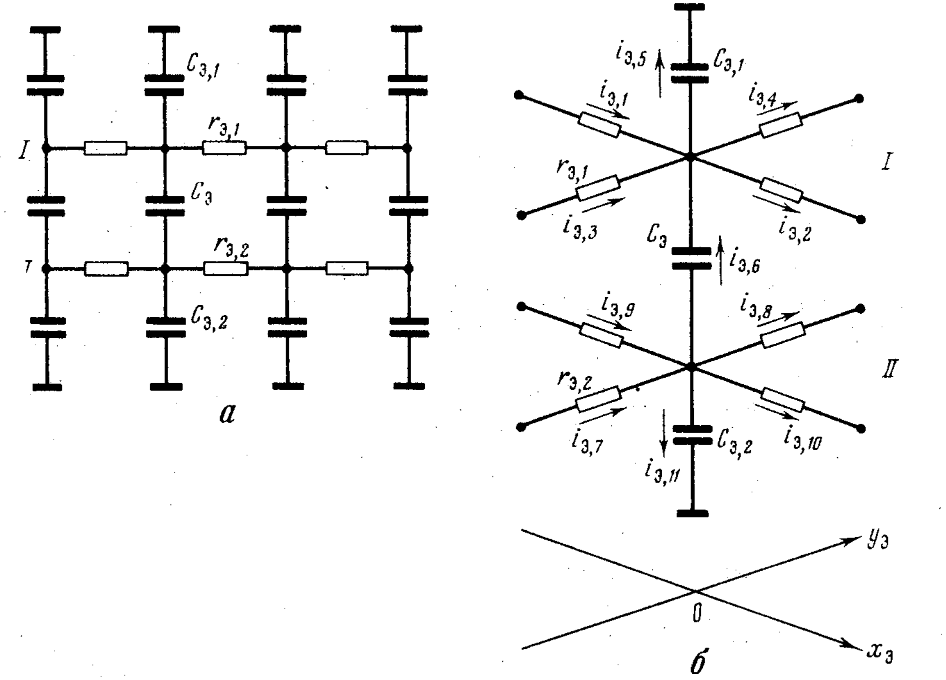


Рис.7. Электрическая схема сеток для моделирования процессов тепло- и массопереноса в одномерных (а) и двухмерных (б) средах

$$\frac{\partial\varphi_т}{\partial\tau_э} = \frac{1}{r_{э,1}(c_{э,1}+c_э)}\nabla^2\varphi_т + \frac{c_э}{c_{э,1}+c_э}\,\frac{\partial\varphi_м}{\partial\tau_э};$$

$$\frac{\partial\varphi_м}{\partial\tau_э} = \frac{c_{э,1}+c_э}{\left[(c_{э,1}+c_э)(c_{э,2}+c_э)-c_э^2\right]r_{э,2}}\nabla^2\varphi_м + \frac{c_э}{\left[(c_{э,1}+c_э)(c_{э,2}+c)-c_э^2\right]r_{э,1}}\nabla^2\varphi_т. \qquad (38)$$

Из сопоставления первых двух уравнений (17) и (38) следует, что первое из них аналогично уравнению теплопереноса, а второе – массопереноса.

Для перехода к безразмерной форме уравнений тепло- и массопереноса в дисперсной среде и переноса электричества в электрической модели введем следующие критерии:

$$Fo_{т,м} = a_т\tau_т/l_{т,0}^2;\quad Lu_{т,м} = a_м/a_т;\quad Ko_{т,м} = \varepsilon\, r_0 c_м w_0/c_т\vartheta_0;$$

$$Pn_{т,м} = \delta\vartheta_0/w_0;\quad X_{т,м} = x_т/l_{т,0};\quad Y_{т,м} = y_т/l_{т,0};\quad \Theta_м = \theta_м/\theta_{м,0};\quad \Theta_т = \vartheta/\vartheta_0;$$

$$Fo_э=\frac{\tau_э}{r_{э,1}(c_{э,1}+c_э)\,l^2_{э,0}}; \quad Ko_э=\frac{c_э}{c_{э,1}+c_э}\,\frac{\varphi_{м,0}}{\varphi_{т,0}}; \tag{39}$$

$$Lu_э=\frac{r_{э,1}(c_{э,1}+c_э)}{r_{э,2}(c_{э,2}+c_э)}\,\frac{1}{\left[1-\frac{c_э^2}{(c_{э,1}+c_э)(c_{э,2}+c_э)}\right]};$$

$$Pn_э=\frac{r_{э,2}\,c_э\,\varphi_{т,0}}{r_{э,1}(c_{э,1}+c_э)\,\varphi_{м,0}}; \quad X_э=\frac{x_э}{l_{э,0}}; \quad Y_э=\frac{y_э}{l_{э,0}}; \quad \Phi_т=\frac{\varphi_т}{\varphi_{т,0}}; \quad \Phi_м=\frac{\varphi_м}{\varphi_{м,0}}.$$

В этих соотношениях индексы О,Т,М, и Э, характеризуют масштабы величин для тепловых, массообменных и электрических процессов переноса.

Приведенные к безразмерной форме уравнения тепло- и массопереноса в уравнения, характеризующие поля потенциалов $\varphi_т$ и $\varphi_м$ в электрических сетках I и II, примут вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial Fo_{т,м}}=\nabla^2\theta+Ko_{т,м}\frac{\partial\theta}{\partial Fo_{т,м}}; \tag{40}$$

$$\frac{\partial\theta_м}{\partial Fo_{т,м}}=Lu_{т,м}\nabla^2\theta_м+Lu_{т,м}Pn_{т,м}\nabla^2\theta$$

и

$$\frac{\partial\Phi_т}{\partial Fo_э}=\nabla^2\Phi_т+Ko_э\frac{\partial\Phi_м}{\partial Fo_э}; \tag{41}$$

$$\frac{\partial\Phi_м}{\partial Fo_э}=Lu_э\nabla^2\Phi_м+Lu_эPn_э\nabla^2\Phi_т.$$

Эквивалентность соответствующих уравнений (40) и (41) достигается при равенстве соответствующих критериев-симплексов и комплексов:

$$X_{т,м}=X_э; \quad Lu_{т,м}=Lu_э;$$
$$Y_{т,м}=Y_э; \quad Ko_{т,м}=Ko_э; \tag{42}$$
$$Fo_{т,м}=Fo_э; \quad Pn_{т,м}=Pn_э.$$

При равенстве данных критериев поля величин θ и $\Phi_т$, $\theta_т$ и $\Phi_м$ будут полностью тождественными.

Данный метод получил дальнейшее развитие в работе А.М.Файнзильберга и Н.А.Фридлендера (1968) применительно к решению систем уравнений тепло- и массопереноса при различных граничных условиях и задач с разрывными условиями на контакте сред.

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА РЕОСТАТНЫХ СЕТКАХ

Метод последовательного решения систем дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса при переменных коэффициентах переноса (зависящих от координат и потенциалов переноса) был разработан Л.А.Коздоба (1963) и получил дальнейшее развитие в работе Л.А.Коздоба и В.А. Загоруйко (1966).

Рассмотрим общую систему одномерных уравнений тепло- и массопереноса при переменных коэффициентах переноса и наличии источников (стоков) тепла и вещества:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)-c_т\gamma_0\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}\left(r_0a_м\varepsilon\gamma_0\frac{\partial w}{\partial x}\right)+q_0=0; \tag{43}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_м\gamma_0\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\gamma_0\frac{\partial w}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_м\delta\gamma_0\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)+i_0=0;$$

при граничных условиях

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_п-\alpha_т(\vartheta_c-\vartheta_п)-r_0(1-\varepsilon)\alpha_м(w_п-w_c)=0; \tag{44}$$

$$\gamma_0a_м\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_п+\gamma_0a_м\delta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_п+\alpha_м(w_п-w_c)=0,$$

где $\lambda_э=\lambda+r_0a_м\delta\varepsilon\gamma_0$, q_0 и i_0-мощности источников (стоков) тепла и вещества, индексы П и С характеризуют величины, относящиеся к поверхности или среде.

Представим системы уравнений (43) и граничных условий (44) в разностном виде применительно к узловой точке: $x=mh, \tau=t\Delta\tau$, где h-шаг по координате x, $\Delta\tau$-временной шаг. Положим далее для определенности $m=0$, а $t=n$. Тогда уравнения тепло- и массопереноса примут следующую форму:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\lambda_{э,1,n}(\vartheta_{1,n}-\vartheta_{0,1})}{h}+\frac{\lambda_{э,2,n}(\vartheta_{2,n}-\vartheta_{0,n})}{h}\right]-(c\gamma_0)_{0,n}\frac{\vartheta_{0,n}-\vartheta_{0,n-1}}{\Delta\tau}+$$

$$+\frac{1}{h}\left[(r_0a_м\varepsilon\gamma_0)_{1,n}\frac{(w_{1,n}-w_{0,n})}{h}+(r_0a_м\varepsilon\gamma_0)_{2,n}\frac{(w_{2n}-w_{0,n})}{h}\right]+q_0=0; \tag{45}$$

3 911

$$\frac{1}{h}\left[(a_{\text{м}}\gamma_0)_{1,n}\frac{(w_{1,n}-w_{0,n})}{h}+(a_{\text{м}}\gamma_0)_{2,n}\frac{(\vartheta_{2,n}-\vartheta_{0,n})}{h}\right]-(\gamma_0)_{0,n}\frac{(w_{0,n}-w_{0,n-1})}{\Delta\tau}+$$

$$+\frac{1}{h}\left[(a_{\text{м}}\delta\gamma_0)_{1,n}\frac{(\vartheta_{1,n}-\vartheta_{0,n})}{h}-(a_{\text{м}}\delta\gamma_0)_{2,n}\frac{(\vartheta_{2,n}-\vartheta_{0,n})}{h}\right]+i_0=0.$$

Соответственно граничные условия запишутся в виде

$$-\lambda_{m,n}\frac{(\vartheta_{m,n}-\vartheta_{\text{п}})}{h}+\alpha_{\text{т}}(\vartheta_{\text{п}}-\vartheta_{\text{с}})-r_0(1-\varepsilon)\alpha_{\text{м}}(w_{\text{п}}-w_{\text{с}})=0\,; \qquad (46)$$

$$-(\gamma_0 a_{\text{м}})_{m,n}\frac{w_{m,n}-w_{\text{п}}}{h}-(\gamma_0 a_{\text{м}}\delta)_{m,n}\frac{\vartheta_{m,n}-\vartheta_{\text{п}}}{h}+\alpha_{\text{м}}(w_{\text{п}}-w_{\text{с}})=0.$$

Решение системы равностных уравнений тепло- и массопереноса (45) при граничных условиях (46) возможно как численными методами, так и методом моделирования на реостатных сетках. Л.А.Коздоба предложены для этой цели реостатные сетки, структура которых показана на рис.8.

Для выяснения условий моделирования и аналогичных величн и параметров напишем разностные уравнения распределения токов в узлах сеток I и II и в граничных узлах в соответствии с законом Кирхгофа.

В частности, для нулевых узловых точек реостатных сеток уравнения Кирхгофа имеют вид

$$\frac{\varphi^{\text{т}}_{1,n}-\varphi^{\text{т}}_{0,n}}{r^{\text{т}}_{\lambda_1,n}}+\frac{\varphi^{\text{т}}_{2,n}-\varphi^{\text{т}}_{0,n}}{r^{\text{т}}_{\lambda_2,n}}-\frac{\varphi^{\text{т}}_{0,n}-\varphi^{\text{т}}_{0,n-1}}{r^{\text{т}}_{\tau}}+\frac{\varphi^{\text{т}}_{m}-\varphi^{\text{т}}_{0,n}}{r^{\text{т}}_{\text{н}}}+\frac{\varphi^{\text{т}}_{m}-\varphi^{\text{т}}_{0,n}}{r^{\text{т}}_{q}}=0;$$

$$\frac{\varphi^{\text{м}}_{1,n}-\varphi^{\text{м}}_{0,n}}{r^{\text{м}}_{a\gamma_1,n}}+\frac{\varphi^{\text{м}}_{2,n}-\varphi^{\text{м}}_{0,n}}{r^{\text{м}}_{a\gamma_2,n}}-\frac{\varphi^{\text{м}}_{0,n}-\varphi^{\text{м}}_{0,n-1}}{r^{\text{м}}_{\tau}}+\frac{\varphi^{\text{м}}_{m}-\varphi^{\text{м}}_{0,n}}{r^{\text{м}}_{\text{т}}}+\frac{\varphi^{\text{м}}_{m}-\varphi^{\text{м}}_{0,n}}{r^{\text{м}}_{i}}=0. \qquad (47)$$

Граничные условия:

$$-\frac{\varphi^{\text{т}}_{m,n}-\varphi^{\text{т}}_{\text{п},n}}{r^{\text{т}}_{\lambda,n,m}}+\frac{\varphi^{\text{т}}_{\text{с}}-\varphi^{\text{т}}_{\text{п},n}}{r^{\text{т}}_{\alpha_{\text{т}},n}}-\frac{\varphi^{\text{т}}_{\text{п},n}-\varphi^{\text{т}}_{\text{с}}}{r^{\text{т}}_{\alpha_{\text{м}},n}}=0; \qquad (48)$$

$$-\frac{\varphi^{\text{м}}_{m,n}-\varphi^{\text{м}}_{\text{п},n}}{r^{\text{м}}_{a\gamma_{m,n}}}-\frac{\varphi^{\text{т}}_{m,n}-\varphi^{\text{т}}_{\text{с}}}{r^{\text{м}}_{a\gamma_m,\delta_n}}+\frac{\varphi^{\text{м}}_{\text{п},n}-\varphi^{\text{м}}_{\text{с}}}{r^{\text{м}}_{\alpha_{\text{м},n}}}=0;$$

Сопоставляя последовательно расположенные члены в соответсвующих разностных уравнениях (45) и (47) и аналогично в (46) и (48), нетрудно

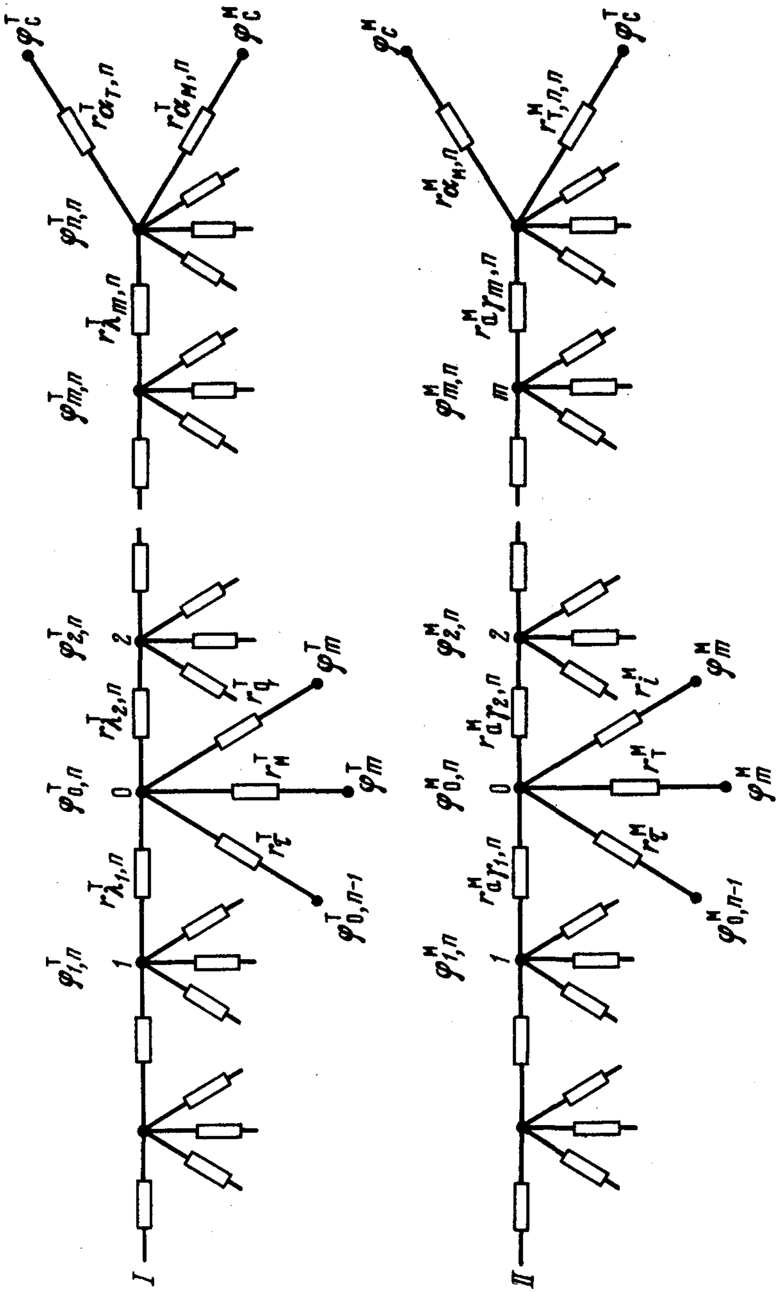


Рис.8. Реостатные цепи. Сетки омических сопротивлений для решения систем уравнений тепло- и массопереноса
I – ϑ-сетка; II – w-сетка

установить значения электрических потенциалов и сопротивлений, с помощью которых производится суммирование составляющих исходных уравнений. Индексы п и с в электрических потенциалах характеризуют, как и раньше, величины, относящиеся к поверхности или к внешней среде. Потенциалы $\varphi_m^{\text{т}}$ и $\varphi_m^{\text{м}}$–максимальные для задач с источниками тепла и вещества или минимальные для задач со стоками значения потенциалов.

Для величн, фигурирующих в (45), (46), (47) и (48), справедливы масштабные соотношения типа (19).

В данном методе эти параметры могут считаться постоянными внутри шагов пространственных координат и времени. В связи с этим положим: $\lambda_{э,0}=\lambda_э$, $c_{\text{т},0}=c_{\text{т}}$, $\gamma_{0,0}=\gamma_0$, $r_{0,0}=r_0$, $a_{\text{м},0}=a_{\text{м}}$, $q_{0,0}=q_0$, $\delta_0=\delta$, $q_{0,0}=q_0$, $i_{0,0}=i_0$, $\alpha_{\text{т},0}=\alpha_{\text{т}}$, $\alpha_{\text{м},0}=\alpha_{\text{м}}$.

Разделим величины электрических сопротивлений в уравнениях (47) и (48) соответственно на значения масштабных сопротивлений $r_0^{\text{т}}$ и $r_0^{\text{м}}$. Тогда из условий тождественности разностных уравнений тепло- и массопереноса и уравнений Кирхгофа получим выражения для сопротивлений R-сетки

$$r^{\text{т}}_{\lambda,i,n}=\frac{h}{\lambda_{э,i,n}}\,\frac{\varphi_0^{\text{т}}}{\vartheta_0}\,r_0^{\text{т}}K^{\text{т}};$$

$$r^{\text{т}}_{\tau}=\frac{\Delta\tau}{c\gamma_0 h}\,\frac{\varphi_0^{\text{т}}}{\vartheta_0}\,r_0^{\text{т}}K^{\text{т}};\qquad (49)$$

$$r^{\text{т}}_{q}=\frac{(\varphi_m^{\text{т}}-\varphi_{0,n}^{\text{т}})K^{q}}{hq_{0,n}}\,r_0^{\text{т}};$$

$$r^{\text{т}}_{\text{м}}=\frac{(\varphi_m^{\text{т}}-\varphi_{0,n}^{\text{т}})hK^{w}}{r_0\left[(a_m\varepsilon\gamma_0)_{1,n}(w_{1,n}-w_{0,n})+(a_m\varepsilon\gamma_0)_{2,n}(w_{2,n}-w_{0,n})\right]}\,r_0^{\text{т}}$$

и W-сетки

$$r^{\text{м}}_{a\gamma,i,n}=\frac{h}{(a_m\gamma_0)_{i,n}}\,\frac{\varphi_0^{\text{т}}K_n^{w}}{w_0}\,r_0^{\text{м}};$$

$$r^{\text{м}}_{\tau}=\frac{\Delta\tau}{\gamma_0 h}\,\frac{\varphi_0^{\text{т}}K^{w}}{w_0}\,r_0^{\text{м}};$$

$$r^{\text{т}}_{\text{м}}=\frac{(\varphi_m^{\text{м}}-\varphi_{0,n}^{\text{м}})hK^{\text{т}}r_0^{\text{м}}}{\left[(a_m\delta\gamma_0)_{1,n}(\vartheta_{1,n}-\vartheta_{0,n})+(a_m\delta\gamma_0)_{2,n}(\vartheta_{2,n}-\vartheta_{0,n})\right]};\qquad (50)$$

$$r^{\text{м}}_{i}=\frac{(\varphi_m^{\text{м}}-\varphi_{0,n}^{\text{м}})K^{i}}{h_{i,0}}\,r_0^{\text{м}},$$

где $K^{\text{т}}, K^{w}, K^{q}, K^{i}$ – коэффициенты размерностей (перехода от полей температуры, влагосодержания, потоков тепла и вещества к полям потенциалов).

Сопротивления, используемые для расчетов тепло- и массообмена на поверхности тела, находятся из граничных условий.

Для R-сетки

$$r^{\text{т}}_{\alpha_{\text{т}},w}=\frac{\frac{\varphi_0^{\text{т}}}{\vartheta_0}K^{q}\lambda}{\alpha_{\text{т}}\lambda_э}\,r_0^{\text{т}},$$

$$r^{\text{т}}_{\alpha_{\text{м}},n}=\frac{\frac{\varphi_0^{\text{т}}}{w_c}\lambda K^{w}r_0^{\text{т}}}{r_0(1-\varepsilon)\alpha_{\text{м}}\lambda_э}.\qquad (51)$$

Для W-сетки

$$r^{\text{м}}_{\alpha_{\text{м}}}=\frac{\frac{\varphi_0^{\text{м}}}{w_0}K^{w}}{(\alpha_{\text{м}}(\gamma_0 a_m)_{m,n}}\,r_0^{\text{м}};$$

$$r^{\text{м}}_{\text{т},\text{п},n}=\frac{\frac{\varphi_0^{\text{м}}}{\vartheta_0}hK^{w}}{\delta_{m,n}}\,r_0^{\text{м}}.$$

При соблюдении условий (50) и (51) безразмерные величины $\Phi^{\text{т}}$, $\Phi^{\text{м}}$, Θ и W будут соответственно тождественны.

5. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕТОДАМИ РЕОСТАТНЫХ СЕТОК И СПЛОШНЫХ СРЕД

Электрические модели для решения стационарных задач теплопереноса намного проще и экономичнее электроинтеграторов и сеточных машин для моделирования нестационарных тепловых процессов. Устройства для моделирования стационарных процессов легко могут быть изготовлены в любой лаборатории, а техническое обслуживание их не требует особой квалификации.

В связи с этим представляют значительный интерес методы решения нестационарных задач с помощью устройств для моделирования стационарных процессов. Рассмотрим, в частности, метод реостатных сеток Либмана (Liebmann, 1956) и метод сплошных сред (электропроводной бумаги), разработанный А.Г.Тарапоном (1966).

Метод Либмана основан на замене в разностном уравнении теплопроводности (в данном случае двухмерного)

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}=C_т r_т \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \qquad (52)$$

правой части вспомогательными потоками тепла, действующими в течение элементарного промежутка времени.

Так, для i го узла элементарной ячейки для интервала времени $\Delta\tau_m$ величина потока определится соотношением

$$\Delta i_{т,i,m}=\Delta x_i \Delta y_i C_{i,m}\frac{\Delta \vartheta_{i,m}}{\Delta \tau_m}=\Delta x_i \Delta y_i C_{i,m}\frac{\vartheta_{i,m}-\vartheta_{i,m-1}}{\Delta \tau_m}, \qquad (53)$$

где Δx_i и Δy_i – размеры сечения элементарной i-й ячейки, $C_{i,m}$ – теплоемкость ячейки, $\Delta\vartheta_{i,m}$ – приращение температуры в узле i-й ячейки в момент времени m, $\vartheta_{i,m}$ и $\vartheta_{i,m-1}$ – значения температуры в узле i-й ячейки для конца и начала m-го интервала времени.

Сопротивление источника, подключаемого к узлу i-й ячейки, равно

$$r^*_{т,i,m}=\frac{\vartheta_{i,m}-\vartheta_{i,m-1}}{i_{т,i,m}}. \qquad (54)$$

Моделирование этого процесса на электрической, чисто резисторной сетке производится следующим образом. К узлу i-й ячейки сетки (рис.9) подключается источник – делитель напряжения через сопротивление

$$r^*_{э,i,m}=\frac{\varphi_{i,m}-\varphi_{i,m-1}}{i_{э,i,m}}, \qquad (55)$$

где $\varphi_{i,m}$ и $\varphi_{i,m-1}$ – потенциалы в узловой точке i-й ячейки для конца и начала m-го интервала времени; $i_{э,i,m}=\Delta x_i \Delta y_i C_{э,i,m}\frac{\Delta\varphi_{i,m}}{\Delta\tau_m}$.

Если на делителе для данной ячейки для начала интервала времени m задается потенциал $\varphi_{i,m-1}$, то в узловой точке значение потенциала будет соответствовать концу этого интервала.

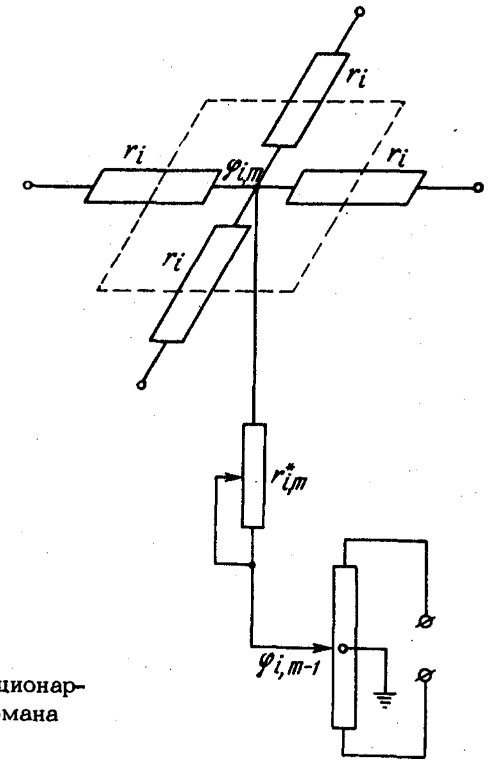


Рис.9. Моделирование нестационарного процесса по схеме Либмана

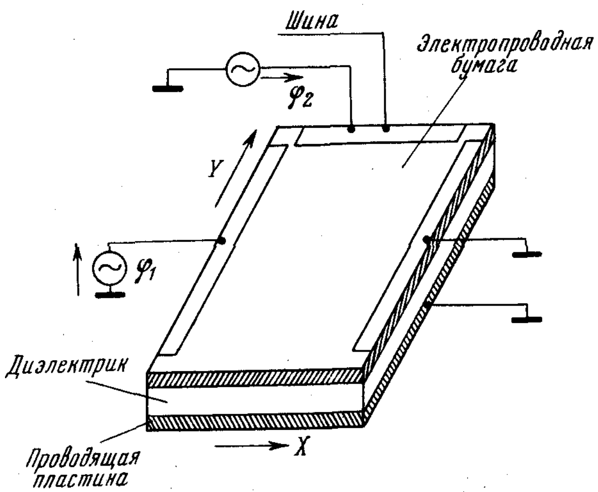
Таким образом можно произвести последовательное определение значения потенциала $\varphi_{i,m}$ (а следовательно, и температуры) для любой узловой точки. Повторяя последовательно эту операцию для всех узловых точек сетки и для всех интервалов времени, находим поле значений электрического потенциала и температуры для всей области изменения пространственных переменных и температуры.

Расчет и определение последовательных значений потенциалов поля начинается от узлов сетки, находящихся на граничном контуре, где задается изменение потенциала во времени $\varphi_{0,m}$.

Дальнейшее развитие метод Либмана получил в работах Л.А.Коздоба (1960,1964).

Оригинальный метод решения некоторого класса задач нестационарной теплопроводности с помощью электропроводной бумаги с распределенной емкостью предложил А.Г.Тарапон (1966).

Для обоснования метода рассмотрим распределение токов и напряжений в элементе электропроводной бумаги с распределенной емкостью, схема которого показана на рис.10. Элемент состоит из трех слоев: электропроводной бумаги, диэлектрической прослойки и проводящей пластины. Подача электрического потенциала на электропроводную бумагу осуществляется с помощью шин.



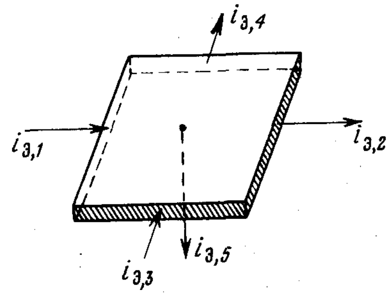


Рис.10. Схема элементарного участка электропроводной бумаги с распределенной емкостью

Распределение токов в рассматриваемом элементе описывается по закону Кирхгофа уравнением

$$i_{э,1}+i_{э,2}+i_{э,3}+i_{э,4}=i_{э,5}\ , \tag{56}$$

где $i_{э,5}$-ток через емкость, пропорциональный изменению потенциала во времени

$$i_{э,5}=C_э\Delta x\Delta y\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\ , \tag{57}$$

где Δx и Δy-размеры, а $C_э$-емкость элемента.

В соответствии с законом Ома для каждой грани элемента справедливы соотношения

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_1=-\frac{i_{э,1}r_э}{\Delta y}\ ;\quad \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_2=\frac{i_{э,2}r_э}{\Delta y}\ ; \tag{58}$$

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\right)_3=-\frac{i_{э,3}r_э}{\Delta x}\ ;\quad \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\right)_4=\frac{i_{э,4}r_э}{\Delta x}\ ,$$

где $r_э$-сопротивление квадрата пленки, размеры сторон которого равны единице длины.

Из системы (58) находим

$$\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2}=\left(i_{э,1}+i_{э,2}\right)\frac{r_э}{\Delta x\Delta y}\ ;$$

$$\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta y^2}=\left(i_{э,3}+i_{э,4}\right)\frac{r_э}{\Delta x\Delta y}\ . \tag{59}$$

Из равенств (56), (57) и (59) получаем при $\Delta x\to\Delta y\to 0$ уравнение, описывающее распределение электрических потенциалов в элементе электропроводной бумаги с распределенной емкостью

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=r_эC_э\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\ . \tag{60}$$

Найденное уравнение аналогично двухмерному уравнению теплопроводности для нестационарных процессов:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}=r_тC_т\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\ . \tag{61}$$

После приведения этих уравнений к безразмерному виду получаем следующее соотношение между масштабами тепловых и электрических величин:

$$\frac{r_{э,0}C_{0,э}l_{э,0}}{\tau_{э,0}}=\frac{r_{т,0}C_{т,0}l_{т,0}}{\tau_{т,0}}\ , \tag{62}$$

где индекс 0 характеризует масштаб соответствующей величины.

Для моделирования нестационарных тепловых процессов на основе изложенных предпосылок А.Г.Тарапоном (1966) был разработан электроинтегратор, схема макета которого приведена на рис.11. Электроинтегратор состоит из блока задания граничных и начальных условий 1, пускового устройства 2, модели из электропроводной бумаги с распределенной емкостью 3, блока установки потенциала 4, блока сравнения 5, измерителя времени 6, блока питания измерительных устройств 7, электрического зонда 8.

С помощью данного интегратора могут быть найдены: заданное значение потенциала в данной точке для искомого момента времени; точка на модели, в которой для данного значения времени потенцал достигает

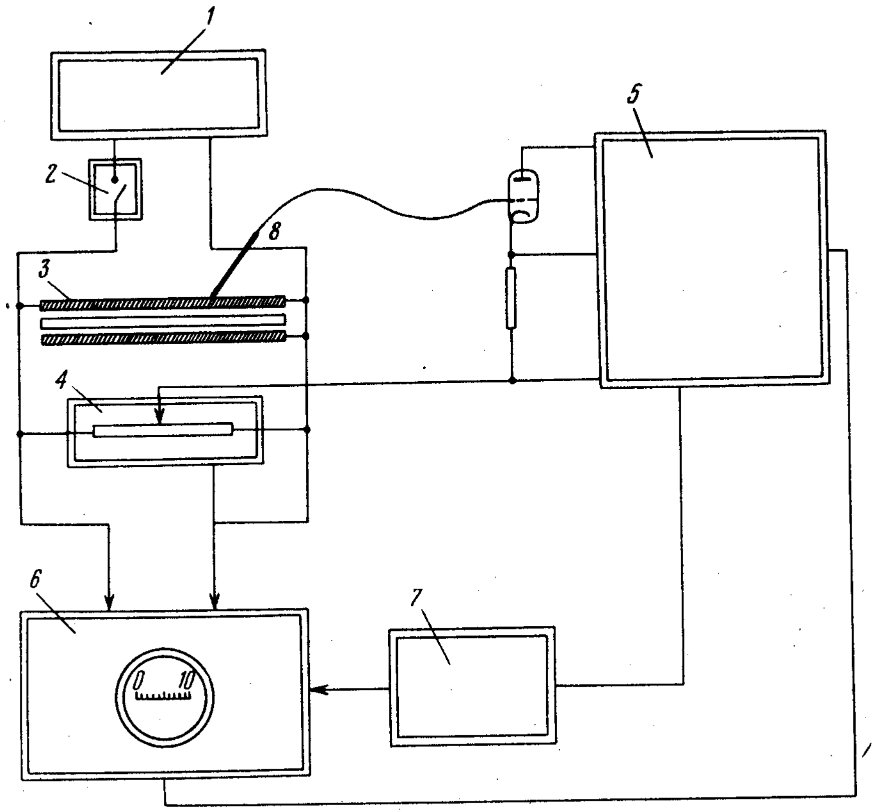


Рис.11. Схема установки для моделирования нестационарных тепловых процессов на электропроводной бумаге с распределенной емкостью

заданного значения, а также значения потенциала в заданной точке в данный момент времени.

Для решения, например, первой задачи электрический зонд устанавливается в соответствующую точку на модели, а блок установки потенциала – на заданное значение φ. Затем пускателем включается питание модели и развертка времени электроннолучевой трубки измерителя времени. В момент равенства потенциала в выбранной точке модели и заданного на блоке установки блок сравнения выдает импульс, открывающий электроннолучевую трубку измерителя времени, по шкале которого и находится искомый момент.

В качестве диэлектрической прокладки следует применять синтетические неполярные пленки из таких материалов, как полистирол, полиэтилен, политетрафторэтилен и др.

6. ТЕПЛОМАССОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Методы ТМГА для решения теплофизических проблем геокриологии основаны на идентичности уравнений тепло- и массопроводности в дисперсных и пористых средах и уравнения ламинарного движения жидкости в тонких трубах. При ламинарном режиме движения жидкости перепад напора на расстоянии l определится приближенной формулой (Лыков, 1961)

$$\Delta h = h_1 - h_2 \approx 40{,}7\frac{\eta l}{\rho d^4} = R_г \frac{\Delta V}{\Delta \tau}, \tag{63}$$

где $h_1 - h_2$ – пьезометрические уровни напора в сосудах, соединенных трубкой длиной l; η – коэффициент динамической вязкости; ρ – плотность жидкости; d – диаметр трубки; $R_г$ – гидравлическое сопротивление; V – объем жидкости.

