

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

Учреждение образования
« ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ »

ПОДШИВАЛОВ В. П.

**КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО
ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ**

(РАЗДЕЛ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ»)

Для студентов 4 – 5 курсов специальности « Геодезия »



**Новополоцк
2007**

Курс лекций ведется на кафедре прикладной геодезии и фотограмметрии Полоцкого государственного университета для студентов специальности «Геодезия». В настоящем издании приводится авторский курс, отработанный за годы его преподавания студентам.

Содержание курса соответствует программе изучения дисциплины «Высшая геодезия» для студентов 4 курса очной и 5 курса заочной форм обучения специальности «Геодезия».

Может быть полезен магистрантам и аспирантам для подготовки к сдаче вступительных и кандидатского экзаменов, а также специалистам, занимающимся вопросами формирования и модернизации координатных геодезических систем общегосударственного назначения, решением задач редуцирования измерений на поверхность земного эллипсоида.

Рассмотрен и одобрен учебно-методической комиссией геодезического факультета.

Рецензенты:

Кафедра геодезии и фотограмметрии Учреждения образования «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия», г. Горки;

Докт. техн. наук профессор Мицкевич В. И. - профессор кафедры прикладной геодезии и фотограмметрии Учреждения образования «Полоцкий государственный университет».

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.	4
2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ	5
2.1. Общие сведения о потенциале силы тяжести	5
2.2. Нормальный и возмущающий потенциал силы тяжести	7
3. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ	11
3.1. Общие сведения	11
3.2. Астрономо-геодезический вывод уклонений отвеса	12
3.3. Уравнение Лапласа для геодезических азимутов	15
3.4. Гравиметрические уклонения отвеса	16
3.5. Астрономо-гравиметрические уклонения отвеса	17
3.6. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвеса	19
4. СИСТЕМЫ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫСОТ	21
4.1. Общие сведения	21
4.2. Приближенные высоты	23
4.3. Ортометрические высоты	24
4.4. Нормальные высоты	25
4.5. Динамические высоты	27
4.6. Нивелирование квазигеоида	27
5. РЕДУКЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА	30
5.1. Сущность редуccionной проблемы и пути ее решения	30
5.2. Редукция базисных измерений	31
5.3. Редуccionирование свето и радиодальномерных расстояний	34
5.4. Редуccionирование горизонтальных направлений	36
6. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ	40
6.1. Общие сведения о методах градусных измерений	40
6.2. Уравнения градусных измерений по меридиану	42
6.3. Уравнение градусных измерений по параллели	47
6.4. Уравнения градусных измерений по методу площадей	49
6.5. Исходные геодезические даты и методы их установления	54
7. УРАВНИВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ	56
7.1. Постановка задачи и пути ее решения	56
7.2. Полигональное уравнивание сети 1 класса	57
7.3. Современное уравнивание астрономо-геодезической сети 1 – 2 классов	59
8. МЕТОДЫ УСТАНОВЛЕНИЯ СВЯЗИ СИСТЕМ КООРДИНАТ	63
8.1. Референцные системы координат СК – 42 и СК – 95	63
8.2. Общеземные системы координат ПЗ 90 и WGS – 84	64
8.3. Параметры связи систем координат	65
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	67

1. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.

Теоретическая геодезия является завершающей частью курса « **Высшая геодезия** », ее основной задачей является **определение формы и размеров Земли** как физического и геометрического тела на основе законов механики и результатов измерений, выполненных на поверхности Земли и в околоземном пространстве.

В сфероидической геодезии мы рассмотрели методы решения задач на поверхности земного эллипсоида, параметры которого принимались известными. В теоретической геодезии рассматриваются **методы определения этих параметров**, определение **физической модели Земли – геоида**, а также изучаются методы **определения отступлений** физических и геометрических характеристик земного эллипсоида и геоида. Физической характеристикой этих отступлений служит **аномалия силы тяжести**, а геометрическими – **уклонения отвеса** и **аномалии высот**.

В теоретической геодезии изучаются основы создания **системы геопотенциальных высот** точек земной поверхности и методы их вычисления по результатам измерений, когда речь идет о **высокоточной передаче высот на большие расстояния**.

Рассматривается **проблема редуцирования измерений** с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида, которая в геодезии является **координатной** или **поверхностью относимости**.

Определение параметров земного эллипсоида и ориентирование его поверхности в теле Земли рассматривается как традиционными методами, основанными на **астрономо-геодезических и гравиметрических измерениях**, так и на основе современных методов, основанных на **спутниковых системах позиционирования**. Вводится понятие **исходных геодезических дат** для геодезической основы государства и методы их установления. Рассматриваются вопросы установления государственных геодезических систем координат как классическими, так и современными способами.

Поскольку в качестве основы для решения задач геодезии вообще и теоретической геодезии в частности является государственная астрономо-геодезическая сеть первого класса, рассматриваются также **методы уравнивания этой сети** в историческом аспекте, также рассматриваются вопросы совместного уравнивания сплошной сети первого-второго классов в современных условиях.

С развитием измерительных технологий на основе современных достижений науки и техники реализованы новые возможности **установления систем координат**. Так на смену референцной системе координат **СК – 42** приходят современные общеземные системы координат **WGS – 84** (США) и **ПЗ – 90** (РФ), рекомендованные для целей навигации и решения общепланетарных задач, а также референцные **СК – 95** и другие, рекомендованные для целей геодезии, картографии и топографии в масштабах государства, а также для решения задач геодезического обеспечения ГИС-технологий. В теоретической геодезии рассматриваются вопросы **установления параметров преобразования различных систем координат**, а также методы установления их взаимосвязи.

2. ОСНОВЫ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

2. 1. Общие сведения о потенциале силы тяжести

Сила F взаимного притяжения двух точечных масс M и m , удаленных друг от друга на расстояние r , определяется законом всемирного тяготения Ньютона

$$F = f \frac{Mm}{r^2}, \quad (2.1)$$

где f – **гравитационная постоянная**, определяющая силу притяжения двух точечных единичных масс на единичном расстоянии в принятой системе мер. Если речь идет о земном притяжении, тогда, для массы Земли (учитывая массу ее атмосферы) M , сосредоточенной в ее центре, имеют **геоцентрическую гравитационную постоянную Земли**, определяемую произведением fM .

Если расстояние между двумя точками увеличится на бесконечно малую величину dr , то будет совершена элементарная работа

$$dA = f \frac{Mm}{r^2} dr,$$

равная потере потенциальной энергии

$$dA = -dV.$$

Отсюда потенциальная энергия притяжения двух точечных масс определится выражением

$$V = \int_0^V dV = fMm \int_0^r \frac{dr}{r^2} = f \frac{Mm}{r} \quad (2.2)$$

Если взять единичную массу $m = 1$, то пользуются скалярной функцией

$$V = f \frac{M}{r},$$

которую называют **потенциалом массы M** или **потенциальной функцией**. Потенциал точки равен работе, затраченной гравитационной силой на перемещение единичной массы из бесконечности в данную точку. Для подтверждения этого утверждения интегрируем уравнение (2.2) для двух точек Q_0 до Q , находящихся на конечном расстоянии. Работа по перемещению единичной массы из одной точки в другую определится разностью их потенциалов

$$A = \left| - \int_{Q_0}^Q dV \right| = V(Q) - V(Q_0)$$

Если одна из точек Q_0 находится на бесконечном удалении, ее потенциал равен нулю $V(Q_0) = 0$.

Согласно второму закону механики сила F связана с ускорением g уравнением

$$F = mg, \quad g = \frac{F}{m} = f \frac{M}{r^2} = - \frac{dV}{dr}, \quad (2.3)$$

где получено уравнение связи потенциала силы притяжения и ускорения.

Потенциальная функция V в пространстве массы M задает поле гравитационных ускорений, разложенных по осям геоцентрической системы пространственных координат $OXYZ$, определяемое уравнениями

$$\overline{W}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \overline{i}; \quad \overline{W}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \overline{j}; \quad \overline{W}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \overline{k} \quad (2.4)$$

При этом модуль вектора ускорения силы притяжения имеет выражение

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

При вычислении потенциала силы притяжения реальной массы, определенным образом распределенной внутри какого-либо тела, используют свойство суперпозиции отдельных точечных масс dm_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). В случае, когда общая притягивающая масса M объемного тела образуется суммой элементарных масс dm , ее потенциал равен сумме потенциалов элементарных масс и определяется интегральным уравнением

$$V = \int_M \frac{dm}{\rho} \quad (2.5)$$

В геодезии имеют дело с потенциалом Земли. В этом случае необходимо учесть две особенности, во-первых, ее масса и размеры определяются из материалов астрономических, гравиметрических и геодезических измерений, во-вторых, Земля обращается вокруг своей оси, следовательно, на материальные точки действует сила тяжести, равная сумме силы притяжения и центробежной силы.

Таким образом, потенциал силы тяжести W равен сумме потенциала силы притяжения V и потенциала центробежной силы U' .

$$W = V + U' \quad (2.6)$$

Потенциал центробежной силы определяется суточным вращением Земли. Пусть радиус Земли равен R , а геоцентрические пространственные координаты точки определяются известными уравнениями

$$x = R \cos \Phi \cos L; \quad y = R \cos \Phi \sin L; \quad z = R \sin \Phi \quad (2.7)$$

Найдем производные от координат по времени. Для чего принимаем во внимание то, что с изменением времени изменяется только долгота L , отсчитанная от некоторого начала в пространстве.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -R \cos \Phi \sin L \omega; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = R \cos \Phi \cos L \omega; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

Здесь $\omega = \frac{\partial L}{\partial t}$ - угловая скорость суточного вращения Земли. Производные выражают скорость изменения пространственных координат. Вторые производные от выражений (2.7) будут выражать соответствующие составляющие ускорения центробежной силы

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

Потенциал центробежной силы имеет известное выражение

$$U' = \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} \quad (2.10)$$

Следовательно, потенциал силы тяжести Земли согласно формуле (2. 6) будет иметь выражение

$$W = f \int \frac{dm}{\rho} + \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} \quad (2.11)$$

Поверхности, в каждой точке которых потенциал постоянен, называются изопотенциальными или уровенными поверхностями. Эти поверхности не пересекаются друг с другом и не касаются друг друга. Работа по перемещению точечной массы по уровенной поверхности равна нулю. Линии, касательные к которым являются нормальными к уровенным поверхностям (векторами силы тяжести), называются силовыми линиями гравитационного поля.

Уровенные поверхности, проходящие внутри Земли на разном удалении от ее центра, имеют различную форму и непараллельны друг другу потому, что распределение плотностей материи внутри Земли неоднородно. В геодезии выделяют одну из уровенных поверхностей, которая проходит через точку, служащую началом счета высот. Обычно эта точка совпадает со средним уровнем воды в море, прилегающем к территории государства. Эта поверхность является физической моделью Земли и называется **геоидом** при условии равенства ее массы всей массе Земли (вместе с массой атмосферы). Поверхность геоида совпадает с невозмущенным средним уровнем Мирового океана, а под материками проходит ортогонально силовым линиям гравитационного поля Земли.

Следует иметь в виду, что уровень Мирового океана подвержен колебаниям, вызванным различными внешними воздействиями (лунно-солнечное притяжение, температурные колебания и др.). В связи с этим поверхность геоида не может совпадать с реальной фигурой водной оболочки. Полезно отметить, что в зоне Панамского канала, соединяющего бассейны Тихого и Индийского океанов, отмечена разность уровней их водной поверхности, составляющая 0. 6 м. Уровень Черного моря ниже на 0. 7 м нуля-пункта Кронштадского футштока.

2. 2. Нормальный и возмущающий потенциал силы тяжести. Аномалии силы тяжести

Изучение формы и размеров Земли требует изучения ее гравитационного поля, которое характеризуется потенциалом силы тяжести. Эта задача решается на основе измерений, выполненных в реальных условиях. Как видно из выражения (2. 11) потенциал силы тяжести определяется двумя составляющими: потенциалом притяжения V и потенциалом центробежной силы U' . Вторая составляющая существенно меньше первой и может быть получена без затруднений, так как скорость суточного вращения Земли определена из астрономических измерений, а ко-

ординаты точек известны. Гораздо сложнее определяется первая составляющая, определяющая потенциал притяжения Земли. Здесь необходимо знать детальное распределение плотностей внутри Земли, их реальными данными мы не располагаем. В связи с этим выражение (2. 11) не может служить для решения задачи определения потенциала силы тяжести без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли.

Из потенциала силы притяжения V можно выделить некоторую модельную часть. При условии выбора хорошей модели Земли эта часть будет составлять основную часть потенциала силы притяжения. Ее называют нормальным потенциалом и обозначают U , тогда можем записать для потенциала силы тяжести Земли

$$W = U + T \quad , \quad (2. 12)$$

где величину T называют **возмущающим потенциалом**.

За нормальный потенциал U принимают потенциал эллипсоида вращения с известными геометрическими параметрами, имеющего массу и угловую скорость, равные массе и угловой скорости реальной Земли. Такой эллипсоид называют **Нормальной Землей**. Здесь возникает проблема, как быть с внутренним распределением плотностей внутри Нормальной Земли для определения нормального потенциала или потенциала нормальной силы тяжести. Эту проблему впервые решил английский ученый Стокс, который в 1849 году доказал теорему, согласно которой потенциал силы тяжести любого тела может быть определен из вычислений однозначно как на его поверхности, так и во внешнем пространстве, если известны его внешняя уровенная поверхность, а также масса и угловая скорость вращения тела вокруг неизменной оси, независимо от распределения плотностей внутри этого тела. Если форма поверхности сложная, например, поверхность геоида, то вычисление потенциала в конечном виде проблематично. Если же поверхность простая, как сфера или эллипсоид, то задача решается по замкнутым формулам.

Таким образом мы видим, что для Нормальной Земли потенциал может быть вычислен. Здесь отметим, что потенциал центробежной силы также вычисляется без проблем, поэтому на основе теоремы Стокса достаточно вычислять потенциал силы притяжения Нормальной Земли.

Для эллипсоида вращения итальянским ученым Сомильяно в 1929 году получено строгое уравнение для вычисления ускорения нормальной силы тяжести в точке с широтой B на его поверхности ($H = 0$)

$$\gamma_B = \frac{a\gamma_0 \cos^2 B + b\gamma_{90} \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad , \quad (2. 13)$$

где γ_B , γ_0 , γ_{90} – значения ускорения нормальной силы тяжести в некоторой точке с широтой B , а также на экваторе и полюсе. Последние два значения постоянны и определяются при установлении параметров Нормальной Земли. Для удобства вычислений вручную раньше формулу (2. 13) преобразовывали путем разложения в ряд, принимая обозначения:

полярное сжатие - $\alpha = (a - b)/a$;

коэффициент - $\beta = (\gamma_{90} - \gamma_0) / \gamma_0$.

Используя различные геометрические и физические параметры Нормальной Земли по мере их уточнения, получают различные уравнения в виде разложений в ряды. Так в 1908 году немецкий ученый Гельмерт получил формулу для размеров и формы эллипсоида Бесселя и массы Земли, вычисленной на основе измерений ускорения силы тяжести, выполненных на 1603 пунктах.

$$\gamma_B = 978.030(1 + 0.005302 \sin^2 B - 0.000007 \sin^2 2B) \quad (2.14)$$

Известны также формулы Кассиниса (1930 г), Жонголовича (1952 г), Грушинского (1962 г) и др.

При современной вычислительной технике представление (2.13) в виде (2.14) неактуально. Вместе с тем традиционная форма представления уравнения (2.13) имеет место. Например, в системе координат ПЗ – 90, полученной российскими учеными по результатам современных данных на эпоху 1990 г, это уравнение предлагается в виде

$$\gamma_B = 978.0319(1 + 0.0053024 \sin^2 B - 0.0000058 \sin^2 2B) \quad (2.15)$$

Необходимо заметить, что при поверхности Нормальной Земли в форме эллипсоида вращения с параметрами a и b на различном удалении от нее форма изопотенциальных поверхностей силы тяжести меняется. Это понятно из того, что по мере удаления от поверхности земного эллипсоида центробежная сила возрастает, а сила притяжения уменьшается.

Величина возмущающего потенциала, как было отмечено, зависит от того, насколько Нормальная Земля отличается от реальной (геоида). Из определения нормального потенциала видно, что возмущающий потенциал обусловлен только несовпадением поверхностей геоида и земного эллипсоида. На поверхности Земли значения реальных ускорений силы тяжести g могут быть получены из гравиметрических измерений. Следовательно для каждого геодезического пункта, широта которого известна, может быть вычислено ускорение нормальной силы тяжести и измерено ускорение реальной силы тяжести, а также получены их разности Δg , которые называют **аномалией силы тяжести**

$$\Delta g = g - \gamma \quad (2.16)$$

Здесь возникает вопрос, заключающийся в том, что значение g измерено на реальной поверхности Земли ($H \neq 0$), а значение γ вычислено на поверхности эллипсоида ($H = 0$). Необходимо редуцировать ускорение нормальной силы тяжести на некоторую высоту H по нормали n к поверхности эллипсоида. В этом случае применяем разложение по формуле Тейлора

$$\gamma_B^H = \gamma_B + \frac{\partial \gamma}{\partial n} H + \dots \quad (2.17)$$

здесь частная производная называется вертикальным градиентом силы тяжести. Высоты точек земной поверхности малы по сравнению с радиусом Земли, поэтому в разложении (2.17) для решения многих задач достаточно ограничиться только

первым членом разложения, более того, при вычислении производной можно пренебречь сжатием Земли. Тогда будем иметь

$$\gamma = \frac{fM}{R^2}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2fM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R}$$

С учетом этого формула (2. 17) принимает вид

$$\gamma_B^H = \gamma_B - \frac{2\gamma_B}{R} H + \dots \quad (2. 18)$$

Мы показали принцип определения аномалии силы тяжести, которые характеризуют несовпадения реального и нормального гравитационных полей. Также важной характеристикой этого несовпадения является возмущающий потенциал, значение которого необходимо знать для решения самых различных задач геодезии. Мы получили связь потенциала силы тяжести с ускорением (2. 3). Следовательно и возмущающий потенциал аналогично связан с аномалией силы тяжести (разностью ускорений). Проблемы с установлением аналитической зависимости между этими величинами обусловлены тем, что, вообще говоря, не существует аналитического выражения аномалии силы тяжести. Здесь можно предложить некоторую модель, в той или иной степени приближающуюся к реальности. Решение задачи упрощается за счет того, что аномалии силы тяжести при достаточно хорошей модели Земли имеют малые величины.

Наиболее известна модель для вычисления возмущающего потенциала некоторой сферической области σ , предложенная Стоксом

$$T_\sigma = \frac{1}{4\pi R} \int_\sigma \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2. 19)$$

где ψ - сферическое расстояние от данной точки до текущей точки поверхности;
 R – радиус сферы, принятый равным среднему радиусу кривизны Земли;
 $S(\psi)$ – функция Стокса, имеющая выражение

$$S(\psi) = 1 + \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2. 20)$$

Для практического применения в формуле Стокса (2. 19) удобнее перейти от интегрирования по поверхности σ к интегрированию по сферическим расстоянию ψ и азимуту A . Элемент сферической поверхности при этом имеет известное выражение

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi dA$$

и уравнение Стокса принимает вид

$$T_\sigma = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi dA \quad (2. 21)$$

3. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

3. 1. Общие сведения

Несовпадение поверхностей геоида и эллипсоида, принятого в качестве координатной, обусловлено аномалиями силы тяжести. В каждой точке вектор нормальной силы тяжести n не равен вектору реальной силы тяжести o . Разность их модулей характеризует возмущающий потенциал силы тяжести, а разность их направлений определяет угол u , образованный отвесной линией и нормалью к поверхности эллипсоида, который называют **уклонением отвеса**. Таким образом видим из рисунка 3. 1, что уклонения отвеса характеризуют непараллельность отсчетной уровенной поверхности (геоида) и поверхности эллипсоида. Как известно, в геодезии применяют как общеземные, так и референчные системы координат. Принято считать уклонения отвеса, отсчитанные от нормалей к поверхности общего земного эллипсоида, **абсолютными**, а от нормалей к поверхности референц-эллипсоида – **относительными**.

