



АТЫМТАЕВА ЛЯЗЗАТ БАХЫТОВНА

**СТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ПОЛОСТЯХ В
АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТОМ МАССИВЕ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Институте механики и машиноведения
имени академика У. А. Джолдасбекова МОН РК


- Научный консультант:** доктор технических наук,
профессор Масанов Ж. К.
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,
профессор Нуржумаев О. Н.
- доктор физико-математических наук,
профессор Ибраев А. Г.
- доктор физико-математических наук,
профессор Жумабаев М. Ж.
- Ведущая организация:** Кыргызско-Российский Славянский
университет имени Б.Н. Ельцина.

Защита состоится « 23 » декабря 2010 года. в 15-00 часов на заседании
объединенного диссертационного совета ОД 14А.01.08 при Казахском
национальном университете им. аль-Фараби по адресу: 050012, г.Алматы,
ул. Масанчи 39/47, механико-математический факультет, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казахского
национального университета им. аль-Фараби (г. Алматы, ул. Масанчи 39/47).

Автореферат разослан «20» ноября 2010 г.

Ученый секретарь объединенного
диссертационного совета ОД 14А.01.08
доктор физико-математических наук, профессор

 Л.А. Хаджиева

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Диссертационная работа посвящена теоретическим исследованиям и численной реализации класса задач стационарной дифракции упругих волн растяжения-сжатия (PP) и сдвиговых (SV,SH) с анализом динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) в зависимости от геометрических и физико-механических параметров среды, падающих волн и полостей.

Актуальность темы исследования. Землетрясение наряду с наводнением, селевым потоком, циклоном является стихийным бедствием, которого пока еще нельзя ни оповестить, ни предотвратить. Вредное воздействие землетрясения, можно ослабить, если воспользоваться достижениями современной теории и практики динамически и сейсмически устойчивого строительства. Эти достижения главным образом относятся к оптимальному строительству наземных сооружений. Между тем в больших городах, расположенных в сейсмоактивных районах, подземное пространство насыщено водопроводными, газопроводными, канализационными коммуникациями, гаражами и другими сооружениями. Строятся и расширяются подземные станции и тоннели метрополитенов в трещиноватых наклонно слоистых средах сложного строения. А в теории сейсмической и динамической устойчивости подземных сооружений еще не полностью сформулирована общая постановка задач, недостаточно полно классифицированы основные проблемы и не выделены особенности их решения.

В зонах сейсмической активности имеются многие месторождения полезных ископаемых; они разрабатываются преимущественно подземным способом, при котором проходится и закрепляется разветвленная сеть капитальных, подготовительных, очистных и др. горизонтальных и вертикальных выработок. В горных районах, подверженных сейсмическим воздействиям, строятся и интенсивно эксплуатируются различные тоннели: автомобильные, железнодорожные и гидротехнические.

Подземные сооружения в сейсмически активных районах должны удовлетворять требованиям сейсмостойкости. Но такое проектирование представляет сложную задачу. Сложность объясняется тем, что сейсмические нагрузки относятся к категории таких динамических воздействий, точное предсказание величины и характера которых заранее невозможно в силу сложного неоднородно-слоистого строения породной толщи. При этих условиях решающее значение имеет анализ экспериментальных данных и натуральных наблюдений о поведении подземных сооружений во время землетрясений.

По природным и техногенным условиям и характеру проявления сейсмических воздействий на подземные сооружения различного назначения выделяются два класса сооружений: мелкого и глубокого заложения. Причем выделение сооружений мелкого заложения в особый класс связано с тем, что расчет их на сейсмостойкость необходимо вести на воздействие не только объемных волн, но и поверхностных. При этом необходимо также учитывать

волны, отраженные от дневной поверхности. К сооружениям глубокого заложения относится сложный комплекс шахт и рудников, а также транспортные и гидротехнические тоннели глубокого заложения, полости-газохранилища, выщелачиваемые в соляных отложениях и т.д. Влияние землетрясений, промышленных взрывов на напряженное состояние сооружений глубокого заложения связано лишь с непосредственным воздействием продольных и поперечных волн, без учета влияния дневной поверхности.

Таким образом, основная идея исследований заключается в более полном учете последствий наложения динамического поля напряжений, обусловленного распространением волн, на статическое поле напряжений, которое образовалось в наклонно-слоистом породном массиве вблизи горизонтального подземного сооружения произвольного поперечного профиля глубины заложения в процессе его проходки, крепления и эксплуатации во времени динамического воздействия. При этом можно последовательно определить статическую и динамическую нагрузки на конструктивные элементы сооружения. Наиболее полно изученными являются задачи определения статического поля напряжений в породном массиве вблизи сооружений. Основные трудности возникают при подсчете динамических полей напряжений и перемещений вблизи различных сооружений, вызванных волновыми процессами в слоистой породной толще.

Благодаря работам казахстанских ученых Ш.М. Айтиалиева, М.Т. Алимжанова, А.М. Алимжанова, Л.А. Алексеевой, Т.Д. Байтелиева, Е.Т. Божанова, Ж.С. Ержанова, А.И. Искамбаева, Т.Д. Каримбаева, А.К. Кудайкулова, Ж.К. Масанова, О.Н. Нуржумаева, А.Н. Тюреходжаева, Н.Я. Тер-Эммануильяна, а также исследованиям зарубежных ученых С.Г. Авершина, Ю.Н. Айвазова, Б.З. Амусина, Б.Д. Аннина, И.Б. Баклашова, С.А. Батугина, Н.С. Булычева, Ю.А. Векслера, А.Н. Гузя, В.Т. Глушко, А.Н. Динника, И.Я. Дормана, А.Н. Зорина, Л.В. Ершова, В.Ю. Изаксона, А.А. Ильюшина, С.А. Калоерова, С.А. Космодамианского, М.В. Курлени, В.Д. Кубенко, С.В. Кузнецова, С.Г. Лехницкого, Ю.М. Либермана, А.М. Линькова, Я. Мау, Л. Менте, М.М. Мирсаидова, Я.Н. Мубаракова, Б.М. Мардонова, С.Г. Монахенко, Ш.Г. Напетваридзе, Л.В. Никитина, Й. Пао, П.И. Перлина, А.Г. Протосени, Ю.Н. Работнова, Т.Р. Рашидова, М.И. Розовского, Я.И. Рудаева, К.В. Руппенейта, Б.А. Рычкова, Л.А. Розина, Г.Н. Савина, В.С. Сажина, В.Н. Скубы, В.Я. Степанова, И.Н. Шапошникова, Е.И. Шемякина, В.Я. Степанова, Л.В. Шульмана, Г.Х. Хожметова, А.Б. Фадеева, Н.Н. Фотиевой, Н.Я. Ялымова и др. были созданы теоретические основы исследования взаимодействия подземных конструкций различного назначения и глубины заложения с окружающим массивом.

Учет параметров анизотропии породной толщи, геометрии сооружения, а также особенностей его заложения относительно наклонных слоев породного массива накладывает свои сложности при исследовании динамического напряженно-деформированного состояния при распространении и дифракции упругих волн сжатия-растяжения и сдвигов.

Подробный обзор литературных источников показал, что в области исследований динамики подземных сооружений недостаточно полно изучены вопросы дифракции волн на подземных сооружениях в анизотропных слоистых средах, в частности, недостаточно изучены вопросы дифракции упругих волн в транслопных наклонно-слоистых средах, а также отсутствуют исследования динамической устойчивости разноориентированных подземных сооружений, разработка которых имеет место при современных условиях подземного строительства.

В данной работе предполагается устранить этот пробел и исследовать динамическое напряженно-деформированное состояние разноориентированных горизонтальных подземных сооружений, моделируемых полостями, в анизотропной слоистой среде при стационарной дифракции упругих продольных (PP) и поперечных (SV,SH) волн.

Объект исследования: протяженные горизонтальные горные выработки (штреки, квершлагги, выработки под произвольным углом к линии простирания наклонной плоскости изотропии пород, т.е. так называемые диагональные выработки, орты), напорные и безнапорные гидротехнические тоннели, подземные сооружения разного назначения, метрополитено-перегонные тоннели, станции, эскалаторы, трубопроводы.

Цель работы: Разработать методические основы расчета и провести систематические исследования динамического напряженно-деформированного состояния разноориентированных подземных сооружений, моделируемых полостями произвольного профиля и глубины заложения в слоистой толще горных пород складчатого строения при распространении стационарных волн сжатия-растяжения и сдвигов.

Задачи исследования. Для реализации сформулированной цели решаются следующие задачи:

- получить новые теоретические решения класса задач по определению динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) подземных разноориентированных горизонтальных полостей глубокого и неглубокого заложения в упругом трещиноватом транслопном массиве с наклонной плоскостью изотропии в условиях плоской, обобщенно-плоской и антиплоской деформаций при стационарной дифракции упругих волн с использованием аппарата разложения цилиндрических функций и методов разделения переменных;

- решить первую и вторую основные задачи теории упругости по определению динамического НДС одиночных полостей кругового и некругового профиля в транслопном наклонно-слоистом массиве в условиях плоской, обобщенно-плоской и антиплоской деформаций;

- решить задачи по определению динамического НДС неподкрепленных и подкрепленных недеформируемой крепью нескольких полостей кругового и некругового поперечного сечения в анизотропном слоистом массиве при стационарной дифракции упругих продольно-поперечных и сдвиговых волн;

- решить основные задачи для исследования НДС полостей произвольного профиля в упругом полупространстве в условиях антиплоской и обобщенно-плоской деформаций при стационарной дифракции сдвиговых волн.

- провести качественный и количественный анализ динамического напряженно-деформированного состояния разноориентированных полостей в зависимости от физико-механических свойств массива, падающих волн, геометрии полостей, способов их заложения, а также их ориентации относительно линии простирания наклонной плоскости изотропии в массиве с разработкой универсального программного комплекса для разнообразных многовариантных расчетов и анализа числовых результатов.

Научная новизна:

- впервые получены новые решения класса задач стационарной дифракции упругих волн сжатия-растяжения и сдвигов в анизотропно-слоистых средах, находящихся в условиях плоской, антиплоской и обобщенно-плоской деформаций, с полостями произвольного профиля и глубины заложения с использованием аппарата разложения рядов по цилиндрическим функциям, метода «возмущения формы», метода разделения переменных, метода изображений;

- впервые исследованы закономерности распределения напряжений и перемещений вблизи круговых и некруговых одиночных полостей в трещиноватом трансстропном массиве (условия плоской, антиплоской и обобщенно-плоской деформации) в зависимости от геометрических и физико-механических параметров массива, падающих волн и полостей;

- показано существенное влияние на НДС взаимного расположения серии разноориентированных полостей в трансстропном массиве; проведена численная реализация с получением закономерностей распределения напряжений и перемещений в зависимости от физико-механических и геометрических свойств среды, волн, полостей;

- впервые проведен расчет НДС разноориентированных полостей в многосвязном упругом полупространстве при стационарной дифракции сдвиговых волн с анализом распределения контурных напряженно-деформированных характеристик в зависимости от различных исходных параметров.

- разработаны новые алгоритмы и составлены прикладные пакеты программ для всех решаемых классов в задач в среде MatLab7.0, которые позволили произвести многовариантные расчеты динамического НДС разноориентированных полостей произвольного профиля и глубины заложения в трансстропном наклонно-слоистом массиве при стационарной дифракции упругих волн.

Практическая ценность работы. Работа является составной частью плановых научно-исследовательских работ лаборатории механики деформируемого твердого тела Института механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова РГП ИМИМ КН МОН РК в соответствии с НИР «Проблемы геомеханики, механики деформируемых твердых тел и горных

пород, разработка методов расчета подземных сооружений нефтегазовой и горнорудной отраслей», подтемы «Разработать и развить методы исследования состояния крупно- и маломасштабных неоднородных горных пород с различными сооружениями» ПФИ «Актуальные проблемы физики, математики, механики и информатики» (Ф.0508) на 2006-2009, 2009-2011 гг. (регистр.: №0109РК00668).

Разработанные программные комплексы для массовых многовариантных вычислений и анализа динамического напряженно-деформированного состояния полостей произвольного поперечного сечения в анизотропном слоистом массиве в наиболее общих условиях обобщенно-плоской деформации при стационарной дифракции упругих волн позволяют успешно решать задачи по определению НДС подземных сооружений с целью их оптимального проектирования при различных условиях строительства и эксплуатации в наклонно-слоистых средах.

