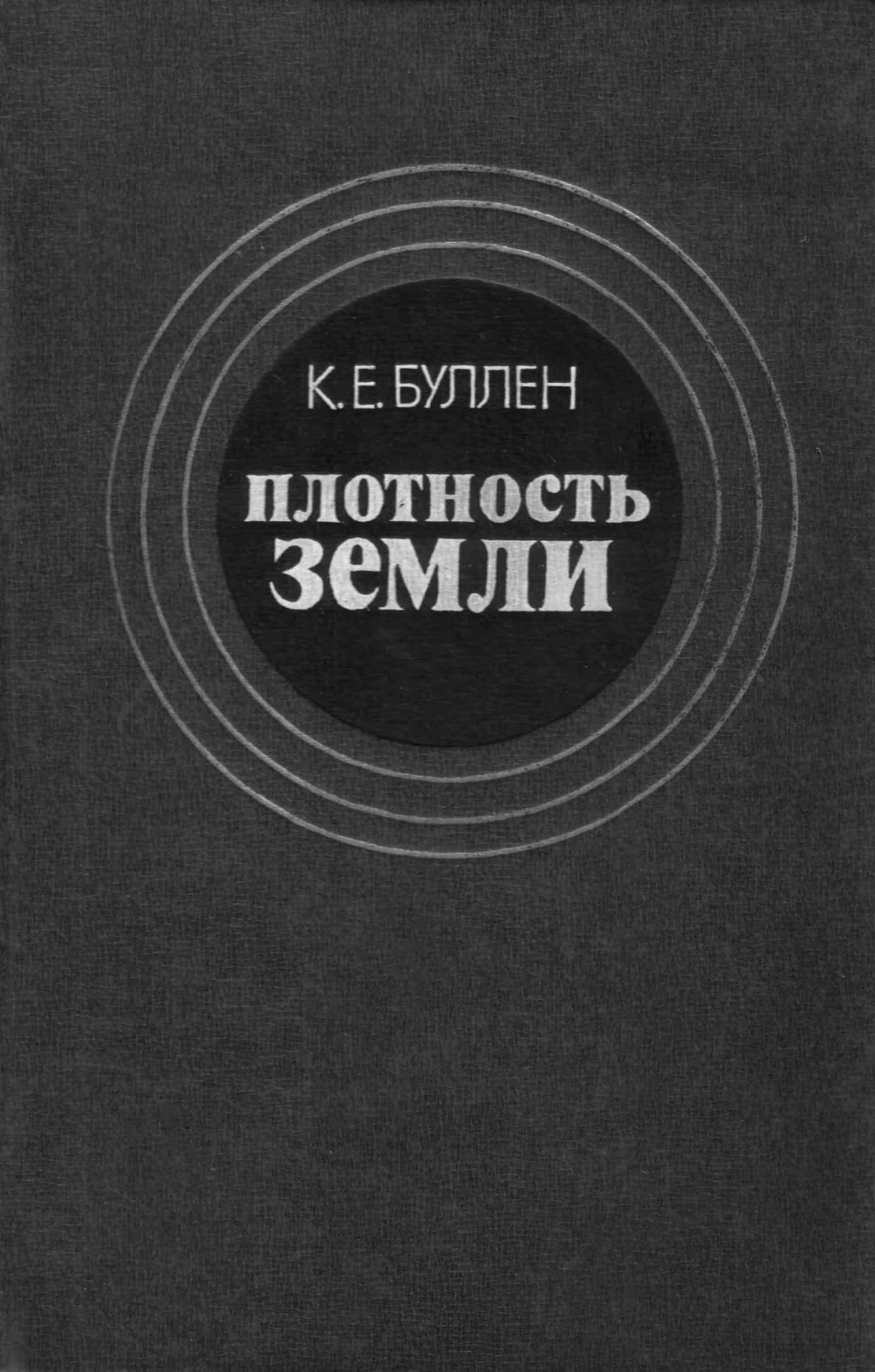




К. Е. БУЛЛЕН

**ПЛОТНОСТЬ
ЗЕМЛИ**



The earth's density

K. E. BULLEN

M.A., Sc.D., Hon. D. Sc., F.R.S.
University of Sydney

London
Chapman and Hall
1975

К. Е. БУЛЛЕН

плотность земли

Перевод с английского
Э.Н. Бессоновой ,
А.А. Гвоздева
и Т.В. Рузмайкиной

Под редакцией
В.Н. Жаркова

Издательство «Мир»
Москва
1978

Изучение внутреннего строения нашей планеты как единого целого и построение модели Земли — одна из важнейших задач геофизики. Именно этой проблеме посвящена книга профессора Сиднейского университета К.Е. Буллена.

В книге изложены методы построения моделей Земли на основе теорий упругости, гравитационного потенциала, распространения сейсмических волн, собственных колебаний Земли. Рассмотрены история вопроса и современные модели, рассчитанные с использованием новейших данных, в том числе результатов наблюдений за движением искусственных спутников Земли. В конце книги сделан сравнительный анализ внутреннего строения и состава Земли, Луны и других планет Солнечной системы.

Книга рассчитана на геофизиков, астрономов, физиков, геологов — специалистов и студентов.

*Редакция космических исследований,
астрономии и геофизики*

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга принадлежит перу недавно (1976 г.) скончавшегося профессора Сиднейского университета К.Е. Буллена. Выпуская эту книгу, мы отдаем дань уважения видному австралийскому сейсмологу. Вклад К.Е. Буллена в геофизику определяется прежде всего тем, что он сделал последний и завершающий шаг в построении первых современных моделей Земли, т.е. распределений плотности, давления, модулей упругости, ускорения силы тяжести и других параметров в недрах планеты. Предыдущая книга К.Е. Буллена "Введение в теоретическую сейсмологию" вышла в русском переводе в 1966 г.; сейчас ее можно найти только в библиотеках да на столах сейсмологов, которые постоянно пользуются ею в своей работе.

Новая книга посвящена важнейшей теме — построению модели Земли. Значение этой темы определяется тем, что она увязывает воедино основные проблемы физики земных недр и сейсмологии. Будучи сейсмологом, профессор Буллен последние 40 лет занимался проблемой распределения плотности в Земле и по существу своей книгой подвел итог тому, что ему удалось сделать в рассматриваемой области. В этом основная ценность книги. Второй момент, который заслуживает упоминания, — это высокие литературные и педагогические достоинства книги. Она написана просто и ясно и доступна достаточно широкому кругу читателей.

Несколько слов о содержании книги. Поскольку при построении моделей Земли наряду с данными сейсмологии используются данные гравиметрии и геодезии (размеры и средняя плотность Земли, ее момент инерции и т.д.), то в целом проблема моделирования Земли оказывается весьма древней. Поэтому вполне естественно, что первая глава отведена истории вопроса. Затем следуют главы, посвященные основным теоретическим инструментам для моделирования планеты — теории гравитационного потенциала и сферическим функциям. После этого автор переходит к основному содержанию книги — построению и анализу моделей Земли с использованием теории сейсмических волн

и распределения их скоростей в Земле, а также с учетом сжимаемости земного вещества, поверхностных волн и собственных колебаний Земли.

Важным вопросам посвящены заключительные главы книги.

Глава 16 обращена в будущее. В ней дана постановка задачи об оптимальной и стандартной моделях Земли. Под оптимальной моделью понимается модель, наилучшим образом удовлетворяющая всем имеющимся данным о Земле; стандартная же модель также удовлетворяет данным наблюдений, но она еще и достаточно проста, чтобы ее было легко использовать в повседневной геофизической практике. Последняя, 17-я глава книги посвящена моделям планет и Луны. Эта глава написана более конспективно, чем предыдущие, и не отражает в полной мере мощное развитие планетной темы в геофизике, имевшее место в последние годы. В связи с этим мы лишь отметим, что в настоящее время общепринятым стало мнение, что планеты-гиганты (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) представляют собой горячие адиабатические тела, а новейшие данные наблюдений Плутона свидетельствуют о его малых размерах (диаметр ~ 3300 км) и массе (несколько тысячных долей массы Земли). За подробностями мы отсылаем читателя к книге: Jupiter. Studies of the interior, atmosphere, magnetosphere and satellites, T. Gehrels, ed., The University of Arizona Press, 1976 (готовится русский перевод), а также к обзорной периодической литературе.

В последние годы все больший интерес проявляется к построению модели Земли как решению обратной задачи геофизики. Критические замечания Буллена по этому вопросу верны и полезны, а позиции тверды, поскольку, сравнивая новейшие модели со своими прежними, он наглядно демонстрирует их близость друг к другу. Тем не менее рассмотрение всей проблемы как постановки обратной задачи геофизики позволяет глубже понять те трудности, которые встали перед геофизикой сегодняшнего дня, хотя в практическом плане методы решения обратных задач геофизики еще не обнаруживают решающего превосходства над решениями, полученными методом подбора.

Построив в начале 40-х годов первую реальную модель Земли, К.Е. Буллен всю жизнь находился под впечатлением этого успеха. Став видным представителем классической сейсмологии, он неизменно оставался на этих позициях. Однако, пожалуй, именно это обстоятельство позволило ему образцово изложить основы классической сейсмологии и геофизики, имеющие отношение к проблеме построения моделей Земли. В наше время машинных расчетов недостаточное знание и понимание основ классической сейсмологии часто является форменным бичом многих работ. В этом смысле книга К.Е. Буллена является весьма актуальной и современной.

В.Н. Жарков

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге сделана попытка свести воедино те нити доказательств, которые привели нас к современному знанию распределения плотности внутри Земли. Подробно описываются также другие свойства, которые тесно связаны с плотностью, в том числе давление, сжимаемость и уплотнение вещества, его жесткость, скорости сейсмических волн, коэффициент Пуассона и напряженность гравитационного поля. Вопросы термодинамики, химического состава и фазовых переходов обсуждаются только в тех случаях, когда они более или менее прямо связаны с определением плотности; однако данная книга не претендует на всеобъемлющий охват проблем, связанных с распределениями температуры внутри Земли и ее состава. Рассмотрены также распределения плотности в недрах других планет.

Стремление найти ключ к пониманию распределения плотности в Земле долгое время возбуждало любознательность исследователей, и цель настоящей книги состоит в том, чтобы изложить в развитии ту проблему, которая пленяла автора на протяжении почти всей его научной деятельности. В первых главах рассказывается об основных достижениях в построении моделей Земли со времен античности и примерно до 1930 г. В последующих главах более подробно рассказывается об успехах, достигнутых с 1930 г. до наших дней.

В настоящее время достигнута стадия, когда публикуемые многочисленные статьи по проблеме распределения плотности в Земле выглядят немногим более солидно, чем суета вокруг разрешающей способности данных наблюдений, собранных за длительный период времени. Поэтому представляется весьма своевременной попытка привести в наше изложение некоторую перспективу. Конечно, повесть о внутреннем строении Земли никогда не будет полностью завершена, и с появлением новых важных данных всегда будут добавляться дополнительные десятичные знаки к уже установленным значениям.

Я намеревался описать те казавшиеся мне наиболее важными результаты, которые вызывали у меня активный интерес в течение последних сорока лет. Поэтому книга неизбежно отражает мои личные склонности и интересы: рассматриваемый предмет охватывает теперь так много областей, что трудно ожидать, чтобы один автор мог удовлетворительно изложить их все. Вот почему я заранее извиняюсь перед теми авторами, работы которых я мог пропустить. Упомяну также, что мой подход в основном "макроскопический"; на "микроскопические" подходы (например, теорию кристаллической решетки) делается только краткая ссылка.

Возможно, мне необходимо извиниться перед читателями и за то, что в основном я ссылаюсь на свои собственные работы. Я сделал это прежде всего потому, что предмет достаточно труден и непросто изложить все его хитросплетения, и мне казалось, что достичь наибольшей последовательности (по крайней мере в первом приближении) я мог бы, опираясь на собственный подход к проблемам. Кроме того, этой книгой я хотел бы исправить многочисленные искажения деталей моих прежних работ (разумеется, это явление коснулось не только меня, поскольку оно связано с взрывоподобным ростом числа специалистов в наше время). Наконец, поскольку эта книга может оказаться моим последним большим трудом в этой области, мне хотелось бы дать оценку собственным работам настолько объективную, насколько это возможно. Я надеюсь, перечисленные причины помогут отвергнуть любое предположение о том, что я считаю свой вклад в науку более значительным, чем он есть на самом деле.