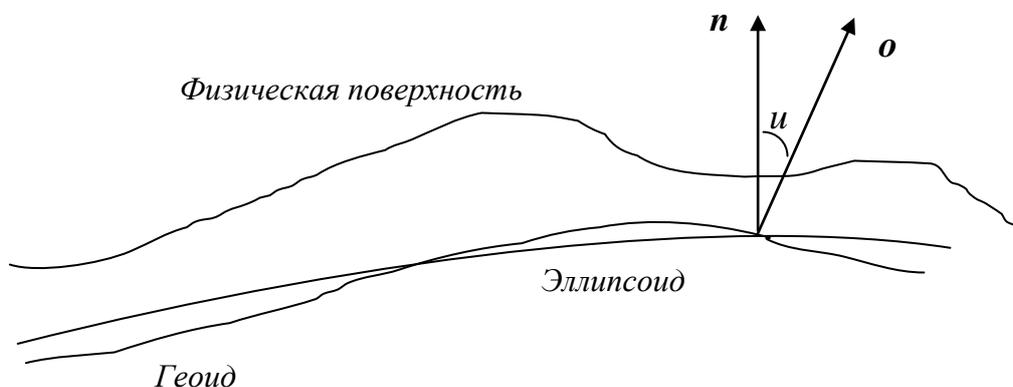


Рис. 3. 1

Как правило, государственные геодезические сети определяются в референчных системах координат относительно принятых исходных геодезических дат. Из астрономических измерений на пунктах Лапласа получают астрономические координаты. На этих пунктах определяют **астрономо-геодезические уклонения отвеса**, которые являются относительными. Такой метод определения уклонений отвесных линий называют **геометрическим**.

Уклонения отвеса являются геометрическими характеристиками отступлений поверхностей геоида и эллипсоида и характеризуют их непараллельность. Как видим из рисунка они связаны с векторами реальной и нормальной силы тяжести, следовательно, уклонения отвеса должны иметь аналитическую связь с аномалиями силы тяжести. Определение уклонений отвеса по аномалиям силы тяжести носит название **гравиметрического** и относится к **физическому** методу.

Как будет показано далее, как астрономо-геодезический, так и гравиметрический методы определения уклонений отвеса имеют свои достоинства и недостатки. Поэтому на практике применяется, в основном, **астрономо-гравиметрический метод** вывода уклонений отвеса. В этом методе сведены к минимуму недостатки обоих методов и объединены их достоинства.

В высшей геодезии уклонения отвеса играют важную роль:

- удобные и наглядные геометрические характеристики отступлений реального и нормального гравитационных полей, используются для изучения фигуры Земли (геоида);
- используются для решения задачи редуцирования измерений, выполненных на физической поверхности Земли, на поверхность земного эллипсоида, на которой определена система координат;

Уклонение отвеса u называется **полным уклонением отвеса**. Этот угол лежит в некоторой плоскости, образующей с плоскостью меридиана некоторый угол θ , называемый азимутом полного уклонения отвеса. Для удобства решения научных и практических задач высшей геодезии полное уклонение отвеса в данной точке разлагают на две **составляющие** – в плоскости меридиана ξ и плоскости первого вертикала η . Также определяют **составляющую уклонения отвеса в заданном направлении**.

Существуют простые зависимости между полным уклонением отвеса и его составляющими

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad \xi = u \cos \theta; \quad \eta = u \sin \theta \quad (3.1)$$

3. 2. Астрономо-геодезический вывод уклонений отвеса

Пусть на физической поверхности Земли (рис. 3. 2) имеется некоторая точка T , кроме того, для простоты предположим, что через эту точку проходит поверхность референц – эллипсоида (геодезическая высота точки равна нулю). Если точка T является центром астрономо-геодезического пункта Лапласа, то для нее известными являются астрономические широта φ , долгота λ и азимут α_m направления, полученные из астрономических наблюдений, а также геодезические широта B , долгота L , и азимут A_m направления.

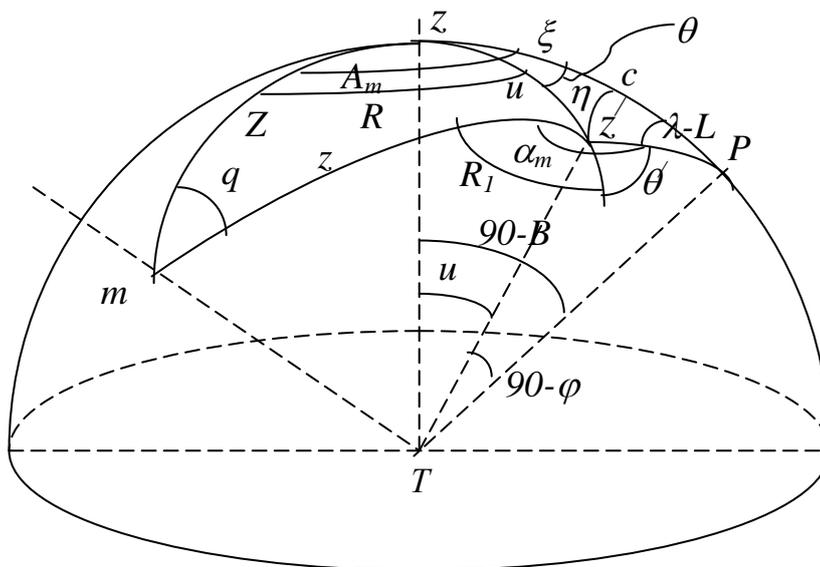


Рис. 3. 2.

На рисунке 3. 2 имеем сферу единичного радиуса с центром в точке T , кроме того: P – полюс мира, TP – прямая, параллельная оси вращения Земли; Z – геодезический зенит точки T , ZT – нормаль к поверхности эллипсоида; Z' – астрономический зенит, TZ' – отвесная линия; $ZP = 90 - B$ – дуга круга единичного радиуса, равная дополнению до 90^0 геодезической широты B ; $Z'P = 90 - \varphi$ – дуга круга еди-

ничного радиуса, равная дополнению до 90^0 астрономической широты φ ; $ZZ' = u$ - полное уклонение отвеса; Zc - дуга первого вертикала, образующая прямой угол с геодезическим меридианом PZ в точке c ; PZ' - астрономический меридиан точки T ; дуги $Zc = \xi$ и $Z'c = \eta$ - составляющие уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале соответственно; θ - геодезический азимут полного уклонения отвеса; θ' - астрономический азимут полного уклонения отвеса; Tm - направление на местный предмет, A_m и α_m - его геодезический и астрономический азимуты; $\lambda - L$ - угол, образованный астрономическим и геодезическим меридианами, равный разности астрономической и геодезической долготы точки T ; $Zm = Z$ и $Z'm = z$ - дуги единичного круга, соответственно равные геодезическому и измеренному зенитным расстояниям на предмет m .

Для решения задачи определения астрономо-геодезического уклонения отвеса рассмотрим на рис. 3. 2. прямоугольный сферический треугольник PcZ' , в котором угол при вершине c прямой, катеты $Pc = 90 - B - \xi$, $Z'c = \eta$, а гипотенуза $PZ' = 90 - \varphi$. Применяя аналогии Непера для решения прямоугольных сферических треугольников (косинус любого элемента прямоугольного сферического треугольника равен произведению котангенсов смежных с ним элементов, или произведению синусов несмежных с ним элементов, при этом значения катетов берется как дополнение до 90^0 , а прямой угол не считается элементом), имеем

$$\begin{aligned} \cos(\lambda - L) &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(B - \xi) \\ \sin \eta &= \sin(\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.2)$$

При хорошо ориентированном референц-эллипсоиде относительно геоида полное уклонение отвеса, его составляющие, а также разность астрономических и геодезических долгот в любой точке будут малыми величинами. В уравнениях (3.2) можем разложить тригонометрические функции малых аргументов в ряд Маклорена, ограничиваясь только первыми членами разложений, в результате получим с необходимой точностью

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Как видим, для определения астрономо-геодезических уклонений отвеса в каждом пункте необходимо иметь как астрономические, так и геодезические широты и долготы. В соответствии со схемой построения государственной геодезической сети это имеет место только на пунктах Лапласа. Точность астрономо-геодезических уклонений отвеса соответствует точности определения астрономических долгот и широт. Если они определены по программе астрономических наблюдений первого класса, то это составляет величину в $0.3''$.

Для решения задачи редуцирования измерений на поверхность эллипсоида необходимо знать составляющую полного уклонения отвеса U_A в заданном направлении. Для решения этой задачи спроектируем дугу ZZ_1 на дугу Zm , получим прямоугольный треугольник, который по малости можно считать плоским. Один из катетов его (на дуге Zm) равен искомой величине U_A , которая выражается уравнением

$$v_A = u \cos R = u \cos(A_m - \theta) = u \cos A_m \cos \theta + u \sin A_m \sin \theta$$

С учетом выражений (3. 1) получаем

$$v_A = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m \quad (3.4)$$

На практике центры M геодезических пунктов не лежат на поверхности эллипсоида, а расположены на некоторой высоте H . В связи с этим возникает задача редуцирования уклонений отвеса с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида. При этом следует иметь в виду, что силовая линия гравитационного поля Земли имеет кривизну, обусловленную неравномерным распределением плотностей горных пород в земной коре. Это видно из рисунка 3. 3. Она лежит в плоскости меридиана, следовательно, ее кривизна не влияет на составляющую уклонения отвеса в плоскости первого вертикала.

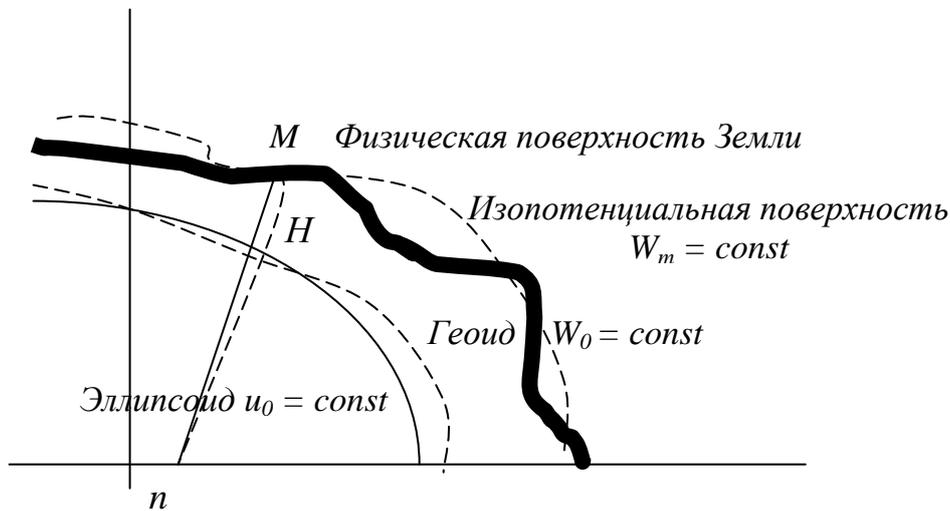


Рис. 3. 3

На рисунке 3. 3. показана отвесная линия Mn , проведенная в точке M , и силовая линия гравитационного поля – дуга Mn , которая ортогональна изопотенциальным поверхностям, проходящим на любом удалении от поверхности эллипсоида, $W_m = const$, $W_0 = const$ и т. д. Здесь видно, что направление отвеса на поверхности эллипсоида (касательная к силовой линии) не параллельно направлению отвеса в точке M . Это значит, что астрономическая широта φ , измеренная в точке M , не будет равна широте ее проекции на поверхности эллипсоида. Их разность определяется уравнением

$$(\varphi - \varphi_H)'' = (B - B_H)'' = -\rho'' \frac{H_{(км)}}{M} \left(\frac{\gamma_{90} - \gamma_0}{\gamma_{90}} \right) \sin 2B = 0.171 H_{(км)} \sin 2B.$$

Таким образом, окончательные формулы для вычисления астрономо-геодезических уклонений отвеса принимают вид

$$\begin{aligned}\xi_{az}'' &= \varphi - B - 0.171'' H_{(км)} \sin 2B \\ \eta_{az}'' &= (\lambda - L) \cos \varphi\end{aligned}\quad (3.5)$$

Как видно из формул (3. 5), поправка на один километр высоты в составляющую уклонения отвеса в плоскости меридиана на широте $B = 45^0$ равна $- 0. 171''$.

3. 3. Уравнение Лапласа для вычисления геодезических азимутов

Если обратиться к рисунку 3. 2 , видны следующие уравнения

$$\begin{aligned}A_m &= R + \theta \\ \alpha_m &= R_1 + \theta'\end{aligned}\quad (3.6)$$

Из треугольника $ZZ'P$, в котором угол при вершине Z' равен $180 - \theta$, можем записать по теореме косинуса угла сферической тригонометрии

$$-\cos \theta' = -\cos \theta \cos(\lambda - L) + \sin \theta \sin(\lambda - L) \sin B .$$

Учитывая то, что при хорошо ориентированном референц-эллипсоиде величина $(\lambda - L)$ малая и можно учитывать в разложении в ряд по формуле Маклорена тригонометрических функций только первые члены разложений, как и при выводе составляющих уклонения отвеса, а также полагая $\sin B = \sin \varphi$, получаем

$$\cos \theta - \cos \theta' = (\lambda - L) \sin \theta \sin \varphi$$

С учетом второй формулы (3. 5), а также преобразуя разность косинусов в произведение, получаем

$$\begin{aligned}\cos \theta - \cos \theta' &= \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \theta; \\ -2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta') \sin \frac{1}{2}(\theta + \theta') &= \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \theta\end{aligned}$$

Учитывая то, что отличие θ и θ' малое и полагая $2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta') = (\theta - \theta')$; $\frac{1}{2}(\theta + \theta') = \theta$, можем записать с ранее принятой точностью

$$\theta - \theta' = \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \theta = (\lambda - L) \sin \varphi \quad (3.7)$$

Обращаясь на рисунке 3. 2 к аналогичным элементам треугольников $ZZ'P$ и $ZZ'm$, можем записать по аналогии с уравнением (3. 7) для треугольника $ZZ'P$, применительно к треугольнику $ZZ'm$

$$R - R_1 = q \cos z . \quad (3.8)$$

Из треугольника $ZZ'm$ по теореме синусов и учитывая малую величину u имеем

$$\sin q = \sin u \frac{\sin R}{\sin z} = u \frac{\sin R}{\sin z}$$

С учетом этого можем записать вместо (3. 8)

$$R - R_1 = u \frac{\sin R}{\operatorname{tg} z} = u \frac{\sin(A_m - \theta)}{\operatorname{tg} z} \quad (3.9)$$

Суммируя (3. 7) и (3. 9), и подставляя результат в уравнения (3. 6), получаем после несложных преобразований и с учетом ранее принятых обозначений

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z} \quad (3.10)$$

Полученное уравнение называют уравнением Лапласа для вычисления геодезического азимута. Из этого уравнения видно, что для вычисления геодезического азимута, в астрономический азимут вводится две поправки: первая - за непараллельность астрономического и геодезического меридианов, вторая - за уклонение отвеса. На практике следует учитывать значимость этих поправок. Если первая учитывается всегда, то вторая, при хорошо ориентированном референц-эллипсоиде, когда составляющие уклонения отвеса малые величины, вводится только на тех пунктах Лапласа, когда значение z отличается от 90^0 более, чем на 2^0 . Точность азимутов Лапласа соответствует точности астрономических азимутов 1 класса и составляет величину, не более $0.5''$.

3. 4. Гравиметрические уклонения отвеса

Ранее нами приведено выражение для возмущающего потенциала через аномалии силы тяжести (2. 21). Существует связь между составляющими уклонений отвеса (геометрическими характеристиками аномального гравитационного поля) и аномалиями силы тяжести (физическими характеристиками аномального гравитационного поля), выражаемая формулами, полученными голландским ученым Вейнинг-Мейнесом в 1928 году

$$\begin{aligned} \xi'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g Q \cos A dA d\psi \\ \eta'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g Q \sin A dA d\psi \end{aligned} \quad (3.11)$$

где ψ - сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей; A - азимут направления, по которому взято ψ ; Δg - аномалия силы тяжести; Q - функция Вейнинг-Мейнеса, имеющая выражение

$$Q = \frac{\rho''}{2\gamma} \cos \frac{\psi}{2} \left(\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right)$$

При использовании формул (3. 11) для вычисления составляющих уклонений отвеса необходимо знать аномалии силы тяжести на всей поверхности Земли. Для этого необходима мировая гравиметрическая съемка. В этом случае возможен вывод абсолютных уклонений отвеса относительно общеземного эллипсоида. Как указывалось ранее, астрономо-геодезические уклонения отвеса относительные, так как астрономо-геодезическая сеть страны вычисляется на референц-эллипсоиде. Отсюда видим, что гравиметрические уклонения отвеса не могут применяться для анализа отклонений геоида от референц-эллипсоида.

Сравнивая два независимых вывода уклонений отвеса, видим, что точные астрономо-геодезические уклонения отвеса могут быть определены только на первоклассных пунктах Лапласа. При существующей схеме построения астрономо-геодезической сети первого класса такие пункты расположены в вершинах первоклассных полигонов и расстояние между ними составляет 200 – 250 км. Такой плотности недостаточно для изучения отступлений поверхности геоида от эллипсоида и решения редуccionной проблемы для пунктов 1 – 4 класса государственной геодезической сети. Для вычисления гравиметрических уклонений отвеса необходимы данные по мировой гравиметрической съемке, что не всегда доступно.

Как видим, оба метода, несмотря на их достоинства, обладают существенными недостатками и не могут применяться на практике.

3. 5. Астрономо-гравиметрические уклонения отвеса

Как отмечено ранее, уклонения отвеса играют важную роль при решении геодезических задач. Анализ влияния аномалий силы тяжести на составляющие гравиметрических уклонений отвеса показывает его четкую зависимость от расстояний между исследуемой и текущей точками. На этом основании возможно разделить всю поверхность Земли на кольцевые зоны с центром в исследуемой точке, при интегрировании (3. 11) по ψ , в зависимости от их влияния на значение уклонений отвеса. Большая работа по исследованию этого вопроса выполнена в ЦНИИГАиК (г. Москва) группой ученых под руководством Молоденского М. С. В результате получено, что для учета влияния зон радиусом до 1 000 км, можно использовать специальные палетки и гравиметрические карты. Понятно, что таким образом получают приближенные значения гравиметрических уклонений отвеса, без учета влияния дальних зон. Исследования показали, что это влияние, хотя и имеет место, но сглажено и для группы геодезических пунктов, расположенных вдоль первоклассного звена, носит систематический характер. Это обстоятельство позволило **интерполировать астрономо-геодезические уклонения отвеса** вдоль звена первого класса с использованием приближенных гравиметрических уклонений отвеса, полученных графическим путем с помощью палеток и местной гравиметрической съемки.

Рассмотрим идею такого интерполирования. Пусть на рис. 3. 4 имеем звено первого класса. Здесь пункты Лапласа *A, B, C, D*, на которые от исходных геодези-

ческих дат страны переданы геодезические широты и долготы, а также из астрономических наблюдений определены астрономические широты и долготы.

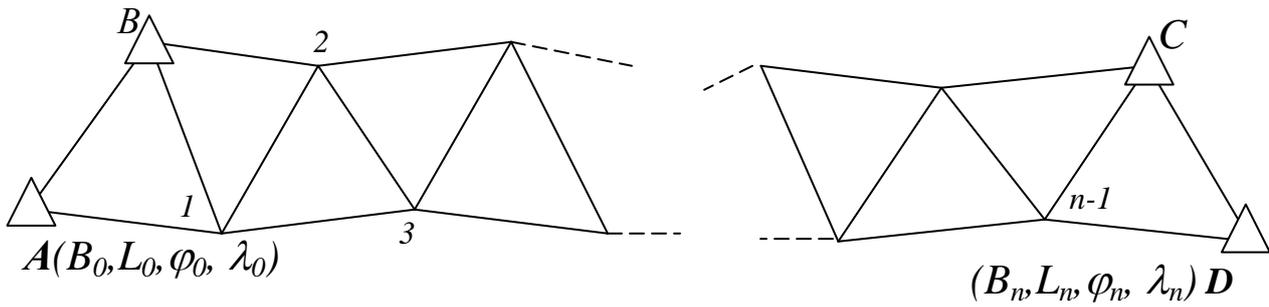


Рис. 3. 4

Таким образом, например, на пунктах A и D , расстояние между которыми равно диагонали звена D , получены астрономо-геодезические уклонения отвеса ξ_0 , η_0 , ξ_n , η_n по формулам (3.5). Кроме того, для этих и всех пунктов звена с использованием палеток определены приближенные гравиметрические уклонения отвеса: ξ'_i , η'_i ($i=0, 1, 2, 3, \dots, n$) по материалам местной гравиметрической съемки, выполненной на этих пунктах. Для астрономо-геодезических пунктов A и D вычисляют разности

$$\Delta\xi_0 = \xi_0 - \xi'_0; \quad \Delta\eta_0 = \eta_0 - \eta'_0;$$

$$\Delta\xi_n = \xi_n - \xi'_n; \quad \Delta\eta_n = \eta_n - \eta'_n;$$

Далее вычисляют поправки (разности) точных астрономо-геодезических и приближенных гравиметрических уклонений отвеса, приходящиеся на один километр длины данного звена.

$$\delta\xi_{1\text{км}} = \frac{\Delta\xi_n - \Delta\xi_0}{D_{\text{км}}}; \quad \delta\eta_{1\text{км}} = \frac{\Delta\eta_n - \Delta\eta_0}{D_{\text{км}}}.$$

Поправки к приближенным значениям уклонений отвеса на пунктах звена получают по формулам линейного интерполирования

$$\begin{aligned} \delta\xi_i &= \delta\xi_{1\text{км}} S_i \\ \delta\eta_i &= \delta\eta_{1\text{км}} S_i; \end{aligned} \quad (3.12)$$

где S_i – расстояние от пункта A до текущего пункта звена.