Научные положения, выносимые на защиту:

- исследование механического состояния горизонтальных горных выработок произвольного профиля, моделируемых полостями, заложенных в массиве слоисто-складчатой структуры, осуществимо путем аналитического решения основных динамических задач теории упругости транслопной среды в условиях плоской, антиплоской и обобщенной плоской деформации;
- разработанные методики и алгоритмы расчета эффективно реализуются на ЭВМ лишь на базе функционально-ориентированных пакетов прикладных программ применительно к пространственным задачам динамической устойчивости подземных сооружений (полостей) в складчатом массиве;
- полученные в результате многовариантного массового расчета закономерности распределения полей напряжений и деформаций вблизи горных выработок в процессе динамических воздействий составляют научную базу для анализа и прогноза динамической устойчивости подземных сооружений, позволяющую учесть разнообразные природные и технологические факторы.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций диссертационной работы обеспечивается корректной постановкой задач механики деформируемого твердого тела, детальным аналитическим обзором литературных данных, применением строгих математических методов теории функции комплексного переменного, теории конформных отображений, теории цилиндрических функций, методов разделения переменных, а также разработкой обоснованных и апробированных алгоритмов и прикладного программного пакета, систематической проверкой результатов на известных тестовых задачах.

Апробация работы. Основные положения и узловые результаты диссертации докладывались на Международной научно-технической конференции "Вторые Ержановские чтения" Актобе, 19-21 июня 2007 г., The 3rd IASME / WSEAS International Conference on CONTINUUM MECHANICS (CM'08), Cambridge, UK, February 23-25, 2008, на Республиканской научно-практической конференции, посвященной 70-летию геомеханика, профессора

Байтелиева Т.Б., Туркестан, 15-16 мая 2008 г, на Международной научной конференции «Современные проблемы механики» (24-25 июня 2008 г.), на Международной научной конференции «Современные проблемы механики», Алматы, Казахстан, 24-25 июня 2008 года, посвященной 70-летию со дня рождения профессора Масанова Ж.К., на Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», посвященной 60-летию д.т.н., профессора, академика Национальной инженерной академии Биярова Т.Н., 19-20 ноября 2009 года, на Международной научно-технической конференции «Механика и строительство транспортных сооружений», посвященной 75-летию Заслуженного деятеля науки и техники Казахстана, академика НАН РК, д.т.н., профессора Айталиева Ш.М., 28-29 января, 2010 года, the International Scientific-Technical Conference dedicated to the 20-th anniversary of National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan, Aktobe, May 21-22, 2010, World Congress on Engineering 2010, International Conference of Mechanical Engineering, Imperial College London, London, UK, 30 June-2 July, 2010, на научном семинаре по механике имени академика Ж.С. Ержанова (руководитель семинара – д.т.н., проф. Масанов Ж.К.), на научном семинаре в Институте математики МОН РК (руководитель семинара – д.ф.м.н., проф. Алексеева Л.А.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 34 статей и сообщений, отражающих основное содержание работы.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения, перечня использованной литературы и приложения.

Автор диссертации выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному консультанту доктору технических наук, профессору, академику академии транспорта РФ Масанову Жайлау Кабылбековичу за научные консультации, внимание, поддержку и ценные советы по работе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* обосновывается актуальность диссертационной работы, дается детальный литературный обзор по существующим в направлении диссертационной работы исследованиям, описываются задачи и объекты исследований, указывается новизна полученных результатов, приводятся основные научные положения, выносимые на защиту, и дается краткое изложение содержания каждого раздела.

В *первом разделе* решается класс задач по определению динамического состояния одиночной глубоко заложеной штрекообразной полости произвольного профиля при стационарной дифракции упругих PP, SV, SH волн. Вначале дается теоретическое обоснование выбора механической модели трансропного массива. Затем описывается постановка задач стационарной дифракции упругих продольных и поперечных волн на одиночной полости кругового, а затем и некругового, сечения глубоко заложения в трансропном наклонно-слоистом массиве, при этом рассматривается состояние неподкрепленного и жестко закрепленного контура одиночной

полости (рис.1). Волны распространяются под произвольным углом α к горизонту, причем рассматриваются случаи влияния продольных и поперечных волн, когда транстропный массив находится в условиях плоской деформации, и случаи влияния сдвиговых волн, когда в массиве представлена антиплоская деформация.

Общий вид гармонической волны описывается выражением

$$\bar{u} = \bar{u}^* e^{-i\omega t}, \quad \bar{u}^* = \bar{U}^* \exp[i\bar{k}(n_1 x_1 + n_2 x_2)] \quad (1)$$

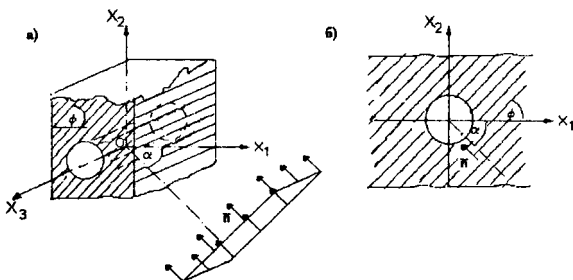


Рисунок 1 - Схема распространения гармонических волн в транстропном массиве с одиночной штрекообразной полостью

Уравнения обобщенного закона Гука для транстропного массива с наклонной под углом φ к горизонту плоскостью изотропии относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. рис.1), где ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_3 – соответственно горизонтально вкост и по простиранию плоскости изотропии, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] \{\varepsilon\} \\ [D] &= [b_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, 6; \\ \{\sigma\}^T &= (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \\ b_{15} &= b_{25} = b_{35} = b_{46} = b_{56} = b_{14} = b_{24} = b_{34} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где b_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$ - коэффициенты упругости, зависящие от упругих постоянных среды $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_2$ и угла φ .

Уравнения движения в отсутствии массовых сил с учетом физических и кинематических уравнений могут быть представлены в операторном виде, где в нашем случае разделения волн для случая продольно-поперечных волн (плоская деформация) их удобнее представить в матричной форме:

$$(B_0 \partial_1^2 + B_1 \partial_1 \partial_2 + B_2 \partial_2^2 + B_3) \bar{u}_p = 0, \quad \bar{u}_p = \{u_1, u_2\}, \quad (3a)$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{16} \\ b_{16} & b_{66} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 2b_{16} & b_{12} + b_{66} \\ b_{12} + b_{66} & 2b_{26} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{66} & b_{26} \\ b_{26} & b_{22} \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

В случае сдвиговых волн (антиплоская деформация) операторный вид уравнений движения преобразуется к дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\{\partial_1^2 + 2(b_{45}/b_{55})\partial_1\partial_2 + (b_{44}/b_{55})\partial_2^2 + \omega_0^2\} u_3(x_1, x_2) = 0. \quad (36)$$

Здесь $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2 / b_{55}$, $\omega_1^2 = \rho^0 \omega^2$, ω - круговая частота.

Отметим, что в случае падения продольных PP- и поперечных SV- волн рассматривается состояние плоской деформации, а дифракционное поле в этом случае определяется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полости, т.е. $\bar{u}_p = (u_1, u_2)$. При падении сдвиговых (SH-) волн дифракционное поле характеризуется антиплоской деформацией и амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1, x_2)$ в осевом направлении.

Горизонтальная полость глубокого заложения проведена вдоль оси Ox_3 и имеет поперечное сечение с контуром Γ , описываемым в случае некругового поперечного сечения отображающей функцией

$$z = \tilde{\omega}(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{m=1}^N d_m \zeta^{-m}\right), \quad z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (5)$$

которая в случае круговой формы полости имеет вид $z = \tilde{\omega}(\zeta) = R\zeta$. (5*)

Волновой вектор \bar{k} находится из соотношений для гармонической волны с учетом выражений (3а), (3б), который в случае разделения волн представится в виде:

$$k_{SH} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{Q}}, \quad k_{pp} = \omega \sqrt{\frac{2\rho}{(E+A) + \sqrt{(E-A)^2 + 4B^2}}}, \quad k_{sv} = \omega \sqrt{\frac{2\rho}{(E+A) - \sqrt{(E-A)^2 + 4B^2}}}, \quad (6)$$

где A, B, E, Q - параметры, зависящие от коэффициентов упругости b_{kn} ,

$k, n = \overline{1, 6}$, ω - круговая частота, ρ - плотность массива.

Для постановки задачи сформулируем граничные условия в случае решения первой и второй основных задач для контура одиночной полости без подкрепления и с подкреплением, соответственно.

В случае, когда контур заглубленной одиночной полости свободен от нагрузок условия на контуре Γ запишутся в виде:

$$(\sigma_{nn} + \sigma_{nn}^*)_{\Gamma} = 0, \quad (\sigma_{n\bar{\theta}} + \sigma_{n\bar{\theta}}^*)_{\Gamma} = 0, \quad (\sigma_{\bar{\theta}3} + \sigma_{\bar{\theta}3}^*)_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

Здесь σ_{nn}^* , $\sigma_{n\bar{\theta}}^*$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1, n_2) , обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения полости; $\sigma_{\bar{\theta}3}^*$ - касательные напряжения на

площадке с нормалью (n_1, n_2) , обусловленные падающей SH-волной сдвига; σ_{nn} , $\sigma_{n\theta}$, $\sigma_{\theta 3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (3а) введем аффинное преобразование вида

$$\begin{aligned} \{x_1^{(i)}\} &= \{\xi_1^{(i)}\}, \{x_2^{(i)}\} = -M_1 \{\xi_1^{(i)}\} + M_2 \{\xi_2^{(i)}\}, \quad i = 1, 2 \\ \{x_1^{(i)}\} &= \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{Bmatrix}, \{x_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{Bmatrix}, \{\xi_1^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{Bmatrix}, \{\xi_2^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (8a)$$

где $M = M_1 + iM_2$ (причем $M_2 > 0$ - положительно определенная симметрическая матрица) - корень характеристического уравнения второй степени, которое позволяет свести уравнение (3а) к уравнению Гельмгольца в матричном виде в координатах $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$

$$(E\{\nabla_{\xi_1 \xi_1}^{(i)2}\} + B_0^{-1}B_3)\{u, (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})\} = 0. \quad (9a)$$

Аналогично, для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (3б) в случае распространения сдвиговых волн и антиплоской деформации введем аффинное преобразование вида

$$x_1^{(3)} = \xi_1^{(3)}, x_2^{(3)} = -\mu_1 \xi_1^{(3)} + \mu_2 \xi_2^{(3)}, \quad (8б)$$

где $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ (причем $\mu_2 > 0$) - корень характеристического уравнения второй степени, которое позволяет свести уравнение (3б) к уравнению Гельмгольца в координатах $(\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)})$

$$(\nabla_{\xi_1 \xi_1}^2 + \omega_0^2)u_3(\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}) = 0 \quad (9б)$$

В общем случае точки $O^{(i)}$, $i=1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $i=1,2,3$, при преобразовании (8а) и (8б) перейдут в точки $O_{\xi}^{(i)}$, $i=1,2,3$. Их будем рассматривать как начало систем координат $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$, $i=1,2,3$, с осями, ориентированными по осям координат $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ и полярных координат $(r^{(i)}, \kappa^{(i)})$ с отчетом полярного угла $\kappa^{(i)}$ от оси $O^{(i)} \xi_1^{(i)}$.

