

**Оценка содержания полезного компонента с  
применением радиальных базисных функций (РБФ) в  
сравнении с традиционными геостатистическими  
методами оценки**

Представлено для публикации на  
Международной конференции по горной геологии  
г. Аделаида, Австралия  
2014 г.

Майкл Стюарт, Джейкоб де Лейси, Пол Ходкевич и Ричард Лейн

Контактное лицо

**г-н Майкл Стюарт – старший руководящий консультант**

**QG**

Почтовый ящик 1304, г. Фримантл WA 6959

Тел.: 08-9433-3511

Email: [ms@qgconsulting.com.au](mailto:ms@qgconsulting.com.au)

**Оценка содержания полезного компонента с  
применением радиальных базисных функций (РБФ) в  
сравнении с традиционными геостатистическими  
методами оценки**

*Майк Стюарт<sup>1</sup>, Джейкоб де Лейси<sup>2</sup>, Пол Ходкевич<sup>3,4</sup> и Ричард Лейн<sup>5</sup>*

1.

Майкл Стюарт, член Австралийско-азиатского института горного дела и металлургии, член Австралийского института геологов-исследователей и геофизиков  
Старший руководящий консультант  
QG Pty Ltd  
Почтовый ящик 1304, г. Фримантл WA 6959  
Email: ms@qgconsulting.com.au

2.

Джейкоб де Лейси  
Руководитель группы технического обслуживания  
ARANZ Geo Ltd  
41 Leslie Hills Drive, Riccarton, г. Крайстчерч 8011, Новая Зеландия  
Email: jacob.delacey@leapfrog3d.com

3.

Пол Ходкевич, действительный член Австралийско-азиатского института горного дела и металлургии  
Старший менеджер по оценке ресурсов  
BHP Billiton, 125 St Georges Terrace, г. Перт WA 6000, Австралия  
Email: paul.hodkiewicz@bhpbilliton.com

4.

Научный сотрудник университета  
Центр проектирования геологоразведочных работ  
Университет Западной Австралии  
35 Stirling Highway, г. Кроли WA 6009, Австралия

5.

Ричард Лейн  
Директор по научно-исследовательским работам  
ARANZ Geo Ltd  
41 Leslie Hills Drive, Riccarton, г. Крайстчерч 8011, Новая Зеландия  
Email: richard.lane@leapfrog3d.com

## Аннотация

Условное моделирование представляет собой подход к пространственному моделированию, при котором распределение целевой переменной описывается уникальной математической функцией, вычисленной непосредственно на основании базовых данных и средств параметрического регулирования высокого уровня, указываемых пользователем. Данный подход к моделированию может применяться к дискретным переменным, таким как литология (после преобразования дискретных кодов в численные величины), или к непрерывным переменным, таким как определение содержания полезного компонента геохимическими методами. В настоящей статье обсуждается оценка непрерывных переменных (содержание полезного компонента) с использованием условного моделирования.

Одним из базовых инструментов условного моделирования для создания описания данной математической функции является радиальная базисная функция (РБФ). По существу, РБФ представляет собой взвешенную сумму функций, расположенных в каждой точке данных. Система линейных уравнений решается для вычисления весов и коэффициентов любых базовых коэффициентов модели дрейфа. После выведения РБФ может быть решена для любой невыборочной точки или усреднена по любому объему для обеспечения оценки содержания полезного компонента. К примеру, можно запросить РБФ на регулярной сетке для получения оценки содержания полезного компонента по блокам. Принимая во внимание простоту создания РБФ и ее способность прогнозировать содержание полезных ископаемых, возникает вопрос относительно того, как сравнить содержание полезного компонента, вычисленное в результате решения РБФ, с оценками содержания полезного компонента, полученными с применением традиционных геостатистических методов интерполяции (например, обычного кригинга).

Целью данной работы является описание в простых терминах:

- базовой структуры РБФ;
- роли выбора параметров в решении РБФ и того, как данный выбор влияет на характер решения; и
- фундаментальных сходств и различий между РБФ и традиционными геостатистическими методами оценки.

Применяя условное моделирование с высоким разрешением, мы демонстрируем, что во многих ситуациях оценки методами РБФ и обычного кригинга весьма схожи.

*Ключевые слова: оценка содержания полезного компонента, радиальная базисная функция; РБФ; условное моделирование; обычный кригинг; геостатистика.*

## **Введение**

В последние годы условные каркасные модели стали все чаще использоваться для разработки когерентных 3D форм для последующего использования при оценке посредством традиционных методов (например, обычный кригинг). Термин «условное моделирование» был введен в употребление Коуэном с соавторами (2003 г.) для задачи моделирования геометрий геологических поверхностей. Условное моделирование описывает подход к пространственному моделированию, при котором сочетание заданных пользователем средств управления данными и параметрического регулирования определяет уникальную математическую функцию объема. Данный подход может применяться к моделированию поверхностей от категориальных переменных, таких как литология, или к моделированию непрерывных переменных, таких как определение содержания полезного компонента геохимическими методами в пространстве. В настоящее время наиболее часто используемой для условного моделирования функцией является радиальная базисная функция (РБФ). Термин «условное» используется ввиду того, что моделируемая поверхность существует условно в пределах функции объема в качестве изопотенциальной поверхности, определяемой скорее данными, нежели конкретным процессом графического изображения. Затем данная функция объема может быть снабжена координатной сеткой либо переработана в каркасную модель для визуализации или использования в последующем моделировании.

В наши дни метод условного моделирования широко применяется для моделирования геометрии поверхностей на основании категориальных каротажных данных, а также для моделирования «изоповерхностей месторождений полезных ископаемых» на основании непрерывных переменных содержания полезного компонента. О чем многие не подозревают – это что условные модели, применяемые для создания «изоповерхностей месторождений полезных ископаемых», также могут обеспечить оценку содержания полезных ископаемых для точки или блока. Во многих ситуациях такие модели весьма схожи с оценками, получаемыми на основании более известных методов оценки, например, обычного кригинга. Для этого существует причина – можно продемонстрировать (Карр с соавторами, 2001 г., Чайлз и Делфайнер, 1999 г., Коста с соавторами, ХХХХ), что РБФ математически эквивалентна частной формулировке кригинга (двойной кригинг). В практическом плане полученные с применением РБФ оценки также часто весьма схожи с таковыми, произведенными на базе обычного кригинга.

Целью данной работы является описание (в простых терминах) базовой структуры РБФ и наглядная демонстрация ее сходства с кригингом. Кроме того, мы кратко обсуждаем роль выбора параметров в решении РБФ и показываем, как он влияет на характер решения.

## **Общая методология**

Пропорциональная доля залежи, на которой физически отбираются пробы, неизбежно представляет собой лишь крошечную пропорциональную долю реального объекта на месте залегания. Даже высочайшая плотность наиболее часто проводимого отбора проб (например, отбор проб из взрывных шпуров для окончательного контроля за содержанием полезного компонента) физически охватит испытаниями около 0,1% (1 часть на 1000) общего объема. В случае сеток шпуров для оценки запасов эта

пропорциональная доля может составлять менее 0,001% (1 часть на 100 000). Моделирование требуется для оценки того, что находится в неохваченном работами по отбору проб объеме.

Целью создания моделей является прогнозирование «реального объекта» и снижение необходимости в дальнейшем отборе проб. В ситуациях наподобие контроля за содержанием полезного компонента в процессе горных работ мы должны составлять прогнозы содержания металлов с целью принятия решения относительно того, какая порода подлежит разработке и переработке в качестве руды, а какая будет учитываться как пустая. Разумеется, горной разработке и переработке подвергается реальный объект, а не модель.

В конечном итоге единственным средством для оценки качества модели является сопоставление между спрогнозированными запасами и содержанием полезного компонента, полученными в результате моделирования – и запасами, рассчитанными по результатам измерений исходного содержания полезного компонента в руде. Несмотря на это, имеется множество других факторов на этапах между моделью и мельницей, влияющих на это сравнение (оконтуривание блоков рудных залежей, смещение пород при взрывных работах, потери и разубоживание руды, отбор проб в хвостах обогащения, расчеты рудной массы для перемещения конвейером и т.п.). Сопоставление способно предоставить в лучшем случае слабое указание на качество модели запасов, но не на объективный результат измерений.

Идеальным способом объективного суждения о качестве любого метода оценки было бы получить исчерпывающую информацию, выделить подмножество этих данных и использовать его для выполнения оценки, а затем сравнить оценку с наблюдениями и замерами. Очевидно, что это неосуществимо (за исключением, возможно, исследования в лабораторных масштабах). Гораздо лучшей (и по факту единственно осуществимой) альтернативой является использовать синтетическую версию реального объекта – условное моделирование.

В настоящем исследовании основанные на вычислении РБФ результаты оценки содержания полезного компонента сравниваются с оценками содержания полезного компонента, полученными общепринятым методом обычного кригинга. Относительные сравнения интересны, но не дают никаких указаний относительно того, какой метод является «самым лучшим», так как он должен определяться посредством сравнения с независимыми экспериментальными данными. Следовательно, в настоящем исследовании мы приняли экспериментальный подход применения имитационной модели для представления базового «реального объекта», извлекли множества данных из этого реального объекта и использовали эти данные для проведения оценок содержания полезного компонента как методом РБФ, так и обычного кригинга.

