7

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ПРЕПРИНТ

Л.А.Табаровский

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ

НОВОСИБИРСК–1971

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
С И Б И Р С К О Е   О Т Д Е Л Е Н И Е

ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ПРЕПРИНТ

Л.А. ТАБАРОВСКИЙ

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Новосибирск-1971

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор технических наук профессор

А.А. КАУФМАН

ВВЕДЕНИЕ

Задачу о дифракции гармонического электромагнитного поля на локальном теле, расположенном в горизонтально-слоистой среде, можно свести к решению системы интегральных уравнений по поверхности тела [2,3]. Вид системы, помимо формы неоднородности и свойств вмещающей среды, в значительной степени зависит от того, каким уравнениям и граничным условиям подчиняется оператор Грина. В настоящей работе он строится при посредстве вспомогательных источников, располагаемых на границе неоднородности, что позволяет использовать в качестве компонент оператора известные выражения для полей этих источников в многослойных средах.

Первые три параграфа посвящены выводу интегральных уравнений для трехмерных задач. В § I описана ортогональная система координат на поверхности тела. В § 2 рассмотрены правила преобразования операторов Грина к криволинейным координатам. В § 3 построена система четырех уравнений Фредгольма второго рода, к решению которой сводится задача дифракции гармонического поля на локальной неоднородности. Ядра уравнений системы обладают слабой особенностью и являются линейными комбинациями компонент полей вспомогательных источников.

В параграфах 4-7 построены интегральные уравнения для задач с осевой симметрией. В §§ 4-5 описаны вспомогательные источники и их поля (точные выражения и ближняя зона). В § 6 сформулированы принципы взаимности для кольцевых источников. В § 7 получены интегральные уравнения.

В последнем параграфе описан способ расчета полей вспомогательных источников, основанный на деформации путей в комплексной плоскости переменной интегрирования.

§ I. Параметризация границы неоднородности. Система координат на поверхности.

Пусть в одном из горизонтальных слоев расположено тело, проводимость σ_i и магнитная проницаемость μ_i которого отличаются от аналогичных параметров вмещающего слоя. Внутри неоднородности $\sigma_i = const$, $\mu_i = const$. Источники находятся вне тела.

Обозначим поверхность неоднородности через S. Будем характеризовать направление радиус-вектора точек поверхности S сферическими углами – φ и θ. Угол φ отсчитывается вокруг оси z', проходящий через неоднородность и параллельной оси z основной системы координат. Угол θ отсчитывается от положительного направления оси z' вокруг расположенной внутри тела точки O этой оси (рис. I).

Векторное уравнение поверхности записывается следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{R_0} + \vec{R}(\theta, \varphi) \qquad \text{(I)}$$

Здесь $\vec{R_0}$ – радиус-вектор точки O. Расписывая (I) по координатам, получим:

$$x = X_0 + X(\theta, \varphi)$$
$$y = Y_0 + Y(\theta, \varphi)$$
$$z = Z_0 + Z(\theta, \varphi)$$

Построим на поверхности S ортогональную координатную сеть. Для этого покроем поверхность семейством $\emptyset$ кривых $\theta = const$. Эти кривые представляют собой линии пересечения конических поверхностей, выходящих из точки O, с поверхностью S. Будем называть их линиями S_φ. Семейство ортогональных траекторий линий S_φ назовем семейством T, а линии этого семейства – линиями S_θ. Кривые S_θ начинаются в точке O_N и заканчиваются в точке O_S. В отличие от линий семейства $\emptyset$, лежащих на поверхностях $\theta = const$, линии семейства T не лежат в плоскости $\varphi = const$, а являются пространственными кривыми, вдоль которых изменяются оба угла: φ и θ. Связь между φ и θ вдоль линий S_θ можно установить следующим образом. Пусть $\varphi = f(\theta)$ на линии S_θ. Тогда при перемещении вдоль этой линии:

$$\overrightarrow{dr_\theta} = \left(X'_\theta + X'_\varphi \frac{df}{d\theta},\ Y'_\theta + Y'_\varphi \frac{df}{d\theta},\ Z'_\theta + Z'_\varphi \frac{df}{d\theta}\right) d\theta \qquad (2)$$

В правой части равенства (2) перечислены декартовы компоненты вектора смещения вдоль линии S_θ. Аналогично:

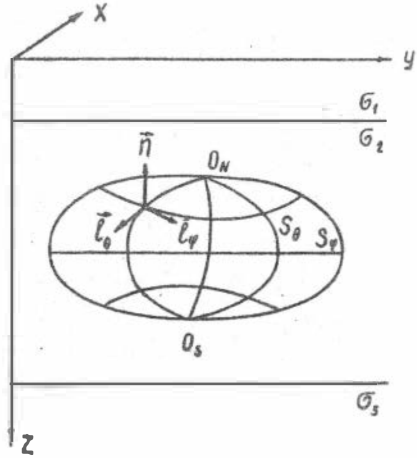

рис.1

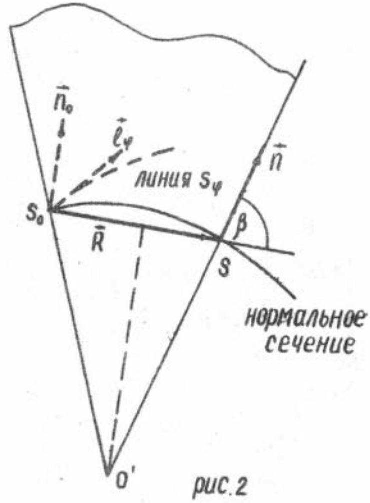

рис.2

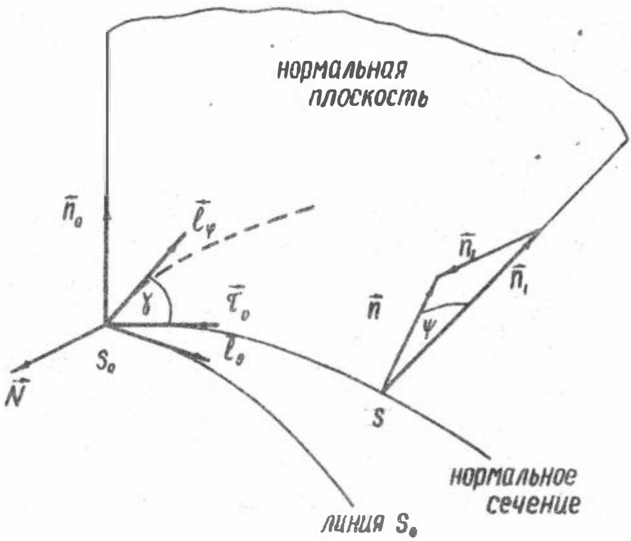

рис. 3

$$\vec{dr_\varphi} = (X'_\varphi, Y'_\varphi, Z'_\varphi)\, d\varphi \tag{3}$$

Так как кривые S_θ и S_φ ортогональны, то $(\vec{dr_\theta}, \vec{dr_\varphi}) = 0$, откуда:

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{X'_\theta X'_\varphi + Y'_\theta Y'_\varphi + Z'_\theta Z'_\varphi}{(X'_\varphi)^2 + (Y'_\varphi)^2 + (Z'_\varphi)^2} \tag{4}$$

Единичные векторы $\vec{l_\theta}$ и $\vec{l_\varphi}$, касательные к линиям S_θ и S_φ, в совокупности с единичной нормалью $\vec{n}$ образуют в каждой точке поверхности S ортонормированную систему координат. Построим орты $\vec{n}$, $\vec{l_\theta}$, $\vec{l_\varphi}$. Так $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ – векторы, лежащие в касательной плоскости, то нормированный вектор, направленный вдоль нормали, можно определить следующим образом:

$$\vec{n} = \frac{\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right]\right|} \tag{5}$$

Отсюда:

$$n_x = \frac{Y'_\theta Z'_\varphi - Z'_\theta Y'_\varphi}{M_n} \tag{6}$$

$$n_y = -\frac{X'_\theta Z'_\varphi - Z'_\theta X'_\varphi}{M_n} \tag{7}$$

$$n_z = \frac{X'_\theta Y'_\varphi - Y'_\theta X'_\varphi}{M_n}, \tag{8}$$

где

$$M_n^2 = [Y'_\theta Z'_\varphi - Z'_\theta Y'_\varphi]^2 + [X'_\theta Z'_\varphi - Z'_\theta X'_\varphi]^2 + [X'_\theta Y'_\varphi - Y'_\theta X'_\varphi]^2 \tag{9}$$

Орт, касательный к линии S_φ, определяется следующими соотношениями:

$$(l_\varphi)_x = \frac{X'_\varphi}{M_\varphi}; \quad (l_\varphi)_y = \frac{Y'_\varphi}{M_\varphi}; \quad (l_\varphi)_z = \frac{Z'_\varphi}{M_\varphi}; \tag{10}$$

$$M_\varphi = \sqrt{(X'_\varphi)^2 + (Y'_\varphi)^2 + (Z'_\varphi)^2} \tag{11}$$

Вектор $\vec{l}_\theta$ строится с помощью $\vec{l}_\varphi$ и $\vec{n}$:

$$\vec{l}_\theta = [\vec{l}_\varphi \times \vec{n}] \tag{12}$$

§ 2. Преобразование операторов Грина к криволинейным системам координат

В настоящем параграфе из компонент полей точечных источников строятся аффиноры, которые будем называть операторами Грина (в § 3 будет показано, что операторы Грина в действительности являются аффинорами описываемой ниже структуры). Цель параграфа - установить законы преобразования операторов Грина к различным системам координат.

Пусть в точке $\vec{r}_0$ имеется точечный источник, обладающий ориентацией в пространстве (например, электрический или магнитный диполь). Пусть $\vec{A}(\vec{r},\vec{r}_0)$ - векторное поле (например, электрическое или магнитное) этого источника в точке $\vec{r}$. Будем в обозначениях компонент поля $\vec{A}$ применять два индекса: верхний индекс будет означать наименование орта, вдоль которого ориентирован источник, нижний - наименование одного из ортов, вдоль которых разлагается поле.

Таким образом, например, запись $A_z^y(\vec{r},\vec{r}_0)$ означает, что в точке $\vec{r}$ измеряется z - компонента поля источника, расположенного в точке $\vec{r}_0$ и ориентированного вдоль оси y .

Построим следующую матрицу:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_x^x & A_x^y & A_x^z \\ A_y^x & A_y^y & A_y^z \\ A_z^x & A_z^y & A_z^z \end{pmatrix} \tag{13}$$

Каждый из столбцов матрицы $\hat{A}$ представляет собой три компоненты поля источника, ориентированного вдоль одной из координатных осей. Можно сказать, что матрица $\hat{A}$ записана в декартовой системе как по координатам источников (которые ориентированы вдоль ортов $\vec{l}_x$, $\vec{l}_y$, $\vec{l}_z$ - в точке $\vec{r}_0$), так и по координатам точки измерения (измеряются x , y , z - компоненты полей). Представим теперь, что по каким-либо причинам удобно в точке $\vec{r}_0$ рассматривать источники, ориентированные вдоль осей

ξ_1, ξ_2, ξ_3 некоторой прямоугольной нормированной системы, а в точке $\vec{r}$ измерять η_1, η_2, η_3 - компоненты полей в другой ортонормированной системе. Построим матрицу

$$\hat{A}^* = \begin{pmatrix} A_{\eta 1}^{\xi 1} & A_{\eta 1}^{\xi 2} & A_{\eta 1}^{\xi 3} \\ A_{\eta 2}^{\xi 1} & A_{\eta 2}^{\xi 2} & A_{\eta 2}^{\xi 3} \\ A_{\eta 3}^{\xi 1} & A_{\eta 3}^{\xi 2} & A_{\eta 3}^{\xi 3} \end{pmatrix} \tag{I4}$$

Требуется найти выражение матрицы $\hat{A}^*$ через $\hat{A}$.

