

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОУ ВПО «СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

Н.А. Телеганов, Г.Н. Тетерин

## МЕТОД И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ

Рекомендовано УМО по образованию в области геодезии  
и фотограмметрии в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по направлению  
подготовки 120100 «Геодезия»

Новосибирск  
СГГА  
2008

УДК 528.28 + 528.(09)  
Т 311

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
Сибирского государственного университета путей сообщения  
*А.А. Визгин*

Кандидат технических наук, профессор  
Сибирской государственной геодезической академии  
*К.Ф. Афонин*

**Телеганов, Н.А.**

Т 311 Метод и системы координат в геодезии [Текст] : учеб. пособие /  
Н.А. Телеганов, Г.Н. Тетерин. – Новосибирск : СГГА. – 2008. – 139 с.

ISBN 978-5-87693-269-3

Учебное пособие написано в соответствии с учебными планами подготовки специалистов геодезического профиля СГГА по программе курса «Системы координат в ГИС» для специальностей «Прикладная геодезия» и «Информационные системы» и по программам курсов «Проблемы современной геодезической науки» и «История геодезии» для магистратов и бакалавров специальности «Геодезия».

В основу написания настоящего учебного пособия положены лекции, прочитанные за последние 2 года профессором Н.А. Телегановым в курсах «Системы координат в ГИС» и «Теоретическая геодезия» и профессором Г.Н. Тетериным в курсах «Проблемы современной геодезической науки» и «История геодезии».

Учебное пособие также может быть использовано студентами, изучающими дисциплины «Высшая геодезия», «Технология геодезических и картографических работ».

Печатается по решению Редакционно-издательского совета СГГА

УДК 528.28 + 528.(09)

ISBN 978-5-87693-269-3

© ГОУ ВПО «Сибирская государственная  
геодезическая академия» (СГГА), 2008

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Глава 1. Координатизация пространства (история) .....	7
1.1. Координатизация пространства в древнее время.....	7
1.2. Координатизация пространства в новое время .....	14
1.3. Координатизация территории России до XX в. ....	23
1.4. Координатизация территории России и СССР в XX в. ....	31
1.4.1. Государственные геодезические сети (плановые) .....	31
1.4.2. Схемы, программы, этапы развития нивелирных сетей .....	38
1.4.3. Космическая геодезия и координатные системы.....	44
Глава 2. Метод и системы координат.....	51
2.1. Общие сведения о координатизации и классификации систем координат .....	51
2.2. Прямоугольные декартовы системы координат .....	52
2.2.1. Прямоугольные системы координат на плоскости.....	52
2.2.2. Преобразование плоских прямоугольных координат из одной системы в другую.....	56
2.2.3. Прямоугольная пространственная система декартовых координат .....	58
2.2.4. Преобразования пространственных прямоугольных систем координат .....	61
2.2.5. Преобразования линейных отображений .....	64
2.2.6. Приведение квадратичной формы общего вида к каноническому.....	65
2.3. Криволинейные координаты .....	68
2.3.1. Общие сведения о системах криволинейных координат .....	68
2.3.2. Криволинейные координаты на поверхности .....	69
2.3.3. Полярные системы координат и их обобщения.....	71
2.3.4. Пространственная система полярных координат .....	71
2.3.5. Цилиндрическая система координат.....	73
2.3.6. Сферическая система координат .....	74
2.3.7. Полярные координаты на поверхности .....	74
Глава 3. Системы координат, применяемые в геодезии.....	78
3.1. Общая классификация систем координат, используемых в геодезии .....	78
3.2. Земные геодезические системы координат.....	79
3.2.1. Системы полярных координат в геодезии .....	80
3.2.2. Криволинейные эллипсоидальные системы геодезических координат .....	81
3.2.3. Определение эллипсоидальных геодезических координат при отдельном способе определения планового и высотного положений точек земной поверхности .....	83
3.2.4. Преобразование пространственных геодезических полярных координат в эллипсоидальные геодезические координаты .....	86

3.2.5.	Преобразование референчных систем геодезических координат в общеземные и обратно .....	88
3.2.6.	Пространственные прямоугольные системы координат.....	90
3.2.7.	Связь пространственных прямоугольных координат с эллипсоидальными геодезическими координатами .....	90
3.2.8.	Преобразование пространственных прямоугольных референчных координат в общеземные и обратно.....	91
3.2.9.	Топоцентрические системы координат в геодезии.....	97
3.2.10.	Связь пространственной топоцентрической горизонтной геодезической СК с пространственными полярными сферическими координатами.....	98
3.2.11.	Преобразование топоцентрических горизонтных геодезических координат в пространственные прямоугольные координаты $X, Y, Z$ .....	99
3.2.12.	Системы плоских прямоугольных координат в геодезии .....	101
3.2.13.	Связь плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера с эллипсоидальными геодезическими координатами .....	106
3.2.14.	Преобразование плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из одной зоны в другую.....	108
3.2.15.	Перевычисление плоских прямоугольных координат пунктов локальных геодезических построений в другие системы плоских прямоугольных координат .....	108
Глава 4.	Системы координат, применяемые в геодезической астрономии и космической геодезии.....	111
4.1.	Системы координат сферической астрономии.....	111
4.2.	Системы отсчета в космической геодезии.....	114
4.2.1.	Звездные (небесные) инерциальные геоцентрические экваториальные координаты .....	114
4.2.2.	Гринвичская земная геоцентрическая система пространственных прямоугольных координат .....	117
4.2.3.	Топоцентрические системы координат.....	118
Глава 5.	Координатизация окружающего пространства в начале XXI века в России.....	121
5.1.	Системы государственных геодезических координат в начале XXI в. ....	121
5.2.	Построение Государственной геодезической сети .....	124
	Список литературы.....	128
	Приложение 1. Решение прямой геодезической задачи в пространстве ...	129
	Приложение 2. Решение обратной геодезической задачи в пространстве	130
	Приложение 3. Преобразование геодезических координат $B, L, H$ в пространственные прямоугольные $X, Y, Z$ .....	131
	Приложение 4. Преобразование пространственных прямоугольных координат $X, Y, Z$ в геодезические $B, L, H$ .....	132
	Приложение 5. Преобразование пространственных прямоугольных координат $X, Y, Z$ СК-42 в координаты системы ПЗ-90 .....	133

Приложение 6. Преобразование референцной системы геодезических координат $B, L, H$ в систему геодезических координат ПЗ-90 $B_0, L_0, H_0$ .....	134
Приложение 7. Преобразование пространственных полярных координат системы $S, Z_G, A$ в топоцентрические горизонтные геодезические координаты $X^T, Y^T, Z^T$ .....	135
Приложение 8. Преобразование топоцентрических горизонтных геодезических координат $X^T, Y^T, Z^T$ в полярные пространственные координаты – $S, Z_G, A$ .....	136
Приложение 9. Преобразование топоцентрических горизонтных геодезических координат $X^T, Y^T, Z^T$ в пространственные прямоугольные координаты $X, Y, Z$ .....	137
Приложение 10. Преобразование эллипсоидальных геодезических координат $B, L$ в плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера $x, y$ .....	138
Приложение 11. Преобразование плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера $x, y$ в эллипсоидальные геодезические координаты $B, L$ ..	139

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших принципов развития геодезии является принцип координатизации окружающего пространства. Он определяет предметное существо геодезии, характерное для всех исторических этапов. Научно-технический прогресс и расширение жизненного пространства человечества только усиливают значимость этого принципа как в самой геодезии (во всех ее дисциплинах), так и во всех сферах деятельности людей.

С методом и системами координат (СК), координатными поверхностями студенты встречаются начиная с 1-го курса, с первых лекций по геодезии. В дальнейшем СК и проблемы создания координатной (геодезической) основы студенты изучают на всех курсах по всем специальностям, во всевозможном их разнообразии и сложности. Но обобщающих курсов при этом не дается. Глобальные и локальные координаты необходимы как геодезическая основа всего бесконечного разнообразия приложения геодезии в народном хозяйстве и науке. Без СК не обходятся никакие теоретические исследования, никакая теория.

Таким образом, теория и методы координат составляют фундамент всей геодезии и ее частей. Поэтому существует настоятельная потребность введения теории и методов координат не только как специального раздела высшей геодезии, но и как общего курса для всех геодезических специальностей.

В данном учебном пособии отражены некоторые важнейшие разделы высшей геодезии, связанные с формированием и использованием глобальных систем координат, их преобразованием (координатными операциями). Помимо этого, приведены исторические основы метода и систем координат в геодезии, позволяющие с большей полнотой и глубиной осознать значимость соответствующих проблем как в наше время, так и в будущем.

# ГЛАВА 1. КООРДИНАТИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА (ИСТОРИЯ)

## 1.1. Координатизация пространства в древнее время

Геодезия зародилась, формировалась и развивалась на базе одной фундаментальной ее особенности – землеразделения, землеустройства, т. е. организации пространства. Проблема организации территорий в наиболее ранние периоды истории человечества сводилась, например, как в легенде о египетском фараоне Сизострисе, к разделению плодородной земли на части и организации связей между ними (формирование системы межевых линий). В ранней истории, до появления земледельческих цивилизаций, разделение людьми территорий осуществлялось с помощью естественных рубежей: гор, хребтов, урочищ, береговых линий, водных рубежей и т. п. Использование территории в деятельности людей предполагало обязательную ее организацию и представление структуры территории в виде какой-либо информационной модели. В то время это были преимущественно примитивные схемы, картоподобные изображения, в которых обязательно присутствовали элементы координатизованности пространства.

Два главных принципа составляют основу организации пространства и основу выполнения геодезических работ: принцип геометризации (ПГ) и принцип координатизации (ПК). Геометризация пространства (ГП) включает в себя геометрическое обеспечение и контроль (ГОК) в различных сферах, в том числе в земледелии, строительстве и эксплуатации различных сооружений и их комплексов; геометрическую параметризацию (П) различных объектов и явлений; создание координатной основы (СКО); создание геометрической структурной информационной модели пространства (СИМП) – аналитической, графической, цифровой.

Таким образом,

$ГП = \{ГОК, П, СКО, СИМП\}$ .

В свою очередь, координатизация пространства (КП) состоит из работ по формированию системы координат (ФСК) и распространению ее на окружающее пространство и обновление (РСКО), т. е.

$КП = \{ФСК, РСКО\}$ .

Проявление ПГ и ПК особенно наглядно для древнего времени.

Время реализации первого принципа – ПГ – десятки тысяч лет назад; форма реализации этого принципа – примитивные схемы, чертежи, картоподобные изображения на костях животных, стенах пещер, на скалах и другом подходящем естественном материале. Второй принцип (ПК) составлял основу ориентации человека в окружающем пространстве.

Первым государством, с высочайшим уровнем организации всей внутренней структуры, стала Римская империя. Основу этой организации составляли системы межевых линий римского кадастра, дороги, города, системы водоснабжения. Фундаментом всех систем организации империи являлись строгие геометрические модели, линейно-прямоугольные координатные системы.

Единая система римских дорог и межевых линий, в узлах которых располагались города и населенные пункты, составляла координатный организующий каркас всей империи, создававший основу и высочайший уровень строго организованной хозяйственной, социальной, религиозной и политической жизни. Такого обширного координатного каркаса, протянувшегося от Британии до Индии, история не знала ни до, ни после древнего Рима.

Как отмечалось выше, под координатизацией пространства (КП) понимается формирование систем координат (СК) и их распространение или использование на организуемое пространство. В проблеме КП ярко отразилось существо геодезии на всех ее исторических этапах.

Освоение окружающего пространства возможно только при условии его координатизации, т. е. создания в нем какой-либо системы координат (СК), распространения ее на все пространство и, в конечном итоге, модельного представления этого пространства в данной СК.

Проблема КП связана с проблемой геометризации разнообразных явлений природы и общества. При этом геометризация – это представление явления, процесса, объекта какой-либо геометрической фигурой, образом или аналитической зависимостью, определяющей пространственные отношения и формы (представленные в виде координатной или метрической зависимости).

Для регулярного управления событиями, явлениями, процессами в пространстве необходима была их организация, а, следовательно, решение проблемы КП и геометризации. Причинно-следственный и функциональный механизм различных систем, в том числе и социально-экономических, хозяйственных, технических, управленческих зависит от геометрических аспектов этих систем. Этот механизм со временем усиливается.

При переходе от одного образа жизни к другому (например, от кочевого к оседлому) человек по-новому осмысливает пространство и время. И это происходит на каждом новом этапе развития. Как творец вторичной среды, человек становится в центр мироздания, сам превращается в точку отсчета, слияния всех координат. Потребность в точных расчетах пространства, его геометрии, времени, необходимость предвидения своих действий предопределили введение человеком порядка, меры и числа.

Но решение прикладных геодезических задач, будь то строительство достаточно сложного объекта, возведение храма, дворца, города, крепости, канала или формирование земельного кадастра, невозможно без наличия какой-либо СК, геометрической модели окружающего пространства.

Поразительный факт – все возведенные в древнее время сооружения были ориентированы или по странам света, или по какому-либо направлению. Кроме того, за основу при их строительстве бралась какая-либо уровенная поверхность или линия ей перпендикулярная. Сама по себе ориентация какого-то объекта предполагает наличие на местности СК с заданным началом и направлением.

Задача КП состоит из двух технологических этапов:

1. выбор СК, ее начала, ориентации;
2. распространение (использование) СК в данном пространстве.

Наиболее раннее использование людьми СК осуществлялось в целях ориентации при передвижении, строительстве (пирамид, храмов), при мореплавании и т. п. В качестве координатной линии принималась полуденная или ей перпендикулярная, а в качестве координатной поверхности – уровень реки, моря, поверхность Земли (Аристотель). Очень важным фактом осуществления КП древними людьми явились карты, планы, появившиеся 5 – 7 тысячелетий назад.

Во времена древних греков и особенно в Римской империи происходит прогресс в области применения СК. Вводятся географические линии – параллели, меридианы (Дикеарх, Эратосфен, Гиппарх).

Координатизация пространства, исторически происходившая казалось бы стихийно, на самом деле подчинялась определенным законам, рассмотренным в работах [8 – 11]. Историческое время, естественные условия, научно-технический и хозяйственный уровень развития предопределяют выбор СК, подчас единственный.

Выбор естественной и очевидной наземной СК мог быть логически получен только в виде прямоугольной СК. Для этого нужно умение строить прямую линию и прямой угол. Все древние цивилизации с момента их формирования обладали знанием этих геометрических элементов и умением строить их на местности. Более того, именно соответствующие устройства и методы построения на местности прямой линии и угла появились с незапамятных времен и использовались в геодезии почти до середины XX в. (египетский крест, греческая звезда, римская грома, диоптра, эккер). Факт длительного применения «линейно-прямоугольной» технологии с древнейших времен и до наших дней несет в себе отпечаток удивительной исторической заданности, с многогранным выходом в различные сферы деятельности человека. Несомненно, что КП является ключом к эффективности управления государством и средством картографирования.

Наиболее ярко КП проявилась в древнее время в земледелии. Особенно это наглядно видно на примере римского кадастра, в котором межевые линии, а с ними и дороги были ориентированы по меридианам и параллелям. Эта прямоугольная координатизированная система межевых линий является поразительным историческим событием овеществления системы прямоугольных координат на огромных территориях. Такого рода и такого масштаба «координатной сетки», вынесенной в натуру, не знала ни одна страна ни до, ни после этого периода. Этот вещественный геометрический каркас облегчил съемки местности, составление планов и карт, решение социальных, хозяйственных, военных и географических задач, реализацию государственных функций.

Межевание (центуриация) новых земель начиналось с установки прибора грома на центральной главной точке поля и рассечения последнего двумя главными перпендикулярными линиями – осями, получившими название декуманус максимум и кардо максимум: первая – с востока на запад, вторая – с юга на север. Главные межевые линии совмещались с главными военными дорогами.

По главным линиям, служившим своего рода координатными осями, откладывались отрезки по 20 актусов (1 актус = 35,48 м), из концов которых проводились межевые линии, параллельные декумансу и кардо, и одновременно служившие проселочными дорогами в расчете на одну повозку.

Таким образом, общее поле с земельными участками представляло собою большую шахматную доску с системой главных и второстепенных дорог, расположенных по меридианам и параллелям.

Основные линии геометрического каркаса римского кадастра, декуманус и кардо, строго ориентировались по меридианам и параллелям. Существовало три способа ориентации и вынесения на местность линий декуманус и кардо.

Первая линия, выносимая на местность путем визирования прибором громой, была декуманус максимум (ДМ). Она же представляла собою самую широкую улицу в колониях Августа, и она же совпадала с главной дорогой. Затем выносилась на местность, перпендикулярно к ней, линия кардо максимум (КМ), тоже определявшая главную улицу (дорогу). Расстояния откладывались 10-футовой рейкой (жезлом). На всех пересечениях дорог закладывались центурийные камни с нанесенными на них аббревиатурами ДМ и КМ (рис. 1.1).

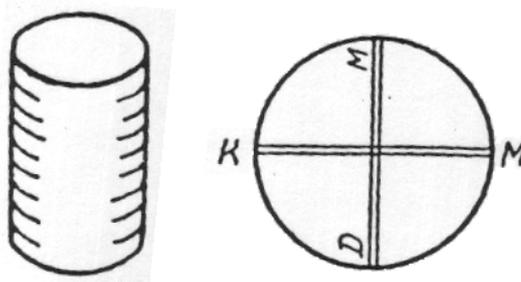


Рис. 1.1. Маркированные центурийные камни

В системе центурийных полей на центурийных камнях фиксировалась координатная нумерация. Например, следующий номер

ДД LXXXXYIII, СК LXXY,

нанесенный на межевом камне, означал, что это 98 центурия справа от ДМ и 75 снизу от КМ (рис. 1.2). В центре центуризованного поля находилось центурия с номером и аббревиатурой, показанной на рис. 1.3. Иногда терминии (линия межевания) просто нумеровались: терминий 1-й, 2-й, ...

Если заменить слова «справа», «слева», «сверху», «снизу» знаками «+», «-», а декуманус и кардо на X и Y, то наличие прямоугольной системы координат (ПСК) становится несомненным.

<i>SD</i>	<i>DD</i>
<i>VK</i>	<i>VK</i>
<i>SD</i>	<i>DD</i>
<i>CK</i>	<i>CK</i>

Рис. 1.2. Обозначения в латинской аббревиатуре 4-х главных площадей центурийной системы: левое (SD), правое (DD), переднее (верхнее) – (VK), заднее (нижнее) – (CK)

<i>SDI</i>	<i>DDI</i>
<i>VKI</i>	<i>VDI</i>
<i>SDI</i>	<i>DDI</i>
<i>CKI</i>	<i>CKI</i>

Рис. 1.3. Центральные центурии

Следовательно, система нумерации земельных участков отражала наличие четкой системы прямоугольных координат, каждый элемент которой имел две координаты, точно определявшие местоположение участка поля, дороги, улицы относительно центра. В этой же СК можно было решать все метрические задачи для этого пространства в хозяйственных и государственных целях. Такие частные СК объединялись в общую прямоугольную СК с общим центром. Такие центры греки называли центрами Ойкумены: в Греции – Дельфы, в Китае – Као-ченг, в Древнем Риме – Рим, в Месопотамии – Вавилон. В V в. до н. э. при возведении афинского Акрополя предполагалось, что он станет политическим, религиозным и культурным центром Древней Греции. В I в. до н.э. по приказу императора Августа на римском Форуме был установлен «золотой миллиарий», определявший центр Римской империи.

Овеществленная координатизированная геометрия кадастра являлась материализованной геодезической сетью, наглядно отвечавшей современному определению геодезической сети.

Эффективность координатизированного римского кадастра проявилась позднее при картографировании всей империи. У Юлия Цезаря (100 – 44 гг. до н. э.) возникли две замечательные идеи, не завершенные при нем, и обе, как предполагают, греческого происхождения (из Александрии). Одна из них – преобразование календаря. Вторая – «измерение всей Римской империи», т. е. ее картографирование – была осуществлена уже без него (после его убийства) при его преемнике Августе. Еще при Цезаре были назначены ответственные люди для съемки 4-х частей империи: северной (с 28 по 25 гг. до н. э.), восточной (с 37 по 31 гг. до н. э.), южной (с 25 по 20 гг. до н. э.) и западной. Общее руководство работами осуществлял Випсаний Агриппа. Измерения выполнялись с 37 по 20 гг. до н. э. Общим результатом стала большая географическая карта, названная картой Агриппы. Она была помещена в

специально построенном по приказу Августа колонном зале (портике Октавия) и «показывала миру мир как спектакль». Агриппой были написаны географические комментарии, на которые опирались все книги Плиния.

Эта карта стала прототипом больших стратегических карт. Копия поздней карты, известная как карта Пейтингера (около 250 г. н. э.) и дошедшая до нас, показывает маршруты прохождения армии через империю.

Основу КП составляют геодезические сети (ГС). Как отмечено выше, координатизированная геометрия римского кадастра представляет собою ГС. Первоначально носителями СК и пунктов ГС были естественные объекты: небесные светила, объекты окружающей местности. Но, как только появились земледельческие цивилизации, в качестве пунктов ГС стали использовать специально изготовленные центурийные столбы, миллиарии и т. п., т. е. искусственно сооруженные объекты – носители СК и координат.

Геодезические сети древнего времени, по крайней мере с Древнего Рима, выполняли почти все те же функции, что и современные ГС: картографирование, распространение единой системы координат, т. е. координатизация заданного пространства, обеспечение решения прикладных геодезических задач. Не исключено, что древнеримская ГС служила и для научных функций: определения размеров Земли (Эратосфен), ойкумены и др.

Вместе с тем, ГС древнего мира преимущественно использовались при создании геодезического обоснования для решения различных задач, связанных со строительством и возведением различных сооружений, планировкой городов, разбивкой угодий и т. п. Поэтому использовавшиеся ГС должны были быть разными по геометрии, точности и технологии исполнения.

Анализ всей совокупности геодезических задач, решавшихся в то время и известные исторические факты и примеры позволяют разделить все ГС на пять видов в зависимости от разных направлений их приложения.

Геодезическая сеть **первого** вида, представляла собою упомянутую совокупность центурийных столбов, заложенных в пересечении межевых линий. Межевые линии, по существу, тоже были элементами ГС, причем естественными. Они являлись ориентирующими линиями. Основной фигурой такой сети (рис. 1.4, 1.5) был прямоугольник или квадрат, основными осями – декуманус максимум и кардо максимум. Точность измерения линий была невысокая: 1:500 – 1:1000. Такая ГС имела центральный пункт с номерной аббревиатурой (см. рис. 1.3), соответствовавшей началу нумерации. Этот пункт являлся началом СК и обычно располагался или вблизи города (центра данного региона), или в самом городе. Такие региональные ГС в большинстве своем были связаны с центральной ГС и центральной СК, начальный пункт которой – золотой миллиарий – центр Римской империи – находился в Риме (на римском Форуме).

ГС **второго** вида использовалась при строительстве города. Она нередко предваряла работы по созданию земельного кадастра.

ГС **третьего** вида имели как определенную, так и произвольную ориентацию (рис. 1.6, 1.7) и использовались при строительстве дорог, каналов. В них задавалось главное створное направление (створ, ось дороги, ось канала).

Ось, главное направление, закреплялось при проложении каналов футштоками, при проложении дорог – мильными столбами. В последнем случае в Древнем Египте и Риме эти столбы назывались миллиариями. На них наносилась информация как об удаленности от центра СК, так и о самой дороге и тех, кто ее прокладывал. Сами дороги в Древнем Риме имели в точках поворота прямоугольную форму, без закруглений. Последние появились много позднее.

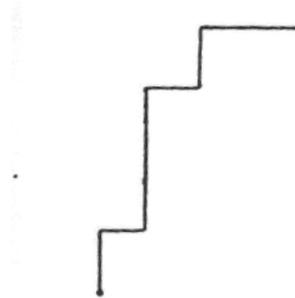
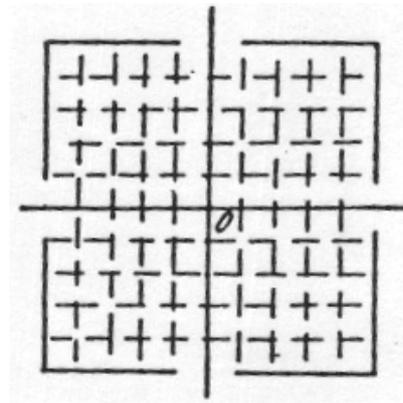
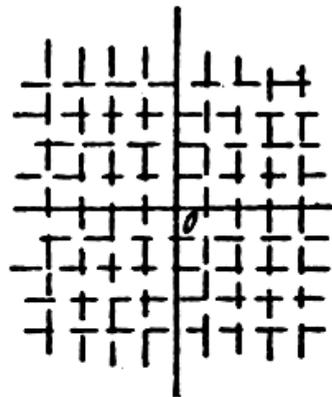


Рис. 1.4

Рис. 1.5

Рис. 1.6

ГС **четвертого** вида создавалась как геодезическое обоснование храмовых комплексов с точной ориентацией или по меридиану (египетские пирамиды), или какому-либо другому направлению (Храм Абу-Симбел – пещерные храмы). В таких ГС (рис. 1.7) первоначально выбиралась начальная, главная опорная точка. Она же определяла в последующем начало СК. В этой точке при помощи астрономических методов определялось главное ориентирующее направление (координатная ось). Затем осуществлялось геодезическое обоснование в виде прямоугольных ходов, опиравшихся на эту точку и эту ось. Кстати, ось задавала главную линейную композицию храмовой застройки. Точность работ как по определению главной ориентирующей линии, так и всего геодезического обоснования была очень высокой. Как показали повторные обмеры пирамид, ориентация выполнялась с точностью до нескольких минут, а плановое и высотное обоснования – с относительной ошибкой до  $10^{-4}$ .

Наконец, ГС **пятого** вида строились в целях обоснования какого-либо технического проекта, в котором было необходимо определить точно или направление, или расстояние (или то и другое), как это было при пробивке туннеля встречными ходами на острове Самос (рис. 1.8), или наклон

поверхности и т. п. Создавалась свободная неориентированная ГС высокой плановой и высотной точности (1:1000 – 1:10000); точность откладывания прямых углов была порядка 1/4 градуса.

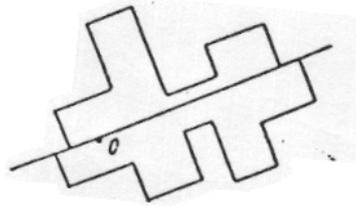


Рис. 1.7

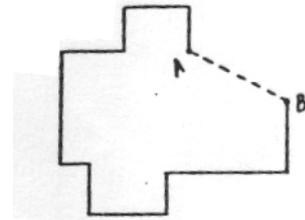


Рис. 1.8

Создание рассмотренных ГС требовало от специалистов того времени высокого профессионализма, глубоких теоретических и практических знаний и опыта. Это можно было приобрести в специальных учебных заведениях, какие были в Древнем Риме или в Александрии, где находился знаменитый Александрийский университет (мусейон), прославившийся геометрической (Евклид), географической (Эратосфен, Птолемей) школами.

## 1.2. Координатизация пространства в новое время

В период Средневековья возрастала интенсивность астрономических и географических наблюдений. Особенно характерно это для арабского Востока, где строились обсерватории, издавались каталоги. Вместе с тем, точность\* наблюдений возрастала только за счет увеличения размеров астрономических приборов и множественности наблюдений. Но поскольку наблюдения выполнялись, исходя из геоцентрической системы мира, точность результатов расчетов была по-прежнему низкой.

Результаты наблюдений до XVI в. были грубыми. Так время соединения двух планет Юпитера и Сатурна в Альфонсовых таблицах (XIII в.) давалось с ошибкой на месяц, а в гелиоцентрических Пруссских таблицах – с ошибкой на несколько дней.

В системах астрономических и географических координат широты отсчитывались от плоскости экватора. За начало отсчета долгот, начиная с древних греков, принимался меридиан, выбор которого в разные эпохи, периоды и в разных странах устанавливался по определенным точкам земной поверхности: край Ойкумены, Канарские острова (остров Ферро), столицы государств и др. Наконец, 13 октября 1884 г. для всех стран был принят в качестве начального Гринвичский меридиан. Ориентация в системах отсчета определялась преимущественно осью и направлением вращения Земли.

---

\* Точность астрономических наблюдений в древнее время была около 10 – 15'.

Земля как координатная поверхность, начиная с Пифагора (возможно и раньше), принималась за шаровую. Определение размеров земного шара производилось с глубокой древности (табл. 1.1) и до XVIII в.

Таблица 1.1. Измерения размеров земного шара, выполненные в разные эпохи

Время определения	Авторы	Радиус (км)	Длина дуги меридиана (км)	Длина дуги меридиана в 1° (км)	При широте
6,5 в. до н. э.	Халдеи	6310.50	39650.13	110.14	-
4 в. до н. э.	Аристотель	9549.27	60000.00	166.67	-
2,5 в. до н. э.	Эратосфен	6843.65	43000.00	119.44	30
1 в. до н. э.	Посидоний	6569.90	41280.00	114.67	35
1,5 в. н. э.	Птоломей	6059.01	38070.00	105.75	40
5 – 6 вв.	Брахмагупта	6239.26	39202.51	108.89	-
827 г.	Аравия	6406.51	40253.28	111.82	35
1037 г.	Бируни	6339.58	39832.76	110.65	32
1528 г.	Фернель	6337.01	39816.72	110.60	49
1616 г.	Снеллиус	6453.13	38661.34	107.39	52
1633 г.	Норвуд	6412.66	40292.01	111.92	52
1670 г.	Пикар	6372.01	40036.60	111.21	49
По современным данным		6371	40030.90	111.0	-

В эпоху научной революции с XVI – XVII вв. произошли качественные изменения, в математике, в геометрии. Одним из таких важных моментов явилась разработка и формирование в XVII в. координатного метода, создавшего возможность математического описания физического пространства в его единстве.

Рассматриваемый прогресс обусловил необходимость создания и разработки соответствующих систем ориентации, отсчета, координат, обеспечивающих описание этого пространства.

В геометрии XVII в. формировались знания, которые через 2 – 3 столетия в геодезии приобретут основополагающее значение. В это время в геометрии терминами-опорами становятся понятия «координаты», «уравнения». Им суждено позднее перенести эту функцию в геодезию, породив в ней соответствующие теорию, практику, методологию и технику. Использование этих понятий и теорий в геометрии привело к новым объектам исследования и образам.

Разработка Декартом системы прямоугольных координат и аналитической геометрии дали математике метод координатного описания геометрии пространства. Система координат и математический аппарат позволяют описать как геометрию отдельных объектов или систем, так и всего пространства в целом и, тем самым, дают возможность точного выражения геометрической структуры. Все это открыло перспективу для аналитического, а потому и для численного моделирования геометрии пространства. Вместе с тем повысилась значимость СК, а, следовательно, и КП в описании пространства.

Большие изменения на втором этапе произошли в СК и системах отсчета. Трудрами ученых XVII – XIX вв. И. Бернулли, Л. Эйлера, К.Ф. Гаусса, Ф.В. Бесселя, Ф.Р. Гельмерта и других была создана революционизировавшая геодезию теория эллипсоидальных координат. Мориц подразделяет геодезические и отсчетные системы на **физические**, закрепленные избранными пунктами или направлениями; **условные**, заданные произвольными координатами некоторых пунктов, и **средние**, взятые при некоторых условиях в среднем для группы пунктов. На первом этапе использовались только физические системы.

Рассматривая геодезические СК как системы отсчета, их эволюцию можно связать со следующими именами мыслителей: Аристотель (шар как система отсчета), И. Ньютон, Ф.Р. Гельмерт (эллипсоид вращения), К.Ф. Гаусс, И.Б. Листинг (геоид), М.С. Молоденский (квазигеоид). Как итог всего развития, в XX в. получают распространение единые геодезические отсчетные модели Земли. В 1924 г. международная ассоциация геодезистов (МАГ) выбрала эллипсоид Хейфорда в качестве международного эллипсоида.

С этого времени центральной задачей геодезии становится определение системы геодезических координат и фигуры Земли (ФЗ) с помощью астрономо-геодезических и гравиметрических данных.

Как писал Г. Рейхенбах, геометрия зависит от координат, функциями которых являются компоненты метрического тензора, вычисление которых не только заменяет геометрическое соображение, но и позволяет аналитически охарактеризовать все свойства геометрии. Таким образом, для определения геометрии физического пространства, прежде всего необходима СК. Кроме того, для характеристики этого пространства необходима также единица длины, установлению которой геодезисты придавали громадное значение.

Наконец, для определения геометрии пространства необходимо условие, сущность которого четко была сформулирована в принципе «от общего к частному». Сначала определялась геометрия физического пространства в целом (например, для страны), а затем – ее составляющих частей, компонентов.

Следовательно, прогресс в геодезии на втором этапе выразился тремя направлениями: **установлением СК, единицы длины и переходом к сплошной координатизации пространства с использованием принципа «от общего к частному»**. Это же составляло одну из главных особенностей в прогрессе геодезической мысли и геодезических работ в России в XIX веке.

С XVII в. начинается применение геодезических сетей в форме сети треугольников (для обоснования топографических съемок и для выполнения градусных измерений). С этого времени геодезические сети стали эффективным средством координатизации пространства в целях формирования систем координат, создания геодезической основы топографических съемок и инженерных работ и, наконец, формы и размеров фигуры Земли как координатной основы. Одно из главных мест начали занимать дотоле отсутствовавшие проблемы создания опорных геодезических сетей. Более того, геодезические сети стали, по представлению многих современников, сущностью геодезии.

С другой стороны, геодезические опорные сети создаются в целях получения единой системы координат всего окружающего пространства, т. е. создания и развития метрического координатного каркаса в заданном пространстве в целях единого модельного его представления. Единая система координат позволяет получить топографически точную модель этого пространства.

В начале XVII в. наступает новый этап в градусных измерениях – применение метода триангуляции в определении длины дуги меридиана. В 1615 – 1616 гг. голландский ученый Виллеброрд Снель Ван Ройен (Снеллиус) (1580 – 1626 гг.) измерил длину дуги меридиана между городами Алкмар и Берген (на расстоянии 130 км) с помощью цепочки треугольников, опиравшихся на три маленьких базиса с длинами от 200 до 700 м (впервые использовались также и базисные сети). Углы измерялись квадрантом с диоптрами, с диаметром лимба 70 см. Учитывая, что длины сторон треугольников достигали 45 км, точность визирования была невысокой. Ошибка достигала 3'. К тому же в отдельных треугольниках измерялось только по 2 угла. Конечные результаты получились грубыми (ошибка 3,4%) не только из-за ошибок измерений, но и из-за допущенных ошибок в вычислениях, так как логарифмы, только еще изобретенные, не применялись (только в 1620 г. Э. Гюнтер издал таблицы десятичных логарифмов тригонометрических функций  $\sin$  и  $\operatorname{tg}$  с шагом в 1'). Позднее вычисления были повторены и исправлены.

Последним градусным измерением, венчавшим первый этап решения задачи определения размера Земли, рассматривавшейся как шар, были известные работы (1669 – 1670 гг.) французского академика Ж. Пикара (1620 – 1682 гг.). По дуге меридиана длиной  $1^{\circ}22'55''$  между Парижем и Амьеном им была проложена цепочка из 13 треугольников, опиравшихся на 2 базиса (12 и 8 км). В угловых измерениях он применил зрительные трубы с сетками нитей, открывших новые горизонты в точности измерений. Базисные измерения выполнялись с помощью деревянных жезлов, укладывавшихся на земле в створе линии.

Разность широт определялась зенитным 10-футовым сектором. Разработка приборов осуществлялась Ж. Пикаром совместно с А. Озу. В вычислениях использовались логарифмы. Пикар получил длину дуги меридиана в  $1^{\circ}$ , равную 111,212 км, при истинном значении 111,18 км. При тех незначительных упущениях и ошибках, которые были допущены, произошла их удачная компенсация. В 1682 г. И. Ньютону стали известны результаты Ж. Пикара. Радость великого математика и физика была неопикуемой, когда вычисления подтвердили его теорию всемирного тяготения, которую он затем опубликовал в главном его труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). В этой работе он впервые изложил теорию фигуры Земли. В соответствии с этой теорией длина дуги меридиана в  $1^{\circ}$  увеличивается к полюсу пропорционально квадратам синусов широт.

Результаты Ж. Пикара И. Ньютон использовал также для подсчета сжатия Земли, которое у него получились равными 1:230. С этого времени в исторической проблеме градусных измерений появилось два важных момента:

стало необходимым измерять не только размер Земли, но и ее форму; появился физический путь определения фигуры Земли.

Следует отметить, что теория И. Ньютона, с точки зрения которой Земля является сфероидом, а не шаром, нашла астрономическое подтверждение – открытие Д. Кассини вращения и сжатия планеты Юпитер, и физическое – определения силы тяжести на разных широтах, выполненные Рише, Галлеем, Вареном и Дегеймом, установили, что изменение длины маятника характеризует возрастание силы тяжести от экватора к полюсу.

Французские градусные измерения конца XVII – начала XVIII вв. и экспедиции в Лапландию и Перу позволили подтвердить полярное сжатие Земли, которое получилось равным 1:314 и 1:214 из сравнения французской дуги, соответственно, с перуанской и лапландской.

В Лапландской экспедиции принимал участие 23-летний Алексис Клод Клеро (1713 – 1765 гг.). По возвращении во Францию Клеро опубликовал «Сочинение о фигуре Земли», по словам В.В. Витковского, «лучшее, какое до сих пор было написано по этому предмету, где вывел и доказал бессмертную теорему, носящую его имя и связывающую величину сжатия сфероиды с величинами ускорения силы тяжести на полюсе и на экваторе и центробежной силой на экваторе», а также – с широтой. Работы И. Ньютона и А.К. Клеро заложили основы высшей геодезии.

Во второй половине XVIII в. во Франции стали предприниматься решительные шаги к созданию единой системы мер и весов.

В 1786 г. известный английский изобретатель Дж. Уатт (1736 – 1819 гг.), посетив Францию, убеждал ученых этой страны в достоинствах метрической системы, основанной на длине «секундного маятника». Но идея была реализована только в Англии, где в 1824 г. за ярд была принята длина секундного маятника в пустоте, на уровне моря, на широте Лондона.

Но более выдающимся событием в XVIII в. в области системы мер было утверждение соответствующего предложения комиссии Парижской Академии, состоявшей из выдающихся ученых Ж.Ш. Борда, Ж.Л. Лагранжа, П.С. Лапласа, Г. Монжа, М.Ж.А.Н. Кондорсе, о принятии в качестве линейной образцовой меры длины одной десятиmillionной доли ( $1 / 10\,000\,000$ ) четверти (т. е. расстояния от экватора до полюса) Парижского меридиана. По предложению Ж. Борда эту единицу назвали метром. С 1792 по 1798 г., в период французской буржуазной революции, в самые ее бурные годы, под руководством академиков Ж.Б. Деламбра и П.Ф. Мешена были проведены геодезические измерения длины этого меридиана между Дюнкерком и Барселоной (9 градусов). Результат измерения оказался равным 5 130 740,74 туаза.

Десятиmillionная доля этой длины равна  $0,513074$  туаза = 443.296 парижской линии. Эта величина и стала метром (греческое *me tron* – мера). Метрическая (десятичная) система мер и весов была введена во Франции декретом от 26 марта 1791 г. Вскоре после получения значения новой меры (1799 г.) в Париже был изготовлен платиновый жезл, длина которого (при температуре  $0^{\circ}$  C) была принята за нормальную длину метра. Этот жезл, являющийся концевой мерой, известен как архивный метр.

Первоначально задачи определения ФЗ и создания координатного каркаса (государственной геодезической сети) прямо не связывались. Первая задача решалась в древнее время в целях научно-умозрительного, астрономического, а также картографического применения (для расчета картографических проекций). До XVIII в. Земля еще не рассматривалась и не использовалась как координатная основа и потому до Нового времени никак не связывалась с геодезической сетью. Впервые идея связи решения этих задач была предложена Ж. Пикаром. Первоначально, исторически реализацию этих задач осуществляли отдельно, независимо: фигуру Земли устанавливали путем измерения длин дуг меридианов, а основу топографических съемок создавали на базе астрономических работ. Начиная с XVIII в. обе задачи стали решать параллельно и одновременно. Вместе с тем, на первом плане всегда стояла задача развития геодезических сетей как опорных для топографических съемок. Во Франции представители семейства Кассини уже в XVIII в. решали обе задачи одновременно (создание карты в масштабе 1:86 000); в Англии это начали делать с момента геодезического соединения Гринвической и Парижской обсерваторий; в Германии первым был К.Ф. Гаусс; в России обе задачи одновременно решал К.И. Теннер. Постепенная глобализация геодезических проблем и их связь с общеземными повысили значимость ФЗ.

В геометрическом обосновании пространства и его координатизации с XVIII в. ведущую роль стала играть ФЗ. Поэтому построение геодезических сетей и определение ФЗ стали естественно совмещать.

Достаточно точное определение ФЗ стало практически возможным со второй половины XVIII в., когда триангуляционные работы и астрономические определения стали в какой-то мере более совершенными и точными. В это время были выполнены следующие основные градусные измерения: англо-французское (1792 – 1808 гг.); русское (русско-скандинавское), выполненное под руководством В.Я. Струве и К.И. Теннера; ганноверское (1821 – 1824 гг.) – по дуге меридиана длиной 2°; измерение, выполненное К.Ф. Гауссом; измерение Бесселя в Восточной Пруссии; индийское (1799 – 1873 гг.); трансконтинентальные американские измерения по параллели; европейское градусное измерение по параллели; африканские измерения по меридиану (1883 – 1924 гг.) протяженностью 35,5°.

Получили широкое признание градусные измерения Фридриха Вильгельма Бесселя (1784 – 1846 гг.), выполненные в 1831 – 1834 гг. по дуге с амплитудой в 3°04' (хотя по широте протяженности достигали всего 1°30'). Причем, как и в Гауссовых измерениях, достоинство этих работ заключалось в том, что Бессель применил в теории и практике высокоточных измерений много нового. Впервые на континенте (после Струве) использовал способ круговых приемов (измерение углов выполнялось 42 приемами с ошибкой измеренного угла 0,6"); усовершенствовал теорию базисных сетей Ф. М. Шверда (1792 – 1871 гг.), примененную им при переходе от базиса в 2 км к выходной стороне в 30 км (точность 1:500 000); разработал способ уравнивания триангуляции, впоследствии получивший название способа Бесселя; разработал теорию и практику применения пассажных инструментов для определения времени,

азимута и широты. В 1838 г. им было опубликовано сочинение «Gradmessung in Ostpreussen», явившееся большим вкладом в геодезическую науку.

Кроме перечисленных выше градусных измерений, выполнялся ряд других, например, в 1821 – 1823 гг. была проложена триангуляция по параллели 44,5° между Бордо и Фиуме через Францию, Италию и Австрию (по инициативе Лапласа, под руководством геодезиста Бруссо и астрономов Карлини и Плана).

По результатам выполненных градусных измерений и их обработки на протяжении XIX в. были получены размеры земного эллипсоида, приведенные в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Размеры земного эллипсоида

Автор	Год	Большая полуось (м)	Сжатие
Деламбр	1800	6 375 653	1:334.0
Вальбек	1819	6 376 896	1:302.8
Бессель	1841	6 377 397	1:299.15
Кларк	1866	6 378 206	1:295.0
Кларк	1880	6 378 249	1:293.47

Вывод Ж.Б. Деламбра имеет не столь научное значение, сколь историческое. По его результатам, как уже отмечалось выше, была получена длина метра.

При определении размеров Земли Х. Вальбеком в обработке градусных измерений использовался метод наименьших квадратов. Результаты его вычислений впоследствии применялись в ряде старых триангуляций в России (до 1880 г.). В то же время расчеты Х. Вальбека были еще довольно грубыми.

Вывод Ф.В. Бесселя, хотя и был значительно точнее, тем не менее, еще содержал существенные ошибки (около 800 м в величине экваториальной полуоси). Этот эллипсоид применялся при геодезических работах в Австрии, Албании, Венгрии, Германии, Греции, Голландии, Индонезии, Италии, Норвегии, Швеции, Швейцарии, Югославии, Чили, Японии.

Размеры эллипсоида, выведенные А.Р. Кларком и Ф.В. Бесселем, использовались в дореволюционной России. До 1942 г. геодезические измерения в СССР обрабатывались на эллипсоиде Бесселя.

Выводы А.Р. Кларка (по данным 1866 г., табл. 1.2) нашли применение в странах американского континента: в США, Канаде, Мексике, а по результатам 1880 г. – во Франции.