После этого результаты оценки посредством РБФ и обычного кригинга сравнивались друг с другом и с базовым реальным объектом. Это позволяет в процессе исследования концентрироваться на реальном рассматриваемом вопросе – относительной результативности одного метода интерполяции содержания полезного компонента (обычный кригинг) с другим (РБФ) при прогнозировании «реального объекта».

В настоящем исследовании намеренно не применяется анализ конкретных случаев на основании реальных данных. Единственно возможным результатом сравнения методов оценки на основании анализа конкретного случая стало бы получение двух отдельных

оценок содержания полезного компонента – и ни малейшего представления о том, соответствует ли какая-либо из них «целевому назначению» или какая является лучшим средством прогнозирования. Исходя из того, что оба метода оценки соответствуют целевому назначению, в данном сценарии интерес для пользователя представляет вопрос, обеспечивает ли один метод преимущества перед другим с точки зрения стоимости или скорости; мы предпочитаем оставить проведение такого анализа специалистам-практикам и производителям программного обеспечения.

## **Схема процесса проведения исследования**

Обобщенный процесс проведения исследования для данной статьи описан ниже:

- создать имитационную модель на сетке 300x300x10 м (узлы 1x1x1 м) с применением гауссовой случайной функции (последовательное гауссово моделирование);
- произвести обратную трансформацию гауссовых величин в распределение с отрицательной асимметрией со средним значением 54% (приблизительно соответствующим содержанию Fe в железной руде);
- сделать выборку «шпуров» из имитационной модели по сетке расположения шпуров 10x10 м;
- построить вариограмму на основании выбранных «шпуров»;
- оценить содержание полезного компонента на узлах 1x1x1 м с применением обычного кригинга;
- создать РБФ – оценить РБФ на узлах 1x1x1 м; и
- сравнить оценки с применением РБФ и обычного кригинга с базовым реальным объектом.

Цель оценки на узлах базовой имитационной модели вместо оценки на блоках состоит в том, чтобы создать условия для сравнения оценок с базовым «реальным объектом» и показать «полевые» линии обычного кригинга – интерполянта – при выполнении в мелком масштабе.

## Понятие интерполяции

Интерполяция – это процесс прогнозирования (оценки) значения атрибута в невыборочном местоположении на основании измерений атрибута, выполненных на окружающих площадках. При линейной интерполяции содержание полезного компонента в местоположении объекта разработки рассчитывается как взвешенное линейное среднее данных выборки. Разные интерполяторы задействуют различные методы для определения значения весов.

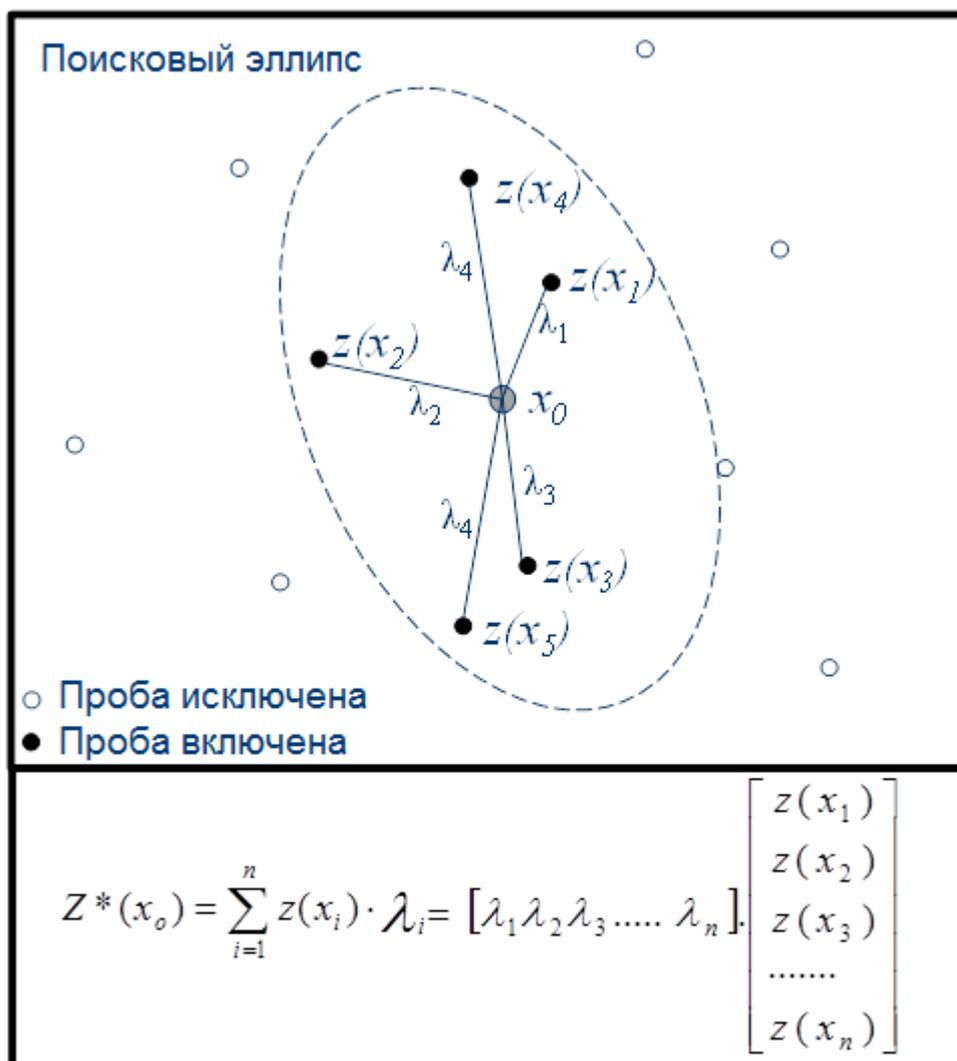


Рисунок 1. Иллюстрация интерполяции с локальными окрестностями.  $x_0$  – заданная точка,  $z(x_i)$  – измеренные величины в местоположении  $x_i$ ,  $\lambda_i$  – вес, присвоенный пробе  $i$ .

Когда точка подлежит оценке в пределах поля доступных данных, процесс называется интерполяцией; когда точка находится за пределами поля данных, для обозначения процесса используется термин «экстраполяция». Данный процесс может быть осуществлен в 1, 2, 3 или 4 измерениях. Как правило, при оценке запасов минеральных ресурсов мы изучаем практические трехмерные задачи – прогнозирование содержания полезного компонента какого-либо атрибута (например, содержание металла) в невыборочных местоположениях на основании величин, измеренных в разбросанных пробах выбуренной породы. В качестве базового допущения принимается, что атрибут,

по которому мы пытаемся составить прогноз, является пространственно непрерывным – что он принимает реальное значение во всех возможных местоположениях.

Возможно существование различных видов интерполяторов. Данный кусочно-постоянный метод, более известный как оценка методом ближайшего соседа, является основным; при этом подходе любое невыборочное местоположение просто принимает значение ближайшей точки данных. Получающийся в результате непрерывный метод оценки принимает форму мозаичного узора с участками с постоянным содержанием полезного компонента, разделенными интервалами с внезапными скачками в минерализации. Это не очень реалистичное представление того, как реальные атрибуты типа содержания металлических руд практически изменяются согласно наблюдениям, и придает значительно различающиеся веса пробам в пространственных крайних точках множества данных. В целях упрощения обсуждения в данной статье считается, что прогнозируемый атрибут – это содержание металлических полезного компонента в металлической руде; однако данную концепцию можно легко распространить на любую непрерывную переменную.

При рассмотрении достоинств различных методов интерполяции полезно начать с взгляда на наблюдаемые характеристики, свойственные реальным атрибутам. О распределении большинства металлов можно сделать следующие общие наблюдения:

- «среднее» содержание полезного компонента изменяется в пределах одной залежи. Данное явление зависит от масштаба, но, как правило, существует возможность очертить контуры участков по содержанию полезного компонента и определить границы участков с более высоким содержанием полезного компонента, отделив их от таковых с более низким. Следовательно, наблюдения по большей части не являются независимыми – содержания полезного компонента на близких расстояниях имеют больше сходства между собой, чем содержания полезного компонента на более отдаленных участках. Это смоделировано с использованием автокорреляции, которая убывает как функция расстояния (коррелированное поведение);
- сила корреляционной связи может отличаться в различных направлениях (анизотропия);
- при определенном отсеивании корреляция более не существует (диапазон); и
- у изменчивости обычно присутствует непространственный компонент. Повторные измерения (например, дублирующие пробы) неидентичны по причине погрешностей пробоотбора и анализа и/или геологической изменчивости в масштабах меньших, чем проба выбуренной породы (эффект самородка или наггет-эффект).

## **Кригинг в качестве интерполятора (локальный)**

Интерполяторы подразделяются на два общих типа – глобальный или локальный. Глобальный интерполятор для оценки величины учитывает все известные точки, в то время как локальная интерполяция использует подмножество данных, обычно определяемое как окрестности поиска с центром в оцениваемой точке.