Между нестационарными процессами переноса тепла и вещества в пластине и ламинарного движения жидкости в тонкой трубе существует аналогия соответствующих потенциалов переноса и параметров.

Введя масштабные преобразования величин, входящих в табл.3,

$$\begin{array}{lll}
h_г = h_{г,0} H_г, & \vartheta = \vartheta_0 \theta, & \theta_м = \theta_{0,м} \theta_м, \\
v = v_0 V, & q = q_0 Q, & м = м_0 M, \\
r_г = r_{г,0} R_г, & r_т = r_{т,0} R_т, & r_м = r_{м,0} R_м, \\
c_г = c_{г,0} C_г, & c_т = c_{т,0} C_т, & c_м = c_{м,0} C_м, \\
\tau_г = \tau_{г,0} T_г; & \tau_т = \tau_{т,0} T_т; & \tau_м = \tau_{м,0} T_м,
\end{array} \tag{64}$$

получаем следующие уравнения:

$$\begin{array}{ll}
J_г = \frac{h_{г,0} \tau_{г,0}}{r_{г,0} v_0} \frac{H_г T_г}{R_г}; & J_т = \frac{\vartheta_0 \tau_{т,0}}{r_{т,0} q_0} \frac{\theta T_т}{R_т}; \\
J_м = \frac{\theta_{м,0} \tau_{м,0}}{r_{м,0} M_0} \frac{\theta_м T_м}{R_м}; & \Delta V = \frac{h_{г,0} c_{г,0}}{V_0} C_г H_г; \\
\Delta Q = \frac{\vartheta_0 c_{т,0}}{q_0} C_т \theta; & \Delta M = \frac{\theta_{м,0} c_{м,0}}{M_0} C_м \theta_м.
\end{array} \tag{65}$$

По условиям аналогии рассматриваемых процессов аналогичные безразмерные величины должны быть равны. Из этого условия следуют ра-

Таблица 3

Аналогичные параметры и потенциалы переноса процессов тепло- и массообмена и капиллярного движения жидкости в трубе

Показатели, характеризующие процесс	Вид процесса		
	гидродинамический	тепловой	массообменный
Потенциал	$h_г$, см	ϑ, °C	$\theta_м$, °M
Движущая сила	$\Delta h_г$, см	$\Delta\vartheta$, °C	$\Delta\theta_м$, °M
Сопротивление	Гидравлическое сопротивление (удельное) $R_г$, мин/см²	Термическое сопротивление $R_т$, $\frac{град \cdot час}{ккал}$	Сопротивление переносу вещества $R_м$, $\frac{°M \cdot час}{кг\ (моль)}$
Емкость	Гидравлическая площадь поперечного сечения сосудов $c_г$, см²	Теплоемкость $c_{\gamma,т}$, ккал/м³·град	Массоемкость $c_{\gamma,м}$, кг(моль)/м³·°M
Обобщенный заряд	Объем воды, накопившийся в сосуде с поперечным сечением S (гидравлическая емкость $c_г$), при повышении уровня воды на величину $\Delta h_{г,1}$ $\Delta V = c_г \Delta h_{г,1}$	Количество тепла, накопленное в слое с теплоемкостью $c_т$ при повышении температуры на $\Delta\vartheta_1$ $\Delta Q = c_т \Delta\vartheta_1$	Масса вещества, аккумулированного телом с массоемкостью $c_м$, при повышении потенциала переноса на $\Delta\theta_{м,1}$ $\Delta M = c_м \Delta\theta_{м,1}$
Поток	Поток воды в слое с гидравлическим сопротивлением $r_г$ при разности уровней между поверхностями слоя $\Delta h_{г,2}$ за время $\tau_г$ $i_г = \frac{\Delta h_{г,2}}{r_г}\tau_г$	Поток тепла в слое с термическим сопротивлением $r_т$ при разности температур $\Delta\vartheta_2$ за время $\tau_т$ $i_т = \frac{\Delta\vartheta}{r_т}\tau_т$	Поток вещества в слое с сопротивлением переносу вещества $r_м$ при разности потенциалов $\Delta\theta_{м,2}$ за время $\tau_м$ $i_м = \frac{\Delta\theta_м}{r_м}\tau_м$

венства соответствующих критериальных комплексов, составленных из масштабов величин. Представим эти равенства попарно применительно к тепловым и массообменным процессам:

$$K_{г,1} = \frac{h_{г,0}\tau_{г,0}}{r_{г,0}V_0} = K_{т,1} = \frac{\vartheta_0\tau_{т,0}}{r_{т,0}q_0}, \quad K_{г,2} = \frac{h_{г,0}c_{г,0}}{V_0} = K_{т,2} = \frac{\vartheta_0 c_{т,0}}{q_0}, \tag{66}$$

и

$$K_{г,1} = K_{м,1} = \frac{\theta_{м,0}\tau_{м,0}}{r_{м,0}M_0}, \quad K_{г,2} = K_{м,2} = \frac{\theta_{м,0}c_{м,0}}{M_0}. \tag{67}$$

Сопоставление критериальных равенств в системах (66) и (67) позволяет установить соотношения между масштабами времени в гидродинамической модели и в тепловых или массообменных процессах

$$\frac{\tau_{г,0}}{\tau_{т,0}} = \frac{c_{г,0}r_{г,0}}{c_{т,0}r_{т,0}}; \quad \frac{\tau_{г,0}}{\tau_{м,0}} = \frac{c_{г,0}r_{г,0}}{c_{м,0}r_{м,0}}. \tag{68}$$

Задавшись соотношением масштабов напора $h_{г,0}$ и температуры ϑ_0 или потенциала массопереноса $\theta_{м,0}$, из равенств (66) и (67) находим и соотношения между масштабами количества тепла (вещества) и объема воды в системе:

$$\frac{q_0}{V_0} = \frac{\vartheta_0}{h_{г,0}}\frac{c_{т,0}}{c_{г,0}}; \quad \frac{M_0}{V_0} = \frac{\theta_{м,0}}{h_{г,0}}\frac{c_{м,0}}{c_{г,0}}. \tag{69}$$

Соотношение между масштабами времени в гидродинамических, тепловых и массообменных процессах может быть получено также на основе дифференциальных уравнений переноса:

$$\frac{\partial h_г}{\partial\tau} = a_г\nabla^2 h_г; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = a_т\nabla^2\vartheta; \quad \frac{\partial\theta_м}{\partial\tau} = a_м\nabla^2\theta_м, \tag{70}$$

где $a_т$ и $a_и$-коэффициенты температуропроводности и потенциалопроводности, $a_г$ – гидродинамический аналог коэффициента массопроводности $a_г = \frac{1}{R_{гу} C_{гу}}$. Индекс $у$ означает, что $R_г$ и $C_г$ являются удельными.

На основе принципа ТМГА Эмануэлем в 1928 г., затем Д.В.Будриным в 1932 г. и В.С.Лукьяновым (1937) были созданы гидравлические интеграторы для решения нестационарных задач теплопроводности. Следует подчеркнуть, что широкое практическое применение принципа теплогидродинамических аналогий и создание современных гидравлический интеграторов связано с именем проф. В.С.Лукьянова. Им были разработаны двух- и трехмерные модели интеграторов, гидродинамические устройства для моделирования процессов с учетом скрытых теплот фазовых превращений, что позволило широко применять гидравлические интеграторы в геокриологии для прогнозирования процессов промерзания и протаивания грунтов. Большинство теплофизических и теплотехнических проблем инженерной и общей геокриологии решено именно этим методом.

Блок-схема гидравлического интегратора показана на рис.12 и не требует специальных пояснений. Следует лишь отметить, что учет влияния температуры на вязкость воды в гидравлической системе осуществляется путем изменения масштаба времени на устройстве для задания граничных условий. Это достигается изменением периода колебаний часового механизма, вращающего барабан граничных условий, путем регулирования длины маятника. Для учета тепла фазовых переходов применяются как автоматические устройства – плавающие сосуды, так и обычные сосуды, подключаемые параллельно к гидравлическим емкостям для моделирования стоков и источников тепла в промерзающих и протаивающих грунтах.

Внешний вид линейной модели гидравлического интегратора показан на рис.13.

С помощью гидравлических интеграторов представляется возможным решать нелинейные уравнения теплопроводности с учетом зависимости теплофизических свойств среды от температур. Уже в первых моделях гидроинтегратора Д.В.Будрина зависимость эффективной теплоемкости сред от температуры моделировалась с помощью гидравлических емкостей с переменным поперечным сечением (Будрин, 1955)

Гидравлические интеграторы, разработанные В.С.Лукьяновым и Д.В. Будриным, предназначены для решения разностных уравнений тепло- и массопереноса и построены по принципу сеточных моделей с сосредоточенными параметрами.

Л.В.Кузьменко (1959) был разработан метод гидродинамического моделирования одномерных термодинамических процессов, основанный на принципе сплошных сред, и создан гидроинтегратор, названный им щелевым. В отличие от сеточных интеграторов здесь используется аналогия между переносом тепла в твердых телах и ламинарным движением жидкости не в тонких трубках, а в щелях. Эти щели образуются двумя вертикальными параллельными пластинами. На одну из пластин наносится слой пластичного материала (парафин и др.). С помощью струга поверхность пластического слоя выравнивается, чем достигается параллель-

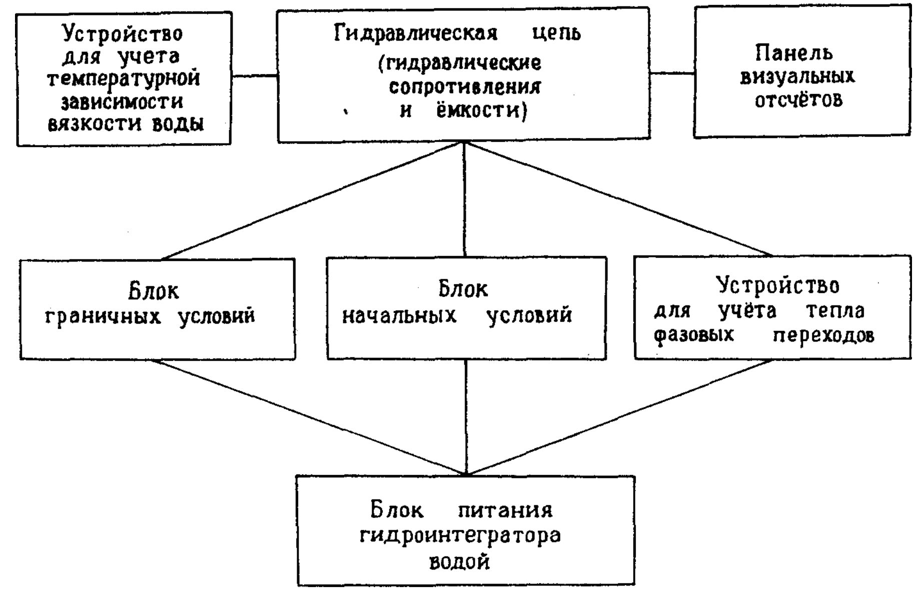


Рис.12. Блок-схема гидравлического интегратора

ность и постоянство щели между пластинами. Для моделирования слоистых сред стругом срезаются различные слои и образуются щели различной толщины.

В качестве рабочей жидкости применяется тридцатитрехпроцентный раствор винилбутилового спирта в медицинском вазелиновом масле. Вязкость раствора при комнатной температуре достигает 100 стокс, что позволяет в приемлемом масштабе времени моделировать процессы при толщине щели 5–8 мм.

Для моделирования плоских полей потенциалов переноса тепла и вещества Л.В.Кузьменко была разработана гидродинамическая модель из набора полых призм, склеенных из пластинок органического стекла (рис. 14). Такая сеточная модель описывает дискретную структуру тел с сосредоточенными параметрами. Задание граничных условий на ней осуществляется с помощью подвижных водосливов, задание же начальных условий в этой системе не предусмотрено, что ограничивает круг решаемых задач стационарными процессами.

Измерение высоты уровней жидкости в щелях производится фотографическим способом. С этой целью в полости двух соседних призм опускается устройство из жестко скрепленных между собой фотографической кассеты и миниатюрной лампы.

Существуют и другие виды гидродинамического моделирования тепловых процессов. Так, существует аналогия между распределением функций токов и потенциалов скоростей движения несжимаемой жидкости в невихревом режиме и распределением функции тепловых потоков и темпе-

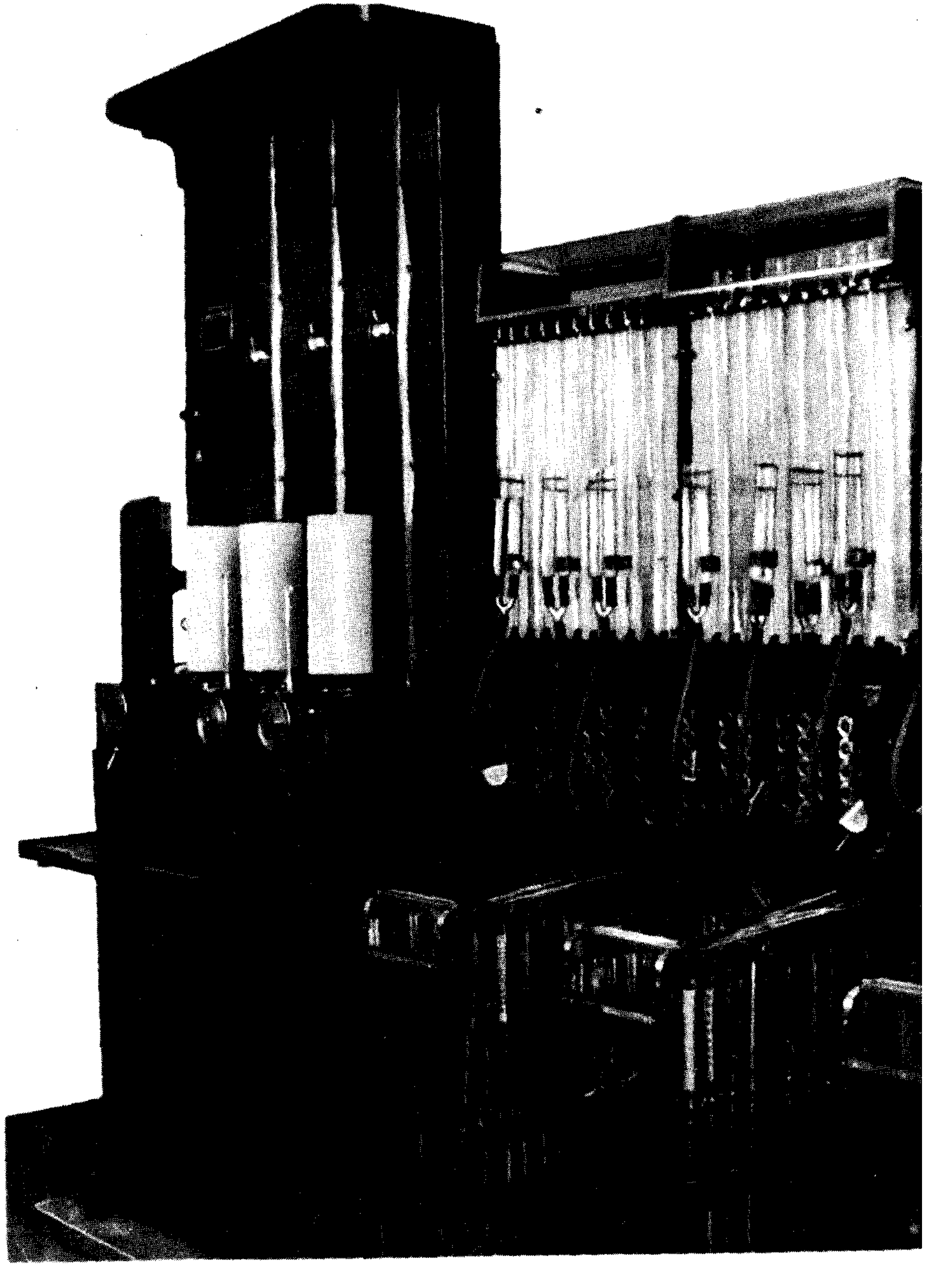


Рис.13. Общий вид модели гидравлического интегратора для решения одномерных задач

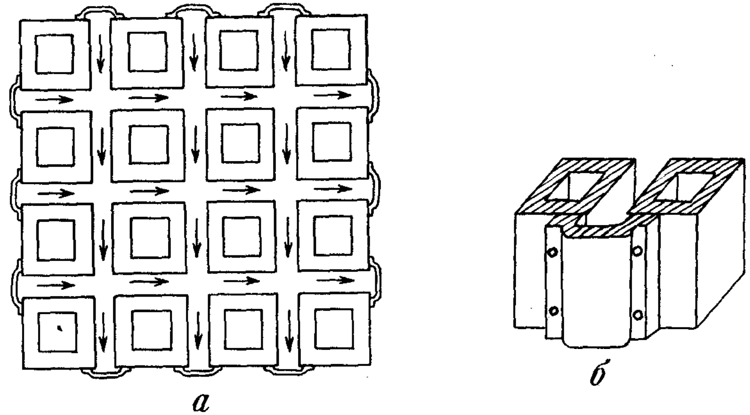


Рис.14. Схема поперечного разреза щелевого гидроинтегратора
а – система призм; б – отдельный узел

ратур в твердой среде. Поля этих величин описываются уравнениями Лапласа. Указанная аналогия, развитая впервые лордом Кельвином и примененная для электромагнитного поля Геле-Шоу (Hele – Shaw, 1904-1905), была применена к решению стационарных задач теплопроводности без источников и стоков тепла Муром (Moore, 1949). Вдальнейшем этот метод был распространен и на системы с распределенными стоками и источниками (Moore, 1950). Однако для геокриологии этот вид аналогий не представляет существенного интереса.

Теоретические предпосылки применения тепломассоаэродинамической аналогии для решения теплофизических проблем геокриологии в принципиальном отношении те же, что и для тепломассогидродинамической аналогии. В качестве заполнителя системы здесь применяются воздух или другие газы. Аналогом температуры в аэродинамических моделях является давление газа, количества тепла – количество воздуха. На принципе ТМАА М.Б.Койлом (1959) был создан аэродинамический интегратор для моделирования тепловых, а следовательно, и массообменных процессов.

Этот вид аналогии представляет несомненный интерес для моделирования тепловых и массообменных процессов в промерзающих-протаивающих грунтах. Эксплуатация аэродинамического интегратора значительно проще, чем гидравлического, упрощается и проблема полной автоматизации процесса измерения потенциалов, а также решения нелинейных задач теплопроводности.

7. ТЕПЛОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

В настоящее время не существует еще достаточно универсальных и оперативных методов механического моделирования тепловых и массообменных процессов. Для моделирования стационарных пространственных температурных полей определенный интерес представляет мембранная аналогия тепловых процессов.

Мембранная аналогия основана на идентичности дифференциальных уравнений, описывающих: а) стационарное распределение температур в полуограниченной среде с теплопроводностью λ в зоне действия плоского источника тепла с интенсивностью $q_п$, расположенного на поверхности среды и ограниченного произвольным контуром $П_к$:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y)}{\partial y^2} + \frac{q_п}{\lambda} = 0; \qquad (71)$$

б) распределение ординат (по оси Z) высот пленки (мембраны) бесконечно малого веса и сопротивления, натянутой на контур и находящейся под давлением p.

После установления равновесия между внешним давлением и силами поверхностного натяжения пленки σ распределение высот прогибов $Z(x,y)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial y^2} + \frac{p}{\sigma} = 0. \qquad (72)$$

Конфигурация пленки в плоскостях ZX и XY и действующих на нее сил показана соответственно на рис. 15,а и 15,б (Шнейдер, 1960). На рис. 15,а рассмотрено распределение сил поверхностного натяжения F_1 и F_2 и внешнего давления на элементарную площадку пленки $dx\,dy$.

После приведения уравнений (71) и (72) к безразмерному виду получаем следующее основное условие мембранного моделирования стационарного температурного поля:

$$K_т = \frac{q_{п.0}\, l_{0,т}^2}{\lambda \vartheta_0} = K_м = \frac{p_0\, l_{0,м}^2}{\sigma Z_0}, \qquad (73)$$

где индекс 0 характеризует масштабы соответствующих величин.

Из критериального уравнения (73) находим соотношение между масштабами температуры и высоты прогиба

$$\frac{\vartheta_0}{Z_0} = \left(\frac{q_{п,0}}{\lambda}\right)\left(\frac{\sigma}{p_0}\right)\left(\frac{l_{0,т}}{l_{0,м}}\right)^2. \qquad (74)$$

Для определения величины $\frac{\sigma}{p_0}$ (или $\frac{p_0}{\sigma}$) используется вспомогательная пленка, натянутая на круглый контур. При радиусе контура $r_к$ и максимальном прогибе пленки $Z = Z_{max}$ искомое отношение определяется по формуле

$$\left(\frac{p_0}{\sigma}\right) = \frac{4}{r_к^2} Z_{max}. \qquad (75)$$

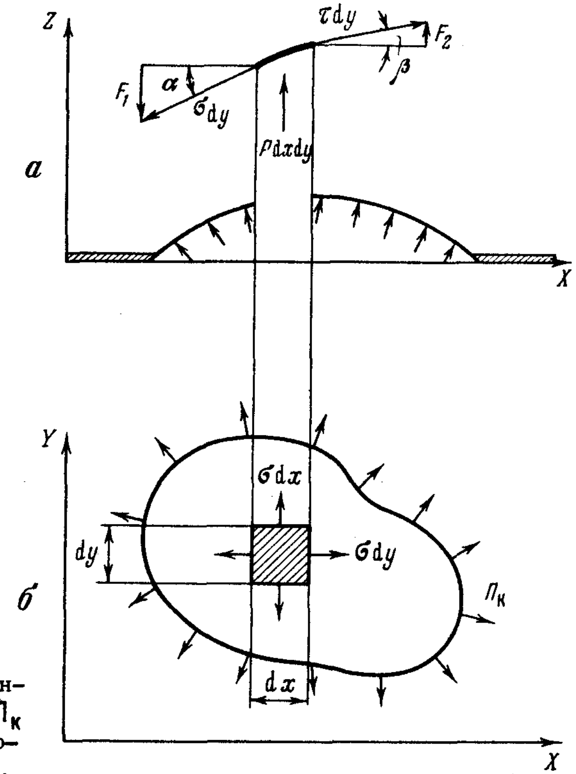


Рис.15. Конфигурация пленки, натянутой на контур $П_к$ и распределение действующих на нее сил (Шнейдер, 1960)

При $q_{п,0} = q$, $p_0 = p$, $l_{0,т} = l_{0,м}$ соотношение (74) переходит в равенство, полученное П. Шнейдером (1960).

Наибольшие методические трудности при использовании принципа мембранной аналогии связаны с получением устойчивой пленки и измерением ее высоты. Обычно применяется мыльная пленка из растворов натриевой соли, олеиновой кислоты, глицерина и дистиллированной воды. Измерение высоты прогиба пленки осуществляется вертикальным микрометром с игольчатым острием, смачиваемым мыльным раствором. Для измерения $Z(x,y)$ применяются также фотографические методы, предложенные Сале, Икеда и Муром (Шнейдер, 1960).

Пиккард и Бэсс (Piccard A., Baces L, 1926) разработали вариант метода мембранной аналогии, в котором в качестве мембраны используется граница раздела двух несмешивающихся жидкостей одинаковой плотности.

Схема прибора для создания такой поверхности раздела показана на рис.16. Прибор представляет собой камеру, в которой находится внутренний цилиндр (ВЦ) с поперечным сечением, соответствующим контуру плоского источника тепла. Камера и внутренний цилиндр заполняются несме-

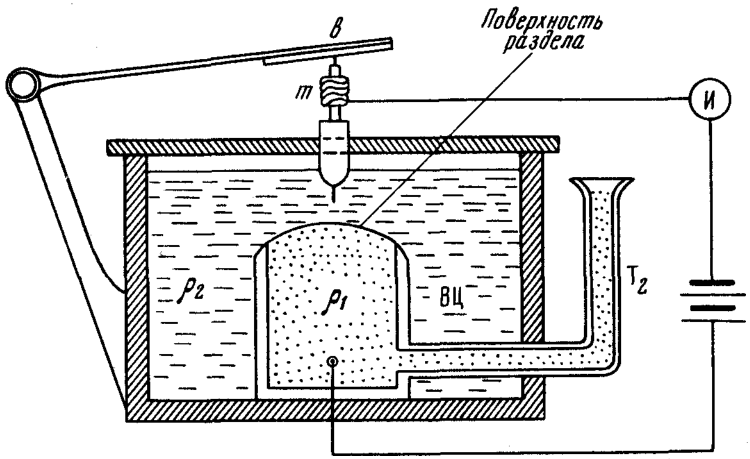


Рис.16. Схема прибора для определения границы раздела двух жидких сред (Шнейдер, 1960)

шивающимися жидкостями с одинаковыми плотностями ($\rho_1 = \rho_2$), между которыми практически отсутствует диффузия.

Если давления в камере и внутреннем сосуде одинаковы, то член $\frac{p}{\sigma}$ уравнения равен нулю и функция $Z(x,y)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа. При этом распределение $Z(x,y)$ по площади контура $\Pi_к$ будет аналогично двухмерному распределению температур в полуограниченной среде при отсутствии внутренних источников тепла. В этом случае соотношение между масштабами температуры и прогиба (выпуклости) границы раздела характеризуется уравнением

$$\frac{\vartheta_0}{Z} = \left(\frac{l_{0,т}}{l_{0,м}}\right)^2 \tag{76}$$

Для моделирования температурных полей при $p \neq 0$ (решение уравнения Пуассона) в трубку T_2 вводится некоторый объем жидкости. Отношение $\frac{p}{\sigma}$ определяется при этом по формуле (74) с помощью вспомогательного центрального сосуда с круглым поперечным сечением.

При определении величины $Z(x,y)$ поверхности раздела применяются как электрические, так и оптические методы. В первом случае жидкость, заполняющая внутренний цилиндр, должна иметь бóльшую электропроводность, чем жидкость в камере. При соприкосновении зонда m с поверхностью раздела в приборе-индикаторе И возникает световой, звуковой или электрический сигнал. Координатное положение зонда для каждого измерения отмечается накалыванием бумаги В на острие зонда m.

Метод мембранной аналогии может найти применение для нахождения

пространственных температурных полей и зон протаивания и промерзания под плоскими источниками и стоками тепла, ограниченными произвольными контурами.

8. ТЕПЛОКОНВЕКТИВНОДИФФУЗИОННАЯ АНАЛОГИЯ

Оригинальный метод моделирования процессов тепло- и массообмена при вынужденной конвекции жидкости был предложен Я.М.Рубинштейном (1938). Этот метод основан на идентичности дифференциальных уравнений, описывающих движение и теплообмен в жидкости при вынужденной конвекции и диффузию примеси в движущейся сплошной среде.

Первая группа явлений описывается системой уравнений:
движения

$$v_т \operatorname{grad} v_т = -\frac{1}{\rho_т} \operatorname{grad} p_т - \nu_т \nabla^2 v_т ;$$

сплошности

$$\operatorname{div} v_т = 0; \tag{77}$$

переноса тепла

$$v_т \operatorname{grad} \vartheta = a \nabla^2 \vartheta,$$

где $v_т$ – скорость движения; $\rho_т$ – плотность, а $\nu_т$ – кинематическая вязкость жидкости.

Система уравнений, описывающих диффузию примеси в движущейся сплошной несжимаемой среде, запишется так:

движения

$$v_д \operatorname{grad} v_д = -\frac{1}{\rho_д} \operatorname{grad} p_д + \nu_д \nabla^2 v_д ;$$

сплошности (78)

$$\operatorname{div} v_д = 0,$$

$$v_д \operatorname{grad} c = k \nabla^2 c,$$

где $v_д$ – скорость движения; $\rho_д$ – плотность; $\nu_д$ – кинематическая вязкость среды; c – концентрация примеси, k – коэффициент диффузии.

Диффузия в движущейся среде происходит в результате поглощения примеси на поверхности стенки.

К числу основных условий подобия рассматриваемых процессов относится геометрическое подобие и идентичность граничных условий тепло- и массообмена. Соблюдение второго условия сводится к тождественности распределения во входных сечениях безразмерных величин скоростей движения и температур жидкости для теплоконвективной модели и распределения скоростей движения жидкости и концентрации – для диффузионной. Кроме того, должно выполняться равенство нулю безразмерных величин температуры и концентрации на поверхности стенки (неуправляемое условие).

Задание граничных условий массообмена для диффузионной модели и процесс наблюдения за динамикой концентрации примеси в движущейся среде осуществлять значительно сложнее, чем задание граничных условий теплообмена и измерение температуры в теплоконвективной системе. В связи с этим этот вид аналогии не представляет интереса для геокриологических исследований. Более того, было бы рациональнее использовать этот вид аналогии для исследования диффузионных процессов в движущейся среде на теплоконвективной модели.

Глава Ш

ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

<u>Скальные горные породы, промерзшие льдонасыщенные горные породы</u>. Теплообмен в рассматриваемых средах описывается уравнением теплопроводности, которое в безразмерном виде для граничных условий первого рода запишется в виде (Иванов, 1969)

$$C_{\gamma T}\frac{\partial\Theta}{\partial T} = \operatorname{div}\Lambda\nabla^2\Theta;$$

$$\Theta_{нач} = F(X,Y,Z,L^1,\ldots,L^{(p)},\Theta^*); \qquad (79)$$

$$\Theta_п = \Phi(X_п,Y_п,Z_п,L^1,\ldots,L^{(p)},\Theta^*),$$

где X,Y,Z – безразмерные координаты; $L^1,\ldots,L^{(p)}$ – геометрические параметры; Θ^* – параметрическое безразмерное значение температуры, индексы нач и п характеризуют начальное и граничное условия.

Условиями физического подобия процессов теплообмена, описываемых системой (79), является геометрическое подобие, тождественность граничных и начальных условий и подобие физических свойств.

Рассмотрим условие подобия физических свойств:

$$\left[\frac{\lambda(x,y,z)}{\lambda^*}\right]_{НАТ} = \left[\frac{\lambda(x,y,z)}{\lambda^*}\right]_{МОД};$$

$$\left[\frac{C_{\gamma T}(x,y,z)}{C^*_{\gamma T}}\right]_{НАТ} = \left[\frac{C_{\gamma T}(x,y,z)}{C^*_{\gamma T}}\right]_{МОД}, \qquad (80)$$

где λ^* и $C^*_{\gamma T}$ – параметрические значения коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости.

Из этого условия следует, что при соблюдении тождественности закона изменения теплофизических свойств в натуре и на модели допускается моделирование на разнородных материалах.

Для диапазона температур, в пределах которого теплофизические свойства остаются постоянными, допускается варьирование параметрических значений температур. При этом должны выполняться условия тождественности законов изменения во времени и по координатам граничных и начальных условий.

В соответствии с π-теоремой рассматриваемые процессы описываются p +11 критериями, из которых p +10 являются симплексами, а единственным комплексным – критерий Фурье. При граничном условии 3-го рода используется критерий Нуссельта.

Тонкодисперсные горные породы. Физическое подобие процессов тепло- и массопереноса в тонкодисперсных горных породах обусловлено геометрическим подобием, тождественностью безразмерных граничных и начальных условий, а также равенствами характеристических уравнений для коэффициентов переноса (Иванов, 1969).

Из равенства характеристических уравнений следует равенство параметрических и абсолютных значений температуры и влагосодержания. Это означает, что физическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в протаявших тонкодисперсных средах возможно при идентичности теплофизических свойств и равенстве потенциалов переноса тепла и вещества.

Из анализа системы уравнений тепло- и массопереноса совместно с граничными условиями находятся тепло- и массообменные критерии, характеризующие исследуемую группу однородных явлений.

Крупноскелетные (крупнозернистые) горные породы. Основным условием физического подобия процессов тепло- и массообмена в крупноскелетных горных породах является равенство критериев Пекле (Иванов, 1969)

$$\left(\frac{V_{\phi} l_0}{a^*}\right)_{\text{нат}} = \left(\frac{V_{\phi} l_0}{a^*}\right)_{\text{мод}}, \tag{81}$$

где V_{ϕ}-скорость фильтрации; a^*-параметрическое значение коэффициента температуропроводности; l_0-геометрический масштаб.

При тождественности свойств среды в естественной и моделированной системах равенство (81) может быть представлено в виде соотношения (Богословский, 1959)

$$\frac{(V_{\phi})_{\text{нат}}}{(V_{\phi})_{\text{мод}}} = \frac{(l_0)_{\text{мод}}}{(l_0)_{\text{нат}}}. \tag{82}$$

Из этого соотношения следует, что скорость фильтрационного потока в моделирующей системе должна быть увеличена соответственно уменьшению геометрического масштаба.

Из формулы для определения скорости фильтрации

$$V_{\phi} = \frac{k_{\text{пр}}\, g}{\mu} \nabla p, \tag{83}$$

где μ-динамическая вязкость; g-постоянная земного ускорения, $k_{\text{пр}}$ – коэффициент проницаемости; следует, что управление скоростью фильтрации возможно путем изменения проницаемости горных пород, вязкости воды, движущей силы и градиента давления.

Исследованиями П.А. Богословского (1959) установлено, что при изменении скорости фильтрации от 1 до 100 м/сутки сохраняется ламинарный закон движения. Регулирование проницаемостью может осуществляться как подбором материала, так и созданием системы каналов, уменьшающих гидравлическое сопротивление.

Уменьшение вязкости воды не дает существенного эффекта, а центробежное моделирование однородного поля искусственного тяготения на сколь-либо значительных по объему образцах пока что затруднительно.

Реальным способом повышения скорости для полностью водонасыщенных сред может быть повышение давления на поверхности воды.

При моделировании процессов тепло- и массообмена в протаявших крупноскелетных горных породах должно выполняться условие равенства безразмерных коэффициентов массопроводности при свободной конвекции и соответствующих коэффициентов конвективной теплопроводности. Это равносильно условию идентичности физических свойств сред и значений потенциалов переноса в натуре и на модели.

Промерзающие тонкодисперсные горные породы, промерзшие горные породы с воздушной пористостью. Физическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в данных средах сопряжено с условиями идентичности коэффициентов переноса и равенства потенциалов переноса.

Моделирование процессов в многослойных средах при фазовых переходах на границах раздела связано с выполнением дополнительных уравнений связи между масштабами величин (Ковнер, 1943):

$$\frac{\lambda_{\text{т},0} \vartheta_{\text{т},0}}{l_0} = \frac{\lambda_{\text{м},0} \vartheta_{\text{м},0}}{l_0}, \quad \frac{\lambda_{\text{т},0} \vartheta_{\text{т},0}}{l_0} = \frac{\gamma_{0,0} w_0 q_{0,0} l_0}{\tau_0}, \tag{84}$$

где индексы т и м отнесены к талому и мерзлому слою.

