

ЦНИИОМТП

**Основы расчета
и анализа
точности
геодезических
измерений
в строительстве**



МОСКВА 1974

ГОССТРОЙ СССР

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И ПРОЕКТНО-
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ОРГАНИЗАЦИИ, МЕХАНИ-
ЗАЦИИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОМОЩИ СТРОИТЕЛЬСТВУ
ЦНИИОМТП

В. С. СЫТНИК

ОСНОВЫ
РАСЧЕТА
И АНАЛИЗА
ТОЧНОСТИ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ
В СТРОИТЕЛЬСТВЕ



МОСКВА
СТРОЙИЗДАТ
1974

Сытник В. С. Основы расчета и анализа точности геодезических измерений в строительстве. М., Стройиздат, 1974. 192 с. (Госстрой СССР. Центр. науч.-исслед. и проектно-эксперимент. ин-т организации, механизации и техн. помощи стр-ву).

В книге изложены вопросы теории и практики расчета, оценки и анализа точности геодезических измерений, выполняемых при возведении промышленных, жилых и общественных зданий и инженерных сооружений. На основе существующих в теории вероятностей математической статистики и ошибок измерений рассматриваются методы расчета необходимой и достаточной точности геодезических измерений применительно к определенным стадиям строительно-монтажных работ и конструктивным решениям зданий и сооружений. Значительное внимание уделено анализу точности результатов геодезических измерений.

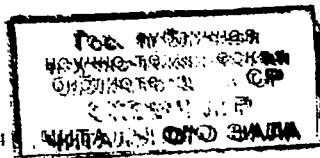
Книга предназначена для геодезистов строительно-монтажных и проектных организаций. Она может быть использована научными работниками, занятыми исследованиями по расчету и обеспечению точности в строительстве, а также студентами высших учебных заведений, изучающими курс «Инженерная геодезия».

Книга написана канд. техн. наук, руководителем лаборатории метрологии в строительстве ЦНИИОМТП Госстроя СССР В. С. Сытником.

Табл. 34; ил. 22; список лит.: 29 назв.

© Стройиздат, 1974

С $\frac{30207-376}{047(01)-74}$ 122-74



74-10363

ЦНИИОМТП

Основы расчета и анализа точности геодезических измерений в строительстве

Редактор издательства Л. А. Кашанин

Технические редакторы Т. В. Кузнецова, В. М. Родионова

Корректор В. М. Залевская

Сдано в набор 22/VI 1973 г.

Подп. к печати 29/XI 1973 г.

Т-19203 Формат 84×108¹/₃₂ д. л. Бумага типографская № 2

10,08 усл. печ. л. (9,96 уч.-изд. л.) Тираж 10 000 экз.

Изд. № VI-3713 Зак. № 343 Цена 50 коп.

Стройиздат

103777, Москва, Кузнецкий мост, д. 9.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, И-41, Б. Переяславская ул., 46

Одна из основных задач повышения качества строительства — расширение использования в практике геодезических работ новейших достижений современной науки. Для успешного решения этой задачи необходимо разработать прогрессивные методы выполнения геодезических работ с учетом современной технологии и организации строительно-монтажного производства.

В настоящее время разработан и освоен новый класс точности геодезической метрологии. В область строительной геодезии все более широко внедряются электроника, автоматика и машинные счетно-решающие устройства, осваиваются приемы дистанционного непрерывного съема результатов измерений.

Современные уровень и темпы строительно-монтажных работ требуют создания надежных средств для быстрой оценки качества возведения зданий и сооружений. Успешному решению этой народнохозяйственной задачи будет способствовать внедрение современных математических методов и средств вычисления в строительное производство.

За последние годы вузами, научно-исследовательскими, проектными и производственными организациями разработаны новые методики производства геодезических работ при строительстве зданий и сооружений, сконструированы инструменты, приборы и приспособления для разбивочных работ и контроля точности возведения конструкций, а также проведены оригинальные исследования по расчету, оценке и анализу точности геодезических измерений. Новые средства измерений, в частности оптические квантовые генераторы, в корне меняют традиционные методы выполнения геодезических работ на строительной площадке. Эти новые разработки опубликованы в периодических изданиях, трудах, сборниках, информационных сообщениях и т. д., и поэтому геодезической общественности они мало известны.

Математические методы интенсивно проникают во все сферы науки и техники. Строительная геодезия в этом смысле не является исключением; это относится как к теоретическим исследованиям при разработке методов и средств

геодезических измерений, так и к оценке результатов измерений. При этом всегда оказывается, что долготелетний аналитический опыт нельзя переносить из одной области в другую, даже совсем близкую. Поэтому обращаются к методам теории вероятностей и математической статистики, так как с их помощью можно объективно оценить надежность метода измерений или полноту результатов измерений. Эти методы, полностью исключающие возможность недооценки или переоценки результатов, способствуют осмысленной интерпретации данных измерений.

Геодезиста и строителя в первую очередь интересует, как они могут с пользой применить методы математической статистики для своих целей. Поэтому в данной книге сделана попытка представить этот раздел математики с точки зрения геодезиста и строителя, чтобы ознакомить последних с необходимыми приемами и критериями математической статистики и определения способов их приложения. При этом автор старался поставить аналитические проблемы и математическую интерпретацию результатов измерений на первый план и свести теоретические положения до минимума.

При оценке точности геодезических измерений значительное место занимают вопросы теории ошибок измерений. Поэтому в книге рассматриваются виды ошибок измерений, методика оценки точности по результатам равноточных, неравноточных и двойных измерений. Теорию ошибок измерений не следует рассматривать как раздел математической статистики. Содержание теории ошибок измерений определяется не только математическими средствами, которые она использует, но и техническими приложениями — различными измерениями. Математическая статистика не имеет подобного конкретного приложения. Она, как и всякая ветвь математики, оперирует с абстрактными понятиями, главные из которых — понятия генеральной совокупности и выборки из нее. В теории ошибок измерений рассматриваются такие вопросы, как учение об измерениях и физических причинах возникновения ошибок, решение задач на априорную оценку точности, носящую чисто инженерные черты, и ряд других вопросов, не рассматриваемых в математической статистике.

При решении задач, связанных с расчетом и достижением необходимой и достаточной точности возведения зданий и сооружений, в последние годы применяется теория размерных цепей, впитавшая в себя основные методы,

приемы и критерии из теории вероятностей, математической статистики, а также теории ошибок измерений. Определение возможных ошибок размеров здания или его элементов при заданных допусках на изготовление элементов, их монтаж и геодезические построения составляют основу теории размерных цепей. В главе IV даны основы расчета точности с применением простых линейных и пространственных размерных цепей при зависимых и независимых составляющих. Расчет размерных цепей в строительстве является наиболее современным средством определения и прогнозирования норм точности на выполнение отдельных процессов, связанных с возведением зданий и сооружений. Без такого расчета можно в порядке перестраховки назначить слишком высокую точность либо, наоборот, низкую, не обеспечивающую нормальную эксплуатацию и полную собираемость здания без подгонок и переделок.

Существуют различные, порой противоречивые мнения по вопросу установления необходимой точности геодезических измерений для возведения зданий и сооружений.

В практике строительства очень часто погрешности геодезических методов и инструментов имеют тот же порядок, что и допускаемые погрешности положения конструкций в здании или сооружении. Эти случаи особенно опасны при производстве дорогостоящих строительных работ по возведению крупных сооружений.

Отсутствие норм точности на геодезические измерения при возведении зданий и сооружений в большинстве случаев (это подтверждается многими примерами) приводит к появлению недопустимых отклонений действительного положения конструкций от проектного или к низкой производительности труда. В первом случае это является следствием упрощенных способов геодезических измерений, во втором — чрезмерно сложных.

Чрезмерно высокие требования к точности геодезических измерений могут привести к неоправданному выбору методов измерения и инструментов, что повлечет за собой дополнительные затраты средств и времени на выполнение работ. Недостаточная точность измерений может нарушить проектные размеры площадок опирания конструкций и узлов их сопряжения, следствием чего явится неправильная работа и даже разрушение зданий или сооружений. Поэтому при современных условиях выполнения строительномонтажных работ следует решить вопрос об установлении такой величины ошибок геодезических измерений, которая

не влияла бы существенно на требуемую точность положения конструкций в каркасе зданий, с одной стороны, и не требовала бы высокоточных измерений с применением дорогостоящих приборов и приспособлений — с другой, т. е. установить оптимальное значение величины ошибок измерений при минимальной стоимости выполнения работ. Этому вопросу посвящена глава V настоящей книги, где приводятся три метода определения точности геодезических измерений на строительной площадке: расчет точности по известным формулам из классической геодезии с учетом конкретных методов и средств измерений; расчет точности измерений с применением теории размерных цепей; вероятностный метод, при котором точность измерений определяется долей риска нарушений строительных допусков.

На строительной площадке выполняется большой объем геодезических измерений. Результаты этих измерений должны быть подвергнуты вероятностно-статистическому анализу с тем, чтобы выявить влияние производственных и внешних факторов, оценить это влияние по результатам выполненных измерений и в последующем ослабить или полностью исключить это влияние.

Дисперсионный анализ (глава VIII) позволяет определить влияние изменений какого-либо фактора на результаты измерений. В геодезии этот анализ служит главным образом для обнаружения систематических ошибок. В этой же главе приведены основы корреляционного анализа, который позволяет установить зависимость между случайными величинами по результатам измерений и силу этой зависимости.

Большое внимание уделено примерам применения тех или иных математических методов, приемов или критериев, взятых из практики строительной геодезии. Эти примеры могут быть применены к аналогичным проблемам в смежных областях знаний. В примерах использован цифровой материал измерений, выполненных лабораторией метрологии в строительстве ЦНИИОМТП под руководством канд. техн. наук В. С. Сытника.

Ниже приводятся основные термины, определения и обозначения, используемые в книге.

Допуск Δ — разность между крайним предельным ($x_{\max}$ или $x_{\min}$) значением и проектным (x_0) размером: $\Delta^+ = x_{\max} - x_0$; $\Delta^- = x_{\min} - x_0$. За счет положительных допусков предельные размеры по сравнению с проектными увеличиваются и уменьшаются зазоры между элементами. За

счет отрицательных допусков предельные размеры по сравнению с проектными уменьшаются и увеличиваются зазоры между элементами.

Поле допуска $|\Delta_{\pm}|$ — разность между наибольшим ($x_{\max}$) и наименьшим ($x_{\min}$) предельными значениями размеров: $|\Delta_{\pm}| = x_{\max} - x_{\min}$.

Осевая плановая разбивочная основа — система четырехугольников, квадратов или треугольников и других геометрических фигур, сторонами которых являются разбивочные оси здания (сооружения) или линии, параллельные им.

Высотная (рабочая) разбивочная основа — сеть нивелирных полигонов, проложенных по знакам разбивочных осей здания (или сооружения) или настенным знакам.

Главные разбивочные оси — две взаимно перпендикулярные оси симметрии здания или сооружения.

Основные разбивочные оси — оси, определяющие контур здания или сооружения в плане; они бывают продольные и поперечные.

Пролетные разбивочные оси — оси, ограничивающие пролеты здания или сооружения и параллельные основным продольным осям.

Межсекционные разбивочные оси — оси, проходящие по границе температурных швов здания или сооружения.

Монтажные установочные оси — оси, смещенные относительно разбивочных осей на определенную величину для удобства геодезического контроля при монтаже конструкций.

Исходный разбивочный горизонт — плоскость, проходящая через опорные площадки последних (по высоте) несущих конструкций подземной части здания или сооружения.

Монтажный разбивочный горизонт — условная плоскость, проходящая через опорные площадки возведенных несущих конструкций определенного этажа или яруса надземной части здания или сооружения.

Установочные риски элементов — характерные ориентиры (геометрические оси, грани) на поверхности элементов, совмещенные с соответствующими их положению осями в конструкции или натуре.

Разбивочные работы — комплекс геодезических измерений на местности с соответствующими вычислениями и закреплением пунктов. На основании этих данных определяют плановое и высотное положение здания или сооруже-

ния в целом, а также отдельных его конструкций и элементов.

Основные разбивочные работы — совокупность геодезических операций по построению и закреплению в натуре осей здания, характеризующих его конфигурацию и общие габариты. Основные оси определяют положение здания на местности относительно пунктов государственной или городской геодезической или общеплощадочной сети, красных линий, существующей застройки и других предметов местности.

Детальные разбивочные работы — совокупность геодезических операций по определению планового и высотного положения отдельных конструкций и их элементов. Такую разбивку начинают с точек закрепления основных осей зданий и реперов.

При решении вопросов, связанных с расчетом, оценкой и анализом точности геодезических измерений в строительстве, нами приняты следующие основные обозначения:

X_0, x_0 — проектное (номинальное) значение случайной величины X ;

x_i — действительное значение случайной величины X ;

v — отклонение измеренной величины X от ее среднего значения (случайная вероятнейшая ошибка);

δ — отклонение измеренной величины X от проектного значения X_0 (случайная истинная ошибка);

ξ — систематическая ошибка выполнения проектного значения случайной величины X ;

N — число измерений (объем) в генеральной совокупности;

n — число измерений (объем) в выборке;

μ — математическое ожидание случайной величины X ;

$\bar{x}$ — среднее арифметическое значение случайной величины X , найденное по результатам измерений;

σ — теоретическое значение средней квадратической ошибки (стандарт), принадлежащей к генеральной совокупности;

m — эмпирическое значение средней квадратической ошибки, найденное по результатам измерений;

Δ — допуск или предельная ошибка случайной величины X ;

- $|\Delta \pm|$ — поле допуска, равное удвоенному значению предельной ошибки (допуска);
- W — размах крайних значений измеренной величины X ;
- P — вероятность появления случайной величины X в заданном интервале;
- Q — вероятность выхода случайной величины X за установленные пределы;
- α, β — соответственно нижний и верхний пределы доверительного интервала;
- ν — число степеней свободы;
- F — дисперсионное отношение;
- q — коэффициент доверия (надежности);
- r_{ij} — коэффициент корреляции между i -й и j -й случайными величинами;
- t — коэффициент, выражающий соотношение между средней квадратической и предельной ошибками: m или σ и Δ ;
- k — коэффициент, выражающий соотношение между отдельными группами ошибок, входящих в суммарную ошибку;
- ε — разность двух случайных величин;
- g — число выборок в генеральной совокупности;
- a, b — константы прямых регрессий.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

1. ВИДЫ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

При выполнении геодезических работ на строительной площадке обычно проводят несколько измерений одной и той же величины, т. е. многократные измерения. При этом отдельные результаты этих измерений должны быть как можно ближе друг к другу и соответствовать истинному значению измеряемой величины.

Совокупность факторов, сопровождающих измерения, выражает *условия измерений*. К ним относятся измерительные инструменты и приборы; внешние условия, в которых проводятся измерения; методы или способы измерений; теоретические и практические положения, лежащие в основе измерений, и т. д.

В зависимости от условий различают *равноточные и неравноточные* измерения. Результаты измерений, проводимых в одинаковых условиях, называют равноточными. Результаты измерений, проводимых в разных условиях (различные приборы, число измерений, внешние условия и т. д.), относятся к неравноточным.

В практике различают случайные, систематические и грубые ошибки измерений.

Случайные ошибки. Ошибки, последовательность которых не обладает закономерностью и не обнаруживает каких-либо регулярностей, называют случайными. В такой последовательности случайными являются величина и направление ошибки. По предыдущей случайной ошибке нельзя установить ни абсолютное значение, ни знак последующей ошибки.

Множество такого рода ошибок рассматривают как статистическую совокупность, обладающую определенными свойствами. Статистические свойства случайных ошибок отчетливо проявляются при большом числе измерений.

К основным свойствам случайных ошибок [2] относятся следующие:

1) для данных условий измерений случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине известного предела; вероятность случайной ошибки, превосходящей этот предел, равна нулю;

2) между крайними пределами случайные ошибки могут принимать все промежуточные значения, при этом малые по абсолютной величине ошибки появляются чаще, чем большие; иными словами, малые по абсолютной величине ошибки более вероятны, чем большие;

3) положительные ошибки появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки, так что положительные ошибки так же вероятны, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки.

Случайные ошибки подразделяются на истинные и вероятнейшие ошибки. Истинные ошибки представляют собой разность между результатом измерения x_i и истинным, или точным, значением x_0 измеряемой величины: $\delta_i = x_i - x_0$. Вероятнейшие ошибки — разность между результатом измерения x_i и средним арифметическим значением измеряемой величины $\bar{x}$, найденным из всех произведенных измерений в данной совокупности: $v_i = x_i - \bar{x}$.

Систематические ошибки. Такого рода ошибки возникают под действием определенных факторов и, как правило, подчиняются определенной закономерности. В рядах, образованных из систематических ошибок, обнаруживается регулярность в чередовании знаков, либо в последовательном расположении абсолютных значений, либо в каком-то определенном сочетании этих признаков.

Систематические ошибки возникают по следующим причинам: несовершенство измерительных приборов, неточная юстировка их, приближенная реализация теоретического метода, лежащего в основе измерений, условия среды, в которых осуществляются измерения, личные качества исполнителя и т. д.

Степень влияния систематических ошибок, имеющая функциональный характер, может быть выражена определенным эмпирическим уравнением. Такие уравнения находят путем специальных исследований. Во всяком случае предполагается, что систематические ошибки предварительно учитываются, а затем исключаются из результатов измерений.

Полностью исключить влияние систематических ошибок практически невозможно, но во всех случаях стремятся к определению основной части влияния этих ошибок, по отношению к которой остальная часть ничтожно мала.

Чем больше случайная ошибка, тем изменчивее результаты измерений и тем меньше точность способа измерений. Способ измерения лишь тогда может дать правильные значения, когда он свободен от систематических ошибок. Случайные ошибки делают неточным конечный результат измерения, систематические ошибки делают неверными сами измерения.

Систематические ошибки влияют на результаты измерений всегда в одинаковой степени. При этом истинное значение ошибки лежит вне области колебаний. Если все результаты измерений смещены на одинаковую величину, то говорят о постоянной ошибке. Отклонения, изменяющиеся с величиной измеряемого параметра, называют переменной ошибкой.

Вследствие случайных ошибок значения многократных измерений беспорядочно рассеиваются вокруг истинного значения случайной величины. Несмотря на то, что случайные и систематические ошибки различно отражаются на результатах измерений, между обоими видами ошибок существуют определенные зависимости. Одновременное появление систематических ошибок разной величины и знака вызывает увеличение случайной ошибки.

Различие между случайными и систематическими ошибками не является абсолютным. Систематическая ошибка может перейти в случайную, случайная — в систематическую. Обращение одного вида ошибок в другой зависит от постановки задачи, от условий и методов измерений.

Грубые ошибки. Ошибки, абсолютные значения которых при данных условиях измерений превышают заданную точность, называются грубыми. Такого рода ошибки (просчеты, промахи и т. д.) устраняют повторными или контрольными измерениями.

2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Под равноточными измерениями понимают средние результаты, полученные при измерениях одним и тем же инструментом, одним и тем же или равноценным методом и т. д. Точность ряда равноточных измерений одной и

той же случайной величины оценивают в следующем порядке [2].

1. Определяют вероятнейшее значение измеряемой величины, для которого влияние случайных ошибок минимально. За такое наиболее надежное значение принимается среднее арифметическое из результатов равноточных измерений:

$$\bar{x} = \tilde{x} + \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad (1)$$

где $\tilde{x}$ — приближенное (наименьшее) значение измеряемой величины;

ε_i — отклонение x_i от $\tilde{x}$ ($\varepsilon_i = x_i - \tilde{x}$, $i = 1, 2, \dots, n$);
 n — число измерений.

2. По формуле Бесселя вычисляют среднюю квадратическую ошибку измерения:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad (2)$$

где v — отклонение от арифметической середины $\bar{x}$ ($v_i = x_i - \bar{x}$).

3. Устанавливают надежность величины m , т. е. среднюю квадратическую ошибку ошибки, которая определяется по формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (3)$$

4. Контролем вычисления служит равенство $[v] = 0$. Если при вычислении $\frac{[\varepsilon]}{n}$ имеет место ошибка округления $\beta = x_{\text{принятое}} - x_{\text{точное}}$, то должно быть $[v] = n\beta$.

5. Вычисляют и контролируют среднюю квадратическую ошибку арифметической середины по формуле

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

или

$$M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \quad (5)$$

6. Определяют надежность вычисления ошибки M :

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (6)$$

В табл. 1 приведена обработка ряда равноточных измерений с использованием приведенных основных формул. Измерялась длина разбивочной оси стальной рулеткой $n = 5$.

Т а б л и ц а 1

Обработка ряда равноточных измерений

Результаты измерений, м	ε_i , мм	v_i , мм	v_i^2 , мм ²
27,575	+4	+4	16
27,570	+1	-1	1
27,569	+2	-2	4
27,572	+7	+1	1
27,568	0	-3	9
Σ	+14	-1	31

$$\tilde{x} = 27,568 \text{ м}; \bar{x} = 27,568 + \frac{14}{5} = 27,571 \text{ м};$$

$$m = \sqrt{\frac{31}{4}} = \pm 2,8 \text{ мм}; m_m = \frac{2,8}{\sqrt{8}} = \pm 0,9 \text{ мм};$$

$$M = \frac{2,8}{\sqrt{5}} = \pm 1,2 \text{ мм}; m_M = \frac{1,2}{\sqrt{8}} = 0,4 \text{ мм}.$$

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты неравноточных измерений характеризуются различными средними квадратическими ошибками. При совместной обработке результатов неравноточных измерений различная их точность учитывается путем введения вспомогательных чисел — весов. Вес — это величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки: $P = \frac{c}{m^2}$ (c — произвольная постоянная). При этом различают среднюю квадратическую ошибку результата измерения, вес которого равен единице (μ). Средняя квадратическая ошибка единицы веса служит для сравнения точности рядов неравноточных измерений.

При обработке результатов неравноточных измерений вначале определяют вероятнейшее значение измеренной величины. Эта задача решается с помощью формулы для вычисления общей арифметической середины (весовое среднее) [2]:

$$\bar{x}_v = \tilde{x} + \frac{[\varepsilon P]}{[P]}, \quad (7)$$

где $\tilde{x}$ — приближенное значение измеренной величины;
 ε — уклонения ($\varepsilon_i = x_i - \tilde{x}$);
 P — веса.

Величина $\bar{x}_v$ называется также весовым средним.

Вторая задача обработки результатов неравноточных измерений состоит в оценке их точности, т. е. в отыскании средней квадратической ошибки единицы веса и ее ошибки по формулам:

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pv^2]}{n-1}}; \quad (8)$$

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (9)$$

а также средней квадратической ошибки общей арифметической середины (весового среднего) M по формуле

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} \quad (10)$$

или

$$M = \sqrt{\frac{[Pv^2]}{(n-1)[P]}}. \quad (11)$$

Ошибку определения M находят по формуле (6).

Вычисления контролируют, пользуясь первым обобщенным свойством остаточных отклонений $[Pv] = 0$.

Если при вычислении $\frac{[P\varepsilon]}{[P]}$ ошибка округления $\beta = x_{\text{принятое}} - x_{\text{точное}}$, то $[Pv] = [P]\beta$ (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Обработка ряда неравноточных измерений

Результаты измерений $l_{i,м}$	$m,$ мм	$P = \frac{10}{m^2}$	$\varepsilon,$ мм	$P \varepsilon$	$v,$ мм	Pv	Pv^2
75,125	8,3	0,14	+ 7	0,98	—4	—0,56	2,2
75,120	5,4	0,34	+ 2	0,68	+1	+0,34	0,3
75,129	4,9	0,42	+11	4,62	—8	—3,36	26,9
75,118	3,2	0,98	0	0	+3	+2,94	8,8
75,122	6,8	0,22	+ 4	0,88	—1	—0,22	0,2
$\bar{l} = 75,118$	—	[2, 10]	—	[7, 16]	[—0,86] = Pv		[38,4]

$$\frac{[P \varepsilon]}{[P]} = + 3,41; \quad \bar{x} = 75,121;$$

$$\beta = 75,121 - 75,12141 = -0,0041 = -0,41 \text{ мм};$$

$$[P] \beta = 2,1 (-0,41) = -0,86;$$

$$\mu = \sqrt{\frac{38,4}{4}} = \pm 3,1 \text{ мм}; \quad m_{\mu} = \frac{3,1}{\sqrt{8}} = \pm 1,1 \text{ мм};$$

$$M = \frac{3,1}{\sqrt{2,10}} = \pm 2,1 \text{ мм}; \quad m_M = \frac{1,2}{\sqrt{8}} = \pm 0,7 \text{ мм}.$$

4. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В геодезических работах часто проводят двукратные измерения однородных величин: длин линий, углов, превышений и т. д. Необходимо определить среднюю квадратическую ошибку одного измерения по таким материалам. Допустим, мы имеем ряд из n парных равноточных измерений: l_1 и l'_1 , l_2 и l'_2 , ..., l_n и l'_n . Образует разности, которые обозначим через $d_1, d_2, \dots, d_n$:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= l_1 - l'_1; \\ d_2 &= l_2 - l'_2; \\ &\dots \dots \dots \\ d_n &= l_n - l'_n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если бы измерения были безошибочны, то каждая разность $d_1, d_2, \dots, d_n$ была бы равна нулю. Следовательно, истинное значение каждой разности равно нулю, а полученные $d_1, d_2, \dots, d_n$ представляют собой истинные ошибки разностей.

Пользуясь формулой (12), среднюю квадратическую ошибку отдельной разности можно выразить так:

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (13)$$

Принимая во внимание равноточность измерений с учетом формулы (13), для средней квадратической ошибки разности можно написать:

$$m_d = \pm m \sqrt{2}, \quad (14)$$

где m — средняя квадратическая ошибка одного измерения.

Объединяя формулы (13) и (14), получим:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (15)$$

Так по разностям двойных измерений ($d_1, d_2, \dots, d_n$) можно подсчитать среднюю квадратическую ошибку результата однократного измерения. Известно, что измерения сопровождаются не только случайными, но и систематическими ошибками. Парные наблюдения позволяют в некоторой мере обнаружить систематические ошибки. Если допустить, что разности представляют собой только случайные ошибки, то при их суммировании эти ошибки компенсируются, т. е. $[d] = 0$. Таким свойством обладают вероятнейшие ошибки v . Поэтому для подсчета средней квадратической ошибки надо учесть формулу (2). Применительно к двойным измерениям (12) среднюю квадратическую ошибку разности можно подсчитать так:

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \quad (16)$$

Переходя к средней квадратической ошибке отдельного измерения, будем иметь:

$$m = \pm \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{2(n-1)}}. \quad (17)$$

5. ПОНЯТИЕ О ВЕРОЯТНОСТИ

В основе *теории вероятностей* — математической науки, изучающей закономерности случайных явлений, лежит понятие вероятности события. *Событием* называют качественный или количественный результат опыта, проводимого при вполне определенных условиях. Классическим примером события могут служить измерения каких-либо случайных величин. Известно, что при повторных измерениях одной и той же величины (длины, угла, отметки и т. д.), выполняемых с одинаковой тщательностью, одним и тем же инструментом, прибором, мы никогда не получим одинаковых результатов.

Вероятность $P(A)$ случайного события A можно определить как долю тех исходов, в результате которых это событие осуществляется:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \quad (18)$$

где N — общее число исходов рассматриваемого опыта;
 $N(A)$ — число тех исходов, которые приводят к наступлению события A .

В результате многочисленных наблюдений была выявлена замечательная закономерность, позволяющая придать глубокий смысл понятию вероятности. Предположим, что рассматриваемый опыт может быть воспроизведен многократно, так что осуществляется серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых по воле случая происходит или не происходит интересующее нас событие A . Пусть n обозначает число всех опытов в отдельной серии испытаний, а $n(A)$ — число тех опытов, в которых осуществляется событие A . Отношение $\frac{n(A)}{n}$ называется частотой события A в данной серии испытаний. Оказывается, что в различных сериях испытаний существующие частоты при больших значениях n практически совпадают, группируясь около некоторого постоянного значения $P(A)$, называемого вероятностью события A :

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n} \quad (19)$$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}. \quad (20)$$

Согласно этой закономерности, вероятность $P(A)$ события A характеризует долю тех случаев в большой серии опытов, которые приводят к наступлению этого события. Частота появления события и вероятность могут принимать значения в интервале $0 \leq P(A) \leq 1$.

6. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Одно из основных понятий теории вероятностей — понятие о случайной величине.

Случайной величиной называется та, которая в результате измерения может принять только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Эти причины не могут быть учтены до проведения измерений.

Например, число попаданий n ошибок в заданный интервал при трех измерениях — величина случайная. Здесь случайная величина n может принимать отдельные, изолированные значения, которые можно заранее перечислить: 0, 1, 2, 3.

Другой пример: длина линии l_i , измеренная при выносе проекта здания или сооружения в натуру, есть случайная величина. Действительно, длина линии зависит не только от геодезического метода измерений и прибора, но и от многих других причин: внешние условия при измерениях, опыт исполнителя и т. д. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b) .

Из сказанного очевидно, что следует различать случайные величины, принимающие лишь отдельные изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Прерывной (дискретной) величиной называют случайную величину, принимающую отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений прерывной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной величиной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число

возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Понятие случайной величины играет важную роль в теории вероятностей. Если классическая теория вероятностей оперировала по преимуществу с событиями, то современная теория вероятностей в основном оперирует со случайными величинами: где, возможно, она переходит от «схемы событий» к «схеме случайных величин». Вторая схема по сравнению с первой представляет собой гораздо более гибкий и универсальный аппарат для решения задач, относящихся к случайным явлениям.

На первый взгляд может показаться, что для задания прерывной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их — различные. Поэтому для задания прерывной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно указать их вероятности.

Законом распределения прерывной случайной величины называют соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины x_i и соответствующими им вероятностями P_i . Это соотношение можно задавать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Простейшая форма закона распределения прерывной случайной величины — таблица:

X	x_1	x_2	...	x_n
P_i	P_1	P_2	...	P_n

Здесь вероятности P_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, так как события x_i образуют полную группу.

Для наглядности закон распределения прерывной случайной величины можно представить и графически: в прямоугольной системе координат построить точки (x_i, P_i) , а затем соединить их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Кривой распределения называют линию, изображающую плотности вероятностей (плотности распределения) случайной величины X .

При математической обработке результатов геодезических измерений в строительстве часто закон распределения случайной величины неизвестен, поэтому приходится ограничиваться меньшими сведениями. В большинстве случаев выгоднее пользоваться числами, описывающими случайную величину суммарно — *числовыми характеристиками случайной величины*.

К важным числовым характеристикам относятся математическое ожидание и дисперсия случайной величины. *Математическим ожиданием* прерывной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности, которая определяется из выражения

$$M(X) \approx \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}. \quad (21)$$

Но так как $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, то

$$M(X) \approx \bar{X} = \sum_{i=1}^n P_i x_i, \quad (22)$$

где x_i — значения случайной величины;
 P_i — соответствующие этим значениям вероятности;
 n — число значений.

Вероятностный смысл равенства $M(X) \approx \bar{X}$ таков: математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому измеренных значений случайной величины. Причем это равенство тем точнее, чем больше число измерений.

Дисперсией (рассеянием) прерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = \mu [X - \mu(X)]^2. \quad (23)$$

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения, кроме дисперсии, служит *среднее квадратическое отклонение*, определяемое как

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (24)$$

Отмеченные числовые характеристики случайной величины являются основными. Они будут использованы в дальнейшем, хотя будут представлены в более конкретном виде.

Среднее квадратическое отклонение как непрерывной, так и прерывной случайных величин является постоянным.

7. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Среди теоретических распределений вероятностей случайных величин наиболее распространено нормальное распределение, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: μ и σ . Максимум дифференциальной функции распределения равен $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$.

График дифференциальной функции нормального распределения называют *нормальной кривой* или *кривой Гаусса*. Положение кривой в системе прямоугольных координат и ее форма полностью определяются значениями обоих параметров μ и σ . Максимум кривой лежит в точке $x = \mu$, точки перегиба ее находятся при $x_1 = \mu - \sigma$ и $x_2 = \mu + \sigma$ (рис. 1). Кривая достигает значения $y = 0$ при $x = \pm \infty$. Однако значениями ординаты при $x = \mu \pm 3\sigma$ практически можно пренебречь.

Влияние параметров μ и σ на форму нормальной кривой состоит в следующем. Изменение величины параметра μ (математического ожидания) не изменяет формы кривой, а лишь приводит к ее сдвигу вдоль оси x : вправо при возрастании μ и влево при убывании μ . Иначе обстоит дело, когда изменяется параметр σ (среднее квадратическое отклонение). Максимум дифференциальной функции нормального распределения равен $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$. Из этого следует, что с увеличением σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси x ; при уменьшении σ нормальная кривая становится более островершинной и растягивается в положительном направлении оси y .

При любых значениях параметров μ и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью x , всегда равна единице.

На рис. 2 видно, как изменение параметра σ сказывается на форме кривой. При $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ функцию плотности распределения называют нормированной.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что она примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) , равна [14]:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right), \quad (26)$$

где Φ — функция Лапласа.

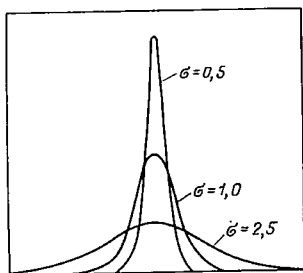
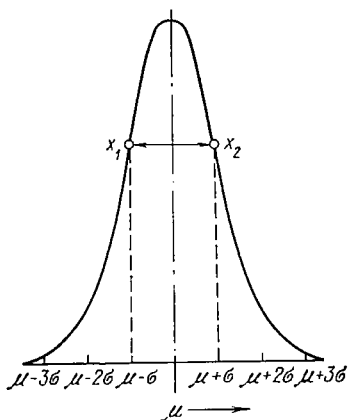


Рис. 2. Кривые нормального распределения при $\mu=0$ и различных значениях σ

Рис. 1. Кривая нормального распределения (кривая Гаусса)

В геодезической и строительной практике часто требуется найти вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине не меньше заданного положительного числа δ , т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства $|X - \mu| < \delta$.

Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta < X - \mu < \delta$$

или

$$\mu - \delta < X < \mu + \delta.$$

Пользуясь формулой (26), получим:

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| < \delta) &= P(\mu - \delta < X < \mu + \delta) = \\ &= \Phi\left[\frac{(\mu + \delta) - \mu}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(\mu - \delta) - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Принимая во внимание равенство

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

(функция Лапласа — нечетная), окончательно получим

$$P(|X - \mu| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (28)$$

В частности, при $\mu = 0$ будем иметь:

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (29)$$

Если две случайные величины нормально распределены и $\mu = 0$, то вероятность принять значение, находящееся в интервале $(-\delta, \delta)$, больше для той величины, у которой меньше значение среднего квадратического отклонения σ .

Рассмотрим следующий пример. Длина колонны l , как случайная величина, распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение длины соответственно равны 12 000 мм и 10 мм. Найдем вероятность того, что отклонение действительной длины колонны от ее проектного значения по абсолютной величине будет меньше трех. Для этого воспользуемся формулой (29). По условию $\delta = 3$, $\mu = 12\,000$ мм, $\sigma = 10$ мм. Следовательно, $P(|l - 12\,000| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0,3)$.

По табл. 2 приложений [2] находим: $\Phi(0,3) = 0,1179$, а искомая вероятность $P(|l - 12\,000| < 3) = 0,2358$.

Если принять δ в качестве предельной ошибки (допуска), т. е. $\delta = t\sigma$, то формула (29) примет следующий вид:

$$P(|X - \mu| < \sigma t) = 2\Phi(t). \quad (30)$$

Так, при $t = 3$ $P(|X - \mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$, т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенной средней квадратической ошибки, равна 0,9973. Таким образом, лишь 0,27% ошибок могут превзойти предел 3σ , что является маловероятным событием. Этот случай в практике называется «правилом трех сигм».

Нормальный закон распределения имеет очень большое значение в теории математической обработки результатов измерений и занимает особое положение среди других за-

конов распределения. Он наиболее часто встречается на практике. Главная его особенность состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при типичных условиях.

8. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ ОШИБОК

Исследования в строительной геодезии, как и в других науках, начинаются со сбора результатов измерений, выполненных на разных строительных объектах в различные периоды. Это могут быть производственные или эмпирические результаты измерений, которые необходимо систематизировать для дальнейших исследований. В этом случае особенно целесообразны графические методы. Вначале результаты геодезических измерений стремятся представить при помощи наименьшего числа специальных показателей. Эти известные величины позволяют простыми способами сравнивать полученные данные с имеющимися результатами измерений.

Изучение результатов геодезических измерений облегчается их систематизацией. Часто измеренное значение целесообразно представлять в зависимости от частоты его появления при измерениях. При этом результаты измерений можно представить в виде отдельных точек на линейно поделенной цифровой прямой и затем судить о плотности точек. Такое распределение называют одномерным.

Более наглядна ступенчатая диаграмма, на которой графически представляют величину измеренного значения x_i , распределенную по классам в зависимости от частоты ее появления ω . Наивысший столбец такой ступенчатой диаграммы показывает измеренное значение, появляющееся чаще всего, и соответствует вертикальным прямым в области с наивысшей плотностью точек в диаграммах первого типа. Для построения ступенчатой диаграммы группируют отдельные значения в g классов с шириной класса d . Число классов должно быть примерно равно корню квадратному из общего числа измеренных значений, но не меньше 5 и не больше 20. Если выбрать слишком мало классов, можно потерять характерную деталь распределения частоты; при слишком подробном делении на классы общая картина может затушеваться небольшими случайными отклонениями. Верхняя граница класса должна быть меньше, чем нижняя граница прилегающего соседнего класса. Когда результа-

ты геодезических измерений упорядочивают таким способом, при стабильных условиях измерений чаще всего получают симметричное распределение с одним максимумом частоты.

Из формы распределения частот можно получить представление о появляющейся случайной ошибке. При больших значениях случайной ошибки получаются широкие распределения, при малых ее значениях кривая распределения становится узкой и острой. Однако никаких сведений о возможной систематической ошибке в этом случае не получают, так как она не изменяет вид распределения.

Зато неоднородные систематические ошибки часто определяются своеобразным путем. Например, если при одновременном измерении одной и той же величины несколькими способами в результатах некоторых измерений появляется одинаковая по величине и знаку систематическая ошибка, то распределения частот получаются с двумя или несколькими максимумами. Второй максимум может служить «плечом» главного максимума; он как бы образует ложное распределение, когда систематический сдвиг не очень велик.

При одновременном измерении случайной величины несколькими геодезическими методами или приборами могут возникнуть асимметричные распределения с лево- или правосторонним максимумом частот, если результаты измерений различными методами или приборами сопровождаются систематическими ошибками одинакового знака, но различной величины.

Асимметричные распределения могут также возникать, если линейное деление оси абсцисс выполнено неправильно с точки зрения методологии. Подобные кажущиеся асимметричными распределения могут переходить в симметричные, если ссь свойства делить логарифмически.

При изучении случайной величины прежде всего необходимо установить закон ее распределения. Закон распределения отыскивают по эмпирическим количественным характеристикам, основными из которых является среднеарифметическое значение и среднее квадратическое отклонение.

Законы распределения исследуются по большому числу результатов измерения. Для упрощения вычислений все результаты измерения по данной совокупности целесообразно сгруппировать в небольшое число интервалов. Как правило, длина интервала — постоянная величина.

Если имеется N измерений, которые необходимо разбить на g интервалов, то длина интервала выразится следующей формулой:

$$h_i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{g - 1}, \quad (31)$$

где $x_{\max}$ — наибольшее значение измеренной величины;
 $x_{\min}$ — наименьшее значение измеренной величины.

Полученное по формуле (31) значение h_i следует округлить до ближайшего удобного (желательно четного) числа. Если обозначить через $\bar{h}_i$ середину i -го интервала, то верхняя и нижняя границы его выразятся следующими формулами:

$$h_i - 0,5 h_i = x_{\min} + (i - 1,5) h_i; \quad (32)$$

$$h_i + 0,5 h_i = x_{\max} - (g - i - 0,5) h_i, \quad (33)$$

а число измерений в этом интервале означает число измерений, удовлетворяющих неравенству

$$h_i - 0,5 h_i < \bar{h} \leq h_i + 0,5 h_i. \quad (34)$$

При таком методе группировки середина первого интервала совпадает с наименьшим ($x_{\min}$) значением измерений, а середина второго — с наибольшим ($x_{\max}$).

Группировка результатов измерения произвольна, так как число ее интервалов может быть выбрано по желанию.

Для графического изображения результатов измерения число интервалов следует выбирать так, чтобы характерные черты распределения были подчеркнуты, а случайные колебания сглажены. Для наглядности графика распределения результатов измерений (полигона) следует предварительно определить среднее значение результатов измерения $\bar{x}$ и дисперсию их m^2 , после чего построить полигон, совместив середину центрального интервала с $\bar{x}$ и приняв ширину интервалов равной $0,5 h_i$. В большинстве случаев рекомендуется число интервалов принимать равным 8—12.

Основными характеристиками распределения, которые необходимо оценить при обработке результатов измерения, являются математическое ожидание μ и дисперсия σ^2 . Для оценки этих характеристик по эмпирическим данным следует определить их статистики, обладающие состоятельностью, несмещенностью, эффективностью и достаточностью. Среди оценок математического ожидания всеми перечислен-

ными свойствами обладает среднее арифметическое, которое для N измерений определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (35)$$

а лучшей оценкой для дисперсии является эмпирическая дисперсия, определяемая формулой

$$m^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (36)$$

В таком виде эмпирическая дисперсия является несмещенной оценкой генеральной (теоретической) дисперсии. Именно для этого сумма квадратов отклонений от среднего значения делится на $(N-1)$, а не на N . Дисперсия служит также эффективной оценкой.

Из формулы (36) можно получить оценку для стандарта:

$$m = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (37)$$

При исследовании законов распределения, когда результаты измерений сгруппированы, формулы (35) — (37) можно привести к следующему виду:

$$\bar{x} = x_h + \frac{h_i}{N} \sum_{i=1}^N n_i y_i; \quad (38)$$

$$m^2 = \frac{h_i^2}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N n_i y_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N n_i y_i \right)^2 \right]; \quad (39)$$

$$m = \sqrt{\frac{h_i^2}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N n_i y_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N n_i y_i \right)^2 \right]}, \quad (40)$$

где k — порядковый номер интервала, принятого в качестве начала отсчета;

$y_i = i - g$ — расстояние от текущего интервала до начала отсчета;

n_i — число измерений, попавших в i -й интервал.

Формула (40) может быть несколько упрощена, если учесть, что результаты измерения группируются только

при достаточно большом числе измерений ($N \geq 50$), поэтому погрешность от замены $(N - 1)$ на N будет незначительна, а вычисления упрощены:

$$m = \sqrt{\frac{h_i^2}{N} \left[\sum_{i=1}^N n_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N n_i y_i \right)^2 \right]}. \quad (41)$$

Сопоставление эмпирического и теоретического распределений является довольно трудной задачей. На основании близости двух кривых нельзя сделать выводы об удачном представлении эмпирического распределения. Поскольку параметры теоретического распределения заранее известны, то приходится принимать, что они совпадают с соответствующими эмпирическими величинами. Между тем последние являются случайными величинами, обладающими рассеянием, которое тем больше, чем меньше число измерений N . Теоретическая кривая распределения, хорошо совпадающая с эмпирической кривой для ряда измерений, может отличаться от эмпирических кривых, построенных по другим вариационным рядам измерений той же случайной величины. Однако с определенной вероятностью, близкой к единице, можно утверждать, что данная случайная величина подчиняется тому закону распределения, с которым согласуются результаты данных измерений.

Имеется несколько способов (критериев согласия) оценки близости двух распределений [14, 27].

Критерий Колмогорова позволяет судить о близости теоретической функции распределения $F(x)$ и эмпирической функции $\tilde{F}(x)$ по наибольшей разности между ними:

$$D = \max |F(x) - \tilde{F}(x)|. \quad (42)$$

Если функции $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ непрерывны, а число измерений N достаточно велико, то вероятность того, что отклонение $D \sqrt{N}$ превысит значение λ , определяется по формуле

$$P(D \sqrt{N} > \lambda) = 1 - \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} (-1)^{\alpha} e^{-2\alpha^2 \lambda^2}. \quad (43)$$

Функция

$$K(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} (-1)^{\alpha} e^{-2\alpha^2 \lambda^2}$$

протабулирована в работах [27, 29].

Практическое применение критерия Колмогорова сводится к следующему. Вычисляется максимальная разность $\tilde{D}$, после чего находится вероятность

$$P(D > \tilde{D}) = 1 - K(D \vee \bar{N}). \quad (44)$$

Если эта вероятность мала (например, меньше 0,1), следовательно, имеет место маловероятное отклонение, уже необъяснимое случайностью измеренных значений. Расхождение между $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ в этом случае следует считать существенным. Если же вероятность, вычисляемая по формуле (44), окажется достаточно большой, то расхождение можно признать объяснимым случайным характером измеряемой величины. Здесь при относительно небольших числах N допустимы большие отклонения. Наоборот, при большом числе измерений N уже сравнительно небольшие отклонения могут указывать на отсутствие согласования между эмпирическим распределением и принятой статистической гипотезой.