Уравнения Гельмгольца вида (9а) для перемещений $\bar{u}_p = \{u_1, u_2\}$ при распространении продольно-поперечных волн, в частном случае, когда упругие коэффициенты $b_{16}=0$, $b_{26}=0$, (случай горизонтальной и вертикальной слоистости массива) можно разделить; тогда получим два уравнения:

$$(\nabla_{\xi_1 \xi_1}^2 + \omega_1^2 / b_{11})u_1(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = 0, (\nabla_{\xi_1 \xi_1}^2 + \omega_1^2 / b_{66})u_2(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}) = 0. \quad (9a^*)$$

Решения уравнений в перемещениях $\bar{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ (9a*) и (9б), в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции, можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов

$A_n^{(i)}, i=1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода, как функций, характеризующих волну, уходящую на бесконечность:

$$u_i = \sum_{(n)} A_n^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{in\kappa^{(i)}}, \quad n = \overline{-\infty, +\infty}, \quad i=1,2,3 \quad (10)$$

где $\omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}}$, $\omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}}$, $\omega_0^{(3)} = \omega_0$

Соответствующие представлению перемещений $\bar{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$, в виде (10) выражения для составляющих напряжений могут быть найдены с помощью обобщенного закона Гука и соответствующих преобразований в виде:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12};$$

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} A_n^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa^{(i)}} - \bar{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa^{(i)}}], \quad (j = \overline{1,3}); \quad (11)$$

$$\sigma_{k3} = \frac{1}{2} \sum_{(n)} A_n^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa^{(3)}} - \bar{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa^{(3)}}], \quad (k = \overline{1,2}),$$

где

$$\begin{aligned} \{G_j^{(1)}\}_{j=\overline{1,3}} &= \{b_{11} \ b_{12} \ b_{16}\}^T + i \cdot (g_1^{(1)}) \{b_{11} \ b_{12} \ b_{16}\}^T + g_1^{(2)} \{b_{16} \ b_{26} \ b_{66}\}^T, \\ \{G_j^{(2)}\}_{j=\overline{1,3}} &= \{b_{16} \ b_{26} \ b_{66}\}^T + i \cdot (g_2^{(1)}) \{b_{16} \ b_{26} \ b_{66}\}^T + g_2^{(2)} \{b_{12} \ b_{22} \ b_{26}\}^T, \\ \{G_k^{(3)}\}_{k=\overline{1,2}} &= \{b_{55} \ b_{45}\}^T + i \cdot (\mu_2^{-1}) \{b_{45} \ b_{44}\}^T + \mu_1 \{b_{55} \ b_{45}\}^T, \\ \{g_i^{(1)}\} &= \text{diag}(M_2^{-1} M_1), \quad \{g_i^{(2)}\} = \text{diag}(M_2^{-1}), \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (11^*)$$

Здесь термин «diag» означает вектор из элементов главной диагонали соответствующей матрицы.

Теперь, с помощью отображающей функции (5), (5*), аффинных преобразований (8а), (8б) можно найти соотношения для точек на контуре Γ одиночной полости:

– в случае некруговой полости в виде:

$$\{r^{(i)} e^{i\kappa^{(i)}}\} = \{\eta_{10}^{(i)}\} \{e^{i\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{20}^{(i)}\} \{e^{-i\theta^{(i)}}\} + \sum_{m=1}^N \{\eta_{2m}^{(i)}\} \{e^{im\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{1m}^{(i)}\} \{e^{-im\theta^{(i)}}\} \quad (12)$$

– в случае круговой полости :

$$\{r^{(i)} e^{i\kappa^{(i)}}\} = \{\eta_{10}^{(i)}\} \{e^{i\theta^{(i)}}\} + \{\eta_{20}^{(i)}\} \{e^{-i\theta^{(i)}}\}, \quad (12^*)$$

где

$$\begin{aligned} \{\eta_{10}^{(i)}\} &= a_0 \{R^{(i)} \rho^{(i)}\}, \quad \{\eta_{20}^{(i)}\} = b_0 \{R^{(i)} \rho^{(i)}\}, \quad \{\eta_{1m}^{(i)}\} = a_0 \{R^{(i)} d_m(\rho^{(i)})^{-m}\}, \\ \{\eta_{2m}^{(i)}\} &= b_0 \{R^{(i)} \bar{d}_m(\rho^{(i)})^{-m}\}, \quad i=1,2,3, \quad m = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

$$a_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} M_2^{-1} (M_2 + iM_1 + E), & \text{если индекс } i = 1,2, \\ \frac{\mu_2 + i\mu_1 + 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i = 3; \end{cases}$$

$$b_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} M_2^{-1} (M_2 + iM_1 - E), & \text{если индекс } i = 1, 2, \\ \frac{\mu_2 + i\mu_1 - 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i = 3. \end{cases} \quad (13)$$

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (10) на контуре одиночной полости необходимо использовать теорему сложения цилиндрических функций, требующую выполнения условий

$$|\eta_{10}^{(i)}| > |\eta_{20}^{(i)}|, \quad |\eta_{20}^{(i)}| \|\eta_{21}^{(i)}\| |x \dots x| \|\eta_{2N}^{(i)}\| \|\eta_{11}^{(i)}\| |x \dots x| \|\eta_{1N}^{(i)}\| < |\eta_{10}^{(i)}| \quad (14)$$

Первое условие выполняется, поскольку матрица $M_2 > 0$ (положительно определенная), а параметр μ_2 больше нуля, т.е. $|a_0| > |b_0|$, отсюда $|\eta_{10}^{(i)}| > |\eta_{20}^{(i)}|$.

Второе условие (14) также имеет место, так как рассматриваемая задача является внешней, т.е. параметр $\rho > 1$, отсюда процесс - сходящийся и выполнено соотношение $|\eta_{20}^{(i)}| \|b_0^N a_0^N d_1 \bar{d}_1 x \dots x d_N \bar{d}_N\| \cdot \rho^{2(-1-2-3-\dots-N)} < a_0 R \cdot \rho$.

Теперь, последовательно применяя теорему сложения цилиндрических функций, можно записать представления комплексных функций для точек на контуре Γ :

$$H_n^{(i)}(\omega_0^{(i)} r^{(i)}) e^{m\kappa^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где в случае некруговой полости имеют место соотношения

$$\begin{aligned} Q_{np}^{(i)} = & \sum_{(v_{N_i})} \dots \sum_{(v_1)} \sum_{(\tilde{v}_{N_i})} \dots \sum_{(\tilde{v}_1)} \delta_{np\tau_1} H_{\frac{n+p-\tau_1}{2}}^{(i)}(\omega_0^{(i)} | \eta_{10}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{10}^{(i) \frac{(n+p-\tau_1)}{2}} \times \\ & \times J_{\frac{n-p+\tau_2}{2}}(\omega_0^{(i)} | \eta_{20}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{20}^{(i) \frac{(n-p+\tau_2)}{2}} \times \\ & \times \prod_{j=1}^N J_{(v_j-\tilde{v}_j)}(\omega_0^{(i)} | \eta_{2j}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{2j}^{(i) (v_j-\tilde{v}_j)} \times J_{\tilde{v}_j}(\omega_0^{(i)} | \eta_{1j}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{1j}^{(i) \tilde{v}_j}, \end{aligned} \quad (16)$$

а для круговой полости

$$Q_{np}^{(i)} = \delta_{np} H_{\frac{n+p}{2}}^{(i)}(\omega_0 | \eta_{10}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{10}^{(i) \frac{(n+p)}{2}} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 | \eta_{20}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{20}^{(i) \frac{(n-p)}{2}}. \quad (16^*)$$

Здесь

$$\tilde{\eta}_{kj}^{(i)} = \eta_{kj}^{(i)} | \eta_{kj}^{(i)} |^{-1}, \quad k = 1, 2; \quad j = 0, \dots, N,$$

$$\tau_1 = \sum_{m=1}^N [(m+1)v_m - 2m\tilde{v}_m], \quad \tau_2 = \sum_{m=1}^N [(m-1)v_m - 2m\tilde{v}_m] \quad (17)$$

$$\delta_{np\tau_1} = 1, \text{ если } n+p-\tau_1 = 2s, \delta_{np\tau_1} = 0, \text{ если } n+p-\tau_1 \neq 2s, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\delta_{np} = 1, \text{ если } n+p - \text{четное число}, \delta_{np} = 0, \text{ если } n+p - \text{нечетное число}.$$

Теперь перемещения u_i на контуре Γ представимы выражением

$$(u_i)_r = \sum_{(n,p)} A_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Для удобства использования граничных условий при решении первой основной задачи выражение для контурных функций представим в виде

$$e^{i\bar{\theta}^{(i)}} = (\bar{\omega}^i | \bar{\omega}^i |^{-1}) e^{i\theta^{(i)}} \quad (19)$$

Причем для круговой полости -

$$(|\bar{\omega}^i|)_r = (R\zeta')|_r = R; \quad (20^*)$$

для некруговой полости -

$$\begin{aligned} (|\bar{\omega}^i|)_r = R \cdot & \left[1 + 0,5 * \sum_{m,k=1}^N mk (\bar{d}_m d_k e^{i(m-k)\theta} + \bar{d}_k d_m e^{i(k-m)\theta}) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^N m (\bar{d}_m e^{i(m+1)\theta} + d_m e^{-i(m+1)\theta}) \right]^{1/2} | \end{aligned} \quad (20)$$

Используя формулы для нормальных и касательных напряжений на площадке с нормалью (n_1, n_2) , получим граничные условия (7) в виде:

$$\begin{aligned} (|\bar{\omega}^i|^2 \sigma_{nn} + |\bar{\omega}^i|^2 \sigma_{nn}^*)_r = 0, \quad (|\bar{\omega}^i|^2 \sigma_{n\bar{\theta}} + |\bar{\omega}^i|^2 \sigma_{n\bar{\theta}}^*)_r = 0, \\ (|\bar{\omega}^i| \sigma_{\bar{\theta}3} + |\bar{\omega}^i| \sigma_{\bar{\theta}3}^*)_r = 0. \end{aligned} \quad (7^*)$$

Теперь определим контурные представления для напряжений, используя контурные соотношения для перемещений (18) и выражения (19), (20), (20*):

$$\begin{aligned} (|\bar{\omega}^i|^2 \sigma_{nn})_r = \sum_{i=1}^2 \sum_{(n,p)} A_n^{(i)} \lambda_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \quad (|\bar{\omega}^i|^2 \sigma_{n\bar{\theta}})_r = \sum_{i=1}^2 \sum_{(n,p)} A_n^{(i)} \mathcal{G}_{np}^{(i)} e^{ip\theta^{(i)}}, \\ (|\bar{\omega}^i| \sigma_{\bar{\theta}3})_r = \sum_{(n,p)} A_n^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} e^{ip\theta_l^{(3)}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где в случае кругового контура комплексные коэффициенты $\lambda_{np}^{(i)}$, $\mathcal{G}_{np}^{(i)}$ представляются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{np}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8} \{ \bar{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)} + \\ + 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,p}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p}^{(i)}) \} \end{aligned} \quad (22^*)$$

$$\lambda_{np}^{(3)} = \frac{\omega_0^{(3)} R}{4} (\bar{E}_1^{(3)} Q_{n-1,p-1}^{(3)} + E_1^{(3)} Q_{n-1,p+1}^{(3)} - \bar{I}_1^{(3)} Q_{n+1,p-1}^{(3)} - I_1^{(3)} Q_{n+1,p+1}^{(3)}), \quad (23^*)$$

$$\mathcal{G}_{np}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8} \{ \bar{C}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)} \} \quad (24^*)$$

А в случае некругового контура эти же комплексные коэффициенты значительно усложняются:

$$\begin{aligned}
\lambda_{np}^{(i)} = & \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8} \{ \bar{E}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+2}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+2}^{(i)} \} \\
& + 2(E_3^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p}^{(i)} - I_3^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p}^{(i)}) - 2 \sum_{m=1}^N m [\bar{d}_m (E_3^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m-1}^{(i)} + E_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m+1}^{(i)} - \\
& - I_3^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m-1}^{(i)} - I_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m+1}^{(i)}) + d_m (E_3^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m+1}^{(i)} + \bar{E}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m-1}^{(i)} \\
& - I_3^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m+1}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m-1}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^N mk [\bar{d}_m \bar{d}_k (E_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m-k}^{(i)} - \\
& - I_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m-k}^{(i)}) + d_m d_k (\bar{E}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m+k}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m+k}^{(i)}) + \\
& + \bar{d}_m d_k (\bar{E}_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m+k}^{(i)} - \bar{I}_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m+k}^{(i)}) + d_m \bar{d}_k (E_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m-k}^{(i)} \\
& - I_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m-k}^{(i)})] \}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{npl}^{(3)} = & \frac{\omega_0^{(3)} R_l}{4} \{ (\bar{E}_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n-1,p-1,l}^{(3)} + E_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n-1,p+1,l}^{(3)} - \bar{I}_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n+1,p-1,l}^{(3)} \\
& - I_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n+1,p+1,l}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{N_l} m (-\bar{d}_{ml} E_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m,l}^{(3)} - d_{ml} \bar{E}_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m,l}^{(3)} + \\
& + \bar{d}_{ml} I_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m,l}^{(3)} + d_{ml} \bar{I}_1^{(3)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m,l}^{(3)}) \}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
g_{np}^{(i)} = & \frac{\omega_0^{(i)} R^2}{8} \{ \bar{C}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+2}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+2}^{(i)} \\
& - 2 \sum_{m=1}^N m [\bar{d}_m (C_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m+1}^{(i)} - D_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m+1}^{(i)}) + d_m (\bar{C}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m-1}^{(i)} - \\
& - \bar{D}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m-1}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^N [\bar{d}_m \bar{d}_k (C_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m-k}^{(i)} - D_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m-k}^{(i)}) + \\
& + d_m d_k (\bar{C}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m+k}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m+k}^{(i)}) + \bar{d}_m d_k (-C_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p-m+k}^{(i)} + \\
& + D_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p-m+k}^{(i)}) + d_m \bar{d}_k (C_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n-1,p+m-k}^{(i)} - D_2^{(i)} \mathcal{Q}_{n+1,p+m-k}^{(i)})] \} \\
E_1^{(i)} = & (G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) + 2i G_3^{(i)}, I_1^{(i)} = (\bar{G}_1^{(i)} - \bar{G}_2^{(i)}) + 2i \bar{G}_3^{(i)}, \\
E_3^{(i)} = & (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}), I_3^{(i)} = (\bar{G}_1^{(i)} + \bar{G}_2^{(i)}), i=1,2 \\
C_1^{(i)} = & 2G_3^{(i)} + i(G_2^{(i)} - G_1^{(i)}), D_1^{(i)} = 2\bar{G}_3^{(i)} + i(\bar{G}_2^{(i)} - \bar{G}_1^{(i)}), i=1,2 \\
E_1^{(3)} = & G_1^{(3)} + i G_2^{(3)}, I_1^{(3)} = \bar{G}_1^{(3)} + i \bar{G}_2^{(3)}
\end{aligned} \tag{24}$$