Точные астрономо-гравиметрические уклонения отвеса для всех пунктов первоклассного звена получают по формулам

$$\begin{aligned}\xi_i^{a-zp} &= \xi_i' + \delta\xi_i \\ \eta_i^{a-zp} &= \eta_i' + \delta\eta_i \quad (I = 1, 2, 3, \dots n)\end{aligned}\quad (3.13)$$

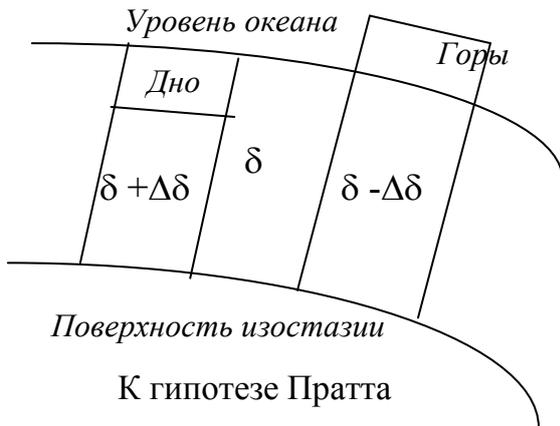
Анализ уклонений отвеса, полученных таким образом на пунктах государственной геодезической сети СССР, показывает их точность, не ниже астрономо-геодезических уклонений отвеса. Здесь возникает вопрос о том, что звено может располагаться в аномальном районе (что можно увидеть из материалов местной гравиметрической съемки) и поправки в приближенные уклонения отвеса не будут линейно зависеть от расстояния. В этом случае необходимо применять нелинейное интерполирование либо в середине звена произвести астрономические определения широты и долготы. Опыт показывает, что подобные случаи могут иметь место исключительно редко потому, что на расстояниях в 200 – 250 км резких изменений ускорения силы тяжести быть не может. Именно это обстоятельство учитывалось при разработке схемы и программы построения астрономо-геодезической сети СССР.

3. 6. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвеса

Как мы рассмотрели, для вывода астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса, необходимо иметь как астрономо-геодезические пункты, так и материалы мировых гравиметрических измерений. В случае, когда на всей территории государства не завершены работы по построению астрономо-геодезической сети и не выполнены гравиметрические измерения, при этом необходимо установить исходные геодезические даты для ориентирования референц-эллипсоида, редуцировать на его поверхность измерения, рассмотренные ранее методы определения уклонений отвеса неприемлемы. Такое положение имело место в Великобритании и других государствах в XIX в., когда метрополии не были связаны единой геодезической основой с колониями, а для освоения их территорий необходимы были точные карты и геодезическая основа. В Советском Союзе к 30–м годам XX в. возникла проблема уточнения параметров эллипсоида Бесселя, выводов параметров и ориентировки референц-эллипсоида Красовского. При этом на территории, расположенной восточнее Урала, отсутствовала государственная геодезическая сеть, гравиметрические измерения.

Для решения задачи определения уклонений отвеса в случаях, когда недостает информации для астрономо-гравиметрического метода, используют топографо-изостатические уклонения отвеса. Идея их вычисления заключается в том, что при вычислении гравиметрических уклонений отвеса наибольшее влияние оказывают ближние зоны. Поэтому возникла мысль о том, что рельеф местности (топография), окружающей данную точку в основном определяет уклонения отвеса. Избыток масс горных пород, заключенный в горных массивах, оказывает большее притяжение по сравнению с равнинными районами. Зная объем горных пород и их среднюю плотность, можно вычислить их притяжение и топографические уклонения отвеса. Впервые топографические уклонения отвеса вычислялись английскими геодезистами для обработки материалов астрономо-геодезических измерений в Индии. Так на одном из пунктов, расположенном на севере Индии у подножия Гималайского хребта, получили топографические уклонения отвеса, равные $27.9''$, астрономо-геодезические уклонения отвеса имели значение $5.2''$. На побережье Индийского океана это отличие достигало еще больших значений ($30-40''$ вместо

5-8^{''}). Это говорит о том, что рельеф местности хотя и оказывает влияние на величину уклонов отвеса, но это влияние сглажено или компенсировано. Были предложены ряд гипотез о природе такой компенсации.



К гипотезе Пратта

Рис. 3. 5



К гипотезе Венинг-Мейнеса

Рис. 3. 6

Одна из таких гипотез была предложена в середине XIX в. англичанином Д. Праттом. Смысл этой гипотезы состоит в том, что масса вертикальных блоков с равными основаниями, расположенными выше поверхности полной компенсации или изостазии (греч. равновесия) одинакова для всей поверхности Земной коры. Избыточные объемы в горных районах (рис. 3. 5) имеют меньшую плотность по сравнению с плотностью горных пород под морями и океанами. Однако эта гипотеза не нашла экспериментального подтверждения. Известно, что плотности горных пород не зависят от рельефа. Вместе с тем, было установлено, что изостатическая поверхность имеет место. Неизвестной оставалась природа изостатической компенсации. Выдвигались самые различные гипотезы. Например, в гипотезах Эри и Венинг-Мейнеса, появившихся почти одновременно с гипотезой Пратта, предполагается, что земная кора имеет двусторонние прогибы, симметричные относительно поверхности полной изостазии (рис. 3. 6). Избыток масс горных пород над уровнем моря компенсируется их избытком ниже поверхности изостазии.

Уклонения отвеса, вычисленные с учетом указанных гипотез называют топографо-изостатическими. Здесь необходимо определить глубину залегания поверхности изостазии относительно уровня морей и океанов. В среднем эта величина составляет примерно 100 км. При выводе параметров эллипсоида Красовского для восточной части территории Советского Союза вычислялись уклонения отвеса на основе гипотезы Пратта. Глубина изостатической компенсации принималась равной 96 км.

Отметим, что в современных условиях топографо-изостатические уклонения отвеса не применяются, однако изостатическая компенсация является важнейшей особенностью физического строения Земли.

4. СИСТЕМЫ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫСОТ

4. 1. Общие сведения

Высота точек земной поверхности относительно исходной отсчетной поверхности является одной из координат, характеризующей рельеф местности. Высота отсчитывается от исходной поверхности по нормали к ней. Если в качестве исходной поверхности принят земной эллипсоид, то высота, отсчитанная от нее, называется **геодезической** и обозначается H . Геодезические измерения выполняются в реальном гравитационном поле Земли, приборы устанавливаются в рабочее положение по отвесу и визирная ось нивелира перпендикулярна ему. Поэтому непосредственная передача геодезических высот из нивелирования невозможна. Уровенной поверхностью реального гравитационного поля и физической моделью Земли является геоид. Высота, отсчитанная от геоида, называется **ортометрической** и обозначается H^g . Высоту геоида над поверхностью эллипсоида называют **аномалией высоты** и обозначают ζ . Таким образом, для геодезической высоты можно записать выражение

$$H = H^g + \zeta, \quad (4.1)$$

где H^g – гипсометрическая составляющая (рельеф над уровнем моря), получаемая из измерений, ζ – геоидальная составляющая, характеризующая рельеф геоида над эллипсоидом и получаемая из обработки комплекса астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

Геоид – физическая модель Земли, поле силы тяжести которой совпадает с реальным, а его поверхность всюду гладкая и выпуклая, на морях и океанах совпадающая со средним невозмущенным уровнем поверхности воды. Под материками продолжена так, что в каждой ее точке вектор реальной силы тяжести пересекает поверхность геоида по нормали к ней.

В земной коре плотность неоднородна и силовая линия реального поля тяжести на промежутке от физической поверхности Земли до поверхности геоида (в промежуточном слое) представляет собой кривую линию. Характер и величина неоднородностей плотности земной коры достоверно неизвестен. Можно лишь выдвигать какие-либо предположения или гипотезы об этом. Поэтому нельзя только из измерений, без привлечения гипотез однозначно определить положение поверхности геоида внутри Земли. Советский ученый Молоденский М. С. впервые в мире указал на это. Вместе с тем для практических целей необходимо знать высоты над уровенной поверхностью. Молоденский предложил вычислять **нормальные высоты** H^N , отсчитанные от вспомогательной поверхности, которую он назвал **квазигеоидом**. Квазигеоид на морях и океанах совпадает с поверхностью геоида, а под материками незначительно (до 1-2 м.) отступает от него. Отвесная линия в каждой точке земной поверхности пересекает поверхность квазигеоида под прямым углом. Положение отвеса в любой точке земной поверхности может быть определено, следовательно, и поверхность квазигеоида может быть определена без привлечения гипотез о распределении плотностей в промежуточном слое. Для этого достаточно отложить нормальную высоту, полученную из нивелирования.

При передаче высот нивелированием II класса и ниже такая схема работает без каких-либо проблем. Вместе с тем, при нивелировании I класса протяженность ходов может достигать сотен километров, а периметры полигонов - тысячу и более.

В этом случае сумма измеренных превышений между двумя точками, полученных из разных нивелирных ходов, будет разная. Другими словами, **сумма измеренных превышений зависит от пути нивелирования**, а в замкнутом полигоне она не равна нулю и имеет место **теоретическая невязка нивелирного полигона**. Значение этой невязки зависит от периметра полигона и разности высот точек нивелирных ходов. Это видно из рисунка 4. 1.

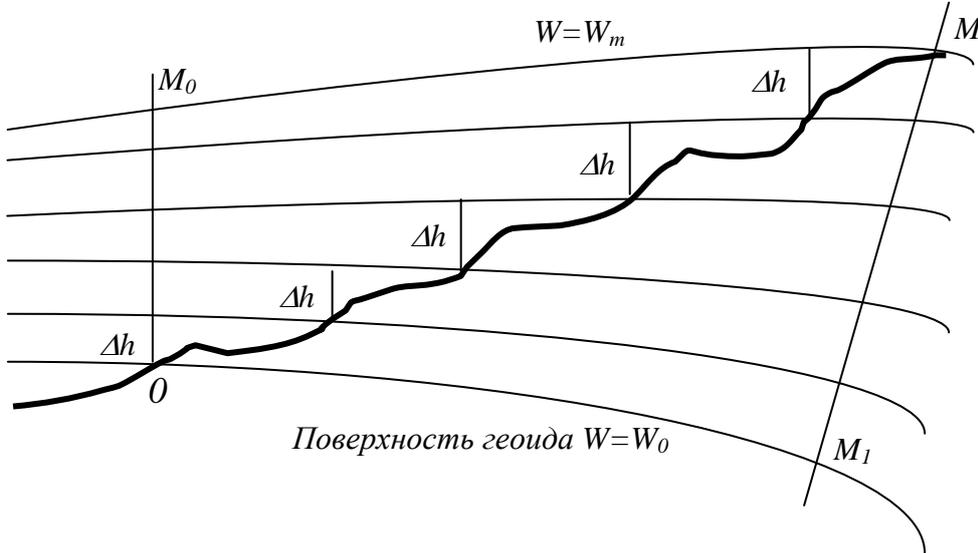


Рис. 4. 1

На рисунке показан нивелирный ход от точки O до точки M , вдоль которого измерены превышения Δh , сумма которых дает измеренную разность отметок этих точек. Если начальная точка O расположена в начале счета высот (на поверхности геоида), получаем измеренную высоту точки M

$$H_{изм} = \Sigma \Delta h \quad (4.2)$$

Если предположить, что нивелирный ход прошел другим путем, например, по OM_0M или OM_1M , то видно из рисунка, что суммы превышений будут другими, так как они определяются отрезками OM_0 и M_1M соответственно и которые не равны между собой из-за непараллельности уровенных поверхностей $W = const$. На практике такое может иметь место, например одни нивелирные ходы проложены вдоль дорог, другие вдоль рек и т. п.

Для устранения этого недостатка используют формулу, связывающую расстояние (dh) между двумя бесконечно близкими уровенными поверхностями и разностью их потенциалов (dW)

$$dW = gdh \quad (4.3)$$

Приращение потенциала силы тяжести в данной точке относительно потенциала начального футштока, взятое с обратным знаком, называется **геопотенциалом**. Поскольку разность потенциалов между любыми точками, лежащими на двух уровенных поверхностях постоянна, можем записать

$$\int_{om} dW = W_0 - W_m = \Delta W = \int_{om} g dh = const \quad (4.4)$$

Применяя теорему о среднем интегрального исчисления, запишем

$$\int_{om} g dh = \bar{g} \int_{om} dh = \bar{g} (H_m - H_0) = \bar{g} \Delta H \quad (4.5)$$

Далее получаем для превышения, не зависящего от пути нивелирования

$$\Delta H = H_m - H_0 = \frac{W_0 - W_m}{\bar{g}} \quad (4.6)$$

Здесь числитель дроби, стоящей в правой части, определяется из геодезических и гравиметрических измерений. Проблема заключается в определении среднего интегрального значения ускорения реальной силы тяжести на отрезке MM_1 . Дело в том, что для этого необходимо знать распределение плотностей горных пород в промежуточном слое, а такая информация отсутствует. В этом уравнении приращение высот вычисляется через геопотенциал, поэтому **высоты называют геопотенциальными** и они **не зависят от пути нивелирования**.

В зависимости от того, каким образом решается уравнение (4.6), различают системы геопотенциальных высот: **приближенные, ортометрические, нормальные и динамические**.

4. 2. Приближенные высоты

Приближенные высоты вычисляют в нормальном гравитационном поле Земли. В этом случае пренебрегают аномалиями силы тяжести. Приближенные высоты служат одним из этапов вычисления других систем высот и вычисляются при отсутствии гравиметрической съемки.

В исходной для вычисления геопотенциальных высот формуле (4.6) следует принять вместо характеристик реального поля характеристики нормального поля

$$\Delta H_{\text{прибл}} = \frac{u_0 - u_M}{\gamma_m^M} = \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M}, \quad (4.7)$$

где γ_m^M – среднее значение ускорения нормальной силы тяжести на отвесной линии MM_1 , γ – ускорение нормальной силы тяжести в точках нивелирного хода.

Получим более удобную формулу для вычисления приближенных высот, для чего правую часть уравнения (4.7) преобразуем

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{прибл}} &= \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M} = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_0^M (\gamma_m^M + \gamma - \gamma_m^M) dh = \\ &= \Delta H_{\text{измер}} + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_0^M (\gamma - \gamma_m^M) dh\end{aligned}\quad (4.8)$$

Здесь видно, что измеренные высоты исправляют только за непараллельность уровенных поверхностей нормального гравитационного поля.

4. 3. Ортометрические высоты

Ортометрические высоты отсчитываются от поверхности геоида до определяемой точки по отвесной линии. Формула (4. 6) в этом случае работает следующим образом. При перемещении от O к M_1 по поверхности геоида ортометрическая высота остается постоянной и равной нулю, а ортометрическая высота точки M определится отрезком MM_1 . Тогда можем записать

$$W_0 - W_M = W_{M_1} - W_M = \int_0^M g dh = \int_{M_1}^M g dh$$

Применив теорему Лагранжа о среднем значении функции, запишем

$$\int_{M_1}^M g dh = g_m^M \int_{M_1}^M dh = g_m^M \Delta H_M^g, \quad (4.9)$$

где g_m^M - среднее значение ускорения действительной силы тяжести на отрезке отвесной линии M_1M , а ΔH_m^M - приращение ортометрической высоты. Тогда для приращения ортометрической высоты получаем выражение

$$\Delta H = \frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = \frac{\int_0^M g dh}{g_m^M} \quad (4.10)$$

Из-за отсутствия полной и достоверной информации о распределении плотностей внутри Земли, как уже отмечалось ранее, ортометрические высоты однозначно по результатам измерений и без привлечения гипотез не могут быть определены. По этой причине ортометрические высоты не нашли до настоящего времени практического применения. Следует заметить при этом, что с развитием новых измерительных технологий и прежде всего, основанных на спутниковых системах позиционирования, а также современных результатах гравиметрических измерений появляются новые возможности вычисления ортометрических высот. Несомненным достоинством этих высот является то, что они отсчитываются от уровенной поверхности реального гравитационного поля Земли - геоида.

4. 4. Нормальные высоты

В связи с невозможностью вычисления ортометрических высот советским ученым Молоденским М. С. предложены в 1951 нормальные высоты. Отсчетной поверхностью для этих высот предложена вспомогательная поверхность, на морях и океанах совпадающая с геоидом, а на материках незначительно отличающаяся от геоида (по высоте до 2 м.), которую назвали **квазигеоидом**. Поверхность квазигеоида может быть получена из измерений, так как при этом не учитывают кривизну силовых линий гравитационного поля внутри Земли. Таким образом геометрия поверхности квазигеоида определяется направлением отвесных линий на физической поверхности Земли, которые являются нормальными к нему. Геометрию геоида определяют направления вектора силы тяжести на его поверхности, которые не известны.

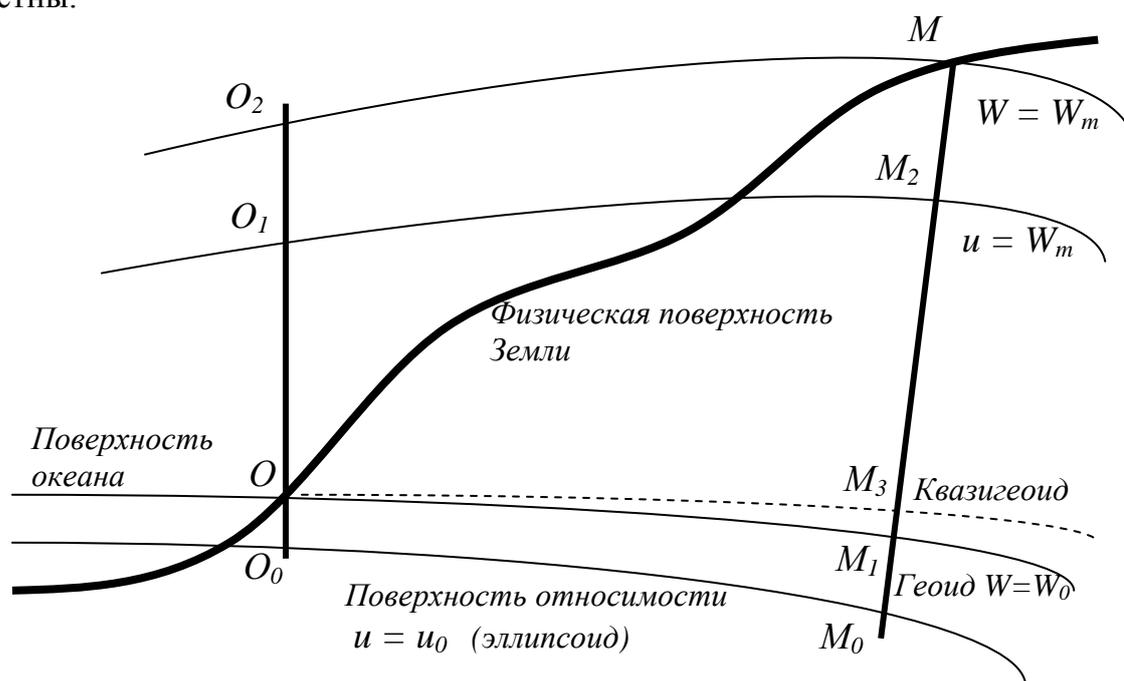


Рис. 4. 2

На рисунке 4. 2 имеем:

O_0M_0 – эллипсоид (Нормальная Земля);

OM_1 – геоид (физическая модель Земли);

OM_3 – квазигеоид;

$O_2 M$ – уровенная поверхность потенциала реальной силы тяжести в точке M ;

O_1M_2 – уровенная поверхность потенциала нормальной силы тяжести, равной реальной силе тяжести в точке M ;

MM_0 – геодезическая высота точки M ;

MM_1 – ортометрическая высота точки M ;

MM_3 – нормальная высота точки M ;

$M_0 M_1$ – аномалия высоты геоида в точке M ;

$M_0 M_3$ – аномалия высоты квазигеоида в точке M .