Читатель, вероятно, заметит, что в этой книге отношение автора ко всякого рода неопределенностям выражается гораздо более осторожно, чем во многих современных работах. У нынешних авторов, пишущих о Земле (даже у крупных специалистов), проявляется сильная тенденция быть чрезмерно "черным" или "белым" в своих высказываниях — этакая готовность "доказывать" и "отвергать" и объявлять верными и "неверными" свои собственные и чужие результаты в тех случаях, когда более разумной была бы осторожная вероятностная оценка. (Эта тенденция не ограничивается только науками о Земле.) Я стремился избегать таких слов, как "доказано", "верно", "ложно", "правильно", "ошибочно", "справедливо", "несправедливо", кроме как в формальных дедуктивных выводах. При аргументации же по индукции я пытался "делать вывод", а не "утверждать". Я старался делать различие между "математическими моделями" и "фактами" не только для определения плотности и подобных параметров, но и для так называемых

физических "законов". Я лелею надежду, возможно тщетную, что принятый мною стиль изложения хоть немного послужит более глубокому пониманию некоторых сторон научного вывода, к которым в геофизике нужно относиться с особой осторожностью.

Вследствие сложного переплетения различных данных, позволяющих нам установить закон распределения плотности в Земле, неизбежно некоторое перекрытие отдельных глав книги. Я пытался построить изложение таким образом, чтобы это перекрытие было минимальным. Читателям помогут ориентироваться в предмете многочисленные перекрестные ссылки. При первом чтении многие перекрестные ссылки можно опустить; их цель — помочь тем, кого они интересуют, а не отвлечь тех, кому они не нужны.

Книга содержит большое количество сейсмологических деталей и тонкостей, так как важные выводы о распределении плотности были сделаны именно благодаря им. Однако эта книга не учебник сейсмологии. Более подробное изложение предмета можно найти в моей книге*. В тексте ссылки на нее обозначены "Б" и даются по третьему изданию**.

Во второй половине книги приводится много количественных деталей. Надеюсь, они не слишком утомят читателя. Мне казалось, что, только приводя все эти сведения, я могу считать свою задачу выполненной и представить в наиболее приемлемой форме результаты, полученные при разных подходах к сложному объекту изучения. Я питаю надежду, что (в качестве некоторой компенсации) информация, собранная в данной книге, окажется полезной научным работникам, преподавателям и студентам, занимающимся геофизикой твердой Земли. Книга снабжена указателем, который позволит быстро найти нужные сведения.

Большая часть используемых обозначений общепринята, однако имеются отдельные отклонения от этого правила. Например, для обозначения энтропии вместо S иногда используется s . Это сделано в тех местах, где S уже использовано для других целей. Численные значения величин в основном приводятся в системе СИ; однако я не мог заставить себя выражать плотность в $\text{кг}/\text{м}^3$ и занимать тем самым

*K.E. Bullen, An Introduction to the Theory of Seismology, Cambridge Univ. Press, 1963 (русский перевод: К.Е. Буллен, Введение в теоретическую сейсмологию, "Мир", М., 1966). — Прим. ред.

**Нумерация разделов в оригинале и русском переводе совпадает, поэтому ссылки автора на разделы своей книги справедливы и для перевода. — Прим. ред.

лишнее место в книге, где значения плотности встречаются почти на каждой странице.

Я глубоко обязан г-же К. Ямамото за превосходную перепечатку чрезвычайно трудной рукописи и участие в многочисленных повторных перепечатках отдельных частей, потребовавшихся для того, чтобы спустя несколько лет, в течение которых писалась книга, привести их к современному уровню. Быть может, эта книга никогда не появилась бы, если бы не ее большая помощь. Я также хочу поблагодарить моих бывших коллег: д-ра А.П. Тревика за информацию о проблеме в античные времена, использованную в гл. 1, и д-ра Р.А. Хэддона за полезные замечания по некоторым вопросам сейсмологии.

Сидней

29 июня 1974 г.

К.Е. Буллен

Глава 1

ИЗВЕСТНЫЕ НАМ ДРЕВНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Первыми шагами к определению значений плотности и связанных с ней физических свойств недр Земли были исследования размеров Земли, ее формы и массы. В настоящей главе изложены в общих чертах результаты, полученные с древних времен до XIX в. Дальнейшее развитие некоторых важнейших исследований этого периода описывается в последующих главах.

1.1. РАЗМЕРЫ ЗЕМЛИ

§ 1.1.1. ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ГРЕЦИИ

Согласно Гомеру (ок. 900 – 800 гг. до н.э.), Земля представляла собой выпуклое блюдо, окруженное течением Океана. Представление о том, что Земля имеет сферическую форму, по-видимому, было предметом размышлений в Греции со времен Анаксимандра (610 – 547 гг. до н.э.).

Аристотель (384 – 322 гг. до н.э.) писал в своей книге "О небе" (книга II, гл. 14): "Более того, те математики, которые пытались вычислить длину окружности Земли, утверждают, что она равна 400 000 стадиям. Это указывает не только на то, что Земля имеет сферическую форму, но и на то, что она невелика по сравнению с небесными светилами". Остается неизвестным, каким образом была получена эта оценка длины окружности Земли с. Возможно, она явилась результатом грубых измерений уменьшения высоты объектов при удалении их за горизонт на море.

Кроме того, некоторые неопределенности возникают при интерпретации измерений в стадиях. Стадия определялась как мера длины, равная 600 греческим футам (согласно более поздней версии, она равнялась 125 римским пейсам). Однако в античном мире использовались различные футы. Наиболее вероятная длина аттического (и римского) фута оценивается в 0,2977 м. Соответствующая ей длина олимпийской

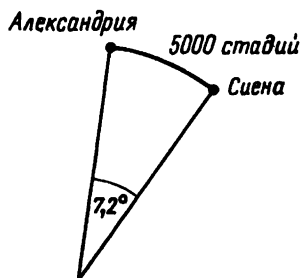


Рис. 1.1.

стадии равна 178,6 м. Филетерианский (вавилоно-персидский) фут равен 0,3308 м, а соответствующая стадия — 198,4 м; меньший птолемеев фут — 0,31 м, итальянская стадия — 186 м; больший птолемеев (финикийско-египетский) фут — 0,3543 м, стадия — 212,6 м. Можно сказать, что оценка s , на которую ссылается Аристотель, приблизительно в два раза превышает правильное значение.

Самое древнее из известных описаний метода оценки s оставил Эратосфен (ок. 276 — 194 гг. до н.э.). Во время летнего солнцестояния он измерил разность высот Солнца в полдень в Сиене (современный Асуан) и Александрии и получил, что она равна $1/50$ от 360° . (Как теперь известно, широты и долготы Асуана и Александрии равны соответственно $24^\circ 6' \text{ с.ш.}$, $32^\circ 51' \text{ в.д.}$ и $31^\circ 9' \text{ с.ш.}$, $29^\circ 53' \text{ в.д.}$) Эратосфен пренебрег малой разностью долгот этих двух городов и принял расстояние между ними равным 5000 стадиям. Таким образом, он установил, что $s = 250\,000$ стадий (рис. 1.1). С учетом неопределенности длины стадии оценка Эратосфена, вероятно была верна с точностью около 25%.

В дальнейшем греки, особенно Гиппарх (ок. 190 — 125 гг. до н.э.), уточнили оценку s . Посидоний (ок. 135 — 51 гг. до н.э.), пересмотрев предыдущие оценки длины L , соответствующей градусу широты ($= s/360$), уменьшил ее до очень малой величины, равной 500 стадиям. Это значение L было принято Клавдием Птолемеем (ок. 100 — 161 гг. н.э.) и вошло в его систему. Утверждение о том, что достичь Индии можно, проплыв на запад 70 000 стадий, как полагают, через полтора тысячелетия повлияло на планы Колумба.

§ 1.1.2. ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРОВЕДЕННЫЕ В КИТАЕ

В 723 г. н.э. во время правления династии Тан китайский астроном монах И-Синь (683 — 727 гг.) возглавил отряд по измерению длин теней от предметов, освещаемых Солнцем, и высот Полярной

звезды. Измерения были проведены в дни солнцестояния и равноденствия в тринадцати селениях Китая. В результате этих измерений И-Синь вычислил длину дуги 1° вдоль меридиана, которая оказалась равной 351,27 ли (эпохи династии Тан). Доктор Фу из Пэкина сообщил мне, что 1 ли эпохи Тан = 1500 футам того времени, а 1 фут = 0,2475 м и что во время правления династии Тан окружность делили на $365 \frac{1}{4}$. Таким образом, результат И-Синя дает $L = 132,3$ км, что выше истинного приблизительно на 20%.

§ 1.1.3. РАБОТЫ АРАБОВ

В период правления калифа аль-Мамуна, сына известного Гаруна-аль-Рашида, в 814 г. н.э. арабы оценили L примерно в 90 км, что ниже истинной длины приблизительно на 20%. Две группы астрономов были посланы в противоположные стороны от фиксированного пункта, расположенного на Месопотамской равнине: одна — на север, другая — на юг. Каждая была снабжена мерными стержнями и астрономическими инструментами. Им поручалось установить, на каком расстоянии высота Полярной звезды изменяется на 1° .

Около 1000 г. н.э., за семь столетий до применения маятника для определения силы тяжести и фигуры Земли, арабский астроном Ибн Юнис измерил время с помощью маятника. Результаты его астрономических наблюдений были использованы спустя восемь веков как доказательство изменений эксцентриситета земной орбиты.

§ 1.1.4. ЕВРОПЕЙСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОНЬЮТОНОВСКОГО ПЕРИОДА

Следующая известная работа по определению размеров Земли была выполнена после кругосветного путешествия, когда сферичность Земли получила всеобщее признание. В это время главное внимание уделялось улучшению измерений расстояния на поверхности Земли, а позднее — совершенствованию астрономических измерительных приборов.

В 1527 г. Фернель в Париже, чтобы измерить L , подсчитал число оборотов колеса экипажа и получил результат, эквивалентный $s = 36\,500$ км. В 1617 г. с целью проверки работы Фернеля Снеллиус применил идею триангуляции, воспользовавшись базисной линией известной длины на льду близ Лейдена. В 1637 г. Норвуд измерил расстояние от Лондона до Йорка шагами и с помощью каната. Измерив также высоту Солнца в меридиане, он получил, что длина L составляет 367 196 футов. В 1669 г. Пикар использовал телескоп для измерения углов и из

наблюдений звезды в созвездии Кассиопея пришел к выводу, что вблизи Парижа $L = 57\,060$ туазов, или 111, 2 км. (1 туаз равен 6 французским футам, или приблизительно 6,395 английского фута.)

Результат Пикара с точностью 0,1% совпадает с современным значением L . Таким образом, размеры Земли были теперь установлены достаточно надежно, что позволило бы оценить среднюю плотность Земли, если бы появились сведения о ее массе. Кроме того, был достигнут этап, когда при измерениях на поверхности Земли начали выявляться некоторые эффекты сплюснутости Земли и ее вращения вокруг оси.

Дальнейшее продвижение вперед тесно связано с именем Ньютона, и его работам будет посвящен отдельный раздел. Если бы Ньютон жил и работал в наше время, то его, кроме всего прочего, можно было бы назвать геофизиком-теоретиком.

1.2. РАБОТЫ НЬЮТОНА И ЕГО СОВРЕМЕННИКОВ

§ 1.2.1. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ И ЗАКОН ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ

Когда Ньютон опубликовал описание законов движения ("Начала" [3]), которые теперь носят его имя (до Ньютона для выявления этих законов многое сделали другие исследователи, особенно Галилей), а также закон обратных квадратов, он тем самым заложил фундамент динамического изучения формы и строения Земли. Прежние исследования носили в основном геометрический характер. Ньютон не только использовал при выводе своих законов геофизические наблюдения и наблюдения планет, но и посвятил большую часть своей научной деятельности приложению этих законов к исследованию формы Земли и ее физических свойств.

Согласно ньютоновской теории тяготения, присутствие частицы массы m в точке O приводит к возникновению вокруг этой точки гравитационного поля, под действием которого частица массы m' в любой другой точке P притягивается к O с силой, равной

$$F = G m m' r^{-2}, \quad (1.1)$$

где G — гравитационная постоянная и $r = OP$. Таким же образом гравитационное поле, создаваемое массой m' , заставляет частицу m притягиваться к точке P с той же силой F . Напряженность данного гравитационного поля в любой точке P определяется как сила, обусловленная полем и действующая на частицу единичной массы в точке P , или как ускорение, с которым будет двигаться в точке P

частица, не испытывающая других воздействий. Таким образом, напряженность гравитационного поля в точке P , вызванная присутствием массы m в точке O , равна Gmr^{-2} .

Из закона (1.1) была развита полная теория, которая дает выражения для напряженности гравитационного поля, создаваемого различными протяженными распределениями масс, например Землей.