Соотношения для перемещений и напряжений на контуре круговой полости в падающей волне $(u_i)_r$ ($i=\overline{1,3}$) $= (u_{pp}, u_{sy}, u_{st})_r$, $(|\tilde{\omega}^{\circ}|^2 \sigma_m^*)_r$, $(|\tilde{\omega}^{\circ}|^2 \sigma_{n\theta}^*)_r$, $(|\tilde{\omega}^{\circ}|^2 \sigma_{\theta 3}^*)_r$, находятся с применением формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды:

$$(u_i^*)_r = U_i^* \sum_{(p)} \mathcal{Q}_p^{(i)} e^{ip\theta} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
(|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{mm}^*)_r &= i \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i \alpha_p^{(i)} e^{ip\theta}, \quad (|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{n\theta}^*)_r = i \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i \beta_p^{(i)} e^{ip\theta}, \\
(|\tilde{\omega}| \sigma_{\theta 3}^*)_r &= (i/2) R U_3 \sum_{(p)} \alpha_p^{(3)} e^{ip\theta}; \quad (27)
\end{aligned}$$

где для круговой полости контурные коэффициенты представимы в виде

$$Q_p^{(i)} = J_p(R k_{12}^{(i)}) e^{ip\delta_1^{(i)}}, \quad (28^*)$$

$$\alpha_p^{(i)} = \tilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2}^{(i)} + 2 \operatorname{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_p^{(i)}, \quad i=1,2;$$

$$\alpha_p^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1}^{(3)} + \tilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1}^{(3)},$$

$$\beta_p^{(i)} = -i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2}^{(i)} - Q_{p+2}^{(i)}), \quad i=1,2; \quad (29^*)$$

А для некруговой формы полости имеет место

$$\begin{aligned}
Q_p^{(i)} &= \sum_{(v_1)} \dots \sum_{(v_{N_1})} \dots \sum_{(\tilde{v}_1)} \dots \sum_{(\tilde{v}_{N_1})} [J_{p-\tilde{\delta}}(R k_{12}^{(i)}) e^{i(p-\tilde{\delta})\delta_1} \times \prod_{m=1}^N \{J_{v_m}(R d_{1m} k_{12}^{(i)}) e^{iv_m\delta_2} \times \\
&\times J_{\tilde{v}_m}(R d_{2m} k_{12}^{(i)}) e^{i\tilde{v}_m\delta_3}\}, \quad \tilde{\delta} = \sum_{m=1}^N m(v_m + \tilde{v}_m), \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{pl}^{(i)} &= \tilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2 \operatorname{Re}(\tilde{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)} + 2 \sum_{m=1}^{N_l} m[\bar{d}_{ml} (\operatorname{Re} \tilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p-m-1,l}^{(i)} + \\
&+ \chi_1^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} - d_{ml} (\operatorname{Re} \tilde{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{m,k=1}^{N_l} m k [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} \cdot \chi_1^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + d_{ml} d_{kl} \cdot \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} + \bar{d}_{ml} d_{kl} \cdot \tilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-m+k,l}^{(i)} + \\
&+ d_{ml} \bar{d}_{kl} \cdot \tilde{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i=1,2
\end{aligned}$$

$$\alpha_{pl}^{(3)} = \chi_1^{*(3)} Q_{p-1,l}^{(3)} + \tilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p+1,l}^{(3)} - \sum_{m=1}^{N_l} m(\bar{d}_m \cdot \tilde{\chi}_1^{*(3)} Q_{p-m,l}^{(3)} + d_m \cdot \chi_1^{*(3)} Q_{p+m,l}^{(3)}),$$

$$\begin{aligned}
\beta_p^{(i)} &= -i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2}^{(i)} - Q_{p+2}^{(i)}) - 2 \sum_{m=1}^N m[\bar{d}_m \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m+1}^{(i)} + \\
&+ d_m \cdot \bar{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m-1}^{(i)}] + \sum_{m,k=1}^N m k [\bar{d}_m \bar{d}_k \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m-k}^{(i)} + \\
&+ d_m d_k \cdot \bar{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m+k}^{(i)} - \bar{d}_m d_k \cdot i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p-m+k}^{(i)} + \\
&+ d_m \bar{d}_k \cdot i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p+m-k}^{(i)}], \quad i=1,2. \quad (29)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
e^{i\delta_1} &= (k_2^{(i)} + i k_1^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \quad e^{i\delta_2} = (-k_2^{(i)} + i k_1^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \\
e^{i\delta_3} &= (k_1^{(i)} + i k_2^{(i)}) k_{12}^{(i)-1}, \quad k_{12}^{(i)} = (k_1^{(i)2} + k_2^{(i)2})^{1/2}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Используя граничные условия (7*) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\rho\theta}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{(i)}$:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} A_n^{(i)} \lambda_{np}^{(i)} = -i \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^2 U_i^* \alpha_p^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} A_n^{(i)} g_{np}^{(i)} = -i \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^2 U_i^* \beta_p^{(i)} \quad (31)$$

$$\sum_{(n)} A_n^{(3)} \lambda_{np}^{(3)} = -(j/2) R U_3^* \alpha_p^{(3)}.$$

Система (31) решается методом редукции. В силу того, что в настоящий момент не существует строгого обоснования подобного подхода к решению бесконечных систем, поэтому сходимость решения показывается численным расчетом.

При решении второй основной задачи меняются лишь граничные условия

$$(u_i + u_i^*)_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (32)$$

Остальной ход аналитического решения повторяет все выкладки для решения первой основной задачи с той лишь разницей, что при составлении бесконечной системы линейных алгебраических уравнений учитываются граничные условия (32):

$$\sum_{(n,p)} B_n^{(i)} Q_{np}^{(i)} = -U_i^* \sum_{(p)} Q_p^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (33)$$

где $B_n^{(i)}$ - неизвестные коэффициенты, выражения $Q_{np}^{(i)}$ вычисляются из (16), (16*), $Q_p^{(i)}$ - из (28), (28*). После вычисления неизвестных коэффициентов определяются значения перемещений и напряжений в отраженной волне.

Для анализа напряженно-деформированных характеристик одиночной полости в трансропном массиве рассматривался алевролит с упругими характеристиками: $E_1 = 1,074 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2 = 0,523 \cdot 10^5$ кг/см², $G_2 = 0,12 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu_1 = 0,413$, $\nu_2 = 0,198$; упругая волна распространяется перпендикулярно продольной оси полости под углом $\alpha = 0^\circ$; изменение частот берется в диапазоне от 1 до 100 Гц.

В соответствии с полученным теоретическим решением, был разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0 расчета значений напряжений вблизи полостей кругового и некругового поперечного сечения. В рядах по цилиндрическим функциям в (31), (33) удерживалось не более 20 членов по положительным и отрицательным индексам, что позволило удовлетворить граничным нулевым условиям с погрешностью менее 1% для амплитуд напряжений $(\sigma_{nn})_{\Gamma}$, $(\sigma_{n\theta})_{\Gamma}$, $(\sigma_{\theta 3})_{\Gamma}$ по отношению к соответствующим амплитудным значениям напряжений в падающей волне при решении первой основной задачи и для перемещений u_i по отношению к амплитудным значениям перемещений в падающей волне - в случае второй основной задачи. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям и анализом значений коэффициентов при неизвестных в уравнениях (31), (33). В таблице 1 показана целесообразность выбора метода редукции при решении бесконечных систем линейных алгебраических

уравнений и приведены значения коэффициентов для разного количества уравнений (5, 15, 20). Числовые результаты получены при следующих параметрах среды и падающих волн: угол падения волны $\alpha = 0$, угол наклона плоскости изотропии пород $\varphi = 0$, частота волны $\omega = 15$ Гц. Таблица показывает оптимальность выбора количества уравнений, судя по тенденции уменьшения значений коэффициентов до 10^{-4} . Здесь также показаны значения коэффициентов в случае изотропной среды (в расчет брались осредненные упругие коэффициенты, $E_1 = 0,799 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2 = 0,799 \cdot 10^5$ кг/см², $G_2 = 0,306 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu_1 = 0,306$, $\nu_2 = 0,306$). Можно отметить, что количество коэффициентов в случае изотропной среды достаточно брать в количестве пяти.

Предварительно составленная программа тестировалась на результатах подобной задачи дифракции упругих SH-волн на круговой полости в ортотропном массиве, исследуемой А.С. Космодамианским и В.И. Сторожевым, и на результатах задачи для круговой выработки в изотропном массиве при дифракции продольно-поперечных и сдвиговых волн, исследуемой Ж.С. Ержановым, Ш.М. Айтиалиевым, Л.А. Алексеевой.

В случае ортотропной среды значения контурных касательных напряжений $(\sigma_{\theta 3})_r$, отнесенных к $(b_{55} * \omega)$, рассматривались в зависимости от различных значений параметра $\tilde{\kappa} = b_{44} / b_{55}$, характеризующего анизотропию тела. Расчеты показали, что расхождение в полученных численных результатах как качественной, так и количественной картины составляет не более 1 %.

На рис. 2 показано распределение перемещений в случае дифракции волн разного вида при решении первой основной задачи при $\varphi = \alpha = 0$, $\omega = 15$ Гц.

В работе также проводился анализ полученных результатов в зависимости от разных физических и геометрических исходных параметров, показано влияние формы поперечного сечения выработок, угла наклона плоскости изотропии пород, угла падения и частоты упругих волн на характер распределения напряжений и перемещений на ее контуре.

Второй раздел посвящен проблемам стационарной дифракции волн на одиночной диагональной полости в транстропном массиве при обобщенной плоской деформации. Здесь также аналитически получены решения первой и второй основных задач для неподкрепленной и подкрепленной недеформируемой крепью одиночной диагональной полости глубокого заложения. Вначале дается общее обоснование использования модели обобщенной плоской деформации, когда модель транстропного массива позволяет подразделять горизонтальные выработки и подземные сооружения, пройденные произвольно относительно линии простирания наклонных слоев напластования массива, на штреки, квершлагги и диагональные выработки.

Детальный анализ напряженного состояния подобных подземных сооружений дает основу для оценки устойчивости и прочности штреков и квершлаггов при отклонении их продольной оси от линии простирания наклонных слоев пород. Дальнейшие исследования дают понимание того, что расчетная схема диагональной выработки является наиболее обобщенной схемой для определения динамических напряжений в массиве вокруг подземных сооружений, так как далеко не всегда распространение волн строго направлено вдоль или поперек продольной оси подземного сооружения.