Рассмотрим вначале задачу преобразования матрицы $\hat{A}$ по координатам источников. Пусть диполи ориентированы вдоль единичных ортов $\vec{i}_{\xi 1}$, $\vec{i}_{\xi 2}$, $\vec{i}_{\xi 3}$ в точке $\vec{r}_0$, а в точке $\vec{r}$ измеряются декартовы компоненты поля. Очевидно:

$$A_x^{\xi 1} = (\vec{i}_x \vec{i}_{\xi 1}) A_x^x + (\vec{i}_y \vec{i}_{\xi 1}) A_x^y + (\vec{i}_z \vec{i}_{\xi 1}) A_x^z \tag{I5}$$

Это равенство означает, что источник, направленный вдоль $\vec{i}_{\xi 1}$, заменяется тремя источниками с соответствующими моментами, ориентированными вдоль ортов $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$, и вклады всех источников в x-компоненту поля в точке $\vec{r}$ суммируются. Выписывая аналогичные равенства для других компонент полей и ориентаций диполей, получим следующее правило преобразования матрицы $\hat{A}$ по координатам источников (через $\hat{A}_0^*$ обозначена матрица $\hat{A}^*$ при $\eta 1 = x$, $\eta 2 = y$, $\eta 3 = z$):

$$\hat{A}_0^* = \hat{A} \hat{A}^{пр} \tag{I6}$$

Здесь:

$$\hat{A}^{пр} = \begin{pmatrix} (\vec{i}_x \vec{i}_{\xi 1}) & (\vec{i}_x \vec{i}_{\xi 2}) & (\vec{i}_x \vec{i}_{\xi 3}) \\ (\vec{i}_y \vec{i}_{\xi 1}) & (\vec{i}_y \vec{i}_{\xi 2}) & (\vec{i}_y \vec{i}_{\xi 3}) \\ (\vec{i}_z \vec{i}_{\xi 1}) & (\vec{i}_z \vec{i}_{\xi 2}) & (\vec{i}_z \vec{i}_{\xi 3}) \end{pmatrix} \tag{I7}$$

Преобразуем теперь матрицу $\hat{A}_0^*$ по координатам точки измерения. Очевидно:

$$A_{\eta 1}^{\xi 1} = (\vec{i}_x \vec{i}_{\eta 1}) A_x^{\xi 1} + (\vec{i}_y \vec{i}_{\eta 1}) A_y^{\xi 1} + (\vec{i}_z \vec{i}_{\eta 1}) A_z^{\xi 1} \tag{I8}$$

Равенство (I8) представляет собой обычное выражение компоненты поля вдоль оси с направляющим вектором $\vec{i}_{\eta 1}$ через известные декартовы компоненты. Выписывая аналогичные соотношения для других компонент и ориентаций, получим окончательно:

$$\hat{A}^{*} = \hat{A}^{л}\hat{A}_{0}^{*} = \hat{A}^{л}\hat{A}\hat{A}^{пр} \tag{I9}$$

Здесь:

$$\hat{A}^{л} = \begin{pmatrix} (\vec{i}_x \vec{i}_{\eta 1}) & (\vec{i}_y \vec{i}_{\eta 1}) & (\vec{i}_z \vec{i}_{\eta 1}) \\ (\vec{i}_x \vec{i}_{\eta 2}) & (\vec{i}_y \vec{i}_{\eta 2}) & (\vec{i}_z \vec{i}_{\eta 2}) \\ (\vec{i}_x \vec{i}_{\eta 3}) & (\vec{i}_y \vec{i}_{\eta 3}) & (\vec{i}_z \vec{i}_{\eta 3}) \end{pmatrix} \tag{20}$$

Соотношения (I9), (I7), (20) решают сформулированную в начале параграфа задачу преобразования матрицы $\hat{A}$.

§ 3. Вывод интегральных уравнений

Исходное соотношение при построении интегральных уравнений - лемма Лоренца. Приведем для справки ее формулировку [7]. Пусть в среде с произвольным распределением проводимости σ и магнитной проницаемости μ задана система сторонних электрических и магнитных токов $\vec{j}_1^{\,э}$ и $\vec{j}_1^{\,м}$, меняющихся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$ с частотой ω. Поля, порождаемые этими сторонними токами, обозначим через $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$. Они подчиняются уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H}_1 = \sigma\vec{E}_1 + \vec{j}_1^{\,э}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1 = i\omega\mu\vec{H}_1 - \vec{j}_1^{\,м}$$

Зададим в той же среде другое распределение сторонних токов: $\vec{j}_2^{\,э}$ и $\vec{j}_2^{\,м}$. Поля этих токов обозначим через $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$. Они подчиняются уравнениям:

$$\operatorname{rot}\vec{H}_2 = \sigma\vec{E}_2 + \vec{j}_2^{\,э}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_2 = i\omega\mu\vec{H}_2 - \vec{j}_2^{\,м}$$

Лемма Лоренца устанавливает следующую связь между векторами $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$, $\vec{j}_1^{\,э}$, $\vec{j}_2^{\,э}$, $\vec{j}_1^{\,м}$, $\vec{j}_2^{\,м}$:

$$\int_S \{[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1]\} \vec{n}\, ds =$$

$$= \int_V (\vec{J}_1^э \vec{E}_2 + \vec{J}_2^м \vec{H}_1 - \vec{J}_2^э \vec{E}_1 - \vec{J}_1^м \vec{H}_2)\, dv \qquad (21)$$

Здесь V - произвольный объем в среде, S - ограничивающая его поверхность, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S.

Выберем в качестве векторов $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ искомые поля: $\vec{E}_1=\vec{E}$, $\vec{H}_1=\vec{H}$. При этом на поля $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$, которые будем называть вспомогательными, леммой Лоренца налагается только одно требование: они должны в области V удовлетворять уравнениям Максвелла с теми же параметрами σ, μ, что и искомое поле. На границе S и вне области V вспомогательные поля можно подчинить произвольным условиям - лемма Лоренца в области V остается справедливой. Это обстоятельство и используется при подборе вспомогательных полей, к которым предъявляются требования двоякого рода: с одной стороны они должны вычисляться с помощью достаточно простого алгоритма, с другой - как можно больше упрощать интегральные уравнения.

Пусть область V в лемме Лоренца совпадает с неоднородностью. Выберем в качестве вспомогательных полей для этой области поля электрического диполя в однородной среде с параметрами σ_i, μ_i (т.е. потребуем, чтобы вспомогательные поля удовлетворяли во внешней области уравнениям Максвелла с теми же параметрами, что и во внутренней). Пусть диполь расположен на границе области в точке S_0 и направлен вдоль линии S_θ. Электрическое и магнитное поля этого диполя будем обозначать через $\vec{e}^{\,\theta}_{\sigma i}$, $\vec{h}^{\theta}_{\sigma i}$.

Потребуем, чтобы вспомогательные поля для внешней области удовлетворяли условиям непрерывности на плоскостях раздела горизонтально-слоистой среды. Внутри неоднородности подчиним эти поля уравнениям Максвелла с параметрами вмещающего слоя σ_e, μ_e. В качестве полей, удовлетворяющих перечисленным требованиям, можно взять поля электрического диполя, расположенного в горизонтально-слоистой среде. Пусть этот диполь также расположен в точке S_0 и направлен доль линии S_θ. Обозначим его поля через $\vec{e}^{\,\theta}_{\sigma e}$, $\vec{h}^{\theta}_{\sigma e}$.

Окружим вспомогательные диполи полусферами S_R^- и S_R^+. S_R^- находится внутри поверхности S и окружает внутренний вспомогательный диполь. Полусфера S_R^+ расположена на наружной стороне S и окружает внешний вспомогательный диполь. Применим лемму Лоренца к внутренней и внешней областям. Так как сторонних токов внутри S нет, то:

$$\int\limits_{S^-} \left\{ [\vec{n}^+ \times \vec{E}^-] \vec{h}^{\theta}_{\sigma i} - [\vec{H}^- \times \vec{n}^+] \vec{e}^{\,\theta}_{\sigma i} \right\} dS = 0 \tag{22}$$

Здесь S^- - внутренняя сторона поверхности S; $\vec{E}^-, \vec{H}^-$ - значения искомых полей на S^-; $\vec{n}^+$ - внешняя нормаль к поверхности S. Интеграл по S^- разбивается на два интеграла - по поверхности S^{-*}, представляющей собой поверхность S без круга, вырезанного из нее полусферами, и по полусфере S_R^-. Поля электрического диполя с единичным моментом в ближней зоне имеют следующие выражения:

$$H_\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R^2} \tag{23}$$

$$E_R = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{\cos\theta}{R^3} \tag{24}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\sin\theta}{R^3} \tag{25}$$

Соотношения (23) - (25) написаны в связанной с диполем сферической системе координат. Разлагая искомые электрическое и магнитное поля в ряд вблизи точки S_0 и учитывая (23)-(25), можно вычислить интеграл по полусфере с точностью до членов, пропорциональных ее радиусу R. В результате получается:

$$\int\limits_{S_R^-} = \frac{1}{2\pi\sigma_i} \frac{H_\varphi^-(S_0)}{R} + \frac{E_\theta^-(S_0)}{2} + O(R) \tag{26}$$

Здесь H_φ^- - компонента искомого магнитного поля вдоль координатной линии S_φ. Таким образом, для внутренней области лемма Лоренца дает следующее соотношение:

$$\int\limits_{S^{-*}} \left\{ [\vec{n}^+ \times \vec{E}^-] \vec{h}^{\theta}_{\sigma i} - [\vec{H}^- \times \vec{n}^+] \vec{e}^{\,\theta}_{\sigma i} \right\} dS + \frac{1}{2\pi\sigma_i} \frac{H_\varphi^-(S_0)}{R} + \frac{E_\theta^-(S_0)}{2} = 0 \tag{27}$$

Применяя лемму Лоренца к внешней области, получим:

$$\int\limits_{S^{+*}} \left\{ [\vec{n}^- \times \vec{E}^+] \vec{h}^{\theta}_{\sigma e} - [\vec{H}^+ \times \vec{n}^-] \vec{e}^{\theta}_{\sigma e} \right\} dS -$$

$$- \frac{1}{2\pi\sigma_e} \frac{H^+_\varphi(S_0)}{R} + \frac{E^+_\theta(S_0)}{2} + O(R) = \int\limits_{V_0} (\vec{j}^э \vec{e}^{\theta}_{\sigma e} - \vec{j}^м \vec{h}^{\theta}_{\sigma e}) dv \qquad (28)$$

Здесь $\vec{n}^-$ - внутренняя нормаль к поверхности S ; $\vec{E}^+$, $\vec{H}^+$ - значения искомых полей с наружной стороны S ; V_0 - область источников. Интегралы по поверхностям раздела исчезают в силу условий непрерывности на них компонент вспомогательных и искомых полей. Основываясь на соотношениях взаимности, нетрудно показать, что интеграл в правой части (28) представляет собой компоненту $E^0_\theta(S_0)$ поля источников в точке S_0 в отсутствие неоднородности. Итак,

$$\int\limits_{V_0} (\vec{j}^э \vec{e}^{\theta}_{\sigma e} - \vec{j}^м \vec{h}^{\theta}_{\sigma e}) dV = E^0_\theta(S_0) \qquad (29)$$

Умножим (27) на σ_i , (28) на σ_e и сложим полученные равенства. Производя несложные преобразования с учетом непрерывности касательных компонент искомых полей на границе S и устремляя R к нулю, получим:

$$E_\theta(S_0) = \frac{2\sigma_e}{\sigma_i + \sigma_e} E^0_\theta(S_0) + \frac{2}{\sigma_i + \sigma_e} \int\limits_S \left\{ [\vec{n} \times \vec{E}] \vec{h}^{\theta}_{\sigma} + [\vec{n} \times \vec{H}] \vec{e}^{\theta}_{\sigma} \right\} dS \qquad (30)$$

Здесь:

$$\vec{h}^{\theta}_{\sigma} = \sigma_e \vec{h}^{\theta}_{\sigma e} - \sigma_i \vec{h}^{\theta}_{\sigma i} \qquad (31)$$

$$\vec{e}^{\theta}_{\sigma} = \sigma_e \vec{e}^{\theta}_{\sigma e} - \sigma_i \vec{e}^{\theta}_{\sigma i} \qquad (32)$$

$$\vec{n} = \vec{n}^+$$

Взяв в качестве вспомогательных источников электрические диполи, ориентированные вдоль линии S_φ в той же самой точке S_0 , получим второе интегральное уравнение:

$$E_\varphi(S_0) = \frac{2\sigma_e}{\sigma_i + \sigma_e} E^0_\varphi(S_0) + \frac{2}{\sigma_i + \sigma_e} \int\limits_S \left\{ [\vec{n} \times \vec{E}] \vec{h}^{\varphi}_{\sigma} + [\vec{n} \times \vec{H}] \vec{e}^{\varphi}_{\sigma} \right\} dS \qquad (33)$$

Здесь:

$$\vec{h}^{\varphi}_{\sigma} = \sigma_e \vec{h}^{\varphi}_{\sigma e} - \sigma_i \vec{h}^{\varphi}_{\sigma i} \qquad (34)$$

$$\vec{e}^{\varphi}_{\sigma} = \sigma_e \vec{e}^{\varphi}_{\sigma e} - \sigma_i \vec{e}^{\varphi}_{\sigma i} \tag{35}$$

Выбирая в качестве вспомогательных источников магнитные диполи, направленные вдоль линий S_θ и S_φ, получим еще два уравнения, замыкающих систему. Проводя вычисления по полусферам, следует иметь в виду, что поля магнитного диполя с единичным моментом в ближней зоне имеют следующий вид:

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \; \frac{\sin\theta}{R^2} \tag{36}$$

$$H_R = \frac{1}{2\pi} \; \frac{\cos\theta}{R^3} \tag{37}$$

$$H_\theta = \frac{1}{4\pi} \; \frac{\sin\theta}{R^3} \tag{38}$$

Вычисления приводят к следующим уравнениям:

$$H_\alpha(S_0) = \frac{2\mu_e}{\mu_i+\mu_e} H^0_\alpha(S_0) + \frac{2}{i\omega(\mu_i+\mu_e)} \int\limits_S \left\{ [\vec{n}\times\vec{E}]\vec{h}^{\alpha}_{\mu} + [\vec{n}\times\vec{H}]\vec{e}^{\alpha}_{\mu} \right\} dS \tag{39}$$

Здесь вместо α нужно подставлять индексы θ или φ.

$$\vec{h}^{\alpha}_{\mu} = \vec{h}^{\alpha}_{\mu e} - \vec{h}^{\alpha}_{\mu i} \tag{40}$$

$$\vec{e}^{\alpha}_{\mu} = \vec{e}^{\alpha}_{\mu e} - \vec{e}^{\alpha}_{\mu i} \tag{41}$$

Обозначения: $\vec{h}^{\alpha}_{\mu e}$, $\vec{e}^{\alpha}_{\mu e}$ - магнитное и электрическое поля внешнего вспомогательного магнитного диполя, ориентированного вдоль линии S_α; $\vec{h}^{\alpha}_{\mu i}$, $\vec{e}^{\alpha}_{\mu i}$ - то же самое для внутреннего вспомогательного диполя.