Все определения размеров Земли осуществлялись применительно к геометрической фигуре – эллипсоиду вращения. В 1859 г. в статье «Опыт одного определения истинной фигуры Земли» русского военного геодезиста Ф.Ф. Шуберта, опубликованной в Мемуарах Санкт-Петербургской Академии наук, впервые был дан вывод параметров трехосного земного эллипсоида. Второе такого рода вычисление было выполнено английским геодезистом А.Р. Кларком, только уже в 1878 г.

В течение XIX в. сложилось довольно ясное понимание фигуры Земли. Уже к середине столетия выявились расхождения в различных определениях размеров земного эллипсоида, объяснить которые ошибками измерений было

уже невозможно. Стало ясно, что планетарная ФЗ зависит от внутреннего ее строения, а поэтому является геометрически очень сложной. В 1873 г. геттингенский физик Листинг дал фигуре, ограниченной этой поверхностью, название геоид. Это понятие стало в высшей геодезии одним из центральных – с ним было связано решение главной научной задачи геодезии.

В теорию ФЗ большой вклад в XIX в. внесли П.С. Лаплас (1749 – 1827 гг.), Дж.Г. Стокс и др. В 1840 г. ирландский математик Дж.Г. Стокс опубликовал работу, в которой была приведена основополагающая формула определения превышения геоида над эллипсоидом по аномалиям силы тяжести. Почти до 1927 г. формула не находила применения. В то время геодезистов мало интересовали эти превышения. Им необходимы были отклонения отвеса, хотя формула содержала в себе все необходимое для его определения. В этом же столетии начинают выполняться гравиметрические измерения для введения поправок за отклонения отвесных линий.

К середине XIX в. в большинстве европейских стран были развиты обширные геодезические сети – ряды и сети триангуляции (преимущественно для целей военного картографирования и градусных измерений).

В 1879 г. усилиями французских и испанских геодезистов реализуется проект связи Европы и Африки.

Создание опорных триангуляционных сетей на территории основных Европейских стран было закончено к 1864 г., когда были проведены впервые работы по объединению национальных европейских триангуляций в единую сеть с помощью организации «Среднеевропейские градусные измерения». При этом, например, работы по созданию опорной сети на территории Пруссии были закончены в 1844 г. Сеть состояла из 89 пунктов 1 класса и 100 пунктов 2 класса. Сгущением основной сети были получены еще 2 500 пунктов, в качестве которых использовались церкви, башни и другие объекты. Высотная сеть строилась сначала методом тригонометрического нивелирования (с 1835 г.) по сторонам триангуляции длиной 15 – 30 км. С 1865 г. стали применять геометрическое нивелирование.

Большую роль в объединении европейских триангуляций и создании международной организации сыграл известный немецкий геодезист И.Я. Байер (1794 – 1885 гг.).

К концу XIX в. почти вся Европа была покрыта сплошной сетью триангуляции. В ней насчитывалось 90 базисов, измеренных с относительной ошибкой  $2 \cdot 10^{-6}$ ; точность угловых измерений –  $0,3 - 2,0''$ . Эта сеть включила в себя и ряд триангуляции, проложенный в России (по параллели до Орска), но точность измерений в нем была на порядок ниже. В результате этих измерений была осознана необходимость выполнения астрономических определений на пунктах Лапласа. Было определено понятие отклонения отвесных линий. Следует отметить, что во второй половине XIX в. усилиями таких ведущих геодезистов как И.Я. Байер, Ф.В. Бессель, К.Ф. Гаусс, Ф.Р. Гельмерт Германия стала ведущей державой в области науки и техники того времени.

В 70-х годах XIX в. в Европе началось выполнение новых триангуляций, о необходимости которых в Западно-Европейских странах говорилось в

решении Центрального бюро Европейского градусного измерения. В 1899 г. было произведено соединение новых триангуляций в Эльзас-Лотарингии с триангуляциями во Франции. Деятнадцатый век дал пример научной кооперации математики и геодезии, полезной для обеих наук. Главную роль в этой кооперации сыграл король математиков К.Ф. Гаусс, являвшийся одновременно и известным геодезистом, и астрономом (с 1807 г. до самой его смерти в 1855 г. он был директором астрономической обсерватории).

В 1820 г. К.Ф. Гауссу были поручены геодезические работы в Ганновере. Измерения на поверхности Земли навели К.Ф. Гаусса на мысль о выделении в самостоятельный класс тех свойств поверхностей, которые могут быть обнаружены путем измерений на самой поверхности. Совокупность этих свойств получила название внутренней геометрии поверхности. К ней относятся гладкость и длина линий, углы между пересекающимися линиями, площади фигур, т. е. то, что исследуется и определяется в геодезии.

«Кратчайшую линию» на поверхности П.С. Лаплас впервые назвал геодезической. Определение геодезической линии, имеющее в геодезии важнейшее значение, стало первой задачей теории поверхностей. Ее сформулировал в 1697 г. И. Бернулли, а решили Л. Эйлер и Ж.Л. Лагранж, найдя уравнение геодезической линии на произвольной поверхности. Завершил построение теории поверхностей К.Ф. Гаусс, опубликовавший в 1827 г. работу: «Общее исследование кривых поверхностей».

В 60 – 70-е годы XIX в. в европейских странах приступили к созданию высотных геодезических сетей с помощью геометрического нивелирования. До середины XIX в. основными методами определения высот пунктов и объектов местности были тригонометрическое и барометрическое нивелирования, к концу столетия появляется высокоточное нивелирование. В качестве системы отсчета высот использовались футштоки. Самыми старейшими в Европе равномерными постами с самыми продолжительными из сохранившихся рядов наблюдений являются Амстердамский (с 1700 г.), Стокгольмский (с 1774 г.) и Кронштадский (с 1777 г.). В этом столетии большинство западно-европейских стран выполняют картографирование своих территорий в основных масштабах. Так, во Франции, после описанной выше карты Кассини, впервые составленной на инструментальной основе, в 1808 г. разрабатывается проект так называемой карты Генерального штаба (масштаба 1:80 000). Своим возникновением он обязан нуждам военных во всех видах географических и частично геодезических работ.

К математической географии, которую в России нередко именовали землеведением, отнесли решение задач определения «вида и величины Земли», «мест пунктов» и черчения карт. В свою очередь, все это рассматривалось как часть всеобщей географии.

Во второй половине XX в. значительное внимание МАГ стало уделяться вопросам создания единой геодезической (координатной) основы. Ее ядром стала европейская сеть непрерывно действующих пунктов (станций) GPS-наблюдений, входящих в сеть Международной службы GPS для геодинамики (IGS). В конце XX в. в EUREF (Европейская геодезическая основа) принята

Европейская общеземная геодезическая система ETRS-89 (эпохи 1989 г.), которая является начальной для всех ее последующих реализаций.

Важнейшим направлением работы комиссий МАГ является развитие Единой европейской нивелирной сети (UFIN). Ее основу составляют две сети континентального масштаба: сеть стран, использующих Балтийскую систему высот СССР 1977 г. и сеть, охватывающая центрально- и западно-европейские государства (Амстердамская система высот 1973 г.).

У этих двух систем высот и начал национальных систем высот разность последних достигает 7,5 м. Европейская подкомиссия МАГ в 1994 г. выдвинула идею Единой европейской геодезической сети (включая указанные две сети). Сейчас происходит реализация этой идеи (проект составлен) – установления единых вертикальных дат для Европы с точностью до 1 м. Речь также идет о создании Европейской вертикальной сети GPS (EUVN), способствующей также связи наблюдений за уровнями морей, установлению опорных пунктов Европейского геоида и решению некоторых других задач.

### 1.3. Координатизация территории России до XX в.

#### **Астрономические работы**

К 1917 г. геодезистами и астрономами в России было определено более 150 астрономических пунктов, связанных с триангуляционными работами (основные пункты), и около 5 000 экспедиционных астрономических пунктов (использованных в качестве основы для глазомерных и полуинструментальных съемок). При этом военными геодезистами в целом было отнаблюдено 3 900 астрономических пунктов, из них 1 800 – в европейской России и на Кавказе, 1 150 – в Сибири и 960 – в Туркестане. Огромный размах работ был вызван совершенствованием способов астрономических определений и, главным образом, их применением в качестве наиболее экономичного и оперативного способа создания точной геодезической основы для топографических съемок.

Значительные объемы астрономических работ в начале XVIII в. были выполнены Ф.Ф. Шубертом и братьями Теслевыми в различных районах (Полоцк, оз. Байкал и др.). С 1806 по 1815 г. В.К. Вишневский определил 223 астрономических пункта на огромной площади между Либавой и Екатеринбургом, Мезенем и Эльбрусом. В 1820-х годах были проведены астрономические работы в Персии и Грузии штабс-капитаном О.Е. Коцебу, Туфаевым – в Бухаре, В.Ф. Леммом и П.Ф. Анжу – на Оренбургской линии, в Киргизской степи, на берегах Каспийского и Аральского морей.

В 1834, 1835 гг. М.П. Вронченко выполнил обширные астрономические (100 пунктов), топографические (10 000 верст маршрутной съемки) и географические работы в Малой Азии.

Огромный объем астрономических определений (600 пунктов) на протяжении нескольких десятилетий, начиная с 1826 г., выполнил Б.Ф. Лемм. Русское географическое общество организует Уральскую и Сибирскую экспедиции, значительно пополнившие число отнаблюденных астрономических пунктов. К 40-м годам XIX в. число астрономических опорных пунктов, по сравнению с XVIII в., возросло более чем в 7 раз.

Во второй половине XIX в. были выполнены еще более обширные и более многочисленные работы, охватившие разнообразные районы страны. В астрономических определениях принимали участие: И.Е. Кортацци, А.Г. Ернсфельт, Э.А. Коверский, Н.А. Емельянов, А.А. Тилло, Н.Д. Артамонов, С.Т. Мирошниченко, М.П. Полянский, Ф. Шварц, А.Р. Борнсдорф, М.Н. Лебедев, П.И. Гладышев, Д.Д. Гедеонов, Ю.А. Шмидт, Н.О. Щеткин и многие другие.

### **Триангуляционные работы. Градусные измерения**

Регулярные триангуляционные работы в России начались с 1816 г. с западных пограничных областей. Но еще ранее, в 1808 г., профессор астрономии Московского университета Гольдбах (1763 – 1811 гг.) и геодезист Депо карт Л. Панснер начали работы по созданию триангуляции в Московской губернии. Углы треугольников измерялись повторительным кругом Борда, для базисных измерений применялась точная копия перуанского туаза. Вначале работы велись в Звенигороде, Рузе, Можайске, Волоколамске, Воскресенске и Верее. С 1810 г. Х.В. Гольдбах, уже с другим помощником, Вильдеманом, начал съемки Москвы. Смерть Х.В. Гольдбаха в 1811 г., а затем пожар в Москве привели к прекращению работ и даже их утрате – сгорела часть тетрадей с результатами наблюдений.

Значимость триангуляции в создании точной опоры для топографических работ понимало большинство геодезистов. Поэтому уже в 1809 г. К.И. Теннеру, Л. Панснеру и Досту была поручена «тригонометрическая съемка» Петербурга и южного берега Финского залива. Начавшаяся Отечественная война 1812 г. помешала выполнению работ. Тем не менее, была произведена рекогносцировка, построены сигналы и было измерено два базиса, один – на Васильевском острове, а другой – на острове Котлин. Эта и все последующие триангуляционные работы К.И. Теннера, В.Я. Струве выполнялись с высокой точностью, основательностью и практически не уступали лучшим французским и английским, прусским и австрийским триангуляциям.

На триангуляции в Виленской губернии (1816 – 1821 гг.) К.И. Теннером были отработаны научные принципы организации и методики измерений, а также последующей обработки результатов.

Все триангуляции, выполнявшиеся при непосредственном участии или руководстве К.И. Теннера, обладали не только свойством классной точности, но и долговечностью, по которой им не было равных на протяжении всего XIX в. Все пункты закреплялись на местности, а при смыкании триангуляции Теннера с прусской триангуляцией Бесселя (1830 г.) величина относительного расхождения для общих сторон не превышала 1:200 000.

В этот же период (с 1816 по 1831 гг.) профессор Дерптского университета В.Я. Струве осуществлял градусные измерения в Прибалтийских губерниях. Под руководством В.Я. Струве были проложены ряды триангуляции на территории Лифляндии и Финляндии, значительная их часть была включена в Русско-Скандинавское градусное измерение.

Триангуляционные работы В.Я. Струве, выполненные с очень высокой точностью, даже по современным меркам, считаются образцовыми, классическими по постановке, методам и результатам (ошибка измерения угла составляла всего 0.6"). Вместе с тем, в этих работах не уделялось должного внимания закладке центров, вследствие чего ряды В.Я. Струве были вскоре утрачены и впоследствии не использовались. В 1823 г. В.Я. Струве установил непригодность для угловых измерений способа повторений и разработал свой, названный им способом многократных измерений простых углов, который впоследствии именовался в России способом Струве и послужил основой разработки способа круговых приемов. В.Я. Струве создал прецизионный базисный прибор, с помощью которого можно измерять линии с точностью 1:1 000 000. Этот прибор в России применялся до XX в.

Триангуляции К.И. Теннера и В.Я. Струве, соединенные в 1830 г., образовали градусные измерения по дуге меридиана длиной 8 градусов. Измерения были затем продолжены на север и юг. В результате получили дугу меридиана, названную впоследствии дугой Струве, длиной в 25 градусов 20 минут. Всего на протяжении всей дуги было измерено 10 базисов, определено 13 астрономических пунктов. Результаты измерений первой части дуги К.И. Теннером были сообщены Ф.В. Бесселю, который использовал их при выводе размеров земного эллипсоида, а данные по всей дуге Струве применял в своих выводах Кларк.

Начиная с 1820 г., приступил к триангуляционным работам Ф.Ф. Шуберт сначала в Петербургской губернии, а затем – в Смоленской, Московской, Могилевской, Тверской, Новгородской губерниях, а также на Крымском полуострове. При этом, например, триангуляция по всей Московской губернии была закончена в 1840 г., а в самой Москве – в 1833 г. Московская городская сеть состояла из 260 точек, в качестве которых очень часто использовались колокольни, церкви. За основную точку был принят шарик под крестом колокольни Ивана Великого. Углы измеряли офицеры корпуса военных топографов (КВТ) И.О. Васильев, В.Н. Воинов и др. Причем все пункты сети в губернии делились на 3 класса: Углы измерялись по способу Струве: на 1 классе 6 приемами (с погрешностью измерения 0.985"), на пунктах 2 класса – тремя приемами (с погрешностью измерения 2"). В треугольниках 3 класса измерялись только 2 угла. Базис (между Хорошево и Петровским Дворцом) измерялся прибором Ф.Ф. Шуберта.

Высота базиса над уровнем моря определялась из 87 одновременных наблюдений барометров в Петербурге и в Москве. В отличие от триангуляции Теннера и Струве, Ф.Ф. Шуберт в своих работах ставил только практическую задачу – создание основы для топографических съемок. В результате точность развиваемых сетей была невысокой.

Эта тенденция сохранялась в последующем в триангуляционных работах других геодезистов. Например, значительные объемы по выполнению триангуляции в европейской части были осуществлены,

начиная с 1840-х годов, под руководством Н.А. Тучкова и Д.Д. Оберга. Но в методике они придерживались принципов, разработанных Ф.Ф. Шубертом.

В первой половине XIX в. съемочные работы на Кавказе, в Сибири и Туркестане проводились без всякого обоснования. Только с 1847 г. на Кавказе начинаются триангуляционные работы под руководством И.И. Ходзько, который сам составил их проект. Триангуляция Закавказья, считавшаяся по тому времени наиболее трудной, состояла из 188 треугольников 1 класса и 1642 треугольников 2 и 3 классов, половина из них была отнаблюдена И.И. Ходзько. Отдельные стороны достигали длины 200 км. Зенитные расстояния были определены на 1362 пунктах. Не менее трудными были триангуляционные работы на Северном Кавказе, начатые в 1860 г. Триангуляция Кавказа характеризуется хорошим качеством: вероятная ошибка в угле – 0.7", относительная ошибка в базисных измерениях в Закавказье была равна 1: 90 000, на Северном Кавказе – 1: 50 000. Последующее соединение кавказской и волжских триангуляций выявило значительное отклонение отвесных линий, доходившее местами до 50".

Триангуляционные работы в Туркестане были начаты в 1870 г., но выполнялись они без общего плана и без надлежащей взаимной увязки. С 1910 г. по 1912 г. была проложена триангуляция через Памир для связи с индийскими триангуляциями (средняя ошибка 3.1"). С 1909 г. под руководством Павлова начинаются научно обоснованные триангуляционные работы в Сибири. Проложен ряд Омск – Павлодар – Семипалатинск – Усть-Каменогорск. Второклассные сети и ряды триангуляции 2 класса были развиты в Семипалатинской области, в Восточной Сибири, в Дальневосточном крае. Кроме того, выполнялись ведомственные триангуляционные работы.

В целом, триангуляционные работы 1 класса, за исключением работ К.И. Теннера и В.Я. Струве, осуществлялись неудовлетворительно и после уравнивания их в 1897 – 1907 гг. были признаны специальной комиссией пригодными только в качестве основы для съемок.

В 1897 г. под руководством военного геодезиста К.В. Шарнгорста предпринята попытка перевычислить все триангуляции в целях приведения их в общую систему координат. В основу был взят ряд Струве, а все вычисления выполнены на эллипсоиде Бесселя. За исходный пункт был принят Юрьев (Дерпт, теперь Тарту) (табл. 1.3). В результате этих работ до 1907 г. успели перевычислить только триангуляцию 1 класса (в количестве 3236 пунктов), которая в натуре в последующем практически была утрачена. В 1909 г. утверждается план построения новой триангуляции 1 класса в Европейской части России, к осуществлению которого приступили в 1910 г. В разработке проекта и в его реализации в 1916г. принимал деятельное участие И.И. Померанцев. Этот план предусматривал построение рядов триангуляции 1 класса по направлениям меридианов и параллелей с периметрами полигонов 1300 – 2200 км и в виде простых цепочек треугольников с измерением базисов и астроопределений, с обработкой на эллипсоиде Бесселя (за исходный пункт принята Пулковская обсерватория).

К 1917 г. было измерено только 4 базиса, построено 152 и отнаблюдено 129 пунктов.

Таблица 1.3. Системы геодезических координат в России до 1917 г.

Название системы геодезических координат	Название и местоположение начального пункта	Начальный пункт		Год введения
		Широта	Долгота, от какого пункта	
Юрьевская	Вышка обсерватории в Юрьеве (Тарту)	58°22'47,56"	3°36'24,71" Пулково	1897
Ташкентская	Меридианный круг Ташкентской обсерватории	41°19'31,35"	69°17'40,80" Гринвича	1875
Пулковская старая	Центр круглого зала Пулковской обсерватории	59°46'18,54"	0°00'00,0"	1910

Все вновь выполняемые триангуляции связывались между собой и с ранее выполненными российскими и с зарубежными (например, с прусскими и австрийскими) триангуляциями. Результаты сравнений межгосударственных триангуляций высылались директорам Пулковской, Берлинской и Венской обсерваторий. По причине сопоставления измерений в 1852 – 1855 гг. в Пулково было выполнено сравнение английских, немецких, австрийских и датских нормальных мер с соответствующей мерой России – двойным Пулковским туазом. На геодезических работах в России (XIX в.) использовались в качестве нормальных мер туаз Фортена, двойной Пулковский туаз, сажень Теннера, двойная сажень Департамента Генерального штаба и «условная сажень» (несуществующая мера, равная 7 английским футам или 84 дюймам), соответственно отнесенная к первой (1816 – 1866 гг.), второй (1866 – 1899 гг.) и третьей (с 1899 г.) эпохам.

В целом, с 1819 по 1917 гг., на европейской территории России было определено 3 367 пунктов триангуляции 1 класса и 59 109 пунктов 2 и 3 классов, а в азиатской части России – 283 пункта 1 класса и 4 654 пункта 2 и 3 классов.

На протяжении всего XIX в. триангуляционные работы осуществлялись устаревшими немецкими геодезическими инструментами, приспособленными для измерения углов по способу повторений и имевшими в качестве отсчетных приспособлений верньеры. Микроскоп-микрометры появились только во второй половине девятнадцатого столетия и то только у отдельных инструментов. Используемые угломерные инструменты в зависимости от назначения и устройств именовались: повторительные круги, теодолиты (повторительные теодолиты), земные повторительные теодолиты, горизонтальные теодолиты, универсальные инструменты, астрономические теодолиты (астрономические повторительные теодолиты).

Во второй половине XIX в. начинают выполнять угловые измерения более совершенными инструментами с отсчетными устройствами в виде винтовых микрометров и микроскоп-микрометров. Только в первое

десятилетие XX в. по заказу КВТ в России были получены совершенные для того времени электрифицированные инструменты Гильдебранда.

На протяжении XIX в. при измерении углов применялись преимущественно два способа – повторений и Струве. Первый способ, очень трудоемкий, использовался в первой половине XIX в. Так, по подсчетам В.Я. Струве, на Литовской дуге меридиана К.И. Теннером измерено 174 угла 8 674 повторениями, т. е. в среднем угол измерялся 50 повторениями. В отдельных случаях число повторений достигало 100.

С 1823 г. В.Я. Струве стал применять свой способ направлений, впоследствии именованный в России как способ Струве. К.И. Теннер и Ф.Ф. Шуберт, внедряя этот способ, ввели при этом замыкание горизонта. Усовершенствованный способ Струве с замыканием горизонта получил широкое распространение, при этом углы в триангуляции 1 класса измерялись 6 – 12 приемами. С 1889 г. с выходом «Наставления для производства тригонометрических работ», в котором указывалась методика измерения направлений, способ получил название способа круговых приемов.

С 1908 г. в угловых измерениях стали применять способ Шрейбера – сначала в дополнительном классе Военно-топографического училища на летней практике (с весом, равным 12), а затем, с 1909 г., под руководством полковника Павлова при измерении углов в триангуляции 1 класса Омским топографическим отделом (вес 12, двухсекундные универсалы Гильдебранда). В 1910 г. под руководством И.И. Померанцева была составлена инструкция для триангуляции 1 класса, в которой для измерения углов рекомендовался способ Шрейбера, с весом 24.

Несмотря на несовершенство используемых инструментов, К.И. Теннер и В.Я. Струве достигли в угловых измерениях выдающейся точности. У К.И. Теннера ошибки измеренных углов по способу повторений характеризовались значениями 0.70" и 0.98" , а по способу Струве – 0.53", 0.61", 0.72", 0.73"; у В.Я. Струве, соответственно, – 0.57", 0.88". У Теннера углы на пунктах измерялись нередко двумя способами. При этом Теннер предъявлял к наблюдателям высокие требования – невязки в триангуляции 1 класса не должны были превышать 3'. Если величина невязки превышала допустимую величину, все углы треугольника переизмерялись.

В последующем точность угловых измерений, выполнявшихся различными наблюдателями, в том числе Ф.Ф. Шубертом, резко снизилась. Основными причинами было то, что не учитывался опыт работ К.И. Теннера и В.Я. Струве; снизились требования в точности измерений ввиду упразднения помощников наблюдателей (в 1848 г. увеличились объемы съемок, так как перешли от масштаба 200 саженей к масштабу 500 саженей в дюйме, в результате потребовалось увеличение объема триангуляционных работ при том же количестве триангуляторов); неправильно применялись поверительные трубы; недостаточно точно осуществлялось определение элементов приведений; недоучитывалось влияние фаз визирных целей; измерение углов выполнялось при неблагоприятных условиях.

Только с 1910 г., с введением новой инструкции и применением новых инструментов, точность измерений угла в триангуляции вновь повысилась до 0.77" (по невязкам 110 треугольников в триангуляционном ряду Пулково – Николаев).

### **Гравиметрические работы**

С именем великого русского ученого М.В. Ломоносова связаны первые теоретические и практические разработки по гравиметрии. Более 200 лет назад впервые в России Петербургской академией наук были выполнены определения силы тяжести. До 1917 г. было определено около 400 маятниковых пунктов. Значительный вклад в теорию и практику гравиметрических работ на территории России, внесли известные ученые и преподаватели Московского университета и Межевого института Ф.А. Слудский, Б.Л. Швейцер, И.А. Швейцер, И.А. Иверонов, П.К. Штернберг и другие.

Самые ранние (1827 г.) определения силы тяжести осуществили М.Ф. Рейнеке и Ф.П. Литке маятником Кетера, а в 1865 – 1899 гг. А.Н. Савич, Вилькицкий, А.П. Соколов, П.П. Кульберг и другие – с помощью поворотного маятника Репсольда. Эти определения представляют лишь исторический интерес. Начало гравиметрических работ современного типа соотносят с 1896 г., когда астроном Казанской обсерватории Краснов тремя маятниками Штернека определил несколько пунктов между Веной и Казанью и организовал экспедицию в Северный край.

В том же 1896 г. Ф.Ф. Витрам выполнил гравиметрическую связь Пулково с Владивостоком. Двумя годами позднее Военно-топографический отдел Генерального штаба усилиями Павлова, Корзуна, П.К. Залесского, Лаймина, П.Н. Никитина и других начал регулярные маятниковые определения в различных районах России. Наибольшее число измерений с 1901 г. по 1908 г. в Средней Азии выполнил П.К. Залесский – 140 пунктов. Сводка всех дореволюционных определений силы тяжести была осуществлена А.М. Гижицким и П. Севкевичем в изданном ими в 1923 г. каталоге пунктов гравиметрических определений.

### **Нивелирные работы**

До семидесятых годов XIX в., когда на картах при рисовке рельефа стали применять горизонталы, основными способами нивелирования были геодезический (тригонометрический) и физический (барометрический). Первый способ был в то время наиболее точным и вполне удовлетворял требованиям картографов и топографов, при изображении ими рельефа штрихами. До 1816 г. при всех экспедиционных и геодезических работах использовалось барометрическое нивелирование, по данным которого, полученным, например, при рекогносцировке или маршрутной съемке, осуществлялось нанесение рельефа на карты.

В 1816 г. К.И. Теннер при выполнении своих триангуляций установил обязательное измерение зенитных расстояний и вычисление высот пунктов. В результате обширного тригонометрического нивелирования им была получена разность уровней Балтийского и Черного морей, а позже, уже

другими геодезистами (1836 г.), – Черного и Каспийского морей. Вместе с тем, очень важное начинание К.И. Теннера не было поддержано при выполнении других триангуляций.

В начале второй половины XIX в. вопрос о необходимости в геометрическом нивелировании поднимался неоднократно, например, на первой международной конференции Географического общества в Берлине (1864 г.). В 1858 г. О.В. Струве, вице-директор Пулковской обсерватории, выполнил опытное геометрическое нивелирование в окрестности обсерватории. В этом же году им был составлен первый проект создания высотной опорной сети. Но только с 1871 г. Военно-топографический отдел организует систематическое геометрическое нивелирование. В 1883 г. Д.Д. Геденовым был разработан «выгоднейший» способ геометрического нивелирования, описанный в изданной в том же году инструкции и получивший широкое распространение.

Нивелирные работы с 1871 по 1893 гг. осуществлялись по предварительно разработанной для европейской части России программе. Согласно этой программе геометрическое нивелирование рекомендовалось прокладывать по меридианным направлениям, в частности, для связи Балтийского и Черного морей; по параллелям и широтам  $47,5^\circ$  и  $50^\circ$  (направления железных дорог); вдоль балтийского и черноморско-азовского побережий (для связи футштоков); по линиям железных дорог (на запад, для связи с западно-европейскими нивелировками).

Ко второй половине XIX в. относится начало создания главной высотной основы (нивелирных линий 1 и 2 классов). В 1873 – 1876 гг. между Петербургом и Москвой геодезистами Ленчевским, Котовским и Федотовым была впервые в стране проложена линия геометрического нивелирования. С.Д. Рыльке в 1894 г. составил первый «Каталог высот русской нивелирной сети с 1871 по 1893 гг.». За этот период было проложено 13 тыс. км нивелирных линий, в том числе линии нивелирования, выполненные в 1871 – 1873 гг. нивелир-теодолитом. Начало нивелир-теодолитным работам, как разновидности полигонометрии, положил в 1871 г. Н.Я. Цингер (ход между Ревелем и Санкт-Петербургом). Средняя ошибка на 1 км хода получилась равной 11 мм. Нивелир-теодолиты успешно использовались на съемках в Финляндии. Этот метод применялся в работах Военно-топографического депо Министерства путей сообщения (МПС) и других ведомств до 1918 г. В стране использовались также нивелир-тахеометры. Вся сеть нивелирования образовала 8 полигонов со средним периметром 1550 км и была укреплена 1 092 стенными знаками. Следует отметить весьма высокую точность геодезического нивелирования, осуществленного по дуге Струве. В результате было установлено, что разность уровней морей Черного и Балтийского равна 1 метр.

Военно-топографическим отделом с 1871 по 1916 гг. было выполнено 42 746 верст точных нивелировок и заложено 3 646 марок. Нивелирование проводилось по железным дорогам Европейской части России и по всей Сибирской магистрали.

В 1902 г. вышел из печати «Каталог высот русской нивелирной сети»; в 1915 г. издано дополнение к нему. К 1917 г. общая длина нивелирных линий насчитывала около 45,5 тыс. км, причем, в основном, в Европейской России.

По инструкции, разработанной XVII международной геодезической конференцией, Военно-топографический отдел стал выполнять высокоточное нивелирование с 1913 г., а к 1916 г. был уже завершен ход длиной около 2 000 км (между Ораниенбаумом и Одессой) и заложено 197 нивелирных марок.

Точное нивелирование позволяло установить разность уровней морей Черного, Балтийского и Каспийского, высоту озера Байкал, занивелировать футштоки. Результаты как геометрического, так и барометрического нивелирования использовал А.А. Тилло при составлении своей прекрасной гипсометрической карты (1889 г.). На этой карте средняя горизонталь была равна 80 сажням (~171м), что соответствовало средней высоте европейской России, оцененной по материалам геодезических работ того времени (169 м). При этом нижний ярус расцветки гипсометрической карты был равен 68 сажням (12 – 80 сажней), а верхний уровень – 450 сажней.

До 1881 г. в геометрическом нивелировании применялись инструменты, дававшие на 1 км хода случайную ошибку порядка 6,2 мм, а систематическую – 0,9 мм. В восьмидесятых годах XIX в. стали использовать нивелиры с увеличением зрительной трубы в 40<sup>x</sup> и тщательно изготовленными и откомпарированными рейками. Нивелирование выполнялось по так называемому русско-швейцарскому методу. Точность измерений характеризовалась вероятной ошибкой не более 3 мм на 1 км.

#### 1.4. Координатизация территории России и СССР в XX в.

##### 1.4.1. Государственные геодезические сети (плановые)

Первая схема и программа развития Государственной геодезической сети (ГГС) разрабатывалась с 1907 г. и была принята в 1909 г. (по предложению комиссии, возглавлявшейся начальником КВТ И.И. Померанцевым). Триангуляция I класса, в соответствии со схемой, развивалась в виде полигонов с периметрами 1 200 – 1 500 км. По углам полигонов располагались пункты Лапласа и базисы, а сами полигоны заполнялись сетью II класса, хотя это первоначально не предусматривалось. В качестве поверхности относимости был принят эллипсоид Бесселя. До 1917 г. было построено 2 полигона и часть третьего. Схема И.И. Померанцева вошла в инструкцию по триангуляции I класса, изданную в 1910 г.

После революции для территории Советского союза эта схема в 1924 г. утверждается почти без изменений. Тем не менее, уже в этот период Ф.Н. Красовский начинает исследования ГГС. В инструкции Высшего геодезического управления (ВГУ) для триангуляции I класса, изданной в 1925 г., уже вошли некоторые результаты его исследований. В 1928 г. он публикует статью, в которой предлагает новый вариант схемы построения ГГС, реализация которой

уже началась. Эта схема была утверждена и вошла в инструкцию по триангуляции I класса (1928 г.) и подробную инструкцию по триангуляции II класса (1932 г.).

Пункты ГГС, получаемые по регламентированной схеме, должны были обеспечить топографические съемки, включая масштаб 1:10 000. В схеме ГГС Ф.Н. Красовским введен принцип «от общего к частному», а сеть подразделена на ряды триангуляции I класса, основные ряды триангуляции II класса, заполняющие сети II класса, сети III класса и пункты IV класса, определяемые засечками. Главной частью ГГС являлась астрономо-геодезическая сеть (триангуляция I класса), предназначенная для решения научных задач и картографирования. Ряды I класса прокладывались по меридианам и параллелям, образуя полигоны с периметрами 800 – 1 000 км (стороны – 200 – 250 км); основная фигура сети – равносторонний треугольник с углами не менее  $40^\circ$  и сторонами 25 – 30 км. Углы должны были измеряться с ошибкой 0.7 – 0.9" (по невязкам треугольников). В вершинах полигонов строились базисные сети, располагались пункты Лапласа. Полигоны I класса пересекались основными рядами II класса, а оставшееся пространство полигонов заполнялось сетями триангуляции II класса. Далее, на основе пунктов I, II классов строилась сеть III класса, а пункты IV класса получались засечками. Основным методом построения ГГС являлся, как и в XIX в., метод триангуляции.

В 1930 г. было предпринято общее уравнивание астрономо-геодезической сети (АГС). По результатам первого в СССР уравнивания АГС, законченного в 1932 г., была получена новая система координат, именуемая «системой 1932 г.» (СК-32). Она охватила пространство от Пулково до Челябинска и Ирбита. В 1935 г. был опубликован Временный каталог пунктов I кл. (М.: ОНТИ. – 1935 г.). Центром СК-32 служили исправленные координаты центра круглого зала Пулковской обсерватории. В Пулковской системе СК-32 за математическую модель принят был эллипсоид Бесселя (1841 г.), размеры которого

$$a = 6\,377\,397 \text{ м}; \alpha = 1:299.15.$$

Начальным (исходным) пунктом является центр круглого зала Пулковской обсерватории, координаты которого, определенные из астрономических наблюдений, приравнены были геодезическим координатам:  $\varphi_0 = B_0$ ;  $\lambda_0 = L_0$ , а за исходный азимут был принят астрономический азимут с пункта Саблино на пункт Бугры Саблинской базисной сети (рис. 1.9), приравненный геодезическому азимуту этой же стороны:  $\alpha_0 = A_0$ . Отступление по высоте геоида от поверхности референц-эллипсоида Бесселя было принято равным нулю.

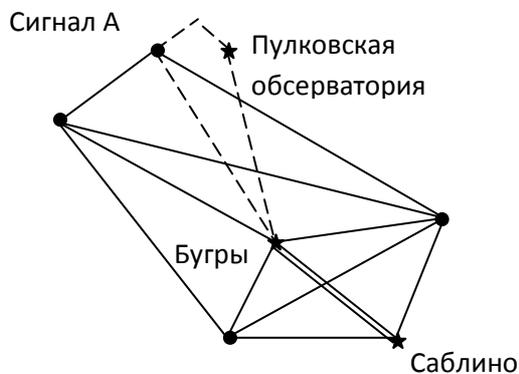


Рис. 1.9

Помимо Пулковской СК-32 на Дальнем Востоке применялась Свободненская

система 1935 г., в которой был также принят эллипсоид Бесселя, а начальным послужил пункт Черниговский (близ г. Свободный), астрономические координаты и азимут (на п. Гащенский) которого были приравнены к геодезическим координатам и геодезическому азимуту. Превышение геоида над референц-эллипсоидом в Свободненской СК-35 принято было равным нулю в пункте Черниговском.

Кроме этих двух основных систем использовались и другие самостоятельные системы: в Калымо-Индибирском районе – Магаданская (Дебинская) система координат 1932 г., на Камчатке – Петропавловская СК 1936 г., в Средней Азии – Ташкентская СК и некоторые другие.

Во всех упомянутых системах был принят эллипсоид Бесселя, а ориентирование его производилось простейшим способом: на одном из геодезических пунктов тщательно определялись астрономические величины  $\varphi_0, \lambda_0, \alpha_0$ , которые затем принимались соответственно в качестве исходных геодезических величин  $B_0, L_0, A_0$ .

В 1937 г. появилось первое дополнение к Временному каталогу координат пунктов I класса по результатам общего уравнивания еще 7 полигонов.

Наконец, после почти десятилетней работы, в 1940 г. в ЦНИИГАиК были закончены вычисления размеров эллипсоида из совместной обработки астрономо-геодезических сетей СССР, США и Западной Европы. Эти вычисления выполняла лаборатория высшей геодезии, которой с 1935 г. руководил А.А. Изотов (1907 – 1988 гг.). В результате вычислений были получены размеры эллипсоида (по данным на 1939 г.):

большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м;

сжатие  $\alpha = 1:298.3$ .

Следует отметить, что еще в 1935 – 1936 г. Ф.Н. Красовский получил  $a$  и  $\alpha$   
 $a = 6\,378\,338 \pm 32$  м;

$\alpha = 1:299.97 \pm 0.8$ .

Ориентирование референц-эллипсоида первоначально предполагалось провести в середине территории СССР. Такой пункт был избран в районе г. Кокчетав, где в 1940 – 1942 гг. были выполнены все необходимые работы. Но, в конечном итоге, при уравнивании в 1942 – 1944 гг. астрономо-геодезической сети была принята пулковская ориентировка с учетом традиций и преемственности. Определением исходных геодезических дат, установивших новую систему координат, занимались А.А. Изотов и М.С. Молоденский, который в 1942 г. определил составляющие отклонения отвесной линии под условием минимума суммы квадратов остаточных отклонений отвеса на всех пунктах Лапласа ГГС. М.С. Молоденский по результатам исследования фигуры геоида на территории СССР на основе разработанного им астрономо-гравиметрического нивелирования определил высоту геоида в Пулкове. Новая система геодезических координат, опирающаяся на отечественный референц-эллипсоид, получила название **системы координат 1942 г.** (год завершения вычислений) или Пулковской системы. Ее центром стал центр круглого зала Пулковской обсерватории. **Седьмого апреля 1946 г.** Постановлением Совета

Министров СССР единая для СССР система геодезических координат была утверждена, а референц-эллипсоид получил имя Красовского.

На Дальнем Востоке Управление военных топографов (УВТ) развивало триангуляцию I класса, ориентированную по астрономическим координатам и азимуту на пункте Черниговский Свободненской базисной сети. Таким образом, АГС за 96 меридианом (за Красноярском) была вычислена на эллипсоиде Бесселя в Свободненской системе координат.

Из-за невозможности столь же быстрого распространения Пулковской СК на всю территорию СССР, кроме Свободненской ГГС, развивались еще триангуляции на Кавказе и в Средней Азии со своими СК.

В 1939 г. вышли Основные положения о построении геодезической сети СССР (ОП ГГС-39), в основу которых была положена схема Ф.Н. Красовского. Параметры ГГС, требования к точности ее построения отражены в табл. 1.4.

Таблица 1.4. Характеристика ГГС по ОП ГГС (1939 г.)

Класс триангуляции	Средняя длина стороны S (км)	СКО измерения углов $m$ (сек)	Ошибка в слабом месте сети $m/S$	Ошибка взаимополож. смежных пунктов (м)
Ряды 1 кл.	25 – 30	0.7 – 0.9	1 / 100 000	~ 0.3
Ряды 2 кл.	18	1.2 – 1.5	1 / 60 000	~ 0.3
Сети 2 кл.	11 – 13	2.0 – 2.5	1 / 35 000	~ 0.3
Сети 3 кл.	5 – 8	5	1 / 15 000	~ 0.3

Как видно из таблицы, ГГС обеспечивала топографические съемки вплоть до масштаба 1:10 000 включительно и решение различных научных и практических задач как самой геодезии, так и различных отраслей народного хозяйства.

В ОП ГГС-39 учтены технико-экономические возможности и условия страны. В эти годы схема построения ГГС в Германии уже развивалась в виде сплошной сети триангуляции I класса.

В 1940-х гг. было проведено совместное уравнивание как плановых ГГС, так и нивелирных сетей. Уравнивание АГС выполнялось по методу Ф.Н. Красовского; в решении было включено 310 звеньев и один полигонометрический ход (Казань – Агрыз), образовывавшие 87 четырехугольных и многоугольных полигонов, общей длиной звеньев 60 тыс. км. Уравнивание выполнялось по методу условных наблюдений и распадалось на два этапа: уравнивание звеньев триангуляции и общее уравнивание полигонов.

К 1950 г. технико-экономические условия в стране и отрасли изменились коренным образом: была создана единая СК и получен референц-эллипсоид; построены и уравнены плановые и высотные ГС (ГГС и нивелирные сети); завершилось картографирование страны в масштабе 1:100 000 (формальный срок – 1954 г.), в отрасли сформировались мощные инженерно-технические кадры. Наконец, страна перешла на такой уровень промышленного и индустриального строительства, когда встал вопрос о картографировании территории в масштабах 1:25 000, 1:10 000, 1:5 000, 1:2 000. Последних два масштаба не

обеспечивались ОП ГГС-39. Поэтому уже в 1948 г. коллегия ГУГК утвердила проект новых ОП ГГС, в которых был заложен основной принцип построения ГГС – сплошные сети. Программа ОП ГГС-54 по согласованию ГУГК и ВТУ была утверждена в 1954 г.; вместе с тем она содержала в себе ряд некорректных положений, требовавших теоретических решений. Последние были получены в работах К.Л. Проворова, а так же А.И. Дурнева и других ученых.

В целом ОП ГГС (первоначально в 1954 г. и окончательно в 1961 г.) отражали одну концепцию, подход и решение задачи координатизации. ОП ГГС-61 имеет более высокую по точности основу, чем ОП ГГС-39, обеспечивает картографирование страны в масштабах 1:5 000 и 1:2 000 включительно, а в качестве основных методов для развития ГГС в ней приняты, кроме триангуляции, также полигонометрия и трилатерация. В ОП ГГС-61 сети подразделяются на 1, 2, 3, 4 классы. Основной является ГС 1 класса, создаваемая в виде астрономо-геодезической сети полигональной формы, предназначенной для решения научных задач – определения формы и размеров Земли и внешнего гравитационного поля, координатизации всей территории страны. Внутри полигонов строится ГС 2 класса, являющаяся основой 3 и 4 классов.

В дополнение к ОП ГГС-61 в 1962 г. инструкцией СН-212-62 Госстрой существовавшие 2 разряда ГС местного значения дополнил полигонометрией 1 разряда повышенной точности, соответствовавшей 4-му классу.

В целом характеристики ОП ГГС-61 приведены в табл.1.5.

Таблица 1.5. Характеристики ОП ГГС-61

Класс сети	Длина стороны S (км)	СКО измерения углов m (сек)	Относительная ошибка стороны в слабом месте сети ms/S	Ошибка положения смежных пунктов (м)
1	25 – 30	0.7	1 / 150 000	~ 0.15
2	7 – 20	1.0	1 / 200 000	~ 0.06
3	5 – 8	1.5	1 / 120 000	~ 0.06
4	2 – 5	2.0	1 / 70 000	~ 0.06

К 1990 г. (последний этап) было завершено картографирование всей территории страны в масштабе 1:25 000; в важных регионах начались съемки в масштабах 1:2 000, 1:1 000, 1:500; завершено построение ГГС по всей стране. Была проделана колоссальная работа по построению ГГС на обширной территории. Характеристики ГГС, созданной на территории СССР до 1990 г., приведены в табл. 1.6. Астрономо-геодезическая сеть 1, 2 классов на всей территории СССР была построена к началу 1980-х гг. Встала проблема ее уравнивания, а также разработки новой концепции построения ГГС.

Таблица 1.6. Характеристики ГГС, построенной на территории СССР

Класс сети	Средняя длина стороны S (км)	СКО измерения углов m (сек)	Относительная ошибка стороны сети ms/S	Ошибка взаимного положения смежных пунктов (см)
1	12	0.84	1:349 000 – 1:222 000 (ср.1:269 000)	4.5
2		1.2		4.5
3		1.5		4.5
4		4.0		4.5

Объем планируемого уравнивания представлялся громадным. К 4733 пунктам 87 полигонов (1940-х годов) на новом этапе уравнивания (конец 1980-х годов) добавилось 10527 пунктов. При уравнивании сети были использованы 535 базисов, 1232 азимута и 1481 астропункт. Подготовка к уравниванию началась в 1982 г. со сбора данных об измерениях на пунктах АГС. В период с 1985 по 1988 гг. формировались банки данных.