Из условий, следуемых из построения рисунка 4. 2 можем записать

$$W_0 - W_M = u_0 - u_M , \quad (4. 11)$$

следовательно имеем равенство отрезков $MM_3 = M_0 M_2 = H^r_M$

Используя формулу связи геопотенциала и высоты (4. 3) и следующие из нее формулы, можем записать

$$W_0 - W_M = \int_{0M} gdh; \quad u_0 - u_{M_2} = \int_{M_0M_2} \gamma dH^\gamma \quad (4.12)$$

Отсюда имеем

$$\int_{0M} gdh = \int_{M_0M_2} \gamma dH^\gamma = \gamma_m H_M^\gamma \quad (4.13)$$

Формула для нормальной высоты принимает вид

$$H_M^\gamma = \frac{\int_{0M} gdh}{\gamma_m^M} \quad (4.14)$$

Полученную формулу преобразуем для удобства ее практического применения

$$\begin{aligned} H_M^\gamma &= \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} gdh = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma + \gamma - \gamma_m^M + \gamma_m^M) dh \\ H_M^\gamma &= \int_{0M} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma) dh + \int_{0M} (\gamma_m^M - \gamma_m^M) dh \quad (4.15) \end{aligned}$$

Здесь первый член выражает измеренную высоту, второй – поправку за аномалию силы тяжести, третий - поправку за непараллельность уровенных поверхностей.

Если ход нивелирования замкнутый, должно соблюдаться равенство

$$\int_{0M} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma) dh + \int_{0M} (\gamma_m^M - \gamma_m^M) dh = 0$$

и сумма измеренных превышений по замкнутому нивелирному ходу (**теоретическая невязка нивелирного полигона**) имеет выражение

$$f = \int_{0M} dh = -\frac{1}{\gamma_m^M} \int_{0M} (g - \gamma) dh - \int_{0M} (\gamma_m^M - \gamma_m^M) dh \quad (4.16)$$

Для удобства вычисления нормальных высот в ЦНИИГАиК разработана специальная Инструкция и соответствующие вспомогательные таблицы.

Отметим, что в наихудшем случае для территории бывшего СССР ($H = 4$ км, $\Delta g = 500$ мЛГ) максимальные значения отступлений поверхности геоида от квазигеоида могут достигать величины 2м, а значение f может достигать нескольких миллиметров. При построении государственных опорных построений геопотенциальные высоты вычисляются только при нивелировании 1 класса. В более низких классах нивелирования используют измеренные высоты.

Вместе с тем, следует отметить, что территория Беларуси расположена в равнинном безаномальном районе, с высотами, не превышающими 400 м, поэтому отступления поверхности геоида от квазигеоида, могут достигать величин в несколько долей миллиметров, а значение f здесь пренебрегаемо мало для любого класса нивелирования.

4. 5. Динамические высоты.

Как видно из предыдущего материала, уровенные поверхности (поверхности равной силы тяжести), проходящие через точки на разных высотах, непараллельны друг другу, расстояния между ними различны. Это приводит к тому, что нормальные высоты этих поверхностей различаются. Эти различия невелики, вместе с тем, при инженерно-геодезическом обеспечении строительства это обстоятельство необходимо учитывать.

При строительстве больших водохранилищ, тоннелей большой протяженности, прецизионных сооружений задают поверхности равных высот методом высокоточного нивелирования. Например, разности высот уровня воды в крупных озерах и водохранилищах весьма существенно (озеро - Байкал 165 мм, озеро Севан – 88 мм). При этом замечено, что эти разности тем существеннее, чем больше высота над уровнем моря и разность широт водного контура.

В связи с этим при геодезическом обеспечении строительства сооружений, расположенных на больших по размеру территориях или предъявляющих особо высокие требования к точности вынесения в натуру, используют динамические высоты.

Опуская выводы, приведем формулу для вычисления динамических высот

$$H_M^{\text{дин}} = \int_{0M} dh - \frac{\beta}{2} \int_{0M} \cos 2\varphi dh + 0.3086 \frac{H_M}{2} . \quad (4. 17)$$

Первый член выражает измеренную высоту, второй – поправку за широту, третий – поправку за высоту.

4. 6. Нивелирование квазигеоида.

Под нивелированием квазигеоида понимают комплекс астрономических, гравиметрических и геодезических измерений для вычисления высоты квазигеоида над поверхностью эллипсоида. Геодезическая высота определяется над поверхностью эллипсоида, принятой в качестве координатной. Поскольку государственные геодезические построения задают референцную систему координат, нивелирование производится относительно принятого референц-эллипсоида.

Высота (геоида) квазигеоида связана с отклонениями отвеса. Это видно из рисунка 4. 3. Пусть в некоторой точке A поверхности эллипсоида и геоида (квази-

геоида) касаются друг друга. Вследствие их непараллельности (наличия уклонения отвеса), по мере удаления от точки A на некоторое расстояние dS , эти поверхности будут отступать друг от друга на величину аномалии высоты $d\zeta$.

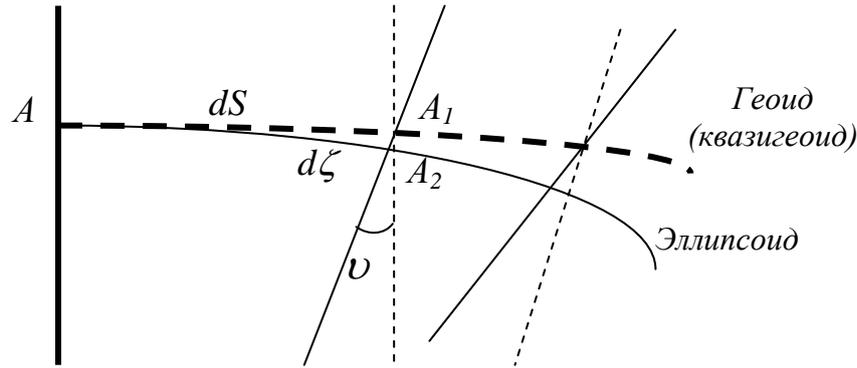


Рис. 4. 3

При дифференциально малых расстояниях dS и хорошо подобранном эллипсоиде, когда ν - малая величина, можно записать очевидное равенство

$$d\zeta = -\operatorname{tg}\nu dS = -\nu dS \quad (4.18)$$

Высота геоида (квазигеоида) над поверхностью эллипсоида в точке B , находящейся на конечном расстоянии от точки A . изменится на величину

$$\zeta_B - \zeta_A = - \int_{AB} \nu dS \quad (4.19)$$

Данное уравнение лежит в основе вычисления аномалий высот. В зависимости от того, какие уклонения отвеса используются в формуле (4. 19), различают астрономическое или астрономо-гравиметрическое нивелирование геоида (квазигеоида). В общем случае интегрирование правой части уравнения (4. 19) затруднено, так как не имеется функциональной зависимости между ν и S . На практике участок нивелирования разбивают на части, где можно допустить постоянное значение составляющей уклонения отвеса ν . Искомая аномалия высоты получается из формулы

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{\rho''} \int_{AB} \nu'' dS = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots) = \\ &= -\frac{\nu_1'' + \nu_2''}{2\rho''} S_1 - \frac{\nu_2'' + \nu_3''}{2\rho''} S_1 - \frac{\nu_3'' + \nu_4''}{2\rho''} S_1 - \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

По результатам нивелирования составляется карта аномалий высот. Точность аномалий высот, полученных из астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования невелика и составляет 0.5 – 2 м. Этого вполне достаточно для решения редуционной проблемы.

В настоящее время широко внедряются в геодезическое производство методы, основанные на спутниковых системах позиционирования. На их основе по-

являются принципиально новые возможности решения задачи нивелирования геоида (квазигеоида). Идея состоит в следующем. Из результатов спутниковых измерений получают пространственные прямоугольные (X, Y, Z) и геодезические (B, L, H) координаты. Точность вычисления геодезической высоты H при этом может достигать величины 0. 015 м. Нормальные высоты H^{\prime} получают из высокоточного геометрического нивелирования. Разность этих высот дает искомые аномалии высот. Как видим, точность современного метода выше классических практически в сто раз. Это раскрывает перспективы расширения возможностей решения прикладных задач на основе геодезических баз данных.

По результатам нивелирования квазигеоида над общим земным эллипсоидом с параметрами Красовского получены следующие значения аномалий высот: максимальные значения, экстраполированные на экватор, достигают величины в - 140 м на долготе 70° и + 125 м на долготе 345° . При этом имеют место как глобальные волны геоида над эллипсоидом, обусловленные влиянием материков и океанических впадин, так и локальные, обусловленные неравномерным распределением плотностей горных пород.

5. РЕДУКЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА

5. 1. Сущность редуccionной проблемы и пути ее решения

Геодезические измерения выполняются между точками на земной поверхности, которые могут быть расположены на определенных геодезических высотах, которые могут быть получены методами, рассмотренными нами ранее. Вычисление координат производится на поверхности эллипсоида. Геодезические приборы ориентируются по отвесной линии, а редуccionирование измеренных величин на поверхность эллипсоида производится по нормальям к нему. В связи с этим в измеренные значения необходимо ввести поправки, обусловленные как *высотой* соответствующих точек *над эллипсоидом*, так и *уклонением отвеса*.

Геодезические высоты и уклонения отвеса могут быть вычислены астрономо-гравиметрическим методом, для чего необходимо наличие астрономо-геодезической сети, нивелирования 1 класса, гравиметрической съемки на всей территории. Вместе с тем, для этого необходимо производить редуccionирование измерений. Получается замкнутый круг. Для решения задачи редуccionирования измерений на стадии построения государственной геодезической сети применяли единственно возможный *метод развертывания*, при котором пренебрегали отступлениями поверхности геоида и эллипсоида. Другими словами, здесь вводились поправки в измеренные величины только за нормальные высоты, а за уклонения отвеса и аномалии высот считались пренебрегаемо малыми. Измерения, редуccionированные на поверхность геоида (квазигеоида), как бы развертывались без деформаций на поверхность эллипсоида. Для территорий ограниченной площади, при отсутствии аномалий силы тяжести такой метод решает задачу редуccionирования на референц-эллипсоид.

Для территорий большой площади, как это имело место в Советском Союзе, метод развертывания приводил к весьма существенным погрешностям. Поэтому здесь астрономо-геодезическая сеть после завершения ее построения редуccionировалась на поверхность референц-эллипсоида Красовского *по методу проектирования* с учетом всех поправок.

Принципиальным является вопрос необходимой точности вычисления редуccionионных поправок. Здесь необходимо помнить, что геодезические измерения выполняются по строгим методикам, направленным на то, чтобы ошибки измерений носили случайный характер и подчинялись нормальному закону распределения. Только в этом случае математическая обработка измерений по методу наименьших квадратов приводит к вероятнейшим значениям. Ошибки округления при вычислениях, как известно, случайные, но подчиняются равномерному закону распределения. Для того, чтобы ошибки округления не налагались на ошибки измерений, в геодезии всегда вычисления производят с ошибками, на порядок меньшими ошибок соответствующих измерений. В этом случае редуccionированные значения измеренных величин можно считать измеренными с точки зрения характера распределения их ошибок.

Рассмотрим выводы основных формул редуccionирования по методу проектирования. При этом следует заметить, что задача редуccionирования азимутов рассмотрена нами ранее, при выводе уравнения Лапласа.

5. 2. Редукция базисных измерений

На рисунке 5. 1 показана схема масштабирования первоклассного звена триангуляции. Из измерений подвесным базисным прибором измеряется базис b с относительной погрешностью $1 : 1\,000\,000$. Длина выходной стороны S_0 , соединяющая пункты Лапласа, вычисляется из базисного геодезического четырехугольника, в котором измерены и уравнены за все возникающие условия углы. Для обеспечения высокой точности измерений базис располагается в наиболее благоприятных для измерений условиях, длина его, как правило, порядка 10 км. Длина выходной стороны триангуляции 1 класса составляет порядка 20 км. Из за этого при вычислениях длины S_0 существенной является ошибка геометрической связи и длина выходной стороны вычисляется с относительной погрешностью порядка $1 : 400\,000$. Эта величина и определяет точность масштабирования звеньев триангуляции 1 класса.

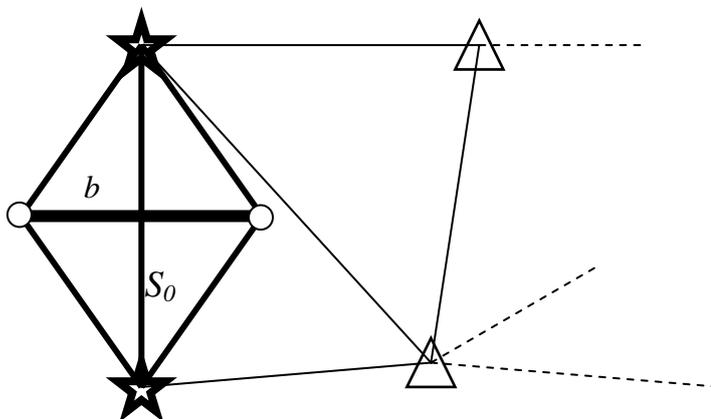


Рис. 5. 1

Таким образом, точность вычисления редуцированной поправки не должна превышать относительной величины $1 : 4\,000\,000$. Данный метод линейных измерений ушел в историю, вместе с тем мы рассмотрим редуцирование базиса, что интересно с методической точки зрения.

Мерным элементом базисного прибора 1 класса служит комплект из четырех компарированных инварных струн, на концах которых специальные инварные шкалы с полумиллиметровыми делениями для снятия отсчетов. Общая длина прибора составляет 24 м. и называется базисным пролетом. В процессе измерений определяются превышения концов каждого пролета методом геометрического нивелирования. Схематически пролет изображен на рисунке 5. 2.

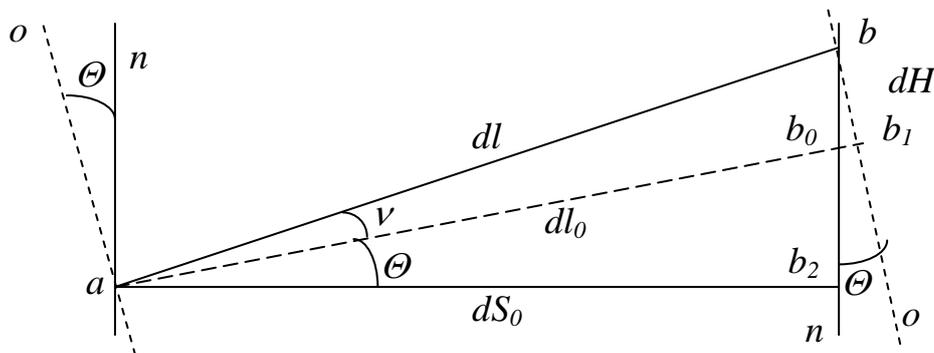


Рис. 5. 2

На рисунке имеем: dl – измеренная длина пролета; dl_0 – горизонтальное проложение; dS_0 – эллипсоидальное проложение; Θ – составляющая уклонения отвеса в направлении базиса; ν – угол наклона пролета к горизонту; o – направление отвеса; n – направление нормали; dH – превышение концов пролета. Длина пролета малая, поэтому можно считать направления отвеса на его концах параллельными. Параллельны также направления нормали. Для прямоугольного при вершине b_2 треугольника abb_2 запишем

$$dS_0 = dl \cos(\nu + \theta) = dl \cos \nu \cos \theta - dl \sin \nu \sin \theta ,$$

где также имеем:

$$dl_0 = dl \cos \nu; \quad dH = dl \sin \nu ,$$

поэтому, учитывая малые значения θ , разлагая тригонометрические функции этого аргумента в ряд с удержанием только первого члена, можем записать с достаточной точностью

$$dS_0 = dl_0 - \theta dH . \quad (5.1)$$

Таким образом вычисляют эллипсоидальную длину каждого пролета dS_{0i} из уложившихся вдоль базиса. При этом получают длины, отнесенные на поверхности, параллельные поверхности референц-эллипсоида и расположенные на средней высоте H_i каждого пролета. Схематично это показано на рисунке 5.3.

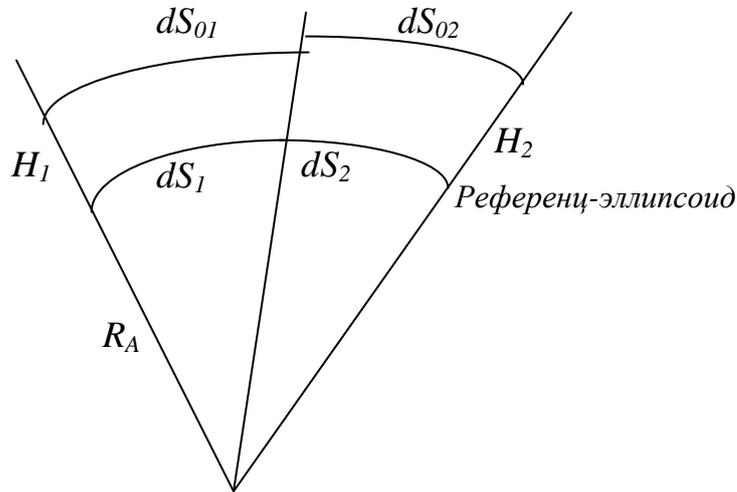


Рис. 5.3

Для получения проекции на поверхность эллипсоида dS_i каждого из отрезков dS_{0i} следует из рисунка формула

$$\frac{dS_i}{dS_{0i}} = \frac{R_A}{R_A + H_i} \quad (5.2)$$

где R_A – радиус нормального сечения, проходящего в азимуте базиса.

Далее получаем для эллипсоидального проложения базисного пролета

$$dS = dS_0 \left(1 + \frac{H}{R_A} \right)^{-1} = dS_0 \left(1 - \frac{H}{R_A} + \left(\frac{H}{R_A} \right)^2 - \dots \right)$$

С учетом выражения (5. 1) имеем

$$dS = dl_0 - \frac{H}{R_A} dl_0 + \left(\frac{H}{R_A} \right)^2 dl_0 - \theta dH \quad (5.3)$$

Как отмечено ранее, длина базиса порядка 10 км. В этом случае можно считать поверхность эллипсоида совпадающей с поверхностью шара радиусом R_A и далее получаем для всей длины базиса, средняя высота которого равна H_m

$$S = \int dS = l_0 - \frac{H_m}{R_A} l_0 + \left(\frac{H_m}{R_A} \right)^2 l_0 - \int_S \theta dH \quad (5.4)$$

Выразим относительную величину поправки

$$\frac{S - l_0}{l_0} = -\frac{H_m}{R_A} + \left(\frac{H_m}{R_A} \right)^2 - \frac{\int_S \theta dH}{l_0}$$

и оценим значения поправочных членов в этой поправке. Для расчетов примем следующие значения элементов полученной формулы: $H_m \leq 1000$ м, $l \approx 10\,000$ м, превышения вдоль базиса $\Delta H \leq 100$ м., уклонения отвеса $\theta \leq 5''$. В этом случае первый поправочный член не превзойдет величины 1 : 6 400; второй – 1 : 40 000 000, третий – 1 : 4 000 000. При этих условиях необходимую точность редуцирования (1 : 4 000 000) обеспечит простая формула

$$S = l_0 - \frac{H_m}{R_A} l_0 \quad (5.5)$$

Значения средней высоты H_m и радиуса R_A достаточно вычислять с точностью, рассчитанной по известному принципу равных влияний

$$dS = \frac{dH_m R_A - H_m dR_A}{R_A^2} l_0 = l_0 \frac{dH}{R} - l_0 \frac{H}{R^2} dR ;$$

$$m_S^2 = \left(\frac{l_0}{R}\right)^2 m_H^2 + \left(l_0 \frac{H}{R^2}\right)^2 m_R^2;$$

$$\left(\frac{1}{R}\right) m_H \approx \left(\frac{H}{R^2}\right) m_R \leq \frac{m_S}{S\sqrt{2}} \leq \frac{1}{6 \times 10^6};$$

$$m_H \leq \frac{R}{6 \times 10^6} \approx 1\text{м}; \quad m_R \leq \frac{R^2}{H \times 6 \times 10^6} \approx 6.4\text{км}.$$

Отсюда видно, что для решения редуционной проблемы высоты необходимо знать с точностью до метров, а средний радиус кривизны эллипсоида – до нескольких километров. Эти требования к точности высот и радиуса невелики, что существенно облегчает решение данной задачи, в особенности на первоначальном этапе построения государственных опорных геодезических сетей.

5. 3 Редукция свето и радиодальномерных измерений.