Если векторные выражения раскрывать в касательной системе координат, то соотношения (30), (33), (39) образуют систему четырех уравнений Фредгольма второго рода относительно функций E_θ, E_φ, H_θ, H_φ. Можно эту систему записать в векторном виде. Тогда ядра из векторных станут аффинорными. Эти аффиноры, по форме совпадающие с описанными в § 2, являются операторами Грина в том смысле, что представляют собой ядра интегральных преобразований, переводящих решение с границы области в любую ее точку (в результате чего получается интегральное уравнение) [9]. Выражения для декартовых компонент полей вертикально и горизонтально ориентированных диполей в многослойных средах хорошо известны. Составляя из них операторы Грина, можно по правилам, описанным в § 2, получить все ядра системы (30), (33), (39).

Покажем, что особенность, которой обладают ядра построенных уравнений при совпадении аргументов, - слабая. Рассмотрим, например, член $[\vec{n}\times\vec{E}]\,\vec{h}_{\sigma}^{\varphi}$ в уравнении (33):

$$[\vec{n}\times\vec{E}]\,\vec{h}_{\sigma}^{\varphi} = -[\vec{n}\times\vec{h}_{\sigma}^{\varphi}]\vec{E} = -\sigma_e[\vec{n}\times\vec{h}_{\sigma e}^{\varphi}]\vec{E}+\sigma_i[\vec{n}\times\vec{h}_{\sigma i}^{\varphi}]\vec{E} \quad (42)$$

Правую часть (42) нужно исследовать, когда текущая точка S поверхности неоднородности приближается к точке S_o расположения вспомогательных электрических диполей. Диполи в рассматриваемом случае ориентированы вдоль линии S_φ. Обозначим через $\vec{R}$ вектор, направленный от точки S_o к точке S. В (42) $\vec{n}$ - нормаль в точке S. В ближней зоне выражения для полей $\vec{h}_{\sigma e}^{\varphi}$, $\vec{h}_{\sigma i}^{\varphi}$ можно записать в векторном виде, исходя из закона Био-Савара:

$$\vec{h}_{\sigma e}^{\varphi} \approx \vec{h}_{\sigma i}^{\varphi} \approx \frac{1}{4\pi}\,\frac{[\vec{\ell}_\varphi\times\vec{R}]}{R^3} \quad (43)$$

С учетом (43), равенство (42) принимает вид:

$$[\vec{n}\times\vec{E}]\,\vec{h}_{\sigma}^{\varphi} \approx \frac{\sigma_i-\sigma_e}{4\pi R^3}[\vec{n}\times[\vec{\ell}_\varphi\times\vec{R}]]\vec{E} \quad (44)$$

Исследуем множитель $[\vec{n}\times[\vec{\ell}_\varphi\times\vec{R}]]$. Раскрывая двойное векторное произведение, получим:

$$[\vec{n}\times[\vec{\ell}_\varphi\times\vec{R}]] = \vec{\ell}_\varphi(\vec{n}\vec{R}) - \vec{R}(\vec{n}\vec{\ell}_\varphi) \quad (45)$$

Рассмотрим скалярные произведения в правой части (45). Используемые ниже понятия и теоремы дифференциальной геометрии заимствованы из [10].

<u>Множитель $(\vec{n}\vec{R})$</u>. Проведем через точку S нормальную плоскость, содержащую вектор $\vec{R}$ (рис. 2). Через точки S_o и S проведем нормали к сечению (в точке S нормаль к сечению совпадает с нормалью к поверхности). Точку пересечения нормалей обо-

значим через O'. При малых $R=|\vec{R}|$, очевидно:

$$S_0 O' \approx SO' \approx \rho_1$$

где ρ_1 - радиус кривизны построенного сечения в точке S_0. Обозначая через β угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{R}$, можно написать:

$$(\vec{n}\vec{R}) = R\cos\beta \approx R \cdot \frac{R}{2\rho_1} = \frac{R^2}{2\rho_1} \qquad (46)$$

Радиус кривизны ρ_1 следует считать положительным для выпуклых сечений и отрицательным для вогнутых.

Множитель $(\vec{n}\vec{l}_\varphi)$. Пусть $\vec{n}_0$ - нормаль к поверхности в точке S_0. Построим нормальную плоскость $\mathcal{P}$, проходящую через $\vec{n}_0$ и вектор $\vec{R}$ (рис. 3). Единичный касательный вектор к получившемуся нормальному сечению $S_0 S$ обозначим через $\vec{\tau}_0$. Вектор $\vec{n}$ спроектируем на плоскость $\mathcal{P}$. Проекцию обозначим через $\vec{n}_1$. Перпендикулярную к $\mathcal{P}$ составляющую обозначим через $\vec{n}_2$, а угол между вектором $\vec{n}$ и нормальной плоскостью - через ψ. Вектор $\vec{n}_1$, очевидно, нормален к сечению $S_0 S$. Кроме того, он имеет единичную длину, поскольку $|\vec{n}_1| = \cos\psi \approx 1$ в силу малости угла ψ. Следовательно, $\vec{n}_1$ - единичная нормаль к плоской кривой $S_0 S$. Применяя к этой кривой формулы Серре-Френе, получим:

$$\vec{n}_1 \approx \vec{n}_0 + \frac{d\vec{n}}{dS_\tau} S_\tau = \vec{n}_0 + \frac{S_\tau}{\rho}\vec{\tau}_0 = \vec{n}_0 + \frac{R}{\rho}\vec{\tau}_0 \qquad (47)$$

Здесь ρ - радиус кривизны сечения $S_0 S$ в точке S_0, S_τ - длина дуги $S_0 S$. Последнее равенство в цепочке (47) справедливо в силу того, что $S_\tau \approx R$. Радиус кривизны ρ нужно считать положительным для выпуклых сечений и отрицательным для вогнутых.

Вектор $\vec{n}_2$ перпендикулярен секущей плоскости и, следовательно, направлен вдоль вектора $\vec{N} = [\vec{\tau}_0 \times \vec{n}_0]$. Модуль $\vec{n}_2$ равен абсолютной величине угла ψ, который характеризует отклонение нормали от секущей плоскости при движении вдоль сечения $S_0 S$. Если нормаль отклоняется в сторону вектора $\vec{N}$, то $\psi > 0$, в противном случае $\psi < 0$. Предполагая зависимость угла ψ от параметра S_τ непрерывной и дифференцируемой, можно написать следующее равенство:

$$\vec{n}_2 \approx \mu S_\tau \vec{N} \approx \mu R \vec{N} \qquad (48)$$

Здесь $\mu = \dfrac{d\psi}{dS_\tau}$. С учетом (47), (48) можно следующим образом преобразовать выражение $(\vec{n}\vec{l}_\varphi)$:

$$(\vec{n}\vec{l}_\varphi) = ((\vec{n}_1+\vec{n}_2)\vec{l}_\varphi) = (\vec{n}_0\vec{l}_\varphi) + \frac{R}{\rho}(\vec{l}_\varphi\vec{\tau}_0) + \mu R(\vec{l}_\varphi\vec{N}) =$$

$$= \frac{R}{\rho}(\vec{l}_\varphi\vec{\tau}_0) + \mu R\vec{l}_\varphi[\vec{\tau}_0\times\vec{n}_0] =$$

$$= \frac{R}{\rho}(\vec{l}_\varphi\vec{\tau}_0) + \mu R\vec{n}_0[\vec{l}_\varphi\times\vec{\tau}_0] =$$

$$= \frac{R}{\rho}\cos\gamma + \mu R\sin\gamma \qquad (49)$$

Здесь γ - угол между $\vec{\tau}_0$ и $\vec{l}_\varphi$, отсчитываемый от $\vec{l}_\varphi$.

Используя выражения (49) и (46) для скалярных произведений $(\vec{n}\vec{l}_\varphi)$ и $(\vec{n}\vec{R})$, можно следующим образом переписать (45):

$$[\vec{n}\times[\vec{l}_\varphi\times\vec{R}]] \approx \vec{l}_\varphi\cdot\frac{R^2}{2\rho_1} - \vec{R}R\left[\frac{\cos\gamma}{\rho} + \mu\sin\gamma\right] \qquad (50)$$

Исходя из теоремы Менье и свойств индикатрисы Дюпена, можно показать, что в нулевом по R приближении $\rho_1 \approx \rho$. Кроме того, в равенстве (50) можно положить $\vec{R} = R\vec{\tau}_0$. С учетом этих замечаний, подставляя (50) в (44), получим:

$$[\vec{n}\times\vec{E}]\vec{h}_\sigma^\varphi \approx -\frac{b_i - b_e}{8\pi R}\left\{\left(\frac{\cos 2\gamma}{\rho} + \mu\sin 2\gamma\right)E_\varphi(S_0) + \left(\frac{\sin 2\gamma}{\rho} + 2\mu\sin^2\gamma\right)E_\theta(S_0)\right\} \qquad (51)$$

Если $\rho \neq 0$ (т.е. на поверхности S нет углов и ребер) и μ всюду конечно, то правая часть равенства (51) имеет особенность $1/R$, которая при интегрировании по поверхности является слабой.

Рассмотрим член $[\vec{n}\times\vec{H}]\vec{e}_\sigma^\varphi$ в (33). Чтобы исследовать его, нужно, согласно (35), знать выражения электрического поля электрического диполя в ближней зоне. Их можно получить из магнитных полей, но при этом нужно взять более точное, нежели (43), выражение, учитывающее частотную зависимость:

$$\vec{h}_{\sigma e}^\varphi \approx \frac{f_e}{4\pi}[\vec{l}_\varphi\times\vec{R}]$$

Здесь:

$$f_e = \frac{(1+k_e R)e^{-k_e R}}{R^3}$$

$$k_e^2 = -i\omega\mu_e\sigma_e$$

Аналогично для внутреннего вспомогательного диполя. После несложных вычислений получается следующий результат:

$$[\vec{n}\times\vec{H}]\vec{e}_0^{\,\varphi} \approx \frac{k_i^2-k_e^2}{8\pi R}\left\{(1+\cos^2\gamma)H_\theta(s_0)-\cos\gamma\sin\gamma H_\varphi(s_0)\right\} \quad (52)$$

Так же, как и в случае уравнения (33), можно показать, что остальные ядра системы интегральных уравнений (30), (33), (39) обладают слабой особенностью.

§ 4. Вспомогательные источники и их поля в задачах с осевой симметрией

В дальнейшем исследуется частный случай рассмотренной в предыдущих параграфах задачи - осесимметрическое тело в поле соосного с ним кругового тока. Неоднородность - не обязательно локальное тело. Это может также быть вертикальная скважина, пересекающая пласты.

В задачах с осевой симметрией (источник - круговой ток, неоднородность - соосное с током тело вращения) в качестве вспомогательных источников удобно использовать осесимметрические аналоги электрического и магнитного диполей: кольцевой электрический ток (условимся называть его источником типа R),кольцевой пояс вертикальных магнитных диполей (источник типа R_z) и кольцевой пояс радиальных магнитных диполей (источник типа R_r).