При $\lambda_{\text{т},0} = \lambda_{\text{м},0} = \lambda_0$; $\vartheta_{\text{т},0} = \vartheta_{\text{м},0} = \vartheta_0$ и $\tau_0 = \frac{l_0^2}{a_0}$ находим $\frac{w_0 q_{0,0}}{c_0 \vartheta_0} = 1$. При равенстве масштабов температуры ϑ_0, влажности w_0 и удельной теплоемкости c_0 в натуре и на модели должны быть равны и масштабы величины удельной теплоты плавления $q_{0,0}$. Это равносильно идентичности физических свойств сред в данных системах.

Вместе с тем следует отметить возможность физического моделирования процессов промерзания-протаивания на разнородных средах. Эти возможности сопряжены со следующими условиями: незначительностью конвективного теплопереноса, постоянством коэффициентов переноса в талой и мерзлой зонах и независимостью их от температуры. Это необходимо для достижения равенства критериев $\Lambda_{\text{т}}, \Lambda_{\text{м}}, C_{\gamma,\text{т}}, C_{\gamma,\text{м}}$ и $Q = q_0 w_0 / c_0 \vartheta_0$.

Рассмотренные теоретические предпосылки позволяют сформулировать условия, выполнение которых необходимо для физического моделирования процессов тепло- и массопереноса в природных средах и инженерных сооружениях. Анализ таких условий для каждого конкретного случая представляет самостоятельную и сложную задачу.

Выяснение теоретических предпосылок моделирования всей совокупности процессов обмена и переноса для естественных сред было выполнено автором на примере системы приземный слой воздуха – растительный покров – сезоннопротаивающий слой – мерзлая толща (Иванов, 1965).

Результаты теоретических и экспериментальных исследований по физическому моделированию теплового режима подземного трубопровода изложены в пятой главе.

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ УСТРОЙСТВА И БЛОК-СХЕМА УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ УСТАНОВКИ

Физическое моделирование позволяет получить экспериментальное решение систем уравнений тепло- и массопроводности для любой совокупности природных и инженерных систем при заданных условиях внешнего и внутреннего тепло- и массопереноса.

Сравнительная простота аналитических принципов физического моделирования находится в явном противоречии с техническими трудностями, возникающими при воспроизведении на моделях изучаемых явлений.

Воспроизведение явлений тепло- и массообмена в мерзлых толщах земной коры и приземном слое воздуха оказалось невозможным без решения ряда сложных технических задач по программированию граничных условий тепло- и массообмена, многоканальному регулированию температуры в широком диапазоне ее изменения, по разработке комплекса средств автоматической регистрации показаний датчиков температуры, тепловых потоков, влажности и других величин. Возникшие при решении этих задач трудности оказались столь значительными, что до последнего времени сама постановка проблемы физического моделирования явлений энерго- и массообмена в промерзающих почвах и горных породах, приземном слое воздуха и взаимодействующих с ними инженерных объектах многими исследователями считалась нереальной.

Совокупность или система устройств и приборов, необходимых для осуществления физического моделирования явлений тепло- и массообмена, образует моделирующую установку. В зависимости от назначения выделяется два типа моделирующих установок.

1. Установки, предназначенные для моделирования однородных узкоспецализированных задач. Специализация задач определяется механизмом переноса тепла и вещества, внешнего тепло- и массообмена, конструкцией инженерного сооружения, технологическим режимом моделируемого процесса.

2. Универсальные моделирующие установки, позволяющие исследовать широкий круг явлений тепло- и массообмена, разнообразных как по физической природе процессов, так и по строению или конструкции моделируемых естественных объектов или инженерных сооружений.

Моделирующие установки первого типа предназначены в основном для решения инженерных задач. С помощью их могут быть решены, например, задачи по тепловому взаимодействию трубопроводов, заполненных различными теплоносителями, с мерзлыми грунтами, тепловому режиму плотин с мерзлым ядром и ледяных плотин, формированию зоны протаивания под тепловыделяющими сооружениями, тепло- и массообмену в крупноскелетных горных породах и др. Специализированные моделирующие установки не требуют многоканальных программирующих устройств для задания граничных условий теплообмена. Так, в моделирующих установках В.Г.Гольдтмана (1959) по изучению теплообмена в крупноскелетных фильтрующих грунтах, И.А.Горячевой и Г.С.Шадрина (1958) – для моделирования теплового взаимодействия водовода с протаивающим грунтом и П.А.Богословского (1959) – для изучения температурного режима фильтрующих плотин на мерзлых грунтах граничные условия задаются либо постоянными, либо изменяются по законам, не зависящим от исследователя. Например, в установках Хигаси (1955), и устройстве, разработанном С.В.Томирдиаро (1963) в Северо-Восточном комплексном научно-исследовательском институте, используемых для определения тепловых свойств горных пород по методу температурной волны, применяется программирование температур одного канала по чистому гармоническому закону. Программирование гармонического хода температуры на поверхности образца осуществляется путем изменения напряжения, подаваемого с автотрансформатора на нагревательный элемент. Из самого способа программирования температур на такой основе следует, что диапазон изменения температуры весьма ограничен, а точность его невысока. Кроме того, программирование заданного хода температуры на поверхности модели по силе тока в цепи нагревательного элемента сопряжено с трудоемкой операцией по подбору режима питания этого элемента для каждого конкретного случая.

Регистрация показаний датчиков температуры и других величин при моделировании явлений теплообмена на специализированных установках не представляет сколь-либо существенных затруднений. Для этих целей можно ограничиться эпизодическими измерениями ТЭДС термопар и электрического сопротивления электротермометров с помощью потенциометров, зеркальных гальванометров и мостов для измерения сопротивления. Если же возникает необходимость непрерывной регистрации измеряемых величин в нескольких точках, то это легко осуществимо с помощью самопишущих приборов простейшей конструкции.

Иные требования возникают к установкам, предназначенным для моделирования явлений тепло- и массообмена в сложных пространственных системах естественных сред и инженерных сооружений. Для таких систем характерно наличие большого количества элементов и участков поверхности, граничные условия тепло- и массообмена которых изменяются по независимым законам. Необходимость многоканального автоматического программирования граничных условий и составляет одну из главных особенностей моделирующих установок, удовлетворяющих рассмотренному выше требованию.

Моделирование явлений тепло- и массообмена в сложных пространственных системах требует не только многоканального программирования, но и многокальной автоматической регистрации показаний большого числа датчиков различных величин. Значительный диапазон изменения этих величин, высокая точность измерения и отсутствие удовлетворяющей этим требованиям автоматической регистрирующей аппаратуры долгое время сдерживали развитие техники физического моделирования тепловых процессов.

Установки, позволяющие воспроизводить явления переноса энергии и вещества в сложных пространственных естественных средах и тепловое взаимодействие и массообмен в инженерных объектах, могут быть названы универсальными моделирующими установками. Их универсальность заключается в возможности достаточно широкой вариации элементов и узлов установки для моделирования, включая программирование и регистрацию величин, различных по природе процессов для разнообразных по строению и форме естественных и искусственных систем.

Таким образом, между специализированными и универсальными моделирующими установками нет большой разницы, но в то же время они представляют качественно различные ступени техники моделирования явлений тепло- и массообмена.

Основными узлами универсальной моделирующей установки являются:

а) моделирующая камера, стенды и другие вспомогательные устройства, необходимые для размещения моделирующего объекта или модели инженерного сооружения;

б) аппаратура для программирования граничных условий тепло- и массообмена и задания начальных условий;

в) система датчиков термодинамических, аэро- и гидродинамических величин, характеризующих тепловой и водных режим моделируемых сред и инженерных сооружений;

г) приборы и аппаратура для измерений и записи показаний датчиков;

д) установка для создания воздушного или водного потока с заданной температурой для моделирующей камеры;

е) блок источников электропитания электронных и электромеханических узлов моделирующей установки.

Подобную структуру имеет и универсальная моделирующая установка, разработанная группой сотрудников лаборатории тепло- и массообмена и экспериментальных мастерских Института мерзлотоведения СО АН СССР в составе инженеров Ю.Н.Анненкова, С.П.Волкова, Ю.А.Тышева, радиотехников Г.П.Припузова, Н.И.Емельянова, В.Н.Дроздова под руководством автора. В работе по созданию и монтажу отдельных узлов установки принимали участие инженеры С.П.Вальков, В.С.Паршенников, В.Д.Китаев, А.А.Тышев.

Общие представления об устройстве, функциональном назначении узлов и блоков установки и основных задачах, возникающих при разработке этих узлов и всей моделирующей установки в целом, могут быть получены на основе анализа ее блок-схемы, изображенной на рис. 17. Подробное описание отдельных узлов и блоков дано в последующих разделах, поэтому здесь целесообразно ограничиться лишь общими положениями.

Универсальная моделирующая установка размещена в двух изолированных помещениях. В одном из них находятся моделирующая камера, аппаратура для программирования и регулирования температуры, усиления микротоков, электропитающие устройства. Компоновка этих устройств

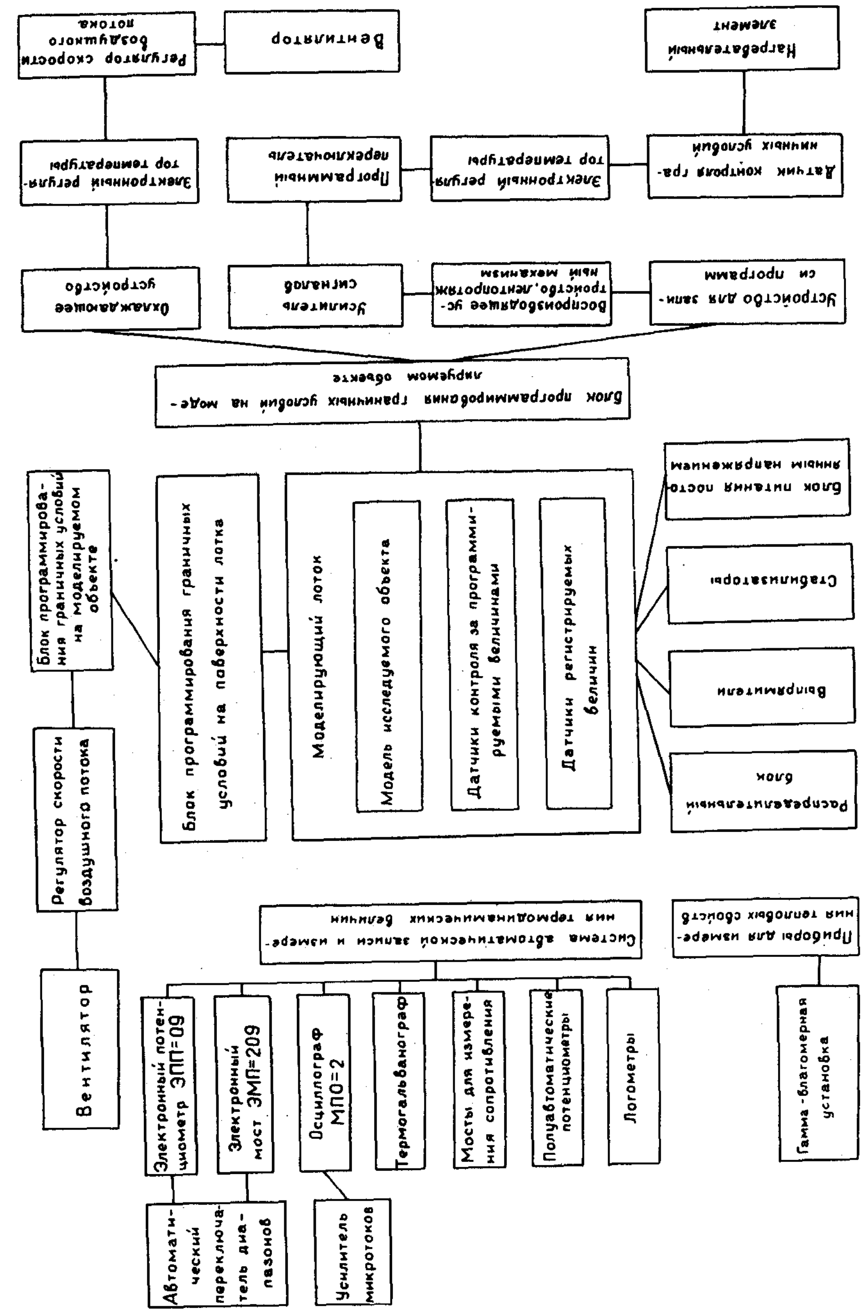


Рис.17. Блок-схема универсальной моделирующей установки

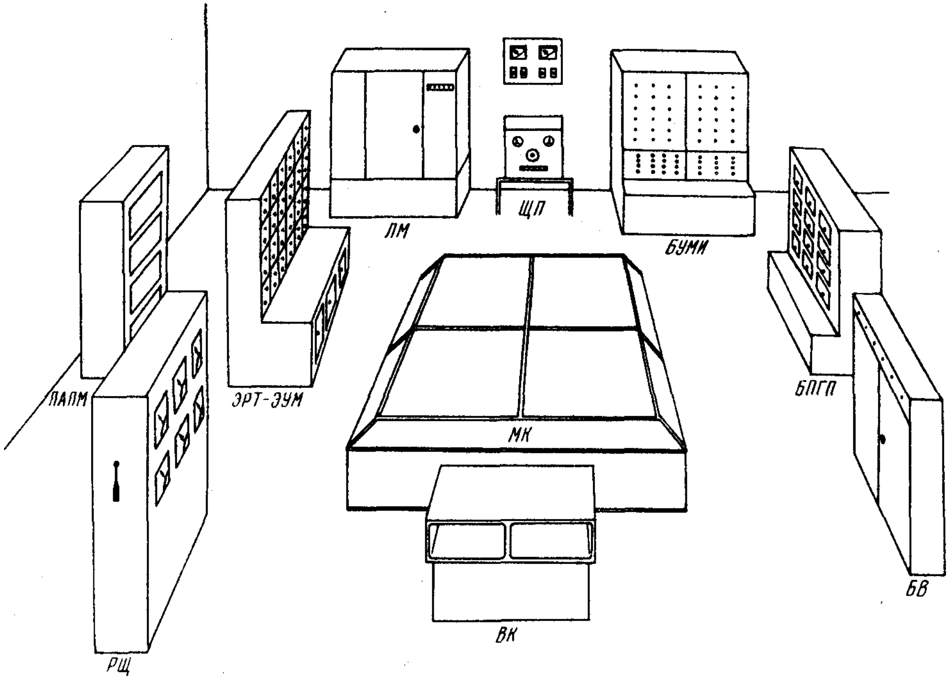


Рис.18. Блок-схема моделирующей установки (программирующая аппаратура)

ПАПМ – стройка программных автоматических переключателей магазинов сопротивлений; ЭРТ-ЭУМ – блок электронных регуляторов температуры и усилителей микротоков; ЛМ – лентопротяжный механизм; БУМИ – блок усилителей магнитных импульсов; ЩП – щит постоянного тока; МК – моделирующая камера; БПГР – блок программирования граничных условий на поверхности; РЩ – распределительный щит; БВ – блок выпрямителей; ВК – вентиляционный канал

показана на блок-схеме (рис.18). Во втором помещении расположены измерительная и регистрирующая аппаратура и электронно-механические блоки для автоматизации процессов записи показаний датчиков величин.

Моделирующая камера установки (МК, рис.19) представляет собой металлический ящик кубической формы (3х3х3 м) с двойными полыми стенками на боковой поверхности и дне и застекленным куполом. Наличие двойных стенок, а точнее, обводных каналов на боковой поверхности и двойного дна позволяет управлять граничными условиями теплообмена на стенках камеры. Управление осуществляется блоком программирования условий на поверхности камеры. В каждую линию программирования или управления этого блока входят электронный регулятор температуры ЭРС-54 и регулятор скорости воздушного потока. Из 12 каналов управления 10 предназначены для боковой поверхности, остальные – для дна и верхней поверхности лотка МК. Механизмы, управляющие заслонками

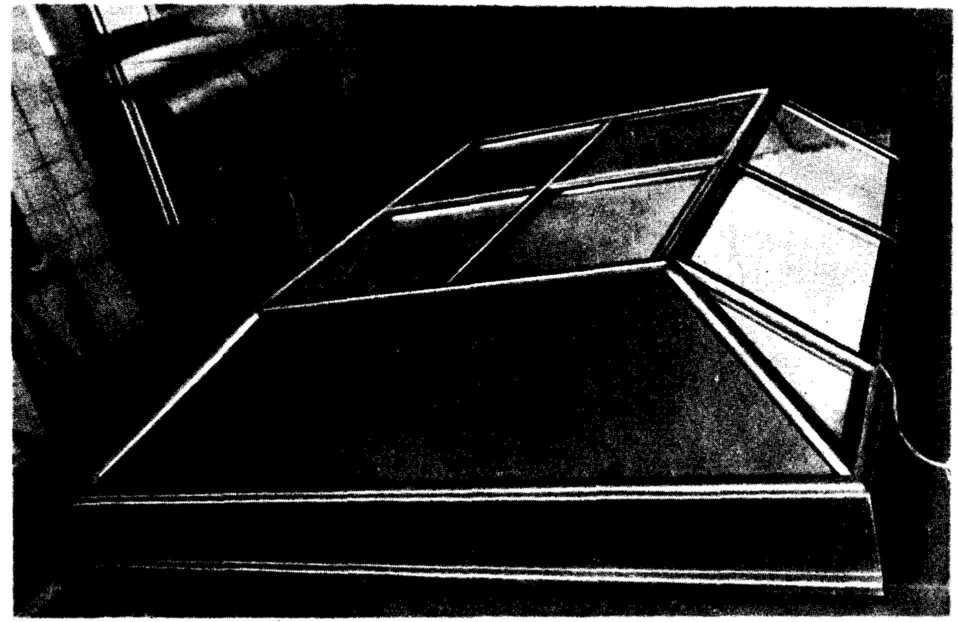


Рис.19. Внешний вид моделирующей камеры

воздушных каналов, расположены в подвальной части лаборатории моделирования.

Воздушный поток, создаваемый вентилятором ЭВР-4, поступает в двойные стенки камеры через входной канал, а затем по выходному каналу возвращается наружу. С помощью этого устройства представляется возможным задавать на всей поверхности и в первую очередь на верхней любые температурные условия, наблюдающиеся в арктических и субарктических районах страны и на поверхности моделируемых сооружений.

На поверхности моделируемой среды и внутри нее расположены датчики температуры, влажности, тепловых потоков, тепловых свойств, скоростей водных и воздушных потоков, скорости фильтрации, а также датчики контроля за программируемыми величинами граничных условий теплообмена. Внутри камеры расположены коммутационные щиты, релейные щиты и другие устройства, позволяющие осуществлять многоканальное программирование и регистрацию измеряемых величин при любом расположении структурных элементов модели.

Одним из основных блоков моделирующей установки является блок программирования граничных условий. В данной установке выбран магнитный принцип записи программы управления. Запись программ на магнитную ленту производится на специальном пульте (ПМЗ), внешний вид которого показан на рис.20.

Воспроизведение магнитной программы осуществляется с помощью

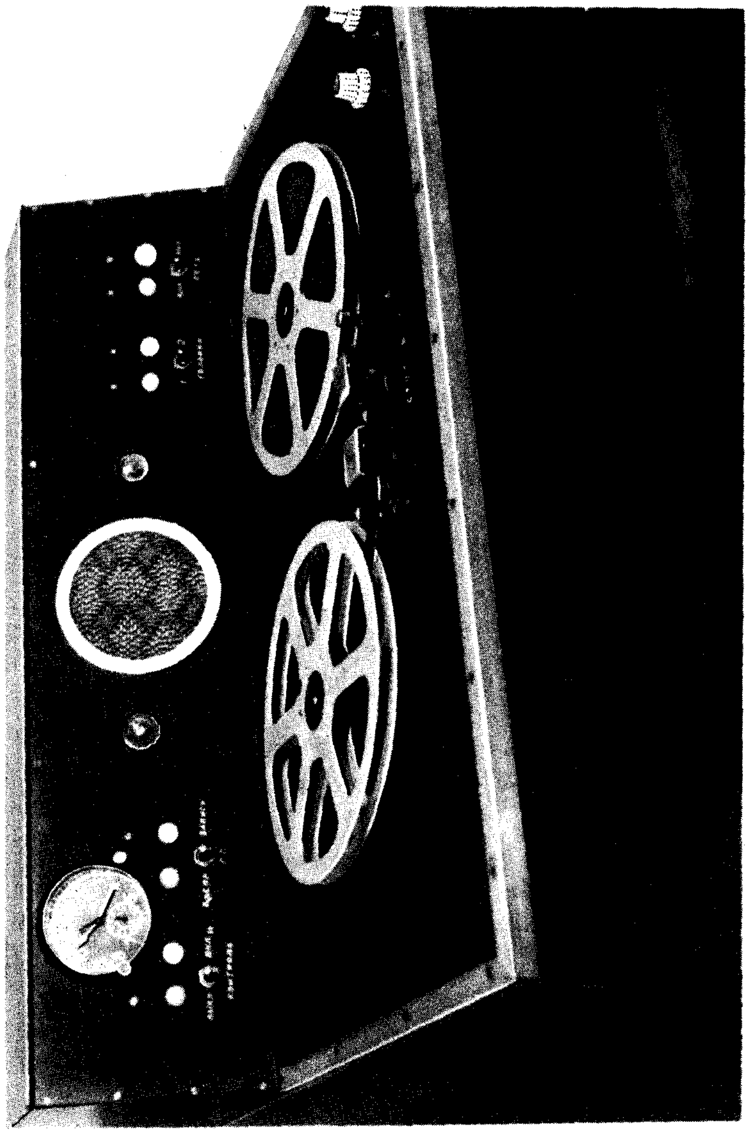


Рис.20. Внешний вид пульта магнитной записи программ граничных условий

блока лентопротяжных механизмов ЛМ, рассчитанного на 100 программирующих каналов, и блока усилителей магнитных импульсов (БУМИ) (см. рис.18). Усиленные в этом блоке импульсы магнитных сигналов поступают на реле исполнительных механизмов программных автоматических переключателей магазинов сопротивлений на 1000 положений (см. ПАМП на рис.18). Эти переключатели по заданной программе изменяют сопротивления одного из плеч мостовых схем электронных регуляторов температуры. Наличие 1000 положений переключателя позволяет регулировать температуру в диапазоне 100° с точностью $\pm 0{,}1^{\circ}$. Электронные регуляторы температуры управляют температурными условиями на поверхности модели с помощью нагревательных элементов, контроль за режимом нагревания которых осуществляется полупроводниковыми термометрами. Электронные регуляторы, общее число которых равно 100, смонтированы на стойке (см. ЭРТ, рис.18).

Регулирование температуры на поверхности или в объеме моделируемого объекта нагревательными элементами производится на фоне минимальных температур, создаваемом с помощью охлаждающего устройства. Это устройство включает в себя вентилятор, создающий поток холодного воздуха внутри моделирующей камеры. С помощью электронного регулятора температуры, управляющего скоростью воздушного потока, производится грубая регулировка температуры этого потока.

Для измерения и регистрации величин, определяющих термодинамический режим моделируемых объектов в установке, используются как стандартная измерительная и регистрирующая аппаратура, так и специально разработанные для этих целей устройства.

Для измерения температуры и тепловых потоков с помощью проволочных, полупроводниковых и термоэлектрических датчиков применяются мосты для измерения электрического сопротивления типа МТВ, МКМВ, полуавтоматические потенциометры типа Р-2, логометры. Регистрация показаний этих же датчиков осуществляется лучевыми осциллографами типа МПО-2, электронными мостами ЭМП-109 и электронными потенциометрами ЭПП-09. Для измерения влажности используются переносные и стационарные гаммавлагомерные установки.

При использовании в качестве датчиков температуры полупроводниковых, а тем более проволочных электротермометров напряжение на диагонали мостовых схем оказывается недостаточным для регистрации изменений температуры осциллографами с точностью $\pm 0{,}1^{\circ}$. Поэтому были разработаны усилители микротоков, которые размещены на одной стойке с электронными регуляторами температуры (см. ЭРТ-ЭУМ, рис.18).

При интервале изменения температуры, равном 100°, и точности $\pm 0{,}1^{\circ}$ регистрация температуры на осциллографах возможна лишь в том случае, если общий интервал изменения можно будет разбить на ряд диапазонов. В описываемой установке было выбрано 10 диапазонов по 10° в каждом. При применении мостовых схем измерения с полупроводниковыми датчиками температуры переключение диапазонов может быть достигнуто изменением сопротивления в измерительном плече схемы. Осуществляется это как вручную, так и автоматически.

При большом числе каналов регистрации невозможно обойтись без автоматизации процесса переключения диапазонов. Для этих целей было разработано устройство, которое вырабатывает электрические импульсы, управляющие автоматическим электромеханическим переключателем диапазонов. Блок таких переключателей на 10 каналов установлен на одной стойке с автоматическими программными переключателями магазинов сопротивлений (см. ПАПМ, рис.18).

Автоматические переключатели диапазонов были разработаны и для 12-канальных электронных автоматических мостов и потенциометров. Следящие элементы в этом случае устанавливались внутри самогмацев.

Для регистрации показаний термоэлектрических датчиков температуры и тепловых потоков разработан многоканальный автоматический гальванограф. Автоматический переключатель по заданной программе подключает к гальванографу датчики, общее число которых равно 75.

Таковы общие представления о структуре, функциональном назначении и взаимосвязи узлов моделирующей установки.

3. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА ОДНОГО КАНАЛА ПРОГРАММИРОВАНИЯ И АВТОМАТИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ

Основные принципы программирования и автоматической записи показаний, использованных при разработке конструкции универсальной моделирующей установки, могут быть прослежены на одном канале. Принципиальная схема канала программирования и записи показаний отражены на рис. 21.

Записанная на магнитной ленте в виде электрических сигналов программа "считывается" магнитными головками ГУ$_1$ либо ГУ$_2$ в зависимости от того, на какой из двух дорожек был записан сигнал. Рассмотрим, в частности, схему воспроизведения сигнала, записанного на 1-й дорожке. В этом случае магнитная головка ГУ$_1$ "считывает" его и сигнал напряжением в десятые доли милливольта после предварительного усиления (Л$_1$) поступает на усилитель сигналов (лампы Л$_2$, Л$_3$, Л$_4$). На выходе лампы Л$_4$ снимается напряжение 6-7 в, что вполне достаточно для срабатывания электронного реле, собранного на Л$_8$. Реле Р$_1$ срабатывает, замыкая цепь питания исполнительного реле Р$_3$. Контакты реле Р$_3$ замыкаются и подключают напряжение, равное 24 в, к электромагниту программирующего переключателя ЭМ$_1$. В результате этого сердечник с "собачкой" втягивается в катушку ЭМ$_1$; "собачка" сцепляется с шестерней переключателя, и происходит поворот шестерни программирующего переключателя на 1/50 оборота против часовой стрелки. На одной оси с шестерней переключателя укреплена контактная щетка, скользящая по ламелям магазина сопротивлений. При срабатывании ЭМ$_1$ происходит уменьшение сопротивления магазина сопротивлений переключателя на величину, соответствующую увеличению температуры на 0,1°.

Если же сигнал будет записан на 2-й дорожке, то его уже "считывает" магнитная головка ГУ$_2$, сигнал усиливается другим усилителем (вторая половина лампы Л$_1$, каскады Л$_5$, Л$_6$, Л$_7$), срабатывает другое электронное реле (вторая половина лампы Л$_8$). Включаются реле Р$_2$ и Р$_4$. Реле Р$_4$ своими контактами подключает источник питания с напряжением 24 в

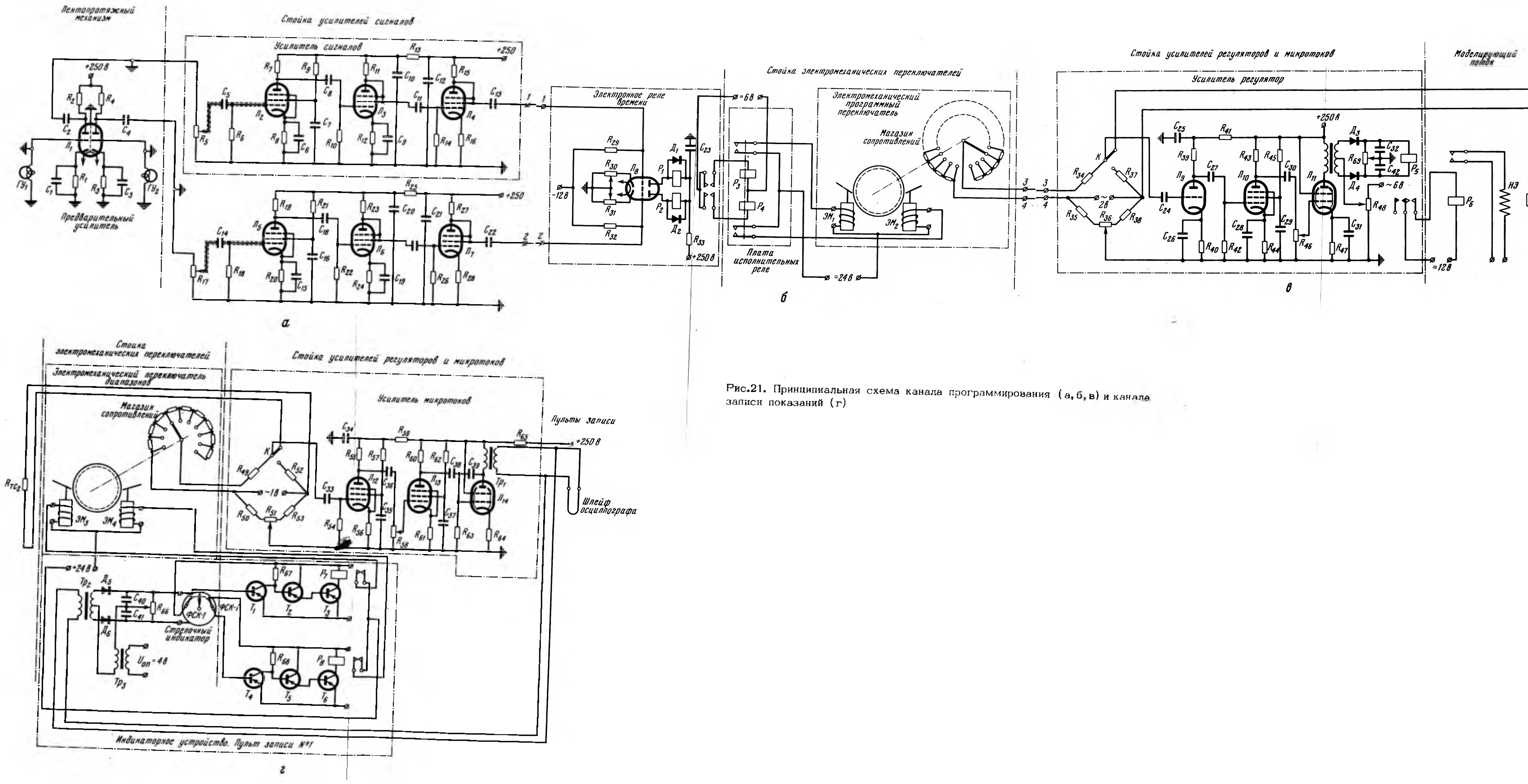


Рис.21. Принципиальная схема канала программирования (а, б, в) и канала записи показаний (г)

ко второму электромагниту программирующего переключателя $ЭМ_2$. Происходит описанная выше работа электромагнита, и шестерня поворачивается на 1/50 оборота по часовой стрелке. Сопротивление магазина сопротивлений переключателя увеличивается на величину, соответствующую уменьшению температуры на 0,1°. Таким образом, записывая поочередно на двух дорожках определенную последовательность электрических сигналов, можно автоматически набирать на магазине сопротивлений программирующего переключателя необходимую величину сопротивления в интервале температур от +40 до −60° с точностью программирования ± 0,1°.

Магазин сопротивлений программирующего переключателя подключен в одно из плеч моста ($R_{MC}, R_{34}, R_{36}, R_{38}, R_{TC_1}$), в другое плечо подключен термистор R_{TC_1}. В качестве нуль-индикатора в диагонали моста используется усилитель-регулятор с реле P_5.

В случае равновесия моста на входе усилителя регулятора напряжение сигнала отсутствует. Контакты реле P_5 разомкнуты. Как только произойдет изменение величины сопротивления магазина сопротивлений программирующего переключателя (допустим, уменьшение), наступит разбаланс моста, в диагонали моста появится напряжение $\Delta\varphi_э$. Это напряжение усиливается ($Л_9$, $Л_{10}$, $Л_{11}$) до величины, обеспечивающей срабатывание реле P_5, включенного на выходе усилителя регулятора.

Контакты реле P_5 подключают питание обмотки исполнительного реле P_6. Реле P_6 срабатывает и своими контактами включает нагревательный элемент НЭ, который расположен в непосредственной близости от термистора R_{TC_1}. Включенным НЭ будет находиться до тех пор, пока термистор, нагреваясь, не уменьшит своего сопротивления до величины, равной новому сопртивлению магазина сопротивлений программирующего переключателя, т.е. пока не наступит баланс моста. При наступлении баланса напряжение в диагонали моста будет равно 0, т.е. на входе усилителя регулятора сигнал будет отсутствовать и схема вернется в исходное положение. Для записи результатов программирования наряду с разнообразными методами измерений и регистрацией полученных данных от температурных датчиков используется автоматическая запись. На принципиальной схеме показан один канал записи.

Термистор R_{TC_2} включен в одно из плеч моста ($R_{TC_2}, R_{49}, R_{50}, R_{51}, R_{53}, R_{MC}$), в другое плечо подключается магазин сопротивлений переключателя диапазонов. В качестве нуль-индикатора в диагонали моста используется усилитель микротоков (лампы $Л_{12}$, $Л_{13}$, $Л_{14}$), на выходы которого ко вторичной обмотке трансформатора $Тр_1$ подключен шлейф вибратора осциллографа (в моделирующей установке для этой цели применяются осциллографы типа МПО-2 и "Сименс"). Общее сопротивление магазина сопротивлений переключателя соответствует изменению сопротивления термистора R_{TC_2} в интервале температур от +40 до −60°. Этот интервал, равный 100°, вызывает изменение величины сопротивления термистора в среднем от 900 до 30 000 ом, что приведет к значительным изменениям напряжения в диагонали моста, в которую подключается нуль-индикатор. Чтобы обеспечить достаточную точность (± 0,1°) записи показаний термистора, диапазон в 100° разбивается на 10 поддиапазонов. Это осуществляется с помощью переключателя диапазонов, включаемого в другое плечо моста. Магазин сопротивлений переключателя диапазонов имеет 10 декад (+40, +30, +20, +10, 0, −10, −20, −30, −40, −50°). В случае баланса моста на входе усилителя микротоков напряжение отсутствует, а датчик шлейфового осциллографа находится в невозмущенном состоянии.