Применение критерия Колмогорова не во всех случаях эффективно и возможно. Во-первых, экстремальные значения эмпирического расхождения, т. е. очень большие и очень малые значения x_i , учитываются этим критерием относительно слабо, хотя поведение экстремальных значений при определенных условиях может оказаться решающим для суждения об отклонении от нормального распределения. Во-вторых, применение критерия Колмогорова затрудняется тем, что дисперсия и математическое ожидание нормального теоретического распределения (для генеральной совокупности), как правило, неизвестны.

Наиболее эффективен в этих условиях критерий χ^2 (критерий К. Пирсона), который можно применить не только при нормальном, но и при других распределениях.

В этом критерии согласия за меру расхождения принимается величина χ^2 , эмпирическое значение $\tilde{\chi}^2$ которой определяется по формуле

$$\tilde{\chi}^2 := \sum_{i=1}^g \frac{(n_i - NP_i)^2}{NP_i}, \quad (45)$$

где g — число интервалов, на которые разбиты все результаты измерения величины x ;
 n_i — число измерений в i -м интервале;

P_i — вероятность попадания случайной величины x в i -й интервал, вычисленная для теоретического закона распределения;

N — объем совокупности измеренных величин x_i .

Значение критерия $\tilde{\chi}^2$, найденного по формуле (45), сравнивается с теоретическим его значением χ_q^2 . Для сопоставления $\tilde{\chi}^2$ с χ_q^2 выбирается уровень значимости q . Если проверяемая гипотеза верна, то критерий $\tilde{\chi}^2$ имеет распределение, стремящееся при $N \rightarrow \infty$ к распределению χ_q^2 с $(g-1)$ степенями свободы.

Определив значение $\tilde{\chi}^2$ по результатам измерений, будем иметь одно из двух: 1) $P(\tilde{\chi}^2 > \chi_q^2) = q$, т. е. критерий попадает в критическую область, и тогда эмпирический закон существенно расходится с теоретическим; поэтому гипотеза отвергается; 2) $P(\tilde{\chi}^2 \leq \chi_q^2) = q$, т. е. расхождение несущественно, а потому гипотеза принимается.

Значения вероятностей $P(\tilde{\chi}^2 > \chi_q^2)$ в зависимости от χ^2 и числа степеней свободы $\nu = g - k - 1$ (k — число параметров теоретического закона распределения) приведены в таблицах работ [14, 27, 29].

Используя критерий χ^2 , проверим гипотезу о принадлежности ошибок построения основных осей зданий закону нормального распределения. Графическое представление результатов построения (рис. 3) в виде полигона эмпирических частот ошибок дает предварительное представление о справедливости поставленной гипотезы.

Эмпирический полигон (на рис. 3 — сплошная линия) по внешнему виду напоминает кривую плотностей вероятностей нормально распределенной случайной величины.

Для того, чтобы исследовать закон распределения ошибок построения основных осей, были обработаны 710 измерений. Результаты измерения разбиты на 21 интервал постоянной длины — 3 мм. На шкале эмпирического распределения (см. рис. 3) подсчитаны эмпирические частоты $\tilde{n}_i$ и частоты ω_i . Так как в шкале (графа 1) приведены интервалы отклонений h_i , а не размеров осей, то формулы (38) и (41) принимают следующий вид:

$$\bar{x} = h_i \sum_{i=1}^{21} y_i \omega_i; \quad (46)$$

$$m = \sqrt{h_i^2 \left(\sum_{i=1}^{21} y_i^2 \omega_i - \bar{x}^2 \right)}. \quad (47)$$

В графе 2 шкалы приведены середины интервалов $\bar{h}_i$ отклонений δ_i .

Все вычисления, приведенные в шкале, являются вспомогательными для построения теоретической кривой распределения вероятностей и основными для построения эмпирического полигона распределения. Основные вычисления для построения теоретической кривой распределения приведены в табл.3.

В графе 2 этой таблицы даны середины (центры) интервалов $\bar{h}_i$, заимствованные из шкалы частот (рис. 3), а в графе 3 — нормированные величины z , найденные по формуле (85), где вместо разностей $(x-\mu)$ приняты значения $\bar{h}_i$, а вместо σ — значение $m = \pm 9,2$ мм (см. шкалу рис. 3).

Таблица 3

Исследование закона распределения ошибок
в длинах разбивочных осей

i	$\bar{h}_i$	z_i	$\frac{1}{2} \Phi(z_i)$	P_i	$N P_i = n_i$	$\frac{(\tilde{n}_i - N P_i)^2}{N P_i}$
1	2	3	4	5	6	7
1	—27	—2,83	—0,4976	0,0032	2,27	0,23
2	—24	—2,54	—0,4944	0,0064	4,54	1,29
3	—21	—2,26	—0,4880	0,0119	8,45	0,02
4	—18	—1,98	—0,4761	0,0207	14,70	0,20
5	—15	—1,70	—0,4554	0,0332	23,57	0,88
6	—12	—1,42	—0,4222	0,0493	35,00	3,46
7	—9	—1,14	—0,3729	0,0706	50,13	0,09
8	—6	—0,85	—0,3023	0,0866	61,49	0,25
9	—3	—0,57	—0,2157	0,1016	72,14	0,06
10	0	—0,29	—0,1141	0,1101	78,17	0,60
11	+3	—0,01	—0,0040	0,1104	73,38	2,37
12	+6	+0,27	+0,1064	0,1024	72,70	0,73
13	+9	+0,55	+0,2088	0,0907	64,40	0,01
14	+12	+0,84	+0,2995	0,0690	48,99	1,65
15	+15	+1,12	+0,3686	0,0506	35,93	0,11
16	+18	+1,40	+0,4192	0,0343	24,35	0,78
17	+21	+1,68	+0,4535	0,0215	15,26	1,47
18	+24	+1,96	+0,4750	0,0124	8,80	0,55
19	+27	+1,24	+0,4774	0,0067	4,76	0,12
20	+30	+2,52	+0,4941	0,0034	2,41	0,14
21	+33	+2,81	+0,4975	—	—	—

$N=710$;

$m = \pm 9,2$ мм;

$\nu = 21 - 2 - 1 = 18$;

$\sum N P_i = 720 \quad \chi^2 = 15,01$;

$\chi^2_{0,05} = 28,90$

По вычисленным величинам z из табл. 1 [14] находим значения функции Лапласа $\Phi(z_i)$, которые приведены в графе 4 табл. 3.

Далее вычисляем теоретические вероятности P_i попадания отклонения δ_i в интервалы (h_i, h_{i+1}) по формуле

$$P_i = \frac{1}{2} \Phi(z_{i+1}) - \frac{1}{2} \Phi(z_i), \quad (48)$$

где z_i — левая граница i -го интервала относительно h_i в единицах m .

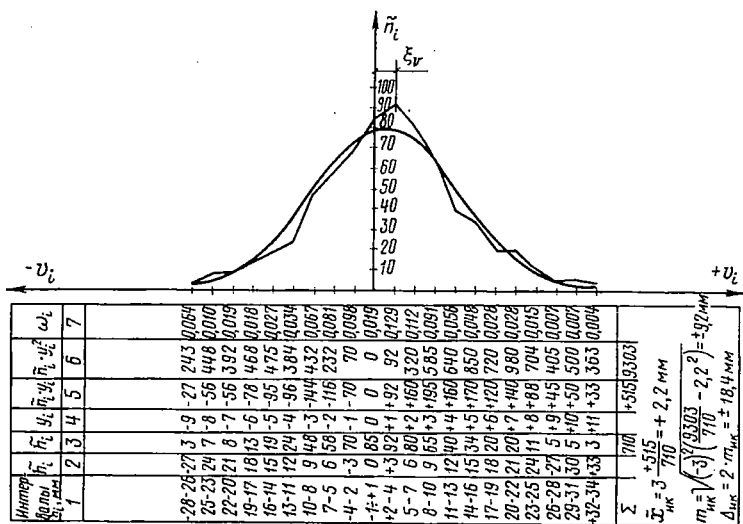


Рис. 3. Полигон частот и эмпирическая кривая распределения ошибок построения основных осей

По формуле (45) находим значение

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{21} \frac{(\tilde{n}_i - NP_i)^2}{NP_i} = 15,01.$$

Число степеней свободы равно:

$$\nu = g - k - 1 = 21 - 2 - 1 = 18.$$

Из табл. 5 [14] по входным величинам $\tilde{\chi}^2$ и ν при уровне значимости $q = 0,05$ находим $\chi_{0,05}^2 = 28,90$.

Так как $\tilde{\chi}^2 < \tilde{\chi}_{0,05}^2$, то расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями несущественно.

Выполненные исследования дают основание считать, что ошибки в размерах разбивочных осей подчиняются закону нормального распределения.

ГЛАВА III. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

9. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

При современных темпах строительно-монтажного производства классические методы оценки точности измерений (глава I), оперирующие с большим объемом результатов измерений, недостаточны для получения полной информации. Для существенного ускорения разработки и внедрения в производство новых типов конструкций зданий и сооружений, новых геодезических приборов и приспособлений, новых методов производства геодезических и строительно-монтажных работ необходимо минимально сокращать объемы измерений. В этих условиях первостепенное значение приобретает использование всей информации, содержащейся в ограниченном объеме измерений, для получения обоснованных результатов, одновременной оценки их точности и достоверности при минимальных затратах времени и средств.

Количественные характеристики точности, найденные по ограниченному числу измерений, всегда отличаются по величине от тех же параметров из генеральной совокупности. Это объясняется тем, что разбивочные элементы или строительные конструкции с большими отклонениями от среднего значения в выборку, как правило, не попадают. Вследствие этого, а также из-за возможного случайного отбора отдельных измерений генеральные параметры характеризуются параметрами выборочного распределения лишь приближенно. Точность определения генеральных параметров по выборочным данным характеризуется доверительными границами.

Вероятностно-статистические методы не противоречат классическим (глава I); наоборот, они дополняют последние и позволяют глубже анализировать точность результатов измерения с учетом присущих им элементов случайности.

При оценке точности по ограниченному числу измерений целесообразно использовать доверительные интервалы.

К определению доверительных интервалов для математического ожидания μ и стандарта ошибки измерений σ , относящихся к генеральной совокупности измерений, можно приступить непосредственно после определения их выборочных характеристик $\bar{x}$ и m , которые находятся по формулам (1) и (2) соответственно. Средние квадратические ошибки среднего арифметического и самой средней квадратической ошибки выражаются соответственно формулами (4) и (3).

Выбрав соответствующую доверительную вероятность результата, т. е. вероятность, с которой действительное значение параметра μ или σ укладывается в доверительный интервал, можно вычислить границы двустороннего либо одностороннего доверительного интервала, в зависимости от того, какие требования предъявляются к этому параметру.

Обозначив доверительную вероятность через P , получаем выражения для границ доверительных интервалов математического ожидания, т. е. среднего арифметического значения для генеральной совокупности:

односторонний интервал

$$\mu \leq \bar{x} + z_P \frac{m}{\sqrt{n}}; \quad (49)$$

двусторонний интервал

$$\bar{x} + z_{1-P} \frac{m}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}' + z_{1+P} \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (50)$$

С этой же доверительной вероятностью для стандарта ошибки, т. е. средней квадратической ошибки для генеральной совокупности измерений, имеем:

односторонний интервал

$$\sigma_{\max} \leq m \left(1 + z_P \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \right); \quad (51)$$

двусторонний интервал

$$m \left(1 + z_{1-P} \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \right) < \sigma < m \left(1 + z_{1+P} \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \right). \quad (52)$$

Выбор величины доверительной вероятности P до некоторой степени произвольный. В большинстве практических приложений математической статистики ориентируются на доверительную вероятность 0,95, поэтому целесообразнее придерживаться этого уровня надежности для получения легко сравнимых результатов. В дальнейшем нами принята доверительная вероятность $P = 0,95$. Для одностороннего и двустороннего доверительных интервалов величина z при $P = 0,95$ имеет следующие значения: $z_P = 1,645$ и $z_{1-\frac{P}{2}} = 1,695$ [14].

Например, пусть при определении длины пролета в здании цеха выполнено 102 измерения. По результатам этих измерений найдено: $\bar{l}_n = 42001,1$ мм; $m_{д.к} = \pm 10,2$ мм. Применяя формулы (50) и (51) к этим результатам, определены доверительные интервалы для μ_n и σ_n при $P = 0,95$:

$$\begin{aligned}\mu_{\max} &\geq 42001,1 - 1,645 \frac{10,2}{\sqrt{102}} = \\ &= 42001,1 - 1,7 = 41999,4 \text{ мм};\end{aligned}$$

$$\mu_{\min} \leq 42001,1 + 1,645 \frac{10,2}{\sqrt{102}} = 42001,1 + 1,7 = 42002,8 \text{ мм};$$

$$\sigma_{д.к} \leq 10,2 + 1,645 \frac{10,2}{\sqrt{2 \cdot 101}} = \pm 11,4 \text{ мм}.$$

В большинстве случаев при оценке точности результатов геодезических измерений в строительстве объем выборок сравнительно невелик. Естественно ожидать, что в малой выборке не окажется больших отклонений от среднего значения, вероятность которых мала; и ошибка, найденная по малой выборке из генеральной совокупности, в большинстве случаев будет меньше, чем ошибка в соответствующей ей генеральной совокупности. Поэтому классическая теория, основанная на нормальном распределении, неприменима для обработки малого числа измерений. Для выборок малого объема формулу (49) следует заменить следующей:

$$\mu \leq \bar{x} + t_P \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (53)$$

Распределение величины t называется t -распределением, или распределением Стьюдента [14]. Это распределение, зависящее от объема выборки, при увеличении n приближается к нормальному, которое можно применять при

$n > 50$. Соответственно для двустороннего доверительного интервала формула (50) принимает такой вид:

$$\bar{x} - t_{1+P} \frac{m}{2\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1+P} \frac{m}{2\sqrt{n}}. \quad (54)$$

Определим доверительный интервал для проектного значения отметки фундаментов, если по результатам 10 измерений получены выборочные характеристики: $H_{\phi} = 126,498$ м; $m_{\phi} = \pm 3,7$ мм. В соответствии с формулой (54) при $P = 0,95$ двусторонний доверительный интервал равен:

$$126,498 - (0,715 \cdot 3,7) < H_0 < 126,498 + (0,715 \cdot 3,7);$$

$$126,495 < H_0 < 126,501,$$

$$\text{или } H_0 = 126,498 \pm 2,6 \text{ мм.}$$

Если применить к этим выборочным данным метод определения доверительного интервала с помощью нормального распределения, то результат будет несколько занижен:

$$H_0 = 126,498 \pm 1,96 \frac{3,7}{\sqrt{10}} = 126,498 \pm 2,3 \text{ мм.}$$

Расширение доверительного интервала при уменьшении объема выборки — прямое следствие большей неопределенности результата из-за меньшего количества получаемой информации. Эта неопределенность компенсируется увеличением доверительного интервала.

Рассмотрим метод определения доверительных интервалов дисперсии и средней квадратической ошибки при малых объемах выборок. Распределение выборочной дисперсии описывается распределением χ^2 .

Величина

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (x_i - \bar{x})^2 = (n-1) \frac{m^2}{\sigma^2} \quad (55)$$

распределена как χ^2 с $\nu = (n-1)$ степенями свободы. Кривые плотности вероятностей асимметричны, причем степень асимметрии уменьшается с увеличением ν .

Величины t и χ^2 или χ приводятся почти во всех курсах по теории вероятностей и математической статистике, например в работах [14, 24, 29].

На наш взгляд, для практического применения целесообразнее табулировать величины $\gamma_P = \frac{t_P}{\sqrt{n}}$ и $\gamma = \frac{\chi}{\sqrt{v}}$ (для средней квадратической ошибки) или $\gamma^2 = \frac{\chi^2}{v}$.

Ввиду асимметричности распределения выражения для доверительных интервалов дисперсии отличаются от выражений для доверительных интервалов среднего значения и границы доверительных интервалов также несимметричны.

Двусторонний доверительный интервал для σ^2 с доверительной вероятностью P определяется по формуле

$$\frac{1}{\gamma_1^2} m^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\gamma_2^2} m^2. \quad (56)$$

Верхняя граница одностороннего доверительного интервала для дисперсии с доверительной вероятностью P имеет такой вид:

$$\sigma^2 < \frac{1}{\gamma^2} m^2. \quad (57)$$

Соответственно для средней квадратической ошибки имеем следующие выражения доверительных интервалов:

$$\frac{1}{\gamma_1} m < \sigma < \frac{1}{\gamma_2} m; \quad (58)$$

$$\sigma_{\max} < \frac{1}{\gamma} m. \quad (59)$$

Рассмотрим пример оценки точности результатов контрольных измерений длин разбивочных осей колонн. Пусть $v = n - 1 = 25$; $m^2 = \pm 127,24$ мм; $P = 0,95$. По формулам (56) — (59) определим соответственно двусторонний и односторонний доверительные интервалы при $\gamma_1^2 = 1,626$ и $\gamma_2^2 = 0,525$:

$$\frac{174,24}{1,626} < \sigma^2 < \frac{174,24}{0,525}; \quad 331,8 > \sigma^2 > 107,2$$

или $18,2 \text{ мм} > \sigma > 10,3 \text{ мм}$

$$\sigma^2 < \frac{174,24}{0,584} = 298,3 \quad \text{или} \quad \sigma < 17,3 \text{ мм}.$$

10. НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

Для обеспечения требований СНиП, ГОСТ, инструкций, указаний и т. д. важно не только выявить действительную точность, но и определить влияние производственных и внешних факторов на появление дополнительных погрешностей. Эта задача может быть успешно решена на основе применения специальных вероятностно-статистических критериев.

Анализ точности измерений только путем сопоставления эмпирических предельных ошибок $\tilde{\Delta}$ с установленными допусками не дает никакой информации о степени влияния производственных и внешних факторов. Последнее является важным условием для решения проблемы точности геодезического обеспечения в строительстве и, в частности, для установления наиболее оптимальных и дифференцированных допусков на выполнение геодезических измерений.

Для выявления влияния таких факторов выдвигают нулевую (основную) θ_0 статистическую гипотезу. Наряду с выдвинутой гипотезой θ_0 рассматривают конкурирующую (альтернативную) гипотезу θ_1 , которая противоречит нулевой. В итоге проверки гипотезы θ_0 могут быть допущены ошибки двух родов: ошибка первого рода, когда отвергнута правильная гипотеза, или ошибка второго рода, когда принимается неправильная гипотеза.

Для проверки гипотезы θ_0 используют статистические критерии. Совокупность значений критерия, при которых гипотеза θ_0 отвергается, составляет критическую область. Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива гипотеза θ_1 , т. е. нулевая гипотеза отвергается, если верна конкурирующая.

При выборе критической области ее целесообразно строить так, чтобы мощность критерия была максимальной при определенном уровне значимости выборки и ее фиксированном объеме. Если вероятность ошибки первого рода (принятие неправильной гипотезы) равна β , то мощность критерия равна $1 - \beta$. Пусть мощность $1 - \beta$ возрастает, при этом уменьшается вероятность β совершить ошибку второго рода. Таким образом, чем больше мощность, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Рассмотрим некоторые статистические критерии.

При математической обработке результатов измерений в строительной геодезии часто возникает необходимость

сравнения дисперсий, если требуется сравнить точность методов геодезических измерений, инструментов, точность строительно-монтажных работ и т. д.

Пусть имеются две независимые выборочные совокупности:

$$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \end{array} \right\} \quad (60)$$

средние значения которых равны соответственно $\bar{x}$, $\bar{y}$. На основании этих совокупностей получим оценки m_x^2 , m_y^2 дисперсий:

$$\left. \begin{array}{l} m_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1}; \\ m_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1}, \end{array} \right\} \quad (61)$$

для которых число степеней свободы равно соответственно $\nu_x = n_x - 1$; $\nu_y = n_y - 1$.

Требуется по выборочным дисперсиям m_x и m_y , при заданном уровне значимости q , проверить нулевую гипотезу о том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой θ_0 : $\mu(m_x^2) = \mu(m_y^2)$.

Эта гипотеза проверяется с помощью критерия Фишера F [14]. Критерий F , называемый также дисперсионным отношением, представляет собой отношение оценок m_x^2 и m_y^2 дисперсии σ^2 , полученных из независимых выборочных совокупностей:

$$F = \frac{m_x^2}{m_y^2}. \quad (62)$$

Причем $m_x^2 > m_y^2$, т. е. в числителе всегда должна стоять большая дисперсия.

Для дисперсионного отношения F при разном числе степеней свободы ν_x и ν_y построены таблицы значений F_q (критические точки), которые могут быть превзойдены соответственно с вероятностью 0,05; 0,01; 0,025; 0,005; 0,001.

Если эмпирическое значение критерия $\tilde{F}$ при данных ν_x и ν_y будет меньше соответствующего табличного зна-

чения критерия $F_{q=10\%}$ при 10%-ном уровне значимости, то такое $\tilde{F}_2$ может считаться случайным, а расхождение между оценками m_x^2 и m_y^2 — несущественным, т. е. нулевая гипотеза не отвергается. Если же значение $\tilde{F}$ будет находиться между соответствующими $F_{10\%}$ и $F_{2\%}$, то оно считается существенным при 10%-ном уровне значимости, но еще не будет существенным при 2%-ном уровне. Наконец, если эмпирическое значение $\tilde{F}$ будет больше табличного $F_{2\%}$, то оно рассматривается как существенное и нулевая дисперсия отвергается.

При случайности расхождения между оценками m_x^2 и m_y^2 можно считать подтвержденной нулевую гипотезу о том, что выборочные совокупности принадлежат одной и той же генеральной совокупности. Если же расхождение между оценками существенно, то рассматриваемая нулевая гипотеза должна быть отвергнута, т. е. точность методов или приборов различна, что вызвано влиянием тех или иных факторов.

Однако найденное значение критерия должно быть оценено. Для определения возможных значений критерия F можно воспользоваться доверительными интервалами (см. раздел 9 настоящей главы).

Двусторонний доверительный интервал для отношения σ_x^2/σ_y^2 при доверительной вероятности $(1 - P)$ определяется неравенством

$$\frac{m_x^2}{m_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{P}{2}}(v_x, v_y)} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{m_x^2}{m_y^2} F_{\frac{P}{2}}(v_x, v_y). \quad (63)$$

Если имеет смысл использовать односторонние доверительные интервалы при той же вероятности $(1 - P)$, то верхний предел

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{m_x^2}{m_y^2} F_P(v_x, v_y), \quad (64)$$

а нижний предел

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{m_x^2}{m_y^2} \cdot \frac{1}{\tilde{F}_P(v_x, v_y)}. \quad (65)$$

Если критерий F показывает, что дисперсии m_x^2 и m_y^2 различаются существенно, то по отношению ко всем остальным дисперсиям совокупности вывод о существен-

ности различия может быть неверным. Здесь мы сталкиваемся с необходимостью использования при сравнении полной информации о всех заданных дисперсиях.

Пусть генеральные совокупности $x_1, x_2, \dots, x_g$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены выборки различных объемов $n_1, n_2, \dots, n_g$ и по ним найдены выборочные дисперсии $m_1^2, m_2^2, \dots, m_g^2$. Требуется по выборочным дисперсиям m_i^2 (при заданном уровне значимости q) проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2(X_1) = \sigma^2(X_2) = \dots = \sigma^2(X_g)$, т. е. установить, существенно или несущественно различаются выборочные дисперсии. Эту гипотезу о равенстве дисперсий называют также гипотезой об однородности дисперсий.

Обозначим среднюю взвешенную арифметическую дисперсий $\bar{m}^2$, тогда

$$\bar{m}^2 = \frac{\sum_{i=1}^g v_i m_i^2}{\sum_{i=1}^g v_i}. \quad (66)$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы об однородности дисперсий используется критерий Бартлета [24]:

$$B = \frac{V}{C}. \quad (67)$$

При этом

$$V = 2,303 \left[\sum_{i=1}^g v_i \lg \bar{m}^2 - \sum_{i=1}^g v_i \lg m_i^2 \right]; \quad (68)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(g-1)} \left[\sum_{i=1}^g \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^g v_i} \right], \quad (69)$$

где v_i — число степеней свободы в выборке;
 g — число выборок в совокупности;
 m_i^2 — выборочная дисперсия;
 $\bar{m}^2$ — общая средневзвешенная дисперсия для всей совокупности измерений.

Для проверки нулевой гипотезы (при заданном уровне значимости q) об однородности дисперсий m_i^2 надо вычислить эмпирическое значение критерия B и по таблицам критических значений распределения χ^2 найти его теоретическое значение $\chi_{q,v}^2$. Если $B < \chi_{q,v}^2$, то нулевая гипотеза принимается, если $B > \chi_{q,v}^2$ — она отвергается.

Критерий B чувствителен к отклонениям распределений от нормального; поэтому к выводам, полученным по этому критерию, надо относиться осторожно.

Когда объемы выборок одинаковы ($n_i = n$), гипотезу об однородности дисперсий можно проверить упрощенным способом — при помощи критерия Кочрена [14]:

$$G = \frac{|m_i^2|_{\max}}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots + m_g^2}, \quad (70)$$

где i — номер выборки.

Этот критерий используется для проверки значимости самой большой оценки из данных g оценок, т. е. для проверки гипотезы о том, что случайная выборка, имеющая максимальную оценку дисперсий $|m_i^2|_{\max}$, принадлежит к генеральной совокупности с большей дисперсией, чем та совокупность, из которой взяты остальные выборки.

Однородность дисперсий подтверждается, если

$$G \leq G_q, \quad (71)$$

где G_q — табличное значение критерия Кочрена.

Значение G_q выбирается из специальных таблиц по заданному уровню значимости q , числу выборок g и объему n_i этих выборок.

В геодезической практике часто приходится сравнивать между собой средние значения из результатов измерений двух выборок, чтобы проверить различие в оценках $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ в результате влияния того или иного фактора производственных и внешних условий. Эта задача решается с помощью статистического t -критерия.

Пусть имеется два ряда измерений (60) случайной величины X , по результатам которых вычисляются средние арифметические значения $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ и средние квадратические ошибки m_i и m_j соответственно при n_i и n_j рядах измерений с нормальным распределением. Задача заключается в статистической проверке нулевой гипотезы равенства средних из генеральных совокупностей $\mu_i = \mu_j$. Если она подтверждается, то эта разность ($\delta\bar{x}_{ij} = \bar{x}_i - \bar{x}_j$) имеет случайный ха-

раक्टर, если нет, следовательно, разность является точечной оценкой систематической ошибки, выражаемой смещением центров группирования относительно μ_j , т. е. в форме разности: $\delta\mu_{ij} = \mu_i - \mu_j$.

Две арифметические средние $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ сравниваются при помощи критерия

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{m(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \frac{\delta\bar{x}_{1,2}}{m(\delta\bar{x}_{1,2})}, \quad (72)$$

где $m(\delta\bar{x}_{1,2})$ — средняя квадратическая ошибка разности $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, равная

$$m(\delta\bar{x}_{1,2}) = \sqrt{\{(n_1-1)m^2(x_1) + (n_2-1)m^2(x_2)\} \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}}. \quad (73)$$

Тогда

$$t = \frac{\delta\bar{x}_{1,2}}{\sqrt{(n_1-1)m^2(x_1) + (n_2-1)m^2(x_2)}} \times \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}. \quad (74)$$

Этот критерий имеет распределение по закону Стьюдента. Для него можно построить с заданной доверительной вероятностью критическую область

$$|t| > t_P, \quad (75)$$

где t_P выбирают из специальных таблиц по заданной доверительной вероятности P и числу степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Если $|t|$ больше табличного значения критерия t_P , то это означает, что $\mu_1 \neq \mu_2$, т. е. результаты измерений по двум выборкам существенно различны.

Рассмотрим пример с применением t -критерия. Пусть в двух пролетах одноэтажного промышленного здания измерены расстояния в пролетах подкрановых путей. По результатам измерений получено: $\bar{l}_1 = 21502,10$ мм и $\bar{l}_2 = 21497,27$ мм; $m_2 = \pm 3,8$ мм и $m_1 = \pm 4,8$ мм; $n_1 = n_2 = 22$. Приняв вероятности, например, $P = 0,95$ и $P = 0,99$

при $v = 22 + 22 - 2$, по таблице [27] получим значения критерия $t_{0,95} = 2,02$ и $t_{0,99} = 2,70$.

По формуле (74) вычисляем

$$t = \frac{4,83}{\sqrt{21 [(4,8)^2 + (3,8)^2]}} \sqrt{\frac{22 \cdot 22 (22 + 22 - 2)}{22 + 22}} = 3,69.$$

Сопоставляя эмпирическое значение критерия $|t| = 3,69$ с табличным $t_{0,95} = 2,02$ и $t_{0,99} = 2,70$ с учетом (75), видим, что характеристики l_1 и l_2 существенно различаются.

При определении суммарных погрешностей геодезических измерений по составляющим важно знать, являются ли последние зависимыми. Если между составляющими ошибками имеет место стохастическая зависимость, то абсолютное значение суммарной ошибки изменится.

Степень зависимости между двумя случайными ошибками δ_x и δ_y выражается через коэффициент корреляции

$$r(\delta_x, \delta_y) = \frac{K(\delta_x, \delta_y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (76)$$

где $K(\delta_x, \delta_y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{xi} \delta_{yi}$ — корреляционный момент;

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{xi}^2} \text{ — стандарт ошибки } \delta_x;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{yi}^2} \text{ — стандарт ошибки } \delta_y.$$

Если же исследуется связь между несколькими случайными ошибками, то корреляцию называют *множественной*. В простейшем случае, когда число ошибок равно трем, коэффициент множественной корреляции определяется по формуле

$$R = \sqrt{\frac{r^2(\delta_x, \delta_z) - 2r(\delta_x, \delta_y)r(\delta_x, \delta_z)r(\delta_y, \delta_z) + r^2(\delta_y, \delta_z)}{1 - r^2(\delta_x, \delta_y)}}. \quad (77)$$

Значение коэффициента корреляции изменяется в пределах $-1 \leq r \leq +1$.

Для подтверждения реальности связи между δ_x и δ_y необходимо оценить эмпирическое значение коэффициента

корреляции $\tilde{r}(\delta_x, \delta_y)$, найденного по результатам измерения.

Качественно оценить близость $\tilde{r}$ к r по данным измерений можно лишь в том случае, когда распределение величин δ_x и δ_y достаточно приближается к нормальному распределению. В этом случае для больших выборок ($n > 50$) можно использовать оценку для среднего квадратического отклонения $\tilde{r}$ от r [14]

$$\sigma_r \approx \sigma_{\tilde{r}} = \frac{1 - \tilde{r}^2}{\sqrt{n}} \quad (78)$$

и считать, что $\tilde{r}$ приближенно следует закону нормального распределения с параметрами $\sigma_r, \sigma_{\tilde{r}}$.

Определив для $q\%$ -ного уровня значимости отклонения $\tilde{r}$ от r , будем иметь следующий доверительный интервал с $q\%$ -ным уровнем:

$$\tilde{r} - t_q \frac{1 - \tilde{r}^2}{\sqrt{n}} < r < \tilde{r} + t_q \frac{1 - \tilde{r}^2}{\sqrt{n}}, \quad (79)$$

где t_q — нормированная величина, зависящая от n и q .

В практике принято считать достаточным условие

$$\frac{r}{\sigma_r} > 3. \quad (80)$$

Если нижняя граница доверительного интервала для коэффициента корреляции окажется мала, то по данной выборке нет еще оснований считать, что исследуемые величины в генеральной совокупности связаны корреляционной зависимостью. При малом числе измерений эти оценки не совсем пригодны.

В этих случаях для оценки надежности коэффициента корреляции следует пользоваться специальной функцией [4]

$$z = \frac{1}{2} \{ \ln(1 + r) - \ln(1 - r) \}, \quad (81)$$

или

$$z = 1,151 [\log(1 + r) - \log(1 - r)]. \quad (82)$$

Функция z , независимо от значения коэффициента корреляции, подчиняется закону нормального распределения

или близка к нему. Она вычисляется по специальным таблицам [29].

Средняя квадратическая ошибка функции z есть средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (83)$$

Достоверность средней квадратической ошибки коэффициента корреляции можно определить с помощью критерия Каппа K :

$$K = \frac{z}{\sigma_z}. \quad (84)$$

Достоверность функции K табулируется через функцию Ляпунова $\Phi(t)$ или $\frac{1}{2} \Phi(t)$.

Оценим коэффициент корреляции между ошибками отметок подкрановых рельсов по смежным пролетам $\tilde{r}(H_i, H_j)$, который по результатам 252 измерений оказался равен 0,4. Из формулы (78) имеем:

$$\tilde{m}(r_{i,j}) = \frac{1-0,16}{\sqrt{252}} = \frac{0,84}{14,8} = 0,06.$$

Следовательно, $\frac{\tilde{r}}{m_r} > 3$, что является достаточным условием реальности существования корреляционной связи (76).

Приняв $q = 0,05$, имеем $t_q = 1,96$. Тогда по формуле (79) получим:

$$0,4 - 1,96 \frac{1-0,16}{\sqrt{252}} < r(H_i, H_j) < 0,4 + 1,96 \frac{1-0,16}{\sqrt{252}}$$

или
$$0,28 < r(H_i, H_j) < 0,52.$$

11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

При математической обработке результатов геодезических измерений, в частности при предрасчете точности, важно определить необходимое число измерений. Это позволит при анализе результатов измерений и при производстве геодезических работ получить достоверные параметры.

Число необходимых измерений n в выборке можно определить, исходя из центральной предельной теоремы [14]. На основе этой теоремы имеем:

$$P\left(-z_q \leq \frac{m-\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq +z_q\right) \approx 2\Phi(z) = q, \quad (85)$$

где $-z_q, +z_q$ — границы доверительного интервала, определяемого с надежностью q .

Пусть задана требуемая надежность q и желаемая точность получения результатов измерения, т. е. верхний предел ошибки в определении σ по m так, чтобы неравенство

$$|m - \sigma| \leq \Delta_\sigma \quad (86)$$

выполнялось с надежностью, не меньшей q .

Тогда из (85), после некоторых преобразований, имеем:

$$z_q \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \Delta_\sigma. \quad (87)$$

Решая это неравенство относительно n , определим необходимое количество измерений для обеспечения требуемой точности искомого параметра:

$$n \geq \frac{z_q^2 \sigma^2}{\Delta_\sigma^2}. \quad (88)$$

Выражая предельную ошибку оценки Δ_σ в долях σ , получим:

$$z_\sigma = \frac{\Delta_\sigma}{\sigma}. \quad (89)$$

Тогда неравенство (88) примет следующий вид:

$$n \geq \frac{z_q^2}{z_\sigma^2}. \quad (90)$$

Величины q , Δ_σ и z_σ определяются для каждого конкретного случая.

При производстве геодезических работ в строительстве стремятся свести до минимума число измерений с целью сокращения времени и затрат труда. Это оправдано, так как измерения осуществляются при полной остановке строительно-монтажных работ по возведению конструкций, что удлиняет сроки сдачи объекта в эксплуатацию.

Ниже предлагается способ определения необходимого и достаточного числа геодезических измерений, основанный на применении последовательного анализа результатов измерений. При оценке точности геодезических или строительно-монтажных работ основным параметром является средняя квадратическая ошибка σ (стандарт из СНиП). Поэтому точность работ считается соответствующей СНиП, если $m \leq \sigma_1$, и несоответствующей, если $m \geq \sigma_2$ (m — эмпирическая оценка точности, полученная по результатам измерений).

Последовательный анализ результатов измерений основан на отношении правдоподобия [27]:

$$\gamma_n = \frac{\varphi(m, \sigma_2)}{\varphi(m, \sigma_1)}, \quad (91)$$

где $\varphi(m, \sigma_2)$ и $\varphi(m, \sigma_1)$ — плотности распределения случайной величины m .

При производстве геодезических измерений последовательно увеличивается число измерений n и для каждого определяется величина γ_n по формуле (91). Если выполняется неравенство

$$\gamma_n \leq \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad (92)$$

то измерения прекращаются и точность их считается соответствующей требованиям нормативов. Если выполняется неравенство

$$\gamma_n > \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (93)$$

то измерения прекращаются и точность их считается не соответствующей требованиям нормативов (с последующим выяснением причин нарушения технологии или методов ведения работ). При выполнении условия

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \gamma_n < \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (94)$$

измерения продолжаются до тех пор, пока не подтвердится условие (92) или (93). В неравенствах (92) — (94) величины α и β выражают вероятности соответственно: достаточную точность измерений оценивать по результатам выборочных измерений, как не соответствующую требованиям нормативов, и недостаточную точность их, как соответствующую требованиям нормативов. Рациональная организация оцен-

ки точности измерений заключается в том, чтобы сделать обе величины достаточно малыми (обычно их принимают равными 0,05—0,1).

В уравнении (91) функция распределения величины m равна:

$$\varphi(m, \sigma) dm = f_2(y) dy, \quad (95)$$

где

$$y = \frac{m}{\sigma} \sqrt{n-1}, \quad (96)$$

а $f_2(y)$ имеет χ -распределение.

Из этих уравнений получим:

$$\ln \gamma_n = \frac{n-1}{2} \ln \varepsilon + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{m^2}{\sigma_1^2} (1 - \varepsilon), \quad (97)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \quad (98)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \ln \frac{\beta}{1-\alpha}; \quad (99)$$

$$B = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (100)$$

Тогда в соответствии с неравенствами (92) и (93) условия принятия правильного решения при оценке точности строительного-монтажных или геодезических работ могут быть представлены соответственно в следующем виде:

$$\ln \varepsilon + \frac{m^2}{\sigma_1^2} (1 - \varepsilon) \leq \frac{2A}{n-1}; \quad (101)$$

$$\ln \varepsilon + \frac{m^2}{\sigma_1^2} (1 - \varepsilon) \geq \frac{2B}{n-1} \quad (102)$$

или

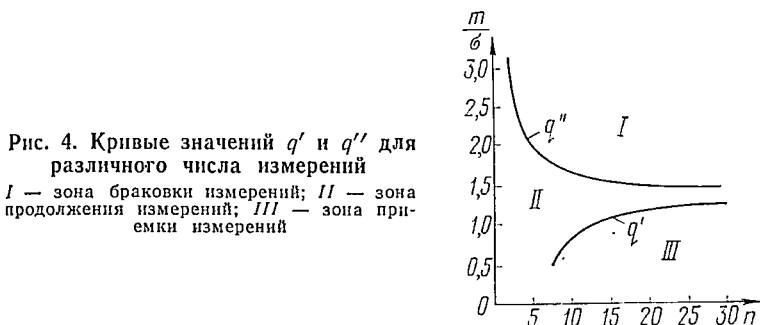
$$\frac{m}{\sigma_1} \leq \sqrt{\frac{2A - (n-1) \ln \varepsilon}{(n-1) (1 - \varepsilon)}} = q'; \quad (103)$$

$$\frac{m}{\sigma_1} \geq \sqrt{\frac{2B - (n-1) \ln \varepsilon}{(n-1) (1 - \varepsilon)}} = q''. \quad (104)$$

Таким образом, геодезические разбивочные работы считаются выполненными с заданной нормативной точностью, если $m \leq q' \sigma_1$, и бракуются, если $m \geq q'' \sigma_1$.

Если по горизонтальной оси координат откладывать значения n , а по вертикальной оси значения $\frac{m}{\sigma_1}$, то по уравнениям (103) и (104) можно построить кривые q' и q'' , определяющие границы зон, удовлетворяющей и не удовлетворяющей требованиям нормативов точности.

Рассмотрим данный способ применительно к оценке точности измерений при передаче разбивочных осей по верти-



кали в каркасе здания. Пусть $\sigma_1 = \pm 2$ мм, $\sigma_2 = \pm 4$ мм, $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,025$. Тогда из (99) имеем: $A = \ln \frac{0,025}{0,95} = -3,638$; из (100): $B = \ln \frac{0,975}{0,05} = 2,970$; из (98): $\epsilon = 0,25$, $\ln \epsilon = 1,386$. На основании этих исходных и промежуточных данных по формулам (103) и (104) вычислим значения q' и q'' для различного числа измерений n и сведем их в единую таблицу (табл. 4).

Т а б л и ц а 4
Таблица значений q' и q''

n	q'	q''	n	q'	q''
2	—	3,16	10	0,88	1,65
3	—	2,42	12	0,98	1,60
5	—	1,96	15	1,08	1,56
7	0,48	1,78	20	1,16	1,51
8	0,68	1,73	25	1,20	1,48
9	0,80	1,69	30	1,23	1,46

На рис. 4 представлены кривые q' и q'' , построенные на основании данных табл. 4. Как следует из уравнений (103) и (104), минимальное число измерений n , при котором возможна нормативная точность* передачи осей, равно 7, а минимальное число измерений n' , при котором точность передачи осей считается не удовлетворяющей требованиям нормативов, равно 2.

ГЛАВА IV. ТЕОРИЯ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

12. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ТОЧНОСТИ ВОЗВЕДЕНИЯ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Каждое здание или сооружение состоит из конструкций и элементов, размеры которых взаимосвязаны и составляют неразрывную цепь, определяющую их положение в пространстве.

Последовательность возведения здания и методы выполнения строительно-монтажных и геодезических работ зависят от конструкции здания.

Точность возведения здания или сооружения из сборных элементов зависит главным образом от точности выполнения следующих основных операций: обеспечения проектных размеров строительных конструкций или их элементов при изготовлении; установки сборных конструкций в проектное положение; выполнения геодезических построений на всех этапах возведения здания или сооружения.

В результате изменений, происшедших в строительстве за последние годы, к точности возведения зданий и сооружений предъявляются все более высокие требования. Понятие «точность возведения зданий и сооружений» теперь приобретает более широкий смысл и включает в себя не только процессы обеспечения проектных размеров строительных конструкций при изготовлении, установке их в проектное положение и геодезических построений, но и

* Собственно ошибка передачи осей определяется еще и другими факторами.

конструктивные, экономические и эксплуатационные требования к зданиям.

При возведении здания или сооружения должны быть созданы условия неизменяемости положения конструкций, узлов и в целом здания в результате воздействия последующих процессов возведения конструкций, эксплуатационных и ветровых нагрузок, температуры, осадки фундаментов и т. д. Все эти факторы неразрывно связаны друг с другом, и нарушение хотя бы одного из них может привести к снижению точности возведения здания или сооружения в целом или их отдельных частей.

При изготовлении строительных конструкций, их установке в проектное положение и выполнении геодезических построений, сопровождающих процесс возведения здания или сооружения, действует большое количество различных факторов, которые вызывают появление разного рода ошибок, искажающих проектные размеры, конструктивные формы и взаимное положение конструкций и узлов соединения. Эти неизбежные ошибки должны быть учтены на стадии составления рабочих чертежей с тем, чтобы ошибки в размерах отдельных проектных элементов и в собранных из них узлах не нарушили нормального процесса возведения здания, его долговечности и надежной работы строительных конструкций при эксплуатации.

Расчетные размеры конструкций называют *проектными* или *номинальными* (l_0).

Размеры конструкций (l_1), полученные в результате их изготовления, или размеры отдельных элементов здания, полученные в результате выноса проекта в натуру, называют *действительными* (при условии исключения ошибок измерения). Они могут отклоняться от проектного размера в сторону увеличения (положительное отклонение) или в сторону уменьшения (отрицательное отклонение). Неравномерность влияния производственных процессов вызывает отклонения действительного размера от проектного, которые могут иметь различные величины.

Наибольшее предельное отклонение от проектного значения размера ($\delta_{\max}$) называют *верхним предельным отклонением*, а наименьшее ($\delta_{\min}$) — *нижним*.

Возможные элементарные отклонения от проектных размеров должны быть ограничены определенными допустимыми отклонениями — *допусками* (Δ).

Допуск размера определяет требуемую точность выполнения того или иного производственного процесса, т. е.

насколько действительный размер должен приближаться к проектному. Следовательно, допуск определяется предельными значениями размеров, т. е. разностью между наибольшим (l_{max}) или наименьшим (l_{min}) допускаемыми размерами и номинальным размером. Зона между наибольшим и наименьшим предельными отклонениями размера называется *полем допуска* ($|\Delta \pm|$).

Допуски и поля допусков представлены на рис. 5. Разность размеров ($l_{01} - l_{02}$) соединяемых конструкций опре-

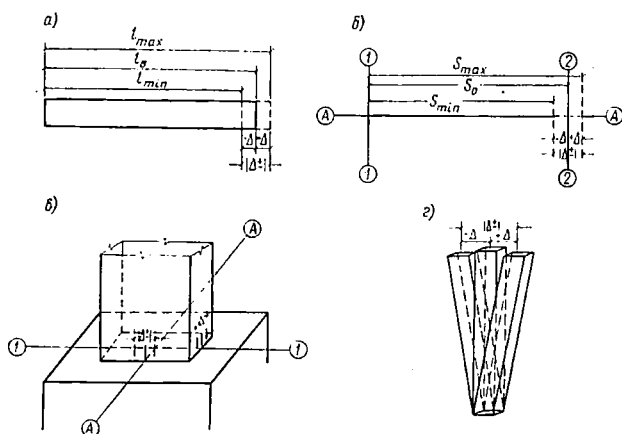


Рис. 5. Графические изображения допусков и полей допусков на геодезические и строительно-монтажные погрешности

а — выполнение проектных размеров сборных строительных конструкций; б — детальное геодезическое построение разбивочных осей; в — смещение сборной конструкции с разбивочной осью; г — отклонение оси строительной конструкции от вертикали

деляет величину зазора между ними (C), т. е. большую или меньшую величину смещения поверхности одной конструкции по отношению к другой (рис. 6).