Для построения системы интегральных уравнений необходимо знать выражения для полей этих источников в многослойных средах. Ограничимся трехслойной моделью (рис. 4), т.к. этот случай охватывает довольно широкий класс задач: локальная неоднородность под наносами, каротаж. В обозначениях компонент полей условимся слева внизу ставить индекс, указывающий, каким источником порождается данное поле.

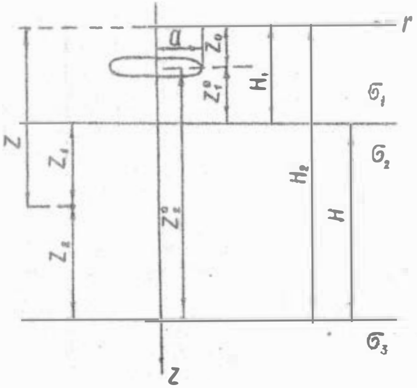

рис.4

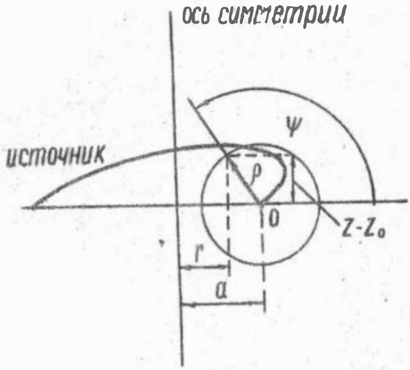

рис.5

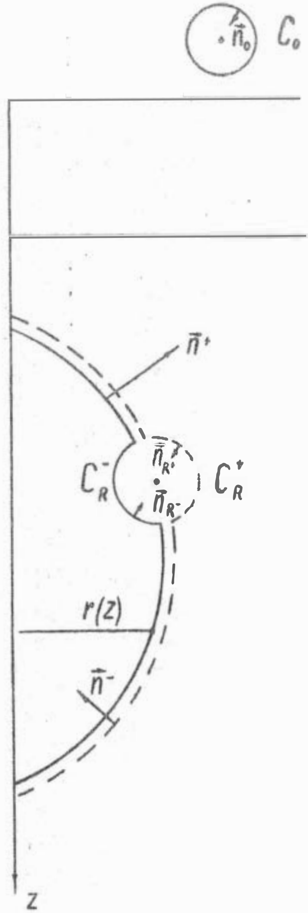

рис.6

Источник типа R. Выражения для компонент поля кругового тока в многослойной среде легко получаются из известных [4] выражений для потенциала магнитного диполя интегрированием по площади петли либо из потенциала электрического диполя интегрированием по контуру тока. Приведем окончательные выражения:

$$({}_R E_\varphi)_j^i = \frac{i\omega\mu I}{2} a \int_0^\infty F_j^i J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda \tag{53}$$

Верхний индекс показывает, в какой среде находится петля, нижний – в какой среде точка измерения. В (53) введено обозначение

$$F_j^i = \frac{\lambda}{\lambda_i} e^{-\lambda_i |z-z_0|} \delta_j^i + f_j^i \tag{54}$$

Здесь:

$$f_1^1 = d_1 e^{\lambda_1 z_1^0 + \lambda_1 z_1}$$

$$f_2^1 = d_2 e^{\lambda_1 z_1^0 + \lambda_2 z_2} + d_3 e^{\lambda_1 z_1^0 - \lambda_2 z_1}$$

$$f_3^1 = d_4 e^{\lambda_1 z_1^0 - \lambda_3 z_2}$$

$$f_1^2 = d_2 e^{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2^0} + d_3 e^{\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_1^0}$$

$$f_2^2 = C_1 e^{-\lambda_2 z_1 - \lambda_2 z_1^0} + C_2 \cdot 2\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 (z-z_0)\, e^{-2\lambda_2 H} + C_3 e^{\lambda_2 z_2 + \lambda_2 z_2^0}$$

$$f_3^2 = \tilde{d}_2 e^{-\lambda_2 z_1^0 - \lambda_3 z_2} + \tilde{d}_3 e^{\lambda_2 z_2^0 - \lambda_3 z_2}$$

$$f_1^3 = \tilde{d}_4 e^{-\lambda_3 z_2^0 + \lambda_1 z_1}$$

$$f_2^3 = \tilde{d}_2 e^{-\lambda_3 z_2^0 - \lambda_2 z_1} + \tilde{d}_3 e^{-\lambda_3 z_2^0 + \lambda_2 z_2}$$

$$f_3^3 = \tilde{d}_1 e^{-\lambda_3 z_2^0 - \lambda_3 z_2}$$

Геометрический смысл параметров a ; z , z_0 , z_1 , z_2 , z_1^0 , z_2^0 , H_1 , H_2 , H показан на рис. 4. Прочие обозначения:

$$d_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1 \Delta}\left(K_{12} - K_{32}\, e^{-2\lambda_2 H}\right)$$

$$d_2 = -d_3 \times K_{32} \times e^{-\lambda_2 H}$$

$$d_3 = \frac{2\lambda}{(\lambda_1+\lambda_2)\Delta}$$

$$d_4 = \frac{4\lambda\lambda_2\, e^{-\lambda_2 H}}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)\Delta}$$

$$C_1 = -\frac{\lambda}{\lambda_2 \Delta} K_{12}$$

$$C_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2 \Delta} K_{12} K_{32}$$

$$C_3 = -\frac{\lambda}{\lambda_2 \Delta} K_{32}$$

$$\Delta = 1 - K_{12} K_{32}\, e^{-2\lambda}$$

$$z_j = z - H_j$$

$$z_j^0 = z_0 - H_j$$

$$K_{ij} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}$$

$$\lambda_i = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu\sigma_i}$$

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Приведенные формулы получены в предположении, что временная зависимость имеет вид $e^{-i\omega t}$. Коэффициенты $\tilde{d}_j$ получаются из коэффициентов d_j заменой $б_1 \to б_3$, $б_3 \to б_1$.

Компоненты магнитного поля выражаются через $({}_R E_\varphi)_j^i$ следующим образом:

$$({}_R H_r)_j^i = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial({}_R E_\varphi)_j^i}{\partial z}$$

$$({}_R H_z)_j^i = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r({}_R E_\varphi)_j^i\right]$$

Следовательно:

$$({}_R H_r)_j^i = -\frac{Ia}{2}\int_0^\infty\left(\frac{\partial}{\partial z}F_j^i\right)J_1(\lambda r)J_1(\lambda a)\,d\lambda \qquad (55)$$

$$({}_R H_z)_j^i = \frac{Ia}{2}\int_0^\infty \lambda F_j^i J_0(\lambda r)J_1(\lambda a)\,d\lambda \qquad (56)$$

Источник типа R_z. Кольцевой пояс вертикальных магнитных диполей можно представить как совокупность двух соосных петель близкого радиуса, расположенных в одной плоскости. Токи в петлях равны по величине и противоположно направлены. Положительное направление приписывается внешнему току (тогда направление диполей совпадает с направлением оси z). Произведение $I\delta a$, где δa - разность радиусов внешней и внутренней петель, - величина конечная, равная линейной плотности магнитных дипольных моментов $\frac{dM}{dl}$ вдоль окружности источника. Очевидно:

$$({}_{Rz} E_\varphi)_j^i = \delta a\frac{\partial}{\partial a}({}_R E_\varphi)_j^i \qquad (57)$$

Аналогично для компонент магнитного поля. Учитывая (53), (55), (56), получаем:

$$({}_{Rz} E_\varphi)_j^i = \frac{i\omega\mu}{2}\frac{dM}{dl}a\int_0^\infty \lambda F_j^i J_1(\lambda r)J_0(\lambda a)\,d\lambda \qquad (58)$$

$$({}_{Rz} H_r)_j^i = -\frac{dM}{dl}\frac{a}{2}\int_0^\infty\left(\lambda\frac{\partial F_j^i}{\partial z}\right)J_1(\lambda r)J_0(\lambda a)\,d\lambda \qquad (59)$$

$$({}_{Rz} H_z)_j^i = \frac{dM}{dl}\frac{a}{2}\int_0^\infty \lambda^2 F_j^i J_0(\lambda r)J_0(\lambda a)\,d\lambda \qquad (60)$$

Источник типа R_r. Кольцевой пояс радиальных магнитных диполей образуется двумя петлями равного радиуса, смещенными друг относительно друга вдоль оси z. Как и в предыдущем случае, токи равны и противоположно направлены. Для того, чтобы придать диполям направление от центра, необходимо току с меньшей координатой z_0 приписать положительное направление (этим объясняется знак минус в приводимом ниже соотношении (6I)). Произведение $I\delta z_0$, где δz_0 - положительное расстояние между плоскостями петель, есть линейная плотность дипольных моментов. Очевидно:

$$\left({}_{Rr}E_\varphi\right)_j^i = -\delta z_0 \frac{\partial}{\partial z_0}\left({}_{R}E_\varphi\right)_j^i , \tag{6I}$$

и следовательно:

$$\left({}_{Rr}E_\varphi\right)_j^i = -i\omega\mu \frac{dM}{dl}\frac{a}{2}\int_0^\infty \frac{\partial F_j^i}{\partial z_0} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda \tag{62}$$

$$\left({}_{Rr}H_r\right)_j^i = \frac{dM}{dl}\frac{a}{2}\int_0^\infty \frac{\partial^2 F_j^i}{\partial z\,\partial z_0} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda \tag{63}$$

$$\left({}_{Rr}H_z\right)_j^i = -\frac{dM}{dl}\frac{a}{2}\int_0^\infty \lambda \frac{\partial F_j^i}{\partial z_0} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda \tag{64}$$

§ 5. Поля вспомогательных кольцевых источников в ближней зоне

При выводе уравнений необходимо знать, какой особенностью обладают поля рассмотренных в предыдущем параграфе источников в ближней зоне. Будем характеризовать компоненты полей вблизи источников двумя геометрическими параметрами: ρ и ψ. Здесь ρ - расстояние, отсчитываемое от точки пересечения источника с вертикальной секущей плоскостью, проходящей через ось симметрии (рис. 5), ψ - угол, отсчитываемый вокруг точки О от плоскости кольца в секущей плоскости. Очевидно:

$$\rho^2 = (r-a)^2 + (z-z_0)^2$$

$$tg\,\psi = \frac{z-z_0}{r-a} ,$$

где a – радиус источника, z_0 – его вертикальная координата, z и r – координаты точки измерения.

Поле ${}_R\vec{H}$ и все компоненты полей источников типа R_z и R_r являются соответствующими производными от поля ${}_R E_\varphi$. Поэтому, вычислив ${}_R E_\varphi$ в ближней зоне с достаточной степенью точности, можно все остальные поля получить путем дифференцирования. "Достаточная степень точности" для ${}_R E_\varphi$ обеспечивается таким числом членов разложения в ряд по параметру ρ, при котором остаток разложения после двукратного дифференцирования не содержит членов о более сильной особенностью, чем логарифмическая. Такое определение "достаточной степени точности" обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, при выводе интегральных уравнений имеют значение только степенные особенности полей. Их и следует удерживать в разложениях. Во-вторых, в процессе вычисления компонент полей источников типа R_z и R_r поле ${}_R E_\varphi$ дифференцируется максимум дважды.

Особенность в электрическом поле кругового тока возникает, когда точка измерения приближается к источнику. Согласно (53), порождается эта особенность членами

$$ {}_R E_\varphi^{одн} = \frac{i\omega\mu I a}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_i} e^{-\lambda_i |z-z_0|} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda , $$

описывающими поле петли в однородной среде с проводимостью σ_i. Интеграл в правой части при $z \to z_0$ и $r \to a$ расходится на верхнем пределе. Введем обозначение:

$$ \mathcal{E}_\varphi = a \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_i} e^{-\lambda_i |z-z_0|} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda , \tag{65} $$

так что

$$ {}_R E_\varphi^{одн} = \frac{i\omega\mu I}{2} \mathcal{E}_\varphi \tag{66} $$

В выражении $\mathcal{E}_\varphi$ нужно выделить особенность при $z \to z_0$, $r \to a$.