§ 1.2.2. НЬЮТОН И МАССА ЗЕМЛИ

Пусть g — величина ускорения (относительно осей координат, вращающихся вместе с Землей) малого тела, которое свободно падает вблизи поверхности Земли. Законы движения (как было признано еще до Ньютона) исторически связаны с определением значений g . Благодаря закону обратных квадратов g стало связано также с напряженностью гравитационного поля вблизи земной поверхности.

Рассмотрим упрощенную модель Земли, которую будем считать сферически-симметричной, т.е. пренебрегать эффектами, обусловленными вращением Земли вокруг своей оси. Пусть O — центр, a — радиус, M — масса модели, а f — напряженность гравитационного поля в точке P , расположенной на расстоянии r от точки O (рис. 1.2). Из формулы (1.1) можно вывести (см. § 4.2.3), что

$$f = GMr^{-2} \quad (r \geq a), \quad f = Gmr^{-2} \quad (r \leq a), \quad (1.2)$$

где m — масса, заключенная внутри сферы радиуса r с центром в точке O .

Для точек на поверхности ($r = a$) формула (1.2) дает $f = g = GMa^{-2}$. Отсюда, после того как путем наблюдений определили значения a и g , тотчас же удалось оценить произведение GM и, таким образом, сделать важный шаг к оценке массы M и средней плотности Земли.

Улучшенные оценки GM получаются, если использовать модели Земли, в которых наряду с другими факторами учитываются вращение Земли вокруг своей оси и возникающее вследствие этого

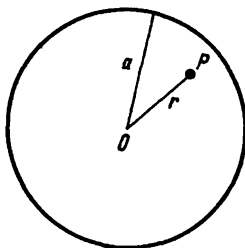


Рис. 1.2.

экваториальное вздутие. Подробное описание таких моделей дается в гл. 4 и 5. Согласно лучшей современной оценке, $GM = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ (см § 5.3.5).

Если известно GM , то значения G и M по отдельности можно найти из любого эксперимента, в котором определяется одна из этих величин. Для этого Ньютон предложил два метода: 1) измерение в лаборатории притяжения, возникающего между двумя телами, для прямого определения G , 2) измерение отклонения линии отвеса в сторону горы, массу которой M' можно рассчитать для оценки отношения M/M' .

К сожалению, просчет вначале привел к серьезной недооценке практических возможностей. Ньютон рассмотрел притяжение между двумя сферами (рис. 1.3) диаметрами 1 фут, средняя плотность которых равнялась плотности Земли, и написал, что если бы сферы были удалены друг от друга "на расстояние всего лишь $1/4$ дюйма, то даже в пространстве, где отсутствует сопротивление, они не пришли бы в соприкосновение из-за взаимного притяжения за время меньше месяца. . . Даже целых гор не хватит для того, чтобы создать какой-либо заметный эффект". Ньютон правильно вывел, что напряженность гравитационного поля f на поверхности сферы диаметра D с заданной средней плотностью σ пропорциональна D (фактически $f = 2\pi G\sigma D/3$), и, следовательно, если σ равно средней плотности Земли, то $f(= gD/2a)$ можно определить независимо от того, известно ли G . Однако он не сумел правильно завершить расчеты. В действительности его две сферы соприкоснутся примерно через 5,5 мин, т.е. за $1/8000$ месяца.

Какую бы задержку в планировании экспериментов по определению M ни вызвала эта ошибка, факт остается фактом, что оба упомянутых метода использовались в XVIII в.

Ньютон заметил также, что закон обратной пропорциональности притяжения квадрату расстояния позволяет сравнить массы и средние плотности Солнца, Земли и некоторых других планет, если использовать наблюдения за движением спутников. Таким способом ему удалось определить отношения масс и средних плотностей нескольких из таких тел, но не их абсолютные величины.

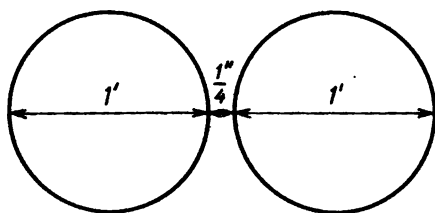


Рис. 1.3.

Тем не менее Ньютон высказал замечательную догадку относительно средней плотности Земли: "Если бы Земля целиком состояла только из воды, то все, что является менее плотным, всплывало бы и плавало наверху. И по этой причине, если бы шар из вещества Земли, покрытый со всех сторон водой, обладал меньшей плотностью, чем вода, он где-то всплыл бы, а оседающая вода, отступая, могла бы собраться в противоположном направлении. Но в таком состоянии как раз и находится наша Земля, которая в значительной степени покрыта морями. . . И как бы ни образовались планеты, в то время, когда они были жидкими массами, все более тяжелое вещество осело к центру. И поэтому обычное вещество на поверхности нашей Земли приблизительно в два раза тяжелее воды, а несколько глубже, в шахтах, находят вещество в три, четыре и даже пять раз тяжелее. Вероятно, — особенно после того, как я показал, что Земля приблизительно в четыре раза плотнее Юпитера, — количество всего вещества в Земле может быть в пять или шесть раз больше, чем его было бы, если бы Земля полностью состояла из воды".

§ 1.2.3. ПЕРВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СПЛЮСНУТОСТИ ЗЕМЛИ

Определение сплюснутости Земли в наше время тесно связано с определением ее момента инерции I . Этому вопросу посвящена гл. 5. Однако вполне пригодные оценки сплюснутости Земли были получены задолго до того, как удалось определить величины M или I .

Впервые идея о сплюснутости Земли была высказана в работе историка и географа Страбона приблизительно в 5 г. до н.э. Страбон ссылается на предположение о приподнятости экваториальных областей Земли, на которое обратил внимание более древний историк Полибий (ок. 203 – 120 гг. до н.э.). Ко времени Ньютона визуальные наблюдения Доминика Кассини и Флемстида показали, что фигура Юпитера значительно отклоняется от сферы, и предполагалось, что это же относится и к другим планетам.

Предположение о суточном вращении Земли, служившее предметом дискуссий во времена Аристарха (ок. 310 – 230 гг. до н.э.), было разработано Коперником в 1530 – 1543 гг. и получило полное признание во времена Ньютона, хотя наглядные доказательства вращения Земли вокруг своей оси — такие, как маятник Фуко (1851 г.) — появились значительно позже. В 1673 г. Гюйгенс дал удовлетворительное объяснение центробежной силы, а Ньютон применил его к рассмотрению сплюснутости Земли.

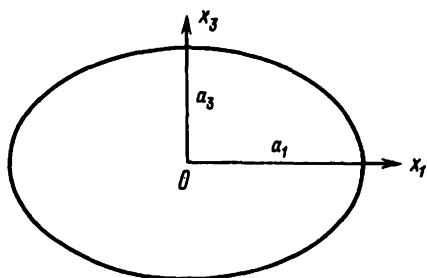


Рис. 1.4.

Пусть a_1 и a_3 — большая и малая полуоси поверхности Земли, которая предполагается сфероидальной (рис. 1.4), a — средний радиус и Ω — угловая скорость вращения Земли вокруг полярной оси. Эллиптичность, или сжатие, ϵ определяется выражением

$$\epsilon = (a_1 - a_3)/a_1. \quad (1.3)$$

Пусть h — отношение центробежной и гравитационной сил на экваторе, которые сами равны приблизительно $a \Omega^2$ и $G M a^{-2}$. Ньютон рассчитал, что $h = 1/289$. Затем, рассматривая Землю как вращающуюся жидкую массу постоянной плотности и предполагая, что ее поверхность имеет сфероидальную форму, он путем точного расчета получил $\epsilon = 5h/4$ (см. § 5.5.3) и, следовательно, $\epsilon^{-1} = 230$. Это была первая численная оценка сплюснутости (сжатия) земной поверхности. (Ньютон также исследовал фигуры и других планет.) Ньютон обнаружил, что его оценка величины ϵ^{-1} нуждается в исправлении, если учесть изменение плотности внутри Земли. Однако он ошибочно полагал, что потребуется ее уменьшение, в то время как в действительности предположение о постоянстве плотности дает нижний, а не верхний предел ϵ^{-1} .

К этому времени астрономы уже использовали маятниковые часы, и в 1672 г. Рише обнаружил, что часы, верно отсчитывающие секунды в Париже (49° с.ш.), отстают приблизительно на $2\frac{1}{2}$ мин в сутки в Кайенне (5° с.ш.), где он вынужден был укоротить маятник более чем на линию ($1/12$ французского дюйма). Аналогичное отставание часов позднее было отмечено Вареном и Де Хэем в Горэ (15° с.ш.) и в других местах. Тем временем один из членов Парижской академии предположил, что на экваторе тело весит меньше, чем на полюсах. Ньютон, который, как сообщают, слышал об открытии Рише "случайно на собрании Королевского общества" в 1682 г., рассчитал затем в соответствии со своей теорией относительные веса тела в Париже, Горэ, Кайенне и на экваторе и получил общее согласие с реальными

наблюдениями над маятниками. Эта работа обогатила науку новыми данными как о величине ϵ , так и по теории тяготения.

В 1690 г. Гюйгенс заметил, что линия отвеса направлена нормально к поверхности вращающейся самогравитирующей жидкости. Кроме того, он оценил эллиптичность ϵ . Гюйгенс считал, что ускорение свободно падающего тела направлено к центру и постоянно по величине на всей поверхности Земли, и получил уравнение поверхности, которое можно записать в виде

$$g \sqrt{x_1^2 + x_3^2} - \frac{1}{2} \Omega^2 x_1^2 = \text{const},$$

где оси Ox_1 и Ox_3 выбраны так, как показано на рис. 1.4. Это был первый шаг, оправдавший предположение Ньютона о сфероидальной форме Земли. (Решающее подтверждение было получено в работах Стирлинга, Клеро и Маклорена приблизительно в 1740 г. и представлено в окончательной форме в 1755 г., когда Эйлер впервые дал ясное описание гидростатического равновесия.) Рассматривая ускорение силы тяжести как постоянную величину и считая, что на поверхности Земли оно направлено к центру, Гюйгенс фактически предположил, что масса Земли сконцентрирована в ее центре. Для величины ϵ^{-1} он получил значение 577 (см. § 5.5.3), которое в действительности является ее верхним пределом.

Впоследствии было сделано много попыток разрешить теоретическим или экспериментальным путем противоречие между оценками ϵ для Земли, полученными Ньютоном и Гюйгенсом. В течение некоторого времени не понимали, что ϵ^{-1} должно лежать между значениями 230 и 577. Затем осознали тесную связь сплюснутости с распределением плотности внутри Земли.

Ньютон пытался улучшить свою оценку ϵ исходя из выполненного другими исследователями экспериментального определения длины градуса L на различных широтах. Первые серии измерений, хотя и привели к улучшению оценки a , не дали надежного значения ϵ . Из одной серии данных, которые были собраны Домиником и Жаком Кассини (отцом и сыном) из Франции и привлекли в то время большое внимание, фактически следовало, что Земля является вытянутым сфероидом. Удовлетворительные результаты были получены лишь значительно позже. В 1735 – 1736 гг. Клеро, Буге, де ла Кондамин, де Мопертюи и другие известные французские исследователи предприняли экспедиции к Северному Полярному кругу в Лапландию и к экватору в Перу и получили ясное доказательство того, что поверхность Земли имеет сплюснутую форму.

1.3. ПОСЛЕНЬЮТОНОВСКИЙ ПЕРИОД

По крайней мере в течение столетия после смерти Ньютона в 1727 г. геофизическими исследованиями занимались преимущественно англичане и французы. Выдающимися учеными других стран были Гюйгенс (1629 – 1695 гг.) из Голландии, Эйлер (1707 – 1783 гг.) из Швейцарии, Боскович в Италии и намного позже Гаусс (1777 – 1855 гг.) из Брауншвейга и Ганновера и Бессель (1784 – 1846 гг.) из Пруссии.

Ссылаясь на французскую работу приблизительно 1730 г., Тодхантер [5] писал: "Академия наук в Париже, по-видимому, выбрала проблему определения фигуры Земли исключительно для своих исследований. Но то, что достигнуто до сих пор, едва ли соответствует затраченным усилиям".

Однако в течение следующего столетия французские и английские исследования, основанные главным образом на работах Ньютона, привели к выдающимся результатам. Замечание Тодхантера наводит на мысль, что на развитие науки стали оказывать влияние вопросы национального престижа. Это позволяет провести аналогию с современной ситуацией. По-видимому, быстрый прогресс в изучении твердой Земли в XIX в. в такой же мере обязан конкуренции между Англией и Францией, в какой современный скачок в освоении космоса обязан соперничеству между США и Советским Союзом.