Кригинг или, более конкретно, обычный кригинг – это интерполятор, который, вероятно, наиболее широко используется для горных работ. Общая идея проста – оценка точки основывается на взвешенной линейной комбинации локальных значений

данных с расчетом весов таким образом, чтобы свести к минимуму дисперсию ошибок на основании принятой модели для пространственной ковариации. Кригинг имеет в основе несколько ключевых допущений:

- базовое допущение состоит в том, что выборочные наблюдения интерпретируются как результаты стохастического процесса. Затем исследуемая переменная (например, содержание Fe) может быть описана математической случайной функцией. Данная концептуализация данных представляет собой просто изящный прием, позволяющий нам описать реальный объект как результат построения вероятностной модели;
- ключевым этапом в геостатистическом моделировании является принятие пространственной модели (вариограммы), описывающей базовую случайную функцию. Несмотря на отсутствие явной связи, выбор пространственной модели обычно базируется на аппроксимации функции к имеющимся экспериментальным данным, и такую функцию часто выбирают скорее из соображений удобства математических действий, нежели получают в результате анализа процесса минерализации;
- принятие обобщающей стохастической процесс модели позволяет выразить дисперсию ошибок (дисперсия разности между содержанием полезного компонента согласно оценке и истинным содержанием «в среднем») в терминах пространственных ковариаций и весовых коэффициентов, примененных к пробам (веса кригинга). Пространственные ковариации определяются сделанным выбором модели вариограммы и местоположениями данных. Традиционная алгебра предоставляет средства для обнаружения набора весов кригинга, который сведет к минимуму дисперсию ошибок.

Описанные выше атрибуты характерны для всех систем кригинга. Наиболее часто используемые варианты кригинга – это простой кригинг (ПК), обычный кригинг (ОК) и универсальный кригинг (УК); их различает способ, согласно которому варьирование среднего содержания полезного компонента (дрейф) инкорпорируется в системы кригинга.

### Работа с дрейфом

Любая описываемая случайной функцией переменная может быть разложена на детерминистический компонент дрейфа и остаточный стохастический компонент, как показано ниже:

$$Z(x) = m(x) + Y(x)$$

Где:

$Z(x)$  – случайная функция в местоположении  $x$  (например, содержание Fe),

$m(x)$  – среднее содержание полезного компонента в местоположении  $x$ , и

$Y(x)$  – остаточная случайная функция.

Как правило, допускается локальное выражение дрейфа как линейной комбинации известных базисных функций – обычно многочленов низкой степени ( $f^i$ ) – с неизвестными коэффициентами ( $a_i$ ):

$$m(x) = \sum_{i=1}^n a_i f^i(x)$$

Используются общие модели дрейфа:

- постоянная – многочлен степени 0;
- линейная – многочлен степени 1; и
- квадратичная – многочлен степени 2.

В теории имеется возможность использовать для моделирования дрейфа многочлены более высоких степеней, но на практике делать так не рекомендуется ввиду высокой степени варьирования при экстраполяции на пространственных экстремумах данных. Следует помнить, что разложение случайной переменной на компонент дрейфа и стохастический компонент – просто механизм, позволяющий нам описывать реальное явление математическими терминами. Однако фактически реальное явление не является результатом математического процесса известного характера. Чем сложнее модель (и чем меньше данных), применяемая для описания дрейфа, тем ниже вероятность, что она будет иметь хоть какое-то сходство с реальным объектом.

Определение коэффициентов многочленов дрейфа часто является серьезным вызовом – их можно определять либо по выбору пользователя, либо путем расчета на основании данных посредством сведения к минимуму некоторых критериев.

Одномерный пример модели дрейфа, аппроксимированной к случайной функции, показан на Рисунке 2. Следует учитывать, что модель дрейфа с многочленом 2-й степени рассчитывается на основании известных данных выборки (с интервалами 10 м), не на базовой (неизвестной) случайной функции. В практическом плане выбору модели дрейфа неизбежно сопутствует неопределенность.

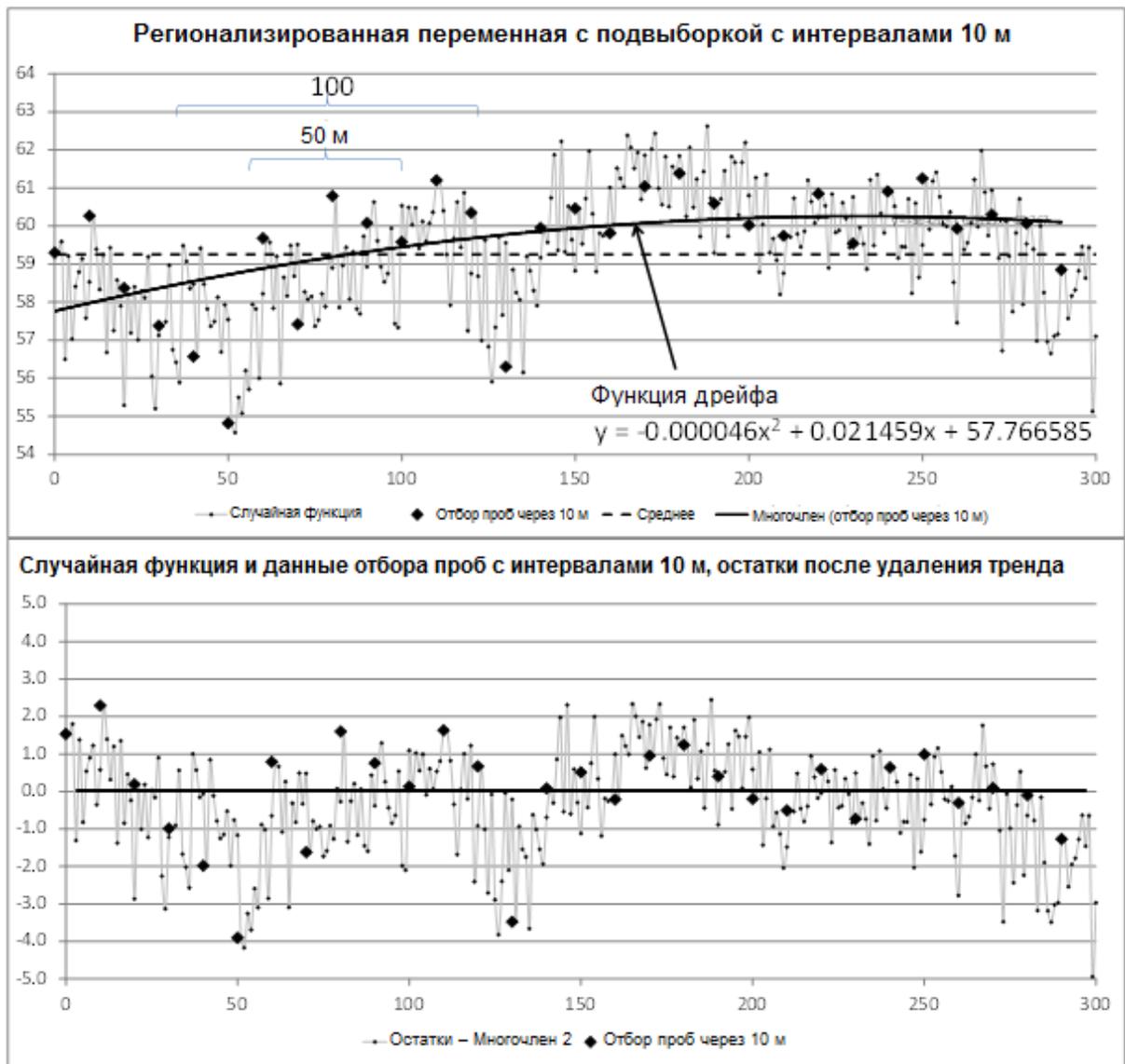


Рисунок 2. Иллюстрация квадратичной функции, аппроксимированной к извлеченным из случайной функции данным.

## Разные системы кригинга

Как объяснялось выше, различие между разными системами кригинга состоит в способе, согласно которому варьирование среднего содержания полезного компонента (дрейф) инкорпорируется в системы кригинга.

### Простой кригинг

Простой кригинг предполагает, что математическое ожидание среднего ( $m$ ) постоянно по всей области исследования и для известной величины (внутренняя стационарность). Это эквивалентно высказыванию, что компонент дрейфа постоянен и известен. Обычно его оценка проводится с применением декластеризованного среднего доступных данных выборки.

Простой кригинг в качестве метода оценки в любой точке сокращается до комбинации двух компонентов: взвешенное среднее локальных данных и среднее всей области. Оценка в непосредственной близости от данных придает больше веса локальной оценке, в то время как в отдалении от данных на оценки будет оказывать воздействие среднее всей области.

Простой кригинг редко используется на практике, так как базовое допущение (постоянное, известное среднее) чересчур строго для большинства случаев применения. Более того, инкорпорирование среднего содержания полезного компонента в качестве взвешенного члена в оценку методом простого кригинга означает, что вдали от влияния данных выборки метод оценки возвращается к среднему содержанию полезного компонента. В большинстве залежей минеральных ресурсов содержание полезного компонента снижается к окраине, и зачастую именно там данные бурения показывают самый низкий результат. Как правило, это нецелесообразно – иметь метод оценки, возвращающийся к среднему в данном регионе.