Проследим далее работу системы, когда происходит изменение температуры среды, в которой находится датчик, от +40 до +20°. Под действием температуры изменяется величина сопротивления термистора В диагонали моста появится напряжение разбаланса, которое усиливается усилителем микротоков и регистрируется шлейфом. По мере роста величины сопротивления R_{TC_2} будет увеличиваться напряжение разбаланса и возрастать величина отклонений шлейфа. Поскольку возможности шлейфа при значительных изменениях напряжения ограничены, необходимо уменьшить величину напряжения, подаваемую на шлейф. Как только величина сопротивления R_{TC_2} достигнет границы поддиапазона (+30°), срабатывает переключатель диапазонов, подключая в плечо моста сопротивление магазина сопротивлений переключателя диапазонов, равное сопротивлению термистора при +30°. Наступит баланс моста. При дальнейшем изменении температуры от +30 до +20° будет увеличиваться сопротивление R_{TC_2}, возникнет разбаланс моста, усиленное напряжение разбаланса будет вновь регистрироваться шлейфом осциллографа. При достижении границы поддиапазона +20° опять срабатывает переключатель диапазонов, подключая в плечо моста следующую величину сопротивления магазина сопротивления переключателя диапазонов, равную сопротивлению термистора при +20° и т.д.

Для автоматического переключения диапазонов в мостовой схеме применяется индикаторное устройство. Вход индикаторного устройства (первичная обмотка трансформатора Тр) включается параллельно шлейфу осциллографа. Стрелочный прибор с нулем посередине шкалы дублирует показания шлейфа. По краям шкалы стрелочного прибора установлены фотосопротивления ФСК-1. Отклонение стрелки влево соответствует $\varphi_{э\,мин}$, вправо – $\varphi_{э\,макс}$. Как только шлейф осциллографа покажет максимальную величину напряжения, ту же величину зарегистрирует стрелочный прибор, стрелка которого отклонится вправо и перекроет луч света, испускаемый лампой на фотосопротивление. Резко изменится величина сопротивления, а следовательно, и тока в цепи фотореле (T_4, T_5, T_6, ФСК-1). Сработает реле P_8 и своими контактами замкнет цепь питания (с напряжением 24 в) электромагнита переключателя диапазонов $ЭМ_4$. Щетка переключателя диапазонов, вращаясь по часовой стрелке, встанет на следующую ламель и подключит новую величину сопротивления в плечо моста.

4. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ УЗЛОВ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ УСТАНОВКИ

Электронные регуляторы температуры обеспечивают регулирование температуры с точностью до ±0,1°, а для небольших участков поверхности – и до ± 0,05° в диапазоне от +40° до −60°. Было разработано два варианта схемы электронного регулятора, в которых использованы принципы фазового детектирования и инерционной обратной связи.

Усилитель магнитных импульсов предназначен для усиления электрических сигналов, снимаемых с магнитной ленты. В схеме усилителя использованы принцип антишумовой коррекции и предварительное усиление сигналов для снижения относительного уровня помех на входе усилителя.

Лентопротяжный механизм обеспечивает продвижение магнитной ленты с программой граничных условий теплообмена с заданной скоростью. Механизм рассчитан на 100 отдельных каналов программирования и снабжен устройством для автоматической остановки при разрыве ленты.

Установка для записи программ граничных условий на магнитную ленту собрана на основе принципиальной схемы магнитофона "Яуза" и позволяет записывать с заданной скоростью магнитные программы граничных условий в форме имульсов тока, возбуждаемых генератором звуковой частоты.

Реверсивный электромеханический программный переключатель на 1000 положений предназначен для двухстороннего переключения сопротивлений магазина в плече мостиковой схемы усилителя регулятора температуры. Обеспечивает настройку электронного регулятора температуры в диапазоне от −60 до +40° с точностью до ± 0,1°.

Усилитель микротоков служит для линейного усиления входного сигнала переменного напряжения с частотой 50 гц, снимаемого с выхода мостовой схемы в диапазоне от 0 до 80 мв. С помощью усилителя на осциллографах типа МПО-2 записываются изменения температуры с точностью ± 0,1°.

Электромеханический переключатель диапазонов в цепях осциллографов с фотоэлектронным следящим устройством предназначен для автоматического переключения диапазонов в мостовых схемах при регистрации напряжения разбаланса шлейфовыми осциллографами. Переключатель является реверсивным и рассчитан на переключение 10 диапазонов по 10°

Включение переключателя осуществляется фотоэлектронным следящим устройством. Фотоэлектрические датчики этого устройства установлены на границах шкалы стрелочного микроамперметра, имеющего одинаковую чувствительность с подключенным к нему параллельно гальванометром лучевого осциллографа.

Электронный переключатель диапазонов для автоматического моста позволяет осуществлять автоматическую регистрацию показаний датчиков температуры в пределах от −40 до +60° с точностью ± 1° с помощью 12 каналов электронного автоматического моста ЭМП-209.

Переключатель обеспечивает автоматическое реверсионное переключение 10 диапазонов по 10°. Основными элементами его являются кольцевой реверсионный десятичный счетчик, переключающий ячейки на полупроводниковых триодах, магазин шунтов и добавочных сопротивлений генераторов RC для формирования импульса переключающей линейки.

Многоканальный гальванограф с автоматическим управлением, чувствительностью и направлением тока позволяет регистрировать показания 75 термоэлектрических датчиков температуры.

Для управления чувствительностью и направлением тока в цепи гальванографа служат фотоэлектронные следящие устройства, которые автоматически включают дополнительные сопротивления и меняют полярность на входе регистратора.

Система электрического питания установки включает распределительный щит, блок анодного и накального напряжения, в который входят 56 электронных выпрямителей и блок стабилизации напряжения.

В качестве источников постоянного тока используется батарея аккумуляторов НКН-100. Зарядка аккумуляторов производится выпрямителем ВСА-5. Для централизованного распределения, управления и контроля за режимом питания электронных и электромеханических устройст постоянным током служит специальный распределительный щит (см.РЩ, рис.18).

Глава 1У

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОМЕРЗАЮЩИХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОМЕРЗАНИЯ-ПРОТАИВАНИЯ ТОНКОДИСПЕРСНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

На принципиальную возможность решения нелинейных уравнений теплопроводности методом гидродинамического моделирования указывали В.С.Лукьянов и М.Д.Головко (1957). Однако осуществление ее до последнего времени задерживалось по ряду причин. Основной из них следует считать слабую изученность теплофизических свойств промерзающих – протаивающих горных пород. Поэтому задачи о промерзании-протаивании тонкодисперсных горных пород решаются на гидроинтеграторе, как обычные задачи Стефана – в виде системы параболических уравнений с подвижной границей раздела и калорическим условием на ней.

Моделирование на гидроинтеграторе процессов переноса тепла в средах с коэффициентами переноса и теплоемкостью, зависящими от температуры, и фазовыми переходами, происходящими в пределах спектра температур, возможно производить по двум методическим схемам.

По первой схеме весь процесс во времени разбивается на ряд интервалов, в пределах которых эффективные значения теплофизических свойств горных пород принимаются постоянными и равными их среднеинтервальным значениям, осуществляется на гидравлической модели путем скачкообразного изменения гидравлических емкостей и сопротивлений системы для соотвествующих интервалов времени.

Во второй методической схеме моделирования зависимость термических сопротивлений и теплоемкостей промерзающих горных пород от температуры воспроизводится на модели эквивалентными зависимостями гидравлических сопротивлений и емкостей от пьезометрического уровня.

Вторая методическая схема требует предварительной подготовки переменных гидравлических элементов, что сопряжено с дополнительными затратами времени. Но она позволяет значительно ускорить и облегчить сам процесс моделирования. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. На гидравлической модели сравнительно просто воспроизвести зависимость теплоемкости от температуры и технически очень трудно создать гидравлические сопротивления, зависимость которых от пьезометрического уровня автоматически воспроизводили бы температурную зависимость термических сопротивлений. Однако известно, что коэффициент теплопроводности и термическое сопротивление горных пород изменяются при промерзании-протаивании всего лишь на 30-50 % (Иванов, 1969). Что же касается объемной эффективной теплоемкости, то она может изменяться в десятки и даже сотни раз.

Такой характер изменения теплофизических свойств промерзающих горных пород и реальные технические возможности создания гидравлической модели с переменными емкостями и сопротивлениями приводят к необходимости разработки комплексной схемы моделирования. В этой схеме зависимость объемной эффективной теплоемкости от температуры осуществляется на гидравлической модели автоматически с помощью гидравлических емкостей переменного сечения, а температурная зависимость термических сопротивлений производится на первой схеме. Такой комбинированный подход на данном этапе является наиболее целесообразным и уже сейчас может быть широко внедрен в практику моделирования тепловых процессов на гидравлических интеграторах.

Подобная схема была доведена до практического применения в лаборатории тепло- и массообмена Института мерзлотоведения СО АН СССР. Рассмотрим ее более детально на примере решения частной задачи о промерзании-протаивании верхнего слоя земной коры, сложенного глинистыми породами.

Глубина слоя взята равной 11 м. За область моделирования выбрана призма, мысленно вырезанная в этом слое с сечением 1 м^2. Температура на внешней поверхности и начальное распределение температур по глубине слоя заданы по данным непосредственных наблюдений в г.Якутске. Температура на нижней поверхности области равна $-2,4^\circ$. Зависимости объемной эффективной теплоемкости и коэффициента теплопроводности промерзающей глины от температуры отражены на рис.22 и 23.

Схемы разбивки исследуемой области на блоки для термической и гидравлической цепи изображены на рис.24. Для расчета гидравлической модели исследуемой области были выбраны отношение масштабов термических и гидравлических сопротивлений, равное 0,518, отношение теплоемкостей блоков и соответствующих площадей гидравлических емкостей – 150 ккал/см^2, масштаб потенциалов переноса, т.е. отношение перепада температуры в 1° к соответствующей разности уровней в пьезометрах – 1 град/см. Тогда масштаб времени оказывается равным 77,7 час/мин. Это означает, что тепловой процесс продолжительностью 240 час. будет воспроизведен на гидроинтеграторе за 3,41 мин., а весь годовой цикл теплообмена – за 1,88 час.

Термические сопротивления между смежными блоками i и $(i+1)$ исследуемой области рассчитывались по формуле

$$R^{\tau}_{i,i+1} = \left[\frac{l_i}{\lambda_i(\vartheta)} + \frac{l_{i+1}}{\lambda_{i+1}(\vartheta)}\right]\frac{1}{S}\,, \qquad (85)$$

где $R^{\tau}_{i,i+1}$ – термическое сопротивление между блоками с индексами i и $(i+1)$; l_i, l_{i+1} – толщина половины блока с индексами i и $(i+1)$; $\lambda_i(\vartheta)$, $\lambda_{i+1}(\vartheta)$ – коэффициенты теплопроводности блоков с индексами i и $(i+1)$; S – площадь сечения блоков, равная 1 м^2.

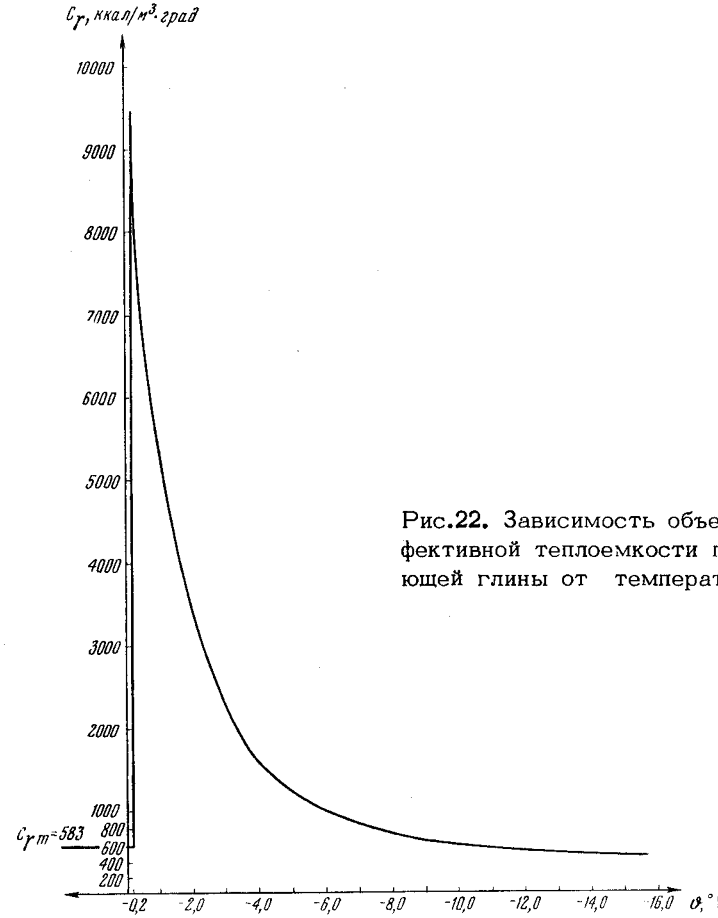


Рис.22. Зависимость объемной эффективной теплоемкости промерзающей глины от температуры

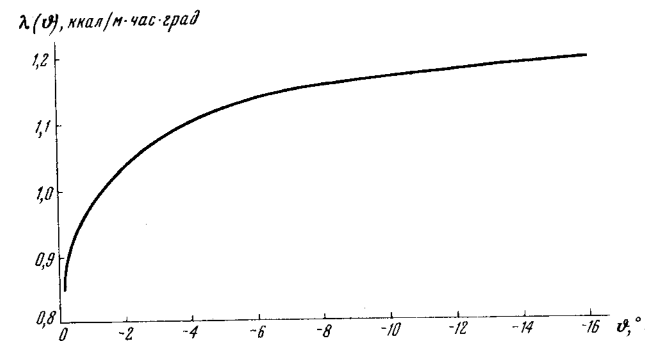


Рис.23. Зависимость коэффициента теплопроводности промерзающей глины от температуры

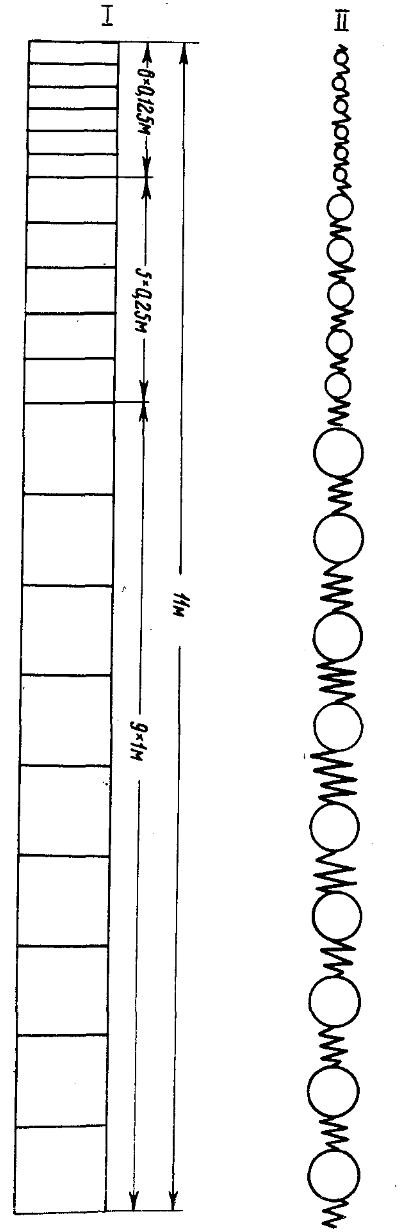


Рис.24. Схема разбивки на блоки расчетной призмы I и гидравлической модели II

На основе зависимости коэффициента теплопроводности промерзающей глины от температуры были рассчитаны значения гидравлических сопротивлений блоков системы при различных температурах. Результаты этих расчетов представлены в графическом виде на рис.25 в виде серии кривых, построенных для блоков различных размеров. С помощью этого графика гидравлические сопротивления блоков изменялись в процессе моделирования в связи с изменением температуры.

В широком диапазоне изменяется эффективная теплоемкость промерзающей глины. Так, в талом состоянии объемная теплоемкость равна 600 ккал/м^3·град, при температуре −0,2° она достигает 9500 ккал/м^3·град и постепенно снижается до 400 ккал/м^3·град при температуре ниже −16°. При столь значительном изменении объемной теплоемкости промерзающей глины применение обыкновенных вкладышей для гидравлических емкостей сопряжено с большими погрешностями расчетов. Поэтому были применены вкладыши переменного сечения (рис. 26).

Вкладыши 4 изготавливались из органического стекла в форме прямоугольных стержней. К верхнему торцу стрежня с помощью винта 1 и гайки 2 приклеплена металлическая пластина 3. Она удерживает стержень в подвешенном состоянии на стенках сосуда 5. Участок а-б вкладыша моделирует теплоемкость талого, а б-в промерзающего-протаивающего блока.

Для некоторых блоков, объемная теплоемкость которых изменялась незначительно, переменность сечений гидравлических элементов достигалась сменными вкладышами постоянного сечения.

По описанной методике промоделирован температурный режим верх-

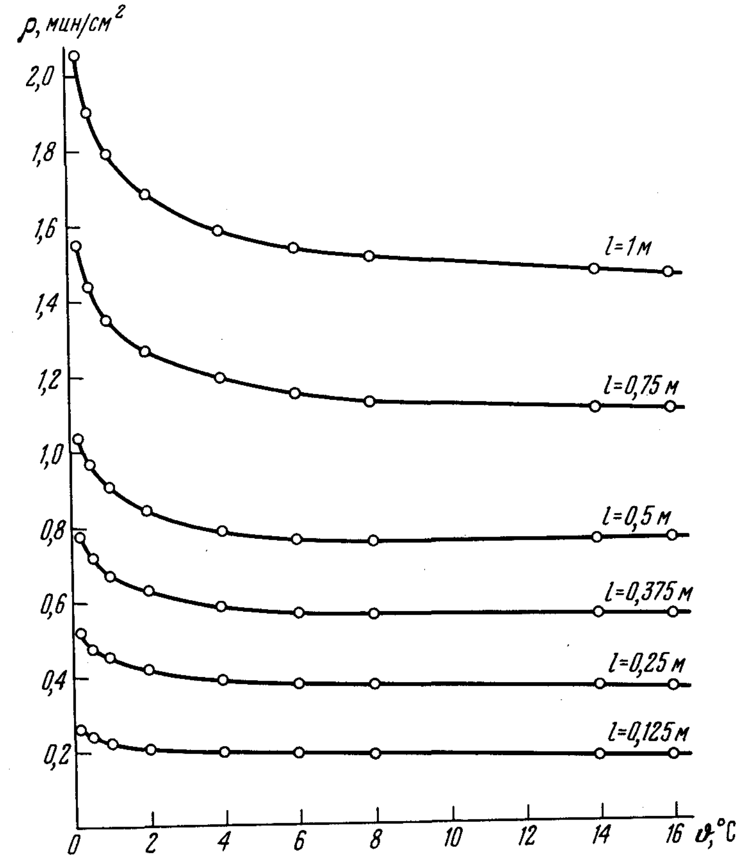


Рис.25. Зависимость гидравлических сопротивлений от температуры

него слоя мерзлой толщи земной коры в течение годового цикла теплообмена. На рис.27 показан рассчитанный таким путем код температур в сезоннопротаивающем (ℓ = 0,125; 0,625; 1,375 м) и многолетнемерзлом (ℓ = 2,75 м) слое.

Дальнейшее развитие описанной методической схемы связано с полной автоматизацией процесса решения нелинейного уравнения теплопроводности. Первостепенное значение имеет также усовершенствование элементов гидравлических емкостей в направлении их универсальности и простоты задания любого профиля зависимости емкости от пьезометрического уровня.

В лаборатории тепло- и массообмена был разработан один из вириантов универсального вкладыша с варьирующим профилем сечения для набора гидравлических емкостей с переменным сечением. Принципиальная схема такого элемента привдена на рис.28,

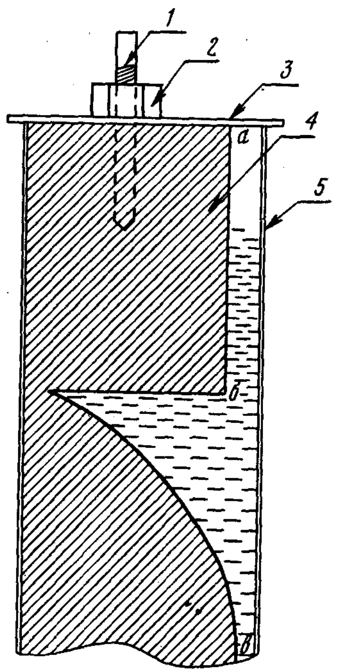
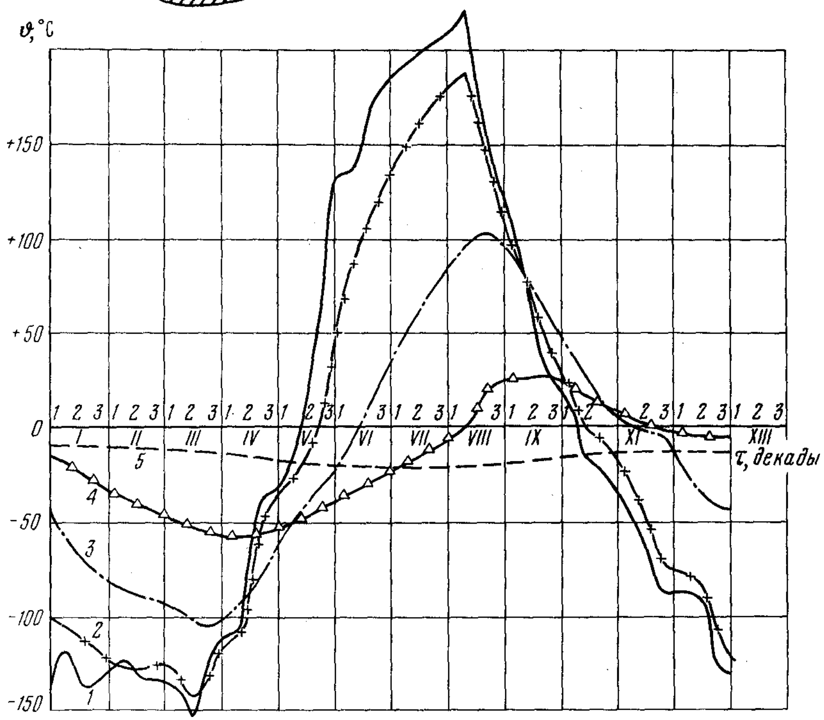
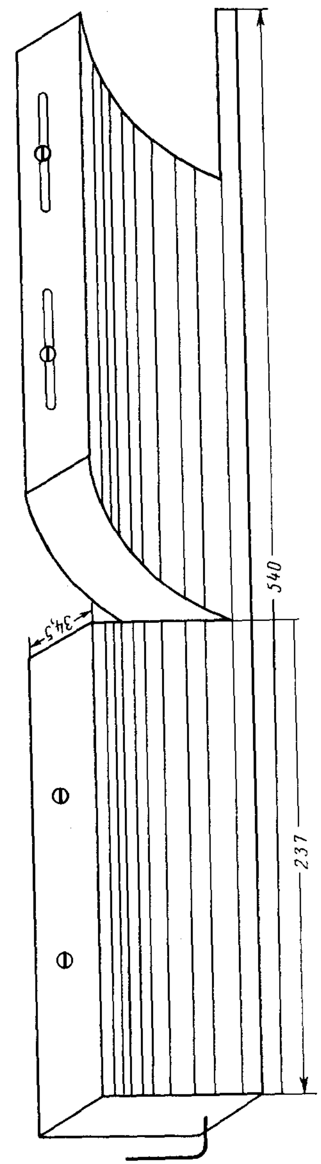


Рис.26. Схема устройства вкладыша с переменным сечением

Рис.27. Изменение во времени расчетных температур промерзающих – протаивающих глинистых горных пород
1 – поверхность; 2 – 0,125 м; 3 – 0,625 м; 4 – 1,375 м; 5 – 2,75 м





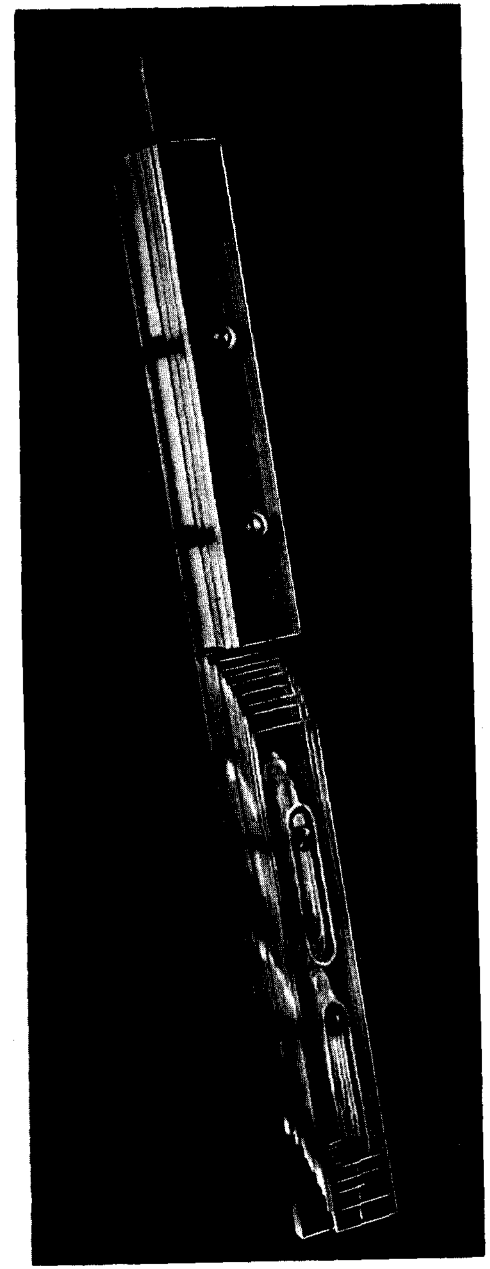


Рис.28. Схема устройства гидравлического вкладыша с варьирующим профилем сечения

Рис.29. Общий вид вкладыша с варьирующим профилем сечения

Вкладыши с варьирующим профилем сечения были из органического стекла в виде набора пластин различной толщины и длины. Путем смещения этих пластин может быть получена ступенчатая поверхность, контур сечения которой будет соответствовать кривой температурной зависимости объемной эффективной теплоемкости промерзающих-протаивающих горных пород. Общий вид вкладыша с варьирующим профилем показан на рис. 29. Точность аппроксимации этой зависимости может быть повышена уменьшением толщины наборных пластин.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ПРОТАИВАНИИ МЕРЗЛЫХ ГОРНЫХ ПОРОД С ПОМОЩЬЮ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОИНТЕГРАТОРА СЭИ-1

Статический электроинтегратор СЭИ-1 представляет собой прибор лабораторного типа, предназначенный для решения линейных и нелинейных задач математической и технической физики, сводящихся к уравнениям типа теплопроводности. Общий вид СЭИ-1 показан на рис.30.

Принцип действия интегратора основан на воспроизведении с помощью электрической схемы конечно-разностной аппроксимации (пространственной и временной) исходных дифференциальных уравнении. Квантование времени позволяет сравнительно легко решать уравнения с коэффициентами, зависящими от функции или координат, учитывать переменные источники, различные граничные условия (Жеребятьев и др.,1966).

Существенным отличием схемы решения задач с помощью статического интегратора по сравнению с другими аналоговыми устройствами является необходимость предварительного преобразования области всех возможных значений функции в другую область с учетом изменения коэффициентов и применением одного решающего элемента, осуществляющего выбранную конечно-разностную аппроксимацию.

Методику постановки и решения задачи о динамике сезонного протаивания многолетнемерзлых пород на статическом электроинтеграторе СЭИ-1, рассмотрим на прмере расчета температурного поля в слое горных пород на глубине 0,15 м; теплофизические свойства пород следующие: $Q_0 = 19\,800$ ккал/м^3; $C_{\gamma,м} = 426$ ккал/кг·град; $C_{\gamma,т} = 550$ ккал/м^3·град; $\lambda_м = 2{,}8$ ккал/м·час·град; $\lambda_т = 2{,}02$ ккал/м·час·град; $a_м = 7\cdot10^{-3}$ м^2/час; $a_т = 4\cdot10^{-3}$ м^2/час.

Начальные и граничные условия для 1 декады мая:

Глубина, м	1	2	3	4	5	6	7
$\vartheta(x,0)$	-5,8	-5,1	-3,9	-3,7	-3,4	-3,2	-3,0

Глубина, м	8	9	10	11	12	13	14
$\vartheta(x,0)$	-2,7	-2,5	-2,4	-2,3	-2,2	-2,1	-2,2

для мая	1	П	Ш
$\vartheta(0,\tau)$	+0,6	+3,1	+6,7
$\vartheta(l,\tau)$	-2,3	-2,3	-2,3

для июня	1	П	Ш
$\vartheta(0,\tau)$	+12,5	+10,5	
$\vartheta(l,\tau)$	-2,3	-2,3	

Аналитическая постановка задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \vartheta_i(x,\tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 \vartheta_i(x,\tau)}{\partial x^2}; \quad \tau \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad i = 1,2$$

$$\vartheta_i(x,0) = f(x);$$

$$\vartheta_1(0,\tau) = f_1(\tau); \tag{86}$$

$$\vartheta_2(l,\tau) = f_2(\tau).$$

На подвижной границе раздела фаз выполняются условия

$$-\lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2(x,\tau)}{\partial x}\Bigg|_{+\xi(\tau)} + \lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1(x,\tau)}{\partial x}\Bigg|_{-\xi(\tau)} = Q_0 \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}; \tag{87}$$

$$\vartheta(\xi,\tau) = 0,$$

где $\xi = \xi(\tau)$ - положение границы протаивания (промерзания); Q_0 - количество скрытой теплоты плавления в единице объема, ккал/м^3.

Для вывода условий моделирования система дифференциальных уравнений представляется в конечных разностях. При этом область изменения независимой переменной x разбивается на i частей с шагом $\Delta x = l/i$, так что $x_n = n\Delta x$ $(n = 0, 1, \ldots, i)$, а область $(0, T)$ переменной τ делится на k одинаковых интервалов времени с шагом $\Delta\tau = \frac{T}{k}$: совокупность полученных узлов образует сеточную область (рис.31).