С точки зрения практических наблюдений успехи Франции начались с экспедиций в Лапландию и Перу и достигли кульминации в период 1790 – 1820 гг., когда была предпринята попытка сделать метр международным эталоном длины, основанным на результатах определения размеров Земли. (Недавно повсеместно была принята система СИ, что явилось победоносным окончанием сражения, которое Франция начала более 200 лет назад!).

В Перу Буге с сотрудниками заложили основы для наблюдений силы тяжести и сделали первую попытку измерить массу Земли. Но наибольшим практическим достижением этого столетия был, вероятно, успех Англии, когда Кавендиш с поистине превосходной точностью определил массу Земли. Подробнее эта работа будет описана в гл. 2.

Заметный вклад в теоретические исследования внесли работы английских ученых Стирлинга (1735 г.), Маклорена (1742 г.) и Симпсона (1743 г.) о притяжении вращающихся сфероидов. Но французские теоретические исследования, начавшиеся с опубликования в 1743 г. блестящей работы Клеро по теории фигуры Земли [1]. В последующие сто лет едва ли найдется известный французский математик, который

не внес бы значительного вклада в теоретическую геофизику. Назовем некоторые имена: д'Аламбер (1717 – 1783), Кулон (1736 – 1806), Лагранж (1736 – 1813), Лаплас (1749 – 1827), Лежандр (1752 – 1833), Бюи (1777 – 1862), Пуассон (1781 – 1840) и Коши (1789 – 1857). Роль этих работ будет ясна из следующих глав.

К началу XIX в. средняя плотность Земли была известна с точностью до 1%; теория тяготения представлена в изящной математической форме и применялась к целому ряду проблем, возникающих при изучении вращающейся Земли; геодезия поставлена на научную основу; с хорошей точностью известно сжатие Земли и до некоторой степени разработана теория распространения возмущений в деформируемой среде, и эту теорию можно было применять к изучению Земли.

Большое число работ конца XIX в. было посвящено улучшению количественных деталей в свете астрономических наблюдений, которые теперь становились все более совершенными. Детально, особенно Кельвином (1824 – 1907) и Дж. Дарвином (1845 – 1912), была разработана динамика Солнечной системы, которая применялась к изучению земных приливов (в теле Земли и в океанах), а также к таким проблемам, как наблюдаемые отклонения от простого вращения Земли вокруг своей оси [2]. Используя наблюдения приливов, Кельвин произвел свой знаменитый расчет, показывающий, что средняя жесткость Земли превышает жесткость обычной стали.

Однако существовал предел, до которого могло быть детально выяснено внутреннее строение Земли, и только сейсмология, обеспечивающая прямую информацию о некоторых механических свойствах вещества на определенных глубинах, привела к дальнейшему прогрессу в познании физики твердой Земли в XX в.

В последующих главах мы проследим историческое развитие знаний о внутреннем распределении плотности и связанных с ней свойств в Земле вплоть до настоящего времени.

Литература

1. *Clairaut A.C.*, *Théorie de la Figure de la Terre*, Paris, 1743.
2. *Darwin Sir G.*, *Figures of Equilibrium of Rotating Liquid and Geophysical Investigations*, Scientific Papers, vol. III, Cambridge Univ. Press, 1910.
3. *Newton I.*, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Roy. Society, London, 1687. (Русский перевод: И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, в кн.: А.Н. Крылов, Собрание трудов, т. 7, М. — Л., 1936.)
4. *Pratt J.H.*, *A Treatise on Attractions, Laplace's Functions, and the Figure of the Earth*, 3rd ed., Macmillan, London, 1865.
5. *Todhunter I.*, *History of the Theories of Attraction and the Figure of the Earth*, vols. I and II, Macmillan, London, 1873.

Глава 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТИ ЗЕМЛИ

Опишем теперь различные попытки экспериментально измерить массу M и среднюю плотность Земли, включая первую работу Буге в Перу, успех, достигнутый Кавендишем 60 годами позже и последующие результаты.

2.1. ЭКСПЕРИМЕНТЫ БУГЕ В ПЕРУ

§ 2.1.1. ЭКСПЕРИМЕНТЫ В КИТО

Пусть a — радиус, σ — средняя плотность и f — напряженность гравитационного поля на поверхности (на уровне моря) Земли, которая считается сферически-симметричной, за исключением наложенного на нее обширного плоскогорья $ABCD$ (рис. 2.1) высотой h и плотностью σ' . Из формулы (1.2) следует, что напряженность гравитационного поля f' в точках поверхности плоскогорья можно представить в виде

$$f' = fa^2(a + h)^{-2} + f'' \approx f(1 - 2h/a) + f'', \quad (2.1)$$

где f'' — вклад, вносимый плоскогорьем и равный (см. § 4.2.4)

$$f'' \approx 2\pi G\sigma'h \approx (3h/2a)\sigma'f/\sigma. \quad (2.2)$$

В последнем равенстве учтено, что $f = GMa^{-2} = 4\pi Ga\sigma/3$. С помощью (2.1) и (2.2) получаем

$$f'/f \approx 1 - 2ha^{-1} + 3h\sigma'(2a\sigma)^{-1}. \quad (2.3)$$

Результат (2.3) был получен Буге, а второй и третий члены в правой части теперь, при редуцировании гравиметрических наблюдений, называют соответственно аномалией Буге и аномалией в свободном воздухе.



Рис. 2.1.

Буге с сотрудниками применил соотношение (2.3) при первой попытке определить σ в Перу. За период 1737 – 1740 гг. они измерили длину l секундных маятников на станции, расположенной на высоте 1466 туазов в районе Кито ($0,25^\circ$ ю.ш.) на плоскогорье, на соседней вершине Пичинча (высота 2434 туазов) и на острове Инка на реке Эмеральда (30 – 40 туазов выше уровня моря), находящемся приблизительно на 60 км северо-западнее Кито. В трех этих местах они получили $l = 438,88; 438,69$ и $439,21$ французских линий соответственно. Применение равенства (2.3) к величинам, полученным в Кито и на Инке, с учетом пропорциональности l локальной силе тяжести дало $\sigma/\sigma' \approx 4,5$.

Эксперименты в Кито продемонстрировали, что большая горная масса оказывает измеримое влияние на малую массу. Результаты эксперимента показали, что Земля имеет большую среднюю плотность, чем средняя плотность Кордильер, а также дали возможность Буге опровергнуть долго жившие представления, что Земля внутри полая или заполнена водой. Однако Буге видел, что эксперимент имел слишком много неопределенностей и не мог дать достаточно надежной оценки σ . В то время не было сведений о степени неопределенности предположений, лежащих в основе равенства (2.3). Должно было пройти более столетия, прежде чем было найдено, что высокогорные районы и плоскогорья часто "компенсируются" значительным дефицитом плотности в нижележащей области. Но эксперименты в Кито явились исключительно смелым историческим шагом среди продолжительных усилий, направленных на измерение средней плотности Земли.

§ 2.1.2. ЧИМБОРАССКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В 1738 г. Буге пытался также оценить σ , используя для этого измерения отклонения отвеса δ на склоне притягивающей горы, и выбрал для этой цели гору Чимборасо (высота 6250 м, $1^\circ 25'$ ю.ш.). Первая станция была установлена на южном склоне на высоте 2400 туазов (4678 м) приблизительно на той же долготе, где по оценке находился центр масс горы. Здесь наблюдались астрономические высоты групп северных и южных звезд при прохождении ими небесного меридиана; наблюдаемые высоты звезд отличались от истинных на величины $-\delta$ и $+\delta$ соответственно. Аналогичные наблюдения тех же самых звезд выполнялись на второй станции, расположенной приблизительно на 3500 туазов к западу и на 174 туаза ниже, с целью получить уравнения, из которых можно было бы исключить неизвестные значения истинных высот в меридиане.

Буге оценил объем горы, расположенный выше станций. Полагая, что плотность вещества в этом объеме равна σ' , он вычислил, что отклонение δ должно быть равно $(\sigma'/\sigma) 1' 43''$. Однако среднее из сильно несогласующихся измерений дало $\delta \approx 8''$, что должно вести к совершенно неудовлетворительному значению σ/σ' , превышающему 12.

Эксперименты проводились в условиях острых лишений, изнуряющих переходов, сильного холода, действовавшего на инструменты и на людей, ветра, и пыльных бурь. Буге признал, что эксперименты имели лишь пробный характер, и выразил надежду, что их когда-нибудь повторят, выбрав подходящую гору во Франции или Великобритании.

2.2. СКИЕГАЛЛИОНСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В 1772 г. Маскелайн предложил повторить чимборасский эксперимент в Шотландии, и комиссия королевского общества выбрала для этой цели гору Скиегаллион (1010 м) в Пертшире. Гора имеет короткий гребень широтного простиранья, круто обрывающийся к югу и северу. (В статье Маскелайна [15] она называется Скегаллиен. Ссылаясь на различия в произношении, д-р Вилмор сказал мне, что у него сложилось впечатление, будто "первые английские исследователи испытывали затруднения при записи звуков, произносимых местными жителями, особенно в районах, весьма благоприятных для простуд".)

Сначала в период с 1774 по 1776 г. были проведены тщательные обследования. Затем на одном и том же меридиане были установлены две наблюдательные станции — одна на северном, другая на южном склоне. На каждой станции Маскелайн выполнил около 170 измерений наблюдаемых зенитных расстояний более чем 30 звезд и получил, что среднее расхождение для двух станций составляет $54,6''$. Превышение этого расхождения над измеренным широтным расхождением $42,9''$ было приписано отклонению отвеса, вызванному горой.

Хаттон [10] и Кавендиш [5] приняли участие в расчетах, которые дали $\sigma/\sigma' = 1,79$. Поскольку по оценке плотность горы σ' составляла $2,5 \text{ г/см}^3$, то отсюда следовало, что средняя плотность Земли σ равна $4,5 \text{ г/см}^3$.

В 1811 г. Плейфер более точно измерил плотности слоев горных пород на Скиегаллионе и поднял оценку σ до $4,56 - 4,87 \text{ г/см}^3$. В 1821 г. Хаттон привел в качестве своего окончательного значения величину $4,95 \text{ г/см}^3$.

2.3. ДРУГИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С МАЯТНИКОМ И ОТВЕСОМ

Используя маятниковый метод, примененный Буге в Кито, Карлини в 1821 г. в окрестности Милана получил значение $\sigma = 4,39 \text{ г/см}^3$, увеличенное Сабийне в 1827 г. до 4,77 и Джулио до 4,95 г/см³ в 1841 г.

Эри пытался оценить σ , измеряя разницу в периодах колебаний маятника на поверхности и в глубине шахты. После первых попыток в Корнуэлле в 1826 и 1828 г., которые были сорваны пожаром и наводнением, он получил $\sigma = 6,6 \text{ г/см}^3$ в 1854 г. на хартонской угольной шахте в Сандерленде. В его методе предполагалось, что Земля состоит из сферических слоев, и требовалось принять определенные значения плотности на глубине шахты. Намного позже (1883 г.) фон Штернек, ставя эксперименты на различных глубинах в серебряных шахтах в Саксонии и Богемии, установил, что значения σ заключены в интервале от 5,0 до 6,3 г/см³ и продемонстрировал степень ненадежности предположений Эри. Тем временем Пратт [17] и сам Эри [1] выдвинули идеи о компенсациях плотности под поверхностью Земли, также указав тем самым на ограничения маятниковых экспериментов, проводившихся с целью измерения средней плотности Земли.

В 1855 г. Джеймс и Кларк повторили эксперимент скиегаллионского типа на Артур-Сит в Эдинбурге и получили $\sigma = 5,3 \text{ г/см}^3$ [11].

В 1880 г. Менденхолл измерил периоды колебаний маятника в Токио и на вершине Фудзиямы и дал $\sigma = 5,77 \text{ г/см}^3$.

2.4. ЭКСПЕРИМЕНТ МИЧЕЛЛА – КАВЕНДИША

§ 2.4.1. ПРИБОР МИЧЕЛЛА

Ближе к XIX в. наиболее известный сейсмолог того времени Джон Мичелл последовал другому предложенному Ньютоном подходу к проблеме [§ 1.2.2 (1)] – методу, в котором отпадали неопределенности, связанные с оценками больших земных масс при экспериментах в горах и шахтах.

Мичелл сконструировал крутильные весы для прямого измерения гравитационного взаимодействия F между сферическими массами m_1 и m_2 , которые были достаточно малы и помещались в лаборатории. Если d – расстояние между центрами сфер, то закон тяготения (§ 1.2.2) дает $F = Gm_1m_2/d^2$. Поэтому, измерив F , m_1 , m_2 , и d , можно было найти гравитационную постоянную G .