### *Обычный кригинг*

Отличающее обычный кригинг (ОК) от других систем кригинга допущение заключается в том, что математическое ожидание среднего неизвестно, однако постоянно в масштабе окрестностей поиска (допущение, известное как квази-стационарность в пределах внутренней гипотезы). Что это означает на практике – что не должно быть трендов, присутствующих в локальном среднем содержании полезного компонента в масштабе меньшем, чем масштаб поиска. Это отчасти скользкая концепция, так как это необычно – иметь четкий масштаб, в котором применяется данное разделение. В практическом плане это означает, что присутствующие в пределах локальных окрестностей варьирования в выборочном содержании полезного компонента должны быть правдоподобными случайными колебаниями вокруг постоянного локального среднего содержания полезного компонента, без присутствующего сильного тренда. Что это позволяет сделать далее – что система обычного кригинга размещает варьирование в локальном среднем так, что оценка всегда сконцентрирована на взвешенном среднем проб, присутствующих в локальных окрестностях. Это означает, что конкретизация локальных окрестностей поиска оказывает критическое влияние на качество оценки методом кригинга – а именно, окрестности должны быть достаточно велики, чтобы содержащиеся данные адекватно отражали локальное среднее содержание полезного компонента.

При экстраполяции за пределами лимитов данных оценка методом обычного кригинга не возвращается к глобальному среднему, но поддерживает локальное среднее, указанное для ближайших проб.

### *Универсальный кригинг*

Теория универсального кригинга (УК) была предложена Матероном в 1969 году (Армстронг, 1984 г.) с целью предоставления общего решения для линейной оценки в присутствии дрейфа. Данная теория допускает, что локальное среднее неизвестно, но варьируется систематическим образом и может быть записано как конечное расширение известных базисных функций ( $f$ ) и постоянных (но неизвестных) коэффициентов ( $a$ ). Информация о дрейфе может затем быть инкорпорирована в выражение вариации оценки.

Очень быстро пришло осознание того, что для применения универсального кригинга имеются серьезные практические затруднения. Разработка системы универсального кригинга допускает, что базовая вариограмма (инкорпорирующая дрейф) известна – в этой ситуации система кригинга дает верный результат как для дрейфа, так и для коэффициентов и весов. Однако на практике базовая вариограмма неизменно неизвестна. Это оставляет нас с циклической задачей – для расчета остатков нам нужно знать дрейф, однако, чтобы узнать дрейф, нам нужно знать систему универсального кригинга. Такая цикличность не препятствует использованию универсального кригинга, но точно означает, что применять его следует с величайшей осторожностью. Допущение модели дрейфа и работа только с остатками приведет к необъективной оценке истинной базовой вариограммы (Армстронг, 1984 г.).

Опыт авторов статьи показывает, что универсальный кригинг редко применяется для решения практических задач.

### *Двойной кригинг*

Обсужденные ранее методы оценки посредством кригинга всецело основываются на линейных комбинациях величин данных выборки. Также существует возможность переписать методы оценки посредством универсального кригинга в терминах только ковариаций  $\sigma(x_i, x)$  и функции дрейфа  $f^l(x)$  и исключить любую прямую ссылку на данные. Этот процесс известен как двойной кригинг. Разложение здесь не показано, однако четкое изложение приводится в работе Чайлза и Делфайнера (1999 г.) и Галли с соавторами (1984). Термин «двойной» произошел от альтернативного выведения этих уравнений посредством минимизации функционального пространства, по аналогии со сплайнами (Чайлз и Делфайнер, 1999 г.).

$$z_{dk}^*(x) = \sum_l c_l f^l(x) + \sum_\alpha b_\alpha \sigma(x_\alpha, x)$$

Если выразить это вербально, оценка в любой точке ( $x_0$ ) представляет собой сумму двух компонентов:

- детерминистического компонента, выполняемого суммой членов функции дрейфа в местоположении объекта разработки:  $\sum_l c_l f^l(x)$ ; и
- вероятностного компонента, рассчитываемого как взвешенная сумма ковариаций между местоположением объекта разработки и ВСЕМИ местами отбора проб:  $\sum_\alpha b_\alpha \sigma(x_\alpha, x)$ . Так как величина функции ковариации (либо вариограммы) является самой большой на близких расстояниях, несложно понять, что данный член будет больше всего при расположении заданной точки рядом с данными. Значения коэффициента  $b$  подвергнуты влиянию кластеризации, а расстояние выборочного значения от локального среднего содержания полезного компонента согласно оценке – влиянию модели дрейфа.

Характер функции дрейфа – это выбор, назначаемый пользователем; аналогично, функция ковариации (либо вариограммы во внутреннем случае) – это выбор, указываемый пользователем. Значения коэффициентов  $b$  и  $c$  затем рассчитываются тем же способом, что и для других систем кригинга – посредством наложения ограничений на систему, что позволяет получить уникальное решение (более подробно см. работу Чайлза и Делфайнера, 1999 г.).

Визуализировать данную систему непросто. Рисунок 3 показывает, как методом двойного кригинга выполняется оценка дрейфа и вероятностных компонентов, и что ни один из случаев не делает прямой ссылки на выборочные значения. Следует отметить, что в то время как оценка дрейфа (и коэффициентов) и оценка вероятностных компонентов (и коэффициентов) показаны по отдельности, фактически они вычисляются одновременно. Дрейф оказывает влияние на оценку в пространстве, в то время как вероятностные коэффициенты описывают локальное влияние вокруг каждой точки данных.

Одно из основных преимуществ системы двойного кригинга состоит в том, что коэффициенты дрейфа и ковариации необходимо решить только один раз и затем можно использовать для проведения оценки в любом местоположении. Главный недостаток метода в том, что использование глобальных окрестностей приводит к очень большой системе одновременных уравнений, с одним уравнением на каждую пробу и одним для каждой функции дрейфа.

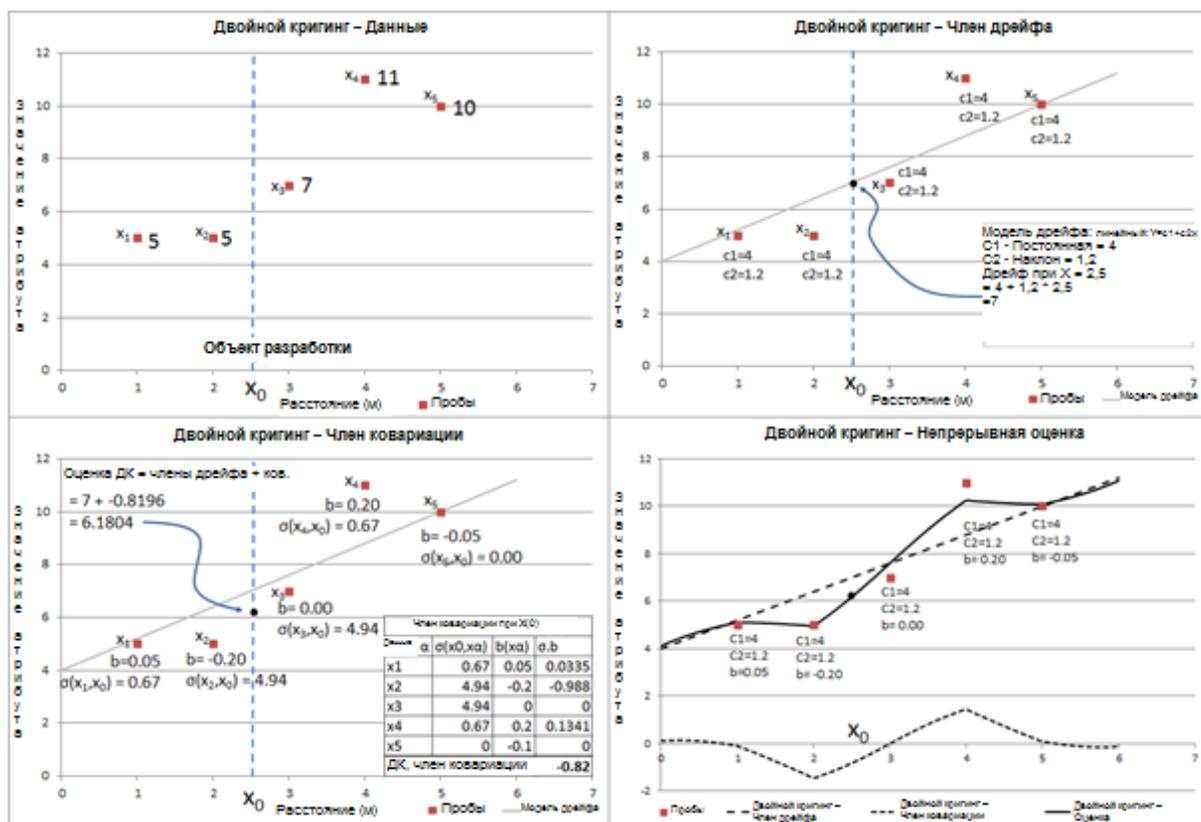


Рисунок 3. Одномерная иллюстрация оценки методом двойного кригинга, показывающая влияние членов дрейфа и ковариации. Применяемая для расчета ковариаций модель представляет собой сферическую модель с sillом 7,8 и диапазоном 3 м.