Таблица 1 - Точность выполнения граничных условий на контуре выработки

Значения угла θ , град	Точность выполнения граничных условий на контуре (в %) при $\alpha = 0^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ и порядке уравнений N, равном			
	Изот. среда	Анизотропная среда		
		5	15	20
0	0,0000	1,71989	0,00999	0,000001
15	0,0000	0,64211	0,00087	0,000011
30	0,0000	0,00403	0	0,000004
45	0,0000	0,16916	0,00018	0
60	0,0000	0,24892	0,01074	0,000001
75	0,0000	1,22937	0,00018	0,000001
90	0,0000	0,10792	0,0001	0,000001
105	0,0000	0,14434	0,00007	0,000001
120	0,0000	0,00059	0,00004	0,000001
135	0,0000	0,13081	0,00008	0
150	0,0000	0,37023	0,00012	0,000001
165	0,0000	0,21091	0,00026	0,000001
180	0,0000	1,71989	0,00999	0,000001

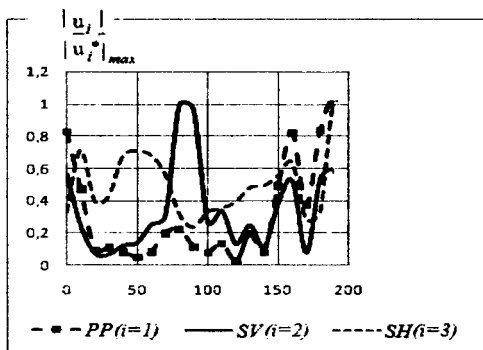


Рисунок 2 – График распределения перемещений при разных типах волн

Таким образом, в разделе рассматривается одиночная диагональная полость произвольного профиля глубокого заложения в транстропном наклонно-слоистом массиве. Представление массива с диагональной полостью в системе координат $Ox_1x_2x_3$, у которой ось Ox_3 составляет угол ψ с осью Ox_2 в первоначальной декартовой системе координат, направления осей Ox_1 и Ox_2 также отличаются на угол ψ , а ось Ox_3 совпадает с осью Ox_2 изображено на рис. 3. Предположим, что заданные внешние объемные силы не меняются вдоль продольной оси диагональной цилиндрической полости. В силу трансверсальности изотропии упругих свойств массив поперечное сечение

диагональной полости получает искривление. Однородность механических свойств массива в совокупности с предположением о бесконечной протяженности полости обуславливает одинаковость искривления поперечных сечений диагональных полостей на всем их протяжении.

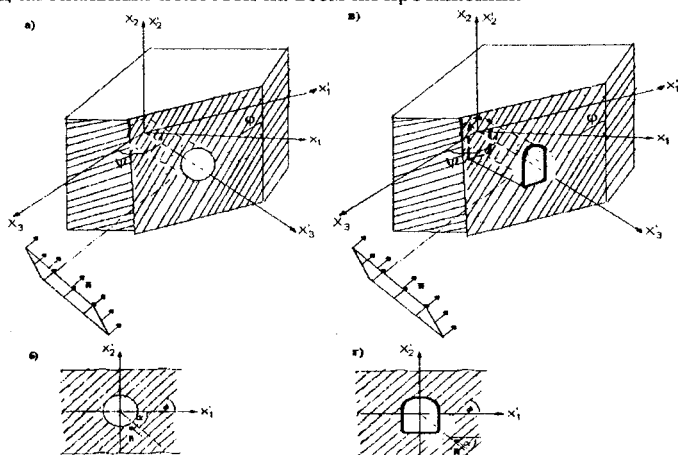


Рисунок 3 - Схема распространения плоской гармонической волны в трансформном массиве с диагональной полостью глубокого заложения при обобщенной плоской деформации

Следовательно, можно предположить, что все характеристики напряженно-деформированного состояния диагональной полости зависят от координат (x'_1, x'_2) в плоскости ее поперечного сечения, т.е. $u'_i = u'_i(x'_1, x'_2)$, $u'_2 = u'_2(x'_1, x'_2)$, $u'_3 = u'_3(x'_1, x'_2)$, а $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x'_1, x'_2)$, $i, j = 1, 2, 3$, что аналогично условиям плоской деформации. Подобного рода деформацию в теории упругости анизотропного тела называют обобщенно-плоской. Уравнения обобщенного закона Гука (2) для такого массива будут преобразованы в вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}\epsilon_{11} + c_{12}\epsilon_{22} + c_{13}\epsilon_{23} + c_{14}\epsilon_{12} + c_{15}\epsilon_{13}, \\ \sigma_{22} = c_{12}\epsilon_{11} + c_{22}\epsilon_{22} + c_{23}\epsilon_{23} + c_{24}\epsilon_{12} + c_{25}\epsilon_{13}, \\ \sigma_{23} = c_{13}\epsilon_{11} + c_{23}\epsilon_{22} + c_{33}\epsilon_{23} + c_{34}\epsilon_{12} + c_{35}\epsilon_{13}, \\ \sigma_{12} = c_{14}\epsilon_{11} + c_{24}\epsilon_{22} + c_{34}\epsilon_{23} + c_{44}\epsilon_{12} + c_{45}\epsilon_{13}, \\ \sigma_{13} = c_{15}\epsilon_{11} + c_{25}\epsilon_{22} + c_{35}\epsilon_{23} + c_{45}\epsilon_{12} + c_{55}\epsilon_{13}, \end{cases} \quad (34)$$

где коэффициенты упругости $c_{ij} = c_{ij}$ зависят, кроме пяти приведенных постоянных $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_2$, от угла наклона φ плоскости изотропии пород к горизонту и угла отклонения ψ оси выработок от линии простирания этой

плоскости. Указанные коэффициенты являются приведенными вдоль продольной оси диагональной полости, т.е. c_{ij} зависят от коэффициентов b_{ij} и угла ψ .

$$c_{ij} = b_{ij}' - \frac{b_{i2}' b_{j2}'}{b_{22}'} \quad (35)$$

причем коэффициенты b_{ij}' зависят от коэффициентов b_{ij} .

При использовании физических уравнений состояния (34) и кинематических соотношений Коши уравнения движения в случае обобщенной плоской деформации также могут быть представлены в операторном виде, причем после разделения волн на продольно-поперечные и сдвиговые можно преобразовать их в следующие.

Для продольно-поперечных волн (PP-,SV-) имеет место

$$\begin{cases} A_{11}^{(0)} u_1 + A_{12}^{(0)} u_2 = 0, \\ A_{21}^{(0)} u_1 + A_{22}^{(0)} u_2 = 0. \\ A_{31}^{(0)} u_1 + A_{32}^{(0)} u_2 = 0, \end{cases} \quad (36)$$

Здесь в рассмотрение берется дифракционное поле, которое характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полости $\bar{u}_p = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2) , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1, x'_2) .

Так как коэффициенты в дифференциальных уравнениях в частных производных, входящие в операторный вид уравнений движений (36), являются постоянными, не зависящими друг от друга, можно, применив некоторые преобразования, упростить формулы (36) к следующему виду

$$\begin{cases} (A_{11}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{31}^{(0)}) u_1 + (A_{12}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}) u_2 = 0, \\ (A_{21}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}) u_1 + (A_{22}^{(0)} + A_{32}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}) u_2 = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Если ввести обозначения

$$A_{11}^{(0)} = A_{11}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{31}^{(0)}; A_{12}^{(0)} = A_{12}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}; A_{22}^{(0)} = A_{22}^{(0)} + A_{32}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)} \quad (38)$$

можно получить соотношения, аналогичные выражениям в матричном виде типа (3а), где

$$B_0 = \begin{pmatrix} c_{11}' & c_{16}' \\ c_{16}' & c_{66}' \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 2c_{16}' & c_{12}' + c_{66}' \\ c_{12}' + c_{66}' & 2c_{26}' \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} c_{66}' & c_{26}' \\ c_{26}' & c_{22}' \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами

$$c_{11}' = c_{11} + c_{55}^2; c_{16}' = c_{14} + c_{55} \cdot c_{35}; c_{66}' = c_{44} + c_{35}^2; c_{12}' = c_{12} + c_{55} \cdot c_{33};$$

$$c'_{26} = c_{24} + c_{33} \cdot c_{35}; \quad c'_{22} = c_{22} + c_{33}^2. \quad (39)$$

В случае сдвиговых волн в операторных уравнениях движения ненулевыми остаются

$$\begin{cases} A_{13}^{(0)} u_3 = 0, \\ A_{23}^{(0)} u_3 = 0, \\ A_{33}^{(0)} u_3 = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Складывая почленно левые и правые части системы, можно прийти к выражению подобному (36), в котором все b_{ij} можно заменить на соответствующие c'_{ij} , причем

$$c'_{35} = c_{15} + c_{45} + c_{55}; \quad c'_{45} = \frac{1}{2}(c_{13} + c_{45} + c_{25} + c_{34} + 2c_{35}); \quad c'_{44} = c_{34} + c_{23} + c_{33}. \quad (41)$$

Диагональная полость проведена вдоль оси Ox'_3 и имеет поперечное сечение с контуром Γ , описываемым функцией (5), (5*).

Предполагается, что в трансропном массиве в плоскости поперечного сечения полости вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n}=(n_1, n_2)$, падает стационарная упругая волна. Фронт волны параллелен оси диагональной полости, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения полости в случае рассмотрения PP-, SV- продольно-поперечных волн, и параллельно оси диагональной полости в случае дифракции SH-волны сдвига. Вид волны может быть описан выражением (1), волновыми числами вида (6).

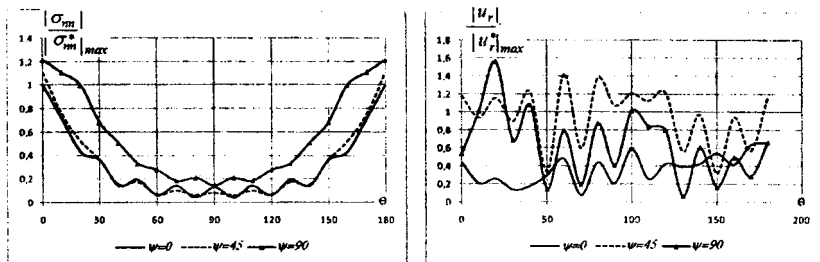
Также как и в первом разделе, здесь требуется решить основные задачи теории упругости для диагональной полости, свободной от нагрузок, граничные условия вида (7) и диагональной полости с абсолютно жестким подкреплением -- граничные условия (7*).

Теория получения аналитических решений строится аналогично теории первого раздела, т.е. вводятся аффинные преобразования вида (8а), (8б), которые сводят дифференциальные уравнения в матричном виде (3а) и уравнение (3б) к уравнениям Гельмгольца вида (9а) - после введения горизонтальной и вертикальной слоистости (9а*), и (9б). Решения данных уравнений ищутся в перемещениях с помощью цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода, характеризующих волну, уходящую на бесконечность. С помощью теоремы сложения цилиндрических функций находятся контурные соотношения для напряжений и перемещений, которые путем выполнения граничных условий могут быть сведены в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решаемую методом редукции.

Анализ напряженно-деформированного состояния проводился для алевролита, в котором под произвольным углом ψ проведена диагональная выработка. Пакет прикладных программ включал апробированные алгоритмы в среде MatLab7.0, сходимость системы линейных уравнений показывалось методом редукции численно, на основании выполнения граничных условий и сходимости коэффициентов.

На рис.4 показана зависимость НДС диагональной выработки круглого поперечного сечения от угла расположения в массиве ψ при разных типах волн при вертикальной слоистости массива ($\varphi = 90^\circ, \alpha = 0^\circ, \omega = 15 \Gamma\text{ц}$).

а)



б)

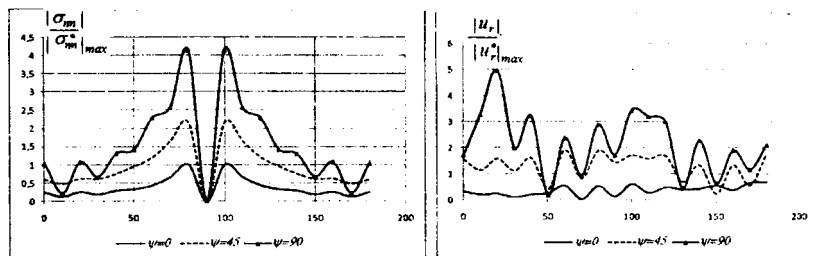


Рисунок 4 – Зависимость НДС диагональной круговой выработки от способов ее ориентации в массиве при разных типах волн: а) для PP-волн; б) для SV-волн.