Уравнивание АГС было проведено в несколько этапов. На первом произведено полигональное уравнивание по замыкающим звеньям триангуляции 1 класса и сдвоенных и строенных цепочек треугольников и участков сплошной сети 1, 2 классов (1985 – 1986 гг.); на втором – локальное и блочное уравнивание АГС (по трапециям масштаба 1:1 000 000 и по участкам АГС размером в 30 – 60 тыс. пунктов с межблочным перекрытием); на третьем – общее уравнивание АГС (с июня 1990 г. по май 1991 г.). В последнем случае АГС уравнивалась как свободная.

В первом уравнивании исходная полигональная сеть состояла из 403 полигонов, образованных 978 замыкающими. В результате общего уравнивания (третий этап) получены следующие данные: единица веса – 1.061, средние квадратические ошибки измеренного направления 1 класса – 0,52", 2 класса – 0,75", измеренного азимута – 1,27", относительная ошибка измеренной линии 1 класса – 1:377 000, 2 класса – 1:246 000, средняя квадратическая поправка в азимут – 1,36", в абсциссу – 11.17 м, в ординату – 8.26 м; относительная поправка в длину линии – 1:269 000; среднее смещение сети по абсциссе – 7.89 м, по ординате – 4.23 м. Поправки в координаты СК-42 возрастают по мере удаления от Пулково.

Уравниваемая сеть состояла из 164 306 пунктов, образующих сплошную сеть триангуляции, в которой только 5% пунктов принадлежали рядам. В АГС входило 7 872 базисных линий, 3 584 астрономических пунктов. Углы измерены со СКО 0.84", определенной по формуле Ферреро. В среднем длина стороны получена с точностью от 1:349 000 до 1:222 000 – в среднем 1:269 000 (средняя длина стороны 12 км). СКО взаимного положения получила значение 4.5 см.

Поправки в координаты СК-42 возрастают по мере удаления от Пулково на восток и достигают 24 м по абсциссе и 27 м по ординате. СКО передачи координат на краю АГС достигают 1.02 и 1.10 м соответственно по абсциссам и ординатам.

При общем уравнивании АГС число измеренных в ней элементов превышало миллион. В их числе было 3 500 азимутов Лапласа. Объем исходной

измерительной информации, использованной при уравнивании в 1940-х гг. (СК-42), составлял всего 10% от того, что уравнивалось в 1990 – 1991 гг.

К 1990 гг. в дополнение к АГС появились независимые геодезические сети: космическая (КГС) и доплеровская (ДГС). Первая (КГС) была построена Топографической службой Вооруженных сил (ТСВС) России по результатам наблюдений космического геодезического комплекса Гео-ИК. Из всех пунктов КГС 26 были расположены на территории СССР. ДГС создана Федеральной службой геодезии и картографии (1987 – 1993 гг.) и состоит из 160 пунктов, координаты которых определены из доплеровских наблюдений ИСЗ системы ТРАНЗИТ.

Таким образом, четвертым этапом уравнивания стала совместная математическая обработка АГС, КГС и ДГС, выполненная в ЦНИИГАиК в 1992 – 1995 гг.

В результате этого уравнивания и последующего заключительного уравнивания АГС получена новая референцная система координат СК-95 (1995 – год совместного уравнивания АГС, КГС, и ДГС). В результате совместного уравнивания получены координаты 134 общих пунктов, которые практически задали СК-95. Эти пункты были приняты за жесткие при окончательном уравнивании АГС в 1996 г. СК-95 по точности превосходит СК-42 на порядок.

Как было отмечено выше, при формировании СК-32 и СК-42 была принята полигональная схема построения и обработки АГС. Это стало источником значительных деформаций в системах координат, превышающих влияние ошибок измерений. Так ошибка передачи координат по непосредственно измеренным направлениям составляли 6 – 8 см, в то же время, в СК-42 она могла достигать 10 – 20 см. Основой СК-42 являются астрономо-геодезические, гравиметрические и нивелирные сети. По их данным получены параметры референц-эллипсоида Красовского и высоты геоида над ним. Но СКО в положении пунктов относительно Пулково характеризуется единицами метров на западе и до 30 м на востоке.

Каталоги координат СК-42 составлены по листам карты масштаба 1:200 000 в шестиградусной зоне проекции Гаусса – Крюгера. На основе СК-42 для нужд народного хозяйства в 1963 г. была введена СК-63, основывавшаяся на трехградусных зонах, и, таким образом, была более близкой к измерениям на физической поверхности Земли. Но после 30 лет ее применения от нее отказались.

Таким образом, на протяжении XX в. в России (и Советском Союзе) использовались системы координат СК-32, СК-42, СК-63. При этом СК-42 была на протяжении 50 лет главной системой координат, применявшейся в гражданских и военных сферах деятельности, при решении научных и производственных задач. Вместе с тем, эта система не позволяет во многих случаях однозначно осуществлять привязку к пунктам городских или других специальных геодезических сетей, не позволяет однозначно и с требуемой точностью определять параметры перехода к местным системам координат (МСК), не обеспечивает авиационные и навигационные карты требуемой точностью для навигации, не позволяет реализовать потенциал дорогостоящей

спутниковой аппаратуры системы ГЛОНАСС/GPS, не обеспечивает решение ряда других задач (геодинамики и т. п.).

С учетом сказанного, для решения оборонных задач Генеральным штабом ВС с 6 июля 1988 г. была введена Единая геоцентрическая система координат (СК-90). Роскартография с 2002 г. вводит в России новую геодезическую систему координат СК-95 взамен СК-42.

С учетом возникших проблем координатного обеспечения страны во второй половине последнего десятилетия XX в. Роскартография (ЦНИИГАиК) выдвинула концепцию и программу перехода топографо-геодезического производства на автономные методы спутниковых координатных определений – «Федеральная целевая программа Российской Федерации. Перевод геодезического обеспечения территории России на спутниковые методы». В этой программе введена новая структура построения Государственных геодезических сетей (рис. 1.10): ФАГС, ВАГС, СГС-1, АГС (соответственно: фундаментальные АГС, высокоточные ГС, спутниковые ГС 1 класса). Возрастающие требования к точности, оперативности и качеству топографо-геодезического обеспечения диктуют настоятельную необходимость введения новой государственной геодезической референцной СК-95 и государственной геоцентрической системы координат ПЗ-90.

#### 1.4.2. Схемы, программы, этапы развития нивелирных сетей

Создание нивелирной сети в России началось в 1871 г. До этого высоты каких-либо пунктов получали, в основном, барометрическим нивелированием. Высоты астрономических и других пунктов над уровнем моря определяли с помощью сначала переносного ртутного барометра, а позже – металлических переносных барометров-анероидов. С развитием триангуляции стали применять геодезическое нивелирование (ряд Струве – Теннера). Но в случае удаленных районов (Урала) отметки для исходных пунктов получали барометрическим нивелированием. Все высоты, полученные геодезическим нивелированием, приводились в каталогах триангуляций. Нивелирные каталоги, как результат применения геометрического нивелирования, впервые начали издаваться с 1894 г. (каталог С.Д. Рыльке, полученный по результатам первого уравнивания 13 000 км нивелирных линий, выполненных за 13 лет). Все высоты 1 092 марок и реперов отнесены к среднему уровню Балтийского и Черного морей (он ниже на 0.4 м уровня, принятого в настоящее время). Средний Черноморо-Балтийский уровень, взятый за основу С.Д. Рыльке, был вычислен им по продолжительным водомерным наблюдениям абсолютных высот 11 береговых марок.

За период с 1893 по 1917 гг. КВТ произвел точное нивелирование еще 32 500 км со средней квадратической случайной ошибкой на километр хода равной  $\pm 4.5$  мм. С 1913 г. КВТ впервые приступил к высокоточному нивелированию (СКО  $\pm 1.5$  мм на 1 км и систематическая СКО  $\pm 0.3$  мм). До 1917 г. было проложено 1 750 верст таких ходов, и впервые было точно получено, что уровень Черного моря ниже Балтийского на 0.7 м. Перед революцией в 1913 г. была составлена последняя, четвертая инструкция

(изданная в 1921 г.), которая регламентировала выполнение «нивелировок высокой точности», тогда как две предыдущие предназначались для точного нивелирования. В изданной В.В. Витковским в 1915 г. «Топографии» (2-е исправленное издание) и в монументальном «Курсе низшей геодезии» С.М. Соловьева (1914 г.) геометрическое нивелирование делилось только на два вида: точное и техническое. Таким образом, с 1921 г. в нивелировании был выделен еще один вид – нивелирование высокой точности. В 1925 г. вышла «Инструкция по нивелированию высокой точности», сохранившая по сравнению с 1921 г. основные технические требования и рассчитанная также на нивелир и рейки, в основном, зарубежные – Бамберга (немецкий способ нивелирования). В этих инструкциях (1921 и 1925 гг.) были учтены рекомендации 1912 г. Международной геодезической ассоциации (МГА). В то же время допустимая случайная погрешность на 1 км хода в инструкции 1925 г. по сравнению с 1913 г. (1921 г.) уменьшилась (с 1.5 до 1.0 мм); систематическая осталась прежней – 0.3 мм.

В России и СССР важнейшие этапы в нивелировании территории страны завершались уравниванием высокоточного и точного нивелирования, всех нивелировок, корректировкой системы координат и изданием каталогов высот реперов и, в конечном итоге, изданием новых инструкций по нивелированию на новый этап развития. Так первое уравнивание в 1894 г. нивелировок 1871 – 1893 гг. подвело итог всего предшествующего этапа нивелирования. По результатам вычислений был составлен каталог Рыльке. Средняя квадратическая ошибка, полученная из уравнивания, не превышала 3 мм/км. Каталог и нивелирная сеть использовались до 1940-х гг.

Система высот С.Д. Рыльке с исходным средним уровнем поверхности Черного и Балтийского морей использовалась до 1943 г.

Второе уравнивание нивелирной сети было выполнено в 1933 г. С 1875 по 1932 г. протяженность нивелирной сети (Европейская часть) достигла 69450 км. Совместное влияние случайной и систематической ошибок на 1 км высокоточного нивелирного хода, вычисленное по невязкам полигонов, получилось равным 2.7 мм. Этим уравниванием был подведен итог полувековой работы геодезистов. Следует отметить, что в 1931 г. было выполнено предварительное уравнивание. В уравнивание было включено 152 нивелирных линий I и II классов протяженностью около 26 000 км (из них 4 000 км дореволюционных нивелировок). Уравнивание нивелирной сети страны 1933 г. производилось под руководством А.М. Вировца. В обработку вошло 106 линий, общей протяженностью 69450 км. При этом по результатам уравнивания точность нивелирования характеризовалась поправками на 1 км хода: до 0.1 мм – 69% линий, до 0.2 мм – 17% и 0.5 мм – 14% линий при наибольшей поправке 0.7 мм. В соответствии с решением Второго геодезического совещания при Госплане СССР за исходный уровень был принят нуль Кронштадского футштока. Результаты обработки были опубликованы в 1934 г. в «Каталоге высот марок и реперов высокоточного и точного нивелирования, исполненного Главным геодезическим управлением и Управлением военных топографов, в Европейской части СССР с 1875 по 1932 гг.», в который было

включено 8 134 точки, чьи высоты были отнесены к нулю Кронштадского футштока.

В Азиатской части СССР, в Сибири и на Дальнем Востоке нивелирование выполняло ВТУ с 1901 по 1928 гг. Был составлен Временный каталог Сибирских нивелировок (1931 г.). Все высоты пунктов отнесены к «Тихоокеанской системе высот».

В 1935 г. был составлен Каталог среднеазиатских нивелировок (ВТУ), установивших свою систему высот.

На территории России до 1930 г. проводилась значительная работа по своду нивелировок железных дорог. Вычисления были выполнены по заданию Комиссариата путей сообщения Ю.М. Шокальским. С 1917 по 1930 гг. было издано три выпуска Каталога высот головок рельсов около железнодорожных станций.

К 1933 г. было принято решение, закрепленное инструкцией 1933 г., о введении новой классификации в нивелировании. Его стали делить на высокоточное и точное. Для высокоточного допуски устанавливались инструкцией 1921 г. (случайная ошибка менее 1.5 мм на 1 км хода). Для точного нивелирования допуск определялся величиной 2.0 мм на 1 км хода. В 1938 г. вышла «Инструкция по нивелированию I и II разрядов». Таким образом, высокоточное и точное нивелирование получили классификацию разрядов. А за год до этого, в 1937 г. опубликована «Инструкция по нивелированию 3, 4 и 5 разрядов». В 1938 г. ГУГК впервые определил, что линии нивелирования должны закрепляться, кроме стенных марок, также грунтовыми реперами.

В 1939 г. был принят и утвержден ГУГК и Управлением ВТС нормативный акт «Основные положения о построении Государственной опорной геодезической сети СССР». В соответствии с ним нивелирование стало впервые делиться на четыре класса – I, II, III и IV. Одновременно были определены оптимальные параметры полигонов и длины линий, предельные значения случайных и систематических ошибок и другие характеристики.

По «Основным положениям ...», принятым в 1939 г. предусматривалось проложение на территории СССР Государственной нивелирной сети I (высокой точности), II, III, IV классов. Их погрешности в мм (случайные и систематические) таковы: I кл. – 1.0 и 0.2; II кл. – 2.7 и 0.4; III кл. – 8.0 и 0.8; IV кл. – 20.0 и 2.0.

После завершения Великой Отечественной войны началось сплошное картографирование территории СССР в масштабе 1:100 000, а также топографические съемки отдельных районов в крупных масштабах 1:5 000 – 1:2 000. Промышленное предвоенное и послевоенное строительство, освоение новых районов добычи сырьевых ресурсов, активные научные исследования приняли значительные масштабы. Требовалось упорядочение, систематизация и дальнейшее развитие нивелирной сети. В первую очередь требовалось проведение нивелирования I и II классов в Европейской части СССР, подвергшейся опустошительным разрушениям, а также в восточных районах – II класса. Кроме того, пришло время введения единой системы координат и высот. Все эти и ряд других задач и проблем, возникших еще в конце 1930-х гг., привели к принятию ГУГК соответствующих решений. В 1939 г. при участии А.М. Вировца, Н.А.

Павлова и И.В. Фурсова было издано «Временное наставление по нивелированию I класса» и дана схема предварительного проекта нивелирной сети I класса для всей страны.

К концу 1945 г. (начиная с 1875 г.) сеть нивелирных полигонов достигла общей протяженности 171 тыс. км, из которых 73% (125 тыс. км) было проложено при Советской власти.

В соответствии с постановлением СМ СССР № 760 от 7 апреля 1946 г. на всей территории Советского Союза, в нивелирных сетях I и II классов счет высот производится от нуля Кронштадского футштока (средний уровень Балтийского моря). При этом до 1950-х гг. это были ортометрические высоты, и за нуль принята горизонтальная черта на медной пластинке, укрепленной на устое Синего моста через Обводной канал в Кронштадте.

Многолетние наблюдения показали, что нуль Кронштадского футштока практически не меняет своего высотного положения. В послевоенные годы его связали с фундаментальным репером 6521, заложенным в Петровском парке г. Ломоносова. При строительстве в Ленинграде сооружений для защиты от наводнений появились сомнения в высотной стабильности этого футштока. Поэтому в 40 км от г. Ломоносова был построен Шепелевский пост-дублер Кронштадского футштока. В Кронштадте, Ломоносове и Шепелеве заложили глубинные реперные посты. Таким образом, высотное положение нулей футштока, мареографов и реперов получило фундаментальное вековое закрепление. Якоря реперов заложены в зависимости от пород на глубины: 1) 180.3; 230.7; 176.3 м; 2) 73.8; 120.9; 73.2 м; 3) 23.2; 31.5; 26.6 м. Кроме того, в нескольких десятках метров от реперных постов заложены репера государственной нивелирной сети I класса для наблюдения за деформациями пород осадочного чехла в Кронштадте, Ломоносове и Шепелеве.

Обширная сеть нивелирных линий, выполненных к 1945 г., требовала их обработки. На конец 1940-х гг. было намечено уравнивание всей нивелирной сети СССР. При этом исключались линии точного и высокоточного нивелирования, выполненные до революции.

В 1948 г. в ЦНИИГАиКе А.М. Павловым были составлены «Основные положения по общему уравниванию нивелирной сети СССР». Выполненное в соответствии с ним уравнивание, завершенное в 1950 г., включало в себя 139 тыс. км нивелирных линий I и II классов (разрядов). В том же 1950 г. был опубликован «Каталог высот марок и реперов нивелирования I и II классов (разрядов)».

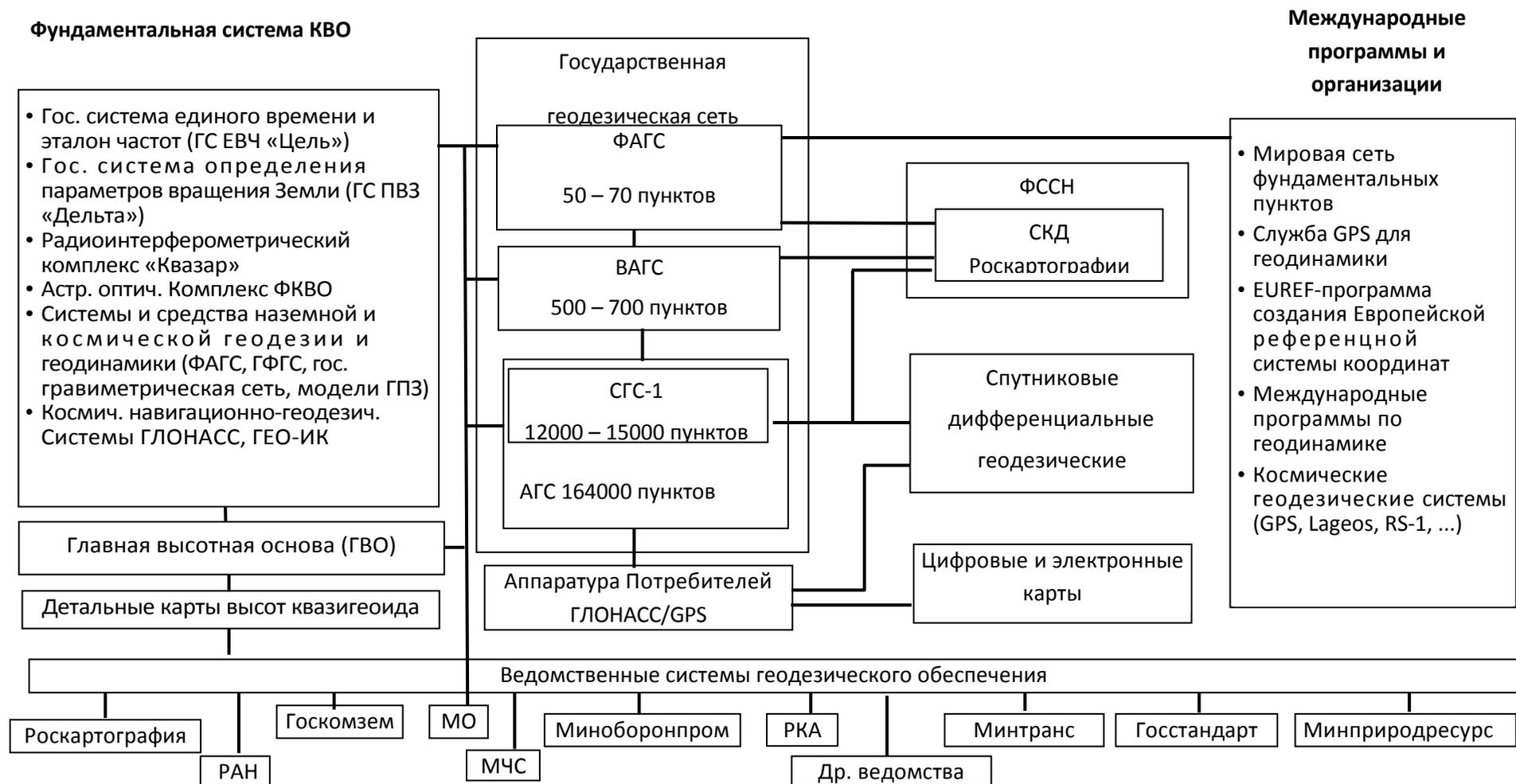
В 1949 г. впервые был сделан широкий анализ результатов нивелирования I класса, выполненного в 1945 – 1948 гг., общей протяженностью 8 тыс. км. По материалам наблюдений были получены разности превышений, по которым вычислены значения случайных и систематических ошибок на 1 км хода. Анализ показал, что для линий нивелирования I класса характерны значительные, преимущественно отрицательные накопления разностей превышений. Кроме того, невязки замкнутых полигонов оказались велики. Отмеченное свидетельствовало, что в нивелировании I класса действовали источники крупных систематических ошибок, природа которых не была установлена. В

результатах нивелирования 1949 – 1950 гг. были обнаружены аналогичные явления. В повторном тщательном анализе нивелирования I класса, проведенным ЦНИИГАиК в 1954 г., были раскрыты источники и механизм влияния систематических ошибок, которые впоследствии были учтены в изданной в 1955 г. «Инструкции по нивелированию I, II, III и IV классов» (инструкция переиздавалась в 1957, 1963 и 1966 гг.). Эта инструкция определяла новый этап развития нивелирования, в ней определялась схема и программа развития нивелирных сетей, технические требования и нормативы. В инструкции устанавливалось, что нивелирная сеть III и IV классов является высотной основой топографических съемок всех масштабов, а I и II классы нивелирования определяют единую систему высот на всей территории СССР. Впервые в этом нормативном документе содержались технические требования ко всем четырем классам государственного нивелирования. Все нормативные акты по государственной нивелирной сети и перечень всех технических инструкций с 1871 г. по 1975 г. приведены в статье Л.А. Кашина (Кашин Л.А. Нивелирная сеть СССР / О нивелирной сети СССР. – М., 1979. С. 4 – 48).

В 1950 г. М.С. Молоденским была завершена разработка теории нормальных высот, принятых в СССР и в ряде других стран.

Высоты, отсчитываемые от квазигеоида, с 1951 г. по предложению М.С. Молоденского получили название нормальных. Впервые в России поправки за силу тяжести в геометрическое нивелирование начал вводить С.Д. Рылъке. До М.С. Молоденского геодезические высоты определялись путем суммирования ортометрических высот соответствующих точек над геоидом и высоты геоида над эллипсоидом. М.С. Молоденский высоту точки над эллипсоидом представил суммой нормальной высоты точки и аномалии высоты (т. е. высоты квазигеоида). При этом поверхность квазигеоида может быть построена путем откладывания аномалий высот по нормальям к эллипсоиду от его поверхности. Введенный термин «нормальная высота» определяет высоту точки над эллипсоидом, при условии совпадения реального земного гравитационного поля с нормальным. Нормальные высоты вычисляются более просто, чем ортометрические и вошли в геодезическую практику в странах восточной Европы и ряде других стран.

В 1961 г. был разработан проект единой сети линий повторного нивелирования на пространстве СССР и социалистических стран, для изучения современных движений земной коры. В проекте приняли участие геодезические службы стран восточной Европы. Со стороны СССР реализацию проекта осуществляли ЦНИИГАиК, институты географии, физики Земли Академии наук СССР. Работа была успешно завершена; составлена и издана карта современных вертикальных движений земной коры восточной Европы. В 1971 г. карта была представлена на XII Генеральную ассамблею Международного геодезического и географического союза, где получила высокую оценку. В ней были учтены материалы, включающие более 200 тыс. км линий повторного нивелирования I, II классов.



ФАГС – фундаментальная астрономо-геодезическая сеть; ФССН – Федеральная система сейсмологических наблюдений и прогноза землетрясений; ГФГС – государственная фундаментальная гравиметрическая сеть; ВАГС – высокоточная астрономо-геодезическая сеть; СКД – Служба контроля деформаций земной поверхности; СГС-1 – спутниковая геодезическая сеть 1 класса; ФКВО – фундаментальное координатно-временное обеспечение; ГПЗ – гравитационное поле Земли

Рис. 1.10. Принципиальная схема государственной системы геодезического обеспечения территории

Карту составлял известный советский геоморфолог и картограф Ю.А. Мещеряков (1923 – 1970 гг.). Исследование результатов повторного нивелирования показало, что земная поверхность на площади более 6,5 млн. кв. км испытывает непрерывные движения разной интенсивности. Скорости движений колеблются от нуля до 10 – 15 мм и более в год. Эти движения согласуются с морфоструктурами, физическими и геологическими особенностями строения Земли и новейшими тектоническими движениями.

В 1968 г. была разработана новая программа дальнейшего развития высокоточного и точного нивелирования, которая была к середине 1970-х гг. в определенной мере реализована. К этому времени общая протяженность нивелирных линий I класса составила 70 тыс. км, а II класса – 360 тыс. км. Возникла необходимость в уравнивании, которое было завершено к 1977 г. Вся сеть была разбита на 2 блока: «Запад» и «Восток», для которых из уравнивания были получены следующие средние квадратические ошибки на 1 км хода:

Блоки	I класс	II класс
«Запад»	1.6 мм	2.7 мм
«Восток»	2.1 мм	3.6 мм.

Наиболее удаленные от Кронштадского футштока пункты имеют ошибку порядка 15 см.

В 1977 г. был издан Каталог высот опорной нивелирной сети I и II классов, составивший единую систему высот 1977 г. В 1974 г. вышла дополненная и переработанная инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. В ней принят переходный коэффициент от одного класса точности к другому равным 2 (в триангуляции он равен был 1.4 – 1.5).

В 1975 г. изданы «Рекомендации по геодезическим работам на геодинамических полигонах». В 1977 г. ГУГК разработал новую программу развития нивелирной сети СССР до 1990 г., в конечном итоге реализованную к этому сроку. В итоге протяженность линий нивелирования I класса составила 160 тыс. км, II класса – 500 тыс. км.

#### 1.4.3. Космическая геодезия и координатные системы

4 октября 1957 г. с запуска в СССР первого в мире искусственного спутника Земли начинаются космические исследования, а с 1962 г. – в области спутниковой геодезии.

К 1997 г. в мире было запущено более десятка различных космических систем: GOES, NSAA, LandSat – США; Spot – Франция; Meteosat, ERS-1(ESA), GMS, MOS-1 – Япония; Метеор, Ресурс-01 – СССР; IRS – Индия и др.

На первых порах развития космической геодезии все было направлено на разработку и реализацию геометрических методов, в основном, синхронных и квазисинхронных фотографических наблюдений.

Ко времени запуска первого ИСЗ (4 октября 1957 г.) Астросовет АН СССР организовал и подготовил на территории СССР 66 станций наблюдения, оснащенных астрономическими телескопами. Аналогичная сеть была создана в США, а затем и в других странах (всего более 300).

В 1961 г. по инициативе Астросовета АН СССР и ГАО АН СССР начато международное сотрудничество по наблюдению ИСЗ. Совместно со станциями США, Франции, Англии и Африки станции СССР с камерами АФУ-75 и SBG приняли участие в международных наблюдениях ИСЗ РА-GEOS для установления геодезических связей Европа – Африка. Советские станции в Звенигороде, Риге и Ужгороде, наряду со станциями еще 14 стран, принимали участие в международном эксперименте по спутниковой геодезии (JSAGEX).

Метод спутниковой триангуляции стал в 1960 – 70-е годы основным геометрическим методом. Первые синхронные фотографические наблюдения спутника Echo-1 в Советском Союзе были проведены в мае 1961 г. на пунктах Пулково, Николаев, Харьков и Ташкент. Наблюдения продолжались до июня 1963 г. как на станциях СССР, так и станциями ГДР, ПНР, СРР, ЧССР. По результатам наблюдений спутников Echo-1 с Советских станций в Звенигороде, Николаеве, Риге, Ужгороде, а также в Бухаресте, Познани, Праге в 1963 г. была построена экспериментальная сеть космической триангуляции протяженностью более 10 тыс. км. Для фотографирования ИСЗ в СССР применялись камеры АФУ-75 и ВАУ (обе разработаны в СССР).

По результатам наблюдений спутника Echo-1 во Франции и США (1963 – 1964 гг.) также были построены сети. Позднее по наблюдениям камерами ВС-4 спутника-баллона PAGEOS, запущенного в 1966 г. (вес 56,7 кг, диаметр 30,5 м) в соответствии с программой NGSP (США), была построена мировая сеть космической триангуляции из 45 пунктов и 174 сторон (длиною 2 – 5 тыс. км) и 7 космических базисов (наземные). Расчетная средняя квадратическая ошибка пункта получилась равной по высоте 5.6 м, по широте и по долготе – 3.1 м. Точность (СКО) направления Рига – София по наблюдениям Echo-2 (из 13 положений) получилась равной: по азимуту 0.28", по зенитному расстоянию – 0.48". Плановые расхождения (СКО) пунктов мировой сети с измерениями, выполненными динамическим методом, достигли 4,4 м.

В эти же годы был реализован проект-предложение И.Д. Жонголовича выполнения геодезических векторных ходов «Арктика – Антарктика» и «Восток – Запад». В 1964 г. им был предложен нереализованный проект мировой геодезической сети в виде икосаэдра, строящегося по фотографическим наблюдениям ИСЗ.

В начале 1960-х было осуществлено построение ряда других геометрических сетей. Радиодальномерная система SECOR (США) применялась при создании геометрической экваториальной сети. В 1966 г. по наблюдениям спутника GEOS-1 осуществлена связь между сетью станций Смитсоновской обсерватории и пунктами в Европе и Америке.

В начале 1965 г. начались первые успешные эксперименты с освещенным лазером с Земли спутником. Разработка лазерных средств измерений дальностей спутников особо интенсивно проводилась в США, Франции, а также – в СССР и социалистических странах. Первые отраженные от ИСЗ лазерные импульсы были зарегистрированы в конце 1964 г. (с запуском первого спутника, оборудованного оптическим уголковым отражателем).

При решении геодезических и геодинимических задач получают распространение доплеровские наблюдения ИСЗ. Доплеровская аппаратура реализуется, в основном, путем применения орбитального метода и метода транслокации. Во многих странах доплеровские наблюдения применяются для построения геодезических сетей в целях навигации, координатной привязки геологоразведочных работ. В США в 1970-х гг. создана сеть из 140 доплеровских станций.

В начале 1970-х гг. начинается интенсивная разработка динамических методов космической геодезии. Хотя об этом методе и его возможностях было известно раньше, но для их реализации было необходимо значительное повышение точности наблюдений ИСЗ. В прошедшие два десятилетия происходило достаточно быстрое совершенствование доплеровской и лазерной аппаратуры. Большие возможности открылись с формированием новых спутниковых методов: альтиметрии, градиентометрии, наблюдений по линии «спутник – спутник», лазерной локации Луны и радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ).

Развитие космической геодезии шло, преимущественно, по трем направлениям: создание и наблюдение пассивных ИСЗ типа «Пагеос», «Эталон»; создание и наблюдение специализированных ИСЗ типа Гео-ИК; применение космических навигационных систем ГЛОНАСС и GPS. Геодезическое использование ИСЗ возникло и развивалось преимущественно как ветвь спутниковой навигации военного назначения, начиная со спутника ANNA и кончая системой GPS. Важную роль в развитии играли международные спутниковые геодинимические программы. Первый отечественный навигационный спутник «Космос-192» был выведен на орбиту 27 ноября 1967 г. (изготовлен на Красноярском производственном объединении прикладной механики НПО ПМ). С середины 1980-х годов эксплуатируется космический и геодезический комплекс Гео-ИК (спутники «Космос-842» и «Космос-911»). Гео-ИК оснащен радиовысотомером, доплеровской системой, ретранслятором, запросной радиодальномерной системой, уголковым отражателем. С помощью системы Гео-ИК в 1977, 1985 и 1990 гг. получены параметры Земли (ПЗ-77, ПЗ-85, ПЗ-90): фундаментальные геодезические постоянные, характеристики геоцентрической системы координат, параметры фигуры и гравитационного поля Земли. ПЗ-90 получены примерно по 30 млн. спутниковых измерений; планетарные модели получены в виде разложений в ряд сферических функций 36 и 200 степеней. Геоцентрическая система координат ПЗ-90 была закреплена координатами 26 опорных пунктов на территории СССР.

В октябре 1982 г. начаты летные испытания отечественной навигационной системы ГЛОНАСС (ИСЗ «Космос-1413»). 14 декабря 1995 г. завершилось формирование системы ГЛОНАСС состоявшей из 24 спутников.

По сравнению с GPS система ГЛОНАСС обеспечивала более высокую точность определения координат (20 м по сравнению со 100 м GPS). Вместе с тем система ГЛОНАСС не имела защиты от несанкционированного использования.

В последующие годы запуски космических аппаратов (КА) почти прекратились. С 2001 г. прекратился процесс деградации системы ГЛОНАСС. В 2004 г. в орбитальную группу входило только 11 КА, причем 8 из них использовались не по назначению. Планируется к 2007 г. эту орбитальную группу увеличить до 18 КА, обновленных, со сроком работы 10 лет. К 2010 г. предполагается довести число КА в системе ГЛОНАСС до штатного – 24 КА.

17 августа 1974 г. было принято решение, санкционировавшее создание спутниковой системы GPS. Предшественниками GPS были первая спутниковая система NNSS (Transit) и система Timation. Аббревиатура GPS предложена М. Stehling.

Системы GPS и ГЛОНАСС применяются для навигации морских и речных судов, для мониторинга окружающей среды, автоматической посадки самолетов, управления космическим, воздушным и наземным транспортом, обнаружения пожаров, связи и т. п.; для построения геодезических сетей, картографирования и кадастра, геофизических съемок, использования в приемниках в полицейских машинах и автобусах. В настоящее время подобные системы используются и в личных автомобилях.

Системы ГЛОНАСС и GPS имеют разное координатное обеспечение: в ГЛОНАСС используется земная система координат ПЗ-90, в GPS – WGS-84.

В 1988 г. СССР и США внесли в международные организации предложение: использовать ГЛОНАСС и GPS в качестве международных.

Применение космических (GPS) технологий ведет к выработке новой концепции геодезического обеспечения различных народнохозяйственных работ, к новой концепции геодезических измерений. Новые компьютерные, электронные и космические технологии приводят к новому геодезическому мышлению.

В космической геодезии первостепенное значение имеют системы координат. В 1967 г. в Люцерне введена Геодезическая референц-система с новыми фундаментальными геодезическими постоянными, пришедшими на смену констант референц-эллипсоида Хейфорда, принятого в качестве международного в 1924 г. Параметры системы 1967 г. не учитывали теории уровенного эллипсоида, поэтому в 1975 г. были рекомендованы новые параметры, в число которых была включена скорость вращения Земли. В 1979 г. в Канберре на XVII Генеральной ассамблее МГГС была принята новая система фундаментальных параметров геодезической системы относимости 1980 г., именуемая как Геодезическая референц-система 1980 г. (GRS-80). В этой системе в качестве основных параметров используются: экваториальный радиус Земли ( $a_e = 6378137$  м), геоцентрическая постоянная ( $GM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ ), динамический коэффициент, не учитывающий влияния приливных деформаций Земли ( $j_2 = 108263 \cdot 10^{-8}$ ), и угловая скорость ее вращения ( $w = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ). Величины параметров  $GM$ ,  $j_2$  и  $w$  1980 г. совпадают с рекомендованными в 1975 г.; значения  $U_e$  уменьшились на 3 м, погрешность определения  $a_e$  уменьшилась с 5 до 2 м. С 1900 по 1980 г. точность определения экваториального радиуса Земли и экваториальной силы тяжести

возросла в 100 раз, а сжатие динамического фактора Земли  $j_2$  и геоцентрической гравитационной постоянной  $GM$  – в 1000 раз.

В 1972 г. Министерством обороны США приняты параметры новой мировой системы координат, названной WGS-72 (Мировая геодезическая система-72). Цель ее введения – обеспечение решения геодезических и картографических задач в интересах Министерства обороны. В создании системы принимали участие ВВС США, Картографическое управление Министерства обороны, Лаборатория морских вооружений США и Военно-морская океанографическая служба. Система WGS-72 явилась результатом уточнения WGS-66, работы по уточнению этой системы велись с 1970 по 1974 гг. под руководством специального комитета WGS. При этом было использовано большое число спутниковых, астрономо-геодезических и гравиметрических данных. Система WGS-72 включала в себя параметры земного эллипсоида и гравитационного поля, элементы ориентирования основных геодезических систем координат и координаты станций сети слежения за ИСЗ. В системе WGS-72 функционировал ряд международных навигационных систем.

Более совершенной и современной версией всемирной геодезической системы является WGS-84. Система WGS-84 введена Картографическим управлением Министерства обороны США. Ее начало совпадает с центром масс Земли, а оси  $X$  и  $Z$  идентичны осям условной земной системы координат, определенной Международным бюро времени на эпоху 1984 г. В системе предусматривается вращение «средней» (стандартной) Земли с постоянной скоростью  $\omega$  вокруг среднего астрономического полюса, фиксированного во времени. При создании WGS-84 использована вся геодезическая и гравиметрическая информация, которой располагало Министерство обороны. В систему входят параметры гравитационного поля Земли (ERM), заданные в виде коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям до 180 степени (32 775 коэффициентов). Ошибки параметров эллипсоида WGS-84, ( $a_0$ ,  $\omega$ ,  $fM$ ,  $C_{20}$ ) соответствуют значениям Геодезической референцной системы 1980 г. (GRS-80) и имеют средние квадратические ошибки, равные, соответственно 2 м,  $0.15 \cdot 10^{-11}$  рад·с<sup>-1</sup>,  $0.6 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>·с<sup>-2</sup> и  $1.30 \cdot 10^{-9}$ . Дополнительно в число параметров WGS-84 включены динамическое сжатие, равное  $1 / 3\,054\,413$ , и главные моменты инерции Земли  $A = 8.009\,102\,9 \cdot 10^{37}$  кг·м<sup>2</sup>,  $B = 8.009\,255\,9 \cdot 10^{37}$  кг·м<sup>2</sup> и  $C = 8.035\,487\,2 \cdot 10^{37}$  кг·м<sup>2</sup>. Высоты геоида вычисляются с учетом ERM до 180 степени и могут использоваться потребителями в виде карт высот геоида над эллипсоидом WGS-84. Для 93% всей поверхности Земли средние квадратические ошибки высот не превышают 4 м. В систему WGS-84 включены элементы связи ее с 90 локальными геодезическими системами координат, причем точность перевычисления координат из этих систем, полученных по спутниковым данным, не превышает в основном 1 – 2 м.

Прогресс в космической геодезии привел к значительным успехам в геодинамических и геофизических исследованиях, особенно в области изучения короткопериодических процессов, происходящих на поверхности и в теле Земли. Рассмотренные выше методы и достигнутые в последние годы

результаты позволили фиксировать малые изменения скорости вращения Земли с относительной ошибкой  $10^{-8}$  (несколько миллисекунд в продолжительности суток). Исследования 1990-х гг. по-новому объясняют многие геофизические процессы, открывают возможность решения проблемы долгосрочного прогноза погоды и понимания долгопериодических реакций в системе «атмосфера – океан» вследствие изменений климата. Широкие возможности открывают запуски специальных геодинамических спутников «Лагос» (США), «Старлет» (Франция) и советских ИСЗ «Эталон 1» и «Эталон 2» (запущены в 1989 г.), предназначенных для уточнения орбитального движения спутников системы ГЛОНАСС.

Для эффективности использования ИСЗ должны быть известны их эфемериды, необходима единая координатная система, жестко связанная с Землей. Следуя рекомендациям МАС, МГГС, МСВЗ, определяются и ежегодно публикуются данные и стандарты небесной и земной систем координат. При этом направления небесной СК по отношению к квазарам фиксируются с точностью не грубее 10 микросекунд. Земная СК (ITRS) реализована построением земной опорной сети (ITRF) в виде сети наземных опорных пунктов с координатами, являющимися функциями времени.

Современную технику в космической геодезии можно подразделить на оптическую и радиотехническую. В оптической технике (лазерные дальномеры) достигнутая инструментальная точность характеризуется сантиметрами (на конец XX в.) в одном измерении. Во втором случае системы РСДБ обеспечивают миллиметровую точность.

Созданная глобальная сеть пунктов РСДБ состоит примерно из 40 стабильных станций с радиотелескопами разных диаметров и десятка мобильных антенн. В Симеизе с 1994 г. на базе 22-метрового радиотелескопа КРАО создана международная (Украина, Россия и США) станция РСДБ наблюдений по геодезической программе. Станция входит в международную сеть и обеспечивает точность определения положения 6 – 8 мм.

В построении геоцентрической СК и определении структуры гравитационного поля Земли лазерная локация ИСЗ является наиболее эффективным измерительным средством. На конец 1990-х гг. общее число лазерных станций превышало 50, не считая мобильных инструментов. Основная глобальная сеть, обеспечивающая регулярные наблюдения по программе МСВЗ, состоит из 26 станций, среди которых пока только 20 дают сантиметровую точность в единичном измерении и несколько миллиметров – по нормальным точкам. В составе международной глобальной сети на территории России и стран СНГ работают лазерные станции Симеиз, Коцивели, Комсомольск-на-Амуре, Майданак, Менделеево, Рига, Евпатория, оснащенные лазерными дальномерами Крым и Сажень.

Доплеровская радиопозиционная интегрированная спутниковая система (ДОРИС) состоит из развернутой равномерно по поверхности земного шара сети транслирующих антенн (маяков, более 50 пунктов) и спутника с приемопередатчиком на борту, принимающим и транслирующим собранную с маяков информацию на контрольную станцию координационного центра. На

последнем происходит накопление, обработка и планирование программ измерений.

В 1998 г. бортовой программный сегмент системы ДОРИС установлен на спутниках SPOT-2, SPOT-3 и на океанографическом ИСЗ ТО ПЭКС-Посейдон. Система ДОРИС в целом обеспечивает 2-сантиметровую точность в геоцентрической СК.

Современный уровень инструментальной точности приемников позиционной системы GPS НАВСТАР – 3 мм по горизонтальной составляющей.

В Годдардовском космическом центре НАСА в 1994 г. произведено наиболее полное уравнивание глобальной сети, содержащей 51 лазерную станцию, 58 пунктов РСДБ и 41 станцию с GPS приемниками (по результатам наблюдений международной программы «Динамика твердой Земли» 1980 – 1994 гг.).

В России в настоящее время Федеральная служба геодезии и картографии производит модернизацию и обновление ГГС, в процессе которых существенно повышается роль космической геодезии.

Средства геодезической астрономии и космической геодезии применяются для определения параметров вращения Земли (ПВЗ), которые, в свою очередь, входят в число исходных данных при определении координат пунктов и подвижных объектов. Система ПВЗ является одним из факторов метрологического обеспечения геодезических построений. В первой половине 1990-х гг. в России началось выполнение двух крупных проектов модернизации ГГС и государственной системы ПВЗ (ГСПВЗ) «Дельта». Последний должен был завершиться в 1997 г. В ГСПВЗ «Дельта» должны были функционировать три измерительные подсистемы: астрономическая, спутниковая и РСДБ. В работе первой подсистемы в 1993 г. принимали участие 113 астрономов-наблюдателей на 29 инструментах двадцати двух обсерваторий (10 – в России, 3 – на Украине, 3 – в Чехии, 2 – в Польше и по одной – в Узбекистане, Белоруссии и Словакии). Точность значений всемирного времени UT1-UTC и координат полюса (X, Y) в ГСПВЗ в 1993 г. была соответственно равна 0.0005 с, 0.002", 0.002". Для повышения точности на порядок (лучше, чем 0.001") нужно учитывать изменения координат пунктов из-за движения земной коры как при построении ФАГС, так и при определениях ПВЗ. И ФАГС, и ПВЗ станут совместно функционирующими динамическими системами.

В заключение следует отметить, что первая глава написана на основе систематизации исторических данных, взятых из многих источников [8 – 11].

## ГЛАВА 2. МЕТОД И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

### 2.1. Общие сведения о координатизации и классификации систем координат

Положение любого объекта (точки) в пространстве, на поверхности вращения, плоскости и так далее может быть определено или задано с помощью координат.

С математической точки зрения координаты – это упорядоченные значения чисел, величин, по которым находится или определяется положение какого-либо элемента или точки на заданном множестве.

В некоторых разделах математики, физики принято координаты именовать по-другому: например, координаты какого-либо элемента векторного пространства называют – **компонентами вектора**; координаты в произведении множеств именуется **проекциями на один из сомножителей**; в теории относительности система координат определяется как **система отсчета (СО)\***.

Совокупность координат составляет систему координат или систему отсчета, при этом координаты взаимно однозначно определяют положение элементов какого-либо множества или точки поверхности, пространства. В этом основа **метода координат**, истоками которого в математике принято считать работы П. Ферма (1636 г.) и Р. Декарта (1637 г.), хотя еще Аполлоний Пергский (III – II в. до н. э.) определял коническое сечение с помощью координат (как это принято, начиная с Лейбница (1694 г.), хотя у Аполлония они – координаты – не имели численного значения).