В настоящее время линейные измерения производятся, в основном, свето и радиодальномерами, которые постоянно совершенствуются. Приборные погрешности измерений могут быть сведены до миллиметров, и главным сдерживающим фактором является влияние внешних условий. В спутниковых системах позиционирования реализованы радиодальномерные измерения, выполняемые вдоль направлений геодезические спутники – носители координат из созвездий NAVSTAR (США) или ГЛОНАСС (РФ) – приемники, расположенные на пунктах, координаты которых определяются из пространственной линейной засечки. Точность координатных определений, как абсолютные, так произведенных посредством спутниковых систем на порядок выше, по сравнению с классическими наземными методами (астрономо-геодезическими). Это стало возможно за счет того, что измерения вынесены за пределы топографической рефракции в область астрономической, что позволило уменьшить влияние внешних условий на точность измерений.

Рассмотрим редуцирование наземных измерений, производимых в полигонометрии, трилатерации и масштабировании триангуляции при построении государственных опорных сетей. Здесь измеренные расстояния между смежными пунктами могут достигать от 20 до 30 километров. Относительная погрешность измерений характеризуется величиной 1 : 400 000, следовательно, редуционные поправки необходимо вычислять с точностью на порядок выше, следовательно 1 : 4 000 000. Это требование необходимо выполнять для того, чтобы ошибки округления при вычислениях (подчиняющиеся равномерному закону распределения) не наложились на ошибки измерений (подчиняющиеся нормальному закону распределения) и математическую обработку редуцированных величин можно было производить по методу наименьших квадратов.

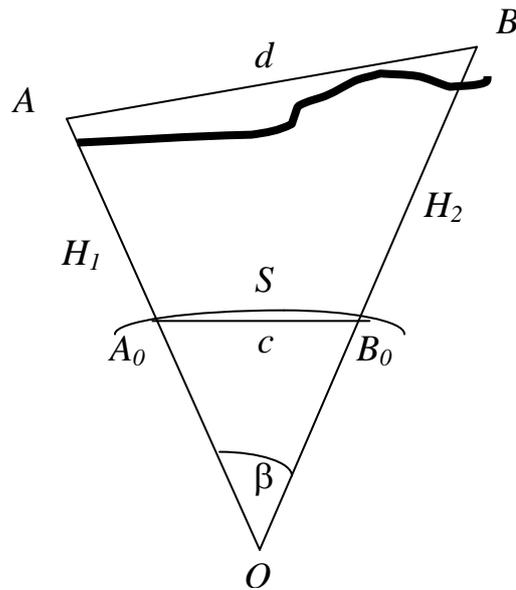


Рис. 5. 4

На рисунке 5. 4 имеем: H_1, H_2 – высоты точек A и B над эллипсоидом (нормальная высота плюс аномалия высоты); S – эллипсоидальное проложение измеренного расстояния d ; c – хорда; β – центральный угол, стягивающий дугу S , для которой можно записать выражение

$$S = R_A \beta \quad (5.6)$$

Из треугольника ABO имеем по теореме косинусов

$$d^2 = (R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - 2(R_A + H_1)(R_A + H_2) \cos \beta \quad (5.7)$$

Здесь, как и при редуцировании базисных измерений, принята поверхность эллипсоида за поверхность шара радиусом нормального сечения эллипсоида, проходящего в азимуте A , вычисляемого по формуле Эйлера, рассмотренной в разделе сфероидической геодезии. Это существенно упрощает задачу и обеспечивает необходимую точность при расстояниях до 30 км. Учитывая это, из равнобедренного треугольника A_0B_0O имеем по теореме косинусов

$$c^2 = R_A^2 - 2R_A^2 \cos \beta \quad (5.8)$$

Подставляя выражение для $\cos \beta$ из (5. 7) в (5. 8), получаем после несложных преобразований выражение для длины хорды

$$c = \sqrt{\frac{d^2 - (H_1 - H_2)^2}{\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{R_A}\right)}} \quad (5.9)$$

По теореме синусов имеем из треугольника A_0B_0O

$$\frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin\left(90 - \frac{\beta}{2}\right)}{R_A} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{R_A}; \quad \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{c} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{R_A}$$

Разделив обе части полученного уравнения на $\cos \beta/2 \neq 0$, получаем для искомой величины S

$$S = 2R_A \arcsin \frac{c}{2R_A} \quad (5.10)$$

Здесь возникает вполне уместный вопрос, почему нельзя воспользоваться более простым решением задачи, выразив из уравнения (5. 7) $\cos \beta$, затем вычислив угол β по косинусу и подставив его значение в формулу (5. 6). Здесь проблема заключается в том, что значение угла β мало при малых, по сравнению с радиусом R_A , расстояниях d и большим изменения искомого аргумента β соответствуют малые изменения косинуса. Вместе с тем, при малых значениях аргумента β изменения функции $\sin \beta$ практически линейно зависит от изменений аргумента. В этом преимущество вычислений по формуле (5. 10).

5. 4 Редуцирование горизонтальных направлений

Горизонтальные направления в геодезических построениях (триангуляции и полигонометрии) измеряют теодолитами, главная ось которых ориентируется по отвесной линии. В этом случае коллимационная плоскость пересекает поверхность эллипсоида по прямому отвесному плоскому сечению и для перехода к прямому нормальному сечению необходимо ввести поправку за **уклонение отвесной линии**. Эта поправка аналогична поправке за уклонение отвесной линии при вычислении азимутов Лапласа и имеет выражение

$$\delta_1'' = \frac{\eta'' \cos A - \xi'' \sin A}{\operatorname{tg} z} \quad (5.11)$$

где η и ξ - составляющие уклонения отвеса в первом вертикале и меридиане соответственно для точки стояния теодолита; A и z – азимут и зенитное расстояние вдоль измеренного направления.

В государственных геодезических построениях значения зенитных расстояний близки к 90^0 , в этом случае даже при существенных значениях уклонений отвеса поправка мала. В условиях Республики Беларусь, когда местность равнинная и значения уклонений отвеса малы, эта поправка пренебрегаемо мала и ею можно пренебречь для любых классов геодезических построений. В Инструкции для построения государственных геодезических сетей СССР предусматривается учет этой поправки для тех направлений, когда зенитное расстояние отличается от 90^0 на величину более 2^0 (когда учитывают поправку за негоризонтальность алидады теодолита).

Центры геодезических пунктов государственных геодезических построений расположены на некоторой высоте над поверхностью эллипсоида. В этом случае имеем схему измерений, приведенную на рисунке 5. 5.

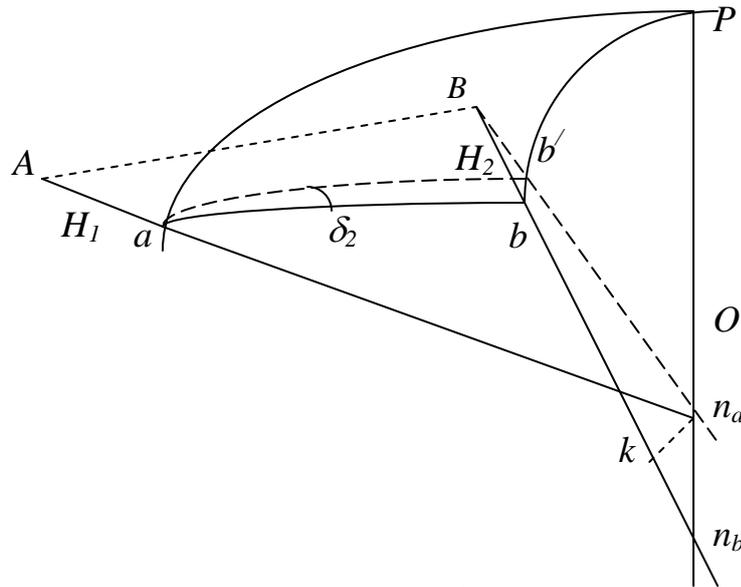


Рис. 5. 5

Пусть геометрический центр теодолита находится в точке A на некоторой высоте над поверхностью эллипсоида H_1 (отрезок Aa), визирная цель B на некоторой высоте H_2 (отрезок Bb). O – центр эллипсоида. Нормали к поверхности эллипсоида в точках A и B пересекут его поверхность в точках a и b соответственно и не лежат в одной плоскости, поэтому они пересекут ось вращения эллипсоида в точках n_a и n_b соответственно. Прямым нормальным сечением в точке A будет кривая ab эллипсоида. Коллимационная плоскость при этом пересечет поверхность эллипсоида по кривой ab' . Искомая поправка δ_2 . Из рисунка можно заметить, что эта поправка зависит только от высоты визирной цели над поверхностью эллипсоида и не зависит от высоты точки A . Поэтому она носит название **поправки за высоту наблюдаемого предмета**.

Высота и расстояния между точками A и B малы по сравнению с радиусом Земли, поэтому можем с достаточной точностью положить линии bb' и $n_a k$ параллельными друг другу, а треугольник Abb' плоским. Тогда можем записать

$$n_a k = n_a n_b \cos B_m; \quad \frac{n_a l}{bb'} = \frac{M_m}{H_2}$$

Отсюда получаем для bb' выражение

$$bb' = n_a n_b \frac{H_2}{M_m} \cos B_m \quad (5. 12)$$

Из треугольника abb' получаем по теореме синусов сферической тригонометрии

$$\sin \delta_2 = \frac{bb'}{S} \sin(360 - A_{21}) \approx \frac{bb'}{S} \sin A_{12};$$

Разлагая $\sin \delta$ в ряд, ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$\delta_2'' = \rho'' \frac{bb'}{S} \sin A_{12}. \quad (5.13)$$

Отрезок $n_a n_b$, как видно из рисунка 5. 5, получает выражение

$$\begin{aligned} n_a n_b &= (N_2 \sin B_2 - y_2) - (N_1 \sin B_1 - y_1) = \\ &= N_2 e^2 \sin B_2 - N_1 e^2 \sin B_1 \approx e^2 N_m (B_2 - B_1) \sin B_m \end{aligned}$$

Здесь использовали известное выражение для ординаты точки на меридианном эллипсе $y = N(1 - e^2) \sin B$, учитывая малые величины.

Из уравнения для малой дуги меридиана получаем приближенное выражение для разности широт

$$B_2 - B_1 \approx \frac{S}{M_m} \cos A_{12}$$

С учетом приведенных преобразований уравнение (5. 13) получает выражение для искомой поправки

$$\delta_2'' = \rho'' \frac{H_2}{2M_m} e^2 \sin 2A_{12} \cos^2 B_m. \quad (5.14)$$

Для практики полезно заметить, что данную поправку необходимо учитывать в горных районах. В условиях Республики Беларусь, где высоты не превосходят величины в 400 м, величина этой поправки не превзойдет $0.04''$ и ею можно пренебречь.

После учета поправок δ_1 и δ_2 в измеренных горизонтальных направлениях получаем на поверхности эллипсоида направления между прямыми нормальными сечениями. В треугольнике триангуляции в каждой вершине получают углы между взаимными нормальными сечениями. При этом получается фигура, не замкнутая измерениями, как это показано на рис. 5. 6. Здесь стрелками показаны направления прямых сечений.

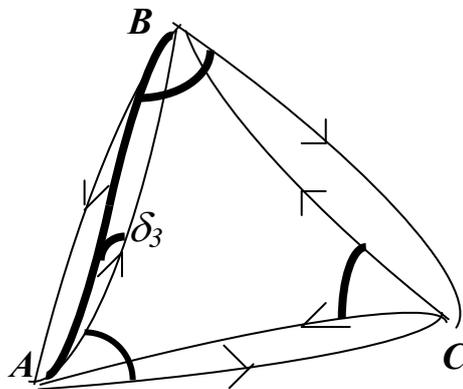


Рис. 5. 6

Для того, чтобы получить фигуру в виде геодезического треугольника, сторонами которого являются геодезические линии, в горизонтальных направлениях при редуцировании на поверхность эллипсоида необходимо еще учитывать **поправку δ_3 за переход от направления прямого нормального сечения к направлению геодезической линии.**

Геодезическая линия проходит ближе к прямому в данной точке нормальному сечению, а угол между взаимными сечениями делится геодезической линией в отношении 1 : 2. Схема взаимного положения геодезической линии (утолщенная кривая) и нормальных сечений показана на рис. 5. 6 для точек A и B .

Формула для этой поправки получена известным немецким астрономо-геодезистом Ф. Р. Гельмертом и имеет вид

$$\delta_3'' = \rho'' \frac{e^2 S^2}{12 N_1^2} \sin 2A_m \cos^2 B_m. \quad (5. 15)$$

Несложно убедиться в том, что эта поправка незначительна и даже при расстояниях $S = 50$ км не превышает величины, равной $0. 006''$. Она учитывается только при работе в высокогорных районах, когда расстояния между пунктами превышает 50 км.

6. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ

6. 1. Общие сведения о методах градусных измерений

Как уже отмечалось ранее, в геодезии в качестве координатной принята поверхность эллипсоида вращения, параметры которого получены так, чтобы поверхность реальной Земли имела минимальные отступления от поверхности координатной. В этом случае редуционная проблема геодезии решается сравнительно просто рассмотренными ранее способами и редуционные поправки чаще всего пренебрегаемо малы.

Определение формы и размеров Земли, а также положения различных объектов на ней тесно связано с развитием и совершенствованием средств и методов измерений и составляют основную задачу геодезии. Эти основы были заложены в глубокой древности при решении задач познания окружающего мира, обеспечения навигации, а также при строительстве зданий, ирригационных, транспортных и иных сооружений. Так древнегреческий ученый Пифагор (около 571-497 гг. до н. э.) впервые предложил метод построения прямого угла на местности с помощью треугольника со сторонами в 3, 4 и 5 равных частей длины (теорема Пифагора) и высказал предположение о шарообразности Земли. Эратосфен в Древнем Египте впервые (276-196 гг. до н. э.) определил радиус земного шара путем измерения длины дуги меридиана и разности широт (градусные измерения) между городами Александрия и Сиена. В Месопотамии (786-833 гг.) при халифе Аль-Мамуне арабскими учеными было получено значение радиуса земного шара, равное 6 406 км, точность которого была превзойдена только в XVII с применением метода триангуляции, предложенного в 1615 г. голландским ученым Снеллиусом (1591-1626 гг.).

В предположении, что Земля – шар определенного радиуса, задача сводилась к определению из астрономических и геодезических измерений расстояния, соответствующего одному градусу дуги меридиана или параллели. Отсюда термин – **градусные измерения методом дуг вдоль меридиана и параллели.**

$$R = \frac{S_{\text{мер}}}{\Delta\varphi} = \frac{S_{\text{пар}}}{\Delta\lambda}$$

Здесь $S_{\text{мер}}$ и $S_{\text{пар}}$ – измеренные на местности расстояния вдоль меридиана или параллели соответственно, $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ – измеренные разности широт или долгот, R – искомый радиус Земли. Для однозначного определения радиуса необходимо выполнить градусные измерения вдоль одной дуги. При большем числе градусных измерений значение радиуса получали как среднее.

С развитием науки и техники совершенствовались приборы, технология измерений и их математическая обработка, накапливался объем информации, повышалась точность измерений. Так уже, начиная с XVIII столетия, методом триангуляции стали определяться длины больших дуг меридианов и параллелей. Революционным шагом в развитии градусных измерений явилось введение международной единицы линейных измерений – метра, как 1 : 40 000 000 части длины дуги Парижского меридиана. В результате определения и сравнения радиуса Земли, полученного учеными различных стран, обнаружили, что расхождения значений существенно больше, чем это может быть обусловлено ошибками измерений. Отсюда

появилась гипотеза, что Земля не шар, а некоторое тело, поверхность которого ближе к поверхности эллипсоида вращения. На это указывал и закон Всемирного тяготения Ньютона, на основании которого в результате эволюции вращающийся земной шар должен принять форму эллипсоида вращения, сжатого у полюсов. Французские ученые по результатам обработки собственных градусных измерений пришли к выводу, что Земля – эллипсоид вращения, вытянутый у полюсов. Таким образом, теория Ньютона не подтвердилась. Это было вызвано тем, что дуги французских градусных измерений были небольшой длины и не могли описывать всю ее поверхность. Для устранения противоречия Французская академия наук организовала две международные экспедиции: Перуанскую (1735 – 1742 гг.) и Лапландскую (1736 – 1737 гг.). Перу расположено в экваториальной области, а Лапландия (север современной Финляндии) – с широтой около 66° . Обработка результатов этих градусных измерений полностью подтвердили теорию Ньютона.

Для однозначного определения параметров эллипсоида: большой полуоси a и полярного сжатия α необходимо выполнить градусные измерения вдоль двух дуг. При большем числе дуг, значения параметров эллипсоида определяли по методу наименьших квадратов. При развитии метода триангуляции стало возможным получать градусные измерения из большого числа дуг меридианов и параллелей, связанных друг с другом общими вершинами. В этом случае дуги покрывали большие площади земной поверхности и параметры земного эллипсоида получали наиболее подходящими к данным площадям. В этом случае речь идет о **методе площадей** градусных измерений. Методы дуг и площадей основаны только на измерениях расстояний и углов (разностей широт и долгот), поэтому данные методы относят к **геометрическим методам градусных измерений**.

Если градусные измерения выполнены на всей поверхности Земли, получают параметры **общего земного эллипсоида**, центр которого совпадает с центром масс, а ось вращения с осью вращения Земли.

В том случае, когда необходимо подобрать положение эллипсоида так, чтобы его поверхность наилучшим образом подходила к части земной поверхности, например, для территории государства, поверхность эллипсоида ориентируют в теле Земли установлением **исходных геодезических дат** в некотором астрономо-геодезическом пункте, принятом за исходный для всей государственной геодезической сети. Исходные геодезические даты определяются из выражений:

$$\begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0.171'' H_0 \sin 2\varphi_0; \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0; \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0; \\ H_0 &= H_0' + \zeta_0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

В этом случае определяют параметры и ориентировку **референц-эллипсоида**. При этом параметры могут совпадать с параметрами общего земного эллипсоида, а ориентировка его в теле Земли такова, что ось вращения и плоскость экватора параллельны оси вращения и плоскости экватора общего земного эллипсоида.

Условия геометрической близости поверхности референц-эллипсоида к уровенной поверхности реальной Земли определяются уравнениями.

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = \min \quad \text{или} \quad \sum \zeta^2 = \min \quad (6.2)$$

В том случае, когда речь идет о референц-эллипсоиде, условия (6.2) выполняются только для части поверхности Земли. Для общего земного эллипсоида – для всей ее поверхности. На практике обычно параметры определяют из градусных измерений, выполненных на всей поверхности Земли, а исходные геодезические даты для ориентировки референц-эллипсоида определяют из градусных измерений, выполненных на той территории, относительно которой определяют его ориентировку.

Для определения параметров земного эллипсоида, наряду с геометрическим, применяют **физический метод**, основанный на гравиметрических измерениях.

Геометрический метод имеет существенный недостаток, так как геодезические и астрономические измерения, в отличие от гравиметрических, могут быть выполнены только на суше, а на большей части земной поверхности, покрытой морями и океанами, такие измерения невозможны. Следует иметь в виду, что из гравиметрических измерений большая полуось определяется значительно грубее. Поэтому на практике применяют оба метода совместно. В этом случае большая полуось получается с погрешностью до 100 м, а полярное сжатие – до десятых долей знаменателя.

В последние десятилетия существенное развитие и практическое применение в геодезии находят методы, основанные на спутниковых системах позиционирования. Задача определения параметров земного эллипсоида в этом случае решается значительно оперативнее и точнее. Так, если для выполнения астрономо-геодезических и гравиметрических измерений на всей поверхности Земли потребовалось более 100 лет, то спутниковая информация и методы ее обработки сформированы за несколько десятилетий. При этом погрешность параметров земного эллипсоида характеризуется величинами: в большой полуоси 1 м, в полярном сжатии – сотые доли знаменателя.

6. 2. Уравнения градусных измерений по меридиану

Пусть имеется звено триангуляции AB , вытянутое от исходного пункта A вдоль меридиана (рис. 6.1). В звене измерены углы треугольников, в пункте A установлены исходные геодезические даты. Производится уравнивание звена за все геометрические условия, кроме координатных (фигур, базисов, азимутов), а также решение треугольников. Последовательно решая прямую геодезическую задачу от пункта A , вычисляют геодезические координаты всех геодезических пунктов звена. Из решения обратной геодезической задачи между пунктами A и B получают длину диагонали звена D и ее прямой и обратный азимуты T_{AB} и T_{BA} . Имея несколько таких звеньев, связанных общими пунктами, получаем картину (рис. 6.2). Естественно, из-за рельефа и других факторов, диагонали звеньев не будут совпадать с дугой меридиана. В этом случае проектируют по параллели точку B на меридиан точки A по формуле

$$S = D \cos T_m$$

Здесь T_m – среднее значение из прямого и обратного азимутов звена. Погрешность, обусловленная кривизной поверхности эллипсоида, неучтенной в данной формуле, для длины звена в 250 км составит величину, менее 1 м.