Согласно СНиП, изменение положения смонтированной конструкции или ее размера внутри поля допуска принято считать разрешенным событием. Выход действительных размеров или отклонений в положении конструкций и отдельных частей здания за пределы допуска приводит к нарушению нормальной эксплуатации здания и ухудшает его эстетические качества. Поэтому такое событие является запрещенным.

Величина поля допуска задается техническими условиями и определяется допустимыми с точки зрения нормальной эксплуатации, долговечности и эстетических требований отклонениями в размерах и положении отдельных частей здания или его конструкций.

В настоящее время нормы точности (допуски) на выполнение проектных размеров строительных конструкций, на

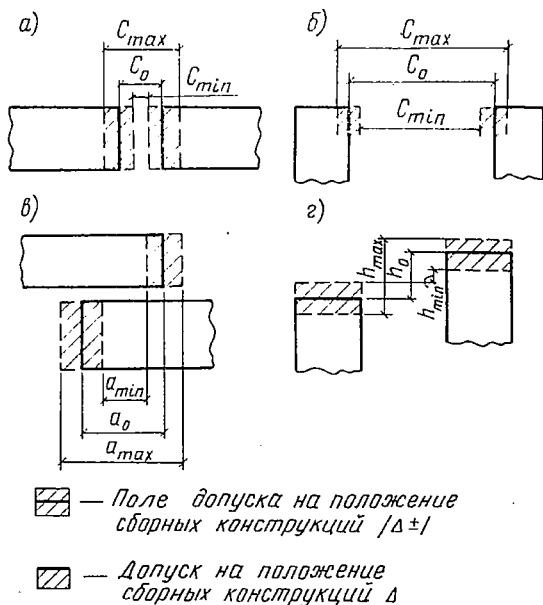


Рис. 6. Зазоры и площадки опирания в стыках сборных конструкций

a — зазор C между конструкциями; $б$ — зазор между конструкциями по вертикали; $в$ — площадка опирания a соединяемых конструкций; $г$ — разность отметок опорных поверхностей смежных конструкций

установку конструкций и их элементов в проектное положение, а также на выполнение некоторых видов геодезических построений при возведении зданий и сооружений регламентируются строительными нормами и правилами.

При назначении норм точности на изготовление строительных конструкций, их установку в проектное положение и выполнение геодезических работ необходимо учитывать стоимость технологических операций, состояние производства, назначение здания, производственные отклонения дей-

ствительных размеров конструкций или их положения от проектных. Например, недостаточная точность выполнения проектных размеров колонн и положения в них закладных деталей (выпусков арматуры, пластин и т. д.) вызывает большое увеличение трудовых затрат при монтаже стропильных ферм (для одноэтажных зданий) и ригелей (для многоэтажных зданий).

На основании исследований, проведенных в СССР и за рубежом, установлено, что общее соотношение между точностью выполнения проектных размеров сборных строительных конструкций и стоимостью их производства аппроксимируется гиперболической кривой. Чем больше допуск на размер конструкции, тем легче его выдержать, тем проще производство работ, тем выше производительность труда и следовательно, тем ниже стоимость строительной конструкции.

Поэтому необоснованное назначение излишне жестких допусков на размеры строительных конструкций усложняет технологию производства и ведет к увеличению его трудоемкости и стоимости. Нет необходимости добиваться повышенной точности в размерах изделий, если эта точность не вызывается назначением конструкций и условиями эксплуатации сооружения. В этом случае устанавливаемая точность изготовления и монтажа конструкций должна быть оправдана экономически.

Таким образом, при разработке методов научно обоснованного расчета точности выполнения проектных размеров строительных конструкций, их установки в проектное положение и геодезических измерений значительно повысится качество проектирования и возведения зданий и сооружений, создадутся благоприятные условия для дальнейшей индустриализации строительства и снижения его стоимости.

13. ВИДЫ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ И ПРИНЦИП ИХ СОСТАВЛЕНИЯ

Надежность и долговечность зданий и сооружений из сборных конструкций в значительной степени зависят от точности расчетов, выполняемых при проектировании, и учета этими расчетами реальных условий строительно-монтажного и геодезического производства, а также условий эксплуатационной работы несущих конструкций. При этом точность расчетов имеет большое значение для даль-

нейшего совершенствования конструкций зданий и сооружений, создания новых рациональных систем и конструктивных решений, прогрессивных технологий, геодезических методов и средств механизации.

При разработке конструктивной схемы зданий в основу кладется принцип совместной пространственной работы элементов, а также принцип совмещения несущих и ограждающих функций элементов конструкций. Две колонны и балка, две колонны и ферма образуют рамную систему в виде пространственного прямоугольника, способного воспринимать горизонтальные и вертикальные нагрузки.

Наиболее часто встречающиеся в практике монтажа соединения сборных элементов состоят из цепи последовательно сопрягающихся элементов и их размеров, причем число элементов не имеет принципиального значения. К такому типу сопряжения относятся цепи, состоящие из последовательно соединенных по вертикали колонн (для многоэтажных зданий); система балок, последовательно уложенных на консоли вдоль здания, или ферм — поперек здания (для одноэтажных зданий). К этому типу относятся цепи, образованные размерами расстояний между осями конструкций и расположенными между ними конструкциями — ферма, балка и др. Однотипной является цепь, состоящая из размеров пространства между ранее смонтированными элементами и вводимым между ними элементом (ферма или ригель между колоннами, плита перекрытия между стеновыми панелями и т. д.).

Иное сопряжение имеет место в конструкциях наклонных транспортных мостов и галерей, соединяемых с конечными зданиями под углом, или кольцевых эстакадах.

С целью упрощения расчета точности возведения зданий или сооружений все конструкции целесообразно разделить на четыре группы:

- 1) последовательно соединяемые в цепь;
- 2) соединяемые в узлы под углом;
- 3) конструкции, оси которых должны находиться на одной прямой линии;
- 4) конструкции, поверхности которых должны находиться в одной плоскости.

В соответствии с этими группами конструкций определяется и вид размерной цепи в здании или сооружении.

Здания или сооружения представляют собой совокупность конструкций, расположенных в пространстве, которые в сочетании с зазорами образуют в определенной плос-

кости цепь взаимосвязанных между собой размеров, или размерную цепь.

Размерной цепью называют совокупность размеров, расположенных по замкнутому контуру в определенной последовательности и определяющих взаимное положение поверхностей и осей одной или нескольких конструкций. *Звеном размерной цепи* называют размер, определяющий расстояние между поверхностями или осями конструкций.

Все звенья размерной цепи разделяют на составляющие и замыкающие (рис. 7). Зазор между соединяемыми конструкциями рассматривается как самостоятельное звено размерной цепи.

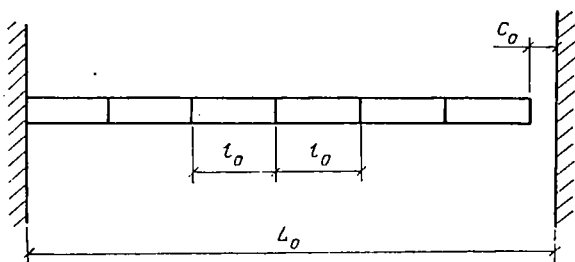


Рис. 7. Линейная простая размерная цепь

Замыкающим называют звено, характеризующее относительное положение осей, поверхностей или узлов сопряжения конструкций. Каждая размерная цепь состоит из одного замыкающего звена и нескольких составляющих.

В самом общем виде уравнение размерной цепи может быть представлено так:

$$l_{\Sigma} = \varphi(l_1, l_2, l_3, \dots, l_n), \quad (105)$$

где l_{Σ} — замыкающее звено;

l_i — составляющие звенья.

Для решения задач, связанных с расчетом и достижением необходимой и достаточной точности при проектировании, производстве геодезических измерений и возведении конструкций здания или сооружения, следует использовать теорию размерных цепей, ее основные законы, методы и расчетные формулы [3].

Расчет размерных цепей для зданий и сооружений — наиболее современное средство для решения задач по опре-

делению нормы точности на выполнение отдельных процессов (изготовление конструкций, их монтаж и геодезические построения), связанных с возведением зданий и сооружений. Без такого расчета проектировщики рискуют либо в порядке перестраховки назначать слишком высокую точность, не вызываемую необходимостью условий нормальной эксплуатации и долговечности здания или сооружения, либо, наоборот, назначать слишком низкую точность, не обеспечивающую нормальную эксплуатацию и полную собираемость здания без подгонок и переделок.

Для нормальной эксплуатации и полной собираемости здания или сооружения необходимо, чтобы положение его конструкций в натуре и размеры между конструктивными элементами находились в пределах заданных допусков.

Параметры здания или сооружения (пролет, расстояние между температурными швами, между осями конструкций, между основными осями здания и т. д.) связаны с размерами строительных конструкций (балка, ригель, панель, ферма и т. д.) следующим уравнением:

$$F(X) = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (106)$$

где $F(X)$ — функция, определяющая связь параметра здания (X) и его элементов ($x_1, x_2, \dots, x_n$).

Следовательно, погрешность параметра здания определяется погрешностями размеров конструкций или элементов и видом функции их связи.

Задача расчета точности возведения зданий и сооружений состоит в определении возможных погрешностей размеров здания или его элементов при заданных допусках на размеры отдельных конструкций или их положения.

Таким образом, при проектировании зданий или сооружений необходимо установить определенное соответствие между допусками на размеры замыкающего звена и допусками на составляющие его элементы. Отсутствие такого соответствия приводит к излишнему ужесточению допусков на размеры составляющих элементов или к невозможности получения необходимой точности размера замыкающего звена без дополнительных затрат времени и средств на различные подгонки.

Точность реализации параметров здания или отдельных его частей можно рассчитать либо по способу наихудшего случая, либо по способу моментов.

Способ наихудшего случая характеризуется следующим требованием: размер замыкающего звена должен находить-

ся в пределах установленных границ допуска при наиболее неблагоприятных сочетаниях погрешностей размеров или положения соответствующих элементов цепи.

Способ наихудшего случая иногда называют «способом максимума-минимума» [3]. Такое название он получил потому, что при расчете точности размера или положения замыкающего звена выполняется арифметическое суммирование частных погрешностей размеров или положения составляющих звеньев, т. е.

$$\delta_{\Sigma} = \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \dots \pm \delta_n. \quad (107)$$

В качестве погрешностей ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$) принимаются их максимальные или минимальные значения, выведенные из результатов теоретических расчетов или выполненных ранее измерений.

Недостатки способа наихудшего случая заключаются в следующем:

этот способ не дает количественной оценки попадания размера замыкающего элемента в границы установленного допуска;

не позволяет оценивать возможные случаи появления предельных и средних значений размера замыкающего элемента;

не позволяет определить причину выхода размера за границы установленного допуска, если на него влияют несколько факторов;

арифметическое суммирование частных погрешностей размеров или положения составляющих элементов принципиально и практически необоснованно.

Этот способ не нашел применения, так как он может быть использован только для расчета точности при малом числе составляющих размеров, полученных с низкой точностью. Кроме того, при возведении здания заранее предполагается сочетание конструкций или узлов сопряжения лишь с их максимальными ошибками, что приводит обычно к значительному увеличению предельной ошибки в замыкающем размере.

В действительности размеры конструкций и узлов сопряжения, имеющих максимальные ошибки, сочетаются крайне редко. Поэтому необходимо применять способ, который давал бы возможность уменьшить величину предельной ошибки замыкающего размера без значительной потери точности составляющих размеров. Таким способом является расчет точности на основе законов теории вероят-

ностей — способ моментов. При расчете по этому способу предполагается, что погрешности размеров и положения составляющих элементов (x_i) и размера замыкающего элемента (X) подчиняются закону нормального распределения. Исходными являются количественные характеристики закона распределения размеров и положения составляющих элементов.

Учитывая, что зависимость (106) в общем случае может быть достаточно сложной, разложим выражение для замыкающего размера X в ряд Тейлора [3]:

$$\begin{aligned} X + \delta X &= \varphi(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) = \\ &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial X}{\partial x_2} \delta x_2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\partial X}{\partial x_n} \delta x_n \right)^i = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \theta_n, \end{aligned} \quad (108)$$

где θ — остаточный член.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X задаются приближенно формулами:

$$\mu(X) \approx \varphi\{\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_n)\}; \quad (109)$$

$$\begin{aligned} D(X) &\approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 D(x_i) + \\ &+ \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \text{cov}(x_i, x_j), \end{aligned} \quad (110)$$

где $\mu(x_i)$ — математическое ожидание случайной величины x_i ;

$D(x_i)$ — дисперсия случайной величины x_i ;

$\text{cov}(x_i, x_j)$ — ковариация случайных величин x_i и x_j .

Эти формулы дают точное выражение для $\mu(X)$ и $D(X)$, если рассматриваемая функция линейна.

Переходя к средним квадратическим отклонениям и пренебрегая членами более высокого порядка малости по сравнению со средним квадратическим отклонением, получим:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)}. \quad (111)$$

Формула (111) получена для размеров x_i составляющих элементов при условии, что они являются независимыми случайными величинами.

Если значения размеров x_i являются зависимыми случайными величинами, то из (111) имеем:

$$\sigma X = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2 x_i + 2 \sum_{v < j} A_{v,j} K_{v,j}}, \quad (112)$$

где $K_{v,j}$ — корреляционный момент величин x_v , x_j ;

$$A_{v,j} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right).$$

Знак $v < j$ в формуле (112) обозначает, что суммирование распространяется на все возможные попарные сочетания случайных величин $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

При расчете элементов, соединяемых под углом, необходимо уравнение погрешностей составить по проекции размерной цепи на некоторые оси, связанные с замыкающим размером определенной тригонометрической зависимостью.

Из формул (111) и (112) следует, что размер замыкающего элемента изменяется в результате суммарного влияния погрешностей всех размеров составляющих элементов. При этом влияние размера определяется величиной частной производной, дисперсией и корреляционным моментом.

Расчет по методу моментов сводится к определению среднего значения (математического ожидания), определяющего размеры замыкающего элемента

$$\mu(X) = \Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (113)$$

и его среднего квадратического отклонения σ_X .

Метод моментов дает абсолютно точные результаты только для линейных систем при соответствии априорного нормального распределения апостериорному.

Для нелинейных систем, даже при нормальном законе распределения размеров составляющих элементов, закон распределения величины замыкающего элемента отличается от нормального, а математическое ожидание величины замыкающего размера не равно его проектному значению. Поэтому при анализе нелинейных систем методом моментов возникают значительные ошибки.

14. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ПО РАЗМЕРНЫМ ЦЕПЯМ

В практике проектирования и строительства из сборных конструкций при расчетах точности возведения зданий или сооружений возникают две задачи:

прямая — по известным допускам на размеры и положение строительных конструкций, разбивочных осей или горизонтов необходимо определить допуск на размер замыкающего звена;

обратная — по известному допуску на размер замыкающего звена необходимо определить допуск на размеры, положение отдельных конструкций и разбивочных осей или горизонтов размерной цепи.

Общее условие этих задач — обеспечение полной собираемости сборных конструкций без каких-либо подгонок элементов по месту.

На основе вероятностно-статистического метода случайные ошибки составляющих звеньев размерной цепи характеризуются стандартом $\sigma(x)$. Тогда стандарт замыкающего звена для линейной цепи в соответствии с (106) будет равен:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \dots + \sigma^2(x_n)}. \quad (114)$$

Кроме того, учитывая, что составляющие звенья сопровождаются систематическими ошибками, из (106) имеем:

$$\xi(X) = \xi(x_1) + \xi(x_2) + \dots + \xi(x_n). \quad (115)$$

В случае равенства составляющих в формулах (114) и (115) предельная ошибка (допуск) замыкающего звена определится из формулы

$$\Delta(X) = t\sigma(x_i) \sqrt{n} + \xi(x_i) n. \quad (116)$$

По формуле (116) решается прямая задача, когда известны ошибки составляющих звеньев $\sigma(x_i)$, $\xi(x_i)$ и надо определить ошибку замыкающего звена.

Исходным параметром для решения обратной задачи является допуск на замыкающее звено $\Delta(X)$. Решение обратной задачи не является однозначным и зависит от дополнительных условий. Если принять, что $\sigma(x_i) = \sigma$ и $\xi(x_i) = \xi = k\sigma$, то

$$\Delta(X) = \sigma(t + k). \quad (117)$$

Отсюда формула (116) принимает следующий вид:

$$\Delta(X) = \sigma(t\sqrt{n} + kn). \quad (118)$$

Для заданного значения $\Delta(X)$ из формулы (118) можно найти стандарт для составляющего звена:

$$\sigma = \frac{\Delta(X)}{t\sqrt{n} + kn}. \quad (119)$$

Следовательно,

$$\Delta(x_i) = \frac{t+k}{t\sqrt{n} + kn} \Delta(X). \quad (120)$$

Относительная ошибка допуска составляющего звена будет равна:

$$\frac{1}{T} = \frac{t(n + \sqrt{n})}{n(t+k)}, \quad (121)$$

и с увеличением числа звеньев предельное значение ее достигает следующей величины:

$$\left(\frac{1}{T}\right)_{\text{пред}} = \frac{t}{t+n}. \quad (122)$$

Ошибка замыкающего размера цепи включает в себя ошибки размеров составляющих конструкций, установки конструкций, геодезических построений и ошибки, вызываемые деформационными воздействиями (неравномерность осадки фундаментов, температура) на положение составляющих конструкций [22].

Пусть случайные и систематические ошибки геодезических построений, изготовления сборных конструкций, монтажных работ и деформационных воздействий соответственно равны $\sigma_r(x_i)$, $\sigma_n(x_i)$, $\sigma_m(x_i)$, $\sigma_d(x_i)$, $\xi_r(x_i)$, $\xi_n(x_i)$, $\xi_m(x_i)$, $\xi_d(x_i)$.

Тогда стандарт замыкающего звена и его систематическая ошибка определяются по формулам:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma_r^2(x_i) + \sigma_n^2(x_i) + \sigma_m^2(x_i) + \sigma_d^2(x_i)}; \quad (123)$$

$$\xi(X) = \xi_r(x_i) + \xi_n(x_i) + \xi_m(x_i) + \xi_d(x_i). \quad (124)$$

При решении прямой задачи теоретически или экспериментально определяются все составляющие из (123) и (124), по которым находятся $\sigma(X)$ и $\xi(X)$; по формуле (120) находится допуск на составляющее звено размерной цепи,

а по формуле (116) допуск на замыкающее звено этой же цепи.

Решая обратную задачу при условии $\sigma(x_i) = \sigma$ и $\xi(x_i) = \xi = k\sigma$, определяют допуск на составляющее звено, а по формуле (116) стандарт σ .

Затем, решая уравнения

$$\sigma_{\Gamma}^2(x_i) + \sigma_{\Pi}^2(x_i) + \sigma_{\text{М}}^2(x_i) + \sigma_{\text{Д}}^2(x_i) \leq \sigma^2; \quad (125)$$

$$\xi_{\Gamma}(x_i) + \xi_{\Pi}(x_i) + \xi_{\text{М}}(x_i) + \xi_{\text{Д}}(x_i) \leq k\sigma, \quad (126)$$

по способу приближений определяют составляющие их левой части.

Допуски на составляющие звенья будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Gamma}(x_i) &= t\sigma_{\Gamma}(x_i) + \xi_{\Gamma}(x_i); \\ \Delta_{\Pi}(x_i) &= t\sigma_{\Pi}(x_i) + \xi_{\Pi}(x_i); \\ \Delta_{\text{М}}(x_i) &= t\sigma_{\text{М}}(x_i) + \xi_{\text{М}}(x_i); \\ \Delta_{\text{Д}}(x_i) &= t\sigma_{\text{Д}}(x_i) + \xi_{\text{Д}}(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Если систематические ошибки настолько малы, что ими можно пренебречь, то

$$\Delta(X) = \sqrt{\Delta_{\Gamma}^2(x_i) + \Delta_{\Pi}^2(x_i) + \Delta_{\text{М}}^2(x_i) + \Delta_{\text{Д}}^2(x_i)}. \quad (128)$$

Следовательно, допуски замыкающего звена по отдельным источникам ошибок равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Gamma}(X) &= t\sigma_{\Gamma}(x) + \xi_{\Gamma}(x); \\ \Delta_{\Pi}(X) &= t\sigma_{\Pi}(x) + \xi_{\Pi}(x); \\ \Delta_{\text{М}}(X) &= t\sigma_{\text{М}}(x) + \xi_{\text{М}}(x); \\ \Delta_{\text{Д}}(X) &= t\sigma_{\text{Д}}(x) + \xi_{\text{Д}}(x), \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\Gamma}(x) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Gamma}^2(x_i)}; & \xi_{\Gamma}(x) &= \sum_{i=1}^n \xi_{\Gamma}(x_i); \\ \sigma_{\Pi}(x) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Pi}^2(x_i)}; & \xi_{\Pi}(x) &= \sum_{i=1}^n \xi_{\Pi}(x_i); \\ \sigma_{\text{М}}(x) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\text{М}}^2(x_i)}; & \xi_{\text{М}}(x) &= \sum_{i=1}^n \xi_{\text{М}}(x_i); \\ \sigma_{\text{Д}}(x) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\text{Д}}^2(x_i)}; & \xi_{\text{Д}}(x) &= \sum_{i=1}^n \xi_{\text{Д}}(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Очевидно следующее:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma_r^2(x) + \sigma_n^2(x) + \sigma_m^2(x) + \sigma_d^2(x)}. \quad (131)$$

Формула (131) является основной при решении прямых и обратных задач по расчету точности замыкающего звена размерной цепи или ее составляющих звеньев.

В коррелированной размерной цепи случайные ошибки составляющих звеньев находятся в корреляционной связи. Тогда стандарт замыкающего звена будет равен:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2(x_i) + 2 \sum_{i \neq j} \sigma(x_i) \sigma(x_j) r(x_i, x_j)}. \quad (132)$$

Приведенный в этой формуле коэффициент корреляции $r(x_i, x_j)$ определяют статистическими исследованиями или на основании теоретических соображений. В последнем случае предполагается, что случайные ошибки двух звеньев x_i и x_j включают в себя ряд общих элементарных ошибок, например:

$$\left. \begin{aligned} u(x_i) &= \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k + v_1 + v_2 + \dots + v_l; \\ u(x_j) &= \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k + w_1 + w_2 + \dots + w_g. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Если роль каждой элементарной ошибки примерно одинакова, то

$$r(x_i, x_j) = \sqrt{\frac{k}{k+l} \frac{k}{k+g}} = \frac{k}{\sqrt{(k+l)(k+g)}}. \quad (134)$$

Например, если $k = 1$, $l = 1$ и $g = 1$, то $r(x_i, x_j) = 0,5$. Случайные ошибки звеньев могут быть коррелированы с точки зрения выполнения всех операций, связанных с возведением здания или сооружения. Тогда формула (131) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma(X) = & \sqrt{\sigma_r^2(x) + \sigma_n^2(x) + \sigma_m^2(x) + \sigma_d^2(x) + \dots \rightarrow} \\ \rightarrow \dots & + 2r_{r,n} \sigma_r(x) \sigma_n(x) + 2r_{r,m} \sigma_r(x) \sigma_m(x) + 2r_{r,d} \sigma_r(x) \times \\ \rightarrow \dots & \times \sigma_d(x) + 2r_{n,m} \sigma_n(x) \sigma_m(x) + 2r_{n,d} \sigma_n(x) \sigma_d(x) + \\ \rightarrow \dots & + 2r_{m,d} \sigma_m(x) \sigma_d(x). \end{aligned} \quad (135)$$

Примем, что в формуле (131) $\sigma_r(x) = \sigma_0(x)$; $\sigma_{II}(x) = \sigma_0(x)\sqrt{2}$; $\sigma_M(x) = \sigma_0(x)\sqrt{3}$; $\sigma_d(x) = \sigma_0(x)\sqrt{4} = 2\sigma_0(x)$.
Тогда

$$\sigma(X) = \sigma_0(x) \sqrt{1+2+3+4+2+2+2+4+4+6} = \sigma_0(x) \sqrt{30} = 5,5 \sigma_0(x). \quad (136)$$

При тех же значениях $\sigma_r(x)$; $\sigma_{II}(x)$; $\sigma_M(x)$; $\sigma_d(x)$ по формуле (131) получим:

$$\sigma(X) = \sigma_0(x) \sqrt{1+2+3+4} = \sigma_0(x) \sqrt{10} = 3,2 \sigma_0(x). \quad (137)$$

Следовательно, учет корреляционной связи имеет существенное значение при расчете размерной цепи. Конечно, рассмотренная математическая модель коррелированной размерной цепи имеет примерный характер и может быть использована только для приближенного расчета.

Пусть $\sigma_r = \sigma$. Тогда $\sigma_{II} = k_1\sigma$, $\sigma_M = k_2\sigma$ и $\sigma_d = k_3\sigma$. Значения коэффициентов перехода k_1 , k_2 и k_3 от стандартов σ_{II} , σ_M и σ_d к стандарту σ можно установить путем математической обработки результатов экспериментальных или производственных измерений либо на основе логического сопоставления определяемых величин.

При $\xi = \sigma$ формулы (129) преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_r &= \sigma(t+1); \Delta_{II} = k_1 \sigma(t+1); \\ \Delta_M &= k_2 \sigma(t+1); \Delta_d = k_3 \sigma(t+1). \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Выбирается следующий допуск зазора между горизонтальными и вертикальными конструкциями с учетом погрешностей Δ_r , Δ_{II} , Δ_M , Δ_d :

$$\Delta_0 = \sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_{II}^2 + \Delta_M^2 + \Delta_d^2}. \quad (139)$$

Подставляя значения допусков на составляющие из (138) в (139), после некоторых преобразований получим:

$$\Delta_0 = \sigma(t+1) \sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}. \quad (140)$$

При заданном значении Δ_0 получим:

$$\sigma = \frac{\Delta_0}{(t+1) \sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}}. \quad (141)$$

Используя значение стандарта σ , по формулам (138) определим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Gamma} &= \frac{\Delta_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}; & \Delta_{\Pi} &= \frac{k_1 \Delta_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}; \\ \Delta_{\text{м}} &= \frac{k_2 \Delta_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}; & \Delta_{\text{д}} &= \frac{k_3 \Delta_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

В зависимости от принятой вероятности P коэффициент t принимается по табл. 2 [2]. Например, для наиболее распространенного случая ($t = 2$ при $P = 0,95$) формулы (142) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Gamma} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}; & \Delta_{\Pi} &= \frac{k_1 2\sigma_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}; \\ \Delta_{\text{м}} &= \frac{k_2 2\sigma_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}; & \Delta_{\text{д}} &= \frac{k_3 2\sigma_0}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Обозначив величину $\frac{1}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2+k_3^2}} = \gamma$,

из (143) получим более упрощенные формулы:

$$\Delta_{\Gamma} = \gamma \Delta_0; \quad \Delta_{\Pi} = \gamma k_1 \Delta_0; \quad \Delta_{\text{м}} = \gamma k_2 \Delta_0; \quad \Delta_{\text{д}} = \gamma k_3 \Delta_0. \quad (144)$$

15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ ОШИБОК В СИСТЕМЕ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

В производственных условиях принцип равного влияния ошибок часто нарушается в силу изменения технологии производственных процессов, методики выполнения работ, деформации оборудования и приспособлений, влияния внешних условий и т. д. Например, анализ результатов измерения вертикальности осей колонн, устанавливаемых в проектное положение, показывает, что их наибольшие отклонения в многоэтажных зданиях появляются в нижней части здания, несколько меньшие — в верхней и наименьшие — в средней части. Это объясняется тем, что при возведении первых этажей отрабатывается технология монтажа; при возведении средней части здания, когда технология отработана и учтены недостатки, допущенные в нижних ярусах, точность повышается. Снижение точности при возведении верхних этажей объясняется трудностями работы на большой высоте.

Многочисленные исследования, проведенные в ЦНИИЭП жилища, ЦНИИЭП учебных заведений, ЦНИИОМТП и ряде других институтов, показывают, что величина ошибки изготовления строительных конструкций зависит от числа оборотов n формующего оборудования и периода T его эксплуатации до очередного капитального ремонта, т. е. изменяется по следующей закономерности:

$$m_{\pi} = \varphi(n, T). \quad (145)$$

Однако в настоящее время нет конкретного математического выражения этой зависимости.

Крупные здания и сооружения возводятся в течение длительного срока. Поэтому нет оснований считать, что конструкции, поступившие на монтаж, например, десятого этажа, будут иметь ошибки того же порядка, что и конструкции для первого этажа, т. е. $m_{\pi}^{10} \neq m_{\pi}^1$.

Величина ошибок геодезического построения разбивочных осей $m_{г.п}$ на исходном горизонте, передачи осей на последующие ярусы также непостоянна в отдельных частях здания и изменяется в различных пределах.

Изменения условий окружающей среды (резкие перепады температуры воздуха, неравномерность ветровых нагрузок) и гидрологических условий грунтов в разных частях здания или сооружения оказывают неравномерное воздействие на изменения положения конструкций. Об этом свидетельствуют результаты анализа, приведенные в разделе 24 главы VIII.

Таким образом, неравномерность влияния составляющих производственных и внешних факторов затрудняет предрасчет точности геодезических измерений классическими методами.

В связи с этим для установления оптимального соотношения ошибок геодезического построения $m_{г.п}$, деформационных воздействий $m_{д.в}$, строительно-монтажных работ $m_{с.м}$ в системе размерных цепей целесообразно использовать вероятностный метод, суть которого заключается в следующем [18].

Предположим, что при возведении участка K здания (этаж, захватка и т. д.) какая-либо ошибка ($m_{г.п}$, $m_{д.в}$ или $m_{с.м}^*$) получила значение m_i' ; на участке $(K + 1)$ эта же ошибка принимает значение m_i'' и т. д. Распростра-

* Сюда входят ошибки изготовления и монтажа конструкций.

няя это положение на все три вида ошибок ($m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$, $m_{с.м.}$) и пользуясь специальной терминологией, будем говорить, что после участка К система ошибок ($m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$, $m_{с.м.}$) находится в j -м состоянии, если на этом участке наступило случайное событие E_j .

Пусть P_{ij} обозначает условную вероятность того, что после участка К система ошибок окажется в j -м состоянии, если после участка (К — 1) она находилась в i -м состоянии.

Таким образом, вероятность P_{ij} перехода в определенное состояние зависит только от того, в каком состоянии находилась система ошибок непосредственно перед данным участком. Однако P_{ij} не зависит от того, в каком состоянии находилась система ранее. Будем предполагать, что P_{ij} не зависит от К.

Систему случайных событий $E_1, E_2, \dots, E_n$ вместе с соответствующими им вероятностями $P_1, P_2, \dots, P_n$ называют однородной цепью Маркова.

Вероятности P_{ij} удобно записывать в виде переходной матрицы: $g \times n$. Элементы этой матрицы, т. е. вероятности P_{ij} , называемые переходными вероятностями, выражаются следующей матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n} \\ P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n} \\ \vdots \\ P_{g1}, P_{g2}, \dots, P_{gn} \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Диагональные элементы матрицы P_{ij} — вероятность того, что после участка К система останется в том же i -м состоянии, в каком она находилась после участка (К — 1). Если $P_{ij} = 0$, следовательно, случайное событие, состоящее в непосредственном переходе системы из i -го состояния в j -е состояние, невозможно. Если же $P_{ij} = 1$, это свидетельствует о том, что из i -го состояния система после следующего участка перейдет в j -е состояние.

Поскольку после участка К система может остаться в том же i -м состоянии или же перейти в какое-либо из остальных ($n - 1$) состояний, то для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad (147)$$

т. е. сумма элементов каждой строки матрицы (146) равна 1.

Для дальнейших рассуждений зададим исходное условие в виде уравнения

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1. \quad (148)$$

Тогда распределение ошибок $m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$, $m_{с.м.}$ на участке $(K+1)$ можно представить следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 P_{11} + \alpha_2 P_{21} + \alpha_3 P_{31}; \\ \alpha_2 &= \alpha_1 P_{12} + \alpha_2 P_{22} + \alpha_3 P_{32}; \\ \alpha_3 &= \alpha_1 P_{13} + \alpha_2 P_{23} + \alpha_3 P_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Оценка переходных матриц (148) имеет большое практическое значение, так как она позволяет уточнить методику предрасчета точности выполнения геодезических измерений в отдельных частях здания или сооружения.

Пусть экспериментальным путем установлено, что вероятности перехода составляющих ошибок $m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$ и $m_{с.м.}$ выражаются матрицей.

Рассматриваемый участок

$$\begin{array}{c} \text{Г} \quad \text{Д} \quad \text{С} \\ \text{Преды-} \\ \text{дущий} \\ \text{участок} \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} \text{Г} & 0 & 1 & 0 \\ \text{Д} & 0 & 0,5 & 0,5 \\ \text{С} & 0,3 & 0 & 0,7 \end{array} \right\| = P, \quad (150)$$

где Γ , Δ и Σ обозначают соответственно погрешности $m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$, $m_{с.м.}$.

В матрице (150) сумма вероятностей по каждой строке равна единице.

Из последней строки матрицы (150) следует, что ошибки могут перейти из состояния Σ в состояние Γ с вероятностью 0,3, а обратный переход осуществляется с вероятностью 0,7. Согласно матрице (150), условия равного влияния (149) задаются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 0,3\alpha_3; \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 0,5\alpha_3; \\ \alpha_3 &= 0,5\alpha_2 + 0,7\alpha_3. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Из уравнений (151) следует, что рассматриваемые ошибки для начального участка возводимого здания или сооружения будут составлять следующие части от общей ошибки: $m_{г.п.} = 0,17 m_0$, $m_{д.в.} = 0,33 m_0$ и $m_{с.м.} = 0,5 m_0$.

Рассмотрим пример расчета точности с использованием матрицы (150). Замыкающим звеном основного расчетного участка многоэтажного промышленного здания в плоскости поперечных разбивочных осей является зазор между закладными деталями ригеля и колонны. Точность выполнения проектного значения замыкающего звена C_p определяется по формуле (221), составляющими которой являются три группы ошибок: $m_{д.г} = m_{г.п}$; $m_{с.к} + m_{в.к} + m_{шк} + m_{д.р} + m_{з.к} = m_{с.м}$ и $m_{тр} + m_{н.в} = m_{д.в}$. Как видно из рис. 12, таких расчетных участков по высоте здания может быть несколько (для промышленных зданий — до десяти).

Выполненные нами исследования показали, что при замыкании колонн с ригелем на первом этаже промышленного многоэтажного здания ошибки геодезического построения разбивочных осей ($m_{г.п}$) составили 7%, ошибки из-за деформационных воздействий ($m_{д.в}$) — 10% и ошибки строительно-монтажных работ ($m_{с.м}$) — 83% общей средней квадратической ошибки размера зазора C_p .

Тогда, используя матрицу переходных вероятностей, получим:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Gamma \quad D \quad C \\ \Gamma \left\| \begin{array}{ccc} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 83 & 0,3 & 0 & 0,7 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 24,9 & 0 & 58,1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 24,9 & 0 & 24,9 & 0 \\ 12,0 & 0 & 6,0 & 6,0 \\ 63,1 & 18,9 & 0 & 44,2 \end{array} \right\| = \\
 \left\| \begin{array}{ccc} 24,9 & 12 & 63,1 \\ 18,9 & 30,9 & 50,2 \end{array} \right\|
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{I этаж} \qquad \qquad \text{II этаж} \qquad \qquad \text{III этаж} \\
 = \left\| \begin{array}{ccc} 18,9 & 0 & 18,9 & 0 \\ 30,9 & 0 & 15,4 & 15,4 \\ 50,2 & 15,1 & 0 & 35,1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 15,1 & 0 & 15,1 & 0 \\ 34,3 & 0 & 17,2 & 17,2 \\ 50,5 & 15,2 & 0 & 35,4 \end{array} \right\| = \\
 \left\| \begin{array}{ccc} 15,1 & 34,3 & 50,5 \\ 15,2 & 32,3 & 52,6 \end{array} \right\|
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{IV этаж} \qquad \qquad \text{V этаж} \\
 = \left\| \begin{array}{ccc} 15,2 & 0 & 15,2 & 0 \\ 32,3 & 0 & 16,2 & 16,2 \\ 52,6 & 15,8 & 0 & 36,8 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 15,8 & 0 & 15,8 & 0 \\ 31,4 & 0 & 15,7 & 15,7 \\ 53,0 & 15,9 & 0 & 37,1 \end{array} \right\| = \\
 \left\| \begin{array}{ccc} 15,8 & 31,4 & 53,0 \\ 15,9 & 31,5 & 52,8 \end{array} \right\|
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{VI этаж} \qquad \qquad \text{VII этаж} \end{array}
 \end{array}$$

$$[\alpha P]_{VI}^{\Gamma} = [\alpha P]_{VII}^{\Gamma}; \quad [\alpha P]_{VI}^D = [\alpha P]_{VII}^D; \quad [\alpha P]_{VI}^C = [\alpha P]_{VII}^C.$$

Расчет точности с помощью матрицы (150) заключается в следующем. Справа от матрицы в столбец выписываются процентные доли ошибок m_i от общей ошибки m_0 . Последовательно перемножая эти числа (7, 10, 83) на соответствующие вероятности по каждой строке матрицы, получаем произведения αP . Суммируя эти произведения по каждому столбцу, получаем новое процентное соотношение ошибок $m_{г.п.}^{II}$, $m_{д.в.}^{II}$, $m_{с.м.}^{II}$ на втором этаже — 24,9; 12; 63,1. Далее повторяем процесс перемножения новых значений $[\alpha P]^i$ по каждой строке на те же вероятности матрицы (150) и получаем для третьего этажа $m_{г.п.}^{III} = 18,9\%$; $m_{д.в.}^{III} = 30,9\%$; $m_{с.м.}^{III} = 50,2\%$. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто равенство $[\alpha P]_k^i = [\alpha P]_{k+1}^i$ для каждой i -й группы ошибок между смежными этажами здания.

Сравнивая суммарные строки последних двух матриц в нашем примере, видим, что лишь на седьмом этаже достигнуто равенство ошибок $m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$, $m_{с.м.}$ внутри каждой группы. Для замыкающего звена C_p^{VII} эти ошибки составили: $m_{г.п.} = 0,16 m(C_p^{VII})$; $m_{д.в.} = 0,32 m(C_p^{VII})$; $m_{с.м.} = 0,53 m(C_p^{VII})$.

Из рассмотренного следует важный вывод. Предрассчитав наиболее выгодное соотношение ошибок $m_{г.п.}$, $m_{д.в.}$, $m_{с.м.}$ для начальной стадии возведения каркаса (исходного участка), это соотношение можно сохранить в любой части здания или сооружения. При этом каждая из ошибок внутри своей группы (G , D или C) при переходе от участка к участку изменяет значение, достигая равенства в определенном месте. По мере наращивания конструкций при возведении зданий и сооружений можно вносить соответствующие коррективы в методику выполнения геодезических измерений, используя матрицу переходных вероятностей. Такие коррективы должны вноситься на основе анализа результатов измерений, выполненных на предыдущих участках здания или сооружения.

16. РАСЧЕТ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И СТРОИТЕЛЬНЫХ ДОПУСКОВ НА ОСНОВЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Стандартами, строительными нормами и правилами и техническими условиями регламентируются номинальные и предельно допустимые значения параметров разбивочных элементов проекта и строительных конструкций.

Предельно допустимые значения параметров строительных конструкций или разбивочных элементов проекта здания или сооружения должны быть определены на основе теоретических расчетов точности сопряжения конструкций и разбивочных элементов в узлах здания, куда они входят в качестве составляющих звеньев общей размерной цепи [1]. При отсутствии таких требований допустимые значения можно определить на основе вероятностно-статистического анализа результатов геодезических измерений в производственных условиях, т. е. рассеяния, вызванного естественным разбросом действительных размеров конструктивных, технологических и геодезических параметров. Таким образом, во всех случаях ширина поля допуска на строительно-разбивочные параметры устанавливается в соответствии с технологическими (производственными, инструментальными и т. д.) возможностями, определяющими изменчивость этого параметра (при изготовлении строительных элементов, монтаже их и разбивочных работах).

Номинальные (проектные) и предельные значения устанавливаются на основе результатов геодезических измерений, выполненных с применением новых типов конструкций, методов строительства, методов геодезической разбивки, приборов, приспособлений и т. д. При внедрении новых типов конструкций, методов производства работ и геодезических инструментов проводятся измерения, представляющие собой выборку из генеральной совокупности — всей будущей строительной продукции. По выборочным данным, содержащим ограниченный объем информации, можно установить лишь доверительный интервал (раздел 9, глава III), внутри которого заключены действительные значения исследуемой величины с заданной вероятностью попадания внутрь этого интервала.

Отсюда возникает следующая задача: по рассчитанным границам доверительных интервалов строительно-разбивочных параметров определить такие значения их номиналов и предельно допускаемых значений, чтобы соответствующие генеральные характеристики (среднее значение и доля годной продукции) не выходили за установленные пределы с достаточно высокой вероятностью.

Для определения среднего значения можно предположить, что распределение исследуемой случайной величины подчиняется нормальному закону. Действительно, проведенный нами и другими авторами вероятностно-

статистический анализ погрешностей геодезических разбивочных и строительно-монтажных работ показывает, что все совокупности характеристик этих параметров являются нормально распределенными либо в точности, либо с достаточной степенью приближения. Используя это свойство технических характеристик, легко определить такую величину среднего значения исследуемой характеристики, выше или ниже которой ее действительное среднее значение (при условии сохранения технологического уровня производства разбивочных и строительно-монтажных работ) лежать не будет, т. е. верхнюю или нижнюю границу доверительного интервала среднего значения.

Таким образом, при установлении номинальных величин геометрических параметров зданий и сооружений по выборочным характеристикам из небольшого объема измерений необходимо в качестве номинальной величины параметра принимать одну из границ доверительного интервала — верхнюю или нижнюю (в зависимости от физической природы параметра). Эта граница должна быть определена с достаточно высокой достоверностью, чтобы ее нарушение в процессе производства было маловероятно. По мере накопления статистического материала установленные значения номинальных величин геометрических параметров должны пересматриваться даже при сохранении прежнего технологического уровня, так как на основе обработки большого количества информации о распределении исследуемого параметра величина доверительного интервала может быть уточнена; при этом он, как правило, сужается.

Ответственной и сложной задачей является установление предельных значений, или границ допусков на различные строительно-разбивочные параметры по выборочным данным результатов геодезических измерений. Эти границы называют также толерантными пределами [14]. Поскольку результаты геодезических измерений рассматриваются как выборка из общей совокупности, при установлении границ допусков необходимо добиться, чтобы внутри поля допуска укладывалась достаточно большая доля строительно-разбивочных элементов, являющаяся генеральной совокупностью, распределенной нормально. Если потребовать, чтобы внутри поля допуска укладывалось не менее $100(1 - P)\%$ всех элементов, то, например, верхняя граница одностороннего допуска должна отстоять от генерального среднего на расстояние σu_{1-P} . Однако

по выборочным данным можно оценить лишь доверительный интервал σ с более или менее высокой достоверностью γ .

Поэтому для того чтобы внутри выборочных границ допуска укладывалось не менее $100(1 - P)\%$ элементов, необходимо вместо σ применить верхнюю границу его доверительного интервала. Кроме того, при небольшом объеме выборки следует учесть и возможные колебания выборочного среднего значения относительно генерального значения.

К сожалению, до сих пор нет достаточно точных методов для расчета границ допусков. Более того, нет даже единого подхода к расчету для односторонних и двусторонних границ.

Приближенное решение для односторонних границ может быть получено, если предположить, что величина

$$z = \bar{x} + t_1 m \quad (152)$$

распределена нормально с параметрами

$$\bar{z} = \mu + t_1 \sigma \quad (153)$$

и

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{n} + t_1^2 \frac{\sigma^2}{2(n-1)}. \quad (154)$$

Для того чтобы обеспечить попадание внутрь допуска не менее $100(1 - P)\%$ элементов генеральной совокупности (верхняя кривая плотности распределения), необходимо границу допуска L (рис. 8) отнести от генерального среднего μ на величину $u_{1-P}\sigma$. С другой стороны, для того чтобы величина z , определенная по выборочным данным (гистограмма в средней части рис. 8), накрыла нужный интервал с вероятностью γ , необходимо отнести границу допуска от ее среднего значения $\bar{z}$ на величину $u_\gamma \sigma_z$. Таким образом, получим два уравнения:

$$L = \mu + u_{1-P} \sigma; \quad (155)$$

$$L = \bar{z} + u_\gamma \sigma_z. \quad (156)$$

Подставив в формулу (156) значение $\bar{z}$ и σ_z из выражений (153) и (154) и приравняв правые части уравнений (155) и (156), получим:

$$u_{1-P} = t_1 + u_\gamma \sqrt{\frac{1}{n} + t_1^2 \frac{1}{2(n-1)}}. \quad (157)$$

Решив уравнение (157) относительно t_1 , окончательно получим следующую формулу для коэффициента удаления границ одностороннего допуска:

$$t_1 = \frac{2(n-1)}{2(n-1) + u_y^2} \times \left(u_{1-P} + \frac{1,16}{\sqrt{2(n-1)}} \sqrt{u_{1-P}^2 + \frac{2(n-1) - u_y^2}{n}} \right). \quad (158)$$

Определив по данным геодезических измерений $\bar{x}$ и m и установив границу допуска по формуле

$$L = \bar{x} + t_1 m, \quad (159)$$

можно ожидать, что в производственных условиях внутри поля допуска будет не менее 100 (1 - P)% всех элементов с вероятностью P.