Иногда делаются попытки трактовать систему координат несколько шире, чем это принято. А именно, под системой координат понимается некоторая совокупность классов «дат» и систем координат. При этом класс дат включает геодезические плановые, высотные и инженерные даты, определяющие положение начал, масштаба, ориентации осей координат относительно тела Земли. Класс систем координат содержит типы координат (декартовы, геодезические, картографические), а также – типы отнесения точек координат к полю силы тяжести Земли. При этом под координатными операциями понимается уже не только процесс перехода от одной системы координат к другой, а и процесс перехода от одних дат к другим. Такой подход к определению системы координат значительно шире даже определения системы отсчета.

Классифицировать различные системы координат можно по разным признакам. Однако, в самом общем виде, все системы координат условно можно разделить на две группы:

- прямолинейные СК;
- криволинейные СК.

К прямолинейным системам координат относятся системы, в которых координатными линиями являются прямые. Примером таких систем могут служить декартовы прямоугольные координаты.

---

\* СО состоит из системы координат и системы времени.

Если в системах координат координатные линии не прямые, а кривые, то они относятся к криволинейным. Примером таких СК могут служить система **геодезических широт и долгот**, координатные линии которой – меридианы и параллели земного эллипсоида; **полярные системы координат сферы и эллипсоида**, координатными линиями которых в первом случае являются дуги больших кругов и малые круги постоянного радиуса, т. е. плоские кривые типа окружностей, во втором случае – геодезические линии постоянной длины и геодезические окружности.

По взаимному расположению осей координат, системы подразделяются на **косоугольные и прямоугольные** или **ортогональные**.

Для физических приложений, в том числе и в геодезии, используются, в основном, ортогональные СК, поэтому только они и будут рассматриваться в данном учебном пособии.

Системы координат могут быть от двух- до n-мерных, однако наибольшее распространение на практике получили двух- и трехмерные системы, несколько реже встречаются четырехмерные системы координат, в которых, обычно, в роли четвертой координаты выступает время.

## 2.2. Прямоугольные декартовы системы координат

Прямоугольные декартовы системы координат могут быть двумерными (на плоскости) и трехмерными (в пространстве).

### 2.2.1. Прямоугольные системы координат на плоскости

Двумерная декартова СК связывает с каждой точкой  $Q$  плоскости, на которой выбраны две ортогональные прямые (оси координат)  $Ox$  и  $Oy$ , пересекающиеся в начале координат  $O$  (рис. 2.1), пару действительных чисел – абсциссу  $x$  и ординату  $y$ . Величина направленного отрезка  $\overline{OQ_1} = x$  (положительная, если направление  $\overline{OQ_1}$  совпадает с положительным направлением оси  $Ox$  и отрицательная в противном случае) и определенная аналогичным способом величина  $\overline{OQ_2} = y$  называются декартовыми координатами точки  $Q(x, y)$  на плоскости по имени математика Декарта, который в 1637 г. опубликовал первый труд по аналитической геометрии. Очень часто эту систему называют просто – прямоугольной системой координат на плоскости.

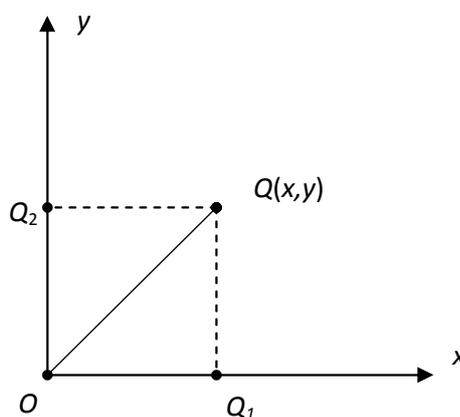


Рис. 2.1. Система плоских декартовых координат

Вообще говоря, при установлении СК единицы масштабов по осям координат могут быть разными, однако мы всегда в дальнейшем будем

предполагать, что на всех осях координат выбрана одна и та же единица масштаба.

Кроме того, в зависимости от выбора положительного направления осей координат, декартовы СК могут быть правыми и левыми. В правой декартовой прямоугольной системе координат направления осей выбираются так, что поворот полуоси  $Ox$  (на угол  $\pi/2$ ) в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, совмещает полуось положительных  $x$  с полуосью положительных  $y$ .

Положение точек на плоскости или в пространстве, помимо метода координат, рассмотренного выше, может быть определено или задано и с помощью направленных отрезков, так называемых – векторных величин или просто векторов. Кроме того, многие формулы и задачи аналитической геометрии записываются и решаются с помощью векторов гораздо короче, проще, а главное нагляднее, чем при помощи координат.

Пусть  $a$  и  $b$  – две точки на плоскости (рис. 2.2). Принято говорить, что отрезок  $ab$ , определенным образом направленный, а именно – от  $a$  к  $b$ , есть вектор  $\overline{ab}$ . Точка  $a$  называется **началом** вектора, а точка  $b$  – его **концом**.

Два вектора считаются равными если:

1. равны их длины;
2. они параллельны;
3. одинаково направлены.

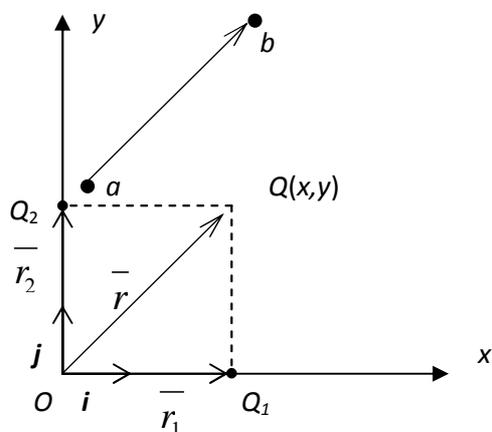


Рис. 2.2. Элементы векторного способа задания положения точек на плоскости

Из условий равенства двух и более векторов следует, что их можно перемещать в пространстве или на плоскости, не изменяя их направлений и длин. Поэтому начало вектора можно помещать в любой точке пространства или плоскости.

Очевидно, что тогда для каждого вектора  $\overline{ab}$  (рис. 2.2) найдется равный ему вектор, выходящий из начала координат –  $O$ . Обозначим его конец через  $Q$ , т. е. векторы  $\overline{ab}$  и  $\overline{OQ}$  равны. В основном мы будем ограничиваться рассмотрением лишь тех векторов, которые начинаются в начале координат  $O$ . Такие векторы мы будем обозначать одной буквой –  $\underline{r}$ . Этим самым как бы устанавливается взаимно

однозначное соответствие между векторами, выходящими из начала координат, и точками плоскости, а именно – каждому вектору  $\overline{OQ}$  ставится в соответствие его конец, точка  $Q(x, y)$ , и тем самым вводится понятие **координат вектора**.

Таким образом, мы можем записать

$$\underline{r} \equiv (x, y), \quad (2.1)$$

где  $\vec{r}$  есть вектор, а  $x$  и  $y$  – его координаты, т. е. координаты точки  $Q$  (рис. 2.2). И, следовательно, положение точки  $Q$  определено или задано с помощью вектора  $\vec{r}$ , начало которого расположено в точке  $O$  системы координат. При этом выражение (2.1) следует принимать не как строгое математическое равенство, а как выражение того факта, что конечная точка вектора  $\vec{r}$  имеет своими координатами –  $x$  и  $y$ .

Установим связь между геометрической и алгебраической сущностью векторного способа определения положения точки на плоскости.

Пусть в некоторой прямоугольной системе координат  $Oxy$  (рис. 2.2), задан вектор  $\vec{OQ} = \vec{r}$ . Из точки  $Q$ , конца вектора  $\vec{r}$ , проведем прямую параллельно оси  $Oy$  до пересечения с осью  $Ox$  в точке  $Q_1$ . Тогда, согласно правилу сложения векторов, можно написать:

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OQ_1} + \vec{Q_1Q} \\ \text{или} \\ (2.2) \quad \vec{r} &= \vec{OQ_1} + \vec{OQ_2} = \vec{r_1} + \vec{r_2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OQ_1} + \vec{Q_1Q} \\ \vec{r} &= \vec{OQ_1} + \vec{OQ_2} = \vec{r_1} + \vec{r_2} \end{aligned}} \right\}$$

Второе равенство из (2.2) показывает, что всякий вектор можно разложить на составляющие, лежащие на осях координат. Слагаемые векторы  $\vec{r_1}$  и  $\vec{r_2}$  называются компонентами или составляющими данного вектора  $\vec{r}$  относительно системы координат  $Oxy$ . Отложив в положительном направлении каждой из осей координат (рис. 2.2) по вектору  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ , длины которых равны единице, тогда вектор  $\vec{r_1}$ , как и вектор  $\vec{i}$ , расположен на оси абсцисс, а поэтому имеем

$$\vec{r_1} = x\vec{i}, \quad (2.3)$$

где  $x$  есть длина вектора  $\vec{r_1}$ , взятая со знаком плюс, если направления векторов  $\vec{r_1}$  и  $\vec{i}$  совпадают, и взятая со знаком минус, если направление вектора  $\vec{r_1}$  противоположно орту  $\vec{i}$ . Другими словами,  $x$  есть число, являющееся проекцией вектора  $\vec{r}$  на ось абсцисс.

Аналогично:

$$\vec{r_2} = y\vec{j}. \quad (2.4)$$

Таким образом, рассматривая проекции  $x$  и  $y$  вектора  $\vec{r}$  на оси координат, имеем на основании (2.2)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (2.5)$$

Это уже строгое математическое равенство в отличие от выражения (2.1). Отметим, что не следует отождествлять понятия **компонентов** вектора с его **проекциями**. Проекции вектора – это числа, которые являются декартовыми координатами конца вектора, если начало его находится в начале координат. Компоненты же вектора представляют собой векторы  $\vec{r_1}$  и  $\vec{r_2}$ , сумма которых равна данному вектору  $\vec{r}$ . Связь компонент вектора с его проекциями описывается выражениями (2.3) и (2.4).

Как уже отмечалось выше, использование векторов позволяет решать аналитические задачи гораздо проще и нагляднее. Покажем это на простом примере.

Пусть требуется определить расстояние  $S$  между точками  $Q_1$  и  $Q_2$  на плоскости (рис. 2.3).

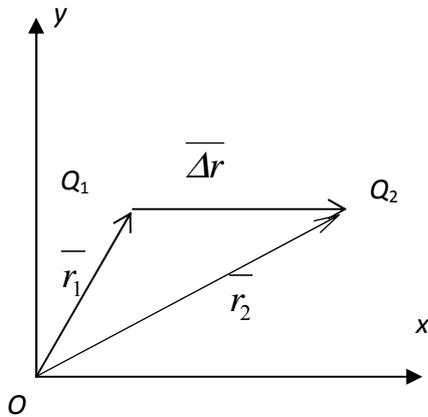


Рис. 2.3. Векторный способ определения  $S$  между двумя точками

Положение точек  $Q_1$  и  $Q_2$  на плоскости зададим с помощью векторов  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Тогда расстояние между этими точками будет равно длине вектора  $\vec{\Delta r}$ . Но длина вектора – есть модуль вектора. А модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата данного вектора, т. е.

$$S = |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(\vec{\Delta r})^2}. \quad (2.6)$$

На основании (2.5) имеем

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j};$$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j};$$

а

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \quad (2.7)$$

Возводя правую часть (2.7) в квадрат и учитывая, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними, находим

$$S = |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (2.8)$$

так как  $(\vec{i}\cdot\vec{i}) = (\vec{j}\cdot\vec{j}) = 1$ ,  $(\vec{i}\cdot\vec{j}) = 0$ .

Таким образом, задать прямоугольную декартову СК это значит:

- выбрать начало СК;
- указать положительные направления осей координат;
- выбрать единицы масштабов по осям координат.

Так как выбор начала систем координат и положительных направлений их осей произволен, то можно говорить о многообразии различных декартовых прямоугольных систем координат. Такие различные СК на плоскости и в пространстве реально существуют, и, поэтому, на практике нередко возникает необходимость в преобразовании одной системы прямоугольных координат в другую. Иногда при теоретических изысканиях (выкладках) также возникает необходимость привести полученные математические (теоретические) выражения к иному виду, исходя из каких-либо требований или условий, связанных с другой системой координат. Такие задачи постоянно встречаются в высшей геодезии, математической картографии, спутниковой геодезии, астрономии и т. д.

Например, для геодезии характерно частое осуществление преобразования координат между различными существующими СК (СК-42, СК-95, ПЗ-90, WGS-84 и др.) или между земными СК и системами координат аэро- и космических снимков, между космическим кораблем (спутником) как

носителем СК и земной СК, между координатами точек земной поверхности и какой-либо картографической проекции, преобразования координат из одной эпохи в другую и т. д. Итак, такого рода координатные операции в теории и практике геодезии становятся важнейшей ее составляющей.

### 2.2.2. Преобразование плоских прямоугольных координат из одной системы в другую

Пусть  $x, y$  – координаты произвольной точки  $Q$  относительно некоторой плоской декартовой системы координат –  $Oxy$ , а  $\bar{x}, \bar{y}$  – координаты этой же точки  $Q$ , но относительно другой системы прямоугольных координат  $O\bar{x}\bar{y}$ . Требуется установить аналитическую связь перехода от одной системы к другой.

С теоретической точки зрения можно выделить три случая изменения систем прямоугольных координат.

Первый случай – когда изменяется только начало координат, а оси переносятся параллельно самим себе (рис. 2.4).

Второй случай – когда происходит разворот осей координат на какой-то угол, причем начала двух систем координат совпадают.

Третий случай – самый общий, когда одновременно с переносом начала системы осуществляется и разворот осей координат.

С целью упрощения и компактности будем рассматривать преобразование систем координат в векторной форме.

Для этого введем обозначения:

$K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  – вектор исходной

(преобразуемой) системы координат;

$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$  – вектор искомой

(преобразованной) системы координат;

$K_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  – вектор смещений по

осям координат начала второй системы относительно первой.

Тогда первый случай, при одинаковых единицах масштаба по осям обеих систем, можно аналитически представить:

$$\bar{K} = K - K_0. \quad (2.9)$$

А обратный переход:

$$K = \bar{K} + K_0. \quad (2.10)$$

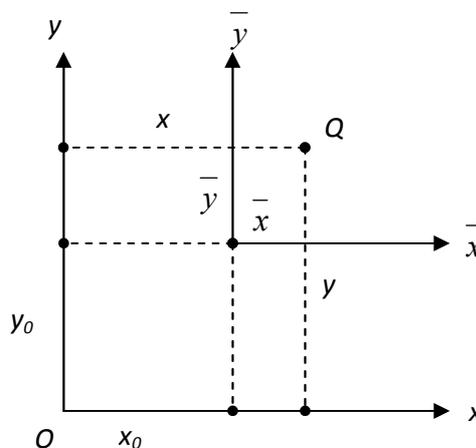


Рис. 2.4. Параллельный перенос осей координат преобразуемой системы

Если же оси новой системы координат получили разворот относительно осей старой системы на угол  $-\omega$ , а начало координат осталось без изменения, то второй случай преобразования координат можно представить следующими выражениями при одинаковых единицах масштаба по осям обеих систем:

$$\bar{K} = PK, \quad (2.11)$$

где  $P$  – матрица преобразования (разворота осей) размерностью  $2 \times 2$ .

### Матрица преобразований (разворота осей) – $P$

Элементы матрицы преобразований  $P$  получим исходя из следующих соображений.

Вектор  $\overline{OQ}$  (рис. 2.5) может быть выражен как в виде функции первой –  $Oxy$ , так и второй –  $O\bar{x}\bar{y}$  систем координат

$$\overline{OQ} = xi + yj = \bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j}. \quad (2.12)$$

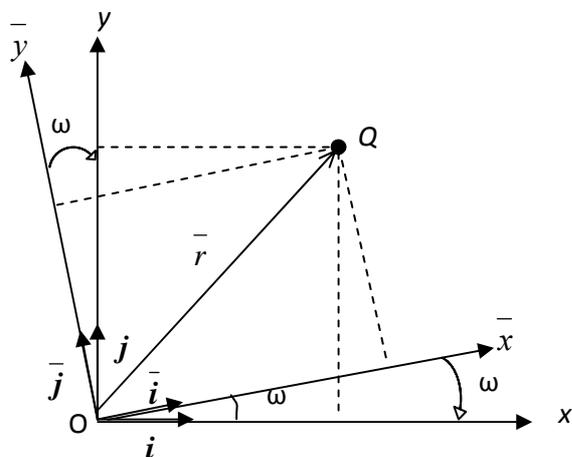


Рис. 2.5. Разворот осей преобразуемой системы координат

Умножив скалярно левые и правые части (2.12) сначала на орт  $\bar{i}$ , а затем – на орт  $\bar{j}$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x(\bar{i} \cdot \bar{i}) + y(\bar{j} \cdot \bar{i}); \\ \bar{y} &= x(\bar{i} \cdot \bar{j}) + y(\bar{j} \cdot \bar{j}). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

При этом, здесь было учтено, что скалярные произведения ортогональных векторов равны нулю, а одноименных – единице, т. е.:

$$\begin{aligned} (\bar{i} \cdot \bar{j}) &= (\bar{j} \cdot \bar{i}) = 0; \\ (\bar{i} \cdot \bar{i}) &= (\bar{j} \cdot \bar{j}) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, элементами матрицы  $P$  являются скалярные произведения единичных

векторов осей координат:

$$P = \begin{pmatrix} (\bar{i} \cdot \bar{i}) & (\bar{j} \cdot \bar{i}) \\ (\bar{i} \cdot \bar{j}) & (\bar{j} \cdot \bar{j}) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Но углы между единичными векторами (рис. 2.5) равны:

$$\widehat{\bar{i} \bar{i}} = \widehat{\bar{j} \bar{j}} = \omega;$$

$$\widehat{\bar{i} \bar{j}} = \pi/2 + \omega;$$

$$\widehat{\bar{j} \bar{i}} = \pi/2 - \omega.$$

И тогда

$$P = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Анализ матрицы преобразований (2.15) показывает, что матрица  $P$  является ортогональной, так как она удовлетворяет всем условиям ортогональности матриц, а именно:

1. сумма квадратов элементов строк (или столбцов) равна единице;
2. сумма попарных произведений элементов параллельных столбцов (или строк) равна нулю;
3. равенство обратной  $P^{-1}$  и транспонированной  $P^T$  матриц, т. е.:  
 $P^{-1} = P^T. \quad (2.16)$

Имея матрицу  $P$ , теперь не трудно по формуле (2.11) перейти от системы  $Ox\bar{y}$  к системе координат  $O\bar{x}\bar{y}$ . А обратный переход может быть выполнен с использованием обратной матрицы  $P^{-1}$ :

$$K = P^{-1}\bar{K} = P^T\bar{K}. \quad (2.17)$$

Третий случай, самый общий, можно получить, объединяя первый со вторым:

$$\left. \begin{aligned} \bar{K} &= P(K - K_0); \\ K &= P^T\bar{K} + K_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Если же при переходе к новой системе  $\bar{x}, \bar{y}$  к тому же произошло изменение масштаба на величину  $\Delta m$ , то очевидно, что формулы (2.18) в этом случае примут вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{K} &= P(K - K_0)(I + \Delta m); \\ K &= P^T\bar{K}(I - \Delta m) + K_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

При этом во второй формуле (2.19) учтено, что  $\Delta m$  величина очень малая.

Перемножая матрицы в (2.19), получим окончательные рабочие формулы

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= [(x - x_0) \cos \omega + (y - y_0) \sin \omega] \cdot (I + \Delta m); \\ \bar{y} &= [(y - y_0) \cos \omega - (x - x_0) \sin \omega] \cdot (I + \Delta m), \\ \text{или при обратном переходе} \\ x &= [\bar{x} \cos \omega - \bar{y} \sin \omega] \cdot (I - \Delta m) + x_0; \\ y &= [\bar{x} \sin \omega + \bar{y} \cos \omega] \cdot (I - \Delta m) + y_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

### 2.2.3. Прямоугольная пространственная система декартовых координат

Положение точки в трехмерном евклидовом пространстве уже не может быть определено с помощью двухосной (плоской) системы координат. Здесь уже необходимо использовать трехосные – пространственные декартовы системы координат.

Если через некоторую точку  $O$  пространства (рис. 2.6) провести три взаимно перпендикулярные оси  $OX, OY, OZ$  – соответственно: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликата, то относительно этих осей можно будет определять и положение точек пространства. В зависимости от положительного направления,

оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  могут образовывать как правую, так и левую системы координат. Для правой системы поворот от оси  $OX$  к оси  $OY$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ , совершается в направлении против часовой стрелки, если смотреть на плоскость  $OXY$  из точки положительной полуоси  $OZ$ .

Взятые попарно оси координат  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  определяют три взаимно перпендикулярные плоскости  $XOY$ ,  $YOZ$  и  $ZOX$ . Эти три плоскости делят все пространство на восемь частей, называемых октантами, причем точкам каждого октанта соответствует определенная комбинация знаков координат (рис. 2.7, правая система):

- в I октанте  $X > 0; Y > 0; Z > 0$ ;    во II октанте  $X < 0; Y > 0; Z > 0$ ;
- в III октанте  $X < 0; Y < 0; Z > 0$ ;    в IV октанте  $X > 0; Y < 0; Z > 0$ ;
- в V октанте  $X > 0; Y > 0; Z < 0$ ;    в VI октанте  $X < 0; Y > 0; Z < 0$ ;
- в VII октанте  $X < 0; Y < 0; Z < 0$ ;    в VIII октанте  $X > 0; Y < 0; Z < 0$ .

Таким образом, пространственная прямоугольная СК позволяет связать с каждой точкой  $Q$  (рис. 2.6) пространства, три вполне определенных действительных числа (координаты):  $X = \overline{OQ_1}$ ,  $Y = \overline{OQ_2}$ ,  $Z = \overline{OQ_3}$ .

Так же, как и в случае плоскости, положение точки в пространственной системе координат, может задаваться (определяться) и с помощью вектора  $\vec{r}$ , начало которого совмещено с началом пространственной прямоугольной системы координат (рис. 2.6). В этом случае координаты конца вектора  $\vec{r}$

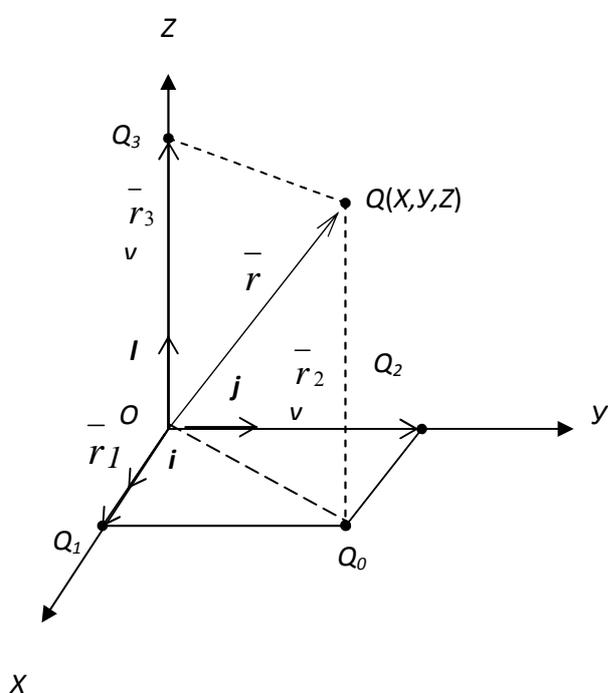


Рис. 2.6. Система пространственных прямоугольных координат

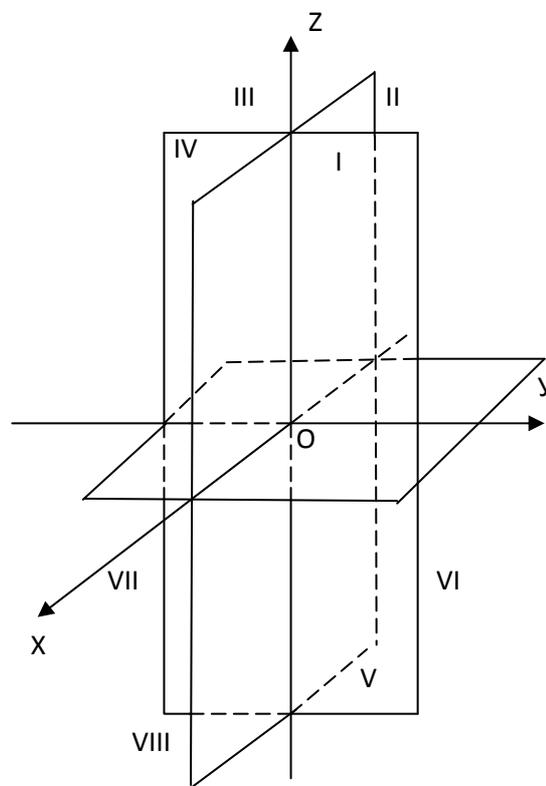


Рис. 2.7. Октанты системы пространственных координат

являются одновременно и координатами точки Q пространства.

Все положения, рассмотренные в разделе 2.2.1 для векторного способа определения положения точек на плоскости, справедливы и для пространственных систем координат, за исключением того, что на плоскости мы имели дело с одной координатной плоскостью xOy, а в пространстве – с тремя: XOY, XOZ, YOZ. Поэтому в пространственной системе координат вектор  $\vec{r}$  (рис. 2.6) должен быть разложен уже на три (а не на две, как это было на плоскости) составляющие или компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= X\vec{i}; \\ \vec{r}_2 &= Y\vec{j}; \\ \vec{r}_3 &= Z\vec{l}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

И тогда вектор в трехмерной СК может быть представлен (рис. 2.6) как

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{l}, \quad (2.22)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{l}$  – единичные базовые векторы осей координат.

Длина (модуль) вектора  $\vec{r}$  будет определяться следующим выражением

$$|\vec{r}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (2.23)$$

а расстояние  $S$  между двумя точками  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 2.8), положение которых в пространственной СК задано векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , в виде

$$S = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}. \quad (2.24)$$

Решение многих аналитических задач, особенно связанных с различными преобразованиями СК, значительно упрощается с использованием так называемых направляющих косинусов:  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ .

Направляющими косинусами направленного отрезка  $\overline{OQ_1}$  или вектора  $\vec{r}_1$  называются косинусы углов между этим вектором и положительными направлениями осей  $OX, OY, OZ$  (рис. 2.9).

Формулы для вычисления направляющих косинусов, например, вектора  $\vec{r}_1$  нетрудно получить на основании свойства скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1 \cdot \vec{i}) &= |\vec{r}_1| \cdot |\vec{i}| \cos \alpha_1; \\ (\vec{r}_1 \cdot \vec{j}) &= |\vec{r}_1| \cdot |\vec{j}| \cos \beta_1; \\ (\vec{r}_1 \cdot \vec{l}) &= |\vec{r}_1| \cdot |\vec{l}| \cos \gamma_1. \end{aligned}$$

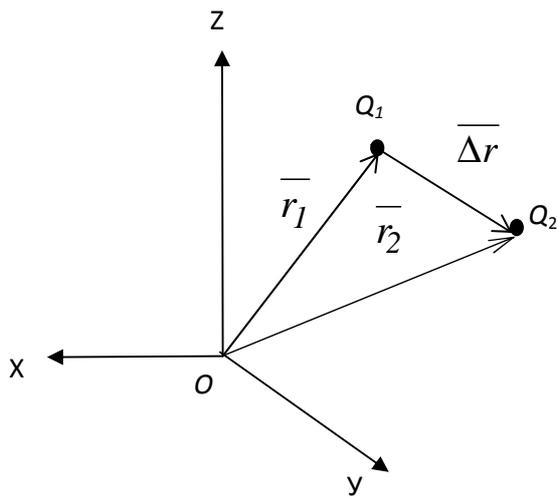


Рис. 2.8. Векторный способ определения S между двумя точками

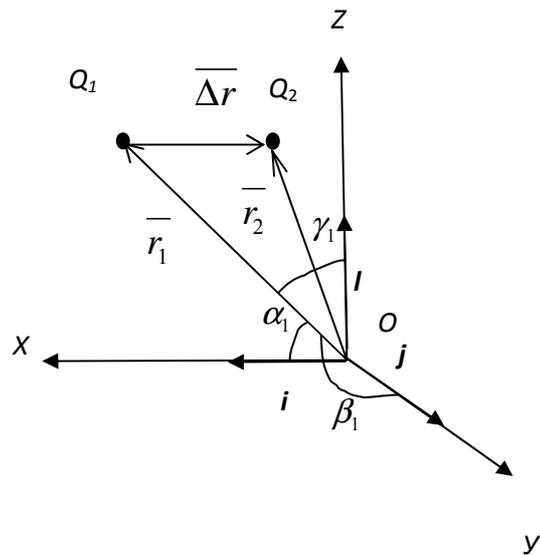


Рис. 2.9. Направляющие косинусы системы пространственных координат

Откуда находим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{(\bar{r}_1 i)}{|\bar{r}_1|} = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}; \\ \cos \beta_1 &= \frac{(\bar{r}_1 j)}{|\bar{r}_1|} = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}; \\ \cos \gamma_1 &= \frac{(\bar{r}_1 l)}{|\bar{r}_1|} = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \end{aligned} \right\} (2.25)$$

Для вектора  $\Delta r = \overline{Q_1 Q_2}$  (рис. 2.9) выражения (2.25) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}; \\ \cos \beta &= \frac{Y_2 - Y_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}. \end{aligned} \right\} (2.26)$$

#### 2.2.4. Преобразования пространственных прямоугольных систем координат

При преобразовании пространственных прямоугольных координат, будем руководствоваться теми же теоретическими положениями, что и при преобразовании плоских прямоугольных координат, рассмотренных подробно в

разделе 2.2.2. То есть в начале рассмотрим преобразование координат, вызванное только изменением начала двух систем при параллельном переносе их осей. Затем осуществим преобразование, вызванное изменением направлений осей при неизменном (совмещенном) положении начала СК. И третий случай – общий, когда одновременно изменяются и начала СК, и направления осей координат двух систем.

### Параллельный перенос осей координат

Пусть  $X, Y, Z$  – координаты произвольной точки  $Q$  относительно декартовой прямоугольной системы координат  $OXYZ$ , а  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  – координаты той же точки  $Q$  относительно другой СК, оси которой направлены так же, как и оси первой системы, и начало которой имеет относительно системы  $OXYZ$  координаты  $X_0, Y_0, Z_0$ .

Если единицы масштаба по осям этих систем совпадают, то координаты  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  вектора  $\bar{K}$  связаны с координатами  $X, Y, Z$  вектора  $K$  следующим образом

$$(2.27) \quad \left. \begin{aligned} \bar{K} &= K - K_0 \\ \text{или} \\ K &= \bar{K} + K_0, \end{aligned} \right\}$$

где

$$K = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}; \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}; \quad K_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}. \quad (2.27a)$$

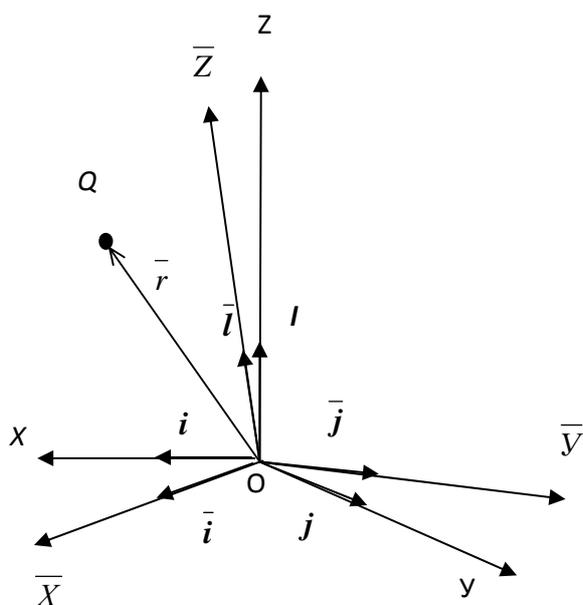


Рис. 2.10. Разворот осей пространственной системы координат

### Поворот осей

Если две различные системы пространственных прямоугольных координат  $OXYZ$  и  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  имеют общее (совмещенное) начало, то направления осей координат второй системы  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  относительно осей системы  $OXYZ$  может быть выражено с помощью направляющих косинусов (рассмотренных в предыдущем параграфе) единичных (базовых) векторов осей координат  $i, j, l$  системы  $OXYZ$  относительно единичных векторов  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{l}$  системы  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  (рис. 2.10).

Орт  $i$  системы  $OXYZ$  имеет направляющие косинусы с осями системы  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

$$\cos \left( \overset{\wedge}{i}, \overset{\wedge}{i} \right); \cos \left( \overset{\wedge}{i}, \overset{\wedge}{j} \right); \cos \left( \overset{\wedge}{i}, \overset{\wedge}{l} \right);$$

орт  $\mathbf{j}$  –

$$\cos \left( \overset{\wedge}{j}, \overset{\wedge}{i} \right); \cos \left( \overset{\wedge}{j}, \overset{\wedge}{j} \right); \cos \left( \overset{\wedge}{j}, \overset{\wedge}{l} \right);$$

а орт  $\mathbf{l}$  –

$$\cos \left( \overset{\wedge}{l}, \overset{\wedge}{i} \right); \cos \left( \overset{\wedge}{l}, \overset{\wedge}{j} \right); \cos \left( \overset{\wedge}{l}, \overset{\wedge}{l} \right).$$

И тогда, согласно (2.11) и (2.17),

$$\overline{K} = PK;$$

$$K = P^T \overline{K},$$

где  $P$  матрица преобразований имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \cos \left( \overset{\wedge}{i}, \overset{\wedge}{i} \right) & \cos \left( \overset{\wedge}{j}, \overset{\wedge}{i} \right) & \cos \left( \overset{\wedge}{l}, \overset{\wedge}{i} \right) \\ \cos \left( \overset{\wedge}{i}, \overset{\wedge}{j} \right) & \cos \left( \overset{\wedge}{j}, \overset{\wedge}{j} \right) & \cos \left( \overset{\wedge}{l}, \overset{\wedge}{j} \right) \\ \cos \left( \overset{\wedge}{i}, \overset{\wedge}{l} \right) & \cos \left( \overset{\wedge}{j}, \overset{\wedge}{l} \right) & \cos \left( \overset{\wedge}{l}, \overset{\wedge}{l} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

(2.28)

Общий случай преобразований получим, объединяя первый со вторым,

$$\overline{K} = P(K - K_0);$$

$$K = P^T \overline{K} + K_0.$$

(2.30)

Если же при переходе от одной системы к другой масштабы по осям были различны, то, как и на плоскости, это учитывается очень легко, путем умножения (2.30) на масштаб

$$\overline{K} = P(K - K_0)(I + \Delta m);$$

$$K = P^T \overline{K}(I - \Delta m) + K_0,$$

(2.31)

где  $\Delta m$  – изменение масштаба.

Перемножая матрицы в (2.31), получаем окончательные формулы

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{X} &= \left[ \cos \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \bar{i} \end{pmatrix} (X - X_0) + \cos \begin{pmatrix} \hat{j} \\ \bar{i} \end{pmatrix} (Y - Y_0) + \cos \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \bar{i} \end{pmatrix} (Z - Z_0) \right] \cdot (1 + \Delta m); \\
 \bar{Y} &= \left[ \cos \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix} (X - X_0) + \cos \begin{pmatrix} \hat{j} \\ \bar{j} \end{pmatrix} (Y - Y_0) + \cos \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \bar{j} \end{pmatrix} (Z - Z_0) \right] \cdot (1 + \Delta m); \\
 \bar{Z} &= \left[ \cos \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \bar{l} \end{pmatrix} (X - X_0) + \cos \begin{pmatrix} \hat{j} \\ \bar{l} \end{pmatrix} (Y - Y_0) + \cos \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \bar{l} \end{pmatrix} (Z - Z_0) \right] \cdot (1 + \Delta m)
 \end{aligned} \right\} \text{или} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
 X &= \left[ \cos \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \bar{i} \end{pmatrix} \cdot \bar{X} - \cos \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix} \cdot \bar{Y} - \cos \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \bar{l} \end{pmatrix} \cdot \bar{Z} \right] \cdot (1 - \Delta m) + X_0; \\
 Y &= \left[ \cos \begin{pmatrix} \hat{j} \\ \bar{i} \end{pmatrix} \cdot \bar{X} - \cos \begin{pmatrix} \hat{j} \\ \bar{j} \end{pmatrix} \cdot \bar{Y} - \cos \begin{pmatrix} \hat{j} \\ \bar{l} \end{pmatrix} \cdot \bar{Z} \right] \cdot (1 - \Delta m) + Y_0; \\
 Z &= \left[ \cos \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \bar{i} \end{pmatrix} \cdot \bar{X} - \cos \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \bar{j} \end{pmatrix} \cdot \bar{Y} - \cos \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \bar{l} \end{pmatrix} \cdot \bar{Z} \right] \cdot (1 - \Delta m) + Z_0.
 \end{aligned}$$

Преобразование координат – это не только переход от одного вида СК к другому, что при многообразии СК в геодезии и астрономии имеет огромное значение, но это также возможность изменения (упрощения) в нужном направлении алгоритмов решения многих задач путем использования метода и формул преобразования координат. Так как уравнения (2.20), (2.32) преобразования координат могут быть истолкованы еще и как соотношения, определяющие новую точку  $\bar{Q}$  с координатами  $\bar{x}, \bar{y}$  относительно той же самой системы координат  $Oxy$  для плоскости или с координатами  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  относительно системы  $OXYZ$  в пространстве потому, что преобразование, в котором точка  $\bar{Q}$  соответствует точке  $Q$  с плоскими координатами  $x, y$  или пространственными координатами  $X, Y, Z$ , состоит в последовательном выполнении параллельного переноса и поворота пространства или на плоскости. Типичным примером такого рода задач являются преобразования линейных отображений и приведения квадратичной формы общего вида к каноническому виду.

## 2.2.5. Преобразования линейных отображений

Пусть в некоторой двумерной системе координат  $Ox_1x_2$  задано линейное отображение

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\
 \bar{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2
 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

или матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= AX, \\ \text{где} \quad \bar{X} &= \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Выражение (2.33) следует понимать в том смысле, что координатам  $x_1, x_2$  соответствует некоторая точка  $M(x_1, x_2)$  СК  $Ox_1x_2$ , а координатам  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  – другая точка  $N(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  той же СК.

Преобразуем линейное отображение (2.34) путем перехода к новой СК  $Oy_1y_2$ . При этом будем полагать, что начала новой и старой СК совпадают.

Тогда на основании (2.17) имеем

$$X = P^{-1}Y, \quad \text{а} \quad \bar{X} = P^{-1}\bar{Y}. \quad (2.35)$$

Подставив (2.35) в выражение (2.34) и умножив полученное выражение слева на матрицу  $P$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} PP^{-1}\bar{Y} &= PAP^{-1}Y \\ \text{или} \quad \bar{Y} &= \bar{A} \cdot Y, \\ \text{где} \quad \bar{A} &= PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Перемножив матрицы в (2.36), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{a}_{11}y_1 + \bar{a}_{12}y_2 \\ \bar{y}_2 &= \bar{a}_{21}y_1 + \bar{a}_{22}y_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.37)$$

## 2.2.6. Приведение квадратичной формы общего вида к каноническому

Пусть дана квадратичная форма в виде однородного многочлена второй степени

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \quad (2.38)$$

Требуется привести (2.38) к каноническому виду с использованием перехода к новой СК  $O\bar{X}_1\bar{X}_2$

$$F(x_1, x_2) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2. \quad (2.39)$$

Представим (2.38) в матричной форме. Для этого (2.38) запишем (полагая  $a_{12}=a_{21}$ ) в виде

$$F(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_2. \quad (2.40)$$

Введем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Тогда выражение (2.40) в матричном виде запишется как

$$F(x_1, x_2) = X^T AX, \quad (2.42)$$

где  $X, X^T$  матрицы, соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad X^T = (x_1, x_2).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= X^T A X = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_2 = X^T A X. \end{aligned}$$

Введем новую СК  $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ , центр которой совпадает с центром СК  $Ox_1x_2$ .

При этом

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2; \\ x_2 &= \alpha_{21}\bar{x}_1 + \alpha_{22}\bar{x}_2. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Или, как выше установлено, в матричном виде

$$X = P\bar{X}. \tag{2.44}$$

Чтобы привести (2.38) к каноническому виду (2.39), выполним преобразование координат (2.43), (2.44). Дальнейшие преобразования координат выполним в матричном виде.

Нетрудно убедиться в справедливости

$$X^T = \bar{X}^T \cdot P^{-1}. \tag{2.45}$$

Действительно,

$$\bar{X}^T \cdot P^{-1} = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = (\alpha_{11}\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2 \quad \alpha_{21}\bar{x}_1 + \alpha_{22}\bar{x}_2) = (x_1 \quad x_2) = X^T$$

так как

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2, \\ x_2 &= \alpha_{21}\bar{x}_1 + \alpha_{22}\bar{x}_2 \end{aligned}$$

Выразим координаты  $x_1, x_2$  в (2.42) через новые координаты  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ . Для этого подставим в правую часть (2.42) выражения  $X^T$  и  $X$  из (2.44) и (2.45). Тогда

$$F(x_1, x_2) = X^T A X = (\bar{X}^T P^{-1}) A (P\bar{X}) = \bar{X}^T (P^{-1} A P) \bar{X} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

т. е.

$$F(x_{11}, x_{21}) = F(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = \bar{X}^T (P^{-1} A P) \bar{X} = \bar{X}^T \bar{A} \bar{X}, \tag{2.46}$$

где

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad (\text{см. (2.36)}). \quad (2.47)$$

Выбираем новую СК так, чтобы

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

где  $\bar{A}$  – диагональная матрица.

Для матрицы (2.48) квадратичная форма (2.38), (2.37) запишется в виде (2.39), т. е.

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2.$$

Таким образом, необходимо, чтобы

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP. \quad (2.49)$$

Умножим (2.49) слева на матрицу преобразования  $P$

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P \cdot P^{-1}AP = AP \quad (2.50)$$

или

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Одновременно

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Из равенства правых частей равенств (2.51) и (2.52) получаем

$$a_{11}\lambda_1 = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} \quad \alpha_{12}\lambda_2 = a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \quad (2.53)$$

$$a_{21}\lambda_1 = a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} \quad \alpha_{22}\lambda_2 = a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22}$$

Равенства (2.53) окончательно можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}(a_{11} - \lambda_1) + \alpha_{21}a_{12} &= 0; \\ \alpha_{11}a_{21} + \alpha_{21}(a_{22} - \lambda_1) &= 0; \\ \alpha_{12}(a_{11} - \lambda_2) + \alpha_{22}a_{12} &= 0; \\ \alpha_{12}a_{21} + \alpha_{22}(a_{22} - \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

В системах (2.54), (2.55) неизвестны коэффициенты  $\alpha_{ij}$ . Для того чтобы системы (2.54) и (2.55) имели не нулевое решение необходимо и достаточно, чтобы их определители были равны нулю, т. е.

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{array} \right| = 0 \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 \end{array} \right| = 0. \quad (2.56)$$

Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями квадратичных уравнений

$$(a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_1) - a_{12}a_{21} = 0; \quad (2.57)$$

$$\lambda_1^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Дискриминант этих квадратных уравнений  $\geq 0$ , т. е.

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

Уравнения (2.56), (2.57) называются **характеристическими уравнениями** матрицы, а корни этих уравнений – **собственными числами** матрицы  $A$ .

Найденные из (2.57) собственные числа подставляем в (2.39), получим каноническое уравнение.

*Пример:*

Дана квадратичная форма в виде:  $F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ .

Найти канонический вид этого уравнения.

Так как здесь  $a_{11} = 5$ ;  $a_{21} = 2$ ;  $a_{22} = 2$ , тогда характеристическое уравнение (2.56) для данной квадратичной формы будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Приравнявая определитель этого матричного уравнения к нулю

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

и решая это квадратное уравнение, получаем

$$\lambda_1 = 6; \lambda_2 = 1.$$

И тогда канонический вид данной квадратичной формы будет иметь вид

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 6\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2.$$

## 2.3. Криволинейные координаты

### 2.3.1. Общие сведения о системах криволинейных координат

Класс криволинейных координат, по сравнению с классом прямолинейных координат, обширен и значительно более разнообразен и, с аналитической точки зрения, является наиболее универсальным, так как расширяет возможности метода прямолинейных координат. Применение криволинейных координат иногда в значительной степени может упрощать решение многих задач, особенно задач, решаемых непосредственно на поверхности вращения. Так например, при решении какой-либо задачи на поверхности вращения, связанной с отысканием некоторой функции, можно в области задания этой функции на данной поверхности подобрать такую систему криволинейных координат, которая позволит наделять данную функцию новым свойством – быть постоянной в данной системе координат, что не всегда можно сделать с использованием прямолинейных систем координат.