Как уже было указано (§ 1.2.2), величина Gm , выражающаяся через g и a , известна с хорошей точностью (M и a – масса и средний

радиус Земли, g — напряженность гравитационного поля на поверхности). Следовательно, определение G даст также M и σ .

Прибор Мичелла (рис. 2.2) состоял из горизонтального стержня AB длиной 6 футов (скажем, $2l$) с центром C , подвешенного с помощью 40-дюймовой вертикальной проволоки OC к неподвижной точке O . К концам A и B не коротких вертикальных проволоках были подвешены 2-дюймовые свинцовые шарики (массой m_1), и вся система (назовем ее S) помещалась в узком деревянном ящике. Специальные приспособления позволяли устанавливать вне ящика по разные стороны от плоскости OAB два 8-дюймовых свинцовых шара (каждый массой m_2) в такие положения, когда каждый шар притягивается в горизонтальном направлении приблизительно под прямым углом к плоскости OAB одной из двух масс m_1 с силой Gm_1m_2/d^2 . Таким образом, проволока OC должна закручиваться горизонтальным моментом сил.

Пусть τ — крутильный модуль сдвига проволоки OC , а θ — угол между равновесными положениями стержня AB до и после установки больших шаров. Тогда

$$\tau\theta = 2Gm_1m_2l'/d^2. \quad (2.4)$$

Пусть I — момент инерции и T — период колебаний системы S относительно OC в отсутствие масс m_2 . В этом случае

$$T = 2\pi\sqrt{I/\tau}. \quad (2.5)$$

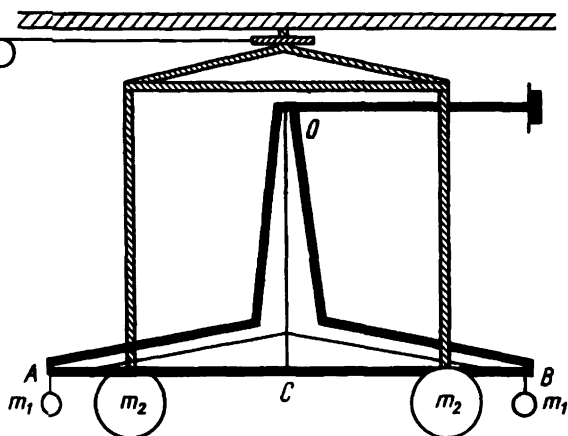


Рис. 2.2. Прибор Мичелла — Кавендиша.

Период T можно было измерить во вспомогательном эксперименте. Затем с помощью равенств (2.4) и (2.5) легко определить G как функцию измеренных величин m_1 , m_2 , l , d , θ , I и T .

Мичелл умер, не использовав своего прибора, который перешел к Волластону, а затем к Кавендишу.

§ 2.4.2. ИЗМЕРЕНИЯ КАВЕНДИША

Генри Кавендиш воспользовался идеями Мичелла, но реконструировал или модифицировал отдельные части прибора. Он поместил прибор в замкнутую внутреннюю камеру и наблюдал отклонения с помощью телескопа. Его знаменитый результат был опубликован в 1798 г. Было использовано среднее из 29 серий наблюдений, что после различных коррекций (и после того как позже Бэйли исправил одну арифметическую ошибку) дало $\sigma = 5,448 \pm 0,033$ г/см³.

2.5. ДРУГИЕ МАЛОМАСШТАБНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Используя прибор, подобный приборам Мичелла и Кавендиша, Райх в Германии получил $\sigma = 5,49$ г/см³ в 1837 г. и $5,58$ г/см³ в 1852 г. В Англии Бэйли [2] в 1842 г. получил значение $5,67$ г/см³. В 1873 г. Корню и Бель [6] во Франции, внося дальнейшее усовершенствования в эксперимент, получили промежуточные результаты между $5,50$ и $5,56$ г/см³.

Фон Йолли предложил эксперимент другого типа, используя обычные веса и учтя изменения ускорения силы тяжести g от вершины и до основания 21-метровой башни. Он получил в 1881 г. значение $5,69$ г/см³ [14]. До некоторой степени похожим способом Рикарц и Кригар-Меншель [18] получили в 1898 г. $\sigma = 5,505$ г/см³.

Пойнтинг укрепил массы m_1 на общем коромысле с притягивающей массой m_2 , которую поочередно помещали под каждую из масс m_1 , так что их центры располагались на одной вертикали, и в 1892 г. получил значение $5,49$ г/см³ [16].

В 1895 г. Бойс [4] модифицировал эксперимент Мичелла — Кавендиша, введя вместо закручивающейся проволоки Мичелла тонкую кварцевую нить. Благодаря этому он смог использовать меньшие массы (которые были сделаны из золота) и уменьшить некоторые посторонние эффекты благодаря общему уменьшению размеров прибора. Он получил $5,527$ г/см³, что хорошо согласуется с результатами, полученными независимо Брауном и Этвешем [7] в 1896 г., также использованными крутильные веса.

Уже в нашем веке Гейль в 1930 г., Зарадничек в 1933 г. и Гейль и Кржановский в 1942 г. [9] (см. [8]) получили оценки G , из которых следует, что $\sigma = 5,517; 5,528$ и $5,514$ г/см³ соответственно. Джеффрис [12, 13], применив статистические критерии к 25 определениям G , выполненным Бойсом и Гейлем, нашел $G = (6,670 \pm 0,004) \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²). Принимая $GM = 3,986 \cdot 10^{14}$ м³/с² (§ 5.3.5), получим тогда $M = 5,977 \cdot 10^{24}$ кг и, следовательно, $\sigma = 5,517$ г/см³, причем неопределенности в M и σ пропорциональны ошибкам в G .

Литература

1. *Airy G.B.*, On the computations of the effect of the attraction of the mountain masses as disturbing the apparent astronomical latitude of stations in geodetic surveys, *Phil. Trans.*, **145**, 101 — 104, 1855.
2. *Baily F.*, An account of some experiments with the torsion-rod for determining the mean density of the Earth, *Mem. Roy. Astron. Soc.*, **14**, 1 — 120, i — cccxlviii, 1842.
3. *Bouguer P.*, *La Figure de la Terre*, Paris, 1749.
4. *Boys C.V.*, On the Newtonian constant of gravitation, *Phil. Trans.*, **A186**, 1 — 72, 1895.
5. *Cavendish H.*, Experiments to determine the density of the Earth, *Phil. Trans.*, **58**, 469 — 526, 1798.
6. *Cornu A., Baille J.*, Sur la mesure de la densité moyenne de la Terre, *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, **86**, 699 — 702, 1878.
7. *Eötvös R. von*, *Wied. Ann.*, **59**, 354, 1896.
8. *Heiskanen W.A., Vening Meinesz F.A.*, *The Earth and its Gravity Field*. McGraw-Hill, New York, 1958.
9. *Heyl P.R., Chrzanowski P.*, A new determination of the constant of gravitation, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **29**, 1 — 31, 1942.
10. *Hutton C.*, An account of the calculations made from the survey and measures taken at Schehallien, in order to ascertain the mean density of the Earth, *Phil. Trans.*, 689 — 788, 1778.
11. *James R.E., Clarke R.E.*, On the deflection of the plumb-line at Arthur's Seat and the mean specific gravity of the Earth, *Phil. Trans.*, 591 — 606, 1856.
12. *Jeffreys H.*, *Theory of Probability*, 1st ed., Clarendon Press, Oxford, 1939.
13. *Jeffreys Sir H.*, *The Earth*, 5th ed., Cambridge Univ. Press, 1970.
(Русский перевод 4-го изд.: Г. Джеффрис, *Земля*, изд-во "Мир", М., 1960.)
14. *Jolly J. von*, Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation, *Abhand. der k. Bayer. Acad. der Wiss.*, 2 cl., **13(1)**, 157 — 176; *Wied Ann.*, **5**, 112 — 134, 1878.
15. *Maskelyne N.*, An account of observations made on the Mountain Schehallien for finding its attraction, *Phil. Trans.*, 500, 1775.
16. *Poynung J.H.*, *The Mean Density of the Earth*, Charles Griffin, London, 1894.
17. *Pratt J.H.*, On the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond and upon the plumb-line of India, *Phil. Trans.*, **145**, 53 — 100, 1855.
18. *Richarz F., Krüger-Menzel*, *Abhand. der Königl. Preuss. Akad.*, Berlin, 1898.

Глава 3

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Принимая во внимание форму Земли, при описании ряда ее свойств, включая свойства, связанные с гравитационным полем (гл. 4) и свободными колебаниями Земли (гл. 14), желательно использовать сферические координаты. Проводя анализ в сферических координатах, нужно рассматривать сферические функции. В настоящей главе мы приведем в общих чертах результаты, необходимые для применения этих функций в данной книге. Более полное и подробное изложение можно найти в классических работах по сферическим функциям.

Поместим начало координат O в центр Земли и обозначим сферические координаты точки P (рис. 3.1) через (r, φ, λ) , где φ и λ соответствуют (геоцентрическим) широте и долготе; таким образом, $\varphi = \pi/2 - \theta$, где θ — полярное расстояние, которое иногда выбирают в качестве второй координаты. Координаты r, φ, λ связаны с декартовыми координатами x_i соотношениями

$$x_1 = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad x_2 = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad x_3 = r \sin \varphi. \quad (3.1)$$

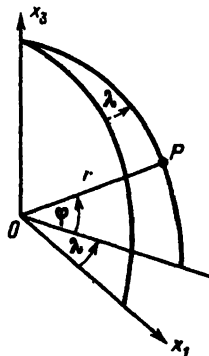


Рис. 3.1.

3.1. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Теория тяготения включает рассмотрение (см. § 4.1.4) уравнения Лапласа

$$\nabla^2 y = 0, \quad (3.2)$$

где $\nabla^2 \equiv \Sigma(\partial^2/\partial x_j^2)$. В координатах r, μ, λ , где $\mu = \sin\varphi$, уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial y}{\partial \mu} \right\} + (1 - \mu^2)^{-1} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (3.3)$$

Для решения уравнения (3.3) подставим в него в качестве пробного решения $y = RS$, где R — функция только от r , а S — только от μ и λ . Это дает

$$R^{-1} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = n(n+1), \quad (3.4)$$

$$S^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial S}{\partial \mu} \right\} + S^{-1} (1 - \mu^2)^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} = -n(n+1), \quad (3.5)$$

где деление на (3.4) и (3.5) и формы правых частей этих уравнений выбраны для удобства; n остается неопределенным. Поскольку левые части (3.4) и (3.5) не зависят от μ и λ и соответственно от r , то n постоянно.

Для данного n общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$R = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}, \quad (3.6)$$

где A_n и B_n — постоянные интегрирования. Пусть $S = S_n(\mu, \lambda)$ — решение уравнения (3.5). Суммируя тогда решения с различными n , мы получаем некоторое общее решение уравнения (3.3) (достаточное для наших основных приложений):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\} S_n(\mu, \lambda). \quad (3.7)$$

Любое частное решение уравнения Лапласа, выраженное в виде (3.7), называется *объемной сферической функцией*, а коэффициент $S_n(\mu, \lambda)$ — *поверхностной (сферической) функцией* степени n .

3.2. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ определяются для положительного целого n конечным рядом

$$P_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} \left\{ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\}. \quad (3.8)$$

(обычными методами (см., например, [2]) можно вывести из (3.8) описанные ниже свойства P_n).

§ 3.2.1

Первые пять полиномов Лежандра имеют вид

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \mu, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \quad (3.9)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \quad P_4 = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3).$$

§ 3.2.2

Для любого положительного целого n

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0. \quad (3.10)$$

§ 3.2.3

Формула Родригеса:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n}. \quad (3.11)$$

Из формулы (3.11) можно получить (используя теорему Ролля), что все n нулей $P_n(\mu)$ действительны, различны и заключены в интервале $-1 < \mu < 1$.

§ 3.2.4

Асимптотическое приближение к $P_n(\sin \varphi)$ для большого n и φ , не слишком близкого к $\pm \pi/2$, имеет вид

$$P_n(\sin \varphi) \sim \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \cos \varphi \right\}^{-1/2} \cos \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{1}{2} n \pi \right\}. \quad (3.12)$$

§ 3.2.5

Если имеется симметрия относительно оси (выбранной в качестве оси Ox_3), то $\partial/\partial\lambda = 0$ и уравнение (3.5) принимает форму уравнения Лежандра:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 S}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dS}{d\mu} + n(n+1)S = 0. \quad (3.13)$$

Путем подстановки или иным способом можно убедиться, что $S = P_n(\mu)$ представляет собой решение уравнения (3.13). В этом случае решение (3.7) уравнения Лапласа имеет вид

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\} P_n(\mu). \quad (3.14)$$

Таким образом, если S_n не зависит от λ , то оно пропорционально $P_n(\mu)$, которое также представляет собой поверхностную сферическую функцию (зональную поверхностную функцию — см. разд. 3.4).