В работе также приведен анализ напряженного и деформированного состояния диагональной выработки в зависимости от физических и геометрических параметров массива, волн и полости, а именно: угла наклона плоскости изотропии, угла падения, частоты и вида падающих волн, геометрии полости, способов ее проходки относительно плоскости простирания слоев массива (штрек, квершлаг, диагональная полость).

В третьем разделе исследуется анизотропный массив с параллельными сближенными горизонтальными полостями произвольного профиля при стационарной дифракции волн.

Основная идея исследований данного раздела заключается в том, что при проходке и строительстве подземных сооружений часто необходимо учитывать взаимовлияние сооружений, расположенных близко друг от друга.

Методы теории упругости, методы обобщенной суперпозиции позволяют исследовать многосвязный массив, содержащий серию параллельно протяженных полостей. Модель транслопного массива позволяет учесть анизотропные характеристики среды во взаимодействии с подземными сооружениями.

Таким образом, в данном разделе рассматриваются задачи стационарной дифракции упругих волн растяжения-сжатия и сдвигов на полостях круговой и, в общем случае, некруговой форм, заглубленных в транстропном массиве с наклонной плоскостью изотропии. При выполнении определенных требований и преобразований можно применить все подходы, используемые в предыдущих разделах к исследованию серии полостей в транстропном массиве произвольной ориентации друг относительно друга, разных размеров и форм при воздействии плоской гармонической волны, распадающейся на продольно-поперечные и сдвиговые волны.

Основные положения данного раздела строятся на следующем. Допустим существование L параллельных цилиндрических полостей с некоторым линейным размером R_l , $l = \overline{1, L}$ (в случае круговых полостей R_l – радиус полостей) (рис.5). Упругие волны растяжения-сжатия и сдвигов распространяются под произвольным углом α к горизонту, причем предполагается, что имеет место разделение волн на продольно-поперечные (PP-, SV-) в плоскости поперечного сечения полостей (случай плоской деформации) и сдвиговые (SH-), поляризованные вдоль осей полостей (случай антиплоской деформации). Модель транстропного массива позволяет разделять волны.

Предположим, что S_l ($l = \overline{1, L}$) области поперечного сечения полостей, а $S_0 = \mathfrak{R}^2 - \bigcup_{l=1}^L S_l$ область поперечного сечения многосвязной среды (транстропного массива). С центром каждой полости свяжем локальную безразмерную координатную систему (x_{1l}, x_{2l}) ($l = \overline{1, L}$), $(x_{10}, x_{20}) = (x_1/R, x_2/R)$, R - некоторый линейный размер.

Горизонтальные полости проведены вдоль оси Ox_3 и имеют поперечное сечение с контуром Γ_l .

Уравнения обобщенного закона Гука для транстропного массива описываются выражениями (2). В случае некругового и кругового контура полостей отображающая функция описывается соотношениями (5), (5*), подразумевая в них описание функции для каждого контура Γ_l .

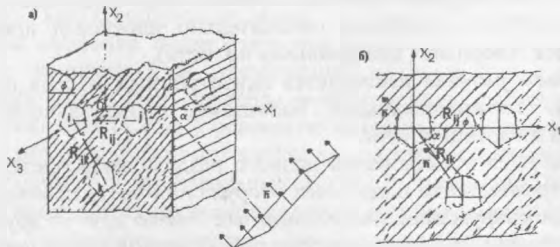


Рисунок 5 - Схема распространения плоской гармонической волны в транстропном массиве с полостями глубокого заложения

Гармоническая волна, падающая на полости, может быть описана соотношениями (1) с волновыми числами вида (6).

Рассматривая также разделение волн, можно определить случай плоской деформации при падении продольно-поперечных волн (PP-, SV-) и выделить уравнения движения в виде (3а), и случай антиплоской деформации – при падении сдвиговых волн (SH-) – дифференциальные уравнения (3б). В обоих случаях напряженно-деформированные характеристики будут зависеть от координат в плоскости поперечного сечения полостей (x_1, x_2) .

При постановке краевых задач учитываем условия на границе полостей – в случае решения первой основной задачи в напряжениях (7), в случае второй основной задачи – в перемещениях (7*).

Не ограничивая общности, можно и в данном разделе использовать аналитическую теорию метода сведения дифференциальных уравнений в частных производных к уравнениям Гельмгольца, имеющим решения в цилиндрических функциях.

Для выделения решения уравнений Гельмгольца вида (9а*), (9б) необходимо использовать следующие положения.

В общем случае, точки $O_l^{(i)}$, $i=1,2,3$, являющиеся центрами локальных координатных систем $(x_{1l}^{(i)}, x_{2l}^{(i)})$, $i=1,2,3$, в областях S_l ($l=\overline{1,L}$) при аффинных преобразованиях (8а) и (8б) перейдут в точки $O_q^{(i)}$, $i=1,2,3$. Их будем рассматривать как начало локальных декартовых систем $(\xi_{1l}^{(i)}, \xi_{2l}^{(i)})$, $i=1,2,3$ с осями, ориентированными по осям координат $(\xi_{1l}^{(i)}, \xi_{2l}^{(i)})$ и полярных координат $(r_l^{(i)}, \kappa_l^{(i)})$ с отчетом полярного угла $\kappa_l^{(i)}$ от оси $O_l^{(i)} \xi_{1l}^{(i)}$.

Решения уравнений в перемещениях $\bar{u} = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ (9а*) и (9б), в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции, можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $A_{nl}^{(i)}$, $i=1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода:

$$u_i = \sum_{l=1}^L \sum_{(n)} A_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}, \quad n = -\infty, +\infty, \quad i=1,2,3. \quad (42)$$

Применяя теоремы сложения цилиндрических функций, можно получить представления для $\bar{u} = \{u_i\}$, $i=1,2,3$ в любой из координатных систем $(r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)})$:

$$u_i = \sum_{(n)} A_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} + s_{nl}^{(i)} J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}, \quad (r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)}), \quad i=1,2,3, \quad (42^*)$$

где

$$s_{nl}^{(i)} = \sum_{\substack{q=1, \dots, P \\ q \neq l}}^L \sum_{(p)} A_{pq}^{(i)} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_q^{(i)}}, \quad l=\overline{1,L} \quad (43)$$

$(R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)})$ – координаты точки $O_q^{(i)}$ в системе координат $(r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)})$

Соответствующие выражения в перемещениях (42*) формулы для напряжений находятся аналогично выкладкам первого раздела, однако в данном случае приходится учитывать еще компонент при $s_{nl}^{(i)} - J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)})$.

Так как функция Бесселя является цилиндрической и имеет те же свойства, что и функция Ханкеля, то и компоненты в разложении в напряжениях при функции Бесселя те же, что и при функции Ханкеля, а именно:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12};$$

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} A_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \bar{G}_j^{(i)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}] + \\ &+ s_{nl}^{(i)} \omega_0^{(i)} [G_j^{(i)} J_{n-1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(i)}} - \bar{G}_j^{(i)} J_{n+1}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(i)}}], \quad (j = \overline{1,3}), \\ \sigma_{k3} &= \frac{1}{2} \sum_{(n)} A_{nl}^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \bar{G}_k^{(3)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}] + \\ &+ s_{nl}^{(3)} \omega_0^{(3)} [G_k^{(3)} J_{n-1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n-1)\kappa_l^{(3)}} - \bar{G}_k^{(3)} J_{n+1}(\omega_0^{(3)} r_l^{(3)}) e^{i(n+1)\kappa_l^{(3)}}], \quad (k = \overline{1,2}). \end{aligned} \quad (44)$$

Далее, с использованием теории контурных разложений цилиндрических функций показывается, что функции Ханкеля и Бесселя представляются с помощью контурных комплексных коэффициентов в виде

$$H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} = \sum_{(p)} Q_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}, \quad J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} = \sum_{(p)} P_{npl}^{(i)} e^{ip\theta_l^{(i)}}, \quad (45)$$

где $Q_{npl}^{(i)}$, $P_{npl}^{(i)}$ контурные коэффициенты вида (16), (16*).

Дальнейший ход рассуждений подобен исследованиям в предыдущих разделах. С помощью контурных представлений решение задач сводится к СЛАОУ, решаемым методом редукции (в случае первой и второй основных задач):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} (A_{nl}^{(i)} \lambda_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{(i)} \psi_{npl}^{(i)}) &= -i \frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^2 U_i^* \alpha_{pl}^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} (A_{nl}^{(i)} g_{npl}^{(i)} + s_{nl}^{(i)} \tau_{npl}^{(i)}) = -i \frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^2 U_i^* \beta_{pl}^{(i)} \\ \sum_{(n)} (A_{nl}^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} + s_{nl}^{(3)} \psi_{npl}^{(3)}) &= -(\gamma/2) R_l U_3^* \alpha_{pl}^{(3)}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\sum_{(n)} (B_{nl}^{(i)} Q_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{(i)} P_{npl}^{(i)}) = -U_i^* Q_{pl}^{(i)}, \quad i = \overline{1,2,3}, \quad p = \overline{-\infty, +\infty}. \quad (46^*)$$

Для проведения анализа напряженно-деформированных характеристик рассмотрен алевролит с глубоко заложеными в нем парными полостями. Разработаны алгоритмы и прикладной пакет программ в среде MatLab. Результаты тестировались на результатах известных тестовых задач, в частности – на случае одиночных полостей. Показано, что при отдалении полостей на расстояние более (10-15)R напряженно-деформированное состояние каждой полости характеризуется как НДС одиночной полости.

На рис.6 показано влияние частоты падающих продольных и поперечных волн на динамическое состояние круговых неподкрепленных полостей при $\varphi = 90$.

В данном разделе также исследуется анализ НДС полостей при разных углах падения и частотах волн, разных размерах и геометрии полостей, при разных физико-механических параметрах транстропной среды.

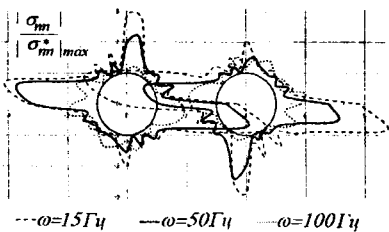


Рисунок 6 – Влияние частоты падающих волн на динамическое состояние круговых полостей

В четвертом разделе изложено обобщение исследований многосвязного массива на случай произвольной ориентации параллельных полостей относительно линии простирания плоскости изотропии. Получены аналитические выражения для компонентов напряжений и перемещений с учетом соотношений во втором и третьем разделах. При анализе соответствующих разноориентированных полостей расчетами показывается взаимовлияние полостей, влияние угла отклонения полостей от линии простирания наклонных слоев. На рис. 7 приведены эпюры динамических напряжений на контурах круговых неподкрепленных выработок для разных случаев расположения их в массиве (штрека, орта, квершлага) при разных типах распространения волн (PP-, SV-) и вертикальной слоистости.

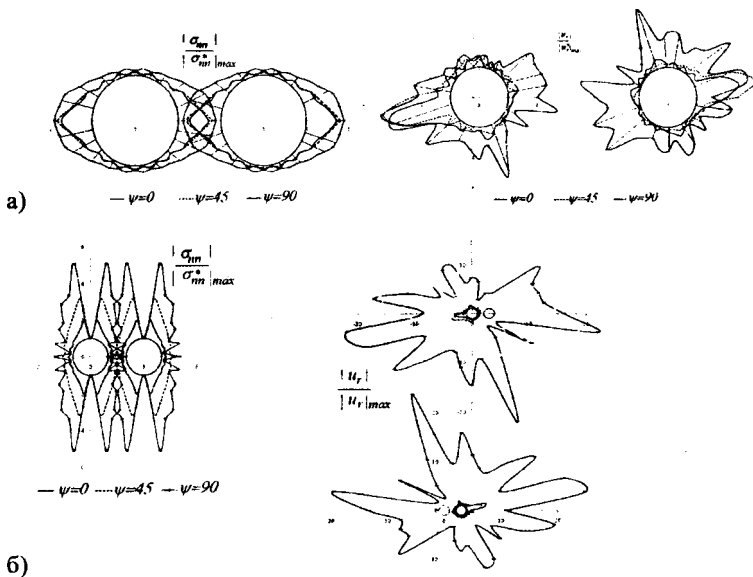


Рисунок 7 - Взаимовлияние круговых выработок при их разной ориентации в трансотропном массиве: а) эпюры напряжений и перемещений при падении PP-волны; б) эпюры - при падении SV-волн

В пятом разделе исследованы класс динамических задач по определению напряженно-деформированного состояния анизотропного полупространства с полостями произвольного профиля и глубины заложения при стационарной дифракции сдвиговых волн (антиплоская деформация). При решениях задач учитывалось граничное условие на плоской поверхности

$$(\alpha_1 \tilde{u}_3 + \alpha_2 \sigma_{13})|_{x_1=0} = 0, \quad (47)$$

которое после преобразований сводится к

$$(m_0 + m_1 \partial_1 + m_2 \partial_2) \tilde{u}_3|_{x_1=0} = 0, \text{ где } m_0 = \alpha_1, m_1 = \alpha_2 b_{55}, m_2 = \alpha_2 b_{45}. \quad (48)$$

Причем, если параметр $\alpha_1 = 0$ – плоская граница тела свободна от нагрузок; если $\alpha_2 = 0$ – она жестко закреплена.