Уравнение теплопроводности (86), представленное в конечных разностях по явной схеме, имеет вид

$$\frac{\vartheta_{n,k+1} - \vartheta_{n,k}}{\Delta\tau} = a \frac{\vartheta_{n+1,k} - 2\vartheta_{n,k} + \vartheta_{n-1,k}}{\Delta x^2}. \tag{88}$$

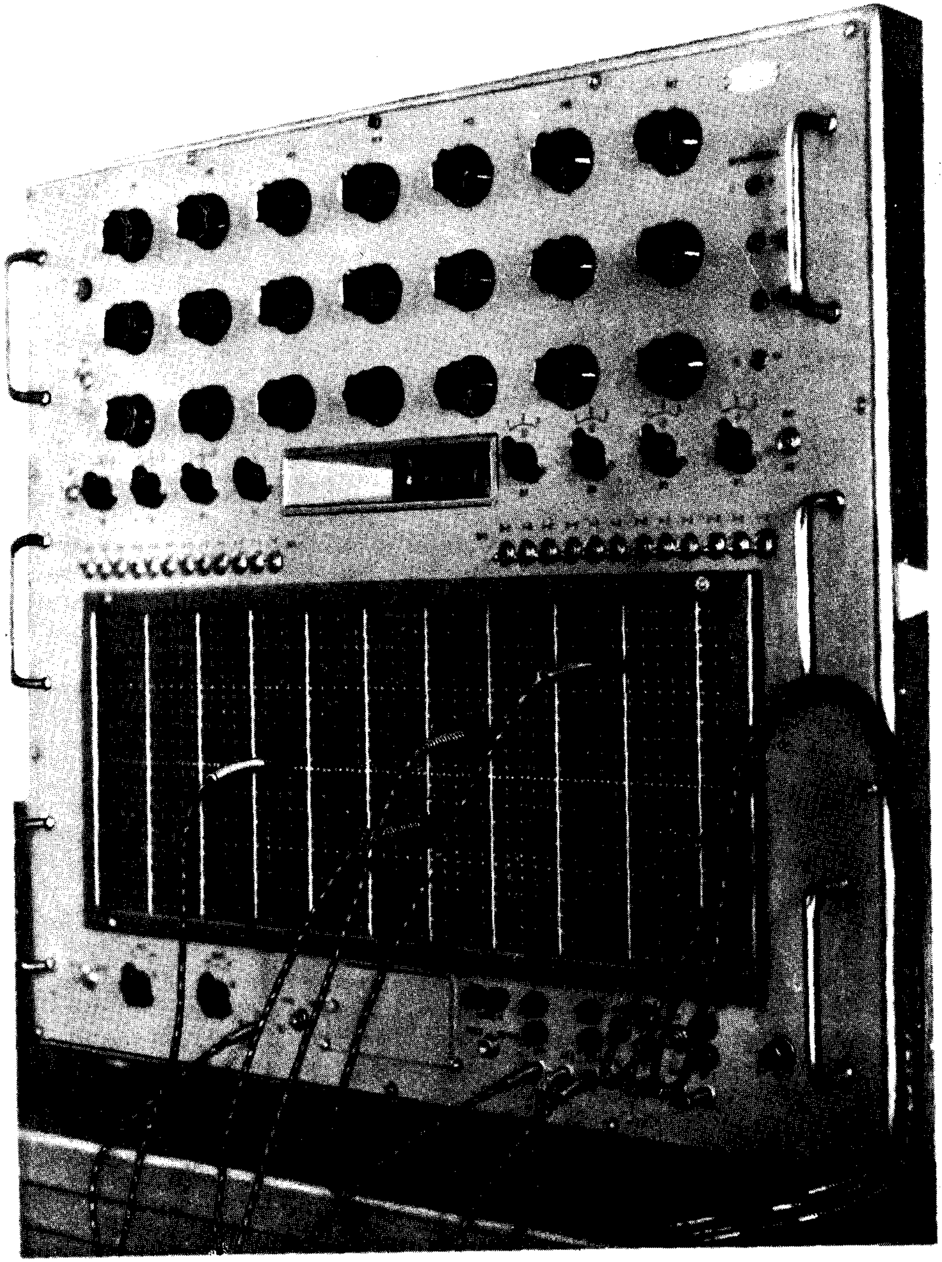


Рис.30. Общий вид статического электроинтегратора СЭИ-1

Выведем конечно-разностное уравнение для узловой точки, находящейся на границе раздела сред (рис.32). Уравнение (86) разбивается в этом случае на два уравнения:

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vartheta''}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 \vartheta''}{\partial x^2} . \tag{89}$$

При этом должно выполняться равенство температур в граничной точке и тепловых потоков на границе раздела двух сред:

$$\vartheta'_k = \vartheta''_k ;$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta'_k}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta''_k}{\partial x} . \tag{90}$$

Разложим функции ϑ'_k и ϑ''_k в ряды Тейлора:

$$\vartheta''_{n+1,k} = \vartheta_{n,k} + \Delta x_2 \frac{\partial \vartheta''_{n,k}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \Delta x_2^2 \frac{\partial^2 \vartheta''_{n,k}}{\partial x^2} + \dots$$
$$\vartheta'_{n-1,k} = \vartheta_{n,k} - \Delta x_1 \frac{\partial \vartheta'_{n,k}}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x_1^2 \frac{\partial^2 \vartheta'_{n,k}}{\partial x^2} + \dots \tag{91}$$

Умножая первое и второе уравнения (91) соответственно на $\lambda_2 \Delta x_1$ и $\lambda_1 \Delta x_2$ и складывая их, получим

$$\lambda_2 \Delta x_1 \vartheta'_{n+1,k} + \vartheta''_{n-1,k} \lambda_1 \Delta x_2 = (\lambda_2 \Delta x_1 + \lambda_1 \Delta x_2) \vartheta_{n,k} +$$
$$+ \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2 \left[\lambda_2 \Delta x_2 \frac{\partial^2 \vartheta''_{n,k}}{\partial x^2} + \lambda_1 \Delta x_1 \frac{\partial^2 \vartheta'_{n,k}}{\partial x^2} \right] . \tag{92}$$

Последнее равенство при замене $\frac{\partial^2 \vartheta'_{n,k}}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \vartheta''_{n,k}}{\partial x^2}$, согласно уравнений (89), приводится к виду

$$\lambda_2 \Delta x_1 \vartheta''_{n+1,k} + \lambda_1 \Delta x_2 \vartheta'_{n-1,k} = (\lambda_2 \Delta x_1 + \lambda_1 \Delta x_2) \vartheta'_{n,k} +$$
$$+ \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2 (C_2 \Delta x_2 + C_1 \Delta x_1) \left(\frac{\vartheta_{n,k+1} - \vartheta_{n,k}}{\Delta \tau} \right) , \tag{93}$$

где $C_1 = \lambda_1 / a_1 ; \quad C_2 = \lambda_2 / a_2 .$

6 911

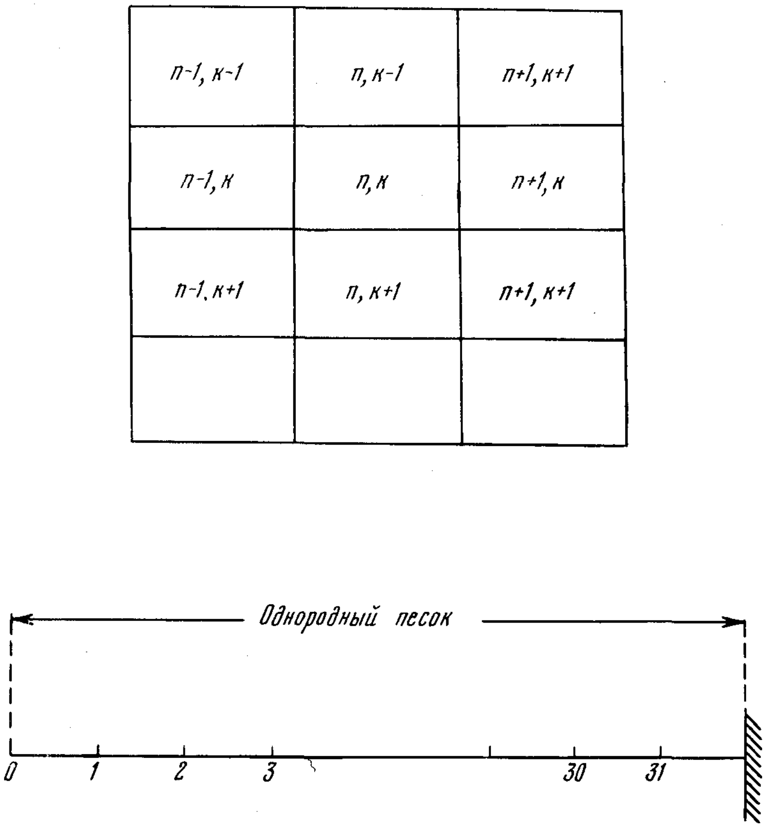


Рис.31. Схема построения сетки расчетной области

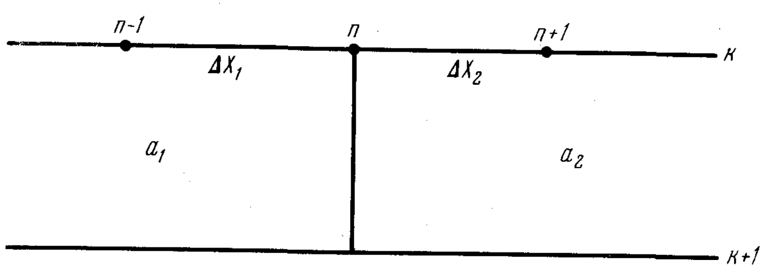


Рис.32. Схема к выводу уравнения для точки на границе раздела двух сред

Преобразуем выражение

$$\Delta x_1\Delta x_2\left[C_2\Delta x_2 + C_1\Delta x_1\right] = \Delta x_1\Delta x_2^2 C_2\left[1+\frac{C_1\Delta x_1}{C_2\Delta x_2}\right] = \tag{94}$$

$$= \Delta x_1\Delta x_2^2\frac{\lambda_2}{a_2}\left[1+C_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right] .$$

Подставляя равенство (94) и (93), получим

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \vartheta_{n+1,k}+\lambda_2\vartheta_{n-1,k} = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}+\lambda_{1,2}\right)\vartheta_{n,k}+\frac{1}{2}\Delta x_1\Delta x_2 \times \frac{1}{2}\left[1+C_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right]\left(\frac{\vartheta_{n,k+1}-\vartheta_{n,k}}{\Delta\tau}\right). \tag{95}$$

Учитывая условие устрйчивости $\frac{\Delta x_1^2}{a\Delta\tau}=M\geqslant 2$, получим в окончательном виде конечно-разностное уравнение теплопроводности для узловой точки, находящейся на границе составных частей:

$$\vartheta_{n,k+1} = \frac{2\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)\vartheta_{n+1,k}+2\lambda_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\vartheta_{n-1,k}+\left[M\left(1+C_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)-2\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\left(\lambda_{1,2}+\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)\right]\vartheta_{n,k}}{M\left(1+C_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)};$$

где

$$\lambda_{1,2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad C_{1,2}=\frac{C_1}{C_2}; \quad n=\frac{x}{\Delta x}; \quad k=\frac{\tau}{\Delta\tau} .$$

Для однородной среды с равномерными шагами $\Delta\tau$ уравнение (96) для внутренней узловой точки имеет вид

$$\vartheta_{n,k+1}=\frac{\vartheta_{n-1,k}+\vartheta_{n+1,k}+(M-2)\,\vartheta_{n,k}}{M} . \tag{97}$$

При решении теплофизических задач на СЭИ-1 температура представляется значениями потенциалов. Конечно-разностная аппроксимация уравнения (86) осуществляется с помощью решающего элемента (рис.33), состоящего из трех магазинов сопротивлений: М1, М2 и М3 или любых других из 7 сопротивлений, расположенных на передней панели интегратора. Для решающего элемента справедливы равенства

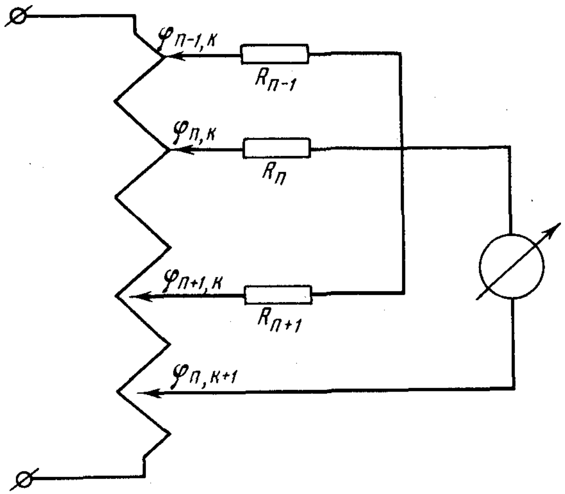


Рис.33. Схема решающего элемента

$$\frac{\varphi_{n-1,k}-\varphi_{n,k+1}}{R_{n-1}}+\frac{\varphi_{n,k}-\varphi_{n,k+1}}{R_n}+\frac{\varphi_{n+1,k}-\varphi_{n,k+1}}{R_{n+1}}=0; \qquad (98)$$

$$\varphi_{n,k+1}=\frac{R_n R_{n-1}\varphi_{n+1,k}+R_n R_{n+1}\varphi_{n-1,k}+R_{n-1}R_{n+1}\varphi_{n,k}}{R_{n-1}R_n+R_{n+1}R_{n-1}+R_n R_{n+1}}. \qquad (99)$$

Сравнивая уравнения (96) и (97), находим условия моделирования:

$$R_{n-1}R_n=2\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2; \qquad R_{n+1}R_n=2\lambda_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}; \qquad (100)$$

$$R_{n-1}R_{n+1}=M\left(1+C_{1,2}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)-2\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\left(\lambda_{1,2}+\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right).$$

Чтобы значение потенциала $\varphi_{n,k+1}$, получаемое в узле решающего элемента, было пропорциональным или численно равным величине $\vartheta_{n,k+1}$, необходимо сопротивления элемента выбирать, исходя из условий моделирования (100). Значения сопротивлений решающего элемента вычисляются в следующей последовательности.

1. Определяется значение M из условия устойчивости $M=\frac{\Delta x^2}{a\Delta\tau}\geqslant 2$.

2. Исходя из условий моделирования (100), вычисляются значения сопротивлений R_{n-1}; R_n; R_{n+1}.

Рассмотрим предпосылки для осуществления дополнительных условий на границе раздела фаз. С этой целью перепишем первое уравнение в (87) в конечных разностях

$$\lambda_2\frac{\vartheta_{n+1,k}-\vartheta_{n,k}}{\Delta x_2}-\lambda_1\frac{\vartheta_{n,k}-\vartheta_{n-1,k}}{\Delta x_1}=Q_0\frac{\xi_{n,k+1}-\xi_{n,k}}{\Delta\tau}. \qquad (101)$$

Если исходить из отсутствия резкой границы между талой и мерзлой зонами и существования переходной области фазовых переходов, то внутри этой области теплофизические характеристики будут изменяться постепенно. При этом переходная зона может рассматриваться как условно однородная. Если к тому же принять $\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x$, то уравнение (101) примет вид

$$\frac{(\vartheta_{n-1,k}-\vartheta_{n,k})+(\vartheta_{n+1,k}-\vartheta_{n,k})}{M}=\frac{Q_0}{C_2}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta x}, \qquad (102)$$

где $M=\frac{\Delta x^2}{\bar{a}\Delta\tau}$; $\bar{a}$-коэффициент температуропроводности приведенной среды.

Сравнивая уравнение (102) с уравнением (97) и учитывая постоянство тепловых свойств в системе уравнений (100), получим

$$\varphi_{n,k+1}-\varphi_{n,k}=\frac{Q_0}{C_2}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta x}, \qquad (103)$$

где $\Delta\xi=\xi_{k+1}-\xi_k$-величина смещения границы фазового перехода за время $\Delta\tau$. При $\sum_{j=1}^{m}\Delta\xi_j=\Delta x$ равенство (103) запишется как

$$\frac{Q_0}{C^2}=\sum_{j=1}^{m}(\varphi_{n,k+1}-\varphi_{n,k}). \qquad (104)$$

Из уравнения (104) следует, что разность $\varphi_{n,k+1}-\varphi_{n,k}$ пропорциональна смещению границы раздела фаз $\Delta\xi$ по оси Δx. После нескольких операций m сумма $\sum_{j=1}^{m}\Delta\xi_j$ окажется равной интервалу Δx, тогда граница фазового перехода перемещается скачком по пространственной координате на один шаг.

Потенциал $\varphi_{n,k}$, соответствующий температуре фазового перехода, поддерживается постоянным до тех пор, пока не выполнится условие (104). Из этого условия определяется и количество расчетных шагов m.

На рис.34. представлены для сравнения зависимости глубины протаивания $\xi_1(\tau)$ и промерзания $\xi_2(\tau)$ от времени, полученные на гидроинтеграторе ИГЛ-2 и на статическом электроинтеграторе СЭИ-1. Некоторое расхождение, наблюдающееся для начальной стадии этих зависимостей, обусловлено различием пространственных шагов сетки, выбранных для ИГЛ-2 и СЭИ-1.

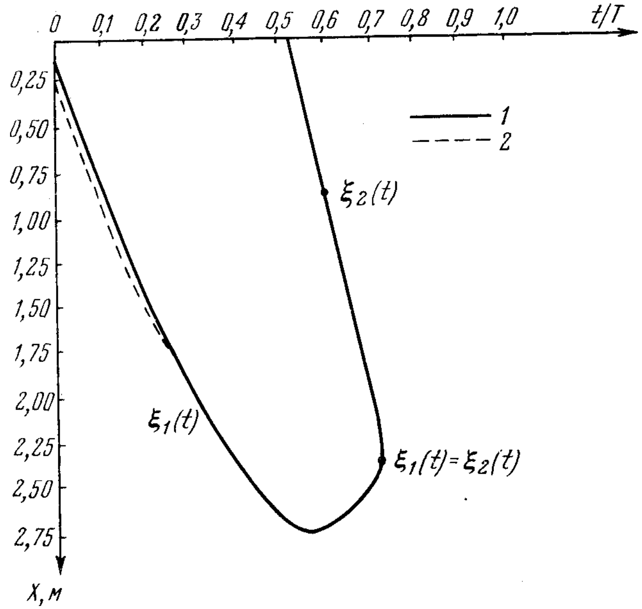


Рис.34. Динамика расчетной глубины сезонного протаивания – промерзания

1 – гидроинтегратор ИГЛ-2; 2 – статический электроинтегратор СЭИ-1

3. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВОЙ МАШИНЫ УСМ-1 ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Существует широкий круг задач с подвижными границами, решение которых представляет большой практический интерес. Задачи такого рода при скачкообразном изменении теплофизических свойств на подвижной границе получили название обратной задачи Стефана.

Известно также, что метод Лайтфута (Карслоу, Егер, 1964) позволяет решать задачи с подвижными границами только при термической однородности среды. В этой связи представляют некоторый интерес возможности применения для решения обратных задач универсальной сеточной машины УСМ-1. В частности, на этой основе можно уточнить достоверность приближенных формул для расчета глубины промерзания – протаивания горных пород, выяснить закономерности формирования температурного поля в талой и мерзлой зонах и границы применимости принципов квазистационарности и квазиподобия температурных полей. Аналогично может быть решена совокупность задач по массопереносу в промерзающих – протаивающих горных породах.

При такой постановке задача Стефана рассматривается как совокупность двух самостоятельных задач теплопроводности для двух смежных пластин с различными теплофизическими свойствами, разделенных подвижной границей. Температура фазового перехода поровой влаги на границе раздела фаз является граничным условием для нижней подвижной границы первой (талой или мерзлой) пластины, а также для верхней подвижной границы второй (мерзлой или талой) пластины. При такой формулировке задачи Стефана можно определить распределение температур в талой и мерзлой зонах с помощью универсальной сеточной машины УСМ-1.

Решение задачи Стефана на УСМ-1 осуществляется следующим образом.

1. Область решаемой одномерной задачи разбивается на ряд элементарных блоков. Рассчитываются теплоемкости и термические сопротивления блоков, на основе теории подобия производится пересчет этих величин к значениям электрических емкостей и сопротивлений. По рассчитанным электрическим сопротивлениям и емкостям собирается одномерная модель области на блоке сетки машины УСМ-1.

2. Ходу температуры на поверхности $\vartheta(0,\tau)$ соответствует переменный потенциал $\varphi(0,\tau_м) = k_2\vartheta(0,\tau)$, который с помощью одного функционального преобразователя и усилителя ГУ-1 подается на узловую точку сетки, соответствующую поверхности грунта (рис.35).

3. За нижнюю границу слоя мерзлых горных пород берется температура $\vartheta(H,\tau)=const$ на глубине нулевых амплитуд, которая на машине моделируется постоянным потенциалом $\varphi = k_2\vartheta(H,\tau)$.

4. Задание граничного условия на подвижной границе раздела фаз на машине осуществляется в следующей последовательности:

а) Определяется динамика границы раздела фаз в виде графика (рис. 36), где на оси абсцисс отложено время, а на оси ординат – узловые точки блока в области протаивания.

б) График движения границы раздела фаз аппроксимируется ступенчатой кривой в машинном масштабе времени (см.рис.36), согласно которому набирается временная программа включения усилителей на блоке ГУ-1.

в) Шнуровой коммутацией с усилителя ГУ-1 в узловые точки сетки последовательно подается нулевой потенциал, который соответствует температуре фазового перехода.

Вследствие непрерывности процесса моделирования задачи на машине УСМ-1 во время решения невозможно учитывать изменение свойств горных пород при фазовых переходах. В связи с этим предлагается следующая методика решения задачи Стефана.

Первый вариант задачи решается для области, которая рассматривается как однородная мерзлая зона. Решение второго варианта производится для условий однородно-талой зоны. Комбинация этих двух вариантов позволяет найти общее решение о температурном поле двухслойной мерзло-талой (или тало-мерзлой) пластины при подвижной границе раздела.

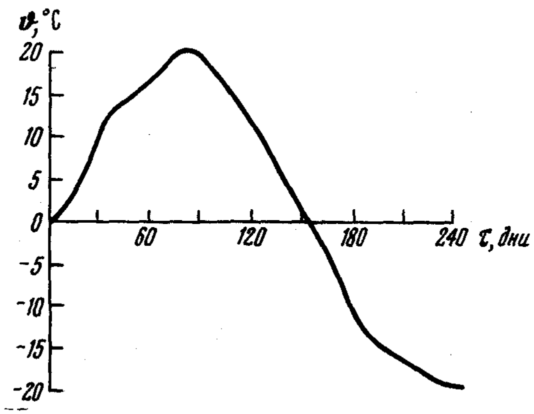


Рис.35. Изменение температуры поверхности почвы

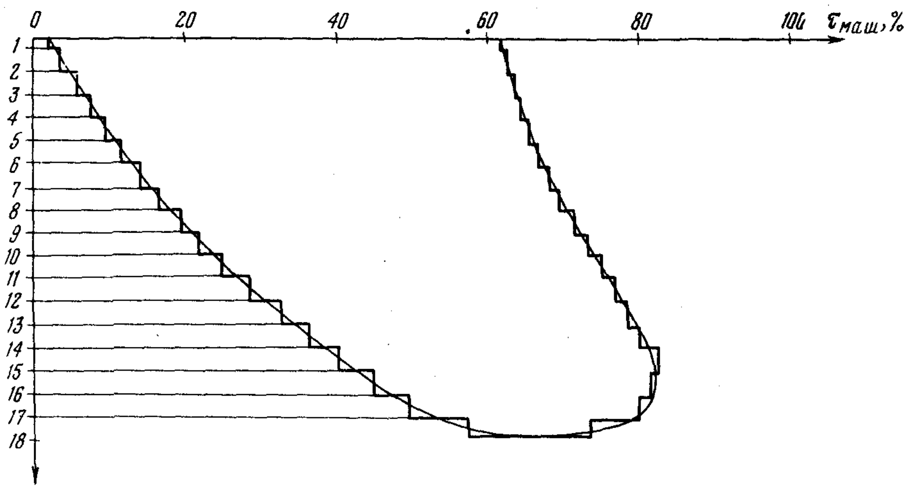
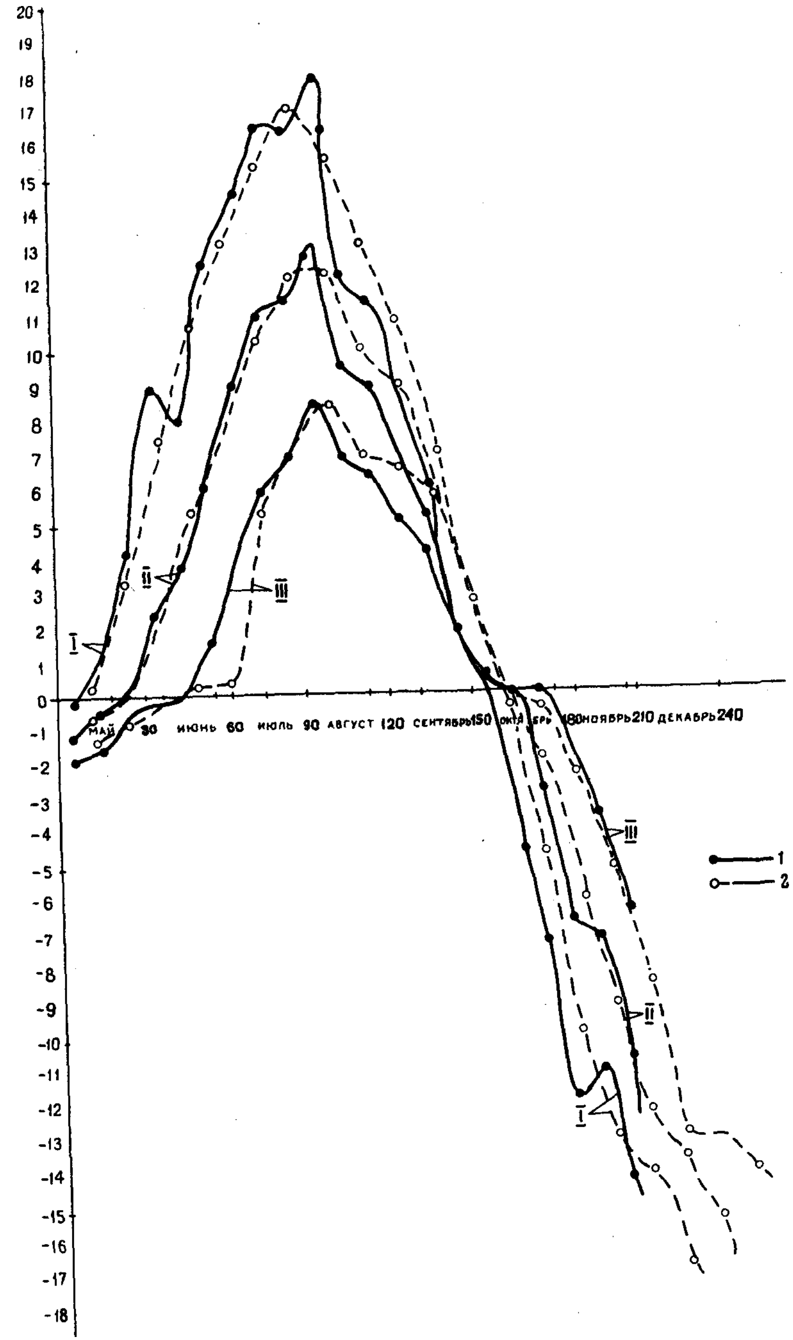


Рис.36. Ступенчатая функция изменения глубины протаивания (промерзания) при решении обратной задачи Стефана на УСМ-1

Рис.37. Изменение расчетных температур горных пород в слое сезонного протаивания
1 – по данным расчета на ИГЛ-2; 2 – то же, на УСМ-1; I – температура на глубине 0,07 м; II – 0,52 м; III – 0,98 м



По предложенной методике была решена частная задача о термическом режиме сезоннопротаивающего слоя при граничных условиях, отраженных в графическом виде на рис.35, и следующих начальных условиях:

Номер блока	Глубина, м	$\vartheta(x,0)$	Номер блока	Глубина, м	$\vartheta(x,0)$
1			17	2,325	-16,5
2	0,075	+1,0	18	2,425	-17,0
3	0,225	-1,0	19	2,625	-17,0
4	0,375	-2,5	20	2,775	-17,5
5	0,525	-4,0	21	2,925	-17,5
6	0,675	-6,0	22	3,5	-18,0
7	0,825	-7,0	23	4,5	-17,5
8	0,975	-8,5	24	5,5	-16,5
9	1,125	-9,5	25	6,5	-15,5
10	1,275	-11,0	26	7,5	-14,0
11	1,425	-11,5	27	8,5	-13,5
12	1,575	-12,5	28	9,5	-12,5
13	1,725	-13,5	29	10,5	-12,0
14	1,875	-14,5	30	11,5	-11,5
15	2,025	-15,5	31	12,5	-11,5
16	2,175	-16,0	32	13,5	-11,5
			33	14,0	-11,5

Результаты решения задачи на УСМ-1 в виде графика изменения во времени температуры горных пород на различных глубинах показаны на рис.37. Здесь же для сравнения приведены результаты решения идентичной задачи на гидроинтеграторе ИГЛ-2. Сопоставление полученных решений позволяет сделать вывод об их удовлетворительной сходимости в пределах точности электрического и гидродинамического моделирования тепловых процессов.

Таким образом, применение рассмотренного метода создает предпосылки для использования универсальной сеточной машины для решения обширного круга задач по тепло- и массопереносу с подвижными границами и движущимися источниками, а также обратных задач Стефана. Следует также отметить, что дальнейшая разработка этой методики представляет интерес и для решения прямой задачи Стефана.

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА РЕОСТАТНЫХ СЕТКАХ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ БУМАГЕ

Моделирование тепловых процессов, основанное на принципе электротепловой аналогии, является наиболее перспективным. Его характеризует высокая скорость процессов, простота обслуживания моделирующих устройств, незначительные затраты времени на подготовку задач.

Однако область применения электрического моделирования тепловых процессов в геокриологии в настоящее время практически ограничена

стационарными температурными полями. Для моделирования нестационарных тепловых процессов может быть использована отечественная универсальная сеточная машина типа УСМ-1, но высокая ее стоимость и трудности эксплуатации делают эту машину недоступной для широкого применения.

В этой связи представляют интерес различные методы моделирования нестационарных температурных полей на электроинтеграторах с реостатными сетками, в электролитических ваннах и на электропроводной бумаге. Так, методом последовательных интервалов, разработанным Либманом (Тетельбаум, 1959), могут быть решены задачи, описываемые уравнением Фурье.

Некоторые предпосылки моделирования задач нестационарной теплопроводности с помощью электропроводной бумаги, электролитических ванн и реостатных сеток можно установить на основе сопоставления решений уравнений Лапласа и Фурье при произвольных граничных и начальных условиях.

Математическая формулировка задачи о температурном поле полуограниченной среды при произвольных граничных и начальных условиях запишется как:

$$a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}=\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\ ; \qquad (105)$$

при $\tau=0 \quad \vartheta(x,0)=f(x)$;

при $x=0 \quad \vartheta(x,0)=\varphi(\tau)$.

Решение уравнения (105) может быть представлено как сумма решений двух уравнений при нулевых граничных и начальных условиях (Карслоу, Егер, 1964)

$$\vartheta(x,\tau)=u(x,\tau)+v(x,\tau)\ . \qquad (106)$$

Решения $u(x,\tau)$ и $v(x,\tau)$ находятся из уравнений

$$a\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}\ ; \qquad (107)$$

при $\tau=0 \quad u(x,0)=0$;

при $x=0 \quad u(0,\tau)=\varphi(\tau)$

и

$$a\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2}=\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial\tau}\ ; \qquad (107)$$

при $\tau=0 \quad v(x,0)=f(x)$;

при $x=0 \quad v(0,\tau)=0$.

Рассмотрим решение уравнения (107). Для естественных сред температура поверхности $\varphi(\tau)$ может быть представлена периодической функцией с периодом T. В частности, ее можно выразить в виде ряда Фурье

$$\varphi(\tau)=\frac{b_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\sin\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)+b_m\cos\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)\right]=\frac{b_0}{2}+ \tag{108}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin\left[\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)+\varepsilon_m\right]=\frac{b_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\cos\left[\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)+\varepsilon_m\right],$$

где

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\sin\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau;$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\cos\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau;$$

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\,d\tau;\quad A_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2};\quad \varepsilon_m=\operatorname{arctg}\frac{b_m}{a_m}.$$

Если ограничиться одной синусоидальной гармоникой с начальной фазой, равной нулю, то

$$\varphi(\tau)=a_1\sin\frac{2\pi}{T}\tau. \tag{109}$$

Решение уравнения (107) при граничном условии (109) и нулевом начальном условии имеет вид

$$\vartheta(x,\tau)=a_1e^{\sqrt{\frac{\pi}{aT}}x}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau-\sqrt{\frac{\pi}{aT}}x\right). \tag{110}$$

Сопоставим решение (110) с решением уравнения Лапласа о температурном поле для полуплоскости при изменении температуры на поверхности $x=0$ по аналогичному с (109) гармоническому закону:

$$\frac{\partial^2\vartheta(x',y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta(x',y)}{\partial y^2}=0 \tag{111}$$

при

$$x=0\quad \vartheta(0,y)=a_1\sin\frac{2\pi}{Y}y;$$

$$-\infty<y<\infty.$$

Решение задачи Дирихле для полуплоскости в постановке (111) запишется в виде

$$\vartheta(x',y)=a_1e^{-\frac{2\pi}{Y}x'}\sin\frac{2\pi}{Y}y. \tag{112}$$

Сравнение решений (110) и (111) показывает, что выполняются условия

$$x'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Y^2}{\pi aT}}\,x; \tag{113}$$

$$\frac{1}{T}\left(\tau-\sqrt{\frac{T}{4\pi a}}\,x\right)=\frac{1}{Y}y,$$

то решения становятся идентичными.

При более общем граничном условии, выраженном в форме ряда Фурье (108), соответствующие решения уравнений Фурье и Лапласа представляются в следующем виде:

$$\vartheta^*(x,\tau)=\vartheta(x,\tau)-\frac{b_0}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{a_me^{-\sqrt{m\frac{\pi}{aT}}x}\sin\left[\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)-\right.\right. \tag{114}$$

$$\left.\left.-\sqrt{m\frac{\pi}{aT}}x\right]+b_me^{-\sqrt{m\frac{\pi}{aT}}x}\cos\left[\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)-\sqrt{m\frac{\pi}{aT}}x\right]\right\};$$

$$\vartheta^*(x',y)=\vartheta(x',y)-\frac{b_0}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_me^{-m\frac{2\pi}{Y}x'}\sin\left(m\frac{2\pi}{Y}y\right)+\right. \tag{115}$$

$$\left.+b_me^{-m\frac{2\pi}{Y}x'}\cos\left(m\frac{2\pi}{Y}y\right)\right].$$

Решение (115) может быть получено с помощью электропроводной бумаги и на реостатных сетках. Для перехода к решению (114) необходимо воспользоваться преобразованиями типа (113). Но для их применения функция изменения температуры на поверхности должна быть представлена в виде ряда Фурье. Эта операция может быть выполнена также путем моделирования задачи на электропроводной бумаге или на реостатных сетках.

Предположим, что температура поверхности полуограниченной среды является периодической функцией, состоящей из 12 гармоник с периодами $T_m = \frac{T}{m}$, где $m = 1,2,\dots,12$. Период первой гармоники равен периоду годового цикла. Следовательно

$$\vartheta^*(0,\tau) = \sum_{m=1}^{12}\left[a_m \sin\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right) + b_m\cos\left(m\frac{2\pi}{T}\tau\right)\right]. \qquad (116)$$

Применительно к уравнению Лапласа граничное условие на оси запишется в виде

$$\vartheta^*(0,y) = \sum_{m=1}^{12}\left[a_m \sin\left(m\frac{2\pi}{Y}y\right) + b_m\cos\left(m\frac{2\pi}{Y}y\right)\right], \qquad (117)$$

где Y-период первой гармоники.

Промоделировав температурное поле на электропроводной бумаге или реостатной сетке при условии (117), получим решения, описываемые уравнением (114) при $m=12$. Для определения коэффициентов a_m и b_m в этом решении воспользуемся следующим приемом. При определении всех гармоник, начиная со второй, ограничим выбор теми из них, амплитудное значение которых не меньше 1% от амплитудного значения первой гармоники. Отношение амплитуд выбранной и первой гармоник определяется соотношением

$$\frac{a_{m,x}}{a_{1,x}} = e^{-\frac{2\pi}{Y}x'(m-1)}. \qquad (118)$$

Из этого соотношения находим формулу для определения глубины, на которой можно пренебречь всеми гармониками, начиная с m-й

$$x_3 = \frac{Y}{2\pi(m-1)}\ln\frac{a_{1,x}}{a_{m,x}}. \qquad (119)$$

Исходя из условия $\frac{a_{1,x}}{a_{m,x}} \approx 100$, по формуле (113) были произведены расчеты предельных глубин затухания гармоник, приведенных ниже.

Порядок гармоники, m	2	3	4	5	6	7	8
Предельная глубина затухания, в долях от периода первой гармоники	0,734	0,367	0,245	0,183	0,146	0,122	0,105

Порядок гармоники, m	9	10	11	12
Предельная глубина затухания, в долях от триода первой гармоники	0,092	0,073	0,067	0,061

Отсюда следует, что при $\frac{x}{Y} = 0,734$ можно пренебречь всеми гармониками, кроме первой. А это означает, что функцию $\vartheta^*(0,734\,Yy)$ можно рассматривать как частную гармонику первого порядка. Для определения коэффициентов a_1 и b_1 этой гармоники получаем систему уравнений

$$\vartheta^*(0{,}734\,Y,y_1) = a_1 e^{-1{,}468\pi}\sin\frac{2\pi}{Y}y_1 + b_1 e^{-1{,}468\pi}\cos\frac{2\pi}{Y}y_1; \qquad (120)$$

$$\vartheta^*(0{,}734\,Y,y_2) = a_1 e^{-1{,}468\pi}\sin\frac{2\pi}{Y}y_2 + b_1 e^{-1{,}468\pi}\cos\frac{2\pi}{Y}y_2.$$

Из (120) находим:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix}\vartheta^*(0{,}734\,Y,y_1), & A_2\\ \vartheta^*(0{,}734\,Y,y_2), & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1, & A_2\\ B_1, & B_2\end{vmatrix}} \qquad b_1 = \frac{\begin{vmatrix}\vartheta^*(0{,}734\,Y,y_1), & A_1\\ \vartheta^*(0{,}734\,Y,y_2), & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_2, & A_1\\ B_2, & B_1\end{vmatrix}}, \qquad (121)$$

где

$$A_1 = \sin\frac{2\pi}{Y}y_1; \qquad A_2 = \sin\frac{2\pi}{Y}y_2;$$

$$B_2 = \cos\frac{2\pi}{Y}y_2; \qquad B_1 = \cos\frac{2\pi}{Y}y_1.$$

Определив a_1 и b_1, переходим к системе уравнений, идентичных (120) для гармоник второго порядка с левыми частями

$$\vartheta^*(0{,}367\,Y, y_1) - \vartheta^*(0{,}734\,Y, y_1);$$

$$\vartheta^*(0{,}367\,Y, y_2) - \vartheta^*(0{,}734\,Y, y_2),$$

из которой определяем поэффициенты a_2 и b_2. Аналогичным путем методом исключения получаем все остальные коэффициенты a_m и b_m. Коэффициент b_0 находится из формулы (108).