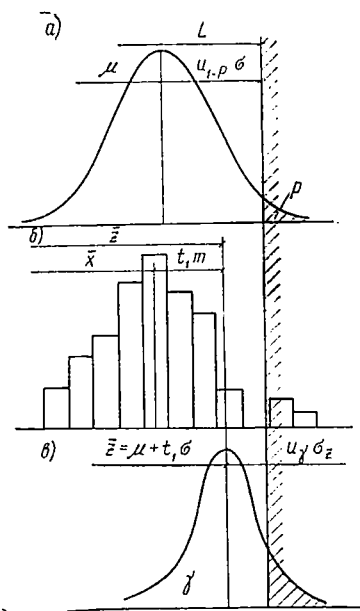


Рис. 8. Расчетная схема для определения границ одностороннего допуска

а — кривая плотности вероятностей распределения точностной характеристики с параметрами μ и σ ; б — гистограмма выборочного распределения той же характеристики с параметрами $\bar{x}$ и m ; в — кривая плотности вероятностей распределения величины z (152) с параметрами $\bar{z}$ (153) и σ_z (154)

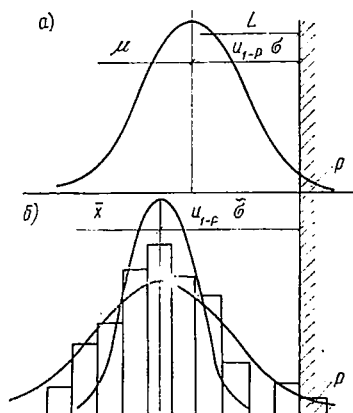


Рис. 9. Расчетная схема для определения границ допуска

а — то же, что на рис. 8; б — гистограмма выборочного распределения той же характеристики и граничные кривые плотности вероятностей, соответствующие L_B и L_H (163)

Для доверительной вероятности 0,95 формула (158) принимает следующий вид:

$$t_1 = \frac{n-1}{n-2,35} \left(u_{1-P} + \frac{1,16}{\sqrt{n-1}} \sqrt{u_{1-P}^2 + 2 - \frac{4,7}{n}} \right). \quad (160)$$

Целесообразно найти приближенный метод расчета границ для одностороннего и двустороннего допусков. Не делая предположения, что выборочная дисперсия распределена нормально, для определения коэффициента удаления границ допуска необходимо вместо выборочной дисперсии при расчете использовать верхнюю границу ее доверительного интервала, найденную с доверительной вероятностью γ по формуле (157). Расчетная схема для этого случая приведена на рис. 9, где на гистограмму выборочного распределения наложены граничные кривые плотности вероятности, соответствующие наибольшему и наименьшему значениям дисперсий. Однако при этом еще нет гарантии, что поле допуска покроет нужную долю всех элементов с вероятностью γ , так как не учтен разброс среднего значения. Эта величина может быть приблизительно учтена, если принять общую дисперсию в виде суммы генеральной дисперсии и дисперсии среднего значения по формуле (3). Тогда получим новое значение дисперсии

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 + \frac{\sigma^4}{n}. \quad (161)$$

Подставив значение откорректированной дисперсии из формулы (161) вместо m^2 в выражение для верхней границы одностороннего доверительного интервала (54) и установив границу допуска на расстоянии

$$L_B = \bar{x} + u_{1-P} \sigma_0 = \bar{x} + u_{1-P} m \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\gamma}^2}} \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \quad (162)$$

можно утверждать, что внутри поля допуска содержится не менее $100(1-P)\%$ всех элементов с доверительной вероятностью γ .

Аналогичным образом можно получить выражения для нижней границы одностороннего допуска:

$$L_H = \bar{x} - u_{1-P} m \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\gamma}^2}} \sqrt{\frac{n+1}{n}}. \quad (163)$$

и границ двустороннего допуска:

$$L = \bar{x} \pm u_{1-\frac{P}{2}} m \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\gamma}^2}} \sqrt{\frac{n+1}{n}}. \quad (164)$$

Расчеты можно существенно упростить, если заранее табулировать величину

$$t_0 = \frac{L - \bar{x}}{m} = u_{1-P} \sqrt{\frac{n^2-1}{n\chi_{1-\gamma}^2}}. \quad (165)$$

Для больших значений n , например для $n > 30$, формулу (165) можно упростить, если, во-первых, пренебречь величиной, стоящей под корнем, которая мала по сравнению с единицей, и, во-вторых, заменить χ^2 его приближением с помощью нормального распределения:

$$\chi_{1-\gamma}^2 = 0,5 (\sqrt{2n-3} + u_{1-\gamma})^2. \quad (166)$$

Тогда значение t_0 выразится так:

$$t_0 = u_{1-P} \frac{\sqrt{2n-2}}{u_{1-\gamma} + \sqrt{2n-3}}. \quad (167)$$

Из выражений для границ допусков следует, что величина запаса допуска, определенного по выборочным данным, увеличивается с уменьшением объема выборки, по которой эта граница допуска установлена. Чтобы наличие этого запаса не могло вызвать в производстве нежелательных последствий, необходимо в технических условиях и стандартах устанавливать границы допусков по достаточно большим выборкам и, кроме того, пересматривать эти границы на основании накопленных производственных статистических данных.

В качестве примера определим границы допуска для длины разбивочной оси при следующих условиях: требуется, чтобы за пределы допуска СНиП выходило не более 3% вынесенных в натуру осей данного размера для зданий такого типа; среднее значение и дисперсия установлены на основании контрольных измерений вынесенных в натуру 25 осей: среднее значение по выборочным данным $\bar{x} = 12\,009$ мм; средняя квадратическая ошибка разбивки осей $\tilde{m} = \pm 2,0$ мм.

По формуле (165) определяем: $t_0 = 1,881 \sqrt{\frac{25^2-1}{25 \cdot 13,8}} = 2,52$. Тогда граница допуска $L = 12\,009 + 2,52 \cdot 2,0 = 12\,014,04$ мм.

Если бы те же данные были получены на основании измерений 250 разбивочных осей, то результаты были бы несколько иными: $t_0 = 2,03$; $L = 12013,06$ мм.

В заключение необходимо подчеркнуть, что при установлении номинальных (проектных) и предельных значений строительно-разбивочных параметров по дан-

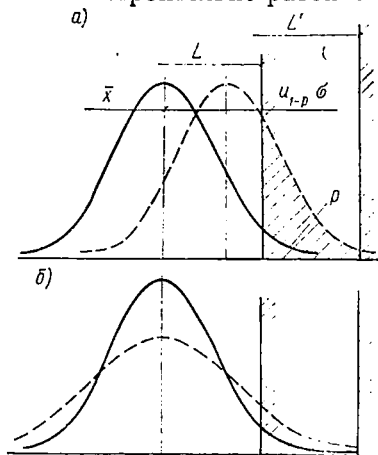


Рис. 10. Изменение доли брака в выборке измерений в зависимости от расположения границ допуска
 а — из-за сдвига среднего значения точностной характеристики; б — из-за увеличения дисперсии точностной характеристики

ным выборочных измерений поля допусков должны располагаться так, чтобы в них укладывалась достаточно большая доля элементов проекта здания или сооружения с высокой вероятностью. С другой стороны, пределы, регламентированные СНиП, не должны отстоять далеко от границ естественного рассеивания параметров, иначе случайное или намеренное ухудшение качества останется незамеченным при контроле (рис. 10). Если граница допуска будет очень далеко, то ни изменение среднего значения, ни увеличение разброса параметров не вызо-

вут существенного изменения доли брака (вернее, он не проявится, хотя качество ухудшится). Поэтому следует приблизить границы допуска; тогда часть контролируемых параметров окажется вне границ, а доля брака при ухудшении качества будет резко меняться. Удобный диапазон значений доли брака лежит в пределах 3—15%.

Для разработки СНиП и других нормативных документов рассмотренная методика нуждается в некотором дополнении. При разработке нормативов точности приходится сталкиваться с фактом различных технического и технологического уровней строительного производства. В том случае, если для каждого из них имеется статистический материал за достаточно большой промежуток времени, определение нормативов не вызывает затруднений.

Принимая во внимание естественный разброс параметров, а также систематические изменения, вызываемые в

некоторых случаях колебаниями некоторых параметров технологических процессов, можно установить такое значение границы допуска, нарушение которого при стабильном производстве будет маловероятно. В то же время установленный таким образом норматив будет различным для разных производств, так как на качество возведения зданий и сооружений влияет большое число систематических причин. Эти систематические различия должны быть каким-то образом учтены при назначении общего норматива. Если принять в качестве этого норматива высшее достижение в геодезическом или строительном производстве, то ряд организаций окажется не в состоянии его выполнить. С другой стороны, заниженный норматив, ориентированный на худшие условия, не будет стимулировать повышения качества строительства остальными организациями.

Поэтому при назначении общесоюзных нормативов точности следует ориентироваться на общий объем геодезических или строительных производств, устанавливая нормы точности так, чтобы внутри допуска входила достаточно большая доля всех смонтированных конструкций или геодезических элементов. С общегосударственной точки зрения это естественный подход. Тогда в качестве общего норматива следует принимать среднее взвешенное значение частных характеристик точности отдельных производств, где весами являются объемы производства:

$$L_0 = \frac{\sum L_i N_i}{\sum N_i}, \quad (168)$$

где N_i — объем производства в i -й организации;

L_i — норматив точности для данного производства.

ГЛАВА V. РАСЧЕТ ВОЗМОЖНОЙ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

При геодезических построениях в процессе возведения зданий и сооружений выполняются следующие виды измерений:

линейные измерения — вынос в натуру проектных значений отрезков разбивочных осей, определение действи-

тельных размеров сборных элементов каркаса здания или сооружения, расстояний между осями этих элементов после их установки в проектное положение и габаритов зданий или сооружений;

угловые измерения — вынос в натуру основных осей здания или сооружения от пунктов разбивочного обоснования, определение местоположения возведенных частей зданий и сооружений и т. д.;

высотные измерения — вынос проектных значений отметок опорных плоскостей при их монтаже от пунктов высотного разбивочного обоснования и определение отметок возведенных конструкций и элементов зданий и сооружений;

вертикальные измерения — передача точек разбивочных осей на монтажные горизонты, выверка вертикальности высотных сооружений.

Каждый из этих видов измерений сопровождается рядом элементарных случайных и систематических ошибок. Ниже рассматривается методика определения суммарных ошибок (по отдельным источникам их) при выполнении указанных видов измерений. Определение интересующей нас суммарной ошибки с учетом методов и средств измерений на основе существующих в геодезии формул [11] — это один из возможных принципов нормирования точности геодезических построений при возведении зданий и сооружений.

ЛИНЕЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

При производстве строительно-монтажных работ оси здания или сооружения выносят в натуру в основном с помощью непосредственных линейных измерений. Для этого в массовом строительстве применяют стальные рулетки. Этот же прибор служит для контроля геометрических параметров конструкций.

На точность линейных измерений влияют ошибки, возникающие в результате следующих причин: компарирование мерного прибора (δ_1), вешение мерного прибора (δ_2), влияние ветра (δ_3), натяжение мерного прибора (δ_4), наклон мерного прибора (δ_5) и температура мерного прибора (δ_6).

Рассмотрим влияние каждой ошибки в отдельности при измерении линии стальной рулеткой по плоскости и на весу.

Ошибка из-за компарирования (δ_1) носит случайный характер по знаку и величине, на результаты измерений она влияет как систематическая.

На строительной площадке применяются стальные рулетки, компарированные путем сравнения метровых интервалов с контрольным метром (женевской линейкой).

Ошибка компарирования 20-м рулетки при двукратном сравнении составит:

$$\delta_1 = \frac{0,2 \text{ мм} \sqrt{2} \sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \pm 0,9 \text{ мм.} \quad (169)$$

Ошибка из-за вешения рулетки (δ_2) по величине имеет случайный характер, а по знаку — систематический, т. е. она всегда увеличивает длину измеряемой линии. Эта ошибка вычисляется по формуле

$$\delta_2 \approx \frac{2\varepsilon^2}{l_0}, \quad (170)$$

где ε — отклонение концов мерного прибора от створа;
 l_0 — номинальная длина рулетки.

Если отклонение концов 20-м рулетки от створа (ε) при ее вешении принять равным 30 мм, то возможная ошибка в длине составит:

$$\delta_2 \approx \frac{2 \cdot 30^2}{20 \ 000} \approx \pm 0,1 \text{ мм.}$$

Вешение на исходном и монтажном горизонтах здания с точностью 30 мм можно выполнить на глаз. Если длина большая или влияют другие неблагоприятные причины, то вешение следует осуществлять с помощью теодолита.

Ветер действует как дополнительный вес мерного прибора, укорачивая длину хорды рулетки. Ошибка из-за влияния этого фактора (δ_3) вычисляется по формуле

$$\delta_3 = \frac{Q^2 l_0}{24 F^2}, \quad (171)$$

где Q — сила ветра;

F — сила натяжения рулетки.

При скорости ветра $\approx 7 \text{ м/сек}$ $Q = 150 \text{ гс}$.

Если $F = 10 \text{ кг}$, то $\delta_3 \approx 0,2 \text{ мм}$.

Опыт показывает, что при скорости ветра более 7 м/сек для измерения линий не следует пользоваться рулетками.

При измерении линии на плоскости эта ошибка практически не оказывает влияния на измерение, но необходимо следить за тем, чтобы рулетка, лежащая на плоскости, не вибрировала под воздействием ветра.

Если при измерении рулеткой сила натяжения изменилась по сравнению с силой натяжения при компарировании ее на величину δF , то это вызовет ошибку:

$$\delta_4 = l_0 \delta F \left(\frac{\rho^2}{12 F^3} + \frac{1}{\omega E} \right), \quad (172)$$

где ρ — вес рулетки;

ω — площадь поперечного сечения полотна рулетки;

E — модуль упругости ($E_{\text{стали}} = 20\,000 \text{ кг/мм}^2$,

$E_{\text{пшвар}} = 16\,000 \text{ кг/мм}^2$).

Если при натяжении рулетки от руки примем $\delta F = \pm 2 \text{ кгс}$, то для 20-м рулетки $\delta_4 \approx \pm 2 \text{ мм}$.

При измерении рулеткой на плоскости ошибка из-за натяжения мерного прибора составит:

$$\delta_4 = \frac{l_0 \delta F}{\omega E} = \frac{20\,000 \cdot 2}{2 \cdot 20\,000} = \pm 1 \text{ мм.}$$

Ошибка в длине линии из-за превышения концов рулетки (δ_5) определяется по формуле

$$\delta_5 = \frac{(\delta h)^2}{2l_0}, \quad (173)$$

где δh — ошибка определения превышения концов рулетки.

Влияние этой ошибки незначительно, так как превышения определяются с ошибкой в несколько мм.

При измерении линии по железобетонному перекрытию или фундаментам, где изменение превышений на расстоянии $l = 20 \text{ м}$ не более $\pm 20 \text{ мм}$, получим:

$$\delta_5 = \frac{20^2}{2 \cdot 20\,000} = \pm 0,01 \text{ мм.}$$

Влияние ошибки из-за изменения температуры рулетки (δ_6) определяется по формуле

$$\delta_6 = \alpha_0 l_0 \delta t, \quad (174)$$

где α — температурный линейный коэффициент ($\alpha_{\text{стали}} = 12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_{\text{пшвар}} = 0,6 \cdot 10^{-6}$);

δt — ошибка определения температуры рулетки.

При измерении подвешенной стальной рулеткой ее температура приравнивается к температуре воздуха и измеряется с точностью $\pm 1^\circ \text{C}$. Тогда при $\alpha_{\text{ст}} = 12 \cdot 10^{-6}$ и $l = 20 \text{ м}$ $\delta_6 = \pm 0,24 \text{ мм}$.

При измерениях по железобетонной поверхности температуру стальной рулетки, подкладывая термометр под рулетку или вставляя его в специальный станок, определяют с точностью $\pm 3^\circ \text{C}$. Тогда $\delta_6 = \pm 0,72 \text{ мм}$.

Ошибка фиксирования (δ_7) миллиметровых делений рулетки зависит от способа закрепления точки в натуре и характеризуется величинами, приведенными в табл. 5.

Таблица 5

Таблица значений средних квадратических ошибок фиксации

Способ закрепления точки в натуре	$m_{\text{ф.}}$ мм
Прочерчивание скальпелем по металлической пластине	$\pm 0,3$
Насечка или керн на металлической пластине	0,5
Прочерчивание карандашом по гладкой поверхности бетона	0,5
То же, по грубой поверхности бетона	0,8
То же, по гладкой поверхности бетона с последующей откраской	1,0
То же, по грубой поверхности бетона с последующей откраской	1,2

Ошибка фиксирования двух концов мерного прибора равна:

$$m'_{\text{ф}} = m_{\text{ф}} \sqrt{2}. \quad (175)$$

При закреплении точки прочерчиванием карандашом по грубой поверхности бетона ($m_{\text{ф}} = \pm 0,8 \text{ мм}$) $m'_{\text{ф}} = \pm 0,8 \sqrt{2} = \pm 1,12 \text{ мм}$.

Полученные значения ошибок (без учета δ_6 и δ_7) на одно откладывание 20-м рулетки, выраженные в средних квадратических величинах, сведены в табл. 6.

Переходя к средним квадратическим ошибкам и учитывая, что ошибки δ_1 , δ_2 , δ_3 носят систематический характер и их действие может оказаться односторонним, получим суммарную среднюю квадратическую ошибку одного откладывания мерного прибора:

$$m_1 = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2 + m_7^2}. \quad (176)$$

Ошибки линейных измерений на одно откладывание
20-м рулетки

Источник ошибок Условия измерений	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
При измерении подвешенной рулеткой	0,9	0,1	0,2	2,0	0,24
При измерении рулеткой на плоскости	0,9	0,1	0	1,0	0,72

Учитывая, что при многократном откладывании заданного расстояния значение систематических ошибок увеличивается пропорционально числу откладываний рулетки n , а случайных — пропорционально $\sqrt{n}$, определяем среднюю квадратическую ошибку измерения линии при n откладываний:

$$m_n = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)^2 n^2 + (m_4^2 + m_5^2 + m_6^2 + m_7^2) n}. \quad (177)$$

Подставляя в эти формулы значения ошибок из табл. 5 и 6, получим следующие значения ошибок:

при измерении рулеткой на весу

$$m_1 = \sqrt{(0,9 + 0,1 + 0,2)^2 + 2^2 + 0,24^2 + 1,0^2} = \pm 2,6 \text{ мм};$$

при измерении на плоскости

$$m_1 = \sqrt{(0,9 + 0,1)^2 + 1,0^2 + 0,72^2 + 1,0^2} = \pm 1,90 \text{ мм}.$$

В табл. 7 приведены значения ошибок $m_{\text{л}}$, вычисленные по формуле (177) при $m_{\text{ф}} = \pm 1 \text{ мм}$.

При линейных измерениях длина линии не бывает кратной длине мерного прибора (в нашем случае 20 м) и приходится измерять отрезки короче 20 м (производить домеры). В этом случае при использовании формулы (177) следует учитывать, что влияние всех ошибок уменьшается пропорционально длине домера, кроме ошибки фиксирования δ_7 , которая входит полностью.

Значение ошибок линейных измерений

Длина линии, м	Количество откладываний мерного прибора, n	Результаты измерений рулеткой	
		подвесной $m_{\text{л}}^{\text{в}}$, мм	на плоскости $m_{\text{л}}^{\text{п}}$, мм
10	1	$\pm 1,6$	$\pm 1,4$
20	1	$\pm 2,6$	$\pm 1,9$
40	2	$\pm 3,2$	$\pm 2,4$
60	3	$\pm 3,6$	$\pm 2,8$
80	4	$\pm 4,0$	$\pm 3,1$
100	5	$\pm 4,3$	$\pm 3,3$

УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Вынос в натуру проектного значения угла осуществляется с помощью теодолита и визирных целей.

Точность построения проектного угла в натуре зависит от действия инструментальной ошибки $m_{\text{и}}$, ошибки из-за редукации $m_{\text{р}}$, ошибки из-за центрирования $m_{\text{ц}}$, ошибки фиксации $m_{\text{ф}}$.

Инструментальная ошибка определяется типом теодолита, применяемого при построении проектного угла, и характеризуется средней квадратической ошибкой измерения угла одним приемом $m_{\text{и}}''$. При построении угла n -приемами средняя квадратическая ошибка $M_{\text{и}}''$ вычисляется по формуле

$$M_{\text{и}}'' = \frac{m_{\text{и}}''}{\sqrt{n}}. \quad (178)$$

Инструментальная ошибка $m_{\text{и}}''$ вызывает поперечную ошибку $m_{\text{г}}$ положения точки. Величина этой ошибки вычисляется по формуле

$$m_{\text{г}} = \frac{S m_{\text{и}}''}{\rho''}, \quad (179)$$

где S — расстояние от инструмента до проектной точки. Значения ошибки $m_{\text{г}}$, вычисленные по формуле (179), приведены в табл. 8.

Т а б л и ц а 8

Значения средних квадратических ошибок m_g

Расстоя- ния S , м	Средние квадратические ошибки m_g для теодолитов, мм					
	Т-30 (ТОМ, ТТ-50)	Т-20	Т-15 (ТТ-5)	Т-10 (ТТ-4; ОТШ)	Т-5	Т-2
5	±0,8	±0,5	±0,4	±0,3	±0,2	±0,1
10	1,6	1,0	0,8	0,5	0,3	0,1
15	2,4	1,5	1,2	0,8	0,4	0,2
20	3,2	2,0	1,6	1,0	0,5	0,2
25	4,0	2,5	2,0	1,2	0,6	0,3
30	4,8	3,0	2,4	1,5	0,8	0,3
35	5,6	3,5	2,8	1,7	0,9	0,4
40	6,4	4,0	3,2	2,0	1,0	0,4
45	7,2	4,5	3,6	2,2	1,1	0,5

Примечание. Значения m_g для расстояний, не включенных в таблицу, получают методом интерполяции.

Ошибку в построении угла из-за редукции m_p вычисляют по формуле

$$m_p'' = \rho'' \frac{m_e}{S \sqrt{2}}, \quad (180)$$

где m_e — величина линейного элемента редукции (для визирных целей с оптическими отвесами $m_e = \pm \pm 0,5$ мм);

S — расстояние до точки, над которой установлена визирная цель.

Ошибку в построении угла из-за центрирования теодолита вычисляют по формуле

$$m_{\text{ц}}'' = \rho'' \frac{m_e}{\sqrt{2} S_1 S_2} C, \quad (181)$$

где m_e — линейный элемент ошибки центрирования;
 S_1 и S_2 — расстояния от вершины угла до точек визирования;

C — расстояние между концами сторон угла.

В большинстве случаев $C^2 = S_1^2 + S_2^2$ (угол прямой); поэтому при $S_1 = S_2$ получим уравнение

$$m_{\text{ц}}'' = \frac{\rho'' m_e}{S}, \quad (182)$$

где m_e — то же, что и в формуле (180).

Значения m''_p и $m''_ц$ при применении оптических отвесов для различных расстояний приведены в табл. 9.

Таблица 9

Значения средних квадратических
ошибок m''_p и $m''_ц$

Расстояние S, м	5	10	15	20	25
Значение ошибок					
m''_p	$\pm 14,3$	$\pm 7,2$	$\pm 4,8$	$\pm 3,6$	$\pm 2,8$
$m''_ц$	20,6	10,3	6,9	5,2	4,1

Продолжение табл. 9

Расстояние S, м	30	35	40	45	50	100
Значение ошибок						
m''_p	$\pm 2,4$	$\pm 2,0$	$\pm 1,8$	$\pm 1,6$	$\pm 1,4$	$\pm 0,7$
$m''_ц$	3,4	3,0	2,6	2,3	2,1	1,1

Ошибка фиксации $m_{\text{ф}}$ характеризуется теми же значениями, что и при линейных измерениях (см. табл. 5).

Средняя квадратическая ошибка построения проектного угла (без учета ошибок фиксации) вычисляется по формуле

$$m_{\beta}^2 = m_{\text{н}}^2 + m_p^2 + m_{\text{ц}}^2. \quad (183)$$

С учетом данных табл. 9 значения ошибки m_{β} приведены в табл. 10.

При построении угла n -приемами ошибка m_{β} определяется по формуле

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{m_{\text{н}}^2}{n} + m_p^2 + m_{\text{ц}}^2}, \quad (184)$$

где величины $m_{\text{н}}$, m_p , $m_{\text{ц}}$ принимаются по табл. 8 и 9.

При расчетах точности построения угла средняя квадратическая ошибка m_{β} может определяться как в угловой, так и в линейной мере.

Таблица 10

Значения средних квадратических ошибок m_β
при построении угла одним приемом
(без учета ошибки фиксации)

Расстояние S до проектной точки, м Тип теодолита	10	20	30	40	50	100
Т-30 (ТТ-50, ТОМ)	$\pm 32,8''$	$\pm 30,8''$	$\pm 30,0''$	$\pm 30,0''$	$\pm 30,0''$	$\pm 30,0''$
Т-20	24,0	21,0	20,0	20,0	20,0	20,0
Т-15 (ТТ-5)	19,5	16,3	15,6	15,6	15,1	15,1
Т-10 (ТТ-4, ОТШ)	16	12	11	10	10	10
Т-5	13	8	7	6	6	6
Т-2	13	7	5	4	3	3

ВЫСОТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Точность передачи отметок точек при геометрическом нивелировании с одной стоянки характеризуется в основном точностью визирования на рейку. Средняя квадратическая ошибка визирования m_v включает в себя главным образом ошибку приведения визирной оси в горизонтальное положение (m_v), ошибку отсчитывания по рейке (m_0), ошибку нанесения делений на рейке (m_d) и выражается формулой

$$m_v = \sqrt{m_v^2 + m_0^2 + m_d^2}. \quad (185)$$

Величина ошибки m_y , зависящая в основном от цены деления уровня (τ) и расстояния между нивелиром и рейкой (S), определяется по формуле

$$m_y = \pm m_{yp}'' S \frac{1}{\rho''}, \quad (186)$$

где m_{yp}'' — средняя квадратическая ошибка установки пузырька уровня в нуль-пункт.

Для контактного уровня у нивелира НВ-1 $m_{yp} = \pm 0,2 \sqrt{\tau}$. Тогда $m_y = \pm 0,2 \sqrt{\tau S \frac{1}{\rho''}}$.

Средняя квадратическая ошибка отсчета по рейке m_0 определяется с помощью формулы

$$m_0 = \pm \left(0,20 \frac{S}{V} + 0,03t \right) \text{ мм}, \quad (187)$$

где V — увеличение зрительной трубы нивелира;
 S — расстояние от нивелира до рейки, м;
 t — наименьшая цена деления рейки.

При геодезических работах на строительстве применяются рейки, у которых предельная ошибка нанесения делений составляет 1 мм, а величина средней квадратической ошибки $m_{\pi} = \pm 0,50$ мм.

Подставляя в формулу (185) значения отдельных ошибок, получим:

$$m_b = \sqrt{\left(0,2 \sqrt{\tau} S \frac{1}{\rho''}\right)^2 + \left(0,2 \frac{S}{V} + 0,03t\right)^2 + 0,5^2}. \quad (188)$$

По этой формуле составлена таблица средних квадратических ошибок визирования (m_b) для наиболее распространенного в строительстве нивелира НВ-1, у которого $V = 31\times$, $\tau = 20''$ (табл. 11). Наименьшая цена деления рейки $t = 10$ мм.

Т а б л и ц а 11

Средние квадратические ошибки
визирования на рейку

Расстояния от нивелира до рейки S , м	Средняя квадратическая ошибка m_b , мм	Расстояния от нивелира до рейки S , м	Средняя квадратическая ошибка m_b , мм
5	$\pm 0,60$	60	$\pm 0,89$
10	0,62	70	0,96
20	0,67	80	1,02
30	0,72	90	1,09
40	0,77	100	1,17
50	0,83		

При геометрическом нивелировании из середины следует также учитывать ошибку, возникающую при неравенстве плеч из-за несоблюдения главного условия у нивелира. Эта ошибка определяется по формуле

$$m_{г. у} = \varepsilon'' (S_1 - S_2) \frac{1}{\rho''}, \quad (189)$$

где ε'' — угол между визирной осью трубы и осью цилиндрического уровня;
 S_1 и S_2 — расстояния от нивелира соответственно до передней и задней реек.

Согласно [6] несоблюдение главного условия допуска-
ется до 4 мм на 75 м, что соответствует $\varepsilon'' = 10''$.

Пользуясь формулой (189), составим таблицу средних
квадратических ошибок из-за несоблюдения главного ус-
ловия нивелира при соответствующих разностях плеч
 $\delta S = S_1 - S_2$ (табл. 12).

Т а б л и ц а 12

Зависимость ошибки m_0 от разности плеч δS

Разность плеч δS , м	Ошибка m_0 , мм
20	$\pm 1,0$
30	1,5
40	2,0
50	2,5
75	3,8
100	5,0

Средняя квадратическая ошибка превышения между
двумя точками с одной станции определится по формуле

$$m = \sqrt{2m_B^2 + m_0^2}. \quad (190)$$

Рассмотрим следующий пример. Нивелир НВ-1 уста-
новлен в центре монтажного горизонта здания с габарита-
ми $48 \times 9,6$ м. Примем $S_1 = 25$ м и $S_2 = 5$ м; тогда
 $\delta S = 20$ м. Подставляя соответствующие значения ошибок
из табл. 11 и 12 в формулу (190), получим $m = \pm 1,7$ мм.
Предельное значение ошибки при $P = 0,95$ составит
 $\Delta = \pm 3,4$ мм.

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Вертикальные геодезические измерения при передаче
осей по высоте и геодезическом контроле точности положе-
ния конструкций осуществляются способом вертикальной
плоскости с помощью теодолита или способом вертикальной
линии с помощью зенит-приборов [9].

При измерении первым способом сказывается влияние
ошибок наклона оси вращения трубы, наклона оси враще-
ния инструмента, визирования, фиксации точки на мон-
тажном горизонте, установки инструмента в створ, колли-
мационная ошибка.

В общем случае средняя квадратическая ошибка проектирования разбивочной оси при двух положениях круга вычисляется по формуле

$$m_{\text{пр}} = \sqrt{0,25 \frac{h^2}{\rho''^2} \tau''^2 + \frac{3600 S^2}{\rho''^2 V^2} + \frac{l^2}{S^2} m_{\text{ств}}^2 + m_{\text{ф}}^2}, \quad (191)$$

где h — высота, на которую проектируется точка разбивочной оси;

S — расстояние от теодолита до проектируемой опорной точки;

τ'' — цена деления цилиндрического уровня при горизонтальном круге теодолита;

l — отклонение определяемой точки в визирной плоскости инструмента от вертикали, проходящей через опорную точку;

V — увеличение зрительной трубы теодолита.

Расхождение в положении опорной точки, полученное проектированием при двух кругах инструмента, не должно превышать удвоенного значения $m_{\text{пр}}$, вычисленного по формуле (191).

Для повышения точности проектирования опорной точки отвесной плоскостью применяют теодолиты с накладными уровнями.

Рассмотрим пример. При проектировании осей 5-этажного здания высотой $h = 15$ м применялся теодолит Т-30 ($V = 25\times$, $\tau'' = 45''$). Инструмент устанавливался в створ оси с ошибкой $m_{\text{ств}} = \pm 0,5$ мм. Расстояние $S = 20$ м, $m_{\text{ф}} = \pm 1,2$ мм, $l = 40$ мм.

По формуле (191) определим ошибку проектирования осей на пятый этаж с помощью теодолита:

$$\begin{aligned} m_{\text{пр}} &= \sqrt{0,25 \frac{15000^2}{206265^2} 45^2 + \frac{3600}{206265^2} \cdot \frac{20000^2}{25^2} + \frac{40^2}{20000^2} 0,5^2 + 1,2^2 =} \\ &= 2,1 \text{ мм.} \end{aligned}$$

При втором способе опорные точки определяются по высоте с помощью зенит-прибора методом вертикального проектирования. Ошибка вертикального проектирования опорной точки разбивочной оси зависит от ошибок приведения визирной оси прибора в отвесное положение (m_0), визирования ($m_{\text{в}}$), центрирования прибора над проектируемой точкой ($m_{\text{ц}}$) и фиксации точки на палетке ($m_{\text{ф}}$). Суммарную среднюю квадратическую ошибку положения

опорной точки на монтажном горизонте, определяемой как пересечение двух взаимно перпендикулярных разбивочных осей, можно определить по формуле

$$m_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{h^2}{\rho''^2} \left(m_o^2 + \frac{3600''}{V^2} \right) + m_{\text{и}}^2 + m_{\text{ф}}^2}, \quad (192)$$

где h — превышение между исходным и монтажным горизонтом;

V — увеличение зрительной трубы.

Ошибка приведения визирной оси в отвесное положение для инструментов с компенсаторами (ОЦП, PZL) выбирается из паспорта инструмента. Для инструментов типа «Зенит-прибор» она вычисляется по формуле

$$m_{V_1} = 0,5\tau,$$

где τ — цена деления уровня.

Рассмотрим пример. Проектирование исходной точки выполнялось со столика тура ($m_{\text{и}} = \pm 0,5$ мм) прибором ОЦП ($m_o = \pm 2''$, $V = 30\times$). Точка фиксировалась на высоте $h = 50$ м по палетке ($m_{\text{ф}} = \pm 0,5$ мм).

По формуле (192) определим среднюю квадратическую ошибку проектирования точки разбивочной оси с исходного на монтажный горизонт:

$$\begin{aligned} m_{\text{пр}} &= \sqrt{\frac{50000^2}{206265^2} \left(2^2 + \frac{3600}{30^2} \right) + 0,5^2 + 0,5^2} = \\ &= \pm 1,0 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Опыт применения прибора ПОВП на объектах Главмосстроя показал, что средняя квадратическая ошибка проектирования $m_{\text{пр}}$ опорной точки на высоту $h = 50$ м не превышает ± 1 мм.

В табл. 13 приведены средние квадратические ошибки передачи осей, вычисленные по формулам (191) и (192) рассмотренными способами.

Рассмотренный метод расчета точности геодезических измерений основан на решении прямой геодезической задачи: по известным значениям составляющих погрешностей того или иного вида измерений (высотные, линейные, угловые и т. д.) определяется возможная для данных условий измерений суммарная погрешность определения случайной величины.

Средние квадратические ошибки передачи разбивочных осей, мм

Высота горизонта H , м	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300
Способы передачи												
Теодолитами Т-30, ТТ-50, Т-5 (проектирование осуществляется в одной плоскости при угле наклона визирной оси $\nu=45^\circ$):												
при одном круге (полуприем)	1,0	1,8	2,7	3,6	4,7	5,4	6,3	7,2	8,1	9,3	17,7	26,9
при двух кругах (полный прием)	0,6	1,0	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	3,6	4,0	4,4	9,0	13,5
Теодолитом с накладным уровнем (чувствительность уровня $\tau=20''$)	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	3,5	5,2
«Зенит-прибором»	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	1,6	2,5

Этот метод расчета точности измерений позволяет определить влияние каждого источника ошибки в отдельности и общее их влияние при данных инструментах и условиях выполнения работ, по полученным результатам расчета определить класс точности выполненных работ и, если эта точность недостаточна, повысить ее за счет подбора геодезических инструментов и методов работ с целью уменьшения доминирующих ошибок.

Проектировщики могут использовать этот материал при назначении класса точности разбивки, а также для разработки методики геодезической разбивки для разных классов точности и типов зданий и сооружений при составлении проекта производства работ.

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОЙ И ДОСТАТОЧНОЙ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

17. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ КОНТРОЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Процесс возведения всех конструкций здания или сооружения сопровождается контрольными геодезическими измерениями. Геодезический контроль заключается в определении действительного планового и вертикального положения конструкций относительно проектного значения (разбивочных осей и горизонтов) как на стадии временного закрепления конструкций, так и после окончательного их закрепления.

Нормативными документами (строительными нормами и правилами, техническими условиями и др.) регламентируются только общие допуски на размеры и положение конструкций в каркасе здания или сооружения без выделения ошибок технических и геодезических измерений, неизбежно возникающих при контроле за размерами и установкой конструкций в проектное положение.

Контрольные геодезические измерения — ответственный вид работ при монтаже строительных конструкций

в проектное положение. От точности выполнения контрольных геодезических измерений на стадии монтажа в значительной степени зависит точность положения отдельных конструкций относительно разбивочных осей или горизонтов возводимого здания или сооружения. Этот вид геодезических измерений существенно влияет на точность замыкания конструкций в каркасе здания или сооружения: при наращивании конструкций в плане или по высоте здания контрольные геодезические измерения призваны уменьшить ошибки в размерах конструкций, их положений на отдельных участках возводимого здания.

Действительно, если собирать конструкции в определенной последовательности без геодезического контроля их установки, то вследствие возможных (или допустимых) ошибок в размерах конструкций и собственно установки их в проектное положение накапливается очень много ошибок в замыкающем звене расчетной цепи каркаса здания.

Пример 1. Пусть металлические колонны высотой 15 м для одноэтажного промышленного здания устанавливаются в вертикальное положение без вертикального геодезического контроля. Тогда возможную предельную ошибку вертикальности оси колонны $\tilde{\Delta}_{в.к}$ можно определить по формуле

$$\tilde{\Delta}_{в.к} = \sqrt{\Delta_{к.к}^2 + \Delta_{у.ф}^2 + \Delta_{п.т}^2}, \quad (193)$$

где $\Delta_{к.к}$ — допуск на кривизну ствола колонны;

$\Delta_{у.ф}$ — допуск на уклон поверхности фундамента;

$\Delta_{п.т}$ — допуск на перекося торца колонны.

Согласно [17], при $H = 15$ м $\Delta_{к.к} = 15$ мм, $\Delta_{у.ф} = \Delta_{п.т} = 15$ мм. Тогда по формуле (193) получим: $\tilde{\Delta}_{в.к} = \sqrt{15^2 + 15^2 + 15^2} = \pm 26$ мм. В то же время допуск на неvertикальность оси колонны высотой 15 м не должен превышать 15 мм [17].

Пример 2. Пусть монтаж железобетонных колонн ведется без высотного геодезического контроля. В этом случае предельная ошибка высотного положения оголовка колонны (опорной плоскости стропильной или подстропильной фермы) $\tilde{\Delta}_{о.ф}$ определится как

$$\tilde{\Delta}_{о.ф} = \sqrt{\Delta_{о.ф}^2 + \Delta_{д.к}^2}, \quad (194)$$

где $\Delta_{о.ф}$ — допуск на высотное положение поверхности фундамента при непосредственном опирании колонны;

$\Delta_{д.к}$ — допуск на длину колонны.

Согласно [16], $\Delta_{о.ф} = \pm 10$ мм и $\Delta_{д.к} = \pm 10$ мм. Следовательно, $\tilde{\Delta}_{о.ф} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14$ мм. Вместе с тем допуск на высотное положение опорной плоскости ферм $\Delta_{о.ф}$, согласно [16], равен ± 10 мм.

Можно было бы привести еще ряд примеров, подтверждающих необходимость проведения контрольных геодези-

ческих измерений с достаточно высокой степенью точности даже при соблюдении существующих допусков на изготовление и установку сборных конструкций.

Как показал анализ опыта работы геодезистов строительного-монтажного производства, во многих случаях точность контрольных геодезических измерений принимается равной допуску на положение той или иной конструкции, и в редких случаях — в два раза выше его, т. е. $\Delta_{к.г} = 0,5\Delta_{п.к}$.

В геодезической литературе вопросы расчета необходимой точности контрольных геодезических измерений не отражены.

Нормативными документами регламентируются только общие допуски на положение конструкций в каркасе здания или сооружения без выделения величин ошибок контрольных геодезических измерений. Отсутствие норм точности геодезических измерений при установке конструкций в проектное положение в большинстве случаев может привести к появлению недопустимых отклонений действительного положения конструкций от их проектного значения или к низкой производительности труда. Эти недостатки возникают в результате применения упрощенных или чрезмерно сложных способов геодезического контроля.

В то же время изучение природы возникновения составляющих суммарной ошибки положения отдельно стоящих конструкций относительно разбивочных осей или горизонтов показывает, что на изменение проектного положения конструкций как в плане, так и по высоте влияют четыре основные группы ошибок [22]:

ошибки выполнения проектных размеров конструкций при их изготовлении $m_{п.к}$;

ошибки установки конструкций в проектное положение $m_{у.к}$;

ошибки контрольных геодезических измерений на стадии установки конструкций $m_{к.г}$;

ошибки в положении конструкций из-за деформативных воздействий (осадка основания или влияние температуры) $m_{д.в}$.

В этом случае суммарную ошибку положения конструкций относительно построенных в натуре (на опорных плоскостях ранее установленных конструкций) разбивочных осей или горизонтов можно выразить формулой

$$m_{п.к} = \sqrt{m_{п.к}^2 + m_{у.к}^2 + m_{к.г}^2 + m_{д.в}^2} \quad (195)$$

в предположении, что ошибки $m_{н.к.}$, $m_{у.к.}$, $m_{к.г.}$, $m_{д.в.}$ носят случайный характер и не зависят друг от друга.

Каждая составляющая ошибка включает в себя суммы элементарных ошибок, принадлежащих к данной группе (см. главу V). Тогда на основе теории размерных цепей (раздел 14, глава IV) можно считать, что формула (195) является уравнением ошибок элементарной размерной цепи, где замыкающим звеном является положение отдельной конструкции относительно разбивочной оси или горизонта.

Так как СНиП и ТУ не нормируют величину составляющих в (195), то для дальнейших расчетов можно использовать принцип равного влияния m_i , т. е. $m_{н.к.} = m_{у.к.} = m_{д.в.} = m_{к.г.}$.

Тогда из (195) получим:

$$m_{п.к.} = m_{к.г.} \sqrt{4} = 2m_{к.г.} \quad (196)$$

откуда средняя квадратическая ошибка контрольных геодезических измерений должна составлять

$$m_{к.г.} = \frac{1}{2} m_{п.к.} \quad (197)$$

Однако использовать формулу (195) в таком виде невозможно, так как СНиП содержит в себе не средние квадратические ошибки $m_{п.к.}$, а предельные ошибки $\Delta_{п.к.}$.

Если допуски, содержащиеся в СНиП (за исключением СНиП I-A.4-62), ТУ и инструкциях, представляют собой утроенное значение средней квадратической ошибки, т. е. $\Delta_{п.к.} = 3m_{п.к.}$, то соотношение между допуском $\Delta_{п.к.}$ и средней квадратической ошибкой контрольных геодезических измерений $m_{к.г.}$ может быть представлено с учетом (197) в следующем виде:

$$m_{к.г.} = \frac{1}{2.3} \Delta_{п.к.}$$

или

$$m_{к.г.} \leq 0,17 \Delta_{п.к.} \quad (198)$$

В [15] в качестве допусков принято поле рассеивания ошибок, т. е. $|\Delta \pm| = 6m_{п.к.}$.

Тогда с учетом (197) имеем:

$$m_{к.г.} = \frac{1}{2.6} |\Delta \pm|_{п.к.} \quad (199)$$

или

$$m_{к.г.} \leq 0,08 |\Delta \pm|_{п.к.}$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка контрольных геодезических измерений, выполняемых при установке конструкций, не должна превышать 17% величины допуска или 8% величины поля допуска на положение конструкций относительно разбивочных осей или горизонтов. Полученная точность одновременно является необходимой и достаточной, так как она находится в прямой зависимости от допусков на положение конструкций.

При выполнении контрольных геодезических измерений единственной количественной характеристикой является средняя квадратическая ошибка $m_{к.г}$ ввиду того, что на этой стадии измерений при выносе проекта в натуру фиксируются только отклонения конструкций относительно разбивочных осей и горизонтов. Этим данная стадия измерений отличается от всех остальных, где мы имеем дело с двумя параметрами: $\bar{x}$ и m .

Поэтому, задавшись некоторой надежностью q -обеспечения 17%-ной ошибки контрольных геодезических измерений в производственных условиях, можно построить доверительный интервал для стандарта $\sigma_{к.г}$ по формуле (52) или (58).

Для подтверждения реальности полученных результатов рассмотрим два примера расчета точности контрольных геодезических измерений по формуле (198) с учетом существующих допусков на положение отдельных конструкций.

Пример 1. Согласно [17], допуск на высотное положение опорной плоскости стальной колонны (верх фундамента) $\Delta_{о.ф} = \pm 5 \text{ мм}$. На изменение высотного положения фундаментов влияют ошибки строительно-монтажных работ, ошибки геодезического контроля за возведением фундамента и ошибки из-за осадки фундамента и изменения температуры окружающей среды. Тогда, согласно формуле (198), средняя квадратическая ошибка высотного геодезического контроля $m_{к.в} \leq 0,17\Delta_{о.ф} \leq 0,17 \cdot 5 \text{ мм} \leq \pm 0,85 \text{ мм}$.