Далее, при исследовании дифракционной картины вблизи полостями учитывались не только напряженно-деформированные характеристики падающих и отраженных от полостей волн, но и отраженные от плоской поверхности волны в отсутствии полостей:

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 &= U_3^+ \exp[i(-(k_1 + 2\frac{m_2}{m_1} k_2 - 2i\frac{m_0}{m_1})x_1 + k_2 x_2)], \text{ если } \alpha_2 \neq 0; \\ \dot{u}_3 &= -U_3^+ \exp[i(-k_1 x_1 + k_2 x_2)], \text{ если } \alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Используя аппарат сведения дифференциальных уравнений в частных производных к уравнениям Гельмгольца, с применением теории метода изображений, метода обобщенной суперпозиции получены теоретические решения в перемещениях (для общего случая многосвязной среды и обобщенной плоской деформации) в виде

$$\begin{aligned} u_3 &= \sum_{(n)} A_{nl} H_n^{(1)}(\omega_0 r_l) e^{in\kappa_l} + (s_{nl}^{(1)} + s_{nl}^{(2)}) J_n(\omega_0 r_l) e^{in\kappa_l}, \\ (r_l < R_{lq}^{(1)}), (r_l < R_{lq}^{(2)}), q \neq l, l = \overline{1, L} \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$s_{nl}^{(1)} = \sum_{\substack{q=1, (p) \\ q \neq l}}^L \sum_{p \neq n} A_{pq} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0 R_{lq}^{(1)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}}, s_{nl}^{(2)} = \sum_{q=1 (p)}^L \sum_{p \neq n} A_{pq} (-1)^{p+n} H_{p+n}^{(1)}(\omega_0 R_{lq}^{(2)}) e^{-i(p+n)\kappa_{lq}}; \quad (51)$$

$(R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)})$ – координаты полюса O_{E_l} в системе координат $(r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)}), i = 1, 2$.

Далее с помощью контурных соотношений получена бесконечная СЛАУ, решенная методом редукции. При проведении анализа учитывались глубина заложения полостей, их геометрия, способы залегания в массиве, физико-механические параметры массива и падающих сдвиговых волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткие выводы по результатам диссертационных исследований:

- сформулирована постановка задач определения динамического напряженно-деформированного состояния анизотропного слоистого массива с разноориентированными полостями произвольного профиля и глубины заложения при стационарной дифракции упругих волн разного типа и предложен аналитический способ их решения;

- исследован класс задач расчета НДС одиночных полостей произвольного профиля глубокого заложения при стационарной дифракции упругих волн для случая плоской, антиплоской деформации. Показано существенное влияние механических параметров среды – угла наклона плоскости изотропии, параметров падающих волн - типа волн, угла падения, амплитуды и частоты волн, геометрии полости – ее формы и размера, на состояние массива вблизи одиночной полости при разных граничных условиях;

- предложено обобщение исследований и анализа напряженно-деформированного состояния разноориентированных одиночных полостей некругового и кругового профиля при обобщенно-плоской и антиплоской деформации и стационарной дифракции упругих волн разного типа;

- исследовано взаимовлияние разноориентированных глубоко заложённых полостей разного профиля в анизотропном слоистом массиве при стационарной дифракции волн;

- решен класс задач трансформного слоистого полупространства с мелко заложёнными полостями произвольной формы при стационарной дифракции сдвиговых волн на случай антиплоской и обобщенно-плоской деформации. Проведен качественный и количественный анализ напряженно-деформированных характеристик в зависимости от глубины заложения полостей, их ориентации, формы, а также физико-механических параметров массива и волн;

- разработан универсальный пакет прикладных программ в среде MatLab для расчета и анализа НДС разноориентированных полостей произвольной общей формы и глубины заложения в трансформном наклонно-слоистом массиве, который может быть использован при формировании проектной документации по строительству и эксплуатации подземных сооружений в сейсмически активных зонах.

Оценка полноты решений поставленных задач. Цели и задачи, поставленные в работе, охвачены полностью. Результаты исследований, их оценка, апробация подтверждают полноту и обоснованность решений поставленных задач.

Разработка рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов. Полученные аналитические решения задач и результаты исследований могут быть полезны при расчете, проектировании и выборе оптимального строительства и эксплуатации подземных сооружений в среде сложного строения, они также могут быть широко использованы в учебном процессе.

Оценка технико-экономической эффективности определяется в выборе апробированной механической модели трансформного наклонно-слоистого

массива, предложении аналитических методов расчета динамического НДС разноориентированных полостей произвольного профиля и глубины заложения, использовании вычислительных методов и возможностью широкого применения результатов в проектных организациях.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. В работе впервые получены решения нового класса задач определения НДС трансропного наклонно-слоистого массива, содержащего разноориентированные полости произвольного профиля и глубины заложения при стационарной дифракции упругих волн разного типа, которые могут считаться крупным достижением в области механики деформируемого твердого тела и теории дифракции волн. По научно-практической значимости работа соответствует современному научно-техническому уровню.

Список опубликованных работ по теме диссертации:

- 1 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Дифракция стационарных SH-волн на горизонтальных горных выработках произвольного профиля в трансропном массиве // «Проблемы прикладной и теоретической механики», сборник научных трудов, №38, Донецк, 2002. - С.169-175.
- 2 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Стационарная дифракция упругих волн на полости кругового сечения в трансропном массиве // Труды международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Алматы, 2005. - С. 96-100.
- 3 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С. Напряженно-деформированное состояние трансропного массива с полостью некругового профиля при распространении упругих волн // Тезисы докладов международной научной конференции «Проблемы теоретической и прикладной механики» (1-2 марта 2006 г., Алматы). - С.50.
- 4 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С. Напряженно-деформированное состояние трансропного массива с полостью некругового профиля при распространении упругих волн // Вестник КазНУ (спец. выпуск). Серия «Математика, механика, информатика», №2, 2006. - С.10-14.
- 5 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Динамическое напряженно-деформированное состояние выработки произвольного поперечного профиля и глубины заложения в упругом трансропном массиве при антиплоской деформации // «Известия Тульского государственного университета», секция «Геомеханика. Механика подземных сооружений», 2006. - С.11-15.
- 6 Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Стационарная дифракция упругих SH-волн сдвига в многосвязной анизотропной среде в условиях антиплоской деформации // «Известия Тульского государственного университета», секция «Геомеханика. Механика подземных сооружений», 2007. - С. 3-9
- 7 Ж.К. Масанов, Атымтаева Л.Б., Г.С. Мырзахметова, Б.Е. Ягалиева. Динамическое напряженно-деформированное состояние анизотропного массива с двумя неподкрепленными штрекообразными параллельными выработками произвольного профиля глубокого заложения при стационарной дифракции упругих SH-волн сдвига // Труды международной

- научно-технической конференции "Вторые Ержановские чтения", Актобе, 19-21 июня 2007. - С.207-211.
- 8 Ж.К. Масанов, Атымтаева Л.Б., Г.С. Мырзахметова, Б.Е. Ягалиева К решению второй основной задачи по определению напряженно-деформированного состояния транструпного массива с двумя штрекообразными выработками произвольного профиля глубокого заложения, подкрепленными абсолютно жесткой крепью, при стационарной дифракции упругих SH-волн сдвига // Труды международной научно-технической конференции "Вторые Ержановские чтения", Актобе, 19-21 июня 2007.- С. 45-49.
 - 9 Masanov Zh., Atymtayeva L., Yagaliyeva B., Myrzakhmetova G. Stationary diffraction of elastic SH-waves onto mutually influencing cavities of arbitrary structure and deep lying in transtropic massif // Proceedings of the 3rd IASME / WSEAS International Conference on CONTINUUM MECHANICS (CM'08), Cambridge, UK, February 23-25, 2008, ISBN: 978-960-6766-38-1, ISSN: 1790-2769. - P. 5-9.
 - 10 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. Актуальные проблемы динамики анизотропных сред с неоднородностями // «Механика и Машиноведение», 2007. - С.79-85.
 - 11 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е. Динамика анизотропных сред с взаимовлияющими полостями произвольного профиля глубокого заложения // Материалы Республиканской научно-практической конференции, посвященной 70 –летию геомеханика, профессора Байтелиева Т.Б., 15-16 мая 2008, Туркестан. - С.135-140.
 - 12 Атымтаева Л.Б. К анализу динамического напряженно-деформированного состояния при дифракции SH-волн сдвига на полостях в анизотропном массиве // Материалы Международной научно-практической конференции «Проблемы инновационного развития нефтегазовой индустрии», 3-4 апреля 2008 года, КБТУ, Алматы. - С.174-178.
 - 13 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е. Теоретические аспекты исследования динамического напряженного состояния анизотропного массива с полостями неглубокого заложения // «Механика и машиноведение» (спец. выпуск), №4, 2008. - С.101-106.
 - 14 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е. Теоретические аспекты исследования динамического напряженного состояния анизотропного массива с полостями неглубокого заложения // Тезисы докладов III Международной научной конференции «Современные проблемы механики», Алматы, Казахстан, 24-25 июня 2008 года, посвященная 70-летию со дня рождения профессора Масанова Ж.К. - С.87.
 - 15 Атымтаева Л.Б. К решению задачи о стационарной дифракции сдвиговых волн на полостях в анизотропном массиве // Труды Международной научно-практической конференции «Информационно-инновационные технологии: Интеграция науки, образования и бизнеса», посвященная 75 -летию КазНГУ имени К.И. Сатпаева, Алматы, 27-28 ноября 2008 г., - С.158-163.
 - 16 Атымтаева Л.Б. К решению задачи о стационарной дифракции сдвиговых волн на полостях в анизотропном массиве // Вестник КазНГУ, №6/1(70), 2008. - С.37-43.

- 17 Атымтаева Л.Б. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния выработок глубокого заложения в анизотропном массиве при дифракции упругих продольно-поперечных волн. // Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», 17-19 июня 2009 года, том 1. - С.157-161.
- 18 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С. Исследование напряженного состояния горного массива с двумя глубоко заложеными горизонтальными круговыми выработками при дифракции упругих SH-волн сдвига // Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», 17-19 июня 2009 года, том 2. - С.301-304.
- 19 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С. Исследование дифракции SH-сдвиговых волн на круговой полости неглубокого заложения в транслопном массиве с несплошным сцеплением наклонных слоев // Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», 19 - 20 ноября 2009. - С.603-608.
- 20 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Ягалиева Б.Е. Анизотропты тау жыныстарындағы жер бетіне жақын қазбалардың динамикалық кернеулік деформациялық күйін зерттеу // Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», 19 - 20 ноября 2009. - С.600-603
- 21 Атымтаева Л.Б. Исследование динамики анизотропного многосвязного массива при стационарной дифракции упругих волн при решении первой основной задачи // Известия НАН РК, №2, 2010. - С.105-113.
- 22 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е. Анализ динамического состояния взаимовлияющих неподкрепленных круговых выработок в анизотропном массиве при стационарной дифракции SH-волн // Известия НАН РК, №2, 2010. - С.127-131.
- 23 Атымтаева Л.Б. Решение первой основной задачи для выработки глубокого заложения в анизотропном массиве при стационарной дифракции упругих продольно-поперечных волн // Proceedings of the International Scientific-Technical Conference dedicated to the 20-th anniversary of National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan, Aktobe, May 21-22, 2010, Part 1. - P. 29-34.
- 24 Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Ягалиева Б.Е. Влияние физико-механических параметров транслопной среды и падающих волн на НДС выработок неглубокого заложения с абсолютно-жесткой обделкой. // Proceedings of the International Scientific-Technical Conference dedicated to the 20-th anniversary of National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan, Aktobe, May 21-22, 2010, Part 1. - P. 106-109.
- 25 Atymtayeva L., Masanov Zh., Yagaliyeva B., Myrzakhmetova G. Dynamics of transropic elastic continuums with non-homogeneities // Proceedings of World Congress on Engineering 2010, the 2010 International Conference of Mechanical Engineering, London, UK, 30 June-2 July, 2010. - P. 1024-1027.