После определения коэффициентов ряда Фурье и подстановки их в уравнение (114) получаем решение уравнения теплопроводности при нулевых начальных условиях.

На основании описанного метода можно определить коэффициент температуропроводности среды, если известен ход температуры на одной из глубин. Пусть, например, относительные амплитуды k -й гармоники на глубине x в среде и электрической модели равны $a_{x\tau}$ и a_{xy}. Тогда коэффициент температуропроводности среды определится из соотношения

$$a = \frac{\pi x^2}{kT\left(\ln\frac{a_{xy}}{a_{x\tau}} + \frac{2\pi k}{Y}x\right)^2}. \tag{122}$$

Решение (116) уравнения Фурье справедливо при нулевой начальной фазе и амплитуде сложного периодического колебания температуры. Это условие может быть достигнуто путем линейного преобразования координат τ и y. Если амплитуда и фаза отличны от нуля, а граничные условия в начальный момент испытывают разрыв, то необходимо определенное время для наступления периодического режима. Однако для естественных процессов свойственна непрерывность изменения граничных условий.

Рассмотрим теперь влияние начального распределения температуры на процесс формирования температурного поля полуограниченной среды. Влияние начальных условий описывается решением уравнения (107).

Как и в предыдущей задаче, полагаем, что функция $f(x)$ может быть представлена рядом Фурье.

Решение уравнения для неограниченной среды имеет вид (Карслоу, Егер, 1964)

$$v^*(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4a\tau}}\,dx' = \tag{123}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\sin(m\omega x') + b_m\cos(m\omega x')\right]e^{-\frac{(x-x')^2}{4a\tau}}\,dx'.$$

Вычисление интегралов для отдельных членов суммы уравнения (123) производится по формулам (Градштейн, Рыжик, 1962)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(m\omega x')\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4a\tau}}\,dx' = 2\sqrt{\pi a\tau}\;e^{-\omega_m^2 a\tau}\sin\omega_m x;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(m\omega x')\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4a\tau}}\,dx' = 2\sqrt{\pi a\tau}\;e^{-\omega_m^2 a\tau}\cos\omega_m x, \tag{124}$$

где $\omega_m = m\omega$.

С учетом (124) решение (123) преобразуется к виду

$$V^*(x,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\omega_m^2 a\tau}\left[a_m\sin\omega_m x + b_m\cos\omega_m x\right]. \tag{125}$$

Решение уравнения Лапласа при условиях

$$\vartheta(x,0) = 0; \quad -\infty < x < \infty; \quad \vartheta(0,y) = \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\sin\omega_m x + b_m\cos\omega_m x),$$

где $\omega_m = \frac{2\pi}{X}m$, $\quad -\infty < y < \infty$

имеет вид

$$\vartheta^*(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\omega_m y}(a_m\sin\omega_m x + b_m\cos\omega_m x). \tag{126}$$

Сравнение полученных решений показывает, что они различаются только "гасящими" множителями.

Для перехода от решения (126) к решению (125) необходимо положить $y = \omega_m a\tau$.

Выше были сопоставлены решения уравнений Лапласа и Фурье для неограниченных сред. Если функции граничного распределения температуры для уравнения Лапласа и начального – для уравнения Фурье описываются периодической и нечетной функцией, то и для полуограниченных сред решения по форме будут аналогичными решениям (119) и (126). Фронт волны для уравнения Фурье в этом случае будет смещаться в глубь среды со скоростью

$$\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = 2\sqrt{\frac{m\pi a}{T}}. \tag{127}$$

По истечении времени $\Delta\tau$ в слое толщиной x устанавливается нулевая температура. Задавшись рядом значений τ, находим глубины, разграничивающие для этих моментов слои, в которых температура либо равна нулю, либо изменяется по периодическому закону. Решение амплитуд гармоник описывается по-прежнему уравнением (118).

С помощью описанного метода можно без громоздких вычислений доводить до численных расчетов решения температурного поля в полуограниченной среде при произвольных граничных и начальных условиях. Число гармоник разложения в ряд функции $f(x)$ определяется в каждом конкретном случае.

Представляет интерес также возможность решения, хотя бы и приближенного, двухмерных и трехмерных задач нестационарной теплопроводности с помощью электропроводной бумаги, реостатных сеток и электролитических ванн. Для выяснения этих возможностей обратимся к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = a\nabla^2 \vartheta(x,y,z,\tau). \tag{128}$$

Решение этого уравнения может быть получено методом разделения переменных. Представим решение в виде произведения функций времени и координат

$$\vartheta(x,y,z,\tau) = T(\tau)F(x,y,z), \tag{129}$$

где $T(\tau)$ и $F(x,y,z)$ являются решениями вспомогательных уравнений

$$\frac{\partial T\tau}{\partial \tau} + \mu^2 a T(\tau) = 0; \tag{130}$$

$$\nabla^2 F(x,y,z) + \mu^2 F(x,y,z) = 0.$$

Второе уравнение в (130), в свою очередь, можно представить в виде системы уравнений

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 X(x); \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -\beta^2 Y(y); \quad \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\gamma^2 Z(z), \tag{131}$$

если положить $F(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$.

При этом имеет место соотношение $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\mu^2$. Частное решение первого уравнения в (130) описывается экспоненциальной функцией

$$T = e^{-\mu^2 a\tau} + C_1. \tag{132}$$

Тогда решение уравнения (129) может быть представлено в виде

$$\vartheta(x,y,z,\tau) = e^{-\mu^2 a\tau}F(x,y,z) + C_1 F(x,y,z). \tag{133}$$

При $\tau \to \infty$ (установившееся состояние) находим

$$C_1 = \vartheta(x,y,z,\infty)/F(x,y,z). \tag{134}$$

Из начального условия определяем

$$F(x,y,z) = \vartheta(x,y,z,0) - \vartheta(x,y,z,\infty). \tag{135}$$

На основе равенств (134) и (135) преобразуем (133):

$$\vartheta(x,y,z,\tau) - \vartheta(x,y,z,\infty) = e^{-\mu^2 a\tau}\left[\vartheta(x,y,z,0) - \vartheta(x,y,z,\infty)\right]. \tag{136}$$

Если начальное температурное поле среды является установившимся, то закон изменения температуры в каждой точке будет определяться граничными условиями. В общем виде функцию, описывающую изменение температуры на поверхности, можно представить с помощью тригонометрического ряда Фурье. Распространение гармоник определяется их частотой, поэтому экспоненциальный множитель в уравнении (136) следует заменить суммой слагаемых с различными μ:

$$\vartheta(x,y,z,\tau) - \vartheta(x,y,z,\infty) = \left[\vartheta(x,y,z,0) - \vartheta(x,y,z,\infty)\right]\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\mu_m^2 a\tau}. \tag{137}$$

Для определения μ_m воспользуемся граничным условием

$$\varphi(\tau) - \vartheta(x_п, y_п, z_п, \infty) = \left[\vartheta(x_п, y_п, z_п, 0) - \vartheta(x_п, y_п, z_п, \infty)\right]\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\mu_m^2 a\tau}. \tag{138}$$

Разлагая функцию $\varphi(\tau)$ в тригонометрический ряд по описанному ранее методу и принимая во внимание допущение о равенстве числа гармоник числу экспоненциальных слагаемых сумм в правой части (137), получаем

$$\mu_m^2 = \frac{1}{a\tau}\left\{\ln\left[a_m \sin(\omega_m \tau) + b_m \cos(\omega_m \tau)\right] - \vartheta_{п,\infty} - \ln(\vartheta_{п,0} - \vartheta_{п,\infty})\right\}. \tag{139}$$

В равенстве (139) $\vartheta_{п,0}$ и $\vartheta_{п,\infty}$ – значения температуры поверхности при $\tau=0$ и $\tau=\infty$.

Для сложных в геометрическом отношении тел начальное распределение даже в соотоянии равновесия может быть неоднородным. Оно определяется на электрической модели. Таким же путем отыскивается и температурное поле после наступления нового стационарного состояния.

Время запаздываний m-й гармоники на глубине x для одномерной системы находится из соотношения

$$\Delta\tau_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi a_m}}\,x. \tag{140}$$

Развитый здесь подход в решении задач нестационарной теплопроводности методами математического моделирования стационарных температурных полей является лишь самым первым шагом в рассматриваемой области.

Глава У

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГЕОКРИОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА ГАЗОВЫХ И ВОДНЫХ ПОТОКОВ В ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

Во многих областях народного хозяйства восточных и северных областей нашей страны возникает необходимость прогнозирования теплового режима газовых и жидкостных потоков в цилиндрических и в других по форме полостях, каналах и трубопроводах, а также в оценке теплового взаимодействия потоков с окружающей средой: водой, воздухом и горными породами.

Изучение теплового взаимодействия газовых и жидкостных потоков с окружающей средой имеет особое значение в областях с суровыми климатическими условиями и глубоким промерзанием земной коры. В этих условиях тепловое состояние не только определяет гидро- и аэродинамический режим потока, но и может полностью прекратить транспортировку вещества и привести к разрушению трубопровода. Это происходит, например, при замерзании воды или канализационной жидкости в трубопроводах.

Тепловое взаимодействие газовых и жидкостных потоков с окружающей средой зависит от свойств этой среды и механизма переноса тепла в ней. Самостоятельную проблему представляет изучение теплового взаимодействия потоков в полостях, каналах, трубах с промерзающими-протаивающими горными породами. Исследования по этой проблеме необходимы для решения многих задач, имеющих важное практическое значение. К их числу относятся задачи о тепловом взаимодействии с мерзлыми грунтами водопроводных и канализационных коммуникаций, газо- и нефтепроводов, о теплообмене воздушных потоков с горным массивом в шахтных стволах и подземных холодильниках, водных потоков с горными породами в каналах, о теплообмене в скважинах в процессах их бурения и последующей термической выстойки, о теплопередаче в теплообменниках тепловых насосов и др.

В изучении закономерностей тепло- и массообмена газовых и жидкостных потоков с промерзающими-протаивающими горными породами физическое моделирование имеет первостепенное значение. Это обусловлено тем, что для большинства рассмотренных задач методы физического моделирования являются основными, а во многих случаях единственным способом исследования процессов тепло- и массообмена

При этом изучение тепловых процессов непосредственно в технических сооружениях и коммуникациях следует рассматривать как частный случай физического моделирования.

Вся совокупность задач по тепловому взаимодействию газовых и жидкостных потоков с промерзающими-протаивающими почвами и горными породами может быть распределена по группам в зависимости от следующих признаков: от физической природы и механизма переноса тепла; формы, размеров и ориентации канала, полости; от условий тепло- и массообмена на границе потока со средой.

Комбинация этих признаков приводит к конкретной постановке задачи о тепло- и массообмене в системе: полость, канал, труба - окружающая среда. Каждая из таких задач характеризуется специфическими условиями моделирования.

Наибольшее практическое значение в настоящее время имеют задачи о тепловом взаимодействии водопроводных и канализационных коммуникаций с горными породами. Рассматриваемые задачи в теплофизическом отношении могут быть объединены в две основные группы: для напорного и безнапорного гидравлического режима.

При напорном гидравлическом режиме сечение трубопровода полностью занято жидкостным потоком, а при безнапорном - уровень заполнения является переменной величиной.

Движение жидкости при напорном режиме в предположении ее несжимаемости описывается уравнением (Эйгенсон, 1952)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V}\, grad)\vec{V} = -\frac{1}{\rho_ж}\, grad\, p + \nu \nabla^2 \vec{V}. \qquad (141)$$

Движущей силой потока в этом уравнении служит внешнее давление p.

Для безнапорного режима движущей силой является тяготение, и уравнение движения принимает вид (Эйгенсон, 1952)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V}\, grad)\vec{V} = \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}. \qquad (142)$$

Второе основное различие этих двух режимов связано с условиями теплообмена на поверхности водного потока. Если для напорного режима водный поток находится в тепловом контакте по всему контуру трубопровода, то при безнапорном возникает свободная поверхность потока. Между этой поверхностью и стенкой трубопровода происходит кондуктивный, конвективный и лучистый теплообмен. Кроме того, на охлажденной внутренней поверхности трубопровода существуют условия для конденсации водяных паров.

Рассмотрение общих условий физического моделирования процессов тепло- и массообмена в трубопроводах представляет самостоятельную сложную задачу.

Для большинства технических проблем, связанных с изучением тепло- и массообмена в трубопроводах и окружающих их горных породах, не требуется детального исследования гидро-, аэро- и термодинамических процессов. Основной задачей является определение коэффициента теплообмена водного потока при стационарном и нестационарном тепловом режиме.

Основываясь на общих положениях теории моделирования (Эйгенсон, 1952), рассмотрим теоретические предпосылки определения коэффициентов теплообмена водных потоков в горизонтальных цилиндрических трубопроводах при напорном и безнапорном гидравлическом режиме.

Остановимся вначале на более простом случае – напорном гидравлическом режиме при полном заполнении трубопровода.

При установившемся тепловом режиме количество тепла, отданное или полученное потоком жидкости за интервал времени $\Delta\tau$, определится из соотношения

$$q=\alpha(\vartheta_ж-\vartheta_с)S_б\Delta\tau, \qquad (143)$$

где $S_б$ – боковая поверхность трубопровода, а $\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_ж$ и $\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_с$ – трижды осредненные значения температуры потока и стенки: по сечению, длине участка трубопровода, интервалу времени.

$$\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_ж(\Delta l,\Delta\tau,S)=\frac{1}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\bar{\bar{\vartheta}}(\Delta l,\Delta\tau,S)\,d\tau;$$

$$\bar{\bar{\vartheta}}_ж(\Delta l,\Delta\tau,S)=\frac{1}{\Delta l}\int_0^{\Delta l}\bar{\vartheta}(\Delta l,\Delta\tau,S)\,dl; \qquad (144)$$

$$\bar{\vartheta}_ж(\Delta l,\Delta\tau,S)=\frac{1}{S_ж}\int_0^{S_ж}\vartheta(\Delta l,\Delta\tau,S)\,dS.$$

$$\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_с(\Delta l,\Delta\tau,S)=\frac{1}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\bar{\bar{\vartheta}}(\Delta l,\Delta\tau,S)\,d\tau;$$

$$\bar{\bar{\vartheta}}_с(\Delta l,\Delta\tau,S)=\frac{1}{\Delta l}\int_0^{\Delta l}\bar{\vartheta}(\Delta l,\Delta\tau,S)\,dl; \qquad (145)$$

$$\bar{\vartheta}_с(\Delta l,\Delta\tau,S)=\frac{1}{S_с}\int_0^{S_с}\vartheta(\Delta l,\Delta\tau,S)\,dS.$$

Осреднение температуры жидкости на участке Δl может быть произведено также из соотношений

$$\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_ж=\frac{\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}+\bar{\bar{\vartheta}}_{вхж}}{2}, \qquad (146)$$

где $\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{вхж}$ – осредненные значения температуры на входе и выходе трубопровода.

Значения $\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{вхж}$ находятся из равенства

$$q_в=c_в\rho_в\int_{S_ж}V_в\bar{\vartheta}_{вж}\,dS=c_в\rho_в\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}\int_{S_ж}V_в\,dS=c_в\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}\,i_в; \qquad (147)$$

$$q_{вх}=c_в\bar{\bar{\vartheta}}_{вхж}\,i_в,$$

где $i_в$ – поток жидкости за интервал времени; $\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{вхж}$ – осредненные за время $\Delta\tau$ значения температуры жидкости на входе и выходе.

$$\bar{\bar{\vartheta}}_{вж}=\frac{\rho_в\int_{S_ж}V_в\bar{\vartheta}_{вж}\,dS}{i_в}; \qquad \bar{\bar{\vartheta}}_{вхж}=\frac{\rho_в\int_{S_ж}V_{вх}\bar{\vartheta}_{вхж}\,dS}{i_в}. \qquad (148)$$

Количество тепла q, отданное окружающей среде или полученное из нее потоком, определится тогда как разность

$$q=q_в-q_{вх}. \qquad (149)$$

При небольших перепадах температуры жидкости между входным и выходным сечением определение количества тепла, отдаваемого трубопроводом, сопряжено с большими погрешностями. С значительно большей точностью эти теплопотери могут быть измерены с помощью цилиндрических коаксиальных тепломеров, устанавливаемых в нескольких сечениях трубопровода. Такой метод определения теплового потока применялся и в наших экспериментальных исследованиях.

Для металлических трубопроводов температура стенки может рассматриваться постоянной по сечению.

Тепловой поток, проходящий через стенку трубопровода при стационарном или квазистационарном режиме, эквивалентен потоку тепла в пристеночном слое горных пород

$$q=-\lambda_т\left[\int_{S_б}\left(\frac{\partial\vartheta_т}{\partial r}\right)dS_б\right]d\tau=-2\pi R_1\lambda_т\left[\int_{\Delta l}\left(\frac{\partial\vartheta_т}{\partial r}\right)dl\right]d\tau. \qquad (150)$$

Для определенности в формуле (150) предполагается, что пристеночный слой горных пород является талым.

Из (149) и (150) находится значение коэффициента теплоотдачи

$$\alpha=-\frac{\lambda_т}{(\bar{\bar{\vartheta}}_ж-\bar{\bar{\vartheta}}_с)S_б}\int_{S_б}\left(\frac{\partial\vartheta_т}{\partial r}\right)dS_б. \qquad (151)$$

Применив масштабные преобразования, получим уравнение (151) в безразмерном виде:

$$Bi=\frac{\alpha l_0}{\lambda_т}=\frac{1}{(\bar{\bar{\theta}}_ж-\bar{\bar{\theta}}_с)S_б}\int_{S_б}\left(\frac{\partial\theta_т}{\partial R}\right)dS_б, \qquad (152)$$

где Bi – критерий Био.

Если соблюдаются условия моделирования, то для стационарного режима критерий Bi находится в функциональной зависимости от критериев Рейнольдса, Прандтля, Грасгофа, фазового превращения, свойств среды и других величин.

Из условия

$$(Bi)_{мод} = (Bi)_{нат} \tag{153}$$

находится соотношение между коэффициентами теплоотдачи натурной и моделирующей систем

$$\alpha_{нат} = \alpha_{мод}\left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{мод}\left(\frac{\lambda_т}{l_0}\right)_{нат}. \tag{154}$$

Аналогичное соотношение имеет место и при изучении теплообмена с горными породами газовых потоков.

При безнапорном гидравлическом режиме и неполном заполнении трубопровода коэффициент теплообмена потока с горными породами является эффективной величиной, отражающей кондуктивный, конвективный и лучистый перенос тепла.

Общее количество тепла, поступающего в горные породы, найдется как сумма тепловых потоков через поверхность контакта стенки с жидкостью (q_1) и на границе с газовой средой (q_2):

$$q = q_1 + q_2. \tag{155}$$

Поток тепла, проходящего через контур АВС (рис.38), определится по аналогии с (143):

$$q_1 = 2\alpha'\left(\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\bar{\vartheta}}}{}'_c\right) R_0 \arccos\frac{R_0 - l_R}{R_0}\,\Delta\tau, \tag{156}$$

где $\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}{}'_c$ – трижды осредненное значение температуры стенки трубопровода для контура АВС. α' – коэффициент теплообмена потока на контуре АВС.

Поток тепла между поверхностью жидкого потока и поверхностью трубопровода на контуре АДС определится как сумма составляющих

$$q_2 = \left(q_2^{I} + q_2^{II} + q_2^{III} + q_2^{IV}\right) S_2, \tag{157}$$

где q_2^{I} – кондуктивный тепловой поток; q_2^{II} – конвективный тепловой поток; q_2^{III} – лучистый поток тепла; q_2^{IV} – количество тепла, переносимое в результате процессов испарения – конденсации,

$$S_2 = 2R_0\left(\pi - \arccos\frac{R_0 - l_R}{R_0}\right).$$

На основе общей теории теплообмена (Кутателадзе, 1962) перечисленные составляющие теплового потока могут быть определены следующим образом:

$$q_2^{I} + q_2^{II} = \lambda_{эк}\left(\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\bar{\vartheta}}}{}''_c\right)\Phi\,\Delta\tau, \tag{158}$$

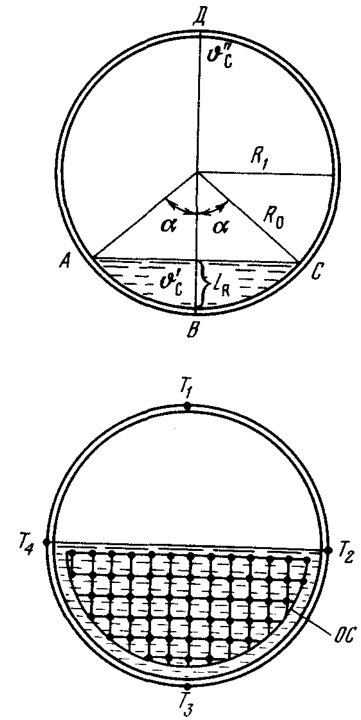


Рис.38. Схема для расчета коэффициента теплообмена на неполном заполнении трубопровода

где $\lambda_{эк}$ – эквивалентный коэффициент теплопроводности газовой прослойки; $\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_c$ – трижды осредненное значение температуры на контуре АДС; $\bar{\bar{\vartheta}}_{пж}$ – осредненное по времени и двум измерениям значение температуры поверхности жидкости.

$$\lambda_{эк} = \varepsilon_к \lambda_г. \tag{159}$$

Здесь $\lambda_г$ – коэффициент теплопроводности газа; $\varepsilon_к = f(Pr, Gr)$ – конвективный параметр; Φ – форм-фактор.

Поток лучистого тепла, поступающего на поверхность стенки трубопровода, определится из уравнения (Кутателадзе, 1962)

$$q_2^{III} = 4{,}9\,\varepsilon_{пр}\left[T_{пж}^4 - \left(T''_c\right)^4\right]\frac{S_{жс}}{S_2}\,10^{-8}\,\Delta\tau, \tag{160}$$

где $\varepsilon_{пр}$ – приведенная степень черноты

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_ж} - 1\right)\varphi_{жс} + \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - 1\right)\varphi_{сж}};$$

$\varepsilon_ж$ и $\varphi_{сж}$ – степени черноты жидкости и поверхности стенки трубопровода; $\varphi_{жс}$ и $\varphi_{сж}$ – коэффициенты облученности; $S_{жс}$ – взаимная поверхность излучения.

$$S_{жс} = \int\limits_{S_ж} dS_ж \int\limits_{S_c} \frac{\cos\varphi_ж \cos\varphi_c}{\pi r^2} dS_c ;$$

$S_ж$ и S_c – поверхности жидкого потока и свободного контура сечения трубопровода; $\varphi_ж$ и φ_c – углы падения излучения на центры элементарных площадок $dS_ж$ и dS_c; r – расстояние между площадками.

При $\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c \ll T_c$ равенство (160) может быть представлено в приближенном виде:

$$q_2^{III} \approx 2{,}0\, \varepsilon_{пр} (T_c'')^3 \frac{S_{жс}}{S_2} (\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c'') \Delta\tau \cdot 10^{-7}. \qquad (161)$$

Количество тепла, переносимого в результате термодиффузии водяного пара с водной поверхности и конденсации его на поверхности стенки трубопровода, определится из уравнения

$$q_2^{IV} = (h_п - h_в) D_т \Phi (\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c'') \Delta\tau = \mu_0 D_т \Phi (\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c'') \Delta\tau, \qquad (162)$$

где $D_т$ – коэффициент термодиффузии; $h_п$ и $h_в$ – удельные энтальпии пара и воды; μ_0 – удельная теплота испарения.

Принимая во внимание значения составляющих теплового потока q_2, представим уравнение (157) в виде

$$q_2 \approx (\varepsilon_к \lambda_г \Phi + 2{,}0\, \varepsilon_{пр} (T_c'')^3 \frac{S_{жс}}{S_2} 10^{-7} + \mu_0 D_т \Phi) S_2 (\vartheta_{пж} - \vartheta_c') \Delta\tau. \qquad (163)$$

Введем понятие эквивалентного коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_{эк} = \varepsilon_к \lambda_г \Phi + 2{,}0\, \varepsilon_{пр} (T'')^3 \frac{S_{жс}}{S_2} 10^{-7} + \mu_0 D_т \Phi. \qquad (164)$$

Тогда уравнение (163) примет вид

$$q_2 = \alpha_{эк} (\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_п'') S_2 \Delta\tau. \qquad (165)$$

Общие теплопотери потока жидкости в соответствии с соотношениями (166) и (165) равны

$$q = 2\alpha' R_0 \arccos \frac{R_0 - l_R}{R_0} (\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c') \Delta\tau + \qquad (166)$$

$$+ 2\alpha_{эк} R_0 \left(\pi - \arccos \frac{R_0 - l_R}{R_0}\right) (\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c'') \Delta\tau.$$

Из анализа последнего уравнения может быть сделан вывод о том, что при неполном заполнении трубопровода процесс теплообмена водного потока с горными породами может быть охарактеризован двумя коэффициентами теплоотдачи. Для этих коэффициентов по аналогии с (151) имеют место соотношения

$$\alpha' = -\frac{\lambda_т}{(\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c') S_{ABC}} \int\limits_{S_{ABC}} \frac{\partial \vartheta_т}{\partial r} dS_{ABC} ;$$

$$\alpha_{эк} = -\frac{\lambda_т}{(\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c') S_{ADC}} \int\limits_{S_{ADC}} \frac{\partial \vartheta_т}{\partial r} dS_{ADC} . \qquad (167)$$

В безразмерном виде уравнения (167) запишутся в виде

$$Bi' = \frac{\alpha' l_0}{\lambda_т} = \frac{1}{(\bar{\bar{\theta}}_ж - \bar{\bar{\theta}}_c') S_{ABC}} \int\limits_{S_{ABC}} \frac{\partial\theta}{\partial R} dS_{ABC} ;$$

$$Bi'' = \frac{\alpha_{эк} l_0}{\lambda_т} = \frac{1}{(\bar{\bar{\theta}}_ж - \bar{\bar{\theta}}_c') S_{ADC}} \int\limits_{S_{ADC}} \frac{\partial\theta}{\partial R} dS_{ADC} . \qquad (168)$$

При соблюдении условий геометрического подобия безразмерные значения форм-фактора и взаимной поверхности излучения натурной и модельной систем равны между собой. Условие идентичности степени черноты поверхности является менее строгим, так как в связи с конденсацией паров радиационные свойства поверхности трубопровода в значительной степени определяются свойствами воды.

Из равенства критериев

$$(Bi')_{нат} = (Bi')_{мод} ;$$

$$(Bi'')_{нат} = (Bi'')_{мод} \qquad (169)$$

находим соотношения между коэффициентами теплоотдачи в натурной и моделирующей системах

$$\alpha_{нат} = \alpha'_{мод} \left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{мод} \Big/ \left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{нат} ;$$

$$(\alpha_{эк})_{нат} = (\alpha_{эк})_{мод} \left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{мод} \Big/ \left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{нат} . \qquad (170)$$

В приближенных расчетах можно считать равными значения $\bar{\bar{\vartheta}}_ж$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{пж}$. Если к тому же ввести осредненную температуру внутренней поверхности стенки трубопровода по всему контуру $\bar{\bar{\vartheta}}_c$, то можно перейти к понятию эффективного коэффициента теплоотдачи трубопровода с неполным заполнением.

С этой целью введем соотношения

$$\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c' = A_\vartheta' (\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c); \qquad (171)$$

$$\bar{\bar{\vartheta}}_{пж} - \bar{\bar{\vartheta}}_c' \approx \bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c'' = A_\vartheta''\left(\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c\right),$$

где A_ϑ' и A_ϑ'' – коэффициенты пропорциональности.

Подставив (171) в (166), получим

$$q = \alpha_{эф}\left(\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\bar{\vartheta}}_c\right) S_к \Delta\tau, \tag{172}$$

где

$$\alpha_{эф} = \frac{1}{\pi}\alpha' \arccos\frac{R_0 - l_R}{R_0} A_\vartheta' + \frac{1}{\pi}\alpha_{эк} A_\vartheta''\left[\pi - \arccos\frac{R_0 - l_R}{R_0}\right]. \tag{173}$$

Из критериального уравнения (153) устанавливаем связь между эффективными коэффициентами теплоотдачи в модельной и натурной системах:

$$(\alpha_{эф})_{нат} = (\alpha_{эф})_{мод}\frac{\left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{мод}}{\left(\frac{l_0}{\lambda_т}\right)_{нат}}. \tag{174}$$

Тепловой режим подземных трубопроводов при безнапорном гидравлическом режиме определяется критериями Рейнольдса Re, Грасгофа Gr, Прандтля Pr, а также критериями $K_л$ и K_Q.

Критерии $K_л$ и K_Q характеризуются следующей структурой:

$$K_л = \frac{\lambda_т}{l_0 \sigma_0 \varepsilon_{пр} T^3}; \qquad K_Q = \frac{\lambda_т}{D_т r_0}. \tag{175}$$

Из условий (154,170,174) следует, что при определении коэффицентов теплообмена теплофизические свойства среды в натурной и моделирующей системах могут быть различными. Это обстоятельство значительно расширяет возможности физического моделирования процессов теплообмена в подземных трубопроводах.

Соотношение (174) позволяет определить коэффициент теплоотдачи в любой натурной системе, если его величина определена для модельного трубопровода при выбранной скорости движения. При пересчете коэффициента теплоотдачи должно учитываться различие теплопроводящих свойств среды, окружающей трубопровод. В то же время известно, что при напорном течении жидкости в трубах коэффициент теплообмена в круглых трубопроводах определяется из следующих критериальных уравнений (Болгарский, Мухачев, Щукин, 1964):

При

$$Re_f = 10^4 \div 10^6 \quad и \quad Pr_f = 0{,}6 \div 2500$$

$$Nu_f = 0{,}021\, Re_f^{0,8}\, Pr_f^{0,43}\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25}.$$

При

$$Re_f < 2000 \tag{176}$$

$$Nu_f = 0{,}15\, Re_f^{0,33}\, Pr_f^{0,43}\, Gr^{0,1}\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25};$$

в переходной области при $Re_f = 2\cdot 10^3 \div 10^4$

$$Nu_f = K_0 Pr_f^{0,43}\left(\frac{Pr_f}{Pr_f}\right)^{0,25},$$

где индексы f и W относятся к жидкости и стенке трубопровода, а K_0 определяется по следующим данным:

$Re_f \cdot 10^{-3}$	2,2	2,3	2,5	3,0	3,5	4	5	6	7	8	9	10
K_0	2,2	3,6	4,9	7,5	10	12,2	16,5	20	24	27	30	33

Приведенные соотношения безотносительны к коэффициенту теплопроводности среды, окружающей трубопровод. Коэффициент теплообмена определяется в них из критерия Нуссельта $Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda_ж}$, где $\lambda_ж$ – коэффициент теплопроводности жидкого теплоносителя. Однако непосредственное применение критериальных уравнений (176) для расчета коэффициента теплообмена в подземных трубопроводах с неполным сечением жидкостного потока не представляется возможным. С некоторым ограничением эти уравнения могут быть использованы для расчета коэффициента теплообмена для смоченного периметра сечения трубопровода (см. АВС на рис.38). Для этого участка периметра коэффициент теплообмена найдется из следующего функционального критериального уравнения:

$$Nu_ж = F_ж\left(Re_ж, Gr_ж, Pr_ж, K_l\right), \tag{177}$$

где $K_l = \frac{l_R}{2R_0} = \frac{l_R}{D}$ – критерий, характеризующий уровень заполнения трубопровода.

Теплообмен жидкостного потока с окружающим грунтом в результате свободной конвекции описывается критериями Грасгофа и Прандтля. При этом наибольший интерес представляет выяснение связи между критериями Нуссельта и Грасгофа. В структуре критерия Грасгофа $Gr = \frac{g l^3}{\nu_ж^2}\beta_ж \Delta\vartheta$, где g – ускорение земного тяготения, $\beta_ж$ – коэффициент термического расширения жидкости), под $\Delta\vartheta$ подразумевается перепад температуры, который обусловливает возникновение свободной конвекции теплоносителя.

Примем в качестве $\Delta\vartheta$ перепад осредненных значений температуры поверхности жидкости и смоченного контура АВС (или температуры в точке В). Тогда для определения коэффициента теплообмена для смоченного периметра могут быть использованы функциональные уравнения (177).

Для воздушного (сухого) участка периметра нормального сечения трубы теплообмен между поверхностью потока и стенкой трубопровода описывается критериальным уравнением

$$Nu_г = F_г\left(Re_г, Gr_г, Pr_г, K_л, K_Q, K_l\right). \tag{178}$$

Так как увлечение воздуха потоком жидкости в трубопроводе весьма незначительное, то влиянием критерия Рейнольдса в уравнении (178) можно пренебречь. Критерии Прандтля для воздуха и водяного пара в исследуемом интервале температур (273–293 °K) могут считаться постоянными.

Таким образом, критериальное уравнение, описывающее теплообмен в паро-воздушной прослойке, может быть представлено в виде

$$Nu_r \approx F_r(Gr_r, K_л, K_Q, K_l). \qquad (179)$$

Практическое использование уравнений (177–179) затруднено из-за отсутствия данных о перепаде температуры по контуру сечения трубопровода. В качестве исходных данных при расчетах теплового режима подземных трубопроводов задаются температуры поверхности грунта или приземного слоя воздуха, а также температура грунта на глубине заложения трубопровода и начальной температуры теплоносителя.

Если же использовать при построении критериальных уравнений, в частности критерия Грасгофа, перепады температуры между поверхностью грунта и потоком жидкости, то эти критерии будут определяться также термическим сопротивлением системы трубопровод-грунт. Величина же термического сопротивления такой системы характеризуется теплофизическими свойствами вмещающей трубопровод среды. Это обстоятельство объясняет физическую сущность и правомерность отношения (174). При таком подходе уравнения (177–179) заменяются соотношениями, в которых вместо критериев Нуссельта вводятся критерии Био. Однако в этом случае появляются дополнительные критерии $K_\lambda = \frac{\lambda_т}{\lambda_м}$ и $K_R = \frac{R_\xi}{R_o}$, где $\lambda_т$ и $\lambda_м$ – коэффициенты теплопроводности талой и мерзлой зон, R_ξ – радиус протаивания. Эти критерии определяют термическое сопротивление системы трубопровод-грунт. Для многослойной тало-мерзлой среды появляется также критерий, характеризующий влияние сезонного промерзания – протаивания на термическую анизотропность среды. Под коэффициентом теплопроводности среды понимается его эффективное значение. Если не учитывать различие коэффициентов $\lambda_т$ и $\lambda_м$, то надобность в указанных критериях отпадает.

Таким образом, существуют две различные схемы применения физического моделирования для решения проблемы теплообмена подземных трубопроводов при безнапорном гидравлическом режиме.

В соответствии с первой схемой производится экспериментальное определение теплопотерь подземного трубопровода, обусловленных как теплообменом потока жидкости со стенками трубопровода, так и термическим сопротивлением грунта. Коэффициент теплообмена в этой схеме соответствует коэффициенту теплопотерь подземного трубопровода. При вычислении этого коэффициента, а следовательно, и критерия Bi, а также определяющих параметров используются перепады температуры между поверхностью грунта и жидкости.