Такая точность детальных геодезических измерений обеспечивает высотное положение опорной поверхности фундаментов под железобетонные колонны с допускаемой предельной ошибкой $\pm 5 \text{ мм}$.

Поскольку найденное выше значение $m_{к.в} = \pm 0,85 \text{ мм}$, согласно [17], не зависит от расстояния между репером высотного обоснования и фундаментом, то необходимо определить основные параметры для контрольных геодезических измерений, т. е. определить те условия, при которых имеются реальные возможности достижения такой точности.

Из главы V следует, что доминирующей ошибкой при нивелировании является ошибка измерения из-за неравенства расстояний между нивелиром и рейками (передней и задней) $m_{н.п}$. Без особой

потери точности можно предположить, что $m_{к.в} = m_{п.п}$. Ориентирование на этот вид ошибки нивелирования обуславливается тем, что практически на строительном-монтажной площадке невозможно добиться равенства плеч S_1 и S_2 . Согласно табл. 11 и 12, средняя квадратическая ошибка $m_{п.п} = \pm 0,85$ мм при неравенстве плеч $\delta S = S_2 - S_1 \leq 10$ м.

Современные планировочные решения, например, сборных промышленных зданий предусматривают следующие унифицированные расстояния между осями фундаментов: 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42 и 48 м. Так как нивелир устанавливается между соседними фундаментами, то минимальные расстояния между нивелиром и рейкой (S_1) не должны превышать соответственно 3; 6; 9; 12; 15; 18 и 24 м. Зная допустимое значение δS и S_1 , можно из выражения $\delta S = (S_2 - S_1)$ определить максимально допустимые расстояния между нивелиром и другой рейкой S_2 : 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31 и 34 м.

Если принять $m_{к.в} = \pm 0,85$ мм и минимальное расстояние от нивелира до рейки, устанавливаемой на возводимый фундамент, $S_1 = 12$ м при ширине пролета здания 24 м, то максимальное расстояние от нивелира до рейки, устанавливаемой на рабочий репер, S_2 при $\delta S < 10$ м не должно превышать $2S_2 = 44$ м ≈ 50 м. Зная допустимое расстояние между рабочими реперами и габариты здания, легко определить необходимое и достаточное количество реперов высотного обоснования.

Из выполненного расчета следует, что требования к условиям выполнения геодезического контроля точности довольно жесткие. Если контроль вести непосредственно от пунктов строительной сетки, то густота ее пунктов при длине сторон $S = 200$ м недостаточна.

Пример 2. Вертикальное положение оси колонны определяется ошибками перекоса нижнего торца ее $m_{п.т}$, ошибками способа монтажа и монтажных приспособлений $m_{м.п}$, ошибками построения (фиксации) разбивочной оси или линии, ей параллельной, в пространстве с помощью теодолита $m_{п.о}$, ошибками в положении оголовка колонны из-за неравномерности осадки фундамента (крен колонн) $m_{д.в}$:

$$m_{в.к} = \sqrt{m_{п.т}^2 + m_{м.п}^2 + m_{п.о}^2 + m_{д.в}^2}. \quad (200)$$

Согласно [16], допуск на неперпендикулярность железобетонных колонн высотой $H = 15$ м не должен превышать 15 мм: $\Delta_{в.к} \leq \pm 15$ мм. Тогда из (198) ошибка вертикального геодезического контроля составит $m_{п.о} \leq 0,17\Delta_{в.к} \leq \pm 2,6$ мм.

Следовательно, средняя квадратическая ошибка проектирования разбивочной оси на оголовник колонны с помощью теодолита не должна превышать $\pm 2,6$ мм. Необходимо определить возможность обеспечения величины $m_{п.о} = \pm 2,6$ мм в производственных условиях с помощью массовых геодезических инструментов, в частности с помощью теодолитов Т-30.

Сопоставляя полученное значение $m_{п.о}$ с приведенными в табл. 13 средними квадратическими ошибками, видим, что требуемая точность может быть обеспечена при выполнении геодезического контроля с помощью теодолита при двух положениях его вертикального круга ($H = 20$ м, $m_{п.о} = \pm 2,9$ мм) и при равенстве вы-

ты колонны расстоянию между теодолитом и колонной, т. е. при угле наклона трубы теодолита 45° .

Этот пример подтверждает необходимость выполнения контроля только при двух положениях вертикального круга теодолита.

На основе формулы (198) и строительно-монтажных допусков из [15, 16, 17] была составлена таблица норм точности геодезического контроля (табл. 14).

Т а б л и ц а 14

Средние квадратические ошибки геодезического контроля
точности при возведении строительных конструкций

Виды геодезического контроля и типы конструкций	Допустимые средние квадратиче- ские ошибки σ , к, мм
Контроль планового положения конструкций (относительно разбивочных осей):	
фундаментных блоков, осей стаканов фундаментов и анкерных болтов	± 2
колонн металлических и железобетонных, панелей и блоков стен, подкрановых балок, стропильных и подстропильных ферм, ригелей, прогонов, плит перекрытий	± 1
Контроль взаимного планового положения конструкций:	
подкрановых рельсов в одном пролете здания	± 2
ферм, балок, ригелей по верхнему поясу в пределах шага колонн здания	± 4
подкранового рельса относительно подкрановой балки	± 3
подкранового рельса от прямой на участке 40 м	± 3
Контроль вертикального положения конструкций:	
панелей и блоков в жилых и общественных зданиях	± 1
металлических и железобетонных колонн высотой H , м:	
до 5	± 2
от 5 до 15	± 3
свыше 15	$0,0002 H$, но не более ± 7 мм
Контроль высотного положения конструкций (относительно проекта):	
опорных поверхностей фундаментов под:	
железобетонные колонны	± 2
металлические колонны, стеновые панели и блоки	± 1
опорных площадок подкрановых балок и рельсов, ригелей, ферм, элементов покрытия	± 2

18. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ДЕТАЛЬНЫХ РАЗБИВОЧНЫХ РАБОТАХ

Основой для детальной геодезической разбивки осей служат основные, секционные и пролетные оси здания или сооружения. Поэтому ошибка положения конструкций в здании или сооружении обуславливается также ошибками построения основных осей здания и ошибками детальных геодезических разбивок при установке конструкций в проектное положение.

Схема геодезических построений (контрольные, детальные, основные и главные построения) образована так, что при переходе из низшей стадии (контрольные) к высшей стадии (главные) точность должна повышаться, так как роль их возрастает. Действительно, контрольные построения призваны обслуживать установку каждой конструкции в отдельности, детальные — возведение отдельной рамы, состоящей из трех и более конструкций, основные — возведение системы рам в пределах блока или целого здания и, наконец, главные — возведение системы зданий и сооружений.

Рассмотрим методику расчета точности детальных геодезических разбивок применительно к промышленным зданиям и пути ее достижения при абсолютно точном положении смонтированных конструкций.

Особенностью планировочных решений промышленных зданий является то, что они сильно развиты в длину. Такие здания имеют от 2 до 12 продольных и до 250 поперечных осей (при шаге колонн 6 м и длине здания 1500 м). Поэтому при детальном построении основных пролетных и секционных осей здания на подготовленных фундаментах под колонны или другие конструкции в практике распространен створный метод с применением теодолита или натянутой струны и стальной рулетки, т. е. метод детального построения промежуточных точек створа, которым является продольная ось [10].

Другие способы (прямоугольных и полярных координат, угловых и линейных засечек) не нашли широкого применения в промышленном строительстве при детальном построении осей зданий ввиду их экономической нецелесообразности.

Рассмотрим несколько типовых уравнений ошибок, по которым должна рассчитываться точность возведения каркасов промышленных зданий и сооружений [22].

Анализ существующих типовых проектов сборных промышленных зданий и сооружений показал, что для расчета точности возведения сборных зданий и сооружений можно унифицировать основные уравнения ошибок на основе теоретических выкладок, приведенных в разделе 14, глава IV.

Прежде всего составим уравнения для расчета точности возведения одноэтажных сборных зданий — наиболее распространенного типа зданий в промышленном строительстве.

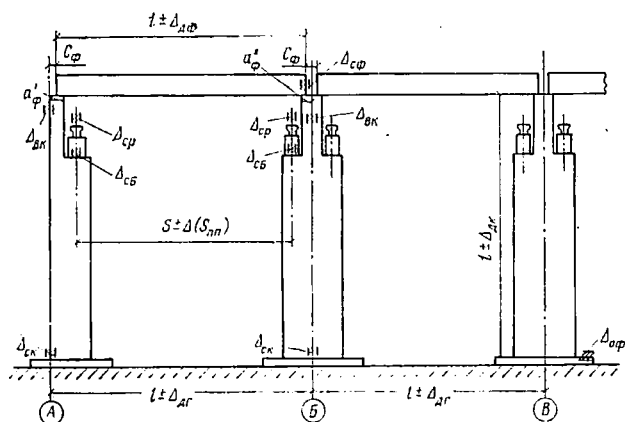


Рис. 11. Размерная цепь в плоскости поперечной оси каркаса одноэтажного промышленного здания

Основным расчетным участком каркаса одноэтажного здания в плане является рама, состоящая из двух колонн и одной соединяющей их конструкции (стропильной или подстропильной балки или подкрановой балки).

На рис. 11 видно, что замыкающим звеном размерной цепи поперечного участка каркаса одноэтажного здания, состоящего из двух колонн и одной стропильной фермы, является зазор между торцом фермы и геометрической осью колонны в верхней ее части (c_{ϕ}) или площадка опирания фермы на оголовник колонны (a_{ϕ}) при жестком соединении ферм с колоннами (с помощью сварки). Если же применяется шарнирный тип соединения ферм с колоннами (на фиксаторах), то замыкающим размером является зазор между закладными деталями в торце колонны и торцах фермы (c_a) или та же площадка опирания (a_{ϕ}).

Для этих замыкающих размеров, согласно рис. 11, суммарную среднюю квадратическую ошибку можно представить следующими формулами:

$$m(c_{\phi}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2m_{с.к}^2 + 2m_{в.к}^2 + m_{д.ф}^2 + m_{с.ф}^2}; \quad (201)$$

$$m(c_3) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2m_{с.к}^2 + 2m_{в.к}^2 + m_{д.ф}^2 + m_{с.ф}^2 + 2m_{з.к}^2 + 2m_{з.ф}^2}; \quad (202)$$

$$m(a_{\phi}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2m_{с.к}^2 + 2m_{в.к}^2 + m_{д.ф}^2 + m_{с.ф}^2 + m_{ш.к}^2}, \quad (203)$$

где $m_{д.г}$ — средняя квадратическая ошибка детального геодезического построения разбивочных осей здания;

$m_{с.к}$ — то же, совмещения оси колонны с разбивочной осью, зафиксированной на фундаменте;

$m_{в.к}$ — то же, положения колонны в вертикальной плоскости;

$m_{д.ф}$ — то же, длины фермы;

$m_{с.ф}$ — то же, положения торцов стропильной фермы относительно продольной оси колонны на оголовке;

$m_{з.к}, m_{з.ф}$ — то же, положения закладных деталей соответственно в оголовнике колонны и торце фермы;

$m_{ш.к}$ — то же, размера поперечного сечения колонны.

Коэффициент 2 при некоторых составляющих правой части формул (201)—(203) означает, что эти ошибки в размерной цепи повторяются дважды и они равны между собой (см. рис. 10). Это замечание относится и к последующим исходным уравнениям ошибок.

Составляющие формул (201)—(203) нормируются в соответствующих главах СНиП [15, 16, 17] в виде предельных ошибок (допусков Δ_i).

При возведении каркаса здания размеры горизонтальных конструкций (ферм, балок, ригелей) изменяют свое первоначальное значение под воздействием температуры окружающей среды, а вертикальность колонн — под воздействием неравномерности осадки фундамента (крен). Тогда

$$m(c_{\phi}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2m_{с.к}^2 + 2m_{в.к}^2 + m_{д.ф}^2 + m_{с.ф}^2 + m_{ф}^2 + 2m_{н.о}^2}; \quad (204)$$

$$m(c_3) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{з.к}^2 + m_{з.ф}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.ф}^2 + m_{с.ф}^2 + m_{лф}^2}; \quad (205)$$

$$m(a_{\phi}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.ф}^2 + m_{с.ф}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{лф}^2}; \quad (206)$$

где $m_{лф}$ — средняя квадратическая ошибка длины фермы из-за разности температур ее изготовления и монтажа;

$m_{н.о}$ — то же, вертикального положения колонны из-за неравномерности осадки ее фундамента.

Большинство современных одноэтажных промышленных зданий проектируется с крупноразмерным шагом колонн (18—24 м), что требует применения подстропильных ферм. В таких зданиях замыкающим звеном поперечной размерной цепи является зазор между торцом стропильной фермы и геометрической продольной осью подстропильной фермы $c_{п.ф}$. Тогда средняя квадратическая ошибка зазора $c_{п.ф}$ определится по формуле

$$m(c_{п.ф}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{с.п.ф}^2 + m_{к.п.ф}^2 + m_{н.о}^2) + \dots \rightarrow \dots + m_{д.с.ф}^2 + m_{с.ф}^2 + m_{лф}^2}, \quad (207)$$

где $m_{с.п.ф}$ — средняя квадратическая ошибка совмещения оси подстропильной фермы с разбивочной осью;

$m_{к.п.ф}$ — то же, кривизны подстропильной фермы;

$m_{д.с.ф}$ — то же, длины стропильной фермы.

В продольном расчетном участке одноэтажного промышленного здания замыкающим звеном является зазор $c_{п}$ между гранью плиты покрытия и продольной осью стропильной фермы (рис. 12).

Для этой расчетной схемы средняя квадратическая ошибка замыкающего размера определяется по формуле

$$m(c_{п}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2m_{с.к}^2 + 2m_{в.к}^2 + 2m_{с.ф}^2 + 2m_{к.с.ф}^2 + \dots \rightarrow \dots + m_{д.п}^2 + m_{с.п}^2 + m_{лп}^2 + 2m_{н.о}^2}, \quad (208)$$

При использовании подстропильных ферм

$$m(l'_\phi) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2m_{с.к}^2 + 2m_{в.к}^2 + 2m_{с.п.ф}^2 + 2m_{с.ф}^2 + 2m_{к.с.ф}^2 + 2m_{н.о}^2} \quad (210)$$

Согласно [16, 17], смещение колонн, ферм, балок, плит, закладных деталей относительно разбивочных осей допускается одинаковой величины. Это относится и к допустимой величине кривизны ферм. Тогда $m_{с.п.ф} = m_{с.ф} = m_{с.п} = m_{з.к} = m_{з.ф} = m_{с.к}$; $m_{к.п.ф} = m_{к.с.ф} = m_{н.ф}$. С учетом этого формулы (204)—(206), (207)—(210) соответственно могут быть представлены в следующем виде:

$$m(c_{с.ф}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 3m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.ф}^2 + m_{лф}^2} \quad (211)$$

$$m(c_3) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 7m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.ф}^2 + m_{лф}^2} \quad (212)$$

$$m(a_\phi) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 3m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.ф}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{лф}^2} \quad (213)$$

$$m(c_\phi) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 5m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{к.ф}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.ф}^2 + m_{лф}^2} \quad (214)$$

$$m(c_\pi) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 5m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{к.ф}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.п}^2 + m_{лп}^2} \quad (215)$$

$$m(l_\phi) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 4m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{к.ф}^2 + m_{н.о}^2)} \quad (216)$$

$$m(l'_\phi) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 6m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{к.ф}^2 + m_{н.о}^2)} \quad (217)$$

Формулы (211)—(217) являются основными для расчета точности возведения сборных одноэтажных промышленных зданий.

Основным технологическим оборудованием крупных одноэтажных зданий являются подкрановые пути. В каждом пролете здания устанавливается две параллельные нитки подкранового пути. Нормативные документы [16, 17] устанавливают допуск на точность взаимного положения двух смежных рельсов $\Delta(S_{п.п}) = \pm 10$ мм.

Точность взаимного положения двух соседних ниток подкранового пути можно определить по формуле

$$m(S_{п.п}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{с.б}^2 + m_{с.р}^2 + m_{н.о}^2)}, \quad (218)$$

где $m_{с.б}$ — средняя квадратическая ошибка совмещения продольной оси подкрановой балки с разбивочной осью на консоли колонны;

$m_{с.р}$ — то же, совмещения оси рельса с продольной осью балки.

Формула (218) действительна лишь в том случае, когда монтаж подкрановых конструкций ведется относительно верхней части продольной оси установленных колонн при отсутствии геодезического контроля.

На практике монтаж подкрановых балок и рельсов ведется относительно разбивочных осей, построенных на консолях колонн. Тогда ошибки $m_{с.к}$ и $m_{в.к}$ исключаются из расчетов:

$$m(S_{п.п}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{п.п}^2 + 2(m_{с.б}^2 + m_{с.р}^2 + m_{н.о}^2)}, \quad (219)$$

где $m_{п.п}$ — средняя квадратическая ошибка построения кранового пролета на консолях колонн относительно разбивочных осей здания.

Приняв $m_{п.п} = m_{д.г}$, получим:

$$m(S_{п.п}) = \sqrt{2(m_{д.г}^2 + m_{с.б}^2 + m_{с.р}^2 + m_{н.о}^2)}. \quad (220)$$

В многоэтажных промышленных зданиях замыкающим звеном плановой размерной цепи, расположенной в плоскости поперечных осей здания (рис. 13), является зазор между закладными деталями ригеля и колонны (C_p) или площадка опирания ригеля на консоль колонны (a_p); в плоскости продольных осей (рис. 14) — зазор между стенкой опорного столика ригеля и торцом плиты перекрытия (C_n).

Точность выполнения этих замыкающих звеньев на первом этаже здания может быть определена по следующим формулам (см. рис. 13 и 14):

$$m(c_p) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{з.к}^2 + \dots + m_{з.р}^2 + m_{н.о}^2) + m_{с.р}^2 + m_{т.р}^2 + m_{д.р}^2}; \quad (221)$$

$$m(a_p) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{н.о}^2) + m_{д.р}^2 + m_{с.р}^2 + m_{л.р}^2}; \quad (222)$$

$$m(c_{п}) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{с.р}^2 + m_{ш.п}^2 + m_{н.о}^2) + \dots + m_{д.п}^2 + m_{с.п}^2 + m_{л.п}^2}; \quad (223)$$

где $m_{д.р}$ — средняя квадратическая ошибка длины ригеля;

$m_{з.к}$, $m_{з.р}$ — то же, положения закладных деталей соответственно в колонне и ригеле;

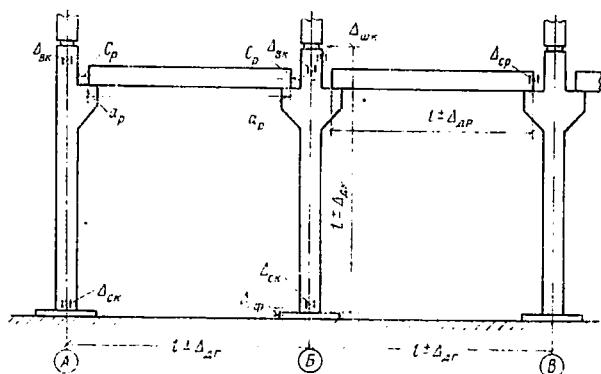


Рис. 13. Размерная цепь в плоскости поперечной оси каркаса многоэтажного здания

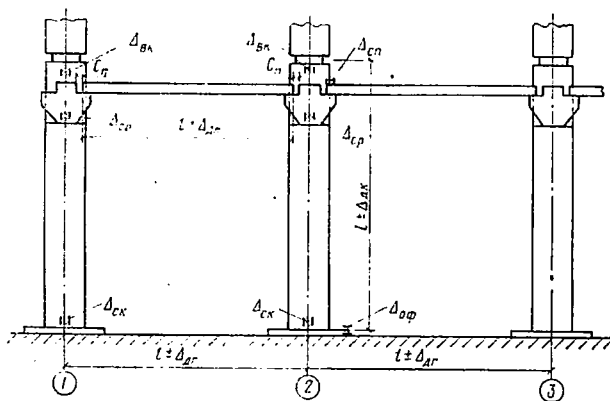


Рис. 14. Размерная цепь в плоскости продольной оси каркаса многоэтажного здания

$m_{с.р}$ — то же, положения ригеля;
 $m_{д.п}$ — то же, длины плиты перекрытия;
 $m_{с.п}$ — то же, положения плиты перекрытия;
 $m_{ш.п}$ — то же, ширины полки ригеля.

Так как $m_{с.р} = m_{с.п} = m_{з.р} = m_{з.к} = m_{с.к}$,
то

$$m(c_p) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 7m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{п.о}^2) + m_{д.р}^2 + m_{г.р}^2}; \quad (224)$$

$$m(a_p) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 3m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{п.о}^2) + m_{д.р}^2 + m_{г.р}^2}; \quad (225)$$

$$m(c_n) = \sqrt{m_{д.г}^2 + 5m_{с.к}^2 + 2(m_{в.к}^2 + m_{ш.п}^2 + m_{п.о}^2) + m_{п.п}^2 + m_{д.п}^2}. \quad (226)$$

Формулы (224)—(226) являются основными для расчета точности возведения сборных многоэтажных промышленных зданий.

Все рассмотренные выше уравнения ошибок характеризуют точность плоских размерных цепей, в которых все ошибки угловых элементов для упрощения расчетов выражены в линейных величинах.

Характерным примером линейных размерных цепей являются сборные железобетонные трубопроводы (канализация, водопроводы, материалопроводы и т. д.).

Основной расчетный участок размерной цепи подземных трубопроводов — расстояние между смежными колодцами трассы. Суммарную ошибку взаимного положения колодцев $m_{п.к}$ можно разложить на три составляющие: продольную m_p , поперечную m_g и высотную m_h . Эти ошибки определяются по формулам:

$$m_p = \sqrt{m_{д.г}^2 + nm_{д.э}^2 + (n-1)m_{з.э}^2}; \quad (227)$$

$$m_g = \sqrt{m_{д.г}^2 + n(m_{п.э}^2 + m_{с.э}^2)}; \quad (228)$$

$$m_h = \sqrt{m_{д.г}^2 + nm_{о.э}^2}, \quad (229)$$

где $m_{д.э}$ — средняя квадратическая ошибка длины элемента трубы;
 $m_{з.э}$ — то же, зазора между элементами трубы;
 $m_{п.э}$ — то же, перекоса торца элемента;

$m_{с.з}$ — то же, совмещения оси элемента с разбивочной осью;

$m_{о.з}$ — то же, высотного положения элемента;

n — число элементов трубы на участке между смежными колодцами.

Допуски на некоторые составляющие и замыкающие звенья уравнений (227)—(229) приведены в соответствующих СНиП и ТУ*. Принимая $\Delta = 3m$, получим: $m_{д.з} = \pm 3,3$ мм; $m_{з.з} = \pm 1,7$ мм; $m_{с.з} = \pm 1,7$ мм; $m_{о.з} = \pm 1,7$ мм; $m_g = \pm 17$ мм.

Приняв максимальное расстояние между центрами смежных колодцев $S = 75$ м и длину элемента трубы $l = 5$ м, имеем $n = 15$. Тогда по формуле (227) получим (без учета ошибки $m_{д.г}$): $m_p = \pm 13,7$ мм и $\Delta_p = \pm 41,2$ мм.

В формуле (228) известно m_g (или Δ_g), но $m_{д.г}$ и $m_{п.з}$ остаются неизвестными. По формуле (229) имеем (то же без учета $m_{д.г}$) $m_h = \pm 7,4$ мм или $\Delta_h = 3m_h = \pm 22,2$ мм. Таким образом, известны допуски на замыкающие звенья: $\Delta_p = \pm 41,2$ мм, $\Delta_g = \pm 50$ мм; $\Delta_h = \pm 22,2$ мм.

Приблизительную точность детальных геодезических построений для данных сооружений можно рассчитать, используя соотношение $m_{к.г} = 0,17 \Delta_{п.к}$, полученное в разделе 17 настоящей главы. Тогда $m_p = \pm 7,0$ мм, $m_g = \pm 8,5$ мм; $m_h = \pm 3,4$ мм.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что относительная средняя квадратическая ошибка при выполнении детальных линейных построений должна быть не ниже $\frac{m_p}{S} = \frac{1}{10\,000}$; детальных угловых: $\frac{m_{\rho''}}{S} = \pm 24''$; детальных высотных (передача проектных отметок дна колодца от высотного рабочего обоснования): $\frac{m_h}{\sqrt{2}} = \pm 2,5$ мм.

Если в формулах (227)—(229) учесть ошибки из-за температурных воздействий и неравномерности осадки, то точность детальных построений должна быть несколько выше полученной. Следовательно, полученные нормы точности на детальные геодезические построения при возведении коммуникаций реальны с точки зрения требований СНиП и ТУ.

* Технические указания по изготовлению и постройке сборных железобетонных водопропускных труб (ВСН 81-62). М., Стройиздат, 1963.

Для расчета точности детальных геодезических построений при воздействии зданий из сборного железобетона используем формулы (211)—(215), (220) и (224)—(226).

Исходные условия: для одноэтажных зданий высота колонн $H = 15$ м, шаг колонн $S = 12$ м, пролет здания $l = 24$ м; для многоэтажных зданий $H = 5$ м, $S = l = 9$ м.

Допуски и средние квадратические ошибки составляющих указанных формул приведены в [16, 17].

По формуле (174) при $\alpha_{\delta t} = 0,0000125$ и максимальной разности температур изготовления конструкций и их монтажа δt получим следующие величины ошибок в длине горизонтальных конструкций (ферм, ригелей и плит): при $l = 24$ м $\Delta_{l\phi} = \pm 10$ мм и при $l = 9$ м $\Delta_{l\pi, lр} = \pm 5$ мм. Так как погрешность $m_{н.о}$ не нормируется для отдельно стоящих фундаментов, то для упрощения расчетов предположим, что $\Delta_{н.о} = \Delta_{l\pi, lр} = \pm 5$ мм.

Из анализа допусков видно, что все они в основном кратны 5 мм. Тогда составляющие формул (211)—(215), (220), (224)—(226) можно выразить через $\Delta_{с.к.}$. Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим:

$$\left. \begin{aligned} m(c_3) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 7m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2) + 3m_{с.к}^2}; \\ m(a_\phi) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 3m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2) + 3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2}; \\ m(c_\phi) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 5m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + 3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2) + 3m_{с.к}^2}; \\ m(c_\pi) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 5m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + 3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2) + 3m_{с.к}^2}; \\ m(S_{\pi.л}) &= \\ &= \sqrt{2(m_{д.г}^2 + m_{с.к}^2 + 3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2)}; \\ m(c_p) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 7m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2) + m_{с.к}^2}; \\ m(a_p) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 3m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2) + m_{с.к}^2}; \\ m(c_\pi) &= \\ &= \sqrt{m_{д.г}^2 + 5m_{с.к}^2 + 2(3m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2 + m_{с.к}^2)}; \end{aligned} \right\} (230)$$

Пусть $m_{с.к} = m_{д.г}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} m(c_3) &= m_{д.г} \sqrt{21}; \\ m(a_{\phi}) &= m_{д.г} \sqrt{18}; \\ m(c_{\phi}) &= m_{д.г} \sqrt{25}; \\ m(c_{п}) &= m_{д.г} \sqrt{25}; \\ m(S_{п.п}) &= m_{д.г} \sqrt{11}; \\ m(c_p) &= m_{д.г} \sqrt{21}; \\ m(a_p) &= m_{д.г} \sqrt{17}; \\ m(c_{п}) &= m_{д.г} \sqrt{20}. \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Отсюда определяем средние квадратические ошибки детального построения основных, секционных или пролетных осей:

$$\left. \begin{aligned} m_{д.г} &= 0,22 m(c_3); \\ m_{д.г} &= 0,24 m(a_{\phi}); \\ m_{д.г} &= 0,20 m(c_{\phi}); \\ m_{д.г} &= 0,20 m(c_{п}); \\ m_{д.г} &= 0,30 m(S_{п.п}); \\ m_{д.г} &= 0,22 m(c_p); \\ m_{д.г} &= 0,24 m(a_p); \\ m_{д.г} &= 0,23 m(c_{п}). \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

По формулам (232) рассчитаем точность детальных геодезических построений при возведении одноэтажных и многоэтажных промышленных зданий, а также подкрановых путей.

В практике допуски на величину зазора C назначаются в пределах $\pm 20-30$ мм (среднее значение ± 25 мм). При $\Delta(c) = 3m(c)$ получим, что $m(c) = \pm 8,3$ мм.

Средняя квадратическая ошибка детального построения основных продольных осей определяется по формуле, полученной для размерной цепи поперечного разреза одноэтажного здания: $m_{д.г} = 0,22 m(c_3)$. Так как средняя квадратическая ошибка зазора $m(c_3)$ принимается равной $\pm 8,3$ мм, то $m_{д.г} = \pm 1,8$ мм. Принимая ширину унифи-

цированного пролета одноэтажного здания $l = 24$ м, получим, что относительная средняя квадратическая ошибка взаимного положения двух смежных продольных осей на фундаментах колонн должна быть не ниже $1 : 13\,000$.

При $m(c_{\Pi}) = \pm 8,3$ мм и унифицированном шаге колонн $S = 12$ м $m_{д.г} = 0,20$ м ($c_{\Pi}) = \pm 1,7$ мм, т. е. точность взаимного положения двух смежных поперечных осей здания на фундаментах колонн должна быть не ниже $1 : 7000$.

Точность взаимного положения смежных разбивочных осей подкрановых путей в пролете здания при $m(S_{п.п}) = = \frac{1}{3}\Delta(S_{п.п}) = \pm 3,3$ мм должна быть не ниже $m_{д.г} = = 0,30$ м ($S_{п.п}) = \pm 1,0$ мм, или примерно $1 : 20\,000$ (при ширине кранового пролета $l = 21$ м).

Для высотных размерных цепей каркасов зданий замыкающим размером является допуск на отклонение отметки от проекта в последней замыкающей конструкции относительно фундамента (стропильная ферма, ригель, подкрановый рельс) или разность отметок двух конструкций. При этом для каркасов одноэтажных и многоэтажных промышленных зданий в уравнение ошибок расчетной цепи входят одни и те же составляющие.

Например, для каркасов одноэтажного и многоэтажного (в пределах одного яруса) зданий имеем соответственно уравнения ошибок высотной размерной цепи (см. рис. 10 и 12):

$$\left. \begin{aligned} m(H_{о.к}^0) &= \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{о.ф}^2 + m_{д.к}^2 + m_{т.к}^2 + m_{о.к}^2}; \\ m(H_{о.к}^M) &= \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{о.ф}^2 + m_{д.к}^2 + m_{т.к}^2 + m_{о.к}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

где $m(H_{о.к})$ — суммарная средняя квадратическая ошибка высотного положения оголовника колонны;

$m_{д.г}$ — то же, построения отметки на фундаменте от рабочих реперов;

$m_{д.к}$ — то же, в длине колонны;

$m_{о.ф}$ — то же, высотного положения фундамента (дна стакана или опорной плиты);

$m_{т.к}$ — то же, в длине колонны из-за влияния температуры окружающей среды;

$m_{о.к}$ — то же, высотного положения колонны из-за влияния осадки.

Если $m_{т.к} = m_{о.к} = m_{д.в}$, то формулы (233) принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} m(H_{о.к}^0) &= \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{о.ф}^2 + m_{д.к}^2 + 2m_{д.в}^2}; \\ m(H_{о.к}^M) &= \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{о.ф}^2 + m_{д.к}^2 + 2m_{д.в}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Учитывая, что в формуле (234), как и в формулах (230), допуски составляющих правой части (кроме $m_{д.г}$) кратны ± 5 мм [16, 17], принимая $\Delta_{д.в} = \pm 5$ мм (для многоэтажных зданий), $\Delta_{д.в} = \pm 10$ мм (для одноэтажных зданий) и выражая все ошибки через $m_{о.ф}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} m(H_{о.к}^0) &= \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{о.ф}^2 + 2(m_{о.ф}^2 + 2m_{о.ф}^2)}; \\ m(H_{о.к}^M) &= \sqrt{m_{д.г}^2 + m_{о.ф}^2 + m_{о.ф}^2 + 2m_{о.ф}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (235)$$

Если $m_{о.ф} = m_{д.г}$, то

$$\left. \begin{aligned} m(H_{о.к}^0) &= m_{д.г} \sqrt{8}; \\ m(H_{о.к}^M) &= m_{д.г} \sqrt{5}, \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} m_{д.г} &= 0,36 m(H_{о.к}^0); \\ m_{д.г} &= 0,45 m(H_{о.к}^M). \end{aligned} \right\} \quad (237)$$

В СНиП III-Б.3-62 [16] дан допуск на отклонение опорной поверхности оголовника колонны от проектной отметки: $\Delta(H_{о.к}^0) = \pm 20$ мм или $m(H_{о.к}^0) = \pm 6,7$ мм. Исходя из этого, средняя квадратическая ошибка построения отметки на фундаменте $m_{д.г}$ от рабочего репера не должна быть выше следующего значения: $m_{д.г} = 0,36 \times 6,7 = \pm 2,4$ мм.

Для расчета точности высотных геодезических построений при возведении первого яруса многоэтажных зданий воспользуемся полем допуска на разность отметок оголовников колонн в пределах станции нивелирования: $|\Delta \pm| = 20$ мм для третьего класса точности [15]. На основании этого вычисляем стандарт на отклонение от проектной отметки одной колонны:

$$m(H_{о.к}^M) = \frac{|\Delta \pm|}{6 \sqrt{2}} = 2,4 \text{ мм. Тогда из (237) получим: } m_{д.г} = 0,45 \cdot 2,4 = \pm 1,1 \text{ мм.}$$

Приведенные расчеты показывают, что плановые и высотные детальные геодезические построения при возведении

сборных промышленных зданий должны выполняться с достаточно высокой точностью.

Предрасчет точности геодезических построений с использованием теории размерных цепей позволяет разработать оптимальную методику выполнения геодезических работ при детальных разбивках.

Сопоставляя полученные по формулам (232) оценки ($m_{д.г} = \pm 1,8$ мм при $l = 24$ м; $m_{д.г} = \pm 1,7$ мм при $S = 12$ м) со стандартами из [15], например, для самого низкого — третьего класса точности, видим, что оценки завышены и не связаны с конструктивным решением здания.

Расчет допустимых средних квадратических ошибок детального построения разбивочных осей зданий и сооружений рекомендуется выполнять по формулам, которые получены автором на основе составления и решения уравнений размерных цепей для различных типов зданий (табл. 15).

Т а б л и ц а 15

Допустимые средние квадратические погрешности
детального построения разбивочных осей зданий
и сооружений, мм

Классы точности	Формулы для расчета допустимых погрешностей детального построения осей
I-д	$\sigma_S = (0,00004 S^* + 1,0)$
II-д	$\sigma_S = (0,00007 S + 1,5)$
III-д	$\sigma_S = (0,00015 S + 3,0)$
VI-д	$\sigma_S = (0,0006 S + 7,0)$
V-д	$\sigma_S = (0,001 S + 15,0)$

* S — проектное значение длины отрезка на вынесенной в натуру разбивочной оси, выраженное в мм.

19. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ОСНОВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Современные промышленные здания — прямоугольной формы; поэтому они имеют две продольные и две поперечные основные оси, ограничивающие габариты здания. Кроме этого, крупноразмерные промышленные одноэтажные здания имеют несколько пролетных и секционных осей, которые разделяют здание на отдельные блоки, соответствующие технологическим процессам промышленного производства

или этапам выполнения строительно-монтажных работ. Эти оси строятся в натуре одновременно с основными осями здания.

Таким образом, система основных секционных и пролетных осей здания представляет собой локальное геодезическое обоснование для детального геодезического построения этих осей на фундаментных и других опорных плоскостях конструкций. Конечные точки этих осей, смещенные относительно проектного значения, образуют сеть пунктов плановой основы для отдельных зданий.

Указанные оси могут быть построены в натуре также от пунктов общезаводской геодезической основы (строительной сетки или полигонометрии) способом прямоугольных или полярных координат, угловой или линейной засечки.

Для рассмотрения методики расчета необходимой и достаточной точности основных геодезических построений при возведении каркасов одноэтажных зданий воспользуемся формулами (205) и (208).

Если учесть, что на величину замыкающего размера отдельного расчетного участка каркаса оказывают влияние ошибки построения основных, пролетных или секционных осей $m_{o.г.}$, то формулы (205) и (208) принимают следующий вид:

$$m(c_3) = \sqrt{m_{o.г.}^2 + m_{д.г.}^2 + 2(m_{с.к.}^2 + m_{в.к.}^2 + m_{з.к.}^2 + \dots + m_{з.ф.}^2 + m_{н.о.}^2) + m_{д.ф.}^2 + m_{с.с.ф.}^2 + m_{лф.}^2}; \quad (238)$$

$$m(c_{п.}) = \sqrt{m_{o.г.}^2 + m_{д.г.}^2 + 2(m_{с.к.}^2 + m_{в.к.}^2 + m_{с.с.ф.}^2 + \dots + m_{н.о.}^2 + m_{к.с.ф.}^2) + m_{с.п.}^2 + m_{лп.}^2 + m_{д.п.}^2}. \quad (239)$$

Рассмотренные в разделе 18 размерные цепи представляют собой отдельные полигоны общей сети полигонов. Действительно, весь каркас здания состоит из нескольких замкнутых контуров, образованных отдельными пролетами или шагами колонн.

Пусть в поперечном и продольном разрезах здания имеется соответственно g и k полигонов. Тогда суммарная ошибка в размерах здания (L и S), ограниченных основными и секционными осями, с учетом (238) и (239) может быть представлена следующими формулами:

$$m(L) = \sqrt{m_1^2(c_3) + m_2^2(c_3) + \dots + m_g^2(c_3)}; \quad (240)$$

$$m(S) = \sqrt{m_1^2(c_{п.}) + m_2^2(c_{п.}) + \dots + m_k^2(c_{п.})}. \quad (241)$$

Так как размеры полигонов в плоскости продольных и поперечных осей здания равны между собой, то можно записать:

$$\left. \begin{aligned} m_1(c_3) = m_2(c_3) = \dots = m_g(c_3) = m(c_3); \\ m_1(c_n) = m_2(c_n) = \dots = m_k(c_n) = m(c_n). \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

Следовательно,

$$m(L) = m(c_3) \sqrt{g}; \quad (243)$$

$$m(S) = m(c_n) \sqrt{k}. \quad (244)$$

Если смежные замыкающие звенья находятся в корреляционной зависимости, то формулы (240) и (241) принимают следующий вид:

$$m(L) = \sqrt{m_1^2(c_3) + m_2^2(c_3) + \dots + m_g^2(c_3) + \dots + 2 \sum r(c_3^i, c_3^j) [m_i(c_3^i) m_j(c_3^j)]}; \quad (245)$$

$$m(S) = \sqrt{m_1^2(c_n) + m_2^2(c_n) + \dots + m_k^2(c_n) + \dots + 2 \sum r(c_n^i, c_n^j) [m_i(c_n^i) m_j(c_n^j)]}, \quad (246)$$

где $r(c^i, c^j)$ — коэффициент корреляции между ошибками замыкающих звеньев двух соседних полигонов i и j .

Приняв во внимание (242), имеем:

$$m(L) = m(c_3) \sqrt{g + 2 \sum_{i=1}^g r(c_3^i, c_3^i)}, \quad (247)$$

$$m(S) = m(c_n) \sqrt{l + 2 \sum_{i=1}^k r(c_n^i, c_n^i)}. \quad (248)$$

Учитывая, что замыкающие звенья элементарных размерных цепей находятся в парной корреляционной зависимости в одноэтажных зданиях, формулы (247) и (248) могут быть представлены в окончательном виде:

$$m(L) = m(c_3) \sqrt{g [1 + 2r(c_3^i, c_3^i)]}; \quad (249)$$

$$m(S) = m(c_n) \sqrt{k [1 + 2r(c_n^i, c_n^i)]}. \quad (250)$$

На основе формул (221) и (223) получены следующие уравнения для предрасчета точности основных геодезических построений при возведении многоэтажных промышленных зданий:

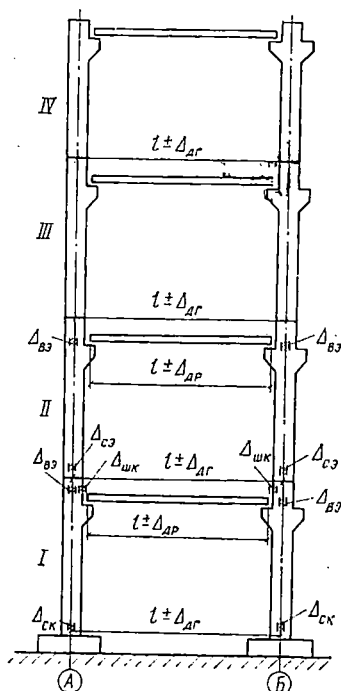


Рис. 15. Размерная поэтажная цепь для каркасов зданий

$$m(L) = m(c_p) \times \sqrt{g [1 + 2r(c_p^i, c_p^j)]}; \quad (251)$$

$$m(S) = m(c_n) \times \sqrt{k [1 + 2r(c_n^i, c_n^j)]}. \quad (252)$$

Многоэтажные здания отличаются от одноэтажных тем, что они развиты как в плане, так и по высоте. Этим объясняется необходимость расчета точности возведения зданий по высоте (рис. 15) при помощи формул (221) и (223).

При геодезическом обслуживании строительства многоэтажных зданий возникает дополнительная стадия геодезических построений — передача основных осей здания на монтажный горизонт возводимого яруса [23]. В этом случае формулы (221) и (223) будут содержать в себе ошибки построения основных осей на монтажном горизонте $m_{п.о}$:

$$m(c_p) = \sqrt{m_{п.о}^2 + m_{д.г}^2 + m_{ш.к}^2 + m_{д.р}^2 + m_{с.р}^2 + m_{л.р}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{з.к}^2 + m_{з.р}^2 + m_{п.о}^2)}; \quad (253)$$

$$m(c_n) = \sqrt{m_{п.о}^2 + m_{д.г}^2 + 2m_{с.р}^2 + m_{д.п}^2 + m_{с.п}^2 + 2m_{ш.п}^2 + m_{л.п}^2 + 2(m_{с.к}^2 + m_{в.к}^2 + m_{п.о}^2)}. \quad (254)$$

При последовательном наращивании этажей или ярусов ошибки в размерах замыкающих звеньев накапливаются

главным образом за счет ошибок $m_{п.о.}$, $m_{с.к.}$, $m_{в.к.}$. Это объясняется тем, что проектами предусматривается строгое соблюдение двух условий: соосность выпусков арматуры стыкуемых элементов колонны и соосность разбивочных рисок с геометрической осью элемента колонны. Однако ввиду ошибок из-за невертикальности элементов колонн $m_{в.о.}$ первое условие нарушается. Если монтаж элементов колонн вести с соблюдением первого условия, то второе условие не будет соблюдено. Поскольку эти условия взаимосвязаны, то происходит поярусное (поэтажное) накопление ошибок $m_{п.о.}$, $m_{с.к.}$, $m_{в.к.}$.

Упростим формулы (253) и (254): $m_{з.к.} = m_{з.р.} = m_{с.р.} = m_{с.п.} = m_{с.к.}$. Тогда для N -го яруса здания имеем:

$$m(c_p)_N = \sqrt{Nm_{п.о.}^2 + m_{д.г.}^2 + m_{ш.к.}^2 + m_{д.р.}^2 + m_{п.р.}^2 + \dots + 2(2m_{с.к.}^2 + m_{п.о.}^2) + 2N(m_{с.к.}^2 + m_{в.к.}^2)}; \quad (255)$$

$$m(c_{п.})_N = \sqrt{Nm_{п.о.}^2 + m_{д.г.}^2 + m_{д.п.}^2 + m_{п.п.}^2 + 2m_{п.о.}^2 + \dots + 3m_{с.к.}^2 + 2N(m_{с.к.}^2 + m_{в.к.}^2)}. \quad (256)$$

Выразив все ошибки m_i через $m_{с.к.}$ и приняв $m_{с.к.} = m_{д.г.} = m_{п.о.}$, получим:

$$m(c_p)_N = m_{п.о.} \sqrt{7N + 11}; \quad (257)$$

$$m(c_{п.})_N = m_{п.о.} \sqrt{7N + 8}. \quad (258)$$

Отсюда

$$m_{п.о.} = \frac{m(c_p)_N}{\sqrt{7N + 11}}; \quad (259)$$

$$m_{п.о.} = \frac{m(c_{п.})_N}{\sqrt{7N + 8}}, \quad (260)$$

где N — количество этажей или ярусов в здании.

Формулы (259) и (260) характеризуют требуемую точность взаимного положения двух соседних промежуточных осей на междуэтажном перекрытии в плоскостях продольных и

поперечных осей здания. Эти формулы действительны при $N \leq 10$. Они могут применяться при расчетах точности лишь в том случае, когда на перекрытие яруса проектируются все промежуточные оси. Однако на перекрытиях каждого яруса многоэтажного здания производится детальное построение основных осей. Поэтому на перекрытие передают только основные и при необходимости секционные оси.