§ 3.2.6

Путем прямого разложения в ряд или другим способом можно показать, что для $r' < r$

$$(r^2 - 2\mu rr' + r'^2)^{-1/2} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \{(r'/r)^n P_n(\mu)\}. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15) будет необходимо в следующей главе, потому что при $\mu = \cos\psi$ его левая часть равна $(P'P)^{-1}$ (рис. 3.2). $P'P$ входит в выражение (4.4) для потенциальной функции U .

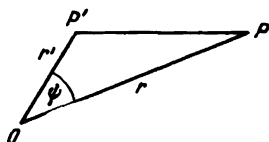


Рис. 3.2.

3.3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В следующих ниже параграфах двойные интегралы берутся по поверхности единичной сферы (элемент площади которой равен $r^2 \cos\phi d\phi d\lambda$, где $r = 1$, т.е. равен $d\mu d\lambda$).

§ 3.3.1

Если S_m и S_n — две поверхностные функции и $m \neq n$, то можно показать, что

$$\iint S_m(\mu, \lambda) S_n(\mu, \lambda) d\mu d\lambda = 0. \quad (3.16)$$

§ 3.3.2

Пусть ψ — угол между радиус-векторами, направленными к точкам (r, μ, λ) и (r', μ', λ') , так что

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda') = \\ &= \mu \mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда можно показать, что для любой поверхностной функции $S_n(\mu, \lambda)$

$$\iint S_n(\mu, \lambda) P_n(\cos \psi) d\mu d\lambda = 4\pi(2n+1)^{-1} S_n(\mu', \lambda'). \quad (3.18)$$

§ 3.3.3

Рассмотрим частный случай § 3.3.2, когда имеется симметрия относительно оси Ox_3 . Тогда в силу § 3.2.5 $S_n(\mu, \lambda)$ пропорционально $P_n(\mu)$. Выберем, в частности, $\varphi' = \pi/2$, так что $\mu' = 1$ и, согласно (3.17), $\cos \psi = \mu$. Подынтегральное выражение в (3.18) тогда не будет зависеть от λ , и, поскольку $\int d\lambda = 2\pi$, получаем

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_n(\mu) d\mu = 2(2n+1)^{-1} P_n(1). \quad (3.19)$$

Поскольку $P_n(1) = 1$, то, комбинируя (3.19) с сопутствующим результатом, соответствующим (3.16), имеем

$$\frac{1}{2} (2n+1) \int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \delta_{mn}, \quad (3.20)$$

где δ_{mn} равно единице ($m = n$) или нулю ($m \neq n$).

3.4. ТЕССЕРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Если осевая симметрия отсутствует, т.е. S может зависеть как от широты φ , так и от долготы λ , то для ряда целей удобно рассматривать решения уравнения (3.5) вида

$$S = \Phi(\varphi) \Lambda(\lambda). \quad (3.21)$$

Развитая для этого случая теория потребует в гл. 14.

Подставляя (3.21) в уравнение (3.5) и разделяя переменные, находим

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = -m^2, \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Phi}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Phi = 0, \quad (3.23)$$

где m — неопределенная постоянная. Уравнение (3.23) представляет собой присоединенное уравнение Лежандра; если S не зависит от λ , т.е. когда $m = 0$, то оно сводится к уравнению Лежандра.

Для данного m общее решение уравнения (3.22) имеет вид

$$\Lambda = C_m \cos(m\lambda + \epsilon_m), \quad (3.24)$$

где C_m и ϵ_m — постоянные интегрирования.

Решение уравнения (3.23) записывается в форме $\Phi = P_n^m(\mu)$, где m — целое положительное число, а

$$P_n^m(\mu) = (\mu^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}; \quad (3.25)$$

$P_n^m(\mu)$ называется присоединенной функцией Лежандра первого рода степени n и порядка m .

[Функция Лежандра и присоединенная функция Лежандра второго рода, которые также являются решениями уравнения (3.23), относятся к случаю $\mu \geq 1$.] Согласно формуле Родригеса (3.11),

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{2^n n!} (\mu^2 - 1)^{m/2} \frac{d^{n+m} (\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n+m}}. \quad (3.26)$$

В нашем случае n равно нулю или является целым положительным числом, и из (3.25) тогда следует, что при $m > n$ $P_n^m = 0$; поэтому целесообразно выбрать $m \leq n$.

Из (3.21), (3.24) и (3.26) следует, что функция $S_n^m(\mu, \lambda)$ является сферической функцией степени n и порядка m ;

$$S_n^m(\mu, \lambda) = K_n^m \cos(m\lambda + \epsilon_m) (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^{n+m} (1 - \mu^2)^n}{d\mu^{n+m}}, \quad (3.27)$$

где K_n^m — постоянная, m и n — положительные целые числа и $m \leq n$.

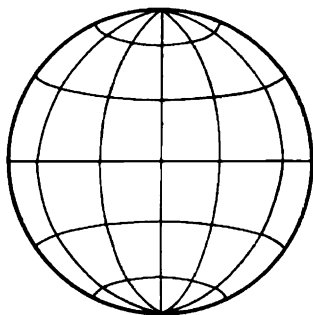


Рис. 3.3.

Функция $S_n^m(\mu, \lambda)$ обращается в нуль там, где обращается в нуль любой из трех (кроме K_n^m) множителей, стоящих в правой части (3.27). Первый множитель обращается в нуль при $m\lambda + \epsilon_n = (k + \frac{1}{2})\pi$, где k — целое число, т.е. на всех m плоскостях, пересекающих полярную ось Ox_3 , причем угол между любой парой последовательных плоскостей равен π/m . Второй множитель равен нулю при $\mu = \pm 1$, т.е. на полярной оси. Третий множитель обращается в нуль на последовательности прямых круговых конусов, коаксиальных с полярной осью; согласно теореме Роля и поскольку $d^n(\mu^2 - 1)^n/d\mu^n$ имеет n действительных различных нулей в интервале $-1 < \mu < 1$ (§ 3.2.3), число конусов (с вершинами в точке O) равно $n - m$; они расположены симметрично над и под плоскостью экватора.

Таким образом, на поверхности любой сферы $r = \text{const}$, S_n^m обращается в нуль на последовательности $2m$ равноотстоящих друг от друга меридиональных линий и на последовательности $n - m$ широтных кругов, симметрично расположенных относительно экватора. Две последовательности окружностей пересекаются под прямыми углами (общая картина показана на рис. 3.3). Вследствие такой сотовой структуры S_n^m называют *тессеральной функцией*. [В частном случае имеем функцию S_n^0 , которая пропорциональна $P_n(\mu)$, обращается в нуль на широтных окружностях и называется *зональной функцией*. Функция S_n^n имеет нули на меридиональных линиях и называется *секториальной функцией*.]

3.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

При достаточно общих предположениях можно показать, что заданная функция $F(\mu, \lambda)$ может быть выражена в виде ряда по

сферическим функциям. Так,

$$F(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{C_n^m \cos(m\lambda + \epsilon_n) P_n^m(\mu)\}, \quad (3.28)$$

где C_n^m — постоянные.

В частном случае, когда F — функция только от μ ,

$$F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu). \quad (3.29)$$

Используя (3.20), можно найти коэффициенты C_n , входящие в выражение (3.29):

$$C_n = \frac{1}{2} (2n+1) \int_{-1}^1 F P_n d\mu. \quad (3.30)$$

3.6. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ

Согласно (3.7) и разд. 3.4, функция

$$y = r^n P_n^m(\mu) \cos m\lambda \quad (3.31)$$

является объемной сферической функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа (3.3). В гл. 14 мы исследуем собственные колебания Земли в сферических координатах. Для этой цели удобно предположить, что пробные формы компонент смещения имеют несколько более общий вид по сравнению с (3.31).

Типичная пробная форма будет состоять из произведения функции $R(r)$, функции от μ и λ , тесно связанной с S_n^m , и функции периода t определенной моды колебаний. Функция R зависит от степени n и порядка m в S_n^m , а также от третьего числа l , связанного с нулями $R(r)$; для данных m и n значения $l = 0, 1, 2, \dots$ дают основное колебание и последовательность обертонов; каждый нуль $R(r)$ соответствует узловой поверхности (поверхности, на которой смещение обращается в нуль), которая представляет собой сферу с центром в начале координат O , и каждое увеличение l на единицу увеличивает число таких сферических узловых поверхностей на единицу.

Таким образом, пробную форму целесообразно записать в виде

$${}_l R_n^m(r) F_n^m(\mu) \cos m\lambda \exp(i\gamma t), \quad (3.32)$$

где $F_n^m(\mu)$ тождественно или тесно связано с $P_n^m(\mu)$, а $\gamma = 2\pi/\tau$. Характер и значение пробных форм станут яснее в разд. 14.2, где проведено конкретное рассмотрение.

Узловые поверхности для (3.32) в общем случае состоят из трех множеств, а именно: плоскостей, проходящих через ось Ox_3 , конусов, описанных в разд. 3.4, и последовательности концентрических сфер.

Обычно периоды τ семейства колебаний, описываемых выражением (3.32), зависят от l , m и n . В частных случаях может оказаться, что τ не зависит от одного (или более чем одного) из этих параметров; колебательная система в таком случае называется *вырожденной* относительно этого параметра.

Литература

1. Bath M., *Mathematical Aspects of Seismology*, Elsevier, Amsterdam, 1968.
2. Jeffreys Sir H., Jeffreys B. Swirles, *Methods of Mathematical Physics*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1950. (Русский перевод: Г. Дрезффрис, Б. Смирис, *Методы математической физики*, вып. 1–3, "Мир", М, 1969 – 1970.)

Глава 4

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ЗЕМЛИ

После определения массы Земли следующей основной задачей на пути к установлению внутреннего распределения плотности было вычисление момента инерции Земли. Настоящая глава посвящена изложению основных положений теории гравитационного притяжения Земли, необходимых для решения как этой проблемы, так и для дальнейших целей.

4.1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ГРАВИТАЦИОННОМ ПРИТЯЖЕНИИ

§ 4.1.1. ПРИТЯЖЕНИЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ОБЫЧНЫМ ТЕЛОМ ИЗ ТЯГОТЕЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА

Пусть B — тело из притягивающего вещества (B может состоять из одного или более отдельных кусков, но в нашем рассмотрении обычно имеется в виду одно непрерывное тело).

Пусть x'_i ($i = 1, 2, 3$) — координаты произвольной точки P' тела B в системе координат с началом в точке O (рис. 4.1), ρ — плотность в точке P' и $\delta\tau$ — элемент объема, содержащий P' . Пусть x_i — координаты любой точки P , в которой ищется напряженность гравитационного поля f_i , или сила притяжения на единицу массы, созданная телом B .

Согласно ньютоновскому закону тяготения, вклад элемента массы $\rho\delta\tau$, находящегося в точке P' , в напряженность гравитационного поля равен по величине $G\rho\delta\tau(P'P)^{-2}$ и направлен по PP' , где G — гравитационная постоянная. Величина $P'P$ равна $\sqrt{\sum(x_i - x'_i)^2}$, а направляющие косинусы равны $(x_i - x'_i)/P'P$. Отсюда

$$\begin{aligned} f_i &= -\iiint G\rho(x_i - x'_i)(P'P)^{-3}d\tau = \\ &= -\iiint G\rho(x_i - x'_i)\{\sum(x_j - x'_j)^2\}^{-3/2}d\tau, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где интегралы берутся по всему объему, занимаемому телом B .

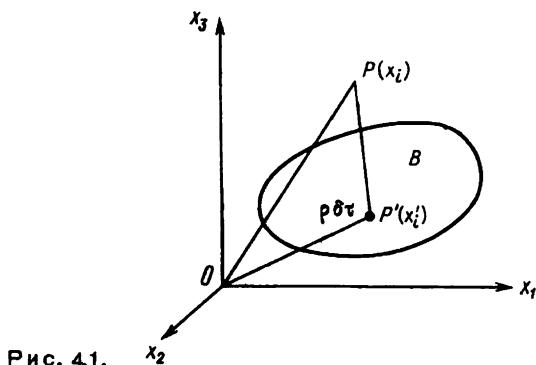


Рис. 4.1.

§ 4.1.2. ТЕОРЕМА ГАУССА О ПОЛНОЙ НОРМАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЕ НАПРЯЖЕННОСТИ

Пусть S — произвольная замкнутая поверхность (которая может заключать в себе полностью, частично или совсем не содержать тела B) и l_i — направляющие косинусы внешней нормали в любой точке P поверхности S (рис. 4.2).