Система криволинейных координат, заданная в некоторой области трехмерного евклидова пространства, ставит в соответствие каждой точке этого пространства упорядоченную тройку действительных чисел –  $\varphi, \lambda, r$  (криволинейные координаты точки).

Если же система криволинейных координат располагается непосредственно на какой-то поверхности (поверхности вращения), то в этом случае, в соответствие каждой точке поверхности ставятся уже два действительных числа –  $\varphi$ ,  $\lambda$ , которые однозначно определяют положение точки на этой поверхности.

Между системой криволинейных координат  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $r$  и прямолинейной декартовой СК  $(X, Y, Z)$  должна существовать математическая связь. Действительно, пусть система криволинейных координат задана в некоторой области пространства. Каждой точке этого пространства соответствует единственная тройка криволинейных координат –  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $r$ . С другой стороны, этой же точке соответствует и единственная тройка прямолинейных декартовых координат –  $X, Y, Z$ . Тогда можно утверждать, что в общем виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(X, Y, Z); \\ \lambda &= \lambda(X, Y, Z); \\ r &= r(X, Y, Z). \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Существует как прямая (2.58), так и обратная математическая связь между этими СК.

Из анализа формул (2.58) следует, что при постоянном значении одной из пространственных криволинейных координат  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $r$ , например,

$$\varphi = \varphi(X, Y, Z) = \text{const},$$

и переменных значениях двух других ( $\lambda$ ,  $r$ ), мы получаем в общем поверхность, которую называют координатной. Координатные поверхности, соответствующие одной и той же координате, не пересекаются между собой. Однако две координатные поверхности, соответствующие различным координатам, пересекаются и дают координатную линию, соответствующую третьей координате.

### 2.3.2. Криволинейные координаты на поверхности

Для геодезии наибольший интерес представляют поверхностные криволинейные координаты.

Пусть уравнение поверхности в виде функции декартовых координат в неявной форме имеет вид

$$F(X, Y, Z) = 0. \quad (2.59)$$

Направив вдоль осей координат единичные векторы  $i, j, l$  (рис. 2.11), уравнение поверхности можно написать в векторной форме

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{l}. \quad (2.60)$$

Введем две новые независимые переменные  $\varphi$  и  $\lambda$ , такие что функции

$$\left. \begin{aligned} X &= X(\varphi, \lambda); \\ Y &= Y(\varphi, \lambda); \\ Z &= Z(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

удовлетворяют уравнению (2.59). Равенства (2.61) представляют собой параметрические уравнения поверхности.

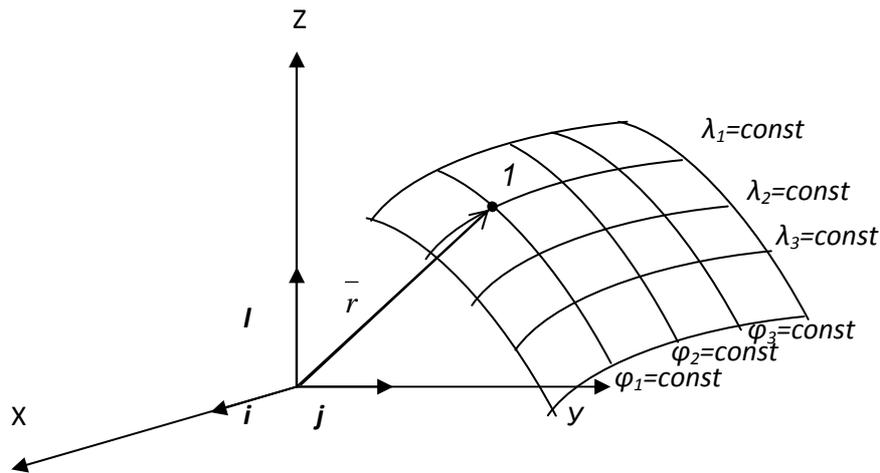


Рис. 2.11. Система криволинейных координат поверхности

Каждой паре чисел  $\varphi$  и  $\lambda$  соответствует определенная (единственная) точка на поверхности, и эти переменные могут быть приняты в качестве координат точек поверхности.

Если давать  $\varphi$  различные постоянные значения  $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \dots$ , то мы получим семейство кривых на поверхности, соответствующих этим постоянным. Аналогично, давая постоянные значения для  $\lambda$ , мы будем иметь второе семейство кривых. Таким образом, на поверхности образуется сеть координатных линий  $\varphi = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ . Координатные линии в общем случае представляют собой кривые линии. Поэтому числа  $\varphi, \lambda$  называются **криволинейными координатами** точек на поверхности.

Криволинейными координатами могут быть как линейные, так и угловые величины. Простейшим примером системы криволинейных координат, в которых одна координата – линейная величина, а другая – угловая величина, могут служить полярные координаты на плоскости.

Выбор криволинейных координат не обязательно должен предшествовать образованию координатных линий. В некоторых случаях целесообразнее установить сеть координатных линий, наиболее удобную для решения тех или иных задач на поверхности, а затем уже подобрать для этих линий такие параметры (координаты), которые имели бы постоянное значение для каждой координатной линии.

Определенной системе параметров соответствует и вполне определенная сеть координатных линий, но для каждого заданного семейства координатных линий можно подобрать множество других параметров, представляющих собой непрерывные и однозначные функции данного параметра. В общем случае углы между координатными линиями семейства  $\varphi = \text{const}$  и линиями семейства  $\lambda = \text{const}$  могут иметь различную величину.

Мы будем рассматривать только ортогональные системы криволинейных координат, у которых каждая координатная линия  $\varphi = \text{const}$  пересекает любую другую координатную линию  $\lambda = \text{const}$  под прямым углом.

При решении многих задач на поверхности, особенно задач, связанных с вычислением криволинейных координат точек поверхности, необходимо располагать дифференциальными уравнениями изменения криволинейных координат  $\varphi$  и  $\lambda$  в зависимости от изменения длины  $S$  поверхностной кривой.

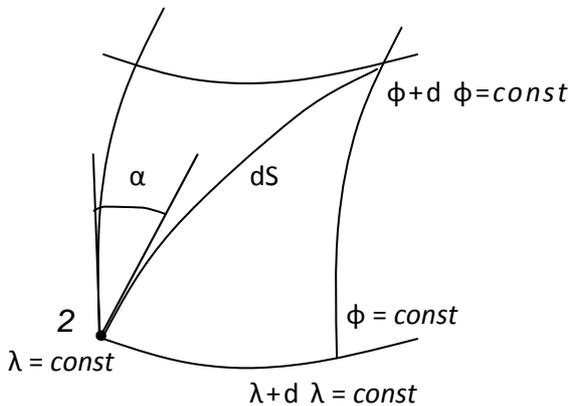


Рис. 2.12. Геометрия связи дифференциала дуги кривой на поверхности с изменениями (дифференциалами) криволинейных координат

Связь между дифференциалами  $dS$ ,  $d\varphi$ ,  $d\lambda$  можно установить, если ввести новую переменную  $\alpha$ , т. е. угол отсчитываемый в направлении движения часовой стрелки от положительного направления линии  $\lambda = \text{const}$  до положительного направления данной кривой (рис. 2.12). Этим углом как бы устанавливается направление (ориентировка) линии в данной точке поверхности. Тогда (без вывода) [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dS} &= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{E}}; \\ \frac{d\lambda}{dS} &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{G}} \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E &= (\overline{r}_\varphi)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2; \\ G &= (\overline{r}_\lambda)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

В геодезии углу  $\alpha$  соответствует геодезический азимут:  $\alpha = A$ .

### 2.3.3. Полярные системы координат и их обобщения

### 2.3.4. Пространственная система полярных координат

Для задания пространственной системы полярных координат необходимо вначале выбрать плоскость (в дальнейшем будем называть ее основной\*). На этой плоскости выбирается некоторая точка  $O$ , которая принимается за начало СК или полюс системы и полупрямая  $OP$ , исходящая из точки  $O$  в положительном направлении и называемая обычно полярной осью (рис. 2.13).

\* Основная плоскость разбивает пространство на два полупространства, одно из которых (рис. 2.13 – верхняя часть) принимается за положительное, а другое – за отрицательное.

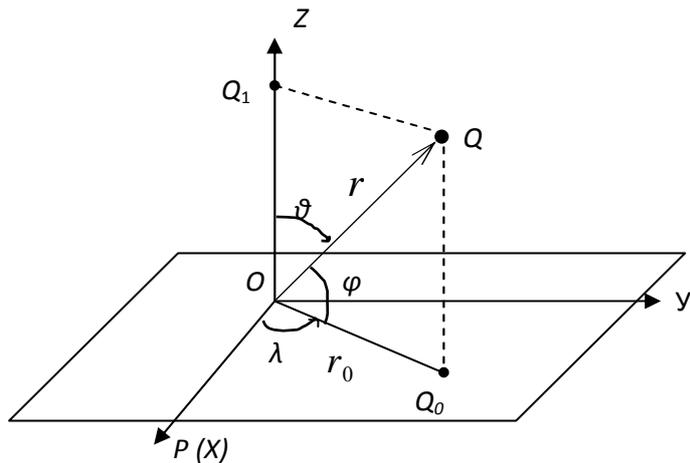


Рис. 2.13. Пространственная система полярных координат и ее модификации

Выберем масштаб, т. е. единицу измерений, принимаемый в качестве единого масштаба для всех измерений отрезков во всем пространстве, тогда положение любой точки пространства будет однозначно определяться тремя величинами:  $r$ ;  $\varphi$ ,  $\lambda$ , где  $r$  – полярный радиус, т. е. расстояние по прямой от полюса  $O$  до точки  $Q$  (рис. 2.13);  $\lambda$  – полярный угол – угол между полярной осью  $OP$  и ортогональной проекцией полярного радиуса на основную плоскость (пределы изменения  $0 \leq \lambda < 2\pi$ );  $\varphi$  – угол между

вектором  $\overline{OQ}$  (полярным радиусом) и его проекцией  $OQ_0$  на основную плоскость, считаемый положительным ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ) для точек положительного полупространства и отрицательным ( $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ ) для точек отрицательного полупространства.

Любую пространственную полярную СК легко можно связать (преобразовать) с пространственной декартовой прямоугольной СК.

Если за масштаб и начало координат в пространственной прямоугольной системе принять масштаб и начало полярной системы, полярную ось  $OP$  – за полуось абсцисс  $OX$ , линию  $OZ$ , проведенную из полюса  $O$  перпендикулярно основной плоскости в положительном направлении полярной системы – за полуось  $OZ$  прямоугольной декартовой системы, а за полуось –  $OY$  принять ту ось, в которую перейдет ось абсцисс при повороте ее на угол  $\pi/2$  в положительном направлении в основной плоскости полярной системы, то тогда из рис. 2.13 следует

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos \varphi \cos \lambda; \\ Y &= r \cos \varphi \sin \lambda; \\ Z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Формулы (2.64) позволяют выразить  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  через  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  и обратно

$$\left. \begin{aligned} D &= \sqrt{X^2 + Y^2} = r \cos \varphi; \\ \lambda &= \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right); \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{D}\right); \\ r &= D \operatorname{sec} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

Обобщения системы полярных координат в пространстве приводит нас к введению ряда новых систем координат, таких как цилиндрическая СК, сферическая СК, различного вида поверхностные полярные СК и т. д.

### 2.3.5. Цилиндрическая система координат

Полярная система координат в пространстве позволяет для каждой точки  $Q$  пространства определить и ее так называемые **цилиндрические координаты**, а именно, полярные координаты  $\lambda$ ,  $r_0 = OQ_0$  (в основной плоскости) точки  $Q_0$  (проекции точки  $Q$  на основную плоскость, рис. 2.13) и аппликату или высоту точки  $Q$  над основной плоскостью, т. е. координату  $z = OQ_1$  точки  $Q_1$  (ортогональной проекции точки  $Q$  на ось  $OZ$ ) относительно системы координат данной на этой прямой.

Таким образом, положение точки  $Q$  в этой СК будет определяться тремя координатами:  $r_0, \lambda, z$ .

Анализ рассматриваемой СК приводит к выводам о том, что:

- при  $r_0 = \text{const}$  и переменных  $\lambda$  и  $z$ , координатной поверхностью будет цилиндрическая поверхность (с образующими параллельными оси  $OZ$ ). Отсюда и название – цилиндрическая система координат;
- при  $\lambda = \text{const}$  и переменных  $r_0, z$ , координатными поверхностями будут полуплоскости, содержащие ось  $OZ$ ;
- при  $z = \text{const}$  – плоскости перпендикулярные оси  $OZ$ .

Если оси пространственной прямоугольной декартовой системы координат  $OXYZ$  выбрать так, как это показано на рис. 2.13, то тогда можно установить связь и цилиндрической СК с пространственной –  $OXYZ$

$$\left. \begin{aligned} X &= r_0 \cos \lambda; \\ Y &= r_0 \sin \lambda; \\ Z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{или обратно} \\ r_0 &= \sqrt{X^2 + Y^2}; \\ \lambda &= \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right); \\ z &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

### 2.3.6. Сферическая система координат

Положение точки  $Q$  (рис. 2.13) может быть определено и с помощью так называемой системы сферических координат  $r, \lambda, \theta$ . В данной системе  $r$  – длина радиус-вектора точки  $Q$ , т. е. расстояние от центра  $O$  системы координат до точки  $Q$  по прямой;  $\lambda$  – полярный угол (называемый часто сферической долготой), составленный полярной полуосью  $OP$  и проекцией  $r_0$  длины радиус-вектора  $\overline{OQ}$  на основную плоскость, а  $\theta$  – угол между полуосью  $OZ$  и полярным радиусом  $r$ . Угол  $\theta$  чаще называют сферической широтой.

Пределы изменения сферических координат:

$$0 \leq \theta \leq \pm \pi;$$

$$0 \leq \lambda \leq 2\pi;$$

$$0 < r \leq \infty.$$

Координатными поверхностями системы сферических координат являются:

- при  $r = \text{const}$  и переменных  $\lambda$  и  $\theta$  – сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ , отсюда и происхождение названия системы – сферическая СК;
- при  $\theta = \text{const}$  и переменных  $r$  и  $\lambda$  – полуконические поверхности;
- при  $\lambda = \text{const}$  и переменных  $r$  и  $\theta$  – полуплоскости, ограниченные полуосью  $OZ$ .

Сферическая система координат также может быть связана с пространственной прямоугольной декартовой СК.

Совместив начало пространственной прямоугольной СК с центром  $O$  сферической СК и выбрав положительные направления полуосей  $OX, OY$  и  $OZ$  как это показано на рис. 2.13, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos \lambda \sin \theta; \\ Y &= r \sin \lambda \sin \theta; \\ Z &= r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

а обратный переход может быть выполнен по формулам

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \\ \lambda &= \text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right); \\ \theta &= \arccos\left(\frac{Z}{r}\right) = \arccos \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

### 2.3.7. Полярные координаты на поверхности

При изучении геометрии различных поверхностей очень большое значение приобретают системы полярных координат, центры (полюса) и полярные оси которых располагаются непосредственно на самой поверхности. Например, такие полярные СК очень широко используются в геодезии при решении

различных задач, особенно задач, связанных с определением координат точек земной поверхности.

Из большого количества различных поверхностей, на которых могут быть построены системы полярных координат, рассмотрим только наиболее простые и часто используемые в геодезической практике – плоскость, сфера, эллипсоид.

### Плоскость

Полярными координатами точки  $Q$  (рис. 2.14) на плоскости называются длина радиус-вектора  $r$  – расстояние по прямой от заданной точки  $O$  (полюса) до точки  $Q$  и полярный угол  $\varphi$  – угол между заданной полярной осью  $OP$  и радиус-вектором  $\overline{OQ}$ . Полярный угол условимся считать положительным при отсчете от полярной оси против хода часовой стрелки (в геодезии принято обратное).

Координатными линиями в этой системе являются концентрические окружности  $r = \text{const}$  и пучок прямых  $\varphi = \text{const}$ .

Полярная СК на плоскости, так же как и пространственная полярная СК, легко может быть связана с прямоугольной декартовой системой координат на плоскости. Принимая за масштаб и начало координат в прямоугольной системе масштаб и начало полярной системы (точка  $O$ ), полярную ось объявляем положительной полуосью абсцисс  $Ox$ , а за полуось ординат  $Oy$  примем ту ось, в которую перейдет ось абсцисс при повороте ее на угол  $\pi/2$  в положительном направлении, тогда положение точки  $Q$  может быть определено и с помощью прямоугольных координат  $x$  и  $y = OQ_2$ .

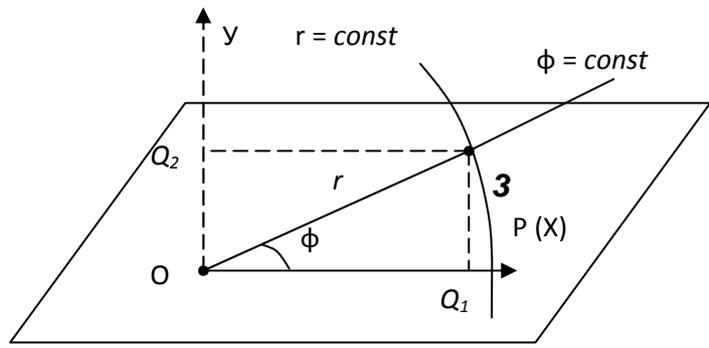


Рис. 2.14. Полярная КС на плоскости

Из рис. 2.14 следует, что

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi; \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Обратный переход (связь) выполняется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r &= +\sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

## Сфера

На поверхности шара (сферы) система полярных координат устанавливается следующим образом. Некоторую точку  $O$  (рис. 2.15) выберем в качестве полюса полярных координат. Из точки  $O$  можно провести множество дуг больших кругов, представляющих собой кратчайшие (геодезические) линии на поверхности шара, одну из которых,  $OP$ , примем за полярную ось.

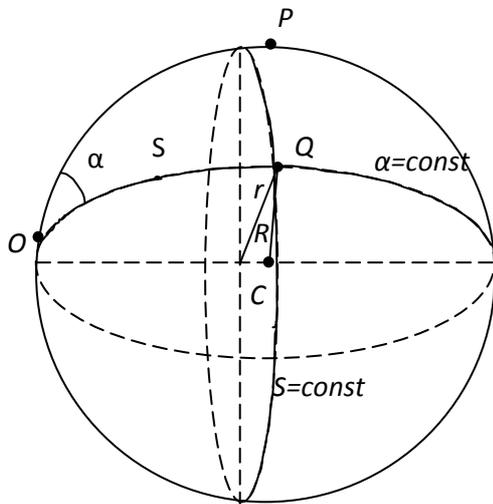


Рис. 2.15. Полярная СК на сфере

Положение любой точки  $Q$  на поверхности шара будет определяться длиной дуги большого круга  $S$  от полюса  $O$  до точки  $Q$  и полярным углом  $\alpha$  между полярной осью  $OP$  и дугой большого круга  $OQ$ .

Координатные линии на поверхности шара представляют собой дуги больших кругов  $\alpha = \text{const}$  и малые круги  $S = \text{const}$ . Оба семейства координатных линий являются плоскими кривыми – окружностями. Все радиусы кривизны линий первого семейства ( $\alpha = \text{const}$ ) равны радиусу  $R$  шара. Радиус кривизны  $r$  каждой линии второго семейства

( $S = \text{const}$ ) зависит от длины  $S$  линии первого семейства и может быть вычислен по формуле

$$r = R \sin \frac{S}{R}. \quad (2.72)$$

## Эллипсоид вращения

Система полярных координат на поверхности эллипсоида устанавливается так же, как и на сфере. Произвольная точка  $O$  поверхности (рис. 2.16) принимается за полюс полярных координат. В качестве полярной оси выбирается меридиан точки  $O$ .

Полярными координатами любой точки  $Q$  называется длина (кратчайшее расстояние) геодезической линии  $S$  от точки  $O$  до точки  $Q$  и азимут  $A$  геодезической линии в полюсе  $O$ .

Первое семейство координатных линий,  $A = \text{const}$ , представляет собой пучок геодезических линий, исходящих из полюса  $O$ . Второе семейство координатных линий,  $S = \text{const}$ , состоит из замкнутых кривых, называемых геодезическими окружностями. Эти окружности аналогичны малым кругам  $S = \text{const}$  на шаре, но, в отличие от последних, являются не

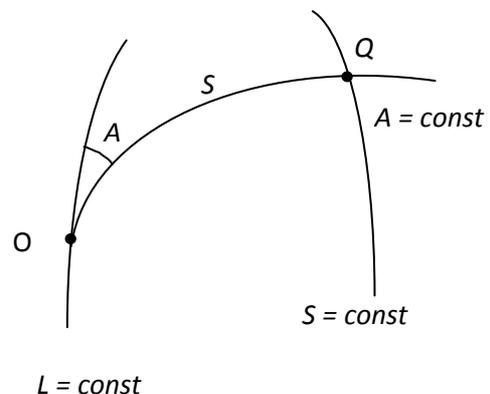


Рис. 2.16. Полярная СК на эллипсоиде

плоскими кривыми, а сложными кривыми двойной кривизны (обладающими и кривизной, и кручением), причем они и не геодезические линии. Система координатных линий ортогональна.

Расстояние между двумя геодезическими окружностями, измеряемое вдоль ортогональных к ним геодезических линий, остается постоянным во всех точках этих окружностей, что следует из построения координатных линий. Поэтому геодезические окружности – геодезические параллельные линии, аналогичные параллельным линиям на плоскости.

## ГЛАВА 3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ГЕОДЕЗИИ

### 3.1. Общая классификация систем координат, используемых в геодезии

Теория и практика производства наземных топографо-геодезических работ, использование в современных условиях спутниковых радионавигационных систем для решения геодезических задач, создание различного назначения геоинформационных систем (ГИС) и т. д. требуют, в зависимости от характера решаемых задач, применения в геодезии разнообразных, порой специфических, систем координат.

В геодезии одинаково широкое распространение получили как прямолинейные (прямоугольные), так и криволинейные (ортогональные) СК, теоретические основы которых были рассмотрены в предыдущей главе. Поэтому системы координат, применяемые в геодезии, нуждаются в своей классификации.

Классифицировать СК, применяемые в геодезии и в смежных с ней дисциплинах, можно по различным признакам. Например, по области их приложений: астрономические, геодезические, спутниковые, картографические, фотограмметрические и др.; по уровню глобализации: мировые, общеземные, национальные и т. д. Однако, наиболее общей является классификация в зависимости:

- от выбора начала отсчета СК;
- от выбора направления осей координат;
- от выбора основной координатной плоскости СК.

В зависимости от выбора начала отсчета СК делятся на **планетоцентрические, квазипланетоцентрические и топоцентрические** СК.

Если центр системы координат точно совпадает с центром масс планетарного тела, то такие СК называются планетоцентрическими, в противном случае – квазипланетоцентрическими. Если же центр СК расположен на поверхности (или вне) планетарного тела, то такая система называется топоцентрической.

Для нашей планеты системы пространственных координат с началом отсчета в центре масс Земли (общий земной эллипсоид) являются планетоцентрическими и чаще называются геоцентрическими или общеземными системами координат. Если же центр системы координат совмещен с центром референц-эллипсоида, то такие системы координат называются – квазигеоцентрическими, или референчными, или национальными СК. Их начало находится в центре эллипсоида, наилучшим образом подходящего для территории (поверхности) отдельно взятой страны или какого-либо материка в целом.

В планетарной геодезии могут использоваться гелиоцентрические (начало СК находится в центре масс Солнца), луноцентрические (с началом СК в центре масс Луны), марсоцентрические (с началом СК в центре масс Марса) и другие СК.

В зависимости от выбора направления ориентировки осей координат относительно точек пространства СК делятся на следующие виды:

- звездные, если оси ориентированы по далеким звездам;

– квазарные, если оси ориентированы по далеким естественным радиоисточникам (квазарам);

– земные, если оси ориентированы по неподвижным точкам земной поверхности.

Системы координат, применяемые в геодезии, могут различаться и по выбору основной координатной плоскости. По этому признаку они могут делиться следующим образом:

- экваториальные (основной плоскостью является плоскость экватора);
- эклиптические (основная плоскость – плоскость эклиптики);
- орбитальные (основная плоскость – плоскость орбиты небесного тела);
- горизонтные (основная плоскость – плоскость местного горизонта).

Из-за прецессии, нутации, колебательных движений Земли вокруг своей оси вращения, движения Земли в мировом пространстве начало СК, ее основные плоскости, оси координат со временем меняют свое положение и направление в пространстве. Поэтому планетарные СК обычно фиксируются по времени (задаются на какую-то эпоху).

Если СК задается на момент наблюдения и получения каких-либо параметров, то такие СК называются мгновенными или истинными.

При построении СК для решения задач, в которых учитываются релятивистские эффекты\*, вводят вместо понятия системы координат – систему отсчета (СО), состоящую из системы координат и системы времени.

В настоящем учебном пособии рассматриваются только земные системы координат.

### 3.2. Земные геодезические системы координат

Прежде всего, еще раз отметим, что к земным СК мы относим такие системы, которые жестко связаны с Землей, т. е. системы, вращающиеся вместе с Землей и участвующие в ее суточном вращении. В то время как у небесных или звездных систем оси координат должны быть фиксированы в пространстве, а, следовательно, не должны участвовать в суточном движении Земли.

Положение точек непосредственно на физической поверхности Земли или в околоземном пространстве, а также на поверхности земного эллипсоида могут определяться в различных как прямолинейных, так и криволинейных системах координат. Однако в теории и практике производства топографо-геодезических работ наибольшее распространение получили следующие СК:

- пространственные прямоугольные декартовы СК –  $X, Y, Z$ ;
- криволинейные эллипсоидальные геодезические координаты –  $B, L, H$ ;
- различные виды систем полярных координат как пространственных, так и на поверхностях (сферы, эллипсоида, плоскости);

---

\* Релятивистские эффекты – физические явления, наблюдаемые при скоростях тел (частиц), сравниваемых со скоростью света, а также в сильных гравитационных полях.

– пространственные прямоугольные топоцентрические координаты –  $X^T, Y^T, Z^T$ ;

– системы плоских прямоугольных декартовых координат –  $x, y$  и геодезической высоты ( $H$ ).

Общие теоретические (геометрические) основы и характеристики всех вышеперечисленных СК нами уже были рассмотрены во второй главе. Поэтому здесь, не останавливаясь на подробном описании какой-либо конкретной СК, будем указывать только особенности ее выбора и установления в геодезии и связи с другими СК.

### 3.2.1. Системы полярных координат в геодезии

До недавнего времени непосредственно в геодезии применялись, в основном, только описанные в предыдущей главе, поверхностные системы полярных координат: на плоскости, сфере и, особенно, на эллипсоиде. Это было связано с тем, что раньше решение чисто геодезических задач сводилось, в основном, к вычислению координат точек земной поверхности.

В настоящее время, в связи с выходом человека в космос, появлением более высокоточных приборов для измерения полярных координат возникла необходимость в решении задач по определению координат точек в других системах не только непосредственно на поверхности Земли, но и в околоземном пространстве. В этом случае и в геодезии возникла необходимость использования пространственных, сферических, сфероидических полярных систем координат.

Отличительной особенностью использования в геодезии системы пространственных полярных геодезических координат является то, что ее

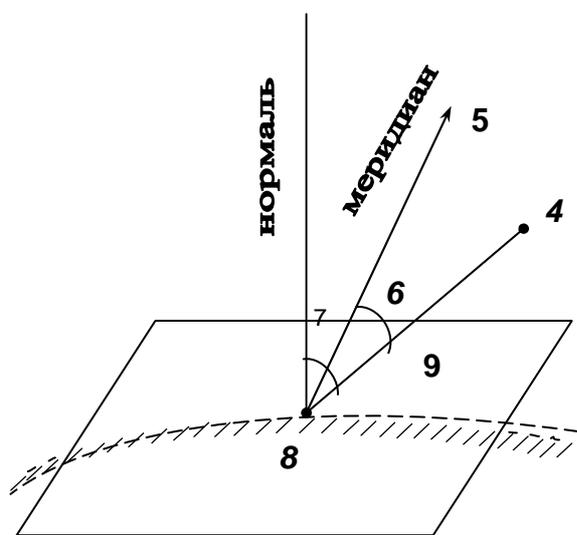


Рис. 3.1. Пространственная геодезическая система полярных координат

основная плоскость выбирается на поверхности и представляет собой плоскость геодезического горизонта (или параллельная плоскости горизонта). За полярную ось принимается линия пересечения плоскости горизонта с плоскостью геодезического меридиана данной точки  $O$  (полюса системы) с положительным направлением на северный полюс Земли.

Положение точки  $Q$  (рис. 3.1) в этой СК определяется тремя величинами (координатами):  $S$  – длина прямой  $OQ$ ;  $A$  – геодезический азимут (двугранный угол между плоскостью геодезического меридиана начальной точки  $O$  и нормальной плоскостью точки  $O$ , содержащей точку  $Q$ );  $Z\Gamma$  – зенитное расстояние

(угол между нормалью точки  $O$  и линией  $OQ$ ).

### 3.2.2. Криволинейные эллипсоидальные системы геодезических координат

Эти СК непосредственно связаны с некоторой математической моделью земной поверхности, в качестве которой в настоящее время принимается поверхность эллипсоида вращения с определенными параметрами и ориентировкой его в теле Земли, и обычно называется он просто – земным эллипсоидом. Таким образом, земным эллипсоидом является эллипсоид вращения, форма и размеры которого с той или иной степенью точности соответствуют форме и размерам Земли.

Для определения формы и размеров земного эллипсоида достаточно задать его основные параметры  $a$  – большую и  $b$  – малую полуоси. Однако на практике обычно для этих целей используются два других его элемента – одна линейная величина, например, большая полуось и одна относительная.

В качестве относительной величины чаще всего используется его сжатие  $\alpha$ , вычисляемое по формуле

$$\alpha = \frac{a - b}{a},$$

или квадрат первого эксцентриситета  $e^2$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

которые связаны между собой соотношением

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2. \quad (3.1)$$

Если земной эллипсоид наилучшим образом представляет собой всю Землю в целом, то такой эллипсоид называется общим земным эллипсоидом, и определяться он должен с соблюдением следующих условий:

1. Совпадение центра эллипсоида с центром масс Земли и плоскости его экватора с плоскостью земного экватора;
2. Минимум суммы квадратов уклонов по высоте квазигеоида (геоида), во всех его точках, от поверхности эллипсоида.

Помимо общеземного эллипсоида, для математической обработки наземных геодезических измерений в отдельных странах применяются эллипсоиды, параметры которых получены по результатам измерений, охватывающих территорию одного или нескольких прилегающих государств. Такие эллипсоиды принято называть референц-эллипсоидами, а системы координат, связанные с этими эллипсоидами – референсными СК.

В настоящее время в мировой геодезической практике используется ряд общеземных эллипсоидов, параметры которых приведены в табл. 3.1.

Криволинейные эллипсоидальные геодезические СК могут быть определены как на общеземном эллипсоиде, так и на референц-эллипсоиде. В первом случае они будут являться общеземными СК, во втором случае – референсными.

Таблица 3.1

Название параметра в	Размерность	Общеземные			Референц-эллипсоид Красовского
		GRS-80	WGS-84	ПЗ-90	
Большая полуось $a$	м	6 378 137	6 378 137	6 378 136	6 378 245
Сжатие $\alpha$	б/р	1:298,2572221	1:298,2572235	1:298,257839303	1:298,3
Квадрат первого эксцентриситета $e^2$	б/р	$6,6943800229 \cdot 10^{-3}$	$6,6943799901 \cdot 10^{-3}$	$6,6943661931 \cdot 10^{-3}$	$6,6934216229 \cdot 10^{-3}$

Положение точки на земной поверхности или в околоземном пространстве будет, в этой СК, определяться тремя величинами: две из которых угловые –  $B$ ,  $L$  и одна линейная –  $H$  (рис. 3.2).

$B$  – геодезическая широта – это угол, составленный плоскостью экватора и нормалью  $Qn$  к поверхности эллипсоида в данной точке  $Q$ .

$L$  – геодезическая долгота – это двугранный угол, составленный плоскостью начального геодезического меридиана и плоскостью геодезического меридиана, проходящего через заданную точку  $Q$ .

$H$  – геодезическая высота – отрезок нормали  $Q_0Q$  от поверхности эллипсоида до данной точки  $Q$ .

Пределы изменений этих величин:

широты  $B$  – от 0 до  $\pm \pi/2$ ;

долготы  $L$  – от 0 до  $2\pi$ ;

высоты  $H$  – от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Плановое положение точек на земной поверхности может

определяться и с помощью астрономических широт –  $\varphi$  и долгот –  $\lambda$ . Но эти координаты уже не связаны земным эллипсоидом, а относятся к уровенной поверхности Земли и определяются следующим образом.

Широта астрономическая – это угол между направлением отвесной линии (нормаль к поверхности геоида) в данной точке и плоскостью, перпендикулярной оси вращения Земли.

Долгота астрономическая – двугранный угол между плоскостями астрономических меридианов – начального и меридиана данной точки.

Связь между геодезическими и астрономическими координатами может быть легко установлена через уклонения отвесных линий (угла между отвесной линией и нормалью к поверхности эллипсоида):

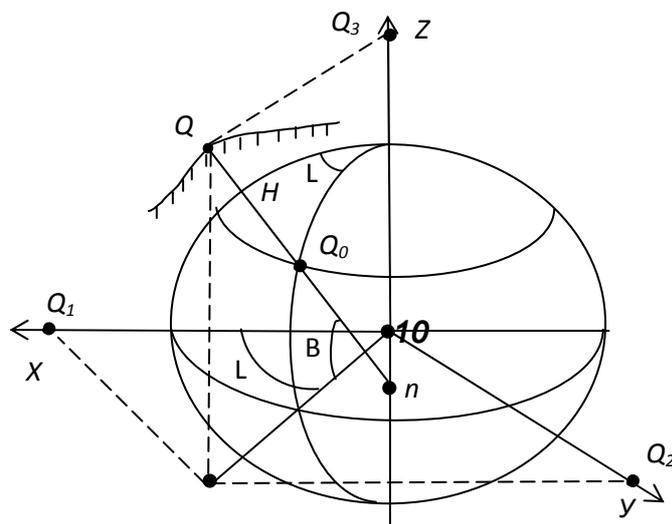


Рис. 3.2. Система криволинейных геодезических координат

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi - \xi; \\ L &= \lambda - \eta \sec \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  – проекции полного уклонения отвесных линий, соответственно, на плоскость меридиана и первого вертикала.

### 3.2.3. Определение эллипсоидальных геодезических координат при раздельном способе определения планового и высотного положений точек земной поверхности

При построении наземных геодезических сетей, предназначенных для определения положения точек физической поверхности Земли, во многих странах мира принят принцип раздельного определения планового и высотного положения. С целью определения планового положения точки на земной поверхности строятся специальные (плановые) геодезические сети в виде триангуляции, трилатерации, полигонометрии. Для определения высотного положения точки, строятся сети нивелирования.

Обработка наземных плановых геодезических сетей должна осуществляться на координатной поверхности, в качестве которой, как уже отмечалось выше, в настоящее время используется эллипсоид вращения. Поэтому в геодезии возникает задача – по результатам (элементам) геодезических сетей (сторонам, углам, азимутам) определить геодезические координаты  $B$ ,  $L$  и азимуты  $A$  точек поверхности земного эллипсоида.

Эта задача в геодезии получила специальное название – прямая геодезическая задача на эллипсоиде, хотя с точки зрения преобразования координат ее можно трактовать как задачу преобразования эллипсоидальных полярных координат точки в геодезические.

Существует большое разнообразие способов решения этой задачи на эллипсоиде, основанных на интегрировании дифференциальных уравнений (2.62) в системе геодезических координат. Не останавливаясь здесь на анализе этих методов, их достоинствах и недостатках, приведем без вывода один из наиболее простых в практическом отношении, который в геодезической литературе называется «способом со средними аргументами» и позволяет определить координаты с точностью  $0.0003''$  при  $S \leq 60$  км.

#### **Прямая геодезическая задача на эллипсоиде**

На рис. 3.3 дана геометрическая интерпретация решения прямой геодезической задачи на эллипсоиде.

Дано:  $S$ ,  $A_{12}$ ,  $B_1$ ,  $L_1$ .

Требуется определить:  $B_2$ ,  $L_2$ ,  $A_{21}$ .

Решение осуществляется по формулам:

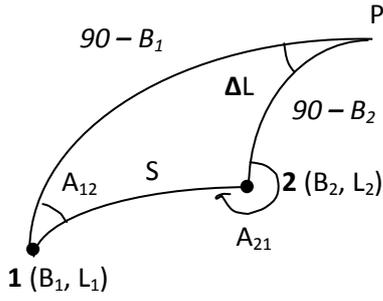


Рис. 3.3. Геометрия решения геодезической задачи на эллипсоиде

$$\left. \begin{aligned}
 B_2 &= B_1 + \Delta B; \\
 L_2 &= L_1 + \Delta L; \\
 A_{21} &= A_{12} \pm 180 + \Delta A; \\
 \Delta B'' &= b'' \left\{ 1 + \frac{l''^2}{12\rho''^2} + \frac{a''^2}{24\rho''^2} \right\}; \\
 \Delta L'' &= l'' \left\{ 1 - \frac{b''^2}{24\rho''^2} + \frac{a''^2}{24\rho''^2} \right\}; \\
 \Delta A'' &= a'' \left\{ 1 + \frac{b''^2}{12\rho''^2} + \frac{l''^2}{12\rho''^2} - \frac{a''^2}{24\rho''^2} \right\}.
 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

где  $b'' = \frac{S \cos A_{cp} \rho''}{M_{cp}}; l'' = \frac{S \sin A_{cp} \sec B_{cp} \rho''}{N_{cp}}; a'' = l'' \sin B_{cp};$  (3.4)

$$M_{cp} = \frac{a(1-e^2)}{W_{cp}^3}; N_{cp} = \frac{a}{W_{cp}}; W_{cp} = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_{cp}}, \quad (3.5)$$

в (3.5)  $a$  – большая полуось эллипсоида.

Прямая геодезическая задача решается методом итераций.

#### Обратная геодезическая задача на эллипсоиде

Формулы обратного перехода от геодезических координат  $B_1, L_1, B_2, L_2$  к полярным –  $S, A_{12}$  и  $A_{21}$  легко можно получить путем обращения формул (3.3)

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta B &= B_2 - B_1; \quad \Delta L = L_2 - L_1; \\
 P &= S \cos A_{cp} = \frac{\Delta B'' M_{cp}}{\rho''} \left\{ 1 - \frac{\Delta L''^2}{12\rho''^2} - \frac{\Delta L''^2 \sin^2 B_{cp}}{24\rho''^2} \right\}; \\
 Q &= S \sin A_{cp} = \frac{\Delta L'' \cos B_{cp} N_{cp}}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{\Delta B''^2}{24\rho''^2} - \frac{\Delta L''^2 \sin^2 B_{cp}}{24\rho''^2} \right\}; \\
 S &= \sqrt{P^2 + Q^2}; \\
 A_{cp} &= \text{arctg} \left( \frac{Q}{P} \right); \\
 A_{12} &= A_{cp} - \frac{\Delta A}{2}; \\
 A_{21} &= A_{cp} \pm 180 + \frac{\Delta A}{2}.
 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

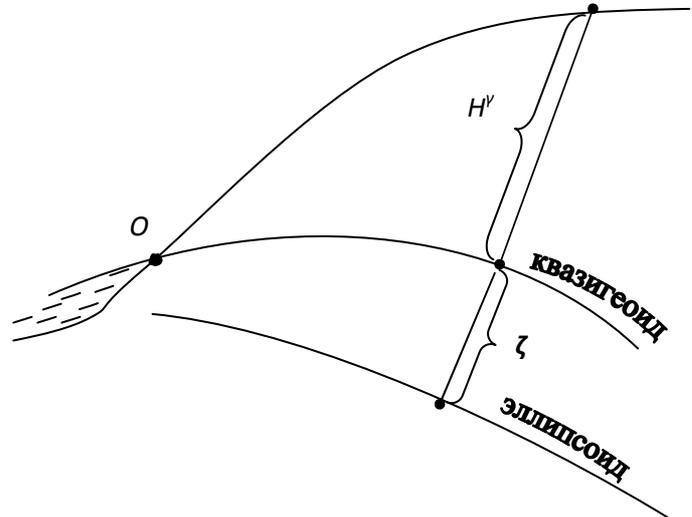
При этом  $\Delta A$  вычисляется по последней формуле системы (3.3).

Что касается третьей координаты, геодезической высоты  $H$  (как высоты точки физической поверхности Земли относительно земного эллипсоида), то она определяется как сумма двух слагаемых

$$H = H^\gamma + \zeta, \quad (3.7)$$

где  $H^\gamma$  – нормальная высота точки  $Q$  (рис. 3.4) относительно поверхности квазигеоида и  $\zeta$  – высота квазигеоида над эллипсоидом.

Нормальная высота  $H^\gamma$  определяется из нивелирования (геометрического или тригонометрического) точек физической поверхности Земли, а высота  $\zeta$  квазигеоида над эллипсоидом определяется из специальных геодезических работ, получивших название нивелирования квазигеоида.



Но как  $H^\gamma$ , так и  $\zeta$  непосредственно измерению не подлежат. Из измерений можно получить только их приращения при переходе от одной точки к другой и, если известны для одной из точек  $H^\gamma_i$ , так и  $\zeta_i$ , то тогда

$$\left. \begin{aligned} H_{i+1}^\gamma &= H_i^\gamma + \Delta H_{i,i+1}^\gamma; \\ \zeta_{i+1} &= \zeta_i + \Delta \zeta_{i,i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где

$$\Delta H_{i,i+1}^\gamma = \Delta H_{i,i+1} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (\gamma_0^i - \gamma_0^{i+1}) H_{cp} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} \Delta H_{i,i+1}; \quad (3.9)$$

$$\Delta \zeta_{i,i+1} = -\frac{\vartheta_i'' + \vartheta_{i+1}''}{2\rho''} S. \quad (3.10)$$

В этих формулах использованы следующие обозначения:

$\vartheta$  – проекции полного уклонения отвесных линий в соответствующих точках на вертикальную плоскость, проходящую через обе точки;

$S$  – расстояние между точками;

$\Delta H_{i,i+1}$  – непосредственно измеренное превышение;

$\gamma_0^i = \gamma_0 (1 + \beta \sin^2 B)$  – нормальное ускорение силы тяжести на эллипсоиде для точки  $i$ ;

$(g - \gamma)$  – аномалия силы тяжести;

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha; \quad q = \frac{a\omega^2}{\gamma_0};$$

$a$  – большая полуось эллипсоида;  
 $\alpha$  – сжатие эллипсоида;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения Земли;  
 $\gamma_0 = 978031.97$  мгл – нормальное ускорение силы тяжести на экваторе (в системе ПЗ-90).

### 3.2.4. Преобразование пространственных геодезических полярных координат в эллипсоидальные геодезические координаты

По аналогии с решением задач на эллипсоиде, преобразование пространственных полярных координат в геодезические принято называть прямой геодезической задачей в пространстве, а обратный переход – обратной геодезической задачей в пространстве.

#### Прямая геодезическая задача в пространстве

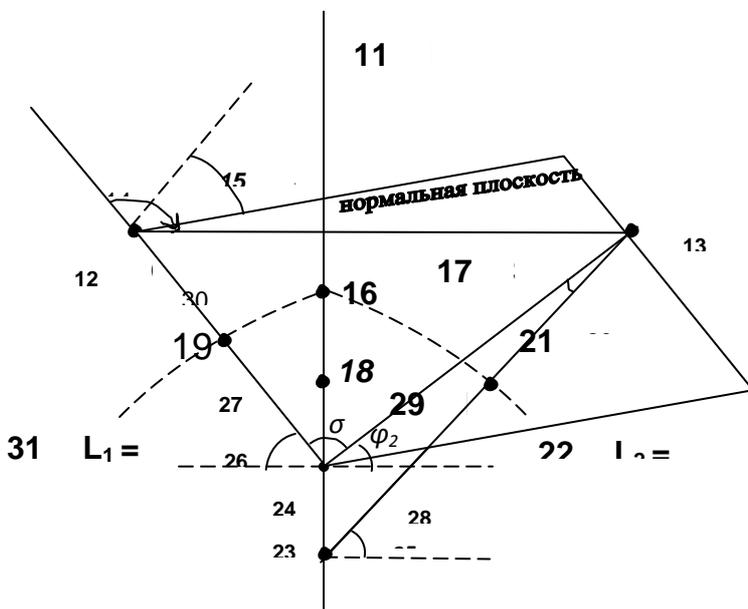


Рис. 3.5. Геометрия прямой и обратной пространственных задач

Решение прямой геодезической задачи между двумя точками в пространстве заключается в том, что по геодезическим координатам первой точки  $Q_1(B_1, L_1, H_1)$  – полюса пространственной полярной системы координат, и сферическим полярным координатам второй точки  $Q_2(S, Z_{12}, A_{12})$  вычисляются геодезические координаты точки  $Q_2(B_2, L_2, H_2)$ .