Если основные продольные оси расположены друг от друга через g пролетов, а секционные — через k шагов колонн, то формулы (259) и (260) принимают следующий вид:

$$m_{\text{п. о}} = \frac{m(c_p)_N \sqrt{g}}{\sqrt{7N+11}}; \quad (261)$$

$$m_{\text{п. о}} = \frac{m(c_n)_N \sqrt{k}}{\sqrt{7N+8}}. \quad (262)$$

С учетом выражений (251) и (252) принимаем:

$$m_{\text{п. о}} = \frac{m(c_p)_N \sqrt{g [1 + 2r(c_p^i, c_p^j)]}}{\sqrt{7N+11}}; \quad (263)$$

$$m_{\text{п. о}} = \frac{m(c_n)_N \sqrt{k [1 + 2r(c_n^i, c_n^j)]}}{\sqrt{7N+8}}. \quad (264)$$

По формулам (261) и (263) предусчитываем точность взаимоположения основных продольных осей, а по формулам (262) и (264) — основных поперечных и секционных осей, переданных на междуэтажное перекрытие от осевых знаков исходного горизонта.

По формулам (261) и (262) рассчитываем точность проектирования разбивочных осей с исходного горизонта на монтажный горизонт. В проектах допуск на зазор между выпусками арматуры в ригеле и на боковой грани колонны $\Delta(c_p)$ принимается одинаковой величины, независимо от числа этажей. Этот допуск определяется как разность между максимальным (a_{max}) и минимальным (a_{min}) размерами площадки опирания ригеля на консоль колонны. Например, для многоэтажных промышленных зданий серии ИИ-20 $\Delta(c_p) = \pm 25$ мм. Тогда $m(c_p) = \pm 8,3$ мм при нормиро-

ванном множителе $t = 3$ и уровне надежности $q = 0,9973$. Для этой серии зданий допуск на зазор между торцом ригеля и торцом плиты перекрытия $\Delta(c_{\Pi}) = \pm 30$ мм, а следовательно, $m(c_{\Pi}) = \pm 10$ мм при тех же значениях t и q .

При существующих размерах секций (например, 63×63 м), пролетов и шагов колонн ($l = S = 9$ м) $g = k = 63:9 = 7$. В современных многоэтажных промышленных зданиях число этажей не превышает десяти при общей высоте здания 50 м.

С учетом этих данных по формулам (261) и (262) для десятого этажа ($N = 10$) получаем: $m_{\Pi. o} = \pm 2,4$ мм и $m_{\Pi. o} = \pm 2,9$ мм. Эти оценки характеризуют точность взаимного положения двух смежных осей на монтажном горизонте. Очевидно, при передаче каждой основной разбивочной оси на перекрытие этажа точность должна быть не ниже значения

$$\frac{m_{\Pi. o}}{\sqrt{2}} \approx 1,8 \text{ мм.}$$

Сопоставляя требуемую точность с возможной для $H = 50$ (см. табл. 13), видим, что разбивочные оси необходимо проектировать на монтажные горизонты с помощью теодолита с накладным уровнем при двух положениях его вертикального круга.

Используя формулы (249) и (250), рассчитаем точность основных геодезических построений на поверхности земли. Для одноэтажных зданий примем унифицированный пролет $l = 24$ м и шаг колонн $S = 12$ м. Для унифицированных типовых секций этих зданий примем размеры 144×144 , 120×150 м.

При $L = S = 144$ м число пролетов $g = 144:24 = 6$ и число шагов колонн $k = 144:12 = 12$. Принимая, как и в разделе 17, $m(c_p) = m(c_{\Pi}) = \pm 8,3$ мм, а коэффициент корреляции $r(c^i, c^j) = -0,25$ [22], по формулам (249) и (250) соответственно получим: $m(L) = \pm 17,4$ мм и $m(S) = \pm 24,9$ мм. По этим суммарным ошибкам размеров здания на основе соотношений $m_{\Delta. r} = 0,22 m(c_3)$ и $m_{\Delta. r} = 0,20 \cdot m(c_{\Pi})$ можно получить требуемую точность основных геодезических построений, т. е. $m_{o. r}(L) = 0,22 m(L) = \pm 3,8$ мм и $m_{o. r}(S) = 0,20 m(S) = \pm 5,0$ мм. Тогда определится суммарная ошибка положения точки пересечения продольных и поперечных осей: $M = \sqrt{m_{o. r}^2(S) + m_{o. r}^2(L)} = \pm 6,3$ мм.

Предположим, что осевые знаки основных и секционных осей здания вынесены в натуру путем построения проект-

ного полигона. Так как секции типовые, то полигонометрический ход имеет равные стороны. Пусть $m_{o. r}(S)$ — поперечная ошибка стороны хода, происходящая от ошибок в угловых измерениях. При длине здания 720 м число сторон полигонометрического хода $n = 720 \text{ м} : 144 \text{ м} = 5$. Тогда для всей длины хода поперечный сдвиг конечной точки будет равен:

$$m_g = m_{o. r}(S) \sqrt{n}. \quad (265)$$

Для предрасчета точности угловых измерений в вытянутом полигонометрическом ходе воспользуемся формулой, приведенной в работе [9]:

$$\frac{m_g}{[S]} = \frac{m''_{\beta}}{\rho''} \sqrt{\frac{n+3}{12}}, \quad (266)$$

где m''_{β} — средняя квадратическая ошибка измерения угла; $[S]$ — длина хода.

Если в (266) выразить m_g через суммарную ошибку замыкающего звена размерной цепи, т. е. $m_g = 0,20m(S)\sqrt{n}$, то после некоторых преобразований получим в окончательном виде выражение для m''_{β} :

$$m''_{\beta} = \frac{0,20m(S)}{[S]} \rho'' \sqrt{\frac{12n}{n+3}}. \quad (267)$$

Подставив в формулу (267) значения $m(S) = \pm 0,025 \text{ м}$, $[S] = 720 \text{ м}$ и $n = 5$, получим $m''_{\beta} = \pm 4''$.

Если принять, что в рассматриваемом полигоне $m_{o. r}(L) =$ предельная ошибка стороны хода, то при $m_{o. r}(L) = \pm 3,8 \text{ мм}$ и $L = 144 \text{ м}$ допустимая ошибка линейных измерений должна быть не ниже 1:40 000 (предельная 1:20 000).

Сопоставляя полученные значения ошибок угловых и линейных измерений с допускаемыми инструкцией [7], можно сделать вывод, что основные оси следует выносить в натуре с точностью полигонометрии I разряда.

Найденные таким образом величины допустимых ошибок угловых и линейных измерений должны приниматься для измерений при создании локальной геодезической основы для отдельных зданий.

ГЛАВА VII. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕОБХОДИМОЙ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

20. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ НИЧТОЖНОГО ВЛИЯНИЯ

При строительном производстве важно знать оптимальные границы между ошибками геодезических измерений и ошибками проектного положения конструкций. Для этого необходимо установить ряд критериев, основанных на вероятностном принципе для случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения.

В строительной и геодезической литературе устанавливают величину критериев, не приводя достаточных обоснований и базируясь только на предположениях и упрощенных допущениях. Это привело к значительному разнообразию подобных критериев и большому разнобою в решении этого важного вопроса.

Несомненно, такой разнообразный подход к установлению критериев объясняется как сложностью проблемы, так и спецификой задач, возникающих в каждом случае. Однако такой подход свидетельствует о необходимости продолжения поисков современных и универсальных способов их решения.

Исходя из этого, рассмотрим с позиции теории вероятностей задачу определения оптимального соотношения между ошибками проектного положения конструкций, т. е. установления критериев ничтожного влияния ошибок измерений [20].

Критерием ничтожности ошибок геодезических измерений m_r по отношению к суммарной ошибке положения конструкции m_0 назовем такое отношение их, при соблюдении которого неучет величины m_r в выражении функции m_0 практически (в пределах заданной точности) не изменит последнюю, т. е.

$$km_r \leq m_0, \quad (268)$$

где k — заданное число.

В случае неравенства (268) величина m_r ничтожно мала по отношению к величине m_0 .

Величина m по абсолютному значению — не обязательно ничтожно малое число. Она может быть любым числом, ве-

личина которого зависит от поставленного граничного условия, определяемого коэффициентом k .

Таким образом, определение критерия ничтожности сводится к установлению числа k , удовлетворяющего определенным условиям. Практически всегда можно поставить ряд граничных условий, которые с практической целесообразностью учитывали бы различные факторы, влияющие на точность проектного положения конструкций. Эти граничные условия должны определять такую вероятность появления ошибок геодезических измерений, с которой практически можно было бы не считаться.

Рассмотрим случайные ошибки δ_0 и δ_r , распределенные нормально с математическими ожиданиями $\mu_0 = \mu_r = 0$ и дисперсиями m_0^2 и m_r^2 .

Плотности вероятностей для величин δ_0 и δ_r представляются в следующем виде:

$$\varphi(\delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m_0} e^{-\frac{\delta_0^2}{2m_0^2}}; \quad (269)$$

$$\varphi(\delta_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m_r} e^{-\frac{\delta_r^2}{2m_r^2}}. \quad (270)$$

Очевидно, суммарная ошибка δ_Σ как функция от ошибок δ_0 и δ_r будет также нормально распределена с параметрами ($\mu_\Sigma = 0$ и m_Σ^2). Тогда получим:

$$\varphi(\delta_\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m_\Sigma} e^{-\frac{\delta_\Sigma^2}{2m_\Sigma^2}}. \quad (271)$$

Кривые, выражающие плотности распределения вероятностей (271)—(273), показаны на рис. 16. Интервал m_0 — m_r и определяет соотношение между ошибками геодезических измерений и ошибками проектного положения конструкций.

Точка пересечения кривых $\varphi(\delta_0)$ и $\varphi(\delta_r)$ определится по формуле

$$x_0 = m_0 m_r \sqrt{\frac{2 \ln \frac{m_0}{m_r}}{\frac{m_0^2}{m_r^2} - 1}}. \quad (272)$$

Теперь докажем, что точка x_0 заключена между m_0 и m_r . Так как должно соблюдаться условие $m_r < m_0$, то формулу (272) можно представить в следующем виде:

$$x_0 = m_0 \sqrt{\frac{2 \ln k}{k^2 - 1}} = m_r \sqrt{\frac{2 \ln k}{1 - \frac{1}{k^2}}}, \quad (273)$$

где

$$k = \frac{m_0}{m_r} > 1. \quad (274)$$

Из (274) следует, что $m_0 > x_0 > m_r$, так как

$$k^2 - 1 > 2 \ln k > 1 - \frac{1}{k^2}. \quad (275)$$

Естественно, возникает вопрос, каково то определенное соотношение ошибок m_0 и m_r , начиная с которого целесообразно пренебрегать ошибкой m_r , т. е. каков критерий относительной ничтожности влияния ошибки m_r .

Рассмотрим этот вопрос с учетом параметров $\Delta_r = t_1 m_r$; $\Delta_0 = t_2 m_0$; $\Delta_\Sigma = t m_\Sigma$; $k = \frac{m_0}{m_r}$.

Весь ряд возможных значений случайной величины δ_0 заключен в интервале (зоне рассеяния) $0 - (\delta_0)_{\max} = h$ (исследуется только одна половина нормального симметричного закона распределения).

Интервал $0 - (\delta_0)_{\max}$ включает в себя g наименьших интервалов группирования всех результатов измерения N .

Предположим, что средняя квадратическая ошибка m_0 постоянна в интервале $0 - (\delta_0)_{\max}$. Для дальнейших рассуждений введем новую величину $C = \frac{(\delta_0)_{\max}}{g}$, которая представляет собой наименьшую цену деления общего интервала, т. е. предел точности геодезических измерений.

Действительный закон распределения величины δ_0 должен быть представлен в виде дискретного распределения, вид которого зависит от отношения $\omega = \frac{c}{m_0}$.

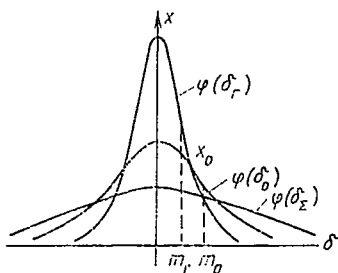


Рис. 16. Кривые плотности распределения вероятностей для величин δ_0 , δ_r и δ_Σ

В дискретном распределении при неизменных ω и коэффициенте риска q число возможных значений зависит от того, сколько раз C укладывается в доверительном интервале $t_2 m_0$. Поскольку первое возможное значение может отстоять от края доверительного интервала на любую величину в пределах $0 - C$, то и общее число возможных значений может изменяться на единицу при постоянном значении ω и m_0 . Таким образом, при заданных m_0, q, ω реальное дискретное распределение может иметь несколько различные вероятности по отдельным значениям, а само число возможных значений может изменяться на единицу.

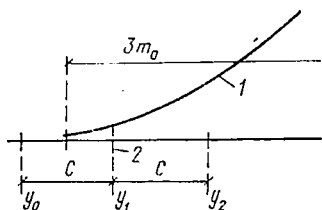


Рис. 17. Границы распределения экстремальных значений δ_0
1 — кривая распределения; 2 — крайнее значение ординаты y

В дальнейшем значения величин δ_0 , накопленная вероятность которых не превышает коэффициента риска q , будем исключать. Вероятность этих значений будет наибольшей тогда, когда граница доверительного интервала попадает на середину интервала c . Это будет наиболее благоприятный случай, на котором мы и остановимся (рис. 17).

Выясним, на сколько может расшириться кривая распределения величины δ_0 , чтобы накопленная вероятность в точке y_0 не превысила коэффициента риска q . Очевидно, это условие будет выполняться, пока доверительный интервал распределения не достигнет точки y_0 . Следовательно, граничным условием будет следующее уравнение:

$$tm_{\Sigma} = tm_0 + \frac{c}{2}, \quad (276)$$

где t — нормированная величина, зависящая от принятого коэффициента риска ($t_2 = t$);

$m_{\Sigma} = \sqrt{m_0^2 + m_1^2}$ — суммарная средняя квадратическая ошибка.

Выразим величину c через среднюю квадратическую ошибку величины δ_0 :

$$c = \omega m_0. \quad (277)$$

Вместо m_{Σ} примем $\sqrt{m_0^2 + m_r^2}$:

$$t \sqrt{m_0^2 + m_r^2} = t m_0 + \frac{\omega m_0}{2}. \quad (278)$$

Введем новую величину, характеризующую соотношения между ошибками геодезических измерений и строительно-монтажных работ:

$$\eta = \frac{m_r}{m_0} = \frac{1}{k}. \quad (279)$$

С учетом (279) уравнение (278) будет иметь следующий вид:

$$\sqrt{1 + \eta^2} = \frac{c}{2t} + 1, \quad (280)$$

откуда

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{c}{2t} + 1\right)^2 - 1}. \quad (281)$$

Уравнение (281) отвечает на поставленный выше вопрос: какое значение ошибки геодезических построений m_r можно считать несущественным по сравнению с нормированной ошибкой строительно-монтажных работ m_0 при принятом коэффициенте риска q .

Пусть средняя квадратическая ошибка строительно-монтажных работ (включая изготовление, монтаж конструкций и деформационные воздействия) $m_0 = \pm 10$ мм. Наименьший интервал кривой плотности распределения вероятностей $c = 3$ мм. Тогда $\omega = \frac{c}{m_0} = 0,3$. Если принять $\Delta_0 = 3m_0$ при $q = 1 - P = 1 - 0,9973 = 0,003$, то по формуле (281) получим:

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{0,3}{2 \cdot 3} + 1\right)^2 - 1} = 0,32.$$

Если $\Delta_0 = 2m_0$ при $q = 1 - P = 1 - 0,95 = 0,05$, то при $\omega = 0,3$ коэффициент $\eta = 0,40$.

Тогда из уравнения (279) получим соответственно для двух случаев $m_r = 0,32m_0$ и $m_r = 0,40m_0$.

Учитывая, что в практике расчета точности измерений вероятности обеспечения допусков Δ_0 , как правило, $P =$

$= 0,95$ или $P = 0,9973$, приходим к выводу, что ошибки геодезических измерений должны находиться в следующем интервале:

$$0,3m_0 < m_r < 0,4m_0. \quad (282)$$

Таким образом, при полученных коэффициентах η , с одной стороны, можно не опасаться нарушения строительных допусков из-за ошибок геодезических построений; с другой стороны, такую точность геодезических построений сравнительно легко обеспечить в современных условиях геодезического производства.

21. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ЗАДАННОЙ НАДЕЖНОСТИ ОЦЕНКИ СТРОИТЕЛЬНОГО ДОПУСКА

Пусть заданы плотности вероятностей измеряемого параметра (размер, положение конструкций или сами ошибки их) $\varphi(x)$ и ошибки геодезических измерений $\varphi(y)$; причем ошибки x и y предполагаются независимыми. Следовательно, надо определить необходимую точность геодезических измерений, если задана доля Q конструкций, ошибки в размерах или положении которых неправильно отнесены к числу допустимых ошибок Δ_0 , т. е. исходя из надежности оценки точности строительно-монтажных работ.

Этот вопрос решается под условием:

$$-\Delta_0 \leq v_0 = v_x + v_y \leq \Delta_0, \quad (283)$$

где Δ_0 — строительно-монтажный допуск;

v_x — отклонение от проектного размера или положения конструкции;

v_y — ошибки геодезических измерений.

Величина Q может быть определена по формуле, предложенной в работе [3] под условием (283):

$$Q = \frac{\varphi(a) \int_0^{\infty} Y \psi(y) dy + \varphi(b) \int_{-\infty}^0 |Y| \psi(y) dy}{F(b) - F(a) + [\varphi(b) - \varphi(a)] \mu_y}, \quad (284)$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности измеряемого параметра x ;

$F(x)$ — интегральный закон распределения величины x ;

μ_y — математическое ожидание ошибки геодезических измерений y .

Известно [4], что для нормального распределения величины y интегральная функция имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} y \psi(y) dy &= \frac{m_y}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\mu_y^2}{2m_y^2} \right] + \mu_y \left[\frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{\mu_y}{m_y} \right) \right]; \\ \int_{-\infty}^0 |y| \psi(y) dy &= \frac{m_y}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\mu_y^2}{2m_y^2} \right] - \mu_y \left[\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\mu_y}{m_y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

Если измеряемый параметр x , ограниченный допустимыми пределами a и b , и ошибки геодезических измерений следуют закону нормального распределения с характеристиками $m_x, \mu_x, m_y, \mu_y = 0$, то, подставив значения (285) в формулу (284) и учитывая, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m_x} \exp \left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2m_x^2} \right],$$

получим:

$$Q = \frac{m_y \exp \left\{ \left[-\frac{(b-\mu_x)^2}{2m_x^2} \right] + \exp \left[-\frac{(a-\mu_x)^2}{2m_x^2} \right] \right\}}{2\pi m_x \left[\Phi \left(\frac{b-\mu_x}{m_x} \right) - \Phi \left(\frac{a-\mu_x}{m_x} \right) \right]}. \quad (286)$$

По формуле (286) при заданной доле Q конструкций, вышедших за пределы допуска Δ_0 , можно определить допустимую среднюю квадратическую ошибку геодезических измерений m_r :

$$m_r \leq \frac{2\pi m_0 Q \left[\Phi \left(\frac{b-\mu_0}{m_0} \right) - \Phi \left(\frac{a-\mu_0}{m_0} \right) \right]}{\exp \left[-\frac{(b-\mu_0)^2}{2m_0^2} \right] + \exp \left[-\frac{(a-\mu_0)^2}{2m_0^2} \right]}, \quad (287)$$

где $m_0 = m_x$; $\mu_0 = \mu_x$.

Если границы допусков a и b симметрично расположены относительно μ_0 , т. е. $b - \mu_0 = \mu_0 - a = tm_0$, то формула (287) принимает простой вид:

$$m_r \leq 2\pi m_0 Q \frac{\Phi(t)}{\exp \left[-\frac{t^2}{2} \right]}. \quad (288)$$

Учитывая, что во всех СНиП, кроме СНиП I-A.4-62, допуски равны $3m$ ($\Delta_0 = 3m$), т. е. нормированный множитель $t = 3$ при надежности обеспечения допуска $P = 0,9973$, а величина $\pi = 3,14$, формулу (288) можно упростить:

$$m_r \leq 2,09 \Delta_0 Q \frac{\Phi(3)}{\exp(-4,5)}. \quad (289)$$

Если же $Q = 0,05$ (наиболее часто принимается в практике), то

$$m_r \leq 0,21 \Delta_0. \quad (290)$$

Таким образом, коэффициенты соотношения между допуском на положение конструкций Δ_0 и средней квадратической ошибкой измерений в формулах (282) и (290) близки друг к другу.

22. КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО НОРМИРОВАНИЮ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Во всех главах СНиП, кроме СНиП I-A.4-62, допуски даны в виде предельно допустимых ошибок, равных 3σ . В то же время в основном нормативном документе — СНиП I-A.4-62 допуски представляют собой удвоенное значение предельно допустимых ошибок, т. е. 6σ . Такой подход к нормированию точности, на наш взгляд, ничем не обоснован и вводит в заблуждение производителей. Более чем странно, что в СНиП I-A.4-62 введено понятие «допуск» как 6σ , а в остальных главах СНиП — понятие «допустимое отклонение», как 3σ , хотя в конечном счете мы имеем дело с предельно допустимыми ошибками.

Очевидно, что в область строительства такое понятие допуска механически перенесено из области машиностроения, где «допуск» как поле рассеивания имеет существенное значение. Применение полей рассеивания в машиностроении вызвано тем, что при сборке деталей машин встречаются сопряжения типа «втулка—вал», когда направление смещения одной детали относительно другой не учитывается и сами отклонения являются существенно положительными величинами, не подчиняющимися закону нормального распределения или другому симметричному закону.

Использование полей рассеивания в качестве допусков для строительно-монтажного и геодезического производства

не имеет смысла, так как сборные здания и сооружения состоят из линейных элементов, которые находятся в статическом состоянии и ориентируются по фиксированным в натуре осям и плоскостям.

Приведенный в работе [19] анализ точности изготовления и монтажа сборных строительных конструкций показывает, что между нормированными и эмпирическими оценками существует значительное расхождение. Такое расхождение можно объяснить следующим. При изготовлении и монтаже конструкций производственные организации стремятся привести их размеры и положения не точно к проектному значению, при котором отклонение v_i равно нулю, а к значению, имеющему отклонения от проектного на величину, равную или близкую допуску Δ . В таком случае величина v_i перестает быть случайной по абсолютному значению, в результате чего нарушается нормальный закон распределения величины v_i .

В строительном-монтажной практике точность выполненных работ повсеместно оценивается (этого требуют и нормированные документы) путем сравнения каждого измеренного отклонения от проектного значения с установленными СНиП допусками на тот или иной вид работ, а не путем сравнения, например, величины km с Δ . В таком случае допуск как предельная ошибка теряет вероятностно-статистический смысл и производственники под допуском подразумевают случайную ошибку отдельного измерения. Больше того, изданные за последние годы некоторыми республиканскими госстроями и Госстроем СССР нормативные документы по оценке качества строительном-монтажных работ узаконили право строителей выполнять проектные размеры сборных элементов или устанавливать их в проектное положение с ошибками, равными допуску (в количестве 75% общего числа).

В соответствующих главах СНиП, ТУ и инструкциях содержится основное требование: принятыми допусками необходимо руководствоваться как в процессе производства строительном-монтажных и геодезических разбивочных работ, так и при приемке-сдаче этих работ для возведения последующих конструкций, а также при вводе в эксплуатацию зданий и сооружений. Об этом свидетельствует и само название глав СНиП и ТУ.

Вместе с тем известно, что между моментом установки отдельных конструкций в проектное положение и моментом приемки, т. е. моментом завершения возведения конструкций того или иного типа (особенно при дифференцированном

способе монтажа), а иногда и всего здания, проходит много времени. В течение этого времени конструкции изменяют первоначальное положение под влиянием различных внешних факторов. Например, на первоначальное положение установленных конструкций (конструкции установлены в проектное положение в пределах допуска) с течением времени влияют не предусмотренные расчетами осадки фундаментов, температурные и упругие деформации. В зависимости от длительности влияния указанных факторов величина изменения проектного положения может превысить допуск на положение конструкций в момент их установки.

Таким образом, приведенные в СНиП и ТУ допуски следует рассматривать как предельные ошибки положения установленных конструкций по проекту не на стадии производства строительно-монтажных работ, а на стадии их завершения и сдачи под монтаж последующих конструкций или сдачи здания в эксплуатацию.

Кроме того, указанные требования нормативных документов до некоторой степени противоречат здравому смыслу. Действительно, при установке конструкций монтажники и геодезисты иногда пытаются (и это им удается) установить их строго в проектное положение, т. е. когда отклонение от проектного положения равно нулю. Но когда накладываются постоянные связи (сварка выпусков арматуры, замоноличивание стыков бетонным раствором и т. д.), конструкцию уводит из строго проектного положения. Эти остаточные отклонения иногда превышают установленные допуски на положение конструкций. Особенно это относится к установке и окончательному закреплению колонн, как одного из основных элементов каркаса здания. Действительно, трудно, а иногда и невозможно предусмотреть в расчетах, чтобы направление перемещения конструкции, вызванное напряжениями при сварке, было направлено в сторону, противоположную направлению отклонения конструкции, полученного при ее установке в проектное положение.

Некоторые авторы считают, что нарушение допусков вызвано завышением норм точности и их несоответствием реальным возможностям строительно-монтажного производства. Такие утверждения нельзя считать правильными.

Нами был выполнен следующий эксперимент в производственных условиях. После установки железобетонных колонн одноэтажного промышленного здания в проектное вертикальное положение осуществлялся геодезический контроль при помощи выверенного теодолита с накладным уров-

нем. Колонны устанавливали при помощи расчалок. После придания оси колонн строго вертикального положения были измерены отклонения оси колонн от вертикали при двух положениях вертикального круга теодолита. Результаты измерения приведены в левой части табл. 16. Когда стыки колонн были окончательно замоноличены с фундаментами, тем же теодолитом опять измеряли отклонения оси колонн от вертикали. Результаты этих измерений приведены в правой части табл. 16. Высота колонн 15 м. Проектом предусмотрено $\Delta_{в.к} = \pm 10$ мм.

Таблица 16

Оценка точности вертикального положения оси колонн
в момент их установки и после окончательного закрепления

Результаты измерений в момент установки				Результаты измерений после окончательного закрепления			
№ п. п.	отклонения v_i° , мм	№ п. п.	отклонения v_i° , мм	№ п. п.	отклонения v_i' , мм	№ п. п.	отклонения v_i' , мм
1	+7	11	+8	1	+8	11	0
2	-5	12	-4	2	-3	12	-5
3	0	13	-1	3	-11	13	0
4	-2	14	-8	4	-8	14	-10
5	+3	15	+6	5	+3	15	+10
6	+3	16	-3	6	+7	16	+12
7	-3	17	+4	7	-5	17	-6
8	0	18	-5	8	+3	18	+7
9	-5	19	-9	9	-5	19	-12
10	0	20	-3	10	-2	20	+4
$\Sigma vv = 451$				$\Sigma v'v' = 953$			

$$m_{в.к}^0 = \sqrt{\frac{451}{19}} = \pm 4,9 \text{ мм}; \quad m'_{в.к} = \sqrt{\frac{953}{19}} = \pm 7,1 \text{ мм};$$

$$\tilde{\Delta}_{в.к}^0 = 2 m_{в.к}^0 = \pm 9,8 \text{ мм}; \quad \tilde{\Delta}'_{в.к} = 2 m'_{в.к} = \pm 14,2 \text{ мм}.$$

Как следует из табл. 16, в момент установки колонн предельная ошибка вертикального положения оси колонн не превысила допуска, т. е. $\tilde{\Delta}_{в.к}^0 < \Delta_{в.к}$ при обычных производственных условиях и аккуратной работе монтажников и геодезистов. Однако после окончательного закрепления колонн на фундаментах и снятия расчалок положение их изменилось, что привело к увеличению отклонений $v_{в.к}$. При этом предельная ошибка $\tilde{\Delta}'_{в.к}$ превысила допуск $\Delta_{в.к}$.

Рассмотренный пример убедительно показывает, что существующие допуски вполне реальны. Однако они должны быть отнесены к определенной стадии возведения зданий и сооружений, так как между моментом установки конструкций в проектное положение и моментом их сдачи-приемки действуют факторы, увеличивающие ошибки первоначального положения.

Из этого вытекает важный вывод: точность на производство работ, установленная в СНиП или в проектах, должна быть выше, чем на приемку, т. е. выше принятой в настоящее время, так как к моменту сдачи возведенных конструкций или здания в целом ошибки увеличиваются вследствие влияния ряда факторов, которые трудно учесть при расчетах. Такой вывод позволяет объяснить тот факт, что при приемке-сдаче возведенных конструкций или зданий отклонения в положении многих конструкций превышают установленные нормативными документами.

Следовательно, в настоящее время производственные методы оценки точности выполненных работ не соответствуют применяемым в исследованиях. Тем самым опровергается утверждение о том, что принятые нормы точности не соответствуют реальным возможностям производства, так как между теоретическими и практическими методами оценки точности выполненных работ нет ничего общего, больше того, — это два диаметрально противоположных метода.

В настоящее время понятие точности сводится к тому, что ошибки выполнения проектных размеров сборных конструкций, установки конструкций в проектное положение и геодезических построений при возведении зданий и сооружений ограничиваются некоторым полем допуска $\pm \Delta$, в которое эти ошибки обязаны уложиться. Поэтому большинство нормативных документов (инструкций, СНиП, технических условий и т. п.) по строительно-монтажному и геодезическому производству разработано в предположении существования такой предельной ошибки, которую не должны превышать результаты измерения. Другим видом сжатого приближенного описания случайной ошибки является принятая в геодезии средняя квадратическая или вероятная ошибка ряда измерений.

Чтобы предотвратить получение неправильного результата измерения, возможны любые перестраховочные приемы нормирования точности. С этой точки зрения в настоящее время оценка по максимальной ошибке является так называемой минимальной оценкой. Эта оценка гарантирует

в наихудшем случае (независимо от частоты его появления) меньшее значение риска, чем любая другая. Однако такой метод нормирования точности практически неприемлем, если наихудшее обстоятельство бывает крайне редко и вовсе не соответствует наиболее часто встречающимся в действительности ситуациям, определяющим фактические условия производства строительно-монтажных работ и геодезических работ.

Чувствуя это обстоятельство, мы вынуждены на практике какое-то число раз отступать от минимальной оценки. Это отступление каждый исследователь делает произвольно, что и приводит к полному разному использованию оценок.

Нами предлагается следующий способ нормирования точности строительно-монтажных и геодезических работ.

Так как первоначальное проектное положение конструкций в каркасе здания или сооружения изменяется под действием ряда трудно учитываемых факторов, то в этих условиях целесообразно (а в некоторых — и обязательно), кроме величины допуска, заданного СНиП, назначать для производства работ более узкие границы допуска, который в дальнейшем будем называть производственным.

Границы производственного допуска Δ' следует рассчитывать так, чтобы при отбраковке отклонений v_i , оказавшихся вне границ производственного допуска, среди остальных отклонений v_i , признанных допустимыми (как оказавшихся внутри границ производственного допуска), было минимальное число отклонений, выходящих за границы приемочного допуска Δ .

Пусть измеренная величина x , характеризующая первоначальное проектное положение конструкций относительно разбивочной оси или горизонта, представляет собой случайную величину, подчиняющуюся нормальному закону распределения с параметрами (μ , σ). Точность положения конструкции считается удовлетворительной, если величина x отличается от проектного ее значения x_0 не более чем на $t\sigma$,

$$\text{т. е.} \quad x - x_0 \leq t\sigma, \quad (291)$$

где $t = \frac{\Delta}{\sigma}$ — нормированный множитель;

σ — средняя квадратическая ошибка положения конструкции.

Возможные изменения величины x ограничиваются следующими интервалами:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 + t\sigma; \\ x_0 - t\sigma; \end{array} \right\} \quad (292)$$

которые назовем соответственно верхним и нижним приемочными пределами. При этом предполагается, что параметры x_0 и σ известны.

Так как на первоначальное положение конструкции влияют многие факторы, то к определенному моменту имеем новое значение случайной величины:

$$X = x + v, \quad (293)$$

где v — случайная ошибка, обусловленная влиянием неучтенных факторов, подчиняющаяся также нормальному закону с параметрами $(0, \sigma)$ и не зависящая от x .

В этом случае совместное распределение случайных величин X и x будет также нормальным с такими параметрами:

$$\left. \begin{aligned} \mu_x = \mu_X = \mu; \quad \sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_x^2; \\ k = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{1 + (\sigma_X/\sigma_x)^2} \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

Представим предельную ошибку первоначального положения конструкций как $\pm t\sigma_x$. Тогда верхний и нижний приемочные пределы соответственно будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_0 - t\sigma_x + t_1\sigma_x; \\ x_0 + t\sigma_x - t_1\sigma_x; \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

где $t_1 = \frac{\Delta'}{\sigma_x}$ — нормированный множитель, удовлетворяющий условию $t\sigma_x \geq t_1\sigma_x$.

Так как положение конструкций к определенному моменту подвержено ошибкам из-за влияния неучтенных факторов, то окончательное заключение о точности положения конструкций может оказаться ошибочным: можно ошибочно исправить положение той или иной конструкции, в то время как оно соответствует проектному в пределах допусков, а также можно ошибочно принять конструкцию с недопустимым отклонением для монтажа последующих конструкций. Обозначим вероятность первого события Q , вероятность второго P . О качестве строительно-монтажных и геодезических работ следует судить именно по этим вероятностям, представляющим собой функции от t , t_1 и $k' = \frac{\sigma_x}{\sigma_X}$, которые можно выразить через функции Φ и T . Разность измеренного зна-

чения x_i и проектного x_0 величины x обозначим через v . Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 P &= P \{ |v| > t\sigma_x, |v| \leq t\sigma_x - t_1\sigma_x \} = P \left\{ \left| \frac{v}{\sigma_x} \right| > t, \right. \\
 &\quad \left. \frac{|v|}{\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x^2}} \leq \frac{t\sigma_x - t_1\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2}} \right\} = 2F[-t, Z(t - k't_1), Z] - \\
 &\quad - 2F[-t, -Z(t - k't_1), Z] = -1 + 2\Phi\left(\frac{t - t_1 k'}{\sqrt{1 + k'^2}}\right) + \\
 &\quad + 2\Phi\left(t, \frac{2t - t_1 k'}{tk'}\right) + 2\Phi\left(\frac{t - t_1 k'}{\sqrt{1 + k'^2}}, \frac{2t + tk'^2 - t_1 k'}{k'(t - t_1 k')}\right) - \\
 &\quad - 2\Phi\left(t, \frac{t_1}{t}\right) + 2\Phi\left(\frac{t + t_1 k'}{\sqrt{1 + k'^2}}, \frac{tk' + t_1}{t - t_1 k'}\right). \quad (296)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= P \{ |v| \leq t\sigma_x, |v| > t\sigma_x - t_1\sigma_x \} = \\
 &= P + 2\Phi(t) - 2\Phi\left(\frac{t - t_1 k'}{\sqrt{1 + k'^2}}\right). \quad (297)
 \end{aligned}$$

Например, если принять $k' = 0,4$; $t = 2$; $t_1 = 0,2$, то по формулам (296) и (297) соответственно получим:

$$\begin{aligned}
 P &= -1 + 2\Phi(1,7827) + 2T(2; 4,9) + 2T \times \\
 &\times (1,7827; 5,5208) - 2T(2; 0,1) + 2T \times \\
 &\times (1,7827; 0,5208) = -1 + 0,9254 + 0,0228 + \\
 &+ 0,0373 - 0,0043 + 0,0275 = 0,0086; \\
 Q &= P + 2\Phi(2) - 2\Phi(1,7827) = 0,0086 + 0,9545 - \\
 &- 0,9254 = 0,0378.
 \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью уравнений (296) и (297) можно определить численное значение вероятности появления ошибок, превышающих установленные пределы, или решить обратную задачу, т. е. запроектировать приемочные или производственные пределы допустимого изменения случайной величины x по заданным вероятностям P и Q . Для решения обратной задачи сначала по формулам (296) и (297) находят коэффициенты t и t_1 , а затем по формулам (292) и (295) определяют границы допусков при известных значениях σ_x и σ_{x_0} .

При разработке методики нормирования точности строительно-монтажных и геодезических работ целесообразно использовать методы теории информации. В этой связи уместно привести высказывание проф., д-ра техн. наук А. С. Чеботарева: «Нужно в теории ошибок измерений учесть и новейшие современные проблемы в виде теории информации...» [25].

Теория информации позволяет разработать принципиально новую методику нормирования точности строительно-монтажных работ и геодезических измерений, основанную на использовании энтропийных критериев вместо вероятностных.

Действительно, общепринятая в настоящее время методика нормирования точности результатов измерения по их предельной доверительной ошибке не является строго обоснованной, так как выбор уравнения доверительной вероятности (например, $P = 0,9973$; $P = 0,99$ или $P = 0,95$), который должен служить мерой надежности, является условным и производится без оценки количества получаемой информации. Так, критерий $\Delta = 3\sigma$ для нормального распределения ошибок основан на интуитивном предположении о том, что вероятность появления случайной ошибки, превышающей этот предел, практически равна нулю. Задача нормирования точности в строительстве сводится к тому, чтобы определить зону рассеивания ошибок, за пределы которой практически не должны выходить ошибки в реальных условиях производства строительно-монтажных и геодезических работ, т. е. установить коэффициенты t и t_1 из формул (295).

Для характеристики случайной величины X К. Шеннон предложил использовать своеобразный момент, равный для закона распределения $P(X)$ следующему интегралу [12]:

$$H(X) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X) \ln P(X) dX \quad (298)$$

и называемый энтропией. Энтропия является некоторой весовой функцией от всех точек кривой закона распределения случайной величины и учитывает все особенности этого закона. Исключительным достоинством энтропии как единой числовой средневзвешенной характеристики закона распределения является ее простота и однозначная связь с количеством информации или дезинформации, содержащейся в исследуемой величине или в ее погрешности. Так,

если измеряемая величина распределена по закону $P(X)$, а в результате измерения получено ее частное значение x_i и погрешность получения этого результата распределена вокруг значения x по закону $P(X/x)$, то энтропия измеряемой величины равна $H(X)$, а энтропия погрешности ее равна $H(X/x)$. Количество информации, полученное в результате этого измерения, согласно теории информации, равно убыли энтропий:

$$I = H(x) - H(X/x). \quad (299)$$

Связь между эффективной величиной погрешности Δ и энтропией $H(X/x)$ погрешности определяется соотношением

$$\Delta = \frac{1}{2} e^{H(X/x)}. \quad (300)$$

Используя выражение энтропии нормально распределенной величины

$$H(X/x) = \ln(2\pi e \sigma^2), \quad (301)$$

на основании (301) можно определить энтропийное значение погрешности:

$$\Delta_9 = 2,07\sigma. \quad (302)$$

Соотношение между $t_9 = \frac{\Delta_9}{\sigma}$ различно для разных законов распределения погрешностей и изменяется от $t_9 = 2,07$ (для нормального закона распределения) до $t_9 = 0$ (для законов распределения, далеких от нормального). Следовательно, значение энтропийного коэффициента t_9 можно рассматривать как характеристику удаления любого закона распределения от нормального.

Использование энтропийного значения погрешностей позволяет однозначно решить вопрос о выборе коэффициентов t и t_1 в формулах (295) и соответствующего уровня надежности оценки.

23. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО НАЗНАЧЕНИЮ КЛАССОВ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

В современном строительстве очень большое значение имеет установление единой системы классов точности на геодезические измерения.

Как показывает опыт, наиболее удачной формой нормирования точности геодезических измерений является систематизация зданий и сооружений в зависимости от их назначения и конструктивных особенностей по классам точности. Чем больше здания и сооружения насыщены сложным технологическим оборудованием и чем сложнее их конструкция, тем выше класс точности геодезических измерений.

В отечественной и зарубежной литературе, а также в нормативных документах нет научно обоснованного назначения классов точности геодезических измерений, за исключением необоснованного их разделения на три класса в СНиП I-A.4-62. Существующие классы точности геодезических измерений и соответствующие геодезические инструменты и приспособления пригодны лишь для отдельных групп и видов зданий и сооружений без учета их современных конструктивных особенностей. В указанных СНиП необоснованно установлено количество классов, соотношение допустимых ошибок между соседними классами и начальное значение допуска для определения исходного (наивысшего) класса точности детальных геодезических измерений.

Поэтому насущной задачей является установление системы классов точности на геодезические измерения для возможно большего числа видов зданий и сооружений с учетом их назначения и конструктивных особенностей.

Практика показывает, что геодезические измерения должны классифицироваться по точности в зависимости от назначения здания или сооружения, его конструктивных особенностей, геометрических размеров, видов конструкций и взаимосвязи технологического оборудования, устанавливаемого внутри здания.

Класс точности на геодезические измерения должен определяться допустимым отклонением от проектного значения, исходя из следующих соображений.

Для каждого класса точности подсчитывается отношение Δ_0/Δ_r , где (Δ_0 — допуск СНиП на проектное положение конструкций в каркасе здания, Δ_r — предельная ошибка метода геодезических измерений, подсчитываемая по формулам, приведенным в главе V).

Из анализа уравнений ошибок (раздел 14) следует, что суммарная ошибка размера замыкающего звена возрастает с увеличением длины горизонтальных конструкций при постоянном значении всех прочих ошибок. Зависимость

допуска на размер конструкции от ее длины выражается степенной функцией. Тогда зависимость отношения Δ_0/Δ_r от порядкового номера класса точности геодезических измерений, очевидно, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_r} = k^i, \quad (303)$$

где k — некоторое постоянное число;

i — целое число, порядковый номер класса.

Область точности геодезических измерений целесообразно разделить на две группы: 1) $\Delta_0/\Delta_r < 3$; 2) $\Delta_0/\Delta_r > 3$. Такое разделение хотя и условно, но практически оправдано, так как образуются две группы для геодезических измерений: первая — при монтаже технологического оборудования и монтаже строительных конструкций надземной части здания; вторая — при подготовке фундаментов, земляных работах и т. д.

Тогда порядковый номер класса точности геодезических измерений i определится по формуле

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_r} = k^{i+2}. \quad (304)$$

Логарифмируя (304), получим:

$$i = \frac{\lg \Delta_0/\Delta_r}{\lg k} - 2. \quad (305)$$

Приняв $k = 1,5$ (так как $\Delta_0/\Delta_r > 3$ и $\Delta_0/\Delta_r < 3$), окончательно получим:

$$i = 5 \lg \frac{\Delta_0}{\Delta_r} - 2. \quad (306)$$

Таким образом, определив проектные значения отношений Δ_0/Δ_r для конкретного типа уравнений размерной цепи, а следовательно, и типа конструктивного решения здания или сооружения, по формуле (306) можно назначить соответствующие классы точности геодезических измерений.

ГЛАВА VIII. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

24. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

В инженерной геодезии можно с успехом использовать математическую статистику. Одним из наиболее интересных разделов этой обширной науки, с точки зрения использования его в строительной геодезии, является дисперсионный анализ. Проф. А. С. Чеботарев неоднократно указывал на целесообразность использования этого интересного и своеобразного метода в геодезии. В статье «Дисперсионный анализ, его роль при обработке результатов геодезических измерений» («Геодезия и картография», 1957, № 12) излагается метод дисперсионного анализа в применении к исследованию некоторых материалов геодезического производства. Результаты исследования показывают широкие возможности применения метода дисперсионного анализа при обработке результатов геодезических измерений.

Как видно из теоретических основ размерных цепей, изложенных в разделе 14, суммарная ошибка замыкающего размера цепи погрешностей есть функция от элементарных ошибок составляющих размерной цепи.

В качестве примера выполним дисперсионный анализ точности планового и высотного положения конструкций в каркасах одноэтажных промышленных зданий, оснащенных подкрановым оборудованием [21].

Высотное положение подкрановых рельсов в пролете здания зависит от следующих ошибок: основного высотного разбивочного обоснования ($m_{о. в. о}$), рабочего высотного обоснования ($m_{р. в. о}$), детального построения проектных отметок на гранях конструкций ($m_{д. в. п}$), высотного геодезического контроля при установке конструкций по высоте ($m_{г. к. п}$). Это основная группа ошибок высотных геодезических построений при возведении каркаса здания и подкранового оборудования ($m_{в. г. п}$). Следующую группу ошибок ($m_{п. к}$) составляют ошибки приведения по высоте опорной плоскости колонны ($m_{п. ф}$) к проектному значению, ошибки в размерах самой колонны до ее консоли ($m_{д. к}$), ошибки в размере (в высоте) поперечного сечения подкрановой балки ($m_{в. б}$) и ошибки в размере высоты подкранового рельса ($m_{в. р}$). Группу монтажных ошибок ($m_{у. к}$)

составляют ошибки, возникающие при установке фундаментов, колонн, балок и рельсов по высоте (при возведении каждой из этих конструкций возникают отдельные ошибки).