Выраженная в матричной форме, система двойного кригинга выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & F \\ F' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Где  $\Sigma$  – матрица (nхn) ковариаций проба-проба, F – матрица (1хk) базисных функций дрейфа k, z – матрица (1хn) значений данных выборки, b – матрица (1хn) коэффициентов ковариаций, и c – матрица (1хk) коэффициентов дрейфа.

Преимущество двойного кригинга перед обычным кригингом является следствием того факта, что он эффективнее в вычислительном отношении. Так как веса и коэффициенты вычисляются непосредственно на основании данных, их необходимо вычислить только один раз. После этого расчет оценки в любой точке может выполняться очень быстро.

## Радиальные базисные функции

Радиальная базисная функция (РБФ) – это семейство математических методик, применяемых ко многим задачам пространственной интерполяции и лежащих в основе большинства используемых в наши дни алгоритмов «условного моделирования». Она основана на начальной предпосылке, несколько отличающейся от теории регионализированных переменных, на которых базируется метод кригинга – вместо того, чтобы считать целевую переменную реализацией случайной функции с определенной структурой, РБФ имеет своей основой интерполяцию предопределенной функции на базе математических критериев, таких как минимизация кривизны. В практическом плане это различие – чисто семантическое, потому что традиционный кригинг также использует определенные функции, за исключением таковых, аппроксимированных к экспериментальным данным и выбранных для соответствия моделированию данных. Математически между двойным кригингом и моделированием при помощи РБФ присутствует эквивалентность, а также имеется возможность выбрать функцию РБФ путем аппроксимации к экспериментальным данным. В сущности, из-за того факта, что вариограммы (например, сферические) являются положительно определенными [Чайлз и Делфайнер, стр. 59], они пригодны для применения в качестве радиальных базисных функций.

Интерполянт для РБФ имеет форму, весьма схожую с таковой для общего выражения кригинга – считается, что целевая переменная состоит из члена дрейфа и члена, который представляет собой взвешенное среднее значений функции, зависящих от местоположений данных.

$$s(x) = \sum_i \omega_i \phi(|x - x_i|) + \sum_k^K c_k q_k(x)$$

Где  $x_i$  – местоположения данных, по которым должна строиться интерполяция,  $\omega_i$  – коэффициенты РБФ (веса), и  $\phi_k(x)$  – функция пространственного расстояния (радиальная базисная функция – по которой данный метод получил свое название). Член в правой части относится к набору функций дрейфа K ( $q_k(x)$ ), для каждой из которых коэффициент ( $c_k$ ) применяется глобально ко всем данным.

Аналогичным способом (как и в случае с двойным кригингом) налагаются такие условия, чтобы система стала решаемой. В этом случае условия таковы: произведение

коэффициентов РБФ и коэффициентов функции дрейфа в каждой точке данных в сумме должно составлять нуль по всем точкам данных; а функция должна вернуть значение данных в точке данных (более подробно см. работу Коэна с соавторами, 2001 г., а также Чайлза и Делфайнера, 1999 г., с параллельным примером двойного кригинга). Эти условия позволяют выразить систему как набор линейных уравнений, что показано в матричной форме ниже:

$$\begin{bmatrix} \Phi & F \\ F' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}$$

Где  $\Phi$  – матрица ( $n \times n$ ) значений базисной функции между всеми местами отбора проб,  $F$  – матрица ( $1 \times k$ ) базисных функций дрейфа  $k$ ,  $s$  – матрица ( $1 \times n$ ) значений данных выборки,  $\omega$  – матрица ( $1 \times n$ ) коэффициентов ковариаций, и  $c$  – матрица ( $1 \times k$ ) коэффициентов дрейфа. Если не учитывать использование разных систем представления, единственным различием между этими двумя формулировками будет то, что в двойном кригинге используется функция ковариации (либо вариограммы) для описания пространственных корреляций между значениями проб, в то время как РБФ использует альтернативную пространственную функцию.

В практическом плане пространственная функция РБФ выполняет роль, идентичную роли вариограммы в кригинге, а решение относительно выбора соответствующей пространственной функции для применения к моделированию РБФ оказывает воздействие на результат моделирования, аналогичное воздействию выбора модели вариограммы на кригинг. Поэтому полезно узнать кое-что о характере имеющихся базовых пространственных базисных функций, как и об их воздействии на характер оценки. Также существует возможность применения в формулировке РБФ традиционных вариограмм, например, сферических.

### Существующие радиальные базисные функции

Существует большое семейство радиальных базисных функций, которыми можно воспользоваться (Морони, 2006 г.). Однако, как и в случае с кригингом, важно обеспечить соответствие выбранной РБФ наблюдаемым пространственным характеристикам интерполируемой переменной. Сферическая вариограмма задействуется в кригинге переменных содержания полезного компонента чаще всего. Вблизи начала рассматриваемого отрезка оси она характеризуется почти линейным поведением, которое затем быстро сглаживается до постоянного значения силла в пределах определенного диапазона, и принимает значение силла для всех расстояний, превышающих этот диапазон. Стоит отметить, что данная функция находится посредством автокорреляции сферы и является простейшей математической функцией, обеспечивающей конечный диапазон, линейное поведение в начале рассматриваемого отрезка оси и положительность. Экспоненциальная вариограмма имеет аналогичную форму, хотя и более крутую вблизи начала рассматриваемого отрезка оси, и только приближается к силлу асимптотически.

Существует несколько базисных функций, которые асимптотически приближаются к значению силла, но большая часть таковых имеют ровную (т.е. плоскую) форму вблизи начала рассматриваемого отрезка оси (например, обратная мультикватричная и гауссова). Подразумеваемое вблизи начала рассматриваемого отрезка оси непрерывное поведение нетипично для переменных содержания полезного компонента, и наблюдалась стандартная сферическая форма, создающая нереалистические оболочки содержания полезного компонента ввиду артефактов, когда используемые для

создания оценки пробы резко изменялись на расстоянии вблизи диапазона. Вследствие этого в компании ARANZ Geo (создатели программного обеспечения Leapfrog) разработчики создали новую базисную функцию (сфероидальная функция), сочетающую в себе линейное поведение вблизи начала рассматриваемого отрезка оси и асимптотическое поведение вдали от данных. Формула для сфероидальной функции приведена в Приложении 1.

Линейные вариограммы пригодны для моделирования поверхностей контакта, но их следует избегать при моделировании содержания полезного компонента.

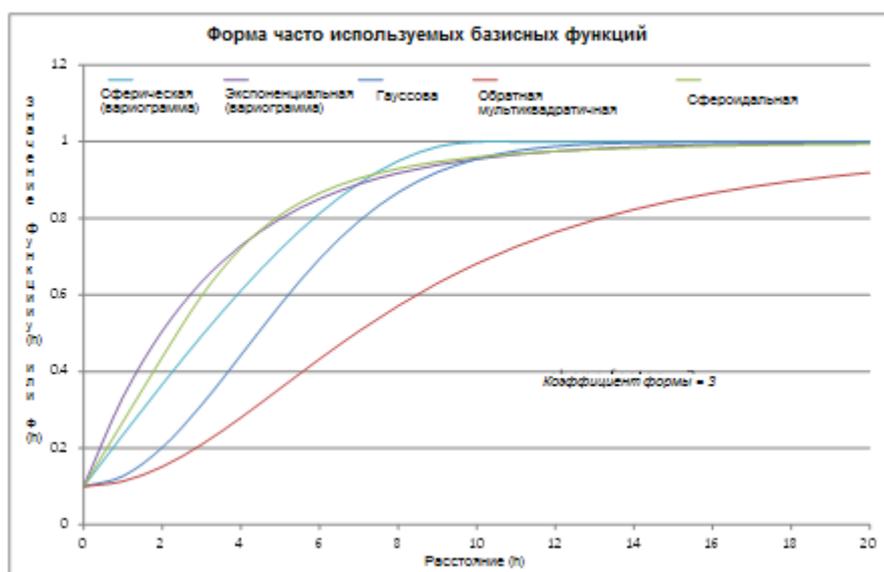


Рисунок 4. Форма часто используемых радиальных базисных функций в сравнении с часто встречающимися функциями вариограмм.

## Сравнение РБФ и кригинга

Как показано выше, используемая в условном моделировании РБФ математически эквивалентна двойному кригингу. Несмотря на это, двойной кригинг редко применяется на практике, потому что традиционное решение полной системы двойного кригинга с трудом поддается обработке для множеств данных крупнее нескольких сотен точек. Наиболее часто применяемым на практике подходом кригинга является обычный кригинг, получивший широкое признание для оценки запасов в горнодобывающей промышленности. Понимание различия между оценкой при помощи обычного кригинга и оценкой посредством РБФ эквивалентно пониманию различия между обычным кригингом и двойным кригингом. Таблица 1 ниже содержит обобщение по факторам сходства и различия систем обычного и двойного кригинга и РБФ.