<u>Вспомогательный интеграл</u>. Воспользуемся известным интегралом [8]:

$$V = a\int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_0|} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\, d\lambda =$$

$$= \frac{2a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(z-z_0)^2+(r+a)^2}} \left[\left(\frac{2}{k^2}-1\right)K(k) - \frac{2}{k^2}E(k)\right] \quad (67)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы,

$$k = \sqrt{\frac{4ra}{(z-z_0)^2+(r+a)^2}} \; .$$

Если $r \to a$, $z \to z_0$, то $k \to 1$, поэтому удобно пользоваться разложениями E и K по параметру k' :

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{\rho}{\sqrt{(z-z_0)^2+(r+a)^2}} \; ;$$

$$E(k) = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{1}{2}\right)(k')^2 + \ldots$$

$$K(k) = \ln\frac{4}{k'} + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{4}{k'} - 1\right)(k')^2 + \ldots$$

Для того, чтобы при двухкратном дифференцировании учесть все члены со степенной особенностью, необходимо в квадратных скобках выражения V (67) сохранить лишь $(-\ln\rho)$, а коэффициент перед скобками разложить до первого порядка в ряд по ρ :

$$\frac{2a}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(z-z_0)^2+(r+a)^2}} = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho^2\sin^2\psi + (2a+\rho\cos\psi)^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\rho\cos\psi}{2a}\right)$$

Таким образом "достаточно точным" разложением интеграла V является следующее выражение:

$$V \approx -\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\rho\cos\psi}{2a}\right)\ln\rho \quad (68)$$

Выделение особенности. Рассмотрим разность $\mathcal{E}_\varphi - V$:

$$\mathcal{E}_\varphi - V = a\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda_i} e^{-\lambda_i|z-z_0|} - e^{-\lambda|z-z_0|}\right) J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\,d\lambda =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_0|}\left(\frac{\lambda}{\lambda_i} e^{(\lambda-\lambda_i)|z-z_0|} - 1\right) J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\,d\lambda \approx$$

$$\approx a\int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_0|}\left[-\frac{k_i^2}{\lambda_i(\lambda_i+\lambda)} - \frac{k_i^2|z-z_0|}{\lambda_i+\lambda}\frac{\lambda}{\lambda_i}\right] J_1(\lambda r) J_1(\lambda a)\,d\lambda$$

Разложение подынтегрального выражения проведено в предположении $|k_i(z-z_0)| \leq 1$. Это условие можно обеспечить при любых частотах, взяв ρ достаточно малым. Из полученного выражения видно, что разность $\mathcal{E}_\varphi - V$ после двухкратного дифференцирования по любым параметрам дает особенность не более сильную, чем логарифмическая. Таким образом V – "достаточно точное" приближение $\mathcal{E}_\varphi$. Итак:

$$\mathcal{E}_\varphi \approx V \approx -\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\rho\cos\psi}{2a}\right)\ln\rho \tag{69}$$

Приведем в заключение этого параграфа выражения для полей всех вспомогательных источников в ближней зоне.

Источник типа R:

$$H_r \approx \frac{I}{2\pi}\,\frac{\sin\psi}{\rho} \tag{70}$$

$$H_z \approx -\frac{I}{2\pi}\,\frac{\cos\psi}{\rho} \tag{71}$$

E_φ имеет логарифмическую особенность.

Источник типа R_z:

$$E_\varphi \approx \frac{i\omega\mu}{2\pi}\,\frac{dM}{dl}\,\frac{\cos\psi}{\rho} \tag{72}$$

$$H_r \approx -\frac{1}{2\pi}\,\frac{dM}{dl}\left(\frac{\sin\psi\cos 2\psi}{2\rho a} - \frac{\sin 2\psi}{\rho^2}\right) \tag{73}$$

$$H_z \approx \frac{1}{2\pi}\frac{dM}{dl}\left(\frac{\cos\psi\cos 2\psi}{2\rho a} - \frac{\cos 2\psi}{\rho^2}\right) \quad (74)$$

Источник типа $R\tau$:

$$E_\varphi \approx -\frac{i\omega\mu}{2\pi}\frac{dM}{dl}\frac{\sin\psi}{\rho} \quad (75)$$

$$H_\tau \approx \frac{1}{2\pi}\frac{dM}{dl}\left(\frac{\cos 2\psi}{\rho^2} - \frac{\cos\psi\cos 2\psi}{2\rho a}\right) \quad (76)$$

$$H_z \approx -\frac{1}{2\pi}\frac{dM}{dl}\left(\frac{\sin\psi}{2\rho a} + \frac{\sin\psi\cos^2\psi}{\rho a} - \frac{\sin 2\psi}{\rho^2}\right) \quad (77)$$

§ 6. Принципы взаимности для кольцевых источников

Исходя из леммы Лоренца, можно установить для соосных кольцевых источников ряд соотношений взаимности, которые понадобятся при построении системы интегральных уравнений. Условимся для краткости обозначать принципы взаимности названием тех источников, для которых эти принципы формулируются (например, соотношение взаимности для двух кольцевых токов будем называть принципом $R-R$ и т.д.).

Если в лемме (2I) распространить интегрирование на все пространство, то интеграл в левой части обратится в нуль, и вместо (2I) получится следующее соотношение:

$$\int_V \left(\vec{J}_1^{\,э}\vec{E}_2 + \vec{J}_2^{\,м}\vec{H}_1 - \vec{J}_2^{\,э}\vec{E}_1 - \vec{J}_1^{\,м}\vec{H}_2\right)dv = 0 \quad (78)$$

Ниже, исходя из (78), получены и сформулированы необходимые соотношения взаимности.

I. Принцип $R-R$. В этом случае

$$\vec{J}_1^{\,м} = \vec{J}_2^{\,м} = 0;$$

$$(j_i^{\,э})_\varphi = I_i\,\delta(\tau - a_i)\,\delta(z - z_{0i})$$

Здесь I_i - ток в i-м кольцевом источнике, a_i, z_{0i} - его радиус и вертикальная координата. Соотношение (78) можно последовательно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_V (\vec{J}_1^{\,э}\vec{E}_2 - \vec{J}_2^{\,э}\vec{E}_1)\,dV =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_0^{\infty} r\,dr \left[I_1 E_{2,\varphi}\,\delta(r-a_1)\,\delta(z-z_{01}) - I_2 E_{1,\varphi}\,\delta(r-a_2)\,\delta(z-z_{02}) \right] =$$

$$= 2\pi \left[I_1 E_{2,\varphi}(a_1, z_{01})\cdot a_1 - I_2 E_{1,\varphi}(a_2, z_{02})\, a_2 \right] = 0$$

Отсюда получается принцип $R-R$:

$$I_1 a_1 E_{2,\varphi}(a_1, z_{01}) = I_2 a_2 E_{1,\varphi}(a_2, z_{02}) \qquad (79)$$

2. <u>Принцип $R-R_z$.</u>

$$\vec{J}_1^{\,м} = \vec{J}_2^{\,э} = 0\,;$$

$$(j_1^{э})_\varphi = I_1\,\delta(r-a_1)\,\delta(z-z_{01})$$

$$(j_2^{м})_z = -i\omega\mu \frac{dM}{dl}\,\delta(r-a_2)\,\delta(z-z_{02})$$

Вычисления, аналогичные проведенным в предыдущем случае, приводят к следующему соотношению:

$$I_1 a_1 E_{2,\varphi}(a_1, z_{01}) = i\omega\mu a_2 \frac{dM}{dl} H_{1,z}(a_2, z_{02}) \qquad (80)$$

3. <u>Принцип $R-R_r$:</u>

$$\vec{J}_1^{\,м} = \vec{J}_2^{\,э} = 0\,;$$

$$(j_1^{э})_\varphi = I_1\,\delta(r-a_1)\,\delta(z-z_{01})$$

$$(j_2^{м})_r = -i\omega\mu \frac{dM}{dl}\,\delta(r-a_2)\,\delta(z-z_{02})$$

Применяя соотношение (78), получим следующий принцип взаимности:

$$I_1 a_1 E_{2,\varphi}(a_1, z_{01}) = i\omega\mu a_2 \frac{dM}{dl} H_{1,r}(a_2, z_{02}) \qquad (81)$$

§ 7. Вывод интегральных уравнений для осесимметрических задач

Рассмотрим локальную неоднородность в горизонтально-слоистой среде (в случае каротажа незначительно изменяется вывод уравнений, поскольку источник находится внутри скважины, но система получается та же самая). Магнитную проницаемость всех слоев и неоднородности предполагаем одинаковой, равной проницаемости вакуума.

Будем исходить из леммы Лоренца. Разобьем все пространство на две области: внутреннюю и внешнюю по отношению к неоднородности. Проводимость внутренней области - σ_{in}. Внешняя область имеет слоистую структуру.

Используем в качестве вспомогательного источника для внутренней области поле кругового тока в однородной среде с проводимостью σ_{in}, расположенного на границе неоднородности вдоль окружности радиуса r_0 в плоскости $z_0 = const$. Электрическое и магнитное поля этого источника обозначим через $_R\vec{e}^{\,in}$ и $_R\vec{h}^{in}$. Окружим источник полуто́ром S_R^-. Часть поверхности S за исключением полосы, вырезаемой поверхностью S_R^-, обозначим через S^*. Применим к области, ограниченной поверхностью $S_R^- + S^*$ лемму Лоренца. Поскольку внутри этой области сторонние токи отсутствуют, то получается следующее соотношение:

$$\int\limits_{S^*} \left\{ [\vec{E}^- \times {_R\vec{h}^{in}}] - [{_R\vec{e}^{\,in}} \times \vec{H}^-] \right\} \vec{n}^+ dS +$$

$$+ \int\limits_{S_R^-} \left\{ [\vec{E}^- \times {_R\vec{h}^{in}}] - [{_R\vec{e}^{\,in}} \times \vec{H}^-] \right\} \vec{n}_{R^-} dS = 0 \qquad (82)$$

Здесь $\vec{E}^-$, $\vec{H}^-$ - значения искомых полей с внутренней стороны поверхности $S^* + S_R^-$, $\vec{n}^+$ - внешняя нормаль к S^*, $\vec{n}_{R^-}$ - нормаль к S_R^-. Очевидно, что

$$dS = r(z)\, d\varphi\, dl$$

где $r(z)$ - расстояние от оси симметрии до образующей, dl - элемент длины вдоль образующей. Выполняя интегрирование по углу, получим вместо (82) следующее соотношение:

$$\int\limits_{C^*}\left\{[\vec{E}^-\times{}_R\vec{h}^{in}]-[{}_R\vec{e}^{in}\times\vec{H}^-]\right\}\vec{n}^+ r(z)\,dl+$$

$$+\int\limits_{C_R^-}\left\{[\vec{E}^-\times{}_R\vec{h}^{in}]-[{}_R\vec{e}^{in}\times\vec{H}^-]\right\}\vec{n}_{R^-}\, r(z)\,dl=0 \qquad (83)$$

Здесь C^*, C_R^- - образующие поверхностей S^* и S_R^- (рис. 6).

В качестве вспомогательного поля для внешней области используем поле кругового тока в горизонтально-слоистой среде. Обозначения: ${}_R\vec{e}^{\,ex}$ - электрическое поле, ${}_R\vec{h}^{ex}$ - магнитное. В лемме Лоренца интегралы по плоскостям раздела слоистой среды исчезают, поскольку искомые и вспомогательные поля на них удовлетворяют условиям непрерывности. Остаются только интегралы по $S^*+S_R^+$ и по тору S_0, окружающему основной источник. Выполнив интегрирование по углу, получим следующее соотношение, в котором интегрирование осуществляется по образующим:

$$\int\limits_{C^*}\left\{[\vec{E}^+\times{}_R\vec{h}^{ex}]-[{}_R\vec{e}^{\,ex}\times\vec{H}^+]\right\}\vec{n}^- r(z)\,dl+$$

$$+\int\limits_{C_R^+}\left\{[\vec{E}^+\times{}_R\vec{h}^{ex}]-[{}_R\vec{e}^{\,ex}\times\vec{H}^+]\right\}\vec{n}_{R^+}\, r(z)\,dl+$$

$$+\int\limits_{C_0}\left\{[\vec{E}\times{}_R\vec{h}^{ex}]-[{}_R\vec{e}^{\,ex}\times\vec{H}]\right\}\vec{n}_0\, r(z)\,dl=0 \qquad (84)$$

Здесь $\vec{n}_0$ - нормаль к контуру C_0. Складывая соотношения (83) и (84) и учитывая, что тангенциальные компоненты полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на контуре C^* непрерывны, получаем:

$$\int\limits_{C^*}\left\{[\vec{n}\times\vec{E}]\,{}_R\vec{h}-[\vec{H}\times\vec{n}]\,{}_R\vec{e}\right\} r(z)\,dl=$$

$$=\int\limits_{C_R}\left\{[\vec{n}_R\times\vec{E}]\,{}_R\vec{h}^{\,in}-[\vec{H}\times\vec{n}_R]\,{}_R\vec{e}^{\,in}\right\} r(z)\,dl+$$

$$+\int\limits_{C_0}\left\{[\vec{n}_0\times\vec{E}]\,{}_R\vec{h}^{ex}-[\vec{H}\times\vec{n}_0]\,{}_R\vec{e}^{\,ex}\right\} r(z)\,dl \qquad (85)$$

Здесь C_R - контур, получающийся объединением C_R^- и C_R^+,
$\vec{n}_R$ - нормаль к C_R, $\vec{n} = \vec{n}^+$,

$${}_R\vec{h} = {}_R\vec{h}^{ex} - {}_R\vec{h}^{in}$$

$${}_R\vec{e} = {}_R\vec{e}^{ex} - {}_R\vec{e}^{in}$$

${}_R\vec{h}^{бл}$, ${}_R\vec{e}^{бл}$ - поля вспомогательных источников в ближней зоне. Поскольку $\mu = const$ во всем пространстве, то выражения полей в ближней зоне у внешнего и внутреннего вспомогательных источников одинаковы (§ 5). Это позволило интегралы по полуокружностям C_R^+ и C_R^- объединить в один интеграл по C_R.