В плоском треугольнике  $Q_1 n_1 Q_2$  (рис. 3.5) угол при вершине  $n_1$  обозначим через  $\sigma$ , сторону  $Q_2 n_1$  – через  $d$ , а угол, составленный отрезком  $d$  с плоскостью экватора – через  $\varphi_2$ .

Тогда, вычислив радиус кривизны первого вертикала

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}} \quad (i = 1, 2), \quad (3.11)$$

определяем

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \arctg \left( \frac{S \sin Z_{12}}{S \cos Z_{12} + N_1 + H_1} \right); \\ d &= \frac{S \cos Z_{12} + N_1 + H_1}{\cos \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12 \text{ a})$$

Из точки  $n_1$  (рис. 3.5), как из центра, опишем сферу единичного радиуса. Пересекая поверхность сферы плоскостями меридианов точек  $Q_1$  и  $Q_2$  и

нормальной плоскостью  $Q_1n_1Q_2$ , получим сферический треугольник  $q_1pq_2$  (рис. 3.6), из которого

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \arcsin(\cos \sigma \sin B_1 + \sin \sigma \cos B_1 \cos A_{12}); \\ \Delta L &= (L_2 - L_1) = \arcsin\left(\frac{\sin \sigma \sin A_{12}}{\cos \varphi_2}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} \sigma \cos B_1}{\sin A_{12}} - \operatorname{ctg} A_{12} \sin B_1\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.12 \text{ б})$$

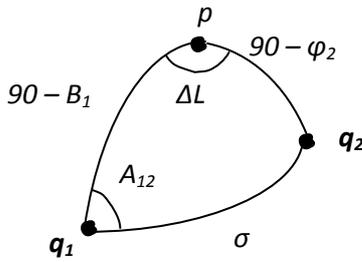


Рис. 3.6. Сферический треугольник единичной сферы

Проектируя отрезки  $Q_2n_1$  и  $Q_2n_2$  (рис. 3.5) на ось вращения эллипсоида и на плоскость экватора, получим:

$$B_2 = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \varphi_2 + \frac{\Delta}{d \cos \varphi_2}\right); \quad (3.13)$$

$$\text{где } \Delta = \overline{n_1n_2} = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1); \quad (3.14)$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L;$$

$$H_2 = \frac{d \cos \varphi_2}{\cos B_2} - N_2. \quad (3.15)$$

Широта  $B_2$  по формуле (3.13) определяется последовательными приближениями. В первом приближении величина  $N_2 \sin B_2$  в выражении (3.14) вычисляется по широте  $\varphi_2$ .

### Обратная геодезическая задача в пространстве

Решение обратной геодезической задачи между точками в пространстве состоит в том, что по заданным геодезическим координатам  $B, L, H$  двух точек определяются полярные координаты второй точки, т. е. расстояние  $S$  между полюсом полярной системы координат и второй точкой по прямой, азимут нормальной плоскости в первой точке  $A_{12}$ , и зенитное расстояние  $Z_{12}$  с первой точки на вторую (см. рис. 3.5).

В треугольнике  $Q_2n_1n_2$  угол при вершине  $Q_2$  обозначим через  $\gamma$ . Вычислив в соответствии с выражениями (3.11) и (3.14)  $N_1, N_2$  и отрезок  $\Delta$ , из треугольника  $Q_2n_1n_2$  находим

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta \cos B_2}{N_2 + H_1 - \Delta \sin B_2}\right); \\ d &= \frac{N_2 + H_1 - \Delta \sin B_2}{\cos \gamma}; \\ \varphi_2 &= B_2 - \gamma; \\ \Delta L &= L_2 - L_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Далее, решая сферический треугольник  $q_1pq_2$  (рис. 3.6) относительно  $\sigma$  и  $A_{12}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \arccos(\sin B_1 \sin \varphi_2 + \cos B_1 \cos \varphi_2 \cos(L_2 - L_1)) = \\ &= \text{arcctg} \{ [\sin B_1 \text{tg} \varphi_2 / \sin(L_2 - L_1) + \cos B_1 \text{ctg}(L_2 - L_1)] \sin A_{12} \}; \\ A_{12} &= \left( \frac{\sin \Delta L \cos \varphi_2}{(\cos B_1 \sin \varphi_2 - \sin B_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta L)} \right). \end{aligned} \right\} (3.17)$$

И, наконец, из треугольника  $Q_1 n_1 Q_2$  (рис. 3.5) находим

$$\left. \begin{aligned} Z &= \text{arcctg} \left( \text{ctg} \sigma - \frac{N_1 + H_1}{d \sin \sigma} \right); \\ S &= \frac{d \sin \sigma}{\sin Z_{12}}. \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Примеры решения прямой и обратной геодезических задач в пространстве приведены в приложениях 1 и 2.

### 3.2.5. Преобразование референцных систем геодезических координат в общеземные и обратно

Системы эллипсоидальных геодезических координат  $B, L, H$  могут быть отнесены как к общеземному, так и к референц-эллипсоидам. Поэтому в практике ведения высокоточных геодезических работ может возникать задача по преобразованию референцных систем геодезических широт  $B$ , долгот  $L$  и высот  $H$  в общеземные и наоборот, из общеземных – в референцные СК.

Опуская подробности громоздкого вывода, приведем окончательные формулы прямого и обратного перевычисления геодезических эллипсоидальных координат с необходимыми пояснениями применения этих формул

$$\left. \begin{aligned} B_{\bar{b}} &= B_a + \Delta B; \\ L_{\bar{b}} &= L_a + \Delta L; \\ H_{\bar{b}} &= H_a + \Delta H, \end{aligned} \right\} (3.19)$$

где  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$  – поправки к геодезическим координатам точки при переходе от системы  $a$  к системе  $b$  или обратно;

$a, b$  – условное обозначение систем координат (референцных и общеземных).

Поправки к геодезическим координатам могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta B'' &= \frac{\rho''}{(M + H)} \left[ \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left( 1 + \frac{N^2}{a^2} \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - (x_0 \cos L + y_0 \sin L) \sin B + z_0 \cos B \right] - \\ &\quad - (\omega_x'' \sin L - \omega_y'' \cos L) (1 + e^2 \cos 2B) - \rho'' \Delta m e^2 \sin B \cos B; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\Delta L'' = \frac{\rho''}{(N+H)\cos B} (y_0 \cos L - x_0 \sin L) + \operatorname{tg} B (1 - e^2) (\omega_x'' \cos L + \omega_y'' \sin L) - \omega_z''; \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{(M)} = & (x_0 \cos L + y_0 \sin L) \cos B + z_0 \sin B + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} - \frac{a}{N} \Delta a - \\ & - N e^2 \sin B \cos B \left( \frac{\omega_x''}{\rho} \sin L - \frac{\omega_y''}{\rho''} \cos L \right) + \left( \frac{a^2}{N} + H \right) \Delta m. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В этих формулах:

- $x_0, y_0, z_0$  – линейные элементы смещения по осям центра (начала) системы координат  $a$  относительно СК  $b$ , выраженные в метрах;
- $\omega_x'', \omega_y'', \omega_z''$  – угловые элементы (в секундах) разворота осей координат системы  $a$  относительно системы  $b$ ;
- $\Delta m$  – различие масштабов СК  $a$  и  $b$ ;
- $\Delta a = a_b - a_a$  – разность больших полуосей эллипсоидов ( в метрах);
- $\Delta e^2 = e_b^2 - e_a^2$  – разность квадратов первых эксцентриситетов;
- $a = (a_b - a_a) / 2$  – среднее значение больших полуосей эллипсоида;
- $e^2 = \frac{e_b^2 - e_a^2}{2}$  – среднее значение квадратов первых эксцентриситетов;
- $M, N$  – радиусы кривизны, соответственно, меридиана и первого вертикала (в м), вычисляемые по формулам (3.5);
- $\rho''$  – число угловых секунд в 1 радиане ( $\rho'' = 206\,264,806\,24$ ).

При преобразовании из системы  $a$  в систему  $b$  используют значения геодезических координат в системе  $a$ , а при обратном переходе – в системе  $b$ .

Эти формулы обеспечивают вычисление поправок с погрешностью не превышающей 0,3 м (в линейной мере), а для достижения погрешности не более 0,001 м выполняют вторую итерацию, то есть учитывают значения поправок к геодезическим координатам по формулам (3.19) и повторно выполняют вычисления по формулам (3.20) – (3.22). При этом формулы будут иметь следующий вид

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{B_a + (B_a + \Delta B)}{2}; \\ L &= \frac{L_a + (L_a + \Delta L)}{2}; \\ H &= \frac{H_a + (H_a + \Delta H)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

### 3.2.6. Пространственные прямоугольные системы координат

Геодезические пространственные прямоугольные системы координат могут быть также общеземными – геоцентрическими и квазигеоцентрическими – референсными.

В геоцентрической СК началом является центр масс Земли (центр общеземного эллипсоида), а направление осей связывается с положением полюса Земли, ее экватора и меридиана Гринвича.

Ось аппликат направлена по оси вращения Земли, ось абсцисс совпадает с линией пересечения земного экватора с плоскостью гринвичского меридиана, а ось  $OY$  дополняет систему до правой.

В референчных пространственных прямоугольных СК начало координат совпадает с центром референц-эллипсоида, ось  $OZ$  направлена вдоль оси вращения эллипсоида, ось  $OX$  находится в плоскости начального меридиана  $L = 0$ , а ось  $OY$  – в плоскости меридиана  $L = 90^\circ$  (рис. 3.2).

Как общеземная, так и референчные пространственные прямоугольные СК участвуют в суточном вращении Земли и остаются неподвижными относительно земной поверхности. И, поэтому, они широко используются при изучении фигуры Земли и определении положения точек на земной поверхности.

### 3.2.7. Связь пространственных прямоугольных координат с эллипсоидальными геодезическими координатами

Связь пространственных прямоугольных координат  $X, Y, Z$  с эллипсоидальными геодезическими координатами  $B, L, H$  можно легко установить на основании рис. 3.7.

Проведем через точку  $Q$ , не лежащую на поверхности эллипсоида, нормаль  $Qn$ , и, обозначая отрезок  $On$  через  $d$ , будем иметь

$$Qn = N + H;$$

$$d = e^2 N \sin B;$$

$$Q_0n = (N + H) \cos B.$$

И тогда формулы связи прямоугольных пространственных координат с эллипсоидальными геодезическими координатами можно записать в окончательном виде

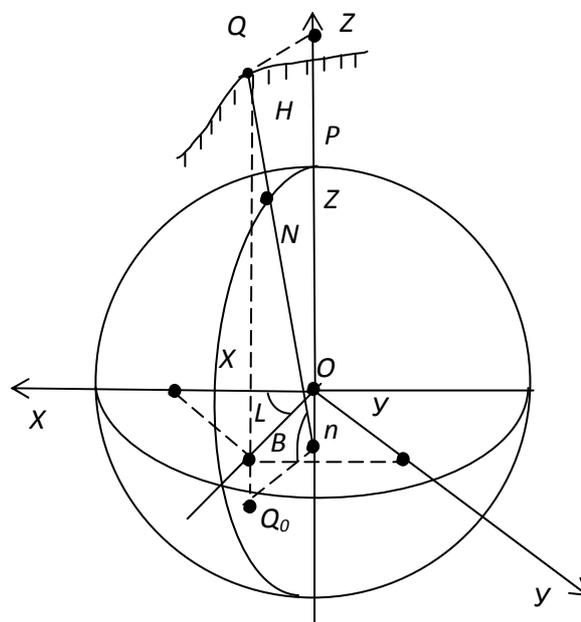


Рис. 3.7. Связь пространственных геодезических координат с пространственными координатами  $X, Y, Z$

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= (N + H) \sin B - d = [N(1 - e^2) + H] \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

При обратном переходе: от пространственных прямоугольных координат –  $X, Y, Z$  к эллипсоидальным геодезическим координатам  $B, L, H$  можно получить замкнутую, строгую формулу только для вычисления долготы  $L$

$$L = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (3.25)$$

и вспомогательной величины

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos B. \quad (3.26)$$

Вычисление же широты может быть выполнено только методом последовательных приближений по формуле

$$B = \arctg\left(\frac{Z}{D(1 - e^2)}\right), \quad (3.27)$$

где

$$e^2 = \frac{e^2}{1 + \frac{H}{N}}. \quad (3.28)$$

В первом приближении следует принять  $e^2 = e^2$ , во втором и далее величина  $e^2$  должна уже определяться по формуле (3.28), с предварительным вычислением  $H$  по формуле (3.29) и  $N$  – по формуле (3.11), используя широту, полученную в предыдущем приближении.

Имея широту, вычисляют высоту:

$$H = D \sec B - N. \quad (3.29)$$

### 3.2.8. Преобразование пространственных прямоугольных референчных координат в общеземные и обратно

В настоящее время для определения положения точек на земной поверхности или в околоземном пространстве в геодезии очень широкое распространение получили методы спутниковой геодезии. Эти методы основаны на использовании специальных спутников Земли как источников информации, обработка которой позволяет определить местоположение приемника, принимающего данную информацию (сигналы).

Имея соответствующий спутниковый радиоприемник со встроенным в него микропроцессорным вычислительным устройством с соответствующим математическим обеспечением, можно в считанные минуты определить координаты местоположения приемника.

В большинстве случаев местоположение приемника определяется в системе прямоугольных пространственных координат  $X, Y, Z$ , имеющей свое начало и свое расположение осей. Чаще всего для этого используется геоцентрическая (общеземная) система координат.

Однако в практике геодезических работ того или иного государства используются референсные системы координат, отнесенные к определенному референц-эллипсоиду. В связи с этим возникает проблема, связанная с преобразованием одной системы прямоугольных координат в другую.

Во второй главе нами уже был рассмотрен один из возможных способов преобразования одной системы пространственных прямоугольных координат в другую (2.32), в котором матрица преобразования (разворота осей координат) определялась с использованием направляющих косинусов базовых единичных векторов  $i, j, l$  и  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{l}$  двух систем координат. Но это не единственный способ, существуют и другие, например, способ, основанный на использовании так называемых эйлеровых углов.

Приведем здесь только теоретические основы этого способа получения матрицы преобразования  $P$ .

Пусть на рис. 3.8 показаны две системы координат  $OXYZ$  и  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  с совмещенным началом систем координат, а направления осей заданы базовыми единичными векторами в первой системе –  $i, j, l$ , а во второй –  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{l}$ . Проведем прямую  $d$  через начало –  $O$ , перпендикулярно к плоскости  $O\bar{l}\bar{i}$ .

Очевидно, эта прямая будет представлять собой линию пересечения плоскостей  $Oij$  и  $O\bar{i}\bar{j}$  (рис. 3.8). За направляющий вектор прямой  $d$  примем орт  $i'$ . Угол от орта  $i$  до орта  $i'$  (в плоскости  $Oij$ ) обозначим через  $\omega$  ( $0 \leq \omega < 2\pi$ ). Угол между осями  $OZ$  и  $O\bar{Z}$  обозначим через  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), а угол в плоскости  $O\bar{i}\bar{j}$  от орта  $i'$  до орта  $\bar{i}$  в положительном направлении (против хода часовой стрелки) обозначим через  $\eta$  ( $0 \leq \eta < 2\pi$ ).

Углы  $\omega, \theta, \eta$  в аналитической геометрии называются эйлеровыми углами базисного репера  $O\bar{i}\bar{j}\bar{l}$  (второй системы) относительно базисного репера  $Oijl$  первой системы.

Зная эти углы, можно легко перевести исходный базисный репер  $Oijl$  в базисный репер второй системы  $O\bar{i}\bar{j}\bar{l}$  и тем самым определить матрицу  $P$  трансформирования осей координат.

В самом деле, сначала мы

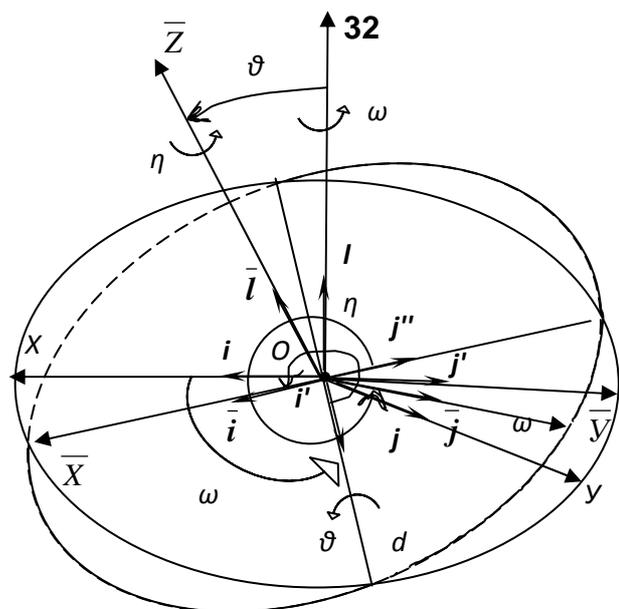


Рис. 3.8. Углы Эйлера

совершаем поворот исходного базисного репера  $Oijl$  вокруг оси  $OZ$  (орт  $l$ ) на угол  $\omega$  в положительном направлении и переводим репер  $Oijl$  в репер  $Oi'j'l$ .

Такой перевод можно описать матрицей

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

После этого совершаем поворот репера  $Oi'j'l$  вокруг оси  $d$  (орт  $i'$ ) на угол  $\theta$  в положительном направлении. При этом репер  $Oi'j'l$  перейдет в репер  $Oi'j''\bar{l}$ . Этот перевод будет уже описываться матрицей  $P_2$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

И, наконец, делая поворот на угол  $\eta$  в положительном направлении вокруг оси  $O\bar{Z}$  (орта  $\bar{l}$ ), переводим репер  $Oi'j''\bar{l}$  в репер  $O\bar{i}j\bar{l}$  и получаем матрицу этого разворота  $P_3$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Очевидно, общий перевод репера  $Oijl$  в репер  $O\bar{i}j\bar{l}$  будет описывать матрица  $P$

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3. \quad (3.33)$$

Однако, в настоящее время в геодезической практике можно рекомендовать и другой несколько модифицированный способ, основанный на повторном повороте осей координат (лежащих в одной плоскости) вокруг третьей оси, в трех взаимно ортогональных плоскостях (рис. 3.9).

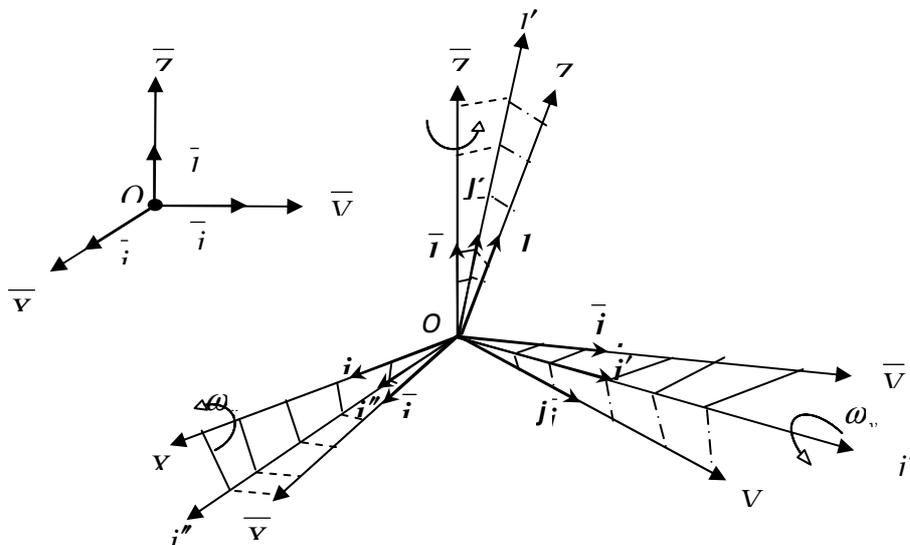


Рис. 3.9. Геометрия поворота осей

В начале репер базисных единичных векторов  $Oijl$  исходной системы координат  $OXYZ$  путем поворота вокруг оси  $OX$  на угол  $\omega_x$  переводится в репер  $Oij'l'$  в плоскости  $OYZ$ . Тем самым добиваются того, чтобы плоскость  $XOZ$  стала параллельной оси аппликат  $O\bar{Z}$ . Такой перевод может быть описан матрицей  $P_x$

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Затем репер  $Oij'l'$  путем поворота в плоскости  $Oil'$  вокруг оси  $Oj'$  на угол  $\omega_y$  переводится в репер  $Oi''j'\bar{l}$ , т. е. добиваются того, чтобы ось  $Ol'$  совпала с осью  $O\bar{Z}$ . Матрица этого перевода будет записываться выражением

$$P_y = \begin{pmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Третий перевод репера  $Oi''j'\bar{l}$  в плоскости  $Oi''j'$  вокруг оси  $O\bar{l}$  на угол  $\omega_z$  переводит репер  $Oi''j'\bar{l}$  в искомый нам репер  $Oi\bar{j}\bar{l}$ , т. е. добиваются полного совпадения всех осей координат старой системы  $OXYZ$  с новой  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ . При этом матрица, описывающая этот поворот осей, имеет вид

$$P_z = \begin{pmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Перемножая матрицы последовательных переводов исходного репера базисных единичных векторов, получаем общую матрицу  $P$  преобразования (разворота осей)

$$P = P_x \cdot P_y \cdot P_z = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
P_{11} &= \cos \omega_z \cos \omega_y; & P_{21} &= \sin \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z - \cos \omega_x \sin \omega_z; \\
P_{12} &= \cos \omega_y \sin \omega_z; & P_{22} &= \sin \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z + \cos \omega_x \cos \omega_z; \\
P_{13} &= -\sin \omega_y; & P_{23} &= \cos \omega_y \sin \omega_x; \\
P_{31} &= \cos \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z + \sin \omega_x \sin \omega_z; \\
P_{32} &= \cos \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z - \sin \omega_x \cos \omega_z; \\
P_{33} &= \cos \omega_x \cos \omega_y.
\end{aligned} \right\} (3.38)$$

В геодезической практике углы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  очень малы и редко превышают  $5''$  ( $2 \cdot 10^{-5}$  рад). Тогда можно (с ошибкой не превышающей  $4 \cdot 10^{-10}$ ) принять  $\sin \omega \approx \omega$ ;

$$\cos \omega \approx 1;$$

$$\sin \omega \sin \omega \approx 0.$$

А матрица преобразования P примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

А общие формулы преобразования (связи) двух систем пространственных прямоугольных координат на основании (2.31), (2.27), (3.39) будут записываться следующим образом

$$\left. \begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - x_0 \\ Y - y_0 \\ Z - z_0 \end{pmatrix} (1 + \Delta m), \\
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= (1 - \Delta m) \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \right\} (3.40)$$

При выводе этих формул линейные смещения начала новой системы по осям координат  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  определялись относительно старой системы, а вращение вокруг осей координат было выбрано левое.

При обратном выборе элементов линейных смещений центра координат и при правом вращении осей формулы остаются неизменными только необходимо изменить знаки у элементов трансформирования, т. е. принять

$$x_0 = -x_0; \quad y_0 = -y_0; \quad z_0 = -z_0;$$

$$\omega_x = -\omega_x; \quad \omega_y = -\omega_y; \quad \omega_z = -\omega_z.$$

В настоящее время стандартом [3] установлены следующие официальные системы координат, входящие в состав геодезических систем пространственных координат: «Параметры Земли» (ПЗ-90), «Мировая геодезическая система» (МГС-84) и референчные координатные системы Российской Федерации (СК-42 и СК-95).

Приведем рабочие формулы преобразования (связи) этих систем координат, используя формулы (3.40) с конкретными числовыми значениями элементов трансформирования  $(x_0, y_0, z_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta m)$  матриц  $P$  (3.39) и  $K_0$  (2.27).

#### **Преобразование координат из референчной системы координат (СК-42) в систему ПЗ-90**

Элементы трансформирования [3]:

$$x_0 = 25 \text{ м}; \quad \omega_x = 0.00''; \quad \Delta m = (0.00 \pm 0.25) \cdot 10^{-6};$$

$$y_0 = -141 \text{ м}; \quad \omega_y = -0.35'';$$

$$z_0 = -80 \text{ м}; \quad \omega_z = -0.66'';$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90}} = \begin{pmatrix} 1 & -3.3 \cdot 10^{-6} & 1.8 \cdot 10^{-6} \\ 3.3 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ -1.8 \cdot 10^{-6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{СК-42}} + \begin{pmatrix} 25 \\ -141 \\ -80 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

#### **Обратный переход (ПЗ-90 → СК-42)**

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{СК-42}} = \begin{pmatrix} 1 & 3.3 \cdot 10^{-6} & -1.8 \cdot 10^{-6} \\ -3.3 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 1.8 \cdot 10^{-6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90}} - \begin{pmatrix} 25 \\ -141 \\ -80 \end{pmatrix}. \quad (3.41a)$$

#### **Преобразование координат из системы ПЗ-90 в референчную систему СК-95**

Элементы трансформирования [3]:

$$x_0 = 25.90 \text{ м};$$

$$y_0 = -130.94 \text{ м};$$

$$z_0 = -81.76 \text{ м}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{СК-95}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{ПЗ-90}} - \begin{pmatrix} 25.90 \\ -130.94 \\ -81.76 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

### Обратный переход (СК-95 → ПЗ-90)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ-90} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{СК-95} + \begin{pmatrix} 25.90 \\ -130.94 \\ -81.76 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

### Преобразование координат из МГС-84 в систему ПЗ-90

Элементы трансформирования [3]:

$$x_0 = -1.08 \text{ м}; \quad \omega_x = \omega_y = 0;$$

$$y_0 = -0.27 \text{ м}; \quad \omega_z = -0.16'';$$

$$z_0 = -0.90 \text{ м}; \quad \Delta m = -0.12 \cdot 10^{-6}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ-90} = (1 + 0.12 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & 0.82 \cdot 10^{-6} & 0 \\ -0.82 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{МГС-84} - \begin{pmatrix} -1.1 \\ -0.3 \\ -0.9 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

### Обратный переход (ПЗ-90 → МГС-84)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{МГС-84} = (1 - 0.12 \cdot 10^{-6}) \begin{pmatrix} 1 & -0.82 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0.82 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ-90} + \begin{pmatrix} -1.1 \\ -0.3 \\ -0.9 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

### 3.2.9. Топоцентрические системы координат в геодезии

В настоящее время в геодезической практике широкое распространение получили пространственные топоцентрические СК. Это такие системы, начало

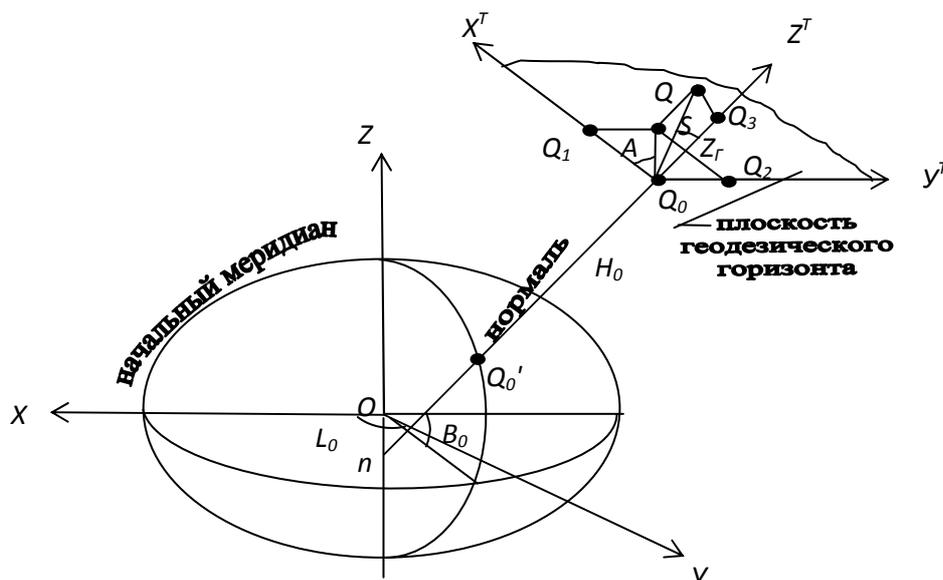


Рис. 3.10. Топоцентрическая геодезическая СК

отсчета которых находится в некоторой точке наблюдений  $Q_0$  (рис. 3.10) на земной поверхности, под землей или в воздушном пространстве.

В зависимости от выбора основной координатной плоскости (плоскости параллельной плоскости земного экватора или плоскости горизонта) топоцентрические СК могут быть либо экваториальными, либо горизонтными.

В геодезии используются, в основном, горизонтные пространственные топоцентрические СК.

Пространственная топоцентрическая СК будет геодезической (рис. 3.10), если ось  $OZ^T$  будет совпадать с нормалью к поверхности эллипсоида в точке  $Q_0$ . Если же ось  $OZ^T$  будет направлена по отвесной линии в точке  $Q_0$ , то такая топоцентрическая СК будет называться астрономической и ее основной плоскостью будет плоскость астрономического горизонта. На рис. 3.10 приведена пространственная топоцентрическая горизонтная геодезическая (левая) СК.

В этой системе ось  $OZ^T$  направлена по нормали к поверхности эллипсоида, ось  $OX^T$  лежит на пересечении плоскостей геодезического горизонта и геодезического меридиана точки  $Q_0$  и направлена на север, ось  $OY^T$  выбирается в плоскости геодезического горизонта и дополняет левую декартову СК.

Положение произвольной точки  $Q$  в этой СК будет определяться тремя величинами:

$$X^T = \overline{Q_0Q_1};$$

$$Y^T = \overline{Q_0Q_2};$$

$$Z^T = \overline{Q_0Q_3}.$$

Пространственные горизонтные топоцентрические СК имеют очень тесную и простую связь с пространственной полярной системой сферических координат точки  $Q$   $S$ ,  $Z_r$ ,  $A$  (рис. 3.10).

Экваториальные системы пространственных прямоугольных топоцентрических координат отличаются от горизонтных только тем, что их оси выбираются в точке  $Q_0$  параллельными осям геоцентрических пространственных прямоугольных СК  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а основной плоскостью является плоскость параллельная плоскости земного экватора, содержащая точку  $Q_0$ .

### 3.2.10. Связь пространственной топоцентрической горизонтной геодезической СК с пространственными полярными сферическими координатами

Для установления связи  $S$ ,  $Z_r$ ,  $A$  с  $X^T, Y^T, Z^T$  обратимся к чертежу (рис. 3.11), на котором для одной и той же точки  $Q$  показаны и те, и другие координаты.

Из этого чертежа сразу находим, что

$$\left. \begin{aligned} X^T &= S \sin Z_\Gamma \cos A; \\ Y^T &= S \sin Z_\Gamma \sin A; \\ Z^T &= S \cos Z_\Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

**Обратный переход** ( $X^T, Y^T, Z^T \rightarrow S, Z_\Gamma, A$ )

Введем вспомогательную величину  $D$

$$D = \sqrt{(X^T)^2 + (Y^T)^2} = S \sin Z_\Gamma. \quad (3.47)$$

Тогда уравнения (3.46) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} X^T &= D \cos A; \\ Y^T &= D \sin A; \\ Z^T &= D \operatorname{ctg} Z_\Gamma. \end{aligned} \right\}$$

Откуда находим, что

$$\left. \begin{aligned} A &= \operatorname{arctg} \left( \frac{Y^T}{X^T} \right); \\ Z_\Gamma &= \operatorname{arcctg} \left( \frac{Z^T}{D} \right); \\ S &= \frac{D}{\sin Z_\Gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

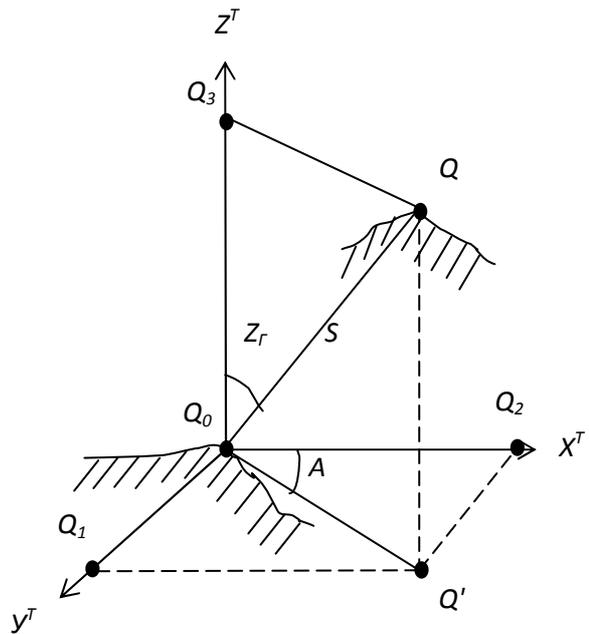


Рис. 3.11. Геометрия связи топоцентрических координат с полярными

### 3.2.11. Преобразование топоцентрических горизонтных геодезических координат в пространственные прямоугольные координаты $X, Y, Z$

Предположим, что начало топоцентрической СК располагается в точке  $Q_0$ , эллипсоидальные геодезические координаты которой  $B_0, L_0, H_0$ .

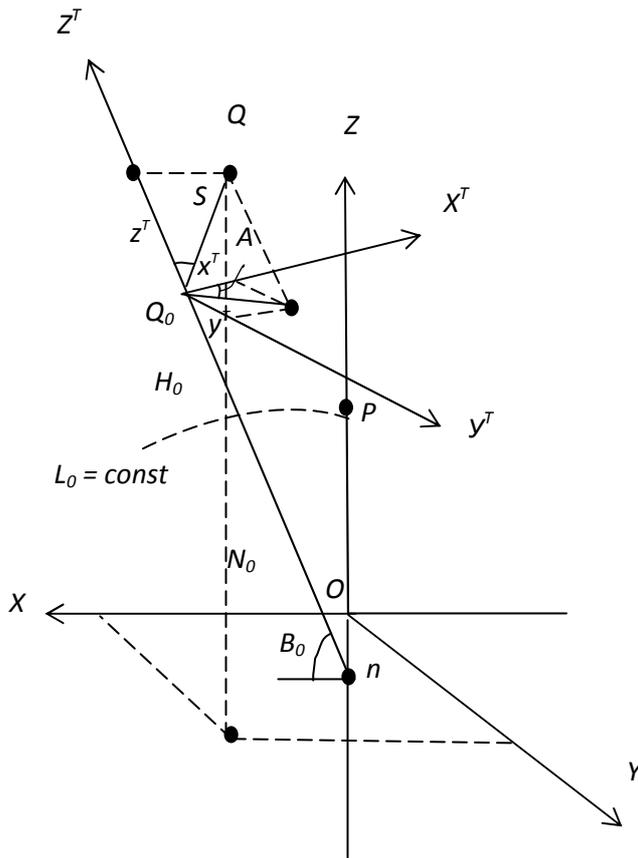


Рис. 3.12. Геометрия связи топоцентрической и прямоугольной пространственной СК

разворот осей только что преобразованной системы топоцентрических координат  $X_1^T, Y_1^T, Z_1^T$  вокруг оси  $nZ^T$  на угол  $90^\circ - B_0$ , чтобы ось  $nZ^T$  совпала с осью вращения эллипсоида. Получим вторично преобразованную систему топоцентрических координат  $X_2^T, Y_2^T, Z_2^T$ :

$$\begin{pmatrix} X_2^T \\ Y_2^T \\ Z_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [X^T \sin B_0 - (Z^T + N_0 + H_0) \cos B_0] \\ Y^T \\ [X^T \cos B_0 + (Z^T + N_0 + H_0) \sin B_0] \end{pmatrix}.$$

После этого перенесем начало координат системы  $X_2^T, Y_2^T, Z_2^T$  в центр эллипсоида  $O$  на расстояние  $On = e^2 N_0 \sin B_0$ , при этом направление осей остается неизменным.

Очевидно, в этом случае изменится только одна координата  $Z_2^T$ , т. е.

$$\begin{pmatrix} X_3^T \\ Y_3^T \\ Z_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2^T \\ Y_2^T \\ Z_2^T - e^2 N_0 \sin B_0 \end{pmatrix}.$$

Для установления связи между пространственными декартовыми топоцентрическими горизонтными  $X^T, Y^T, Z^T$  и пространственными прямоугольными координатами  $X, Y, Z$  сначала перенесем начало координат топоцентрической системы в точку  $n$  (рис. 3.12). Тогда, при неизменности направления осей топоцентрической системы, будем иметь частично преобразованную систему топоцентрических координат  $X_1^T, Y_1^T, Z_1^T$ :

$$\begin{pmatrix} X_1^T \\ Y_1^T \\ Z_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T \\ Y^T \\ Z^T + (N_0 + H_0) \end{pmatrix}.$$

Теперь осуществим

Наконец, оси координат, лежащие теперь в плоскости экватора, повернем вокруг оси  $OZ$  ( $OZ_3^T$ ) на угол, равный долготе  $L_0$  начальной точки  $Q_0$ , а у абсциссы  $X_4^T$  изменим знак на обратный (так как система  $OXYZ$  – правая, а система  $Q_0 X^T Y^T Z^T$  – левая), в результате преобразования получим

$$(3.49) \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_4^T \\ Y_4^T \\ Z_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(Z^T + N_0 + H_0) \cos B_0 - X^T \sin B_0] \cos L_0 - Y^T \sin L_0 \\ [(Z^T + N_0 + H_0) \cos B_0 - X^T \sin B_0] \sin L_0 + Y^T \cos L_0 \\ [(Z^T + N_0 + H_0) \sin B_0 + X^T \cos B_0] - e^2 N_0 \sin B_0 \end{pmatrix}.$$

### **Обратный переход от $X, Y, Z$ к $X^T, Y^T, Z^T$**

Чтобы найти обратные зависимости, решим уравнения (3.49) относительно  $X^T, Y^T, Z^T$ .

В результате решения получим

$$(3.49 \text{ а}) \quad \left. \begin{aligned} X^T &= (Z + e^2 N_0 \sin B_0) \cos B_0 - (X \cos L_0 + Y \sin L_0) \sin B_0; \\ Y^T &= Y \cos L_0 - X \sin L_0; \\ Z^T &= (Z + e^2 N_0 \sin B_0) \sin B_0 + (X \cos L_0 + Y \sin L_0) \cos B_0 - (N_0 + H_0). \end{aligned} \right\}$$

### **3.2.12. Системы плоских прямоугольных координат в геодезии**

В предыдущих разделах были рассмотрены наиболее общие и часто встречающиеся в геодезической практике различные пространственные как общеземные, так и референсные СК, применяемые для определения взаимного положения точек на земной поверхности и в околоземном пространстве.

Действительно, эти координаты, будучи общими, глобальными (единиными) для всей земли в целом, являются очень удобными при решении геодезических задач, связанных с изучением всей Земли как планеты, т. е. с решением геодезических задач между точками, удаленными друг от друга на большие расстояния.

Однако, при производстве массовых наземных топографо-геодезических работ, предназначенных для решения локальных, практических задач, таких как производство топографических съемок, создание геодезического обеспечения строительства и эксплуатации крупных инженерно-технических сооружений и других, т. е. выполняемых, как правило, на сравнительно небольших территориях, применение общеземных и референсных СК становится неудобным и даже обременительным.

Поэтому в практике ведения топографических работ, как правило, используются системы плоских прямоугольных координат. Основным преимуществом системы плоских прямоугольных координат являются их простота и удобство, возможность использования при обработке геодезических измерений формул плоской геометрии и тригонометрии, позволяющих существенно упростить вычисления.

Но земная поверхность или ее математическая модель, эллипсоид вращения, не является плоскостью и потому не может быть предложена система плоских прямоугольных координат, в которой без искажений могло бы быть выражено взаимное положение точек земной поверхности. Исследования кривизны земного эллипсоида показывают, что только весьма небольшие участки его поверхности можно принимать за плоскость. Так, например, при искажениях, не превышающих 1 мм, можно принимать за плоскость участок земной поверхности радиусом не более 5 – 6 км.

Поэтому получение систем геодезических плоских прямоугольных координат возможно лишь путем отображения поверхности эллипсоида, как математической модели Земли, на плоскость по тому или иному математическому закону (в той или иной картографической проекции).

А так как в математической картографии существует большое количество различных проекций отображения одной математической поверхности на другую, то, следовательно, можно предложить и большое разнообразие различных систем плоских прямоугольных координат.

Очевидно проблема выбора той или иной проекции отображения эллипсоида на плоскость с целью получения системы плоских прямоугольных координат, именно для геодезии, заключается в том, чтобы выбрать ту из них, которая наилучшим образом удовлетворяла бы физико-географическому расположению данной страны и была бы удобной для производства топографо-геодезических работ на ее территории.

Указанным условиям для нашего государства в наибольшей степени отвечает равноугольная (конформная) поперечно-цилиндрическая проекция эллипсоида на плоскость. Теоретические основы этой проекции были разработаны Ф. Гауссом в тридцатые годы XIX столетия. В настоящее время, эту широко распространенную проекцию сокращенно называют проекцией Гаусса.

В наше время, наряду с проекцией Гаусса, в различных странах применяются и другие системы плоских прямоугольных координат, полученных с помощью других картографических проекций, например:

- стереографической проекции Руссиля (Франция, Испания, Бельгия);
- конформной конической проекции Ламберта (США, Канада, Мексика);
- поперечно-цилиндрической равнопромежуточной проекции шара на плоскость по Зальднеру (Германия, Россия до 1930 г.) и др.

Каждая из этих проекций имеет свои достоинства и недостатки.

Невозможность отображения на плоскости без искажений всей поверхности Земли привело к тому, что в геодезии на плоскость отображается только часть поверхности эллипсоида, очень небольшая по сравнению со всей поверхностью Земли. Конечно, это приводит к множеству различных систем плоских прямоугольных координат для государств с большими территориями.

В нашей стране с 1930 г. применяется проекция Гаусса.

В этой проекции вся поверхность земного эллипсоида разделяется меридианами на области (зоны), простирающиеся от северного до южного полюсов (рис. 3.13).

Средний меридиан каждой зоны называется осевым, а крайние – граничными.

Ширина зоны выбирается исходя из величин линейных искажений и с учетом удобства их практического применения для топографо-геодезических работ.

В нашей стране приняты две системы координатных зон – шестиградусные и трехградусные. Первые являются основными, в том смысле, что все вычисления, материалы и каталоги координат выполняются и оформляются в системах шестиградусных зон. Трехградусные зоны используются только для производства крупномасштабных топографических съемок масштабов 1:5000 и крупнее.

Каждая из этих зон изображается на плоскости независимо от остальных, образуя самостоятельную систему координат. Осями абсцисс и ординат служат соответственно изображения на плоскости осевого меридиана зоны и экватора.

Крайним западным меридианом первой 6-градусной зоны является Гринвичский меридиан, и счет зон ведется от Гринвича на восток от 1 до 60.

Территория России расположена в 28 6-градусных зонах (с 5 по 32).

При таком расположении 6-градусных зон, номер зоны ( $n$ ) и долгота ( $L_0$ ) осевого меридиана зоны будет определяться следующими выражениями

$$\left. \begin{aligned} n^{(6)} &= N - 30; \\ L_0^{(6)} &= 6 \cdot n - 3, \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

где  $N$  – номер колонны листа карты масштаба 1:1 000 000.

В системе 3-градусных зон осевые меридианы располагаются через  $3^\circ$  по долготе и совпадают поочередно с граничными и осевыми меридианами 6-градусных зон. Причем осевые меридианы первых 6-градусной и 3-градусной зон совпадают.

Долготы осевых меридианов 3-градусных зон определяются по формуле:

$$L_0^{(3)} = 3 \cdot n', \quad (3.51)$$

где  $n'$  – номер трехградусной зоны.

Графически взаимное расположение 6-градусных и 3-градусных зон можно показать на рис. 3.14.