- 26 Атымтаева Л.Б.К анализу динамики анизотропного многосвязного полупространства при стационарной дифракции упругих волн при решении первой основной задачи //Известия НАН РК, №3, 2010. - С.107-112.
- 27Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Ягалиева Б.Е. , Мырзахметова Г.С., Актанова Б.Анализ динамического состояния взаимодействующих круговых выработок мелкого заложения с жесткой обделкой в анизотропном массиве при стационарной дифракции сдвиговых волн //Известия НАН РК - №3 2010. - С. 113-117.
- 28Атымтаева Л.Б. К анализу динамики анизотропного многосвязного массива с усложненными свойствами при стационарной дифракции упругих волн //Вестник КазНТУ. - №3, 2010. - С.243-248.
- 29Атымтаева Л.Б. Анализ динамического состояния взаимодействующих круговых выработок глубокого заложения с жесткой обделкой в анизотропном массиве с несплошным сцеплением слоев при стационарной дифракции сдвиговых волн //Вестник КазНТУ.- №4, 2010. - С.233-238.
- 30Атымтаева Л.Б. Бірінші негізгі есепті шешу арқылы анизотропиялық тау жынысында жер бетіне жақын орналасқан қазбалардың динамикалық кернеулік деформациялық күйін зерттеу //Вестник КазНТУ имени Абая, 2010. - С.14-17.
- 31Атымтаева Л.Б. Обобщенно-плоская деформация многосвязного анизотропного массива при дифракции упругих волн //«Механика и моделирование процессов технологии», №1, 2010. - С.131-138.
- 32Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б., Мырзахметова Г.С.Анализ динамического состояния взаимодействующих круговых выработок в анизотропном массиве при стационарной дифракции SH-волн //«Механика и моделирование процессов технологии», №1, 2010. - С.147-151.
- 33Атымтаева Л.Б. Исследование динамики анизотропного многосвязного массива при стационарной дифракции упругих волн при решении второй основной задачи // Вестник НАН РК - №4, 2010. - С.21-24.
- 34Масанов Ж.К., Атымтаева Л.Б. , Мырзахметова Г.С., Ягалиева Б.Е.Анализ динамического напряженного состояния взаимодействующих круговых выработок с жесткой обделкой в анизотропном массиве при стационарной дифракции SH-волн //Вестник НАН РК - №4, 2010. - С.18-21.

АТЫМТАЕВА ЛӘЗЗАТ БАҚЫТҚЫЗЫ

АНИЗОТРОПТЫҚ ҚАТПАРЛЫ МАССИВТЕГІ ҚУЫСТАРДА СЕРПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ СТАЦИОНАРЛЫҚ ДИФРАКЦИЯСЫ

01.02.04 – деформацияланатын қатты дене механикасы мамандығы бойынша физика-математика ғылымдарының докторы ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның авторефератының

ТҮЙІНІ

Зерттеу объектісі: изотропия жазықтығы көлбеу серпімді трансроптық тау жыныстарында сол жазықтықтың бойлық өсіне белгілі бұрышпен жүргізілген горизонталды жерасты қазбалар (штректер, квершлактар, диагональдық қазбалар, қысымды, қысымсыз гидротехникалық тоннельдер, әртүрлі мақсаттағы жерасты құрылымдары, метрополитен тоннелдері, станциялар, эскалатор, құбырлар.

Жұмыстың мақсаты: Қатпарлы көлбеу анизотроптық тау жыныстарында кез келген тереңдікте әртүрлі горизонталдық жерасты құрылымдардың стационарлық толқындардың әсерінен болатын динамикалық кернеулік-деформациялық күйін жүйелі зерттеу мен есептеудің методикалық негізін жасау.

Зерттеу әдістері: Зерттеулер жүргізу үшін құбырлық функциялар, комплексті айнымалы функциялар теорияларының, серпімді теорияның жалпыланған суперпозиция, конформдық шағылыстыру, аффиндық түрлендіру және бейнелеу әдістерінің, сонымен қатар серпімді теорияның жазық, жалпылама жазық және антижазық деформациялар шарттарында әдістерінің дәл математикалық құралдары пайдаланылды. Контурларда құбырлық функцияларда жіктеу арқылы шешілетін есептерді, белгісіз коэффициенттер арқылы шексіз сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін редукция әдісімен шешуге келтірілді.

Алгоритмдер мен қолданбалы программалар пакетін жасауда модульдік программалаудың тиімді әдістері пайдаланылды.

Жұмыстың нәтижелері: Бағыты, тереңдігі әртүрлі кез келген пішінді горизонталдық қуыстары бар анизотроптық көлбеу қатпарлы орталар үшін серпімді толқындардың стационарлық дифракция есептер класстары жазық, жалпылама жазық және антижазық деформациялар шарттарында аналитикалық шешімдері алынды.

Құрылған жаңа алгоритмдар мен қолданбалы программалар пакеті стационарлық толқындардың әсерінен болатын трансропты массивте кез келген тереңдіктегі және пішінді горизонтал қуыстардың маңындағы динамикалық кернеулер мен жылжулардың мәндерінің берілуіне байланысты көпвариантты есептеулер жүргізіліп, олардың өзгеру заңдылықтары анықталды.

Бірінші рет аналитикалық түрде трансроптық ортада кез келген тереңдікте орналасқан жеке және бірнеше өзара жақын жерасты қазбалардың

толқындардың әсерінен болатын кернеулік-деформациялық күйлерін зерттеулердің анизотроптық серпімді теорияның негізгі есептері жазық, жалпылама жазық деформациялар шарттарында шешілді. Комплексті потенциалдар шексіз қатарлар түрінде алынып, олардың белгісіз коэффициенттері редуция әдісімен табылып, жинақтылығы санмен көрсетілді. Кернеулер мен жылжулардың мәндері дөңгелек емес қазбалардың маңында есептеліп, толық анализ жасалынды; нәтижелері кесте, график және эпюралармен берілді, басты тұжырымдар алынды.

Негізгі конструктивтік, технологиялық және техникалық пайдалану сипаттамалары. Жұмыста мақсатты негізгі ғылыми нәтижелер серпімді трансропты ортада кез келген тереңдіктегі жеке және жерасты қазбалардың параллель толқындардың әсерінен болатын динамикалық кернеулік-деформациялық күйін зерттеудің негізгі динамикалық есептері жазық, жалпылама жазық және антижазық деформациялар жағдайында аналитикалық әдістерімен шешілді, олардың негізінде универсалды қолданбалы программалар пакеті құрылды. Қазбалардың маңында серпімді кернеулер мен жылжулардың мәндері көпвариантты есептеулермен анықталды, қортындылар жасалды.

Жұмыстың нәтижелерін енгізу дәрежесі.

Жұмыс ҚР БҒМ академик Ө.А.Жолдасбеков атындағы «Механика және машинатану» институтының «Геомеханиканың, деформацияланатын қатты дене, тау жыныстар механикаларының проблемалары, мұнайгаз, таулырудалық салаларының жерасты құрылымдарын есептеу әдістерін құру «фундаменталдық ҒЗЖ» жоспарлық программасының бір бөлігі.

Қолдану облысы. Деформацияланатын қатты дене және тау жыныстар механикасы, толқындық динамика, күрделі құрылымды массивте кез келген тереңдікте жүргізілген жеке, параллель жерасты құрылымдарды проектилеу, есептеу және пайдалану.

Жұмыстың маңыздылығы. Жұмыста бірінші рет алынған теориялық ғылыми нәтижелерді сейсмаактивті зоналардағы күрделі құрылымды тау жыныстарында кез келген тереңдіктегі арнаулы жерасты қуыстардың, мұнайгаз ұңғыларын, тоннелдердің т.б. динамикалық орнықтылықтарын зерттеуге, проектилеуға, техникалық жоғарғы оқу орындарында оқу процесінде пайдалануға болады.

Зерттеу объектісінің дамуы және болжамдық ұсыныстар. Деформацияланатын қатты дене және тау жыныстар механикасының трансропты серпімді ортадағы күрделі құрылымдардың стационарлық дифракция есептерін теориялық шешу әдістерін, сонымен қатар қазіргі заманғы дамыған сандық әдістерін біртөксіз көлбеу қатпарлы серпімді-пластикалық массивтегі арнаулы кеңістікті жерасты құрылымдардың стационарлық емес дифракциясын айнымалы динамикалық сыртқы күштердің, жерсілкіністің әсерлерін зерттеу есептерін шешу мүмкіншілігі бар.

ATYMTAYEVA LYAZZAT BAKHYTOVNA

**STATIONARY DIFFRACTION OF ELASTIC WAVES ON THE HOLES IN
ANISOTROPIC LAYERED MASSIF**

Doctoral thesis of physical and mathematical sciences on a specialty of
01.02.04 - Mechanics of Solids

SUMMARY

The object of inquiry: lengthy horizontal mine roadways (drifts, crosscuts, diagonal mine workings - orts), forcing and non-pressure hydraulic tunnels, underground constructions, distillation tunnels, stations, subways, and pipelines.

Objective: to develop the methodical base for calculating and systematic research of dynamical stress-strain conditions of differently oriented underground constructions modeled by holes in layered rock folded massif in case of solving of diffraction tasks

Research methods: in order to make a research it's used the strong mathematical calculations on base of theory of cylindrical functions, theory of complex variable functions and affine transformations, methods of elastic theory. As a result of analytical researches, the infinite system of linear algebraic equations with the cylindrical Hankel and Bessel functions are obtained. These systems are solved by using the reduction method. Techniques of module programming are used for obtaining and developing the algorithms and applied software package.

Outcomes: As a result of research the new solutions of diffraction problems in case of propagation of elastic waves in anisotropic layered body with lengthy different orientated in massif holes which have arbitrary form and depth of laying are obtained. On base of these solutions the detailed analysis of stress-strain condition around the circular and non-circular holes is held. All characteristics of stress-strain condition depend on geometrical and mechanical properties of anisotropic massif, falling waves and holes. New algorithms and software packages are produced. They allow making multivariate calculations of dynamical conditions of differently oriented holes with various forms and depth of laying.

Basic constructive, technological, technical and operational characteristics. To get the results we used rigorous analytical solution, leading to the development of universal software package that allows performing multiple calculations of the dynamic stress-strain conditions of underground constructions in the layered bodies with their arbitrary orientation in relation to the layers of bedding in the massif.

Research results and usage recommendations. This work is a part of the planned researches of solid mechanics laboratory from Institute of Mechanics and Mechanical Engineering named after U.A. Dzholdasbekov, in accordance with research problems of "geomechanics, mechanics of deformable solids and rocks, the development of calculating methods of underground structures of oil and gas and mining industries."

Usage areas. Mechanics of deformable solids, wave dynamics, the construction and operation of underground facilities.

Low cost performance and significance of the work. The results can be used in formulating recommendations, can be included to basic documentation for the construction of underground structures in seismically active zones, with a sinking of tunnels underground, oil and gas pipelines, mining, and can also be embedded in the learning process.

Prognostic proposes for object research development. The research of diffraction problems in mechanics of underground structures are developing in the direction of research of a more general class of non-stationary diffraction, with obtaining both analytical and numerical results, summarizing the results for three-dimensional problems of diffraction in anisotropic massif. Using numerical methods allow exploring the objects of underground construction with complex shape embedded in inhomogeneous massif.

Атымтаева Ляззат Бахытовна

**Стационарная дифракция упругих волн на полостях в анизотропном
слоистом массиве**

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат

**диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Подписано в печать 10.11.2010 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсет №1. Печать RISO.
Усл. п. л. 1 Тираж 130 экз. Заказ № 586

Отпечатано в компании «CopyLand»
г. Алматы, пр. Сейфулина, 541
тел.: 261-16-12, 261-48-44
E-mail: print@copyland.kz