Теорема Гаусса устанавливает, что

$$\iint \sum_{i=1}^3 (f_i l_i) dS = -4\pi Gm, \quad (4.2)$$

где интеграл берется по поверхности S , а m — масса всего вещества, заключенного внутри S . Выражение $\sum (f_i l_i)$ представляет собой компоненту напряженности гравитационного поля в точке P в направлении внешней нормали к S .

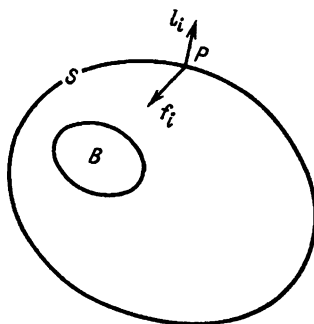


Рис. 4.2.

Для доказательства (4.2) рассмотрим вклад в $\Sigma(f_i l_i)$ от элемента массы $\rho \delta \tau$, расположенного в любой точке тела B . Он равен $-G \rho \delta \tau (P'P)^{-2} \cos \chi$, где χ — угол между $P'P$ и нормалью в точке P . Для фиксированной точки P' интеграл $\iint (P'P)^{-2} \cos \chi dS$ представляет собой телесный угол, стягиваемый поверхностью S в точке P' и потому равный 4π или нулю в зависимости от того, находится ли P' внутри или вне S . Следовательно, вклад в левую часть равенства (4.2) от элемента в точке P' равен $-4\pi G \rho \delta \tau$ или нулю соответственно этим двум случаям. Интегрирование по всему объему, занимаемому телом B , приводит затем к равенству (4.2).

§ 4.1.3. ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

С точностью до произвольной аддитивной постоянной потенциал гравитационного поля U в точке P с координатами x_i определяется выражением

$$\mathbf{f} = \text{grad} U, \text{ или } f_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{f}$ — вектор с компонентами f_i . Таким образом, гравитационный потенциал в точке P , созданный телом B , может быть записан в виде

$$U = \iiint G \rho (P'P)^{-1} d\tau = \iiint G \rho \{\Sigma(x_i - x'_i)^2\}^{-1/2} d\tau. \quad (4.4)$$

Легко проверить, что равенства (4.1) и (4.4) удовлетворяют определению (4.3) для точек, расположенных вне тела B . [Если P — внутренняя точка, то подынтегральные выражения в (4.1) и (4.4) расходятся в точке P . Интегралы в этом случае интерпретируются как пределы при $\delta \rightarrow 0$ интегралов по объему B , из которого исключен малый объем размеров δ , окружающий точку P . Интегралы сходятся, но при некоторых операциях с ними требуется осторожность.]

§ 4.1.4. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Прямым дифференцированием легко убедиться, что выражение

$$\nabla^2 \{\Sigma(x_i - x'_i)^2\}^{-1/2}$$

обращается в нуль везде, кроме точки $x_i = x'_i$. Следовательно, для точек P , расположенных вне тела B , равенство (4.4) дает уравнение Лапласа

$$\nabla^2 U = 0. \quad (4.5)$$

§ 4.1.5. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Согласно лемме Грина и определению (4.3),

$$\iint \Sigma(f_i, l_i) dS = \iiint \Sigma \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) d\tau = \iiint \nabla^2 U d\tau, \quad (4.6)$$

причем объемные интегралы берутся здесь по объему, заключенному внутри поверхности S . Отсюда в силу (4.2) имеем

$$\iiint (\nabla^2 U + 4\pi G\rho) d\tau = 0, \quad (4.7)$$

где ρ — плотность в точке P .

Поскольку равенство (4.7) применимо для любой поверхности S , то из этого следует, что для любой точки P , расположенной внутри или вне притягивающего вещества, справедливо уравнение Пуассона

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.5) является частным случаем уравнения Пуассона.

4.2. ПРИТЯЖЕНИЯ, СОЗДАВАЕМЫЕ НЕКОТОРЫМИ КОНКРЕТНЫМИ ТЕЛАМИ

Конкретные результаты, полученные в §§ 4.2.1 — 4.2.4, относятся к земному гравитационному полю. Равенства (4.13) описывают внешний и внутренний гравитационные потенциалы Земли, которая считается сферически-симметричной, и представляют собой полезное первое приближение к полю реальной Земли.

Приводимый в § 4.2.4 результат (4.14) для напряженности гравитационного поля, созданного плоскогорьем упрощенной формы, упоминался в § 2.1.1 в связи с поправкой Буге.

§ 4.2.1. ШАР ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

Будем считать, что тело B (разд. 4.1) представляет собой шар с центром в точке O , радиусом q , массой M и постоянной плотностью ρ . Пусть f — величина напряженности гравитационного поля, созданного телом B в произвольной точке P , $OP = r$ и S — поверхность сферы, проходящей через точку P , имеющей центр O и заключающей в себе массу m . Рис. 4.3 соответствует частному случаю, когда точка P расположена внутри тела B .

Вследствие симметрии напряженность гравитационного поля во всех точках поверхности S имеет одинаковую величину f и направлена

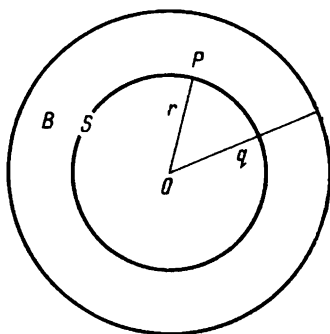


Рис. 4.3.

в точку O . Применение теоремы Гаусса (4.2) к поверхности S дает в таком случае $4\pi r^2 f = 4\pi Gm$, так что

$$f = Gm/r^2. \quad (4.9)$$

В частности,

$$f = GM/r^2 = 4\pi G\rho q^3/3r^2 \quad (r \geq q), \quad (4.10a)$$

$$f = 4\pi G\rho r/3 \quad (r \leq q). \quad (4.10b)$$

Согласно (4.3), соответствующие потенциалы имеют вид

$$U = GM/r = 4\pi G\rho q^3/3r \quad (r \geq q), \quad (4.11a)$$

$$U = 2\pi G\rho(3q^2 - r^2)/3 \quad (r \leq q), \quad (4.11b)$$

где для удобства аддитивные постоянные выбраны таким образом, что U непрерывно при $r = q$. Легко убедиться, что потенциал U , описываемый равенствами (4.11a) и (4.11b), удовлетворяет соответственно уравнениям Лапласа и Пуассона.

§ 4.2.2. ТОНКАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

Как следует из формул (4.11), потенциал δU сферической оболочки радиуса q , толщины δq , массы δM и плотности ρ равен

$$\delta U = 4\pi G\rho r^{-1} q^2 \delta q \quad (r \geq q), \quad (4.12a)$$

$$\delta U = 4\pi G\rho q \delta q \quad (r \leq q). \quad (4.12b)$$

На рис. 4.4 представлен случай $r > q$.

Соответствующие напряженности, согласно (4.3), равны по величине $G\delta M/r^2$ и нулю; эти результаты можно получить также непосредственно из (4.2).

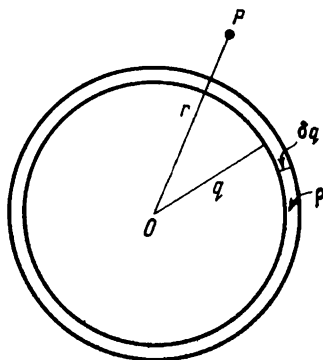


Рис. 4.4.

§ 4.2.3. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ЗЕМЛИ

Пусть теперь плотность ρ изменяется с изменением r и радиус тела B равен a . Этот случай соответствует сферически-симметричной модели Земли.

Гравитационный потенциал U в точке P получается путем интегрирования равенств (4.12а) и (4.12б):

$$U = 4\pi G r^{-1} \int_0^a \rho q^2 dq \quad (r \geq a), \quad (4.13a)$$

$$U = 4\pi G r^{-1} \int_0^r \rho q^2 dq + 4\pi G \int_r^a \rho q dq \quad (r \leq a). \quad (4.13б)$$

Напряженность f в точке P получается из (4.13) или непосредственно из (4.2) и равна Gm/r^2 , где m — масса, заключенная внутри сферы радиуса OP . Если точка P расположена вне или на поверхности Земли, то $f = GM/r^2$. Если в качестве M и a выбрать массу и средний радиус Земли, то GM/a^2 приблизительно равно ускорению свободного падения тела вблизи земной поверхности.

§ 4.2.4. ПЛОСКОГОРЬЕ

Пусть $ABCD$ (см. рис. 2.1) представляет собой сечение плоскогорья и AB соответствует верхней (горизонтальной) поверхности с площадью, например, A . Пусть h — высота DA и σ' — плотность вещества, заключенного внутри $ABCD$, причем обе эти величины считаются постоянными, а отношение h/AB считается малым. Применим

теорему Гаусса (4.2) ко всей граничной поверхности $ABCD$. В первом приближении напряженность гравитационного поля f'' , созданного плоскогорьем в точках на поверхностях AB и CD , постоянна по величине и направлена по нормали, а вкладом по отрезкам AD и BC можно пренебречь. Теорема Гаусса дает тогда

$$2f''A \approx (4\pi G) \cdot (A h \sigma'),$$

откуда имеем результат, который был уже применен в § 2.1.1:

$$f'' \approx 2\pi G \sigma' h. \quad (4.14)$$

4.3. ФОРМУЛА МАК-КУЛЛО

Рассматриваемая ниже формула содержалась уже в работе Пуассона и позднее более стандартным способом получена Мак-Кулло.

§ 4.3.1. ВЫВОД

Пусть M — масса и O — центр масс тела B , состоящего из притягивающего вещества (рис. 4.5). Выберем точку O в качестве начала координат и Ox_i в качестве главных осей инерции в точке O ; (r, μ, λ) — координаты, определенные в разд. 3.1. Пусть P' — любая точка тела B с координатами (r', μ', λ') и P — внешняя точка с координатами (r, μ, λ) . Положим, что POP' — угол ψ , ρ — плотность и $\delta\tau$ — элемент объема в точке P' .

Поскольку $(P'P)^2 = r^2 - 2r'r'\cos\psi + r'^2$, то в силу (4.4) и (3.15) для потенциала U , созданного телом B в точке P , имеем

$$U = \iiint G r^{-1} \left\{ 1 + (r'/r) \cos\psi + \frac{1}{2} (r'/r)^2 (2 - 3\sin^2\psi) + \right. \\ \left. + O(r'/r)^3 \right\} \rho d\tau, \quad (4.15)$$

где интеграл берется по всему объему B .

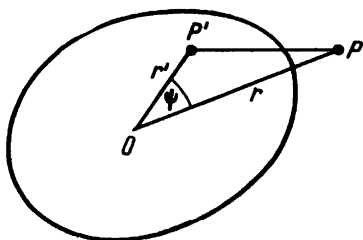


Рис. 4.5.

Поскольку M и O — масса и центр масс тела B , то

$$\iiint \rho d\tau = M, \quad \iiint \rho r' \cos \psi d\tau = 0. \quad (4.16)$$

Пусть k_i и k — радиусы вращения (или инерции) тела B относительно осей Ox_i и OP соответственно. Тогда, согласно обычной теории момента инерции,

$$\iiint \rho r'^2 d\tau = \frac{1}{2} M(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2), \quad (4.17)$$

$$\iiint \rho r'^2 \sin^2 \psi d\tau = Mk^2. \quad (4.18)$$

Подставляя эти выражения в (4.15), получаем формулу Мак-Кулло:

$$U = GMr^{-1} \{ 1 + \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 3k^2) r^{-2} O(b/r)^3 \}, \quad (4.19)$$

где b — величина порядка среднего радиуса тела B .

§ 4.3.2. СЛУЧАЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Коэффициенты при r в формулах (3.1) представляют собой направляющие косинусы OP . Отсюда снова, согласно теории момента инерции,

$$k^2 = k_1^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + k_2^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + k_3^2 \sin^2 \varphi.$$

В частном случае, когда Ox_3 — ось симметрии, $k_1 = k_2$ и

$$k^2 = k_1^2 \cos^2 \varphi + k_3^2 \sin^2 \varphi. \quad (4.20)$$

В силу (3.9) $3 \sin^2 \varphi = 1 + 2P_2(\mu)$. Следовательно, из (4.20) имеем

$$2k^2 = k_1^2(2 - 2P_2) + k_3^2(1 + 2P_2),$$

$$2k_1^2 + k_3^2 - 3k^2 = 2P_2(k_1^2 - k_3^2),$$

и формула Мак-Кулло сводится к выражению

$$U = GMr^{-1} \{ 1 + (k_1^2 - k_3^2) P_2(\mu) r^{-2} + O(b/r)^3 \}. \quad (4.21)$$

4.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

§ 4.4.1. ОБЩИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Учтем теперь некоторые отклонения Земли от сферической симметрии, но сохраним симметрию относительно полярной оси Ox_3 . Начало координат вновь поместим в центр масс, а положение точки

P будем продолжать характеризовать координатами (r, μ, λ) , где $\arcsin \mu$ и λ , как и в гл. 3, соответствуют геоцентрическим широте и долготе.