Во второй методической схеме определяется истинный коэффициент теплообмена жидкостного потока со стенкой трубопровода. Общие же потери тепла подземного трубопровода находятся на основе расчетных значений величины термического сопротивления трубопровод-грунт. По данной схеме проводилось обобщение экспериментальных данных, полученных в процессе физического моделирования теплообмена подземного трубопровода с грунтами. Физическое моделирование проводилось на описанной ранее универсальной моделирующей установке.

Модель трубопровода. В качестве модели трубопровода была взята тонкостенная цилиндрическая труба длиной 2 м и диаметром 0,03 м, на которой установлено четыре штуцера (три для размещения термопар и один для замера и дополнительного контроля уровня заполнения). В начале, середине и конце трубы установлены датчики тепловых потоков – тепломеры ($Т_м$). Они служат для количественной оценки теплового потока в системе стенка трубы – грунт.

Тепломер состоит из двух полуцилиндров (для более удобного крепления) с термопарами и двух охранных колец. В связи с тем, что требуется определять тепловые потоки при различных заполнениях трубопровода, тепломер может давать значение теплового потока смоченного и воздушного контуров при следующих значениях критерия K_l : 0,25; 0,5; 0,75; 1,00.

На стенке трубы между тепломером и охранным кольцом находятся четыре термопары ($Т_п$), служащие для измерения температуры на контуре трубы и еще в трех сечениях трубы для измерения температуры воды.

Кроме указанных датчиков непосредственно на трубе, для контроля за установлением стационарного теплового режима под трубой на расстоянии 5 мм от каждого тепломера находится гребенка из четырех термопар. Здесь же расположены четыре термистора (Тр) для контроля регулируемой температуры.

Описанная модель трубопровода укладывается в моделирующую среду (грунт, чугунная дробь и т.п.) на глубину 5 см под определенным углом наклона (β). В проведенных опытах $tg\beta$ изменялся от 1/200 до 5/200.

Управление гидравлическим и термическим режимами потока жидкости в трубопроводе осуществляется с помощью системы, показанной на рис. 39.

Вода из питающего резервуара ПР поступает в бойлер Б, где она перемешивается электромешалкой ЭМ и нагревается электрическим нагревателем до заданной температуры, которая поддерживается электронным регулятором температуры. Из бойлера через вентиль В вода поступает в устройство для регулирования уровня воды в трубопроводе УРУ. Это устройство представляет собой сосуд, в котором установлена сливная воронка СВ. С помощью воронки устанавливается уровень в УРУ а следовательно, и в трубопроводе. Весь излишек воды стекает по сливному шлангу $СШ_1$ в сливной резервуар СР.

Расход жидкости, а следовательно, и скорость потока определяются методом измерения времени заполнения известного объема. Устройство для измерения расхода жидкости УИР состоит из сосуда определенного объема, электромагнитного зажима ЭМЗ для перекрытия сливного шланга $СШ_2$ и контактно-контрольных приспособлений. С помощью пускового ключа ПК в определенный момент времени осуществляется практически мгновенное дистанционное перекрытие шланга $СШ_2$ и вода из трубопровода начинает заполнять эталонных сосуд. После того как поплавок $П_1$ достигает заданного уровня, соединенный с ним шток $Ш_1$ с контактной головкой $КГ_1$, замыкает контакты $К_1$. При этом происходит срабатывание реле $Р_1$ и размыкание контактов в цепи ЭМЗ. Момент времени замыкания контактов $К_1$ отличается с помощью стрелочного индикатора. Разность моментов времени характеризует продолжительность заполнения измерительного цилиндра. Расход жидкости определяется отношением объема к разности моментов времени.

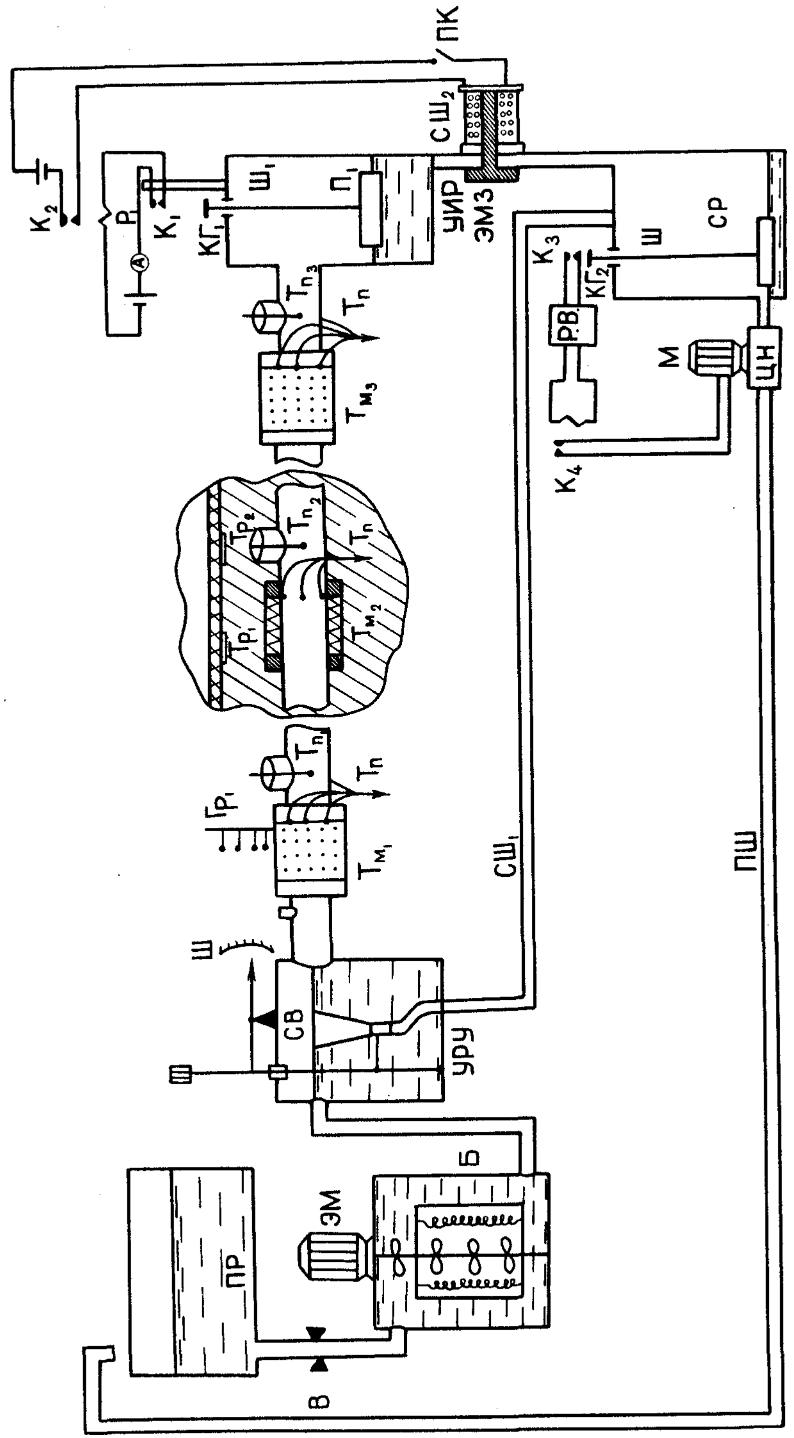


Рис.39. Принципиальная схема модели трубопровода

Вода по шлангу $СШ_2$ поступает в сливной сосуд СР. Перекачивание воды в питающий резервуар осуществляется с помощью центробежного насоса ЦН, вращаемого мотором М, и перекачивающего шланга ПШ. Включение мотора осуществляется автоматическим электронно-механическим блоком. Этот блок состоит из пенопластового поплавка со штоком Ш и контактной головки $КГ_2$, контактов $К_3$, реле времени РВ с контактной группой $К_2$. Реле времени обеспечивает устойчивый режим работы насоса в продолжение некоторого момента после срабатывания контактной группы $К_3$. По соображениям техники безопасности питание всех узлов и элементов моделирующей системы осуществляется постоянным напряжением 24 в.

Для измерения температуры поверхности стенки трубопровода применялись медь-константановые термопары, спаи которых располагались в диаметрально противоположных точках $Т_1$ и $Т_3$, $Т_2$ и $Т_4$ контура сечения трубы (см.рис.38).Измерение осредненной по сечению жидкого потока температуры производилось с помощью осредняющего спая ОС, который выполнен в виде сетки спаянных в узловых точках отрезков медной и константановой проволоки.

Определение коэффициента теплообмена жидкостного потока трубопровода может производиться по двум методическим схемам. Одна схема основана на определении суммарных теплопотерь трубопровода через боковую ее поверхность с помощью оценки изменения теплосодержания жидкости, протекающей в единицу времени:

$$\alpha = \frac{V\rho_ж c_ж(\bar{\bar{\vartheta}}_{вх} - \bar{\bar{\vartheta}}_{вых})}{S(\bar{\vartheta}_ж - \bar{\vartheta}_с)}, \tag{180}$$

где V – скорость потока; $\rho_ж$ и $c_ж$ – плотность и удельная теплоемкость жидкости; $\bar{\bar{\vartheta}}_{вх}$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{вых}$ – осредненные по входному и выходному сечению и времени значения температуры жидкости; S – боковая поверхность трубопровода $S=2\pi R_0 L$; L – длина участка трубопровода.

Расчет коэффициента теплообмена α по рассмотренному методу рационально производить только в том случае, если разность температур $\bar{\bar{\vartheta}}_{вх}$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{вых}$ достаточно велика.

Для моделей трубопровода протяженностью 1,5–3,0 м разность перепада температур $\bar{\bar{\vartheta}}_{вх}$ и $\bar{\bar{\vartheta}}_{вых}$ не превышает 0,1–0,3°, а в некоторых опытах составляет всего несколько сотых градуса. При этом относительная погрешность измерения разности температур, а следовательно, и коэффициента теплообмена может превысить 100%.

Другой метод расчета коэффициента теплообмена связан с определением тепловых потоков (теплопотерь) трубопровода q с помощью цилиндрических тепломеров, описанных в предыдущем разделе. В данной методической схеме коэффициент теплообмена потока в трубопроводе найдется из уравнения

$$\alpha = \frac{q}{S(\bar{\bar{\vartheta}}_ж - \bar{\vartheta}_с)}. \tag{181}$$

1/8 911

Точность данного метода обусловлена погрешностью определения теплового потока тепломерами, весьма незначительной при градуировке тепломеров по принципу эталонного теплового источника. Сущность этого принципа заключается в установлении экспериментальной градуировочной зависимости: плотность теплового потока – термо-ЭДС термопарной батареи тепломера. Величина теплового потока при стационарном тепловом режиме через цилиндрическую стенку полого тепломера находится по мощности осевого источника джоулева тепла.

По рассмотренной методической схеме производилась градуировка цилиндрических тепломеров и определение с помощью их теплопотерь модели трубопровода в проводимых нами опытах.

Результаты экспериментальных исследований. Обработка экспериментальных данных, характеризующих зависимость коэффициента теплообмена жидкостного потока в подземном трубопроводе для "смоченного" и "сухого" участка периметра сечения от определяющих его величин, производилась в соответствии с критериальными уравнениями (177) и (179). При этом, согласно общей теории подобия применительно к процессам тепло- и массообмена, предполагалось, что между критериями $Bi, Re, Gr, Pr, K_л$, K_l, K_Q существуют степенные зависимости (Гухман, 1967).

Обобщение экспериментальных данных с помощью критериальных уравнений производилось при следующих значениях исходных параметров.

Температура воды на входе	5, 10, 15°
Температура поверхности грунта	–2, –5, –10, –15, –20°
Гидравлический уклон, $tg\,\beta$	$\frac{1}{200}$, $\frac{2}{200}$, $\frac{3}{200}$, $\frac{4}{200}$, $\frac{5}{200}$
Уровень заполнения, K_l	$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1

На основе варьирования комбинаций значений указанных величин было проведено 130 опытов по определению коэффициента теплообмена для сухого и смоченного участков периметра сечения трубопровода.

Для смоченного участка функциональное соотношение (177) исследовалось в виде степенного критериального уравнения

$$Nu_ж = C_1 Re_ж^{n_1} Gr_ж^{n_2} Pr_ж^{n_3} K_l^{n_4}, \qquad (182)$$

где C_i – постоянный коэффициент, а n_i – показатели.

Определение численных значений C_i и n_i производилось по схеме нахождения двухсторонних зависимостей между критерием $Nu_ж$ и определяющими его критериями. На первой стадии отыскивалась зависимость $Nu_ж$–$Gr_ж$ при определенном значении $Re_ж$ и сериях значений $Pr_ж$ и K_l. Затем определялись параметры n_1 и n_3. И, наконец, выявлялась зависимость $Nu_ж$–$Re_ж$. При этом оказалось, что параметры n_2 и n_3 зависят от критериев K_l и $Pr_ж$.

Конкретизированное таким образом для первой стадии уравнение (182) принимает вид

$$Nu_ж = (0{,}25 + 1{,}44 K_l + 0{,}18 K_l \vartheta)\, Pr_ж^{0,43} \left(\frac{Gr_ж}{Gr_0}\right) K_0^{(0{,}06+0{,}036\vartheta) Pr_ж^{0,43}}, \qquad (183)$$

где $Gr_0 = \ln(-2{,}4 + 4{,}3\sqrt{K_l - 0{,}25} + 3{,}5 \ln \vartheta)$,

$$K_l > 0{,}25.$$

Анализ этого уравнения показывает, что оно описывает переходный режим теплообмена (от ламинарного к турбулентному) в подземном трубопроводе, так как критерий $Re_ж$ изменяется в пределах от $2 \cdot 10^3$ до 10^4.

Функциональное уравнение (179), характеризующее теплообмен в паровоздушной прослойке подземного трубопровода, исследовалось в форме степенного критериального уравнения

$$Nu_г = C_2 Gr_г^{n_1'} K_Q^{n_2'} K_л^{n_3'} K_l^{n_4'}. \qquad (184)$$

Параметры C_2 и n_i' определялись по рассмотренной уже ранее схеме двухсторонних зависимостей.

При анализе этих зависимостей было установлено, что перенос тепла лучистым механизмом при существующих градиентах температурах в воздушной прослойке весьма незначителен. Это обстоятельство позволило исключить $K_л$ из числа определяющих критериев.

В окончательном виде уравнение (184) запишется:

$$Nu_г = (4{,}39 + 21{,}2 \cdot K_l)\, Gr^{+0,23} K_Q^{-0,25}. \qquad (185)$$

Критериальные уравнения (183) и (184) позволяют определить значения коэффициентов теплообмена водных потоков в подземных трубопроводах при безнапорном гидравлическом режиме. В связи с практической идентичностью физических свойств воды и канализационной жидкости эти уравнения могут быть применены при изучении теплового режима канализационных коммуникаций.

Наиболее существенное затруднение при расчете коэффициентов теплообмена для смоченного и воздушного участков периметра сечения и эквивалентного коэффициента возникает при задании перепадов температуры по сечению трудопровода. Эти данные необходимы для вычисления критериев Грасгофа. Как показали расчеты, эти перепады связаны с общими разностями температуры между поверхностью грунта и воды многосторонними зависимостями. В частности, для исследованной нами модельной среды (чугунная дробь) получены следующие соотношения:

для воздушного контура

$$\Delta\vartheta_г = (0{,}4 - 0{,}36 K_l) + (0{,}08 - 0{,}12 K_l)\vartheta_в + (0{,}03 - 0{,}04 K_l)(\vartheta_п - \vartheta_в);$$

1/28 911

для смоченного контура (186)

$$\Delta\vartheta_{ж} = (0,45 - 0,36\,K_l) + 0,06\,\vartheta_{в} + (0,3 - 0,4\,K_l)(\vartheta_{п} - \vartheta_{в}).$$

В дальнейшем предстоит установить более общие зависимости подобного рода при различных значениях коэффициента теплопроводности грунтово или их эффективных значений для тало-мерзлой системы.

В практических целях для определения $\Delta\vartheta_{г}$ и $\Delta\vartheta_{ж}$ может быть рекомендован метод последовательных приближений. Задавшись в первом приближении их значениями из соотношений вида (186), методом электромоделирования можно найти и их уточненные величины.

После определения коэффициента теплообмена представляется возможным определить общие потери подземного трубопровода и динамику температурного режима потока. Рассмотрим с этой целью уравнение теплового баланса трубопровода

$$2\pi\frac{\bar{\vartheta}_{ж} - \bar{\vartheta}_{п}}{R_{т}} + R_0\,dl = -S_{сеч}\,v\,\rho_{ж}\,c_{ж}\,d\bar{\vartheta}_{ж}\,, \tag{187}$$

где $\bar{\vartheta}_{п}$ – осредненное по расчетному интервалу времени и по площади значение температуры поверхности почвы; $\bar{\vartheta}_{ж}$ – осредненная во времени и сечению потока температура жидкости; $R_{т}$ – термическое сопротивление системы подземный трубопровод-грунт; $S_{сеч}$ – площадь сечения потока жидкости; $\rho_{ж}$ и $c_{ж}$ – плотность и удельная теплоемкость жидкости.

Термическое сопротивление системы при отсутствии естественного теплового потока находится из соотношения

$$R_{т} \approx \frac{1}{2\pi\Delta l}\left(\alpha_{эф}R_0 + \frac{1}{\lambda_{т}}\ln\frac{R_{тз}}{R_0} + \frac{1}{\lambda_{м}}\ln\frac{2l_1}{R_{тз}}\right), \tag{188}$$

где Δl – длина участка трубопровода; $R_{тз}$ – радиус талой зоны; l_1 – глубина трубопровода. Формула (188) справедлива при $l_1 > 2D = 4R_0$.

Решая уравнение (187), находим

$$\bar{\vartheta}_{ж} = \bar{\vartheta}_{п} + (\bar{\vartheta}_{ж} - \bar{\vartheta}_{п})_0\,e^{-\frac{2\pi R_0}{S_{сеч}\,v\,\rho_{ж}\,c_{ж}\,R_{т}}\Delta l}, \tag{189}$$

где $(\bar{\vartheta}_{ж} - \bar{\vartheta}_{п})$ – начальная разность температур жидкости и поверхности.

При наличии естественного теплового потока зона протаивания вокруг подземного трубопровода в полуограниченной среде принимает асимметричную форму. Расчет этой зоны, а следовательно, и термического сопротивления системы трубопровод-грунт может быть произведен по следующей приближенной схеме.

Асимметрия зоны протаивания в результате взаимодействия искусственного и естественного тепловых потоков может в первом приближении рассматриваться как результат смещения цилиндрической поверх-

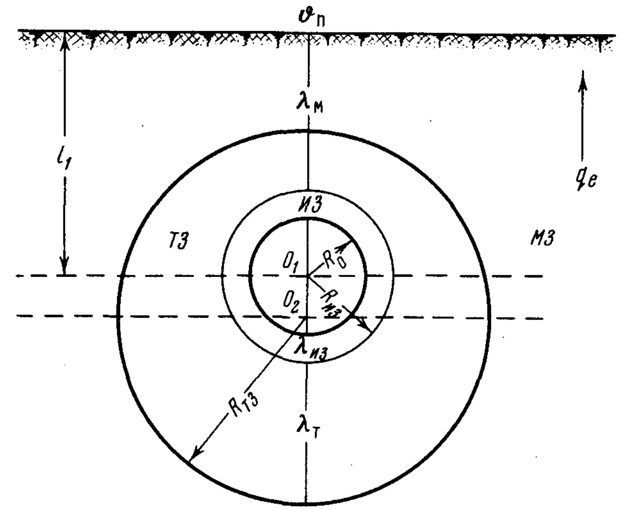


Рис.40. Схема для расчета термического сопротивления подземного трубопровода

ТЗ – талая зона; МЗ – мерзлая зона; ИЗ – теплоизоляционная оболочка; $\vartheta_{п}$ – температура поверхности

ности протаивания относительно трубопровода. При векторе потока тепла $\vec{q}_e$, направленном к поверхности почвы, термическое сопротивление подземного теплоизолированного трубопровода определится из соотношения (Кутателадзе, Боришанский, 1959), справедливого при $l_1 > 4R_0$:

$$R_{т}^{*} \approx \frac{1}{2\pi l}\left[\frac{1}{\alpha_{эф}R_0} + \frac{1}{\lambda_{из}}\ln\frac{R_{из}}{R_0} + \right. \tag{190}$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_{т}}\ln\frac{\sqrt{(R_{тз}+R_0)^2 - \Delta R_c^2} + \sqrt{(R_{тз}-R_0)^2 - \Delta R_c^2}}{\sqrt{(R_{тз}+R_0)^2 - \Delta R_c^2} - \sqrt{(R_{тз}-R_0)^2 - \Delta R_c^2}} + \frac{1}{\lambda_{м}}\ln\frac{2l_1}{R_{тз}}\right].$$

Величины, входящие в (190), охарактеризованы на схеме, изображенной на рис.40. Среди них неизвестной остается величина сдвижки и радиус $R_{тз}$ зоны протаивания. Для определения величины сдвижки воспользуемся соотношениями

$$q + q_e = \frac{2\pi\lambda_{т}\vartheta_{из}}{\ln\dfrac{R_{тз_1}}{R_{из}}}\;; \tag{191}$$

$$q - q_e = \frac{2\pi\lambda_т \vartheta_{из}}{\ln \frac{R_{тз_2}}{R_{из}}},$$

где q – поток от трубопровода в окружающую среду; $\vartheta_{из}$ – температура поверхности цилиндрического изоляционного слоя; $R_{тз_1}, R_{тз_2}$ – радиусы зоны над и под трубопроводом.

Решая систему уравнений (191), находим ΔR

$$\Delta R = R_{из}\left(e^{\frac{2\pi\lambda_т \vartheta_{из}}{q - q_e}} - e^{\frac{2\pi\lambda \vartheta_{из}}{q + q_e}}\right). \qquad (192)$$

Для определения q воспользуемся формулой

$$q = \frac{\bar{\bar{\vartheta}}_в - \bar{\vartheta}_0}{R_т^*}, \qquad (193)$$

где $\bar{\bar{\vartheta}}_в$ – средняя температура водного потока; $\bar{\vartheta}_0$ – средняя температура горных пород, которая принимается постоянной, на глубине l_1.

$$\vartheta_{из} = \vartheta_в - \frac{\vartheta_в - \vartheta_0}{R_т^*}\left(\frac{1}{\alpha_{эф} R_0} + \lambda_{из} \ln \frac{R_{из}}{R_0}\right). \qquad (194)$$

Радиус зоны протаивания вокруг цилиндрического трубопровода находится по формуле

$$R_{тз} = R_{из}\, e^{\frac{\frac{\vartheta_в R_т^*}{\vartheta_в - \vartheta_0} - \frac{1}{\lambda_{эф} R_0} - \lambda_{из} \ln \frac{R_{из}}{R_0}}{\lambda_т}} \qquad (195)$$

Из уравнений (190, 192, 193) получаем в окончательном виде трансцендентное уравнение для определения термического сопротивления подземного трубопровода:

$$R_т^* \approx \frac{1}{2\pi l}\left[\frac{1}{\alpha_{эф} R_0} + \frac{1}{\lambda_{из}} \ln \frac{R_{из}}{R_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_т} \ln \frac{\sqrt{A_1^2 - B_1^2} + \sqrt{A_2^2 - B_1^2}}{\sqrt{A_1^2 - B_1^2} - \sqrt{A_2^2 - B_1^2}} + \frac{1}{\lambda_м} \ln \frac{2 l_1}{R_{тз}}\right], \qquad (196)$$

где $A_1 = (R_{тз} + R_0)$; $A_2 = (R_{тз} - R_0)$;

$$B_1 = \frac{R_{из}}{2}\left(\exp \frac{2\pi\lambda_т \vartheta_{из}}{\frac{\vartheta_в - \vartheta_0}{R_т^*} - q_l} - \exp \frac{2\pi\lambda_т \vartheta_{из}}{\frac{\vartheta_в - \vartheta_0}{R_т^*} + q_l}\right).$$

2. ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ПОДЗЕМНЫХ ХОЛОДИЛЬНИКОВ

Большинство задач, решаемых на гидроинтеграторе В.С.Лукьянова, связано с кондуктивной теплопередачей. Поэтому может сложиться неправильное представление о том, что процессы лучистого и конвективного теплообмена не могут быть изучены методами гидродинамического моделирования.

В действительности же этими методами может быть решен широкий круг задач как по отдельным формам теплообмена, так и по совместно протекающим процессам кондуктивной, конвективной и лучистой теплопередачи, причем с учетом зависимости термических сопротивлений от температуры.

Моделирование таких процессов осуществляется на основе введения эффективных коэффициентов теплопереноса или теплообмена. В общем виде эффективный коэффициент включает в себя составляющие по кондуктивной λ, конвективной $\lambda_{кв}$ и лучистой $\lambda_и$ теплопередаче:

$$\lambda_{эф} = \lambda + \lambda_{кв} + \lambda_и.$$

Подставляя в соотношение (197) значения коэффициентов кондуктивной и лучистой теплопередачи (Иванов, 1969), находим эффективные значения коэффициента теплопроводности. На основе этих значений определяются и термические сопротивления, выделенные в исследуемой системе элементов объема твердых, жидких и газообразных сред. Для определения термических сопротивлений могут быть использованы и коэффициенты теплоообмена.

С помощью эффективных коэффициентов теплопроводности оказывается возможным моделирование на гидроинтеграторе процессов кондуктивного и конвективного теплообмена в промерзающих – протаивающих горных породах.

Введение в практику моделирования тепловых процессов на гидравлических моделях эффективных коэффициентов переноса тепла позволяет значительно расширить круг геотеплофизических и геотехнических задач, решаемых на гидроинтеграторах.

В качестве примера подобного рода задач рассмотрим моделирование теплового режима подземного холодильника в процессе промерзания заложенной в нем рыбы.

Подземный холодильник представляет собой систему соединенных между собой камер. На рис. 41 показана принципиальная схема устройства

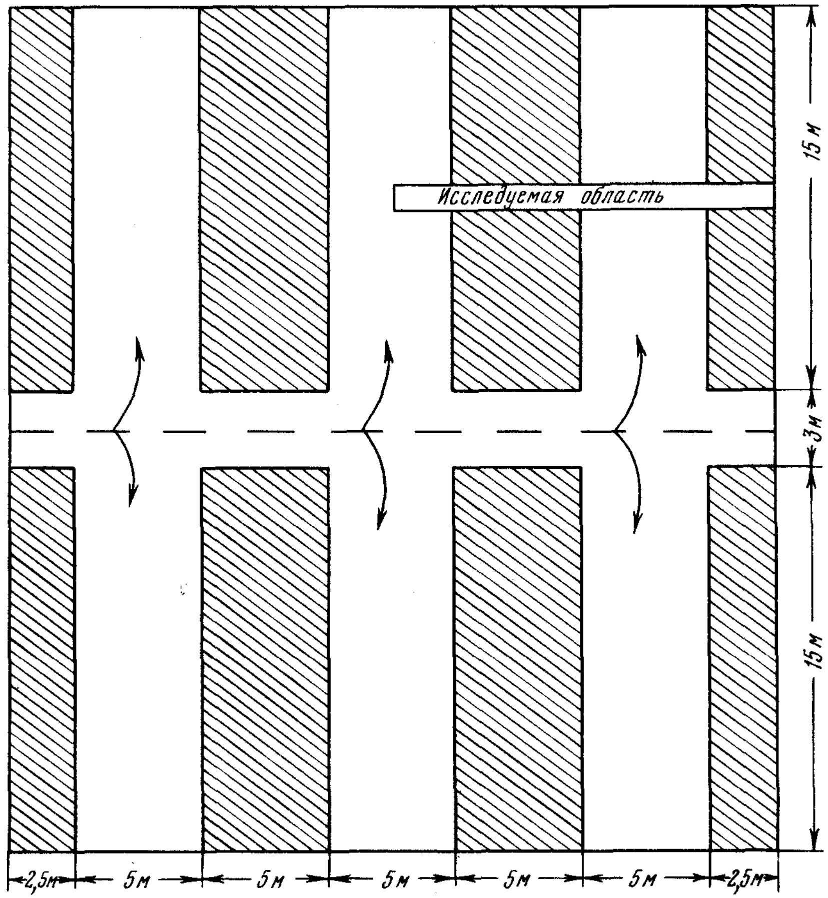


Рис.41. Принципиальная схема устройства шестикамерного подземного холодильника

шестикамерного подземного холодильника, для которого и производился настоящий расчет. Холодильник построен на глубине 11 м, высота камер равна 2,5 м. Остальные размеры показаны на схеме.

Задача формулируется следующим образом: исследовать динамику теплового режима горных пород вокруг подземных камер при различных режимах их охлаждения и последующего теплообмена как для свободного, так и для загруженного состояния; определить время промерзания рыбы, загружаемой в подземный холодильник.

Поставленная задача распадается на ряд более простых. К их числу относятся задачи об охлаждении горного массива воздушными потоками в зимний период, нагревании горных пород вокруг незагруженных камер после прекращения проветривания холодильника, о замораживании рыбы, закладываемой в холодильник в различные периоды года.

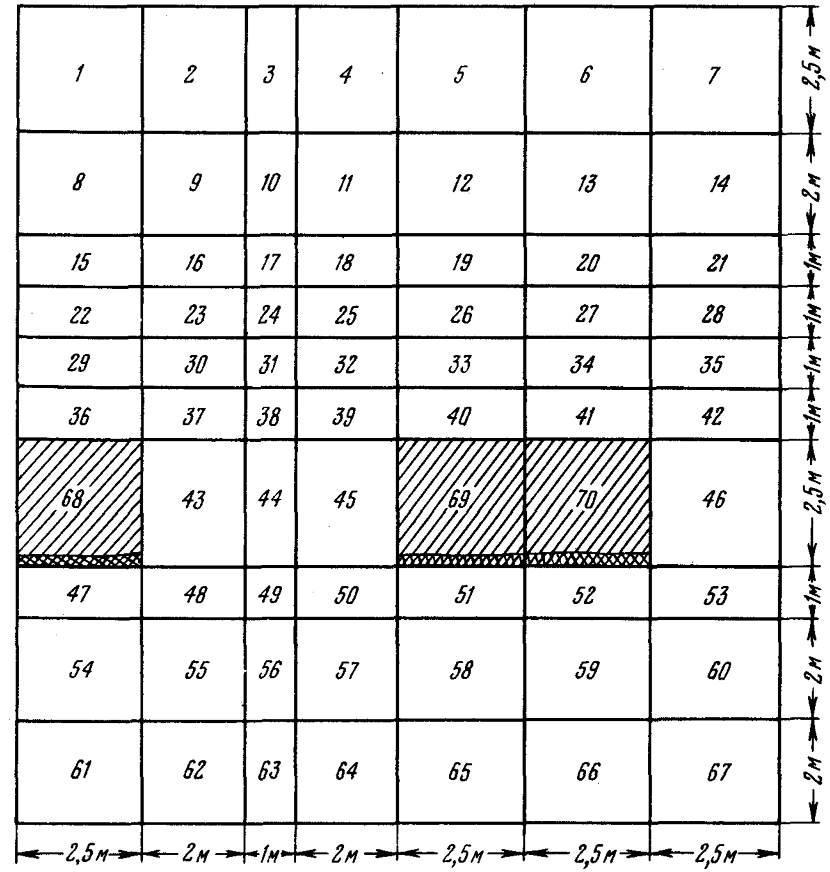


Рис.42. Схема разбивки исследуемой области на блоки

Две первые задачи относятся к категории обычных, решаемых методом гидротепловых аналогий. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть только третью задачу о замораживании рыбы в подземном холодильнике.

Для гидравлического моделирования теплового взаимодействия замораживаемой массы с охлажденным горным массивом в рассматриваемой системе выделяется расчетная область. В качестве нее выбрана прямоугольная призма, нормальная к горизонтальному сечению холодильника. Положение и размеры призмы характеризуются следующими данными. Верхняя и нижняя торцовые грани расположены соответственно на глубинах 2,5 и 16 м, размеры горизонтального сечения – 15 x 1 м. Положение призмы относительно общего плана холодильника показано сечением исследуемой области на рис.41.

Исследуемая область разбивалась на расчетные блоки по схеме, показанной на рис.42. Блоки 68, 69 и 70 относятся к подземным камерам. Толщина слоя рыбы, загружаемой в камеру, задавалась равной 0,25 м, т.е. одной десятой ее высоты.

Расчеты проводились при следующих теплофизических параметрах горных пород и рыбы.

Горные породы. Температура начала замерзания $\vartheta_{нз}$ = -0,2°; влажность W = 30%; объемная теплоемкость: талых горных пород $c_{\gamma,т}$ = 670 ккал/м³·град, промерзших $c_{\gamma,м}$ = 530 ккал/м³·град; коэффициент теплопроводности: талых горных пород $\lambda_т$ = 1,3 ккал/м·час·град, промерзших $\lambda_м$ = 2,0 ккал/м·час·град.

Рыба. Температура начала замерзания $\vartheta_{нз}$ = -2°; начальная температура $\vartheta_н$ = +4°; удельная теплоемкость: талой рыбы $C_т$ = 0,7 ккал/кг·град, мерзлой $C_м$ = 0,4 ккал/кг·град; плотность рыбы в талом и мерзлом состоянии – соответственно 1,0 и 0,9 г/см³; влажность рыбы W = 70%; коэффициент теплопроводности: талой рыбы $\lambda_т$ = 0,327 ккал/м·час·град, промороженной рыбы $\lambda_м$ = 1,128 ккал/м·час·град.

Температура горных пород на глубине 2,5 м в продолжение годового цикла и температура воздушного потока в холодильнике в период охлаждения характеризуются воздушного данными:

Месяц	Х1	ХП	1	II	III	1У	У	У1	УП	УШ	1Х	Х
Температура на глубине 2,5 м	-0,6	-0,7	-4,9	-8,9	-9,5	-8,1	-5,8	-4,0	-2,7	-1,6	-1,1	-0,8
Температура воздушного потока	-26,5	-38,5	-42,2	-36,6	-21,4	-	-	-	-	-	-	-

На глубине 16 м температура принимается постоянной и равной -4°.

Теплообмен между замерзающей рыбой и горным массивом происходит как путем кондуктивной теплопроводности в горных породах и в незначительной степени через воздушный слой, так и в форме конвективного и лучистого теплообмена в этом слое.

Эффективное термическое сопротивление воздушного слоя может быть рассчитано по формуле (198) через эквивалентные коэффициенты теплопроводности, а также с помощью эквивалентных коэффициентов теплообмена. В данной задаче используется второй путь. Эффективное термическое сопротивление воздушного слоя находится из соотношения

$$R_т = \frac{1}{\alpha_н} + \frac{1}{\alpha_к}, \qquad (198)$$

где $\alpha_к$ – коэффициент конвективного теплообмена; $\alpha_н$ – эквивалентный коэффициент лучистого теплообмена.