Для вывода уравнения градусных измерений по меридиану достаточно использовать приближенную формулу для длины дуги меридиана

$$S = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3} \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \quad (6.3)$$

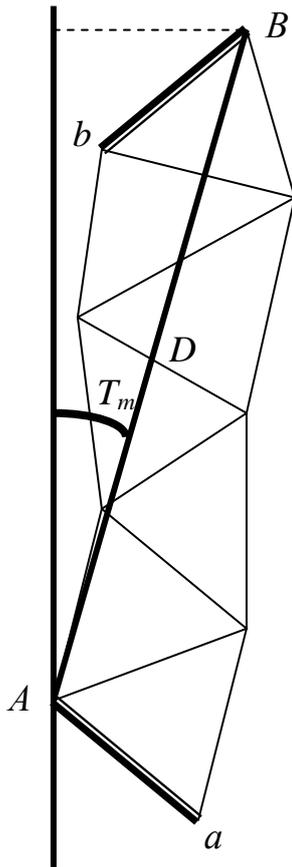


Рис. 6. 1

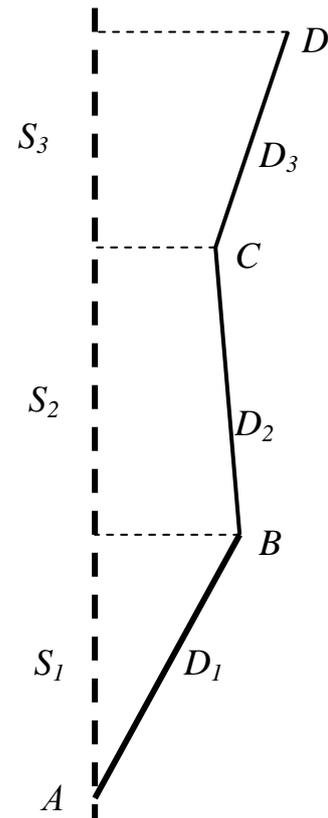


Рис.6. 2

Целью градусных измерений является определение параметров эллипсоида, поэтому формулу (6. 3) преобразуем, разлагая в ряд W_m^{-3} и ограничиваясь первым членом разложения, к виду

$$S = a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left(1 - e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right) \quad (6.4)$$

Здесь геодезические широты двух точек отнесены к искомому эллипсоиду, параметры которого необходимо определить. Пусть будут известны некоторые приближенные параметры эллипсоида (например, из предыдущих определений), тогда искомые параметры выражаются как суммы приближенных параметров и некоторых поправок, определение которых производится из градусных измерений

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a \\ e^2 &= e_0^2 + \Delta e^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

При необходимости определения полярного сжатия, несложно перейти к нему от квадрата эксцентриситета по известной формуле.

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

Подставляя выражения (6. 5) в (6. 4), получим уравнение

$$\begin{aligned} S &= a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left(1 - e_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right) + \Delta a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left(1 - e_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right) - \\ &- a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \Delta e^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Очевидно, первый член полученного уравнения выражает длину дуги меридиана на эллипсоиде с приближенными параметрами, радиус меридиана которого определяется выражением

$$M_m^0 = a_0 \left(1 - e_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \right) \quad (6.7)$$

Здесь различие геодезических широт средней точки на различных эллипсоидах, входящих в выражение с множителем e^2 , можно пренебречь. Разделив почленно уравнение (6. 6) на (6. 7), получают

$$\frac{S}{M_m^0} \rho'' = (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2 - B_1)'' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \Delta e^2 \quad (6.8)$$

Правая часть полученного выражения представляет собой ни что иное, как разность геодезических широт точек, расстояние между которыми S , на эллипсоиде с приближенными параметрами, следовательно, можем записать

$$(B_2^0 - B_1^0)'' = (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2 - B_1)'' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right) \Delta e^2 \quad (6.9)$$

Согласно первого уравнения (6.1) можем записать

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \zeta_1 - 0.171'' H_1 \sin 2\varphi_1 \\ B_2 &= \varphi_2 - \zeta_2 - 0.171'' H_2 \sin 2\varphi_2 \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (6.9) может быть записано с принятой точностью

$$\begin{aligned} \xi_2 = \xi_1 + & \left((\varphi_2 - \varphi_1)'' - 0.171'' (H_2^0 \sin 2B_2^0 - H_1^0 \sin 2B_1^0) - (B_2^0 - B_1^0)'' \right) + \\ & + (B_2^0 - B_1^0)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2^0 - B_1^0)'' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m^0 \right) \Delta e^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь геодезические широты и высоты вычислены относительно эллипсоида с приближенными параметрами. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} & \left((\varphi_2 - \varphi_1)'' - 0.171'' (H_2^0 \sin 2B_2^0 - H_1^0 \sin 2B_1^0) - (B_2^0 - B_1^0)'' \right) = l; \\ & (B_2^0 - B_1^0)'' = p; \quad - (B_2^0 - B_1^0)'' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m^0 \right) = q \end{aligned} \quad (6.11)$$

Тогда уравнение (6.10) примет вид

$$\xi_2 = \xi_1 + p \frac{\Delta a}{a_0} + q \Delta e^2 + l \quad (6.12)$$

Если дуга градусного измерения состоит из n последовательных частных дуг, выходящих из начальной точки, то для каждой из них можем записать, условно придав некоторое значение для составляющей уклонения отвеса в начальной точке

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0 \\ \xi_2 &= \xi_1 + p_1 \frac{\Delta a}{a_0} + q_1 \Delta e^2 + l_1 \\ \xi_3 &= \xi_2 + p_2 \frac{\Delta a}{a_0} + q_2 \Delta e^2 + l_2 \\ \xi_4 &= \xi_3 + p_3 \frac{\Delta a}{a_0} + q_3 \Delta e^2 + l_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n &= \xi_{n-1} + p_{n-1} \frac{\Delta a}{a_0} + q_{n-1} \Delta e^2 + l_{n-1} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Поверхность эллипсоида будет наилучшим образом подходить к уровенной поверхности Земли вдоль данного меридиана, если составляющие уклонений отвеса в меридиане будут малыми величинами и носить случайный характер. Выразим искомые значения составляющих уклонений отвеса ξ_i ($i = 2, 3, \dots, n$) через состав-

ляющую уклонения отвеса в начальной точке ξ_1 . Для этого уравнения (6. 13) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \xi_1 \\
 \xi_2 &= \xi_1 + p_1 \frac{\Delta a}{a_0} + q_1 \Delta e^2 + l_1 \\
 \xi_3 &= \xi_1 + (p_1 + p_2) \frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + q_2) \Delta e^2 + (l_1 + l_2) \\
 \xi_4 &= \xi_1 + (p_1 + p_2 + p_3) \frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + q_2 + q_3) \Delta e^2 + (l_1 + l_2 + l_3) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \xi_n &= \xi_1 + (p_1 + \dots + p_{n-1}) \frac{\Delta a}{a_0} + (q_1 + \dots + q_{n-1}) \Delta e^2 + (l_1 + \dots + l_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{ 6. 14 }$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= P_1; (p_1 + p_2) = P_2; (p_1 + p_2 + p_3) = P_3; \dots \\
 q_1 &= Q_1; (q_1 + q_2) = Q_2; (q_1 + q_2 + q_3) = Q_3; \dots \\
 l_1 &= L_1; (l_1 + l_2) = L_2; (l_1 + l_2 + l_3) = L_3; \dots
 \end{aligned}$$

Получим уравнения (6. 14) в виде

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \xi_1 \\
 \xi_2 &= \xi_1 + P_1 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_1 \Delta e^2 + L_1 \\
 \xi_3 &= \xi_1 + P_2 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_2 \Delta e^2 + L_2 \\
 \xi_4 &= \xi_1 + P_3 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_3 \Delta e^2 + L_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \xi_n &= \xi_1 + P_{n-1} \frac{\Delta a}{a_0} + Q_{n-1} \Delta e^2 + L_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{ 6. 15 }$$

Уравнения (6. 15) можно рассматривать как параметрические уравнения поправок, в которых роль искомым параметров будут играть составляющая уклонения отвеса в начальном пункте ξ_1 , а также поправки к приближенным параметрам эллипсоида Δa и Δe^2 . Для однозначного решения задачи необходимо иметь три дуги. При $n > 3$ данную систему уравнений решают под условием

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \min \quad (6. 16)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (6. 14) под условием (6. 16), что приводит к решению трех нормальных уравнений с тремя неизвестными параметрами.

$$\begin{aligned} n\xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \frac{\Delta a}{a_0} + \left(\sum_{i=1}^n Q_i \right) \Delta e^2 + \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) &= 0 \\ \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i^2 \right) \frac{\Delta a}{a_0} + \left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i \right) \Delta e^2 + \left(\sum_{i=1}^n P_i L_i \right) &= 0 \\ \left(\sum_{i=1}^n Q_i \right) \xi_1 + \left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i \right) \frac{\Delta a}{a_0} + \left(\sum_{i=1}^n Q_i^2 \right) \Delta e^2 + \left(\sum_{i=1}^n Q_i L_i \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6. 17)$$

Уравнения (6. 17) представляют собой уравнения градусных измерений по меридиану, полученные методом разворачивания. Это объясняется тем, что в свободном члене уравнения (6. 12) величина $(B_2^0 - B_1^0)$ вычисляется по расстоянию S , редуцированному на уровенную поверхность (геоид), а не на поверхность эллипсоида.

6. 3. Уравнения градусных измерений по параллели

Пусть в звене триангуляции 1 класса, вытянутого вдоль параллели (рис. 6. 3), аналогично тому, как это рассмотрено в предыдущем случае, вычислена длина диагонали D , ее прямой и обратный азимуты. Не представляет труда вычислить длину дуги параллели S_k на средней широте точек A и B .

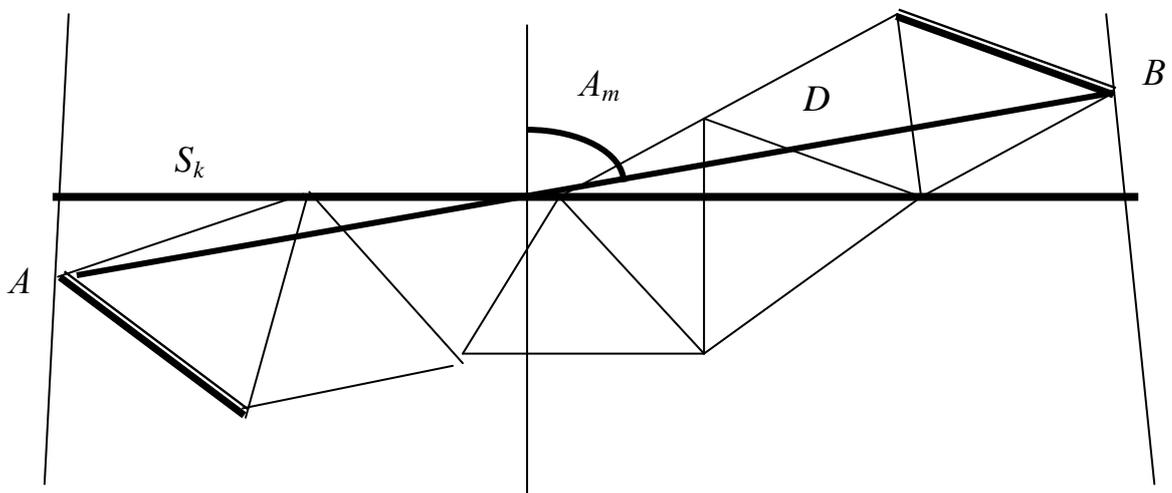


Рис. 6. 3

Имея несколько последовательных звеньев, связанных общими пунктами Лапласа, получают картину (рис. 6. 4).

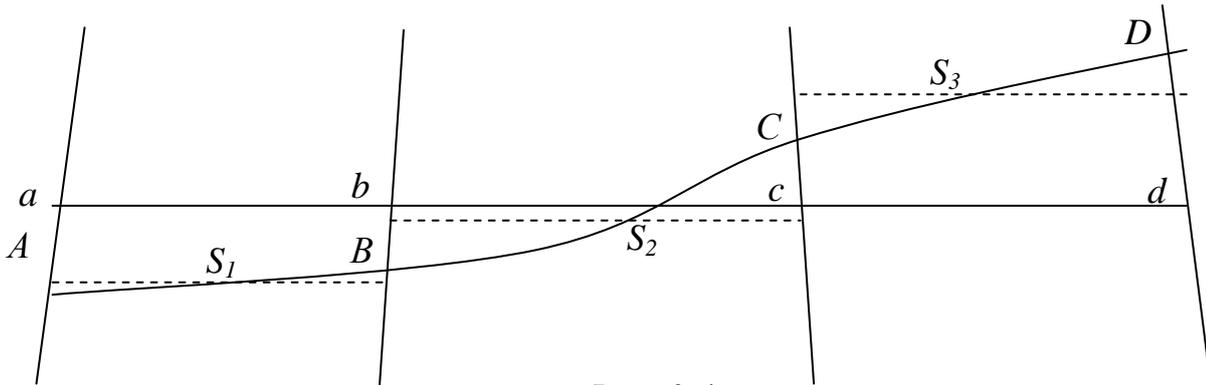


Рис. 6. 4

Здесь проекции диагоналей звеньев S_i представляют собой длины дуг параллелей на средней широте соответствующей диагонали. Для вычисления длины дуг параллели между точками a и b находят отрезки дуги параллели S_i^0 на средней широте всех звеньев (точек A и D), участвующих в градусном измерении, из соотношения

$$S_i^0 = S_i \frac{W_i \cos B_0}{W_0 \cos B_i}$$

Таким образом, имеют уравнение длины дуги параллели ab

$$S = \frac{a(L_2 - L_1)''}{\rho''} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B_0 \right) \quad (6.18)$$

Вводя обозначения (6. 5), а также учитывая уравнения исходных геодезических дат для долготы

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 s \operatorname{ес} \varphi_1; \\ L_2 &= \lambda_2 - \eta_2 s \operatorname{ес} \varphi_2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

получаем аналогично тому, как это сделано в выводе уравнений по меридиану, параметрические уравнения

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1 \\ \eta_2 &= \eta_1 + P_1' \frac{\Delta a}{a_0} + Q_1' \Delta e^2 + L_1' \\ \eta_3 &= \eta_1 + P_2' \frac{\Delta a}{a_0} + Q_2' \Delta e^2 + L_2' \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_n &= \eta_1 + P_{n-1}' \frac{\Delta a}{a_0} + Q_{n-1}' \Delta e^2 + L_{n-1}' \end{aligned} \quad (6.20)$$

Решая систему (6. 20) под условием

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \min$$

получают нормальные уравнения вида, аналогичного (6. 17).

На практике системы (6. 15) и (6. 20) решают совместно под условием

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \min \quad (6. 21)$$

В результате получают поправки к приближенным параметрам эллипсоида и составляющие уклонений отвеса в исходном пункте при условии их наилучшего соответствия дугам меридианов и параллелей, участвующих в градусных измерениях.

6. 4. Уравнения градусных измерений по методу площадей

Рассмотренные методы градусных измерений применялись, когда в них участвовали разрозненные дуги. При реализации программы построения государственной геодезической сети 1 класса в СССР диагонали звеньев позволяли формировать взаимосвязанные дуги меридианов и параллелей, покрывающие огромные площади земной поверхности. В этом случае целесообразнее искать параметры эллипсоида и составляющие уклонений отвеса в исходном пункте так, чтобы его ориентировка и параметры наилучшим образом подходили к площади уровенной поверхности Земли. В этом случае говорят о градусных измерениях по методу площадей. Кроме того, здесь возможно применение строгого **метода проектирования**, в отличие от метода развертывания, рассмотренного выше.

В данном случае имеется некоторый референц-эллипсоид с параметрами a_0 , α_0 , ориентировкой, определяемой исходными геодезическими датами B_0 , L_0 , A_0 , ζ_0 . В России и затем в Советском Союзе до 1946 года применялся референц-эллипсоид Бесселя с исходными геодезическими датами, установленными для центра главного пункта Пулковской астрономической абсерватории. В принципе эти параметры и исходные даты можно получить, применяя рассмотренные выше способы градусных измерений по методу развертывания.

Таким образом, имеют некоторые ранее принятые параметры и ориентировку референц-эллипсоида: a_0 , α_0 , B_0 , L_0 , A_0 , ζ_0 . Необходимо определить из градусных измерений, выполненных на территории государства, поправки к ранее принятым параметрам, а также уточнить ориентировку референц-эллипсоида. Следует заметить, что параметры общего земного эллипсоида могут быть определены только из обработки мировых градусных измерений.

Координаты в исходном геодезическом пункте государства определяются выражениями (6. 1), которые можем записать в виде:

$$\begin{aligned}
B_0 + \delta B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0.171'' H_0 \sin 2\varphi_0; \\
L_0 + \delta L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0; \\
A_0 + \delta A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0; \\
\zeta_0' + \delta \zeta_0 &= \zeta_0.
\end{aligned}
\tag{6.22}$$

Для произвольного астрономо-геодезического пункта сети будем иметь для геодезических координат на искомом эллипсоиде (широт, долгот, азимутов и аномалий высот):

$$\begin{aligned}
B + \delta B &= \varphi - \xi - 0.171'' H \sin 2\varphi; \\
L + \delta L &= \lambda - \eta \sec \varphi; \\
A + \delta A &= \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi; \\
H' + \delta H &= H.
\end{aligned}
\tag{6.23}$$

Положение любой точки на поверхности эллипсоида также может быть определено пространственными прямоугольными координатами

$$\begin{aligned}
X &= (N + H) \cos B \cos L \\
Y &= (N + H) \cos B \sin L \\
Z &= N(1 - e^2) \sin B + H \sin B
\end{aligned}
\tag{6.24}$$

Если система координат референцная, то начало этой системы относительно центра масс Земли определяется величинами: X_0, Y_0, Z_0 .

Пусть необходимо найти новую референцную систему из градусных измерений, в которой пространственные прямоугольные координаты точек получат новые значения: $X + \delta X, Y + \delta Y, Z + \delta Z$. Изменения прямоугольных координат $\delta X, \delta Y, \delta Z$ при сохранении параллельности оси вращения и плоскости экватора одинаковы для всех пунктов сети и вызваны изменениями параметров эллипсоида $\delta a, \delta \alpha$ и геодезических координат $\delta B, \delta L, \delta H$.

Это может быть выражено дифференциальными уравнениями, в которых дифференциалы параметров эллипсоида и геодезических координат заменены их конечными и малыми приращениями:

$$\begin{aligned}
\delta X &= \frac{\partial X}{\partial B} \delta B + \frac{\partial X}{\partial L} \delta L + \frac{\partial X}{\partial \zeta} \delta H + \frac{\partial X}{\partial a} \delta a + \frac{\partial X}{\partial \alpha} \delta e^2 \\
\delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial B} \delta B + \frac{\partial Y}{\partial L} \delta L + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \delta H + \frac{\partial Y}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \delta e^2 \\
\delta Z &= \frac{\partial Z}{\partial B} \delta B + \frac{\partial Z}{\partial L} \delta L + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \delta H + \frac{\partial Z}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \delta e^2
\end{aligned}
\tag{6.25}$$

Имея формулы связи между сжатием и эксцентриситетом

$$e^2 = 1 - (1 - \alpha)^2; \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2},$$

при необходимости несложно получить связь между их дифференциалами или поправками

$$de^2 = 2(1 - \alpha)^2 d\alpha; \quad d\alpha = 1 + \frac{de^2}{2\sqrt{1 - e^2}} \quad (6.26)$$

Частные производные в (6. 25) вычисляем из уравнений (6. 24), имея в виду выражение для радиуса первого вертикала

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

Производя вычисление частных производных и заменяя дифференциальные приращения переменных конечными приращениями – поправками, получаем:

$$\begin{aligned} \delta X &= \left(\frac{\cos B}{W} \delta a + \frac{a \cos B}{2W^3} \sin^2 B \delta e^2 - (M + H) \sin B \delta B + \cos B \delta H \right) \cos L - \\ &- (N + H) \sin L \cos B \delta L; \\ \delta Y &= \left(\frac{\cos B}{W} \delta a + \frac{a \cos B}{2W^3} \sin^2 B \delta e^2 - (M + H) \sin B \delta B + \cos B \delta H \right) \sin L + \\ &+ (N + H) \cos L \cos B \delta L; \\ \delta Z &= (1 - e^2) \frac{\sin B}{W} \delta a - (\cos^2 B + W^2) \frac{N \sin B}{2W^2} \delta e^2 + \\ &+ (M + H) \cos B \delta B + \sin B \delta H \end{aligned} \quad (6.27)$$

Здесь несложно заметить выражения соответствующих частных производных для (6. 25), полученных дифференцированием (6. 24) по соответствующим переменным.