Фактор	Обычный кригинг	Двойной кригинг	Радиальная базисная функция
Общее описание	Содержание полезного компонента в заданной точке рассчитывается как линейное взвешенное среднее проб в локальных окрестностях. Принятие модели вариограммы для всей области позволяет выразить «ошибку оценки» в терминах весов (неизвестные) и ковариаций (указываются моделью). Посредством процесса минимизации в условиях ограничений вычисляется уникальный набор весов, который сводит к минимуму ошибку оценки. Этот процесс повторяется для каждой заданной точки.	На основании выбранной функции дрейфа и модели вариограммы рассчитывается набор коэффициентов глобального дрейфа и коэффициентов весов проб по всем пробам. Находится уникальное решение, которое сводит к минимуму ошибку оценки. Как только решение для коэффициентов дрейфа и веса найдено, содержание полезного компонента можно интерполировать в любом местоположении.	С принципиальной точки зрения процесс аналогичен двойному кригингу, за исключением того, что пространственные корреляции обеспечиваются радиальной базисной функцией, а не вариограммой. Кроме того, были разработаны математические упрощения, позволяющие быстро решать РБФ для очень больших множеств данных.
Допущение о стационарности	Должно быть удовлетворено условие квазистационарности. Это ослабление внутренней гипотезы, позволяющее некоторое варьирование в подлежащем размещению локальном среднем (дрейф). В практическом плане дрейф должен быть незначительным в масштабе меньшем, нежели окрестности поиска, и вариограмма должна применяться по всей области.	Метод учитывает отсутствие стационарности через простые функции дрейфа. Чем проще наблюдаемый тренд, тем более устойчиво модель дрейфа будет описывать варьирование в локальном среднем. Тогда остаток после вычитания простой функции дрейфа должен удовлетворять внутренней гипотезе (т.е. условиям, изложенным для обычного кригинга слева).	Допущение о стационарности не требуется. Однако, как и в случае двойного кригинга, чем выше существующая степень стационарности (и чем проще дрейф), тем более надежной будет интерполяция.
Пространственная модель	Вариограмма (внутренний случай).	Вариограмма (внутренний случай), инкорпорирующая дрейф.	Симметричная функция расстояния. Должны быть реальные величины на $[0, \infty]$ .
Решения пользователя	Определение всей области. Выбор модели вариограммы. Определение окрестностей поиска (тесно связано с выбором вариограммы).	Определение всей области. Форма функции(й) дрейфа. Выбор модели вариограммы.	Определение всей области. Форма функции(й) дрейфа. Выбор радиальной базисной функции (и анизотропии).
Результат	Оценка содержания полезного компонента для точки (либо объема). Дисперсия кригинга (и другие производные средства измерения достоверности оценки).	Оценка содержания полезного компонента для точки (либо объема).	Оценка содержания полезного компонента для точки (либо объема). (средства измерения достоверности оценки отсутствуют).

Фактор	Обычный кригинг	Двойной кригинг	Радиальная базисная функция
Поведение при экстраполяции	Допущение состоит в том, что данные в окрестностях поиска сконцентрированы на локальном среднем. В практическом плане это означает, что пробам на окраинах присваиваются самые высокие веса, когда оценка содержания полезного компонента проводится вне поля данных, а содержание на окраинах спроецировано за пределы внешней границы.	Поведение при экстраполяции зависит от характера принятых моделей дрейфа и диапазона вариограммы (диапазон влияния проб). Оценка содержания полезного компонента является комбинацией члена дрейфа и стохастического члена – вдали от данных оценка будет подвергаться влиянию члена дрейфа – и может стать отрицательной.	То же, что и для двойного кригинга: Общие функции дрейфа: Нулевая: Вдали от данных интерполянт возвращается к нулю. Постоянная: Вдали от данных интерполянт возвращается к среднему (эквивалентно простому кригингу). Линейная: Интерполянт возвращается к функции дрейфа, которая представляет собой простую линейную функцию в системе координат. Квадратичная: Интерполянт возвращается к квадратичной функции дрейфа (применять с осторожностью).

Таблица 1: Сравнение интерполяторов обычного кригинга, двойного кригинга и РБФ.

Наилучший способ иллюстрации сходства и различий – визуальное изображение. Была создана условная модель на сетке 300x300x10 м, и вертикальные колонки узлов были извлечены для имитации искусственных сеток шпуров. Были выбраны две разные сетки шпуров – регулярная сетка на участке 10x10 м (имитирующая схему для контроля за содержанием полезного компонента) и схема на регулярной сетке 20 м с дрейфом к северу со случайным выбором на оси абсцисс по восточной долготе. Затем эти псевдо-сетки шпуров были использованы для оценки содержания полезного компонента с возвратом на первоначальную сетку. Рисунок 5 иллюстрирует использованные извлеченные схемы данных.

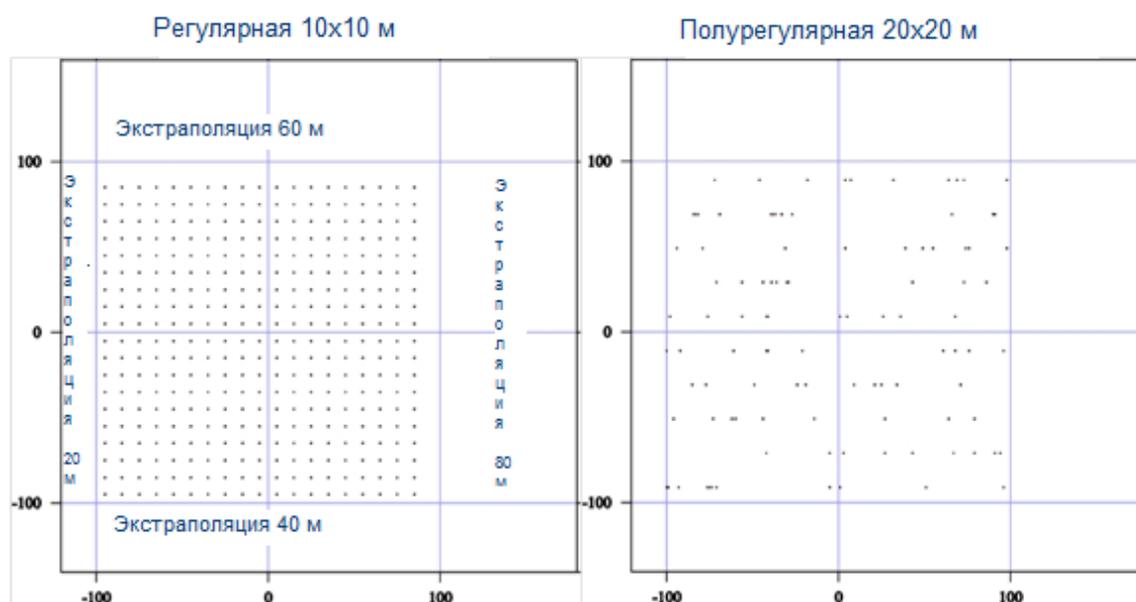


Рисунок 5. Регулярная и полурегулярная сетки шпуров.

Вся оценка проводилась в трех измерениях, но в целях отображения исходные данные и результат оценки показаны в двух измерениях на проходящей через центр плоскости. На Рисунке 6 сравниваются оценки методом обычного кригинга и РБФ на основании данных регулярной сетки 10x10 м, в то время как Рисунок 7 содержит эквивалентное сравнение на основании нерегулярных данных. Базовое распределение, из которого извлекаются данные псевдо-шпуров, является распределением с отрицательной асимметрией, приблизительно соответствующей залежи железной руды с типично низким содержанием полезного компонента. Таблица 2 содержит сравнение указываемых пользователем параметров двух интерполянтов.

	Параметры оценки методом обычного кригинга	Интерполянт РБФ
Окрестности	Поиск 250x250x10 м (анизотропия 10x10x1) Максимальное число проб 12 Отсечение не применялось	Отсечение не применялось
Вариограмма	С0: 0,9	Наггет: 0,72

	С1: Сферический Силл 1,0 Диапазоны 65, 45, 6,5, без вращения С2: Сферический Силл 1,9 Диапазоны 120, 120, 25, без вращения	Сфероидальный: Силл 3,0 без вращения Диапазон 20 м Анизотропия: 1, 0,69, 0,1
Модель дрейфа		Постоянный дрейф

Таблица 2. Сравнение параметров интерполяции обычного кригинга и РБФ (отметим, что, хотя диапазоны совершенно разные, получающиеся в результате функции имеют весьма схожую форму).