Интеграл по окружности C_R вычисляется путем разложения искомых полей в ряд вблизи вспомогательных источников и использования выражений § 5 для полей в ближней зоне. (Пример подобных вычислений приведен в [5]). При вычислении интеграла по C_0 следует учесть, что искомые поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют вблизи основного источника особенности, также описываемые выражениями § 5. В результате получается:

$$\int\limits_{C_R} = r_0 E_\varphi(r_0, z_0) + O(\rho) \tag{86}$$

$$\int\limits_{C_0} = -Ia\, {}_R e_\varphi^{ex}(a, z_{ист}) + O(\rho_0) \tag{87}$$

Здесь a - радиус основного источника, $z_{ист}$ - его вертикальная координата, ρ - радиус окружности C_R, ρ_0 - радиус окружности C_0. Согласно принципу взаимности R-R:

$$Ia\, {}_R e_\varphi^{ex}(a, z_{ист}) = r_0 E_\varphi^0(r_0, z_0)$$

Таким образом окончательно получаем (устремляя радиусы окружностей C_R и C_0 к 0):

$$r_0 E_\varphi = r_0 E_\varphi^0 + \int\limits_C \left\{ [\vec{n}\times\vec{E}]\, {}_R\vec{h} - [\vec{H}\times\vec{n}]\, {}_R\vec{e} \right\} r(z)\, dl \tag{88}$$

Размещая на поверхности неоднородности вспомогательные источники типа ℓ_r и ℓ_z с единичной плотностью дипольных моментов $\frac{dM}{dl}$, получаем еще два соотношения:

$$i\omega\mu r_0 H_r = i\omega\mu r_0 H_r^0 + \int_C \left\{ [\vec{n}\times\vec{E}]_{\ell_r} \vec{h} - [\vec{H}\times\vec{n}]_{\ell_r} \vec{e} \right\} r(z)\,dl \qquad (89)$$

$$i\omega\mu r_0 H_z = i\omega\mu r_0 H_z^0 + \int_C \left\{ [\vec{n}\times\vec{E}]_{\ell_z} \vec{h} - [\vec{H}\times\vec{n}]_{\ell_z} \vec{e} \right\} r(z)\,dl \qquad (90)$$

Здесь:

$${}_{\ell_r}\vec{h} = {}_{\ell_r}\vec{h}^{ex} - {}_{\ell_r}\vec{h}^{in}$$

$${}_{\ell_z}\vec{h} = {}_{\ell_z}\vec{h}^{ex} - {}_{\ell_z}\vec{h}^{in}$$

$${}_{\ell_r}\vec{e} = {}_{\ell_r}\vec{e}^{ex} - {}_{\ell_r}\vec{e}^{in}$$

$${}_{\ell_z}\vec{e} = {}_{\ell_z}\vec{e}^{ex} - {}_{\ell_z}\vec{e}^{in}$$

Соотношения (89), (90) можно объединить в одно:

$$i\omega\mu r_0 \vec{H} = i\omega\mu r_0 \vec{H}^0 + \int_C \left\{ [\vec{n}\times\vec{E}]\hat{\mathcal{H}} - [\vec{H}\times\vec{n}]\hat{\mathcal{E}} \right\} r(z)\,dl \qquad (91)$$

Здесь:

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} {}_{\ell_r}h_r & 0 & {}_{\ell_z}h_r \\ 0 & 0 & 0 \\ {}_{\ell_r}h_z & 0 & {}_{\ell_z}h_z \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}_{\ell_r}e_\varphi & 0 & {}_{\ell_z}e_\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{e}(r,z) = \frac{r\vec{E}(r,z)}{i\omega\mu}; \quad \vec{h}(r,z) = r\vec{H}(r,z)$$

$$\vec{e}^{\,0}(r_0,z_0) = \frac{r_0\vec{E}^0(r_0,z_0)}{i\omega\mu}$$

а во вспомогательных электрических полях опустим множитель $i\omega\mu$:

$$_R\tilde{e}_\varphi = \frac{_R e_\varphi}{i\omega\mu}$$

$$_{R_r}\tilde{e}_\varphi = \frac{_{R_r} e_\varphi}{i\omega\mu}$$

$$_{R_z}\tilde{e}_\varphi = \frac{_{R_z} e_\varphi}{i\omega\mu}$$

$$\hat{\tilde{\mathcal{E}}} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{i\omega\mu}$$

Тогда уравнения (37), (40) перепишутся следующим образом:

$$e_\varphi = e_\varphi^0 + \int_C \left\{ [\vec{n}\times\vec{e}]_R \vec{h} - [\vec{h}\times\vec{n}]_R \vec{\tilde{e}} \right\} dl \qquad (92)$$

$$\vec{h} = \vec{h}^0 + \int_C \left\{ [\vec{n}\times\vec{e}]\, \hat{\mathcal{H}} - [\vec{h}\times\vec{n}]\, \hat{\tilde{\mathcal{E}}} \right\} dl \qquad (93)$$

Преобразуем (92), (93). Ввведем в каждой точке поверхности тела касательную систему координат с базисными векторами $\vec{i}_n$, $\vec{i}_\varphi$, $\vec{i}_\theta$. Так как вспомогательные и искомые электрические поля имеют только φ -компоненту, то:

$$[\vec{n}\times\vec{e}] = e_\varphi \vec{i}_\theta$$

Следовательно:

$$[\vec{n}\times\vec{e}]_R \vec{h} = e_\varphi \left({_R h_\theta} \right),$$

где

$$_R h_\theta = \left({_R \vec{h}}\, \vec{i}_\theta \right)$$

Аналогично:

$$[\vec{h}\times\vec{n}]_R \vec{\tilde{e}} = h_\theta \left({_R \tilde{e}_\varphi} \right)$$

Выберем в качестве параметра, характеризующего контур, угол θ, отсчитываемый от отрицательной полуоси z: $r = r(\theta)$; $z = z(\theta)$. Тогда

$$dl = \delta(\theta)\, d\theta,$$

где

$$\delta(\theta) = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}$$

Таким образом уравнение (92) приводится к виду:

$$e_\varphi = e_\varphi^0 + \int_0^\pi \left[e_\varphi ({}_R h_\theta) - h_\theta ({}_R \tilde{e}_\varphi) \right] \delta(\theta)\, d\theta \tag{94}$$

Чтобы преобразовать второе уравнение, заметим, что $\hat{\mathcal{H}}$ и $\hat{\tilde{\mathcal{E}}}$ записаны в цилиндрической системе как по координатам точки измерения, так и по координатам источника. Нужно перейти к записи этих тензоров в касательной к контуру системе координат. Нетрудно показать, исходя из результатов, изложенных в § 2, что такой переход по координатам источника осуществляется умножением матриц $\hat{\tilde{\mathcal{E}}}$ и $\hat{\mathcal{H}}$ справа на матрицу $A^{np}(\theta_0)$, а по координатам точки измерения - умножением слева на матрицу $A^{\Lambda}(\theta)$, где:

$$A^{np}(\theta_0) = \begin{pmatrix} (\vec{i}_r \vec{i}_n) & 0 & (\vec{i}_r \vec{i}_\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\vec{i}_z \vec{i}_n) & 0 & (\vec{i}_z \vec{i}_\theta) \end{pmatrix}$$

$$A^{\Lambda}(\theta) = \begin{pmatrix} (\vec{i}_r \vec{i}_n) & 0 & (\vec{i}_z \vec{i}_n) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\vec{i}_r \vec{i}_\theta) & 0 & (\vec{i}_z \vec{i}_\theta) \end{pmatrix}$$

Скалярные произведения в матрице A^{np} вычисляются в точке θ_0, где расположен вспомогательный источник, а в матрице A^{Λ} - в точке θ - текущей точке контура C.

Умножив уравнение (93) скалярно на $\vec{i}_\theta(\theta_0)$ и выполнив несложные преобразования подинтегрального выражения в касательной системе координат, получим:

$$h_\theta = h_\theta^0 + \int_0^\pi \left[e_\varphi U_e - h_\theta U_h \right] \delta(\theta)\, d\theta \tag{95}$$

Здесь:

$$U_e = {}_{R r}h_r (\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_\theta (\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_{\theta_0} + {}_{R r}h_z (\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_\theta (\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_{\theta_0} + {}_{R z}h_r (\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_\theta (\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_{\theta_0} + {}_{R z}h_z (\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_\theta (\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_{\theta_0} \qquad (96)$$

$$U_h = {}_{R r}\tilde{e}_\varphi (\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_{\theta_0} + {}_{R z}e_\varphi (\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_{\theta_0} \qquad (97)$$

Индексы θ и θ_0 указывают, в какой точке вычисляются скалярные произведения.

Соотношения (94), (95) представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно компонент e_φ, h_θ. Функции ${}_R h_\theta$, ${}_R \tilde{e}_\varphi$, U_h - регулярные при $\theta \to \theta_0$, функция U_e имеет логарифмическую особенность.

Если неоднородность представляет собой эллипсоид вращения с полуосями a_r и a_z, то:

$$r(\theta) = a_r \sin\theta$$

$$z(\theta) = -a_z \cos\theta,$$

и скалярные произведения, необходимые для вычисления ядер уравнений (94), (95), имеют вид:

$$(\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_\theta = \frac{a_r \cos\theta}{\delta(\theta)}$$

$$(\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_\theta = \frac{a_z \sin\theta}{\delta(\theta)}$$

$$\delta(\theta) = \sqrt{a_r^2 \cos^2\theta + a_z^2 \sin^2\theta}$$

В задачах каротажа $(\vec{i}_r \vec{i}_\theta)_\theta = 0$; $(\vec{i}_z \vec{i}_\theta)_\theta = 1$.

Располагая вспомогательные источники во внешней среде, получим формулы пересчета, полностью аналогичные равенствам (94), (95), с тем лишь отличием, что вместо разностных ядер ${}_R h_\theta$, ${}_R \tilde{e}_\varphi$, U_e, U_h, представляющих собой линейные комбинации разностей компонент полей внешних и внутренних источников, будут стоять те же линейные комбинации компонент полей только внешних источников, расположенных в точке измерения.

§ 8. О расчете полей гармонических источников методом деформации путей в комплексной плоскости переменной интегрирования

При решении методом интегральных уравнений задач дифракции электромагнитных полей на неоднородностях, расположенных в слоистых средах, одним из центральных вопросов является расчет полей вспомогательных источников (функций Грина). Качество и быстродействие программ, реализующих решение систем интегральных уравнений, определяется в первую очередь тем,насколько рационально удается организовать вычисление ядер. При расчете дифракции на вытянутых неоднородностях в довольно широком частотном диапазоне (от самых коротких волн до сравнимых с наибольшими геометрическими размерами тел) матричные элементы, близкие к диагонали, описывают поля вспомогательных источников в ближней зоне, удаленные от диагонали элементы - поля тех же источников в волновой зоне. При создании програмы считалось нежелательным увеличивать количество программируемых выражений за счет разного рода асимптотических разложений (к этому побуждали ограниченные возможности памяти вычислительных машин и неуниверсальность такого подхода, чрезмерно индивидуализирующего каждую задачу). Исходя из работы [I], был разработан сравнительно однотипный для всех зон алгоритм вычисления полей вспомогательных источников, основанный на деформации путей в комплексной плоскости переменной интегрирования.

Функции Грина, имея в различных задачах различный физический смысл, описываются, как правило, сходными математическими выражениями. Поэтому в настоящей работе рассматривается конкретный пример функции Грина для одного из простейших интегральных уравнений - уравнения относительно плотности тока в пластине с переменным параметром S (суммарной продольной проводимостью), расположенной в проводящем полупространстве.В конце статьи показано, как посредством деформации пути интегрирования в комплексной плоскости преодолевалась одна из вычислительных трудностей, возникающих в задачах с осевой симметрией, где функциями Грина являются поля вспомогательных кольцевых источников.