К группе ошибок из-за деформационных воздействий ($m_{д. в.}$) прежде всего следует отнести ошибки из-за осадки фундаментов ($m_{о. ф.}$) и ошибки из-за влияния температуры на размеры возводимых конструкций (m_t).

В проектах зданий и в СНиП предусматривается основное требование: при возведении одноэтажных конструкций точность выполнения геодезических измерений и строительно-монтажных работ должна быть одинаковой во всех частях здания. Предусматривается также выбор площадки под возводимое здание с одинаковыми гидрогеологическими условиями для всех его частей.

При этих условиях следует ожидать, что точность выполнения замыкающего размера (проектной отметки подкрановых рельсов) во всех пролетах здания будет одинаковой.

Таким образом, для анализа точности реализации проекта в натуре можно выдвинуть гипотезу о равнозначности выполнения проектной отметки подкрановых рельсов. Такая постановка вопроса вполне естественна, так как в каждом пролете здания при установке конструкций в проектное положение (на одну и ту же отметку) применяются одни и те же геодезические методы и инструменты, методы производства строительно-монтажных работ и конструкции одинаковых размеров.

Пусть число пролетов будет g и в каждом пролете фиксируется высотное положение головки рельсов n раз, т. е. у каждой колонны. Эти n отметок мы рассматриваем как случайную выборку из генеральной совокупности отметок по всем g пролетам. Всего мы располагаем gn отметками, которые обозначены через H_{ij} (i — номер пролета, j — номер фиксируемой в нем отметки). При этом i измеряется от 1 до g , а j — от 1 до n .

Если обозначить среднюю арифметическую из n отметок первого пролета $\bar{H}_1$, среднюю из отметок второго пролета $\bar{H}_2$ и т. д., то их можно представить в следующем общем виде:

$$\bar{H}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n H_{1j}}{n}; \quad \bar{H}_2 = \frac{\sum_{j=1}^n H_{2j}}{n}, \dots, \quad \bar{H}_g = \frac{\sum_{j=1}^n H_{gj}}{n}. \quad (307)$$

При неограниченном числе измерений величины $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_g$ будут представлять собой математические ожидания $\mu(H)$ случайной величины H_i .

Обозначив общую арифметическую средину всех gn отметок $\bar{H}$, получим:

$$\bar{H} = \frac{1}{gn} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n H_{ij}. \quad (308)$$

Применительно к рассматриваемому случаю с учетом формул (307) и (308) напомним в окончательном виде основные формулы однофакторного дисперсионного анализа для нахождения квадратов средних квадратических ошибок высотного положения подкрановых рельсов:

квадрат средней квадратической ошибки отметки i -го пролета

$$m_1^2 = \frac{1}{g(n-1)} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2; \quad (309)$$

квадрат средней квадратической ошибки отметки по отдельным пролетам

$$m_2^2 = \frac{1}{g-1} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2; \quad (310)$$

квадрат средней квадратической ошибки отметки по всем пролетам

$$m_0^2 = \frac{1}{gn-1} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2. \quad (311)$$

В этих формулах приняты те же обозначения, что и в формулах (307) и (308). Введем следующие обозначения:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2; \quad Q_2 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2; \\ Q_0 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2. \quad (312)$$

Предположим, что гипотеза о равноточности отметок верна, и поэтому отметки $H_1, H_2, \dots, H_g$ по каждому пролету имеют одинаковое математическое ожидание $\mu(H)$ и дисперсию $\sigma^2(H)$. Тогда все gn отметки можно рассматривать как выборку из одной и той же генеральной совокупности, а ве-

величина $\frac{Q_0}{gn-1}$ является несмещенной оценкой дисперсии $\sigma^2(H)$ по этой выборке. В таком случае величина $\frac{Q_0}{\sigma^2(H)}$ будет следовать распределению χ^2 с $(gn-1)$ степенями свободы.

Средние по группам $\bar{H}_i$ нормально расположены с дисперсией $\frac{m^2(H)}{n}$ каждая и независимы друг от друга. Средняя арифметическая из g средних $\bar{H}_i$ равна $\bar{H}$. Поэтому при нашей гипотезе квадрат средней квадратической ошибки по отдельным пролетам

$$\frac{1}{g-1} \sum_{i=1}^g (\bar{H}_i - \bar{H})^2 = \frac{Q_1}{n(g-1)} \quad (313)$$

является несмещенной выборочной характеристикой дисперсии.

В таком случае величина

$$\frac{\frac{Q_1}{n}}{\frac{m^2(H)}{n}} = \frac{Q_1}{m^2(H)} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2}{m^2(H)} \quad (314)$$

распределена по закону χ^2 , с $(n-1)$ степенями свободы.

Наконец, величина

$$\frac{\sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2}{m^2(H)} \quad (315)$$

распределена по закону χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы. Распределение χ^2 обладает значительным свойством: две независимые величины χ_1^2 и χ_2^2 , распределенные по законам χ^2 с g и n степенями свободы, соответственно дают в сумме величину, распределенную также по закону χ^2 с $(g+n)$ степенями свободы. Используя это свойство, мы найдем, что компонент

$$\frac{Q_2}{m^2(H)} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2}{m^2(H)} \quad (316)$$

распределен по закону χ^2 с $g(n-1)$ степенями свободы.

Величина $\frac{Q_2}{g(n-1)}$ является также оценкой параметра $m^2(H)$.

При поставленном выше условии равенства $\mu(H)$ и $m^2(H)$ отношение квадратов средних квадратических ошибок $\frac{m_2^2}{m_1^2}$ должно быть близким к единице:

$$\tilde{F} = \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad (317)$$

где $\tilde{F}$ — критерий Фишера (раздел 10).

Таким образом величина $\tilde{F}$, определяемая по формуле (317), в данном случае используется нами как критерий отступления действительности от нулевой гипотезы, т. е. установления равноточности высотного положения подкрановых рельсов в каждом пролете цеха.

Схема однофакторного дисперсионного анализа представлена в табл. 17.

В табл. 18 приведены результаты высотного положения головок рельсов, вынесенных на одну и ту же проектную отметку, по каждому пролету здания. В каждом пролете по два рельса. Поэтому для обработки принято 14 рядов измерений. Для уменьшения объема вычислений в табл. 18 даны не сами измеренные отметки H_{ij} , а их отклонения от проектной отметки H_0 , которая является одинаковой для всех пролетов.

Так как разности δH_{ij} представляют собой сравнительно малые величины, то для вычисления суммы квадратов Q_1 , Q_2 и Q_0 были применены следующие формулы:

$$Q_1 = \sum_{ij} \delta H_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^g \left(\sum_{j=1}^n \delta H_{ij} \right)^2}{n}; \quad (318)$$

$$Q_2 = \frac{\sum_{i=1}^g \left(\sum_{j=1}^n \delta H_{ij} \right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{ij} \delta H_{ij} \right)^2}{gn}; \quad (319)$$

$$Q_0 = \sum_{ij} \delta H_{ij}^2 - \frac{1}{gn} \left(\sum_{ij} \delta H_{ij} \right)^2. \quad (320)$$

Определение значения критерия F

Распределение	Число степеней свободы ν	Сумма квадратов Q	Среднее из квадратов m^2	Критерий $\tilde{F}$
Между системами (сериями)	$g - 1$	$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (\bar{H}_i - \bar{H})^2$	$\frac{1}{g-1} Q_2$	$\tilde{F} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$
Внутри систем (серий)	$g(n-1)$	$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H}_i)^2$	$\frac{1}{g(n-1)} Q_1$	
Суммарное	$gn - 1$	$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2$	$\frac{1}{gn-1} Q_0$	

Результаты геодезических измерений высотного положения подкрановых рельсов

n	δH_1	δH_2	δH_3	δH_4	δH_5	δH_6	δH_7	δH_8	δH_9	δH_{10}	δH_{11}	δH_{12}	δH_{13}	δH_{14}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	+5	+6	0	+1	-14	-19	-15	-10	-3	0	-14	-19	0	+1
2	+7	-6	+4	-9	-13	-14	-5	-3	-12	+9	-13	-14	-1	+2
3	-2	-5	+7	+3	-11	-7	0	-1	-2	+18	-11	-7	-3	+6
4	-3	-1	+5	+8	-8	-9	+1	+4	-4	+17	-8	-9	-3	+6
5	-1	+2	+12	+11	-3	-5	-3	+3	-1	-1	-3	-5	-3	0
6	-2	0	+17	+8	-4	-4	+8	+5	+8	0	-4	-4	-2	+9
7	-2	0	+18	+8	-2	-5	+7	+7	-4	-1	-2	-5	+8	+18
8	+5	+9	+14	+9	0	-8	-3	-2	-6	-11	0	-8	+6	+17
9	-1	+11	+2	+9	-4	-4	+5	-5	-8	-12	-4	-4	-1	+8
10	+6	+8	+1	+11	+1	+3	+8	+3	-1	-11	+1	+3	+8	0
11	+9	+6	0	+10	+6	+3	+3	+7	+3	-4	+6	+3	-4	-11
12	+12	+8	0	+1	-3	+6	+3	+13	+3	+3	-3	+6	-6	-12
13	+12	0	-8	-4	+4	+8	+6	+10	+16	+11	+4	+8	-8	-1
14	+10	+5	-5	+6	-2	+2	+6	+10	+11	+2	-2	-2	-1	+3
15	+6	-1	-6	+6	-8	-8	+6	+5	+1	+10	-8	-8	-3	-11
16	+2	+7	+10	+14	-6	-1	+10	+13	+4	+4	-6	-1	+3	+2

n	δH_1	δH_2	δH_3	δH_4	δH_5	δH_6	δH_7	δH_8	δH_9	δH_{10}	δH_{11}	δH_{12}	δH_{13}	δH_{14}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	0	+ 3	+11	+12	- 2	- 1	+15	+13	+ 4	+ 4	- 2	- 1	+16	+10
18	0	- 1	+9	+13	- 5	0	+18	+13	+ 2	- 6	- 5	0	+11	+ 4
19	+9	+ 9	+17	+15	+ 4	- 3	+ 8	+ 7	-11	+ 1	+ 4	- 3	+ 1	+ 4
20	+4	+ 3	+18	+17	+ 7	+ 1	+ 7	+10	+ 3	- 7	+ 7	+ 1	+ 4	- 6
21	+8	+ 9	+17	+20	+ 8	+ 2	+ 7	+10	- 5	- 4	+ 8	+ 2	+ 4	+ 1
22	-2	0	+14	+16	+ 1	+ 7	+13	+13	- 7	- 7	+ 1	+12	+ 2	- 7
23	+2	- 1	+13	+ 7	+ 6	+ 7	+10	+10	-10	- 7	+ 6	+17	-12	- 4
24	0	+ 2	+ 5	+ 5	+ 7	+ 7	+14	+ 4	-11	- 6	+ 7	+7	+ 3	- 7
25	0	+10	+ 7	+ 5	+ 9	+ 3	+ 6	+12	-10	- 8	+ 9	+ 8	- 5	- 7
26	-2	- 4	+ 5	+ 2	+10	+16	+ 3	+ 3	- 2	-18	+10	+16	- 7	- 7
27	-4	- 3	+ 3	- 1	+14	+10	+ 3	- 4	0	-13	+14	+10	-10	- 6
28	-1	- 6	+ 2	0	+10	+ 2	0	0	+ 1	- 7	+10	+ 2	-11	- 8
29	-3	+ 6	0	+ 3	+14	+ 6	+ 2	+ 2	+ 4	- 6	+14	+ 6	-10	-13
30	-5	+ 4	- 2	+ 1	+ 8	- 8	- 8	0	+ 3	0	+ 8	- 3	- 2	-11
$\Sigma \delta H$	+69	+84	+190	+205	+49	+ 2	+130	+163	-35	-47	+14	+ 6	-20	+ 7
$\Sigma \delta H^2$	891	910	2848	2669	1642	1702	1995	2133	1365	2227	1641	1982	1298	1943
$(\Sigma \delta H)^2$	4761	7056	36100	42025	2401	4	16900	26569	1225	2209	196	36	400	49
$\Sigma \Sigma \delta H = +817; \quad \Sigma \Sigma \delta H^2 = 25\,248; \quad \Sigma (\Sigma \delta H)^2 = 139\,931$														

По табл. 18 и формулам (318)—(320) получаем:

$$Q_1 = 25\,248 - \frac{139\,931}{30} = 25\,248 - 4664 = 20\,584;$$

$$Q_2 = \frac{139\,931}{30} - \frac{1}{420} 817^2 = 4664 - 1589 = 3075;$$

$$Q_0 = 25\,248 - \frac{1}{420} 817^2 = 25\,248 - 1589 = 23\,659.$$

Средние из квадратов m_1^2 , m_2^2 и m_0^2 вычисляем по формулам (309)—(311):

$$m_1^2 = \frac{1}{g(n-1)} Q_1 = \frac{1}{14(30-1)} 20\,584 = 50,7;$$

$$m_2^2 = \frac{1}{g-1} Q_2 = \frac{1}{14-1} 3075 = 236,5;$$

$$m_0^2 = \frac{1}{gn-1} Q_0 = \frac{1}{14(30-1)} 23\,659 = 56,5.$$

Результаты обработки сведены в табл. 19.

Т а б л и ц а 19

Результаты однофакторного дисперсионного анализа

Рассеивание	Число степеней свободы ν	Сумма квадратов Q	Среднее из квад- ратов m^2	Критерий $\tilde{F} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$
Между системами (пролетами)	13	3 075	236,5	4,66
Внутри систем (пролетов)	406	20 584	50,7	
Суммарное	419	23 659	56,5	

Проверив нулевую гипотезу, с помощью критерия находим:

$$\tilde{F} = \frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{236,5}{50,7} = 4,66.$$

При степенях свободы, соответствующих большей дисперсии ($\nu_2 = 13$) и меньшей дисперсии ($\nu_1 = 406$), по таблицам Фишера [29] находим критические границы для $\tilde{F}$, при 5%-ном уровне значимости равные 1,78 и при 1%-ном уровне

не — 2,23. Полученное нами путем обработки результатов измерений значение $\tilde{F}$ превышает указанные границы.

Следовательно, принятая выше нулевая гипотеза о равнозначности отметок неверна. Решить вопрос о том, какой вид работ (геодезические или строительно-монтажные) дал большую погрешность при выносе проекта в натуру, можно лишь путем проведения специального эксперимента.

Можно предполагать, что неравнозначность высотного положения подкрановых рельсов обусловлена либо разной величиной ошибок исходных реперов, либо несоответствием размеров строительных конструкций в различных частях здания проектным данным.

С помощью доверительного интервала и используя данные табл. 18, оценим полученные расхождения в высотном положении двух смежных рельсов, например, 4 и 5:

$$\left\{ (\delta \bar{H}_4 - \delta \bar{H}_5) - \frac{t_{q,h}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} m_2 \right\} < \gamma < \left\{ (\delta \bar{H}_4 - \delta \bar{H}_5) + \frac{t_{q,h}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} m_2 \right\}, \quad (321)$$

где $\delta \bar{H}_4 - \delta \bar{H}_5$ — разность средних значений соответственно по ряду 4 и 5;

$m_2 = \sqrt{m_2^2}$ — средняя квадратическая ошибка между сериями 4 и 5;

n — число измерений в сериях 4 и 5;

γ — расхождение между полученными оценками рядов 4 и 5;

$k = g(n - 1)$.

Принимая $q = 10\%$ и число степеней свободы $g(n - 1) = 14(30 - 1) = 406$, получаем $t_{10, 406} = 1,645$. Подставляя данные из табл. 19 ($m_2^2 = 50,7$ мм, $m_2 = 7$ мм, $\delta \bar{H}_4 - \delta \bar{H}_5 = 5,20$) в формулу (321), получаем:

$$(5,20 - \frac{1,645}{\sqrt{30:2}} 7) < \gamma < (5,20 + \frac{1,645}{\sqrt{30:2}} 7) \text{ или } +2,20 \text{ мм} < \gamma < +8,20 \text{ мм}.$$

Рассматривая размерную цепь для взаимного планового положения двух ниток подкрановых путей (см. рис. 11), видим, что замыкающим звеном этой цепи является расстояние l между осями смежных рельсов.

Ниже приведен дисперсионный анализ точности планового положения подкрановых рельсов в трех пролетах здания. Так как в трех пролетах должны работать краны одинаковой конструкции и размеров, то расстояния между рельсами по каждому пролету должны быть выполнены в натуре с одинаковой точностью, что и составляет нулевую гипотезу в наших исследованиях.

В табл. 20 и 21 обработаны результаты геодезических измерений расстояний между осями смежных рельсов в трех пролетах. Так как проектные расстояния между осями рельсов для каждого пролета одинаковы, то в табл. 20 даны отклонения δl_{ij} измеренных расстояний l_{ij} между осями рельсов от их проектного значения ($l_n = 27,500$ м):

$$\delta l_{ij} = l_{ij} - l_n, \quad (322)$$

где $i = n$ — число измеренных расстояний в отдельном пролете;

$j = g$ — число пролетов.

Результаты измерений обрабатывались по формулам (309), (310), (311), (317), где вместо δH принято δl . Результаты вычислений сведены в табл. 21.

Находим эмпирический критерий $\tilde{F}$ по формуле (317):

$$\tilde{F} = \frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{140,5}{14,7} = 9,55.$$

Согласно табл. 21, имеем $\nu_1 = 2$ и $\nu_2 = 63$. По табл. 20 и 21 находим критические границы для $\tilde{F}$, при 5%-ном уровне значимости равные 2,78 и при 1%-ном уровне — 4,13. Полученное эмпирическое значение критерия $\tilde{F}$ больше того же критерия (критические границы) F_q , взятого из таблицы, при данных степенях свободы ν_1, ν_2 , т. е. $\tilde{F} > F_q$. Поэтому нулевая гипотеза о равнозначности планового положения подкрановых рельсов для каждого пролета неверна.

В каждом пролете оси подкрановых рельсов в натуру выносились следующим образом. От разбивочной оси здания в натуру выносилась ось одной нитки пути, а положение оси второй нитки получено построением проектного расстояния подкранового пролета. При таком методе разбивки осей подкрановых путей ошибки исходных геодезических данных не влияют на точность выноса проектного положения. Следует предполагать, что основными источниками ошибок линейных измерений при выносе в натуру осей рель-

Таблица 20

Результаты геодезических измерений планового положения
подкрановых рельсов

$\begin{matrix} g \\ n \end{matrix}$	1		2		3	
	δl_1	δl_1^2	δl_2	δl_2^2	δl_3	δl_3^2
1	+7	49	-4	16	-6	36
2	+5	25	-1	1	+1	1
3	+6	36	-5	25	+4	16
4	-1	1	-1	1	-6	36
5	-2	4	-3	9	0	0
6	+4	16	-2	4	-5	25
7	0	0	-2	4	0	0
8	0	0	+1	1	+3	9
9	+4	16	-3	9	-7	49
10	-4	16	+1	1	-3	9
11	+1	1	+1	1	-2	4
12	+5	25	-4	16	0	0
13	+7	49	-6	36	-5	25
14	+6	36	-4	16	+7	49
15	+6	36	-5	25	+5	25
16	+4	16	+1	1	+6	36
17	-6	36	0	0	+2	4
18	-5	25	-1	1	+5	25
19	+3	9	-5	25	+5	25
20	+5	25	-4	16	+5	25
21	+6	36	-7	49	+7	49
22	-5	25	-7	49	+6	36
$\Sigma \delta l$	+46	—	-60	—	+22	—
$\Sigma \delta l^2$	—	482	—	306	—	423
$(\Sigma \delta l)^2$	2116	—	3600	—	484	—

$$\Sigma \Sigma \delta l = +8; \quad \Sigma \Sigma \delta l^2 = 1211;$$

$$\Sigma (\Sigma \delta l)^2 = 6200$$

Таблица 21

Вычисление критерия F

Распределение	Число степеней свободы ν	Сумма квадратов Q	Среднее из квадратов m^2	Критерий $\tilde{F}$
Между системами (пролетами)	2	281	140,5	9,55
Внутри систем (пролетов)	63	929	14,7	
Суммарное	65	1210	18,6	

сов в рассматриваемом случае являются ошибки детальных и контрольных геодезических измерений.

Определим расхождения между полученными оценками, например, для пролетов 1 и 2 по формуле

$$\left\{ (\delta \bar{l}_1 - \delta \bar{l}_2) \frac{t_{q,k}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} m_2 \right\} < \gamma < \left\{ (\delta \bar{l}_1 - \delta \bar{l}_2) + \frac{t_{q,k}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} m_2 \right\}, \quad (323)$$

где $\delta \bar{l}_1$ и $\delta \bar{l}_2$ — средние из отклонений δl соответственно по пролету 1 и 2; остальные обозначения такие же, как и в формуле (321).

Из табл. 20 и 21 имеем $\delta \bar{l}_1 = +2,1$ мм, $\delta \bar{l}_2 = -2,8$ мм, $m_2 = \sqrt{m_2^2} = \pm 3,8$ мм. Принимая $q = 10\%$ и $g(n-1) = 3(22-1) = 63$, получим $t_{10, 63} = 1,645$. Подставляя эти величины в формулу (323), получим $+3,0$ мм $< \gamma < +6,8$ мм.

Дисперсионный анализ точности высотного и планового положения конструкций показывает, что точность их положения в натуре не всегда одинакова во всех частях здания или сооружения, хотя техническим заданием и геодезическими расчетами предусматривается равноточность выноса проекта в натуру. Возможно, что в отдельных случаях неравноточность переноса проекта в натуру и не окажет существенного влияния на эксплуатационные качества того или иного промышленного агрегата (мостовых кранов, прокатных станов и т. д.). Однако во избежание возможного нарушения требований СНиП при составлении геодезического проекта разбивочных работ следует предусмотреть необходимость того, чтобы точность выноса проекта в натуру во всех частях зданий и сооружений была одинаковой.

25. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ В КАРКАСЕ ЗДАНИЯ

Из примеров расчета точности геодезических измерений по допускам на положение конструкций в каркасе зданий и сооружений (глава VI) видно, что доминирующей ошибкой, влияющей на размер замыкающего звена, является неvertикальность оси колонны в верхнем ее сечении. При возведении каркаса зданий и сооружений особое внимание обра-

щают на точность установки колонн (как одного из основных элементов каркаса) в строго вертикальное положение. От точности установки колонн в вертикальное положение зависит точность последующей установки других несущих и ограждающих конструкций (ферм, балок, ригелей, плит покрытия и перекрытия, технологических коммуникаций и т. д.). Однако вследствие больших размеров и значительной массы колонн в производственных условиях трудно добиться точного положения оси колонны в вертикальной плоскости. Кроме того, вертикальность оси колонн зависит от способов монтажа и закрепления колонн, а также от способов геодезического контроля точности установки их.

Кроме указанных факторов, на точность вертикального положения колонн влияют деформационные сдвиги (осадка фундаментов, влияние температуры и других внешних условий). Влияние этого фактора тем сильнее, чем больше времени пройдет после окончательной установки и закрепления колонн.

Таким образом, анализируя результаты геодезических измерений вертикального положения оси колонн, мы имеем дело с суммарными ошибками, возникающими под действием указанных факторов.

Для установления необходимой точности геодезических измерений при разбивках и контроле точности положения конструкций, а также для правильной организации самих измерений необходимо знать характер накопления суммарной ошибки вертикальности колонн.

В этой связи несомненный научный и производственный интерес представляет исследование зависимости между величиной ошибки вертикального положения оси колонны и ее высотой (для одноэтажных зданий) или числа элементов сборной колонны (для многоэтажных зданий).

Эти вопросы могут быть решены на основе регрессионного анализа [14]. В регрессионном анализе предполагается известным вид функции

$$\mu(Y/X) = \varphi(x, a, b, \dots, \omega). \quad (324)$$

Задача сводится к отысканию неизвестных параметров $a, b, \dots, \omega$ и определению дисперсии $\sigma^2(Y/X)$. Переменные x_i — не случайные величины и принимают в каждой выборке вполне определенные значения. Наоборот, величина Y предполагается случайной величиной, нормально распределенной с центром рассеивания $\mu(Y/X)$.

средние квадратические ошибки $m_{в.к}$ вычислялись с учетом всех максимальных отклонений.

Результаты измерения отклонений $v_{в.к}$ и вычисления количественных характеристик $\bar{x}$, m сведены в табл. 22. Средние значения $\bar{x}_{в.к}$ и средние квадратические ошибки $m_{в.к}$ вычислены по методу моментов с использованием следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - \tilde{x}}{h}; & y' &= \frac{y - \tilde{y}}{h}; \\ \bar{x}_{вк} &= \bar{x} + \frac{\sum x' n}{\sum n} h; \\ m_{вк} &= \left[\frac{\sum x'^2 n}{\sum n} - \left(\frac{\sum x' n}{\sum n} \right)^2 \right] h^2, \end{aligned} \right\} < \quad (327)$$

где $\bar{x}$ — середина интервального ряда;

h — ширина интервала;

n — число измерений в интервале;

x' , y' — средние значения из результатов измерения в i -м интервале.

Из эмпирической линии регрессии можно предположить, что для данного интервала высот колонн ($5 \leq H \leq 20$ м) имеет место прямолинейная корреляционная зависимость.

Тогда уравнение регрессии можно представить в общем виде:

$$v_{в.к} = a + bH, \quad (328)$$

где $v_{в.к}$ — отклонение оси колонны от вертикали;

H — высота колонны;

a , b — неизвестные параметры.

Задача состоит в определении неизвестных параметров a и b , от которых зависит уравнение (328), при заданных $v_{в.к}$ и H . Эта задача решается по способу наименьших квадратов под условием

$$[v_{в.к}^2] = \min, \quad (329)$$

т. е. сумма квадратов отклонений $v_{в.к}$, вычисленных по уравнению (328), должна быть наименьшей.

Согласно [9], для отыскания неизвестных a и b имеем систему двух нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} an + b[H] - [v_{в.к}] &= 0; \\ a[H] + b[H^2] - [v_{в.к}H] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

где n — число измеренных величин $v_{в.к}$ и H .

Корреляционная таблица ошибок вертикального положения
оси колонн в одноэтажных зданиях

$y', \text{ мм}$	$x', \text{ м}$	Высота ко- лонн, м				n_y	$\Sigma n_{xy} x'$	$\Sigma n_{xy} x'^2$	Σn_y	$\frac{\Sigma n_{xy} x' + \frac{\Sigma n_{xy} x'^2}{\Sigma n_y} h_x}{\Sigma n_y}$
		5	10	15	20					
		-1	0	1	2					
-5	0—5,2									
	2,6	35	25	3	4	67	-24	-0,36		9,6
-4	5,2—10,4									
	6,8	65	20	4	9	102	-35	-0,34		9,7
-3	10,4—15,6									
	13,0	—	21	8	12	41	+32	+0,78		10,8
-2	15,6—20,8									
	18,2	—	9	9	12	31	+35	+1,13		11,1
-1	20,8—26,0									
	23,4	—	2	4	4	10	+9	+0,90		10,6
0	26,0—31,2									
	28,6	—	1	5	9	15	+23	+1,53		11,5
1	31,2—36,4									
	33,8	—	2	5	5	12	+15	+1,25		11,2
2	36,4—41,6									
	39,0	—	—	2	5	7	+12	+1,73		11,7
3	41,6—56,8									
	44,2	—	—	—	3	3	+6	+2,0		12,0
4	46,8—52,0									
	49,4	—	—	—	2	2	+4	+2,0		12,0

Σn_x	100	80	40	70	
$\Sigma n_{xy} y'$	-435	-286	-68	-106	
$\bar{y}_x = \frac{\Sigma n_{xy} y'}{\Sigma n_x}$	-4,35	-3,57	-1,70	-1,51	$\tilde{y} = 28,6; h_y = 5,2;$
$\bar{y}_x = \tilde{y} + \frac{\Sigma n_{xy} y'}{\Sigma n_x} h_y$	6,0	10,1	19,8	20,8	$N = 290; \tilde{x} = 10;$
					$h_x = 5$

Решая уравнения (330), с помощью определителей A , B и D , находим:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} [v_{B-K}] & [H] \\ [v_{B-K} H] & [H^2] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & [H] \\ [H] & [H^2] \end{vmatrix}} = \frac{A}{D}, \quad (331)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & [v_{B.K}] \\ [H] & [v_{B.K} H] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & [H] \\ [H] & [H^2] \end{vmatrix}} = \frac{B}{D}. \quad (332)$$

Так как интервалы высот колонн равны между собой, т. е. $H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H$, то коэффициенты $[H]$, $[H^2]$ можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} [H] &= H(1 + 2 + 3 + \dots + n) = H \frac{n(n+1)}{2}; \\ [H^2] &= H(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = H^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

С учетом выражений (333) неизвестные a и b из (331) и (332) определяются как

$$a = \frac{\begin{vmatrix} [v_{B.K}] & H \frac{n(n+1)}{2} \\ [v_{B.K} H] & H^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & H \frac{n(n+1)}{2} \\ H \frac{n(n+1)}{2} & H^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{vmatrix}}; \quad (334)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & [v_{B.K}] \\ H \frac{n(n+1)}{2} & [v_{B.K} H] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & H \frac{n(n+1)}{2} \\ H \frac{n(n+1)}{2} & H^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{vmatrix}}. \quad (335)$$

Неизвестные a и b целесообразно определять по формулам (334) и (335) в том случае, если результаты измерения не сгруппированы.

В рассматриваемом случае, когда результаты измерения сгруппированы (табл. 22), для нахождения параметров a и b прямой регрессии использован способ моментов.

Для этого сначала вычислялись параметры условной прямой регрессии (табл. 23):

$$v'_{в.к} = a' + b' H. \quad (336)$$

Т а б л и ц а 23

Вычисление параметров эмпирической линии регрессии,
выраженной формулой (336)

x'	n_x	$n_x x'$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x x'^2$	$n_x x' \bar{y}'_x$
-1	100	-100	-435	100	435
0	80	0	-286	0	0
1	40	40	-68	40	-68
2	70	140	-106	280	-212
Σ	280	+80	-896	420	155

$$290b' + 80a' = -895; \quad a' = 1,010;$$

$$80b' + 420a' = 155; \quad b' = 3,362; \quad y' = 1,010;$$

$$x' = -3,362; \quad \frac{y-28,6}{5,2} = 1,010;$$

$$\frac{x-10}{5} = 3,362; \quad y = 1,05x + 0,62.$$

После замены переменных из формул (327) переходили к искомой эмпирической линии регрессии.

Из вычислений получено, что между величиной ошибки вертикального положения оси колонны $v_{в.к}$ и высотой ее H существует зависимость

$$v_{в.к} = 0,62 + 1,05 H, \quad (337)$$

где $v_{в.к}$ — отклонение оси колонны от вертикали в мм;
 H — высота колонны в м.

Оценим точность найденных параметров эмпирической линии регрессии с помощью формулы для сгруппированных результатов измерения:

$$m(v_{в.к}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{n_i (\bar{y}_i - v_{в.к})^2}{N}}, \quad (338)$$

где $m(v_{в.к})$ — среднее квадратическое отклонение от вероятнейшей прямой (337);
 n_i — частоты результатов измерения в i -й группе (табл. 22);
 $\bar{y}_i - v_{в.к} = d_i$ — вероятнейшие ошибки;
 N — число всех измерений данной совокупности.

По вычисленным вероятнейшим ошибкам (уклонениям от расчетной линии регрессии) d_i найдено: $m(v_{в.к}) = \sqrt{\frac{591}{290}} = \pm 1,7$ мм.

Произведем вероятностную оценку коэффициентов a и b дисперсии $m^2(v_{в.к})$. Средние квадратические ошибки коэффициентов a и b можно определить по соответствующим формулам [14]:

$$m_a = \frac{m(v_{в.к})}{\sqrt{N-2}}; \quad (339)$$

$$m_b = \frac{\sqrt{N} m(v_{в.к})}{\sqrt{(N-2) [H^2]}}. \quad (340)$$

Если начало отсчета по оси H не совпадает со средней арифметической $\bar{H}$, то величину $[H^2]$ следует заменить величиной $\Sigma (H_i - \bar{H})^2$.

Чтобы получить доверительный интервал для коэффициента a , примем во внимание, что величина

$$u = \frac{\tilde{a} - a}{\sigma(v_{в.к})} \sqrt{N} \quad (341)$$

распределена нормально с единичной дисперсией и $\mu(u) = 0$. В то же время выборочная величина

$$t' = \frac{(\tilde{a} - a) \sqrt{N-2}}{m(v_{в.к})} = \frac{\tilde{a} - a}{m(\tilde{a})} \quad (342)$$

распределена по закону Стьюдента с $(N - 1)$ степенями свободы.

Тогда доверительный интервал для коэффициента a определяется как

$$\tilde{a} - t'_q m(\tilde{a}) < a < \tilde{a} + t'_q m(\tilde{a}). \quad (343)$$

Аналогично устанавливается доверительный интервал для коэффициента b :

$$\tilde{b} - t_q'' m(\tilde{b}) < b < \tilde{b} + t_q'' m(\tilde{b}), \quad (344)$$

где

$$t'' = \frac{\tilde{b} - b}{m(\tilde{b})}. \quad (345)$$

Так как за начало отсчета для величин x (см. табл. 22) принята середина интервального ряда, то доверительный интервал для m ($v_{в.к}$) определится как и для a , т. е.

$$v_{в.к} - t_q m(v_{в.к}) < \sigma(v_{в.к}) < v_{в.к} + t_q m(v_{в.к}). \quad (346)$$

В рассматриваемом случае $m(v_{в.к}) = \pm 1,7$ мм. Тогда по формулам (339) и (340) при $N = 290$ имеем:

$$m(\tilde{a}) = \frac{1,7}{\sqrt{288}} = \pm 0,1 \text{ мм}; \quad m(\tilde{b}) = \frac{290 \cdot 1,7}{\sqrt{288 \cdot 125}} = \pm 0,15 \text{ мм}.$$

При $P = 0,95$ ($q = 0,05$) и $t_{5; 288} = 1,96$ найдем доверительные интервалы для a и b по формулам (343) и (344):

$$\begin{aligned} 0,62 - 1,96 \cdot 0,1 &< a < 0,62 + 1,96 \cdot 0,1; \\ 0,42 &< a < 0,82; \\ 1,05 - 1,96 \cdot 0,15 &< b < 1,05 + 1,96 \cdot 0,15; \\ 0,76 &< b < 1,34. \end{aligned}$$

Доверительные интервалы для $m(v_{в.к})$ вычисляются по формуле (346).

Таким образом, полученное уравнение регрессии (337) используется для предрасчета точности вертикального положения оси колонн при возведении одноэтажных промышленных зданий в современных производственных условиях. Однако значения найденных эмпирических параметров уравнения (337) будут изменяться по мере совершенствования процесса монтажных работ и геодезического контроля. Важно то, что найден конкретный вид функции зависимости ошибки вертикального положения оси колонны от ее высоты, что позволит объективно назначать и точность геодезических измерений.

Перейдем к определению зависимости вертикального положения оси сборной колонны многоэтажных зданий от числа ее элементов.

Из схемы каркаса многоэтажного промышленного здания (см. рис. 15) видно, что его сборная колонна, состоящая из n отдельных элементов, представляет собой линейную размерную цепь, развитую по высоте здания:

$$H = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n, \quad (347)$$

где H — высота здания;

h_i — длина элемента сборной колонны, равная высоте яруса или этажа здания.

Средняя квадратическая ошибка планового положения геометрической оси i -го элемента сборной колонны может быть получена по формуле

$$m_{п.к}^i = \sqrt{m_{п.о}^2 + m_{д.г}^2 + m_{с.э}^2 + m_{в.э}^2}, \quad (348)$$

где $m_{п.о}$ — ошибка передачи разбивочных осей на уровень i -го перекрытия здания;

$m_{д.г}$ — ошибка детального геодезического построения разбивочных осей, т. е. мест положения элементов колонн на i -м ярусе;

$m_{с.э}$ — ошибка совмещения оси элемента колонны с разбивочной осью (эксцентриситет низа элемента колонны);

$m_{в.э}$ — ошибка вертикального положения оси элемента колонны.

Составляющая $m_{в.э}$ по природе аналогична ранее рассмотренным ошибкам вертикального положения оси колонны одноэтажных зданий. Ошибка $m_{п.к}$ возрастает с увеличением числа ярусов. Об этом свидетельствует кривая эмпирической зависимости величины $m_{п.к}$ от n , полученная по результатам геодезических измерений величин $v_{п.к}$ в натуре. На основе этой кривой можно выдвинуть гипотезу о параболической форме зависимости $m_{п.к}$ от n .

Рассмотрим теоретические основы определения параметров уравнения кривой регрессии по результатам равноточных измерений. Обозначим средние квадратические ошибки $m_{п.к}^i$, полученные по результатам измерений положения оси колонны на каждом ярусе, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, а соответствующие им ярусы — $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Тогда с учетом эмпирической кривой можно предположить, что уравнение кривой регрессии характеризуется параболой второй степени

$$y = a + bx + cx^2. \quad (349)$$

Отсюда уравнение поправок приобретает следующий вид:

$$a + bx_i + cx_i^2 - y_i = v_i. \quad (350)$$

Параметры a , b и c находятся с соблюдением минимума $[v_i^2]$. Это приводит к следующей системе нормальных уравнений [9]:

$$\left. \begin{aligned} an + b[x] + c[x^2] - [y] &= 0; \\ a[x] + b[x^2] + c[x^3] + [xy] &= 0; \\ a[x^2] + b[x^3] + c[x^4] - [x^2y] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (351)$$

Из первого нормального уравнения получим:

$$a + b \frac{[x]}{n} + c \frac{[x^2]}{n} - \frac{[y]}{n} = 0. \quad (352)$$

Тогда уравнение поправок будет иметь следующий вид:

$$b \left(x_i - \frac{[x]}{n} \right) + c \left(x_i^2 - \frac{[x^2]}{n} \right) - \left(y_i - \frac{[y]}{n} \right) = v_i. \quad (353)$$

Введем следующие обозначения:

$$x_i - \frac{[x]}{n} = \alpha_i; \quad x_i^2 - \frac{[x^2]}{n} = \beta_i; \quad y_i - \frac{[y]}{n} = \gamma_i. \quad (354)$$

Тогда уравнение (353) принимает такой вид:

$$b\alpha_i + c\beta_i - \gamma_i = v_i. \quad (355)$$

Нормальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} b[\alpha^2] + c[\alpha\beta] - [\alpha\gamma] &= 0; \\ b[\alpha\beta] + c[\beta^2] - [\beta\gamma] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (356)$$

Отсюда получим детерминанты:

$$\left. \begin{aligned} D &= [\alpha^2][\beta^2] - [\alpha\beta]^2; \\ D_b &= [\beta^2][\alpha\gamma] - [\alpha\beta][\beta\gamma]; \\ D_c &= [\alpha^2][\beta\gamma] - [\alpha\beta][\alpha\gamma]. \end{aligned} \right\} \quad (357)$$

Следовательно, искомые коэффициенты b и c могут быть получены как

$$b = \frac{D_b}{D}; \quad c = \frac{D_c}{D}. \quad (358)$$

Получив значения b и c из (358), третий коэффициент получаем из уравнения

$$a = \frac{[y]}{n} - b \frac{[x]}{n} - c \frac{[x^2]}{n}. \quad (359)$$

Веса коэффициентов определяют по формулам:

$$P_b = \frac{D}{[\beta^2]}; \quad P_c = \frac{D}{[\alpha^2]}; \quad (360)$$

$$\frac{1}{P_a} = \left(\frac{[x]}{n} \right)^2 \frac{1}{P_b} + \left(\frac{[x^2]}{n} \right)^2 \frac{1}{P_c}. \quad (361)$$

Средние квадратические отклонения найденных коэффициентов могут быть определены по формулам:

$$m_a = \frac{m_0}{\sqrt{P_a}}; \quad m_b = \frac{m_0}{\sqrt{P_b}}; \quad m_c = \frac{m_0}{\sqrt{P_c}}; \quad (362)$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{[v^2]}{N - W - 2}}, \quad (363)$$

где N — число всех измерений по всем ярусам здания;
 W — число неизвестных в уравнении (349).

Используя приведенные формулы, мы вывели формулу зависимости средней квадратической ошибки планового положения оси сборной колонны в многоэтажном здании $m_{п.к}^i$ от числа ярусов. Для исследования принято 720 измеренных отклонений положения колонн в 9-этажном промышленном здании. На каждом ярусе получено 80 измерений. По девяти выборкам (в каждой 80 измерений) вычислены средние квадратические ошибки $m_{п.к}^i$ (табл. 24).

На основе средних квадратических ошибок $m_{п.к}^i$ по формулам параболической регрессии найдено уравнение зависимости $m_{п.к}^i$ от числа ярусов:

$$m_{п.к} = 7,66 - 0,386n + 0,312n^2. \quad (364)$$

В предыдущих формулах (для рассматриваемого случая) заменены x на n и y на $m_{п.к}$.

Доверительный интервал для стандартов $\sigma_{п.к}^i$ в каждой точке может быть построен по формуле

$$\frac{\sqrt{v}}{\chi_{1-P}^2} m_{п.к} < \sigma_{п.к} < \frac{\sqrt{v}}{\chi_{1+P}^2} m_{п.к}. \quad (365)$$

Зависимость ошибки планового положения оси
сборной колонны $m_{п.к}$ от числа ярусов
многоэтажного здания n

Число ярусов n	$ m_{п.к}^i $ мм	α	β	γ	$ \tilde{m}_{п.к}^i $ мм	$\varepsilon = m_{п.к}^i - \tilde{m}_{п.к}^i $	Доверитель- ные интервалы $\gamma_1 \tilde{m}_{п.к}^i < \delta_{п.к} < \gamma_2 \tilde{m}_{п.к}^i$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	5,24	-4	-30,5	-10,35	7,58	-2,30	5,29—11,75
2	8,12	-3	-29,5	-7,46	8,12	0,00	5,67—12,60
3	10,75	-2	-28,5	-4,84	9,31	+1,47	6,50—14,45
4	11,00	-1	-27,5	-4,59	11,11	-0,11	7,75—17,24
5	12,39	0	-26,5	-3,20	13,53	-1,10	9,44—21,00
6	17,50	+1	-25,5	+1,91	16,63	+0,88	11,61—25,81
7	19,83	+2	-24,5	+4,24	20,25	-0,41	14,13—31,41
8	24,08	+3	-23,5	+8,49	24,54	-0,46	17,13—38,09
9	31,47	+4	-22,5	+15,88	29,46	+2,03	20,56—45,72
Σ 45	140,38	0	-238,5	+0,07	—	-0,02	—

$$[\alpha^2] = 60; [\beta^2] = 6380,25; [\varepsilon\varepsilon] = 8,70; m_\varepsilon = \sqrt{\frac{8,70}{8}} = \pm 1,29 \text{ мм};$$

$$[\alpha\beta] = 60; [\alpha\gamma] = 21,30; [\beta\gamma] = 175,60; P_b = \frac{379\,200}{6380,25} = 59,43;$$

$$D = 379\,200; D_b = 146\,454; D_c = 11\,838; P_c = \frac{379\,200}{60} = 6320;$$

$$b = \frac{146\,454}{379\,200} = 0,3862; \frac{1}{P_a} = 25 \frac{1}{59,43} + 1004,9 \frac{1}{6320} = 0,58;$$

$$c = \frac{11\,838}{379\,200} = 0,3121; a = 15,59 - 5(-0,3862) - 31,6 \cdot 0,3121 = 7,66;$$

$$[P_a = 1,73; 0,88 < \sigma_\varepsilon < 2,48; m_{п.к} = 7,66 - 0,386n + 0,312n^2.$$

Доверительные интервалы (365) построены при $\nu = 79$ и $P = 0,95$ для каждого значения n .

В графе 6 табл. 24 приведены ошибки $m_{п.к}^i$, вычисленные по формуле (364). Сравнивая $m_{п.к}^i$ с $\tilde{m}_{п.к}^i$ (графа 7), видим, что среднее квадратическое отклонение m_ε мало; это свидетельствует о хорошем согласии результатов измерения с расчетными данными.

26. ТОЧНОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ ПРИ СОЗДАНИИ ЛОКАЛЬНОГО РАЗБИВОЧНОГО ОБОСНОВАНИЯ

Так как в производстве многократные измерения всех элементов строительной сетки не производятся, нами была исследована модель из ряда квадратов строительной сетки. Цель исследования — установление зависимости уравновешенных элементов сетки от числа квадратов методом статистических испытаний.

Для статистического испытания модели ряда квадратов с целью получения вероятностной связи погрешностей элементов строительной сетки и числа квадратов n был построен макет при $n = 10$. Для получения истинных значений элементов ряда все углы приняты равными 90° , стороны — 200 м . Начало координат совмещено с угловым пунктом A первого квадрата.

Далее были рассчитаны ошибки в углы через $1''$, распределенные по закону Гаусса с дисперсией $10''$. Ошибки сторон были получены из той же совокупности с дисперсией 10 мм . Имитация ошибок произведена по принципу случайной повторной выборки, при этом была обеспечена максимальная независимость событий. Пределы для вводимых ошибок не устанавливались.