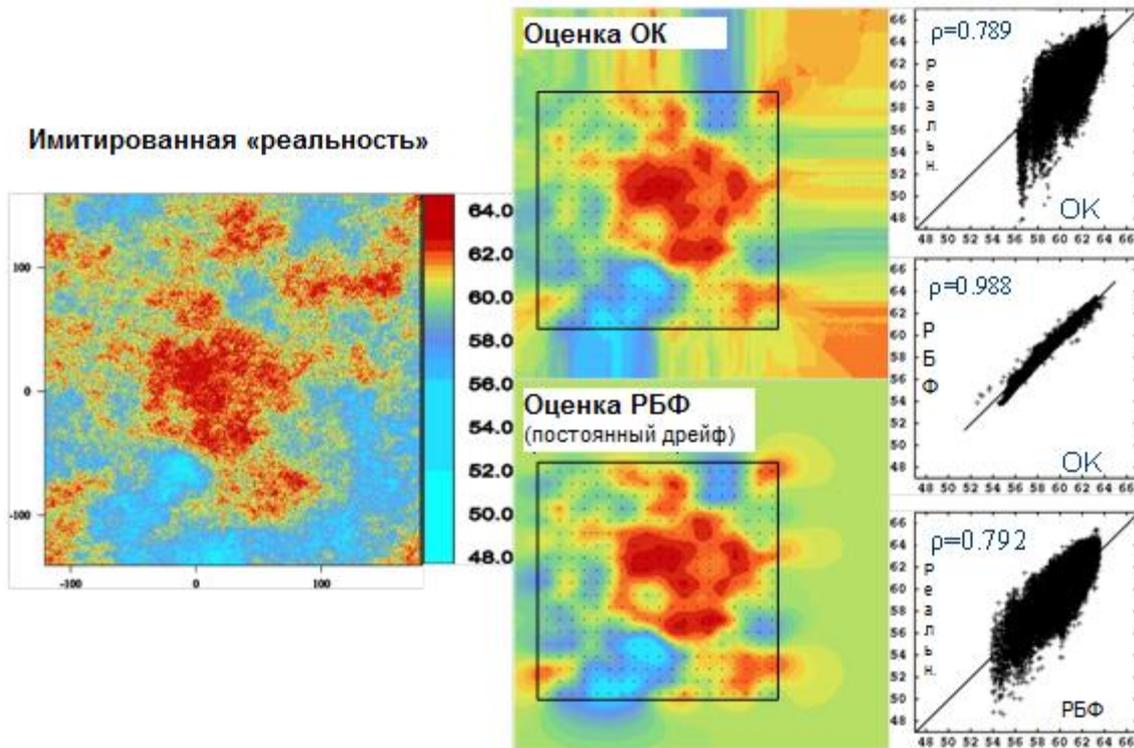


Рисунок 6. Сравнение оценок методом обычного кригинга и РБФ на основании данных регулярной сетки 10x10 м, извлеченных из плотной имитированной реальности. Показанные в правой части рисунка диаграммы разброса только сравнивают точки в пределах участка, информация о котором получена в результате бурения (черный квадрат). Следует отметить различие в поведении интерполянта при экстраполяции.

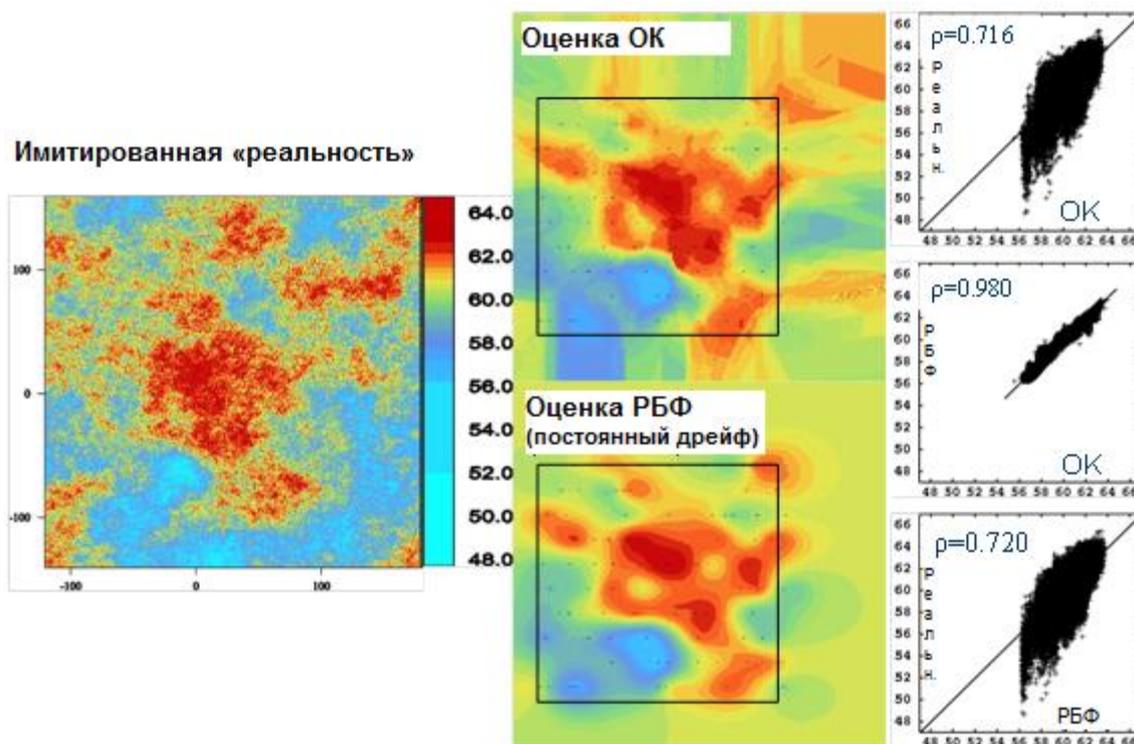


Рисунок 7. Сравнение оценок методом обычного кригинга и РБФ на основании иррегулярных данных ( $20 \text{ м} \times N \times \text{случайное } E$ ), извлеченных из плотной симитированной реальности.

## Обсуждение

Исследование оценок методом обычного кригинга и РБФ показывает, что в пределах поля данных (т.е. внутри черных квадратов, показанных на Рисунке 6 и Рисунке 7) оценки двумя этими методами достаточно трудно различить. Корреляция между этими двумя интерполянтами очень высока (0,988 и 0,980), и обе они аналогичным образом отличаются в сравнении с «реальностью». Невозможно сказать, какой метод интерполяции дает более надежный результат – оба они одинаково неверны. В данной ситуации, если оценка методом обычного кригинга считается «соответствующей целевому назначению», то оценка методом РБФ характеризуется аналогично.

Обычно кригинг визуально отображается (когда вообще отображается) только в виде оценок по блокам или в виде оболочек содержания полезного компонента, построенных из поблочных оценок. Но, разумеется, любая точка в пространстве может быть определена посредством кригинга, поэтому его можно использовать в качестве интерполянта. На представленных выше диаграммах кригинг проводился на всех точках местоположения ячейки базовой имитационной модели. Это демонстрирует, что (почти) непрерывный интерполянт обычного кригинга весьма схож с интерполянтом РБФ при проведении в пределах плотного поля данных, такого как схема контроля за содержанием полезного компонента. Это также показывает, что присутствующие при интерполяции методом обычного кригинга нарушения непрерывности являются результатом применения локальных окрестностей. В частности, данное нарушение непрерывности отмечается в области экстраполяции, где внезапные перепады в интерполируемом содержании полезного компонента вызваны тем, что пробы входят в / выходят из поиск(а). Эти нарушения непрерывности

отражаются как нереалистичные артефакты при построении оболочек содержания полезного компонента с применением традиционного кригинга.

## Выбор модели дрейфа

Налагаемый в условном моделировании выбор модели дрейфа оказывает сильное влияние на интерполянт. Задействуются четыре общие модели дрейфа – в порядке возрастания по степени сложности: нулевая, постоянная, линейная и квадратичная. Ни одна из них не является непосредственно эквивалентной обычному кригингу с локальными окрестностями. Использование нулевой модели дрейфа приблизительно эквивалентно простому кригингу с нулевым средним – эту модель никогда не следует использовать для интерполяции переменных содержания полезного компонента.

Постоянная модель дрейфа приблизительно эквивалентна простому кригингу с постоянным средним, равным декластеризованному среднему данных. Линейную и квадратичную модели дрейфа следует применять с осторожностью – они могут представлять опасность при экстраполяции. Следует отметить, что в пределах ограничений данных оценки весьма схожи с постоянным, линейным и квадратичным дрейфами. Постоянный дрейф – самый безопасный вариант для применения в целях интерполяции переменных содержания полезного компонента.

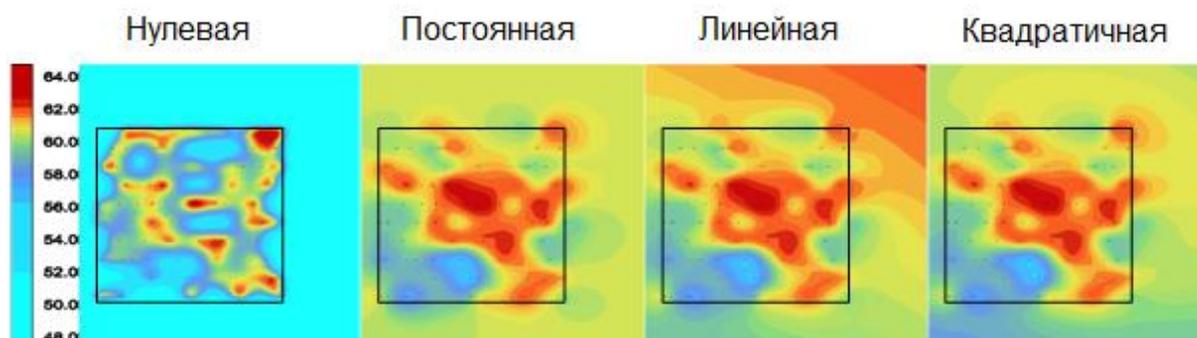


Рисунок 8. Сравнение моделей дрейфа, примененных к случаю иррегулярного отбора проб.