Решим уравнения (6. 27) относительно изменений геодезических координат δB , δL , δH . Для этого из первых двух уравнений находим

$$\begin{aligned} \delta X \sin L - \delta Y \cos L &= -(N + H) \cos B \delta L; \\ \delta X \cos L + \delta Y \sin L &= \frac{N}{a} \cos B \delta a + \frac{N \sin^2 B}{2W^2} \cos B \delta e^2 - \\ &- (M + H) \sin B \delta B + \cos B \delta H. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Из первого уравнения (6. 28) находим поправку δL . Для определения поправок δB и δH решаем совместно второе уравнение (6. 28) с третьим уравнением (6. 27):

$$\begin{aligned} \delta Z \cos B - (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \sin B &= (M + H) \delta B - \\ - \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \delta a - (1 + W^2) \frac{N}{2W^2} \sin B \cos B \delta e^2; \\ \delta Z \sin B + (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \cos B &= \delta H + W \delta a - \\ - \frac{N \sin^2 B}{2} \delta e^2 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Выражая в явном виде поправки δB , δL , δH , получаем:

$$\begin{aligned} \delta B &= \frac{1}{(M + H)} (\delta Z \cos B - (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \sin B + \\ + \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \delta a + \left(\frac{1}{W^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\delta e^2}{2}); \\ \delta L &= - \frac{(\delta X \sin L - \delta Y \cos L)}{(N + H) \cos B}; \\ \delta H &= \delta Z \sin B + (\delta X \cos L + \delta Y \sin L) \cos B - W \delta a + \\ + \frac{N \sin^2 B}{2} \delta e^2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Если уравнения (6. 27) применить для исходного пункта, на котором устанавливаются исходные геодезические даты, то будем иметь

$$\begin{aligned} \delta X_0 &= \left(\frac{\cos B_0}{W_0} \delta a + \frac{a \cos B_0}{2W_0^3} \sin^2 B_0 \delta e^2 - (M_0 + H_0) \sin B_0 \delta B_0 + \cos B_0 \delta H_0 \right) \cos L_0 - \\ - (N_0 + H_0) \sin L_0 \cos B_0 \delta L_0; \\ \delta Y_0 &= \left(\frac{\cos B_0}{W_0} \delta a + \frac{a \cos B_0}{2W_0^3} \sin^2 B_0 \delta e^2 - (M_0 + H_0) \sin B_0 \delta B_0 + \cos B_0 \delta H_0 \right) \sin L_0 + \\ + (N_0 + H_0) \cos L_0 \cos B_0 \delta L_0; \\ \delta Z_0 &= (1 - e^2) \frac{\sin B_0}{W_0} \delta a - (\cos^2 B_0 + W_0^2) \frac{N_0 \sin B_0}{2W_0^2} \delta e^2 + \\ + (M_0 + H_0) \cos B_0 \delta B_0 + \sin B_0 \delta H_0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

Здесь величины δX_0 , δY_0 , δZ_0 представляют собой поправки в координаты центра референц-эллипсоида, наиболее подходящего для данной территории.

Из (6. 23) выражаем в явном виде составляющие уклонения отвеса и аномалию высоты

$$\begin{aligned}\xi &= -\delta B + \varphi - B - 0.171'' H \sin 2\varphi ; \\ \eta &= -\delta L + (\lambda - L) \cos \varphi ; \\ \zeta &= \delta H\end{aligned}$$

Выражения для поправок в геодезические координаты берем из (6. 31), в результате получаем уравнения градусных измерений в методе площадей, в которых роль неизвестных параметров играют поправки к приближенным значениям параметров эллипсоида δa , δe^2 и приближенным координатам его центра δX_0 , δY_0 , δZ_0 . Составляющие уклонений отвеса и аномалии высот при хорошо подобранном эллипсоиде должны носить случайный характер.

$$\begin{aligned}\xi_i'' &= \rho'' \frac{\sin B_i \cos L_i}{(M_i + H_i)} \delta X_0 + \rho'' \frac{\sin B_i \sin L_i}{(M_i + H_i)} \delta Y_0 - \rho'' \frac{\cos B_i \sin L_i}{(M_i + H_i)} \delta Z_0 - \\ &- \rho'' \frac{e^2}{a} \sin B_i \cos B_i \delta a - \rho'' (e^2 \sin^2 B_i + 2) \sin B_i \cos B_i \delta e^2 + \\ &+ (\varphi_i - B_i) - 0.171'' H_i \sin 2B_i ; \\ \eta_i'' &= \rho'' \frac{(\delta X_0 \sin L_i - \delta Y_0 \cos L_i)}{(N_i + H_i) \cos B_i} + (\lambda_i - L_i)'' \cos B_i ; \\ \zeta_i'' &= \delta Z_0 \sin B_i + (\delta X_0 \cos L_i + \delta Y_0 \sin L_i) \cos B_i - W_i \delta a + \\ &+ \frac{N_i \sin^2 B_i}{2} \delta e^2\end{aligned} \quad (6.33)$$

Таких уравнений будет столько, сколько астрономо-геодезических пунктов участвует в градусных измерениях ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Решают первые два уравнения под условием

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \min ,$$

а третье уравнение – под условием

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = \min .$$

Рассмотренный метод строгий и может применяться при выводе параметров земного эллипсоида с использованием спутниковых измерений.

6. 5. Исходные геодезические даты и методы их установления

Как уже отмечалось ранее, исходные геодезические даты определяются выражениями (6. 1) и задают ориентировку референц-эллипсоида в теле Земли так, чтобы его поверхность наилучшим образом подходила к части поверхности геоида соответствующей территории. Этой частью может быть территория государства или группы государств.

$$B_0 = \varphi_0 - \xi_0 - 0.171'' H_0 \sin 2\varphi_0;$$

$$L_0 = \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi_0;$$

$$A_0 = \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0;$$

$$H_0 = H_0' + \zeta_0.$$

Здесь на некотором пункте, принятом за начальный для государственной геодезической сети, выполнены высокоточные астрономические измерения широты, долготы и азимута, из высокоточного нивелирования и гравиметрических измерений определена нормальная высота. Необходимо определить для этого пункта составляющие отклонений отвеса и аномалию высоты. Другими словами, необходимо выполнить ориентирование поверхности референц-эллипсоида с параметрами, полученными из градусных измерений, в теле Земли так, чтобы имели место минимально возможные и случайные отступления поверхности эллипсоида от геоида на территории государства. При этом, определяя исходные геодезические даты, сохраняют параллельность оси вращения и плоскости экватора референц-эллипсоида по отношению к оси вращения и плоскости экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Это имеет принципиально важное значение потому, что в процессе суточного вращения Земли ее ось совершает колебательные периодические движения (движение полюсов). Имеют место вековые, обусловленные глобальными изменениями в земном теле и короткопериодические движения полюсов (период около 430 суток, амплитуда до $0.3''$), обусловленные геодинамическими и атмосферными явлениями.

Принцип организации вычислений для установления исходных геодезических дат такой же, как и при градусных измерениях. Отличие состоит в том, что для вывода параметров земного эллипсоида учитывают градусные измерения, выполненные на всей поверхности Земли, а для установления исходных геодезических дат – только градусные измерения, выполненные на той территории, относительно которой производят ориентирование референц-эллипсоида.

Так, например, параметры эллипсоида Красовского получены в СССР в 40-е годы XX столетия из совместной обработки градусных измерений, выполненных к тому времени во всем мире. Следует отметить, что к этому времени были известны и другие результаты определений параметров земного эллипсоида, полученные в США и ведущих европейских странах. Но для установления исходных геодезических дат для территории СССР необходимо было решить задачу ориентирования референц-эллипсоида. Эта задача была решена по методу площадей из астрономо-геодезической сети 1 класса, построенной на территории СССР с использованием материалов гравиметрической съемки по европейской части страны. Для террито-

рии СССР, расположенной восточнее Урала, определялись топографо-изостатические уклонения отвеса.

Для государств, расположенных в безаномальных районах и имеющих сравнительно небольшие по площади территории, ориентирование референц-эллипсоида может быть выполнено только по одному пункту, принятом за исходный и в котором исходные геодезические даты имеют выражения, следуемые из (6. 1)

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0; \quad B_0 = \varphi_0; \quad L_0 = \lambda_0; \quad A_0 = \alpha_0; \quad H_0 = H_0^\gamma.$$

В данном случае поверхность референц-эллипсоида в исходном пункте касается поверхности геоида, ось его вращения параллельна оси вращения Земли. Для малых территорий и в случае отсутствия больших аномалий силы тяжести отступление поверхности референц-эллипсоида от поверхности геоида будут незначительными и редуцирование измеренных величин на поверхность эллипсоида производится с достаточной точностью методом развертывания.

7. УРАВНИВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

7. 1. Постановка задачи и пути ее решения

В соответствии со схемой и программой построения государственной геодезической сети СССР в качестве главной плановой геодезической основы, закрепляющей на земной поверхности принятую систему координат (СК – 42), является астрономо-геодезическая сеть полигонов первого класса. Каждый полигон, как известно, состоит из четырех звеньев треугольников триангуляции (иногда трилатерации или полигонометрии). Каждое звено длиной от 200 до 250 км опирается на пункты Лапласа, базисные стороны и состоит из 16 треугольников. Размеры территорий, покрываемые первоклассными полигонами, могут достигать значительных величин, их отображение на плоскости проекции Гаусса-Крюгера в одной координатной зоне невозможно с необходимой точностью. Поэтому астрономо-геодезические сети первого класса уравнивают на поверхности земного эллипсоида, а не на плоскости геодезической проекции.

Государственная геодезическая сеть Республики Беларусь является фрагментом сети СССР, поэтому полезно проследить, как решалась задача построения и уравнивания государственной астрономо-геодезической сети (АГС) СССР. При этом следует отметить, что по своим размерам и точности построения эта сеть не имела мировых аналогов.

Выдающуюся роль в решении задачи уравнивания АГС принадлежит коллективу советских ученых, под руководством Ф.Н. Красовского. При этом был использован самый передовой мировой опыт, в частности, исследования выдающегося немецкого ученого астрономо-геодезиста Ф.Р. Гельмерта. Здесь необходимо было решить две основные проблемы: во-первых, редуцировать измеренные величины без существенных деформаций с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида; во-вторых, сократить объем вычислений без существенных нарушений требований метода наименьших квадратов. Первая проблема решалась применением метода проектирования на достаточно хорошо ориентированный референц-эллипсоид, а вторая – применением полигонального метода уравнивания на основе математически обоснованного перехода от измеренных величин (базисных сторон и углов треугольников, азимутов, широт и долгот на пунктах Лапласа) к длинам и азимутам диагоналей звеньев.

Переход к уравниванию не самих измеренных величин, а их функций, был вынужденной мерой, существенно сокращающей объем вычислений. Следует помнить, что вычисления выполнялись либо с помощью логарифмических таблиц, либо на арифмометрах. В настоящее время с использованием высокопроизводительных ЭВМ и соответствующего программного обеспечения проблемы объема и трудоемкости вычислений практически не существует. При уравнивании АГС СССР реализовано три программы.

Первая программа разработана Ф. Н. Красовским и применена к уравниванию первых девяти первоклассных полигонов в 1930 – 32 гг. Уравнивание проводилось на поверхности эллипсоида Бесселя с исходными геодезическими датами в Пулковско. Редукционная проблема вынужденно решалась по методу развертывания (не учитывались поправки за отклонения отвеса и аномалии высот из-за отсутствия информации о них).

Вторая программа также носит имя Красовского и реализована в 1941 – 46 гг. для уравнивания 87 полигонов АГС, включавших 310 первоклассных звеньев.

Здесь уравнивание проводилось на поверхности референц-эллипсоида Красовского, параметры и ориентировка в теле Земли были получены к этому времени из градусных измерений. Редуцирование измерений производилось по строгому методу проектирования. Центры порядка 6 000 пунктов АГС 1 класса после уравнивания закрепляли на земной поверхности новую систему геодезических координат, известную как СК – 42.

Современная программа уравнивания АГС СССР разрабатывалась на основе анализа качества построения полигонов 1 и сплошных сетей 2 класса, реализована в 90-х годах прошлого столетия и принципиально отличается от двух предыдущих. Прежде всего, на всей территории СССР завершены работы по созданию не только полигонов первого класса АГС, но и полностью завершены работы по созданию сплошной сети второго класса, заполняющей первоклассные полигоны. Выполнены принципиально новые определения базисов большой протяженности методами спутниковой геодезии. Разработаны методы и алгоритмы уравнивания на ЭВМ обширных геодезических построений с учетом особенностей и специфики создания АГС СССР. Здесь уравниванию подлежали порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов, объединенных в 277 первоклассных полигонов. Эти пункты закрепляют на земной поверхности модернизированную референцную систему координат СК – 42, которую назвали СК – 95. По нашему мнению более корректно было бы ее назвать СК – 42' потому, что в ней координатной поверхностью служит референц-эллипсоид Красовского, исходные геодезические даты в Пулковско также сохранены. Это не совсем понятно потому, что к этому времени были известны параметры земного эллипсоида и общеземные системы координат, полученные спутниковыми методами в США (WGS – 84) и в РФ (ПЗ – 90).

В настоящее время актуальной является задача модернизации существующих АГС с использованием новых спутниковых технологий координатных определений. При этом следует иметь в виду, что точность взаимного положения пунктов 1 – 2 классов после уравнивания АГС СССР составляет в среднем порядка 7 – 10 см. Современные спутниковые технологии позволяют определять взаимное положение пунктов, удаленных друг от друга до 20 км, с точностью 0,7 – 1,0 см. Таким образом видим, что в настоящее время существуют предпосылки и возможности для создания более высокоточной государственной геодезической основы, чем это было возможно наземными классическими методами. Здесь весьма важным элементом является согласование общеземной системы координат спутникового позиционирования и референцной системы координат СК – 95.

7. 2. Полигональное уравнивание сети 1 класса

Как уже отмечено ранее, **первая программа** полигонального уравнивания применена к уравниванию 9 полигонов триангуляции 1 класса. Эта программа предполагала три этапа уравнивательных вычислений.

На первом этапе производилось уравнивание за все условия, возникающие в отдельном звене: фигур, полюсов, горизонтов, а также азимутов, базисов. Координатные условия (широт и долгот) в уравнивание не включались из-за низкой точности ($0,3''$ в определении широты и долготы дает ошибку в положении пункта Лапласа порядка 10 – 12 м.). В результате уравнивания на первом этапе получали предварительно уравненные углы треугольников.

Решая по исходной длине и предварительно уравненным углам треугольники триангуляции 1 класса (по теореме Лежандра или способу аддитамента), вычисля-

ли длины всех сторон. Последовательно решая прямую геодезическую задачу от начального пункта Лапласа (для которого установлены исходные геодезические даты) до конечных пунктов в звеньях, получают их широты и долготы. По мере удаления от геодезического пункта с исходными датами, в качестве исходного пункта принимали ранее определенный. Затем, решая обратную геодезическую задачу между начальным и конечным пунктами каждого звена, вычисляли длину и азимуты его диагонали. Результатом первого этапа получали сеть полигонометрии, стороны которой - диагонали звеньев, порядка 200 – 250 км, а углы – разности их азимутов. Ошибки в длинах и углах поворота этой полигонометрии не являются независимыми и случайными ошибками измерений, хотя зависят от них.

На втором этапе уравнивают систему образовавшихся полигонов за возникающие условия (координатные и азимутальные). Получают уравненные значения длин и азимутов геодезических линий – сторон полигонов, по которым вычисляют окончательные значения координат вершин полигонов (пунктов Лапласа). Здесь нарушается требование метода наименьших квадратов, т. к. уравниваются не измеренные величины, а их функции.

На третьем этапе производят вставку отдельных звеньев между пунктами Лапласа с уравненными координатами, с присоединением азимутального и базисного условий. Результатом являлись окончательные координаты всех пунктов звена первого класса. Здесь проблема состояла в том, что углы треугольников, образующих центральную систему в местах пересечения звеньев, получали разные поправки из разных звеньев. Для устранения этого противоречия каждая такая центральная система уравнивалась отдельно, и значения углов в ней считались окончательными.

Анализ материалов уравнивания 9 полигонов по указанной методике показал вполне удовлетворительные результаты. Вместе с тем, уже к началу 40-х годов XX столетия существенно возрос объем выполненных измерений на значительно большей территории страны. Были выполнены градусные измерения, по результатам которых были получены новые параметры эллипсоида, произведена его ориентировка в теле Земли (референц-эллипсоид Красовского). Существенно пополнился банк данных гравиметрических маятниковых измерений, что позволило на значительной части территории страны вычислить астрономо-гравиметрические отклонения отвеса. Применяя гипотезу изостазии, вычислили топографо-изостатические отклонения отвеса для удаленных от центра восточных территорий. Все это позволило применить строгий метод развертывания при редуцировании измерений.

В новых условиях существенно большего объема измерительной информации обнаружили, что уравнивание в полном соответствии с первой программой не может принести удовлетворительных результатов. Нужно было каким-то образом объяснить и избавиться от существенных значений невязок азимутальных условий, которые преимущественно приближались к предельно допустимым значениям или даже их превышали. Здесь явно имело место наличие систематических ошибок азимутальных определений на пунктах Лапласа.

Вторая программа уравнивания была разработана с учетом опыта первого уравнивания. 87 первоклассных полигонов, из которых только 11 полигонов образовывали узкую цепь от Красноярска до Хабаровска, уравнивались также полигональным методом, как и в первой программе, только первый этап разделили на три, чтобы избавиться от больших невязок азимутальных условий.

На первом этапе уравнивание звеньев за условия фигур, полюсов и базисов, в результате получали предварительно уравненные углы.

На втором этапе составление азимутальных уравнений по каждому звену по предварительно уравненным на первом этапе углам, совместное решение всех азимутальных условий с нахождением поправок в астрономические азимуты и долготы на пунктах Лапласа.

На третьем этапе производилось вторичное уравнивание звеньев триангуляции по непосредственно измеренным направлениям за условия фигур, полюсов, базисов и азимутов. Здесь при составлении азимутальных условий астрономические долготы и азимуты исправляются поправками, вычисленными на втором этапе. В результате вычисляют длину и азимут геодезической линии для каждого звена триангуляции первого класса.

На четвертом этапе производят уравнивание полигонов и окончательное вычисление координат их вершин.

На пятом этапе производят вставку звеньев между вычисленными координатами их вершин, исходными азимутами Лапласа и базисными сторонами (уравнивание звена за все возникающие в нем условия: фигур, полюсов, базисов, азимутов и координат).

7. 3. Современное уравнивание астрономо - геодезической сети 1 – 2 классов

По мере заполнения полигонов первого класса сплошными сетями второго класса возникла проблема их уравнивания. На первоначальном этапе сети второго класса уравнивались как опирающиеся на исходные пункты первого класса. В отдельном полигоне насчитывалось более 500 определяемых пунктов второго класса, при уравнивании приходилось решать системы с 1000 и более нормальных уравнений. Здесь применялся многогрупповой метод уравнивания И.Ю. Праниц-Праневича, идея которого была предложена еще Ф. Гельмертом. Суть этого метода состоит в том, что преобразованные нормальные уравнения при последовательном исключении неизвестных в алгоритме Гаусса эквивалентны исходным, и при соответствующем разделении на группы их можно решать отдельно. При этом не нарушается строгость решения задачи уравнивания и к уравнивательным вычислениям можно привлекать параллельно столько вычислителей, сколько образовано групп уравнений.

В процессе уравнивания обнаружилось, что поправки в измеренные величины на пунктах второго класса распределялись не случайно, а по вполне определенным закономерностям. В середине полигона поправки соответствовали точности измерений и носили случайный характер, а по мере приближения к исходным пунктам первого класса они возрастали и достигали величин, существенно превышающих возможные ошибки измерений. Это говорило о том, что пункты первого класса по точности не могут служить исходными для сети второго класса. Действительно, средние квадратические ошибки измерения углов в триангуляции 1 и 2 класса соответственно равны $0,7''$ и $1,0''$, что практически одно и то же, но сплошные сети второго класса гораздо более жесткие по сравнению с полигонами первого класса. Это подтверждалось и тем, что при уравнивании сетей второго класса, как свободных, поправки из уравнивания получали случайные значения, соответствующие точности измерений.