Всего произвели 10 опытов, после каждого из которых строго уравновешивался ряд по способу условий. Для этого при симметричном расположении осей координат были составлены условные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma v''_{\beta} &= 0; \\ \Sigma v_s \cos \alpha + \frac{1}{\rho''} \Sigma \eta_i v''_{\beta} + f'_x &= 0; \\ \Sigma v_s \sin \alpha - \frac{1}{\rho''} \Sigma \xi_i v''_{\beta} + f'_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (366)$$

Затем были составлены и решены нормальные уравнения коррелат. После каждой реализации опыта вычисляли свободные члены координатных условий, предварительно уравновешивая углы квадратов. По вычисленным коррелатам находили поправки в углы и стороны, после чего по уравновешенным элементам вычисляли дирекционные углы и координаты.

Средняя квадратическая ошибка угла после уравновешивания m_{β} равна $7,9''$, а ошибка до уравновешивания m'_{β} равна $10,1''$. Сравнивая m_{β} и m'_{β} , видим, насколько улуч-

щаются результаты после уравнивания. В данном случае точность возросла в 1,3 раза (на 33%). В том и другом случае средние квадратические ошибки вычислялись по истинным ошибкам.

В процессе статистических испытаний анализировались невязки f'_x и f'_y , полученные из 10 опытов для всех квадратов. Цель этого анализа — проверка наличия систематических погрешностей, которые могут исказить корреляционные связи между зависимыми элементами сети. Проверку проводили методом сравнения дисперсий. Очевидно, при наличии систематических погрешностей невязки в квадратах, связанных общими измеренными элементами (связующими сторонами), будут иметь тенденцию возрастать или убывать. При измерениях систематические ошибки, увеличивающие или уменьшающие невязки в квадратах, могут быть проявлением различных изменяющихся факторов (условий, инструментов, времени наблюдений и др.). При проведении опыта они могут быть следствием самого опыта.

Анализ невязок отдельно по абсциссам и ординатам дает дополнительные сведения относительно источников систематических ошибок — угловые или линейные измерения. Для данного случая можно предположить отсутствие систематических ошибок в невязках, так как угловые ошибки хорошо распределены по нормальному закону и распределение невязок в квадратах также должно подчиняться нормальному закону. Действительно, приращения координат могут рассматриваться как композиция законов распределения. Поэтому достаточно проанализировать эмпирическое распределение ошибок углов и сторон квадратов, чтобы убедиться в том, что и их функции (приращения) также подчиняются закону нормального распределения.

В практике мы имеем дело не с истинными ошибками, а с их результатами — невязками.

Дисперсионный анализ подтверждает существенность различия нескольких дисперсий, принадлежащих одной и той же генеральной совокупности.

В табл. 25 и 26 произведен дисперсионный анализ невязок по однофакторной схеме (фактор — число квадратов).

Там же приняты следующие обозначения: k — число групп (вариантов) вдоль горизонтальной строки; n — число опытов в группах (вдоль вертикальной колонки); $N = kn$ — число всех невязок в совокупности; f_{ij} — невязка в i -й колонке j -й строки; f_i — частная средняя; f — общая средняя.

Дисперсионный анализ невязок в абсциссах $\hat{\chi}$ квадратов сети

№ квадрата № опыта	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	-0,6	+1,9	+2,0	+0,9	-0,2	-1,6	+1,5	+0,4	-0,3	-1,7
2	+0,3	-0,1	+0,9	-3,7	+1,7	+2,6	+0,2	-1,0	+2,4	-0,6
3	-0,2	+2,2	-3,7	+0,7	+0,9	+0,1	-1,6	+1,2	-0,5	-0,1
4	-0,9	+0,9	+2,4	-1,4	+1,1	-1,7	+0,7	+2,4	-4,7	+0,6
5	-1,4	-1,1	-1,7	+0,5	-0,2	-0,2	+1,1	+0,1	-3,9	+1,1
6	-0,7	-0,8	+1,9	-1,2	-0,7	0	-1,4	-0,3	-1,1	-0,8
7	-1,8	+1,1	+3,5	-3,3	+3,6	+1,8	-2,3	-0,4	+1,5	-2,4
8	-0,1	-1,8	-0,9	+0,1	+0,6	+3,0	-0,9	+0,7	+1,3	-3,2
9	-2,2	+4,1	-4,1	-2,2	+3,5	-0,5	-0,9	-1,2	0	-1,0
10	+0,7	+2,1	+0,6	-1,7	-2,1	+1,9	-0,9	-3,2	+3,1	-0,1
$\bar{f}_i$	-0,69	+0,85	+0,09	-1,13	+0,82	+0,54	-0,45	-0,13	-0,22	-0,82

Дисперсионный анализ невязок в ординатах квадратов сети

№ квад- рата № опыта	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	-0,9	-1,5	-0,8	-2,4	-0,4	+1,8	-1,0	+0,6	+3,0	+2,7
2	-1,0	-0,2	+0,1	+0,2	-0,9	-2,7	-0,5	-2,7	+2,8	-1,3
3	-0,6	+1,3	-2,6	+0,2	+0,9	-0,3	-0,1	+1,1	+2,1	-0,5
4	+1,6	+2,3	-1,3	+0,3	+2,2	-1,1	-0,6	-2,3	-2,1	+0,7
5	-1,1	+0,9	-0,8	-2,7	+0,4	-1,6	+0,3	+3,3	-1,1	+1,6
6	-0,3	-1,0	+2,8	+1,2	+0,9	-1,8	-0,2	+1,9	+0,8	+1,2
7	+2,0	-0,4	-0,6	+0,2	+0,1	-0,3	+0,5	-1,1	-2,7	+0,7
8	-1,6	-3,3	-1,0	+2,7	+2,8	+1,8	-0,2	+1,5	+1,0	+0,8
9	+0,5	-2,0	+0,3	+2,4	-0,2	+0,6	+0,2	+2,2	-1,0	+1,1
10	-2,0	+0,2	-1,2	-2,1	+1,0	-1,6	-2,2	+1,6	+0,4	+0,6
$\bar{f}_i$	-0,34	-0,37	-0,49	-0,02	+0,68	-0,52	-0,38	+0,61	+0,32	+0,76

Вычисления к табл. 25:

$$\bar{f} = -0,11; \quad \sum_1^k \sum_1^n f_{ji}^2 = 373,02; \quad n\bar{f}^2 = 1,21; \quad \sum_1^k n\bar{f}_i^2 = 44,0;$$

$$Q = 371,80; \quad Q_1 = 42,80; \quad Q_2 = 329,0; \quad m^2 = \frac{371,80}{99} = 3,72;$$

$$m_1^2 = \frac{42,8}{9} = 4,75; \quad m_2^2 = \frac{329,0}{90} = 3,66;$$

$$\hat{F} = \frac{4,75}{3,66} = 1,3; \quad F_1 = 1,9 (5\%);$$

$$F_2 = 2,5 (1\%); \quad F_3 = 3,3 (0,1\%);$$

$$\hat{F} < F_1 < F_2 < F_3.$$

Вычисления к табл. 26:

$$\bar{f} = -0,04; \quad \sum_1^k \sum_1^n f_{ji}^2 = 235,8; \quad \sum_1^k n\bar{f}_i^2 = 24,3;$$

$$n\bar{f}^2 = 0,16; \quad Q = 235,6; \quad Q_1 = 24,1; \quad Q_2 = 211,5;$$

$$m^2 = \frac{235,8}{99} = 2,38; \quad m_1^2 = \frac{24,1}{9} = 2,68;$$

$$m_2^2 = \frac{211,5}{90} = 2,36; \quad \hat{F} = \frac{2,68}{2,36} = 1,14;$$

$$F_1 = 1,9; \quad F_2 = 2,5;$$

$$\hat{F} < F_1 < F_2 < F_3.$$

В данном случае дисперсионный анализ проводится для того, чтобы найти систематические ошибки по невязкам в квадратах.

Полученная в табл. 25 и 26 компонента Q_1 характеризует рассеивание невязок по квадратам (т. е. их систематические разности). Компонента Q_2 характеризует остаточную случайную погрешность. Сравнивая дисперсию между квадратами с остаточной случайной дисперсией, видим, насколько рельефно проявляется влияние систематических ошибок в невязках.

Различие оценок дисперсий как по абсциссам, так и по ординатам несущественно. Следовательно, с вероятностью, не превышающей 0,95, можно утверждать отсутствие систематических погрешностей, увеличивающих невязки в квадратах.

Дисперсионный анализ подтверждает существенность различия дисперсий и на основании этого дает возможность судить о влиянии факторов на результаты. Однако он не позволяет определить степень этого влияния; эту задачу решает корреляционный анализ.

Как указывалось, функциональные связи между случайными величинами в чистом виде не проявляются, но могут выражаться в стохастической связи. Важной особенностью этой связи является выражение тех изменений, которые испытывает среднее значение одной величины при изменении другой [$y_x = f(x)$].

Обработка статистических данных для установления корреляционной связи в зависимости от объема может быть более или менее сложной. При больших объемах составляют корреляционную таблицу, в клетки которой вписывают частоту n , указывающую, сколько раз при данных значениях x встречаются значения y .

— Для каждого значения x вычисляют средневзвешенную y_x :

$$\bar{y}_x = \frac{\sum ny}{[n]}. \quad (367)$$

По полученным данным строят график изменения $\bar{y}_x = f(x)$, который называется эмпирической линией регрессии. На основании этого графика можно определить вероятнейшую форму корреляционной связи, найти для нее функциональное выражение в виде формулы.

Задачей корреляционного анализа является также определение доверительных границ для вероятнейшего значения исследуемой величины.

Форма связи может выражаться прямолинейной или криволинейной зависимостью. Кривые чаще всего представляют параболы второго или третьего порядка. Коэффициенты уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= ax + b; \\ y &= a + bx + cx^2 \end{aligned} \right\} \quad (368)$$

обычно находят по способу наименьших квадратов.

Принцип нахождения корреляционных зависимостей для цепи квадратов применен в такой последовательности. По каждому опыту после уравнивания определены истинные ошибки σ_i по формуле

$$\bar{F}(x) - F(x) = \sigma_i, \quad (369)$$

где $\bar{F}(x)$ — уравнишенные значения функций измеренных величин;

$F(x)$ — истинные значения функции величин x (вычисленные по неискаженным ошибками значениям x).

Измеренными величинами являются стороны и углы. Исследованию подвергаются абсциссы, ординаты и дирекционные углы (табл. 27—30).

По вычисленным в табл. 27—30 истинным ошибкам определены средние квадратические ошибки по каждому квадрату с использованием следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{[\sigma]}{n}; & v_2 &= \frac{[\sigma\sigma]}{n}; & \mu_2 &= v_2 - v_1^2; \\ m_F^2 &= \mu_2 \frac{n}{n-1}; & m_F &= \sqrt{\mu_2 \frac{n}{n-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (370)$$

где v_1 и v_2 — первый и второй начальные моменты;

m_F — средняя квадратическая ошибка функции;

n — число опытов ($n = 10$);

μ_2 — второй центральный момент.

Указанные формулы обосновываются в теории вероятностей и математической статистике.

По вычисленным значениям m_F установили функциональную зависимость $m_f = f(n)$.

Доверительный интервал вычислили по формуле

$$\tilde{m}_f - t m_{m_f} < m_f < \tilde{m}_f + t m_{m_f}, \quad (371)$$

где t — нормированное отклонение, которое распределено по закону Стьюдента и выбирается из таблиц [14], [28] по принятой доверительной вероятности и числу степеней свободы k .

Значение t принималось равным 2,26 при $k = 9$ и доверительной вероятности $P = 0,95$.

Средняя квадратическая ошибка самой ошибки вычислена по формуле

$$m_{m_f} = \frac{m_f}{\sqrt{2n}}, \quad (372)$$

где n — число опытов.

Предельные границы $\pm 2m_f$ при $P = 0,95$.

Расчет доверительных интервалов и предельных границ ошибок проведен в табл. 31.

Вычисление (в десятках секунд) средних квадратических ошибок
дирекционных углов связующих сторон сети

Направление № опыта	В—Г	Д—Е	Ж—З	И—К	Л—М	Н—О	П—Р'	С—Т	У—Ф	Х—Ц
1	+0,2	-0,4	-1,1	-0,9	+0,1	-0,5	0	+0,3	+0,8	+1,2
2	-0,5	-0,8	-1,8	-1,8	-2,1	-1,1	-0,6	-1,1	-0,8	+0,6
3	+0,3	+0,5	+0,5	+0,9	+1,1	+3,2	+3,2	+1,1	+0,6	-0,1
4	-1,2	-1,3	-1,0	-0,4	-0,4	-0,4	-1,7	-1,2	-1,4	-2,7
5	+0,5	-0,4	-1,3	-2,0	-3,4	-4,1	-4,3	-4,3	-4,4	-3,8
6	+0,3	-0,2	-2,1	-1,6	-1,5	-1,4	-1,6	-0,7	-0,4	-0,5
7	+1,0	+1,8	+1,4	+0,7	+1,2	-0,5	-0,4	+1,3	+0,9	+0,7
8	+1,7	-0,3	-0,1	0,0	-0,3	-1,1	-0,9	-1,2	-1,6	-1,8
9	+0,3	-1,3	-1,9	-2,0	-2,0	-2,2	-0,2	+0,4	-0,2	-0,7
10	-0,3	-0,4	+0,7	+1,2	+1,6	+2,9	+3,4	+4,3	+5,2	+5,7
$[\sigma_\alpha^2]$	6,53	8,12	17,87	17,51	27,73	45,10	47,12	44,52	52,57	60,88
v_2	0,65	0,81	1,79	1,75	2,77	4,51	4,71	4,45	5,26	6,09
v_1	+0,23	-0,28	-0,67	-0,59	-0,57	-0,52	-0,32	-0,11	-0,13	-0,14
μ^2	0,60	0,73	1,34	1,40	2,44	4,24	4,61	4,44	5,24	6,07
m_α^2	0,66	0,80	1,47	1,54	2,68	4,66	5,06	4,89	5,76	6,67
m_α	0,8	0,9	1,2	1,2	1,6	2,2	2,2	2,2	2,4	2,6

Вычисление (в десятках секунд) средних квадратических ошибок
дирекционных углов сети

Направление № опыта	А—Г	Г—Е	Е—З	З—К	К—М	М—О	О—Р	Р—Т	Т—Ф	Ф—Ц
1	-0,5	-0,8	-1,7	-2,7	-2,7	-2,2	-0,1	-0,9	-0,3	-0,7
2	+0,9	-0,6	-0,8	-0,2	+0,2	0	-0,3	+1,1	+0,3	+2,1
3	+0,2	+0,6	+1,5	+0,2	+1,3	+2,5	+1,9	+1,8	+0,6	+1,6
4	+0,5	+0,4	-0,2	-0,1	-3,8	-3,6	-4,4	-5,2	-3,9	-3,5
5	-1,0	-1,5	-1,5	-0,5	+0,1	-0,3	-0,1	-0,7	-2,0	-2,1
6	-0,8	-1,6	+1,4	+1,1	+1,5	+3,0	+3,9	+3,1	+4,8	+6,0
7	+1,1	+0,1	+1,5	+0,3	+0,9	+0,5	-0,4	-0,4	+1,7	+1,6
8	+1,0	+0,1	-1,5	-1,3	-2,6	-1,8	-0,6	+0,9	-0,4	-1,0
9	+1,1	+0,6	+0,9	-1,1	-0,8	+0,3	-1,2	-1,2	-2,2	-2,0
10	+0,1	+0,6	-2,5	-2,7	-2,1	-1,3	-1,4	-0,7	-0,5	-0,1
$[\sigma\alpha^2]$	6,42	7,07	21,59	19,74	38,61	38,46	42,33	45,25	51,0	67,63
v_2	0,64	0,71	2,16	1,97	3,86	3,85	4,23	4,52	5,10	6,76
v_1	+0,25	-0,21	+0,20	-0,70	-0,80	-0,28	+0,13	-0,22	-0,20	+0,17
μ^2	0,58	0,67	2,12	1,48	3,22	3,76	4,21	4,48	5,06	6,74
m_α^2	0,64	0,74	2,36	1,65	3,58	4,17	4,70	4,96	5,62	7,48
m_α	0,8	0,3	1,5	1,3	1,9	2,0	2,2	2,2	2,4	2,7

Вычисление (в см) средних квадратических ошибок ординат пунктов сети

Пункт № опыта	Г	Е	З	К	М	О	Р	Т	Ф	Ц
1	+0,5	0	-0,7	-0,1	-1,5	-0,3	-0,8	-1,8	-1,3	-2,0
2	+1,1	+1,1	+1,2	+0,1	+0,2	+0,4	+0,1	0	0	-0,9
3	-0,3	-0,1	-1,6	-1,5	-1,0	-1,3	0	0	+0,8	+1,3
4	+0,4	+0,1	-0,1	+0,4	+2,4	+2,7	+2,6	+2,6	+1,4	+1,4
5	+0,4	+0,1	+0,1	+0,8	+0,5	-0,8	+0,5	-1,1	-1,9	-2,6
6	+1,0	+0,3	-0,5	+0,5	-1,6	-3,2	-2,9	-4,2	-6,0	-8,3
7	-0,1	+0,3	+0,6	+1,2	+0,9	+2,0	+1,6	-0,2	+0,4	+0,8
8	+0,3	+0,9	+0,7	+1,9	+1,9	+1,6	+1,3	+1,8	+0,8	+2,4
9	-1,0	-1,2	0	+0,5	+2,4	+1,7	+1,6	+2,0	+2,7	+2,8
10	-0,8	+0,1	+1,9	+2,0	+2,9	+2,7	+4,1	+3,1	+2,5	+1,3
$[\sigma_y^2]$	4,61	3,68	9,22	12,62	29,27	37,43	39,71	45,73	58,53	101,15
v_2^2	0,46	0,37	0,92	1,26	2,93	3,74	3,97	4,57	5,85	10,12
v_1^2	+0,15	+0,16	+0,16	+0,29	+0,80	+0,55	+0,80	+0,20	-0,06	-0,38
μ_y^2	0,44	0,35	0,90	1,17	2,30	3,44	3,33	4,57	5,85	10,00
m_y^2	0,49	0,39	1,00	1,30	2,56	3,82	3,70	5,07	6,50	11,1
m_y	0,7	0,2	1,0	1,1	1,6	2,0	1,9	2,3	2,5	3,3

Вычисление (в см) средних квадратических ошибок абсцисс пунктов сети

Таблица 30

Пункт № опыта	Г	Е	З	К	М	О	Р	Т	Ф	Ц
1	-0,8	-0,4	+0,7	+0,5	+0,5	+0,5	+0,7	-0,3	-0,5	-2,5
2	+0,4	+1,3	+2,9	+5,6	+8,1	+10,3	+9,6	+10,5	+10,1	+11,0
3	-0,3	-1,0	-2,5	-2,3	-3,5	-6,2	-8,2	-9,9	-10,4	-12,0
4	-0,6	-1,1	-0,8	-0,8	+2,6	+6,0	+10,0	+15,0	+19,0	+22,4
5	+1,2	+2,6	+4,4	+4,9	+4,5	+4,9	+5,1	+5,9	+7,8	+9,8
6	+0,8	+2,4	+1,1	-0,1	-1,7	-4,7	-8,6	-11,6	-16,1	-21,8
7	-1,1	-1,2	-2,7	-3,1	-3,9	-4,4	-4,1	-3,7	-5,4	-6,8
8	-1,0	-0,9	+0,6	+1,8	+4,4	+6,2	+7,0	+6,0	+6,5	+7,6
9	-1,2	-2,1	-3,0	-1,9	-1,1	-1,5	-0,3	+0,9	+2,9	+4,7
10	-0,2	-0,9	+1,2	+3,8	+5,6	+7,0	+8,5	+9,1	+9,4	+9,5
$[\sigma_x^2]$	7,08	24,09	54,19	88,15	190,53	330,5	500,5	735,9	1054,6	1561,4
v_2	0,71	2,41	5,42	8,82	19,05	33,05	50,05	73,59	105,46	156,10
v_1^2	-0,22	-0,07	+0,16	+0,85	+1,55	+1,81	+1,97	+2,20	+2,30	+2,20
μ^2	0,67	2,41	5,39	8,10	17,65	29,80	46,15	68,74	100,16	151,40
m_x^2	0,74	2,68	6,00	9,00	19,60	33,10	51,50	76,2	112,8	168,2
m_x	0,3	1,6	2,4	3,0	4,4	5,8	7,2	8,7	10,7	13,0

Расчет доверительных интервалов и предельных границ ошибок ($n=10$; $P=0,95$; $k=9$; $t=2,26$)

1. Для вероятнейших ошибок абсцисс, см

$\overline{m}_x$	0,10	1,07	2,15	3,33	4,60	5,93	7,47	9,05	10,73	12,53
$m_{\overline{m}_x}$	0,02	0,24	0,48	0,75	1,03	1,34	1,67	2,03	2,41	2,82
$t m_{\overline{m}_x}$	0,04	0,53	1,08	1,70	2,32	3,03	3,78	4,60	5,45	6,37
$m_{xn пред}$	0,20	2,14	4,30	6,66	9,20	11,96	14,94	18,10	21,46	25,06

2. Для дирекционных углов, сек

$\overline{m}_\alpha$	8,3	10,3	12,4	14,4	16,5	18,6	20,7	22,7	24,7	26,8
$m_{\overline{m}_\alpha}$	1,86	2,24	2,78	3,23	3,70	4,16	4,65	5,10	5,54	6,00
$t m_{\overline{m}_\alpha}$	4,20	5,06	6,28	7,30	8,36	9,40	10,05	11,50	12,52	13,55
$m_{\alpha n пред}$	16,6	20,6	24,8	28,8	33,0	37,2	41,4	45,4	49,4	53,6

3. Для вероятнейших ошибок ординат, см

$\overline{m}_y$	0,49	0,79	1,01	1,27	1,53	1,79	2,05	2,31	2,57	2,83
$m_{\overline{m}_y}$	0,11	0,18	0,23	0,28	0,34	0,40	0,46	0,52	0,58	0,63
$t m_{\overline{m}_y}$	0,25	0,41	0,52	0,63	0,77	0,90	1,04	1,17	1,31	1,42
$m_{yn пред}$	0,98	1,58	2,02	1,54	3,06	3,58	4,10	4,62	5,14	5,66

Для нахождения параметров корреляционных уравнений применительно к данному случаю составляют нормальные уравнения:

для прямой

$$\left. \begin{aligned} nb + a\sum n - \sum m_F &= 0; \\ b\sum n + a\sum n^2 - \sum n m_F &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

для параболы

$$\left. \begin{aligned} na + b\sum n + c\sum n^2 - \sum m_F &= 0; \\ a\sum n + b\sum n^2 + c\sum n^3 - \sum n m_F &= 0; \\ a\sum n^2 + b\sum n^3 + c\sum n^4 - \sum n^2 m_F &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (374)$$

Вычисленные в табл. 27 и 28 средние квадратические ошибки дирекционных углов в ряде квадратов позволяют сделать следующие выводы:

в целом средние квадратические ошибки дирекционных углов увеличиваются с увеличением числа квадратов и для последнего квадрата (X) достигают 26—27";

средние квадратические ошибки дирекционных углов продольных и поперечных (связующих) сторон ряда очень близки по абсолютной величине; для вычисления корреляционного уравнения могут быть приняты их средние значения.

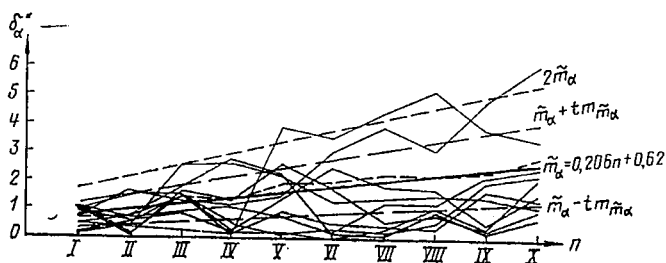


Рис. 18. Зависимость ошибки дирекционного угла сторон сети от числа квадратов

В табл. 31, п. 2 вычислены параметры прямой (рис. 18). Получено эмпирическое уравнение

$$\overline{m''_\alpha} = 0,206n + 6,2. \quad (375)$$

Предельная ошибка дирекционного угла для десятого квадрата достигает $\pm 54''$.

Из рис. 19 видно, что эмпирическая линия регрессии может быть выражена уравнением прямой. Вычислено уравнение этой прямой (табл. 31, п. 3):

$$\overline{m_y} = (0,26n + 0,23) \text{ см.} \quad (376)$$

Для десятого квадрата вероятная ошибка ординаты пункта равна 2,8 см, предельная — 5,6 см. Таким образом, продольное смещение ряда квадратов относительно начального

пункта невелико (относительная средняя квадратическая ошибка определения длины ряда равна $\frac{1}{71\,500}$).

На рис. 20 представлен график эмпирической зависимости для средних квадратических ошибок абсцисс. Эмпири-

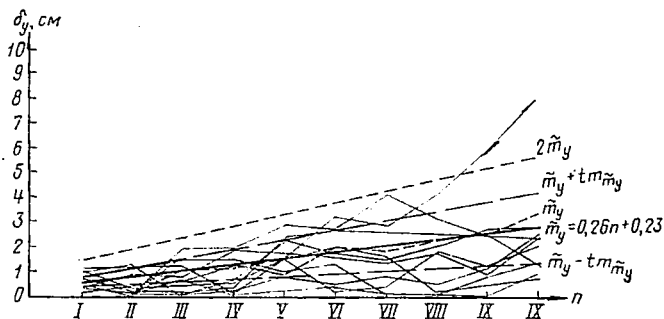


Рис. 19. Зависимость ошибки ординат пунктов сети от числа квадратов

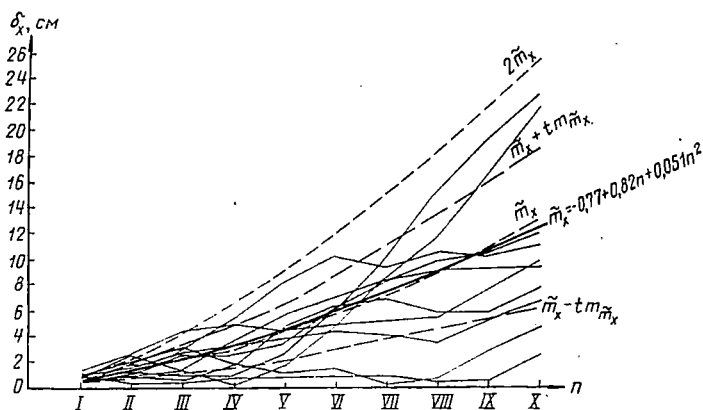


Рис. 20. Зависимость ошибки абсцисс пунктов сети от числа квадратов

ческая линия регрессии представляет кривую, и ее вероятнейшее значение может быть выражено параболой второго порядка. В табл. 31, п. 1 вычислены параметры этой параболы. Получена формула

$$\overline{m}_x = (-0,77 + 0,82n + 0,051n^2) \text{ см.} \quad (377)$$

В табл. 32, 33 подсчитаны средние квадратические ошибки взаимного положения пунктов по разностям истинных ошибок абсцисс и ординат на основе следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} m_{\Delta x} &= \sqrt{\frac{[(\Delta x_i - \Delta x_{i-1})^2]}{n}}; \\ m_{\Delta y} &= \sqrt{\frac{[(\Delta y_i - \Delta y_{i-1})^2]}{n}}. \end{aligned} \right\} \quad (378)$$

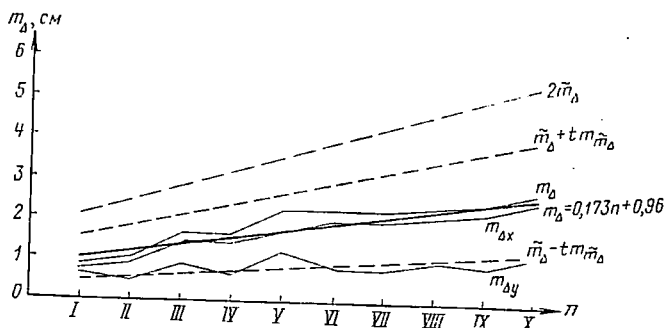


Рис. 21. Зависимость ошибки взаимного положения смежных пунктов сети от числа квадратов

Ниже приведен подсчет общей средней квадратической ошибки разности положения пунктов по формуле

$$m_{\Delta}^2 = m_{\Delta x}^2 + m_{\Delta y}^2. \quad (379)$$

№ квадрата	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
m_{Δ}	0,8	1,0	1,6	1,6	2,2	2,2	2,2	2,3	2,4	2,7

Средняя квадратическая ошибка взаимного положения пунктов заметно возрастает по абсциссам (до 2,5 см для десятого квадрата) и остается постоянной (около 1 см) для ординат (рис. 21).

Общая средняя квадратическая ошибка взаимного положения соседних пунктов может быть выражена уравнением прямой

$$\overline{m_{\Delta}} = (0,173n + 0,96) \text{ см}. \quad (380)$$

Вычисление (в см) средней квадратической ошибки
взаимного положения пунктов сети по ординатам

Сторона № опыта	А—Г	Г—Е	Е—З	З—К	К—М	М—О	О—Р	Р—Т	Т—Ф	Ф—Ц
1	+0,5	—0,5	—0,7	+0,6	—1,4	+1,2	+0,5	—1,0	+0,5	—0,7
2	+1,1	0	+0,1	—1,1	+0,1	+0,2	—0,3	—0,1	0	—0,9
3	—0,3	+0,2	—1,5	+0,1	+0,5	—0,3	+1,3	0	+0,8	+0,5
4	+0,4	—0,3	—0,2	+0,5	+2,0	+0,3	—0,1	0	—1,2	0
5	+0,4	—0,3	0	+0,7	—0,3	—1,3	+1,3	—1,6	—0,8	—0,7
6	+1,0	—0,7	—0,8	+1,0	—2,1	—1,6	+0,3	—1,3	—1,8	—2,3
7	—0,1	+0,4	+0,3	+0,6	—0,3	+1,1	—0,4	—1,8	+0,6	+0,4
8	+0,3	+0,6	—0,2	+1,2	—0,1	—0,2	—0,3	+0,5	—1,0	+1,6
9	—1,0	—0,2	+1,2	+0,5	+1,9	—0,7	—0,1	+0,4	+0,7	+0,1
10	—0,8	+0,9	+1,8	+0,1	+0,9	—0,2	+1,4	—1,0	—0,6	—1,2
$m_{\Delta y}^2$	0,46	0,23	0,82	0,53	1,52	0,77	0,60	1,00	0,84	1,15
$m_{\Delta y}$	0,7	0,5	0,9	0,7	1,2	0,9	0,8	1,0	0,9	1,1

Вычисление (в см) средних квадратических ошибок
взаимного положения пунктов сети по абсциссам

Сторона № опыта	А—Г	Г—Е	Е—З	З—К	К—М	М—О	О—Р	Р—Т	Т—Ф	Ф—Ц
1	−0,8	+0,9	+1,6	+2,7	+2,5	+2,2	−0,7	+0,9	−0,4	+0,9
2	+0,4	−0,7	−1,5	+0,2	−1,2	−2,7	−2,0	−1,7	−0,5	−1,6
3	−0,3	−1,5	+0,2	−1,2	−2,7	−2,0	−1,7	−0,5	−1,6	−0,3
4	−0,6	−0,5	+0,3	0	+3,4	+3,4	+4,0	+5,0	+4,0	+3,4
5	+1,2	+1,4	+1,8	+0,5	−0,4	+0,4	+0,2	+0,8	+1,9	+2,0
6	+0,8	+1,6	−1,3	−1,2	−1,6	−3,0	−3,9	−3,0	−4,5	−5,7
7	−1,1	−1,0	−1,5	−0,4	−0,8	−0,5	+0,3	+0,4	−1,7	+1,4
8	−1,0	+0,1	+1,5	+1,2	+2,6	+1,8	+0,8	−1,0	+0,5	+1,1
9	−1,2	−0,9	−0,9	+1,1	+0,8	−0,4	+1,2	+1,2	+2,0	+1,8
10	−0,2	−0,7	+2,1	+2,6	+1,8	+1,4	+1,5	+0,6	+0,3	+0,1
$m_{\Delta x}^2$	0,70	0,76	1,96	1,86	3,33	3,95	4,02	4,23	4,75	6,20
$m_{\Delta x}$	0,8	0,9	1,4	1,4	1,8	2,0	2,0	2,1	2,2	2,5

27. РАСЧЕТ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Влияние систематических ошибок на результаты геодезических измерений выражается в том, что они постоянно отклоняют результаты измерений в одну сторону от истинного значения. В результате применяемый способ геодезических измерений дает неверные результаты. Для оценки применяемого способа измерений необходимо знать вид появляющейся систематической ошибки; это позволяет сделать вывод о причине ее возникновения и в дальнейшем устранить или по крайней мере уменьшить степень влияния этих ошибок.

Наличие систематических ошибок в результатах измерений можно проверить на основе регрессионного анализа [24]. Полученные результаты измерения x_i сопоставляются с безошибочно определяемыми значениями рассматриваемой случайной величины x_i . При отсутствии случайных и систематических ошибок следовало бы ожидать линейной регрессии с $a = 0$ и $b = 1$. Однако из-за случайных ошибок эти константы в большинстве случаев отклоняются от идеальных значений. Тогда следует проверить, сопоставимы ли разности $|a - 0|$ и $|b - 1|$ со случайной ошибкой или они вызываются дополнительным влиянием систематических ошибок.

Математическое решение этого вопроса показывает, что a и b всегда в слабой степени коррелированы отрицательно, так как они определяются из одной и той же выборки результатов измерения. Поэтому разности $|a - 0|$ и $|b - 1|$ следует рассматривать одновременно при проверке гипотезы о значимости систематических ошибок. Это приводит к двумерному распределению со случайными переменными a и b . Тогда можно построить контурный эллипс (основание двумерного распределения) с центром тяжести $C(a, b)$. Внутри этого эллипса должны быть все пары значений $(a_i; b_i)$, которые с вероятностью P принадлежат соответствующему двумерному распределению. Постоянная систематическая ошибка имеет место тогда, когда прямая $a = 0$ не пересекает этот эллипс (рис. 22). Это значит, что точка $(a = 0; b_i)$ не принадлежит к рассматриваемому двумерному распределению. Аналогичная картина наблюдается, если принять $b = 1$, когда в действительности имеет место линейно изменяющаяся ошибка. Если нужно исследовать, приводит ли изменение того или иного способа геодезических измерений

к появлению систематической ошибки, то в данной системе координат строят соответствующую прямую. Для полученного по измененному способу значения измеряемой величины y_b это будет прямая $a = y_b$. Изменение способа геодезических измерений не приводит к появлению систематической ошибки, если прямая пересекает контур эллипса.

Константы a и b и сумма квадратов $m_0^2 (n - 2)$ при сглаживании значений $x_i = f(X_i)$ определяются по способу наименьших квадратов.

Для упрощения контурный эллипс заменяют тремя парами параллельных касательных. Для этого в рассматриваемой системе координат строят прямоугольник со сторонами по оси ординат

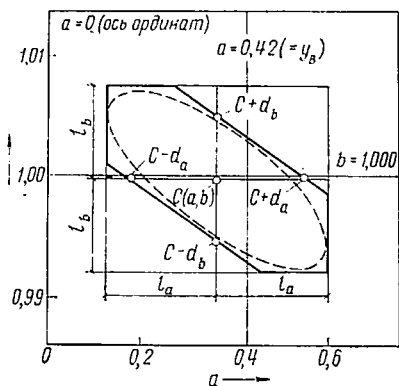


Рис. 22. Построение шестиугольника касательных и проверка систематических ошибок

$$l_b = \sqrt{2F(\bar{P}; f_1 = 2; f_2 = n - 2) m_b^2} \quad (381)$$

и по оси абсцисс (см. рис. 22)

$$l_a = \sqrt{2F(\bar{P}; f_1 = 2; f_2 = n - 2) m_a^2}. \quad (382)$$

Центр тяжести C этого прямоугольника лежит в точке C ($X = a$, $x = b$). Дисперсии m_b^2 и m_a^2 подсчитываются соответственно по формулам:

$$m_b^2 = \frac{m_0^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{nm_0^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad (383)$$

$$\left. \begin{aligned} m_b^2 &= \frac{m_0^2 \sum x_i^2}{n\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{m_0^2 \sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{m_b^2}{n} \sum x_i^2; \\ m_a^2 &= \frac{\sum (y_i - \bar{Y})^2}{n - 2}; \end{aligned} \right\} \quad (384)$$

где

n — число пар измерений;

y_i — измеренное значение переменной Y ;

Y_i — вычисленное значение переменной Y ;

x — значение независимых переменных;

y — значение зависимых переменных.

При построении прямоугольника следует так выбирать масштаб, чтобы стороны l_a и l_b были примерно равны. Для построения касательных центр тяжести принимают за точку пересечения осей. Затем наносят точку $(C \pm d_b)$ на вертикальную ось и точку $(C \pm d_a)$ на горизонтальную ось. Если применить сокращенное обозначение $\sqrt{n \Sigma x_i^2} = Z$, то получим:

$$d_b = \sqrt{\frac{4Zm_0^2 F(\bar{P}; f_1=2; f_2=n-2)}{(\Sigma x_i \Sigma x_i^2) + Z}}; \quad (385)$$

$$d_a = d_b \frac{l_a}{l_b}. \quad (386)$$

Обе параллельные прямые, проходящие через точки $(C + d_b)$, $(C + d_a)$, $(C - d_b)$ и $(C - d_a)$, являются касательными к искомому эллипсу. Они включают доверительный интервал двумерного распределения при заданной вероятности $\bar{P}$. Для проверки систематической ошибки строят прямые $a = 0$ (при наличии постоянной ошибки) и $b = 1$ (при наличии линейно изменяющейся ошибки). Систематическая ошибка существует тогда, когда прямая не пересекает эллипс или шестиугольник касательных.

Проверка гипотезы о присутствии систематических ошибок в результате измерений может быть значительно упрощена, если имеют место только постоянные или изменяющиеся ошибки. Соответствующие сведения получают из предварительной графической проверки. Для этого разности между значениями результатов измерения наносят на график, упорядочивая их по величине x . Если эти точки рассеяны параллельно по оси абсцисс, то следует ожидать появления только постоянных ошибок. Если получается восходящее или убывающее множество точек, это указывает на линейно изменяющуюся ошибку.

Для проверки постоянной ошибки для каждой пары значений истинного и измеренного значения получают разности $d = y_i - Y_i$. Отклонение среднего значения разности $\bar{d} = \Sigma d_i / n$ от истинного значения $d_0 = 0$ проверяют по уравнению

$$t = \frac{|\bar{d}|}{m_d} \sqrt{n}. \quad (387)$$

Определив стандарт

$$m_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} \quad (388)$$

со степенями свободы $\nu = n - 1$, получаем схему расчета, представленную в табл. 34.

Т а б л и ц а 34

Схема расчета для определения t

Число измерений	Истинные значения Y_i	Измеренные значения y_i	Разности d_i
1	Y_1	y_1	$d_1 = y_1 - Y_1$
2	Y_2	y_2	$d_2 = y_2 - Y_2$
.	.	.	.
.	.	.	.
n	Y_n	y_n	$d_n = y_n - Y_n$
			Среднее значение $\bar{d} = \sum d_i / n$

Найденное значение t сравнивают с табличным значением $t(P, \nu)$. Постоянная ошибка имеет место, если $t > t(P, \nu)$.

Для определения линейно изменяющейся ошибки измеренные значения y_i сравнивают с истинными значениями Y_i . Здесь справедливо соотношение

$$y_i = bY_i. \quad (389)$$

Отклонение коэффициента регрессии b от истинного значения $b = 1$ проверяют по формуле

$$t = \frac{|1 - b|}{m_b}. \quad (390)$$

Стандарт m_b вычисляют по формуле

$$m_b = \frac{m_0^2}{\sum y_i^2}. \quad (391)$$

Линейно изменяющаяся ошибка имеет место, если $t > t(P, \nu)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А в и р о м Л. С. Допуски в крупноэлементном жилищном строительстве. М., Госстройиздат, 1963.
2. Б о л ь ш а к о в В. Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., «Недра», 1965.
3. Б о р о д а ч е в П. А. Основные вопросы теории точности производства. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1950.
4. В а н д е р В а р д е н. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.
5. В и д у е в Н. Г. Теория размерных цепей и ее применение для расчета точности разбивочных работ. В сб.: Инженерная геодезия, вып. III, Киев, 1966.
6. Инструкция по нивелированию 1, 2, 3 и 4-го классов. М., «Недра», 1965.
7. Инструкция по топографо-геодезическим работам для городского, промышленного и поселкового строительства (СН 212-62). М., Госстройиздат, 1962.
8. К е м н и ц Ю. В. Теория ошибок измерений. М., «Недра», 1967.
9. Л е б е д е в Н. Н. Инженерная геодезия, ч. V. М., «Недра», 1970.
10. Л е в ч у к Г. П. Инженерная геодезия, ч. II—III. М., «Недра», 1970.
11. М а з и н М. Р., С ы т н и к В. С. Методика расчета и обеспечения точности сборных железобетонных конструкций промышленных зданий. ЦБТИ Минмонтажспецстроя СССР, 1970.
12. Н о в и ц к и й П. В. Понятие энтропийного значения погрешности. «Измерительная техника», 1966, № 8.
13. Р у д а к о в В. И. О необходимой точности и размерах сторон геодезической сетки. Труды НИИГАиК, т. 19, № 1, 1967.
14. С м и р н о в Н. В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965.
15. СНиП I-A. 4-62. Система допусков. Основные положения.
16. СНиП III-B.3-62. Железобетонные и бетонные конструкции сборные. Правила производства и приемки монтажных работ.
17. СНиП III-B.5-62. Металлические конструкции. Правила производства и приемки монтажных работ.
18. С ы т н и к В. С. Элементы расчета точности сборных зданий и сооружений. В сб.: Межотраслевые вопросы строительства, вып. 2, 1969.
19. С ы т н и к В. С. О точности изготовления и монтажа сборных строительных конструкций. В сб.: Межотраслевые вопросы строительства, вып. 2, 1971.

20. Сыт ник В. С. Расчет точности геодезических построений с учетом строительных допусков. Материалы НТ конференции. Волгоград, 1969.

21. Сыт ник В. С. Применение дисперсионного анализа при обработке результатов геодезических разбивочных работ. В сб. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 5, 1966.

22. Сыт ник В. С. Определение точности геодезических разбивок при строительстве промышленных зданий и сооружений. «Промышленное строительство», 1969, № 9.

23. Сыт ник В. С. К вопросу точности геодезических построений при возведении многоэтажных промышленных зданий. «Промышленное строительство», 1972, № 11.

24. Х а л ь д А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.

25. Че б о т а р е в А. С. О теории ошибок и математической статистике. Труды МИИГАиК, вып. 54, 1968.

26. Че б о т а р е в А. С. Дисперсионный анализ, его роль при обработке результатов геодезических измерений. «Геодезия и картография», 1957, № 12.

27. Ш о р Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.

28. Э г л и т В. И. Допуски в конструкциях из сборного железобетона. М., Госстройиздат, 1963.

29. Я н к о Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	3
ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗ- МЕРЕНИЙ	10
1. Виды ошибок измерений	10
2. Оценка точности по результатам равноточных измерений	12
3. Оценка точности по результатам неравноточных измерений	14
4. Оценка точности по разностям двойных измерений	16
ГЛАВА II. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	18
5. Понятие о вероятности	18
6. Случайные величины и их числовые характеристики	19
7. Нормальное распределение	22
8. Эмпирические распределения частот ошибок	25
ГЛАВА III. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАСЧЕТА И АНА- ЛИЗА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ	34
9. Доверительные оценки количественных параметров	34
10. Наиболее мощные статистические критерии	39
11. Определение необходимого числа измерений	47
ГЛАВА IV. ТЕОРИЯ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕ- НИЙ	52
12. Краткие сведения о точности возведения зданий и соору- жений	52
13. Виды размерных цепей и принципы их составления	56
14. Расчет точности по размерным цепям	63
15. Определение оптимального соотношения ошибок в систе- ме размерных цепей	68
16. Расчет геодезических и строительных допусков на основе доверительных интервалов	73
ГЛАВА V. РАСЧЕТ ВОЗМОЖНОЙ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕ- СКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРЯ- МОЙ ЗАДАЧИ	81
ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОЙ И ДОСТАТОЧНОЙ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОС- НОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ	96
17. Расчет точности контрольных геодезических измерений в строительстве	96
18. Расчет точности геодезических измерений при детальных разбивочных работах	103
19. Расчет точности измерений при производстве основных геодезических построений	117
ГЛАВА VII. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕОБХОДИ- МОЙ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ	125
20. Расчет точности геодезических измерений по критерию ничтожного влияния	125
21. Расчет точности геодезических измерений по заданной надежности оценки строительного допуска	130
22. Критические замечания и предложения по нормированию точности геодезических измерений в строительстве	132
23. Рекомендации по назначению классов точности геодези- ческих измерений	141
ГЛАВА VIII. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕ- СКИХ ИЗМЕРЕНИЙ	144
24. Дисперсионный анализ точности результатов геодезиче- ских измерений	144
25. Регрессионный анализ точности положения конструкций в каркасе здания	156
26. Точность геодезических построений при создании локаль- ного разбивочного обоснования	169
27. Расчет систематических ошибок геодезических измерений	186
Список литературы	190

Цена 50 коп.

22 903 *Д4*

22238