## Оценка по точкам в сравнении с оценкой по блокам

Как правило, при проведении горных работ оценки обычно выполняются по блокам, а не по точкам. Обычно приводится такая причина – поблочные оценки принимают во внимание изменения в поддержке между доступной информацией (содержание полезного компонента, замеренное в пробах выбуренной породы определенного объема) и то, что мы пытаемся прогнозировать (содержание полезного компонента в объемах породы, достаточных для транспортировки грузовиками или превышающих этот объем). Влияние дисперсии в пределах объема обуславливает, что изменчивость поблочных оценок должна быть ниже изменчивости данных.

Так как оценки – это линейные функции данных, оценку блока можно создать на основании среднего точечной оценки в пределах определенного объема. Строго говоря, это интеграл функции, но практически рассчитывается посредством оценки среднего по дискретному количеству точек в пределах блока (дискретизация).

Как правило, в обычном кригинге поблочная оценка достигается одним из следующих способов: усреднением точечных оценок на мелкочаеистой сетке в более крупной ячейке, или – более часто используемый – усреднением пространственной функции между точками данных и блоком и использованием этих усредненных величин в уравнениях кригинга. Математически эти процессы эквивалентны, но последний применяется чаще из-за более высокой скорости вычислений.

В случае с РБФ оценка по большей части выполняется посредством вычисления интеграла функции по конкретному объему, так как эффективность вычислений РБФ делает это целесообразным, а инкорпорирование частей блоков, получающихся при дроблении блоков на области, удобнее. В практической работе, как и в обычном кригинге, интегрирование выполняется эмпирически на сетке «дискретизации» – то есть функция оценивается на  $n$  расположенных с равными интервалами узлах и  $n$  усредненных величин.

Здесь можно сделать важное наблюдение. Если градиент функции интерполянта остается ровным по всему блоку, то оценка функции в центральной точке эквивалентна интегрированию по конкретному объему. Проще всего проиллюстрировать это в одном измерении (Рисунок 9), однако данный принцип можно легко распространить на 3 измерения.

Во многих случаях оценка интерполянта в центральной точке блока практически равноценна усреднению по полному объему блока, в особенности при плотно расположенных данных, как в схеме для контроля за содержанием полезного компонента. Иначе говоря, точечный кригинг центраида блока может выдать результат, весьма схожий с результатом блочного кригинга, и, аналогично, оценка РБФ в центраиде блока может быть весьма схожей с оценкой на более мелкочаеистой сетке и усреднения. Простое испытание может подтвердить, так ли это на самом деле.



Рисунок 9. Иллюстрация влияния, которое градиент интерполянта оказывает на усреднение по сравнению с центраидом.

Один из критических аргументов, иногда выдвигаемых против интерполянтов содержания полезного компонента РБФ, таков: если интерполянт переводится в оболочки содержания полезного компонента, то созданные на основании базового

интерполянта ячейки каркасной модели приводят к возникновению фигур «негеологического» вида с нереалистично сглаженными кривыми (похожими на фигуры из ранней цифровой анимации). При сравнении интерполянтов в масштабе в данной точке должно стать очевидным, что непрерывные сглаженные кривые РБФ не более и не менее «реалистичны», чем более прерывистые фигуры, созданные под влиянием окрестностей в обычном кригинге, или встречающиеся во вручную оцифрованных каркасных моделях плоские треугольники и угловатые пики.

## **Выводы**

В настоящее время условные модели широко используются для моделирования геометрии поверхностей на основании категориальных каротажных данных, а также для моделирования «изоповерхностей содержания полезного компонента» на основании непрерывных переменных содержания полезного компонента. Одним из базовых инструментов условного моделирования является радиальная базисная функция (РБФ). Математическая трактовка радиальной базисной функции эквивалентна двойному кригингу, в котором уникальное решение как для коэффициентов дрейфа, так и для весов ковариаций находят непосредственно на основании данных. Будучи вычислена, РБФ может быть решена для любой невыборочной точки или усреднена по любому объему для обеспечения оценки содержания полезного компонента.

Раскрытое в данной статье сравнение методов интерполяции показывает, что, например, в таких ситуациях как контроль за содержанием полезного компонента, где расстояние между данными меньше диапазона вариограммы, результаты оценки с применением интерполяции методом РБФ практически неотличимы от результатов оценки содержания полезного компонента методом обычного кригинга.

## **Выражение признательности**

Данная работа выросла из проекта, осуществляемого для компании ВНР Billiton. Авторы выражают признательность Колину Кэри из компании ВНР Billiton и Скотту Джексону из компании QG Pty Ltd за вдумчивое рецензирование рукописи. Ценные комментарии были получены от двух анонимных рецензентов.

Для разработки базовой имитационной модели и для оценок методом обычного кригинга применялось программное обеспечение Isatis. Интерполяции РБФ были созданы с применением программного обеспечения Leapfrog для горнодобывающей отрасли.

## **Список литературы**

Армстронг М. 1984 г. Задачи универсального кригинга. Математическая геология. Том 16, выпуск 1.

Карр Джей. С., Битсон Р. К., Черри Джей. В., Митчелл Т. Джей., Фрайт У. Р., МакКаллум Б. С. и Эванс Т. Р.. 2001 г. Реконструкция и представление трехмерных объектов при помощи радиальных базисных функций. Ассоциация по вычислительной

технике, специальная группа по интересам компьютерной графики и интерактивным средствам управления, 2001 г., 12-17 августа 2001 г., Лос-Анджелес, СА, США.

Чайлз Джей. П. и Делфайнер П. 1999 г. Геоestatистика: моделирование пространственной неопределенности, серия Уайли в разделе «Вероятность и статистика», стр. 695 (Уайли, Нью-Йорк).

Коста Джей.-П., Пронцато Л. и Тьерри Е. 1999 г. Сравнение между сетями кригинга и радиальных базисных функций для нелинейного прогноза. В работе А. Enis Çetin, Lale Akarun, Aysin Ertüzün, Metin N. Gurcan, Yasemin Yardimci (Ред.): Материалы семинара IEEE-EURASIP (Институт инженеров по электротехнике и электронике – Европейская ассоциация по обработке сигналов) по нелинейной обработке изображений и сигналов (NSIP'99), г. Анталия, Турция, 20-23 июня 1999 г. Типография университета Богазичи, 1999 г. ISBN 975-518-133-4

Коуэн Е. Джей., Битсон Р. К., Росс Х. Джей., Фрайт У. Р., МакЛеллан Т. Джей., Эванс Т. Р., Карр Джей. С., Лейн Р. Дж., Брайт Д. В., Гиллман А. Джей., Ошурст Р. А. и Тайтли М. 2003 г. Практическое условное геологическое моделирование. Материалы конференции Австралийско-азиатского института горного дела и металлургии. Пятая международная конференция по геологии горных работ. Австралийско-азиатский институт горного дела и металлургии, Бендиго, 2003 г.

Галли А., Мурилло Е. и Томанн Джей. 1984 г. Двойной кригинг – его свойства и его применение при непосредственном оконтуривании. Геоestatистика для описания характеристик природных ресурсов, Дж. Верли, М. Давид, А. Дж. Джорнел и А. Маречал. Ред.: Райдел, Дордрехт, Холланд, часть 2, стр. 621-634.

Морони Т. 2006. Исследование метода конечных объемов, инкорпорирующего радиальные базисные функции для моделирования нелинейного переноса. Докторская диссертация. Квинслендский технологический университет.

Роча Х. 2009. По поводу выбора наиболее эффективной радиальной базисной функции. Прикладное математическое моделирование. Том 33, выпуск 3, март 2009 г., стр. 1573–1583.

## Приложение 1

Выражение для сфероидальной базисной функции показано ниже:

$$\Theta(c, m, r) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{c} \frac{m}{2\sqrt{1+m}} & r < c/\sqrt{m+1} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{m+1}{m+2} \right)^{-1-m/2} \left( 1 + \left( \frac{r}{c} \right)^2 \right)^{-m/2} & r \geq c/\sqrt{m+1} \end{cases}$$

Где  $r$  – диапазон,  $m$  – порядок сфероидальной функции (нечетные числа от 3 до 9), и  $c$  – расстояние, на котором рассчитывается значение функции. Данная формула используется при вычислении РБФ. Это убывающая функция, асимптотически приближающаяся к нулю.

В программном обеспечении Leapfrog данное выражение, наоборот, представлено в форме вариограммы, возрастающей до sill. Интерфейс отображает функцию вариограммы, управляемую посредством параметров nugget (N), sill (S) и диапазона (R). Эта вариограмма описывается уравнением:

$$\gamma(r) = (S - N)(1 - \Theta(\rho_m R, m, r)) + N$$

Где  $\rho_m$  – коэффициент масштабирования, который зависит от порядка сфероидальной функции (m). Порядок также называется альфа-параметром в произведениях и изменяет форму сфероидальной функции.

Данное выражение для сфероидальной функции не было опубликовано в официальном порядке. Для получения более подробной информации заинтересованные читатели могут связаться с автором Ричардом Лейном.