Для устранения такого противоречия необходимо было производить совместное уравнивание сети из пунктов 1 – 2 классов как сплошной с соответствующими весами измерений. Это впервые было обосновано профессором Проворовым К. Л.

Но буквально до 80-х годов XX столетия в геодезических вычислениях оставалась проблема объема вычислений из-за отсутствия соответствующей вычислительной техники. Поэтому предлагались различные варианты упрощенных методов решения задачи. Один из них основан на усовершенствовании первого этапа полигонального метода путем усиления первоклассных звеньев смежными треугольниками второго класса и их совместное уравнивание (сдвоенных, строенных и т. д. рядов треугольников). Обсуждался метод, предложенный венгерским геодезистом Рёгеци. Суть его состоит в замене сплошной сети треугольников триангуляции треугольниками, образованными из замыкающих первоклассных звеньев и диагоналей полигонов, уравнивание такой сети глобальных треугольников, результатом которого являются уравненные координаты пунктов, являющихся вершинами этих треугольников, а также значения углов и длин их сторон. Эти предложения не были реализованы в полной мере на практике по следующим причинам: во-первых, из-за большого объема вычислений; во-вторых, из-за существенных отступлений от требований метода наименьших квадратов; в-третьих, не было отдано предпочтение какому-либо одному методу. Вместе с тем, следует отметить результаты практической апробации полигонального уравнивания с усилением первоклассных звеньев треугольниками второго класса, приведенные в таблице 7.1. Здесь были обработаны к 1964 году 402 полигона с 978 звеньями, включающих 40 000 пунктов. Полигоны включали 2 434 азимута Лапласа и 1 600 базисов.

Таблица 7. 1

Тип построения	Средняя длина звена (км)	Средняя невязка треугольника (″)	СКО угла по невязкам (″)	СКО из уравнивания		
				Угла (″)	Азимута (″)	Относит. ош. стороны
Ряды 1 кл	207	0,80	0,58	0,64	0,60	1:296000
Ряды 1 кл, усиленные треугольн. 2 класса	217	0,86	0,62	0,71	0,61	1:364000
Ряды из центральных систем	186	1,09	0,82	1,05	0,70	1:325000

Результаты сравнения координат пунктов АГС СССР, уравненных по второй программе Красовского в 40-ые годы и с усилением первоклассных звеньев треугольниками 2 класса в 60-ые годы, показали расхождения до 20 метров на Востоке страны. Это можно объяснить систематическими ошибками редуцирования по методу развертывания, применяемого в 40-е годы, ошибкой в исходном азимуте в Пулково, ошибками долготных определений, слабой геометрической жесткостью рядов 1 класса. Однако более детальный анализ изменения координат по всей территории страны показал неравномерность распределения этих разностей и их привязку к геологическим разломам и сейсмически активным районам. Следовательно, наиболее вероятной причиной и наиболее значимой составляющей изменения координат могут быть геодинамические явления.

Первым опытом уравнивания АГС 1 – 2 классов, как сплошной сети, было уравнивание астрономо-геодезической сети стран Варшавского договора (ЕАГС), расположенной на территории СССР западнее первоклассного ряда Пулково-Николаев, далее на территории Польши, Болгарии, Восточной Германии, Венгрии, Чехословакии, Румынии (частично). Всего в данной сети насчитывалось 11 737 пунктов. Работы выполнялись в 1973-1983 гг. Было два предложения по методам

решения нормальных уравнений при строгом уравнивании: польского ученого Банахеви́ча и сопряженных градиентов. Апробация этих методов проводилась на опытной сети, состоящей из 865 пунктов. Были получены идентичные результаты, и для уравнивания всей сети был избран метод сопряженных градиентов с исходным пунктом в Пулково. В уравнивание был включен полигонометрический траверс Пулково-София-Потсдам-Пулково. Уравнивание ЕАГС выполнялось на большой ЭВМ ЕС – 1033 в АГП №7 (г. Москва).

По материалам уравнивания были получены характеристики ЕАГС, приведенные в таблице 7. 2

Таблица 7. 2

Показатели ЕАГС	Страны					
	ВНР	ГДР	НРБ	ПНР	СССР	ЧССР
Число пунктов	139	125	416	1830	8960	128
СКО измеренного направления (″)	0,41	0,41	0,76	0,47	0,70	0,36
Максимальная поправка в угол (″)	1,36	1,65	3,26	3,37	4,38	1,44
СКО азимута (″)	0,82	0,82	0,61	1,00	1,17	0,82
СКО линии (относительная)	1:427000	1:427000	1:342000	1:470000	1:300000	1:427000

Ошибка взаимного положения между смежными пунктами этой сети на территории СССР составляла порядка 4 -5 см. Здесь впервые было обнаружено, что исходный азимут для АГС СССР Саблино-Бугры, определенный в 1926 году, имеет ошибку порядка 4″ - 5″, что являлось недопустимо грубой величиной и получило подтверждение из повторных высокоточных астрономических определений этого азимута в 1981 г.

Имея такой опыт уравнивания, а также с появлением быстродействующих ЭВМ, способных оперативно обрабатывать, хранить и выдавать большие объемы информации, а также с разработкой и апробацией современных методов математической обработки больших геодезических построений стало возможным решить задачу совместного уравнивания всей АГС СССР 1-2 классов как сплошной сети. При решении этой задачи использовались также базисы большой протяженности, полученные методами космической геодезии. Здесь уравниванию подлежали порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов, объединенных в 277 первоклассных полигонов. Интересно привести данные по структуре АГС СССР: 1 класс (ряды, объединенные в полигоны) - 4, 0%, 2 класс – 45, 3%, 3 класс (вставки) – 49, 0%, 4 класс (вставки) – 1, 7%. Средние квадратические ошибки измерений углов, вычисленные по невязкам треугольников (формула Ферреро), составили: 1 класс – 0,55″, 2 класс – 0,83″, 3 класс – 1,1″.

При таком огромном объеме исходной информации были решены организационные вопросы. Вся АГС СССР была разбита на отдельные блоки (порядка 20), информацию по которым готовили соответствующие аэрогеодезические предприятия (АГП) по единой методике, разработанной инженером Ефимовым Г.Н. в Московском АГП №7. Информация передавалась в вычислительный центр этого предприятия, где она анализировалась, проверялась и, наконец, производились уравнивательные вычисления. Больше всего времени потребовалось на процессы сбора и представления исходной информации от различных АГП в едином формате и по единой форме.

К концу 90-х годов XX столетия уравнивание АГС СССР было завершено. Полученные результаты показали, что АГС СССР по своим размерам, точности по-

строения не имеет мировых аналогов. Это объясняется тем, что при разработке схемы и программы ее построения использован лучший мировой и отечественный опыт. Решение редуционной проблемы выполнено строгим методом проектирования, для чего комплексно использовались результаты геодезических, астрономических, гравиметрических и спутниковых измерений с учетом их точности и взаимосвязи.

Представляют интерес характеристики АГС СССР, покрывающей всю территорию страны, которую уравнили:

Всего пунктов сети – 164 306, из них 340 пунктов полигонометрии, 280 пунктов трилатерации, 162 пункта из наблюдений спутниковой системой «Транзит». 12 425 пунктов рядов триангуляции 1 класса, 3 584 азимута Лапласа, 7 882 базиса. Общее число треугольников в рядах 1 класса составило 18 034, в заполняющей сети 2 класса – 113 676.

Уравнивание выполнено параметрическим способом по измеренным направлениям на поверхности земного эллипсоида с параметрами Красовского и исходными геодезическими датами в Пулково. При редуцировании измерений по методу проектирования использовались астрономо-гравиметрические уклонения отвеса и аномалии высот. Вычислительный комплекс состоял из 10 основных и 5 сервисных программ, разработанных под руководством Ефимова Г. Н. в АГП №7 для ЭВМ ЕС – 1061. Уравнивание производилось на ЭВМ Хабаровского АГП.

Основные характеристики АГС по материалам уравнивания следующие:

- число избыточных измерений 591 466 (52%);
- СКО единицы веса 1, 061;
- СКО направления в рядах 1 класса 0,52^{''};
- СКО направления в сети 2 класса 0, 75^{''};
- СКО азимута 1,27^{''};
- СКО (относительная) стороны ряда 1: 377 000;
- СКО (относительная) стороны сети 1: 246 000;
- СК поправка в азимут 1,36^{''};
- СК поправка в длину стороны 1: 269 000;
- Средняя длина стороны 12,5 км;
- СКО взаимного положения смежных пунктов в среднем 5 см, в рядах 7 см.

В результате уравнивания получили однородную по точности сеть пунктов АГС, закрепляющих на всей территории систему геодезических координат СК – 95. От Пулково до Берингова пролива координаты переданы со средними квадратическими ошибками по оси абсцисс – 1,02 м, а по оси ординат – 1,10 м. Эти данные подтверждены спутниковыми определениями.

Высокие качественные показатели АГС СССР, построенной за сравнительно короткий срок в сложных физико-географических и климатических условиях на огромной территории, не имеют мировых аналогов и отражают высокий профессионализм советских астрономо-геодезистов, выполнявших полевые измерения.

8. МЕТОДЫ УСТАНОВЛЕНИЯ СВЯЗИ СИСТЕМ КООРДИНАТ

8. 1. Референцные системы координат СК – 42 и СК – 95

Как известно, референцные системы координат отнесены к поверхности референц-эллипсоида, параметры которого, как правило, совпадают с общеземным эллипсоидом, а ориентировка в теле Земли произведена установлением соответствующих исходных геодезических дат на одном из пунктов государственной геодезической основы. Референцные системы координат вводят для упрощения решения редуccionной проблемы высшей геодезии. Ориентирование поверхности референц-эллипсоида производится соответствующим параллельным переносом его оси вращения и плоскости экватора.

В Советском Союзе с 1946 года Постановлением Правительства введена референцная система геодезических координат СК – 42. В качестве координатной поверхности в этой системе служит поверхность эллипсоида Красовского, параметры которого выведены по методу площадей в ЦНИИГАиК (г. Москва) из обработки градусных измерений, накопленных к этому времени во всем мире (Приложение). Заслуга Ф. Н. Красовского заключается в том, что он осуществлял общее руководство работами, определял методы решения задачи, сделал обоснованный анализ качества градусных измерений, выполненных в различных странах и в разное время. По представлению коллектива ЦНИИГАиК эллипсоиду было присвоено имя Красовского (после его смерти).

Исходные геодезические даты установлены для главного астрономо-геодезического пункта в Пулковской астрономической абсерватории по результатам обработки по методу площадей градусных измерений, выполненных только на территории Советского Союза. Исходные астрономические широта, долгота и азимут определены из многолетних астрономических определений, с учетом данных службы широты и долготы на эпоху 1942 г. Как уже отмечалось ранее, в исходном азимуте была допущена грубая ошибка порядка 4 – 5 угловых секунд, что было обнаружено при уравнивании АГС значительно позже. Однако это не привело к существенным проблемам, так как при обработке градусных измерений участвовало значительное число азимутов на концах звеньев 1 класса.

От исходных геодезических дат в Пулково необходимо было распространить и закрепить систему координат СК – 42 на всей огромной территории страны. Эту задачу решали центры геодезических пунктов 87 полигонов АГС 1 класса после их полигонального уравнивания по второй программе Красовского. Недостатком государственной геодезической основы, закрепляющей СК – 42, являлось то, что на значительной части территории страны (от Иркутска до Хабаровска) измерения только начались и полигоны триангуляции 1 класса образовывали узкую цепочку, вытянутую с запада на восток. Это, конечно, являлось слабым местом СК – 42.

По мере накопления результатов измерений росло число первоклассных полигонов, все более равномерно покрывающих всю территорию страны. Параллельно наращивались объемы измерений в сплошных сетях триангуляции 2 класса, заполняющих полигоны 1 класса. При этом наращивалось число геодезических пунктов, закрепляющих СК – 42 на земной поверхности. Эта задача решалась последовательным уравниванием и согласованием новых измерений с ранее уравненными координатами. Для уменьшения объемов вычислений вся АГС СССР в 1969 году была разбита на перекрывающие друг друга блоки, каждый из которых уравнивался отдельно. Всего выделили пять блоков: «Урал» - от западных границ стра-

ны до меридиана вблизи Тюмени; «Западная Сибирь»; «Сибирь»; «Восточная Сибирь»; «Восток» - включая остров Сахалин. После уравнивания по перекрывающимся блокам получили пять различных систем пунктов, несущих координаты в системе СК-42. Здесь имели место как разворот, так и разномасштабность, приведенные в таблице 8. 1

Таблица 8. 1

Вид деформаций	Блоки			
	Урал-Зап. Сибирь	Зап. Сибирь-Сибирь	Сибирь-Вост. Сибирь	Вост. Сибирь-Восток
Разворот	+0,10 ^{''}	-0,09 ^{''}	-0,50 ^{''}	+0,27 ^{''}
Разномасштабность	+1:690 000	-1:1 190 000	-1:600 000	-1:72 200 000

Эти данные показывают различные по значимости величины несогласованности блоков между собой. По сути дела это говорит о том, что в результате на территории страны получили пять различных систем координат. В связи с этим возникла необходимость совместного уравнивания АГС СССР на всей территории страны, чтобы иметь единую систему координат.

В результате тщательного анализа накопленного опыта и результатов различных методов уравнивания было принято решение о совместном уравнивании АГС 1 - 2 классов как сплошной сети. В результате этого получили сеть из 164 306 пунктов, являющихся исходными в системе координат СК – 95. В этой системе координаты на всей территории страны от Пулково до Берингова пролива переданы со средними квадратическими ошибками: по оси X – 1, 02 м, а по оси Y – 1, 10 м.

8. 2. Общеземные системы координат ПЗ 90 и WGS – 84

С развитием методов решения геодезических задач на основе систем спутникового позиционирования стало возможным создать сеть опорных геодезических пунктов, закрепляющей на земной поверхности общеземную систему геодезических координат. Классическими методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации эта задача не может быть решена достаточно точно потому, что все измеренные величины редуцируются на поверхность референц-эллипсоида. Системы спутникового позиционирования работают в геоцентрической системе координат, центром которой является центр масс Земли.

Общеземная система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ – 90) получена по результатам наблюдений геодезических спутников ГЕОИК, включая доплеровские, дальномерные радиотехнические и лазерные измерения высот спутника над поверхностью моря и фотографирования космического аппарата на фоне звездного неба. При выводе ПЗ – 90 использовались также радиотехнические и лазерные измерения дальностей до спутников ГЛОНАСС и ЭТАЛОН, гравиметрические данные на суше и Мировом океане.

Спутники ГЕОИК оснащены радиовысотомерами, доплеровскими передатчиками, уголковыми отражателями, радиодальномерной системой и системой импульсной световой сигнализации, обеспечивающих определение высот ИСЗ над уровнем моря с точностью 0,5 – 1,0 м, их радиальной скорости с точностью 1 см/с, дальности – 0,1 – 1,0 м, направления на спутник – 1,5^{''}. Эти спутники запускались

на близкую орбиту с высотой над поверхностью Земли около 1 500 км и наклоном 74° и 83° .

В системе координат ПЗ – 90 приняты следующие фундаментальные геодезические постоянные:

- большая полуось эллипсоида $a = 6\,378\,136$ м;
- полярное сжатие $\alpha = 1 : 298,257\,839$;
- геоцентрическая гравитационная постоянная (с учетом атмосферы) $fM = 398\,600,44 * 10^9$ м³/с²;
- угловая скорость вращения Земли $\omega = 7\,292\,115 * 10^{-11}$ рад/с.

Общеземная система координат ПЗ – 90 является Российским аналогом общеземной системы координат WGS – 84, базирующейся на спутниковой системе NAVSTAR (США). Эти две системы в пределах точности их определения имеют одни и те же параметры и рекомендованы к практическому использованию в международной навигации.

На земной поверхности система ПЗ – 90 закреплена 33–мя постоянными пунктами космической геодезической сети (КГС), в основном, расположенными на территории бывшего Советского Союза, из них 7 пунктов расположены в Антарктиде. Средние квадратические ошибки положения системы координат относительно центра масс Земли составляет 1 – 2 м, взаимное положение пунктов постоянной геодезической сети, закрепляющих на земной поверхности ПЗ – 90, составляет около 0,3 м при среднем расстоянии между ними 1,5 – 2,0 тыс. км, что в относительной мере составляет менее единицы 7 – го знака.

Все пункты КГС на территории России определены также в референцной системе координат СК – 42. Численные значения элементов ориентирования координат СК – 42 относительно ПЗ – 90 соответственно составляют:

- координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли:
 $dX_0 = +25$ м; $dY_0 = -141$ м; $dZ_0 = -80$ м;
- развороты осей координат: $W_x = 0.00''$, $W_y = -0.35''$, $W_z = -0.66''$;
- масштабный коэффициент: $dm = (0.00 \pm 0.25) * 10^{-6}$.

8.3. Параметры связи систем координат

Как видно из вышеизложенного, для установления связи двух пространственных систем координат необходимо знать семь параметров связи: координаты центра одной системы относительно другой: dX_0, dY_0, dZ_0 ; развороты осей координат: W_x, W_y, W_z ; масштабный коэффициент dm . Мы будем полагать, что на земной поверхности имеются **связующие пункты**, центры которых получили координаты в обеих системах. Классические методы получения референцных координат рассмотрены нами ранее. Методы получения координат на основе спутниковых технологий рассматриваются в дисциплине «космическая геодезия».

Для каждой связующей точки, имеющей координаты в двух системах, можно записать три уравнения с семью неизвестными

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{II} \\ Y_{II} \\ Z_{II} \end{bmatrix} = f(dX_0, dY_0, dZ_0, m, W_x, W_y, W_z) \quad (8.1)$$

Для однозначного решения задачи необходимо иметь три связующие точки, при большем их числе задача определения параметров связи решается по методу наименьших квадратов разностей, характеризующих рассогласование координат после их трансформирования.

Перевычисление координат из системы I в систему II производится по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{II} = (1+m) \begin{pmatrix} 1 & +W_z & -W_y \\ -W_z & 1 & +W_x \\ +W_y & -W_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Обратное преобразование производится по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_I = (1-m) \begin{pmatrix} 1 & -W_z & +W_y \\ +W_z & 1 & -W_x \\ -W_y & +W_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{II} - \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Здесь угловые элементы трансформирования выражены в радианной мере.

При необходимости преобразования геодезических широт, долгот и высот из одной системы в другую используются формулы связи пространственных прямоугольных координат с геодезическими, которые мы рассмотрели раньше.

Приведем в табл. 8. 2 численные значения параметров связи различных систем координат с системой ПЗ - 90

Таблица 8. 2

Система координат	Наименование параметров						
	dX ₀	dY ₀	dZ ₀	W _x	W _y	W _z	dm
СК - 42	25	-141	-80	0.00	-0.35	-0.66	(0.00±0.25)10 ⁻⁶
СК - 95	25.90	-30.94	-81.76	-	-	-	-
WGS - 84	-1.08	-0.27	-0.90	0	0	-0.16	(-0.12±0.06)10 ⁻⁶

Высота поверхности физической модели Земли – геоида относительно поверхности общего земного эллипсоида в системе координат ПЗ – 90 определена с погрешностью, меньшей 1,5 м для всей поверхности Земли, а на акваториях Мирового океана –0,7 –1,0 м. Максимальная высота геоида составляет +85,8 м в точке с географическими координатами 4⁰ ю. ш., 139⁰ в. д., минимальная высота –104, 8 м в точке 5⁰ с. ш., 80⁰ в. д. Высота геоида на Северном полюсе +16, 0 м, на Южном –28,9 м.

По мере накопления материалов спутниковых измерений и их обработки появляются возможности уточнения параметров различных систем координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галазин В. Ф., Каплан Б. Л., Лебедев М. Г. и др. Параметры Земли 1990 года (ПЗ – 90) (Справочный документ). М., 1998, 40 с.
2. Генике А. А., Побединский Г. Г. Глобальные спутниковые системы определения местоположения и их применение в геодезии. М., Картгеоцентр, 2004, 352 с.
3. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. М., Недра, 1976, 512 с.
4. Кашин Л. А. Построение классической астрономо-геодезической сети России и СССР (1816 – 1991 гг). М., Картгеоцентр-Геодезиздат, 1999, 192 с.
5. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1979, 296 с.
6. Пеллинен Л. П. Высшая геодезия. М., Недра, 1978, 264 с.
7. Подшивалов В. П. Формулы для редуцирования измеренного отрезка прямой на поверхность эллипсоида // Изв. Вузов. Геодезия и аэрофото-съемка. – 1984, №1, М., с. 30 – 37.
8. Подшивалов В. П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем. Научное издание ПГУ, Новопо-лоцк, 1998, 126 с.