I. Пусть в однородном полупространстве с проводимостью σ расположена проводящая пластина QQ', характеризуемая в каждой точке параметром S - суммарной продольной проводимостью (рис. 7). Пластина бесконечно вытянута вдоль оси x. В точке O находится двухмерный источник первичного поля E_0 (кабель). Интегральное уравнение относительно аномальной плотности тока j в пластине имеет следующий вид:

$$j(M_0)+\frac{i\omega\mu S(M_0)}{2\pi}\int_0^l G(M,M_0)\,j(M)\,dl=$$

$$=-\frac{i\omega\mu S(M_0)}{2\pi}\int_0^l G(M,M_0)S(M)E_0(M)\,dl \qquad (98)$$

Здесь $E_0(M)$ - поле источника O в точке M в отсутствие пластины, $G(M,M_0)$ - функция Грина, причем:

$$G(M,M_0)=K_0(k|\vec{r}-\vec{r}_0|)-\int_0^\infty f(m)e^{-p_1 L}\cos mY\,dm \qquad (99)$$

Здесь $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ - радиус-векторы точек M и M_0,

$$f(m)=\frac{K_{01}}{p_1};\quad K_{01}=\frac{p_0-p_1}{p_0+p_1};$$

$$p_0=\sqrt{m^2+k_0^2};\quad p_1=\sqrt{m^2+k^2}$$

$$k_0^2=i\omega\mu\sigma_0=i\varkappa_0^2;\quad k^2=i\omega\mu\sigma=i\varkappa^2$$

$$L=z_0+z;\quad Y=y-y_0$$

В правой части соотношения (99) первый член характеризует особенность вспомогательного поля, а второй описывает влияние горизонтальной границы раздела (дневной поверхности). При произвольной слоистости вмещающей среды форма выражений (98) и (99) сохраняется, изменяется только вид функции $f(m)$ и смысл параметра L, однако основная особенность подынтегрального выражения в (99) - наличие затухающего и осциллирующего факторов - сохраняется. В дальнейшем будут изложены некоторые способы вычисления интегралов вида:

$$I=\int_0^\infty f(m)e^{-p_1 L}\cos mY\,dm \qquad (100)$$

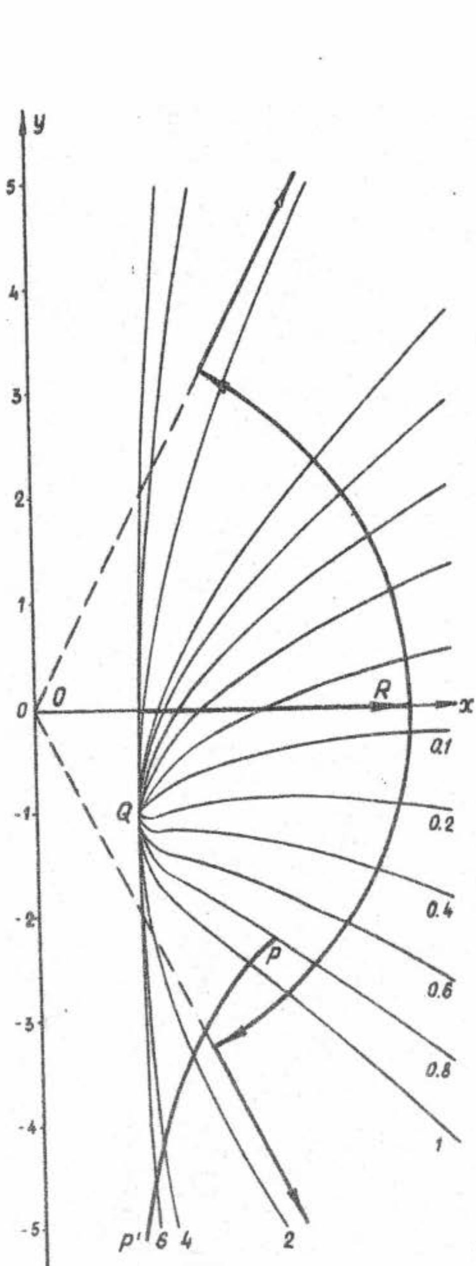

Рис. 9

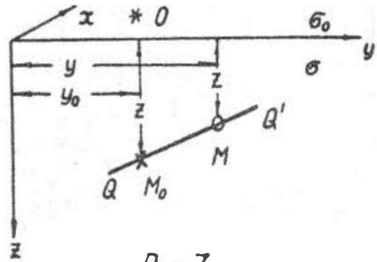

Рис. 7

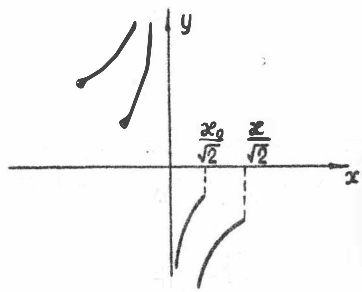

Рис. 8

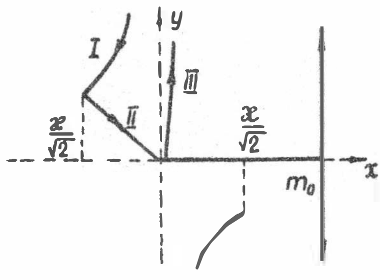

Рис. 10

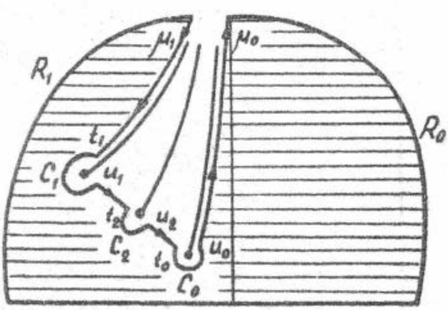

Рис. 11

2. Рассмотрим некоторые аналитические свойства подынтегральной функции $f(m)$. Она зависит от ветвящихся функций - радикалов ρ_0 и ρ_1 и сама обладает точками ветвления. Решение задачи для функции Грина получается методом разделения переменных в предположении $Re(\rho_0)>0$ и $Re(\rho_1)>0$, поэтому нужно на Римановой поверхности подынтегрального выражения выделить лист, соответствующий этим условиям. Линией перемены знака реальной части при отображении $w=\rho_i$ является линия $Re(\rho_i)=0$. Полагая $m=x+iy$, получим:

$$Re(\rho_i)=\sqrt{\frac{\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy+\varkappa_i^2)^2}+x^2-y^2}{2}}=0 \qquad \text{(101)}$$

Равенство (101) возможно только при условиях:

$$|y|\geq|x|$$

$$2xy=-\varkappa_i^2$$

Отсюда получается уравнение разреза, разделяющего ветви $Re(\rho_i)<0$ и $Re(\rho_i)>0$:

$$y=-\frac{\varkappa_i^2}{2x}, \quad |x|\leq\frac{\varkappa_i}{\sqrt{2}} \qquad \text{(102)}$$

Система разрезов для двух радикалов ρ_0 и ρ_1 выглядит так, как показано на рис. 8. Риманова поверхность является четырехлистной. С каждого листа симметричные относительно начала координат точки отображаются в одну и ту же точку поверхности w.

Путь интегрирования в выражении (100) лежит на листе $Re(\rho_0)>0$, $Re(\rho_1)>0$ и проходит вдоль вещественной полуоси. Полюсов подынтегральное выражение в (100), очевидно, не имеет. Задача состоит в том, чтобы посредством деформации пути интегрирования привести интеграл (100) к виду, допускающему вычисление по возможно меньшему числу узлов.

3. Представим выражение (100) в виде:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(m)e^{-\rho_1 L+imY}dm+\frac{1}{2}\int_0^\infty f(m)e^{-\rho_1 L-imY}dm=I^+ + I^- \qquad \text{(103)}$$

Поставим следующую задачу: подобрать для каждого из двух интегралов в правой части (103) такой путь интегрирования, на котором фаза экспоненциального множителя равна нулю. Это позволит применить квадратурные формулы Лаггера. Итак, пусть

$$\operatorname{Im}\left(-\rho_2 L + im Y\right) = 0 \tag{104}$$

Кривые, определяемые соотношением (104), будем называть линиями нулевой фазы экспоненциального множителя. Положим $m = m_x + i m_y$. Нетрудно получить параметрическое представление пути (104):

$$\frac{m_x}{m_0} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{m_y}{m_0} = -\varepsilon \pm \frac{Y}{L}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \varepsilon^2} \tag{105}$$

Здесь:

$$m_0 = \frac{\varkappa}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (Y/L)^2}}$$

$$0 \le \varepsilon \le 1$$

Знак плюс в (105) соответствует интегралу I^+, знак минус - интегралу I^-. На рис. 9 приведены кривые, определяемые соотношениями (105), для различных значений параметра $t = Y/L$. Размерный параметр m_0 положен равным единице. В этом предположении уравнение разреза (102) принимает следующий вид:

$$m_y = -m_0^2\left(1 + \frac{Y^2}{L^2}\right)\frac{1}{m_x} = -\frac{1+t^2}{m_x}$$

В качестве примера на рис. 9 показан разрез PP', соответствующий значению параметра $t = 2$. Рассмотрим основные особенности построенной системы кривых.

1. Все кривые имеют общую начальную точку Q : $m_x = 1$, $m_y = -1$, соответствующую значению $\varepsilon = 1$ в (105);

2. При $\varepsilon \to 0$ каждая кривая приближается к своей асимптоте, определяемой соотношением: $\frac{m_y}{m_x} = \pm t$;

3. Все кривые лежат правее прямой $m_x = 1$.

Поскольку линии нулевой фазы экспоненциального множителя в интегралах I^+, I^- не проходят через начало координат плоскости m, оказывается невозможным так деформировать путь интегрирования, чтобы сразу выйти на линии нулевой фазы. Кроме того, эти линии для интегралов I^- пересекают разрез. Поэтому путь интегрирования помимо линии, соединяющей начало координат с началом линии нулевой фазы, должен включать в себя кривую, по которой обходится точка ветвления вдоль берегов разреза. При этом на отрезке, соединяющем точку Q с разрезом, применить квадратуру Лаггера становится невозможно в силу ограниченности верхнего предела. И еще одно обстоятельство усложняет численное интегрирование по рассматриваемым путям: положение узлов на линии интегрирования определяется довольно сложным иррациональным уравнением

$$Re(p_z L - imY) = \xi_i + Re_0 \tag{106}$$

Здесь ξ_i - i -й узел квадратурной формулы Лаггера, Re_0 - значение левой части соотношения (106) в точке $m_x = 1$, $m_y = -1$.

Все перечисленные трудности при организации практических вычислений преодолевались следующим образом. Линии нулевой фазы заменялись их асимптотами - прямыми с наклоном $t = Y/L$. Проводилась окружность с центром в начале координат, заключавшая точку ветвления и точку пересечения асимптотической прямой с разрезом. Путь интегрирования выбирался так, как показано на рис. 9: от начала координат до окружности - по вещественной оси, затем по дуге окружности до прямой и далее - по прямой в бесконечность. На вещественной оси и на дуге применялись квадратурные формулы Гаусса, на прямой - Лаггера.

В одном из вариантов программы, реализующей решение интегрального уравнения для пластины, расчет ядер ведется по описанному алгоритму. Однако, если пластина имеет большую длину, превышающую длину волны во вмещающей среде, то вычисления по этому методу становятся весьма трудоемкими. Это связано с тем, что на участке пути OR, проходящем по вещественной оси, косинус совершает довольно много осцилляций, поскольку длина этого участка порядка $\varkappa$ и в случае, если $\varkappa Y \gg 1$ (волновая зона), косинус имеет на OR приблизительно $\varkappa Y/\pi$ нулей. Если при условии $\varkappa Y \leq 1$ на участке, проходящем по вещественной оси, достаточно применить 2-3 формулы Гаусса с шестью узлами, то в противном случае необходимо разбивать его на такое количество интервалов, которое по крайней мере, не меньше, чем число нулей косинуса. Это приводит к увеличению времени счета. В подобных случаях применялся другой метод расчета ядер. Суть его изложена в следующем пункте.

4. Представим интегральную часть ядра в виде:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(m) e^{-\rho_1 L} e^{imY} dm \qquad (107)$$

Путь интегрирования - вся вещественная ось. Поскольку в верхней полуплоскости выполняются условия леммы Жордана, то можно деформировать путь так, как показано на рис. 10: по отрицательному берегу разреза ρ_1 (участок I), по линии, соединяющей точки ветвления (участок II) и далее - по положительному берегу разреза ρ_0 (участок III. Построен в предположении $\sigma_0 = 0$).