При заданных скоростях потока $Re > 2000$ м, следовательно, режим течения будет турбулентным. В этом случае коэффициент теплообмена $\alpha_к$ находится из критериального уравнения (Кутателадзе, 1962)

$$Nu = 0{,}0023\, Re^{0,8} Pr^{0,4}. \qquad (199)$$

При ламинарном режиме течения коэффициент теплообмена воздушного потока в каналах вычисляется по формулам, приведенным в работе С.Н.Шорина (1952).

Если отношение длины камеры к ее эквивалентному диаметру меньше 40, то найденное из (199) значение коэффициента теплообмена умножается на множитель C_α, который находится по приведенным данным (Михеев, 1949):

$\frac{l}{D_{эк}}$	1	5	10	15	20	25	30	35
C_α	1,76	1,54	1,34	1,22	1,14	1,09	1,05	1,01

Эквивалентный диаметр камеры вычислялся по формуле

$$D_{эк} = \frac{S}{P_l}, \qquad (200)$$

где S – площадь сечения камеры; P_l – периметр сечения.

Из уравнения (199) с учетом (200) находим коэффициент теплообмена при средней температуре потока ϑ = -32°, Pr = 0,724 и $\lambda_{вз}$ = 0,02 ккал/м·час·град

$$\alpha_к = 0{,}02 \left(\frac{VS^2}{P_l^2\, \vartheta}\right). \qquad (201)$$

Эквивалентный коэффициент лучистой теплопроводности определялся из уравнения

$$\alpha_к \Delta\vartheta = 4{,}9\, \varepsilon \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right], \qquad (202)$$

где $\Delta\vartheta$ – перепад температуры между поверхностью загруженной рыбы и потолком камеры; ε – степень черноты тела; T_1 и T_2 – абсолютные значения температур поверхности рыбной массы и верхней поверхности камеры.

Соотношение (202) является приближенным, так как не учитывает лучистого теплообмена с боковыми поверхностями камеры. Но уточнение формулы нетрудно произвести на основе известных формул.

Для средних значений температур, входящих в уравнение (202), находим осредненную за рассматриваемый период величину эквивалентного коэффициента лучистой теплопроводности.

Процесс хладозарядки подземных холодильников исследовался при двух режимах охлаждения: V_1 =0,5 м/сек и V_2 = 2,0 м/сек. Этим режимам соответствуют следующие значения перепадов температуры и средние значения коэффициентов теплообмена.

а) V_1 = 0,5 м/сек; перепад температуры между поверхностью камеры и рыбы в начале закладки $\Delta\vartheta_{1,н}$ равен 18,4°, этот же перепад после полного промораживания рыбы
$\Delta\vartheta_{1,к}$= 9°, средний перепад температуры $\Delta\bar{\vartheta}_1$ = 13,7°;
$\bar{\alpha}_к$= 4,128 ккал/м^2·час·град; $\bar{\alpha}_н$= 2,68 ккал/м^2·час· град;
$\alpha_{э,1}$= 6,81 ккал/м^2·час·град.

б) V_2 = 2 м/сек; $\Delta\vartheta_{2,н}$ = 20,6°; $\Delta\vartheta_{2,к}$ = 11,2°; $\Delta\bar{\vartheta}_2$ = 15,9°; $\bar{\alpha}_{к2}$= 4,29 ккал/м^2· час·град; $\bar{\alpha}_н$ = 4,07 ккал/м^2·час·град; $\alpha_{э,2}$ = 8,36 ккал/м^2·час·град.

Сопоставление двух вариантов задачи, решённой при скоростях воздушного потока, равных 0,5 и 2,0 м/сек, показывает, что при увеличении скорости потока в 4 раза среднее значение температуры горных пород стенки подземного холодильника понижается на 2,2°,а эффективный коэффициент теплоотдачи при замораживании рыбы увеличивается на 23%. Это существенно ускоряет процесс замораживания в подземных холодильниках.

На рис.43 показан сравнительный ход температур 36-го блока, примыкающего к верхней стенке подземной камеры при двух режимах охлаждения. График показывает, что максимальная разность температур, равная 5°, возникает в феврале.

Интенсивность и продолжительность периода промораживания рыбы существенно зависят от момента загрузки холодильника. В результате теплообмена с горным массивом температура охлажденных горных пород вокруг холодильника постепенно повышается. Наиболее резкое повышение наблюдается в период с апреля до июня.

Для выяснения влияния момента загрузки подземного холодильника на интенсивность и время промораживания рыбы было рассмотрено два варианта. Для одного из них загрузка холодильника производится в мае, для другого – в июне. В камеру загружается 460 кг рыбы. Предполагается, что зимняя хладозарядка производилась воздушным потоком со скоростью 2 м/сек.

Результаты моделирования процесса замораживания представлены в графическом виде на рис.44, где показан ход температур узловых точек блоков во времени при загрузке холодильника в мае (48,а) и июне (40,б).

Сравнение полученных графиков показывает, что продолжительность промерзания при загрузке в июне на неделю больше, чем для мая. Средняя температура по истечении месяца для июньского варианта оказывается выше.

Теплофизический анализ работы подземных холодильников в условиях глубокого промерзания земной коры показывает, что повышение их эффективности вполне возможно за счет интенсификации режима хладозарядки. Вместе с тем необходимо учитывать, что основная масса рыбы должна загружаться в холодильники с июня по сентябрь. Для этого пе-

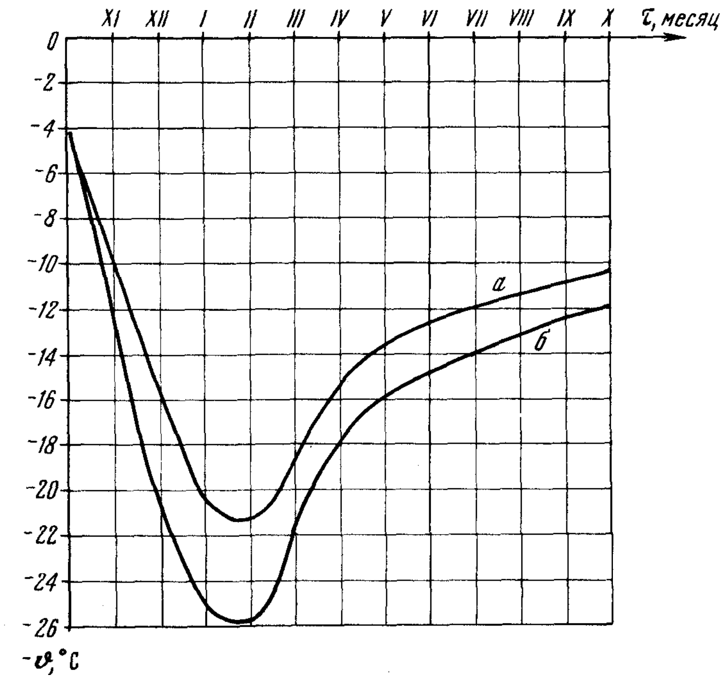


Рис.43. Изменение температуры блока № 36 исследуемой области во времени для незагруженного холодильника при двух режимах охлаждения а – V = 0,5 м/сек; б – V = 2,0 м/сек

риода замораживание рыбы целесообразно осуществлять, применяя передвижные и стационарные холодильные установки, а также с помощью эвтектических смесей и твердой углекислоты. В северных и северо-восточных районах страны установка холодильных агрегатов для обширной сети удаленных и незначительных по объему добычи рыбы рыболоведческих хозяйств представляется нерентабельной. Зарядка же и доставка баллонов с твердой углекислотой не вызывает значительных затруднений.

При такой постановке основное значение подземных холодильников будет состоять в сохранении в промороженном состоянии рыбных, а также мясных продуктов. Для поддержания их температуры на заданном технологическими условиями уровне вполне достаточно естественного охлаждения.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С МЕРЗЛЫМИ ГРУНТАМИ

При проектировании и эксплуатации подземных коммуникаций в районах глубокого промерзания земной коры возникает необходимость в рас-

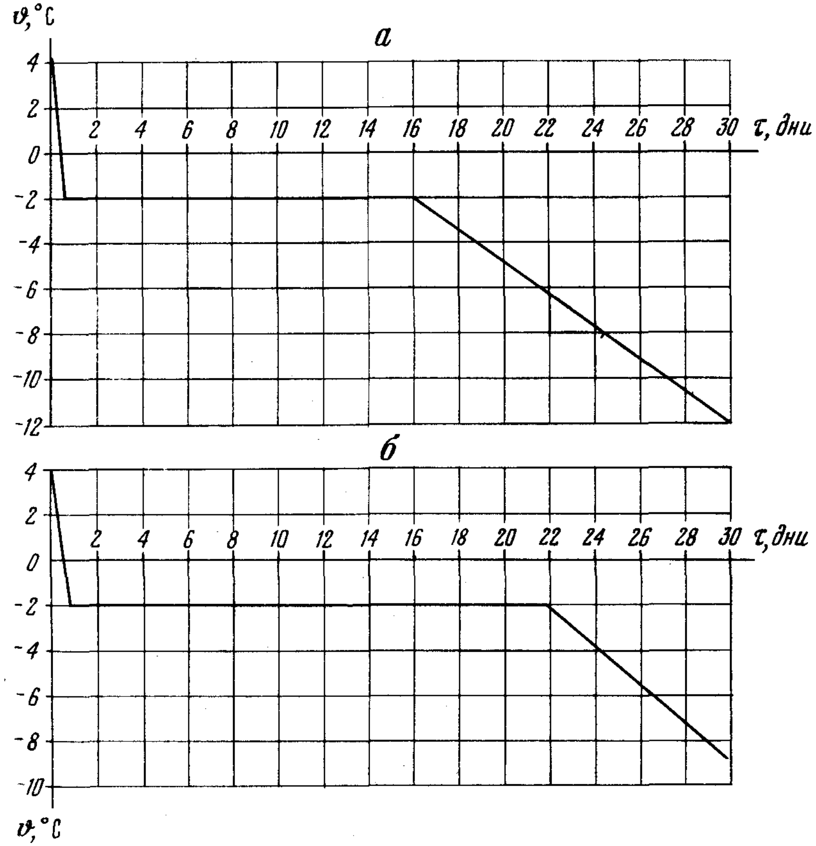


Рис.44. Изменение температуры замораживаемой рыбы при различных моментах ее загрузки
а–при загрузке рыбы в мае; б – то же, в июне

четах тепловых потерь трубопроводов. Расчет теплового режима трубопровода с учетом естественного теплового потока и ореола протаивания может производиться по формуле (189).

Одним из основных расчетных параметров, определяющих интенсивность теплообмена, является термическое сопротивление системы трубопровод–грунт. Термическое сопротивление между трубопроводом и грунтом может быть рассчитано как непосредственно по формуле (162), так и с применением методов математического моделирования. В данном разделе рассматривается приближенный расчет термического сопротивления и теплопотерь подземных трубопроводов методом электрического моделирования. Расчет этих величин при различных значениях тепловых свойств, температуры теплоносителя и естественного теплового потока, а также глубины заложения трубопровода производился на универсальной сеточной машине УСМ-1.

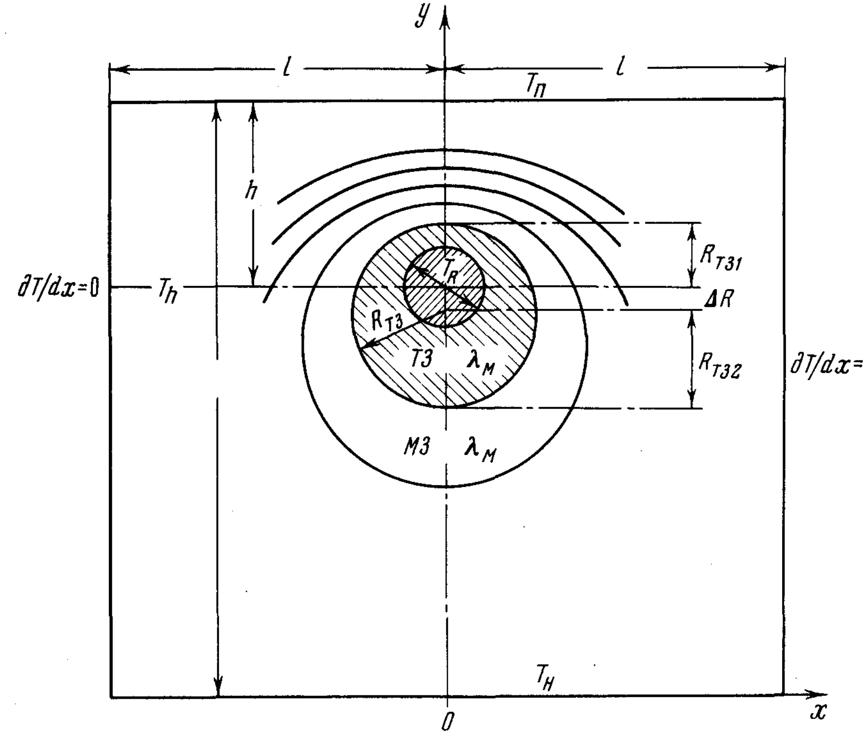


Рис.45. Теплофизическая схема расчета термического сопротивления подземного трубопровода

Наиболее ответственным в эксплуатации подземных трубопроводов является период наибольшего охлаждения грунтов в зоне заложения водопроводных и канализационных коммуникаций. В связи с этим расчет величин термического сопротивления и теплопотерь трубопровода для условий Якутска производился для этого периода.

Задача о тепловом режиме достаточно протяженного подземного трубопровода, уложенного на глубине h (рис.45), может рассматриваться как двухмерная. Кроме того, при расчетах тепловых потерь и термического сопротивления подземных трубопроводов термический режим грунтов, как это обычно принято, рассматривается квазистационарным.

При данных предпосылках поставленная задача сводится к решению двухмерного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]=0$$

при следующих граничных условиях:

$$y=0\ ;\ -\infty\leqslant x\leqslant\infty\ ;\quad \vartheta(x,y)=\vartheta_{н}\ ;$$

$$y = H; \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty; \quad \vartheta(x,y) = \vartheta_п;$$

$$x^2 + \left[y - (H-h)\right]^2 = \frac{d^2}{4}; \quad \vartheta(x,y) = \vartheta_в;$$

$$x = \pm\infty; \quad 0 \leqslant y \leqslant H; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0; \qquad (203)$$

$$-\infty \leqslant x \leqslant \infty; \quad y = 0; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0;$$

$$-\infty \leqslant x \leqslant \infty; \quad y = H; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0.$$

Значения параметров граничных условий и теплофизических коэффициентов варьировались в следующих пределах:

осредненная температура поверхности трубы $\vartheta_в$ 5, 7, 9, 11°;

естественная температура грунта на глубине h (в м) заложения трубопровода,

h =			
1	-9,	-10;	-11;
0,9	-12,	-13;	-14;
0,8	-15,	-16;	
0,6	-17,	-18;	

диаметр трубопровода d – 169, 221, 325, 377, 426 мм; коэффициенты теплопроводности талых и мерзлых грунтов $\lambda_т$ – 1,5; 1,4; 1,2 ккал/м·час·град; $\lambda_м$ – 2,0; 1,8; 1,2 ккал/м·час·град; температура грунтов на глубине нулевых амплитуд $\vartheta_н = -3°$, H = 14,7 м.

Расчет термического сопротивления системы трубопровод–грунт при асимметричной форме таликовой зоны производится по схеме, рассмотренной в первом разделе главы У.

Для решения сформулированной залачи на универсальной сеточной машине УСМ-1 уравнение (203) преобразуется к конечно-разностному виду и производится выбор расчетной двухмерной области.

Выбранная двухмерная область делится на элементарные ячейки. Область, примыкающая к трубопроводу, разбивается более мелкими шагами, так как в ней формируется талая зона и производится определение теплового потока.

В соответствии с принятой разбивкой расчетной области и граничными условиями на УСМ-1 набирается сетка электрических сопротивлений, а на границах области задаются электрические потенциалы. Величины

электрических сопротивлений, тока и потенциала определяются из соотношений, основанных на аналогии электрического и тепловых полей:

$$R_э = K_1 R_т; \qquad \varphi = K_2 \vartheta;$$
$$i = K_3 q; \qquad K_1 K_3 = K_2. \qquad (204)$$

Решение задачи осуществлялось в следующей последовательности:

1. Важной расчетной характеристикой является температура грунта $\vartheta_н$ на глубине заложения трубы. Поэтому, как было сказано, при постановке задачи производится варьирование не температурой поверхности $\vartheta_п$, а значениями температуры ϑ_h.

С этой целью на электроинтеграторе набирается электрическое поле, моделирующее температурное поле грунта без трубопровода, и подбором электрического потенциала на поверхности, соответствующего $\vartheta_п$, задается электрический потенциал, соответствующий ϑ_h на глубине заложения трубы. Естественный геотемпературный градиент на электромодели заменяется градиентом потенциала, соответствующим значению $(\vartheta_н - \vartheta_п)/H$.

2. Производится задание граничного условия 1-го рода, аналогичное заданию температуры поверхности трубы. Определение ореола протаивания вокруг трубопровода осуществляется методом последовательных приближений. Сущность этого метода заключается в следующем: в качестве первого приближения находится поле потенциала, соответствующее однородному мерзлому грунту. При этом на электроинтеграторе определяется положение нулевой изотермы. После первого определения положения нулевой изотермы определяется потенциальное поле, причем грунт между трубой и нулевой изотермой рассматривается уже как талый. Это позволяет получить второе приближение положения нулевой изотермы. После третьего-четвертого приближения положение нулевой изотермы практически стабилизируется, что позволяет определить истинный ореол протаивания грунта вокруг трубопровода.

3. Вычисляется тепловой поток из трубопровода в грунт. Для этого необходимо определить сумму токов $\sum_1^k i_i$, протекающих по электрическим сопротивлениям, на одних концах которых задано граничное условие 1-го рода, моделирующее температуру поверхности трубы. Практически это осуществляется измерением разности потенциалов на концах этих сопротивлений (рис.46).

В результате решения 180 вариантов задач были получены данные, по которым определялся тепловой поток из трубопровода в окружающую среду и термическое сопротивление системы трубопровод–грунт.

По значениям потенциалов в узловых точках на границе трубопровода и точках, смежных с ними, находятся их разности и после деления на соответствующие сопротивления определяются значения токов $i_к$.

Тогда величина теплового потока от трубопровода в грунт определяется по формуле

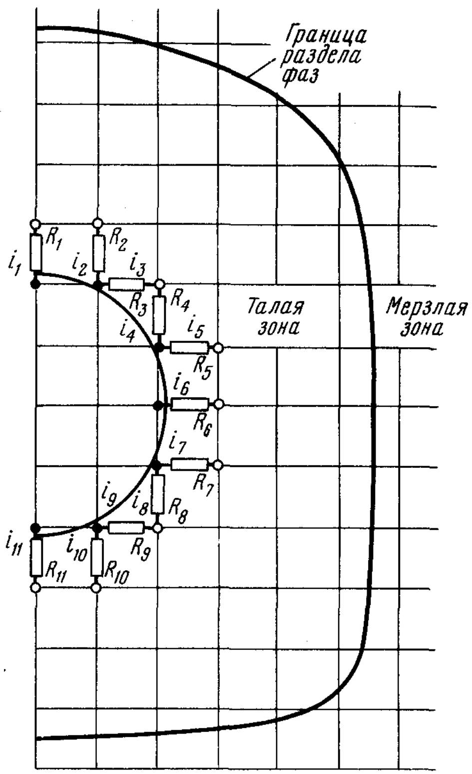


Рис.46. Электрическая модель подземного трубопровода

$$q = 2\frac{\sum_{1}^{k} i_k}{K_3}, \qquad (205)$$

где K зависит от числа граничных сопротивлений, с помощью которых моделируется теплоотвод с поверхности трубы.

После определения положений нулевых изотерм находятся радиусы зоны протаивания над и под трубопроводом $R_{\text{тз}_1}$ и $R_{\text{тз}_2}$. Зона протаивания имеет несколько вытянутую по вертикальной оси эллиптическую форму. Однако ввиду незначительности эксцентриситета зона протаивания может приниматься круговой.

Определив по формулам (195 и 192) значения $R_{\text{тз}}$ и ΔR, находим величину термического сопротивления $R^*_{\text{т}}$ из соотношения (196), а $R_{\text{т}}$-из (188).

На основе анализа и обработки экспериментальных данных, полученных при электрическом моделировании теплового взаимодействия подземных трубопроводов с мерзлыми грунтами, была построена обобщенная номографическая зависимость (рис.47) для определения термического сопротивления в системе трубопровод-грунт. С помощью этой номограммы представляется возможным определить величину $R^*_{\text{т}}$ в зави-

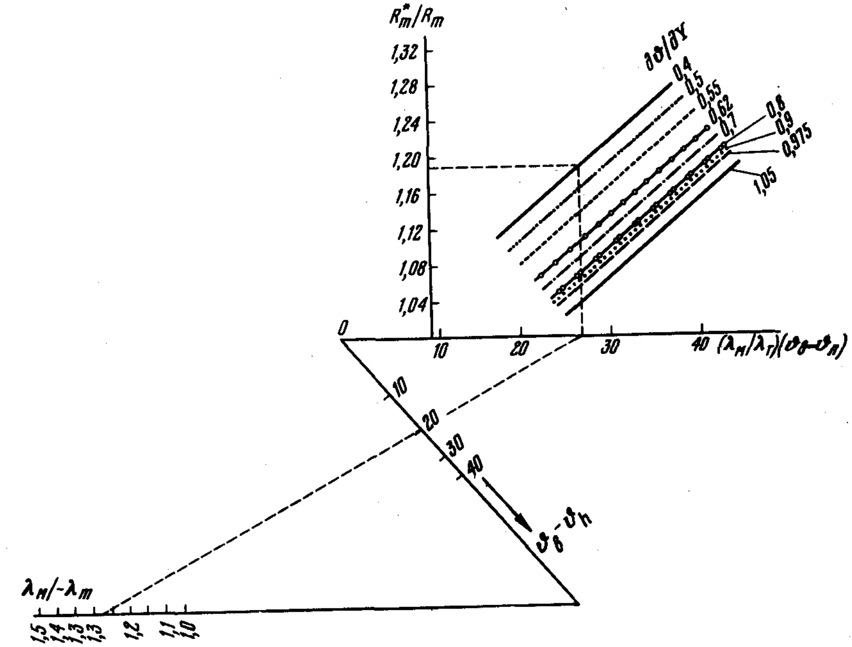


Рис.47. Номограмма для расчета термического сопротивления подземного трубопровода

симости от исходных значений параметров $\frac{\lambda_м}{\lambda_т}$, $\vartheta_в-\vartheta_h$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$ в пределах исследованных диапазонов.

Для определения теплопотерь подземного трубопровода в грунт при рассмотренных условиях может быть использована следующая формула, построенная на основе обобщения результатов электрического моделирования

$$q = \frac{(\vartheta_в - \vartheta_h)\left(-0{,}072\, e^{\frac{q_l}{\lambda_м}} + 1{,}3 d^2 + 0{,}725\right)}{R^*_{\text{т}}}. \qquad (206)$$

В расчетах величин $R^*_{\text{т}}$ и q на УСМ-1 принимала участие дипломантка Якутского государственного университета Т.Н.Николаева.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы физического и математического моделирования термодинамических процессов являются одними из наиболее универсальных и мощных в общей системе методов изучения теплового режима промерзающих и протаивающих горных пород и прогнозирования теплового взаимодействия инженерных сооружений и коммуникаций с мерзлыми грунтами.

На современной стадии развития эти методы позволяют решать широкий класс задач по расчетам температурных полей, динамике зон промерзания и протаивания, влажностному режиму грунтов, по тепловому режиму подземных и наземных сооружений, трубопроводов различного назначения.

Перспективы дальнейшего совершенствования и универсализации методов физического и математического моделирования в геокриологии связаны с решением систем уравнений тепло- и массопереноса в промерзающих - протаивающих горных породах, с прогнозированием пространственных полей температуры, влажности, скоростей потоков, динамики зон протаивания и промерзания, со все большим приближением моделирующих систем к естественным средам и инженерным объектам.

ЛИТЕРАТУРА

Алабужев П.А., Геронимус В.Б., Минкевич Л.М., Шеховцев Б.А. Теории подобия и размерностей. Моделирование. М., изд-во "Высшая школа", 1968.

Албасини. Численное решение нелинейных уравнений теплопроводности на цифровых вычислительных машинах. - Реф.ж. "Математика", 1960, № 8.

Аравин В.И. и Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Гос. изд-во техн.-теор.лит. 1953.

Богословский П.А. Моделирование температурного режима грунта при фильтрации.-Изв. высших уч.завед., строительство и архитектура, 1959, № 5.

Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и теплопередача. М., изд-во "Высшая школа", 1964.

Брейтман В.М. Интегральное в целом моделирование метаконстантных явлений теплофизических, гидродинамических, диффузионных, сопровождающихся химическими и фазовыми изменениями среды. - В сб.: Тепло- и массоперенос. 6. Минск, изд-во "Наука и техника", 1966.

Будрин Д.В. Гидростатический интегратор для решения дифференциального уравнения теплопроводности с учетом зависимости теплофизических свойств (коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости) от температуры. - Труды Уральского политехн. ин-та им. С.М.Кирова, сб.53, 1955.

Волынский Б.А. и Бухман В.Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз. 1960.

Вулис Л.А., Жеребятьев И.Ф., Лукьянов А.Т. Решение нелинейных уравнений теплопроводности на статических электроинтеграторах. - В сб : Тепло- и массоперенос. У. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.

Гамаюнов К.А. Проблемы Арктики. М., Изд-во Главсевморпути, 1946.

Гольдтман В.Г. Теплообмен в фильтрующих крупнозернистых грунтах при дренажной и игловой гидрооттайке. - Труды ВНИИ-1, ХШ, Магадан, 1959.

Горячева И.А. Исследование теплового поля грунта с водоводом, проложеным в зоне сезонного промерзания. – Инж.-физ.ж.,1960, т.3, № 10.

Горячева И.А., Шадрин Г.С. Моделирование тепловых процессов в грунте с водоводом, уложенным в зоне сезонного промерзания. – Инж.-физ.ж., 1958, т.1, № 7.

Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Гутенмахер Л.И. Электрические модели. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1949.

Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло- и массообмена. М., изд-во "Высшая школа", 1967.

Жеребятьев И.Ф., Лукьянов А.Т., Рыкова Н.П. Математическое моделирование нелинейных уравнений параболического типа. – В сб.: Тепло- и массоперенос, № 6. Минск, изд-во "Наука и техника", 1966.

Иванов Н.С. К вопросу о моделировании тепловых процессов в почвах и горных порода. – В сб.: Тепло- и массообмен в мерзлых почвах и горных породах. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Иванов Н.С. Физическое моделирование процессов тепло- и массообмена в сезонно-протаивающем слое и приземном слое воздуха. – В сб.: Процессы тепло- и массообмена в мерзлых горных породах. М., "Наука, 1965.

Иванов Н.С. О возможностях решения некоторых задач нестационарной теплопроводности в земной коре методом моделирования на реостатных сетках и электропроводной бумаге. – Труды семинара по прикл.мат. Ин-та математики АН СССР,вып.2.Киев,изд-во"Наукова думка", 1966.

Иванов Н.С.Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М., "Наука", 1969.

Иванов Н.С., Анненков Ю.Н., Тышев Ю.А. Устройство для автоматического переключения диапазонов измерения в мостовых схемах. – В сб.: Тепло- и массообмен в мерзлых толщах земной коры. М., изд-во АН СССР, 1963.

Карплюс У. Моделирующее устройство для решения задач теории поля. ИЛ, 1962.

Карслоу Г., Егер Д.Теплопроводность твердых тел.М.,"Наука",1964.

Кирпичев В.Л. Теория подобия как основа эксперимента. – Юбилейный сб. АН СССР, ч.П, 1947.

Кирпичев В.Л. Беседы о механике. Гос.изд-во техн.лит., 1950.

Кирпичев М.В. Теория размерностей и теория подобия. Теория подобия и моделирования. М., Изд-во АН СССР, 1951.

Клаан К.Э. Решение теплофизических задач инженерной геокриологии с помощью быстродействующих электронных счетных машин (БЭСМ). – В сб.: Материалы к основам учения о мерзлых зонах земной коры, вып.У. М., Изд-во АН СССР, 1960а.

Клаан К.Э. Использование упругой мембраны для решения теплофизических задач инженерной геокриологии (к расчету чаши протаивания). – В сб.: Материалы к основам учения о мерзлых зонах земной коры, вып.У. М., Изд-во АН СССР, 1960б.

Ковнер С.С. Условия термического подобия в процессах промерзания и протаивания. – Изв. АН СССР, серия геогр. 1943, № 3.

Коздоба Л.А. Применение сеток сопротивлений для решения задач нестационарной теплопроводности. – Инж.-физ.ж., 1960, т.Ш, № 7.

Коздоба Л.А. Применение метода электрического моделирования в сетках омических сопротивлений для решения задач нестационарной теплопроводности. – В сб.: Тепло- и массоперенос, т.У. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.

Коздоба Л.А. Электромоделирование температурных полей. Л., Изд-во "Судостроение", 1964.

Коздоба Л.А., Загоруйко В.А. Решение задач тепло- и массопереноса методом электроаналогии. – Инж.-физ.ж., 1966, т.Х1, №5.

Койл М.Б. Решение нестационарных задач теплопроводности методом воздушной аналогии. – В сб.: Вопросы теплообмена. М.-Л., Госэнергоиздат, 1959.

Конаков П.К. Теория подобия и ее применение в теплотехнике. М.-Л., Госэнергоиздат, 1959.

Константинов И.П. Экспериментальные исследования теплообмена безнапорных трубопроводов с мерзлыми, промерзающими и протаивающими грунтами. – Материалы УШ Всес.междувед.совещ. по геокриологии (мерзлотоведению), вып.8. Якутск, 1966.

Кузьменко Л.В. Щелевые гидроинтеграторы. – Инж.-физ.ж. 1959, т.П., № 2.

Кузьмин М.П. Электромоделирование некоторых нестационарных тепловых процессов. М.-Л., Изд-во "Энергия", 1964.

Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Матгиз, 1962.

Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. М.-Л., Госэнергиздат, 1959.

Лыков А.В. Теоретические основы строительной теплофизики. Минск, Изд-во АН БССР, 1961.

Лыков А.В., Михайлов Ю.В. Теория тепла и массопереноса. М.-Л., Госэнергоиздат, 1963.

Лукьянов В.С. Технические расчеты на гидравлических приборах Лукьянова. М., Трансжелдориздат, 1937.

Лукьянов В.С., Головко М.Л. Расчет глубины промерзания грунтов. М., Трансжелдориздат, 1957.

Меламед В.Г. Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. – Изв. АН СССР, серия геофиз, 1958,№ 7.

Меламед В.Г. Решение задачи о температурном режиме в среде с периодически изменяющимся фазовым состоянием. – Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 6.

Михеев М.А. Основы теплопередачи. М.-Л., Госэнергоиздат, 1949.

Петруничев Н.Н. и Шадрин Г.С. Определение тепловых потерь напорными и безнапорными трубопроводами, уложенными в мерзлый грунт. – Водоснабжение и сантехника, 1941, № 5.

Прозоров Л.Н. Моделирование процесса замораживания горных пород в условиях движения подземных вод. – В сб.: Тепло- и массоперенос, т.У. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.

Рубинштейн Я.М. Метод аналогии с диффузией и применение его для теплопередачи в вынужденном потоке. – В сб.: Исследование регулирования, теплопередачи и обратного охлаждения. ГОНТИ, 1938.

Рязанов Г.А. Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля. М., "Наука", 1966.

Савельев Б.А. Строение, состав и свойства ледяного покрова морских и пресных водоемов. М., Изд-во МГУ, 1963.

Салтыков Н.И. Канализация в условиях вечной мерзлоты. М., Изд-во АН СССР, 1944.

Тарапон А.Г. Моделирование дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на электропроводной бумаге с распределенной емкостью. – В сб.: Некоторые вопросы прикладной математики и аналоговой техники, вып.2. Киев, изд-во "Наукова думка", 1966.

Тетельбаум И.М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959.

Томирдиаро С.В. Тепловые расчеты оснований в районах вечной мерзлоты. Магадан, 1963.

Файнзильбер А.М., Фридлендер Н.А. Электромоделирование задач энерго- и массопереноса. – Инж.-физ.ж., 1968, т.ХУ, № 1.

Фильчаков П.Ф. Панчишин В.И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Киев, Изд-во АН УССР, 1961.

Фридлендер Н.А. Метод комплексного моделирования нестационарных процессов массо- и теплопереноса. – Инж.-физ.ж., 1965, т,1Х, № 5.

Хигаси Л. О теплопроводности замороженной почвы. – РЖФ, 1955, №4.

Шадрин Г.С. Моделирование тепловых процессов, сопровождающихся изменением агрегатного состояния в слоистой среде. – В сб.: Ледотермические вопросы в гидроэнергетике, под ред. Д.Н.Бибикова. Госэнергоиздат, 1954.

Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. ИЛ, 1960.

Шорин С.Н. Теплопередача. М., Изд-во по строительству и архитектуре, 1952.

Эйгенсон Л.С. Моделирование. М., Изд-во "Советская наука", 1952.

Hele-Shaw H.S., Hay A., Powell P.H. Hydrodynamical and Electromagnetic Investigations Regarding the Magnetic Flux Distribution in Toothed-Core Armatures – J. IEE, 1904-1905, 34, p. 21–53.

J.A. Ziebmann. New Electrical Analog Method for the Solution of Transient Heat Conductor Problems, Trans. ASME, 78, 655-665 (1956).

Moore A.D. Fields from Fluid Flow Mappers. – J. Appl. Phys., 1949, v.20, N 8, p. 790–804.

Moore A.D. Soap–Film and Sandbed–Mapper Techniques. – J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1950, 72, p. 291–298.

Piccard A., Baces L. Mode experimental nouveau relatif à l'application des surfaces à courbure constante à la solution du problème de la torsion des barres prismatiques.–Proc. Second Internat. Congr. Appl. Mech., 1926, p. 195–199.

Schneider P.J. The Prandtl Membrane Analogy for Temperature Fields with Permanent Heat Sources of Sinks, A.T. Aerospace Science. 1952, V19, N 9, p. 644–645

Wilson L.H., Miles A.J. Application of Membrane Analogy to the Solution of Heat Conduction Problems.–J. Appl. Phys. 1950, 21, p. 532-535.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Сергеевич Иванов

Моделирование тепловых процессов
в горных породах

Утверждено к печати Ордена Трудового Красного Знамени
Институтом мерзлотоведения Сибирского отделения
Академии наук СССР

Редактор В.И.Кондратьева
Технический редактор Г.П.Каренина

Подписано к печати 22/П-72. Формат 60х90 1/16.
Усл.печ.л. 9,30. Уч.-изд.л. 8,5. Тираж 1000 экз.
Бумага офсетная № 1. Т. – 03923. Тип.зак. 911
Цена 85 коп.

Книга издана офсетным способом

Издательство "Наука". Москва, К-62,Подсосенский пер., 21.

1-я типография издательства "Наука".
Ленинград, В-34, 9-я линия, 12.