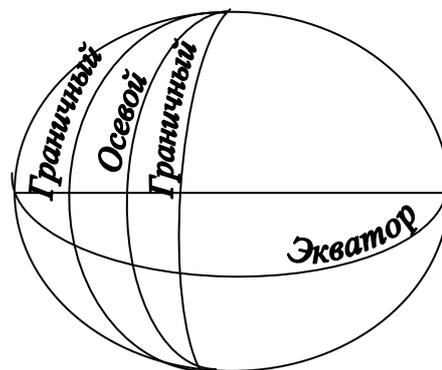


Рис. 3.13. Элементы проекции Гаусса

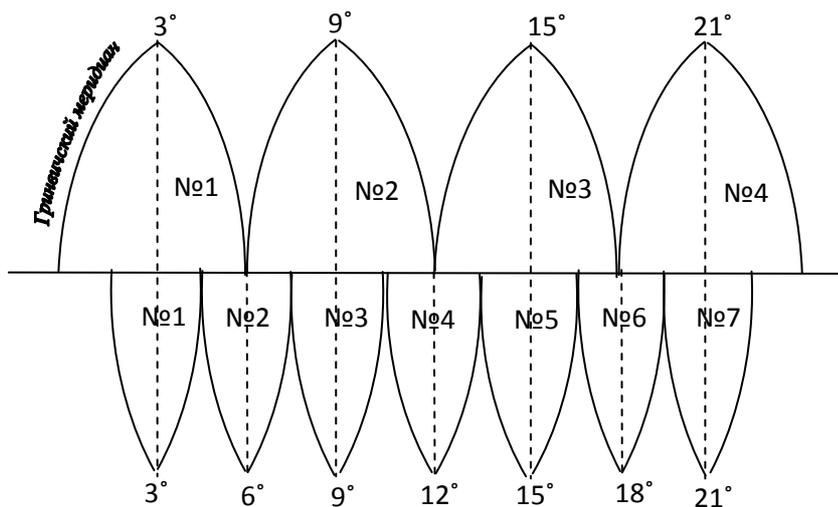


Рис. 3.14. Взаимное расположение и счет шестиградусных и трехградусных зон

Очевидно, что при таком выборе расположения зон и осей координат в них, изображение какой-либо отдельно взятой зоны на плоскости будет точной копией изображения любой другой зоны. А это значит, что системы плоских координат каждой зоны в проекции Гаусса совершенно однообразны.

Ординаты  $y$  отсчитываются от изображения осевого меридиана в обе стороны

и будут отрицательными для точек, лежащих в западной половине координатной зоны.

Чтобы исключить отрицательные ординаты и иметь возможность по значениям плоских прямоугольных координат судить о местоположении зоны, в каталогах приводят так называемые условные ординаты. Переход от реальных ординат ( $y$ ) зоны к условным ( $y'$ ) осуществляется по формуле

$$y' = n \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + y. \quad (3.52)$$

Например, точка находится в 12 координатной зоне и имеет ординату  $y = -86400.082$  м. Тогда, согласно формуле (3.52), получим условную ординату

$$y' = 12\,000\,000 + 500\,000 - 86\,400.082 = 12\,413\,599.918 \text{ м}. \quad (3.53)$$

На рис. 3.15 приведена геометрическая интерпретация проектирования (перехода) геодезических построений с эллипсоида на плоскость.

Если в некоторой зоне на поверхности эллипсоида расположена геодезическая сеть в виде одного треугольника (для простоты), элементы которого показаны на рис. 3.15, а, то, согласно условий отображения в проекции Гаусса, геодезические линии эллипсоида 1-2, 1-3, 2-3 изобразятся на плоскости в виде кривых 1'-2', 1'-3', 2'-3'. Меридиан точки 1 на плоскости также изобразится в виде кривой. А углы  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и азимут  $A$  перейдут на плоскость (в силу равноугольности проекции) без искажений.

Однако использовать для дальнейшей математической обработки такой треугольник на плоскости не представляется возможным, так как формулы плоской тригонометрии применимы только для фигур, образованных прямыми линиями. Поэтому соединим вершины 1', 2', 3' хордами. Но тогда нарушается равноугольность данной проекции, т. е. в углы необходимо уже будет вводить поправки за кривизну изображения геодезических линий на плоскости  $\delta_{ij}$ .

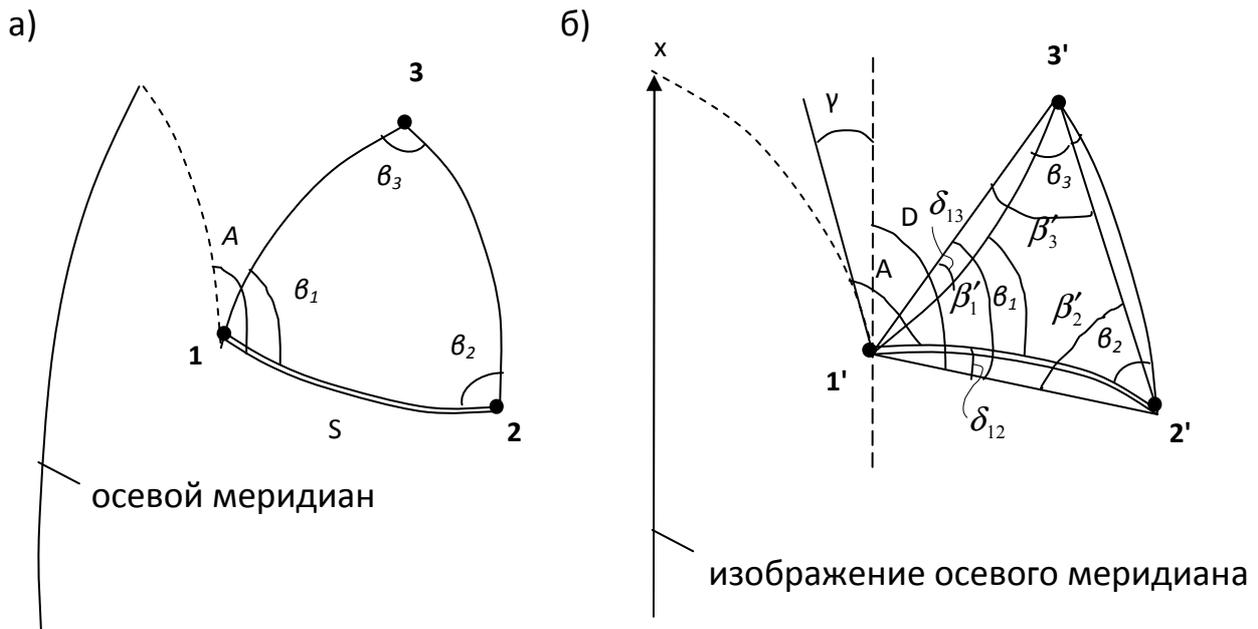


Рис. 3.15. Геометрическая интерпретация проектирования геодезической сети с эллипсоида на плоскость: а) на эллипсоиде; б) на плоскости

Обозначая углы на плоскости между хордами через  $\beta'_i$ , из рис. 3.15, б находим

$$\beta'_i = \beta_i + (\delta_{np} - \delta_{лев}), \quad (3.54)$$

где  $\delta_{np}$  и  $\delta_{лев}$  – поправки за кривизну изображения геодезических линий соответственно правого и левого направлений.

Кроме того, необходимо определить и ориентировку хорды 1'-2'. На плоскости ориентирование геодезических построений осуществляется с помощью дирекционного угла  $D$  (угла, заключенного между линией параллельной изображению осевого меридиана на плоскости и хордой, стягивающей изображение геодезической линии на плоскости).

Из рис. 3.15, б видно, что

$$D_{ij} = A_{ij} - \gamma_i + \delta_{ij}, \quad (3.55)$$

где  $\gamma$  – сближение меридианов на плоскости, вычисляемое по формуле

$$\gamma \approx l_i \sin B_i, \quad (3.56)$$

$$а \quad l_i = L_i - L_0$$

$$и \quad \delta''_{ij} \approx -\frac{\rho''}{2R^2} (x_j - x_i) y_{cp}. \quad (3.57)$$

Формулы (3.56) и (3.57) приближенные. Ошибка вычисления по (3.56) не превышает  $1 - 2''$ , а по (3.57) –  $0.2 - 0.3''$ .

### 3.2.13. Связь плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера с эллипсоидальными геодезическими координатами

Не останавливаясь здесь на дальнейшей детализации применения проекции Гаусса в геодезии, приведем окончательные формулы преобразования (связи) геодезических эллипсоидальных координат  $B, L$  в плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера [7]

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{X} + \frac{l''^2 N \cos B \sin B}{2\rho''^2} \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + \eta^4) + \dots \right\}; \\ y &= \frac{l'' N \cos B}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{6\rho''^2} (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

В этих формулах:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \text{ – радиус кривизны первого вертикала;}$$

$l = L - L_0$  – разность долгот соответствующей точки и осевого меридиана зоны;

$$\eta^2 = \frac{e^2}{(1 - e^2)} \cos^2 B;$$

$\bar{X}$  – длина дуги осевого меридиана от экватора до параллели с широтой данной точки (рис. 3.16), вычисляемая по формуле

$$\bar{X} = d_1 B^{(rad)} - d_2 \sin 2B + d_3 \sin 4B - d_4 \sin 6B + \dots, \quad (3.59)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= a \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \dots \right) = 6\,367\,558.4970 \text{ м}; \\ d_2 &= a \left( \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{32} e^4 + \frac{45}{1024} e^6 + \dots \right) = 16\,036.4799 \text{ м}; \\ d_3 &= a \left( \frac{15}{256} e^4 + \frac{45}{1024} e^6 + \dots \right) = 16.8277 \text{ м}; \\ d_4 &= a \left( \frac{35}{3072} e^6 + \dots \right) = 0.0218 \text{ м}. \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Числовые значения коэффициентов  $d_i$  в формулах (3.60) приведены для эллипсоида Красовского.

Ошибка вычисления координат  $x$  и  $y$  по формулам (3.58) не превышает 0.01 м. Более точные формулы вычисления  $x$  и  $y$ , а также  $B$  и  $l$  можно найти в [7, с. 58, формулы (6.14) и (6.15)].

**Обратный переход от плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера  $x, y$  к эллипсоидальным геодезическим координатам  $B, L$**

При вычислении геодезических координат  $B$  и  $L$  по данным прямоугольным координатам  $x$  и  $y$  первоначально вычисляют широту –  $B_x$ , основания изображения плоской ординаты –  $y$  (точка  $Q_x$  на рис. 3.16).

$$B_x = B_0 + (B_x - B_0),$$

где

$$B_0'' = \frac{x}{d_1} \rho''.$$

(3.61)

Для эллипсоида Красовского  $B_0'' = 3.239307599 \cdot 10^{-2} \cdot x$  (м).

А разность  $(B_x - B_0)''$  вычисляется по формуле

$$(B_x - B_0)'' = (\alpha'' + \beta'' \cos 2B_0 - \gamma'' \sin^2 2B_0) \sin 2B_0.$$

(3.62)

В выражении (3.62) величины  $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma''$  вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha'' &= \rho'' \left( \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{91}{512} e^6 + \dots \right) = 519.4752''; \\ \beta'' &= \rho'' \left( \frac{21}{128} (e^4 + e^6) + \dots \right) = 1.5263''; \\ \gamma'' &= \rho'' \left( \frac{151}{1536} e^6 + \dots \right) = 0.0061'', \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

а их числовые значения здесь также приведены для эллипсоида Красовского.

С учетом всего вышесказанного можно записать следующее

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x - \rho'' \frac{y^2 V_x^2 \operatorname{tg} B_x}{2N_x^2} \left[ 1 - \frac{y^2}{12N_x^2} (5 + 3\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) + \dots \right]; \\ l &= \frac{\rho'' y}{N_x \cos B_x} \left[ 1 - \frac{y^2}{6N_x^2} (1 + 2\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2) + \dots \right]; \\ L &= L_0 + l, \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

где  $V_x^2 = 1 + \eta_x^2$  и  $N_x$  вычисляются по широте  $B_x$ .

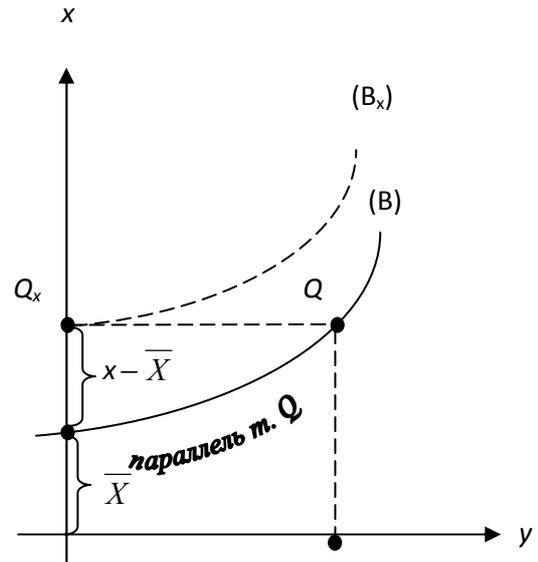


Рис. 3.16. Геометрическая интерпретация преобразования геодезических  $B, L$  в плоские координаты  $x, y$

Точность вычислений по формулам (3.64) соответствует точности формул (3.58) при  $l$  меньше  $3^{\circ}30'$ , т. е. координаты  $B$  и  $l$  вычисляются с ошибкой не превышающей  $0.005''$ .

### 3.2.14. Преобразование плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из одной зоны в другую

Переход от системы координат с одним осевым меридианом, к системе координат с другим осевым меридианом (из одной зоны в другую), в геодезии получил название «перехода из зоны в зону».

Рассмотрим в общем виде такое преобразование плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера.

Все системы плоских прямоугольных координат (различных зон), вероятно, могут быть связаны между собой через систему геодезических координат, так как геодезические координаты  $B$  и  $L$ , являясь едиными для всей поверхности эллипсоида, не связаны с осевыми меридианами зон. Поэтому, наиболее общим, естественным и простым здесь будет путь, основанный на двойном преобразовании координат сначала плоских прямоугольных координат в геодезические, а затем геодезических – в плоские прямоугольные координаты, соответственно, по формулам (3.64) и (3.58).

Если обозначить координаты условной исходной зоны через  $x_a, y_a$ , а координаты в определяемой зоне – через  $x_{\bar{b}}, y_{\bar{b}}$ , то более детально это можно показать схематично следующим образом

$$x_a, y_a \Rightarrow B, l_a \Rightarrow B, L \Rightarrow B, l_{\bar{b}} \Rightarrow x_{\bar{b}}, y_{\bar{b}},$$

где

$$l_a = L - L_{0(a)};$$

$$l_{\bar{b}} = L - L_{0(\bar{b})};$$

$L_{0(a)}$  и  $L_{0(\bar{b})}$  – долготы осевых меридианов, соответственно, зоны  $a$  и зоны  $\bar{b}$ , а знак  $\Rightarrow$  заменяет слова «преобразуется в...».

Этот способ в геодезической литературе получил название аналитического и имеет точность, соответствующую точности формул, применяемых для преобразования координат (3.58) и (3.64).

### 3.2.15. Перевычисление плоских прямоугольных координат пунктов локальных геодезических построений в другие системы плоских прямоугольных координат

В настоящее время различные ведомственные организации могут создавать и создают свои какие-то локальные геодезические построения на небольшой территории в своих (не государственных) системах координат.

Поэтому на практике в геодезии нередко возникает задача по перевычислению локальных систем координат в другие системы плоских прямоугольных координат.

Перевычисление координат пунктов локальных геодезических построений, например, в государственную СК или в другую какую-нибудь может быть выполнено, конечно, путем переуравнивания локальной геодезической сети на

основе исходных пунктов (не менее двух), имеющих координаты государственной СК или другой, в которую требуется перевычислить координаты локальной сети.

Этот путь надо считать наилучшим в смысле точности перевычисления, но, как правило, он одновременно является и наиболее трудоемким.

Поэтому часто перевычисление координат локальных геодезических сетей производят по специальным (эмпирическим) формулам, соответствующим тому или другому способу преобразования.

Способов такого перевычисления, очевидно, можно предложить несколько. Приведем один из способов, в котором масштаб в местной системе координат вообще принимается постоянным. Такие системы координат могут применяться на очень ограниченных территориях или при выполнении геодезических работ невысокой точности.

Пусть для локальной геодезической сети по результатам математической обработки получены координаты  $n$  пунктов (1, 2, 3, ...  $n$ ) в локальной (старой) системе

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n.$$

Допустим, что в этой же геодезической сети имеются и два пункта, например 1 и 2, имеющие координаты в другой (новой) системе

$$\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_2.$$

Требуется вычислить координаты пунктов 3, 4, ...  $n$  в новой системе

$$\overline{x}_3, \overline{y}_3, \overline{x}_4, \overline{y}_4, \dots, \overline{x}_n, \overline{y}_n.$$

Решая дважды обратную геодезическую задачу на плоскости по координатам старой и новой СК пунктов 1 и 2, находим длину и дирекционный угол стороны 1-2 в новой системе координат  $\overline{S}_{12}$  и  $\overline{D}_{12}$  и в старой –  $S_{12}$ ,  $D_{12}$ .

По этим результатам определяем угол разворота координатных осей  $\delta D$  и масштабный множитель  $m$

$$\left. \begin{aligned} \delta D &= D_{12} - \overline{D}_{12}; \\ m &= 1 + \delta m; \quad \delta m = \frac{\overline{S} - S}{S}. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Тогда на основании формул (2.15) и (2.19) для преобразования приращений плоских прямоугольных декартовых координат имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{x}_i &= \overline{x}_1 + (x_i - x_1)m \cos \delta D + (y_i - y_1)m \sin \delta D; \\ \overline{y}_i &= \overline{y}_1 - (x_i - x_1)m \sin \delta D + (y_i - y_1)m \cos \delta D. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

В формулах (3.66) исходным служит пункт 1. Однако практически бывает удобнее производить перевычисления, переходя в любой последовательности от пункта к пункту. Тогда формулы (3.66) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \overline{x}_{i+1} &= \overline{x}_i + (x_{i+1} - x_i)m \cos \delta D + (y_{i+1} - y_i)m \sin \delta D; \\ \overline{y}_{i+1} &= \overline{y}_i - (x_{i+1} - x_i)m \sin \delta D + (y_{i+1} - y_i)m \cos \delta D. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Дирекционный угол и длина любой стороны сети в новой системе могут вычисляться по формулам

$$\bar{D} = D + \delta D; \quad \bar{S} = S + \delta m \cdot S \quad (3.68)$$

и, кроме того, могут быть получены из решения обратных геодезических задач, что служит контролем вычислений.

Более точный способ (т. е. с учетом изменения масштаба) пересчета плоских прямоугольных координат пунктов городских геодезических сетей в СК-42 или СК-95 и обратно приведен в работе [2]

$$\left. \begin{aligned} x_{42} &= x_0 + x'(1 + a + d + by'); \\ y_{42} &= y_0 + y'(1 + a + cy') - fx'^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

где

$$x' = x_{\Gamma} \cos \gamma - y_{\Gamma} \sin \gamma;$$

$$y' = y_{\Gamma} \cos \gamma + x_{\Gamma} \sin \gamma;$$

$\gamma$  – сближение меридианов в начале городской системы координат;

$x_0, y_0$  – координаты начала в СК-42;

$a, b, c, d, f$  – малые коэффициенты, аппроксимирующие изменение масштаба в проекции Гаусса по мере удаления от осевого меридиана.

Обратный пересчет координат из СК-42 в городскую систему координат осуществляется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_{\Gamma} &= (\Delta x \cos \gamma + \Delta y \sin \gamma) - (a + d + b\Delta y)\Delta x; \\ y_{\Gamma} &= (\Delta y \cos \gamma - \Delta x \sin \gamma) - (a + c\Delta y)\Delta y + f\Delta x^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Здесь  $\Delta x = x_{42} - x_0$ ;  $\Delta y = y_{42} - y_0$ .

Точность преобразования координат по формулам (3.69) и (3.70) примерно соответствует 4 см на 10 км.

# ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ И КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

## 4.1. Системы координат сферической астрономии

Астрономические координаты представляют особый вид земных координат, связанных с отвесной линией в пункте наблюдения.

Не имея возможности при непосредственных наблюдениях оценивать различие в расстояниях до небесных светил, мы все их относим как бы на одно расстояние – на внутреннюю поверхность некоторой сферы, окружающей наблюдателя.

Поэтому основой для построения астрономических и звездных (небесных) СК служит небесная сфера единичного радиуса.

Положение точки на такой сфере может быть определено в какой-либо из систем сферических координат, рассмотренных во второй главе, при этом полярное расстояние до звезд  $r$  принимается равным 1. Расстояния между точками на сфере будут измеряться центральными углами или соответственными дугами больших кругов.

Отвесная линия, проходящая через «глаз наблюдателя», пересекает сферу в точках **зенита** и **надира** (рис. 4.1). Плоскость, перпендикулярная к отвесной линии и проходящая через центр сферы, называется плоскостью горизонта (истинный горизонт).

Через центр сферы проходит воображаемая ось вращения ( $PP'$ ) небесной сферы (ось мира), параллельная оси вращения Земли. Плоскость, перпендикулярная к оси мира, образует в пересечении с небесной сферой большой круг, называемый небесным экватором (рис. 4.2).

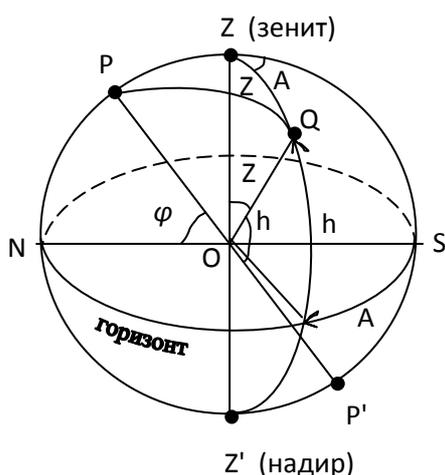


Рис. 4.1. Горизонтная система координат

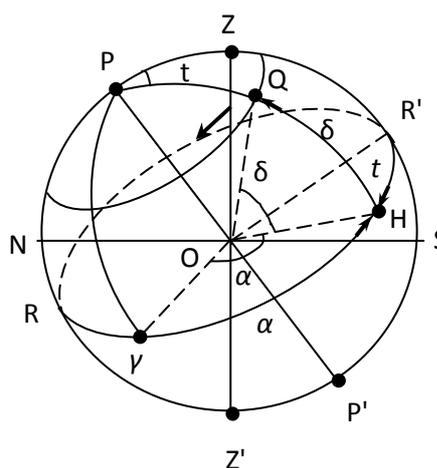


Рис. 4.2. Системы экваториальных координат

Высота полюса  $P$  над горизонтом равна астрономической широте  $\varphi$  данного места наблюдений. Вертикальная плоскость, проходящая через полюс  $P$  и зенит  $Z$ , пересекается с небесной сферой по большому кругу, называемому **меридианом астрономическим**. Вертикальная плоскость, перпендикулярная к плоскости меридиана, называется плоскостью **первого вертикала**.

Положение светила  $Q$  на небесной сфере может определяться в различных системах координат. В геодезической астрономии наибольшее распространение из них получили: горизонтная и экваториальные первая и вторая СК.

### **Горизонтная СК**

В горизонтной системе астрономических координат (рис. 4.1) положение светила  $Q$  определяется его **высотой**  $h$  – дугой круга высоты ( $ZQZ'$ ) между горизонтом и светилом и **азимутом**  $A$  – дугой горизонта от точки юга ( $S$ ) до точки пересечения круга высоты с горизонтом (или соответствующим углом при зените между меридианом и кругом высоты). Азимут отсчитывается от точки юга к западу от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Часто вместо высоты  $h$  определяют ее дополнение до  $90^\circ$ , называемое **зенитным расстоянием**  $Z$  светила.

Горизонтные координаты небесных светил подлежат непосредственному измерению с помощью универсального инструмента – теодолита (универсала). Они измеряются для определения астрономических координат ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) точек земной поверхности и для определения точного времени.

Вследствие суточного вращения небесной сферы горизонтные координаты светила непрерывно изменяются, что создает определенные неудобства при решении некоторых задач. Поэтому в астрономии разработаны две так называемые экваториальные СК.

### **Первая экваториальная система астрономических координат**

Основной плоскостью в этой системе является плоскость небесного экватора  $RR'$ , а началом отсчета – точки небесного экватора (рис. 4.2). Одной координатой является склонение светила  $\delta$  – дуга  $HQ$  часового круга  $PQH P'$  от небесного экватора до светила  $Q$  или центральный угол  $QOH$ .

Склонение изменяется от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$ . Второй координатой является часовой угол  $t$  – дуга небесного экватора от точки  $R'$  до круга склонений  $PQH$ , проходящего через светило, или центральный угол  $R'OH$  (в плоскости небесного экватора), измеряющий двугранный угол между плоскостями небесного меридиана и круга склонений светила.

Часовые углы отсчитываются в сторону суточного вращения небесной сферы от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  или от  $0^h$  до  $24^h$  (в часовой мере).

Первая экваториальная система ( $\delta$ ,  $t$ ) используется преимущественно при определении точного времени – одной из основных задач практической астрономии.

### **Вторая экваториальная система астрономических координат**

Основной плоскостью в этой системе является также плоскость небесного экватора (рис. 4.2), а одной из координат – склонение  $\delta$ .

Другой же координатой, определяющей положение часового круга светила является **прямое восхождение**  $\alpha$  – дуга небесного экватора  $\gamma H$  от точки весеннего равноденствия  $\gamma$  до часового круга, проходящего через светило  $Q$ , или

центральный угол  $\gamma_{OH}$  (в плоскости небесного экватора) между направлением на точку весеннего равноденствия и плоскостью часового круга светила.

Прямое восхождение  $\alpha$  отсчитывают в сторону, противоположную суточному вращению небесной сферы, в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  или от  $0^h$  до  $24^h$

Экваториальные координаты светила  $(\alpha, \delta)$  из-за суточного вращения сферы не меняются, так как они отсчитываются от точек небесного экватора, которые сами участвуют в суточном вращении, и, следовательно, положение светила относительно этих точек не изменяется.

Вторая экваториальная система является основной при решении задач астрономии. В этой системе составляются звездные каталоги и звездные карты.

### Параллактический треугольник преобразование координат

**Параллактическим треугольником** называется треугольник на небесной сфере, образованный пересечением небесного меридиана, вертикального круга и часового круга (круга склонений) светила. Его вершинами являются полюс мира  $P$ , зенит  $Z$  и светило  $Q$  (рис. 4.1 и 4.3).

Вид параллактического треугольника для одного и того же светила зависит от широты места наблюдения  $\varphi$  (от взаимного расположения  $P$  и  $Z$ ) и от момента наблюдения, то есть от часового угла  $t$ .

Применяя основные формулы сферической тригонометрии к параллактическому треугольнику (рис. 4.3), получим формулы для вычисления склонения светила  $\delta$  и его часового угла  $t$ , а затем и прямого восхождения  $\alpha = S - t$ , где  $S$  – звездное время (дуга  $\gamma R'$  на рис. 4.2), по измеренным (или известным) его зенитному расстоянию  $Z$  и азимуту  $A$  в момент звездного времени  $S$

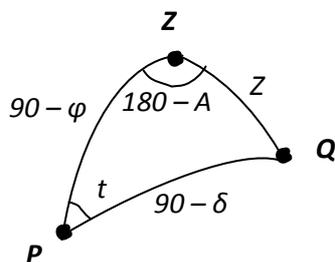


Рис. 4.3. Параллактический треугольник

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varphi \cos Z - \cos \varphi \sin Z \cos A; \\ \cos \delta \sin t &= \sin Z \sin A; \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \cos Z + \sin \varphi \sin Z \cos A. \end{aligned} \right\}$$

(4.1)

Иными словами, формулы (4.1) служат для перехода от горизонтной системы координат светила к его экваториальным координатам.

Для обратного перехода от экваториальных координат светила к его горизонтным координатам можно использовать формулы

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t; \\ \sin Z \sin A &= \cos \delta \sin t; \\ \sin Z \cos A &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Системы астрономических координат горизонтная и экваториальные в геодезической астрономии используются для определения астрономических координат  $(\varphi, \lambda)$  точек земной поверхности.

Астрономическая широта  $\varphi$ , как плоский угол между плоскостью земного экватора и отвесной линией, т. е. касательной к силовой линии поля силы тяжести Земли или нормали к уровенной поверхности Земли в данной точке, и астрономическая долгота  $\lambda$ , как двугранный угол между плоскостями астрономических меридианов – начального (Гринвичского) и данной точки, связаны с отвесными линиями, направления которых зависят от распределения масс внутри Земли. А это значит, что на земной поверхности меридианы (как линии  $\lambda = \text{const}$ ) и параллели (как линии  $\varphi = \text{const}$ ) будут представлять собой сложные кривые двойной кривизны, а не плоские кривые, как на поверхности эллипсоида вращения в системе геодезических широт и долгот.

Связь астрономических широт  $\varphi$  и долгот  $\lambda$  с геодезическими координатами  $B$  и  $L$  была нами установлена в разделе 3.2.2, формулы (3.2)

$$B = \varphi - \xi;$$

$$L = \lambda - \eta \sec \varphi.$$

## 4.2. Системы отсчета в космической геодезии

### 4.2.1. Звездные (небесные) инерциальные геоцентрические экваториальные координаты

Для изучения движения небесных тел, в том числе и ИСЗ, относительно центра масс Земли, должны применяться уже так называемые **инерциальные системы** отсчета, то есть такие системы, по отношению к которым свободная материальная точка (небесные физические объекты, ИСЗ) двигалась бы равномерно и прямолинейно, не подвергаясь действию внешних сил.

Строго говоря, получить такую идеальную инерциальную систему отсчета не представляется возможным, так как нельзя выделить в реальных условиях часть материи, изолировав ее от остального мира так, чтобы движение этой части материи не подвергалось бы воздействию внешней среды.

Поэтому на практике обычно используются квазиинерциальные (почти инерциальные) системы отсчета.

Так, если поместить начало системы координат в центре масс Солнца, а оси направить на удаленные звезды, галактики или квазары, то такая гелиоцентрическая система отсчета может считаться вполне приемлемой в качестве инерциальной системы при изучении движения физических объектов в пределах Солнечной системы.

Если выбрать систему декартовых пространственных прямоугольных координат с началом в центре масс Земли, ось абсцисс  $OX_0$  расположить в плоскости экватора Земли и направить в среднюю точку весеннего равноденствия  $\gamma_{cp}(T_0)$  некоторой эпохи  $T_0$  (рис. 4.4), ось  $OZ_0$  совместить со средней осью вращения Земли, с положительным направлением на север, а ось  $OY_0$  выбрать так, чтобы система была правой, то такая система отсчета, вследствие вращения Земли вокруг Солнца и ускоренного движения самого Солнца в пространстве, не будет являться строго инерциальной системой. Однако такая квазиинерциальная система отсчета вполне будет приемлемой для изучения движения искусственных спутников Земли, так как

гелиоцентрическое движение Земли не отразится на основных уравнениях движения ИСЗ, потому что ИСЗ сам перемещается в пространстве вместе с Землей.

Из-за прецессии и нутации оси вращения Земли, колебательных движений Земли относительно оси вращения и движения ее в пространстве, оси координат с течением времени будут изменять свое положение и направление в пространстве. Вот почему направления осей координат небесных (звездных) систем необходимо фиксировать на определенную эпоху, на которую заданы параметры, изменяющиеся со временем и определяющие ориентирование осей координат.

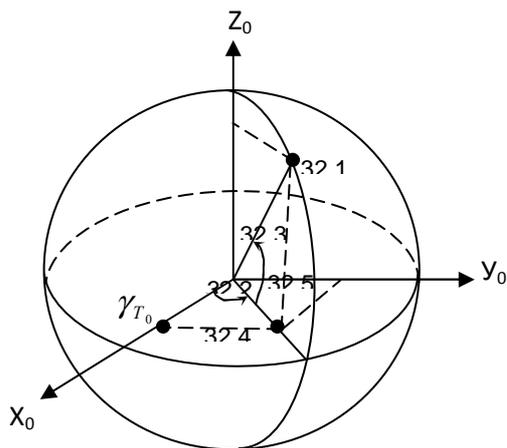


Рис. 4.4. Звездная инерциальная геоцентрическая экваториальная система координат

В связи с этим принято различать истинные  $Ox_u, Oy_u, Oz_u$  и средние  $Ox_0, Oy_0, Oz_0$  инерциальные небесные геоцентрические системы координат. В истинной небесной системе координат начало совпадает с центром масс Земли. Основной плоскостью является плоскость истинного небесного экватора, совпадающая с плоскостью мгновенного экватора Земли, ось  $Ox_u$  располагается в плоскости мгновенного экватора Земли и направлена в истинную точку весеннего равноденствия  $\gamma$ , ось  $Oz_u$  направлена по мгновенной оси вращения Земли, а ось  $Oy_u$  дополняет систему до правой.

систему до правой.

В настоящее время, в космической геодезии, в качестве фундаментальной небесной практически инерциальной системы отсчета принимается (описанная выше) средняя экваториальная система координат, фиксированная до 1986 г. на эпоху  $T_0 = 1950.0$  г. данными фундаментального каталога FK-4 положений и собственных движений ряда ярких звезд.

Каталог FK-4, опубликованный в 1963 г., содержит прямые восхождения  $\alpha_0$ , склонения  $\delta_0$  и собственные движения 1535 ярких звезд. Координаты звезд отнесены к равноденствию и эпохе 1950.0 г.

Начиная с 1986 г., в Астрономическом ежегоднике начала использоваться система каталога FK-5. На эпоху 2000 г. система фундаментального каталога FK-5 представляет собой улучшенный вариант (учтены некоторые систематические ошибки средних положений и собственных движений звезд) каталога FK-4.

На рис. 4.4 показаны пространственные геоцентрические полярные сферические координаты точки Q (небесного тела): прямое восхождение  $\alpha_0$ , склонение  $\delta_0$ , и геоцентрический радиус  $r_0$  (для звезд обычно принимают  $r_0 = 1$ ).

Связь фундаментальной системы прямоугольных пространственных координат  $X_0, Y_0, Z_0$  со сферическими  $(\alpha_0, \delta_0, r_0)$  получаем непосредственно из рис. 4.4

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

А из этих формул (4.3) не трудно получить и обратную связь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \operatorname{arctg} \frac{Y_0}{X_0}; \\ r_0 &= \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}; \\ \delta_0 &= \operatorname{arcsin} \frac{Z_0}{r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Очевидно, что переход от средних звездных геоцентрических экваториальных координат (фундаментальная СК)  $X_0, Y_0, Z_0$  эпохи  $T_0$  к соответствующим координатам  $X_u, Y_u, Z_u$  (мгновенной, истинной СК) на момент наблюдений  $T$  возможен путем учета прецессии и нутации при преобразовании координат [4]

$$\begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} = N \cdot P \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где  $P$  – матрица учета прецессии за интервал времени  $T - T_0$ , а  $N$  – матрица учета нутации на эпоху  $T$ .

Матрица  $P$  получается на основании трех последовательных вращений системы  $OX_0Y_0Z_0$ : сначала на угол  $\omega$  в плоскости  $OX_0Y_0$  (рис. 4.5), затем на угол  $\theta$  в плоскости  $OA_TZ_0$  и, наконец, на угол  $\eta$  в плоскости  $ON\gamma$ .

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } P_{11} &= \cos \omega \cos \eta \cos \theta - \sin \omega \sin \eta; & P_{21} &= \cos \omega \sin \eta \cos \theta + \sin \omega \cos \eta; \\ P_{12} &= -\cos \omega \sin \eta - \sin \omega \cos \eta \cos \theta; & P_{22} &= \cos \omega \cos \eta - \sin \omega \sin \eta \cos \theta; \\ P_{13} &= -\cos \eta \sin \theta; & P_{23} &= -\sin \eta \sin \theta; \\ P_{31} &= \cos \omega \sin \theta; \\ P_{32} &= -\sin \omega \sin \theta; \\ P_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Формулы для вычисления прецессионных углов (углы Эйлера)  $\omega, \theta, \eta$  (рис. 4.5) можно найти в [5] или в ежегоднике.

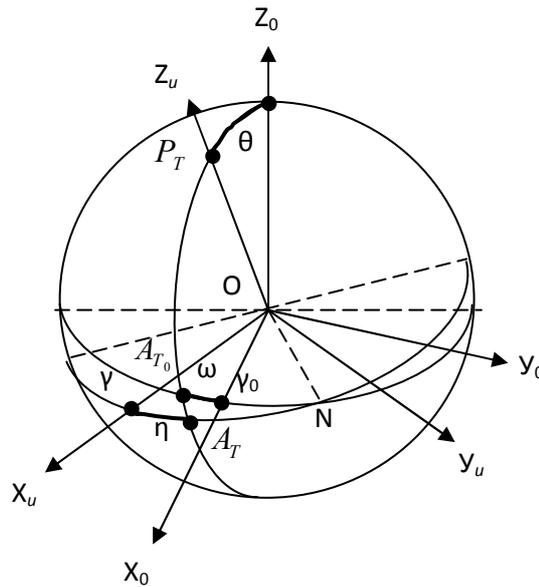


Рис. 4.5. Прецессионные углы

Для получения матрицы  $N$  необходимо учесть влияние составляющих нутации по долготе  $\delta\varphi$  и наклонению эклиптики  $\delta\varepsilon$  [1]

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\varphi \cos \varepsilon & -\delta\varphi \sin \varepsilon \\ \delta\varphi \cos \varepsilon & 1 & -\delta\varepsilon \\ \delta\varphi \sin \varepsilon & \delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Здесь  $\varepsilon$  – средний наклон эклиптики к экватору на момент  $T$  [1]

$$\varepsilon = 84428.260'' - 46.8450'' \cdot T - 0.0059'' T^2. \quad (4.9)$$

Формулы для вычислений  $\delta\varphi$  и  $\delta\varepsilon$  можно найти в [5, формулы 1.24 и 1.31].

Обратный переход от истинных прямоугольных координат  $X_u, Y_u, Z_u$  к фундаментальным геоцентрическим координатам  $X_0, Y_0, Z_0$  в силу ортогональности матриц  $N$  и  $P$  осуществляется по формулам:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = P^T \cdot N^T \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где  $P^T, N^T$  – транспонированные матрицы.

#### 4.2.2. Гринвичская земная геоцентрическая система пространственных прямоугольных координат

Для определения положения объектов, вращающихся вместе с Землей, необходимо иметь систему геоцентрических координат, жестко связанную с телом Земли. В качестве такой земной геоцентрической системы координат в настоящее время используется Гринвичская система координат  $OX_G Y_G Z_G$ , которая определяется следующим образом.

Начало координат располагается в центре масс Земли, ось  $OZ_G$  направлена к среднему полюсу (северному) Земли на эпоху 1900 – 1905 гг. Ось  $OX_G$  лежит на линии пересечения плоскостей среднего гринвичского меридиана и среднего экватора 1900 – 1905 гг. Ось  $OY_G$  дополняет систему до правой.

Для перехода от инерциальной истинной звездной системы координат  $X_u, Y_u, Z_u$  к Гринвичской земной системе координат  $X_G, Y_G, Z_G$  и наоборот достаточно знать истинное звездное время  $S(t)$  в Гринвиче и координаты мгновенного полюса  $X_0(t)$  и  $Y_0(t)$  на текущую эпоху  $t$ .

$$\begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} = Pol(t) \cdot PS(t) \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} = \bar{S}(t) \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\text{где } Pol(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p(t) \\ 0 & 1 & -y_p(t) \\ -x_p(t) & y_p(t) & 1 \end{pmatrix}; \quad PS(t) = \begin{pmatrix} \cos S(t) & \sin S(t) & 0 \\ -\sin S(t) & \cos S(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{S}(t) = Pol(t) \cdot PS(t)$$

или

$$\begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} = \bar{S}^T \cdot \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Так как у земных референчных геодезических систем пространственных прямоугольных координат начала располагаются в центре соответствующего референц-эллипсоида (Красовского), а оси практически параллельны осям земной Гринвичской системы координат, то переход от геодезической референчной системы к земной Гринвичской системе и обратно может быть выполнен по формулам (3.40), при этом следует принять

$$\begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

#### 4.2.3. Топоцентрические системы координат

Очень широкое распространение в спутниковой геодезии получили различные топоцентрические системы координат.

Так же как и в геодезии, начало топоцентрических СК обычно выбирается в некоторой точке наблюдений на физической поверхности Земли, которой чаще всего бывает пункт наблюдений ИСЗ. Однако направления осей координат выбираются иначе, чем в геодезии.

Оси таких систем направляются параллельно соответствующим осям заданной геоцентрической системы прямоугольных координат. Отсюда следует, что топоцентрические СК могут быть инерциальными истинными (мгновенными), или средними звездными (небесными), или общеземными.

Пусть начало топоцентрической инерциальной СК  $O^T X^T Y^T Z^T$  (рис. 4.6) находится в точке  $O^T$  земной поверхности, а оси параллельны осям инерциальной геоцентрической системы прямоугольных координат  $O X_u Y_u Z_u$ .

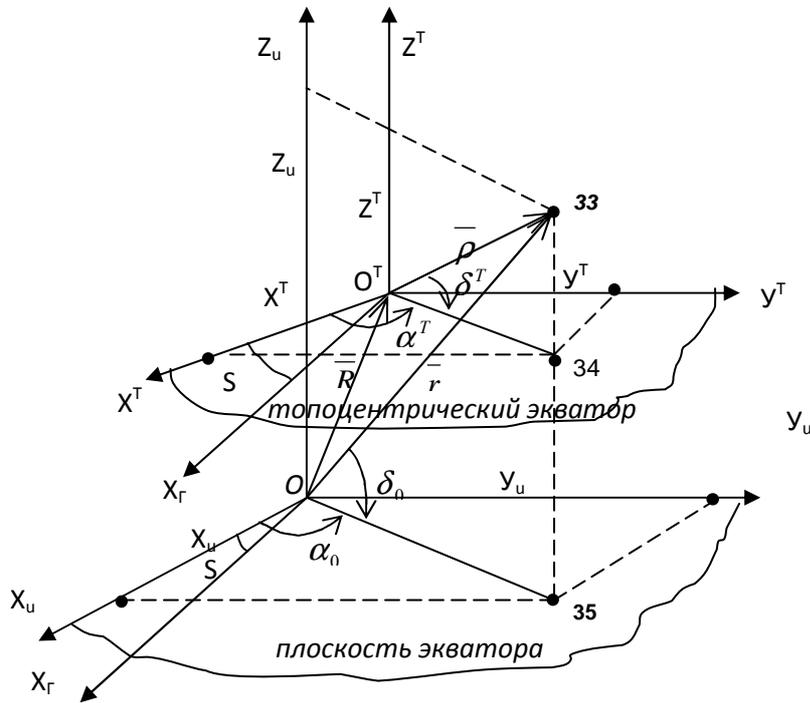


Рис. 4.6. Топоцентрическая СК

Плоскость  $O^T X^T Y^T$ , параллельную плоскости земного экватора  $O X_u Y_u$ , будем называть топоцентрическим экватором.

Предположим, что из измерений на пункте  $O^T$  для некоторого момента  $t$  известны сферические топоцентрические координаты объекта  $Q$ :  $\rho = |\bar{\rho}|$  – топоцентрическое расстояние;  $\alpha^T$  – топоцентрическое прямое восхождение, угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $O^T X^T$  до проекции  $O^T Q^T$  топоцентрического расстояния  $\rho$  на плоскость топоцентрического экватора;  $\delta^T$  – топоцентрическое склонение, угол между топоцентрическим расстоянием

$\rho$  и его проекцией  $O^T Q^T$ . Тогда непосредственно из рис. 4.5 следует

$$\begin{pmatrix} X^T \\ Y^T \\ Z^T \end{pmatrix}_Q = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha^T \cos \delta^T \\ \sin \alpha^T \cos \delta^T \\ \sin \delta^T \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

где  $X^T, Y^T, Z^T$  – топоцентрические прямоугольные координаты точки  $Q$ .