Рассмотрим интеграл (107) на участке I. Обозначая через t вещественную переменную интегрирования, можно записать следующие соотношения:

$$\rho_1 = -it$$

$$m = \sqrt{\rho_1^2 - k^2} = i\sqrt{t^2 + k^2}$$

$$dm = -\frac{t\,dt}{m} = i\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+k^2}}$$

В результате интеграл (107) приводится к виду:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} K_{01} e^{itL} e^{-\sqrt{t^2+k^2}\,Y} \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}} \qquad (108)$$

Здесь:

$$K_{01} = \frac{\sqrt{t^2+k^2} - t}{\sqrt{t^2+k^2} + t}$$

(Проводимость верхнего полупространства σ_0 положена равной нулю). Интеграл (108) достаточно просто берется численно. Затухание подынтегральной функции начинает сказываться при $t \gtrsim \varkappa$. Поскольку реально всегда $\varkappa L \lesssim 1$ (в противном случае аномалия от пластины экспоненциально мала), то в области интегрирования, дающей существенный вклад в интеграл, множитель e^{itL} совершает мало осцилляций. Аналогично на участках II, III.

Описанный путь интегрирования обладает еще одним преимуществом перед путями с нулевыми фазами, имеющим важное значение при программировании задач с интегральными уравнениями. Пути с нулевыми фазами индивидуальны для каждого матричного элемента, а только что описанный путь позволяет хорошо проводить численное интегрирование в довольно широком спектре значений l и γ. Это особенно важно при решении задач дифракции в многослойных средах, так как функция $f(m)$, достаточно сложная, является в этом случае общей для всех матричных элементов. Если для всех элементов выбрать одинаковые узлы, то интегрируя матрицу подынтегральных функций ядер (вместо формирования матрицы из интегралов), можно добиться значительной экономии времени счета.

5. Рассмотрим в заключение пример из практики решения осесимметрических задач (сфероид в поле соосного с ними кольцевого тока). Когда вычисляется полное магнитное поле на дневной поверхности в центре кольца, то одним из его слагаемых является первичное магнитное поле H_z^0 (поле кругового тока, расположенного над полупространством). Выражение для интегральной части H_z^0 (обозначим ее через H_{zi}^0) выглядит следующим образом:

$$H_{zi}^0 = \frac{Ia}{2}\int_0^\infty \frac{m^2}{\rho_1} K_{01} J_1(ma)\,dm \tag{I09}$$

Здесь a -радиус кольца, I - ток. В расчетах интерес представляли, в частности, петли больших размеров. Поскольку в исследовавшемся частотном диапазоне были и достаточно высокие частоты ($\varkappa a \sim 10$), постольку расчет выражения (I09) был связан с определенными трудностями в силу слабой сходимости подынтегрального выражения и необходимости брать очень большой верхний предел. Эти трудности преодолевались следующим образом.

Представим функцию $J_1(ma)$ через функции Ханкеля [I]:

$$J_1(ma) = \frac{\mathcal{H}_1^{(1)}(ma) + \mathcal{H}_1^{(2)}(ma)}{2}$$

Тогда (I09) запишется следующим образом:

$$H_{zi}^0 = \frac{Ia}{4}\int_0^\infty \frac{m^2}{\rho_1} K_{01}\left[\mathcal{H}_1^{(1)}(ma) + \mathcal{H}_1^{(2)}(ma)\right] dm \tag{II0}$$

Асимптотическое разложение функций Ханкеля при больших аргументах имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_1^{(1)}(z) = e^{iz} h_1^{(1)}(z)$$

$$\mathcal{H}_1^{(2)}(z) = e^{-iz} h_1^{(2)}(z)$$

Здесь:

$$h_1^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sum_k \frac{(-1)^k}{(2iz)^k} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}$$

$$h_1^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \sum_k \frac{1}{(2iz)^k} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}$$

Путь интегрирования в выражении, содержащем функцию Ханкеля первого рода, можно деформировать в верхнюю полуплоскость, второго рода – в нижнюю полуплоскость. Интегрирование выражения (I09) производилось по пути, указанному на рис. I0: от нуля до $m_0 = 2\mathscr{X}$ по вещественной оси в виде (I09), а затем по двумя лучам, параллельным мнимой оси (в виде (II0)). Запишем (в предположении $m_0 a > 1$) выражение для интеграла с функцией Ханкеля первого рода, который вычислялся по верхнему лучу. Поскольку на луче $m = m_0 + it$, $dm = i\,dt$, то

$$\int \frac{m^2}{\rho_1} k_{01} \mathcal{H}_1^{(1)}(ma)\,dm = \int F(m) \mathcal{H}_1^{(1)}(ma)\,dm =$$

$$= i e^{i m_0 a} \int_0^\infty F(m_0 + it) e^{-at} h_1^1[(m_0 + it)a]\,dt$$

Здесь:

$$F(m) = \frac{m^2}{\rho_1 k_{01}}$$

Подынтегральная функция экспоненциально убывает. Аналогично для второго интеграла (II0):

$$\int F(m) \mathcal{H}_1^{(2)}(ma)\,dm = -i e^{-ima} \int_0^\infty F(m_0 - it) e^{-at} h_1^{(2)}[(m_0 - it)a]\,dt$$

На описанном пути удается вычислять интегралы типа (I09) по достаточно малому числу узлов при условии не очень больших параметров $\varkappa a$ (таких, что $2\varkappa a/\pi \leq 10$), в противном случае нужно интегрировать по пути, указанному на рис. I0 слева.

6. Описанный алгоритм применялся также при расчете полей вспомогательных источников в двухслойной горизонтально-слоистой среде. Как известно, поле произвольного источника в горизонтально-слоистой среде записывается в виде интегралов, в которых подынтегральные выражения могут иметь знаменатели только двух типов. Обозначим их через Z и Z^* и запишем в виде:

$$Z = \frac{p_0}{p_1} + R \tag{III}$$

$$Z^* = \frac{p_0}{p_1} + R^* \tag{II2}$$

Здесь:

$$R = th\left(p_1 h + arccth \frac{p_1}{p_2}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \tag{II3}$$

$$R^* = th\left(p_1 h + arccth \frac{p_1}{p_2}\right) \tag{II4}$$

$$p_j = \sqrt{m^2 + i\varkappa_j^2}, \quad \varkappa_j^2 = \omega\mu\sigma_j, \quad Re(p_j) \geq 0,$$

m - переменная интегрирования.

Положим для определенности $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_0$. Система разрезов для трех радикалов p_0, p_1, p_2 показана на рис. II. Здесь же показан стрелками путь, применявшийся для расчета полей гармонических источников. Покажем, что в заштрихованной области знаменатели (III) и (II2) не имеют нулей. В процессе доказательства будем ссылаться на следующее очевидное утверждение:

А. Если $Re(u) \geq 0$ то:

I) $Re(th u) \geq 0$

2) $Re(arccth u) \geq 0$

Покажем, что на границе заштрихованной области $Re(Z^*) > 0$ (доказательство этого соотношения для функции Z полностью аналогично).

I. <u>Линия $\mu_1 t_1$</u>. Здесь $Im(p_j) < 0 \ (j = 0, 1, 2)$; $Re(p_1) = 0$.

Следовательно:

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = \frac{Im(p_0)\,Im(p_1)}{|p_1|^2} > 0 \tag{II5}$$

$$Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{Im(p_1)\,Im(p_2)}{|p_2|^2} > 0 \tag{II6}$$

Поскольку $Re(p_1)=0$, то в силу (II5), (II6) и утверждения А: $Re(Z^*)>0$ на $\mu_1 t_1$.

II. Дуга C_1. Представим p_1 в виде:

$$p_1 = \rho e^{i\varphi}, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right)$$

Тогда:

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right) \approx \frac{\sqrt{\varkappa_1^2-\varkappa_0^2}}{\rho}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0$$

Преобразуем второе слагаемое в Z^*:

$$th\left(p_1 h + arccth\frac{p_1}{p_2}\right) \approx th\left(\rho h e^{i\varphi} + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\rho e^{i\varphi}}{p_2}+1}{\frac{\rho e^{i\varphi}}{p_2}-1}\right) \approx$$

$$\approx th\left(-i\frac{\pi}{2} + \rho e^{i\varphi}\left[h+\frac{1}{p_2}\right]\right) = i\,ctg\left[i\rho e^{i\varphi}\left(h+\frac{1}{p_2}\right)\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\rho e^{i\varphi}\left(h+\frac{1}{p_2}\right)} = \frac{e^{-i(\varphi+\alpha)}}{\rho\gamma}$$

Здесь:

$$\gamma = mod\left(h+\frac{1}{p_2}\right)$$

$$0 < \alpha = arctg\frac{1}{1+\sqrt{2}\,h\sqrt{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}} < \frac{\pi}{4}$$

Следовательно,

$$Re(Z^*) \approx \frac{\sqrt{\varkappa_1^2-\varkappa_0^2}}{\rho}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\rho\gamma} > 0$$

III. Отрезок $\mu_1 t_2$.

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right)=0; \quad Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=0; \quad Re(p_1)>0$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0$.

IУ. Дуга C_2. Здесь

$$p_2 = \rho e^{i\varphi}, \quad \left(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right) \approx \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi\,\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_0^2}{\sqrt{(\varkappa_2^2-\varkappa_0^2)(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)^3}} \ge 0$$

$$Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=\frac{\sqrt{\varkappa_1^2-\varkappa_1^2}}{\rho}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$$

$$Re(p_1)>0.$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0$

У. Отрезок $u_2 t_0$.

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right)=0;\ Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right)>0;\ Re(p_1)>0.$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0.$

УI. Дуга C_0. Здесь

$$p_0\approx\rho e^{i\varphi};\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

Поэтому

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\approx Re\frac{\rho e^{i\varphi}}{\sqrt{\varkappa_1^2-\varkappa_0^2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\rho}{\sqrt{\varkappa_1^2-\varkappa_0^2}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$$

$$Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right)>0;\ Re(p_1)>0.$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0.$

УП. Линия $u_0 M_0$.

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right)=\frac{Jm(p_0)Jm(p_1)}{|p_1|^2}>0;$$

$$Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right)>0;\ Re(p_1)>0;$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0.$

УШ. Вещественная ось.

$$Re\left(\frac{p_0}{p_1}\right)>0;\ Re\left(\frac{p_1}{p_2}\right)>0;\ Re(p_1)>0.$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0.$

IX. Дуга R_0.

$$p_1\approx p_2\approx p_0\approx\rho e^{i\varphi},\ \left(\rho\gg 1,\ 0\leq\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Re\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\approx 1>0;\ Re\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\approx 1>0;\ Re(\rho_1)>0.$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0$.

X. Дуга R_1.

$$\rho_1\approx\rho_2\approx\rho_0=\rho e^{i\varphi},\quad \left(\rho\geqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant 0\right)$$

$$Re\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\approx 1>0;\ Re\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\approx 1>0;\ Re(\rho_1)>0.$$

Следовательно, $Re(Z^*)>0$.

Из пунктов I–X следует, что на границе заштрихованной области $Re(Z^*)>0$. Поскольку $Re(Z^*)$ – гармоническая в этой области функция (в силу аналитичности Z^*), то $Re(Z^*)>0$ и внутри области. Отсюда следует, что функция Z^* не может обращаться в заштрихованной области в нуль.

При доказательстве существенно использовано условие $\varkappa_1>\varkappa_2>\varkappa_0$. При других соотношениях между волновыми числами доказательство полностью аналогично.

Литература

I. Гельфанд И.С. Переменное поле горизонтальной рамки в слоистой среде. УФ АН СССР, Геофизический сборник, № 2, 1957.

2. Дмитриев В.И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Труды Вычислительного центра МГУ, 1969, Изд. МГУ.

3. Захаров Е.В., Ильин И.В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, изд. "Наука", № 8, 1970.

4. Кауфман А.А., Теория индукционного каротажа. Изд. "Наука", 1965.

5. Кауфман А.А., Табаровский Л.А., Терентьев С.А. Проводящий эллиптический цилиндр в однородном переменном магнитном поле. Геология и геофизика, изд. "Наука", № 6, 1971.

6. Лаврентьев М.М. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. "Наука", Москва, 1965.

7. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. Изд. "Энергия", 1967.

8. Математические таблицы. Под ред. В.П. Большакова, Е.Т. Колесова, Ю.С. Яковлева. Ленинград, 1968.

9. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Изд. иностранной литературы, 1958.

10. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, 1958.

СОДЕРЖАНИЕ

Отв. редактор А.А. КАУФМАН

Подписано к печати 2. XII. 1971г. МН 15241

Бумага 60x84/16. Печ.л. 3.0 Уч.-изд.л.2.8

Тираж 300. Заказ 523 Цена 19 коп.