Пусть a — средний радиус внешней поверхности S . Тем самым объем $4\pi a^3/3$, заключенный внутри S , совпадает с объемом, заключенным в сфере S_0 с центром O и радиусом a .

В соответствии с геодезическими наблюдениями мы примем, что отношение $(r - a)/a$ мало во всех точках поверхности S .

§ 4.4.2. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Сделанные предположения позволяют нам записать уравнение поверхности Земли в виде

$$r = a\{1 + F(\mu)\}, \quad (4.22)$$

где F мало.

Обозначим через R область, заключенную между S_0 и S . Объем части этой области считается положительным или отрицательным в зависимости от того, лежит ли он выше или ниже S_0 (на рис. 4.6

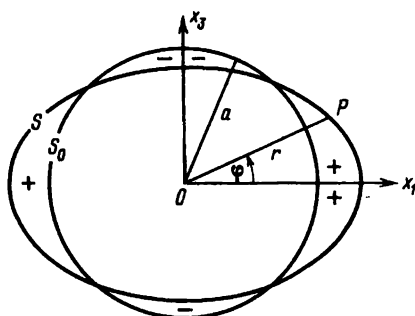


Рис. 4.6.

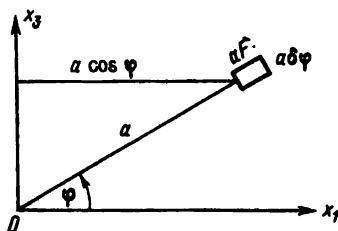


Рис. 4.7.

отрицательные и положительные части области R отмечены знаками $-$ и $+$). Полный объем области R и ее первый момент относительно экваториальной плоскости равны нулю (последний обращается в нуль, так как точка O находится в центре тяжести). Следовательно (рис. 4.7), в первом порядке по F

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\pi a \cos \varphi) \cdot (aF) \cdot (1, a \sin \varphi) a d\varphi = 0, \quad (4.23)$$

что дает соответственно

$$\int_{-1}^1 F d\mu = 0, \quad \int_{-1}^1 F \mu d\mu = 0, \quad (4.24)$$

откуда в силу (3.9)

$$\int_{-1}^1 F P_0 d\mu = 0, \quad \int_{-1}^1 F P_1 d\mu = 0. \quad (4.25)$$

Согласно (3.29), $F(\mu) = \sum C_n P_n(\mu)$, а в силу (3.30) и (4.25) имеем тогда $C_0 = C_1 = 0$.

Поэтому уравнению для S можно придать вид

$$r = a \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n p_n \right), \quad (4.26)$$

где p_n пропорциональны P_n , а ϵ_n — постоянные.

Удобно выбрать $p_2(\sin \varphi)$ таким образом, чтобы

$$p_2 = -2P_2/3 = 1/3 - \sin^2 \varphi. \quad (4.27)$$

Далее мы предположим, что при $n > 2$ все члены $\epsilon_n p_n$ малы по сравнению с ϵ_2 , который обозначим через ϵ . Тогда уравнение поверхности S принимает вид

$$r = a(1 + \epsilon p_2) = a\{1 + \epsilon(1/3 - \sin^2 \varphi)\}. \quad (4.28)$$

§ 4.4.3. СРАВНЕНИЕ СО СФЕРОИДОМ

Рассмотрим сфероид, имеющий большую полуось a , и сжатие ϵ . Его малая полуось a_3 равна $a_1(1 - \epsilon)$, его объем составляет $4\pi a_1^3(1 - \epsilon)/3$, а средний радиус a определяется формулой $a^3 = a_1^3(1 - \epsilon)$. Точное уравнение поверхности сфероида имеет вид

$$r^2\{(1 - \epsilon)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\} = a_1^2(1 - \epsilon)^2, \quad (4.29)$$

что с точностью до $O(\epsilon)$ согласуется с уравнением (4.28).

Таким образом, пренебрежение членами $(\epsilon_3 p_3 + \dots)$ эквивалентно тому, что Земля в первом приближении считается сфероидальной, а остаточные отклонения (например, отклонения, связанные с горными хребтами, океаническими впадинами, так называемой "грушевидной формой" и т.д.) рассматриваются как члены более высокого порядка по сравнению с ϵ . Там, где не оговорено противное, мы будем пренебрегать членами порядка ϵ^2 .

С точностью до $O(\epsilon)$ экваториальная полуось Земли равна $a_1 = a(1 + \epsilon/3)$, а полярная полуось $a_3 = a(1 - 2\epsilon/3)$.

4.5. ПРИТЯЖЕНИЕ, СОЗДАВАЕМОЕ СФЕРОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛЬЮ ЗЕМЛИ

Повторим теперь расчеты, изложенные в §§ 4.2.1 – 4.2.3, приняв во внимание тот факт, что поверхности постоянной плотности внутри и вне Земли не сферические, а имеют форму, соответствующую формуле (4.28).

§ 4.5.1. СЛУЧАЙ ПОЧТИ СФЕРИЧЕСКОЙ МАССЫ ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

Пусть B – тело постоянной плотности ρ , ограниченное поверхностью S , уравнение которой имеет вид

$$r = q\{1 + \epsilon p_2(\mu)\}. \quad (4.30)$$

Пусть $\{r', \mu', \lambda'\}$ – координаты произвольной точки P' , лежащей на поверхности S , а (r, μ, λ) – координаты любой другой точки P (рис. 4.8). Тогда $OP' = q\{1 + \epsilon p_2(\mu')\}$, где q – средний радиус поверхности S .

Гравитационный потенциал U в точке P , созданный телом B , представляет собой сумму потенциала U_0 , описываемого правыми частями

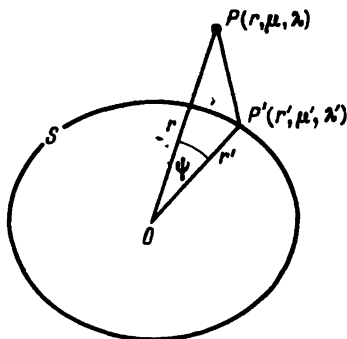


Рис. 4.8.

равенств (4.11а), (4.11б) и потенциала U_1 , обусловленного тонким слоем вещества между S и сферической поверхностью радиуса q . Радиальная толщина этого слоя в точке P' равна $\epsilon q p_2(\mu')$, а элемент его объема $\epsilon q^3 p_2(\mu') d\mu' d\lambda'$.

Согласно (3.15),

$$\begin{aligned}(P'P)^{-1} &= (q^2 - 2qr\cos\psi + r^2)^{-1/2} + O(\epsilon) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{(q^n/r^{n+1}), (r^n/q^{n+1})\} P_n(\cos\psi) + O(\epsilon),\end{aligned}$$

где члены до и после запятой внутри фигурных скобок относятся соответственно к случаям $r > q$ и $r < q$.

Следовательно, в силу (4.4)

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(q^n/r^{n+1}), (r^n/q^{n+1})\} G\epsilon q^3 \iint p_2(\mu') P_n(\cos\psi) d\mu' d\lambda'.$$

Поскольку p_2 является поверхностной функцией, то равенства (3.16) и (3.18) дают

$$\begin{aligned}\iint p_2(\mu') P_n(\cos\psi) d\mu' d\lambda' &= 0,8\pi p_2(\mu), \quad n = 2, \\ &= 0, \quad n \neq 2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$U_1 = 0,8\pi G\epsilon q^3 \{(q^2/r^3), (r^2/q^3)\} p_2(\mu) \quad (4.31)$$

для $r > q$ и $r < q$ соответственно.

Поскольку $U = U_0 + U_1$, из (4.11) и (4.31) в таком случае имеем

$$U = \frac{4}{3} \pi G r q^3 \{r^{-1} + 0,6\epsilon q^2 r^{-3} p_2(\mu)\} \quad (r > q), \quad (4.32a)$$

$$U = \frac{4}{3} \pi G r \left\{ \frac{1}{2} (3q^2 - r^2) + 0,6\epsilon r^2 p_2(\mu) \right\} \quad (r < q). \quad (4.32b)$$

§ 4.5.2. ТОНКАЯ СФЕРОИДАЛЬНАЯ ОБОЛОЧКА ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим теперь тонкую сфероидальную оболочку постоянной плотности ρ , ограниченную поверхностями

$$r = q[1 + \epsilon p_2(\mu)], \quad r = (q + \delta q)\{1 + (\epsilon + \delta\epsilon)p_2(\mu)\},$$

и пусть δU — потенциал в точках P с координатами (r, μ) , созданный этой оболочкой.

Дифференцирование равенств (4.32) по q дает

$$\delta U = 4\pi G\rho\{r^{-1}q^2\delta q + 0,2r^{-3}p_2(\mu)\delta(\epsilon q^5)\} \quad (r > q), \quad (4.33a)$$

$$\delta U = 4\pi G\rho\{q\delta q + 0,2r^2p_2(\mu)\delta\epsilon\} \quad (r < q). \quad (4.33b)$$

§ 4.5.3. СФЕРОИДАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЗЕМЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим модель Земли со средним радиусом a , в которой плотность ρ изменяется таким образом, что все внутренние поверхности постоянной плотности имеют вид (4.30). Мы снова ищем потенциал U в точках P с координатами (r, μ) .

Если точка P внешняя, то U получается путем интегрирования по q от 0 до a выражения (4.33a), причем ρ рассматривается теперь как переменная. Результат можно представить в виде

$$U = GMr^{-1} \left(1 + \frac{3}{2} K_2 a^2 r^{-2} p_2\right) \cdot (r > a), \quad (4.34a)$$

где

$$15K_2 = 8\pi(Ma^2)^{-1} \int_0^a \rho \frac{d(\epsilon q^5)}{dq} dq.$$

[Заметим, что K_2 не зависит от положения P , как этого следует ожидать из сравнения (4.34a) с (3.7).]

Если P — внутренняя точка (рис. 4.9), то можно написать уравнение внутренней поверхности постоянной плотности, проходящей через эту точку:

$$r = r_x \{1 + \epsilon_x p_2(\mu)\}, \quad (4.35)$$

где r_x и ϵ_x — средний радиус и сжатие этой поверхности. Теперь мы должны учесть вклады в гравитационный потенциал U вида (4.33a)

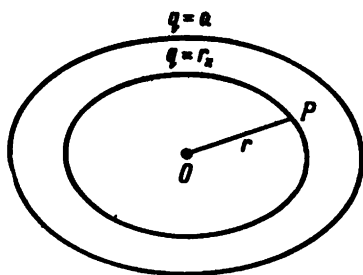


Рис. 4.9.

для $q < r_x$ и вида (4.33б) для $q > r_x$. В результате получим

$$U = 4\pi G r^{-1} \left\{ \int_0^{r_x} \rho q^2 dq + 0,2 p_2 r^{-2} \int_0^{r_x} \rho \left[\frac{d(\epsilon q^5)}{dq} \right] dq \right\} + \\ + 4\pi G \left\{ \int_{r_x}^a \rho q dq + 0,2 p_2 r^2 \int_{r_x}^a \rho \frac{d\epsilon}{dq} dq \right\} \quad (r < a), \quad (4.34б)$$

где r имеет тот же смысл, что и в (4.35).

С точностью до первого порядка по ϵ результаты гравитационной теории (4.34) составляют важную часть теории, необходимой для вычисления момента инерции Земли. Последняя была развита дальше, в особенности работами Калландро [1, 2] и Дж. Дарвина [4], которые учли члены более высокого порядка по ϵ (см., например, [3, 5]).

Литература

1. *Callandreau O.*, Ann. Obs. (Paris), 1—84, 1889.
2. *Callandreau O.*, Bull. Astron., 14, 214—217, 1897.
3. *Cook A.H.*, The external gravity field of a rotating spheroid to the order of ϵ^3 , Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 2, 199—214, 1959.
4. *Darwin Sir G.*, The theory of the figure of the Earth carried to the second order of small quantities, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 60, 82—124, 1900.
5. *Jeffreys Sir H.*, The Earth, 5th ed., Cambridge Univ. Press, 1970. (См. литературу к гл. 2.)
6. *Kellogg O.D.*, Foundations of Potential Theory, Dover, New York, 1953