Если обозначить геоцентрические радиус-векторы ИСЗ (точка  $Q$ ) через  $\bar{r}$ , наземного пункта  $O^T$  – через  $\bar{R}$ , а топоцентрический радиус-вектор ИСЗ – через  $\bar{\rho}$ , тогда основное (фундаментальное) уравнение орбитальных методов спутниковой геодезии в векторной форме можно записать

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{\rho}. \quad (4.15)$$

Из этого уравнения следует, что если для одного и того же физического момента времени  $t$  определить на основании теории движения ИСЗ относительно центра масс Земли геоцентрические координаты  $(r = |\bar{r}|, \alpha_0, \delta_0)$ , а по результатам наблюдений на пункте  $O^T$  – топоцентрические координаты  $(\rho = |\bar{\rho}|, \alpha_0, \delta_0)$ , то уравнение (4.15) в координатной форме примет вид

$$\left. \begin{aligned} X_u &= r \cos \alpha_0 \cos \delta_0 - \rho \cos \alpha^T \cos \delta^T; \\ Y_u &= r \sin \alpha_0 \cos \delta_0 - \rho \sin \alpha^T \cos \delta^T; \\ Z_u &= r \sin \delta_0 - \rho \sin \delta^T. \end{aligned} \right\} (4.16)$$

Здесь  $X_u, Y_u, Z_u$  – инерциальные геоцентрические экваториальные прямоугольные координаты наземного пункта наблюдений  $O^T$ .

Если на момент  $t$  известно звездное время  $S$  в Гринвиче, то система инерциальных геоцентрических координат –  $X_u, Y_u, Z_u$  (4.16) наземного пункта наблюдений  $O^T$  легко может быть трансформирована на основании формулы (4.11) в Гринвичскую систему геоцентрических координат  $X_G, Y_G, Z_G$  без учета несовпадения мгновенного и среднего полюсов:

$$\left. \begin{aligned} X_G &= r \cos(\alpha_0 - S) \cos \delta_0 - \rho \cos(\alpha^T - S) \cos \delta^T; \\ Y_G &= r \sin(\alpha_0 - S) \cos \delta_0 - \rho \sin(\alpha^T - S) \cos \delta^T; \\ Z_G &= r \sin \delta_0 - \rho \sin \delta^T. \end{aligned} \right\} (4.17)$$

Переход от Гринвичских прямоугольных к референсным прямоугольным пространственным координатам  $X, Y, Z$  может быть осуществлен по формулам (4.13).

## ГЛАВА 5. КООРДИНАТИЗАЦИЯ ОКРУЖАЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВА В НАЧАЛЕ XXI ВЕКА В РОССИИ

### 5.1. Системы государственных геодезических координат в начале XXI в.

Как было отмечено выше, во второй половине XX в. в Советском Союзе, а затем в России использовалась СК-42 (Пулковская), а в главной высотной основе отсчет шел от Кронштадского футштока (Балтийская система высот). С 2002 г. вместо СК-42 введены две новые системы – ПЗ-90 и СК-95. История создания СК-42, ПЗ-90, СК-95, WGS-84 приведена в разделах 1.3 и 1.4.

#### **Система координат 1942 г. (СК-42)**

Основой этой системы является референц-эллипсоид Красовского. С этим отсчетным эллипсоидом связаны геодезические координаты  $B$ ,  $L$ ,  $H$  и прямоугольные референционные, квазигеоцентрические координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , связь между которыми определяется известными формулами Гельмерта:

$$X = (N + H)\cos B \cos L;$$

$$Y = (N + H)\cos B \sin L;$$

$$Z = (N + H)\sin B - e^2 N \sin B = [N(1 - e^2) + H]\sin B.$$

Начало координат системы Охуз совпадает с центром референц-эллипсоида, ориентированного таким образом, что малая ось параллельна оси вращения Земли, плоскость экватора параллельна плоскости вращения Земли.

В исходном пункте астрономо-геодезической сети (Пулковская обсерватория) геодезические и астрономические широты и долготы, а также азимуты совпадают (отвес совпадает с нормалью). Высота квазигеоида в точке Кронштадского футштока принята равной нулю. Размеры отсчетного эллипсоида Красовского были определены в 1940 г. по результатам градусных определений, выполненных на территориях СССР, Западной Европы и США.

Система координат СК-42 закреплена пунктами АГС и пунктами Главной высотной геодезической основы, которые определены с точностью  $10^{-6}$ . К 1977 г. параметры Земли были уточнены с помощью спутниковых и гравиметрических данных. Было определено, что смещение центра масс Земли относительно центра отсчетного эллипсоида равнялось:  $\Delta X = 24,3$  м;  $\Delta Y = 126,6$  м;  $\Delta Z = 78,2$  м (точность 1 – 1,5 м); карта высот квазигеоида к 1962 г. была построена с ошибкой 4 м (Изв. вузов Геодезия и аэрофотосъемка, 2001, № 1, с. 40 – 52).

#### **Система координат WGS-84**

WGS-84 – мировая геодезическая геоцентрическая СК (начало совпадает с центром масс Земли). Оси этой системы ориентированы по осям общего земного эллипсоида WGS-84:  $OZ$  – направлена к условному земному полюсу, установленному на эпоху 1984 г. Ось  $OX$  находится на пересечении плоскости условного земного экватора и начального меридиана, определенных на эпоху 1984 г. Ось  $OY$  дополняет систему до правой. Начало СК WGS-84 и ее оси совпадают с центром и осями эллипсоида WGS-84. Размеры эллипсоида WGS-84 приведены в табл.5.1. (Изв. вузов, 2001, № 1. – Юркина М.Н., Серебрякова Л.Н.).

Спутниковая навигационная система эфемерид связана с системой координат WGS-84. Их согласование регулярно осуществляется по результатам наблюдений на постоянно действующих станциях мировой сети GPS для геодинамики (IGS – International GPS Service for Geodynamics). Координаты пунктов IGS определены в системе WGS-84.

По результатам лазерной локации спутников и радиоинтерферометрии уточняются координаты следящих станций IGS, которые затем принимаются в качестве более точных и современных реализаций СК WGS-84. Соответственно изменяются и спутниковые эфемериды. Реализация координатной основы (ежегодно) на 150 станциях спутниковой глобальной сети GPS происходит с точностью 12 см (Изв. вузов, 2001, № 1). Точные эфемериды спутниковых глобальных навигационных систем определяются с точностью 0,1 – 0,2 м.

### Система координат ПЗ-90

Эта СК предназначена для функционирования навигационной спутниковой отечественной системы ГЛОНАСС. Система ПЗ-90 геоцентрическая, с ориентацией осей координат, аналогичной WGS-84. Параметры отсчетного общего земного эллипсоида приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Фундаментальные постоянные	ПЗ-90	WGS-84	Установленные комиссией МАГ
Скорость света, $c$			299 792 458 м/с
Угловая скорость вращения Земли, $\omega$			$7\,292\,115 \cdot 10^{-11}$ рад/с
Геоцентрическая гравитационная постоянная, $GM$	$398\,600,44 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$	$398\,600,5 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$	$(398\,600\,441,8 \pm 0,8) \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$
Большая полуось эллипсоида, $a$	6 378 136 м	6 378 137 м	$(6\,378\,136,6 \pm 0,1) \text{ м}$
Полярное сжатие	1 : 298,257839303	1 : 298,257223563	$1 : 298,25231 \pm 0,00001$
Нормальный потенциал, $U_0$	$62\,636\,861,074 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$		$62\,636\,857,0 \pm 1,0 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$
Нормированный зональный гармонический коэффициент гравитационного потенциала, $C_{20}$	$-484,164953 \cdot 10^{-6}$	$-484,16685 \cdot 10^{-6}$	

Дальномерные траекторные наблюдения космической геодезической сети (КГС) и альтиметрические измерения с 1985 г. выполняются с помощью специального геодезического комплекса Гео-ИК. По результатам этих наблюдений, выполненных к 1988 – 1989 гг., в ВТУ ГШ МО была получена координатная система «Параметры Земли – 1990 г.»

Носителями этой СК являются 26 пунктов КГС, расположенных на территории бывшего СССР. К 1993 г. была получена модель гравитационного поля Земли ПЗ-90 (ГПЗ ПЗ-90) в виде разложения геопотенциала по сферическим функциям и созданы детальные каталоги высот квазигеоида над общим земным эллипсоидом (точность высот квазигеоида – 2 м).

В 1999 г. в ЦНИИГАиК были определены параметры связи ПЗ-90 с WGS-84 (и ее более поздними реализациями – ITRF).

В результате продолжавшихся ГЛОНАСС-наблюдений в системе ПЗ-90 появилось две реализации: основная реализация пунктами КГС (ПЗ-90 – КГС) и координатами следящих станций и соответствующими элементами ИСЗ ГЛОНАСС, обозначаемой ПЗ-90 (ГЛОНАСС). С достаточно высокой точностью были определены параметры связи этих двух реализаций ПЗ-90 с WGS-84. Разворот ПЗ-90 этих двух реализаций относительно оси Z (WGS-84) равен соответственно 0,18" и 0,36" (Изв. вузов, 2001, № 1), а между собой – 0,18", что на поверхности эллипсоида дает сдвиг в 4 – 6 м. Помимо этого имеются существенные сдвиги в масштабах (относительно WGS-84), что в определении высот выражается разностью в 1 м. Величины этих погрешностей не отвечают требованиям современности.

### **Система координат СК-95**

Носителями СК-95 являются 164 тыс. пунктов АГС, совместно уравненных с пунктами КГС и ДГС (доплеровской). В результате на всю территорию создана единая координатная основа со средними квадратическими ошибками положения по всей территории в 1 м.

Фундаментальные постоянные и элементы ориентирования СК-95 подобраны с условием наименьшего деформирования относительно СК-42 (для этого в качестве общеземного эллипсоида (ОЗЭ) принят эллипсоид Красовского, а его ориентация такова, что координаты исходного пункта Пулково остаются неизменными. При этом ориентация отсчетного эллипсоида Красовского совпадает с ориентацией ОЗЭ ПЗ-90, а его центр определен относительно центра масс Земли с точностью до 1 м, тем самым обеспечивается возможность взаимосвязи СК-95 с другими геоцентрическими системами. Взаимная ориентация ПЗ-90и СК-95 связана линейными параметрами  $\Delta X = 25,90$  м,  $\Delta Y = 130,94$  м,  $\Delta Z = 81,76$  м.

Балтийская система высот 1977 г. является составной частью СК-95, но при этом необходимо иметь детальные карты высот квазигеоида, полученные с использованием детальной гравиметрической съемки.

Высоты квазигеоида сейчас определяются со средней квадратической ошибкой 3 – 5 см при расстояниях между пунктами 10 – 15 км и 10 – 15 см – при расстояниях до 1 000 км.

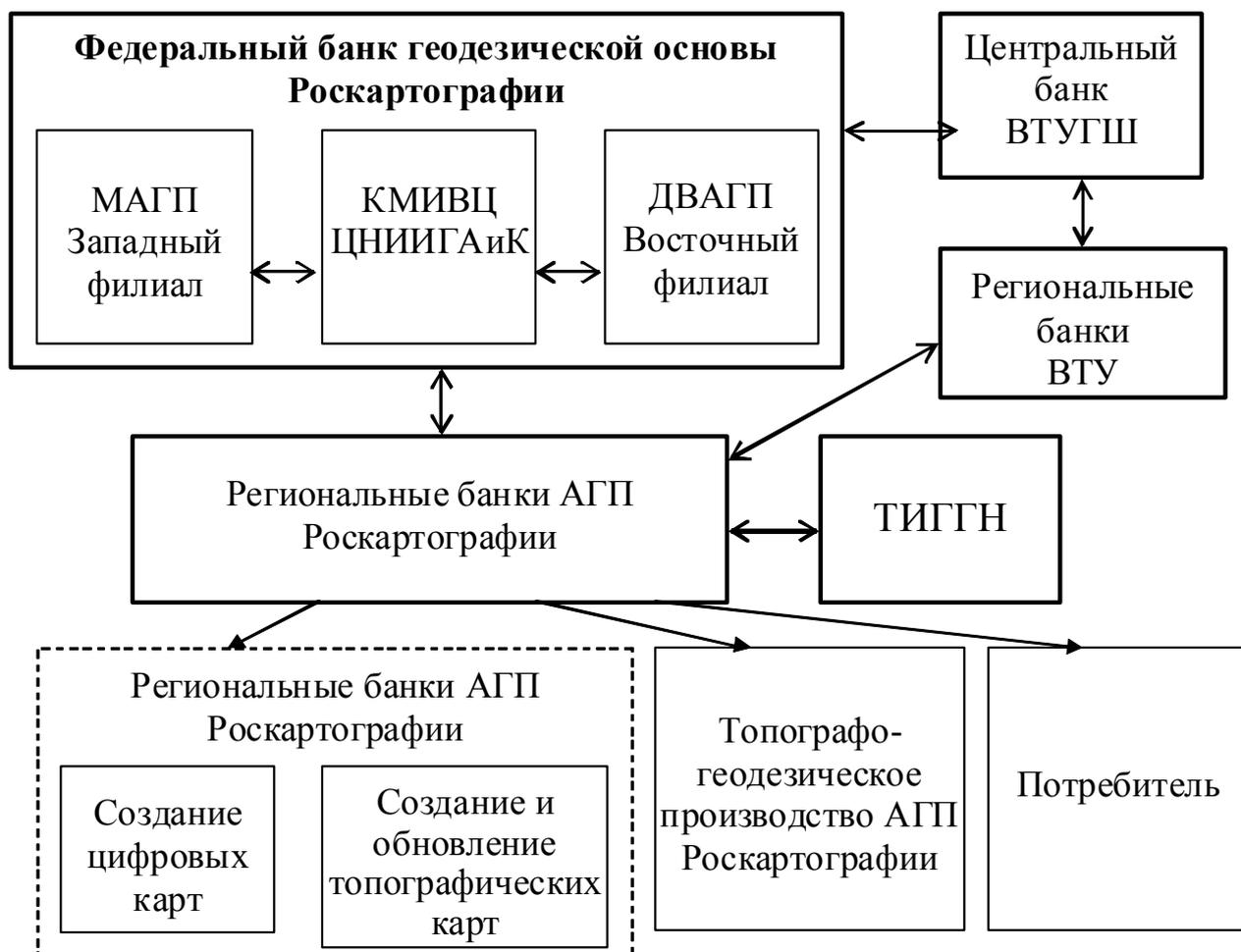
В целом, в СК-95 точность получения координат, по сравнению с СК-42, на большие расстояния возросла на порядок (в 10 – 15 раз), а точность определения взаимного положения – в 2 – 3 раза. Система СК-95 обеспечивает возможность использования в России спутниковых технологий определения координат. Вместе с тем эти и цифровые методы и технологии позволяют максимально автоматизировать весь технологический процесс, начиная от наземных и космических измерений и кончая изготовлением картографической продукции.

Следует отметить, что полное построение СК-95 планируется завершить за 10 лет, когда будет создана Государственная геодезическая сеть в ее обязательных составляющих ФАГС, ВГС и СГС-1 (в значительной степени),

т. е. будет завершено построение ГГС, как это запланировано в Федеральной целевой программе «Геодезия России».

Кстати, в 2003 г. уже составлены и изданы электронные каталоги в системе СК-95 (для отдельных районов).

Для реализации Федеральной целевой программы введения СК-95 в Роскартографии создана сеть банков данных (БД) для автоматизации процессов геодезического и картографического обеспечения в системе координат 1995 г. (рис. 5.1). (Геодезия и картография, 2003, № 10 – А.В. Бородко и др.).



Примечание: КМИВЦ – координационно-методический информационно-вычислительный центр.

Рис. 5.1. Структура сети федеральных БД

## 5.2. Построение Государственной геодезической сети

Согласно опубликованным в № 11 журнала «Геодезия и картография» за 2004 г. «Основным положениям по построению ГГС», современная координатная основа России состоит из следующих построений, входящих в Государственную геодезическую сеть:

- фундаментальная астрономо-геодезическая сеть (ФАГС) – 24 пункта;
- высокоточная геодезическая сеть (ВГС) – 147 пунктов;
- астрономо-геодезическая сеть (АГС) – 164 тыс. пунктов;

- геодезические сети сгущения (ГСС);
- космическая геодезическая сеть (КГС) – 26 пунктов;
- доплеровская геодезическая сеть (ДГС) – 160 пунктов;
- государственная нивелирная сеть, состоящая из главной высотной основы (I, II кл.) и заполняющих сетей – всего около 500 тыс. пунктов;
- государственная гравиметрическая сеть I кл. и фундаментальные гравиметрические пункты.
- специальные геодезические сети.

Иерархическая структура ГГС дана на рис. 5.2 (Геодезия и картография, 2003, № 10).

В настоящее время одной из главных задач Роскартографии стало построение качественно новой высокоточной спутниковой геодезической сети с использованием навигационных систем ГЛОНАСС и GPS. При этом в Роскартографии принята соответствующая концепция перехода на автономные методы спутниковых координатных определений. Переход на эту концепцию означает создание новой структуры ГГС. Ее основу будут составлять ФАГС, ВГС, спутниковая геодезическая сеть 1 кл. (СГС-1) и АГС (самый низший уровень спутниковой геодезической основы). Уже к 1999 г. был составлен проект программы.

В 1999 г. аэрофотогеодезические предприятия начали реализовывать программу, с учетом ориентации СК-95 относительно СК-42. Отличия координат этих систем незначительны. Для экономически развитых районов европейской части России (кроме районов Крайнего Севера) и южных районов Западной Сибири имеющиеся карты масштабов 1 : 25 000 и 1 : 10 000 корректироваться не будут. Что касается карт масштаба 1 : 5 000, то они будут корректироваться только для северо-восточных территорий России.

В 2001 г. закончено построение ФАГС и ВГС в европейской части России. В 2002 г. выполнено наблюдение и велась обработка этих построений для территорий юга Сибири и Дальнего Востока (Хабаровск). В 2003 г. предполагалось завершение ФАГС.

К 2004 г. в России была создана спутниковая сеть из 33 пунктов ФАГС и 176 пунктов ВГС. В ЦНИИГАиК была произведена обработка спутниковой сети, созданной за период 1999 – 2002 гг. Вычисления показали, что точность сети в плане составляет 1 – 2 см, по высоте – 3 – 4 см, а точность взаимного положения определяется величиной 20 см (для расстояний в 500 км) и 50 см (для расстояний в 1 000 км и более), что составляет относительную ошибку –  $5 \cdot 10^{-7}$ .

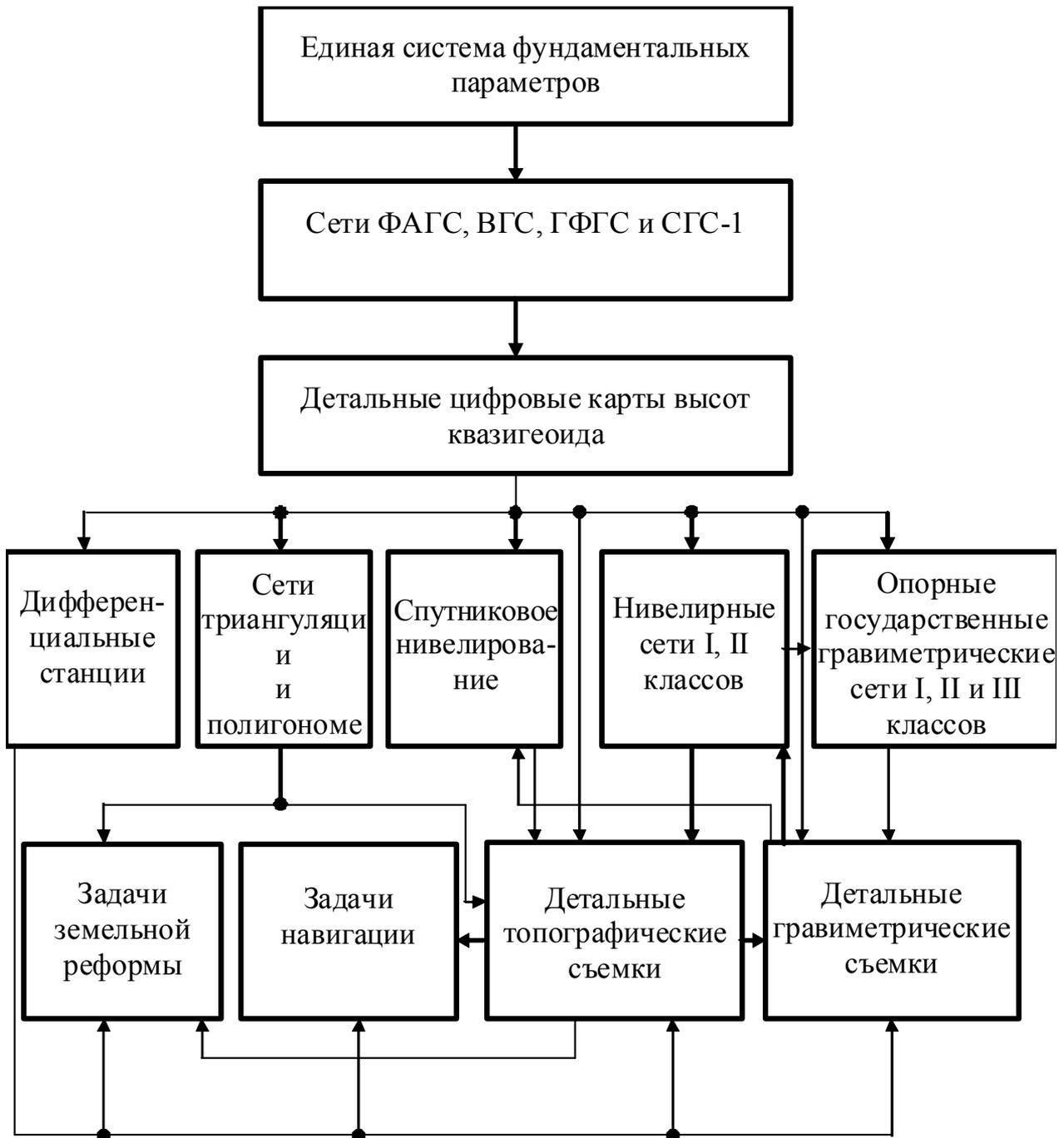


Рис. 5.2. Иерархическая структура системы геодезического обеспечения

В спутниковых методах при позиционировании одновременно с плановым положением определяется высота относительно координатной поверхности (эллипсоида). Таким образом, возникает возможность замены классических методов нивелирования спутниковым. В настоящее время с нескольких АГП проводятся эксперименты по созданию сети пунктов СГС-1, совмещенных с реперами главной высотной основы с целью определения точности спутникового нивелирования. Сейчас ведется уравнивание нивелирных сетей, составляющих главную высотную основу.

Каждый пункт ФАГС и ВГС представляет собой группу из пяти пунктов, взаимосвязанных точными и ГЛОНАСС-, и GPS-измерениями. В этой группе

главный пункт, расположенный в доступном месте, является «рабочим центром». Этот «центр» связан GPS-измерениями с двумя ближайшими нивелирными пунктами Главной высотной основы, с которых на него геометрическим нивелированием II кл. передается значение нормальной высоты. Рабочий центр и нивелирные пункты связываются ГЛОНАСС- и GPS-измерениями с двумя соседними пунктами ГГС, имеющими координаты в системе СК-95.

В основу определения координат в режиме реального времени положен дифференцированный метод, в котором с базовой (опорной) станции по радио или сотовой связи передаются данные по положению базы и результаты ГЛОНАСС- и GPS-измерений. На пунктах ФАГС выполняются абсолютные измерения силы тяжести баллистическим лазерным гравиметром. Эти результаты проецируются на другие пункты.

Успешную реализацию отмеченной выше проблемы построения высокоточной координатной основы необходимо осуществлять путем решения двух задач в рамках межведомственного и международного сотрудничества. Первая задача связана с изучением процессов глобальной геодинамики. В этих целях создана международная сеть постоянного наблюдения ИСЗ для целей геодинамики. Общее число пунктов\* – около 150, в том числе 15 пунктов на территории России (для целей решения проблем Российской академии наук и Госстандарта). В плане этой же задачи предусматриваются на каждом пункте ФАГС определения абсолютной силы тяжести баллистическими лазерными гравиметрами. Точность такого рода наземных определений порядка 0,005 мГал (морских – до 0,05 мГал, судовых – до 0,5 мГал, аэроопределений – 5 мГал).

В плане решения второй задачи предусматривается создание службы точных (апостериорных) эфемерид ИСЗ системы ГЛОНАСС по результатам постоянных наблюдений на пунктах ФАГС.

---

\* 50 из 150 пунктов включены в программу наблюдений спутников системы ГЛОНАСС.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В.Н., Бойко Е.Г., Краснорылов И.И., Машимов М.М., Плахов Ю.В., Урмаев М.С., Яшкин С.Н. Космическая геодезия. – М.: Недра, 1986. – 407 с.
2. Глушков В.В., Насрединов К.К., Шаравин А.А. Космическая геодезия: методы и перспективы развития. – М.: Институт политического и военного анализа, 2002. – 448 с.
3. Государственный стандарт Российской Федерации. Системы координат. Методы преобразования координат. Определения точек. – М.: Госстандарт, 2001.
4. Машимов М.М. Высшая геодезия. Методы изучения фигуры Земли и создания общеземной системы геодезических координат: Учебник. – М.: ВИА, 1991. – 552 с.
5. Машимов М.М. Теоретическая геодезия. – М.: Недра, 1991.
6. Телеганов Н.А., Елагин А.В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем. – Новосибирск: СГГА, 2004. – 238 с.
7. Телеганов Н.А. Решение геодезических задач на эллипсоиде и конформное отображение эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера. – Новосибирск: СГГА, 1996.
8. Тетерин Г.Н. История геодезии с древнейших времен. – Новосибирск: Сибпринт, 2001. – 432 с.
9. Тетерин Г.Н. История геодезии – двадцатый век (Россия, СССР). – Новосибирск: Сибпринт, 2001. – 326 с.
10. Тетерин Г.Н. История развития геодезии. – Новосибирск: СГГА, 1999. – 276 с.
11. Тетерин Г.Н. Принципы, критерии, законы развития геодезии. – Новосибирск: Сибпринт, 2002. – 104 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рабочие формулы:

$$N_i = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i} \quad (i = 1, 2);$$

$$\sigma = \arctg[(S \sin Z_{12}) / (S \cos Z_{12} + N_1 + H_1)];$$

$$d = (S \cos Z_{12} + N_1 + H_1) / \cos \sigma;$$

$$\varphi_2 = \arcsin(\cos \sigma \sin B_1 + \sin \sigma \cos B_1 \cos A_{12});$$

$$\Delta L = \arcsin[\sin \sigma \sin A_{12} / \cos \varphi_2]; \quad L_2 = L_1 + \Delta L;$$

$$\Delta = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1);$$

$$B_2 = \arctg[tg \varphi_2 + \Delta / (d \cos \varphi_2)];$$

$$H_2 = d \cos \varphi_2 / \cos B_2 - N_2.$$

1	$B_1$	48° 32' 11.654"	27	$\Delta L$	00° 12' 27.952"
2	$L_1$	85° 46' 22.309"	28	$L_2$	<b>85° 58' 50.261"</b>
3	$H_1$	492.365 м	29	$N_2'$	6 390 320.337
4	$A_{12}$	43° 15' 16.82"	30	$\Delta'$	72.1434
5	$Z_{12}$	90° 43' 59.21"	31	$B_2'$	48° 40' 57.384"
6	$S$	22 329.204 м	32	$N_2''$	6 390 320.495
7	$a$	6378245 м	33	$\Delta''$	72.3552
8	$e^2$	$6.69342162 \cdot 10^{-3}$	34	$B_2''$	48° 40' 57.389"
			35	$N_2'''$	6 390 320.495
9	$\sin B_1$	0.749378503	36	$\Delta'''$	72.3558
10	$\cos B_1$	0.662141872	37	$B_2'''$	<b>48° 40' 57.389"</b>
11	$\cos A_{12}$	0.728315093			
12	$\sin Z_{12}$	0.999918142	38	$\cos B_2$	0.660229681
13	$\cos Z_{12}$	-0.012794902	39	$H_2$	<b>245.734 м</b>
14	$S \cos Z_{12} + N_1 + H_1$	6 390 472.878			
15	$N_1$	6 390 266.213			
16	$S \cos Z_{12}$	-285.6999			
17	$S \sin Z_{12}$	22327.376			
18	$\sigma$	0.003493839			
19	$\cos \sigma$	0.999993896			
20	$d$	6 390 511.882			
21	$\sin \sigma$	0.003493832			
22	$\varphi_2$	48° 40' 55.847"			
23	$\sin \varphi_2$	0.751058821			
24	$\cos \varphi_2$	0.660235296			
25	$tg \varphi_2$	1.13756236			
26	$\sin A_{12}$	0.685242380			

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рабочие формулы:

$$N_i = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i} \quad (i = 1, 2);$$

$$\Delta = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1);$$

$$\gamma = \arctg[(\Delta \cos B_2) / (N_2 + H_2 - \Delta \sin B_2)];$$

$$d = (N_2 + H_2 - \Delta \sin B_2) / \cos \gamma; \quad \varphi_2 = B_2 - \gamma;$$

$$\sigma = \arctg[(\sin B_1 \operatorname{tg} \varphi_2 / \sin(L_2 - L_1) + \cos B_1 \operatorname{ctg}(L_2 - L_1)) \sin A_{12}];$$

$$A_{12} = \arctg[\sin(L_2 - L_1) \cos \varphi_2 / (\cos B_1 \sin \varphi_2 - \sin B_1 \cos \varphi_2 \cos(L_2 - L_1))];$$

$$Z_{12} = \arctg[\operatorname{ctg} \sigma - (N_1 + H_1) / (d \sin \sigma)];$$

$$S = d \sin \sigma / \sin Z_{12}.$$

1	$B_1$	48° 32' 11.654"	22	$\cos \gamma$	1.000000000
2	$B_2$	48° 40' 57.389"	23	$d$	6 390 511.885
3	$L_1$	85° 46' 22.309" 85°	24	$\sin \varphi_2$	0.751058821
4	$L_2$	58' 50.261"	25	$\cos \varphi_2$	0.660235296
5	$L_2 - L_1$	00° 12' 27.952"	26	$\sigma$	00° 12' 00.656"
6	$H_1$	492.365 м	27	$\sin \sigma$	0.003493831
7	$H_2$	245.734 м	28	$\operatorname{ctg} \sigma$	286.2170198
8	$a$	6378245 м	29	$(N_2 + H_2) / (d \sin \sigma)$	286.2298156
9	$e^2$	$6.69342162 \cdot 10^{-3}$	30	$Z_{12}$	<b>90° 43' 59.26"</b>
			31	$\sin Z_{12}$	0.999918138
			32	$d \sin \sigma$	22327.3685
			33	$A_{12}$	<b>43° 15' 16.89"</b>
10	$\sin B_1$	0.749378503			
11	$\cos B_1$	0.662141872			
12	$\sin B_2$	0.751063757	34	S	<b>22329.196 м</b>
13	$\cos B_2$	0.660229681			
14	$\sin(L_2 - L_1)$	0.003626165			
15	$\cos(L_2 - L_1)$	0.999993425			
16	$N_1$	6 390 266.213			
17	$N_2$	6 390 320.495			
18	$\Delta$	72.3558			
19	$N_2 + H_2 - \Delta \sin B_2$	6 390 511.885			
20	$\gamma$	00° 00' 01.542"			
21	$\varphi_2$	48° 40' 55.847"			

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ  
*B, L, H* В ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ *X, Y, Z*

Рабочие формулы:

$$X = (N + H) \cos B \cos L;$$

$$Y = (N + H) \cos B \sin L;$$

$$Z = (N + H) \sin B - e^2 N \sin B;$$

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

<i>B</i>	48° 40' 57.389"	sin <i>L</i>	0.997540408
<i>L</i>	85° 58' 50.261"	cos <i>L</i>	0.070093750
<i>H</i>	245.734 м	( <i>N</i> + <i>H</i> )	6390566.229
<i>a</i>	6378245 м	<i>e</i> <sup>2</sup> <i>N</i> sin <i>B</i>	32125.3322
<i>e</i> <sup>2</sup>	6.693421623 · 10 <sup>-3</sup>	<b>X</b>	<b>295742.459 м</b>
sin <i>B</i>	0.751063757	<b>Y</b>	<b>4208863.890 м</b>
cos <i>B</i>	0.660229681	<b>Z</b>	<b>4767597.349 м</b>
<i>N</i>	6390320.495 м		

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ X, Y, Z В ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ B, L, H**

Рабочие формулы:

$$D = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = (N + H) \cos B;$$

$$L = \arctg(Y / X);$$

$$\bar{e} = \frac{e^2}{(1 + H / N)};$$

$$B = \arctg[Z / (D(1 - \bar{e}))];$$

$$H = D / \cos B - N; \quad N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

X	295742.459	H'	246.647 м
Y	4208863.890	$\bar{e}'$	0.006693163
Z	4767597.349	$D(1 - \bar{e}')$	4191001.429
a	6378245 м	B''	48° 40' 57.389"
e <sup>2</sup>	6.693421623 · 10 <sup>-3</sup>	N''	6390320.495
D	4219241.501	H''	245.732 м
L	<b>85° 58' 50.261"</b>	$\bar{e}''$	0.006693164
$D(1 - e^2)$	4191000.337	$D(1 - \bar{e}'')$	4191001.426
B'	48° 40' 57.415"	B'''	<b>48° 40' 57.389"</b>
N'	6390320.499	H'''	<b>245.732 м</b>
cosB'	0.660229586		

**ПРИЛОЖЕНИЕ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ X, Y, Z СК-42 В КООРДИНАТЫ СИСТЕМЫ ПЗ-90**

Рабочие формулы:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ-90} = \begin{pmatrix} 1 & -3.20 \cdot 10^{-6} & 1.70 \cdot 10^{-6} \\ 3.20 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ -1.70 \cdot 10^{-6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{СК-42} + \begin{pmatrix} 25 \\ -141 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$X_{42}$	295742.459	$X_{ПЗ-90}$	295762.082
$Y_{42}$	4208863.890	$Y_{ПЗ-90}$	4208723.836
$Z_{42}$	4767597.349	$Z_{ПЗ-90}$	4767516.847

Преобразование пространственных прямоугольных координат X, Y, Z системы ПЗ-90 в координаты СК-42.

Рабочие формулы:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{СК-42} = \begin{pmatrix} 1 & 3.20 \cdot 10^{-6} & -1.70 \cdot 10^{-6} \\ -3.20 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 1.70 \cdot 10^{-6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ-90} - \begin{pmatrix} 25 \\ -141 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$X_{ПЗ-90}$	295762.082	$X_{СК-42}$	295742.459
$Y_{ПЗ-90}$	4208723.836	$Y_{СК-42}$	4208863.890
$Z_{ПЗ-90}$	4767516.847	$Z_{СК-42}$	4767597.349

Преобразование координат X, Y, Z из системы ПЗ-90 в координаты референционной системы СК-95

Рабочие формулы:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{СК-95} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ-90} - \begin{pmatrix} 25.90 \\ -130.94 \\ -81.76 \end{pmatrix}$$

$X_{ПЗ-90}$	295762.082	$X_{СК-95}$	295736.182
$Y_{ПЗ-90}$	4208723.836	$Y_{СК-95}$	4208854.776
$Z_{ПЗ-90}$	4767516.847	$Z_{СК-95}$	4767598.607

**ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕФЕРЕНЦНОЙ СИСТЕМЫ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ  $B, L, H$  В СИСТЕМУ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ  
КООРДИНАТ ПЗ-90  $B_0, L_0, H_0$**

Рабочие формулы:

$$B_0 = B + \Delta B;$$

$$L_0 = L + \Delta L;$$

$$H_0 = H + \Delta H.$$

Формулы для вычисления  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$  приведены на стр. 99, формулы 3.20 – 3.22.

B	48° 40' 57.389"	$x_0 \cos L$	1.75234
L	85° 58' 50.261"	$x_0 \sin L$	24.93851
H	245.734 м	$y_0 \sin L$	-140.65319
$a_{cp}$	6378191 м	$y_0 \cos L$	-9.88322
$e^2_{cp}$	$6.693894 \cdot 10^{-3}$	$z_0 \sin L$	-60.08510
$x_0$	25.0 м	$z_0 \cos L$	-52.81837
$y_0$	-141.0 м	$\omega_x \sin L$	0
$z_0$	-80.0 м	$\omega_y \cos L$	-0.02453
$\omega_x$	0.00"	$\omega_x \cos L$	0
$\omega_y$	-0.35"	$\omega_y \sin L$	-0.34914
$\omega_z$	-0.66"	$(x_0 \cos L + y_0 \sin L)$	-138.90085
$\Delta a$	-109.0 м	$(\omega_x \sin L - \omega_y \cos L)$	0.02453
$\Delta e^2$	$94457 \cdot 10^{-11}$	$(y_0 \cos L - x_0 \sin L)$	-34.82173
$\Delta m$	0.00	$(\omega_x \cos L + \omega_y \sin L)$	-0.34914
		$Ne^2 \sin B \cos B$	21211.4180
		$(1 + e^2 \cos 2B)$	0.99914
$\sin B$	0.7510638	$\Delta B$	1.7281"
$\cos B$	0.6602297	<b><math>B_0</math></b>	<b>48° 40' 59.117"</b>
$\sin L$	0.9975404	$\Delta L$	-1.4370
$\cos L$	0.0700938	<b><math>L_0</math></b>	<b>85° 58' 48.824"</b>
$tg B$	1.1375795	$\Delta H$	-40.314
$\sin 2B$	0.9917492	<b><math>H_0</math></b>	<b>204.420 м</b>
$\cos 2B$	-0.1281935		
M	6371550		
N	6390267		
a/N	0.9981102		
1 - e <sup>2</sup>	0.9933061		
N+H	6390513		
M+H	6371796		

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ СИСТЕМЫ S, Z<sub>Г</sub>, A В ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИЕ  
ГОРИЗОНТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ X<sup>T</sup>, Y<sup>T</sup>, Z<sup>T</sup>

Рабочие формулы:

$$X^T = S \sin Z_{\Gamma} \cos A;$$

$$Y^T = S \sin Z_{\Gamma} \sin A;$$

$$Z^T = S \cos Z_{\Gamma}.$$

S	22 329.204 м
Z <sub>Г</sub>	90° 43' 59.21"
A	43° 15' 16.82"
sinZ <sub>Г</sub>	0.999918141
cosZ <sub>Г</sub>	-0.012794902
sinA	0.685242383
cosA	0.728315093
<b>X<sup>T</sup></b>	<b>16261.365 м</b>
<b>Y<sup>T</sup></b>	<b>15299.664 м</b>
<b>Z<sup>T</sup></b>	<b>-285.700 м</b>

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ ГОРИЗОНТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ  $X^T, Y^T, Z^T$  В ПОЛЯРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ –  $S, Z_\Gamma, A$

Рабочие формулы:

$$D = \sqrt{(X^T)^2 + (Y^T)^2} = S \sin Z_\Gamma;$$

$$A = \arctg\left(\frac{Y^T}{X^T}\right); \quad Z_\Gamma = \text{arcctg}\left(\frac{Z^T}{D}\right);$$

$$S = \frac{D}{\sin Z_\Gamma}.$$

$X^T$	16261.365 м	$Z_\Gamma$	<b>90° 43' 59.21"</b>
$Y^T$	15299.664 м		
$Z^T$	-285.700 м	$\sin Z_\Gamma$	0.999918141
		<b>S</b>	<b>22 329.204 м</b>
D	22 327.3758		
<b>A</b>	<b>43° 15' 16.82"</b>		
$Z^T/D$	-0.01279595		

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ ГОРИЗОНТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ  $X^T, Y^T, Z^T$  В ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ  $X, Y, Z$

Рабочие формулы:

$$N_0 = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0};$$

$$X = [(Z^T + N_0 + H_0) \cos B_0 - X^T \sin B_0] \cos L_0 - Y^T \sin L_0;$$

$$Y = [(Z^T + N_0 + H_0) \cos B_0 - X^T \sin B_0] \sin L_0 + Y^T \cos L_0;$$

$$Z = [(Z^T + N_0 + H_0) \sin B_0 + X^T \cos B_0] - e^2 N_0 \sin B_0.$$

Здесь  $B_0, L_0, H_0$  – геодезические координаты начала топоцентрической СК.

$B_0$	48° 32' 11.654"
$L_0$	85° 46' 22.309"
$H_0$	492.365 м
$X^T$	16261.365 м
$Y^T$	15299.664 м
$Z^T$	-285.700 м
$a$	6378245 м
$e^2$	$6.69342162 \cdot 10^{-3}$
$N_0$	6 390 266.213
$\sin B_0$	0.749378503
$\cos B_0$	0.662141872
$\sin L_0$	0.997279678
$\cos L_0$	0.073710536
$e^2 N_0 \sin B_0$	32052.976
$Z^T + N_0 + H_0$	6 390 472.878
$X^T \sin B_0$	12185.9174
$X^T \cos B_0$	10767.3307
$Y^T \sin L_0$	15258.0440
$Y^T \cos L_0$	1127.7464
<b>X</b>	<b>295742.464 м</b>
<b>Y</b>	<b>4208863.883 м</b>
<b>Z</b>	<b>4767597.353 м</b>

**ПРИЛОЖЕНИЕ 10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ  $B, L$  В ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ  
КООРДИНАТЫ ГАУССА – КРЮГЕРА  $X, Y$**

Рабочие формулы:

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad \eta^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B;$$

$$n = \text{trunc}(L/6) + 1; \quad L_0 = 6n - 3; \quad l = (L - L_0)'' / \rho'';$$

$$x = \bar{X} + \frac{l^2 N \cos B \sin B}{2} \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{12} (5 - \text{tg}^2 B + 9\eta^2) + \dots \right\};$$

$$y = lN \cos B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6} (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) + \dots \right\};$$

$$\bar{X} = 6367558.497 \cdot B^{(pad)} - 16036.480 \sin 2B + 16.828 \sin 4B + 0.0218 \sin 6B.$$

B	48° 40' 57.389"
L	85° 58' 50.261"
n	15
L <sub>0</sub>	87°
a	6378245 м
e <sup>2</sup>	6.69342162 · 10 <sup>-3</sup>
sinB	0.751063757
sin2B	0.99174917
sin4B	-0.254272
sin6B	-0.92655
cosB	0.660229681
cos <sup>2</sup> B	0.43590323
tg <sup>2</sup> B	1.2940871
l°	-1° 01' 09.739"
l	-0.0177913967
N	6390320.495
η <sup>2</sup>	0.00293734
lcosB	-0.011746408
lNcosB	-75063.313
$\bar{X}$	5394426.459
x - $\bar{X}$	501.537
<b>x</b>	<b>5394927.996 м</b>
<b>y</b>	<b>-75062.810 м</b>

**ПРИЛОЖЕНИЕ 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
КООРДИНАТ ГАУССА – КРЮГЕРА X, Y В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ B, L**

Рабочие формулы:

$$N_x = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_x}; \quad \eta_x^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B_x;$$

$$V_x^2 = 1 + \eta_x^2; \quad L_0 = 6n - 3; \quad B_0'' = 3.239307599 \cdot 10^{-2} \cdot x_{(M)};$$

$$B_x = B_0 + (B_x - B_0); \quad (B_x - B_0)'' = (519.4752'' + 1.5263'' \cos 2B_0 - 0.0061'' \sin^2 2B_0) \sin 2B_0;$$

$$B = B_x - \rho \frac{y^2 V_x^2 \operatorname{tg} B_x}{2N_x^2} \left[ 1 - \frac{y^2}{12N_x^2} (5 + 3\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) \right];$$

$$l'' = \rho'' \frac{y}{N_x \cos B_x} \left[ 1 - \frac{y^2}{6N_x^2} (1 + 2\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2) \right]; \quad L = L_0 + l.$$

x	5394927.996 м
y	-75062.810 м
a	6378245.0 м
e <sup>2</sup>	0.00669342162
e <sup>2</sup> /(1-e <sup>2</sup> )	0.0067385254
L <sub>0</sub>	87°
B <sub>0</sub> ''	174758.3125''
B <sub>0</sub> °	48° 32' 38.3125''
sin2B <sub>0</sub>	0.99235791
cos2B <sub>0</sub>	-0.123393
(B <sub>x</sub> -B <sub>0</sub> )''	515.3125''
(B <sub>x</sub> -B <sub>0</sub> )°	0° 08' 35.3125''
B <sub>x</sub>	48° 41' 13.625''
cosB <sub>x</sub>	0.660170559
sinB <sub>x</sub>	0.75111572
tgB <sub>x</sub>	1.13776010
η <sub>x</sub> <sup>2</sup>	0.002936819
V <sub>x</sub> <sup>2</sup>	1.002936819
N <sub>x</sub>	6390322.172
y/N <sub>x</sub>	-0.0117463264
ρ y/N <sub>x</sub>	-2422.8538
B-B <sub>x</sub>	-16.236''
<b>B</b>	<b>48° 40' 57.389''</b>
l''	-3669.739''
l°	-1° 01' 09.739''
<b>L</b>	<b>85° 58' 50.261''</b>

(Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2001, № 1, с. 40 – 52.)